



TARTU ÜLIKOOL
FÜÜSIKA INSTITUUT

Loengukonspekt aines

Analüütiline mehaanika

LOFY.04.002

HARDI VEERMÄE, TEET ÖRD

19. oktoober 2011. a.

Sisukord

0	Eessõna	3
1	Newtoni mehaanika	4
1.1	Liikumine eukleidilises ruumis	4
1.1.1	Eukleidilise ruumi mõiste	4
1.1.2	Koordinaatsüsteemid	5
1.1.3	Punktosakese kinemaatika	5
1.1.4	Tasase absoluutse ruumi rakendatavuse piirid*	6
1.2	Inertsiaalne taustsüsteem	7
1.3	Newtoni aksioomid (seadused)	7
1.4	Liikumisvõrrandid	8
1.5	Galilei teisendused	9
1.6	Galilei relatiivsuspriintiip	10
1.7	Liikumisintegraalid	11
1.8	Osakeste süsteem	13
2	Lagrange'i formalism	18
2.1	Seosed ja reaktsioonijõud	18
2.2	Virtuaalne nihe	19
2.3	Virtuaalse töö printsiip	20
2.4	d'Alembert'i printsiip	21
2.5	Liikumisvõrrandid üldistatud koordinaatides	21
2.6	Üldistatud impulss ja üldistatud energia	25
2.6.1	Üldistatud impulss ja selle jäävus	25
2.6.2	Üldistatud energia ja selle jäävus	25
2.7	Näide: punktmass konservatiivses jõuväljas	26
2.8	Kiirusest sõltuv üldistatud potentsiaal. Laetud osake elektromagnetväljas	28
2.9	Dissipatsioon	29

3	Vähima mõju printsiip	31
3.1	Sissejuhatus	31
3.2	Lagrange võrrandite tuletamine vähima mõju printsiibist	32
3.2.1	Meenutus funktsiooni ekstreemumpunktide leidmisest	32
3.2.2	Mõjufunktsionaali varieerimine	33
3.3	Klassikaliste osakeste süsteemi Lagrange'i funktsioon	33
3.3.1	Vaba klassikalise osakese Lagrange'i funktsioon	34
3.3.2	Klassikaliste osakeste suletud süsteemi Lagrange'i funktsioon	35
3.3.3	Klassikaliste osakeste avatud süsteemi Lagrange'i funktsioon	36
3.4	Noetheri teoreem mehaanikas	38
3.4.1	Impulsi jäävuse seadus ja sümmeetria ruumiliste nihete suhtes	39
3.4.2	Impulsimomendi jäävuse seadus ja sümmeetria pöörete suhtes*	40
3.4.3	Energia jäävuse seadus ja sümmeetria ajaliste nihete suhtes	41
3.5	Kiirusest sõltuvad seosed	43
4	Hamiltoni formalism	44
4.1	Üldised kaalutlused	44
4.2	Legendre'i teisendus ja Hamiltoni võrrandid	46
4.2.1	Näide: ühemõõtmeline harmooniline ostsillaator erinevates formalismides	48
4.3	Kanoonilised teisendused	48
4.3.1	Kanooniline teisendus genereeriva funktsiooni abil	49
4.3.2	Ajast sõltumatu kanooniline teisendus	51
4.3.3	Hamilton-Jacobi võrrand	52
4.4	Poisson'i sulud	53
4.4.1	Poisson'i sulgude omadused	53
4.4.2	Jäävusseaduste esitamine Poisson'i sulgude abil	54
4.4.3	Hamiltoni võrrandite esitamine Poisson'i sulgude abil	54
A	Ülesanded	55
A.1	Harjutustund 1	55
A.2	Harjutustund 2	57
A.3	Harjutustund 3	59
A.4	Harjutustunnid 4 ja 5	61
A.5	Harjutustund 6	66
	Indeks	69

Mõningad tähistused

N - osakeste arv süsteemis

n - osakese indeks, $n = 1, 2, \dots, N$

k - seoste arv

α - seose indeks, $\alpha = 1, 2, \dots, k$

s - üldistatud koordinaatide arv, $s = 3N - k$

j - üldistatud koordinaatide indeks, $j = 1, 2, \dots, s$

\mathbf{r} - vektor

0 Eessõna

Käesolevas kursuses võetakse kokku klassikalise mehaanikateooria areng veidi rohkema kui kolme sajandi jooksul alustades Newtonist (1643-1726) jätkates Euleri (1707 - 1783), d'Alembert'i (1717 - 1783), Lagrange'i (1736 - 1813), Legendre'i (1752-1833), Jacobi' (1804 - 1851), Hamiltoni (1805 - 1865), Noetheri (1882 - 1935) ja veel paljude füüsikutega, kelle nimesid siinkohal ette pole loetud. Kursus on jagatud nelja ossa:

1. *peatükk* kujutab endast ülevaadet Newtoni mehaanikast, millega kuulaja on eeldatavasti osaliselt tuttav.

2. *peatükis* formuleeritakse d'Alembert'i printsiip, mille abil tuletatakse Lagrange'i võrrandid, juhatades seeläbi sisse Lagrange'i formalism. Vaadeldakse Lagrange'i võrrandite rakendusi ning üldistusi.

3. *peatükis* käsitletakse Lagrange'i formalismi, lähtudes vähima mõju printsiibist. Samuti tutvutakse siin Noetheri teoreemiga.

4. *peatükk* annab ülevaate Hamiltoni meetodist.

Konspekti ülesehitus pole täiesti lineaarne. Antud kursuse matemaatiline materjal on koondatud konspekti lõpus asuvatesse matemaatilistesse lisadesse. Kuigi põhitekstis, mis keskendub valdavalt füüsikateooriale, on üritatud suuri lünki vältida, on seal tarvilik matemaatilise aparatuuri lahtiseletamisele minimaalselt ruumi kulutatud.

1 Newtoni mehaanika

Käesolev peatükk võtab kokku teooria baasi klassikalises mehaanikas. Peatükk algab lühikokkuvõttega kinemaatikast. Edasi käsitletakse Galilei relatiivsuspriintiipi, Newtoni seaduseid ja nende rakendamist ühe ja mitme osakese süsteemide dünaamika kirjeldamiseks. Vaadeldakse energia, impulsi ja impulsimomendi jäävust Newtoni mehaanika kontekstis. Newtoni mehaanika all mõistetakse siin liikumisvõrrandite esitamist lähtudes Newtoni seadustest ¹.

1.1 Liikumine eukleidilises ruumis

1.1.1 Eukleidilise ruumi mõiste

Enne, kui saab rääkida liikumise kirjeldamisest ehk kinemaatikast, tuleb selgitada, kuidas kirjeldatakse keha asukohta. Unustame hetkel, et füüsikalised objektid on lõpliku suurusega, et neil on kuju ja orientatsioon ning mõlemad omadused võivad ajas muutuda. Antud alajaotuses käsitleme vaid abstraktseid punktisarnaseid objekte. Füüsikaliselt võivad sellisteks objektides olla kehad, mille mõõtmel on uuritavat protsessi iseloomustaval skaalal tühiselt väikesed, näiteks planeetide tiirlemisel ümber Päikese võib planeete lugeda punktmassideks. Samuti võime kehade asukoha all mõista neile mõne iseloomuliku punkti nagu massi- või raskuskeskme asukohta ja ignoreerida kehade ruumilisest ulatusest tulenevaid efekte, kui nende mõju on uuritava olukorra jaoks ebaoluline.

Keha asukohta on võimalik määrata mõõtes keha kaugust fikseeritud objektidest ja/või nurki teatud fikseeritud suundade vahel. Füüsikalise ruumi all võib mõista kõikvõimalike asukohtade kogumit, ent sisukas kvantitatiivne füüsikalise ruumi mudel peab võimaldama ka kauguste ja nurkade arvutamist. Kolmedimensionaalses ruumis saab asukohti kirjeldada arvukolmikuna (x_1, x_2, x_3) . Neid arve nimetatakse punkti *koordinaatideks* ja see, millise tõlgenduse me neile arvudele anname sõltub *koordinaadisüsteemi* valikust. Koordinaat ise ei pruugi omada mingisugust füüsikalist sisu, see on lihtsalt üks viis keha asukoha tähistamiseks.

Klassikalises füüsikas on ruum pidev ja tasane ning seega ka ühesugune igas suunas (isotroopne) ja igas punktis (homogeenne). Matemaatiliselt kirjeldab sellist füüsikalist ruumi eukleidiline ruum, mille definitsioon võiks kõlada järgmiselt: *Eukleidiline ruum on lõplikumõõtmeline skalaarkorrutisega vektorruum üle reaalarvude.*

Et füüsikaline ruum on kolmemõõtmeline, siis vaatame edaspidi vaid kolmemõõtmelisi eukleidilisi ruume. Proovime ülaltoodud definitsiooni lühidalt lahti mõtestada: vektorruumi mõistega peaks lugeja juba tuttav olema. Väljend „üle reaalarvude“ tähendab lihtsalt seda, et vektori komponentideks (või punkti koordinaatideks) on reaalarvud.

Vektorruumist saab eukleidiline ruum, kui viimane on varustatud skalaarkorrutisega, mis seab kahele vektorile teatud kindlal viisil vastavusse reaalarvu. Skalaarkorrutis sisaldab informatsiooni ruumi geomeetria kohta - see võimaldab määrata kauguseid ja nurki, mida saab interpreteerida vastavalt füüsikaliste kauguste ja nurkadena.

¹Liikumisvõrrandid määrab Newtoni II seadus: $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$

1.1.2 Koordinaatsüsteemid

Punkti asukohta eukleidilises ruumis on lähtuvalt selle vektorruumi struktuurist loomulik kirjeldada *kohavektoriga*, mille komponendid on määratud mõnes *ristkoordinaadistikus* ehk *Cartesiuse koordinaadistikus*. Ristkoordinaadistiku määramiseks tuleb fikseerida koordinaadistiku alguspunkt ja ortogonaalsed baasivektorid $\mathbf{e}_x \equiv \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_y \equiv \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_z \equiv \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, mis määravad koordinaattelgede suuna. Kohavektor on seega esitatav kujul²

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \quad (1.1.1)$$

kus koordinaadid x, y, z on vastavale koordinaatteljele projitseeritud kohavektori pikkused:

$$x = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_x, \quad y = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_y, \quad z = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z. \quad (1.1.2)$$

Punktide \mathbf{r}_1 ja \mathbf{r}_2 vaheline kaugus $d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ avaldub ristkoordinaadistikus lähtuvalt Pythagorase teoreemist kujul

$$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (1.1.3)$$

ja vektorite \mathbf{v} ning \mathbf{w} vaheline nurk $\theta \equiv \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ määratakse seosest

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|}. \quad (1.1.4)$$

Ülemineku ühest ristkoordinaadistikus teise saab alati teostada alguspunkti nihke ja koordinaattelgede pööramise kaudu. Üleminekul uude koordinaadisüsteemi, mille alguspunkt vanas koordinaadistikus on \mathbf{r}_0 ja uus baas on $\mathbf{e}'_j = \sum_i O_{ji}\mathbf{e}_i$, kus O_{ij} on ortogonaalmaatriks (st rahuldab tingimust $\sum_i O_{ik}O_{jk} = \delta_{ij}$), teiseneb kohavektor \mathbf{r} järgmiselt:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = O(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (1.1.5)$$

Ristkoordinaatide kõrval on mõnikord otstarbekam kasutada *kõverjoonelisi koordinaate*. Enim kasutatakse *sfäärilisi koordinaate* (nt. tsentraalsümmeetrilise potentsiaaliga probleemide korral) ja *silindrilisi koordinaate* (nt. telgsümmeetriliste potentsiaalidega probleemides).

Juhul, kui pole öeldud vastupidist, peetakse edaspidises koordinaadisüsteemi all vaikimisi silmas just Cartesiuse koordinaadistikku.

1.1.3 Punktosakese kinemaatika

Punktosakese liikumist kirjeldab selle *trajektoori* - tee, mida osake aja möödudes ruumis läbib. Trajektoori võib kirjeldada *parameetrilise joonena*, st kohavektori funktsioonina ajast:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)). \quad (1.1.6)$$

Punktosakese *kiirusvektor* on vastavalt kohavektori esimene tuletis aja järgi³:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \quad (1.1.7)$$

²Edaspidises kasutatakse ka tähistust $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

³Punkt tähistab aja järgi täistuletise võtmist ($\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$).

Kiirusvektori pikkust $v(t) \equiv \|\mathbf{v}(t)\|$ nimetatakse *kiiruseks*.

Kiirendusvektori annab kohavektori teine tuletis aja järgi või samaväärselt kiiruse esimene tuletis aja järgi:⁴

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)). \quad (1.1.8)$$

Kiirendusvektori pikkust $a(t) \equiv \|\mathbf{a}(t)\|$ nimetatakse *kiirenduseks*.

Kiiruse ja kiirenduse võib lahti kirjutada *kaasaliikivas ehk lokaalses koordinaadistikus*, kui

$$\mathbf{v} = v\mathbf{t}, \quad \mathbf{a} = a_\tau\mathbf{t} + a_n\mathbf{n}, \quad (1.1.9)$$

$a_\tau = \dot{v}$ on tangentsiaalkiirendus, $\mathbf{t} = \mathbf{v}/v$ on trajektoori *puutujavektor*, $a_n = v\|\dot{\mathbf{t}}\|$ on *normaalkiirendus* ja $\mathbf{n} = \dot{\mathbf{t}}/\|\dot{\mathbf{t}}\|$ on *peanormaalvektor*. Kehtib $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ ja $a_n = v^2/R$, R on kõverusraadius. Vektorid \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} moodustavad osakesega kaasaliikiva koordinaadistiku ortonormaalse baasi, kusjuures kaasaliikiva koordinaadistiku nullpunktiks on osakese kohavektor \mathbf{r} . Vektorit $\mathbf{b} \stackrel{def}{=} \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ nimetatakse *binormaalvektoriks*.

Infinitesimaalse ajavahemiku dt jooksul läbib punktosaake infinitesimaalse teepikkuse $ds = v dt$. Ajavahemikul t_0 kuni t_1 läbib punktosaake teepikkuse

$$s = \int_{t_0}^{t_1} v dt. \quad (1.1.10)$$

1.1.4 Tasase absoluutse ruumi rakendatavuse piirid*

Nagu mainitud on kaugused (1.1.3) ($d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$) ja nurgad (1.1.4) ($\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w})$) on vahetult mõõdetavad suurused ning nende mõõtmine võimaldab hinnata kasutatava füüsikalise ruumi mudeli (antud juhul eukleidiline ruum) õigsust. Näiteks võib ette kujutada olukorda, kus me liigume alguses x meetrit otse, pöörame end seejärel 90° paremale, kordame sama tegevust kaks korda ning liigume veel x meetrit edasi. Eukleidilises (tasases) ruumis läbiksime me nii ruudukujulise trajektoori ning jõuaksime teekonna lõpuks alati alguspunkti tagasi. Mitteeukleidilises (kõveras) ruumis me neid juhised järgides üldjuhul teekonna alguspunkti tagasi ei jõuaks⁵.

Üldrelatiivsusteooria järgi tasase eukleidilise ruumi mudel tugevas gravitatsiooniväljas ei kehti. Samuti pole ruum ja aeg relatiivsusteoorias absoluutsed, need on ühendatud ühtseks aegruumiks, st erinevad vaatlejad võivad samade nähtuste kestust, ruumilist ulatust ning isegi samaaegsust erinevalt hinnata.

Kuigi antud kursus piirdub vaid klassikalise füüsikaga, milles aeg ja ruum on üksteisest eraldiseisvad absoluutsed objektid, on edaspidises kasutatav matemaatiline kirjelduskeel (nt. variatsioonarvutus) ja füüsikalised printsiibid (nt. vähima mõju printsiip) üldistatavad ka relativistlikule füüsikale. Selles kursuses esitatu kehtib hästi nõrga gravitatsiooni ja valguse kiirusest tunduvalt väiksemate kiiruste korral - seega pea kõikides igapäevastes situatsioonides.

⁴Täpsemalt tuleks rääkida osakese kiirusest ja kiirendusest punktis $\mathbf{r}(t)$, st $\mathbf{v}(t) = (\mathbf{r}(t); \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$, $\mathbf{a}(t) = (\mathbf{r}(t); \ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$.

⁵Viimase reegli rikkumist on lihtne kujutada liikumisel kõveral pinnal. Kujutage näiteks sama teekonda maapinnal (mille võib ligikaudselt sfääriks lugeda), kui $x \approx 10000$ km ja kui te pöörete vahel nii otse liigute, kui maapinnal võimalik.

Ülesanne 1.1.1 Näidata, et punktis 1.1.3 defineeritud vektorid \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} on ühikvektorid ja üksteise suhtes ortogonaalsed, st moodustavad ortonormaalse baasi.

1.2 Inertsiaalne taustsüsteem

Defineerime *taustsüsteemi* kui koordinaadisüsteemi ruumis asukoha määramiseks ⁶ koos kellaga aja mõõtmiseks.

Klassikalise mehaanikas on erilisel kohal taustsüsteemid, kus kehade vaba liikumine toimub konstantse kiirusega. Selliseid taustsüsteeme nimetatakse *inertsiaalseteks taustsüsteemideks*. Ehk teisiti, isoleeritud punkti (vaba osakese) kohavektor \mathbf{r} muutub inertsiaalses taustsüsteemis lineaarselt ajaga,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{r}(0), \quad (1.2.1)$$

kus

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (1.2.2)$$

on osakese kiirus selle taustsüsteemi suhtes.

Kui kaks taustsüsteemi liiguvad üksteise suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt ning kui üks neist on inertsiaalne, siis on ka teine taustsüsteem inertsiaalne. Sel viisil on olemas lõpmatu arv inertsiaalseid taustsüsteeme, mis kõik liiguvad üksteise suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt.

1.3 Newtoni aksioomid (seadused)

Klassikalise mehaanika alused võib sõnastada⁷ kolme Newtoni seaduse abil. Newtoni aksioomid kehtivad inertsiaalsetes taustsüsteemides.

Lex prima. Kui osakesele ei mõju mingeid jõude (või üldisemalt, osakesele mõjuv summaarne jõud \mathbf{F} võrdub nulliga), siis liigub see osake ühtlaselt ja sirgjooneliselt, st

$$\text{kui } \mathbf{F} = 0, \text{ siis } \mathbf{v} = \overrightarrow{\text{const.}}, \quad (1.3.1)$$

kus \mathbf{v} on osakese kiirusvektor. Selle aksioomi saab taandada väitele: *eksisteerivad inertsiaalsed taustsüsteemid*.

Lex secunda. Osakese kiirendus \mathbf{a} on mõjuva jõuga \mathbf{F} võrdeline ja samasuunaline; võrdeteguriks on keha mass m . Matemaatiliselt väljendab seda seos

$$\mathbf{a}m = \mathbf{F}, \quad (1.3.2)$$

kus \mathbf{a} on osakese kiirendusvektor. Mass loetakse sõltumatuks kiirusest ja ajast ⁸. Tuues sisse osakese *impulsi*

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (1.3.3)$$

⁶Seoses aja absoluutse iseloomuga klassikalises füüsikas jäetakse taustsüsteemiga seotud kell siin sageli ka kõrvale.

⁷Nagu hiljem näeme, siis saab neid aluseid sõnastada ka teistel samaväärsetel viisidel. (vt. punkte 2.4, 3)

⁸Jätame siin kõrvale ülesanded muutuva massiga kehade liikumisest.

võime valemi (1.3.2) esitada ka kujul ⁹

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (1.3.4)$$

Lex tertia. Jõud, millega kaks osakest mõjutavad teineteist, on absoluutväärtuselt võrdselt ja vastassuunalised piki neid osakesi ühendavat sirget¹⁰, st

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (1.3.5)$$

Ülesanded

Ülesanne 1.3.1 Tuletage avaldis (1.2.1) vaba osakese ($\mathbf{F} = 0$) trajektoori jaoks Newtoni II seadusest (1.3.2).

1.4 Liikumisvõrrandid

Olles sõnastanud Newtoni kolm seadust, saab rääkida liikumise põhjustest. Nagu mainitud punktis 1.2 liigub vaba osake (või osake, millele mõjuv summaarne jõud on null) inertsiaalses taustsüsteemis ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Sellist liikumist nimetatakse *inertsiaalseks liikumiseks*. Et osake liiguks mitteinertsiaalselt, peab sellele osakesele mõjuv summaarne jõud erinema nullist.

Osakese trajektoor määratakse (üldjuhul teist järku) diferentsiaalvõrrandest, mida nimetatakse osakese *liikumisvõrrandeks*. Liikumisvõrrandid määrab Newtoni II seadust väljendav valem (1.3.4):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t), \quad (1.4.1)$$

kus osakesele mõjuv jõud sõltub üldiselt nii osakese kohavektorist, kiirusest kui ka ajast. Lihtsustavalt (üldiselt rääkides teatava lähendusena) on eeldatud, et osakesele mõjub etteantud jõud, st meil ei ole tegemist interakteeruvate osakeste liikumisvõrrandite süsteemiga.

Mõned näited osakesele mõjuvast jõust.

(i) *Kolmedimensiooniline isotroopne harmooniline ostsillaator.*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\kappa(r-l)\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.4.2)$$

kus $r = \|\mathbf{r}\|$, $\kappa > 0$ on elastsuskoeffitsient ja parameeter l määrab ostsillaatori tasakaaluasendi.

⁹Eirelatiivsusteoorias annab võrdus (1.3.4) seose kolmemõõtmelise jõu ning kolmemõõtmelise kiiruse ja kiiruse vahel, kui teha impulsi avaldises (1.3.3) asendus

$$m \rightarrow m \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

kus c on valguse kiirus vaakumis.

¹⁰Nõudmist, et osakestevahelise vastastikmõju jõud on suunatud piki kahte osakest ühendavat sirget, nimetatakse ka *Newtoni III seaduse tugevamaks versiooniks*.

(ii) *Coulomb'i jõud või gravitatsioonijõud, mis mõjub osakesele temast palju massiivsema koordinaatide alguspunktis paikneva keha poolt.*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = k \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (1.4.3)$$

kus $k \sim e_1 e_2$ ($e_{1,2}$ on laengud) või $k \sim -m_1 m_2$ ($m_{1,2}$ on massid).

(iii) *Elektromagnetvälja liikuvale laengule e mõjuv jõud (Lorentzi jõud).*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = e \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \}, \quad (1.4.4)$$

kus $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ on elektrivälja tugevus ja $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ on magnetvälja induksioon ruumipunktis \mathbf{r} (osakese asukohas) ajahetkel t .

(iv) *Keskkonna takistusjõud (hõõrdejõud).*

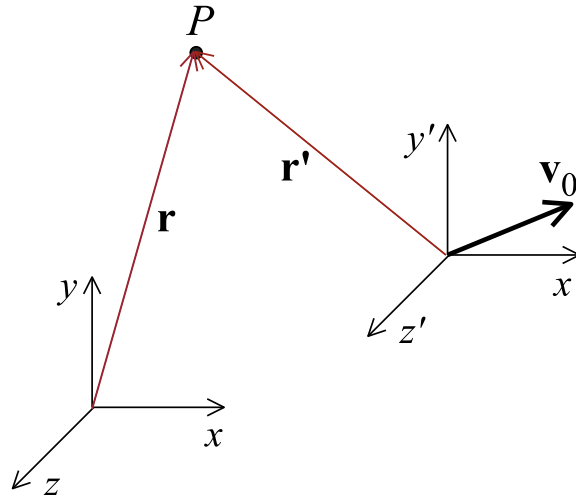
$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{r}}) = -\eta \dot{\mathbf{r}}, \quad (1.4.5)$$

kus η on hõõrdetegur ja $\dot{\mathbf{r}}$ on osakese kiirus taustsüsteemis, kus keskkond on paigal.

1.5 Galilei teisendused

Galilei teisendused määravad üleminekureeglid ühest inertsiaalsest taustsüsteemist teise. Mitterelativistlikus mehaanikas on need fundamentaalse tähtsusega.

Vaatleme kahte inertsiaalset taustsüsteemi K ja K' . Olgu neis mõlemas antud Descartes'i koordinaatsüsteemid (x, y, z) ja (x', y', z') (vt joonis 1). Süsteemis K on punkti P kohavektoriks \mathbf{r}



Joonis 1: Descartes'i koordinaatsüsteemid inertsiaalsetes taustsüsteemides K ja K'

ja süsteemis K' on selle punkti kohavektoriks \mathbf{r}' . Liikugu süsteem K' süsteemi K suhtes kiirusega \mathbf{v}_0 . Olgu koordinaatteljed süsteemides K ja K' paralleelsed ning langegu koordinaatsüsteemide alguspunktid ajahetkel $t = 0$ kokku. Siis on kohavektorid \mathbf{r} ja \mathbf{r}' suvalisel ajahetkel t seotud järgmiselt:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t. \quad (1.5.1)$$

Lisaks kehtib tingimus

$$t' = t, \quad (1.5.2)$$

mis väljendab asjaolu, et aeg on klassikalises mehaanikas absoluutne suurus. Valemeid (1.5.1) ja (1.5.2) nimetatakse *Galilei teisendusteks ruumikoordinaatide ja aja jaoks*.

Võttes võrdusest (1.5.1) tuletise aja järgi saame

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0, \quad (1.5.3)$$

kus $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ on punkti P kiirus taustsüsteemi K suhtes ja $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$ on selle punkti kiirus taustsüsteemi K' suhtes. Tulemuseks on kiiruse teisenduseeskiiri üleminekul ühest inertsiaalsest taustsüsteemist teise.

Teisendusvalemist (1.5.3) järeldub, et kiirendus ei muutu üleminekul ühest inertsiaalsest taustsüsteemist teise,

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}, \quad (1.5.4)$$

kus $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ ja $\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt$

1.6 Galilei relatiivsuspriintiip

Eelnevalt rõhutati korduvalt, et inertsiaalsetel taustsüsteemidel on klassikalises mehaanikas eriline koht. Viimane asjaolu tuleneb *Galilei relatiivsuspriintiibist*, mis väidab: *mehaanikaseadused on ühesugused kõigis inertsiaalsetes taustsüsteemides*. Seega on inertsiaalses taustsüsteemis K Newtoni II seadus kujuga

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (1.6.1)$$

ja inertsiaalses taustsüsteemis K' kujuga

$$m'\mathbf{a}' = \mathbf{F}'. \quad (1.6.2)$$

Võttes arvesse, et mass on invariantne suurus,

$$m' = m, \quad (1.6.3)$$

ja et valemi (1.5.4) kohaselt $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$, saame jõu jaoks

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}. \quad (1.6.4)$$

Järelikult jõud ei muutu üleminekul ühest inertsiaalsest taustsüsteemist teise.

Ülesanded

Ülesanne 1.6.1 Keskkonna takistusjõud on kiirusest sõltuv jõud, mida kirjeldab valem (1.4.5). Kas Galilei relatiivsuspriintiip kujul (1.6.4) kehtib ka selle jõu jaoks? Põhjendada!

1.7 Liikumisintegraalid

Eksisteerivad osakese kohavektori \mathbf{r} ja kiiruse $\dot{\mathbf{r}}$ sellised funktsioonid, mis teatud tingimustel osakese liikumise käigus ei muutu, st. ei sõltu ajast. Neid funktsioone nimetatakse *liikumisintegraalideks* (täpsemalt, *liikumisvõrrandi esimesteks integraalideks*). Seega on liikumisintegraal *jääv suurus*. Tuleb rõhutada, et jääva suuruse mõiste on liikumisintegraali mõistest üldisem (ja veidi ebamäärasem), sest jäävaks suuruseks võib nimetada näiteks ka osakese massi, kui viimane ajas ei muutu.

Vaatleme seoses osakese liikumisintegraalidega kolme juhtu.

(i) *Vaba osake (või üldisemalt, osake, millele mõjuv summaarne jõud võrdub nulliga)*. Siis on liikumisintegraaliks osakese impulss,

$$\frac{d\mathbf{p}(\dot{\mathbf{r}})}{dt} = 0. \quad (1.7.1)$$

(ii) *Osake, millele mõjub statsionaarne konservatiivne jõud*. Sellisel juhul sõltub jõud ainult osakese koordinaatidest, kusjuures selle võib esitada kujul ¹¹

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}). \quad (1.7.2)$$

Funktsiooni $U(\mathbf{r})$ nimetatakse osakese *potentsiaalseks energiaks*. Toome sisse ka osakese *kineetilise energia*

$$T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} \quad (1.7.3)$$

ja osakese *koguenergia*

$$E(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = T(\dot{\mathbf{r}}) + U(\mathbf{r}). \quad (1.7.4)$$

Leiame energiast täistuletise aja järgi,

$$\frac{dE(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{dt} = \frac{dT(\dot{\mathbf{r}})}{dt} + \frac{dU(\mathbf{r})}{dt}. \quad (1.7.5)$$

Liidetavate jaoks võrduse paremal poolel saame

$$\frac{dT(\dot{\mathbf{r}})}{dt} = m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}, \quad (1.7.6)$$

$$\frac{dU(\mathbf{r})}{dt} = (\nabla U(\mathbf{r})) \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.7.7)$$

¹¹Konservatiivne jõud rahuldab tingimust

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0,$$

kuna rootor gradiendist on alati võrdne nulliga. Siit järeldub omakorda, et konservatiivse jõu töö mööda suvalist kinnist kontuuri on võrdne nulliga (vt ülesanne 1.7.1),

$$\oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{s} = 0,$$

ehk punktist A punkti B liikumisel tehtud töö ei sõltu trajektoori kujust.

Võttes nüüd arvesse, et valemite (1.7.2) ja (1.4.1) kohaselt

$$\nabla U(\mathbf{r}) = -m\ddot{\mathbf{r}},$$

on tulemuseks

$$\frac{dE(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{dt} = 0. \quad (1.7.8)$$

Järelikult on antud juhul liikumisintegraaliks osakese energia.

(iii) *Osake statsionaarses tsentraalsümmeetrilises väljas*. Tsentraalsümmeetrilises väljas sõltub osakese potentsiaalne energia (välja potentsiaal) ainult osakese ja välja tsentri vahelisest kaugusest,

$$U(\mathbf{r}) = U(r), \quad (1.7.9)$$

kus $r = \|\mathbf{r}\|$ ja välja tsentriks on valitud koordinaatide alguspunkt¹². Näitame, et sellise osakesele mõjuva potentsiaalse jõu erijuhul on liikumisintegraaliks lisaks energiale ka osakese *impulsimoment*

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}(\dot{\mathbf{r}}). \quad (1.7.13)$$

Impulsimomendi tuletis aja järgi avaldub

$$\frac{d\mathbf{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{dt} = m[\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}] + m[\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}]. \quad (1.7.14)$$

Esimene liidetav viimase võrduse paremal poolel on alati võrdne nulliga, teine liidetav üldiselt aga mitte. Erandiks on osakesele mõjuv tsentraalsümmeetriline jõud, mille korral suvalisel ajahetkel (vt ülesanne 1.7.6)

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad (1.7.15)$$

ja järelikult

$$\frac{d\mathbf{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})}{dt} = 0. \quad (1.7.16)$$

Seega statsionaarses tsentraalsümmeetrilises väljas on nii osakese energia kui ka impulsimoment jäävad suurused.

¹²Tsentraalsümmeetriliste potentsiaalide hulka kuuluvad näiteks:

Kolmedimensionaalse isotroopse harmoonilise ostsillaatori potentsiaal,

$$U(\mathbf{r}) = \kappa(r - l)^2, \quad (1.7.10)$$

vt ka valem (1.4.2) vastava jõu jaoks.

Coulomb'i ja Newtoni potentsiaalid,

$$U(\mathbf{r}) = \frac{k}{r}, \quad (1.7.11)$$

vt ka valem (1.4.3) vastava jõu jaoks.

Yukawa potentsiaal (ekraneeritud Coulomb'i potentsiaal)

$$U(\mathbf{r}) = -g \frac{\exp(-\mu r)}{r}, \quad (1.7.12)$$

kus $g = \text{const.} > 0$ ja $\mu = \text{const.} > 0$.

Ülesanded

Ülesanne 1.7.1 Näidake, et potentsiaalse jõu töö mööda suvalist kinnist kontuuri on võrdne nulliga.

Ülesanne 1.7.2 Tuletage võrdus (1.7.7).

Ülesanne 1.7.3 Tuletage potentsiaalset (1.7.10) jõu avaldis (1.4.2).

Ülesanne 1.7.4 Tuletage potentsiaalset (1.7.11) jõu avaldis (1.4.3).

Ülesanne 1.7.5 Leidke jõud, mis mõjub Yukawa potentsiaalil liikuvale osakesele.

Ülesanne 1.7.6 Näidake, et kui osake liigub tsentraalsümmeetrilisel potentsiaalil, siis kehtib võrdus (1.7.15).

Ülesanne 1.7.7 Tsentraalsümmeetrilise jõuvälja üldine kuju on

$$\mathbf{F} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)f(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|), \quad (1.7.17)$$

kus \mathbf{r}_0 on jõuvälja tsepter ja f vabalt valitav funktsioon. Näidata, et iga selline jõuväli on konservatiivne, st leidub potentsiaal U , et

$$\mathbf{F} = -\nabla U. \quad (1.7.18)$$

1.8 Osakeste süsteem

Praktikas ei rakendata klassikalist mehaanikat kunagi jagamatutele või ideaalselt punktisarnastele osakestele¹³, vaid keerukatele süsteemidele, mida saab teatud probleemides lähendada punkt-osakestega. Antud punktis antakse ülevaade suurustest, mis iseloomustavad osakeste süsteemi kui tervikut, ning näidatakse, et osakeste süsteemi jaoks saab määratleda „sisemise“ ja „välimise“ struktuuri, kusjuures mitmest punktmassist koosneva süsteemi „sisemise“ struktuuri dünaamika sarnaneb ühe osakese dünaamikaga.

Vaatleme N punktmassist koosnevat süsteemi. Nummerdame punktmassid 1-st N -ni ja tähistame neid indeksiga $n \in \{1, 2, \dots, N\}$. n -nda punktmassi kohavektor on seega \mathbf{r}_n , mass m_n jne. Summeerimist üle kõigi osakeste tähistame lühidalt sümboliga $\sum_n \equiv \sum_{n=1}^N$.

Osakeste süsteemi kogumimpulss on

$$\mathbf{P} = \sum_n \mathbf{p}_n = M\mathbf{V}, \quad (1.8.1)$$

kus

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n m_n \quad (1.8.2)$$

¹³Tuntud füüsikalistest objektidest, mis võiksid rahuldada jagamatuse või punktisarnasuse ideaali, ei suuda klassikaline füüsika nii või teisiti realistlikku pilti anda. Selliste objektide kirjeldamiseks on tarvis kvantfüüsikat.

on süsteemi kogumass,

$$\mathbf{R} \stackrel{def}{=} \frac{\sum_n m_n \mathbf{r}_n}{\sum_n m_n} \quad (1.8.3)$$

on süsteemi *massikeskme* kohavektor ja $\mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{R}}$ massikeskme kiirus. Alati saab valida taustsüsteemi, kus $\mathbf{V} = 0$ ja mille koordinaatide alguspunkt asub massikeskmes. Sellises taustsüsteemis kehtib seega $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{P} = 0$ ja seda nimetatakse *massikeskme taustsüsteemiks*. Märkigem, et kui süsteemi massikeskme liikumine pole inertsiaalne ($\mathbf{V} \neq const.$), pole ka massikeskme taustsüsteem inertsiaalne.

Osakeste süsteemi koguimpulsimoment on

$$\mathbf{L} = \sum_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n = \mathbf{L}_0 + \mathbf{R} \times \mathbf{P}, \quad (1.8.4)$$

kus

$$\mathbf{L}_0 \stackrel{def}{=} \sum_n (\mathbf{r}_n - \mathbf{R}) \times m_n (\dot{\mathbf{r}}_n - \dot{\mathbf{R}}) \quad (1.8.5)$$

on süsteemi „sisemine“ impulsimoment - süsteemi impulsimoment massikeskme taustsüsteemis.

Osakeste süsteemi kineetiline energia on

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \sum_n m_n \mathbf{v}_n^2 = \mathbf{T}_0 + \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2, \quad (1.8.6)$$

kus

$$\mathbf{T}_0 \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \sum_n m_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{V})^2 \quad (1.8.7)$$

on süsteemi „sisemine“ kineetiline energia - süsteemi kineetiline energia massikeskme taustsüsteemis.

Valemeist (1.8.1), (1.8.4), (1.8.6) on näha, et paljudest osakesest koosnevat süsteemi saab kirjeldada sarnaselt punktosakesega, mille kohavektoriks on süsteemi massikeskme kohavektor \mathbf{R} ja massiks süsteemi kogumass M . Siiski erinevalt punktosakesest, millel puudub sisemine struktuur, tuleb osakeste süsteemi puhul üldjuhul arvestada ka selle „sisemise“ energia (1.8.7) ja impulsimendiga (1.8.5).

Osakeste süsteemi ajalise käitumise uurimiseks tuleb pilk pöörata dünaamikale. Vastavalt Newtoni II seadusele on nüüd liikumisvõrrandite üldiseim kuju

$$m_n \ddot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t); \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1.8.8)$$

kus \mathbf{F}_n on osakesele massiga m_n mõjuv summaarne jõud.

Osakesele n mõjuvad jõud võib omakorda jagada väliseks jõuks $\mathbf{F}_n^{(v)}$ ja osakese n ja n' vastastikmõjust tingitud jõuks $\mathbf{F}_{nn'}$ ¹⁴. Seega osakesele n mõjuva summaarse jõu \mathbf{F}_n saab kirja panna kujul

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_n^{(v)} + \sum_{\substack{n' \\ n \neq n'}} \mathbf{F}_{nn'} \quad (1.8.9)$$

¹⁴Praktikas on kolme ja rohkema osakese vaheline vastastikmõju pea alati taandatav osakeste paaride vahelisele vastastikmõjule.

Liikumisvõrrandite (1.8.8) summa üle kõigi osakeste annab Newtoni II seaduse analoogi osakeste süsteemi jaoks:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_n \mathbf{F}_n^{(v)} + \underbrace{\sum_{\substack{n,n' \\ n \neq n'}} \mathbf{F}_{nn'}}_{=0} = \sum_n \mathbf{F}_n^{(v)} = \mathbf{F}^{(v)}, \quad (1.8.10)$$

kus $\mathbf{F}^{(v)}$ on summaarne väline jõud ja teine summa võetakse üle üle kõikide mittevõrdsete indeksite $n \neq n'$. Viimane liidetav kaob, sest Newtoni III seaduse ($\mathbf{F}_{nn'} = -\mathbf{F}_{n'n}$) tõttu kompenseerivad osakestevahelised vastastikmõjud teineteist. Seega väliste jõudude puudumisel on osakeste süsteemi koguimpulss jääv. Märkimisväärne, et väliste jõudude puudumisel on massikeskme taustsüsteem inert-siaalne ja seetõttu loomulikuks taustsüsteemiks osakestevahelisest vastastikmõjust põhjustatud liikumise (süsteemi „sisemise“ dünaamika) uurimiseks.

Näitame, et süsteemi koguimpulsimomendi ajaline tuletis võrdub välisjõudude summaarse jõu-momendiga:

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_n \left(\mathbf{r}_n \times \dot{\mathbf{p}}_n + \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_n \times \mathbf{p}_n}_{=0} \right) = \sum_n \mathbf{M}_n^{(v)} + \underbrace{\sum_{n < n'} \mathbf{r}_{nn'} \times \mathbf{F}_{nn'}}_{=0} = \sum_n \mathbf{M}_n^{(v)} \equiv \mathbf{M}^{(v)}, \quad (1.8.11)$$

kus $\mathbf{M}^{(v)}$ on väliste jõudude summaarne jõumoment, $\mathbf{r}_{nn'} \stackrel{def}{=} \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'}$ ja $\mathbf{M}_n^{(v)} = \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n^{(v)}$ on osakesele n mõjuva välise jõu moment. Teisel sammul kasutati Newtoni III seadust ($\mathbf{F}_{nn'} = -\mathbf{F}_{n'n}$). Viimane liidetav kaob kui kasutada Newtoni III seaduse tugevamat versiooni, mis nõuab, et jõud, millega kaks osakest teineteist mõjutavad, on suunatud piki neid osakesi ühendavat sirget. Seega $\mathbf{F}_{nn'} \parallel \mathbf{r}_{nn'}$ ja vektorkorrutis kaob.

Juhul, kui välised jõud on tsentraalsümmeetrilised ($\mathbf{F}_n^{(v)} \parallel \mathbf{r}_n$), kaob välisjõudude moment ja süsteemi koguimpulsimoment on jääv suurus (vt ka ülesannet 1.8.2).

Väliste jõudude puudumisel¹⁵ on konstantse massiga ($\dot{M} = 0$) osakeste süsteemi massikeskme kiirus konstantne (valemid (1.8.1), (1.8.10)) ja sellest tulenevalt on jäävaks suuruseks nii süsteemi „sisemine“ impulsimoment \mathbf{L}_0 kui ka „väliline“ impulsimoment $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$:

$$\mathbf{L}_0 = const., \quad \mathbf{R} \times \mathbf{P} = const. \quad (1.8.12)$$

Vaatleme veel energia jäävust osakeste süsteemi korral. Olgu sisemised jõud konservatiivsed

$$\mathbf{F}_{nn'}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n'}) = -\nabla_n U_{nn'}(\mathbf{r}_{nn'}), \quad (1.8.13)$$

kus $U_{nn'} = U_{n'n}$. Välisjõudude poolt infinitesimaalsel ajavahemikul dt tehtav töö on

$$\begin{aligned} dW &= \sum_n \mathbf{F}_n^{(v)} d\mathbf{r}_n = \sum_n \dot{\mathbf{p}}_n d\mathbf{r}_n - \sum_{\substack{n,n' \\ n \neq n'}} \mathbf{F}_{nn'} d\mathbf{r}_n = \sum_n m_n \dot{\mathbf{v}}_n \mathbf{v}_n dt + \sum_{\substack{n,n' \\ n < n'}} \nabla_n U_{nn'} d(\mathbf{r}_{nn'}) = \\ &= \sum_n d\left(\frac{m_n \mathbf{v}_n^2}{2}\right) + \sum_{\substack{n,n' \\ n < n'}} dU_{nn'} = d(T + U_0), \end{aligned}$$

¹⁵Märkimisväärne, et väliste jõudude puudumine on tsentraalsümmeetriliste välisjõudude erijuht.

kus $U_0 = \frac{1}{2} \sum_{n \neq n'} U_{nn'}$ on süsteemi sisemiste jõudude potentsiaalne energia. Kordaja 1/2 tuleb asjaolust, et iga potentsiaal $U_{nn'}$ esineb summas 2 korda.

Välisjõudude puudumisel on konstantse massiga ($\dot{M} = 0$) osakeste süsteemi massikeskme kiirus konstantne (valemid (1.8.1), (1.8.10)) ja sellest tulenevalt on eraldi jäävad nii osakeste süsteemi „sisemine“ koguenergia kui selle süsteemi „välimine“ kineetiline energia:

$$\begin{aligned} T_0 + U_0 &= \text{const.} \\ \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 &= \text{const.} \end{aligned}$$

Kui ka välisjõud on konservatiivsed, siis saab rääkida *osakeste süsteemi koguenergiast* („sisemisele“ koguenergia + „välimine“ kineetilisele energia + väliste jõudude potentsiaalne energia). Ka selle süsteemi koguenergia on jääv suurus (vt ülesanne 1.8.3), kuigi „sisemine“ ja „välimine“ energia ei pruugi sel juhul enam eraldi jäävad olla.

Ülesanded

Ülesanne 1.8.1 *Jäiga keha puhul on punktmasside vahelised kaugused ajas muutumatud $\|\mathbf{r}_{ij}\| = \text{const.}$, kus $\mathbf{r}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Näidata, et*

- ajas ei muutu ka punktmasside vahelised nurgad

$$\angle(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_{ik}) = \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ik}}{\|\mathbf{r}_{ij}\| \|\mathbf{r}_{ik}\|} = \text{const} \quad (1.8.14)$$

- ajas ei muutu punktmasside kaugus massikeskmest \mathbf{R}

$$\|\mathbf{r}_i - \mathbf{R}\| = \text{const.} \quad (1.8.15)$$

Vihje: kasulikuks võib osutuda seos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2). \quad (1.8.16)$$

Ülesanne 1.8.2 *Olgu süsteemile mõjuvad välised jõud on tsentraalsümmeetrilised:*

$$\mathbf{F}_n^{(v)} = (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_0) f_n(\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_0\|), \quad (1.8.17)$$

kus \mathbf{r}_0 on jõuvälja tsenter. Näidata, et

- süsteemi väliste jõudude summaarse momendi punkti \mathbf{r}_1 jaoks kehtib võrdus

$$\sum_n (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}_n^{(v)} = (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}^{(v)}.$$

- osakeste süsteemi koguimpulsi moment jõuvälja tsentri suhtes on jääv suurus.
- kui jõuvälja tsenter asub massikeskmes ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}$), siis on jäävad suurused nii \mathbf{L}_0 kui $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$.

Ülesanne 1.8.3 Näidata, et kui ka osakeste süsteemile mõjuvad välisjõud on konservatiivsed $\mathbf{F}_n = -\nabla_n U_n$, siis on süsteemi koguenergia

$$T + \sum_n U_n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n,n' \\ n \neq n'}} U_{nn'} \quad (1.8.18)$$

jääv suurus.

Ülesanne 1.8.4 Vaatame kahest osakesest koosnevat süsteemi:

- Tuletada valemid (1.8.10), (1.8.11) ja (1.8.14) selle süsteemi jaoks.
- Näidata, lähtudes impulsimomendi jäävusest, et välisjõudude puudumisel ($\mathbf{F}_1^{(v)} = 0$, $\mathbf{F}_2^{(v)} = 0$) on osakeste liikumine massikeskme taustsüsteemis planaarne, st mõlema osakese trajektorid asuvad fikseeritud tasandis.

2 Lagrange'i formalism

2.1 Seosed ja reaktsioonijõud

Paljud mehaanikaülesanded taanduvad liikumisvõrrandite (1.8.8) lahendamisele:

$$m_n \ddot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t); \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1.1)$$

kus jõud \mathbf{F}_n loetakse *osakeste kohavektorite ja kiiruste teadaolevaks funktsiooniks*. Nimetame neid jõude \mathbf{F}_n *etteantud jõududeks*. Võrrandite (2.1.1) algtingimustele mingid piirangud ei rakendu.

Kuid on olemas ka teistsugune ülesannete klass¹⁶, kus osakeste asukohtadele ja kiirustele pannakse peale kas geomeetrilise või kinemaatilise iseloomuga piirangud, mis ei ole määratud etteantud jõududega. Nimetame neid piiranguid *seosteks*. Lihtsateks näideteks seostega mehaanikaülesandest on (i) osake, mis saab liikuda mööda fikseeritud joont või pinda, (ii) kaks ühel või teistsugusel viisil (näiteks varda või niidiga) seotud osakest. Ülesande algtingimused peavad olema nüüd kooskõlas seostega.

Seoseid, mis on esitatavad kujul

$$f_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0; \quad \alpha = 1, 2, \dots, k \quad (2.1.2)$$

nimetatakse *holonoomseteks*. Arvatavasti on lihtsaimad näited holonoomsetest seostest osakesed, mis moodustavad jääga keha. Sel juhul on osakeste vahelised kaugused fikseeritud ja seosed võtavad kuju $\|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'}\| - d_{nn'} = 0$, kus $d_{nn'}$ on osakeste n ja n' vaheline ette antud kaugus. Teiseks näiteks holonoomse seosega mehaanikaülesandest on osake, mille liikumine toimub mõnel joonel või pinnal, mis võib ka etteantud viisil sõltuda ajast. Märkigem, et sel juhul on seosteks antud pinna või joone võrrandid.¹⁷

Seoseid, mida valemi (2.1.2) tüüpi tingimustega anda ei saa, nimetatakse *mitteholonoomseteks*. Näitena mitteholonoomsetest seostest võib tuua olukorra, kus...

- ...funktsioonid f_α sõltuvad ka osakeste kiirustest (seda juhtu käsitletakse punktis 3.5) või ka kohavektorite kõrgematest tuletistest.
- ...seosed sisaldavad võrratusi. Näiteks kui yz -tasand on kaetud seinaga, mida osake läbida ei saa, siis osakese x koordinaat piiratud seosega kujul

$$x > 0, \quad (2.1.3)$$

kui ka algtingimused rahuldavad viimast võrratust.

Käesolevas peatükis mitteholonoomseid seoseid ei käsitleta.

¹⁶Selliste ülesannete lahendusmeetod formuleeriti algselt d'Alembert'i poolt 1773. a. ja arendati lõplikult välja Lagrange'i poolt 1788. a.

¹⁷Seostele (2.1.2) saab ka üldjuhul anda lihtsa geomeetrilise tõlgenduse: nimelt määravad need ajast sõltuva abstraktse pinna $3N$ mõõtmelises ruumis, kusjuures antud pinna dimensioon on $3N - k$. Võrranditega (2.1.1) määratud osakeste süsteemile seoste (2.1.2) rakendamine piirab osakeste „asukohad“ sellele abstraktsele pinnale.

Juhul, kui seos ajast ilmutatud kujul ei sõltu, nimetatakse seda *statsionaarseks*.

Seosed põhjustavad ülesandes kahte tüüpi modifikatsioone:

(i) Osakeste $3N$ koordinaati $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$ ei ole enam kõik sõltumatud. Tingituna seostest on sõltumatuid koordinaate on nüüd $3N - k$, st. *süsteemi vabadusastmete arv* on mitte $3N$ vaid $3N - k$. Teineteisest sõltuvate koordinaatide kasutamine on tihti tülikas, mistõttu on otstarbekam üle minna uutele $3N - k$ sõltumatule *üldistatud koordinaadile* q_j (vt punkt 2.5),

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(q_1, \dots, q_{3N-k}, t); \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.1.4)$$

Märkus: Üldistatud koordinaatide valikul on meil üsnagi suur vabadus. Nende all mõistetakse *kõiki selliseid sõltumatuid suurusi, mille abil on võimalik üheselt määrata süsteemi paiknemist ruumis* nii seoste olemasolu korral kui ka viimaste puudumisel. Üldistatud koordinaatide hulka kuuluvad erijuhuna ka Descartes'i koordinaadid ning erinevad kõverjoonelised koordinaadid (sfäärilised, silindrilised jt).

(ii) Seoste olemasolu kajastub osakestele mõjuvates *reaktsioonijõududes* \mathbf{R}_n , mis ei ole erinevalt etteantud jõududest teada, ning need tuleb ülesande lahendamise käigus määrata (või elimineerida). Näiteks varda külge kinnitatud kuuli puhul tuleks arvestada ka varda reaktsiooniga, st. jõuga, millega varras kuuli mõjutab.

Seega on meil liikumisvõrrandite (2.1.1) asemel $3N$ võrrandit

$$m_n \ddot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{F}_n + \mathbf{R}_n; \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.1.5)$$

koos k seosevõrrandiga. Tundmatuid on ülesandes $6N$, vektorite \mathbf{r}_n ja \mathbf{R}_n komponendid.

2.2 Virtuaalne nihe

Virtuaalseks nihkeks nimetatakse suvalise süsteemi kuuluva osakese kujutletavat infinitesimaalset nihet $\delta \mathbf{r}_n$, mis on kooskõlas seostega fikseeritud ajahetkel.

Olgu meil tegemist holonoomsete seostega. Seosevõrrandite (2.1.2) alusel rahuldavad ajavahe-
miku dt jooksul tehtavad *võimalikud nihked* $d\mathbf{r}_n$ diferentsiaalvõrrandeid

$$df_\alpha = \sum_{n=1}^N \nabla_n f_\alpha \cdot d\mathbf{r}_n + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0; \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \quad (2.2.1)$$

kus $\nabla_n = (\partial/\partial x_n, \partial/\partial y_n, \partial/\partial z_n)$. Fikseerides aja (nõudes, et $dt = 0$) saame siit tingimused *virtuaalsete nihete* jaoks:

$$\sum_{n=1}^N \nabla_n f_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_n = 0; \quad \alpha = 1, 2, \dots, k. \quad (2.2.2)$$

See põhimõttelise tähtsusega võrdus leiab kasutamist järgmises ja ülejärgmises punktis.

2.3 Virtuaalse töö printsiip

Oletame esialgu, et süsteem on *tasakaaluolekus*. Siis on liikumisvõrrandite (2.1.5) parem pool võrdne nulliga,

$$\mathbf{F}_n + \mathbf{R}_n = 0; \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3.1)$$

Seega võrdub suvalise virtuaalse nihke $\delta \mathbf{r}_i$ korral nulliga ka virtuaalne töö $(\mathbf{F}_n + \mathbf{R}_n)\delta \mathbf{r}_n = 0$. Siit saame, et kehtib

$$\sum_{n=1}^N (\mathbf{F}_n + \mathbf{R}_n) \cdot \delta \mathbf{r}_n = \sum_{n=1}^N \mathbf{F}_n \delta \mathbf{r}_n + \sum_{n=1}^N \mathbf{R}_n \cdot \delta \mathbf{r}_n = 0. \quad (2.3.2)$$

Edasi piirdume süsteemidega, kus seostest tingitud reaktsioonijõudude summaarne virtuaalne töö on võrdne nulliga,

$$\sum_{n=1}^N \mathbf{R}_n \cdot \delta \mathbf{r}_n = 0. \quad (2.3.3)$$

Selliseid seoseid nimetatakse *ideaalseteks*¹⁸.

Oleme tuletanud tingimuse: kui süsteem on tasakaalus, siis etteantud jõudude virtuaalne töö on võrdne nulliga,

$$\sum_{n=1}^N \mathbf{F}_n \cdot \delta \mathbf{r}_n = 0. \quad (2.3.4)$$

Rõhutame, et viimase võrduse vasakul poolel etteantud jõud ise ei ole võrdsed nulliga. Valemit (2.3.4) nimetatakse sageli *virtuaalse töö printsiibiks*.

Pole raske veenduda, et holonoomsed seosed on ka ideaalsed, kui eeldada¹⁹, et seose f_α mõju osakese n dünaamikale väljendub reaktsioonijõus kujul

$$\mathbf{R}_{n\alpha} = \lambda_\alpha \nabla_n f_\alpha, \quad (2.3.5)$$

kus λ_α on tundmatu võrdetegur, mis väljendab asjaolu, et ülalantud seosed kehtivad vaid teatava kordaja täpsusega. Osakesele n mõjuv summaarne reaktsioonijõud on

$$\mathbf{R}_n = \sum_{\alpha=1}^k \mathbf{R}_{n\alpha} = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_n f_\alpha, \quad (2.3.6)$$

Asendame valemi (2.3.3) vasakule poolele reaktsioonijõu avaldisest (2.3.6). See annab

$$\sum_{n=1}^N \mathbf{R}_n \cdot \delta \mathbf{r}_n = \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \nabla_n f_\alpha \cdot \delta \mathbf{r}_n. \quad (2.3.7)$$

Vahetades võrduse paremal poolel summeerimised ning arvestades valemiga (2.2.2) saamegi tulemuseks, et holonoomsete reaktsioonijõudude summaarne virtuaalne töö on võrdne nulliga.

¹⁸On olemas ka lähenemisviis, mille kohaselt jõude, mis ei rahulda ideaalsuse kriteeriumit, peaks püüdma käsitleda etteantutena, mitte aga neid lugema reaktsioonijõudude hulka (vt näiteks M. G. Calkin *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*, World Scientific, 2010; W. Greiner *Classical Mechanics*, Springer, 2010)

¹⁹Põhjenduse sellele eeldusele leiab peatükist 3.5, kui piirduda valemis (3.5.1) vaid üldistatud koordinaatidest sõltuvate, st. holonoomsete seostega.

2.4 d'Alembert'i printsiip

Saadud tulemus, virtuaalse töö printsiip (2.3.4), ei sisalda enam mitteteadaolevaid reaktsioonijõude, kuid kirjeldab see siiski vaid tasakaalus olevat süsteemi, st. staatikat. Tahaksime aga jõuda üldisema tulemuseni, mis kirjeldaks ka süsteemi dünaamikat.

Selleks kasutame James Bernoulli ja Jean le Rond d'Alembert'i lähenemisviisi. Võrrandite (2.1.5)

$$m_n \ddot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{F}_n + \mathbf{R}_n; \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.4.1)$$

korrutamin virtuaalse nihkega ja summeerimine annab

$$\sum_{n=1}^N m_n \ddot{\mathbf{r}}_n \delta \mathbf{r}_n = \sum_{n=1}^N (\mathbf{F}_n + \mathbf{R}_n) \cdot \delta \mathbf{r}_n. \quad (2.4.2)$$

Eeldades, et seosed on ideaalsed, saame valemi (2.3.4) üldistusena, et kõikide virtuaalsete nihete jaoks peab olema rahuldatus seos:

$$\sum_{n=1}^N (\mathbf{F}_n - m_n \ddot{\mathbf{r}}_n) \cdot \delta \mathbf{r}_n = 0. \quad (2.4.3)$$

See võrdus on tuntud *d'Alembert'i printsiibina*.

2.5 Liikumisvõrrandid üldistatud koordinaatides

Leitud tingimus (2.4.3) ei ole veel kujul, mille alusel saaks välja kirjutada süsteemi liikumisvõrrandid. Olukorra muudab keerukaks asjaolu, et kohavektorite \mathbf{r}_n komponentideks olevatelt süsteemi kuuluvate osakeste koordinaadid x_n, y_n, z_n pole seoste (2.1.4) tõttu sõltumatud ja seega pole (lineaarselt) sõltumatud ka virtuaalsed nihked $\delta \mathbf{r}_n$. Otstarbekam on väljendada võrdust (2.4.3) $3N - k$ sõltumatu koordinaadi kaudu. Selleks asendame $3N$ osakeste koordinaati x_n, y_n, z_n $3N - k$ üldistatud koordinaadiga q_j :

$$x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N \quad \rightarrow \quad q_1, \dots, q_{3N-k}, \quad (2.5.1)$$

kuhu on seoste olemasolu juba vaikimisi sisse kirjutatud. Saab näidata, et kui virtuaalseid nihkeid väljendada üldistatud koordinaatide kaudu, siis on need $3N - k$ nihet δq_j lineaarselt sõltumatud. Suvalise osakese kohavektori virtuaalne nihe $\delta \mathbf{r}_n$ avaldub üldistatud koordinaatide virtuaalsete nihete δq_j kaudu kujul

$$\delta \mathbf{r}_n = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (2.5.2)$$

Nii nagu varemgi omandavad indeksid siin ja edaspidi väärtusi $n = 1, \dots, N$ ja $j = 1, \dots, 3N - k$, ilma et me sellele iga kord eraldi osutaksime.

Meenutagem, et tingimus (2.4.3) peab kehtima *kõikvõimalike* virtuaalsete nihete korral. Kuna δq_j on nüüd lineaarselt sõltumatud, siis peavad tingimuses (2.4.3) nihete δq_j ees olevad kordajad igaüks eraldi nulliga võrduma. Need tingimused annavadki süsteemi liikumisvõrrandid. Seega

peame leidma viisi võrduse (2.4.3) väljendamiseks üldistatud koordinaatides. Selleks asendame seose (2.5.2) d'Alembert'i printsiibi avaldisse (2.4.3):

$$\sum_n (\mathbf{F}_n - m_n \ddot{\mathbf{r}}_n) \cdot \delta \mathbf{r}_n = \sum_n \sum_j (\mathbf{F}_n - m_n \ddot{\mathbf{r}}_n) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (2.5.3)$$

Sellega oleme võrrandid (2.4.3) avaldanud virtuaalsete nihete δq_j lineaarkombinatsioonina. Viimast avaldist on aga otstarbekas viia kujule, kus kohavektorite täistuletised aja järgi oleks asendatud üldistatud koordinaatide tuletistega. Järgnevalt lihtsustame seose (2.5.3) vasaku poole mõlemaid liikmeid eraldi:

- Esmalt vaatame avaldist

$$\sum_n \sum_j \mathbf{F}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j} \delta q_j,$$

mille viimiseks kompaksemale kujule defineerime *üldistatud jõud*

$$Q_j = \sum_n \mathbf{F}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j}. \quad (2.5.4)$$

Seega

$$\sum_n \mathbf{F}_n \cdot \delta \mathbf{r}_n = \sum_j Q_j \delta q_j. \quad (2.5.5)$$

Viimane võrdus õigustabki seda, et suurusi Q_j tuleks interpreteerida üldistatud jõududena.

- Järgnevalt vaatame seose (2.5.3) teist liiget

$$\sum_n m_n \ddot{\mathbf{r}}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j}, \quad (2.5.6)$$

Kaotamaks kohavektorite teist täistuletist aja järgi viime selle avaldise Leibnizi valemi abil kujule

$$\sum_n m_n \ddot{\mathbf{r}}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j} = \sum_n \left[\frac{d}{dt} \left(m_n \dot{\mathbf{r}}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j} \right) - m_n \dot{\mathbf{r}}_n \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j} \right) \right]. \quad (2.5.7)$$

Teades, et $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(q_j(t), t)$, avalduvad osakeste kiirused \mathbf{v}_n üldistatud koordinaatides kui

$$\mathbf{v}_n \equiv \dot{\mathbf{r}}_n = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial t}, \quad (2.5.8)$$

kus üldistatud koordinaatide täistuletisi aja järgi

$$\dot{q}_j \equiv \frac{dq_j}{dt} \quad (2.5.9)$$

nimetatakse *üldistatud kiirusteks*. Märgime veel, et statsionaarsete seoste korral valemis (2.5.8) $\partial \mathbf{r}_n / \partial t = 0$.

Käsitleme üldistatud kiirust uue muutujana ja võtame võrdusest (2.5.8) osatuletise üldistatud kiiruse \dot{q}_j järgi. See annab seose

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j}. \quad (2.5.10)$$

Seega

$$m_n \mathbf{v}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j} = m_n \mathbf{v}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{m_n \mathbf{v}_n^2}{2} \right), \quad (2.5.11)$$

kus üldistatud kiiruse osatuletise märgi all tunneme ära osakese n kineetilise energia.

Edasi näitame, et kehtib

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial q_j}, \quad (2.5.12)$$

st võime antud avaldises vahetada osatuletise $\frac{\partial}{\partial q_j}$ ja täistuletise $\frac{d}{dt}$ järjekorra. Selleks kirjutame lahti võrduse mõlemad pooled:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j} \right) = \sum_{j'} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_n}{\partial q_{j'} \partial q_j} \dot{q}_{j'} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_n}{\partial t \partial q_j}$$

ja

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial q_j} = \sum_{j'} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_{j'}} \dot{q}_{j'} \right) + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_n}{\partial q_j \partial t}.$$

Arvestades, et $\frac{\partial \dot{q}_{j'}}{\partial q_j} = 0$, ja vahetades osatuletiste võtmise järjekorra, leiamegi, et võrdus (2.5.12) kehtib. Seega

$$m_n \dot{\mathbf{r}}_n \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j} \right) = m_n \mathbf{v}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{m_n \mathbf{v}_n^2}{2} \right) \quad (2.5.13)$$

kus üldistatud koordinaadi osatuletise märgi all tunneme jällegi ära osakese n kineetilise energia.

Kuna võrduses (2.5.3) summeeritakse üle kõikide osakeste, toome sisse süsteemi kuuluvate osakeste summaarse kineetilise energia

$$T = \sum_n \frac{m_n \mathbf{v}_n^2}{2}. \quad (2.5.14)$$

Asendades nüüd võrdused (2.5.11) ja (2.5.13) avaldisse (2.5.7) saame lihtsustatava avaldise (2.5.6) viia kujule

$$\sum_n m_n \ddot{\mathbf{r}}_n \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j} = \sum_n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{m_n \mathbf{v}_n^2}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{m_n \mathbf{v}_n^2}{2} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \quad (2.5.15)$$

Märgime veel, et kuna meie eesmärk on formuleerida d'Alembert'i printsiipi (2.4.3) üldistatud koordinaatides ja kiirustes, siis tuleb nendes muutujates kirja panna ka süsteemi kineetiline energia T . Seda võimaldab seos (2.5.8).

Võrduste (2.5.5) ja (2.5.15) abil saame kirjutada d'Alembert'i printsiibi (2.4.3) üles nüüd seliselt

$$\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0. \quad (2.5.16)$$

Kuna on virtuaalsed nihked δq_j on lineaarselt sõltumatud, siis peavad kehtima tingimused

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j; \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.5.17)$$

kus $s = 3N - k$ on süsteemi vabadusastmete arv. Võrrandid (2.5.17) ongi süsteemi liikumisvõrranditeks.

Olgu etteantud jõud on konservatiivsed, st

$$\mathbf{F}_n = -\nabla_n U, \quad (2.5.18)$$

kus U on süsteemi potentsiaalne energia. Üldistatud jõud (2.5.4) avalduvad siis

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_n}, \quad (2.5.19)$$

Võttes arvesse, et potentsiaal U ei sõltu üldistatud kiirustest ²⁰ \dot{q}_j , võime anda liikumisvõrranditele (2.5.17) kuju²¹

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.5.21)$$

kus

$$L = T - U. \quad (2.5.22)$$

on *Lagrange'i funktsioon*. Võrrandeid (2.5.21) tuntakse *Lagrange'i võrranditena*.

Ülesanded

Ülesanne 2.5.1 Näidake, et kui etteantud jõud on potentsiaalsed, siis kehtib üldistatud jõudude jaoks võrdus (2.5.19).

Ülesanne 2.5.2 Näidake, et üldjuhul sõltub kineetiline energia ilmutatud kujul üldistatud kiiruste kõrval ka üldistatud koordinaatidest ja ajast: $T = T(q_j, \dot{q}_j, t)$.

Ülesanne 2.5.3 Tuletage Newtoni II seadus potentsiaalses jõuväljas liikuva osakese Lagrange'i võrranditest.

²⁰See on nii definitsiooni kohaselt.

²¹Üldjuhul, kui süsteemile mõjuvad nii konservatiivsed kui mittekonserveerivad jõud, on liikumisvõrrandite kuju

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j; \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.5.20)$$

kus Lagrange'i funktsioon $L = T - U$ sisaldab konservatiivsete jõudude panust ja mittekonserveerivate panus sisaldub üldistatud jõududes Q_j .

2.6 Üldistatud impulss ja üldistatud energia

Käesolevas punktis defineerime Lagrange'i formalismis Newtoni mehaanika impulsi ja energia üldistused ning teeme lähtudes Lagrange'i võrranditest kindlaks nende suuruste jäävuseks vajalikud tingimused.

2.6.1 Üldistatud impulss ja selle jäävus

Üldistatud koordinaadile q_j (ja üldistatud kiirusele \dot{q}_j) vastavaks *üldistatud impulsiks* nimetatakse suurust

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.6.1)$$

Lagrange'i võrrandid (2.5.21) saab nüüd esitada kujul

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j}; \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2.6.2)$$

Siit järeldub, et üldistatud impulss p_j on jääv,

$$\frac{dp_j}{dt} = 0, \quad (2.6.3)$$

kui

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (2.6.4)$$

st kui Lagrange'i funktsioon ei sõltu ilmutatud kujul üldistatud koordinaadist q_j . Niisugust koordinaati nimetatakse *tsükliliseks*.

Seega, kui üldistatud koordinaat q_i on tsükliline (st on täidetud tingimus (2.6.4)), siis on vastav üldistatud impulss p_j Lagrange'i võrrandite esimeseks integraaliks.

2.6.2 Üldistatud energia ja selle jäävus

Järgnevas tuletame energia üldistuse Lagrange'i mehaanikas. Selleks uurime, kuidas käitub Lagrange'i funktsiooni $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ täisdiferentsiaal

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.6.5)$$

Kui osakeste trajektoor $q_j(t)$ kirjeldab süsteemi füüsilist liikumist, siis peab see rahuldama Lagrange'i võrrandeid (2.5.21):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_j},$$

millele tuginedes saab avaldise (2.6.5) viia kujule

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^s \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.6.6)$$

Täistuletiste viimine samale poole võrdusmärgi annab

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (2.6.7)$$

kus

$$H = \sum_{j=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L. \quad (2.6.8)$$

Üldistatud koordinaatide, kiiruste ja aja funktsiooni H nimetatakse *üldistatud energiaks*²².

Võrrandist (2.6.7) järeldub, et kui Lagrange'i funktsioon ei sõltu ilmutatud kujul ajast, st. kui

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (2.6.9)$$

siis on üldistatud energia on jääv suurus

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad (2.6.10)$$

Seega, kui on täidetud tingimus (2.6.9), on üldistatud energia H Lagrange'i võrrandite esimeseks integraaliks.

2.7 Näide: punktmass konservatiivses jõuväljas

Järgnevalt vaatleme, kuidas töötab Lagrange'i formalism konservatiivses jõuväljas liikuva osakese juhul. Meenutagem, et jõud \mathbf{F} oli konservatiivne parajasti siis, kui seda sai esitada mõne skalaarse funktsiooni $U(\mathbf{r})$ (jõule vastava potentsiaalse energia) gradiendi kaudu:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}).$$

Selle osakese Lagrange'i funktsioon (2.5.22) on

$$L = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - U(\mathbf{r}). \quad (2.7.1)$$

Valime antud probleemi jaoks sobivad üldistatud koordinaadid. Üldistatud koordinaatide valikul tuleb lähtuda nõudest, et nende abil peab saama üheselt määrata osakese asukohta ruumis. Kuna antud probleemis seosed puuduvad, siis täidavad viimast tingimust ka ristkoordinaadid $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$. Üldjuhul sobivad üldistatud koordinaatideks suvalised kõverjoonelised koordinaadid. Hetkel piirdume rist-, silindriliste ja sfääriliste koordinaatidega.

Kirjeldame süsteemi alustuseks ristkoordinaatides. Sel triviaalsel juhul on süsteemi Lagrange'i funktsioon lahti kirjutatuna

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \quad (2.7.2)$$

Lagrange'i võrrandid (2.5.21) annavad nüüd kolm liikumisvõrrandit

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot{z} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (2.7.3)$$

²²Saadud avaldist (2.6.8) võib kasutada ka süsteemi koguenergia defineerimiseks, pidades silmas, et eelkõige omab mõtet energia kui jääva suuruse sissetoomine.

Arvestades, et jõud avaldub potentsiaali gradiendina ja esitades viimase võrrandisüsteemi vektorkujul, saame Newtoni II seaduse $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, mida oli ka oodata, sest antud juhul sai Newtoni mehaanika probleem esitatud lihtsalt teistsuguses formalismis, mistõttu peab osakese liikumine alluma samadele liikumisvõrranditele, mis Newtoni mehaanikaski.

Järgnevalt vaatame, kuidas avalduvad süsteemi üldistatud energia (2.6.8) ja üldistatud impulsid (2.6.1). Ette rutates võib öelda, et ka siin ei oota meid midagi uut. Kuid arvutame: üldistatud impulsid on

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad (2.7.4)$$

st ristkoordinaadile vastav üldistatud impulss on antud juhul lihtsalt impulsivektori vastav komponent. Üldistatud energia jaoks leiame, et

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z} - L = \\ &= m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 - \left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)\right) = \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z), \end{aligned}$$

üldistatud energia langeb kokku selle süsteemi koguenergiaga - kineetilise ja potentsiaalse energia summaga. Nagu öeldud, pole ka siin midagi uut, kuid tasub tähele panna, et kuna vaadeldav Lagrange'i funktsioon (2.7.1) ei sõltu ilmutatud kujul ajast, st. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, siis tuleb *lähitudes Lagrange'i formalismist* (vt valem (2.6.7)) väga lihtalt välja, et osakese koguenergia on antud juhul jääv suurus.

Edasi käsitleme silindriliste koordinaatide juhtu. Selle näite eesmärgiks on kirjeldada üldistatud impulsi mõistet. Silindrilised koordinaadid (r, θ, z) ja ristkoordinaadid (x, y, z) on teineteisega seotud järgmiselt:

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = z. \quad (2.7.5)$$

Lagrange'i funktsioon on peale antud teisendusi kujul

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2 \right) - U(r, \theta, z).$$

Nurgale vastavaks üldistatud kiirus $\dot{\theta}$ on nurkkiirus. Leiame nurgale vastava üldistatud impulsi:

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},$$

saadud suuruses tunneme ära impulsimomendi z -telje suunalise komponendi. Seega on nurgale vastavaks üldistatud impulsiks impulsimoment.

Viimasest näitest selgub, et üldistatud impulsid on erinevatel koordinaatide valikul üldiselt erineva füüsikalise tähendusega suurused. Üldistatud impulss ja impulss Newtoni mehaanikas ei pruugi kokku langeda ka siis, kui üldistatud koordinaatideks on ristkoordinaadid. Viimane lahkenevus esineb siis, kui potentsiaal sõltub ka osakeste kiirustest²³.

²³Näiteks elektromagnetväljas liikuvat laetud osakest kirjeldab potentsiaal (2.8.6), kusjuures vastav Lagrange'i funktsioon on (2.8.8) (mitterelativistlikul juhul). Ristkoordinaatidele vastav üldistatud impulss on siis

$$\mathbf{p} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}. \quad (2.7.6)$$

2.8 Kiirusest sõltuv üldistatud potentsiaal. Laetud osake elektromagnetväljas

Valemi (2.5.17) alusel on lihtne näha, et võrrandite (2.5.21) kuju säilib ka siis, kui tuua sisse Lagrange'i funktsiooni

$$L = T - \mathcal{U}, \quad (2.8.1)$$

kus sisaldub lisaks üldistatud koordinaatidest ja ajast ka üldistatud kiirustest sõltuv *üldistatud potentsiaal* \mathcal{U} , mis on seotud üldistatud jõuga kujul

$$Q_j = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (2.8.2)$$

Selline situatsioon realiseerub elektromagnetväljas liikuva laetud osakese korral. Laengule e mõjub siis Lorentzi jõud

$$\mathbf{F} = e \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \}. \quad (2.8.3)$$

Elektrivälja tugevus $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ja magnetvälja induksioon $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ on määratud välja skaalarpotentsiaali $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$ ja vektorpotentsiaali $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ kaudu,

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.8.4)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.8.5)$$

Üldistatud potentsiaal

$$\mathcal{U} = e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \quad (2.8.6)$$

määrab nüüd Lorentzi jõu (2.8.3),

$$\mathbf{F} = -\nabla \mathcal{U} + \frac{d}{dt} \nabla_v \mathcal{U}, \quad (2.8.7)$$

kus $\nabla_v = (\partial/\partial v_x, \partial/\partial v_y, \partial/\partial v_z)$. Lagrange'i funktsioon avaldub valemite (2.8.1) ja (2.8.6) alusel

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (2.8.8)$$

Lagrange'i võrrandite

$$\frac{d}{dt} \nabla_v L - \nabla L = 0 \quad (2.8.9)$$

abil saame siis

$$m \ddot{\mathbf{r}} = e \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \}. \quad (2.8.10)$$

Tulemuseks on elektromagnetväljas liikuva laetud osakese klassikalised liikumisvõrrandid ²⁴.

²⁴Üsna üldistest kaalutlustest lähtudes on võimalik konstrueerida elektromagnetväljas liikuva relativistliku laetud osakese Lagrange'i funktsiooni (m on nüüd osakese seisumass)

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} - e(\varphi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (2.8.11)$$

Viimane ei ole enam osakese kineetilise ja potentsiaalse energia vahe. Asendades relativistliku Lagrange'i funktsiooni Lagrange'i võrranditesse (2.8.9), mis järelduvad siin vähima mõju printsiibist (vt punkt 3.2), jõutakse relativistliku osakese liikumisvõrranditeni

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \}, \quad (2.8.12)$$

kus

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \quad (2.8.13)$$

on relativistliku osakese kolmemõõtmeline impulss.

Ülesanded

Ülesanne 2.8.1 Tuletage valemi (2.8.7) alusel Lorentzi jõu avaldis.

Ülesanne 2.8.2 Tuletage Lagrange'i võrranditest laetud osakese klassikalised liikumisvõrrandid (2.8.10).

Ülesanne 2.8.3 Tuletage Lagrange'i võrranditest laetud osakese relativistlikud liikumisvõrrandid (2.8.12).

2.9 Dissipatsioon

Mehaanilisele süsteemile mõjuvate etteantud jõudude hulgas võib olla nii potentsiaalseid (ka üldistatud mõttes) kui mittepotentsiaalseid. Viimaste oluliseks näiteks on dissipatsioonijõud, mis toimivad keskkonnas liikuvale süsteemile. Dissipatsiooniprotsessi tulemusena muutub süsteemi mehaaniline energia keskkonna energiaks. Dissipatsioonijõudude $\mathbf{F}_n^{(d)}$ olemasolu korral Lagrange'i võrrand (2.5.21) modifitseerub võrrandiks

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(d)}; \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.9.1)$$

kus

$$Q_j^{(d)} = \sum_n \mathbf{F}_n^{(d)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_n}{\partial q_j} \quad (2.9.2)$$

on dissipatsioonijõududele vastav üldistatud jõud.

Küllalt sageli on osakesele mõjuv dissipatsioonijõud (hõõrdejõud) kujuga

$$\mathbf{F}_n^{(d)} = (-\eta_x v_{nx}, -\eta_y v_{ny}, -\eta_z v_{nz}); \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.9.3)$$

kus

$$\begin{pmatrix} \eta_x & 0 & 0 \\ 0 & \eta_y & 0 \\ 0 & 0 & \eta_z \end{pmatrix} \quad (2.9.4)$$

on *dissipatsioonitensor* (*hõõrdetensor*)²⁵. Antud tüüpi dissipatsioonijõude võib esitada *Rayleigh' dissipatsioonifunktsiooni abil*, mis on defineeritud järgmise osakeste kiiruse komponentide funktsioonina:

$$D = \frac{1}{2} \sum_n (\eta_x v_{nx}^2 + \eta_y v_{ny}^2 + \eta_z v_{nz}^2). \quad (2.9.5)$$

Dissipatsioonijõud avalduvad nüüd

$$\mathbf{F}_n^{(d)} = -\nabla_{v_n} D. \quad (2.9.6)$$

²⁵Kuna dissipatsioonitensor on sümmeetriline, siis saab selle alati Descartes'i koordinaattelgede pöörete abil väärdiagonaalkujule

Dissipatsioonifunktsiooni füüsikalise mõtte selgitamiseks leiame elementaarse töö, mida teeb süsteem summaarse hõõrdumise ületamiseks,

$$-\sum_n \mathbf{F}_n^{(d)} \cdot d\mathbf{r}_n = -\sum_n \mathbf{F}_n^{(d)} \cdot \mathbf{v}_n dt = \sum_n (\eta_x v_{nx}^2 + \eta_y v_{ny}^2) dt = 2D dt. \quad (2.9.7)$$

Seega tuleb interpreteerida suurust $2D$ hõõrdumisest tingitud mehaanilise süsteemi energia dissipatsiooni kiirusena.

Valemitest (2.9.2) ja (2.9.6) järeldeb, et dissipatsioonijõududega assotsieeruvad üldistatud jõud avalduvad dissipatsioonifunktsiooni kaudu selliselt:

$$Q_j^{(d)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.9.8)$$

Lagrange'i võrrandid (2.9.1) saavad nüüd kuju

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.9.9)$$

Liikumisvõrrandid on siin määratud Lagrange'i funktsiooni ja dissipatsioonifunktsiooniga.

Ülesanded

Ülesanne 2.9.1 *Kontrollige võrduse (2.9.6) kehtivust.*

Ülesanne 2.9.2 *Kontrollige võrduse (2.9.8) kehtivust.*

Vihje: kasulikuks võib osutuda seos (2.5.10)

3 Vähima mõju printsiip

3.1 Sissejuhatus

Eelmises peatükis lähtuti süsteemi liikumisvõrrandite tuletamisel osakeste asukohtadest mingil fikseeritud ajahetkel ja vaadeldi, millised väikesed kõrvalekalded, virtuaalsed nihked, antud asukohtadest oleksid sel ajahetkel võimalikud. Käesolevas peatükis kasutatakse teistsugust skeemi, kus vaadeldakse süsteemi liikumist ajahetkede t_1 ja t_2 vahel ning liikumisvõrrandid tuletatakse lähtudes osakeste trajektooride võimalikest virtuaalsetest kõrvalekalletest - *trajektooride variatsioonidest* - süsteemi tegelikust füüsilisest liikumisest. Liikumisvõrranditeni jõutakse siin teatud variatsiooniprintsiibi postuleerimisega, mis võimaldab erinevate trajektooride seast välja valida füüsilised.

Kirjeldatud lähenemisviise võiks piltlikult nimetada vastavalt „lokaalseks“ ja „globaalseks“ - esimesel juhul vaadeldakse osakeste asukohti ja nende lähiümbrusi etteantud *ajahetkel*, teisel juhul uuritakse aga etteantud *ajavahemiku* jooksul läbitud trajektoore kui tervikuid.

Kui süsteemi liikumine oli piiratud (holonoomsete) seostega, polnud osakeste koordinaadid enam sõltumatud. Sellest tulenevate ebamugavuste vältimiseks võeti kasutusele sõltumatud üldistatud koordinaadid, mis seoste olemasolu vaikumisi arvestavad. Sama lähenemist kasutatakse ka antud peatükis ning variatsiooniprintsiip sõnastatakse juba üldistatud koordinaatides.²⁶

Enne variatsiooniprintsiibi sõnastamist tuleb täpsemalt määratleda, mida tähendab süsteemi liikumine ajahetkest t_1 ajahetkeni t_2 . Nagu varemgi on süsteemi konfiguratsioon mingil kindlal ajahetkel määratud üheselt üldistatud koordinaatidega q_1, q_2, \dots, q_s . Üldistatud koordinaatidest võime moodustada vektorid (q_1, q_2, \dots, q_s) , kusjuures kõikide selliste vektorite hulka võib vaadelda s -mõõtmelise hüperruumina, mida nimetame *konfiguratsiooniruumiks*. Süsteemi konfiguratsiooni kirjeldab punkt selles ruumis. Aja möödudes süsteemi konfiguratsioon muutub ning vastava punkti liikumine konfiguratsiooniruumis joonistab välja parameetrilise joone $q_j(t)$, mille parameetrik on aeg t . Seda joont nimetame *süsteemi trajektoorig* ja see kirjeldab süsteemi kui terviku liikumist.

Kõik kujuteldavad trajektoorig, mis võivad viia süsteemi konfiguratsiooni $q_j(t_1)$ ajahetkel t_1 üle konfiguratsiooniks $q_j(t_2)$ ajahetkel t_2 ei saa ilmselt füüsilised olla. Tingimus selleks, et süsteemi trajektorig oleks füüsikaline, postuleeritakse variatsiooniprintsiibi ehk *vähima mõju printsiibi* kaudu. Viimase sõnastamiseks defineerime *mõjufunktsionaali*

$$S[q_j(t)] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt, \quad (3.1.1)$$

mis seab igale trajektoorig vastavusse reaalarvu. Valemis (3.1.1) on $L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t)$ süsteemi Lagrange'i funktsioon. Rõhutagem, et nii defineeritud mõjufunktsionaal ei sõltu üldistatud koordinaatide valikust.

Vähima mõju printsiip *postuleerib*, et

süsteemi füüsiliste trajektooride jaoks on mõjufunktsionaal ekstremaalne,

²⁶Punktis 3.5 analüüsitakse ka seda, kuidas käsitleda seoseid, mis üldistatud koordinaatide valikus ei kajastu, st. olukorda, kus üldistatud koordinaadid omakorda teatud seoseid rahuldama peavad.

st füüsikalised trajektoolid peavad rahuldama tingimust

$$\delta S[q_j(t)] = 0, \quad (3.1.2)$$

kusjuures varieerimisel hoitakse trajektoolid alghetkel t_1 ja lõpphetkel t_2 fikseerituna (st nõutakse $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$).

Tingimus (3.1.2) on funktsionaalanalüüsi analoog matemaatilisest analüüsist tuntud tingimusele $\frac{df(x)}{dx} = 0$ funktsiooni $f(x)$ ekstreemumi jaoks. Vähima mõju printsiibi rakendamiseks tuleb kasutada variatsiooniarvutust, millest on antud ülevaade lisas „Variatsiooniarvutuse alused“. Antud peatükk on (matemaatilise korrektsuse arvelt) esitatud nii, et tuletuskäikude mõistmiseks piisaks mitme muutuja funktsioonide diferentsiaal- ja integraalarvutuse tundmisest.

Järgmises punktis näitame, et vähima mõju printsiibist järelduvad Lagrange'i võrrandid. See võimaldab käsitleda vähima mõju printsiipi Newtoni kolme seaduse asemel fundamentaalse postulaadina. Ühtlasi märgime, et vähima mõju printsiibist on tuletatavad süsteemi dünaamikat kirjeldavad võrrandid ka paljudes teistes füüsika harudes. Näiteks nii Maxwelli võrrandid, mis kirjeldavad elektromagnetvälja dünaamikat, kui Einsteini võrrandid, mis seovad üldrelatiivsusteoorias materia ja aegruumi geomeetria, on tuletatavad vähima mõju printsiibist. Seega on tegemist väga üldise printsiibiga.

3.2 Lagrange võrrandite tuletamine vähima mõju printsiibist

Eelmises peatükis näitasime, et liikumisvõrrandid üldistatud koordinaatides on Lagrange'i võrrandid (2.5.21). Kuna variatsiooniprintsiibi sissetoomisega muutub vaid matemaatiline formalism, siis peavad vähima mõju printsiipi rahuldavad trajektoolid alluma ka Lagrange'i võrranditele. Järgnevalt näitame, et see nii ka on. Selleks peame leidma trajektoori, mis muudab mõjufunktsionaali ekstreemaalseks.

3.2.1 Meenutus funktsiooni ekstreemumpunktide leidmisest

Meetod püstitatud eesmärgi teostamiseks sarnaneb meetodiga, millega leitakse funktsiooni ekstremaalne väärtus. Meenutagem, et tingimus selleks, et mitme muutuja funktsioon $f(\mathbf{r})$ oleks ekstremaalne oli $\nabla f = 0$. Olgu selle võrrandi lahendiks punkt \mathbf{r}^* . Viimase tingimuse võib ümber sõnastada järgmiselt: \mathbf{r}^* on ekstreemumpunkt, kui $f(\mathbf{r})$ selle infinitesimaalsel nihkel $\delta \mathbf{r}$ esimeses lähenduses samaks jääb.. Selles veendumaks vaatleme \mathbf{r} väikest nihet $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$ ja leiame Taylori rittaarenduse abil vastava f muutuse:

$$\delta f = f(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \nabla f \cdot \delta \mathbf{r}, \quad (3.2.1)$$

Kui nõuda, et $\delta f = 0$ kehtib kõikvõimalike väikeste nihete $\delta \mathbf{r}$ korral, siis peab kehtima ∇f .²⁷ Vastupidiselt, kui $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*$, siis esimeses lähenduses $\delta f = 0$, st funktsioon on ekstremaalne.

²⁷Veenduge selles kasutades järgmist kolme nihet: $\delta \mathbf{r} = (\delta x, 0, 0)$, $\delta \mathbf{r} = (0, \delta y, 0)$, $\delta \mathbf{r} = (0, 0, \delta z)$. Tingimus $\delta f = 0$ peab kehtima kõigil kolmel juhul.

3.2.2 Mõjufunktsionaali varieerimine

Analoogselt leitakse ka mõjufunktsionaali ekstreemumine. Kuna viimase argumendiks on aga etteantud alg- ja lõpppunktiga trajektoor, siis tuleb varieerida trajektoori hoides selle otspunktid muutumatuna. Täpsemalt valime ühe trajektoori $q_j(t)$ ja sellest infinitesimaalselt erineva trajektoori $q_j(t) + \delta q_j(t)$ ning uurime vastavat mõjufunktsionaali muutust $\delta S[q_j(t)] \equiv S[q_j(t)] - S[q_j(t)]$. Füüsikalise trajektoori leidmiseks tuleb uurida, millal kehtib tingimus $\delta S = 0$. Kui funktsiooni ekstreemaalsuse tingimus annab võrrandi ekstreemumpunkti leidmiseks, siis funktsionaali ekstreemaalsete väärtuste leidmiseks tuleb (üldjuhul) lahendada diferentsiaalvõrrand. Selles veendumiseks tuleb aga arvutada:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) \delta q_j dt + \underbrace{\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j}_{=0} \Big|_{t_1}^{t_2}, \end{aligned}$$

kus viimane liige võrdub nulliga, sest variatsioonid alg- ja lõpphetkel on nullid: $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$. Näeme, et kui Lagrange'i võrrandid (2.5.21) kehtivad, siis mõjufunktsionaali variatsioon kaob. Veidi keerukam on veenduda vastupidises, st näidata, et tingimusest $\delta S = 0$ järelduvad Lagrange'i võrrandid. Selleks tuleb tähele panna, et trajektoori variatsioon δq_i on suvaline väike funktsioon ja üldistatud koordinaatide variatsioonid on definitsiooni järgi lineaarselt sõltumatud, mis tähendab, et nende ees asuv kordaja peab võrduma nulliga.²⁸ Kokkuvõttes oleme näidanud, et tingimus (3.1.2) on samaväärne väitega, et

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0. \quad (3.2.2)$$

Oleme tuletanud *Lagrange'i võrrandid*.

3.3 Klassikaliste osakeste süsteemi Lagrange'i funktsioon

Süsteemi liikumisvõrrandite (Lagrange'i võrrandite) tuletamisel lähtudes vähima mõju printsiibist ei ole Lagrange'i funktsioon, üldiselt rääkides, defineeritud kineetilise ja potentsiaalse energia vahena. See on lihtsalt teatav üldistatud koordinaatide, üldistatud kiiruste ja aja funktsioon, mis asendatuna Lagrange'i võrranditesse annab süsteemi õiged liikumisvõrrandid. Allpool näitame, kuidas on võimalik konkretiseerida osakeste süsteemi Lagrange'i funktsiooni kuju, võttes aluseks mõned väga üldised printsiibid nagu inertiaalsete taustsüsteemide olemasolu, ruumi homogeensus ja isotroopsus, aja homogeensus ning Galilei relatiivsuspriintiip.

Kõigepealt teeme aga järgneva jaoks ühe olulise üldise märkuse. Olgu meil kaks Lagrange'i funktsiooni, mis erinevad teineteisest suvalise üldistatud koordinaatide ja aja funktsiooni ajalise

²⁸Selle väite matemaatilisel range vorm kannab nime variatsioonarvutuse põhilemma.

täistuletise võrra,

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}. \quad (3.3.1)$$

Vastavate mõjufunktsionaalide

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt \quad (3.3.2)$$

ja

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q_j, \dot{q}_j, t) dt \quad (3.3.3)$$

jaoks kehtib siis

$$S' = S + f(q_j(t_2), t_2) - f(q_j(t_1), t_1). \quad (3.3.4)$$

Võttes arvesse, et

$$\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$$

saame

$$\delta S = \delta S'. \quad (3.3.5)$$

Seega ei muutu mõjufunktsionaali variatsioon seoses üleminekuga (3.3.1) ning tingimustest $\delta S = 0$ ja $\delta S' = 0$ saadavad liikumisvõrrandid langevad kokku. Võib ka öelda, et Lagrange'i funktsioon on määratud aditiivse ajalise täistuletise täpsusega suvalisest üldistatud koordinaatide ja aja funktsioonist.

Edasi vaatleme klassikaliste osakeste suletud süsteemi. Alustame sellise süsteemi lihtsaimast erijuhust - vabast osakesest.

3.3.1 Vaba klassikalise osakese Lagrange'i funktsioon

Ruum ja aeg on homogeenid ning ruum on isotroopne inertsiaalsetes taustsüsteemides. Öeldu võib formuleerida ka ühe võimaliku inertsiaalse taustsüsteemi definitsioonina: *taustsüsteeme, kus ruum ja aeg on homogeenid ning ruum on isotroopne, nimetatakse inertsiaalseteks.*

Vaatleme vaba osakest inertsiaalses taustsüsteemis. Seoses ruumi ja aja homogeenusega võib sellise osakese Lagrange'i funktsioon sõltuda ainult osakese kiirusest, mitte aga osakese asukohast ruumis ja ajast. Seoses ruumi isotroopsusega ei saa Lagrange'i funktsioon sõltuda osakese kiiruse suunast. Seega vaba osakese korral võib Lagrange'i funktsioon sõltuda ainult osakese kiiruse moodulist

$$L = L(\mathbf{v}^2). \quad (3.3.6)$$

Järgnevalt vaatleme, millised piirangud seab osakese Lagrange'i funktsiooni kujule Galilei relatiivsuspriintiip. Liikugu inertsiaalne taustsüsteem K inertsiaalse taustsüsteemi K' suhtes kiirusega \mathbf{u} . Kui osakese kiirus süsteemis K on \mathbf{v} , siis süsteemis K' on osakese kiiruseks $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. Süsteemis K on vaba osakese Lagrange'i funktsioon siis antud valemiga (3.3.6), süsteemis K' aga valemiga

$$L' = L(\mathbf{v}'^2) = L(\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u}^2). \quad (3.3.7)$$

Kuna Galilei relatiivsuspriprintsibi kohaselt ei muutu liikumisvõrrandid üleminekul ühest inertsiaalsest taustsüsteemist teise, siis võivad Lagrange'i funktsioonid L ja L' erineda ainult täisdiferentsiaali võrra mingist ruumikoordinaatide ja aja funktsioonist. Et Galilei relatiivsuspriintsip peab kehtima suvalise kiiruse \mathbf{u} korral, siis võime valida sellise Galilei teisenduse, kus kiirus \mathbf{u} on infinitesimaalne. Viimane võte lubab meil funktsiooni L' infinitesimaalse kiiruse astmete järgi ritta arendada,

$$L(\mathbf{v}'^2) = L(\mathbf{v}^2) + \frac{\partial L(\mathbf{v}^2)}{\partial \mathbf{v}^2} 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathcal{O}(\mathbf{u}^2), \quad (3.3.8)$$

kus $\mathcal{O}(\mathbf{u}^2)$ tähistab infinitesimaalse kiiruse teist ja kõrgemat järku liikmeid. Seda liiget võib edaspidises ignoreerida. Nõuame nüüd, et teine liige viimase võrduse paremal pool oleks võrdne täistuletisega aja järgi (sel juhul on rahuldatud tingimus (3.3.1)). Seega peab leiduma selline funktsioon $f(\mathbf{x}, t)$, et kehtiks

$$\frac{df(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial L(\mathbf{v}^2)}{\partial \mathbf{v}^2} 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (3.3.9)$$

Viimane saab aga juhtuda vaid siis, kui $\frac{\partial L(\mathbf{v}^2)}{\partial \mathbf{v}^2} = \text{const.}$ ehk kui L on võrdeline kiiruse \mathbf{v} ruuduga. Valides võrdeteguri kujul $m/2$ on vaba klassikalise osakese Lagrange'i funktsiooni esitav kujul

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2, \quad (3.3.10)$$

kus kordajat m nimetatakse *osakese massiks* ja võrduse paremat poolt - *osakese kineetiliseks energiaks*. Tuleb rõhutada, et (3.3.10) annab kõige üldisema *ühe osakese* Lagrange'i funktsiooni, mis rahuldab nelja ülalloeletud sümmeetriat. Seejuures on huvitav märkida, et vabu osakesi saab eristada vaid üheainsa parameetri - massi m - järgi.

3.3.2 Klassikaliste osakeste suletud süsteemi Lagrange'i funktsioon

Osakeste süsteem on *suletud*, kui osakestele ei mõju (vähemalt ligikaudu) jõud süsteemiväliste kehade või väljade poolt.

Kui osakesed omavahel ei interakteeru, siis on osakeste süsteemi Lagrange'i funktsioon võrdne osakeste kineetiliste energiatega summaga:

$$L = \sum_n \frac{1}{2} m_n \mathbf{v}_n^2. \quad (3.3.11)$$

Interakteeruvate osakeste korral lisandub Lagrange'i funktsioonile osakeste koordinaatide funktsioon $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, mis sõltub interaktsiooni iseloomust, st

$$L = \sum_j \frac{1}{2} m \mathbf{v}_j^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (3.3.12)$$

Viimane valem annab klassikaliste osakeste suletud süsteemi Lagrange'i funktsiooni üldise kuju

Descartes'i koordinaatsüsteemis ²⁹. Suurust

$$T = \frac{1}{2} \sum_n m_n \mathbf{v}_n^2 \quad (3.3.13)$$

nimetatakse *süsteemi kineetiliseks energiaks* ja suurust $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ - *süsteemi potentsiaalseks energiaks*, mis on tingitud osakestevahelisest interaktsioonist.

Potentsiaalse energia sõltuvus osakeste koordinaatidest antud ajahetkel väljendab asjaolu, et klassikaliste osakeste vaheline interaktsioon levib ruumis lõpmata kiiresti.

Teades Lagrange'i funktsiooni saab tuletada liikumisvõrrandid

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_n} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_n} = 0, \quad (3.3.14)$$

kus

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_n} \equiv \nabla_{\mathbf{v}_n} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_n} \equiv \nabla_{\mathbf{r}_n} \equiv \nabla_n. \quad (3.3.15)$$

Juhul, kui kirjeldame süsteemi suvalistes üldistatud koordinaatides, on Lagrange'i funktsioon kujuga

$$L = \frac{1}{2} \sum_{jj'} a_{jj'}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_j \dot{q}_{j'} - U(q_1, \dots, q_s). \quad (3.3.16)$$

Siin võib süsteemi kineetiline energia

$$T = \frac{1}{2} \sum_{jj'} a_{jj'}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_j \dot{q}_{j'} \quad (3.3.17)$$

lisaks üldistatud kiirustele sõltuda koefitsientide $a_{jj'}$ kaudu ka üldistatud koordinaatidest.

3.3.3 Klassikaliste osakeste avatud süsteemi Lagrange'i funktsioon

Seoses sõltuvusega süsteemivälisest jõududest võib potentsiaalne energia olla ka aja funktsiooniks, nii et süsteemi Lagrange'i funktsioon on üldiselt kujuga

$$L = \frac{1}{2} \sum_{jj'} a_{jj'}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_j \dot{q}_{j'} - \mathcal{U}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t), \quad (3.3.18)$$

kus nagu varemgi võivad koefitsiendid $a_{jj'}$ võivad sõltuda ka üldistatud koordinaatidest.

Samuti tuleb rõhutada, et avatud süsteemides ei pruugi eelmistes alapunktides käsitletud sümmeetriad kehtida. Samas eeldatakse üldjuhul, et avatud süsteemid on mõne suurema suletud süsteemi alamsüsteemid³⁰, kusjuures vastava suletud süsteemi Lagrange'i funktsioon rahuldab ülal toodud sümmeetriaid, st. on esitatav kujul (3.3.12).

²⁹Kui lähtuda ainult fundamentaalsetest sümmeetriakaalutlustest, siis võib funktsiooni U panna kirja veelgi üldisemalt. Me võime öelda, et osakestevahelist interaktsiooni kirjeldab suurus U , mis saab ruumilise homogeensuse tõttu sõltuda vaid osakeste kohavektorite vahedest $\mathbf{r}_{nn'} \equiv \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n'}$, Galilei relatiivsuspriprintsipi tõttu vaid osakeste suhtelistest kiirustest $\mathbf{v}_{nn'} \equiv \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{n'}$ ning ei saa ajalise homogeensuse tõttu sõltuda ilmutatud kujul ajast. Ruumi isotroopsuse tagamiseks võib U sõltuda vaid skalaarsetest suurustest, mis on konstrueeritud ülal mainitud vektoreist: $\mathbf{r}_{nn'} \cdot \mathbf{r}_{mm'}$, $\mathbf{r}_{nn'} \times \mathbf{r}_{mm'} \cdot \mathbf{v}_{kk'}$ jne. Interakteeruvate osakeste süsteemi Lagrange'i funktsiooni üldkuju lisasümmeetriate sissetoomiseta rohkem kitsendada ei saa.

³⁰Näiteks süsteemi Maa-Kuu adekvaatseks kirjeldamiseks tuleb arvestada välisjõududega, st. seda süsteemi vaadeldakse kui avatud süsteemi. Samas saab seda käsitleda kui suurema suletud süsteemi alamsüsteemi. Vastava (ligilähedaselt) suletud süsteemina võib käsitleda näiteks Päikesesüsteemi või Linnutee galaktikat.

Ülesanded

Ülesanne 3.3.1 *Kontrollige vahetult, et Lagrange'i võrrand ei muutu, kui asendada seal Lagrange'i funktsiooni L Lagrange'i funktsiooniga L' valemist (3.3.1).*

Ülesanne 3.3.2 *Näidake, et üleminekul inertsiaalsest taustsüsteemist K inertsiaalsesse taustsüsteemi K' , kusjuures K liigub süsteemi K' suhtes lõpliku kiirusega \mathbf{u} , Lagrange'i funktsioon (3.3.10) muutub teatava funktsiooni ajalise täistuletise võrra.*

Ülesanne 3.3.3 *Näidake, et tingimusest (3.3.9) järeldub, et Lagrange'i funktsioon kujul $L = L(\mathbf{v}^2)$ peab olema võrdeline kiiruse ruuduga.*

Ülesanne 3.3.4 *Lähtudes teisendusvalemistest $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(q_1, \dots, q_s)$ avaldage koefitsiendid $a_{jj'}(q_1, \dots, q_s)$ valemis (3.3.16) või (3.3.18).*

Ülesanne 3.3.5 *Leidke osakese kineetiline energia sfäärilistes koordinaatides.*

Ülesanne 3.3.6 *Leidke osakese kineetiline energia silindrilistes koordinaatides.*

Ülesanne 3.3.7 *Näidake, lähtudes osakeste süsteemi Lagrange'i funktsioonist (3.3.16), et süsteemi üldistatud energia H , mis on defineeritud valemiga (2.6.8), võrdub süsteemi kineetilise ja potentsiaalse energia summaga, $H = T + U$, kus kineetiline energia T on antud valemiga (3.3.17).*

3.4 Noetheri teoreem mehaanikas

Noetheri teoreem on oluline tulemus, mis seob omavahel jäävusseadused ja mõjufunktsionaali diferentseeruvad sümmeetriad. Järgnevalt tuletame selle teoreemi osakeste süsteemide jaoks ja kasutame seda impulsi, impulsimomendi ja energia jäävuse uurimiseks. Noetheri teoreem kehtib ka väljateooriates, mida on võimalik formuleerida vähima mõju printsiibi kaudu, ning samuti ka eri- ja üldrelatiivsusteoorias, kuid nende juhtude analüüs jääb antud kursuse raamest välja.

Enne jätkamist tuleks täpsustada mõjufunktsionaali diferentseeruva sümmeetria mõistet. Olgu osakeste süsteemi esialgne trajektoor $q_j(t)$ ja vastav ajaparaameeter t . Vaatame uut ajaparaameetrit t' ja trajektoori $q'_j(t')$, mis on esialgsete suurustega seotud diferentseeruva teisenduse kaudu. Teisenduse diferentseeruvus on siinkohal oluline, kuna see võimaldab vaadelda teisendust infinitesimaalsel kujul³¹

$$t \rightarrow t' = t + \epsilon\vartheta, \quad (3.4.1a)$$

$$q_j(t) \rightarrow q'_j(t') = q_j(t) + \epsilon\psi_j(t), \quad (3.4.1b)$$

kus ϵ on infinitesimaalne teisenduse parameeter. Edaspidises on mugavam, kui vanu koordinaate esitatakse uue ajaparaameetri kaudu. Arendades $q_j(t)$ kuni esimese järguni parameetri ϵ järgi ritta

$$q'_j(t') = q_j(t' - \epsilon\vartheta) + \epsilon\psi_j(t' - \epsilon\vartheta) = q_j(t') + \epsilon(\psi_j(t') - \dot{q}_j(t')\vartheta) \quad (3.4.2)$$

leiame, et koordinaatide kogu muutust kirjeldab suurus

$$\bar{\psi}_j = \psi_j - \dot{q}_j\vartheta. \quad (3.4.3)$$

Osakeste kiirus teiseneb kui

$$\dot{q}_j(t) \rightarrow \dot{q}'_j(t') = \dot{q}_j(t') = \dot{q}_j(t) + \epsilon\dot{\bar{\psi}}_j, \quad (3.4.4)$$

Olgu $q_j(t)$ on süsteemi füüsikaline trajektoor, mis rahuldab Lagrange võrrandeid (3.2.2). See määratakse vastavalt vähima mõju printsiibile (3.1.2) kui trajektoor, mis vastab mõjufunktsionaali ekstremaalsele väärtusele. Eeldusel, et mõjufunktsionaal on teisendusel (3.4.1) invariantne, st. on rahuldatud tingimus

$$S[q_j(t)] = S[q'_j(t')], \quad (3.4.5)$$

vastab ka trajektoor $q'_j(t')$ mõjufunktsionaali statsionaarsele väärtusele ja peab seega rahuldama Lagrange võrrandeid. Kui $q_j(t)$ ja $q'_j(t')$ on seotud pideva teisendusega, mille suhtes on mõjufunktsionaal invariantne, siis nimetatakse seda teisendust *mõjufunktsionaali pidevaks sümmeetriaks*.

Noetheri teoreem väidab, et *igale mõjufunktsionaali pidevale sümmeetriale vastab jäävusseadus*.

Olgu mõjufunktsionaali sümmeetriateisenduse infinitesimaalne kuju antud valemiga (3.4.1). Näitame, et sellisest sümmetriast järeldub jäävusseadus.

³¹Analoogselt võime diferentseeruvat funktsiooni $f(x)$ väärtuse punktis $x+\epsilon$ esitada kujul $f(x+\epsilon) = f(x) + \epsilon f'(x)$. Diferentseeruvus tagab tuletise $f'(x)$ olemasolu.

Esiialgse ja teisendatud mõjufunktsionaali kuju on

$$S[q_j(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(\tau), \dot{q}_j(\tau), \tau) d\tau, \quad S[q'_j(t')] = \int_{t_1+\epsilon\vartheta}^{t_2+\epsilon\vartheta} L(q'_j(\tau), \dot{q}'_j(\tau), \tau) d\tau, \quad (3.4.6)$$

Leiame nende suuruste vahe, arendades mõjufunktsionaali parameetri ϵ järgi kuni esimese järguni ritta³²

$$\begin{aligned} S[q'_j(t')] - S[q_j(t)] &= \left. \frac{d}{d\epsilon} S[q'_j(t')] \right|_{\epsilon=0} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) = L|_{t_2}^{t_1} \epsilon\vartheta + \int_{t_1}^{t_2} \epsilon \left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \bar{\psi}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{\bar{\psi}}_j \right) dt = \\ &= L|_{t_2}^{t_1} \epsilon\vartheta + \int_{t_1}^{t_2} \epsilon \left(\sum_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\psi_j - \dot{q}_j\vartheta) + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} (\psi_j - \dot{q}_j\vartheta) \right) dt = \\ &= L|_{t_2}^{t_1} \epsilon\vartheta + \int_{t_1}^{t_2} \epsilon \frac{d}{dt} \left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\psi_j - \dot{q}_j\vartheta) \right) dt = \\ &= \left(\left(L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \vartheta + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \psi_j \right) \Big|_{t_2}^{t_1} \epsilon = 0. \end{aligned}$$

Järelikult on suurus

$$\left(L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \vartheta + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \psi_j = \text{const}. \quad (3.4.8)$$

ajas jääv.

3.4.1 Impulsi jäävuse seadus ja sümmeetria ruumiliste nihete suhtes

Vaatame N osakese süsteemis koordinaadi nihkeid suunas \mathbf{n} . Sellise nihke tulemusena teisenevad osakeste kohavektorid $\mathbf{r}_n \equiv (x_n, y_n, z_n) \equiv (x_{n1}, x_{n2}, x_{ni})$ kohavektoriteks $\mathbf{r}'_n = \mathbf{r}_n + \delta r \mathbf{n}$, kus δr on nihke pikkus. Vastav infinitesimaalne nihe on seega

$$\mathbf{r}_n(t) \rightarrow \mathbf{r}'_n(t) = \mathbf{r}_n(t) + \epsilon \mathbf{n}, \quad (3.4.9)$$

kus ϵ on infinitesimaalne parameeter.

Olgu süsteemi lagranžiaan invariantne ruumiliste nihete suhtes. Kuna $\vartheta = 0$, siis on vastavalt valemile (3.4.8) sellises süsteemis jäävaks suuruseks

$$\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_n} \cdot \mathbf{n} = \text{const}. \quad (3.4.10)$$

Viimane on aga osakeste süsteemi koguimpulss suunas \mathbf{n} .

³²Tuletuskäigus kasutatakse integraalset tuletise võtmise valemit

$$\frac{d}{dx} \int_{y_2(x)}^{y_1(x)} f(x, y) dy = f(x, y_2(x)) y'_2(x) - f(x, y_1(x)) y'_1(x) + \int_{y_2(x)}^{y_1(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy. \quad (3.4.7)$$

Lagranžiaani sümmeetria \mathbf{n} suunaliste ruumiliste nihete suhtes tagab, et süsteemi koguimpulss suunas \mathbf{n} on jääv.

Vaatame näitena osakeste süsteemi, mille potentsiaalne energia

$$U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (3.4.11)$$

on invariantne nihkel suunas \mathbf{n}

$$U(\mathbf{r}_n + \mathbf{n}\Delta) = U(\mathbf{r}_n), \quad (3.4.12)$$

kus Δ on suvaline reaalarv. Märkigem, et viimase tingimuse diferentsiaalne kuju ütleb, et potentsiaali osatuletis suunas \mathbf{n} on null:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U(\mathbf{r}_n + \epsilon \mathbf{n}) - U(\mathbf{r}_n)}{\epsilon} = \mathbf{n} \cdot \sum_n \nabla_n U = 0. \quad (3.4.13)$$

Süsteemi kineetiline energia on

$$T = \sum_n \frac{m_n \dot{\mathbf{r}}_n^2}{2}. \quad (3.4.14)$$

Jäävusseadus (3.4.10) võtab nüüd kuju:

$$\mathbf{n} \cdot \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_n} = \mathbf{n} \cdot \sum_n \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_n} = \mathbf{n} \cdot \sum_n m_n \dot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = \text{const}. \quad (3.4.15)$$

Seega on süsteemi koguimpulss vastavalt Noetheri teoreemile jääv.

3.4.2 Impulsimomendi jäävuse seadus ja sümmeetria pöörete suhtes*

Vaatame pööordeid ümber koordinaatsüsteemi nullpunkti. Sellise pööorde teostab ortogonaalne maatriks O :

$$\mathbf{r}_n(t) \rightarrow \mathbf{r}'_n(t) = O\mathbf{r}_n(t). \quad (3.4.16)$$

Meid huvitavad infinitesimaalsed teisendused. Vastavalt esitame ortogonaalse maatriksi kujul $O_{ij} = \delta_{ij} + \epsilon_{ij}$, kus δ_{ij} on ühikteisenduse maatriks ja ϵ_{ij} on infinitesimaalne kõrvalekalle ühikteisendusest. Asendades viimase avaldise ortogonaalsuse tingimusse $\delta_{ij} = \sum_k O_{ik} O_{kj}$ ja jättes kõrvale teist järku panuse, leiame, et ϵ_{ij} on kaldsümmeetriline maatriks: $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$. Kaldsümmeetrilised maatriksid sisaldavad kolme sõltumatut parameetrit. Viimasest asjaolust lähtuvalt defineerime kolm antisümmeetrilist maatriksit

$$J_x \equiv J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y \equiv J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z \equiv J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4.17)$$

Need maatriksid saab kompaktsemalt kirja panna kasutades antisümmeetrilist *Levi-Civita sümboolit* ϵ_{ijk} : $(J_i)_{jk} = \epsilon_{ijk}$. Kõik kaldsümmeetrilised maatriksid on esitatavad maatriksite J_x, J_y, J_z lineaarkombinatsioonina. Seega $\epsilon_{ij} = \epsilon_x J_x + \epsilon_y J_y + \epsilon_z J_z$, kus $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ on infinitesimaalsed parameetrid.

Saab näidata, et $\epsilon_x J_x, \epsilon_y J_y, \epsilon_z J_z$ vastavad infinitesimaalsetele pööretele vastavalt ümber x, y ja z telje. Kõikide 3×3 ortogonaalsete maatriksite hulka koos maatriksite korrutustehtega nimetatakse *ortogonaalseks rühmaks* $O(3)$. Ortogonaalse maatriksi determinant võib omada väärtusi ± 1

või -1 , kusjuures ortogonaalne maatriks determinandiga $+1$ tekitab pöörde, kuid determinant -1 tähendab pööret ja peegeldust. Selliste 3×3 ortogonaalsete maatriksite hulka, mille determinant on $+1$, nimetatakse *spetsiaalseks ortogonaalseks rühmaks* $SO(3)$. Maatriksid J_x, J_y, J_z ja nende kõikvõimalikud lineaarkombinatsioonid moodustavad rühma $SO(3)$ Lie algebra $so(3)$.

Otsitav infinitesimaalne teisendus on kujul

$$\mathbf{r}_n(t) \rightarrow \mathbf{r}'_n(t) = \mathbf{r}_n(t) + \epsilon_x J_x \mathbf{r}_n(t) + \epsilon_y J_y \mathbf{r}_n(t) + \epsilon_z J_z \mathbf{r}_n(t). \quad (3.4.18)$$

Olgu süsteemi lagranžiaan invariantne pöörete suhtes. Näitena sellisest süsteemist võib tuua osakeste süsteemi, kus osakesed asuvad tsentraalsümmeetrilises väljas potentsiaaliga $U(r)$ ja osakevahelised jõud on põhjustatud samuti mõne tsentraalsümmeetrilise potentsiaali poolt. Kuna $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ on sõltumatud suurused, siis annavad need vastavalt valemile (3.4.8) kolm jäävusseadust:

$$\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_n} J_x \mathbf{r}_n = const., \quad \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_n} J_y \mathbf{r}_n = const., \quad \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_n} J_z \mathbf{r}_n = const. \quad (3.4.19a)$$

Kasutades Levi-Civita sümbolit võib viimased esitada kompaktsemal kujul,

$$\sum_n \sum_{jk} \frac{\partial L}{(\dot{\mathbf{r}}_n)_j} \epsilon_{ijk} (\mathbf{r}_n)_k = const. \quad (3.4.20)$$

Viimases avaldises tunneme ära vektorkorrutise. Järelikult

$$\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_n} \times \mathbf{r}_n = const. \quad (3.4.21)$$

See suurus on aga osakeste süsteemi koguimpulsimoment. Seega kehtib järgmine väide:

Lagrange'i funktsiooni sümmeetria pöörete suhtes tagab süsteemi koguimpulsimomendi jäävuse.

Saab näidata, et kui süsteem on invariantne pöörete suhtes ümber \mathbf{n} sihilise telje, siis on vastav infinitesimaalne teisendus kujul

$$\mathbf{r}_n(t) \rightarrow \mathbf{r}'_n(t) = \mathbf{r}_n(t) - \epsilon \mathbf{n} \times \mathbf{r}_n(t) \quad (3.4.22)$$

ja süsteemi koguimpulsimoment suunas \mathbf{n} on jääv:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} = const. \quad (3.4.23)$$

Seega kehtib järgmine väide:

Lagrange'i funktsiooni sümmeetria pöörete suhtes ümber mingi telje tagab, et vaadeldava süsteemi koguimpulsimoment selle telje suunas on jääv.

3.4.3 Energia jäävuse seadus ja sümmeetria ajaliste nihete suhtes

Infinitesimaalne ajaline nihe on esitatav kujul

$$t \rightarrow t' = t + \epsilon \vartheta. \quad (3.4.24)$$

Koordinaadid muutuvad selle teisendusel vastavalt valemitele (3.4.1) ja (3.4.2) järgmiselt:

$$q_j(t) \rightarrow q'_j(t') = q_j(t) \quad (3.4.25)$$

Valemi (3.4.8) alusel on jäävaks suuruseks nüüd

$$H = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L. \quad (3.4.26)$$

Suurus H annab süsteemi koguenergia.

Vaatame ühe osakese süsteemi lagranžiaaniga

$$L = T - V = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - V(\mathbf{r}). \quad (3.4.27)$$

Selle süsteemi jaoks kehtib

$$H = \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + V(\mathbf{r}), \quad (3.4.28)$$

mis on täpselt ühe osakese süsteemi koguenergia nagu oodatud.

Noetheri teoreemi rakendamiseks peame veenduma, et antud süsteemi mõjufunktsionaal on ajaliste nihete suhtes invariantne³³. Selleks vaatame üldisemat juhtu, kus mõjufunktsionaal on antud kujul

$$S[q_j(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt \quad (3.4.29)$$

ja uurime vahet

$$\begin{aligned} S[q'_j(t)] - S[q_j(t)] &= \int_{t_1+\epsilon T}^{t_2+\epsilon T} L(q'_j(t), \dot{q}'_j(t), t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(q'_j(t), \dot{q}'_j(t+\epsilon T), t+\epsilon T) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t+\epsilon T) - L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t)) dt = \\ &= \epsilon T \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

See võrdub nulliga, kui lagranžiaani ajast *eksplitsiitselt* ei sõltu, st. kui

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (3.4.31)$$

Ülaltoodud näites on antud tingimus täidetud, mistõttu on selle süsteemi koguenergia vastavalt Noetheri teoreemile jääv suurus.

³³Kahes eelmises punktis oleme piirdunud lagranžiaani invariantisusega, kuid antud juhul see lähenemine ei tööta. Kui $L = T - V$ oleks invariantne ajaliste nihete suhtes, siis peaks see olema ajas jääv suurus, mida see aga pole.

3.5 Kiirusest sõltuvad seosed

Vaatleme süsteemi, mis peab rahuldama üldiselt mitteholonoomseid seoseid kujul

$$f_\alpha(q_j, \dot{q}_j) = 0, \quad (3.5.1)$$

kus $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ on üldistatud koordinaadi indeks ja $\alpha \in \{1, 2, \dots, M\}$ seoste indeks. Valemi (3.5.1) alusel kehtib

$$\sum_{\alpha=1}^M \lambda_\alpha f_\alpha(q_j, \dot{q}_j) = 0, \quad (3.5.2)$$

kus tundmatuid suurusi λ_α nimetatakse *Lagrange'i kordajateks*. Sellise süsteemi liikumisvõrrandite leidmiseks tuleb varieerida mõjufunktsionaali

$$S[q_j(t), \lambda_\alpha] = \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \sum_{\alpha=1}^M \lambda_\alpha f_\alpha \right) dt \quad (3.5.3)$$

nii N üldistatud koordinaadi, kui M Lagrange kordaja järgi. Füüsikalised trajektoorid määratakse vähima mõju printsiibist kujul $\delta S[q_j, \lambda_\alpha] = 0$. Varieerimine Lagrange kordajate järgi annab tingimused (3.5.1). Varieerimine koordinaatide järgi lihtsustaval eeldusel $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(t)$ annab võrrandid

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = Q_j, \quad (3.5.4)$$

kus

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^M \left(\lambda_\alpha \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) + \frac{d\lambda_\alpha}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (3.5.5)$$

Võrrandisüsteemid (3.5.4) koos (3.5.1) koosnevad $N+M$ võrrandist $N+M$ muutuja jaoks. Seda saab nüüd interpreteerida kui $N + M$ muutujaga holonoomset süsteemi koos üldistatud jõududega Q_j . Üldistamine juhule, kus $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(q_j, \dot{q}_j, t)$, on ilmne.

Ülesanne 3.5.1 Tuletada valem (3.5.5).

4 Hamiltoni formalism

Antud peatükk käsitleb üht Lagrange'i formalismi edasiarendust - Hamiltoni formalismi. Et viimane on lihtsalt üks alternatiivne viis süsteemi liikumisvõrrandite kirjapanekuks, siis ei saa see sisaldada midagi füüsikaliselt uut. Samuti ei pruugi see ülesannete lahendamist praktikas lihtsamaks muuta. (Samas, eks otsustamine, millised võtted konkreetse ülesande lahendamise mugavamaks ja lihtsamaks teevad, sõltu lahendaja subjektiivsest hinnangust.) Hamiltoni formalismi elegantne matemaatiline struktuur on aga üldises teooriaarenduses kasulikuks osutunud, olles oluliseks lähtepunktiks näiteks nii Hamilton-Jacobi teooriale, kaoseteooriale kui üldistele häiritusmeetoditele klassikalises mehaanikas. Samuti mängib see tähtsat rolli nii statistilises mehaanikas kui ka kvantmehaanika formuleerimises ja viimase sõnavara kujunemises.

4.1 Üldised kaalutlused

Nii Newtoni II seadus osakeste süsteemi jaoks (1.8.8)

$$m_n \ddot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_n), \quad n = 1 \dots N$$

kui Lagrange'i võrrandid (3.2.2)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad j = 1 \dots s$$

annavad süsteemi liikumisvõrrandid teist järku diferentsiaalvõrrandite süsteemina. Newtoni II seaduse juhul tuli need võrrandid lahendada $3N$ koordinaadi ja Lagrange võrrandite juhul s üldistatud koordinaadi jaoks.

Kui dünaamiliste muutujate esimest järku tuletisi või nende (sobivalt defineeritud) funktsioone käsitleda uute *sõltumatute* suurustena, siis on mõlemad võrrandisüsteemid esitatavad esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemina. Selle lähenemise hinnana kasvab muutujate arv kaks korda. Näiteks Newtoni II seadusest tulenevad võrrandid on puhtformaalselt esitatavad kujul

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{r}_n, m_n^{-1} \mathbf{p}_n) \\ \dot{\mathbf{r}}_n = m_n^{-1} \mathbf{p}_n \end{cases}, \quad n = 1 \dots N, \quad (4.1.1)$$

kus kohavektorite \mathbf{r}_n ja impulsside \mathbf{p}_n komponente käsitletakse $3N + 3N = 6N$ sõltumatu dünaamilise muutujana. Märkigem, et see võrrandisüsteem on samaväärne Newtoni II seadusega osakeste süsteemi jaoks (1.8.8) ning teist järku tuletisi selles tõepoolest ei esine.

Analoogselt saab Lagrange'i võrrandeid esitada $2s$ sõltumatu muutuja esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemina. Antud juhul on uuele võrrandisüsteemile lisanduvateks muutujateks mugav valida üldistatud impulsid. Diferentsiaalvõrrandite süsteem võtab nüüd kuju

$$\begin{cases} \dot{p}_j = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial q_j} \\ p_j = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_j} \end{cases}, \quad j = 1 \dots s. \quad (4.1.2)$$

Oleme seega kirja pannud diferentsiaalvõrrandite süsteemi, mis sisaldab $2s$ dünaamilist muutujat - üldistatud koordinaate q_j ja impulsse p_j - ning vaid nende esimest järku tuletisi. Kuna Lagrange'i

funktsioon $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ on üldjuhul keerukas üldistatud koordinaatide ja kiiruste funktsioon, siis ei muuda taoline asendus probleemi lihtsamaks. Oleks hea, kui üldistatud kiirused oleksid avaldatud üldistatud impulsside (ning vajadusel ka üldistatud koordinaatide ja aja) kaudu nagu tegime näites (4.1.1). Võtamegi eesmärgiks võrrandisüsteemi (4.1.2) parema poole esitamise vaid üldistatud koordinaatide ja impulsside kaudu. Seatud eesmärgi saavutamise muudab keerukamaks asjaolu, et võrrandites (4.1.2) esineb ka osatuletis üldistatud kiiruste järgi, millest tuleks samuti vabaneda. Viimane asjaolu viitab sellele, et jõuvõtte: üldistatud kiiruste avaldamine üldistatud koordinaatide ja impulsside kaudu ning saadud avaldiste asendamine võrrandisüsteemi (4.1.2), ei anna lihtsamaid võrrandeid. Seepärast proovime jõuvõtte asemel leida sellise võrrandisüsteemi (4.1.1) teisenduse, mis annab samaväärse esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi, kus osatuleti üldistatud kiiruste järgi enam ei esine. Nagu edaspidi näeme kirjeldab otsitavat üleminekut Legendre'i teisendus ja uuteks liikumisvõrranditeks on Hamiltoni võrrandid.

Enne jätkamist täpsustame aga veidi üldist tausta ja terminoloogiat:

Diferentsiaalvõrrandite süsteemide teoriast on teada, et süsteemi lahend on üheselt määratud, kui oleme fikseerinud algtingimused. Esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemide korral on tarvilikeks algtingimusteks muutujate (antud näidetes (üldistatud) koordinaatide ja (üldistatud) impulsside) väärtused alghetkel³⁴.

Hamiltoni formalismis sõnastatakse liikumisvõrrandid esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemina, kusjuures dünaamilisteks muutujateks valitakse üldistatud koordinaadid q_j ja üldistatud impulsid p_j . Neid suuruseid nimetatakse *kanoonilisteks muutujateks* või ka *kanoonilisteks koordinaatideks*. Seega teades üldistatud koordinaate ja impulsse mingil ajahetkel, on liikumisvõrranditest võimalik leida nende suuruste väärtused suvalisel ajahetkel, sest võrrandid on esimest järku. Öeldakse, et q_j ja p_j väärtused kindlal ajahetkel määravad süsteemi *oleku* - need sisaldavad kogu vajaliku informatsiooni, mida süsteemi arengu kirjeldamiseks tarvis on. Viimane asjaolu on kontseptuaalse tähtsusega.

Vaatleme veel põgusalt, kuidas kirjeldada süsteemi arengut Hamiltoni mehaanikas. Meenu-tagem, et üldistatud koordinaatidest võis moodustada vektorid (q_1, q_2, \dots, q_s) , kusjuures kõikide selliste vektorite hulka võib vaadelda s -mõõtmelise hüperruumina, mida nimetame *konfiguratsiooniruumiks*. Analoogselt saab defineerida s -mõõtmelise *impulsiruumi*, mis on kõigi üldistatud impulssidest mõõdustatud vektorite (p_1, p_2, \dots, p_s) hulk. Nende kahe ruumi ühendamine annab ruumi, mille punktid on esitatavad kujul $(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s)$. Seda ruumi nimetatakse *faasiruumiks*, kusjuures vastavalt eespool kirjeldatule määrab iga faasiruumi punkt süsteemi oleku. Ajas muutuv olek moodustab faasiruumis joone, mis kirjeldab vaadeldava süsteemi arengut. Tasub tähele panna, et q_j ja p_j tundmine, st. teadmine, millises faasiruumi punktis süsteem mõnel ajahetkel asub, võimaldab ennustada süsteemi asukohta suvalisel ajahetkel. Seega peab iga faasiruumi punkti läbima parajasti üks süsteemi arengut kirjeldav joon. Teisisõnu: süsteemi võimalikke arenguid kirjeldavad jooned faasiruumis ei lõiku.

³⁴Teist järku diferentsiaalvõrrandite süsteemide puhul on lahendi üheseks määramiseks tarvis teada lisaks dünaamiliste muutujate esimesi tuletisi alghetkel, kolmandat järku diferentsiaalvõrrandite süsteemide puhul on lisaks tarvis teada nii esimesi kui teisi tuletisi jne.

4.2 Legendre'i teisendus ja Hamiltoni võrrandid

Otsime viisi liikumisvõrrandite esitamiseks esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemina, kus dünaamilisteks muutujateks on üldistatud koordinaadid q_j ja üldistatud impulsid p_j . Võimalik kandidaat, näitena toodud diferentsiaalvõrrandite süsteem (4.1.2), pole aga kuigi praktiline ega ka ilus, sest Lagrange'i funktsioon sõltub aga üldjuhul keerulisel viisil üldistatud kiirustest \dot{q}_j . Oleks parem, kui suudaksime Lagrange'i funktsiooni asendada mõne kanooniliste muutujate q_j ja p_j funktsiooniga ning seeläbi kaotada ka osatuletised $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}$. Sellist üleminekut võimaldab *Legendre'i teisendus*.

Legendre'i teisenduse idee selgitamiseks vaatleme esialgu kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$. Selle funktsiooni täisdiferentsiaal on

$$df = u dx + v dy, \quad (4.2.1)$$

kus

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (4.2.2)$$

Meie eesmärk on muutujate x ja y asendamine uute muutujatega u ja y nii, et diferentsiaalsed suurused oleksid edaspidi esitatud du ja dy kaudu. Selleks võtame kasutusele suuruste y ja u funktsiooni, mis on defineeritud võrdusega

$$g = f - ux. \quad (4.2.3)$$

Selle funktsiooni täisdiferentsiaal on

$$dg = df - u dx - x du. \quad (4.2.4)$$

Võrduse (4.2.1) asendamine g täisdiferentsiaali avaldisse annab

$$dg = v dy - x du, \quad (4.2.5)$$

mis ongi otsitud täisdiferentsiaali kuju. Seega, kuna dg on täisdiferentsiaal, peab kehtima

$$v = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}. \quad (4.2.6)$$

Viimased on samasuste (4.2.2) analoogid.

Rakendame Legendre'i teisendust nüüd ka Lagrange'i funktsioonile. Lagrange'i funktsiooni täisdiferentsiaal on

$$dL = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (4.2.7)$$

asendades siia üldistatud impulsi definitsiooni

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},$$

ja kasutades Lagrange'i võrrandeid kujul

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j},$$

saame

$$dL = \sum_j (\dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (4.2.8)$$

Viimasest võrdusest on näha, et otsitav kanooniliste muutujate funktsioon on antud Legendre' teisendusega

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t), \quad (4.2.9)$$

kus $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t)$, st. üldistatud kiirused on avaldatud üldistatud koordinaatide, impulsside ja aja kaudu. Saadud funktsiooni H nimetatakse *Hamiltoni funktsiooniks* ning selle täisdiferentsiaal on ühest küljest

$$\begin{aligned} dH &= \sum_j (\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j) - dL = \\ &= \sum_j (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Teisest küljest võib aga Hamiltoni funktsiooni täisdiferentsiaali kirjutada kujul

$$dH = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (4.2.11)$$

mis annab esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{cases} \quad (4.2.12)$$

koos samasusega

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (4.2.13)$$

Võrrandeid (4.2.12) nimetatakse *Hamiltoni võrranditeks*.

Paneme tähele, et Legendre'i teisendus (4.2.9) annab meile juba tuttava süsteemi koguenergia (2.6.8) (üldistatud energia)³⁵, ning sel viisil Hamiltoni funktsiooni ka tõlgendatakse. Samas on suuruste (2.6.8) ja (4.2.9) vahel oluline erinevus - esimene on funktsioon üldistatud *koordinaatidest ja kiirustest*, teine aga funktsioon üldistatud *koordinaatidest ja impulssidest*.

Kokkuvõttes, kui oleme suutnud konstrueerida süsteemi Lagrange funktsiooni, siis üleminekuks Hamiltoni formalismile tuleb teha järgmised sammud:

- leida üldistatud impulsid $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$,
- avaldada üldistatud kiirused kanooniliste muutujate ja aja funktsioonina:³⁶ $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q_j, p_j, t)$,
- panna kirja funktsioon (4.2.9),
- asendada üle-eelmises punktis kanooniliste muutujate kaudu avaldatud üldistatud kiiruste avaldised funktsiooni (4.2.9). Tulemuseks on Hamiltoni funktsioon.

Olles leidnud Hamiltoni funktsiooni, saab liikumisvõrrandite kirjanepanekuks rakendada Hamiltoni võrrandeid (4.2.12).

³⁵Konkreetsama näite kohta vaata valemit (2.7.5). Märgime ka, et sama suurus on Noetheri teoreemist tulenevalt ajalisele homogeensusele vastav jääv suurus (3.4.26).

³⁶Märkigem, et alati pole üldistatud kiiruseid võimalik üldistatud koordinaatide, impulsside ja aja kaudu avaldada. Sel juhul öeldakse, et antud süsteem on *kõdunud*. Kõdunud süsteemidele Hamiltoni mehaanikat siin esitatud kujul rakendada ei saa.

4.2.1 Näide: ühemõõtmeline harmooniline ostsillaator erinevates formalismides

Kirjeldamiseks üleminekut Hamiltoni formalismile vaatame harmoonilist ostsillaatorit ühes dimensioonis. Harmoonilist ostsillaatorit kirjeldab potentsiaal

$$V(x) = \frac{k}{2}x^2, \quad (4.2.14)$$

kus x on osakese koordinaat - vaatlusalune dünaamiline muutuja - ja k on positiivne võrdetegur. Antud süsteemi Lagrange'i funktsioon on

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \quad (4.2.15)$$

ning Lagrange'i võrrandid annavad ootuspäraselt Newtoni II seaduse

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (4.2.16)$$

kus m on osakese mass ja $F = -kx$ on osakesele mõjuv jõud.

Hamiltoni funktsiooni leidmiseks paneme kõigepealt kirja üldistatud impulsi, mis langeb antud juhul kokku osakese lineaarse impulsiga:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad (4.2.17)$$

ja avaldame siit (üldistatud) kiiruse $\dot{x} = p_x/m$ ³⁷. Nüüd võime Legendre'i teisenduste (4.2.9) abil leida süsteemi Hamiltoni funktsiooni:

$$H = \dot{x}p_x - L = \frac{1}{m}p_x^2 - \left(\frac{1}{2}mp_x^2 - \frac{k}{2}x^2\right) = \frac{1}{2m}mp_x^2 + \frac{k}{2}x^2, \quad (4.2.18)$$

Liikumisvõrrandid on vastavalt Hamiltoni võrranditele (4.2.12)

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m}p_x, \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx, \end{cases} \quad (4.2.19)$$

kus esimene võrrand annab impulsi definitsiooni (4.2.17) ja teine kattub Lagrange'i võrrandiga (4.2.16) (ning seega ka Newtoni II seadusega).

4.3 Kanoonilised teisendused

Kanoonilised teisendused võimaldavad üle minna uutele muutujatele, nii et need oleks kanoonilised, st. säilib Hamiltoni võrrandite kuju.

Varasemalt käsitlesime koordinaatteisendusi kujul

$$Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_s, t), \quad j = 1, \dots, s, \quad (4.3.1)$$

kus Q_j ja q_j tähistavad vastavalt uusi ja vanu üldistatud koordinaate.

³⁷See samm oli antud juhul küll väga lihtne, kuid samas on see alati vajalik, kuna Hamiltoni funktsioon on funktsioon üldistatud koordinaatidest ja üldistatud impulssidest (mitte üldistatud koordinaatidest ja üldistatud kiirustest).

Soovime asendada q_j ja p_j uute kanooniliste koordinaatidega Q_j ja P_j (pööratavate) teisenduste

$$Q_j = Q_j(q_j, p_j, t), \quad P_j = P_j(q_j, p_j, t) \quad (4.3.2)$$

abil nii, et ka uute koordinaatide valikul kehtiksid Hamiltoni võrrandid kujul (4.2.12):

$$\begin{cases} \dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j}, \\ \dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j} \end{cases} \quad (4.3.3)$$

kus $K(Q_j, P_j)$ on Hamiltoni funktsioon uutes koordinaatides. Sellist teisendust $q_j, p_j \rightarrow Q_j, P_j$ nimetatakse *kanooniliseks teisenduseks*. Suvaline teisendus (4.3.2) ei pruugi anda liikumisvõrrandeid kujul (4.3.3). Märkigem veel, et üldistatud koordinaatide teisendus (4.3.1), kus uued üldistatud impulsid määratakse vastavalt definitsioonile valemist $P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_j}$, on kanoonilise teisenduse erijuht. Neid teisendusi nimetatakse *punktteisendusteks*. Samas pole kõiki kanoonilisi teisendusi punktteisendustena võimalik kirja panna, st. kanoonilised teisendused on punktteisendustest üldisemad. Järgnevalt vaatleme olulisemaid kanoonilise teisenduse omadusi ja esitusviise.

4.3.1 Kanooniline teisendus genereeriva funktsiooni abil

Meenutagem, et süsteemi dünaamika ei muutu, kui selle süsteemi Lagrange'i funktsioonile liidetakse ajaline täistuletis. Kuna Lagrange'i funktsioon on seotud Hamiltoni funktsiooniga Legendre'i teisenduse (4.2.9) kaudu, siis peab uues süsteemi Hamiltoni funktsioon K rahuldama seost³⁸

$$\sum_j \dot{q}_j p_j - H = \sum_j \dot{Q}_j P_j - K + \frac{dF}{dt}, \quad (4.3.5)$$

kus F on funktsioon üldistatud koordinaatidest ja impulssidest, mille kõik teist järku osatuletised on pidevad.

F võib olla nii vanade kanooniliste koordinaatide q_j, p_j kui ka uute kanooniliste koordinaatide Q_j, P_j ning aja t funktsioon. Kuna aga kehtivad üleminekureeglid (4.3.2), siis saab funktsiooni F esitada osaliselt uute ja osaliselt vanade kanooniliste koordinaatide kaudu. Õigupoolest määrab F kanoonilise teisenduse täpse kuju siis, kui see sõltub parajasti pooltest teisendatud kanoonilistest muutujatest Q_j, P_j ja pooltest teisendamata kanoonilistest muutujatest q_j, p_j . Sel juhul käitub F kui sild uute ja vanade kanooniliste koordinaatide vahel. Funktsiooni F nimetatakse siis *kanoonilise teisenduse generaatoriks*.

Valime generaatori F esialgu kujul

$$F = F_1(q_j, Q_j, t). \quad (4.3.6)$$

Kirjutades lahti F_1 ajalise täistuletise võrduses (4.3.5) saame

$$\sum_j \dot{q}_j p_j - H = \sum_j \dot{Q}_j P_j - K + \sum_j \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (4.3.7)$$

³⁸Üldjuhul võib nõuda, et kehtiks

$$\lambda \left(\sum_j \dot{q}_j p_j - H \right) = \sum_j \dot{Q}_j P_j - K + \frac{dF}{dt}, \quad (4.3.4)$$

kus λ on üldistatud impulssidest ja koordinaatidest sõltumatu kordaja. Antud kursuse raames seda teisendust ei käsitleta.

Siit on näha, et \dot{q}_j ja \dot{Q}_j elimineerimiseks peavad kehtima samasused

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \quad (4.3.8)$$

ning uue ja vana Hamiltoni funktsiooni vahel kehtib seega seos³⁹

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (4.3.9)$$

Enne teiste genereerivate funktsioonide kirjeldamise juurde asumist vaatame erijuhtu, kus

$$F_1 = \sum_j q_j Q_j. \quad (4.3.10)$$

Samasused (4.3.8) ja (4.3.9) annavad, et

$$Q_j = p_j, \quad P_j = -q_j \quad (4.3.11)$$

ja $K = H$. Seega vahetab see teisendus omavahel kanoonilised impulsid ja koordinaadid (märgi erinevus on muidugi olemas). Viimast võib tõlgendada kui asjaolu, et üldistatud impulsid ja koordinaadid on Hamiltoni mehaanikas teatud mõttes samaväärsed - impulsi võib asendada koordinaadiga, kui koordinaat asendatakse (miinus) impulsiga.⁴⁰

Järgnevalt vaatame olukorda, kus genereeriv funktsioon on funktsioon muutujatest q_j ja P_j . Siis peaks eespool toodud tuletuskäigu toimimiseks avaldise (4.3.7) vasakul poolel summa $\sum_j \dot{Q}_j P_j$ asemel ilmuma summa $\sum_j Q_j \dot{P}_j$. Selle saavutamiseks esitame funktsiooni valemis (4.3.5) kujul

$$F = F_2(q_j, P_j, t) - \sum_j Q_j P_j \quad (4.3.12)$$

Asendades funktsiooni F valemisse (4.3.5), saame tõepoolest

$$\sum_j \dot{q}_j p_j - H = \sum_j \dot{Q}_j P_j - K + \frac{dF_2}{dt} - \sum_j \left(\dot{Q}_j P_j + Q_j \dot{P}_j \right) = - \sum_j Q_j \dot{P}_j - K + \frac{dF_2}{dt}, \quad (4.3.13)$$

kus F_2 ajalise tuletise lahti kirjutamisel jõuame samasusega (4.3.7) analoogsse tulemuseni. Täistuletiste eemaldamiseks peavad nüüd olema täidetud tingimused

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \quad Q_j = -\frac{\partial F_2}{\partial P_j} \quad (4.3.14)$$

ning uue ja vana Hamiltoni funktsiooni vahel kehtib jällegi seos

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (4.3.15)$$

Analoogsed mõttekäigud annavad genereerivad funktsioonid kujul

$$F = F_3(p_j, Q_j, t) + \sum_j q_j p_j, \quad (4.3.16)$$

³⁹Viimase kasutamisel tuleb olla ettevaatlik, kuna K on seal funktsioon kanoonilistest muutujatest Q_j ja P_j , H aga muutujatest q_j ja p_j . Selle samasuse rakendamiseks tuleb q_j ja p_j esiteks Q_j ja P_j kaudu avaldada ning saadud avaldised Hamiltoni funktsiooni H sisestada, sama tuleb teha q_j avaldistega funktsioonis $\partial F_1 / \partial t$. Saadud funktsioonide liitmine annab lõpuks uue Hamiltoni funktsiooni K .

⁴⁰Rõhutame, et see asendus tuleb teha ka Hamiltoni funktsioonis H .

kus

$$q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j} \quad (4.3.17)$$

ja

$$F = F_4(p_j, P_j, t) + \sum_j q_j p_j - \sum_j Q_j P_j, \quad (4.3.18)$$

kus

$$q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j}, \quad p_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j}. \quad (4.3.19)$$

Oluline on tähele panna, et kõikidel juhtudel on Hamiltoni funktsiooni teisenduseeskiri ühesuguse kujuga

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (4.3.20)$$

mistõttu olukorras, kui genereeriv funktsioon ilmutatud kujul ajast ei sõltu, langevad teisendatud ja teisendamata Hamiltoni funktsioonid kokku. Märkigem, et sel juhul puudub aeg ilmutatud kujul ka üleminekureegleid (4.3.2). Seda erijuhtu - ajast sõltumatuid kanoonilisi teisendusi - vaatame järgmises punktis.

Käesoleva punkti lõpetuseks tuleb mainida, et iga kanoonilise teisenduse jaoks saab kirja panna genereeriva funktsiooni. See tähendab, et kui on teada üleminekureeglid (4.3.2), siis saab neid kasutada suuruste p_j ja P_j avaldamiseks q_j ja Q_j kaudu. Seejärel saab, lähtudes samasustest (4.3.8), kirja panna osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemi genereeriva funktsiooni F_1 jaoks. Kui teisendused on tõepoolest kanoonilised, on see süsteem põhimõtteliselt lahenduv. Märkigem veel, et F_1 pole üheselt määratud. Näiteks sellele suvalise vaid ajast sõltuva funktsiooni liitmine ei muuda üleminekureegleid (4.3.8).

4.3.2 Ajast sõltumatu kanooniline teisendus

Vaatame olukorda, kus (4.3.2) ei sõltu ajast. Sel juhul

$$Q_j = Q_j(q_j, p_j), \quad P_j = P_j(q_j, p_j). \quad (4.3.21)$$

Viimase teisenduse pöördteisendus on

$$q_j = q_j(Q_j, P_j), \quad p_j = p_j(Q_j, P_j), \quad (4.3.22)$$

Seosed (4.3.21) lubavad Hamiltoni funktsiooni esitada uute kanooniliste muutujate funktsioonina $H(Q_j, P_j) \equiv H(q_j(Q_j, P_j), p_j(Q_j, P_j))$.

Eelmisest peatükist teame, et ajast sõltumatu kanoonilise teisenduse korral $H = K^{41}$, mistõttu peavad kehtima Hamiltoni võrrandid (4.3.3):

$$\begin{cases} \dot{Q}_j = \frac{\partial H}{\partial P_j}, \\ \dot{P}_j = -\frac{\partial H}{\partial Q_j}. \end{cases} \quad (4.3.23)$$

⁴¹Selle võrduse all mõistetakse samasust $K(Q_j, P_j) = H(q_j(Q_j, P_j), p_j(Q_j, P_j)) \equiv H(Q_j, P_j)$.

Tuletamaks tingimused, mille Hamiltoni võrrandid (4.3.23) üleminekureeglitele (4.3.21) seavad, kirjutame eraldi lahti võrrandite vasakud ja paremad pooled. Esmalt uurime ajalisi täistuletisi:

$$\dot{Q}_j = \sum_{j'} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_{j'}} \dot{q}_{j'} + \frac{\partial Q_j}{\partial p_{j'}} \dot{p}_{j'} \right) = \sum_{j'} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_{j'}} \frac{\partial H}{\partial p_{j'}} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_{j'}} \frac{\partial H}{\partial q_{j'}} \right), \quad (4.3.24)$$

kus viimasel sammul kasutasime Hamiltoni võrrandeid \dot{q}_j ja \dot{p}_j jaoks. Analoogselt saame

$$\dot{P}_j = \sum_{j'} \left(\frac{\partial P_j}{\partial q_{j'}} \frac{\partial H}{\partial p_{j'}} - \frac{\partial P_j}{\partial p_{j'}} \frac{\partial H}{\partial q_{j'}} \right) \quad (4.3.25)$$

Edasi leiame Hamiltoni funktsiooni osatuletised uute kanooniliste muutujate järgi

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial Q_j} &= \sum_{j'} \left(\frac{\partial H}{\partial q_{j'}} \frac{\partial q_{j'}}{\partial Q_j} + \frac{\partial H}{\partial p_{j'}} \frac{\partial p_{j'}}{\partial Q_j} \right) \\ \frac{\partial H}{\partial P_j} &= \sum_{j'} \left(\frac{\partial H}{\partial q_{j'}} \frac{\partial q_{j'}}{\partial P_j} + \frac{\partial H}{\partial p_{j'}} \frac{\partial p_{j'}}{\partial P_j} \right) \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Võrrandite (4.3.23) vasaku ja parema poole võrdsustamine annab tingimused:

$$\frac{\partial Q_j}{\partial q_{j'}} = \frac{\partial p_{j'}}{\partial P_j}, \quad \frac{\partial Q_j}{\partial p_{j'}} = -\frac{\partial q_{j'}}{\partial P_j}, \quad \frac{\partial P_j}{\partial p_{j'}} = \frac{\partial q_{j'}}{\partial Q_j}, \quad \frac{\partial P_j}{\partial q_{j'}} = \frac{\partial p_{j'}}{\partial Q_j}, \quad (4.3.27)$$

kus samasuste vasakul poolel on osatuletised üleminekureeglist (4.3.21) ja paremal poolel selle pöördteisendusest (4.3.22), kusjuures samasuse kontrollimiseks tuleb mõlemad pooled avaldada samade muutujate kaudu. Esimeses samasuses on otstarbekas väljendada suuruseid Q_j ja p_j suuruste q_j ja P_j kaudu, teises suuruseid p_j ja P_j suuruste q_j ja Q_j kaudu jne.

4.3.3 Hamilton-Jacobi võrrand

Otsime genereerivat funktsiooni S , mille kaudu antud kanooniline teisendus on selline, et teise-
nenud süsteemi hamiltoniaan K on kõikjal null. Sellise teisenduse tundmine on kasulik, sest siis saavad liikumisvõrrandid väga lihtsa kuju:

$$\dot{Q}_j = 0, \quad \dot{P}_j = 0, \quad (4.3.28)$$

ehk selles süsteemis on kõik kanoonilised muutujad konstantsed.

Eelnevalt leidsime, et teisendatud Hamiltoni funktsioon on antud avaldisega (4.3.20). Nõudes, et see võrdub nulliga, jõuame tulemuseni

$$H(q_j, p_j) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (4.3.29)$$

Olgu $S = S(q_j, Q_j, t)$, kusjuures valemi (4.3.14) kohaselt $p_j = \partial S / \partial q_j$. Seega saame kirja panna esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi

$$H\left(q_j, \frac{\partial S}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (4.3.30)$$

mida nimetatakse *Hamilton'i-Jacobi võrrandiks*. Selle võrrandi lahend ongi otsitav genereeriv funktsioon S , mis viib Hamiltoni funktsiooni nulliks.

4.4 Poisson'i sulud

Olgu $H(q_j, p_j, t)$ uuritava süsteemi Hamiltoni funktsioon. Vaatame suvalise kanooniliste muutujate ja aja funktsiooni $A(q_j, p_j, t)$ ajalist täistuletist:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial A}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial A}{\partial t} = \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (4.4.1)$$

kus viimasel sammul kasutasime Hamiltoni võrrandeid (4.2.12). Et A on suvaline kanooniliste muutujate ja aja (diferentseeruv) funktsioon ja H võib olla mistahes süsteemi Hamiltoni funktsioon, siis on ülaltoodud avaldises antud ajaliste täistuletiste võimalikult üldine struktuur Hamiltoni formalismis. Viimasest asjaolust ajendatuna defineerime tehte $\{A, B\}$ kahe kanooniliste muutujate ja aja (diferentseeruva) funktsiooni $A(q_j, p_j, t)$ ja $B(q_j, p_j, t)$ vahel

$$\{A, B\} \stackrel{def}{=} \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right). \quad (4.4.2)$$

Tehtet $\{A, B\}$ nimetatakse *Poisson'i sulgudeks*⁴². Valem (4.4.1) võtab nüüd kuju

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (4.4.3)$$

Seega määravad suvalise kanooniliste muutujate (diferentseeruva) funktsiooni A ja süsteemi Hamiltoni funktsiooni H Poisson'i sulud suuruse A ajalise arengu vastavas süsteemis.

4.4.1 Poisson'i sulgude omadused

Poisson'i sulgude arvutamisel võivad kasulikuks osutuda selle algebralised omadused. Neist olulisimad on

$$\{aA + bB, C\} = a\{A, C\} + b\{B, C\}, \quad (4.4.4a)$$

$$\{A, B\} = -\{B, A\}, \quad (4.4.4b)$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0, \quad (4.4.4c)$$

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + \{A, C\}B, \quad (4.4.4d)$$

kus A, B ja C on kanooniliste muutujate (diferentseeruvad) funktsioonid ja a ning b on reaalarvud. Vastavalt öeldakse, et Poisson'i sulud on (a) *lineaarsed* ja (b) *antisümmeetrilised* ning rahuldavad (c) *Jacobi samasust* ja (d) *Leibnizi reeglit*.⁴³

Poisson'i sulud on *invariantsed kanooniliste teisenduste suhtes*. Selle väite täpsemaks sõnastamiseks vaatame üleminekut $q_j, p_j \rightarrow Q_j, P_j$ ja valime kaks funktsiooni $A(q_j, p_j, t), B(q_j, p_j, t)$, mille Poissoni sulge me arvutama hakkame, ning esitame need uutes muutujates Q_j, P_j : $A = A(q_j(Q_j, P_j, t), p_j(Q_j, P_j, t), t)$, $B = B(q_j(Q_j, P_j, t), p_j(Q_j, P_j, t), t)$. Leides osatuletised uute muutujate Q_j, P_j järgi saame Poisson'i sulud:

$$\{A, B\}_{Q,P} \stackrel{def}{=} \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial Q_j} \frac{\partial B}{\partial P_j} - \frac{\partial A}{\partial P_j} \frac{\partial B}{\partial Q_j} \right), \quad (4.4.5)$$

⁴²Tihti kasutatakse ka tähistust $\{A, B\}_P$.

⁴³Toodud omadustele tuginedes defineeritakse abstraktses algebras *Poisson'i algebraks* nimetatav algebraline struktuur. Tingimusest (d) (Leibnizi reeglist) loobumine annab *Lie algebraks* nimetatava algebralise struktuuri.

kus alaindeks Q, P osutab muutujatele. Analoogselt tähistame $\{A, B\}_{q,p}$, kui Poissoni sulg arvutatakse esialgsetes muutujates q_j, p_j . Juhul, kui üleminek $q_j, p_j \rightarrow Q_j, P_j$ on kanooniline, kehtib

$$\{A, B\}_{q,p} = \{A, B\}_{Q,P}. \quad (4.4.6)$$

Et võrduse pooltel on erinevate suuruste funktsioonid, siis tuleb võrduse kontrollimiseks selle mõlemaid pooli väljendada samade kanooniliste muutujate kaudu.

Et omadus (4.4.6) kehtib kõigi kanooniliste teisendustega seotud kanooniliste muutujate komplektide vahel, siis saab seda kasutada kontrollimaks, kas üleminek uutele muutujatele oli kanooniline.

4.4.2 Jäävusseaduste esitamine Poisson'i sulgude abil

Otsene järeldus valemist (4.4.3) on, et kui mõne ajast ilmutatud kujul mitte sõltuva suuruse $A(q_j, p_j)$ ja Hamiltoni funktsiooni Poisson'i sulg $\{A, H\}$ on null, siis on suurus A ajas konstantne. Poisson'i sulud võimaldavad seeläbi tuvastada jäävaid suuruseid. Jäävusseaduse A jaoks võib seega kirja panna kujul

$$\{A, H\} = 0. \quad (4.4.7)$$

Märkigem, et antisümmeetrilisuse (4.4.4b) tõttu on iga funktsiooni A Poisson'i sulg iseendaga alati null ($\{A, A\} = 0$). Valemi (4.4.3) rakendamine süsteemi Hamiltoni funktsioonile H , mis on ühtlasi süsteemi kogunergia, annab seega

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\{H, H\}}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (4.4.8)$$

mistõttu on süsteemi kogunergia jääv parajasti siis, kui Hamiltoni funktsioon ilmutatud kujul ajast ei sõltu (st kui $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$).

4.4.3 Hamiltoni võrrandite esitamine Poisson'i sulgude abil

Samasusest (4.4.3) järeldub otseselt, et Hamiltoni võrrandid (4.2.12) on Poisson'i sulgude abil esitatuna sümmeetrilised

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \{q_j, H\}, \\ \dot{p}_j = \{p_j, H\}. \end{cases} \quad (4.4.9)$$

Märgime ka, et kanooniliste muutujate q_j, p_j Poisson'i sulud rahuldavad tingimusi

$$\{q_j, p_{j'}\} = \delta_{jj'}, \quad \{q_j, q_{j'}\} = \{p_j, p_{j'}\} = 0. \quad (4.4.10a)$$

A Ülesanded

A.1 Harjutustund 1

Selle praktikumi eesmärk on uurida punktmassi liikumist ühes dimensioonis ja käsitleda üht konkreetset rakendust energia jäävuse kasutamiseks trajektoori arvutamisel

Ülesanne 1.1

Vaatleme osakese liikumist ühes dimensioonis. Näidake, et (statsionaarses) konservatiivses jõuväljas liikuva punktmassi koguenergia on jääv. ♣

Lahendus Statsionaarses jõuväljas liikuvale osakesele mõjuv jõud on määratud potentsiaaliga $V(x)$: $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$. Punktmassi liikumisvõrrand liikumisvõrrand selles süsteemis on⁴⁴:

$$m\ddot{x} = -\frac{dV(x)}{dx}. \quad (\text{A.1.1})$$

Osakese koguenergia on kineetilise ja potentsiaalse energia summa:

$$E(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) + V(x) = \frac{(m\dot{x})^2}{2} + V(x) \quad (\text{A.1.2})$$

Peame näitama, et energia ajas ei muutu, st et selle ajaline tuletis on null. Esiteks leiame ajalise tuletise:

$$\frac{dE(x, \dot{x})}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{(m\dot{x})^2}{2} + V(x) \right) = m\dot{x}\ddot{x} + \frac{dV(x)}{dx}\dot{x}, \quad (\text{A.1.3})$$

kus kasutasime liitfunktsioonist tuletise võtmise reeglit. Järgnevalt kasutame Newtoni II seadust (A.1.1) teist järku tuletise kaotamiseks. See annab

$$\frac{dE(x, \dot{x})}{dt} = \dot{x} \left(-\frac{dV(x)}{dx} + \frac{dV(x)}{dx} \right) = 0. \quad (\text{A.1.4})$$

Mis tähendab, et energia on ajas muutumatu suurus.

Ülesanne 1.2

Osake ühedimensionaalses potentsiaaliaugus. V on potentsiaal, x on koordinaat, V_0 ja a on konstandid.

$$V = V_0 \tan^2(\pi x/2a) \quad (\text{A.1.5})$$

Kui keha koguenergia on E , leia x sõltuvus ajast ja võnkumise periood τ . Uuri madala ($E \ll V_0$) ja kõrge ($E \gg V_0$) energia piirjuhte. ♣

⁴⁴Punkt tähistab ajalist tuletist: $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$.

Lahendus Energia jäävuse korral kehtib

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + V_0 \tan^2(\pi x/2a) = E \quad (\text{A.1.6})$$

saame aja t jaoks

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{E - V_0 \tan^2(\pi x/2a)}} dx = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{\cos(\pi x/2a)}{\sqrt{E - (E + V_0) \sin^2(\pi x/2a)}} dx \quad (\text{A.1.7})$$

Teeme muutujavahetuse

$$\sin(\pi x/2a) = \sqrt{\frac{E}{E + V_0}} \sin \varphi \quad (\text{A.1.8})$$

$$\frac{\pi}{2a} \cos(\pi x/2a) dx = \sqrt{\frac{E}{E + V_0}} \cos \varphi d\varphi \quad (\text{A.1.9})$$

ja saame

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2a} \sqrt{\frac{2(E + V_0)}{m}} t \quad (\text{A.1.10})$$

avaldame φ , asendame selle valemisse (A.1.8) ja saame x ajas muutumist kirjeldava seose:

$$\sin(\pi x/2a) = \sqrt{\frac{E}{E + V_0}} \sin \left(\frac{\pi}{2a} \sqrt{\frac{2(E + V_0)}{m}} t + \varphi_0 \right) \quad (\text{A.1.11})$$

periood τ on:

$$\tau = 4a \sqrt{\frac{m}{2(E + V_0)}} \quad (\text{A.1.12})$$

ja pöördepunktid (kohad, kus liikumine muudab suunda) $\pm A$:

$$\sin(\pi A/2a) = \sqrt{\frac{E}{E + V_0}} \quad (\text{A.1.13})$$

$$\tan(\pi A/2a) = \sqrt{\frac{E}{V_0}} \quad (\text{A.1.14})$$

Madala energia piirjuht Madala energia piirjuhul $E \ll V_0$ on $\pi A/2a \ll 1$ ehk nurgad on väikesed ja võime (A.1.11) põhjal kirjutada:

$$\pi x/2a \approx \sqrt{\frac{E}{V_0}} \sin \left(\frac{\pi}{2a} \sqrt{\frac{2(V_0)}{m}} t + \varphi_0 \right) \quad (\text{A.1.15})$$

see on harmooniline võnkumine nurksagedusega $\omega_0 = \frac{\pi}{2a} \sqrt{\frac{2(V_0)}{m}}$ ja amplituudiga $\frac{2a}{\pi} \sqrt{\frac{E}{V_0}} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}$. Potentsiaal on sellisel juhul harmoonilise ostsillaatori potentsiaali moodi:

$$V_0(\pi x/2a)^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \quad (\text{A.1.16})$$

Kõrge energia piirjuht Kõrge energia piirjuhul ($E \gg V_0$) saame (A.1.11)st:

$$\sin(\pi x/2a) \approx \sin\left(\frac{\pi}{2a}\sqrt{\frac{2(E)}{m}}t + \varphi_0\right) \quad (\text{A.1.17})$$

jättes ära algaasi φ_0 , saame

$$\pi x/2a \approx \left(\frac{\pi}{2a}\sqrt{\frac{2(E)}{m}}t - 2n_+\pi\right) \quad (\text{A.1.18})$$

ehk

$$-\pi x/2a \approx \left(\frac{\pi}{2a}\sqrt{\frac{2(E)}{m}}t + (2n_- + 1)\pi\right) \quad (\text{A.1.19})$$

kus n on täisarv. Koordinaadi muutumine ajas:

$$x \approx \sqrt{\frac{2(E)}{m}}t - 4an_+ \quad (\text{A.1.20})$$

ehk

$$x \approx -\sqrt{\frac{2(E)}{m}}t - 4a\left(n_- + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{A.1.21})$$

Osake liigub justkui põrgates kahe jääga seina $x = \pm a$ vahel, kiirus on konstantne $\sqrt{2E/m}$. Potentsiaal meenutab lõpmatut ristkülikukujulist potentsiaaliauku. $V = 0$ kui $|x| < a$, $V \rightarrow \infty$ kui $|x| > a$.

A.2 Harjutustund 2

Selle praktikumi eesmärk on uurida kahe keha probleemi Newtoni mehaanikas üldiselt ja gravitatsiooniteoorias.

Ülesanne 1.3

Olgu antud punktmosakesed kohavektoritega \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 ning massidega m_1 , m_2 ning mõjutagu osake 1 osakest 2 jõuga

$$\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (\text{A.2.1})$$

1. Pange kirja süsteemi liikumisvõrrandid koordinaatides \mathbf{r} ja \mathbf{R} , kus

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (\text{A.2.2})$$

2. Panna kirja süsteemi kineetiline energia koordinaatides \mathbf{r} ja \mathbf{R} .
3. Näidata, et süsteem on nihkeinvariantne, st kui $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ on lahendid, siis ka $\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_0$ on lahendid.



Ülesanne 1.4

Mõjugu osakeste vahel jõud kujul

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}f(|\mathbf{r}|) \quad (\text{A.2.3})$$

1. Näidata, et \mathbf{F} on konservatiivne. Leidke sellele jõule vastav potentsiaal U .
2. Näidata, et süsteemi koguimpulsimoment on jääv.
3. * Näidata, et süsteem on invariantne pööratel, st kui $\mathbf{r}(t)$ on lahend, siis $O\mathbf{r}(t)$ on lahend. O on ortogonaalne maatriks (rahuldab tingimust $O^T O = I$).

Vihje: Vektori mooduli võib esitada kujul $|\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{r}}$.



Ülesanne 1.5

Olgu punktmassi impulsimoment $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const}$ jääv.

1. Näidata, et punktmass liigub tasandil, mis on risti impulsimomendi vektoriga.
2. Leida \mathbf{L} sobivates silindrilistes koordinaatides.⁴⁵
3. Näidake, et impulsimomendi jäävusest järeldeb Kepleri II seadus.⁴⁶



Ülesanne 1.6

Vaatleme punktmassi potentsiaalses tsentraalsümmeetrilises jõuväljas potentsiaaliga $U(r)$.

1. Esitada liikumisvõrrandid silindrilistes koordinaatides.

*Vihje: Kasutage koordinaatide valikul ülesannete 2.2 ja 2.3 lahendusi, mis ütlevad, et tsentraalsümmeetrilises jõuväljas liigub punktmass tasandil. Pannes z -telje selle tasandiga ristu-
ma, saab liikumisvõrrandeid oluliselt lihtsustada.*

2. Avaldada nurkkiirus \mathbf{L} kaudu ja näidata, et

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}U_{eff}, \quad \text{kus} \quad U_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r). \quad (\text{A.2.5})$$

3. Pange kirja vastava kahe osakese süsteemi koguenergia massikeskme taustsüsteemis.

⁴⁵Üleminekureglid ristkoordinaatidelt x,y,z silindrilistele koordinaatidele r,θ,z on

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z. \quad (\text{A.2.4})$$

⁴⁶Kepleri II seadus:Päikest ja planeeti ühendav lõik katab ühesugustel ajavahemikel samasuguse pindala.



Ülesanne 1.7

Punktosake massiga m liigub tsentraalsümmeetrilise jõu väljas potentsiaaliga:

$$U(r) = -\frac{k}{r}. \quad (\text{A.2.6})$$

1. Näidata, et Laplace'i-Runge'-Lenzi vektor

$$\mathbf{K} := \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{A.2.7})$$

on liikumisintegraal. Näidata, et vektorid \mathbf{K} ja \mathbf{L} on risti.

2. Veenduda, et orbiidi võrrand on kujul

$$\frac{a(1 - e^2)}{r} = 1 + e \cos(\theta) \quad (\text{A.2.8})$$

ja et tegu on ellipsiga. Avaldada suurused a ja e suuruste \mathbf{K} ja \mathbf{L} kaudu.

3. Avaldada energia

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} \quad (\text{A.2.9})$$

suuruste \mathbf{K} ja \mathbf{L} kaudu.



A.3 Harjutustund 3

Selle praktikumi eesmärk on tutvuda seostega süsteemidega ja nende kirjeldamiseks kasutatava matemaatilise aparatuuriga. Praktikum keskendutakse üldistatud koordinaatide kontseptsiooni mõistmisele, millega kaasneb koordinaatteisendustega seotud tehniline töö. Vaadeldakse ka virtuaalseid nihkeid ja d'Alembert'i printsiibi rakendusi.

Ülesanne 1.8

Matemaatilise pendli varda pikkus l sõltub ajast etteantud viisil, $l = l(t)$.

1. Panna kirja seosed ja valida sobiv üldistatud koordinaat (eeldada, et liikumine toimub ühes tasandis). Kas need seosed on holonoomsed?
2. Avaldage pendli kohavektor, kiirus ja kiirendus valitud üldistatud koordinaadi kaudu.
3. Kui pendlile ei mõju ühtki välist jõudu, siis millised on seostele vastavad reaktsioonjõud? Veenduda, et seosed on ideaalsed.



Ülesanne 1.9

Kaks punktmassi m on ühendatud jäiga vardaga, mille pikkus on l . Jäiga varda keskpunkti liikumine on piiratud ringile raadiusega a .

1. Panna kirja seosed ja valida sobivad üldistatud koordinaadid. Kas need seosed on holonoomsed?
2. Avaldage süsteemi kineetiline energia üldistatud koordinaatides.



Ülesanne 1.10

Vaatleme punktmassi m , mis on kinnitatud jäiga vardaga lae külge ja elastse vedruga põranda külge, kusjuures vedru kinnituspunkt asub täpselt varda kinnituspunkti all. Olgu varda pikkus l , põranda ja lae vaheline kaugus $h > l$, raskuskiirendus g ja vedru elastsuskoeffitsient k

1. Pange kirja seosed kirjeldatud mehaanilise süsteemi jaoks ja leidke vastavad reaktsioonijõud.
2. Mitut üldistatud koordinaati läheb selle punktmassi kirjeldamiseks tarvis? Valige sobivad üldistatud koordinaadid ja esitage liikumisvõrrandid selle koordinaadi jaoks.
3. Pange kirja süsteemi kineetiline ja potentsiaalne energia valitud üldistatud koordinaadi kaudu.
4. Leidke virtuaalsed nihked ja veenduge, et seosed on ideaalsed.
5. * Vaadelege väikeseid kõrvalekaldeid tasakaaluasendist. Näidake, et võnkumised ümber tasakaaluasendi on harmoonilised ja avaldage nende võnkumiste sagedus.



Ülesanne 1.11

Kaks nõõriga ühendatud klotsi massidega m_1 ja m_2 ripuvad ploki küljes. Leidke d'Alembert'i printsiipi kasutades kiirendus.



Ülesanne 1.12

Ketas veereb libisemata tasapinnal.

1. Pange kirja libisemata liikumisele vastavad seosed.
Vihje: Silinder pole punktmass. Mõelge, milliste suurustega tuleks kirjeldada silindri liikumist.
2. * Näidake, et need seosed pole holonoomsed.
Vihje: Selleks tuleb näidata, et seosed pole esitatavad kujul $f(q_j) = 0$. Mitteholonoomsuse näitamiseks piisab, kui näidata, et eelmses punktis leitud seosed, pole esitatavad täistuletisena.



Ülesanne 1.13

Punktmass liigub pinnal, mida kirjeldab võrrand $f(\mathbf{r}, t) = 0$. Näidake, et virtuaalsete nihete suund on igal ajahetkel risti pinnanormalvektoriga, kuid punktmassi liikumise suund ei pruugi seda olla.



A.4 Harjutustunnid 4 ja 5

Harjuustunni eesmärk on harjutada koordinaatteisenduste tegemist, seostega süsteemide Lagrange'i funktsiooni kirjapanekut ning Lagrange'i võrrandite kasutamist liikumisvõrrandite tuletamisel samuti vaadledakse tsükliliste koordinaatide ja üldistatud energia mõistet ning jäävate üldistatud impulsside kasutamist võrrandite lahendamisel.

Ülesanne 1.14

Panna kirja Lagrange'i funktsioonid sobivates koordinaatides järgnevate süsteemide jaoks:

1. Kaksikpendel, (vt. joonis 2).
2. Vedrudega seotud massid (vt. joonis 3).
3. Kahemõõtmeline isotroopne ostsillaator (vt valem 1.7.10 konspektis).
4. Gravitatsiooniväljas olev pöörlev massiivne keha inertsimomendiga I .



Ülesanne 1.15

Asugu punktmass m jõuväljas potentsiaaliga $V = mgz$, kus g on konstant. Selline väli on näiteks Maa gravitatsiooniväli lähenduses, kus välja võib lugeda homogeenseks.

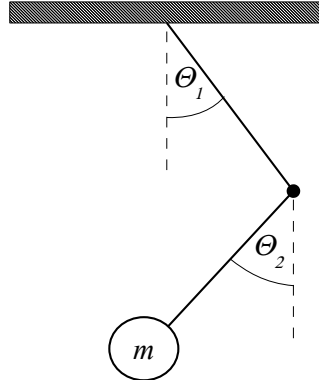
1. Panna kirja Lagrange'i funktsioon.
2. Leida tsüklilised koordinaadid ning näidata, et vastavad üldistatud impulsid on jäävad. Milline on nende üldistatud impulsside füüsikaline tähendus?
3. Panna kirja liikumisvõrrandid.



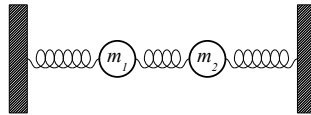
Ülesanne 1.16

Uurime harilikku pendlit, mis koosneb massist m massitu varda pikkusega l otsas raskusväljas.

1. Esitage süsteemi liikumisvõrrandid lähtuvalt Newtoni mehaanikast, võttes arvesse süsteemi seoseid.



Joonis 2: Kaksikpendel



Joonis 3: Vedrudega ühendatud massid.

2. Leida sobivad üldistatud koordinaadid ja panna kirja süsteemi Lagrange'i funktsioon.
3. Leida süsteemi liikumisvõrrandid.



Ülesanne 1.17

Uurime paraboolsele traadile fikseeritud massiivset kuulikest, mis asub raskusväljas. Parabooli kirjeldab võrrand $y = ax^2$.

1. Esitage süsteemi liikumisvõrrandid lähtuvalt Newtoni mehaanikast, võttes arvesse süsteemi seoseid. *Vihje: Kasutage d'Alemberti printsiipi.*
2. Leida sobivad üldistatud koordinaadid ja panna kirja süsteemi Lagrange'i funktsioon.
3. Leida süsteemi liikumisvõrrandid.



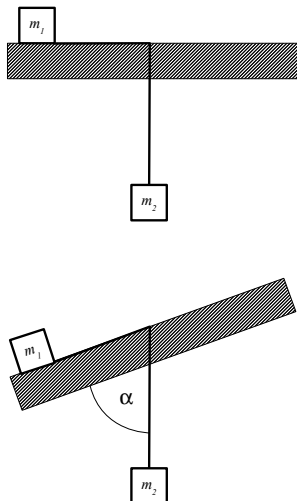
Ülesanne 1.18

Kaks punktmassi m_1 ja m_2 on ühendatud nööriaga, mis läheb läbi lauas oleva augu. m_1 paikneb laua pinnal ja m_2 ripub (vt joonis 4). Eeldame, et m_1 liigub laual hõõrdumiseta ja m_2 saab liikuda ainult vertikaalsihis.

1. Leida sobivad üldistatud koordinaadid ja panna kirja süsteemi Lagrange'i funktsioon.

2. Leida süsteemi liikumisvõrrandid.

(Uurida liikumist kuni m_1 jõuab auguni.) ❖



Joonis 4: Laual libisev mass. *Ütal*: kui laud on horisontaalne. *All*: kui laud on kaldu.

Ülesanne 1.19

Vaatleme punktmassi m potentsiaalses jõuväljas U . Panna kirja

1. Lagrange'i funktsioon ja liikumisvõrrandid, sh näidake, et saadud liikumisvõrrandid annavad Newtoni II seaduse.
2. Ristkoordinaatidele vastavad üldistatud impulsid.
3. Üldistatud energia.

❖

Ülesanne 1.20

Panna kirja liikumisvõrrandid radiaalkoordinaadi jaoks, kui osake liigub Yukawa potentsiaaliga

$$V(r) = -\frac{e^{-ar}}{r}$$

ehk ekraniseeritud Coulomb'i potentsiaaliga kirjeldatud jõuväljas. Võib eeldada, et liikumine toimub ühes tasandis, sest jõud on tsentraalsümmeetriline. ❖

Ülesanne 1.21

Laual on kett pikkusega l ja massiga m . Keti ots ripub üle laua ääre. Kui kaudu kulub ketil laualt maha libisemiseks, kui see libiseb hõõrdumiseta? ❖

Ülesanne 1.22

Punktmass m laenguga q liigub homogeenses magnetväljas $\mathbf{B} = \text{const.}$. Viimast kirjeldab vektorpotentsiaal $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$.

1. Pange kirja Lagrange'i funktsioon silindrilistes koordinaatides, kus z -telg on valitud magnetvälja suunaline.
2. Leidke tsüklilised koordinaadid ja veenduge, et neile vastavad üldistatud impulsid on liikumisintegraalid.
3. Pange kirja liikumisvõrrandid silindrilistes ja ristkoordinaatides.
4. Lahendage liikumisvõrrandid.



Ülesanne 1.23

Vaatleme punktmassi m laenguga q elektromagnetväljas potentsiaaliga ϕ ja vektorpotentsiaaliga \mathbf{A} . Pange kirja

1. Lagrange'i funktsioon ja liikumisvõrrandid, sh näidake, et saadud liikumisvõrrandid annavad Lorentzi jõu.
2. Ristkoordinaatidele vastavad üldistatud impulsid. Milline on erinevus tavapärasest kineetilisest impulsist $m\mathbf{v}$?
3. Üldistatud energia. Kas $H = T + U$ kehtib ka üldistatud potentsiaali korral?



Ülesanne 1.24

Olgu punktmassi m liikumine piiratud tasandile ($\mathbf{r} = (x, y)$) ja liikugu osake potentsiaalses jõuväljas potentsiaaliga $U(x, y)$. Pöörates koordinaatteljestikku θ võrra, kirjeldatakse osakese kohavektorit koordinaatides $\mathbf{r} = (x', y')$. Uurime seda koordinaatteisendust.

1. Pange kirja pööret kirjeldav koordinaatteisendus.
2. Esitage Lagrange'i funktsioon uues koordinaadistikus.
3. Näidake, et kui potentsiaal sõltub vaid radiaalkoordinaadist (st potentsiaal on tsentraalsümmeetriline $U = U(r)$), siis Lagrange' funktsioon ei muutu. Veenduge, et ei muutu ka liikumisvõrrandid. (Seda omadust nimetatakse invariantseks ruumi pööretel.)



Ülesanne 1.25

Olgu punktmassi m liikumine piiratud tasandile ($\mathbf{r} = (x, y)$) ja liikugu osake tsentraalsümmeetrilises potentsiaalses jõuväljas potentsiaaliga $U(r)$.

1. Esitage Lagrange'i funktsioon polaarkoordinaatides.
2. Leidke vastavad üldistatud impulsid. Milline on nende suuruste füüsiline tähendus?
3. Milline on tsükiline koordinaat? Näidake, lähtudes Lagrange'i võrranditest, et sellele vastav üldistatud impulss on tõepoolest jääv suurus.
4. Pange kirja Lagrange'i võrrandid radiaalkoordinaadi jaoks.
5. Kasutage impulsimomendi jäävust nurkkiiruse elimineerimiseks liikumisvõrrandest ja näidake, et liikumisvõrrandid radiaalkoordinaadi jaoks on tuletatavad Lagrange'i funktsioonist

$$L = T - U_{eff}, \quad \text{kus} \quad U_{eff} = \frac{l}{2mr^2} + U(r), \quad (\text{A.4.1})$$

kus l on impulsimoment. (vt ka 2. harjutustunni ülesannet 2.4)



Ülesanne 1.26

Olgu punktmassi m liikumine piiratud tasandile $\mathbf{r} = (x, y)$.

1. Pange kirja pöörlev kohavektor ühtlaselt pöörlevas taustsüsteemis kasutades ristkoordinaate.
Vihje: Kasutage ülesande (A.4) tulemust ja märkige, et koordinaattelgedel ühtlast pöörlemist võib kirjeldada valikuga $\theta = \omega t$, kus ω on koordinaadistiku pöörlemise nurkkiirus.
2. Esitage üleminek pöörlevasse taustsüsteemi polaarkoordinaatide jaoks ja pange kirja Lagrange'i funktsioon vaba osakese jaoks.
3. Leidke liikumisvõrrandid pöörlevas taustsüsteemis. Mille poolest erinevad need liikumisvõrranditest mittepöörlevas taustsüsteemis? Milline on selle erinevuse füüsiline tähendus?



Ülesanne 1.27

Uurime kolmemõõtmelist isotroopset harmoonilist ostsillaatorit, st. osakest, mis paikneb jõuväljas potentsiaaliga

$$U(x, y, z) = \frac{k}{2}(r - l)^2 = \frac{k}{2}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l) \quad (\text{A.4.2})$$

kus k on võrdetegur jõuvälja interaktsiooni määramiseks osakesega. Panna kirja Lagrange'i funktsioon ja liikumisvõrrandid.

Märkus: See süsteem kirjeldab näiteks vedru külge kinnitatud punktmassi, kusjuures vedru elastsuskoeffitsient on k ja pikkus tasakaaluasendis on l . ❖

Ülesanne 1.28

Olgu füüsikalise süsteemi Lagrange'i funktsioon kujul:

$$L' = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{K}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2), \quad (\text{A.4.3})$$

kus a, b, c on vabalt valitud konstandid, kusjuures kehtib tingimus $b^2 - ac \neq 0$.

1. Leida süsteemi liikumisvõrrandid.
2. Uurida liikumisvõrrandeid juhul kui $a = 0 = c$.
3. Uurida liikumisvõrrandeid juhul kui $b = 0$ ja $c = -a$.
4. Millist füüsilist süsteemi kirjeldab antud Lagrange'i funktsioon?
5. Mille poolest on $b^2 - ac$ väärtus oluline?
6. Näidata, et L' on viidav (lineaarse) koordinaatteisenduse abil kujule $L = T - V$.



A.5 Harjutustund 6

Tutvuda variatsiooniarvutusega ning kasutada seda valitud füüsikaülesannete lahendamisel.

Ülesanne 1.29

Leida järgmiste integraalide jaoks funktsioon $y(x)$, mis muudab integraali väärtuse ekstremaalseks:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x} \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (\text{A.5.1})$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{x}, \quad (\text{A.5.2})$$

$$\int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 - y'^2} dx, \quad (\text{A.5.3})$$

$$\int_{x_1}^{x_2} x ds, \quad (\text{A.5.4})$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + y^2) dx, \quad (\text{A.5.5})$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + \sqrt{y}) dx, \quad (\text{A.5.6})$$

$$\int_{x_1}^{x_2} e^x \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (\text{A.5.7})$$

kus $y' \equiv \frac{dy}{dx}$.

Lahenduse idee: Meenutage, et (mõju)funktsionaali ekstreemumi leidmiseks tuli lahendada Lagrange'i võrrandid. Seejuures arvestage, et Lagrange'i võrrandites asendab nüüd (aja)parameetrit t parameeter x . ♣

Ülesanne 1.30

Leida jooned, mille pikkus kahe etteantud punkti vahel on minimaalne, tingimusel, et need jooned asuvad järgmiselt pindadel:

1. tasand,

2. sfäär,
3. koonuse pind $x^2 + y^2 = z^2$,
4. silindri pind.

Lahenduse idee: Punkti \mathbf{r}_1 ja \mathbf{r}_2 vaheline teepikkus on

$$s = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} ds, \quad (\text{A.5.8})$$

kus ds on infinitesimaalne kaugus piki vaadeldavat trajektoori, mis asub etteantud pinna. Seega sõltub ds nii pinna kujust kui ka trajektoorist ja magu eelmiseski ülesandes tuleb varieerida pikkust, kui trajektoori funktsionaali. Esimese sammuna tuleb ds avaldada koordinaatide diferentsiaalide kaudu, kusjuures tuleb arvestada, et ds kuju ruumis on

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad (\text{A.5.9})$$

kuid pinnal on vaid kaks sõltumatut koordinaati, mistõttu on ka üks diferentsiaal esitatav ülejäänud kahe diferentsiaali kaudu. Joone enda kirjeldamiseks on mugav valida üks parameeter. Tähistades selle parameetri t , leiame, et teepikkus on kujul

$$s = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{ds}{dt} dt, \quad \text{kus} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (\text{A.5.10})$$

Selle parameetri valik on täiesti vaba ja selleks võib olla ka näiteks üks koordinaatidest x , y või z . Nagu eelmises ülesandeski annab varieerimine Lagrange'i võrrandid, mille lahendid kirjeldavad teepikkuse funktsionaali ekstremaalseks muutvaid funktsioone.

Enne arvutama asumist proovige aga arvata, millised võivad olla vastavad jooned ning neid kirjeldavad võrrandid. Õige intuitsioon võib ülesande lahendamiseks tarvilikku tehnilist tööd kõvasti lihtsustada. Näietkes võib Lagrange'i võrrandite lahendamise asemel näidata, et pakutud jooned neid võrrandeid rahuldavad. ♣

Ülesanne 1.31

Leida Fermat' vähima aja printsiipi kasutades valguskiire tee keskkonnas, mille murdumisnäitaja on $n = \alpha x$.

Lahenduse idee: Fermat' vähima aja printsiip ütleb, et *valguskiir valib keskkonnas sellise trajektoori, mille läbimiseks kuluv aeg on minimaalne*. Seega on tuleb minimeerida aeg kui trajektoori funktsionaal. Alustuseks tuleb infinitesimaalne ajavahemik dt esitada teepikkuse elemendi ds ja valguse kiiruse kaudu, kusjuures märkigem, et keskkonnas liigub valgus kiirusega $v = c/n$, kus n on murdumisnäitaja. Trajektoori läbimiseks kulunud aeg on integraal üle ajavahemike dt .

Sellele ülesandele vastab eksperiment, kus vette tekitatakse erineva murdumisnäitajaga kihid ning sinna lastud laserkiir võtab kõverjoonelise trajektoori, tulles veest tagasi välja. ♣

Ülesanne 1.32

Punktmass libiseb raskusjõul mööda etteantud kujuga relssi, mis ühendab punkte $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$ ja $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$. Leida selle relsi kuju (vastava joone võrrand) tingimusel, et punktmass jõuab punktist \mathbf{r}_1 punkti \mathbf{r}_2 minimaalse ajaga.

Lahenduse idee: Ülesande võib sõnastada kui variatsioonarvutuse ülesande, milles tuleb minimeerida aeg kui trajektoori funktsionaal. Esimese sammuna peaksime avaldama dt raskuskiirenduse ja ds -i kaudu, jõudes lõpuks integraalse ajani, mida saab minimeerida. ♣

Ülesanne 1.33

Leida kahe rõnga vahel paikneva seebikile kuju $l(z)$ eeldusel, et pindpinevus minimeerib seebikile pindala. Olgu mõlemad rõngad raadiusega r ja paiknegu need kujuteldava silindri otstes, mille kõrgus on h .

Lahenduse idee: Selle ülesande eesmärk on minimeerida etteantud „äärtega“ pinna pindala. Üldine idee oleks panna kirja pinnaelementKuna probleemipüstitus evib silindrilist sümmeetriat, siis võib seda oodata ka lahenduselt. Kui kasutada silindrilisi koordinaate, siis võib ♣

Indeks

- üldistatud energia, 26
- üldistatud impulss, 25
- üldistatud jõud, 22
- üldistatud kiirus, 22
- üldistatud koordinaadid, 19

- binormaalvektor, 6

- Coulomb'i jõud, 9
- Coulomb'i potentsiaal, 12

- d'Alembert'i printsiip, 21
- dissipatsioonitensor, 29

- energia
 - üldistatud energia, 26
 - kineetiline energia, 11
 - koguenergia, 11
 - potentsiaalne energia, 11
- energia jäävus, 16, 26, 41
- etteantud jõud, 18

- faasiruum, 45

- Galilei relatiivsuspriintsiip, 10
- Galilei teisendus, 9
- gravitatsioonijõud, 9

- hõõrdejõud, 9, 29
- Hamilton'i-Jacobi võrrand, 52
- Hamiltoni funktsioon, 47
- Hamiltoni võrrandid, 47

- impulsi jäävus, 15, 39
- impulsimomendi jäävus, 15, 40
- impulsimoment, 12
- impulss, 7
- inertsiaalne liikumine, 8

- jääv suurus, 11
- Jacobi samasus, 53

- kõverjoonelised koordinaadid, 5
- kaasaliikuv koordinaadistik, 6

- kanooniline teisendus, 49
 - kanoonilise teisenduse generaator, 49
- kanoonilised muutujad ehk kanoonilised koordinaadid, 45
- kiirendus, 6
- kiirendusvektor, 6
- kiirus, 6
- kiirusvektor, 5
- kohavektor, 5
- kolmedimensionaalne isotroopne harmooniline ost-sillaator, 8
 - potentsiaal, 12
- konfiguratsiooniruum, 31, 45
- konservatiivne jõud, 11
- koordinaadid, 4
- koordinaadisüsteem, 4

- Lagrange'i funktsioon, 24, 28, 31
- Lagrange'i kordajate meetod, 43
- Lagrange'i võrrandid, 24, 33
- Legendre'i teisendus, 46
- liikumisintegraal, 11
- liikumisvõrrandid, 8
- Lorentzi jõud, 9, 28

- mõjufunktsionaal, 31
 - mõjufunktsionaali sümmeetria, 38
 - mõjufunktsionaali varieerimine, 33
- massikese, 14
- massikeskme taustsüsteem, 14

- Newtoni seadused, 7
- Noetheri teoreem, 38
- normaalkiirendus, 6

- ortogonaalne rühm $O(3)$, 40
- osakeste süsteemi
 - kineetiline energia, 14
 - koguenergia, 16
 - koguimpulsimoment, 14
 - koguimpulss, 13
 - kogumass, 14

massikese, 14

peanormaalkvektor, 6

Poisson'i algebraks, 53

Poisson'i sulud, 53

potentsiaal, 12

- üldistatud potentsiaal, 28
- skalaarpotentsiaal, 28
- vektorpotentsiaal, 28

punkteisendus, 49

puutujavektor, 6

Rayleigh' dissipatsioonifunktsioon, 29

reaktsioonijõud, 19

rist- ehk Caresiuse koordinaadid, 5

seosed, 18

- holonoomsed seosed, 18
- ideaalsed seosed, 20
- mitteholonoomsed seosed, 18, 43
- statsionaarsed seosed, 19

spetsiaalne ortogonaalne rühm $SO(3)$, 41

tasakaaluolek, 20

trajektoor, 5

trajektoori variatsioon, 31

tsüklikline koordinaat, 25

tsentraalsümmeetriline jõuväli, 12

vähima mõju printsiip, 31

vaba osake, 11, 34

vabadusaste, 19

virtuaalne nihe, 19

virtuaalse töö printsiip, 20

Yukawa potentsiaal, 12