Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Märten Heinsalu

Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesanne

Matemaatika eriala
Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja: Professor Arvet Pedas

TARTU 2016

Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesanne

Magistritöö

Märten Heinsalu

Lühikokkuvõte. Magistritöös antakse tingimused Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande lahendi olemasoluks ja ühesuseks. Lisaks tuletatakse meetod selle ülesande numbriliseks lahendamiseks ja esitatakse rida näiteülesande lahendamisel saadud tulemusi antud meetodi põhjal koostatud Matlabi programmi abil. Vaadeldava Cauchy ülesande lahendi olemasolu ja ühesuse tõestused põhinevad Kai Diethelmi monograafias *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type* (Springer, 2010) esitatud tulemustele.

CERC teaduseriala: P130 Funktsioonid, differentsiaalvõrrandid

Märksõnad: Caputo diferentsiaaloperaator, Cauchy ülesanne, Adamsi-Bashforthi-Moultoni numbriline meetod

Cauchy problem for a Caputo fractional differential equation

Master's thesis

Märten Heinsalu

Abstract. The objective of this master's thesis is to present the conditions for the existence of a solution and its uniqueness in a Cauchy problem for a Caputo fractional differential equation. It also provides a numerical method for solving such problems and presents a series of results that are obtained by solving an example problem using a Matlab program that is based on the given numerical method. The proofs are based on Kai Diethelm's monograph *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type* (Springer, 2010).

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations

Keywords: Caputo differential operator, Cauchy problem, Adams-Bashforth-Moulton numerical method

Sisukord

Sissejuhatus

Olgu n mingi naturaalarv. Olgu funktsioon $f = f(x,y)$ määratud ja pidev muutujate x, y piirkonnas D. Vahemikus (a,b) määratud funktsiooni $y = y(x)$ nimetatakse diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} = f(x,y) \tag{0.1}$$

lahendiks selles vahemikus, kui $y(x)$ on n korda pidevalt diferentseeruv vahemikus (a,b) ning iga $x \in (a,b)$ korral $(x, y(x)) \in D$ ja

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x)).$$

Ülesannet, kus on vaja leida võrrandi (0.1) lahend $y = y(x)$, mis rahuldab tingimusi

$$y(x_0) = y_0^{(0)}, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x) = y_0^{(n-1)},$$

kus $x_0, y_0^{(0)}, y_0^{(0)}, \ldots, y_0^{(0)}$ on etteantud arvud, nimetatakse algtingimustega ülesandeks ehk Cauchy ülesandeks võrrandi (0.1) jaoks. Sellise ülesande lahendi olemasolu ja ühesus on antud Cauchy teoreemiga (vt [6], lk 214, teoreem 13.2.2).

Kui $n > 0$ ei ole naturaalarv, siis kujutab võrrand (0.1) endast niinimetatud murrulist järku tuletisega diferentsiaalvõrrandit ja tekib küsimus, kuidas on vastav tuletis defineeritud ning millal on murrulise tuletisega diferentsiaalvõrrand lahenduv. Käesolevas magistritöös vaadeldakse Caputo murrulise tuletisega (vt §2) diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesannet ja näidatakse, millistel tingimustel on vastaval ülesandel lahend olemas (vt teoreemi 3.1) ja millistel tingimustel ühene (vt teoreemi 3.2).

Magistritöös esitatakse ka numbriline meetod, mille abil saab leida Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande lahendi lähisväärtusi. Meetodi rakendamiseks on koostatud Matlabi programm ja toodud rida tulemusi näiteülesande praktilise lahendamise kohta.

Magistritöö teoreetiline osa on referatiivse iseloomuga ja põhiliselt tugineb monograafias [1] toodud tulemustele.

Töö koosneb neljast osast ning lisas toodud programmidest.

Esimene paragrahv sisaldab mitmeid definitsioone ja tulemusi, mis on vajalikud eelteadmised ülejäänud töö mõistmiseks.

Teine paragrahv koosneb kolmest osast. Esimeses defineeritakse Riemann-Liouville'i integraal- ja diferentsiaaloperaatorid ning esitatakse mõned tulemused, mis on vajalikud edaspidi. Seejärel defineeritakse Caputo diferentsiaaloperaator ja esitatakse kaks olulist abitulemust. Kolmandas alapunktis tuuakse mõned näited Riemann-

Liouville'i ja Caputo tuletiste leidmise kohta.

Kolmandas paragrahvis tõestatakse kaks teoreemi, mis näitavad, millistel tingimustel Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesanne on üheselt lahenduv.

Neljandas ja viimases paragrahvis esitatakse Adamsi-Bashforthi-Moultoni numbrilise meetodi üldistus, mis võimaldab leida Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande lahendi ligikaudseid väärtusi etteantud võrgu sõlmedes. Seejärel tuuakse näide selle meetodi praktilise rakendamise kohta.

§ 1. Vajalikud eelteadmised ja abitulemused

Selles paragrahvis esitatame mõned mõisted ja tulemused, mida läheb vaja selle magistritöö järgmistes osades. Siin tugineme põhiliselt töödele [1], [3] ja [5].

Definitsioon 1.1. Gammafunktsiooniks nimetatakse funktsiooni Γ, mis on defineeritud seosega

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx, \quad a > 0. \tag{1.1}$$

Kui $a > 0$, siis seose (1.1) paremal poolel olev integraal koondub.

Olgu $a > 0$. Siis kehtib seos

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a). \tag{1.2}$$

Tõepoolest, ositi integreerides saame

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^a dx = -e^{-x}x^a\big|_0^\infty + a\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx = 0 + a\Gamma(a) = a\Gamma(a).$$

Osutub, et valemi (1.2) abil saame funktsiooni $\Gamma(a)$ defineerida ka $a \in (-1, 0)$ korral:

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}.$$

Veelgi enam, olgu $a < 0$ ja $n \in \mathbb{N}$ selline, et $a + n > 0$. Siis defineerime

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)\dots(a+(n-1))}, \tag{1.3}$$

kui $a \notin \{0, -1, -2, \dots\}$. Kui $a > 0$, siis võrdus (1.3) on samaväärne seosega (1.2). Paneme tähele, et kui $a \in \{0, -1, -2, \dots\}$, siis võrduse (1.3) paremal poolel oleva murru nimetaja võrdub nulliga. Seega pole funktsioon Γ määratud mittepositiivsete täisarvude korral.

Definitsioon 1.2. Beetafunktsiooniks nimetatakse funktsiooni B, mis on defineeritud seosega

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt, \tag{1.4}$$

kus a ja b on positiivsed reaalarvud.

Kui $a, b > 0$, siis seose (1.4) paremal pool olev integraal koondub.

Teoreem 1.1. *Olgu $a, b > 0$. Siis*

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{1.5}$$

ja seega kehtib ka

$$\int_0^x t^{a-1}(x-t)^{b-1}dt = x^{a+b-1}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Definitsioon 1.3. Olgu $p > 0$. Siis defineerime $\lceil p \rceil$ kui vähima täisarvu, mis on suurem või võrdne arvuga p.

Tähistame käesolevas töös korduvalt kasutatavad hulgad järgmiselt:

- $\mathbb{N}$ on kõikide naturaalarvude hulk;
- $C[a,b]$ on lõigus $[a,b]$ $(a < b)$ pidevate funktsioonide hulk;
- $C^m[a,b]$ on lõigus $[a,b]$ määratud kõikide m-korda ($m \in \mathbb{N}$) pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk;

Hulk $C[a,b]$ on Banachi ruum normi

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| \quad (f \in C[a,b])$$

suhtes.

Nüüd sõnastame mõned definitsioonid ja tulemused, mis on vajalikud Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande lahendi olemasolu ja ühesuse tõestamiseks.

Definitsioon 1.4. Olgu X vektorruum. Hulka $U \subset X$ nimetatakse kumeraks kui iga $x, y \in U$ ja $\lambda \in (0,1)$ korral $\lambda x + (1-\lambda)y \in U$.

Definitsioon 1.5. Hulka U meetrilises ruumis nimetatakse suhteliselt kompaktseks, kui igast U elementidest moodustatud jadast saab eraldada koonduva osajada.

Definitsioon 1.6. Koosnegu hulk U lõigul $[a,b]$ määratud funktsioonidest. Öeldakse, et funktsioonide hulk U on võrdpidev (funktsioonid hulgast U on võrdpidevad), kui iga $\epsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon,$$

kui

$$|x_1 - x_2| < \delta$$

ja $f \in U$.

Definitsioon 1.7. Koosnegu hulk U lõigul $[a,b]$ määratud funktsioonidest. Öeldakse, et funktsioonide hulk U on ühtlaselt tõkestatud (funktsioonid hulgast U on ühtlaselt tõkestatud), kui leidub arv M nii, et

$$|f(x)| \leqslant M$$

iga $f \in U$ ja $x \in [a, b]$ korral.

Teoreem 1.2. *(Arzelà-Ascoli teoreem) Hulk ruumis $C[a, b]$ on suhteliselt kompaktne parajasti siis, kui ta on ühtlaselt tõkestatud ja võrdpidev.*

Definitsioon 1.8. Olgu X meetriline ruum. Operaatori $A : X \to X$ püsipunktiks nimetatakse sellist elementi $y \in X$, et

$$Ay = y.$$

Teoreem 1.3. *(Schauderi püsipunktiprintsiip) Olgu X täielik meetriline ruum ja olgu $U \subseteq X$ tõkestatud kinnine kumer alamhulk ning olgu $A : U \to U$ selline kujutus, et hulk*

$$\{Au : u \in U\}$$

on suhteliselt kompaktne ruumis X. Siis leidub kujutusel A vähemalt üks püsipunkt.

Teoreem 1.4. *(Weissingeri püsipunktiteoreem) Eeldame, et (U, d) on mittetühi täielik meetriline ruum meetrikaga d ja $\alpha_j \geqslant 0$ iga $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ korral sellised, et rida $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ koondub. Olgu kujutus $A : U \to U$ selline, et võrratus*

$$d(A^j u - A^j v) \leqslant \alpha_j d(u, v)$$

kehtib iga $j \in \mathbb{N}$ ja iga $u, v \in U$ korral. Siis operaatoril A leidub üheselt määratud püsipunkt u^* ning iga $u_0 \in U$ korral jada $(A^j u_0)_{j=1}^{\infty}$ koondub püsipunktiks u^*.

Definitsioon 1.9. Olgu $p_1, p_2 > 0$. Mittag-Leffleri funktsiooniks E_{p_1,p_2} parameetritega p_1 ja p_2 nimetatakse funktsiooni, mis on defineeritud seosega

$$E_{p_1,p_2}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(jp_1 + p_2)}$$

Ühe parameetriga Mittag-Leffleri funktsioon on defineeritud seosega $E_{p_1}(z) = E_{p_1,1}(z)$.

Kui $p_1, p_2 > 0$, siis Mittag-Leffleri funktsiooni määrav astmerida koondub iga $z \in \mathbb{R}$ korral.

§ 2. Caputo diferentsiaaloperaator

Selles paragrahvis toome kõigepealt sisse Riemann-Liouville'i integraaloperaatori mõiste ja seejärel defineerime Riemann-Liouville'i diferentsiaaloperaatori Riemann-Liouville'i integraaloperaatori abil. Caputo diferentsiaaloperaator on defineeritud nende kahe operaatori kaudu. Lisaks esitame mõned nende operaatoritega edaspidi vaja minevad tulemused ja kolm näidet murrulisete integraalide ja tuletiste leidmise kohta.

Selles paragrahvis esitatud tulemused põhinevad töödele [1] ja [3].

2.1. Riemann-Liouville'i integraal- ja diferentsiaaloperaatorid

Olgu D operaator, mis seab lõigus [a,b] diferentseeruvale funktsioonile f vastavusse tema tuletise f':

$$(Df)(x) = f'(x), \quad x \in [a, b],$$

kus

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Olgu J_a operaator, mis teisendab lõigus $[a, b]$ integreeruva funktsiooni f funktsiooniks $J_a f$ nii, et

$$(J_a f)(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral hakkame kasutama sümboleid D^n ja J_a^n tähistamaks operaatorite D ja J_a n-kordset rakendamist:

$$\begin{aligned} &D^1 = D, \quad J_a^1 = J_a \\ &D^n = DD^{n-1}, \quad J_a^n = J_a J_a^{n-1}. \end{aligned}$$

Defineerime $D^0 = I$ ja $J_a^0 = I$, kus I on samasusteisendus.

Järgnevas huvitab meid, kas ja kuidas saame neid mõisteid üldistada nii, et oleks kaetud ka olukorrad, kus $n \notin \mathbb{N}$. Selleks kasutame allpool toodud teoreeme 2.1 ja 2.2, mille tõestused võib leida vastavalt õpikutest ([4], lk 371) ja ([6], lk 224).

Teoreem 2.1. *Olgu $f\colon [a, b] \to \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ pidev funktsioon ja olgu $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ defineeritud võrdusega*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Siis F on diferentseeruv ja

$$F' = f.$$

Teoreem 2.2. *Olgu f lõigus $[a,b]$ pidev funktsioon. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral kehtib valem*

$$(J_a^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

Teoreemi 2.1 põhjal

$$(DJ_a)f = f$$

ja iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$(D^n J_a^n)f = f. \tag{2.1}$$

Operaatorite D ja J_a üldistamisel soovime säilitada selle omaduse.

Definitsioon 2.1. Olgu $p > 0$. Operaatorit J_a^p, mis on ruumis $C[a,b]$ defineeritud võrdusega

$$(J_a^p f)(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-t)^{p-1} f(t)dt, \quad x \in [a,b], \tag{2.2}$$

kus Γ on gammafunktsioon (1.1), nimetatakse Riemann-Liouville'i p-järku integraaloperaatoriks. Seejuures funktsiooni $J_a^p f$ nimetatakse funktsiooni f Riemann-Liouville'i p-järku integraaliks.

Kui $p = 0$, siis defineerime $J_a^0 = I$.

Tuginedes Riemann-Liouville'i integraaloperaatori J_a^p mõistele, saame defineerida Riemann-Liouville'i diferentsiaaloperaatori.

Definitsioon 2.2. Olgu $p > 0$ ja $m = \lceil p \rceil$. Eeldame, et funktsioon $f \in C[a,b]$ on selline, et $J_a^{m-p} f \in C^m[a,b]$. Siis operaatorit D_a^p, mis on defineeritud võrdusega

$$(D_a^p f)(x) = (D^m J_a^{m-p} f)(x), \quad x \in [a,b], \tag{2.3}$$

nimetatakse Riemann-Liouville'i p-järku diferentsiaaloperaatoriks. Funktsiooni $D_a^p f$ nimetatakse funktsiooni f Riemann-Liouville'i p-järku tuletiseks.

Kui $p = 0$, siis defineerime $D_a^0 = I$.

Paneme tähele, et kui $p \in \mathbb{N}$, siis operaator D_a^p ühtib tavalise p-järku diferentsiaaloperaatoriga D^p.

Esitame nüüd kolm edaspidi vaja minevat Riemann-Liouville'i integraal- ja diferentsiaaloperaatorite omadust.

Teoreem 2.3. *Olgu $p, r \geqslant 0$ ja $f \in C[a,b]$. Siis*

$$J_a^p J_a^r f = J_a^{p+r} f$$

kehtib lõigus $x \in [a,b]$.

Teoreem 2.4. *Olgu $p \geqslant 0$, $m = \lceil p \rceil$, $a \in \mathbb{R}$ ja funktsioon f selline, et $D_a^p J_a^p f$ eksisteerib. Siis*

$$D_a^p J_a^p f = f.$$

Teoreem 2.5. *Olgu $p_1, p_2 \geqslant 0$ ja olgu $\phi \in C[a,b]$ ning $f = J_a^{p_1+p_2}\phi$. Siis*

$$D_a^{p_1} D_a^{p_2} f = D_a^{p_1+p_2} f.$$

2.2. Caputo diferentsiaaloperaator

Olgu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ja $f \in C^{m-1}[a,b]$. Sümboliga $T_{m-1}[f;a]$ tähistame (m-1)-järku Taylori polünoomi funktsioonist f kohal a:

$$(T_{m-1}[f;a])(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad x \in [a,b]. \tag{2.4}$$

Definitsioon 2.3. Olgu $p \geqslant 0$, $m = \lceil p \rceil$ ja olgu funktsioon $f \in C^{m-1}[a,b]$ selline, et $(D_a^p(f - T_{m-1}[f;a])) \in C^m[a,b]$. Siis operaatorit ${}_C D_a^p$, mis on defineeritud võrdusega

$$({}_C D_a^p f)(x) = (D_a^p(f - T_{m-1}[f;a]))(x), \quad x \in [a,b]. \tag{2.5}$$

nimetatakse Caputo p-järku diferentsiaaloperaatoriks. Seejuures funktsiooni ${}_C D_a^p f$ nimetatakse funktsiooni f Caputo p-järku tuletiseks.

Paneme tähele, et kui $p \in \mathbb{N}$, siis operaator ${}_C D_a^p$ ühtib tavalise p-järku diferentsiaaloperaatoriga D^p. Tõepoolest, kui $p \in \mathbb{N}$, siis $m = \lceil p \rceil = p$ ja

$$\begin{aligned}({}_C D_a^p f)(x) &= (D_a^p(f - T_{m-1}[f;a]))(x) = (D_a^p f)(x) - (D_a^p(T_{m-1}[f;a]))(x) \\ &= (D^m f)(x) - (D^m(T_{m-1}[f;a]))(x) = (D^m f)(x) \\ &= (D^p f)(x)\end{aligned}$$

iga $x \in [a,b]$ korral, sest m-järku tuletis $(m-1)$-järku polünoomist on null.

Esitame nüüd kaks Caputo diferentsiaaloperaatori omadust, mis on vajalikud edaspidi.

Teoreem 2.6. *Kui $f \in C[a,b]$ ja $p \geqslant 0$, siis kehtib*

$${}_C D_a^p J_a^p f = f.$$

Teoreem 2.7. *Olgu $p > 0$ ja $m = \lceil p \rceil$ ning $f \in C^m[a,b]$. Siis*

$$_C D_a^p f = J_a^{m-p} D^m f.$$

2.3. Näited

Vaatleme nüüd näiteid Riemann-Liouville'i ja Caputo murruliste tuletiste leidmise kohta.

Kõigepealt paneme tähele, et Riemann-Liouville'i tuletis konstantsest funktsioonist $f(x) = c \quad (x \in [a,b])$, ei pruugi olla võrdne nulliga.

Tõepoolest, olgu $f(x) = c$, kus $x \in [a,b]$ ja c on mingi konstant. Olgu $a \in \mathbb{R}$, $p > 0$ ja $m = \lceil p \rceil$. Kui $p \in \mathbb{N}$, siis $m = p$ ning

$$(D_a^p f)(x) = (D^m f)(x) = c^{(m)} = 0.$$

Kui $p \notin \mathbb{N}$, siis definitsioonist 2.3 lähtuvalt leiame, et

$$\begin{aligned}
(D_a^p f)(x) &= (D^m J_a^{m-p} f)(x)) \\
&= D^m (\frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^x (x-t)^{m-p-1} c dt) \\
&= D^m (\frac{1}{\Gamma(m-p)(m-p)} (-c(x-t)^{m-p}) \Big|_a^x) \\
&= D^m (\frac{1}{\Gamma(m-p)(m-p)} c(x-a)^{m-p}).
\end{aligned}$$

Seega valemi (1.2) alusel saame

$$(D_a^p f)(x) = \frac{c(x-a)^{-p}}{\Gamma(-p+1)}, \quad x \in [a,b].$$

Paneme tähele, et see tuletis võrdub nulliga siis ja ainult siis kui $c = 0$. Samas Caputo p-järku tuletis funktsioonist $f(x) = c$ $(x \in [a,b])$ on teoreemi 2.7 põhjal alati võrdne nulliga:

$$({}_C D_a^p f)(x) = (J_a^{m-p} D^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^x (x-t)^{m-p-1} c^{(m)} dt = 0.$$

Olgu järgmistes näidetes $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $p > 0$, $m = \lceil p \rceil$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $x \in [a,b]$.

Näide 2.1. Olgu

$$f(x) = (x-a)^c$$

mingi $c > -1$ korral. Siis

$$(J_a^p f)(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(p+c+1)}(x-a)^{p+c}.$$

Tõepoolest, definitsiooni 2.2 ja teoreemi 1.1 alusel

$$\begin{aligned}(J_a^p f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^x (x-t)^{p-1}(t-a)^c dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{x-a} ((x-a)-(t-a))^{p-1}(t-a)^{(c+1)-1}d(t-a) \\ &= \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(p+c+1)}(x-a)^{p+c}.\end{aligned}$$

Näide 2.2. Olgu $f(x) = (x-a)^c$, kus $c \geqslant 0$. Siis funktsiooni f Riemann-Liouville'i p-järku integraali definitsiooni alusel

$$(J_a^{m-p} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^x (x-t)^{m-p-1}(t-a)^c dt$$

ja näite 2.1 põhjal

$$(J_a^{m-p} f)(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma((m-p)+c+1)}(x-a)^{(m-p)+c}$$

Kui $p-c \in \mathbb{N}$, siis $p > c$ ja $m-(p-c) \in \{0,1,\dots,m-1\}$. Seetõttu

$$D^m\Big(\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(m-p+c+1)}(x-a)^{m-p+c}\Big) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(m-p+c+1)}D^m\big((x-a)^{m-p+c}\big) = 0.$$

Kui $p-c \notin \mathbb{N}$, siis

$$D^m\Big(\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(m-p+c+1)}(x-a)^{m-p+c}\Big) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(-p+c+1)}(x-a)^{-p+c}.$$

Seega funktsiooni $f(x) = (x-a)^c$ Riemann-Liouville'i p-järku tuletis avaldub järgmiselt:

$$(D_a^p f)(x) = \begin{cases} 0, & p-c \in \mathbb{N} \\ \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(-p+c+1)}(x-a)^{-p+c}, & p-c \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Näide 2.3. Olgu $f(x) = (x-a)^c$, kus $c \geqslant 0$. Siis

$$({}_C D_a^p f)(x) = \begin{cases} 0, & c \in \{0,1,2,...,m-1\} \\ \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+1-p)}(x-a)^{c-p}, & c > m-1. \end{cases}$$

Tõepoolest, kui $c \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$, siis $(D^m f)(x) = 0$ ja teoreemi 2.7 alusel

$$({}_C D_a^p f)(x) = (J_a^{m-p} D^m f)(x) = 0.$$

Kui $c > m - 1$, siis

$$(D^m f)(x) = c(c-1)...(c-(m-1))(x-a)^{c-m}$$

ja

$$\begin{aligned}({}_C D_a^p f)(x) &= J_a^{m-p}\big(c(c-1)...(c-(m-1))(x-a)^{c-m}\big) = \\ &= c(c-1)...(c-(m-1))J_a^{m-p}(x-a)^{c-m}.\end{aligned}$$

Kuna $c > m-1$ ehk $c - m > -1$, siis näite 2.1 alusel

$$J_a^{m-p}(x-a)^{c-m} = \frac{\Gamma(c-m+1)}{\Gamma(c-m+1+m-p)}(x-a)^{m-p+c-m} = \frac{\Gamma(c-(m-1))}{\Gamma(c-p+1)}(x-a)^{c-p}.$$

Võrduse (1.2) põhjal

$$\begin{aligned}c(c-1)...(c-(m-1)\Gamma(c-(m-1)) &= c(c-1)...(c-(m-2)\Gamma(c-(m-2)) \\ &= \ldots = \Gamma(c+1)\end{aligned}$$

ja seega

$$({}_C D_a^p f)(x) = \frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+1-p)}(x-a)^{c-p}.$$

§ 3. Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesanne

Selles paragrahvis toetume tulemustele, mis on esitatud monograafias [1].

3.1. Lahendi olemasolu

Olgu $p > 0$ ja $m = \lceil p \rceil$. Vaatleme ülesannet, kus on vaja leida diferentsiaalvõrrandi

$$ {}_C D_0^p y = f(x, y) \tag{3.1}$$

lahend $y = y(x)$, mis on määratud lõigus $[0, h]$, kus h on mingi positiivne reaalarv, ja rahuldab algtingimusi

$$D^k y(0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, ..., m-1, \tag{3.2}$$

kus $y_0^{(0)}, y_0^{(1)}, ..., y_0^{(m-1)}$ on etteantud reaalarvud. Sellist ülesannet nimetatakse Cauchy ülesandeks võrrandi (3.1) jaoks.

Järgnev teoreem annab tingimused ülesande (3.1) - (3.2) lahendi olemasoluks.

Teoreem 3.1. *Olgu $p > 0$ ja $m = \lceil p \rceil$. Olgu $y_0^{(0)}$, $y_0^{(1)}$, ..., $y_0^{(m-1)} \in \mathbb{R}$ ning $K > 0$ ja $h^* > 0$. Defineerime*

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, h^*], \quad \Big|y - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k y_0^{(k)}}{k!}\Big| \leqslant K\}$$

ja olgu funktsioon $f : G \to \mathbb{R}$ pidev. Olgu

$$M = \sup_{(x,y)\in G} |f(x, y)|$$

ja

$$h = \begin{cases} h^*, & \text{kui } M = 0, \\ \min\{h^*, \left(\frac{K\Gamma(p+1)}{M}\right)^{\frac{1}{p}}\}, & \text{kui } M \neq 0, \end{cases}$$

kus gammafunktsioon Γ on defineeritud seosega (1.1).

Siis leidub funktsioon $y \in C[0, h]$, mis on Cauchy ülesande (3.1) - (3.2) lahendiks lõigus $[0, h]$.

Tõestus. Kõigepealt näitame, et ülesanne (3.1) - (3.2) on samaväärne Volterra integraalvõrrandiga kujul

$$y(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} f(t, y(t)) dt \quad (x \in [0, h]) \tag{3.3}$$

järgmises mõttes: kui $y \in C[0, h]$ on ülesande (3.1) - (3.2) lahend, siis ta on ka võrrandi (3.3) lahend ja vastupidi, kui $y \in C[0, h]$ on võrrandi (3.3) lahend, siis ta on ka ülesande (3.1) - (3.2) lahend.

Tõepoolest, olgu $y \in C[0, h]$ võrrandi (3.3) lahend. Siis saame kirjutada

$$y(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} y_0^{(k)} + J_0^p f(x, y(x)).$$

Rakendades Caputo diferentsiaaloperaatorit ${}_C D_0^p$ selle võrduse mõlemale poolele ning kasutades teoreemi 2.6 ning näite 2.3 tulemust, saame, et iga $x \in [0, h]$ korral

$$\begin{aligned} {}_C D_0^p y(x) &= {}_C D_0^p \Big(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} y_0^{(k)} \Big) + {}_C D_0^p J_0^p f(x, y(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{{}_C D_0^p (x^k)}{k!} y_0^{(k)} + f(x, y(x)) \\ &= f(x, y(x)). \end{aligned}$$

Seega olemegi saanud

$${}_C D_0^p y(x) = f(x, y(x)), \quad x \in [0, h],$$

s.t. y on võrrandi (3.1) lahendiks lõigul $[0, h]$.

Näitame, et funktsioon y rahuldab algtingimusi (3.2). Olgu $j \in \{0, 1, ..., m-1\}$ ja $x \in [0, h]$. Siis

$$\begin{aligned} D^j y(x) &= D^j \Big(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} y_0^{(k)} \Big) + D^j J_0^p f(x, y(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^j (x^k)}{k!} y_0^{(k)} + D^j J_0^p f(x, y(x)). \end{aligned}$$

Kuna

$$D^j (x^k) = \begin{cases} 0, & \text{kui } j > k, \\ k(k-1)...(k-j+1) x^{k-j}, & \text{kui } j < k, \\ j!, & \text{kui } j = k, \end{cases}$$

siis kohal $x = 0$ saame:

$$(D^j x^k)|_{x=0} = \begin{cases} 0, \text{ kui } j \neq k, \\ j!, \text{ kui } j = k. \end{cases}$$

Liidetava $D^j J_0^p f(x, y(x))$ võime kirjutada kujul

$$\begin{aligned} D^j J_0^p f(x, y(x)) &= D^j J_0^j J_0^{p-j} f(x, y(x)) \\ &= J_0^{p-j} f(x, y(x)). \end{aligned}$$

Hindame saadud integraali järgmiselt:

$$\begin{aligned} |J_0^{p-j} f(x, y(x))| &= \frac{1}{\Gamma(p-j)} \left| \int_0^x (x-t)^{p-j-1} f(t, y(t)) dt \right| \\ &\leqslant \frac{M}{\Gamma(p-j)} \left| \int_0^x (x-t)^{p-j-1} dt \right| \\ &= \frac{M}{\Gamma(p-j)(p-j)} \left| (x-t)^{p-j} \right|_{t=0}^{t=x} \\ &= \frac{M}{\Gamma(p-j+1)} x^{p-j}. \end{aligned}$$

Seega kohal $x = 0$ saame:

$$|J_0^{p-j} f(x, y(x))|_{x=0} \leqslant \frac{M}{\Gamma(p-j+1)} 0^{p-j} = 0.$$

Järelikult

$$J_0^{p-j} f(x, y(x))|_{x=0} = 0.$$

Seega oleme saanud, et $D^j y(0) = y_0^{(j)}$, $j = 0, 1, ..., m-1$, mis ütleb, et võrrandi (3.3) lahend $y(x)$ rahuldab algtingimusi (3.2).

Oletame nüüd, et $y \in C[0, h]$ on ülesande (3.1) - (3.2) lahend. Defineerime funktsiooni $z(x) = f(x, y(x)), x \in [0, h]$. Kuna f ja y on pidevad funktsioonid, siis $z \in C[0, h]$. Caputo diferentsiaaloperaatori definitsiooni alusel

$$\begin{aligned} z(x) &= f(x, y(x)) \\ &= {}_C D_0^p y(x) \\ &= D_0^p (y - T_{m-1}[y; 0])(x) \\ &= D^m J_0^{m-p} (y - T_{m-1}[y; 0])(x), \end{aligned}$$

kus

$$(T_{m-1}[y; 0])(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

ja $x \in [0, h]$. Kuna z on pidev funktsioon, siis võime rakendada integraaloperaatorit J_0^m võrdusele

$$z(x) = D^m J_0^{m-p}(y - T_{m-1}[y; 0])(x), \quad x \in [0, h].$$

Siis saame

$$\begin{aligned} J_0^m z(x) &= J_0^m D^m J_0^{m-p}(y - T_{m-1}[y; 0])(x) \\ &= J_0^{m-p}(y - T_{m-1}[y; 0])(x) + q(x), \quad x \in [0, h], \end{aligned}$$

kus funktsioon q on polünoom, mille aste ei ületa $m - 1$. Kuna Riemann-Liouville'i integraali definitsioonist 2.2 lähtudes saame, et

$$\begin{aligned} J_0^m z(x) &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^x (x-s)^{m-1} z(s) ds \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^x (x-s)^{m-1} z(s) ds, \quad x \in [0, h], \end{aligned}$$

siis Cauchy valemi (vt [6], lk 224) alusel leiame, et $(J_0^m z)^{(i)}(0) = 0$, $i = 0, 1, ..., m-1$. See tähendab, et funktsioonil $J_0^m z(x)$ on punktis $x = 0$ m-kordne nullkoht. Kuna funktsioonil $(y - T_{m-1}[y; 0])(x)$ on punktis $x = 0$ m-kordne nullkoht, siis ositi integreerides saame, et funktsioonil $J_0^{m-p}(y - T_{m-1}[y; 0])(x)$ on punktis $x = 0$ m-kordne nullkoht. Seega on ka polünoomil q m-kordne nullkoht. Sellest järeldub, et $q = 0$, sest q aste ei ületa $m - 1$. Seega

$$J_0^m z(x) = J_0^{m-p}(y - T_{m-1}[y; 0])(x), \quad x \in [0, h].$$

Rakendades Riemann-Liouville'i $m-p$ järku diferentsiaaloperaatorit eelnevale võrdusele, saame, et iga $x \in [0, h]$ korral

$$\begin{aligned} (y - T_{m-1}[y; 0])(x) &= D_0^{m-p} J_0^m z(x) \\ &= D_0^{m-p} J_0^{m-p} J_0^p z(x) \\ &= J_0^p z(x). \end{aligned}$$

See on samaväärne võrdusega

$$y(x) = (T_{m-1}[y; 0])(x) + J_0^p z(x), \quad x \in [0, h],$$

mis on Taylori polünoomi $T_{m-1}[y; 0]$ ja funktsiooni z definitsioonide alusel samaväärne Volterra integraalvõrrandiga (3.3). Teiste sõnadega on y Volterra võrrandi (3.3) lahendiks lõigus $[0, h]$.

Näitame nüüd, et ülesandel (3.1) - (3.2) leidub lahend. Kui $M = 0$, siis $f = 0$ iga

$(x, y) \in G$ korral. Sel juhul on ülesande (3.1) - (3.2) lahendiks funktsioon $y : [0, h] \to \mathbb{R}$, mis on määratud seosega

$$y(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} y_0^{(k)}.$$

Vaatame juhtu, kus $M > 0$. Näitame, et sel juhul ülesandele (3.1) - (3.2) vastaval Volterra integraalvõrrandil (3.3) leidub lahend. Defineerime algtingimusi (3.2) rahuldava polünoomi

$$T(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} y_0^{(k)}, \tag{3.4}$$

ja hulga

$$U = \{y \in C[0, h] : \|y - T\|_\infty \leqslant K\},$$

kus T on antud seosega (3.4) ja

$$\|y - T\|_\infty = \sup\{|(y - T)(x)| : x \in [0, h]\}.$$

Niiviisi määratud hulk U on kumer ja kinnine alamhulk lõigus $[0, h]$ pidevate funktsioonide ruumis $C[0, h]$. Seega U on Banachi ruum. Kuna $T \in U$, siis U pole tühi hulk. Defineerime sellel hulgal operaatori A järgmiselt:

$$(Ay)(x) = T(x) + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x - t)^{p-1} f(t, y(t)) dt, \quad y \in U. \tag{3.5}$$

Seda operaatorit kasutades saame Volterra võrrandi (3.3) kirjutada kujul

$$y = Ay, \quad y \in U.$$

Seega peame otsitava tulemuse saavutamiseks näitama, et operaatoril A leidub püsipunkt hulgas U. Selleks me kõigepealt näitame, et $Ay \in U$, kui $y \in U$. Alustame tähelepanekuga, et $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant h$ korral

$$\begin{aligned} |(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| &= \frac{1}{\Gamma(p)} \left| \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{p-1} f(t, y(t)) dt - \int_0^{x_2} (x_2 - t)^{p-1} f(t, y(t)) dt \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \left| \int_0^{x_1} ((x_1 - t)^{p-1} - (x_2 - t)^{p-1}) f(t, y(t)) dt \right. \\ &\qquad \left. - \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{p-1} f(t, y(t)) dt \right| \\ &\leqslant \frac{M}{\Gamma(p)} \left(\int_0^{x_1} |(x_1 - t)^{p-1} - (x_2 - t)^{p-1}| dt + \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{p-1} dt \right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nüüd

$$\int_{x_1}^{x_2} (x_2 - t)^{p-1} dt = \frac{(x_2 - x_1)^p}{p}.$$

Integraali

$$\int_0^{x_1} |(x_1 - t)^{p-1} - (x_2 - t)^{p-1}| dt \tag{3.7}$$

puhul vaatleme kolme erinevat juhtu: $p = 1$, $p < 1$ ja $p > 1$.

Kui $p = 1$, siis integraali (3.7) all oleva funktsiooni väärtuseks 0. Seega on kogu integraali väärtus samuti 0. Juhul, kui $p - 1 < 0$, kehtib

$$(x_1 - t)^{p-1} \geqslant (x_2 - t)^{p-1}, \quad t \in [0, x_1],$$

ja seega

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_1} |(x_1 - t)^{p-1} - (x_2 - t)^{p-1}| dt &= \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{p-1} - (x_2 - t)^{p-1} dt \\
&= \frac{1}{p}(x_1^p - x_2^p + (x_2 - x_1)^p) \\
&\leqslant \frac{1}{p}(x_2 - x_1)^p.
\end{aligned}$$

Kui $p > 1$, siis

$$(x_1 - t)^{p-1} \leqslant (x_2 - t)^{p-1}, \quad t \in [0, x_1].$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
\int_0^{x_1} |(x_1 - t)^{p-1} - (x_2 - t)^{p-1}| dt &= \int_0^{x_1} (x_2 - t)^{p-1} - (x_1 - t)^{p-1} dt \\
&= \frac{1}{p}(x_2^p - x_1^p - (x_2 - x_1)^p) \\
&\leqslant \frac{1}{p}(x_2^p - x_1^p).
\end{aligned}$$

Seega oleme saanud, et

$$|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| \leqslant \begin{cases} \frac{2M}{\Gamma(p+1)}(x_2 - x_1)^p, & \text{kui } p \leqslant 1, \\ \frac{M}{\Gamma(p+1)}((x_2 - x_1)^p + x_2^p - x_1^p), & \text{kui } p > 1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Selle võrratuse parem pool koondub nulliks kui $x_2 \to x_1$. Seega oleme tõestanud, et Ay on pidev funktsioon lõigul $[0, h]$.

Kui $y \in U$ ja $x \in [0,h]$ ning kuna $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ (vt (1.2)), siis

$$\begin{aligned}
|(Ay)(x) - T(x)| &= \frac{1}{\Gamma(p)}\Big|\int_0^x (x-t)^{p-1} f(x, y(x))dt\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(p+1)} M x^p \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(p+1)} M h^p \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(p+1)} M \frac{K\Gamma(p+1)}{M} \\
&= K.
\end{aligned}$$

Seega oleme näidanud, et $Ay \in U$, kui $y \in U$. Teiste sõnadega operaator A kujutab hulga U iseendasse.

Järgnevas on meie eesmärgiks kasutada Schauderi püsipunkti printsiipi (teoreem 1.3). Selleks on vaja näidata, et $A(U) = \{Au : u \in U\}$ on suhteliselt kompaktne hulk ruumis $C[0,h]$. Selleks kasutame Arzelà-Ascoli teoreemi 1.2 näidates, et $A(U)$ on ühtlaselt tõkestatud (definitsioon 1.7) ja võrdpidev (definitsioon 1.6). Näitame, et $A(U)$ on ühtlaselt tõkestatud.

Kui $z \in A(U)$, siis iga $x \in [0,h]$ korral leidub $y \in U$ nii, et

$$\begin{aligned}
|z(x)| &= |(Ay)(x)| \\
&= \Big|T(x) + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} f(t, y(t))dt\Big| \\
&\leqslant ||T||_\infty + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} |f(t, y(t))| dt \\
&\leqslant ||T||_\infty + \frac{1}{\Gamma(p+1)} M h^p \\
&\leqslant ||T||_\infty + K.
\end{aligned}$$

See tähendab, et $A(U)$ on ühtlaselt tõkestatud.

Võrdpidevuse näitamiseks kasutame võrratust (3.8). Olgu $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant h$. Siis $p \leqslant 1$ korral kehtib

$$|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| \leqslant \frac{2M}{\Gamma(p+1)} (x_2 - x_1)^p.$$

Seega, kui $|x_2 - x_1| < \delta$, siis

$$|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| \leqslant 2\frac{M}{\Gamma(p+1)} \delta^p.$$

Kuna eelneva võrratuse parem pool ei sõltu muutujatest y, x_1 ja x_2, siis on näha, et hulk $A(U)$ on võrdpidev. Juhul $p > 1$ saame Lagrange'i keskväärtusteoreemi kasutades, et

$$\begin{aligned}|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| &\leqslant \frac{M}{\Gamma(p+1)}((x_2 - x_1)^p + x_2^p - x_1^p) \\ &= \frac{M}{\Gamma(p+1)}\big((x_2 - x_1)^p + p(x_2 - x_1)\xi^{p-1}\big),\end{aligned}$$

kus $\xi \in [x_1, x_2] \subseteq [0, h]$. Seega, kui $|x_2 - x_1| < \delta$, siis

$$\begin{aligned}|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| &\leqslant \frac{M}{\Gamma(p+1)}\big((x_2 - x_1)^p + p(x_2 - x_1)\xi^{p-1}\big) \\ &\leqslant \frac{M}{\Gamma(p+1)}\big((x_2 - x_1)^p + p(x_2 - x_1)h^{p-1}\big) \\ &\leqslant \frac{M}{\Gamma(p+1)}(\delta^p + p\delta h^{p-1}),\end{aligned}$$

kus viimase võrratuse parem pool ei sõltu muutujatest y, x_1 ja x_2. Järelikult on hulk $A(U)$ võrdpidev ka $p > 1$ korral.

Seega on hulk $A(U)$ Arzelà-Ascoli teoreemi alusel suhteliselt kompaktne ruumis $C[0, h]$. Seetõttu saame Schauderi püsipunktiprintsiipi kasutades, et operaatoril A leidub püsipunkt, mis kuulub hulka $U \subset C[0, h]$. Kuna operaatori A püsipunkt on Volterra võrrandi (3.3) lahend, siis järelikult ülesandel (3.1) - (3.2) leidub lahend, mis on pidev lõigul $[0, h]$.

□

Märkus 3.1. Paljudel selle teoreemi rakenduste korral $0 < p \leqslant 1$. Sel juhul on hulk G ristkülik

$$G = [0, h^*] \times [y_0^{(0)} - K, y_0^{(0)} + K].$$

3.2. Lahendi ühesus

Selles punktis tõestame teoreemi ülesande (3.1) - (3.2) lahendi ühesuse kohta.

Teoreem 3.2. *Olgu $p > 0$ ja $m = \lceil p \rceil$. Olgu $y_0^{(0)}$, $y_0^{(1)}$, ..., $y_0^{(m-1)} \in \mathbb{R}$ ning $K > 0$ ja $h^* > 0$. Defineerime hulga G ja suuruse h nagu teoreemis 3.1 ning olgu $f : G \to \mathbb{R}$ selline pidev funktsioon, mis rahuldab muutuja y suhtes mingi konstandi $L > 0$ korral Lipschitzi tingimust*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \quad (x, y_1), (x, y_2) \in G. \tag{3.9}$$

Siis Cauchy ülesandel (3.1) - (3.2) leidub ühene lahend $y \in C[0, h]$.

TÕESTUS. Teoreemi 3.1 alusel leidub ülesandel (3.1) - (3.2) lahend $y \in C[0,h]$. Nagu teoreemi 3.1 tõestuses defineerime polünoomi T ja operaatori A järgmiselt:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} y_0^{(k)} \quad (x \in [0,h]) \tag{3.10}$$

ja

$$(Ay)(x) = T(x) + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} f(t, y(t))dt, \quad y \in C[0,h]. \tag{3.11}$$

Sama teoreemi tõestusest järeldub, et A kujutab mittetühja kumera ja kinnise hulga

$$U = \{y \in C[0,h] : \|y - T\|_\infty \leqslant K\}$$

iseendasse ning operaatoril A on püsipunkt, mis kuulub hulka U. Järgnevas näitame, et operaatoril A on olemas vaid üks püsipunkt. Seda saab näidata Weissengeri püsipuktiteoreemi (teoreem 1.4) abil. Selleks me esmalt tõestame, et iga $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ja iga $x \in [0,h]$ ning kõikide $y_1, y_2 \in U$ korral kehtib

$$||A^j y_1 - A^j y_2||_\infty \leqslant \frac{(Lx^p)^j}{\Gamma(1+pj)} ||y_1 - y_2||_\infty, \tag{3.12}$$

kus A^0 on samasusteisendus. Kasutame tõestamiseks matemaatilist induktsiooni. Juhul, kui $j = 0$, kehtib võrratus (3.12) triviaalselt. Oletame, et võrratus (3.12) kehtib $j-1$ korral. Näitame, et siis võrratus (3.12) kehtib ka j korral. Arvutame

$$\begin{aligned} ||A^j y_1 - A^j y_2||_\infty &= ||A(A^{j-1}y_1) - A(A^{j-1}y_2)||_\infty \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \sup_{0 \leqslant w \leqslant x} \left| \int_0^w (w-t)^{p-1} [f(t, A^{j-1}y_1(t)) - f(t, A^{j-1}y_2(t))] dt \right|. \end{aligned}$$

Induktsiooni sammu $j-1 \rightarrowtail j$ näitamiseks kasutame funktsiooni f kohta tehtud eeldust (3.9). Siis võime vaadeldavat normi hinnata järgnevalt:

$$||A^j y_1 - A^j y_2||_\infty \leqslant \frac{L}{\Gamma(p)} \sup_{0 \leqslant w \leqslant x} \int_0^w (w-t)^{p-1} |A^{j-1}y_1(t) - A^{j-1}y_2(t)| dt.$$

Kuna eelneva integraali alune funktsioon on mittenegatiivne, siis kehtib

$$\begin{aligned} &\frac{L}{\Gamma(p)} \sup_{0 \leqslant w \leqslant x} \int_0^w (w-t)^{p-1} |A^{j-1}y_1(t) - A^{j-1}y_2(t)| dt \\ &\qquad \leqslant \frac{L}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} \sup_{0 \leqslant w \leqslant t} |A^{j-1}y_1(w) - A^{j-1}y_2(w)| dt. \end{aligned}$$

Induktsiooni eeldust kasutades saame, et

$$\begin{aligned}&\frac{L}{\Gamma(p)}\int_0^x (x-t)^{p-1}\sup_{0\leqslant w\leqslant t}|A^{j-1}y_1(w)-A^{j-1}y_2(w)|dt\\ &\quad\leqslant \frac{L^j}{\Gamma(p)\Gamma(1+p(j-1))}\int_0^x (x-t)^{p-1}t^{p(j-1)}\sup_{0\leqslant w\leqslant t}|y_1(w)-y_2(w)|dt.\end{aligned}$$

Kuna integraali all olev supreemum ei sõltu integreerimisparameetrist t, siis

$$\begin{aligned}&\frac{L^j}{\Gamma(p)\Gamma(1+p(j-1))}\int_0^x (x-t)^{p-1}t^{p(j-1)}\sup_{0\leqslant w\leqslant t}|y_1(w)-y_2(w)|dt\\ &\quad\leqslant \frac{L^j}{\Gamma(p)\Gamma(1+p(j-1))}\sup_{0\leqslant w\leqslant x}|y_1(w)-y_2(w)|\int_0^x (x-t)^{p-1}t^{p(j-1)}dt.\end{aligned}$$

Kasutades nüüd näidet 2.1 saame, et

$$\begin{aligned}&\frac{L^j}{\Gamma(p)\Gamma(1+p(j-1))}\sup_{0\leqslant w\leqslant x}|y_1(w)-y_2(w)|\int_0^x (x-t)^{p-1}t^{p(j-1)}dt\\ &\quad= \frac{L^j}{\Gamma(p)\Gamma(1+p(j-1))}||y_1-y_2||_\infty\frac{\Gamma(p)\Gamma(1+p(j-1))}{\Gamma(1+pj)}x^{pj}\\ &\quad= \frac{(Lx^p)^j}{\Gamma(1+pj)}||y_1-y_2||_\infty.\end{aligned}$$

Seega oleme kokkuvõttes saanud, et

$$||A^jy_1-A^jy_2||_\infty\leqslant\frac{(Lx^p)^j}{\Gamma(1+pj)}||y_1-y_2||_\infty,$$

mis ühtib võrratusega (3.12). Me näeme, et operaator A täidab Weissingeri püsipunktiteoreemis toodud eeldusi, kui valida

$$\alpha_j=\frac{(Lh^p)^j}{\Gamma(1+pj)}$$

ning näidata, et rida $\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j$ koondub. Paneme tähele, et eelmine summa on Mittag-Leffleri funktsiooni $E_p(Lh^p)$ määrav astmerida (vt definitsioon 1.9), mis koondub. Rakendades Weissingeri püsipunktiteoreemi saame, et valemiga (3.11) defineeritud operaatoril A leidub parajasti üks püsipunkt. Seega Volterra integraalvõrrandil (3.3) leidub parajasti üks lahend. Järelikult diferentsiaalvõrrandi (3.1) Cauchy ülesandel (3.1) - (3.2) leidub ühene lahend.

$\square$

Märkus 3.2. Ülesanne (3.1) - (3.2) on $p=1$ korral esimest järku hariliku diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesanne kujul

$$y' = f(x,y), \quad y(0) = y_0,$$

kus $y = y(x)$ on otsitav funktsioon. Olgu $h^* > 0$ ja $K > 0$ mingid konstandid. Eeldame, et funktsioon $f(x,y)$ on pidev ristkülikus

$$G_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,h^*], |y - y_0| \leqslant K\}$$

ja rahuldab teise muutuja y suhtes Lipschitzi tingimust konstandiga $L > 0$:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \quad (x,y_1),(x,y_2) \in G_1.$$

Teoreemidest 3.1 ja 3.2 järeldub, et sellisel ülesandel leidub ühene lahend $y \in C[0,h]$. Siin

$$h = \begin{cases} h^*, & \text{kui } M = 0, \\ \min\{h^*, \frac{K}{M}\}, & \text{kui } M \neq 0, \end{cases}$$

kus

$$M = \sup_{(x,y)\in G_1} |f(x,y)|.$$

§ 4. Adamsi-Bashforthi-Moultoni (ABM) meetod Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande ligikaudseks lahendamiseks

Selles osas tutvume Adamsi-Bashfothi-Moultoni meetodiga Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande numbriliseks lahendamiseks. Siin me toetume artiklile [2].

Kõigepealt tutvustame ühe sammu ABM meetodit esimest järku harilikud diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesande ligikaudseks lahendamiseks (vt [7], lk 30). Seejärel esitame selle meetodi üldistuse Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande (3.1) - (3.2) jaoks.

Olgu lahendatavaks ülesandeks diferentsiaalvõrrand

$$Dy = f(x, y) \tag{4.1}$$

koos algtingimusega

$$y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

kus f on selline funktsioon, et ülesandel (4.1) - (4.2) leidub ühene lahend $y = y(x)$ lõigus $x \in [0, b]$, $b > 0$.

Olgu $x_j = jh$, $j = 0, 1, ..., N$, kus N on mingi naturaalarv ja $h = b/N$. Ühe sammu ABM meetodi idee on järgmine: kui me oleme arvutanud lähendid $y_j \approx y(x_j)$, $j = 1, 2, ..., k$, siis leiame lähendi y_{k+1} seosest

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(z, y(z))dz, \tag{4.3}$$

mis on saadud samasuse

$$Dy(x) = f(x, y(x))$$

integreerimisel lõigul $[x_k, x_{k+1}]$. Me ei tea võrduse (4.3) paremal pool olevaid väärtusi, aga me võime suuruse $y(x_k)$ asendada teadaoleva lähendiga y_k ja integraali kvadratuurvalemiga

$$\int_a^b g(z)dz \approx \frac{b-a}{2}(g(a) + g(b)). \tag{4.4}$$

Seega lähend y_{k+1} avaldub kujul

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))).$$

Asendades väärtused $y(x_k)$ ja $y(x_{k+1})$ vastavate lähenditega y_k ja y_{k+1}, saame ilmutamata ühe sammu ABM meetodi:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}). \tag{4.5}$$

Kuna selle valemi mõlemal poolel esineb väärtus y_{k+1} ja funktsioon f ei pruugi olla lineaarne, siis üldiselt ei saa me avaldada väärtust y_{k+1}. Valem (4.5) kujutab enesest võrrandit y_{k+1} leidmiseks. Valemit (4.5) saame aga kasutada iteratiivses protsessis, asendades valemi paremal poolel oleva suuruse y_{k+1} omakorda lähendiga y^P_{k+1}.

Lähend y^P_{k+1}, mida nimetatakse prediktoriks, saadakse, kui kasutada trapetsvalemi (4.4) asemel ristkülikvalemit kujul

$$\int_a^b g(z)dz \approx (b-a)g(a).$$

Siis saame, et

$$y^P_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \tag{4.6}$$

ja ilmutatud ABM meetodi valem avaldub kujul

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^P_{k+1}). \tag{4.7}$$

Selle meetodi rakendamiseks kasutame järgnevat algoritmi: esmalt arvutame prediktori valemist (4.6), siis väärtuse $f(x_{k+1}, y^P_{k+1})$, mida kasutame korrektori arvutamiseks valemist (4.7), ning viimaks leiame suuruse $f(x_{k+1}, y_{k+1})$, mida kasutame järgmises iteratsioonisammus.

Järgnevas üldistame ABM meetodit nii, et seda saaks kasutada Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande (3.1) - (3.2) lahendamiseks. Põhiprobleem seisneb võrduse (4.3) analoogi leidmises murrulise diferentsiaalvõrrandi korral. Õnneks leidub otsitav seos teoreemi 3.1 tõestuses antud võrrandi (3.3) näol.

Üldistatud meetodi tuletamiseks kasutame integraali leidmiseks trapetsvalemit kaalufunktsiooniga $(x_{k+1} - z)^{p-1}$:

$$\int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{p-1} g(z)dz \approx \int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{p-1} \hat{g}_{k+1}(z)dz, \tag{4.8}$$

kus $\hat{g}_{k+1}$ on funktsiooni g tükiviisiline lineaarne interpolant sõlmedega punktides x_j, $j = 0, 1, ...k+1$. Seose (4.8) paremal pool oleva integraali võime leida järgmiselt:

$$\int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{p-1} \hat{g}_{k+1}(z)dz = \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(x_j),$$

kus

$$a_{j,k+1} = \frac{h^p}{p(p+1)} \times \begin{cases} (k^{p+1} - (k-p)(k+1)^p), & j = 0, \\ ((k-j+2)^{p+1} + (k-j)^{p+1} - 2(k-j+1)^{p+1}), & 1 \leqslant j \leqslant k, \\ 1, & j = k+1. \end{cases} \tag{4.9}$$

Tõepoolest, kuna

$$a_{j,k+1} = \int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - s)^{p-1} \phi_{j,k+1}(s) ds,$$

kus

$$\phi_{j,k+1}(s) = \begin{cases} \frac{s - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & s \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1} - s}{x_{j+1} - x_j}, & s \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0, & \text{mujal}, \end{cases}$$

siis

$$\begin{aligned} a_{j,k+1} &= \int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - s)^{p-1} \phi_{j,k+1}(s) ds = \sum_{n=1}^{k+1} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (x_{k+1} - s)^{p-1} \phi_{j,k+1}(s) ds \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_{k+1} - s)^{p-1} \frac{s - x_{j-1}}{h} ds + \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{k+1} - s)^{p-1} \frac{x_{j+1} - s}{h} ds. \end{aligned}$$

Kasutades viimase võrduse paremal poolel olevate integraalide leidmiseks ositi integreerimist, jõuamegi avaldiseni (4.9).

Seega oleme saanud ilmutatud ABM meetodi Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande (3.1) - (3.2) lahendi väärtuste $y(x_{k+1})$ lähisväärtuste y_{k+1} leidmiseks:

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \left(\sum_{j=0}^{k} a_{j,k+1} f(x_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(x_{k+1}, y_{k+1}^P) \right), \tag{4.10}$$

kus lähendi y_{k+1}^P arvutamiseks kasutatava valemi tuletamine on sarnane korrektori valemi (4.10) leidmiseks kasutatud mõttekäiguga. Volterra võrrandi (3.3) paremal pool oleva integraali asendame lähendiga

$$\int_0^{x_{k+1}} (x_{k+1} - z)^{p-1} g(z) dz \approx \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1} g(x_j),$$

kus

$$b_{j,k+1} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{k+1} - s)^{p-1} ds = \frac{h^p}{p}((k+1-j)^p - (k-j)^p). \tag{4.11}$$

Seega prediktor y^P_{k+1} murrulise ABM meetodi korral avaldub kujul

$$y^P_{k+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x^j_{k+1}}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(p)} \sum_{j=0}^{k} b_{j,k+1} f(x_j, y_j). \tag{4.12}$$

Näeme, et murrulise ABM meetodi algoritm on analoogiline esimest järku diferentsiaalvõrrandi korral kasutatava ABM meetodi algoritmiga. Põhivalemiteks on võrdused (4.12) ja (4.10) kaaludega $a_{j,k+1}$ ja $b_{j,k+1}$ vastavatest võrdustest (4.9) ja (4.11).

Näide 4.1. Olgu $p \in (0, 1]$. Vaatleme võrrandit

$$_C D_0^p y = f(x, y) \tag{4.13}$$

koos algtingimusega

$$y(0) = 0, \tag{4.14}$$

kus $y = y(x)$ on lõigus $0 \leqslant x \leqslant h^*$ $(h^* > 0)$ otsitav funktsioon ning

$$f(x, y) = \frac{5040}{\Gamma(7-p)} x^{6-p} - \frac{\Gamma(4 + \frac{p}{2})}{\Gamma(4 - \frac{p}{2})} x^{3-\frac{p}{2}} + \Gamma(p+1) + (x^3 - x^{\frac{p}{2}})^3 - y^{\frac{3}{2}}.$$

Olgu $K > 0$. Me näeme, et $f(x, y)$ on määratud ja pidev hulgal

$$G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, h^*], y \in [0, K]\}$$

ning

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant \frac{3}{2} K^{\frac{1}{2}} |y_1 - y_2|, \quad (x, y_1), (x, y_2) \in G_2.$$

Tõepoolest, f pidevus hulgal G_2 on ilmne ja mis tahes $(x, y_1), (x, y_2) \in G_2$ korral

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=\xi \in (0,K)} |y_1 - y_2| \leqslant \frac{3}{2} K^{\frac{1}{2}} |y_1 - y_2|.$$

Teoreemidest 3.1 ja 3.2 järeldub, et ülesandel (4.13) - (4.14) leidub ühene lahend, mis on määratud lõigul $[0, h]$, kus

$$h = \min \left\{ h^*, \left(\frac{K\Gamma(p+1)}{M} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}, \quad M = \sup_{(x,y) \in G_2} |f(x, y)|. \tag{4.15}$$

Osutub, et ülesande (4.13) - (4.14) lahend avaldub kujul

$$y(x) = x^6 - x^{3+\frac{p}{2}} + x^p.$$

Tõepoolest, näite 2.3 alusel

$$
\begin{aligned}
{}_C D_0^p y(x) &= {}_C D_0^p (x^6 - x^{3+\frac{p}{2}} + x^p) \\
&= \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(7-p)} x^{6-p} - \frac{\Gamma(4+\frac{p}{2})}{\Gamma(4-\frac{p}{2})} x^{3-\frac{p}{2}} + \Gamma(p+1) \\
&= \frac{5040}{\Gamma(7-p)} x^{6-p} - \frac{\Gamma(4+\frac{p}{2})}{\Gamma(4-\frac{p}{2})} x^{3-\frac{p}{2}} + \Gamma(p+1)
\end{aligned}
$$

ja

$$(y(x))^{\frac{3}{2}} = (x^6 - x^{3+\frac{p}{2}} + x^p)^{\frac{3}{2}} = ((x^3 - x^{\frac{p}{2}})^2)^{\frac{3}{2}} = (x^3 - x^{\frac{p}{2}})^3.$$

Ülesande (4.13) - (4.14) lahendame eespool toodud ABM meetodiga, kasutades magistritöö autori koostatud Matlabi programme Magfunktsioon1.m ja MagKatse.m (vt Lisa 1). Nende programmide abil saadakse ülesande (4.13) - (4.14) lahendi lähisväärtused võrrandi (4.13) parameetri p väärtuste $0.1, 0.2, \ldots, 1.0$ korral. Tabelis 1 on toodud vead ϵ_p, kus

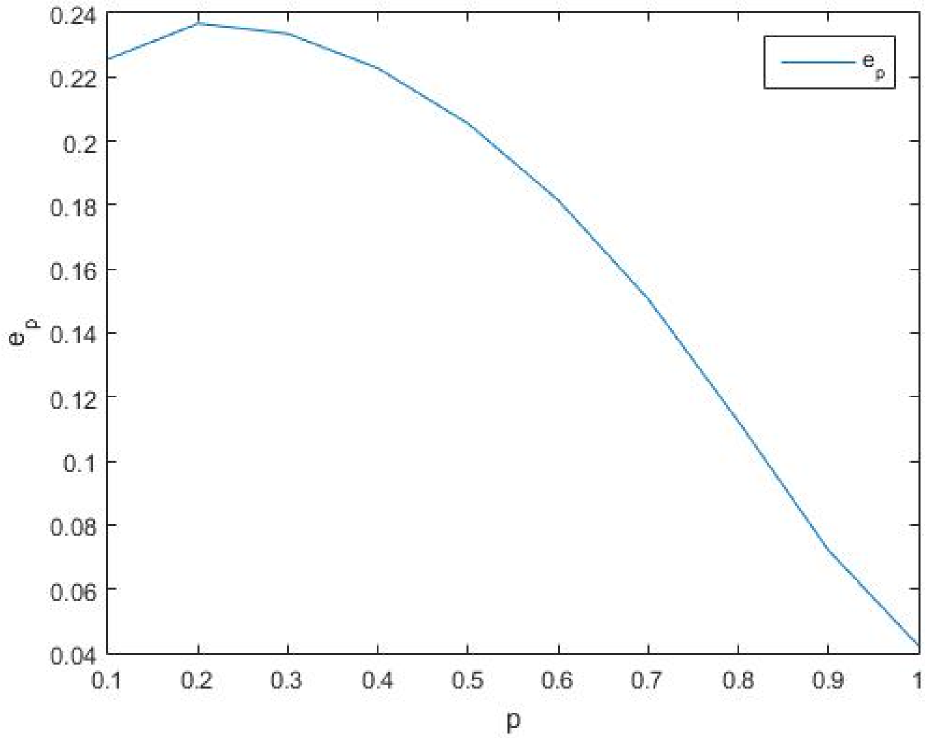
$$\epsilon_p = \max_{j \in \{0,1,\ldots,1000\}} |y(x_j) - y_j|$$

ja y_j on lahendi y lähisväärtus sõlmes $x_j = jh : y(x_j) \approx y_j$. Lisaks on Tabelis 1 esitatud suuruste h ja M valemiga (4.15) arvutatud väärtused $h^* = \frac{1}{2}$ ja $K = \frac{1}{2}$ korral. Võrgu sõlmede arvuks on valitud 1000.

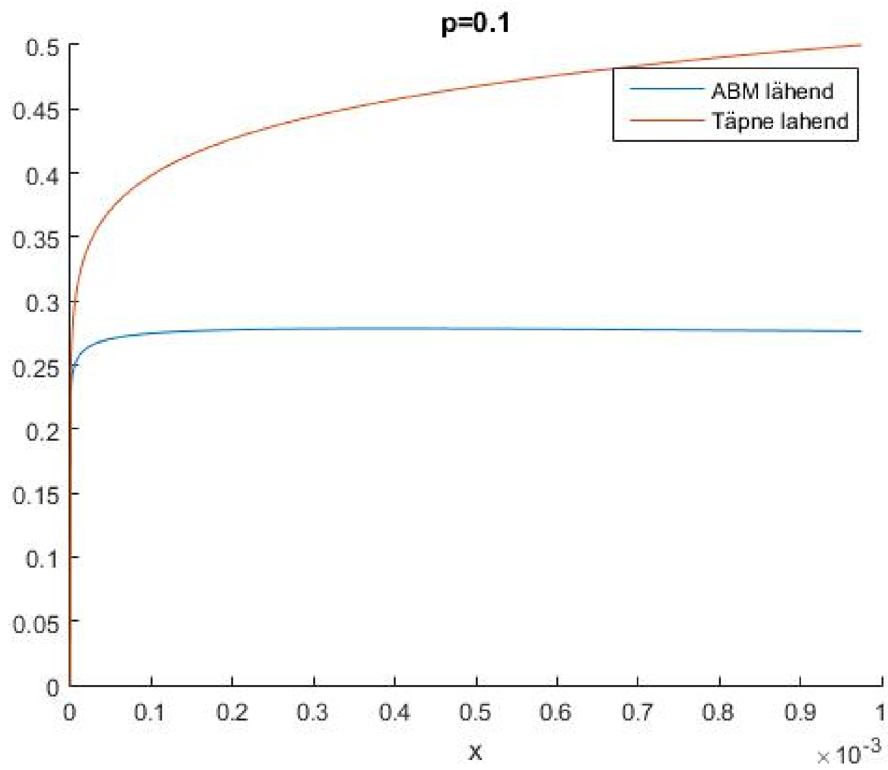
Tabel 1:

p	M	h	ϵ_p
0.1	0.9514	0.0010	0.2255
0.2	0.9182	0.0313	0.2366
0.3	0.8975	0.0992	0.2335
0.4	0.8873	0.1768	0.2227
0.5	0.8862	0.2500	0.2054
0.6	0.8935	0.3150	0.1815
0.7	0.9086	0.3715	0.1506
0.8	0.9314	0.4204	0.1124
0.9	0.9618	0.4629	0.0722
1.0	1.0	0.5000	0.0423

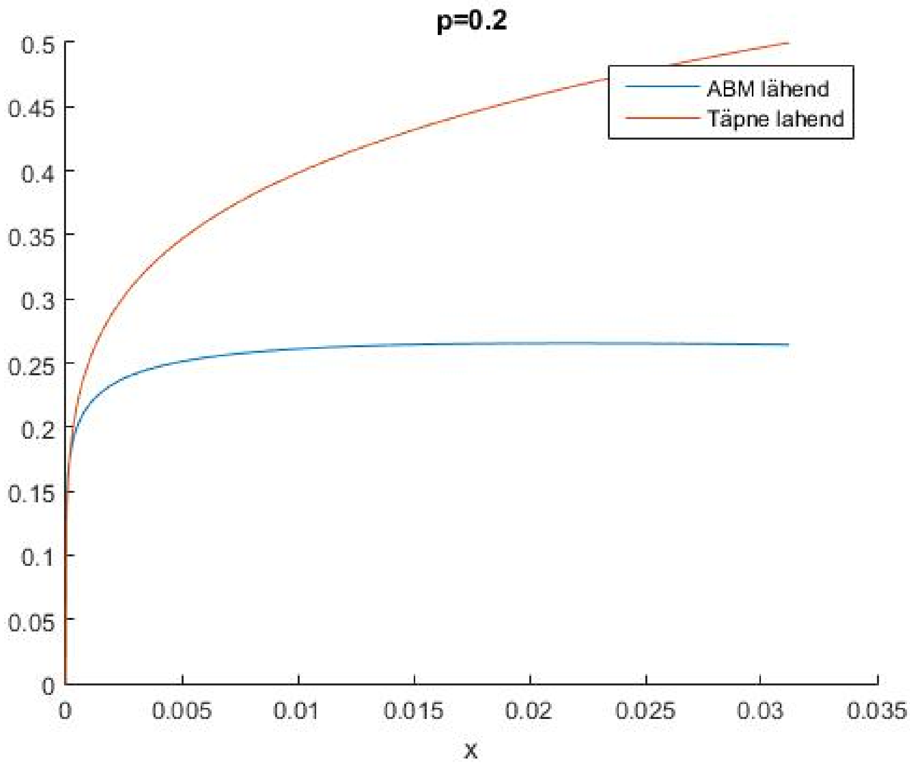
Vigade ϵ_p suurust on illustreeritud ka joonistega 1 - 11.



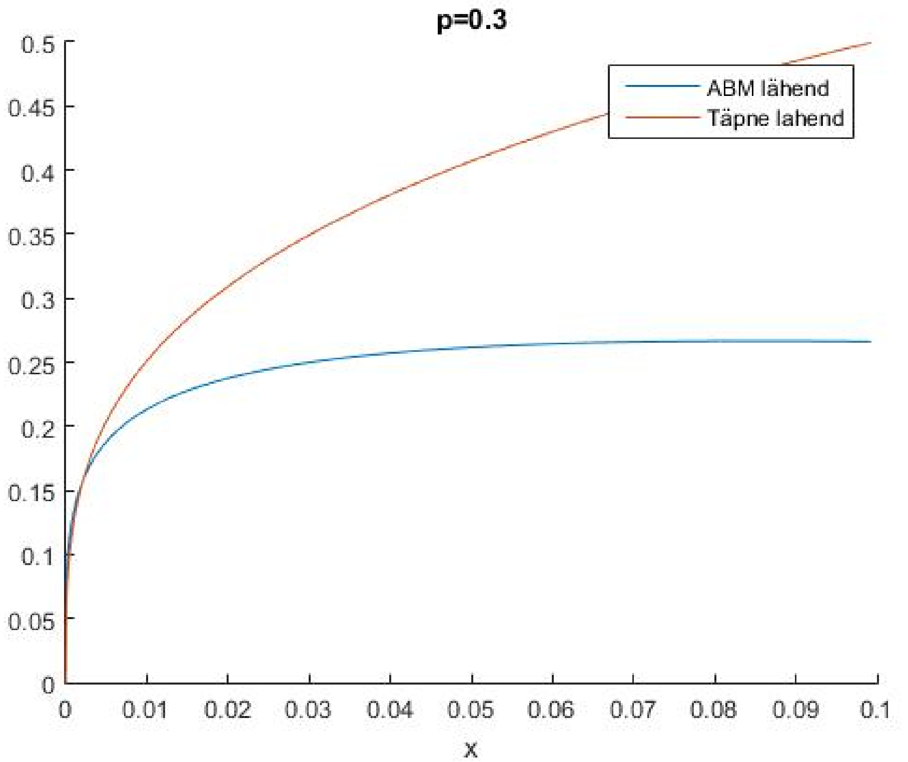
Joonis 1: Maksimaalne vea ϵ_p väärtus sõltuvalt diferentsiaalvõrrandi järgust p



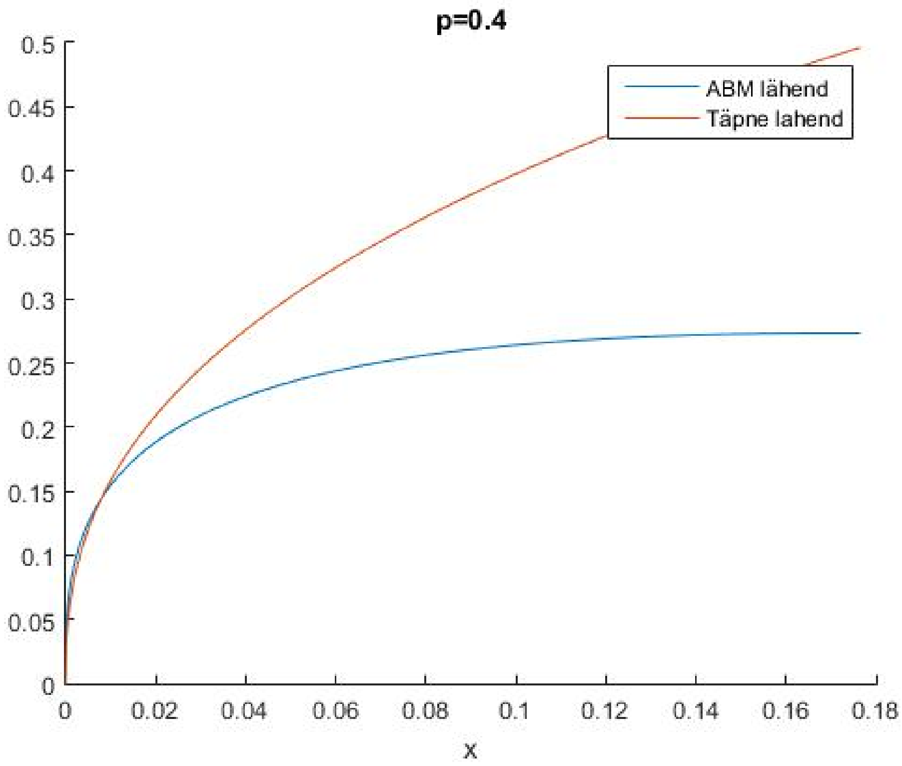
Joonis 2: Lähend ja täpne lahend diferentsiaalvõrrandi järgu $p = 0.1$ korral.



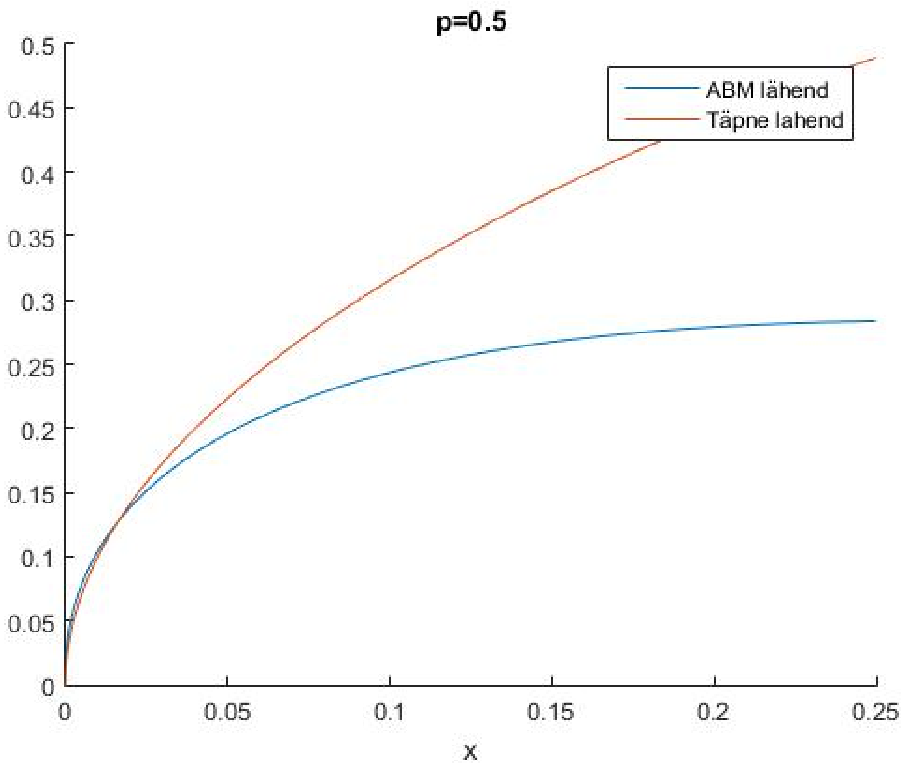
Joonis 3: Lähend ja täpne lahend lõigus diferentsiaalvõrrandi järgu $p = 0.2$ korral.



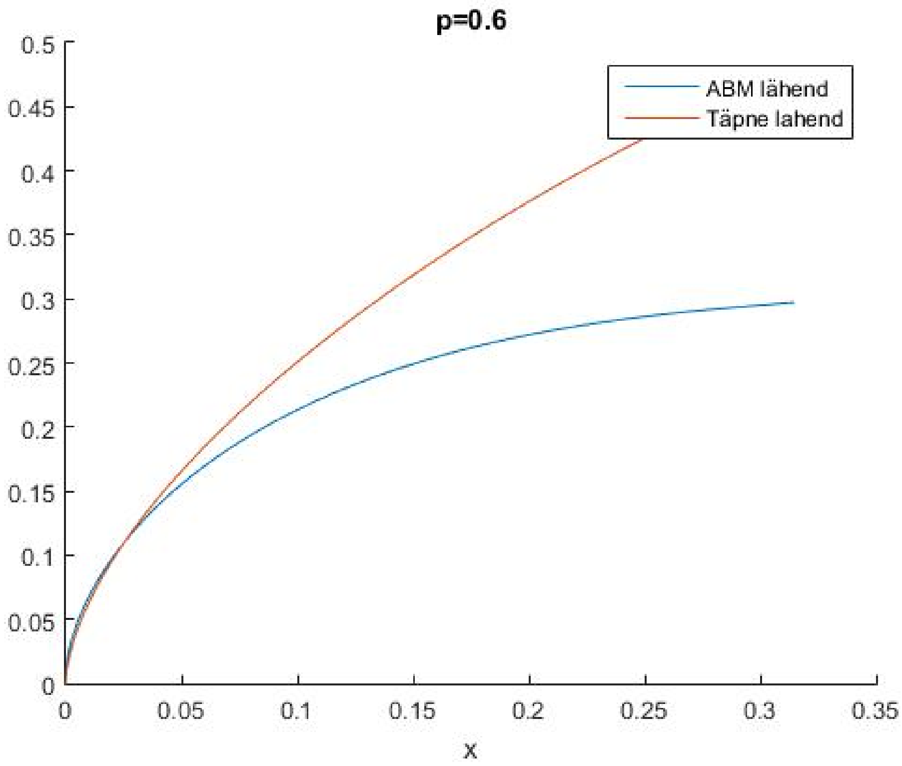
Joonis 4: Lähend ja täpne lahend diferentsiaalvõrrandi järgu $p = 0.3$ korral.



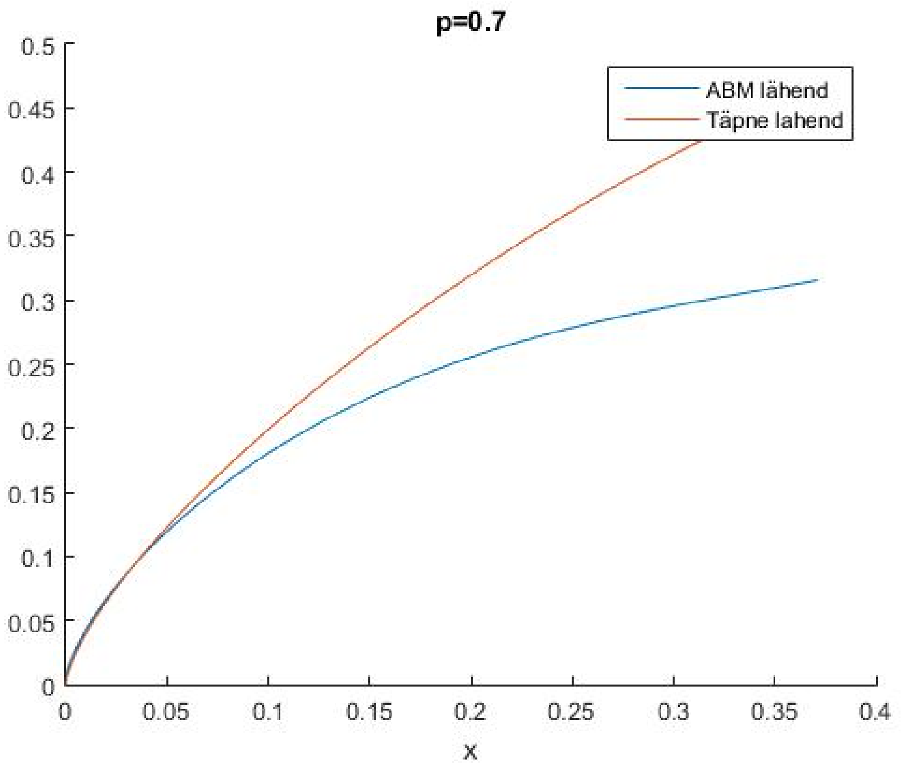
Joonis 5: Lähend ja täpne lahend diferentsiaalvõrrandi järgu $p = 0.4$ korral.



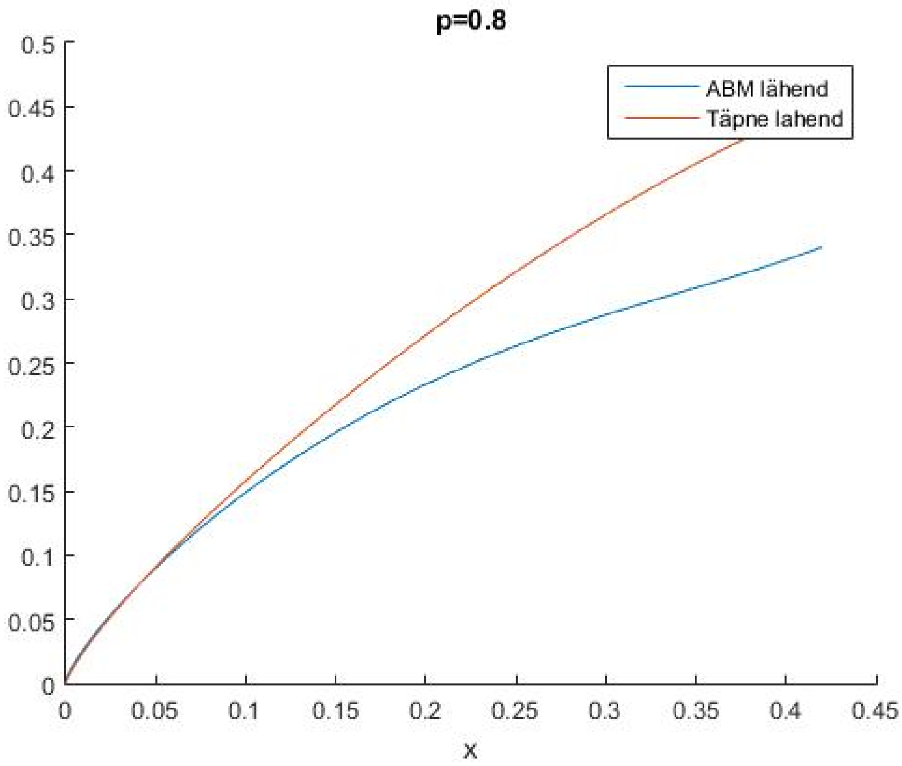
Joonis 6: Lähend ja täpne lahend diferentsiaalvõrrandi järgu $p = 0.5$ korral.



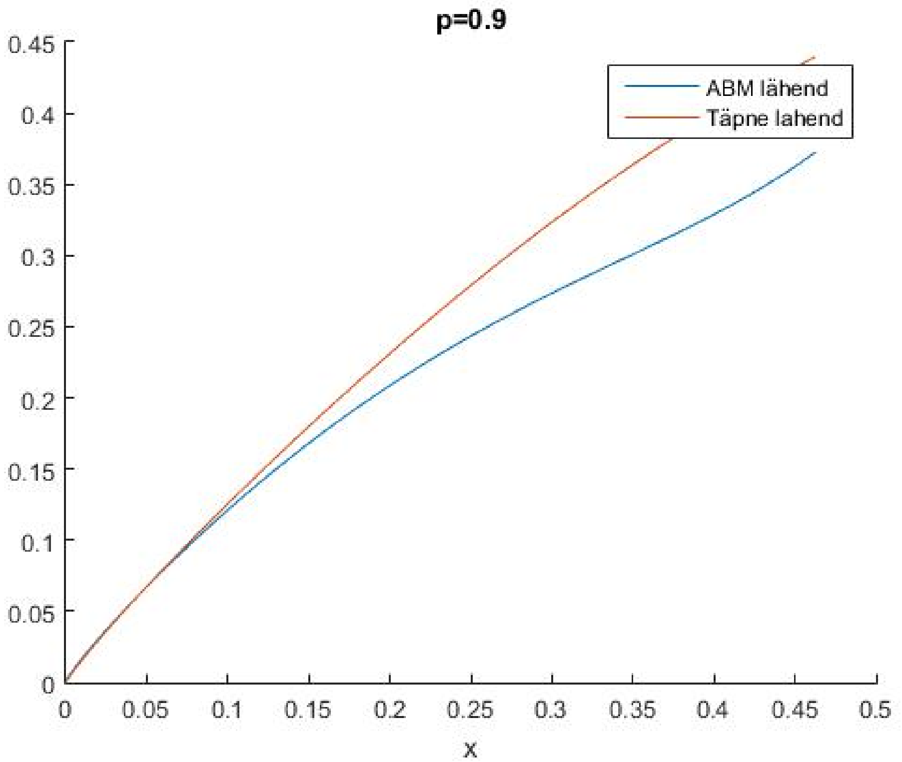
Joonis 7: Lähend ja täpne lahend diferentsiaalvõrrandi järgu $p = 0.6$ korral.



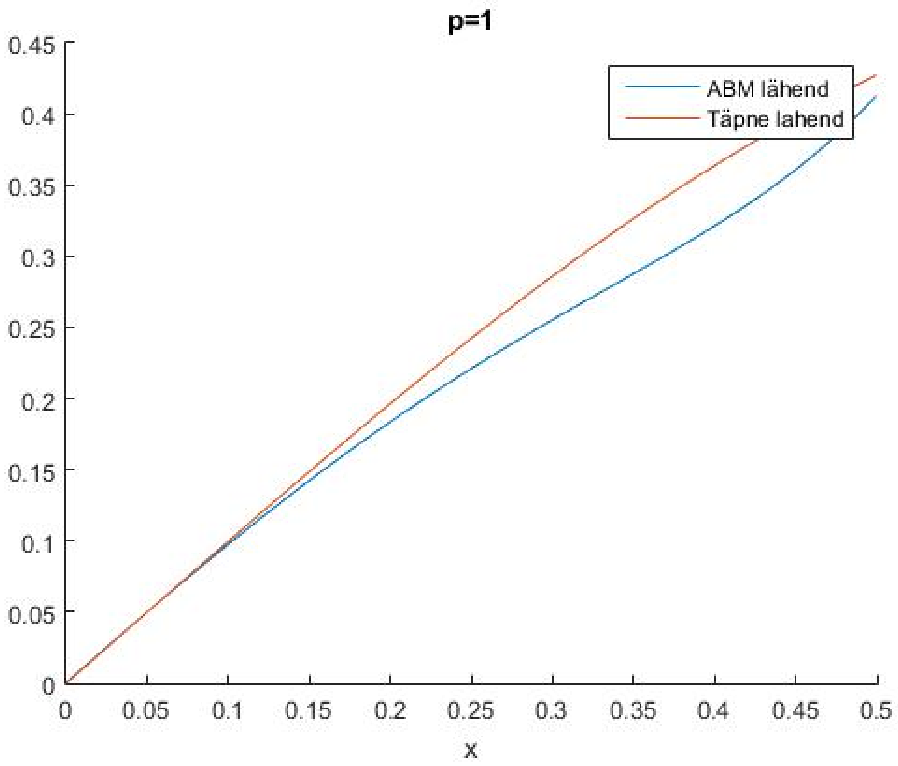
Joonis 8: Lähend ja täpne lahend diferentsiaalvõrrandi järgu $p = 0.7$ korral.



Joonis 9: Lähend ja täpne lahend diferentsiaalvõrrandi järgu $p = 0.8$ korral.



Joonis 10: Lähend ja täpne lahend diferentsiaalvõrrandi järgu $p = 0.9$ korral.



Joonis 11: Lähend ja täpne lahend diferentsiaalvõrrandi järgu $p = 1$ korral.

Kasutatud kirjandus

[1] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type,* Springer, London, 2010.

[2] K. Diethelm, N. Ford, A. Freed *Detailed Error Analysis for a Fractional Adams Method,* Numerical Algorithms, 36, 2004, lk 31-52.

[3] M. Heinsalu *Murrulised tuletised (bakalaureusetöö),* Tartu, 2013.

[4] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs I,* Eesti Raamat, Tallinn, 1965.

[5] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs,* Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[6] A. Pedas, G. Vainikko *Harilikud diferentsiaalvõrrandid,* Tartu Ülikool, Tartu, 2011.

[7] E. Tamme *Arvutusmeetodid,* Valgus, Tallinn, 1973.

Lisa 1

Selles lisas on töös kasutatud Matlabi programmid.

MagFunktsioon1.m

```
function [t,y]=MagFunktsioon1(p,f,T,h,y0)
%Programm leiab Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesande lahendi
%lähisväärtused võrgu sõlmedes
%D_0^p (y(x))=f(x,y(x)),
%x lõigus[0,T],
%ühtlane võrk sammuga h,
%y0 on algtingimuste väärtused
%f on funktsioon parameetritega x,y,p. näiteks %f = @(x,y,p) 2/(gamma(3-p))*x^(2-p)-1/gamma(2-p)*x^(1-p)-y+x^2+x;
algtingimused=y0;

m=ceil(p);%defineerime m-i
MagFunktsioon=f;
N=ceil(T/h)-1;%sõlmede arv

t=0:N;%ühtlase võrgu loomine
t=t.*h;

a=zeros(N+1,N);%kordajad a_j,i
b=zeros(N+1,N);

%määran kordajate a ja b väärtused
for k=1:N%int_0^(t_k+1)
    for j=1:k+1+1%meetodis j=0,1,...,k+1
        if j==1
            a(j,k+1)=(k-1)^(p+1)-((k-1)-p)*((k-1)+1)^p;
        elseif j==k+1+1
              a(j,k+1)=1;
        else
            a(j,k+1)=((k-1)-(j-1)+2)^(p+1)+((k-1)-(j-1))^(p+1)-2*((k-1)-(j-1)+1)^(p+1);
        end
        b(j,k+1)=((k-1)+1-(j-1))^p-((k-1)-(j-1))^p;
```

```
        end
end
a=a*(h^p / (p*(p+1)));
b=b*(h^p / p);

%järgneb lähendite y_k+1 arvutamine
yP=zeros(N+1,1);%prediktorid y_k+1^P
yP(1)=algtingimused(1);
%yk=zeros(N+1,1);%y_k+1
y=zeros(N+1,1);%y_j
y(1)=algtingimused(1);

%programmis on teooriaga võrreldes indeksid 1 võrra nihkes (for tsüklis).
%valemites j asemel j-1. vektori indeksid nagu teoorias, sest for tsüklis
%juba nihutatud
for k=1:N%k=0 on esimene algtingimus
    %samm 1
    for j=1:m
        yP(k+1)=yP(k+1)+t(k+1)^(j-1)*algtingimused(j)/factorial(j-1);
    end
    for j=1:k+1
        yP(k+1)=yP(k+1)+1/gamma(p)*b(j,k+1)*MagFunktsioon(t(j),y(j),p);
    end%prediktor arvutatud, samm 1 tehtud
    %samma 2
    fP=MagFunktsioon(t(k+1),yP(k+1),p);
    %samm 3
    for j=1:m
        y(k+1)=y(k+1)+t(k+1)^(j-1)*algtingimused(j)/factorial(j-1);
    end
    for j=1:k+1
        y(k+1)=y(k+1)+1/gamma(p)* a(j,k+1)*MagFunktsioon(t(j),y(j),p);
    end%teooria a_k+1,k+1 -le vastab siin a_k+2,k+1
    y(k+1)=y(k+1)+1/gamma(p)*a(k+2,k+1)*fP;%samm 3 tehtud (y_k
```

```
        +1)
    %samm 4
    %fC=MagFunktsioon(t(k+1),y(k+1),p);% kasutatakse järgmise
        iteratsiooni alguses yP jaoks
end

hold on%hold on, et saaks täpse lahendi olemasolu korral selle
    samale joonisele kuvada
plot(t,y)%joonis
warning('off','last')
```

MagKatse.m

```
clear
%Programm kutsub välja programmi Magfunktsioon1, kasutades siin antud
%andmeid DV järkude p=0.1,0.2,...,1.0 korral. Funktsiooniks f2.
%Cauchy ülesanne on _cD^p y=f, y(0)=0
f2=@(x,y,p) (5040/gamma(7-p)*x^(6-p)-gamma(4+p/2)/gamma(4-p/2)*x^(3-p/2)+gamma(p+1)+(x^3-x^(p/2))^3-y^(3/2));

P=0.1:0.1:1;%vaadeldavad DV järgud
T0=0.5;%algne hinnang max x väärtusele
K=0.5;%y-i ülemine tõke

L=3/4*sqrt(2);%f2 Lipschitzi kordaja y suhtes
%h=1e-3;

N=100;%sõlmede arv võrgus
y0=[0];%algtingimused

viga=zeros(length(P),1);%täpse lahendi ja lähislahendi max. erinevus vaadeldavas lõigus
i=0;%loendur
disp([' p ',' M_p ',' T_p ',' e_p '])%tabeli päis
for p=0.1:0.1:1%muudame DV järku
    M=0;%M=sup(abs(f)) üle [0,T0]*[0,K]. siin M=0 algne hinnang
    h1=T0/N;%saja sammu korral sammu pikkus
    h2=K/N;
    for j=0:h1:T0%käime läbi võrgu
        for l=0:h2:K
            sup=abs(f2(j*h1,l*h2,p));
            if sup>M%leiame M-i
                M=sup;
            end
        end
    end
    T=min(T0,(K*gamma(p+1)/M)^(1/p));%magistritöö teoreemis 3.1 tähistatud h-ga
```

```
    h=T/N;%võrgu tihedus
    i=i+1;%loendut
    figure%uus joonise aken
    [t2,y2]=MagFunktsioon1(p,f2,T,h,y0);%annab lähisväärtuste
       maatriksi
    lahend2=t2.^6-t2.^(3+p/2)+t2.^p;%täpne lahend p korral
    plot(t2,lahend2)%täpse lahendi joonis
    title(['p=' num2str(p)]);%pealkiri joonisele
    legend('ABM lähend','Täpne lahend')%legend joonisele
    xlabel('x')

    %disp([p,abs(max(lahend2-y2'))])
    viga(i)=abs(max(lahend2-y2'));%salvestame lähisväärtuste
       max vea

    disp([p,M,T,viga(i)])%kuvame tabeli rea p korral
end
figure
plot(P,viga)
legend('e_p','viga')
xlabel('p')
ylabel('e_p')
%title('Viga sõltuvalt DV järgust')
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Märten Heinsalu,
(sünnikuupäev: 17.01.1991)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Caputo murrulise tuletisega Cauchy ülesanne", mille juhendaja on prof. Arvet Pedas,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 19.05.2016