TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT
MATEMAATIKA ERIALA

Katriin Pirk

Diametraalse diameeter-2 omadusega Banachi ruumid

Magistritöö (30 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller
Johann Langemets

Tartu 2016

Diametraalse diameeter-2 omadusega Banachi ruumid

Magistritöö

Katriin Pirk

Lühikokkuvõte. Magistritöö lähtekohaks on Becerra Guerrero, López-Pérezi ja Rueda Zoca artikkel *Diametral diameter two properties* (`arXiv:1509.02061v4 [math.FA]`), kus uuriti kolme diametraalset diameeter-2 omadust, mis jäävad tuntud Daugaveti omaduse ja hiljuti intensiivselt uuritud diameeter-2 omaduste vahele. Põhieesmärgiks on selgitada nende seost Daugaveti omadusega. Töös näidatakse, et diametraalne lokaalne diameeter-2 ja diametraalne diameeter-2 omadus kanduvad ruumidelt nende absoluutse normiga otsesummale. Üks põhitulemustest ütleb, et diametraalne tugev diameeter-2 omadus kandub ruumidelt nende 1-summale ja annab positiivse vastuse nimetatud artiklis esitatud küsimusele.

Märksõnad: Banachi ruum, diameeter-2 omadus, Daugaveti omadus, nõrgalt lahtine alamhulk

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs

Banach spaces with diametral diameter 2 properties

Master thesis

Katriin Pirk

Abstract. The Master thesis is based on the article *Diametral diameter two properties* (`arXiv:1509.02061v4 [math.FA]`) by Becerra Guerrero, López-Pérez and Rueda Zoca, that studies three diametral diameter 2 properties, which are weaker than the well-known Daugavet property but stronger than recently intensely studied diameter 2 properties. We show that diametral local diameter 2 property and diametral diameter 2 property are inherited from Banach spaces to their direct sum with absolute norm. As one of the main results we prove that 1-sum of Banach spaces with diametral strong diameter 2 property also has the same property, which gives an affirmative answer to a question in the afore-mentioned article.

Key words: Banach space, diameter 2 property, Daugavet property, weakly open subset

CERCS: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolev magistritöö on Banachi ruumide geomeetria alane osaliselt teoreetiline, osaliselt referatiivne uurimus funktsionaalanalüüsi valdkonnast. Magistritöös uuritakse Banachi ruumide diametraalseid diameeter-2 omadusi, mis jäävad tuntud Daugaveti omaduse ja viimasel viieteistkümnel aastal intensiivselt uuritud diameeter-2 omaduste vahele.

Definitsioon 0.1. Öeldakse, et Banachi ruumil X on

1) *diametraalne lokaalne diameeter-2 omadus* (DLD2P), kui iga ühikkera B_X viilu S, $x \in S \cap S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S$ nii, et

$$\|x - y\| > 2 - \varepsilon;$$

2) *diametraalne diameeter-2 omadus* (DD2P), kui iga ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtise alamhulga U, $x \in U \cap S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in U$ nii, et

$$\|x - y\| > 2 - \varepsilon;$$

3) *diametraalne tugev diameeter-2 omadus* (DSD2P), kui iga ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtiste alamhulkade kumera kombinatsiooni C, $x \in C$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in C$ nii, et

$$\|x - y\| > \|x\| + 1 - \varepsilon.$$

Need omadused pakuvad huvi nii Daugaveti omaduse kui ka diameeter-2 omaduste uurijatele. DLD2P omaduse mõiste tõidki sisse Daugaveti omaduse uurijad Ivakhno ja Kadets [IK]. (Täiendavalt uuriti seda omadust artiklis [AHNTT].) Esialgselt sõnastati see omadus Daugaveti omaduse eeskujul operaatorite, täpsemalt ühemõõtmeliste projektorite abil, kuid analoogiliselt Daugaveti omaduse geomeetrilisele tõlgendusele anti kohe selle omaduse geomeetriline kirjeldus ühikkera viilude abil. See kirjeldus sarnaneb lokaalse diameeter-2 omadusega, kuid on viimasest tugevam. Selle sarnasuse eeskujul tõid hispaania matemaatikud Becerra Guerrero, López-Pérez ja Rueda Zoca [BGLPRZ2] diameeter-2 ja tugeva diameeter-2 omaduse kõrvale vastavalt DD2P ja DSD2P omaduse.

Definitsioonide põhjal on ilmne, et DSD2P omadus on tugevam kui DD2P omadus ning DD2P omadus on tugevam kui DLD2P omadus. Pole teada, kas DSD2P omadus ja Daugaveti omadus on samaväärsed või mitte. Ka magistritöös jääb see küsimus lahtiseks. Daugaveti omaduse puhul on täpselt teada, et kui otsesumma komponentruumidel on Daugaveti omadus, siis ainult 1- ja ∞-normiga otsesummal on Daugaveti omadus. Senised uuringud artiklis [BGLPRZ2] on näidanud, et DSD2P omadus käitub Banachi ruumide ja nende otsesummade vahel ülekandumisel Daugaveti omadusega sarnaselt. Näiteks on teada, et p-normiga otsesumma ei ole kunagi DSD2P omadusega, kui $1 < p < \infty$, ning ∞-normiga otsesummal on DSD2P omadus parajasti siis, kui komponentruumid on DSD2P omadusega.

Artiklist [BGLPRZ2] oli ka teada, et kui 1-normiga otsesummal on DSD2P omadus, siis ka komponentruumidel on DSD2P omadus. Selle pöördtulemuse kehtimine sõnastati artiklis [BGLPRZ2] küsimusena. Magistritöös on sellele küsimusele vastatud ja näidatud, et Banachi ruumide DSD2P omadus kandub nende 1-summale. Magistritöö põhitulemus on vormistatud teadusartiklina ja publitseerimiseks vastu võetud ajakirjas *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*. Sellega on DSD2P omaduse käitumine üleminekul otsesumma ja komponentruumide vahel teada kõikide p-normiga otsesummade korral. Sama küsimus vajab DSD2P omaduse puhul täiendavat uurimist p-normidest üldisemate absoluutsete normidega otsesummade korral.

Magistritöö koosneb neljast peatükist.

Esimeses peatükis toome sisse magistritöö põhimõisted ja mõningad olulised abitulemused. Teises peatükis anname DLD2P omaduse ja DD2P omaduse kirjelduse projektorite abil ja uurime diametraalse tugeva diameeter-2 omaduse seost projektoritega. Kolmandas peatükis toome tõestused selle kohta, et Banachi ruumidel X ja Y on DLD2P või DD2P omadus parajasti siis, kui absoluutse normiga otsesumma $X \oplus_N Y$ on vastavalt omadusega DLD2P või DD2P. Näitame, et $p = 1$ ja $p = \infty$ korral on Banachi ruumid X ja Y DSD2P omadusega parajasti siis, kui nende p-summa $X \oplus_p Y$ on DSD2P omadusega. Viimases, neljandas, peatükis näitame, et DD2P omadus ja DSD2P omadus päranduvad kinnisele alamruumile, kui alamruumi järgi leitud faktorruum on lõplikumõõtmeline.

Magistritöös vaatleme mittetriviaalseid Banachi ruume ainult üle reaalarvude korpuse $\mathbb{R}$. Kasutame Banachi ruumide teooria standardnotatsiooni. Banachi ruumi X ühiksfääri tähistame S_X, tema kinnist ühikkera B_X ja lahtist kera keskpunktiga a ja raadiusega $r > 0$ $B_X(a, r)$. Banachi ruumist X Banachi ruumi Y tegutsevate kõigi pidevate lineaarsete operaatorite ruumi tähistame $\mathcal{L}(X, Y)$. Operaator $x^* \otimes y \in \mathcal{L}(X, Y)$, kus $x^* \in X^*$ ja $y \in Y$, seab elemendile $x \in X$ vastavusse elemendi $x^*(x)y \in Y$, operaatori $x^* \otimes y$ norm on $\|x^*\|\|y\|$. Projektori $P\colon X \to X$ all peame silmas pidevat lineaarset projektorit, st operaatorit $P \in \mathcal{L}(X, X)$, mille korral $P^2 = P$. Teada on, et kui $P \neq 0$, siis $\|P\| \geq 1$. Banachi ruumi X mittetühja alamhulga A diameeter diam$(A)= \sup_{x,y\in A} \|x - y\|$, ruumi X mittetühjade alamhulkade $A_1, \ldots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$, kumera kombinatsiooni all mõtleme hulka $\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$, kus $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ on sellised, et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Ruumi X faktorruumi alamruumi Y järgi märgime X/Y.

1 Põhimõisted

Selles peatükis toome sisse magistritöö olulisemad mõisted ja abitulemused, mis on aluseks põhitulemustele järgmistes peatükkides. Esmalt toome sisse nõrga topoloogia, seejärel tutvume viilu mõistega. Järgmisena defineerime magistritöö keskseid omadused — diametraalsed diameeter-2 omadused ning võrdluseks tavalised diameeter-2 omadused. Lisaks toome sisse diametraalse tugeva diameeter-2 omaduse kriteeriumi, mille abil tõestame hiljem magistritöö kõige olulisema tulemuse diametraalse tugeva diameeter-2 omaduse pärandumisest Banachi ruumide 1-summale. Peatüki lõpus näitame, et Daugaveti omadusega Banachi ruumil on diametraalne tugev diameeter-2 omadus ja seega kõik diameeter-2 omadused.

1.1 Nõrk topoloogia ja viilud

Olgu X Banachi ruum.

Definitsioon 1.1. *Nõrk topoloogia* ruumil X on kujutuste hulga X^* poolt indutseeritud topoloogia, st vähim topoloogia w, mille suhtes iga $x^* \in X^*$ korral $x^*\colon (X, w) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^*(x)$, on pidev. Nõrga topoloogia elemente nimetatakse *nõrgalt lahtisteks alamhulkadeks.*

On hästi teada, et elemendi $x \in X$ ümbruste baasi nõrgas topoloogias moodustavad hulgad kujul

$$\{y \in X\colon |x_i^*(x - y)| < 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}\},$$

kus $n \in \mathbb{N}$ ja $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$.

Üldiselt on nõrk topoloogia normi topoloogiast nõrgem, nõrk ja normi topoloogia ühtivad parajasti lõplikumõõtmelistel ruumidel (vt nt [M, lause 2.5.14]).

Teoreem 1.2 (Mazur, 1933; vt nt [M, teoreem 2.5.16])**.** *Banachi ruumi X kumera alamhulga sulund normi topoloogias langeb kokku selle alamhulga sulundiga nõrgas topoloogias.*

Paneme tähele, et see tähendab, et Banachi ruumis X on kumer alamhulk samaaegselt kinnine normi topoloogias ja nõrgas topoloogias.

Olgu $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ja $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ ruumis X. Siis $Ax_\alpha \xrightarrow{w} Ax$ ruumis Y, sest iga $y^* \in Y^*$ korral

$$|y^*(Ax_\alpha) - y^*(Ax)| = |(A^*y^*)(x_\alpha) - (A^*y^*)(x)| \longrightarrow 0.$$

Seega $\|\cdot\|$-$\|\cdot\|$-pidev kujutus on ka w-w-pidev.

Töös vaatleme tavaliselt nõrka topoloogiat ühikkera B_X suhtes, st ühikkera B_X alamruumi topoloogiat

$$\{U \cap B_X \colon U \in w\}.$$

Selle topoloogia elemente nimetatakse ühikkera B_X *suhteliselt nõrgalt lahtisteks alamhulkadeks.*

Ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtiste alamhulkade üheks näiteks on ühikkera B_X viilud, millel on oluline roll diameeter-2 omaduste defineerimisel. Täpsemalt on viilud ühikkera suhtelise nõrga topoloogia eelbaas.

Definitsioon 1.3. Olgu X Banachi ruum. Ühikkera B_X *viiluks* nimetatakse hulka

$$S(x^*,\alpha) = \{x \in B_X : x^*(x) > 1 - \alpha\},$$

kus $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$.

Põhitulemuste tõestamisel vajame järgmist abitulemust.

Lemma 1.4 ([IK, lemma 2.1])**.** *Olgu X Banachi ruum ja olgu $S(x^*,\alpha)$ ühikkera B_X viil. Iga $x \in S(x^*,\alpha) \cap S_X$ ja $\beta \in (0,\alpha)$ korral leidub $y^* \in S_{X^*}$ nii, et*

$$x \in S(y^*,\beta) \subset S(x^*,\alpha).$$

Tõestus. Fikseerime vabalt $x \in S(x^*,\alpha) \cap S_X$ ja $\beta \in (0,\alpha)$. Näitame, et leidub selline $y^* \in S_{X^*}$, et

$$x \in S(y^*,\beta) \subset S(x^*,\alpha).$$

Piisab vaadelda juhtu, kus $\alpha < 1$. Olgu $u^* \in S_{X^*}$ selline, et $u^*(x) = 1$. Osutub, et teatud $t \in \mathbb{R}$ korral sobib võtta $y^* = \frac{u^*+tx^*}{\|u^*+tx^*\|}$. Iga $t \in [0,\infty)$ korral $u^* + tx^* \neq 0$, sest $(u^* + tx^*)(x) \geq 1 + t(1-\alpha) \geq 1$.

Vaatleme funktsiooni

$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1 + t(1-\alpha)}{\|u^* + tx^*\|}.$$

Ilmselt $f(0) = 1$ ja $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 1 - \alpha$. Kuna f on pidev, siis järelikult leidub selline t, et $f(t) = 1 - \beta$, sest $1 - \beta \in (1-\alpha, 1]$. Võtame

$$y^* = \frac{u^* + tx^*}{\|u^* + tx^*\|}.$$

Siis $x \in S(y^*, \beta)$, sest

$$y^*(x) = \frac{(u^* + tx^*)(x)}{\|u^* + tx^*\|} > \frac{1 + t(1-\alpha)}{\|u^* + tx^*\|} = f(t) = 1 - \beta.$$

Kui $y \in S(y^*, \beta)$, siis $y \in S(x^*, \alpha)$ ehk $x^*(y) > 1 - \alpha$, sest

$$\begin{aligned}
1 + tx^*(y) &\geq u^*(y) + tx^*(y) \\
&= y^*(y)\|u^* + tx^*\| \\
&> (1-\beta)\|u^* + tx^*\| \\
&= f(t)\|u^* + tx^*\| \\
&= 1 + t(1-\alpha).
\end{aligned}$$

Järelikult $S(y^*, \beta) \subset S(x^*, \alpha)$. $\square$

1.2 Diametraalsed ja tavalised diameeter-2 omadused

Käesolevas paragrahvis toome sisse magistritöö kesksed omadused — diametraalsed diameeter-2 omadused — uurime selles ja järgmises paragrahvis nende vahekorda ning nende seost tavaliste diameeter-2 omadustega ja tuntud Daugaveti omadusega.

Definitsioon 1.5 ([BGLPRZ2])**.** Öeldakse, et Banachi ruumil X on

1) *diametraalne lokaalne diameeter-2 omadus* (DLD2P), kui iga ühikkera B_X viilu S, $x \in S \cap S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S$ nii, et

$$\|x - y\| > 2 - \varepsilon;$$

2) *diametraalne diameeter-2 omadus* (DD2P), kui iga ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtise alamhulga U, $x \in U \cap S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in U$ nii, et

$$\|x - y\| > 2 - \varepsilon;$$

3) *diametraalne tugev diameeter-2 omadus* (DSD2P), kui iga ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtiste alamhulkade kumera kombinatsiooni C, $x \in C$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in C$ nii, et

$$\|x - y\| > \|x\| + 1 - \varepsilon.$$

DLD2P omadust on erinevate nimetuste all uuritud varasemates artiklites [IK] ja [AHNTT] (artiklis [IK] on DLD2P omadusega ruume nimetatud SBP-ruumideks (ingl k *spaces with bad projections*), artiklis [AHNTT] kasutatakse nimetust LD2P+ omadus). Definitsioonist on näha, et DSD2P omadus on tugevam kui DD2P omadus ning DD2P omadus on tugevam kui DLD2P omadus.

Järgmisena anname DSD2P omaduse kriteeriumi, mida kasutame mitmes tõestuses. Muuhulgas on sellel kriteeriumil võtmeroll magistritöö ühe põhitulemuse, teoreemi 3.10 tõestamisel — see teoreem ütleb, et DSD2P omadus kandub komponentruumidelt nende 1-summale.

Lemma 1.6 ([HPP, tähelepanek pärast teoreemi sõnastust]). *Olgu X lõpmatumõõtmeline Banachi ruum. Ruumil X on DSD2P omadus parajasti siis, kui iga $n \in \mathbb{N}$, ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtiste alamhulkade $U_1, \ldots, U_n$, arvude $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$, kus $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, elemendi $x \in \sum_{i=1}^n \lambda_i (U_i \cap S_X)$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i$ nii, et*

$$\|x - y\| > \|x\| + 1 - \varepsilon.$$

Tõestus. Tarvilikkus on DSD2P omaduse definitsiooni põhjal ilmne.

Piisavus. Olgu $U_1, \ldots, U_n$ ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtised alamhulgad, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ sellised, et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $x \in \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i$ ja $\varepsilon > 0$. Näitame, et leidub $y \in \sum_{i=1}^n \lambda_i U_i$ nii, et

$$\|x - y\| > \|x\| + 1 - \varepsilon.$$

Iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral fikseerime $x_i \in U_i$ nii, et $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et

$$U_i = \{u \in B_X \colon |x_{ij}^*(x_i - u)| < \varepsilon \quad \forall j \in \{1, \ldots, n_i\}\},$$

kus $x_{ij}^* \in X^*$ ja $n_i \in \mathbb{N}$. Iga x_i esitame vabalt mingi kahe S_X elemendi y_i ja z_i kumera kombinatsioonina $x_i = \mu_i y_i + (1 - \mu_i) z_i$, kus $\mu_i \in [0,1]$. Vaatleme punktide y_i ja z_i suhteliselt nõrgalt lahtisi ümbrusi

$$V_i = \{v \in B_X \colon |x_{ij}^*(y_i - v)| < \varepsilon \quad \forall j \in \{1, \ldots, n_i\}\}$$

ja

$$W_i = \{w \in B_X \colon |x_{ij}^*(z_i - w)| < \varepsilon \quad \forall j \in \{1, \ldots, n_i\}\}.$$

Siis $\mu_i V_i + (1 - \mu_i) W_i \subset U_i$, sest iga $v \in V_i$ ja $w \in W_i$ korral esiteks,

$$\|\mu_i v + (1 - \mu_i) w\| \leq \mu_i \|v\| + (1 - \mu_i)\|w\| \leq \mu_i + (1 - \mu_i) = 1,$$

seega $\mu_i v + (1 - \mu_i) w \in B_X$, ja teiseks,

$$\begin{aligned}
\Big| x_{ij}^*\Big(x_i - \big(\mu_i v + (1-\mu_i) w\big)\Big)\Big| &= \Big| x_{ij}^*\Big(\big(\mu_i y_i + (1-\mu_i) z_i\big) - \big(\mu_i v + (1-\mu_i) w\big)\Big)\Big| \\
&\leq \mu_i |x_{ij}^*(y_i - v)| + (1 - \mu_i)|x_{ij}^*(z_i - w)| \\
&< \mu_i \varepsilon + (1 - \mu_i)\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Eelduse kasutamiseks vaatleme ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtiste alamhulkade $V_1, W_1, \ldots, V_n, W_n$ kumerat kombinatsiooni

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mu_i V_i + (1-\mu_i)W_i).$$

Kuna $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\big(\mu_i y_i + (1-\mu_i)z_i\big)$ ning $y_i \in V_i \cap S_X$ ja $z_i \in W_i \cap S_X$, siis eelduse põhjal leidub $y \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big(\mu_i V_i + (1-\mu_i)W_i\Big) \subset \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i$ nii, et

$$\|x-y\| > \|x\| + 1 - \varepsilon.$$

□

Järgnevalt toome sisse tavalised diameeter-2 omadused.

Definitsioon 1.7 ([ALN]). Öeldakse, et Banachi ruumil X on

1) *lokaalne diameeter-2 omadus* (LD2P), kui iga ühikkera B_X viilu diameeter on 2;

2) *diameeter-2 omadus* (D2P), kui iga ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtise alamhulga diameeter on 2;

3) *tugev diameeter-2 omadus* (SD2P), kui iga ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtiste hulkade kumera kombinatsiooni diameeter on 2.

Definitsioonist on näha, et SD2P omadus on tugevam kui D2P omadus ja D2P omadus on tugevam kui LD2P omadus. On teada, et kõik need kolm diameeter-2 omadust on erinevad ([L], [BGLPRZ1]). Kõrvutades omavahel diametraalsete diameeter-2 omaduste ja tavaliste diameeter-2 omaduste definitsioone, on ilmne, et DSD2P omadusest järeldub SD2P omadus, DD2P omadusest järeldub D2P omadus ja DLD2P omadusest järeldub LD2P omadus.

Näide 1.8. Jadaruumidel c_0 ja ℓ_∞ on SD2P omadus, aga ei ole DLD2P omadust.

Põhjendus. Artiklis [ALN, teoreem 4.10] näidati, et ruumidel c_0 ja ℓ_∞ on SD2P omadus. Veendume järgnevas ainult, et ruumil c_0 ei ole DLD2P omadust. Ruumi

ℓ_∞ korral on tõestus analoogiline. Vaatleme ruumi c_0 ühikkera viilu $S = \{x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in B_{c_0} \colon e_1(x) = \xi_1 > 0\}$. Siis $e_1 \in S \cap S_{c_0}$. Olgu $y \in S$ suvaline. Kuna $\|y\| = \max\limits_k |y_k| \leq 1$ ja $y_1 > 0$, siis $|1 - y_1| = 1 - y_1 \leq 1$, mistõttu

$$\|e_1 - y\| = \|(1 - y_1, -y_2, -y_3, \dots)\| = \max\{|1 - y_1|, |-y_2|, |-y_3|, \dots\} \leq 1.$$

Järelikult $\varepsilon \in (0,1)$ korral ei leidu sellist $y \in S$, et $\|e_1 - y\| \geq 2 - \varepsilon$. Seega ruumil c_0 ei ole DLD2P omadust. $\square$

Ei ole teada, kas DD2P omadus ja DLD2P omadus on erinevad. Hiljem veendume peatükis 3, et DD2P ja DSD2P omadus on erinevad, sest DD2P omadus kandub komponentruumidelt p-normiga otsesummale, kuid DSD2P omadus üldiselt mitte.

1.3 Daugaveti omadus on tugevam kui DSD2P omadus

Selle paragrahvi eesmärk on artikli [BGLPRZ2] eeskujul näidata, et Daugaveti omadusest järeldub DSD2P omadus.

Definitsioon 1.9 ([W])**.** Öeldakse, et Banachi ruumil X on *Daugaveti omadus*, kui iga ühemõõtmelise operaatori $T \in \mathcal{L}(X, X)$ korral

$$\|I + T\| = 1 + \|T\|.$$

Näiteks ruumid $C[0, 1]$ ja $L_1[0, 1]$ on Daugaveti omadusega (vt nt [W]). Näitame esiteks, et Daugaveti omaduse definitsioonis piisab vaadelda juhtu $\|T\| = 1$. Selle näitamisel kasutame järgmist elementaarset fakti.

Fakt 1.10. *Kui normeeritud ruumi X elemendid x ja y on sellised, et*

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|,$$

siis iga $\kappa, \lambda > 0$ korral

$$\|\kappa x + \lambda x\| = \kappa\|x\| + \lambda\|y\|.$$

Tõestus. Olgu $x, y \in X$ sellised, et $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ ja olgu $\kappa, \lambda > 0$ suvalised. Näitame, et $\|\kappa x + \lambda y\| = \kappa\|x\| + \lambda\|y\|$.

Paneme tähele, et ühtpidi võrratus kehtib triviaalselt. Teistpidi võrratuse näitamiseks võime üldisust kitsendamata eeldada, et $\kappa \geq \lambda$. Siis saame hinnata järgmiselt:

$$\begin{aligned}\|\kappa x + \lambda y\| &= \|\kappa(x + y) - (\kappa - \lambda)y\| \geq \kappa\|x + y\| - (\kappa - \lambda)\|y\| \\ &= \kappa(\|x\| + \|y\|) - (\kappa - \lambda)\|y\| = \kappa\|x\| + \lambda\|y\|.\end{aligned}$$

□

Järeldus 1.11. *Daugaveti omaduse definitsioonis piisab vaadelda juhtu $\|T\| = 1$.*

Tõestus. Kui $T \in \mathcal{L}(X, X)$ on ühemõõtmeline operaator, $T \neq 0$ ja $\left\|I + \frac{T}{\|T\|}\right\| = 2$, siis fakti 1.10 põhjal

$$\|I + T\| = \left\|I + \|T\|\frac{T}{\|T\|}\right\| = \|I\| + \|T\|\left\|\frac{T}{\|T\|}\right\| = 1 + \|T\|.$$

□

Järgmine tulemus kirjeldab Daugaveti omadust geomeetriliselt viilude abil.

Lemma 1.12 ([KSSW, lemma 2.2])**.** *Banachi ruumil X on Daugaveti omadus parajasti siis, kui iga ühikkera B_X viilu S, $x \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S$ nii, et*

$$\|x - y\| > 2 - \varepsilon.$$

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et Banachi ruumil X on Daugaveti omadus. Olgu antud ühikkera B_X viil $S(x^*, \alpha)$, $x \in S_X$ ja $0 < \varepsilon \leq 2\alpha$. Näitame, et leidub $y \in S$ nii, et $\|x - y\| > 2 - \varepsilon$. Vaatleme ühemõõtmelist operaatorit $T = x^* \otimes x$. Kuna ruumil X on Daugaveti omadus, siis $\|I - T\| = 1 + \|T\| = 2$. Olgu $y \in S_X$ selline, et $\|(I - T)y\| > 2 - \frac{\varepsilon}{2}$ ja $x^*(y) \geq 0$. Siis on $x^*(y) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, sest

$$2 - \frac{\varepsilon}{2} < \|(I - T)y\| = \|y - x^*(y)x\| \leq \|y\| + x^*(y)\|x\| = 1 + x^*(y).$$

Seega $y \in S(x^*, \alpha)$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|x - x^*(y)x + x^*(y)x - y\| \\
&= \big\|\big(y - x^*(y)x\big) - \big(x - x^*(y)x\big)\big\| \\
&\geq \|(I - T)y\| - \|x - x^*(y)x\| \\
&\geq \|(I - T)y\| - \big(1 - x^*(y)\big) \\
&> \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Piisavus. Olgu $T\colon X \to X$ ühemõõtmeline pidev lineaarne operaator, seega $T = x^* \otimes x$, kus $x^* \in X^*$ ja $x \in X$. Tahame näidata, et $\|I - T\| = 1 + \|T\|$. Järelduse 1.11 põhjal võime eeldada, et $\|T\| = 1$ ja seejärel võime omakorda eeldada, et $\|x^*\| = \|x\| = 1$. Olgu $\varepsilon > 0$. Piisab näidata, et $\|I - T\| \geq 2 - \varepsilon$. Kui $y \in S(x^*, \frac{\varepsilon}{2})$ on selline, et $\|x - y\| > 2 - \frac{\varepsilon}{2}$, siis

$$\begin{aligned}
\|(I - T)y\| &= \|y - x^*(y)x\| = \big\|(y - x) + \big(x - x^*(y)x\big)\big\| \\
&\geq \|x - y\| - \|x - x^*(y)x\| \geq \|x - y\| - \big(1 - x^*(y)\big) \\
&> \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon,
\end{aligned}$$

järelikult $\|I - T\| \geq 2 - \varepsilon$. $\square$

Lemma 1.12 eeskujul kirjeldati artiklis [S] Daugaveti omadust ühikkera suhteliselt nõrgalt lahtiste hulkade abil.

Lemma 1.13 ([S, lemma 3]). *Banachi ruumil X on Daugaveti omadus parajasti siis, kui iga mittetühja ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtise alamhulga U, $x \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in U$ nii, et*

$$\|x - y\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Lemmat 1.13 magistritöös ei tõesta, selle tõestus on ühelt poolt sarnane lemma 1.12 tõestusega, kuid samas küllaltki tehniline, lisaks kasutatakse tõestuses asjaolu, et iga mittetühi ühikkera suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk sisaldab mingit viilude kumerat kombinatsiooni.

Järeldus 1.14. *Kui Banachi ruumil X on Daugaveti omadus, siis iga mittetühja ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtise alamhulga U, $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in U$ nii, et iga $\lambda \geq 0$ korral*

$$\|x - \lambda y\| \geq (\|x\| + \lambda)(1 - \varepsilon).$$

Järelduse 1.14 tõestus on sarnane [L, järeldus 3.12] tõestusega. Tõestuses kasutame järgmist elementaarset fakti (vt nt [AA, ülesanne 11.1.2]).

Fakt 1.15. *Kui normeeritud ruumi ühikkera elemendid x ja y on sellised, et $\|x - y\| \geq 1 + c$ mingi $c \in \mathbb{R}$ korral, siis iga $\kappa, \lambda \geq 0$ korral*

$$\|\kappa x - \lambda y\| \geq (\kappa + \lambda)c.$$

Tõestus. Kuna $1 + c \leq \|x + y\| \leq 2$, siis $c \leq 1$ ja

$$\begin{aligned}
\|\kappa x - \lambda y\| &\geq \max\{\kappa, \lambda\}\|x - y\| - \big(\max\{\kappa, \lambda\} - \min\{\kappa, \lambda\}\big) \\
&\geq \max\{\kappa, \lambda\}(1 + c) - \big(\max\{\kappa, \lambda\} - \min\{\kappa, \lambda\}\big) \\
&= \max\{\kappa, \lambda\}c + \min\{\kappa, \lambda\} \\
&\geq \max\{\kappa, \lambda\}c + \min\{\kappa, \lambda\}c \\
&= (\kappa + \lambda)c.
\end{aligned}$$

□

Järelduse 1.14 tõestus. Kui $x = 0$, siis sobib suvaline $y \in U \cap S_X$.

Kui $x \neq 0$, siis leiame lemma 1.13 põhjal sellise $y \in U$, et

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - y \right\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Seega $\lambda \geq 0$ korral saame fakti 1.15 põhjal, võttes selles $c := 1 - \varepsilon$, $\kappa := \|x\|$ ja $\lambda := \lambda$, et kehtib

$$\|x - \lambda y\| = \left\| \|x\| \frac{x}{\|x\|} - \lambda y \right\| \geq (\|x\| + \lambda)(1 - \varepsilon).$$

□

Nüüd esitame selle paragrahvi põhitulemuse.

Lause 1.16 ([BGLPRZ2, näide 3.3]). *Kui Banachi ruumil on Daugaveti omadus, siis on tal DSD2P omadus.*

Tõestus. Tõestus erineb mõnevõrra [BGLPRZ2, näite 3.3] põhjendusest. Eeldame, et Banachi ruumil X on Daugaveti omadus. Olgu $U_1, \ldots, U_n$ ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtised alamhulgad, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ sellised, et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $x \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i$ ja $\varepsilon > 0$. Näitame, et leidub $y \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i$ nii, et

$$\|x - y\| > \|x\| + 1 - \varepsilon.$$

Olgu $\delta > 0$ selline, et

$$(\|x\| + 1)(1 - \delta)^n > \|x\| + 1 - \varepsilon.$$

Sobiva y saamiseks rakendame n korda järeldust 1.14. Esimesel korral võtame järelduses 1.14 $x := x$, $U := U_1$ ja $\varepsilon := \delta$, mille abil leiame $y_1 \in U_1$ nii, et

$$\|x - \lambda_1 y_1\| \geq (\|x\| + \lambda_1)(1 - \delta).$$

Kui $n > 1$, siis rakendame uuesti järeldust 1.14, võttes selles $x := x - \lambda_1 y_1$, $U := U_2$ ja $\varepsilon := \delta$, leiame $y_2 \in U_2$ nii, et

$$\|(x - \lambda_1 y_1) - \lambda_2 y_2\| \geq (\|x - \lambda_1 y_1\| + \lambda_2)(1 - \delta).$$

Kokkuvõttes

$$
\begin{aligned}
\|x-\lambda_1 y_1-\lambda_2 y_2\| &\geq \big((\|x\|+\lambda_1)(1-\delta)+\lambda_2\big)(1-\delta)\\
&\geq (\|x\|+\lambda_1+\lambda_2)(1-\delta)^2.
\end{aligned}
$$

Kui $n>2$, siis rakendame veel kord järeldust 1.14, võttes selles $x := x-\lambda_1 y_1-\lambda_2 y_2$, $U := U_3$ ja $\varepsilon := \delta$, leiame $y_3 \in U_3$ nii, et

$$
\|x-\lambda_1 y_1-\lambda_2 y_2-\lambda_3 y_3\| \geq (\|x\|+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(1-\delta)^3.
$$

Vajadusel jätkame analoogiliselt, kuni leiame $y_n \in U_n$ nii, et

$$
\begin{aligned}
\|x-\lambda_1 y_1-\cdots-\lambda_n y_n\| &\geq (\|x\|+\lambda_1+\cdots+\lambda_n)(1-\delta)^n\\
&= (\|x\|+1)(1-\delta)^n.
\end{aligned}
$$

Võtame $y=\lambda_1 y_1+\cdots+\lambda_n y_n$. Siis

$$
\|x-y\| \geq (\|x\|+1)(1-\delta)^n > \|x\|+1-\varepsilon.
$$

$\square$

Ei ole teada, kas Daugaveti omadus ja DSD2P omadus on erinevad või mitte.

Võtame käesolevas peatükis vaadeldud omaduste vahelised seosed kokku järgmise skeemi abil, kus DP märgib Daugaveti omadust.

$$
\begin{array}{ccccccc}
DP & \underset{?}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}} & DSD2P & \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} & DD2P & \underset{?}{\overset{\Longrightarrow}{\Longleftarrow}} & DLD2P \\
 & & \not\Uparrow\Downarrow & & \not\Uparrow\Downarrow & & \not\Uparrow\Downarrow \\
 & & SD2P & \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} & D2P & \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} & LD2P
\end{array}
$$

2 Diametraalsete diameeter-2 omaduste kirjeldus projektorite abil

Artiklis [IK] uurisid Ivakhno ja Kadets selliseid Banachi ruume X, mille puhul iga ühemõõtmelise projektori $P \in \mathcal{L}(X,X)$ korral $\|I - P\| \geq 2$. Viimast tingimust rahuldavad parajasti DLD2P omadusega ruumid (vt [IK, teoreem 1.4]). Ka DD2P omadus on kirjeldatav projektorite abil (vt [BGLPRZ2, lause 2.10]). DSD2P omaduse kirjeldust projektorite abil pole teada, kuid ka sel omadusel on seos projektoritega (vt [BGLPRZ2, lause 3.6]).

Käesoleva peatüki eesmärk on esitada nimetatud tulemused koos üksikasjaliku tõestusega.

2.1 DLD2P omaduse kirjeldus projektorite abil

Selles paragrahvis esitame koos tõestusega DLD2P omaduse kirjelduse artiklist [IK].

Teoreem 2.1 ([IK, teoreem 1.4])**.** *Banachi ruumil X on DLD2P omadus parajasti siis, kui iga ühemõõtmelise projektori $P \in \mathcal{L}(X,X)$ korral*

$$\|I - P\| \geq 2.$$

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et Banachi ruumil X on DLD2P omadus. Olgu $P \in \mathcal{L}(X,X)$ ühemõõtmeline projektor. Siis on P kujul $P = x^* \otimes x$, kus $x^* \in S_{X^*}$, $x \in X$ ja $x^*(x) = 1$. Seega $\|x\| \geq 1$, sest $\|P\| \geq 1$. Olgu $\varepsilon \in (0,1)$. Vaatleme ühikkera B_X viilu $S = \{y \in B_X \colon x^*(y)\|x\| > 1 - \varepsilon\}$. Ilmselt $\frac{x}{\|x\|} \in S \cap S_X$. Eelduse põhjal leidub $y \in S$ nii, et $\left\|\frac{x}{\|x\|} - y\right\| > 2 - \varepsilon$. Paneme tähele, et $\mu = x^*(y)\|x\|$ korral

$$\|(I-P)y\| = \|y - x^*(y)x\| = (1+\mu)\left\|\frac{1}{1+\mu}y - \frac{\mu}{1+\mu}\frac{x}{\|x\|}\right\|.$$

Kuna $\mu > 1 - \varepsilon$, siis

$$\frac{\mu}{1+\mu} > \frac{1-\varepsilon}{1+(1-\varepsilon)} = \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}.$$

Vahetult on kontrollitav, et funktsioon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(\lambda) = \|\lambda \frac{x}{\|x\|} - (1-\lambda)y\|$, on kumer. Tähistame $\lambda = \frac{\mu}{1+\mu}$. Vaatleme eraldi juhte 1) $\lambda \in (\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}, \frac{1}{2})$ ja 2) $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$.

1) Paneme tähele, et $\lambda \in (\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}, \frac{1}{2})$ korral

$$\begin{aligned}
\|(I-P)y\| &= (1+\mu)\Big\|\frac{1}{1+\mu}y - \frac{\mu}{1+\mu}\frac{x}{\|x\|}\Big\| \\
&= (1+\mu)\Big\|\Big(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{x}{\|x\|}\Big) + \Big(\frac{1}{1+\mu} - \frac{1}{2}\Big)y - \Big(\frac{\mu}{1+\mu} - \frac{1}{2}\Big)\frac{x}{\|x\|}\Big\| \\
&\geq \frac{1}{2}(1+\mu)\Big\|y - \frac{x}{\|x\|}\Big\| - \Big|\frac{1}{1+\mu} - \frac{1}{2}\Big| - \Big|\frac{\mu}{1+\mu} - \frac{1}{2}\Big| \\
&= \frac{1}{2}(2-\varepsilon)(2-\varepsilon) - \Big|\frac{1}{2} - \lambda\Big| - \Big|\lambda - \frac{1}{2}\Big| \\
&> \frac{1}{2}(2-\varepsilon)(2-\varepsilon) - 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\Big) \\
&= \frac{1}{2}(2-\varepsilon)^2 - \frac{2\varepsilon}{2-\varepsilon} \\
&> 2 - 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Kuna $\varepsilon \in (0,1)$ on suvaline, siis järelikult $\|I-P\| \geq 2$.

2) Vaatleme juhtu $\lambda \geq \frac{1}{2}$ ehk $\mu \geq 1$. Sel juhul $\frac{1}{2} \in [0, \lambda]$. Seega funktsiooni f kumerusest saame, et

$$f\Big(\frac{1}{2}\Big) \leq \Big(1 - \frac{1}{2\lambda}\Big)f(0) + \frac{1}{2\lambda}f(\lambda).$$

Kuna

$$f\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}\Big\|\frac{x}{\|x\|} - y\Big\| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

ja $f(0) = \|y\| \leq 1$, siis

$$f(\lambda) \geq 2\lambda f\Big(\frac{1}{2}\Big) - (2\lambda - 1)f(0) > 2\lambda(1 - \frac{\varepsilon}{2}) - (2\lambda - 1) = 1 - \lambda\varepsilon.$$

Nüüd saame

$$\begin{aligned}
\|(I-P)y\| &= (1+\mu)\Big\|\frac{1}{1+\mu}y - \frac{\mu}{1+\mu}\frac{x}{\|x\|}\Big\| \\
&= (1+\mu)f\Big(\frac{\mu}{1+\mu}\Big) \\
&\geq (1+\mu)\Big(1 - \frac{\mu}{1+\mu}\varepsilon\Big) \\
&= 1 + \mu - \mu\varepsilon \\
&\geq 2 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Kuna $\varepsilon \in (0,1)$ on suvaline, siis järelikult $\|I-P\| \geq 2$.

Mõlemal vaadeldud juhul saime, et $\|I-P\| \geq 2$, millega on teoreemi tarvilikkuse osa tõestatud.

Piisavus. Eeldame, et iga ühemõõtmelise projektori $P \in \mathcal{L}(X,X)$ korral $\|I-P\| \geq 2$. Vaatleme ühikkera B_X viilu S, $x \in S \cap S_X$ ja $\varepsilon \in (0,2)$. Otsime elementi $y \in S$ nii, et $\|x-y\| > 2-\varepsilon$. Lemma 1.4 põhjal leidub ühikkera B_X viil $S(y^*, \beta)$ nii, et

$$x \in S(y^*, \beta) \subset S$$

ja

$$\frac{\beta}{1-\beta} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olgu $\gamma > 0$ selline, et $\gamma \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ja $(1-\gamma)y^*(x) \geq 1-\beta$. Vaatleme ühemõõtmelist projektorit $P = \frac{1}{y^*(x)} y^* \otimes x$. Eelduse kohaselt on $\|I-P\| \geq 2$, mistõttu leidub $y \in S_X$ nii, et

$$\|(I-P)y\| > 2-\gamma.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $y^*(y) > 0$, vajadusel võime võtta y asemele $-y$. Seega

$$\|(I-P)y\| = \left\| y - \frac{y^*(y)}{y^*(x)} x \right\| \leq \|y\| + \left\| \frac{y^*(y)}{y^*(x)} x \right\| = 1 + \frac{y^*(y)}{y^*(x)}.$$

Kokkuvõttes $1 + \frac{y^*(y)}{y^*(x)} > 2-\gamma$ ehk

$$y^*(y) > (1-\gamma)y^*(x) \geq 1-\beta.$$

Seega $y \in S(y^*, \beta)$. Paneme tähele, et

$$1 - \frac{1}{1-\beta} < 1 - \frac{y^*(y)}{y^*(x)} < 1 - \frac{1-\beta}{1},$$

millest saame, et

$$\left| 1 - \frac{y^*(y)}{y^*(x)} \right| < \frac{\beta}{1-\beta}.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}\|y-x\| &= \|(y-Py)+(Py-x)\| \\ &\geq \|y-Py\| - \|x-Py\| \\ &= \|(I-P)y\| - \left|1-\frac{y^*(y)}{y^*(x)}\right| \\ &> (2-\gamma) - \frac{\beta}{1-\beta} \\ &\geq \left(2-\frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= 2-\varepsilon.\end{aligned}$$

□

2.2 DD2P omaduse kirjeldus projektorite abil

Selles paragrahvis esitame koos tõestusega DD2P omaduse kirjelduse artiklist [BGLPRZ2].

Lause 2.2 ([BGLPRZ2, lause 2.8]). *Olgu X Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed:*
(i) ruumil X on DD2P omadus;
(ii) iga $x_1^*, \dots, x_n^* \in S_{X^*}$, $x \in X$, $x_i^*(x) \neq 0$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in B_X$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\frac{x_i^*(y)}{x_i^*(x)} \geq 0$$

ja

$$\|y - P_i y\| > 2 - \varepsilon,$$

kus

$$P_i = \frac{1}{x_i^*(x)} x_i^* \otimes x.$$

Tõestus. $(i) \Rightarrow (ii)$. Eeldame, et Banachi ruumil X on DD2P omadus. Olgu $x_1^*, \dots, x_n^* \in S_{X^*}$ ja $x \in S_X$ sellised, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $x_i^*(x) \neq 0$. Tähistame $P_i = \frac{1}{x_i^*(x)} x_i^* \otimes x$. Olgu $\varepsilon > 0$. Näitame, et leidub $y \in B_X$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $\|y - P_i y\| > 2 - 2\varepsilon$ ja $\frac{x_i^*(y)}{x_i^*(x)} \geq 0$.

Selleks vaatleme hulka

$$U = \{y \in B_X \colon \|x - P_i y\| < \varepsilon \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Paneme tähele, et U on ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk, sest tingimus $\|x - P_i y\| < \varepsilon$ on samaväärne tingimusega $|x_i^*(x - y)| < \varepsilon |x_i^*(x)|$. Ilmselt $x \in U$. Eelduse põhjal leidub $y \in U$ nii, et $\|x - y\| > 2 - \varepsilon$. Seega

$$\|y - P_i y\| \geq \|x - y\| - \|x - P_i y\| > (2 - \varepsilon) - \varepsilon = 2 - 2\varepsilon.$$

Tingimus $\|x - P_i y\| < \varepsilon$ on kirjutatav ka kujul $\left|1 - \frac{x_i^*(y)}{x_i^*(x)}\right| < \varepsilon$ ja võime eeldada, et $\varepsilon \leq 1$. Siis $\frac{x_i^*(y)}{x_i^*(x)} > 1 - \varepsilon \geq 0$ ning järelikult $\frac{x_i^*(y)}{x_i^*(x)} \geq 0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Eeldame, et kehtib (ii). Olgu U ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk, $x \in U \cap S_X$ ja $\varepsilon > 0$. Otsime sellist $y \in U$, et

$$\|x - y\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Kuna viilud moodustavad ühikkera suhtelise nõrga topoloogia eelbaasi, siis leiduvad B_X viilud $S_1, \ldots, S_n$ nii, et

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subset U.$$

Lemma 1.4 põhjal võime eeldada, et $S_i = S(x_i^*, \alpha_i)$ korral on $\alpha_i \leq \varepsilon$. Vaatleme ühemõõtmelisi projektoreid

$$P_i = \frac{1}{x_i^*(x)} x_i^* \otimes x, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Kuna $x_i^*(x) > 1 - \alpha_i$, siis leidub selline $\gamma > 0$, et $(1-\gamma)x_i^*(x) \geq 1 - \alpha_i$ iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral. Tingimuse (ii) põhjal leiame $y \in B_X$ nii, et iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\|y - P_i y\| > 2 - \gamma$$

ja

$$\frac{x_i^*(y)}{x_i^*(x)} \geq 0.$$

Seega

$$\frac{x_i^*(y)}{x_i^*(x)} = \|P_i y\| > 2 - \gamma - \|y\| \geq 1 - \gamma,$$

mistõttu $x_i^*(y) > (1-\gamma)x_i^*(x) \geq 1 - \alpha_i$. Järelikult $y \in U$, sest $y \in \bigcap_{i=1}^n S_i \subset U$. Paneme tähele, et suvalise $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\|P_i y - x\| = \left\| \frac{x_i^*(y)}{x_i^*(x)} x - x \right\| = \frac{|x_i^*(y) - x_i^*(x)|}{x_i^*(x)} < \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

järelikult

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\geq \|y - P_i y\| - \|P_i y - x\| \\ &> (2 - \delta) - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \geq (2 - \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}. \end{aligned}$$

Kuna $\varepsilon > 0$ on suvaline, siis ruumil X on DD2P omadus. $\square$

2.3 DSD2P omaduse seos projektoritega

Lause 2.3 ([BGLPRZ2, lause 3.6]). *Kui Banachi ruumil X on DSD2P omadus, siis iga lõplikumõõtmelise projektori $P \in \mathcal{L}(X, X)$ korral*

$$\|I - P\| \geq 1 + \frac{1}{n}\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\|,$$

kus $P = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes x_i$, $x_i \in S_X$, $x_i^* \in X^*$ ja $x_j^*(x_i) = \delta_{ij}$.

Tõestus. Eeldame, et ruumil X on DSD2P omadus ja olgu $P = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes x_i$, kus $x_i \in S_X$, $x_i^* \in X^*$ ja $x_j^*(x_i) = \delta_{ij}$. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Vaatleme hulki $U_1, \ldots, U_n$, kus

$$U_i = \left\{ y \in B_X \colon |x_j^*(x_i - y)| < \varepsilon \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Ilmselt on U_i suhteliselt nõrgalt lahtine ja $x_i \in U_i$. Kuna X on DSD2P omadusega, siis leiduvad $y_1 \in U_1, \ldots, y_n \in U_n$ nii, et

$$\frac{1}{n}\Big\| \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) \Big\| \geq \frac{1}{n}\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\| + 1 - \varepsilon.$$

Paneme tähele, et

$$x_i - Py_i = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x_i) x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j^*(y_i) x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j^*(x_i - y_i) x_j.$$

Seega

$$\|x_i - Py_i\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j^*(x_i - y_i)| < n\varepsilon.$$

Kokkuvõttes

$$\begin{aligned}
\|I - P\| &\geq \Big\| (I - P)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\Big) \Big\| \\
&= \Big\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Big(x_i - Py_i\Big) \Big\| \\
&\geq \frac{1}{n}\Big\| \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) \Big\| - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|x_i - Py_i\| \\
&> \frac{1}{n}\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\| + 1 - \varepsilon - n\varepsilon.
\end{aligned}$$

Järelikult

$$\|I - P\| \geq \frac{1}{n}\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\| + 1.$$

$\square$

3 Otsesumma diametraalne diameeter-2 omadus

Selles peatükis uurime diametraalsete diameeter-2 omaduste kandumist otsesumma ja selle komponentruumide vahel. Lähtekohaks on artiklites [IK] ja [BGLPRZ2] saadud päranduvustulemused. Vaatleme ainult kahe otseliidetavaga otsesummasid, millel on üldiselt absoluutne norm. Absoluutse normi mõistet tutvustame esimeses paragrahvis.

Artiklis [IK] näidati, et Banachi ruumidel $X_1, X_2, \dots$ on DLD2P omadus parajasti siis, kui nende 1-tingimatu summa on DLD2P omadusega. Teises paragrahvis esitame [IK] tulemuse erijuhul (kahe ruumi jaoks).

Artiklis [BGLPRZ2] vaadeldi DD2P ja DSD2P omaduste stabiilsust p-normiga otsesumma puhul. Sarnaselt DLD2P omadusega on DD2P omadus p-normiga otsesummal parajasti siis, kui komponentruumid on DD2P omadusega. Kolmandas paragrahvis üldistame selle tulemuse absoluutse normiga otsesummadele.

Neljandas paragrahvis uurime DSD2P omaduse stabiilsust. On teada, et $1 < p < \infty$ korral ei saa p-summa olla SD2P omadusega [L], seega ka mitte DSD2P omadusega. Artiklis [BGLPRZ2] on näidatud, et ∞-normiga otsesumma on DSD2P omadusega parajasti siis, kui komponentruumid on DSD2P omadusega. Me näitame lisaks, et ka 1-normiga otsesumma on DSD2P omadusega parajasti siis, kui komponentruumid on DSD2P omadusega. Sellega vastame artiklis [BGLPRZ2] esitatud küsimusele, kas DSD2P omadusega ruumide 1-summa on DSD2P omadusega.

3.1 Otsesumma absoluutne norm

Üldiselt vaatleme otsesummasid absoluutse normiga. Käesolevas paragrahvis anname absoluutse normi mõiste ja selle põhiomadused. Olgu X ja Y Banachi ruumid.

Definitsioon 3.1. Olgu N norm ruumil $\mathbb{R}^2$. Siis $\|(x,y)\|_N = N\big(\|x\|, \|y\|\big)$, kus $x \in X$ ja $y \in Y$, defineerib *absoluutse normi* otsesummal $X \oplus Y$. Kui $N(0,1) = N(1,0) = 1$, siis öeldakse, et norm $\|\cdot\|_N$ (või N) on *normaliseeritud.*

Otsesummat $X \oplus Y$ absoluutse normiga $\|\cdot\|_N$ tähistame $X \oplus_N Y$.

Näide 3.2. Iga p-norm

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}, & \text{kui } 1 \le p < \infty, \\ \max\{\|x\|, \|y\|\}, & \text{kui } p = \infty, \end{cases}$$

on absoluutne normaliseeritud norm otsesummal $X \oplus Y$. Otsesummat $X \oplus Y$ koos p-normiga tähistame $X \oplus_p Y$.

Näide 3.3. Olgu $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$. Otsesummal vaadeldav norm

$$\|(x,y)\| = \max\{\|(x,y)\|_\infty, \lambda\|(x,y)\|_1\}$$

on absoluutne normaliseeritud norm otsesummal $X \oplus Y$, kuid pole p-norm. Paneme tähele, et $\lambda = 1$ korral on vaadeldav norm võrdne 1-normiga ja $\lambda = \frac{1}{2}$ korral on see ∞-norm.

Lemma 3.4 ([H, lemma 3.1 ja lk. 317])**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid ja $\|\cdot\|_N$ absoluutne normaliseeritud norm otsesummal $X \oplus Y$.*

(a) *$X \oplus_N Y$ on Banachi ruum, kusjuures*

$$\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\|_N \le \|\cdot\|_1.$$

(b) *Kui $x_1, x_2 \in X$ ja $y_1, y_2 \in Y$ on sellised, et $\|x_1\| \le \|x_2\|$ ja $\|y_1\| \le \|y_2\|$, siis*

$$\|(x_1, y_1)\|_N \le \|(x_2, y_2)\|_N.$$

(c) *Leidub absoluutne normaliseeritud norm $\|\cdot\|_{N^*}$ ruumil $X^* \oplus Y^*$ nii, et $(X \oplus_N Y)^* = X^* \oplus_{N^*} Y^*$, kusjuures iga $(x^*, y^*) \in X^* \oplus_{N^*} Y^*$ korral*

$$\|(x^*, y^*)\|_{N^*} = \max_{N(|a|,|b|) \le 1} \Big(|a|\|x^*\| + |b|\|y^*\|\Big)$$

ja iga $(x, y) \in X \oplus_N Y$ korral

$$(x^*, y^*)(x, y) = x^*(x) + y^*(y).$$

3.2 Otsesumma DLD2P omadus

Ivakhno ja Kadets näitasid ([IK, teoreem 3.2]), et DLD2P omadus on stabiilne 1-tingimatute summade korral. Käesolevas magistritöös anname selle tulemuse tõestuse absoluutse normiga otsesumma korral.

Teoreem 3.5 ([IK, teoreem 3.2])**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid ja $\|\cdot\|_N$ absoluutne normaliseeritud norm otsesummal $X \oplus Y$. Ruumil $X \oplus_N Y$ on DLD2P omadus parajasti siis, kui komponentruumidel X ja Y on mõlemal DLD2P omadus.*

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et ruumil $Z = X \oplus_N Y$ on DLD2P omadus. Näitame, et siis ka ruumidel X ja Y on DLD2P omadus. Näitame, ainult et ruumil X on DLD2P omadus, ruumi Y jaoks on tõestus analoogiline. Oletame vastuväiteliselt, et ruumil X ei ole omadust DLD2P. Järelikult leiduvad ühikkera B_X viil $S(x^*, \alpha)$, $x \in S(x^*, \alpha) \cap S_X$ ja $\delta > 0$ nii, et iga $u \in S(x^*, \alpha)$ korral

$$\|x - u\| \leq 2 - \delta.$$

Lemma 1.4 põhjal võime eeldada, et $\alpha < \delta$. Tähistame $z^* = (x^*, 0)$ ja $z = (x, 0)$. Ilmselt $z^* \in S_{Z^*}$ ja $z \in S_Z$. Paneme tähele, et z kuulub ühikkera B_Z viilu $S(z^*, \alpha)$, sest $z^*(z) = x^*(x) > 1 - \alpha$. Eeldusega vastuoluni jõudmiseks näitame, et iga $w \in S(z^*, \alpha)$ korral $\|z - w\|_N \leq 2 - \delta + \alpha$. Suvalise $w = (u, v) \in S(z^*, \alpha)$ korral on u ühikkera B_X viilu $S(x^*, \alpha)$ element, sest $x^*(u) = z^*(w) > 1 - \alpha$. Järelikult $\|x - u\| \leq 2 - \delta$ ja $\|u\| > 1 - \alpha$. Seega

$$\begin{aligned}
\|z - w\|_N = \|(x, 0) - (u, v)\|_N &= N(\|x - u\|, \|v\|) \leq N(2 - \delta, \|v\|) \\
&= N\big((2 - \delta - \|u\|, 0) + (\|u\|, \|v\|)\big) \\
&\leq (2 - \delta - \|u\|) + 1 \\
&< \big(2 - \delta - (1 - \alpha)\big) + 1 = 2 - \delta + \alpha.
\end{aligned}$$

Jõudsime vastuoluni sellega, et ruumil Z on DLD2P omadus ja järelikult ruumil X on DLD2P omadus.

Piisavus. Eeldame, et X ja Y on DLD2P omadusega. Näitame, et $Z = X \oplus_N Y$ on DLD2P omadusega. Vaatleme ühikkera B_Z viilu $S(z^*, \alpha)$, $z \in S(z^*, \alpha) \cap S_X$ ja

$\varepsilon > 0$, kus $z^* = (x^*, y^*)$ ja $z = (x, y)$. Olgu

$$S_1 = \{u \in B_X : \|x\| x^*(u) > x^*(x) - \alpha_1\}$$

ja

$$S_2 = \{v \in B_Y : \|y\| y^*(v) > y^*(y) - \alpha_2\},$$

kus $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ on sellised, et $\alpha_1 + \alpha_2 \leq z^*(z) - (1 - \alpha)$.

Hulgad S_1 ja S_2 on viilud. Näiteks S_1 on ühikkera B_X viil, sest $x = 0$ või $x^* = 0$ korral on $S_1 = B_X$ ning $x \neq 0$ ja $x^* \neq 0$ korral on

$$S_1 = S\Big(\frac{x^*}{\|x^*\|}, 1 - \frac{x^*(x) - \alpha_1}{\|x^*\|\|x\|}\Big).$$

Olgu $u \in S_1$ ja $v \in S_2$ sellised, et

$$\big\|x - \|x\|u\big\| \geq (2 - \varepsilon)\|x\|$$

ja

$$\big\|y - \|y\|v\big\| \geq (2 - \varepsilon)\|y\|.$$

Põhjendame täpsemalt sellise u leidumise, v leidumist saab põhjendada analoogiliselt. Kui $x = 0$, siis sobib suvaline $u \in S_1$. Kui $x \neq 0$, siis $\frac{x}{\|x\|} \in S \cap S_X$ ja eelduse kohaselt leidub $u \in S_1$ nii, et $\|\frac{x}{\|x\|} - u\| \geq 2 - \varepsilon$ ehk $\big\|x - \|x\|u\big\| \geq (2 - \varepsilon)\|x\|$.

Paneme tähele, et $w = (\|x\|u, \|y\|v) \in S(z^*, \alpha)$, sest

$$\begin{aligned} z^*(w) &= \|x\|x^*(u) + \|y\|y^*(v) \\ &> x^*(x) + y^*(y) - (\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= z^*(z) - (\alpha_1 + \alpha_2) \\ &\geq 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Lisaks saame, et $\|z - w\|_N \geq 2 - \varepsilon$, sest

$$\begin{aligned} \|z - w\|_N &= \big\|(x, y) - (\|x\|u, \|y\|v)\big\|_N \\ &= N\big(\big\|x - \|x\|u\big\|, \big\|y - \|y\|v\big\|\big) \\ &\geq N\big((2 - \varepsilon)\|x\|, (2 - \varepsilon)\|y\|\big) \\ &= (2 - \varepsilon)N(\|x\|, \|y\|) \\ &= 2 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Järelikult ruumil Z on DLD2P omadus. $\square$

3.3 Otsesumma DD2P omadus

Artiklis [BGLPRZ2, teoreem 2.11 ja lause 2.12] on näidatud, et $1 \leq p \leq \infty$ korral on p-normiga otsesummal DD2P omadus parajasti siis, kui otsesumma komponentruumidel on DD2P omadus. Järgnevalt näitame, et see tulemus kehtib üldisemalt absoluutse normi korral.

Teoreem 3.6 (vrd [BGLPRZ2, teoreem 2.11, lause 2.12])**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid ja $\|\cdot\|_N$ absoluutne normaliseeritud norm otsesummal $X \oplus Y$. Ruumil $X \oplus_N Y$ on DD2P omadus parajasti siis, kui komponentruumidel X ja Y on DD2P omadus.*

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et ruumil $Z = X \oplus_N Y$ on DD2P omadus. Näitame, et siis on ka ruumidel X ja Y DD2P omadus. Näitame ainult, et ruumil X on DD2P omadus, ruumi Y jaoks on tõestus analoogiline. Olgu U ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk, $x \in U \cap S_X$ ja $\varepsilon \in (0,1)$. Olgu $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$. Siis $1 < \frac{2-\varepsilon}{1-\delta} < 2$. Vaatleme ühikkera B_Z suhteliselt nõrgalt lahtist alamhulka

$$W = \Big\{(u,v) \in B_Z \colon u \in U, \|u\| > 1-\delta\Big\}.$$

Ilmselt $(x,0) \in W \cap S_Z$. Eelduse kohaselt leidub $(u,v) \in W$ nii, et

$$\|(x,0)-(u,v)\|_N \geq \frac{2-\varepsilon}{1-\delta}.$$

Kuna

$$\begin{aligned}\|(x-u,v)\|_N &\leq \Big\|\Big(\frac{\|x-u\|}{1-\delta}u, v\Big)\Big\|_N \\ &\leq \max\Big\{\frac{\|x-u\|}{1-\delta}, 1\Big\}\|(u,v)\|_N \\ &\leq \max\Big\{\frac{\|x-u\|}{1-\delta}, 1\Big\},\end{aligned}$$

siis kokkuvõttes

$$\frac{2-\varepsilon}{1-\delta} \leq \max\Big\{\frac{\|x-u\|}{1-\delta}, 1\Big\}$$

ehk $\|x-u\| \geq 2-\varepsilon$. Järelikult ruumil X on DD2P omadus.

Piisavus. Eeldame, et ruumid X ja Y on DD2P omadusega. Näitame, et ruum

$Z = X \oplus_N Y$ on DD2P omadusega. Olgu W ühikkera B_Z suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk, $z = (x, y) \in W \cap S_Z$ ja $\varepsilon > 0$. Näitame, et leidub $w \in W$ nii, et

$$\|z - w\|_N \geq 2 - \varepsilon.$$

Piisab vaadelda juhtu, kus

$$W = \Big\{ w \in B_Z \colon |z_i^*(z - w)| < 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \Big\},$$

kus $n \in \mathbb{N}$, $z_i^* = (x_i^*, y_i^*) \in Z^*$. Vaatleme esialgu juhtu, kus $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. Hulgad

$$U = \Big\{ u \in B_X \colon \Big| x_i^* \Big(\frac{x}{\|x\|} - u \Big) \Big| < \frac{1}{2\|x\|} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \Big\}$$

ja

$$V = \Big\{ v \in B_Y \colon \Big| y_i^* \Big(\frac{y}{\|y\|} - v \Big) \Big| < \frac{1}{2\|y\|} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \Big\}$$

on ilmselt suhteliselt nõrgalt lahtised. Kuna $\frac{x}{\|x\|} \in U \cap S_X$ ja $\frac{y}{\|y\|} \in V \cap S_Y$, siis eelduse kohaselt leiduvad $u \in U$ ja $v \in V$ nii, et

$$\Big\| \frac{x}{\|x\|} - u \Big\| > 2 - \varepsilon$$

ja

$$\Big\| \frac{y}{\|y\|} - v \Big\| > 2 - \varepsilon.$$

Võtame $w = (\|x\|u, \|y\|v)$. Siis $w \in W$, sest

$$\begin{aligned}
\|w\|_N = \big\| (\|x\|u, \|y\|v) \big\|_N &= N(\|x\|\|u\|, \|y\|\|v\|) \\
&\leq N(\|x\|, \|y\|) \\
&= \|(x, y)\|_N = \|z\|_N = 1,
\end{aligned}$$

järelikult $w \in B_Z$, ja iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\begin{aligned}
|z_i^*(z - w)| &= \big| x_i^*(x - \|x\|u) + y_i^*(y - \|y\|v) \big| \\
&\leq \|x\| \Big| x_i^* \Big(\frac{x}{\|x\|} - u \Big) \Big| + \|y\| \Big| y_i^* \Big(\frac{y}{\|y\|} - v \Big) \Big| \\
&< \|x\| \frac{1}{2\|x\|} + \|y\| \frac{1}{2\|y\|} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
\|z-w\|_N &= \big\|(x-\|x\|u, y-\|y\|v)\big\|_N \\
&= N\big(\big\|x-\|x\|u\big\|, \big\|y-\|y\|v\big\|\big) \\
&= N\Big(\|x\|\Big\|\frac{x}{\|x\|}-u\Big\|, \|y\|\Big\|\frac{y}{\|y\|}-v\Big\|\Big) \\
&\geq N\big(\|x\|(2-\varepsilon), \|y\|(2-\varepsilon)\big) \\
&= (2-\varepsilon)N(\|x\|, \|y\|) = 2-\varepsilon.
\end{aligned}$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus $x=0$ või $y=0$. Olgu konkreetsuse mõttes $y=0$. Hulk

$$U = \big\{u \in B_X \colon |x_i^*(x-u)| < 1 \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}\big\}$$

on ilmselt suhteliselt nõrgalt lahtine. Kuna $x \in U \cap S_X$ ja ruumil X on eelduse põhjal DD2P omadus, siis leidub element $u \in U$ nii, et $\|x-u\| > 2-\varepsilon$. Võtame $w=(u,0)$. Siis $w \in W$, sest

$$\|w\|_N = \|(u,0)\|_N = N(\|u\|,0) = \|x\| \leq 1,$$

järelikult $w \in B_Z$, ja iga $i \in \{1,\dots,n\}$ korral

$$|z_i^*(z-w)| = |x_i^*(x-u)| < 1.$$

Paneme tähele, et

$$\|z-w\|_N = \|(x-u,0)\|_N = N(\|x-u\|,0) = \|x-u\| > 2-\varepsilon.$$

$\square$

3.4 Otsesumma DSD2P omadus

Becerra Guerrero, López-Pérez ja Rueda Zoca näitasid [BGLPRZ2, lause 3.7, teoreem 3.8], et DSD2P omadus on stabiilne ∞-summa korral ja $p = 1$ korral toimub üleminek summaruumilt komponentruumidele. Langemetsa magistritöö [L] põhjal on teada, et $1 < p < \infty$ korral ei ole p-summal DSD2P omadust. Paragrahvi lõpus näitame, et DSD2P omadus on stabiilne ka $p = 1$ korral.

Esmalt näitame, et DSD2P omadus pärandub p-normiga summaruumilt komponentruumidele $p = 1$ ja $p = \infty$ korral.

Lause 3.7 ([BGLPRZ2, lause 3.7])**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid. Kui $X \oplus_1 Y$ on DSD2P omadusega, siis X ja Y on DSD2P omadusega.*

Tõestus. Anname originaaltõestusest mõnevõrra erineva tõestuse, sest kasutame lemmat 1.6. Eeldame, et ruumil $Z = X \oplus_1 Y$ on DSD2P omadus. Näitame ainult, et ruumil X on DSD2P omadus, ruumi Y jaoks on tõestus analoogiline. Olgu $U_1, \ldots, U_n$ ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtised alamhulgad, $x_1 \in U_1 \cap S_X, \ldots, x_n \in U_n \cap S_X$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ sellised, et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Näitame, et leiduvad $u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n$ nii, et

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - u_i) \Big\| \geq \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \Big\| + 1 - 2\varepsilon.$$

Tähistame iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $\widetilde{U_i} = U_i \backslash (1-\varepsilon) B_X$. Paneme tähele, et $\widetilde{U_i}$ on ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk ja $x_i \in \widetilde{U_i}$. Eelduse kasutamiseks vaatleme ühikkera B_Z suhteliselt nõrgalt lahtisi alamhulki $W_1, \ldots, W_n$, kus $W_i = (\widetilde{U_i} \times B_Y) \cap B_Z$. Kuna $(x_i, 0) \in W_i \cap S_Z$, siis eelduse kohaselt leiduvad $(u_i, v_i) \in W_i$ nii, et

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - u_i, v_i) \Big\|_1 \geq \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \Big\| + 1 - \varepsilon.$$

Sel juhul $\|u_i\| > 1 - \varepsilon$, mistõttu $\|v_i\| < \varepsilon$, järelikult $\| \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \| < \varepsilon$. Kokkuvõttes

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - u_i) \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - u_i, v_i) \Big\|_1 - \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \Big\| \geq \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \Big\| + 1 - 2\varepsilon.$$

$\square$

Lause 3.8 ([BGLPRZ2, lause 3.7]). *Olgu X ja Y Banachi ruumid. Kui $X \oplus_\infty Y$ on DSD2P omadusega, siis X ja Y on DSD2P omadusega.*

Tõestus. Eeldame, et ruumil $Z = X \oplus_\infty Y$ on DSD2P omadus. Näitame ainult, et ruumil X on DSD2P omadus, ruumi Y jaoks on tõestus analoogiline. Olgu $U_1, \ldots, U_n$ ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtised alamhulgad, $x_1 \in U_1, \ldots, x_n \in U_n$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ sellised, et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Näitame, et leiduvad $u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n$ nii, et

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - u_i) \Big\| \geq \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \Big\| + 1 - \varepsilon.$$

Vaatleme esmalt juhtu, kus $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \neq 0$. Võime eeldada, et $\varepsilon \leq \| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \|$. Eelduse kasutamiseks vaatleme ühikkera B_Z suhteliselt nõrgalt lahtisi alamhulki $W_1, \ldots, W_n$, kus $W_i = U_i \times B_Y$. Kuna $(x_i, 0) \in W_i$, siis leiduvad $(u_i, v_i) \in W_i$ nii, et

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - u_i, v_i) \Big\|_\infty \geq \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \Big\| + 1 - \varepsilon.$$

Kuna $\big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \big\| \leq 1$, siis

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - u_i) \Big\| \geq \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \Big\| + 1 - \varepsilon.$$

Juhul $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$ on vaja leida $u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n$ nii, et $\big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \big\| \geq 1 - \varepsilon$. Vaatleme esmalt selliseid $\widetilde{x}_1 \in U_1, \ldots, \widetilde{x}_n \in U_n$, et $\sum_{i=1}^n \lambda_i \widetilde{x}_i \neq 0$. Võime eeldada, et $\varepsilon \leq \| \sum_{i=1}^n \lambda_i \widetilde{x}_i \|$. Leiame tõestuse esimese osa põhjal $u_i \in U_i$ nii, et

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (\widetilde{x}_i - u_i) \Big\| \geq \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \widetilde{x}_i \Big\| + 1 - \varepsilon.$$

Siis

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \Big\| \geq 1 - \varepsilon.$$

□

Kehtivad ka lausete 3.7 ja 3.8 pöördteoreemid.

Teoreem 3.9 ([BGLPRZ2, teoreem 3.8]). *Olgu X ja Y Banachi ruumid. Kui ruumidel X ja Y on DSD2P omadus, siis ka ruumil $X \oplus_\infty Y$ on DSD2P omadus.*

Tõestus. Järgnev tõestus erineb mõnevõrra originaaltõestusest. Eeldame, et ruumidel X ja Y on DSD2P omadus. Näitame, et ruumil $Z = X \oplus_\infty Y$ on DSD2P omadus. Olgu iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral W_i ühikkera B_Z suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk ja $z_i = (x_i, y_i) \in W_i \cap S_Z$. Kuna $W_i = \widetilde{W_i} \cap B_Z$, kus $\widetilde{W_i} \subset X$ on nõrgalt lahtine, siis leiduvad nõrgalt lahtised $\widetilde{U_i} \subset X$ ja $\widetilde{V_i} \subset Y$ nii, et $z_i \in \widetilde{U_i} \times \widetilde{V_i} \subset \widetilde{W_i}$, sest korrutisruumi nõrk topoloogia on tegurite nõrkade topoloogiate korrutistopoloogia. Seega

$$z_i \in \big(\widetilde{U_i} \times \widetilde{V_i}\big) \cap B_Z \subset \widetilde{W_i} \cap B_Z.$$

Olgu $\varepsilon > 0$ ja olgu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ sellised, et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Arvestades, et $B_Z = B_X \times B_Y$, siis järelikult

$$z_i \in (\widetilde{U_i} \cap B_X) \times (\widetilde{V_i} \cap B_Y).$$

Kuna $x_i \in \widetilde{U_i} \cap B_X$, siis eelduse põhjal leiduvad $u_i \in \widetilde{U_i} \cap B_X$ nii, et

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - u_i) \Big\| \geq \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \Big\| + 1 - \varepsilon.$$

Analoogiliselt leiduvad $v_i \in \widetilde{V_i} \cap B_Y$ nii, et

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (y_i - v_i) \Big\| \geq \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \Big\| + 1 - \varepsilon.$$

Seega $w_i = (u_i, v_i) \in W_i$ ja

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (z_i - w_i) \Big\|_\infty &= \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \Big((x_i, y_i) - (u_i, v_i) \Big) \Big\|_\infty \\ &= \max \Big\{ \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - u_i) \Big\|, \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i (y_i - v_i) \Big\| \Big\} \end{aligned}$$

$$\geq \max\Big\{\Big\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big\| + 1-\varepsilon, \Big\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\Big\| + 1-\varepsilon\Big\}$$
$$= \max\Big\{\Big\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big\|, \Big\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\Big\|\Big\} + 1-\varepsilon$$
$$= \Big\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i\Big\|_\infty + 1-\varepsilon.$$

Järelikult ruumil Z on DSD2P omadus. $\square$

Järgmine teoreem on vastus artiklis [BGLPRZ2] esitatud küsimusele, kas DSD2P omadusega Banachi ruumide 1-summa on DSD2P omadusega. See tulemus on saadud koostöös Märt Põldverega.

Teoreem 3.10 ([HPP, teoreem], vt ka [BGLPRZ2, küsimus 4, lk 33])**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid. Kui ruumidel X ja Y on DSD2P omadus, siis ka ruumil $X \oplus_1 Y$ on DSD2P omadus.*

Tõestus. Eeldame, et Banachi ruumidel X ja Y on DSD2P omadus. Näitame, et ruumil $Z = X \oplus_1 Y$ on DSD2P omadus. Olgu $W_1, \dots, W_n$ ühikkera B_Z suhteliselt nõrgalt lahtised alamhulgad, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0,1]$ sellised, et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $z = (x,y) \in \sum_{i=1}^n \lambda_i\big(W_i \cap S_Z\big)$ ja $\varepsilon > 0$. Näitame, et leidub $w = (u,v) \in \sum_{i=1}^n \lambda_i W_i$ nii, et
$$\|z-w\|_1 > \|z\| + 1 - \varepsilon$$
ehk
$$\|x-u\| + \|y-v\| > \|x\| + \|y\| + 1 - \varepsilon.$$
Iga $i \in \{1,\dots,n\}$ korral fikseerime $z_i = (x_i, y_i) \in W_i \cap S_Z$ nii, et $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i$ ja tähistame
$$\hat{x}_i = \begin{cases} \dfrac{x_i}{\|x_i\|}, & \text{kui} \quad x_i \neq 0,\\ 0, & \text{kui} \quad x_i = 0 \end{cases}$$
ja
$$\hat{y}_i = \begin{cases} \dfrac{y_i}{\|y_i\|}, & \text{kui} \quad y_i \neq 0,\\ 0, & \text{kui} \quad y_i = 0. \end{cases}$$

Näitame, et leiduvad vastavalt $\hat{x}_i$ ja $\hat{y}_i$ suhteliselt nõrgalt lahtised ümbrused $U_i \subset B_X$ ja $V_i \subset B_Y$ nii, et $\big(\|x_i\|U_i\big) \times \big(\|y_i\|V_i\big) \subset W_i$. Olgu $m \in \mathbb{N}$, $z_j^* = (x_j^*, y_j^*) \in S_{Z^*}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ ja $\delta > 0$ sellised, et

$$W_i \supset \big\{w \in B_Z \colon |z_j^*(z_i - w)| < \delta \quad \forall = \{1, \ldots, m\}\big\}.$$

Võime võtta

$$U_i = \big\{u \in B_X \colon |x_j^*(\hat{x}_i) - u| < \delta \quad \forall j = \{1, \ldots, m\}\big\}$$

ja

$$V_i = \big\{v \in B_Y \colon |y_j^*(\hat{y}_i) - v| < \delta \quad \forall j = \{1, \ldots, m\}\big\}.$$

Tõepoolest, $u \in U_i$ ja $v \in V_i$ korral $w_i = \big(\|x_i\|u, \|y_i\|v\big) \in W_i$, sest

$$\begin{aligned}
\big|z_j^*(z_i - w_i)\big| &= \big|x_j^*(x_i) + y_j^*(y_i) - x_j^*(\|x_i\|u) - y_j^*(\|y_i\|v)\big| \\
&= \big|x_j^*(x_i - \|x_i\|u) + y_j^*(y_i - \|y_i\|v)\big| \\
&\leq \|x_i\|\big|x_j^*(\hat{x}_i - u)\big| + \|y_i\|\big|y_j^*(\hat{y}_i - v)\big| \\
&< \big(\|x_i\| + \|y_i\|\big)\delta \\
&= \|z_i\|\delta = \delta.
\end{aligned}$$

Tähistame $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|x_i\|$ ja $\beta = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|y_i\|$. Vaatleme esiteks juhtu, kus $\alpha \neq 0$ ja $\beta \neq 0$. Iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral tähistame

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i \|x_i\|}{\alpha}, \quad \beta_i = \frac{\lambda_i \|y_i\|}{\beta}.$$

On selge, et $\alpha_i, \beta_i \in [0, 1]$ ja $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i = 1$. Paneme tähele, et

$$\frac{x}{\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i x_i}{\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i \|x_i\|}{\alpha} \hat{x}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{x}_i \in \sum_{i=1}^n \alpha_i U_i$$

ja

$$\frac{y}{\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i y_i}{\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i \|y_i\|}{\beta} \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \hat{y}_i \in \sum_{i=1}^n \beta_i V_i.$$

Eelduse põhjal saame, et leiduvad $u_0 \in \sum_{i=1}^n \alpha_i U_i$ ja $v_0 \in \sum_{i=1}^n \beta_i V_i$ nii, et

$$\Big\|\frac{x}{\alpha} - u_0\Big\| > \frac{1}{\alpha}\|x\| + 1 - \varepsilon$$

ja

$$\left\|\frac{y}{\beta} - v_0\right\| > \frac{1}{\beta}\|y\| + 1 - \varepsilon.$$

Tähistame $u = \alpha u_0$ ja $v = \beta v_0$. Ühelt poolt

$$u = \alpha u_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha\alpha_i U_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|x_i\| U_i$$

ja

$$v = \beta v_0 \in \sum_{i=1}^{n} \beta\beta_i V_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|y_i\| V_i,$$

seega $(u, v) \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_i W_i$, teiselt poolt

$$\begin{aligned}\|x - u\| + \|y - v\| &> \|x\| + \alpha(1-\varepsilon) + \|y\| + \beta(1-\varepsilon)\\ &= \|x\| + \|y\| + (\alpha+\beta)(1-\varepsilon)\\ &= \|x\| + \|y\| + 1 - \varepsilon.\end{aligned}$$

Seega oleme näidanud, et vaadeldaval juhul leidub sobiv element $w = (u, v)$.

Vaatleme nüüd juhtu, kus $\alpha = 0$ või $\beta = 0$. Konkreetsuse mõttes olgu $\beta = 0$ ja seega $\alpha = 1$. Järelikult iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $x_i \in U_i \cap S_X$ ja $y_i = 0$, mistõttu $y = 0$. Eeldasime, et X on DSD2P omadusega, seega leidub $u \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i$ nii, et

$$\|x - u\| > \|x\| + 1 - \varepsilon.$$

Võtame $w = (u, 0)$. Siis $w \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i \times \{0\} \subset \sum_{i=1}^{n} \lambda_i W_i$ ja

$$\|z - w\|_1 = \|x - u\| + 0 > \|x\| + 1 - \varepsilon = \|z\| + 1 - \varepsilon.$$

$\square$

4 DD2P ja DSD2P omaduste pärandumine alamruumile

Neljandas peatükis keskendume diametraalsete diameeter-2 omaduste pärandumisele alamruumile. Põhitulemustena esitame kaks teoreemi, mis näitavad, et nii DD2P kui ka DSD2P omadus päranduvad Banachi ruumilt X tema kinnisele alamruumile Y, kui faktorruum X/Y on lõplikumõõtmeline. Ei ole teada, kas DLD2P omadus pärandub samamoodi Banachi ruumilt X tema kinnisele alamruumile Y, kui X/Y on lõplikumõõtmeline.

Teoreem 4.1 ([BGLPRZ2, teoreem 2.13])**.** *Olgu X Banachi ruum ja Y tema kinnine alamruum. Kui X on DD2P omadusega ja X/Y on lõplikumõõtmeline, siis Y on DD2P omadusega.*

Tõestus. Anname teoreemile 4.1 originaaltõestusest mõnevõrra lihtsama tõestuse. Eeldame, et ruumil X on DD2P omadus ja X/Y on lõplikumõõtmeline. Olgu V ühikkera B_Y suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk, $y \in V \cap S_Y$ ja $\varepsilon > 0$. Näitame, et leidub $z \in V$ nii, et $\|y - z\| > 2 - \varepsilon$.

Piisab vaadelda juhtu $\varepsilon \leq 2$ ja

$$V = \big\{v \in B_Y \colon |y_i^*(y - v)| < \varepsilon \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\big\},$$

kus $n \in \mathbb{N}$ ja $y_i^* \in S_{Y^*}$. Hahn–Banachi teoreemi põhjal leiduvad $x_1^*, \dots, x_n^* \in S_{X^*}$ nii, et $x_i^*|_Y = y_i^*$. Vaatleme nõrgalt lahtist hulka

$$U = \big\{u \in X \colon |x_i^*(y - u)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\big\}.$$

Olgu $q \colon X \to X/Y$ loomulik faktorkujutus. Kuna q on lahtine kujutus, siis $q(U)$ on ruumi X/Y lahtine alamhulk. Ilmselt $0 = q(y) \in q(U)$. Olgu $r > 0$ selline, et $r < \frac{\varepsilon}{4}$ ja $B_{X/Y}(0, r) \subset q(U)$. Ruumi X alamhulk $q^{-1}\big(B_{X/Y}(0, r)\big)$ on nõrgalt lahtine, sest $\|\cdot\|$-$\|\cdot\|$-pideva kujutusena on q ka w-w-pidev ja ruumi X/Y lõplikumõõtmelisuse tõttu on $B_{X/Y}(0, r)$ nõrgalt lahtine. Vaatleme ruumi X alamhulka

$$W = q^{-1}\big(B_{X/Y}(0, r)\big) \cap U \cap B_X.$$

Ilmselt on W suhteliselt nõrgalt lahtine ja $y \in W$. Kuna ruum X on DD2P omadusega, siis leidub $w \in W$ nii, et

$$\|y - w\| > 2 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Seega $\|w\| > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$. Kuna $\|q(w)\| < r$ ehk $\inf_{v \in Y} \|w - v\| < r$, siis leidub $v \in Y$ nii, et $\|w - v\| < r$. Järelikult

$$\|w\| - r < \|v\| < \|w\| + r.$$

Selle ja varasemate tingimuste $1 - \frac{\varepsilon}{4} < \|w\| \leq 1$ ja $r < \frac{\varepsilon}{4}$ põhjal saame, et

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) - \frac{\varepsilon}{4} < \|v\| < 1 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Võtame $z = \frac{v}{\|v\|}$. Siis $z \in V$, sest iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\begin{aligned}
|y_i^*(y - z)| &= |x_i^*(y - z)| \\
&\leq |x_i^*(y - w)| + |x_i^*(z - w)| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \|z - w\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + \|z - v\| + \|v - w\| \\
&= \frac{\varepsilon}{4} + \big|1 - \|v\|\big| + \|v - w\| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right) + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Lisaks sellele saame, et

$$\begin{aligned}
\|y - z\| &= \|y - w + w - v + v - z\| \\
&\geq \|y - w\| - \|w - v\| - \|v - z\| \\
&> \left(2 - \frac{\varepsilon}{4}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right) - \frac{\varepsilon}{4} = 2 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

Nüüd anname eelmise tulemuse eeskujul DSD2P omaduse alamruumile pärandumise tingimuse. Artiklis [BGLPRZ2] on DSD2P omaduse alamruumile pärandumine sõnastatud nõrgemal eeldusel kui teoreemis 4.2, kuid [BGLPRZ2, teoreem 3.9] tõestus ei ole detailides korrektne ning vajab veel täiendavat analüüsi.

Teoreem 4.2 (vrd [BGLPRZ2, teoreem 3.9]). *Olgu X Banachi ruum ja Y tema kinnine alamruum. Kui X on DSD2P omadusega ja X/Y on lõplikumõõtmeline, siis Y on DSD2P omadusega.*

Tõestus. Olgu $V_1, \dots, V_n$ ühikkera B_Y suhteliselt nõrgalt lahtised alamhulgad, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ sellised, et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, ja $y \in \sum_{i=1}^n \lambda_i \big(V_i \cap S_Y\big)$. Olgu $\varepsilon > 0$. Näitame, et leidub $z \in \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i$ nii, et

$$\|y - z\| > \|y\| + 1 - \varepsilon.$$

Iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral fikseerime $y_i \in V_i$ nii, et $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$. Piisab vaadelda juhtu

$$V_i = \big\{v \in B_Y \colon |y_{ij}^*(y_i - v)| < \varepsilon \quad \forall j \in \{1, \dots, n_i\}\big\},$$

kus $n_i \in \mathbb{N}$ ja $y_{ij}^* \in S_{Y^*}$. Hahn–Banachi teoreemi põhjal leidub igal funktsionaalil y_{ij}^* jätk $x_{ij}^* \in S_{X^*}$. Vaatleme iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral nõrgalt lahtist hulka

$$U_i = \Big\{u \in X \colon \|u\| \geq 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \quad |x_{ij}^*(y_i - u)| < \varepsilon \quad \forall j \in \{1, \dots, n_i\}\Big\}.$$

Olgu $q \colon X \to X/Y$ loomulik faktorkujutus. Kuna q on lahtine kujutus, siis iga $q(U_i)$ on ruumi X/Y lahtine alamhulk. Ilmselt $0 = q(y_i) \in q(U_i)$. Olgu $r > 0$ selline, et $r < \frac{\varepsilon}{4}$ ja iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $B_{X/Y}(0, r) \subset q(U_i)$. Ruumi X alamhulk $q^{-1}\big(B_{X/Y}(0, r)\big)$ on nõrgalt lahtine, sest $\|\cdot\|$-$\|\cdot\|$-pideva kujutusena on q ka w-w-pidev ja ruumi X/Y lõplikumõõtmelisuse tõttu on $B_{X/Y}(0, r)$ nõrgalt lahtine. Vaatleme iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral ruumi X alamhulka

$$W_i = q^{-1}\big(B_{X/Y}(0, r)\big) \cap U_i \cap B_X.$$

Ilmselt on W_i suhteliselt nõrgalt lahtine ja $y_i \in W_i$. Kuna ruum X on DSD2P omadusega, siis leidub $w \in \sum_{i=i}^n \lambda_i W_i$ nii, et

$$\|y - w\| > \|y\| + 1 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Olgu $w_1 \in W_1, \dots, w_n \in W_n$ sellised, et $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$. Seega $w_i \in U_i$, mistõttu $\|w_i\| > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$. Kuna $\|q(w_i)\| < r$ ehk $\inf_{v \in Y} \|w_i - v\| < r$, siis leidub $v_i \in Y$ nii, et $\|w_i - v_i\| < r$. Järelikult

$$\|w_i\| - r < \|v_i\| < \|w_i\| + r.$$

Selle ja varasemate tingimuste $1 - \frac{\varepsilon}{4} < \|w_i\| \leq 1$ ja $r < \frac{\varepsilon}{4}$ põhjal saame, et

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) - \frac{\varepsilon}{4} < \|v_i\| < 1 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Võtame $z_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$. Siis $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i$, sest iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ ja iga $j \in \{1, \ldots, n_i\}$ korral

$$\begin{aligned}
|y_{ij}^*(y_i - z_i)| &= |x_{ij}^*(y_i - z_i)| \\
&\leq |x_{ij}^*(y_i - w_i)| + |x_{ij}^*(z_i - w_i)| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \|z_i - w_i\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + \|z_i - v_i\| + \|v_i - w_i\| \\
&= \frac{\varepsilon}{4} + \big|1 - \|v_i\|\big| + \|v_i - w_i\| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right) + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Lisaks sellele saame, et

$$\begin{aligned}
\|y - z\| &= \|y - w + w - v + v - z\| \\
&\geq \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (y_i - w_i) \Big\| - \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (w_i - v_i) \Big\| - \Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i - z_i) \Big\| \\
&> \left(\|y\| + 1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right) - \frac{\varepsilon}{4} = \|y\| + 1 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

Kirjandus

[AHNTT] T. Abrahamsen, P. Hájek, O. Nygaard, J. Talponen ja S. Troyanski, *Diameter 2 properties and convexity*, Studia Math. **232** (2016), 227–242.

[ALN] T. Abrahamsen, V. Lima ja O. Nygaard, *Remarks on diameter 2 properties*, J. Convex Anal. **20** (2013), 439–452.

[AA] Y. A. Abramovich ja C. D. Aliprantis, *An invitation to operator theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 50, Amer. Math. Soc., Providence, 2002.

[BGLPRZ1] Becerra Guerrero, G. López-Pérez ja A. Rueda Zoca, *Big slices versus big relatively weakly open subsets in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **428** (2015), 855–865.

[BGLPRZ2] ———, *Diametral diameter two properties*, `arXiv:1509.02061v4 [math.FA]`.

[H] J.-D. Hardtke, *Absolute sums of Banach spaces and some geometric properties related to rotundity and smoothness*, Banach J. Math. Anal. **8** (2014), 295–334.

[HPP] R. Haller, K. Pirk ja M. Põldvere, *Diametral strong diameter two property of Banach spaces is stable under direct sums with 1-norm*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. **20** (2016), ilmumas.

[IK] Y. Ivakhno ja V. Kadets, *Unconditional sums of spaces with bad projections*, Visn. Khark. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mekh. **645** (2004), 30–35.

[KSSW] V. Kadets, R. V. Shvidkoy, G. Sirotkin ja D. Werner, *Banach spaces with the Daugavet property*, Trans. Am. Math. Soc. **352** (2000), 855–873.

[L] J. Langemets, *Diameter 2 properties*, magistritöö, Tartu Ülikool, 2012.

[M] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer-Verlag, New York, 1998.

[S] R. V. Shvidkoy, *Geometric aspects of the Daugavet property*, J. Funct. Anal. **176** (2000), 198–212.

[W] D. Werner, *Recent progress on the Daugavet property*, Irish Math. Soc. Bull. **46** (2001), 77–97.