TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut

Iiris Lüsi

Parajad poolrühmad

Bakalaureusetöö (6 EAP)
Matemaatika eriala

Juhendaja: Valdis Laan

TARTU 2015

Parajad poolrühmad

Bakalaureusetöö

Iiris Lüsi

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöö eesmärgiks on uurida teatud poolrühmi, mida me nimetame (paremalt või vasakult) parajateks. Need poolrühmad defineeritakse üle nende vaadeldavate polügoonide omaduste abil. Antakse tarvilik ja piisav tingimus selleks, et poolrühm oleks paras ning näidatatakse, et parajate poolrühmade klass sisaldab mõned suured poolrühmade klassid. Teatud parempoolsete ideaalide abil defineeritakse poolrühma unitaarne osa, mis paraja poolrühma korral osutub kahepoolseks ideaaliks. Uuritakse lühidalt Morita ekvivalentsust poolrühmade korral, mille unitaarsel osal on ühised nõrgad lokaalsed ühikelemendid.

Märksõnad. Paras poolrühm, unitaarne polügoon, Morita ekvivalentsus, tugev Morita ekvivalentsus

Fair semigroups

Bachelor's thesis

Iiris Lüsi

Abstract. The purpose of this Bachelor's thesis is to investigate certain semigroups that we call (either right or left) fair. These semigroups are defined by properties of acts over them. A necessary and sufficient contion is given for the fairness of a semigroup and it is shown that the class of fair semigroups contains some big/important classes of semigroups. Certain ideals of a semigroup are used to define the unitary part of that semigroup, which, in the case of a fair semigroup, is a two-sided ideal. Morita equivalence of semigroups, whose unitary parts have common weak local units, is shortly considered.

Key words. Fair semigroup, unitary act, Morita equivalence, strong Morita equivalence.

Sisukord

Sissejuhatus	**3**
1 Põhimõisted	**5**
2 Parajad poolrühmad	**8**
3 Poolrühma unitaarne osa	**17**
4 Näited	**21**
5 Morita ekvivalentsus	**22**
Viited	**29**
Litsents	**30**

Sissejuhatus

Klassikalist Morita ekvivalentsuse teooriat ringidel peetakse ringide struktuuri uurimisel üheks tähtsamaks ja fundamentaalsemaks tööriistaks. Aastal 1972 (Banaschewski[1], Knauer[5]) viidi Morita ekvivalentsuse uurimine üle ringidelt monoididele. Samuti näidati, et kui defineerida poolrühmade Morita ekvivalentsus analoogiliselt monoidide Morita ekvivalentsusega, siis see on samaväärne nende poolrühmade isomorfismiga ning seega selle uurimine ei paku huvi. Saavutamaks sisukaid tulemusi, tuli piirata uuritavate poolrühmade klasse ja üle nende vaadeldavate polügoonide kategooriaid.

Kaheksakümnendatel arendati välja Morita teooria ühikelementideta ringidel, mis võimaldas Talwaril [9] uurida Morita ekvivalentsust lokaalsete ühikelementidega poolrühmadel. Chen ja Shum [2] laiendasid selle teooria faktoriseeruvatele poolrühmadele, kasutades Morita kontekstide abil defineeritud tugeva Morita ekvivalentsuse mõistet.

Artiklis [10] uurivad Xu, Turner ja Smith Morita ekvivalentsi teatud maatriksite ringide jaoks. Nad konstrueerisid ringide klassi, mida hiljem hakati nimetähtede järgi kutsuma xst-ringideks. Artiklis [6] defineeriti xst-ringidega analoogline poolrühmade klass. Eesti keeles kutsutakse neid poolrühmi parajateks. Tänu sellele klassile on võimalik vaadata selliste poolrühmade Morita ekvivalentsust, millest vähemalt üks ei ole faktoriseeruv. See lähenemine on oluline, sest siiani oli valdav arusaam, et väljaspool faktoriseeruvate poolrühmade klassi on väga raske midagi Morita ekvivalentsuse kohta öelda. See arusaam põhineb faktil, et kaks tugevalt Morita ekvivalentset poolrühma peavad tingimata olema faktoriseeruvad. Lisaks lubab see lähenemine näidata, et leiduvad poolrühmad, mis ei ole tugevalt Morita ekvivalentsed, kuid on Morita ekvivalentsed. Selliseid näiteid varem teada polnud. See bakalaureusetöö keskendub artikli [6] tulemuste uurimisele ja lahti seletamisele.

Selle bakalaureusetöö esimeseks eesmärgiks on defineerida ja seletada lahti poolrühma S vasak- ja parempoolne parajus. Näidatakse, et sellesse klassi kuuluvad näiteks kõik lõplikud monogeensed poolrühmad, kõik monoidid ning parajate poolrühmade lõplikud otsekorrutised ja faktorpoolrühmad. Seetõttu on see klass piisavalt suur ja väärt uurimist. Teine eesmärk on kirjeldada poolrühma S ideaalide unitaarsust ning defineerida poolrühma S unitaarne osa $U(S)$. Kolmas eesmärk on poolrühmas S unitaarse osa $U(S)$ abil kirjeldada Morita ekvivalentsust parajatel poolrühmadel. Antud töö on suuremas jaos referatiivne ja jälgib artiklit [6], näide 3.1 on töö autori poolt leitud. Bakalaureusetöö on jaotatud viieks peatükiks, millest esimene on sissejuhatava sisuga.

Teises peatükis defineeritakse polügooni unitaarsus ning s-unitaarsus. Neid mõisteid kasutades defineeritakse paremalt (vasakult) parajad poolrühmad. Tõestatakse, et poolrühm S on paremalt (vasakult) paras siis ja ainult siis, kui mistahes poolrühma S elementide jada $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ jaoks leiduvad sellised $n \in \mathbb{N}, u \in S$, et $s_n s_{n-1} \dots s_1 = s_n s_{n-1} \dots s_1 u$ $(s_1 \dots s_{n-1} s_n = u s_1 \dots s_{n-1} s_n)$, see tähendab, et u on antud korrutise nõrgaks parempoolseks (vasakpoolseks) lokaalseks ühikelemendiks. Selle tulemuse abil näitame, et lõplikud monogeensed poolrühmad on parajad. Samuti näitame, et paremalt parajate poolrühmade klass on kinnine faktorpoolrühmade ja lõplike otsekorrutiste suhtes. Lisaks väidame, et paremalt parajad poolrühmad ei pruugi olla vasakult parajad ning toome seda toetava näite.

Kolmandas peatükis uurime kõigi poolrühma S paremalt unitaarsete parempoolsete ideaalide ühendit $U(S_S)$. Avastame, et kui S on paremalt paras poolrühm, siis on $U(S_S)$ kahepoolne ideaal poolrühmas S, ning edaspidi tähistame seda $U(S)$ ning nimetame poolrühmas S unitaarseks osaks.

Neljandas peatükis toome veel mõned täiendavad näited parajatest poolrühmadest ning ühe näite poolrühmast, mis ei ole paras.

Viiendas peatükis toome sisse kategooriate mõiste ning kirjeldame polügoonide kategooriat. Samuti räägime nende ekvivalentsusest funktorite abil. Defineerime polügoonide tensorkorrutise ning selle abil kinnised polügoonid. Defineerime Morita ekvivalentsuse poolrühmadel nende polügoonide kategooriate kaudu. Leiame seoseid poolrühmade S, T Morita ekvivalentsuse ja nende poolrühmade unitaarsete osade $U(S)$ ja $U(T)$ Morita ekvivalentsuse vahel.

1 Põhimõisted

Selles peatükis esitame põhimõisted, mida kasutame edaspidi antud töös. Neist enamuse võib leida näiteks raamatust [3].

Poolrühmaks nimetatakse mittetühja hulka, millel on defineeritud kahekohaline assotsiatiivne algebraline tehe, mida harilikult nimetatakse korrutamiseks, poolrühma S elementide s, t korrutist tähistatakse sümboliga st.

Olgu S poolrühm. Mittetühja hulka A nimetatakse **parempoolseks polügooniks** üle poolrühma S ehk parempoolseks S-polügooniks, kui on defineeritud kujutus $A \times S \longrightarrow A, (a, s) \longmapsto as$ (poolrühma S toime hulgal A) nii, et mistahes $a \in A$ ja mistahes $s, t \in S$ korral

$$a(st) = (as)t.$$

Parempoolset S-polügooni tähistatakse tavaliselt sümboliga A_S. Analoogiliselt defineeritakse vasakpoolsed S-polügoonid. Parempoolse S-polügooni A_S korral me kasutame järgmisi tähistusi:

$$\begin{aligned} AS &= \{as \mid a \in A, s \in S\}, \\ aS &= \{as \mid s \in S\}, \\ aS^1 &= aS \cup \{a\}. \end{aligned}$$

Lihtne on näha, et S on nii parempoolne kui ka vasakpoolne polügoon üle iseenda, kui toimena vaadelda poolrühma S korrutamist. Neid polügoone tähistatakse vastavalt sümbolitega S_S ja ${}_SS$.

Olgu S ja T poolrühmad. Kui A on vasakpoolne S-polügoon ja parempoolne T-polügoon ning

$$(sa)t = s(at)$$

iga $s \in S, t \in T, a \in A$ korral, siis öeldakse, et A on (S, T)**-bipolügoon** ja kirjutatakse ${}_SA_T$. Ilmselt S on (S, S)-bipolügoon, mille toimeks on korrutamine.

Olgu A_S, B_S kaks parempoolset S-polügooni. Kujutust $f : A_S \to B_S$ nimetatakse parempoolsete S-polügoonide **homomorfismiks** ehk S**-homomorfismiks**, kui

$$f(as) = f(a)s$$

iga $a \in A_S$, $s \in S$ korral. Analoogiliselt defineeritakse vasakpoolsete S polügoonide homomorfism, (S,T)-bipolügoonide homomorfism f peab säilitama mõlemad toimed, ehk f peab olema nii vasakpoolsete S-polügoonide homomorfism kui ka parempoolsete T-polügoonide homomorfism.

Polügooni A_S mittetühja alamhulka A' nimetatakse polügooni A_S **alampolügooniks**, kui $a's \in A'$ iga $a' \in A'$ ja $s \in S$ korral. On selge, et nii AS, aS kui ka aS^1 $(a \in A)$ on polügooni A_S alampolügoonid.

Poolrühma S nimetatakse **faktoriseeruvaks**, kui selle iga element on esitatav kahe elemendi korrutisena.

Me ütleme, et poolrühma S elemendil s on **nõrk parempoolne (vasakpoolne) lokaalne ühikelement** $u \in S$ kui $su = s$ $(us = s)$. Poolrühmal on **nõrgad parempoolsed lokaalsed ühikelemendid**, kui igal selle poolrühma elemendil leidub nõrk parempoolne lokaalne ühikelement. Analoogiliselt defineeritakse **nõrgad vasakpoolsed lokaalsed ühikelemendid**.

Öeldakse, et poolrühmal S **ühised nõrgad parempoolsed lokaalsed ühikelemendid**, kui iga $s,t \in S$ korral leidub $u \in S$ nii, et $s = su$ ja $t = tu$. Duaalselt defineeritakse **ühised vasakpoolsed lokaalsed ühikelemendid**. Poolrühmal on **ühised nõrgad lokaalsed ühikelemendid**, kui sellel on ühised nõrgad vasak- ja parempoolsed lokaalsed ühikelemendid.

Poolrühma S elementi e nimetatakse **idempotendiks**, kui $e^2 = e$. Me ütleme, et poolrühmal S on **parempoolsed (vasakpoolsed) lokaalsed ühikelemendid**, kui iga $s \in S$ korral leidub selline idempotent $e \in S$, et $s = se$ $(s = es)$. Poolrühmal on **lokaalsed ühikelemendid**, kui sellel on lokaalsed vasak- ja parempoolsed ühikelemendid.

Lemma 1. *Olgu S ühiste nõrkade parempoolsete lokaalsete ühikelementidega poolrühm. Siis iga lõpliku alamhulga $\{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq S$ jaoks leidub selline $u \in S$, et $s_k = s_k u$ iga $k \in \{1, \ldots, n\}$ korral.*

Tõestus. Olgu S ühiste nõrkade parempoolsete lokaalsete ühikelementidega poolrühm. Tõestame väite induktsiooniga n järgi. Induktsiooni baas, $n = 2$, on ilmne ühiste nõrkade parempoolsete lokaalsete ühikelementide olemasolust. Eeldame, et väide kehtib l-elemendiliste alamhulkade korral. Vaatleme alamhulka $\{s_1, \dots, s_l, s_{l+1}\} \subseteq S$. Induktsiooni eelduse põhjal leidub selline $u \in S$, et $s_k = s_k u$ iga $k \in \{1, \dots, l\}$ korral. Lemma eelduse põhjal leidub $v \in S$ nii, et $s_{l+1}v = s_{l+1}$ ja $uv = u$. Siis

$$s_k = s_k u = s_k uv = s_k v$$

iga $k \in \{1, \dots, l\}$ korral. Seega $s_k = s_k u$ iga $k \in \{1, \dots, l\}$ korral, see tähendab, et induktsiooniga on tõestatud, et mistahes poolrühma S mistahes lõpliku alamhulga elementide jaoks leidub ühine parempoolne lokaalne ühikelement. □

Poolrühma S nimetatakse **paremreduktiivseks**, kui kehtib tingimus

$$(\forall s, t \in S)[(\forall z \in S)(sz = tz) \Rightarrow s = t].$$

Analoogiliselt defineeritakse vasakreduktiivsus.

Lemma 2. *Kui poolrühmal on ühised nõrgad lokaalsed ühikelemendid, siis see poolrühm on paremreduktiivne.*

Tõestus. Olgu S ühiste nõrkade parempoolsete lokaalsete ühikelementidega poolrühm ja olgu $s, t \in S$. Oletame, et kehtib võrdus $sz = tz$ kõigi $z \in S$ korral. Siis leidub selline element $u \in S$, et $s = su$ ja $t = tu$. Eelduse põhjal

$$s = su = tu = t$$

Seega on S paremreduktiivne. □

2 Parajad poolrühmad

Selles peatükis anname parajate poolrühmade definitsiooni ja uurime nende omadusi. Parajad poolrühmad defineeritakse üle nende vaadeldavate polügoonide omaduste abil.

Definitsioon 1. Olgu S poolrühm. Parempoolset S-polügooni A nimetatakse

(1) **unitaarseks**, kui $AS = A$,
(2) **s-unitaarseks**, kui iga $a \in A$ korral leidub $s \in S$ nii, et $as = a$.

On selge, et iga s-unitaarne parempoolne polügoon on unitaarne.

Definitsioon 2. Me ütleme, et poolrühm S on

(1) **paremalt paras poolrühm**, kui iga unitaarse parempoolse S-polügooni iga alampolügoon on unitaarne,
(2) **vasakult paras poolrühm**, kui iga unitaarse vasakpoolse S-polügooni iga alampolügoon on unitaarne,
(3) **paras poolrühm**, kui ta on nii vasakult kui ka paremalt paras poolrühm.

Eelneva definitsiooni asemel on mugav kasutada järgnevat kirjeldust.

Lause 1. *Poolrühm S on paremalt paras poolrühm parajasti siis, kui iga unitaarne parempoolne polügoon on s-unitaarne.*

Tõestus. TARVILIKKUS. Olgu S paremalt paras poolrühm ja olgu A_S unitaarne polügoon. Siis iga $a \in A$ korral alampolügoon

$$aS \cup \{a\} = aS^1 \subseteq A_S$$

on unitaarne. See tähendab, et

$$aSS \cup aS = (aS \cup \{a\})S = aS \cup \{a\}.$$

Kuna $aSS \subseteq aS$, siis $aS = aS \cup \{a\}$ ja seega $a \in aS$. Järelikult A_S on s-unitaarne.

PIISAVUS. Olgu polügoon A_S unitaarne ning A' olgu polügooni A_S suvaline alampolügoon. On ilmne, et $A'S \subseteq A'$. Eelduse põhjal on A_S s-unitaarne, millest järeldub, et suvalise $a \in A'$ korral leidub $s \in S$ nii, et $as = a$. Sellest aga omakorda saame, et $A' \subseteq A'S$. Seega on A' unitaarne. $\square$

Uurime nüüd, millised on paremalt parajad faktoriseeruvad poolrühmad.

Lause 2. *Poolrühmal S on nõrgad parempoolsed lokaalsed ühikelemendid parajasti siis, kui S on faktoriseeruv ja paremalt paras.*

Tõestus. TARVILIKKUS. Olgu poolrühmal S nõrgad parempoolsed lokaalsed ühikelemendid. Siis on see poolrühm faktoriseeruv, sest iga $s \in S$ korral leidub $u \in S$ nii, et $s = su$. Olgu A_S unitaarne polügoon ja $a \in A$. Siis $a = a's$ mingi $a' \in A$ ja $s \in S$ puhul. Eelduse kohaselt $s = su$ mingi $u \in S$ korral. Siis $a = a's = a'su = au$, seega polügoon A_S on s-unitaarne, millest lause 1 põhjal järeldub, et S on paremalt paras poolrühm.

PIISAVUS. Olgu S faktoriseeruv paremalt paras poolrühm. Kuna S on faktoriseeruv, on iga selle element esitatav kahe elemendi korrutisena, mistõttu $S \subseteq SS$ ja seega parempoolne S-polügoon S_S on unitaarne. Siis on S_S lause 1 põhjal s-unitaarne ning iga $s \in S$ jaoks leidub $u \in S$, nii et $s = su$. Järelikult on poolrühma S elementidel nõrgad parempoolsed lokaalsed ühikelemendid. $\square$

Näide 1. Iga monoid ja iga poolrühm, mis koosneb idempotentidest, omab nõrku parempoolseid lokaalseid ühikelemente ning on seega paremalt paras.

Faktoriseeruvad poolrühmad ei tarvitse omada nõrku parempoolseid lokaalseid ühikelemente.

Näide 2. Vaatleme multiplikatiivset poolrühma reaalarvudest vahemikus $(0,1)$, siis see poolrühm on faktoriseeruv, sest suvalise $a \in (0,1)$ korral $\sqrt{a} \in (0,1)$ ja $a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$. Aga ühelgi neist elementidest pole nõrka parempoolset lokaalset ühikelementi, sest $au \neq a$ iga $a, u \in (0,1)$ korral.

Kui ρ on ekvivalentsusseos hulgal A, siis ekvivalentsiklasse seose ρ järgi tähistatakse sümboliga $[a]_\rho$ või lihtsalt $[a]$. Ekvivalentsusseost ρ polügoonil A_S

nimetatakse **kongruentsiks**, kui

$$a\rho a' \Rightarrow (as)\rho(a's)$$

mistahes $a, a' \in A_S$ ja $s \in S$ korral.

Parempoolset S-polügooni $A/\rho = \{[a]_\rho | a \in A\}$, mille toime on defineeritud võrdusega:

$$[a]s = [as],$$

nimetatakse polügooni A_S **faktorpolügooniks** kongruentsi ρ järgi.

Järgnev teoreem annab poolrühma S elementide jadade abil tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et S oleks paras poolrühm.

Teoreem 1. *Poolrühm S on paremalt paras poolrühm siis ja ainult siis, kui iga S elementide jada $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ korral leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et korrutis $s_n \dots s_1$ omab nõrka parempoolset lokaalset ühikelementi.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu S paremalt paras poolrühm. Defineerime hulga F järgmiselt:

$$F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{n\} \times S).$$

Defineerime hulgal F parempoolse S-toime võrdusega

$$(n, s)z = (n, sz)$$

iga $n \in \mathbb{N}$ ja $s, z \in S$ korral. Kuna antud toime hulgal F vastab polügooni toime nõudele, siis on F_S parempoolne S-polügoon.

Olgu $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ mingi jada poolrühmas S. Defineerime binaarse seose ρ hulgal F järgmiselt:

$$(k, s)\rho(l, z) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(n \geq k, l \wedge s_n \cdots s_{k+1}s = s_n \cdots s_{l+1}z)$$

suvaliste $k, l \in \mathbb{N}$, $s, z \in S$ korral. Näitame, et ρ on kongruents S-polügoonil F. Seose ρ refleksiivsus ja sümmeetrilisus on ilmsed definitsioonist. Olgu

$(k,s),(l,z),(m,x) \in F$ sellised, et $(k,s)\rho(l,z)$ ja $(l,z)\rho(m,x)$. Siis leiduvad sellised $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, et

$$n_1 \geq k, l \text{ ja } s_{n_1} \cdots s_{k+1}s = s_{n_1} \cdots s_{l+1}z$$

ning

$$n_2 \geq l, m \text{ ja } s_{n_2} \cdots s_{l+1}z = s_{n_2} \cdots s_{k+1}x.$$

Kui $n_1 = n_2$, siis ilmselt $(k,s)\rho(m,x)$. Kui $n_1 > n_2$, siis $(k,s)\rho(m,x)$, sest

$$\begin{aligned} s_{n_1} \cdots s_{k+1}s &= s_{n_1} \cdots s_{l+1}z = s_{n_1} \cdots s_{n_2+1}(s_{n_2} \cdots s_{l+1}z) \\ &= s_{n_1} \cdots s_{n_2+1}(s_{n_2} \cdots s_{m+1}x) = s_{n_1} \cdots s_{m+1}x. \end{aligned}$$

Kui $n_2 > n_1$, siis saab analoogiliselt näidata, et $(k,s)\rho(m,x)$. Seega on seos ρ transitiivne. On ilmne, et suvaliste $(k,s),(l,z) \in F$ korral kehtib $(k,sx)\rho(l,zx)$ mistahes $x \in S$ korral, see tähendab, ρ on kongruents. Paari (k,s) ekvivalentsiklassi seose ρ järgi tähistame me sümboli $[k,s]$ abil. Vaatleme parempoolse S-polügooni F_S faktorpolügooni:

$$M_S := F/\rho = \{[k,s] \mid k \in \mathbb{N}, s \in S\}.$$

Valime suvalise $[k,s] \in M$, kus $k \in \mathbb{N}$ ja $s \in S$. Kuna poolrühma S tehte assotsiatiivsuse tõttu $(s_{k+2}s_{k+1})s = s_{k+2}(s_{k+1}s)$, siis kehtib ka $(k,s)\rho(k+1, s_{k+1}s)$. Seetõttu

$$[k,s] = [k+1, s_{k+1}s] = [k+1, s_{k+1}]s \in MS$$

Järelikult $M \subseteq MS$, see tähendab, et $MS = M$ ja seega on M_S unitaarne.

Eelduse ja lause 1 põhjal on M_S s-unitaarne. Võtame elemendi $[1, s_1] \in M$. Siis

$$[1, s_1] = [1, s_1]u = [1, s_1u]$$

mingi $u \in S$ korral. Seega kongruentsi ρ definitsiooni põhjal leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et $s_n \cdots s_2s_1 = s_n \cdots s_2s_1u$, mistõttu u on nõrk parempoolne lokaaalne ühikelement korrutise $s_n \cdots s_2s_1$ jaoks.

Piisavus. Olgu A_S unitaarne S-polügoon ja $a_0 \in A$. Siis leiduvad sellised $a_1 \in A$ ja $s_1 \in S$, et $a_0 = a_1 s_1$. Korduvalt unitaarsust rakendades on sarnaselt võimalik leida sellised $a_2, a_3 \ldots \in A$ ja $s_2, s_3, \ldots \in S$ nii, et $a_{i-1} = a_i s_i$ iga $i \in \mathbb{N}$ korral. Eelduse kohaselt leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et korrutis $s_n \cdots s_1$ omab nõrka parempoolset lokaalset ühikelementi $u \in S$. Siis

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 s_1 = (a_2 s_2) s_1 = a_2 s_2 s_1 = (a_3 s_3) s_2 s_1 = \ldots \\ &= a_n s_n \cdots s_1 = a_n s_n \cdots s_1 u = a_0 u. \end{aligned}$$

Järelikult A_S on s-unitaarne ja S on lause 1 põhjal paremalt paras. $\square$

Analoogiliselt teoreemiga 1 saab tõestada, et poolrühm S on vasakult paras siis ja ainult siis, kui

$$(\forall (s_i)_{i \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}})(\exists n \in \mathbb{N})(\exists u \in S)(s_1 \cdots s_n = u s_1 \cdots s_n).$$

Järeldus 1. *Kui S on paremalt paras poolrühm, siis iga $s \in S$ jaoks leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et s^n omab nõrka parempoolset lokaalset ühikelementi.*

Järgnevalt uurime, millised monogeensed poolrühmad on parajad.

Poolrühma S nimetatakse **monogeenseks**, kui temas leidub ühest elemendist koosnev moodustajate süsteem, see tähendab, leidub selline $s \in S$, et kõik S elemendid avalduvad s astmetena. Kui s on monogeense poolrühma S moodustaja, siis kirjutatakse $S = \langle s \rangle$. Kui leiduvad sellised naturaalarvud $k, l \in \mathbb{N}$, et $k \neq l$, kuid $s^k = s^l$, siis on poolrühm S lõplik. Kui aga suvaliste erinevate $k, l \in \mathbb{N}$ korral $s^k \neq s^l$, on poolrühm S lõpmatu.

Lause 3. *Iga lõplik monogeenne poolrühm on paremalt paras poolrühm.*

Tõestus. Olgu S lõplik monogeenne poolrühm moodustajaga s, see tähendab, et $S = \langle s \rangle$. Kuna S on lõplik, siis leiduvad sellised naturaalarvud k ja l, et $k \neq l$, aga $s^k = s^l$. Olgu m vähim selline naturaalarv, et $s^m = s^{m+n}$ mingi naturaalarvu n korral. Leidub vähim selline naturaalarv r, et $s^m = s^{m+r}$. Siis on selge, et

$$S = \{s, s^2, \ldots, s^m, s^{m+1}, \ldots, s^{m+r-1}\}.$$

Olgu $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ mingi suvaline jada. Olgu $k_i \in \mathbb{N}$ sellised arvud, et $s_i = s^{k_i}$. Ilmselt leidub selline naturaalarv n, et $m \leq \sum_{i=1}^{n} k_i$. Tähistame $k = \sum_{i=1}^{n} k_i - m$. Siis

$$\begin{aligned} s_n s_{n-1} \cdots s_2 s_1 &= s^{k_n} s^{k_{n-1}} \cdots s^{k_2} s^{k_1} = s^{\sum_{i=1}^{n} k_i} = s^{m+k} \\ &= s^m s^k = s^{m+r} s^k = s^{m+k} s^r = s_n s_n \cdots s_2 s_1 s^r. \end{aligned}$$

Seega teoreemi 1 põhjal on S paremalt paras. $\square$

Paneme tähele, et lõplikud monogeensed poolrühmad on paremalt parajad, kuid kõik elemendid ei oma nõrka parempoolset lokaalset ühikelementi.

Näide 3. Olgu S lõpmatu monogeenne poolrühm moodustajaga s ja $s^k \in S$ selle poolrühma suvaline element, millel leidub nürk parempoolne lokaalne ühikelement $u \in S$, see tähendab, $s^k u = s^k$. Järelikult leidub naturaalarv $l \in \mathbb{N}$ nii, et $u = s^l$. Seega $s^k = s^k u = s^k s^l = s^{k+l}$, mis ei ole võimalik. Mistõttu ei oma ükski poolrühma S element nõrka parempoolset lokaalset ühikelementi, seega ei ole lõpmatud monogeensed poolrühmad parajad poolrühmad.

Edasi vaatame, kuidas paremalt parajate poolrühmade klass käitub teatud konstruktsioonide (otsekorrutised, faktorpoolrühmad) suhtes.

Olgu I mingi mittetühi hulk ja S_i, $i \in I$, poolrühmad. Kui hulkade S_i,$i \in I$, otsekorrutisel $\prod_{i\in I} S_i$ defineerida korrutamine võrdusega

$$(s_i)_{i\in I} \cdot ({s'}_i)_{i\in I} := (s_i {s'}_i)_{i\in I},$$

siis saame poolrühma, mida nimetatakse poolrühmade $S_i, i \in I$ **otsekorrutiseks**. Kui $I = \{1, \ldots, n\}$, siis tähistatakse seda otsekorrutist

$$S_1 \times \ldots \times S_n = \{(s_1, \ldots, s_n) \mid s_1 \in S_1, \ldots, s_n \in S_n\}.$$

Lause 4. *Paremalt parajate poolrühmade lõplik otsekorrutis on samuti paremalt paras poolrühm.*

Tõestus. Olgu $S_1, \ldots, S_r$ paremalt parajad poolrühmad ja olgu nende otsekorrutis

$S_1 \times \ldots \times S_r$. Olgu $((s_i^1, \ldots, s_i^r))_{i\in\mathbb{N}}$ hulga $S_1 \times \ldots \times S_r$ elementide suvaline jada.

Siis iga $j \in \{1, \ldots, r\}$ korral jada $(s_i^j)_{i\in\mathbb{N}} \in S_j^{\mathbb{N}}$ jaoks leiduvad sellised $n_j \in \mathbb{N}$ ja $u_j \in S$, et

$$s_{n_j}^j s_{n_j-1}^j \cdots s_2^j s_1^j = s_{n_j}^j s_{n_j-1}^j \cdots s_2^j s_1^j u_j.$$

Seega iga naturaalarvu $k \geqslant n_j$ korral

$$\begin{aligned} s_k^j s_{k-1}^j \cdots s_2^j s_1^j &= s_k^j s_{k-1}^j \cdots s_{n_{j+1}}^j (s_{n_j}^j s_{n_{j-1}}^j \cdots s_2^j s_1^j) \\ &= s_k^j s_{k-1}^j \cdots s_{n_{j+1}}^j (s_{n_j}^j s_{n_{j-1}}^j \cdots s_2^j s_1^j u_j) \\ &= s_k^j s_{k-1}^j \cdots s_2^j s_1^j u_j. \end{aligned}$$

Järelikult, kui valida $n = max\{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ siis on korrutise

$$(s_n^1, \ldots, s_n^r) \cdots (s_2^1, \ldots, s_2^r)(s_1^1, \ldots, s_1^r) = (s_n^1 \cdots s_2^1 s_1^1, \ldots, s_n^r \cdots s_2^r s_1^r)$$

nõrgaks parempoolseks lokaalseks ühikelemendiks $u = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$. Teoreemi 1 kohaselt on poolrühm $S_1 \times \ldots \times S_r$ paremalt paras. $\square$

Näide 4. Paremalt parajate poolrühmade lõpmatu otsekorrutis ei pruugi olla paremalt paras poolrühm. Olgu $T_n = \langle t_n \rangle, n \in \mathbb{N}$, lõplik n-elemendiline monogeenne poolühm, kus $t_n^n = t_n^{n+1}$, kusjuures n on vähim selline astendaja. Võtame $S := \prod_{n\in\mathbb{N}} T_n$ ja vaatleme elementi $s = (t_1, t_2, t_3, \ldots) \in S$. Kui eeldame, et S on paremalt paras poolrühm, siis järelduse 1 põhjal leidub selline $u = (u_1, u_2, u_3, \ldots) \in S$ nii, et $s^k u = s^k$. Seega $t_i^k u_i = t_i^k$ iga $i \in \mathbb{N}$ korral. Seetõttu $t_{k+1}^k = t_{k+1}^k u_{k+1} = t_{k+1}^{k+1}$, mis ei ole võimalik, sest $T_{k+1} = \langle t_{k+1} \rangle$ on $(k+1)$-elemendiline lõplik monogeenne poolrühm.

Ekvivalentsusseost ρ poolrühmal S nimetatakse **kongruentsiks**, kui

$$x_1 \rho y_1 \wedge x_2 \rho y_2 \Longrightarrow (x_1 x_2) \rho (y_1 y_2)$$

mistahes $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ korral. Olgu S poolrühm ja ρ selle kongruents. Hulga $S/\rho = \{[x]_\rho \mid x \in S\}$ elementide $[x]_\rho = \{y \in S \mid x \rho y\}$ korrutis defineeritakse

võrdusega
$$[x]_\rho[y]_\rho = [xy]_\rho$$
mistahes $x, y \in S$ korral. Saame poolrühma S/ρ, mida nimetatakse poolrühma S **faktorpoolrühmaks** kongruentsi ρ järgi.

Lause 5. *Paremalt paraja poolrühma faktorpoolrühm on paremalt paras poolrühm.*

Tõestus. Olgu S suvaline paremalt paras poolrühm ja olgu ρ sellel defineeritud kongruents. Olgu S/ρ poolrühma S faktorpoolrühm antud konguentsi järgi. Olgu $([x_i])_{i\in\mathbb{N}}$ mingi jada poolrühmas S/ρ. Siis $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on jada poolrühmas S, mistõttu leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $u \in S$ nii, et $x_n \cdots x_1 u = x_n \cdots x_1$. Järelikult
$$\begin{aligned}[x_n]\cdot[x_{n-1}]\cdot \ldots \cdot [x_1] &= [x_n \cdots x_1] = [x_n \cdots x_1 u] \\ &= [x_n]\cdot[x_{n-1}]\cdot \ldots \cdot [x_1]\cdot[u].\end{aligned}$$
□

Nüüd veendume, et kõik paremalt parajad poolrühmad ei ole vasakult parajad.

Näide 5. Leidub kolmeelemendiline paremalt paras poolrühm, mis ei ole vasakult paras. Defineerime hulgal $S = \{0, 1, 2\}$ korrutamise vastavalt tabelile

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	2	0

.

Kui $z \neq 1$, siis $x(yz) = 0 = (xy)z$, vastasel juhul näeme antud tabelist, et $(xy)z = xy = x(yz)$. Seega on S poolrühm, kusjuures 1 on selle poolrühma parempoolne ühikelement. Lisaks on S faktoriseeruv ja paremalt paras lause 2 põhjal. Samas ei ole S vasakult paras, sest jada $(s_1, s_2, s_3, s_4 \ldots) = (2, 1, 1, 1, \ldots)$ jaoks kehtib võrdus
$$s_1 \cdots s_n = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 2$$
iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Kuna $x2 = 0$ iga $x \in S$ korral, siis ei leidu sellist naturaalarvu $n \in \mathbb{N}$, et n-elemendiselt korrutisel $2 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 1$ oleks nõrk vasakpoolne lokaalne

ühikelement. Teoreemi 1 analoogi järgi ei ole S vasakult paras poolrühm.

Olgu S^* suvaline vähemalt 3-elemendiline hulk. Valime sellest hulgast kolm erinevat elementi $0, 1, 2$ ja defineerime korrutamise nii, et $s1 = s$ iga $s \in S^*$ ja $sx = 0$ iga $s \in S$ ja $x \in S \backslash \{1\}$ korral. Siis saab analoogiliselt näidata, et tegu on paremalt paraja poolrühmaga, mis ei ole vasakult paras. Lisaks ei ole elementidel 1 ja 2 ühist nõrka vasakpoolset lokaalset ühikelementi, seega (lõplikud) faktoriseeruvad poolrühmad ei tarvitse omada ühiseid nõrku lokaalseid vasakpoolseid ühikelemente.

3 Poolrühma unitaarne osa

Selles peatükis uurime poolrühma kõigi unitaarsete parempoolsete ideaalide ühendit ja selle omadusi ning nende abil defineerime poolrühma unitaarse osa.

Mittetühja alamhulka I poolrühmas S nimetatakse poolrühma S **parempoolseks ideaaliks**, kui

$$x \in I \Rightarrow xs \in I$$

iga $s \in S$ korral. On lihtne näha, et poolrühma parempoolsete ideaalide mistahes ühend on ka sama poolrühma parempoolne ideaal. Analoogiliselt defineerime vasakpoolse ideaali. Poolrühma S **kahepoolseks ideaaliks** ehk lihtsalt **ideaaliks** nimetatakse alamhulka, mis on nii vasak- kui ka parempoolne ideaal. Kui $x \in S$, siis xS^1 (S^1x) on S parempoolne (vasakpoolne) ideaal, mida nimetatakse elemendi x poolt tekitatud poolrühma S **parempoolseks (vasakpoolseks) peaideaaliks**.

Poolrühma S iga parempoolset ideaali I võib vaadelda parempoolse S-polügoonina, kus polügooni S toime on antud korrutamise abil. Kui kehtib võrdus $IS = I$, siis I on paremalt unitaarne. Olgu $U(S_S)$ kõigi poolrühma S paremalt unitaarsete parempoolsete ideaalide ühend. Siis on $U(S_S)$ suurim võimalik paremalt unitaarne poolrühma S parempoolne ideaal. Analoogiliselt saame defineerida $U(_SS)$.

Faktoriseeruva poolrühma S korral on S_S ja $_SS$ mõlemad unitaarsed polügoonid ning seega kehtivad võrdused $U(S_S) = S = U(_SS)$.

Järgnevat abitulemust kasutame mitmes kohas.

Lemma 3. *Paremalt paraja poolrühma S iga elemendi s jaoks leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $s^n \in U(S_S)$.*

Tõestus. Olgu $s \in S$. Siis järelduse 1 kohaselt leiduvad sellised $n \in \mathbb{N}$ ja $u \in S$, et $s^n = s^n u$. On selge, et

$$s^n = s^n u = s^n uu \in (s^n S^1)S$$

ja poolrühma S iga elemendi v korral

$$s^n v = s^n uv \in (s^n S^1)S.$$

Järelikult $s^n S^1 \subseteq (s^n S^1)S$ ja seega $s^n S^1 = (s^n S^1)S$. See tähendab, et $s^n S^1$ on poolrühma S paremalt unitaarne parempoolne ideaal. Seega $s^n S^1 \subseteq U(S_S)$ ja $s^n \in U(S_S)$. □

Lause 6. *Kui S on paremalt paras poolrühm, siis on $U(S_S)$ kahepoolne ideaal poolrühmas S.*

Tõestus. Konstruktsiooni järgi on $U(S_S)$ poolrühma S parempoolne ideaal. Olgu $s \in S$ ja $u \in U(S_S)$. Kuna $U(S_S)$ on paremalt unitaarne, siis lause 1 põhjal on see s-unitaarne, mistõttu leidub mingi $t \in S$ nii, et $u = ut$. Seega $su = sut$, millest järelduvalt $suS^1 \subseteq (suS^1)S$, see tähendab, et $suS^1 = (suS^1)S$. Järelikult parempoolne peaideaal suS^1 on unitaarne parempoolne S-polügoon. Parempoolse ideaali $U(S)$ definitsiooni kohaselt:

$$su \in suS^1 \subseteq U(S_S),$$

mis näitab, et $U(S_S)$ on vasakpoolne ideaal poolrühmas S. □

Järgnev lause näitab, millistest elementidest $U(S_S)$ ja $U({}_SS)$ koosnevad.

Lause 7. *Olgu S paras poolrühm. Siis on iga $s \in S$ jaoks järgmised väited samaväärsed:*

(1) $s \in U(S_S)$,
(2) $s = su$ *mingi* $u \in S$ *korral,*
(3) $s \in U({}_SS)$,
(4) $s = us$ *mingi* $u \in S$ *korral.*

Tõestus. Eeldame, et poolrühm S on paras. Siis lausest 1 järeldub, et poolrühma S paremalt unitaarne parempoolne S-polügoon $U(S_S)$ on s-unitaarne ja seega ilmselt (1) $\Rightarrow$ (2). Analoogiliselt saab näidata, et (3) $\Rightarrow$ (4).

(4) $\Rightarrow$ (1). Olgu $s = us$ mingi $u \in S$ korral. Lemma 3 põhjal leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et $u^n \in U(S_S)$. Seega

$$s = us = uus = \ldots = u^n s \in U(S_S),$$

sest $U(S_S)$ on parempoolne ideaal. Sarnase tõestuskäiguga on võimalik näidata, et (2) $\Rightarrow$ (3). $\square$

Eelneva lause põhjal teame, et parema poolrühma $U(S_S) = U({}_SS)$. Edaspidi tähistame seda hulka sümboliga $U(S)$ ja nimetame seda paraja poolrühma S **unitaarseks osaks**.

Paneme tähele, et poolrühma S unitaarne osa $U(S)$ on samuti paras.

Järeldus 2. *Kui S on paras poolrühm, siis hulk*

$$U(S) = \{s \in S \mid s = su = vs \ \ mingi \ \ u, v \in S \ \ korral\} \tag{3.1}$$

on kahepoolne ideaal poolrühmas S. Lisaks on $U(S)$ nõrkade lokaalsete ühikelementidega poolrühm ehk $U(S)$ on samuti paras poolrühm.

Tõestus. Olgu S paras poolrühm. Võrdus 3.1 kehtib tänu lausele 7. Võtame suvalise $s \in U(S)$. Siis $s = su = vs$ mingi $u, v \in S$ korral. Lause 7 põhjal $s \in U(S_S)$ ja $s \in U({}_SS)$. Seega $U(S) = U(S_S) = U({}_SS)$. Lause 6 kohaselt on $U(S)$ kahepoolne ideaal poolrühmas S.

Võtame suvalise $s \in S$. Siis $s = su = vs$ mingite $u, v \in S$ korral. Lemmast 3 saame, et leiduvad sellised $m, n \in \mathbb{N}$, et $u^m, v^n \in U(S)$. Siis elemendi s nõrk parempoolne lokaalne ühikelement on u^m ja nõrk vasakpoolne lokaalne ühikelement on v^n. $\square$

Järeldus 3. *Kui S on paremalt paras poolrühm, A_S on unitaarne polügoon ja $a \in A$, siis $a = au$ mingi $u \in U(S_S)$ korral.*

Tõestus. Kuna A_S on unitaarne, siis lause 1 järgi on A_S ka s-unitaarne, mistõttu mingi $s \in S$ korral $a = as$. Lemma 3 põhjal leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $s^n \in U(S_S)$. Seega $a = as = as^n$. $\square$

Lõpetuseks tõestame veel ühe lause, mis näitab, et teatud poolrühmade klass sisaldub parajate poolrühmade klassis.

Öeldakse, et poolrühm S rahuldab **kahanevate ahelate tingimust** vasakpoolsete peaideaalide jaoks, kui iga vasakpoolsete peaideaalide jada

$$S^1 z_1 \supseteq S^1 z_2 \supseteq S^1 z_3 \supseteq \dots$$

korral leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et $S^1 z_n = S^1 z_{n+1} = S^1 z_{n+1} = \dots$.

Lemma 4. *Kui poolrühmal S kehtib kahanevate ahelate tingimus vasakpoolsete peaideaalide jaoks, siis iga jada $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ jaoks leiduvad sellised $n \in \mathbb{N}$ ja $u \in S^1$, et*

$$s_n \cdots s_1 = u s_{n+1} s_n \cdots s_1.$$

Tõestus. Vaatleme jada $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$ ja kahanevat ahelat

$$S^1 s_1 \supseteq S^1 s_2 s_1 \supseteq S^1 s_3 s_2 s_1 \supseteq \dots$$

Eelduse kohaselt leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et $S^1 s_n \cdots s_1 = S^1 s_{n+1} s_n \cdots s_1$. Seega $s_n \cdots s_1 = u s_{n+1} s_n \cdots s_1$ mingi $u \in S^1$ korral. □

Lause 8. *Iga kommutatiivne poolrühm, mis rahuldab kahanevate ahelate tingimust peaideaalidele, on paras poolrühm.*

Tõestus. Olgu S kommutatiivne poolrühm, mille peaideaalidele kehtib kahaneva ahela tingimus. Vaatleme jada $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}$. Lemma 8 kohaselt leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $u \in S^1$ nii, et $u s_n \cdots s_1 = u s_{n+1} s_n \cdots s_1$. Poolrühma kommutatiivsusest järeldub, et $s_n \cdots s_1 = (s_n \cdots s_1)(u s_{n+1})$. Seega teoreemi 1 põhjal on S paras poolrühm. □

On ilmne, et lõplikus poolrühmas stabiliseeruvad kõik vasakpoolsete peaideaalide kahanevad ahelad.

Järeldus 4. *Iga lõplik kommutatiivne poolrühm on paras poolrühm.*

4 Näited

Toome veel mõned näited parajatest poolrühmadest.

Näide 6. Paraja poolrühma alampoolrühm ei pruugi olla paras. Olgu S poolrühm, mis ei ole paras ja olgu sellele välise ühikelemendi lisamisel saadud monoid S^1. Siis S on S^1 alampoolrühm.

Näide 7. Olgu S poolrühm ja $n \in \mathbb{N}$ selline, et S^n on paremalt paras poolrühm, kus S^n on poolrühm, mis koosneb kõigist korrutistest, kus teguriteks on n poolrühma S elementi. Vaatame jada $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Tähistame

$$x_i = s_{in}s_{in-1}\cdots s_{in-(n-2)}s_{in-(n-1)} = s_{in}s_{in-1}\cdots s_{(i-1)n+2}s_{(i-1)n+1}.$$

Siis jada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (S^n)^{\mathbb{N}}$. Kuna S^n on paras, leidub selline $r \in \mathbb{N}$, et korrutisel $x_r x_{r-1}\cdots x_1$ leidub nõrk parempoolne lokaalne ühikelement $u \in S$. Järelikult

$$\begin{aligned} s_{rn}s_{rn-1}\cdots s_{(r-1)n+1}s_{(r-1)n}s_{(r-1)n-1}\cdots s_2 s_1 &= x_r x_{r-1}\cdots x_1 \\ = x_r x_{r-1}\cdots x_1 u &= s_{rn}s_{rn-1}\cdots s_1 u. \end{aligned}$$

Seega teoreemi 1 põhjal on S paremalt paras poolrühm.

Anname ka näite poolrühmaklassist, mis ei ole paras.

Näide 8. Vabad poolrühmad (vt. [4]) ei ole parajad. Olgu S vaba poolrühm moodustajate süsteemiga M, kirjutame $S = \langle M\rangle$. Olgu $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq S^{\mathbb{N}}$ suvaline jada. Siis leiduvad sellised $n_i \in N$ ja $m_{i_k} \in M, k \in \{1,\ldots,n_i\}$, et

$$s_i = m_{i_{n_i}} m_{i_{n_{i-1}}} \cdots m_{i_1}.$$

Vabade poolrühmade definitsiooni põhjal ilmselgelt ei leidu mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral korrutisel $s_n s_{n-1}\cdots s_1$ nõrka parempoolset lokaalset ühikelementi ja seega teoreemi 1 kohaselt ei ole S paremalt paras poolrühm.

5 Morita ekvivalentsus

Käesolevas peatükis uurime Morita ekvivalentsust parajate poolrühmade korral. Selleks defineerime polügoonide tensorkorrutise ja kategooriad ning nende ekvivalentsuse.

Kategooria koosneb kahte tüüpi suurustest – objektidest ja morfismidest. Kui $\mathcal{K}$ on kategooria, siis tema objektid moodustavad klassi $Obj(\mathcal{K})$. Mistahes objektipaariga $A, B \in Obj(\mathcal{K})$ on seotud hulk $Mor(A, B)_{\mathcal{K}}$, mida nimetatakse morfismide hulgaks objektist A objekti B nii, et

(1) kui $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ ja $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, C)$, siis eksisteerib nende korrutis $gf \in Mor_{\mathcal{K}}(A, C)$,
(2) kui morfismide korrutised $(hg)f$ ja $h(gf)$ on olemas, siis nad on võrdsed,
(3) mistahes objekti A korral leidub hulgas $Mor_{\mathcal{K}}(A, A)$ eriline morfism 1_A nii, et $f1_A = f$ ja $1_A g = g$ iga $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ ja iga $g \in Mor_{\mathcal{K}}(C, A)$ korral. Sellist morfismi nimetatakse hulga A **ühikmorfismiks**.

Kategooria $\mathcal{K}$ kõigi morfismide klassi tähistatakse $Mor(\mathcal{K})$.

Kui vaadelda kõiki unitaarseid parempoolseid S-polügoone objektidena ja nendevahelisi homomorfisme morfismidena, saame kategooria, mida tähistame sümboliga UAct_S. Analoogiliselt saab defineerida hulga ${}_S\mathsf{UAct}$.

Defineerime veel ühe polügoonide omaduse.

Definitsioon 3. Parempoolset S-polügooni A_S nimetatakse **mittesingulaarseks**, kui

$$(\forall s \in S)[(\forall a, a' \in A)(as = a's) \Rightarrow a = a'].$$

Lause 9. *Olgu S paras poolrühm, mille unitaarsel osal $U(S)$ leiduvad ühised nõrgad parempoolsed lokaalsed ühikelemendid. Siis iga unitaarne parempoolne S-polügoon on mittesingulaarne.*

Tõestus. Olgu A_S unitaarne parempoolne S-polügoon ja olgu $a, a' \in A$ sellised, et $as = a's$ iga $s \in S$ korral. Järelduse 3 põhjal leiduvad sellised $u, u' \in U(S)$, et $au = a$ ja $a'u' = a'$. Eeldusest järelduvalt leidub selline $v \in U(S) \subseteq S$, et $uv = u$

ja $u'v = u'$. Kuna $av = a'v$, siis

$$a = au = auv = av = a'v = a'u'v = a'u' = a'.$$

$\square$

Olgu S poolrühm. Polügoonide A_S ja ${}_SB$ **tensorkorrutiseks** $A \otimes_T B$ nimetatakse faktorhulka $(A \times B)/\sigma$ ekvivalentsusseose σ järgi, mille on genereerinud hulk

$$\{((as, b), (a, sb)) \mid a \in A, b \in B, s \in S\} \in (A \times B)^2.$$

Paari $(a, b) \in A \times B$ σ-klassi tähistatakse sümboliga $a \otimes b$. Seega $as \otimes b = a \otimes sb$ iga $a \in A, b \in B, s \in S$ korral.

Definitsioon 4. Öeldakse, et parempoolne S-polügoon A_S on **kinnine**, kui kujutus

$$\mu_A : A \otimes_S S \to A, \quad a \otimes s \mapsto as$$

on bijektiivne. Analoogiliselt defineeritakse vasakpoolsed kinnised S-polügoonid.

Kinnised parempoolsed (vasakpoolsed) S-polügoonid koos nende homomorfismidega moodustavad kategooria, mida tähistatakse sümboliga FAct_S (${}_S\mathsf{FAct}$). Kinniste parempoolsete S-polügoonide kategooriat tähistatakse FAct_S.

Lemma 5. *Parempoolne S-polügoon A_S on unitaarne parajasti siis kui kujutus $\mu_A : A \otimes_S S \to A$, $a \otimes s \mapsto as$ on sürjektiivne.*

Tõestus. TARVILIKKUS. Olgu S poolrühm ja A_S unitaarne parempoolne S-polügoon. Kui $a \in A_S$, siis leiduvad sellised $a' \in A, s \in S$, et $a = a's$. Järelikult $a = a's = \mu_A(a' \otimes s)$, seega on μ_A sürjektiivne.

PIISAVUS. Olgu S poolrühm ja A_S parempoolne S-polügoon. Kujutuse μ_A sürjektiivsusest järeldub, et mistahes $a \in A_S$ jaoks leiduvad sellised $a' \in A_S$ ja $s \in S$, et $a = \mu_A(a' \otimes s) = a's$. Seega on A_S unitaarne. $\square$

Niisiis suvalise poolrühma S korral on kinnised parempoolsed S-polügoonid unitaarsed.

Lause 10. *Olgu S ühiste nõrkade parempoolsete lokaalsete ühikelementidega poolrühm. Siis unitaarsed parempoolsed S-polügoonid on kinnised.*

Tõestus. Olgu S ühiste nõrkade parempoolsete lokaalsete ühikelementidega poolrühm ja olgu A_S parempoolne S-polügoon. Polügooni A_S kinnisuseks piisab näidata, et kujutus $\mu_A : A \otimes_S S \to A$, $a \otimes s \mapsto as$ on injektiivne. Oletame, et

$$\mu_A(a,s) = as = a's' = \mu_A(a',s'),$$

$a, a' \in A, s, a' \in S$. Siis leidub selline $u \in S$, et $s = su$ ja $s' = s'u$. Seega

$$a \otimes s = a \otimes su = as \otimes u = a's' \otimes u = a' \otimes s'u = a' \otimes s'$$

tensorkorrutises $A \otimes_S S$. □

Järeldus 5. *Kui poolrühm S omab ühiseid nõrku parempoolseid lokaalseid ühikelemente, siis $\mathsf{FAct}_S = \mathsf{UAct}_S$.*

Olgu $\mathcal{K}$ ja $\mathcal{L}$ kategooriad. **Kujutuseks** kategooriast $\mathcal{K}$ kategooriasse $\mathcal{L}$ nimetatakse eeskirja F, mis seab kategooria $\mathcal{K}$ igale objektile A vastavusse üheselt määratud kategooria $\mathcal{L}$ objekti AF ja kategooria $\mathcal{K}$ igale morfismile f kategooria $\mathcal{L}$ morfismi $F(f)$.

Kujutust $F : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ nimetatakse **kovariantseks funktoriks** kategooriast $\mathcal{K}$ kategooriasse $\mathcal{L}$, kui

(1) iga $f \in Mor_{\mathcal{K}} \in Obj(\mathcal{K})$ korral $F(f) \in Mor_{\mathcal{L}}(AF, BF)$,
(2) $F(fg) = F(f)F(g)$ mistahes morfismide $f, g \in Mor(\mathcal{K})$ korral, mida saab kategoorias $\mathcal{K}$ korrutada,
(3) $F(1_A) = 1_{AF}$ mistahes $A \in Obj(\mathcal{K})$ korral.

Kategooria $\mathcal{K}$ **ühikfunktoriks** nimetatakse funktorit, mis jätab paigale nii kategooria objektid kui ka morfismid. Ühikfunktorit tähistame sümboliga $1_{\mathcal{K}}$.

Morfismi $f : A \to B$ nimetatakse **isomorfismiks**, kui leidub selline morfism $g : B \to A$, et $gf = 1_A$ ja $fg = 1_B$. Funktorit $F : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ nimetatakse **isomorfismiks**, kui leidub selline funktor $G : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$, et $GF = 1_{\mathcal{K}}$ ja $FG = 1_{\mathcal{L}}$. Selliseid kategooriad nimetatakse **isomorfseteks**.

Järgnev lause on tõestatud artiklis [6].

Lause 11 ([6], Lause 3.4)**.** *Olgu S selline paremalt paras poolrühm, et $I := U(S)$ omab ühiseid nõrku parempoolseid lokaalseid ühikelemente. Siis on järgnevad väited samaväärsed:*

(1) kategooriad UAct_S ja UAct_I on isomorfsed,
(2) kategooriad FAct_S ja FAct_I on isomorfsed.

Definitsioon 5. Morita kontekstiks nimetatakse kuuikut $(S, T, {}_SP_T, {}_TP_S, \theta, \phi)$, kus S ja T on poolrühmad, ${}_SP_T$ ja ${}_TP_S$ on bipolügoonid ja

$$\theta : {}_S(P \otimes_S Q)_S \to {}_SS_S, \qquad \phi : {}_T(P \otimes_T Q)_T \to {}_TT_T$$

on sellised bipolügoonide homomorfismid, et iga $p, p' \in P$ ja $q, q' \in Q$ korral

$$\theta(p \otimes q)p' = p\phi(q \otimes p'), \qquad q\theta(p \otimes q') = \phi(q \otimes p)q'.$$

Morita konteksti nimetatakse **unitaarseks**, kui ta bipolügoonid on unitaarsed.

Olgu $\mathcal{K}$ ja $\mathcal{L}$ kategooriad ja $F, G : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ kovariantsed funktorid. Lisaks olgu $\nu : Obj(\mathcal{K}) \to Mor(\mathcal{L})$, $A \mapsto \nu_A$ selline eeskiri, et kehtivad tingimused

(1) kui $A \in Obj(\mathcal{K})$, siis $\nu_A \in Mor_{\mathcal{L}}(AF, BF)$,
(2) suvaliste objektide $A, A' \in Obj(\mathcal{K})$ ja suvalise morfismi $f : A \to A'$ korral

$$G(f)\nu_A = \nu_{A'}F(f).$$

Eeskirja ν nimetatakse **loomulikuks teisenduseks** funktorist F funktorisse G ja tähistatakse $\nu : F \to G$. Kui loomuliku teisenduse ν korral on ν_A iga objekti A korral isomorfism, siis nimetatakse seda teisendust **loomulikuks isomorfismiks**.

Kui funktorite F ja G korral leidub loomulik isomorfism $\nu : F \to G$, siis öeldakse, et funktorid F ja G on **loomulikult isomorfsed**.

Olgu $\mathcal{K}$ ja $\mathcal{L}$ kategooriad ning $F : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ kovariantne funktor. Funktorit F

nimetatakse **ekvivalentsiks**, kui leidub selline kovariantne funktor $G : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$, et funktor FG on loomulikult isomorfne kategooria $\mathcal{K}$ ühikfunktoriga ja funktor GF on loomulikult isomorfne kategooria $\mathcal{L}$ ühikfunktoriga. Siis öeldakse, et kategooriad $\mathcal{K}$ ja $\mathcal{L}$ on **ekvivalentsed**. Kui kaks kategooriat on isomorfsed, siis on nad ka ekvivalentsed.

Anname kahe poolrühma Morita ekvivalentsuse definitsiooni läbi üle nende vaadeldavate kinniste polügoonide kategooriate ekvivalentsuse.

Definitsioon 6. Öeldakse, et poolrühmad S ja T on

a) **paremalt Morita ekvivalentsed**, kui kategooriad FAct_S ja FAct_T on ekvivalentsed,
b) **vasakult Morita ekvivalentsed**, kui kategooriad ${}_S\mathsf{FAct}$ ja ${}_T\mathsf{FAct}$ on ekvivalentsed,
c) **Morita ekvivalentsed**, kui nad on paremalt ja vasakult Morita ekvivalentsed,
d) **tugevalt Morita ekvivalentsed**, kui leidub unitaarne Morita kontekst $(S, T, {}_SP_T, {}_TP_S, \theta, \phi)$, kus θ ja ϕ on sürjektiivsed.

Teoreem 2. *Olgu S, T sellised paremalt parajad poolrühmad, et $U(S_S), U(T_T)$ omavad ühiseid nõrku parempoolseid lokaalseid ühikelemente. Siis on järgnevad väited samaväärsed:*

(1) kategooriad UAct_S ja UAct_T on ekvivalentsed,
(2) kategooriad FAct_S ja FAct_T on ekvivalentsed,
(3) poolrühmad S ja T on paremalt Morita ekvivalentsed,
(4) kategooriad $\mathsf{UAct}_{U(S_S)}$ ja $\mathsf{UAct}_{U(T_T)}$ on ekvivalentsed,
(5) kategooriad $\mathsf{FAct}_{U(S_S)}$ ja $\mathsf{FAct}_{U(T_T)}$ on ekvivalentsed,
(6) poolrühmad $U(S_S)$ ja $U(T_T)$ on paremalt Morita ekvivalentsed.

Tõestus. Lause 11 esimese osa põhjal on kategooriad $\mathsf{UAct}_{U(S_S)}$ ja UAct_S isomorfsed (sealhulgas ka ekvivalentsed), teise osa põhjal on kategooriad $\mathsf{FAct}_{U(S_S)}$ ja FAct_S isomorfsed. Ekvivalentsusseose transitiivsusest tuleneb (1) $\Leftrightarrow$ (4) ning (2) $\Leftrightarrow$ (5). (2) $\Leftrightarrow$ (3) ja (5) $\Leftrightarrow$ (6) järelduvad otse Morita ekvivalentsuse definitsioonist. Kuna

$U(S)_S, U(T)_T$ on poolrühmad, mis omavad ühiseid nõrku parempoolseid lokaalseid ühikelemente, siis lause 5 põhjal on nad kinnised ja seega (4) $\Leftrightarrow$ (5). $\square$

Olgu S, T parajad poolrühmad, mille unitaarsetel osadel $U(S), U(T)$ on ühised nõrgad parempoolsed lokaalsed ühikelemendid. Sellisel juhul Morita ekvivalentsuse uurimine taandub teoreemi 2 abil nende unitaarsete osade uurimise peale. Poolrühmad $U(S), U(T)$ on faktoriseeruvad, kuna omavad ühiseid nõrku parempoolseid lokaalseid ühikelemente. Seega saab rakendada artikli [2] tulemusi. Kui $U(S), U(T)$ on lokaalsete ühikelementidega, siis saab rakendada artiklites [8] ja [7] arendatud teooriat.

Defineerime poolrühmal S seose

$$\zeta_S = \{(s_1, s_2) \in S \times S \mid ss_1 = ss_2 \ \ iga \ \ s \in S \ \ korral\}.$$

Ilmselt on seos ζ_S refleksiivne, transitiivne ja sümmeetriline, seega ekvivalentsusseos. Olgu $s_1, s_2, z_1, z_2 \in S$. Kui $(s_1, s_2), (z_1, z_2) \in \zeta_S$, siis

$$ss_1z_1 = (ss_1)z_1 = (ss_2)z_1 = (ss_2)z_2 = s_2z_2.$$

Seega ζ_S on kongruents poolrühmal S mistahes $s \in S$ puhul. Tähistame poolrühma S faktorpoolrühma kongruentsi ζ_S järgi sümboliga S'.

Lause 12. *([2], Theorem 3) Olgu S, T faktoriseeruvad poolrühmad. Unitaarsete mittesingulaarsete parempoolsete S-polügoonide kategooria on ekvivalentne unitaarsete mittesingulaarsete parempoolsete T-polügoonide kategooriaga siis ja ainult siis, kui poolrühmad S' ja T' on tugevalt Morita ekvivalentsed.*

Vasakreduktiivsete poolrühmade korral on ζ_S võrdusseoseks poolrühmal S, kusjuures $S' = S$. Seega, kui $U(S), U(T)$ omavad ühiseid nõrku vasakpoolseid lokaalseid ühikelemente, on nad vasakreduktiivsed ja seega $U(S)' = U(S)$ ja $U(T)' = U(T)$.

Kasutades faktorpoolrühmi kongruentsi ζ järgi annab järgnev lause piisava ja tarviliku tingimuse faktoriseeruvate poolrühmade Morita ekvivalentsuseks.

Lause 13. *Olgu S ja T sellised poolrühmad, et $U(S)$ ja $U(T)$ omavad ühiseid* *nõrku lokaalseid ühikelemente. Siis on järgmised väited samaväärsed:*

(1) poolrühmad S ja T on paremalt Morita ekvivalentsed,

(2) poolrühmad $U(S)$ ja $U(T)$ on paremalt Morita ekvivalentsed,

(3) poolrühmad $U(S)$ ja $U(T)$ on paremalt tugevalt Morita ekvivalentsed.

Tõestus. Väidete (1) ja (2) samaväärsus järeldub otse teoreemist 2. Sama teoreemi kohaselt $U(S)$ ja $U(T)$ on paremalt Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui UAct_{U_S} ja UAct_{T_S} on ekvivalentsed. Lause 9 põhjal on UAct_{U_S} (UAct_{T_S}) unitaarsete mittesingulaarsete parempoolsete $U(S)$-polügoonide ($U(T)$-polügoonide) kategooria. Lausest 12 järeldub, et need kategooriad on ekvivalentsed parajasti siis kui $U(S), U(T)$ on tugevalt Morita ekvivalentsed. Seega on väited (2) ja (3) samaväärsed. $\square$

Viited

[1] B. Banaschewski, Functors into categories of M-sets, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 8 (1972), 49–64.

[2] Y. Q. Chen, K. P. Shum, Morita equivalence for factorisable semigroups, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 17 (2001), 437–454.

[3] J.M. Howie, Fundamentals of Semigroup Theory, Clarendon Press, Oxford, (1995).

[4] M. Kilp, Algebra II, Tartu, (1998).

[5] U. Knauer, Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids, Semigroup Forum 3 (1972), 359–370.

[6] V. Laan, L. Márki, Fair semigroups and Morita equivalence, Semigroup Forum, avaldatud elektrooniliselt 01.05.2015, DOI: 10.1007/s00233-015-9723-3.

[7] V. Laan, L. Márki, Morita invariants for semigroups with local units, Mh. Math. 166 (2012), 441–451.

[8] M.V. Lawson, Morita equivalence of semigroups with local units, J. Pure Appl. Algebra 215 (2011), 455–470.

[9] S. Talwar, Strong Morita equivalence and a generalisation of the Rees theorem, J. Algebra 181 (1996), 371–394.

[10] Y. Xu, K.P. Shum, R.F. Turner-Smith, Morita-like equivalence of infinite matrix subrings, J. Algebra 159 (1993), 425–435.

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Iiris Lüsi (sünnikuupäev: 05.11.1992)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

   "Parajad poolrühmad",

   mille juhendaja on vanemteadur Valdis Laan,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise ees-märgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile,
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **04.06.2015**