

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Carmen Taimre

Aksiahindade modelleerimine lineaarsete segamudelite abil

Matemaatilise statistika eriala

Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja: Märt Möls, PhD

TARTU

2017

Aktsiahindade modelleerimine lineaarsete segamudelite abil

Lühikokkuvõte. Käesoleva magistritöö eesmärk on selgitada lineaarsete segamudelite olemust ning rakendades segamudelite teooriat aktsiahindadele, leida nende kovariatsioonimaatriksile parim mudel. Esimeses peatükis selgitatakse segamudelite mõistet ning tuuakse näiteid erinevatest kovariatsioonistruktuuridest. Seejärel kirjeldatakse, kuidas mudeli tundmatuid parameetreid hinnata. Peatüki lõpus tuletatakse uute väärtuste prognoosimiseks parima lineaarse nihketa prognoosi kuju ja prognoosiintervall. Teises peatükis vaadeldakse erinevaid aktsiahindade kovariatsioonistruktuure ning selgitatakse välja parim mudel. Selle abil prognoositakse tuleviku aktsiahindu.

CERCS teaduseriala: P160 Statistika, operatsioonianalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika

Märksõnad: lineaarsed mudelid, longituudanalüüs, aktsiakursid, modelleerimine (teadus), parameetrid, prognoosid, R (programmeerimiskeel)

Modelling stock prices with linear mixed models

Abstract. The aim of this thesis is to explain the concept of linear mixed models and to apply this on stock prices data with the intention of finding the best model for variance-covariance matrix. The first chapter introduces the theory of mixed models and gives examples of different variance-covariance structures. After that, parameter estimation in mixed models is described. In the end of the chapter, the best linear unbiased prediction and prediction interval are derived. In the second chapter different variance-covariance structures of stock prices are investigated and finally, the best model is chosen. Using this, future stock prices are predicted.

CERCS research specialisation: P160 Statistics, operations research, programming, actuarial mathematics

Keywords: linear models, longitudinal analysis, stock prices, modelling (science), parameters, predictions, R (programming language)

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Segamudelid	5
1.1 Segamudelite mõiste	5
1.2 Longituudandmed.....	7
1.3 Parameetrite hindamine.....	8
1.3.1 Parameetrite hindamine, kui keskvärtus sõltub dispersioonist	11
1.4 Juhusliku suuruse prognoosimine	12
1.4.1 Prognoosiintervall	15
2 Aktsiahindade modelleerimine	17
2.1 Kovariatsioonistruktuurid.....	18
2.1.1 Keskvärtuse modelleerimine	18
2.1.2 Dispersiooni modelleerimine	21
2.2 Hinna sõltumine hajuvusest	26
2.3 Aktsiahindade prognoosimine.....	27
Kokkuvõte	31
Kasutatud kirjandus	33
Lisad	34

Sissejuhatus

Aktsiahinda kujundavad erinevad faktorid. Lisaks ettevõtte väärtusele, mis määrab aktsia õiglase hinna, mängivad olulist rolli näiteks ka ettevõtte sektor või tegevusharu, konkureerivate varaklasside käekäik, lühiajalised trendid, turu meeleolu jm. Viimane on psühholoogiline faktor ning sõltub investorite emotsioonidest. Seda võivad mõjutada näiteks majandustulemused, ettevõtte või sekori kohta käivad uudised, maailmasündmused ja hooaeg. Erinevaid tegureid arvesse võttes saab aktsiahindu modelleerida.

Käesolevas magistritöös uuritakse segamudelite abil ettevõtete Approach Resources, Inc. ja Delta Natural Gas Company, Inc. aktsiahindu. Kuigi segamudelite teooria pärineb juba 20. sajandi esimesest poolest, on need suuremal hulgal populaarsust kogunud alles viimaste aastakümnetega (West, Welch, & T., 2007, lk 5; Jiang, 2007, lk VII). Üks peamisi eeliseid segamudelite puhul on see, et ei eeldata vaatluste sõltumatust ning uuritava tunnuse dispersioon võib süstemaatiliselt ajas muutuda. Seetõttu sobib segamudeleid kasutada ka aktsiahindade modelleerimiseks.

Töö koosneb kahest peatükist, millest esimeses tutvustatakse segamudelite mõistet. Tuuakse näiteid kovariatsioonistruktuuridest erinevate uurimisküsimuste korral ning selgitatakse fikseeritud ja juhusliku faktori olemust. Kirjeldatakse ka, kuidas mudelis sisalduvaid keskvärtuse ja kovariatsioonimaatriksi parameetreid hinnata. Peatüki lõpus tuletatakse uute väärtuste prognoosimiseks parima lineaarse nihketa prognoosi kuju ning leitakse vastav prognoosiviga.

Teises peatükis võetakse vaatluse alla eelnimetatud ettevõtete aktsiahinnad, mille jaoks pannakse kirja erinevad kovariatsioonistruktuurid ja ka keskvärtuse mudel. Seejärel hinnatakse tundmatud parameetrid ning uuritakse, millised mudelid sobivad andmetega kõige paremini. Lisaks selgitatakse välja, kas antud ettevõtete puhul kehtib majandusteadlaste väide, mille kohaselt aktsiahind sõltub volatiilsusest. Viimaks prognoositakse parima mudeli abil tuleviku aktsiahindu.

Töö on kirjutatud tekstitöötlusprogrammiga Microsoft Office Word 2016 ning analüüs on läbi viidud rakendustarkvaras R (versioon 3.3.2).

Autor tänab juhendajat Märt Mölsi arvukate konsultatsioonide ja heade soovitude eest.

1 Segamudelid

1.1 Segamudelite mõiste

Lineaarne segamudel on lineaarse mudeli edasiarendus, kus kaotatakse jääkide sõltumatus ja konstantse hajuvuse nõue. Segamudelid on levinud näiteks meditsiinis, bioloogias, füüsikas ja sotsiaalteadustes ning neid kasutatakse enamasti kas rühmitatud andmete, longituudandmete või korduvmõõtmiste puhul. (West, Welch, & T., 2007, lk 1)

Nimetus segamudel tuleneb sellest, et mudelis sisalduvad faktortunnused võivad olla nii juhuslikud kui ka fikseeritud. Otsus, kas käsitleda faktorit juhusliku või fikseerituna, võib sõltuda huvipakkuvast küsimusest (Robinson, 1991, lk 29). Kirjanduses levivad eelkõige aga järgmised kaks definitsiooni. Fikseeritud faktoriga on tegemist siis, kui huvitatud ollakse just nendest konkreetsetest faktori tasemetest, mis andmestikus sisalduvad, kõikvõimalike tasemete hulgast. Juhusliku faktori puhul on vaatluse all mingist jaotusest pärit juhuslikud faktori tasemed ning uurija soov on järeldusi teha ka andmetes mitte sisalduvate faktori tasemete kohta. (West, Welch, & T., 2007, lk 12)

Segamudel on kujul $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}$, kus \mathbf{y} on vaatlusvektor, \mathbf{X} on fikseeritud efektide disainimaatriks, $\boldsymbol{\beta}$ on fikseeritud parameetreid sisaldav vektor, \mathbf{Z} on juhuslike efektide disainimaatriks, $\boldsymbol{\gamma}$ on juhuslikke parameetreid sisaldav vektor ja $\boldsymbol{\varepsilon}$ on juhuslikud vead. Eeldatakse, et $E\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, $E\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, $E\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{G} := D\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{R} := D\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{V} := D(\mathbf{y}) = \mathbf{Z}\mathbf{G}\mathbf{Z}' + \mathbf{R}$ ning et vektorid $\boldsymbol{\gamma}$ ja $\boldsymbol{\varepsilon}$ on sõltumatud. (Jiang, 2007, lk 2)

Fikseeritud efektid on seega vajalikud \mathbf{y} -i keskväärtuse modelleerimiseks ning juhuslikud efektid kovariatsioonimaatriksi modelleerimiseks. Üks oluline põhjus, miks käsitleda faktorit juhuslikuna, on lihtsustada muidu keerukat kovariatsioonimaatriksi elementide leidmise ülesannet. Kui juhuslikke faktoreid mitte kasutada, siis tuleks \mathbf{y} -i kovariatsioonimaatriksi kõik $N(N + 1)/2$ elementi kindlaks määrata. Juhuslikke faktoreid kasutades saab aga tegeleda vaid mõne tundmatu dispersiooni ja kovariatsiooni parameetriga. (McCulloch & Searle, 2001, lk 156)

Näide 1.1. Juhuslik ja fikseeritud faktor (McCulloch & Searle, 2001, lk 6, 8)

Vaatame esialgu lihtsat näidet, kus uuritakse epilepsia ravimit. Vaatluse all on kümme patsienti, igapähele määratakse üks kolmest võimalikust ravimi doosist. Uuritav tunnus \mathbf{y}_{ij} on

i . patsiendil j . doosi korral esinenud haigushoogude arv pärast ravimi saamist. Selle võib kirja panna segamudelina $y_{ij} = \mu + v_i + \tau_j + \varepsilon_{ij}$, kus $i = 1, \dots, 10$ ning $j = 1, \dots, 3$. Mudelis esinev liige μ on üldkeskmise, v_i on i . patsiendi omapära, τ_j on j . doosi omapära ning ε_{ij} on juhuslik viga. Faktor v on juhuslik, sest patsiendid valiti uuringusse juhuslikult ning huvitatud ei olda tulemustest just nende konkreetsete inimeste korral, vaid soovitakse teha üldistusi suurema populatsiooni kohta. Faktor τ seevastu on fikseeritud, sest huvi pakuvadki need kolm doosi ning järeldusi ei soovita teha teiste võimalike dooside kohta.

Näide 1.2. Rühmitatud andmed

Soov on analüüsida õpilaste matemaatika ja eesti keele eksami tulemusi. Valitakse juhuslikult kolm kooli ja igast koolist kaks abiturienti, kelle eksamitulemused valimisse võetakse. Kooli i õpilase j õppeaine k eksamitulemus y_{ijk} on kirja pandav segamudelina $y_{ijk} = \mu_k + v_i + \tau_{ij} + \varepsilon_{ijk}$, kus $i = 1, \dots, 3; j = 1, \dots, 2$ ning $k = 1, 2$. Mudelis toodud μ_k on k . õppeaine keskmine eksamitulemus üle erinevate koolide, v_i on i . kooli omapära, τ_{ij} on i . kooli j . õpilase omapära ning ε_{ijk} on i . kooli j . õpilase k . õppeaine eksamitulemuse kõrvalekalle keskmisest. Õppeainet võib mudelis käsitleda fikseeritud faktorina, sest huvi tuntaksegi just matemaatika ja eesti keele vastu. Koolid ja õpilased valiti aga juhuslikult ning tulemusi soovitakse üldistada suuremale populatsioonile – tegemist on seega juhuslike faktoritega. Maatrikskujul näeb mudel välja järgmine:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ \vdots \\ y_{322} \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_{mat} \\ \mu_{eesti} \end{pmatrix}}_{\mathbf{\beta}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \vdots \\ \tau_{32} \end{pmatrix}}_{\mathbf{\gamma}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \vdots \\ \varepsilon_{322} \end{pmatrix}}_{\mathbf{\varepsilon}}$$

Selge on see, et ühe kooli mõju ei ole korreleeritud teise kooli õpilaste mõjudega. Samuti on kovariatsioonid kooli mõju ja sellesama kooli õpilaste mõjude vahel nullid, sest õpilased on valitud juhuslikult ning see, kui palju õpilase eksamitulemus kooli keskmisest tasemest erineb, ei sõltu koolist. Lisaks eeldame, et kovariatsioonid koolide mõjude vahel on nullid, sest ka koolid on juhuslikult valitud, ning samuti on ühe kooli õpilaste ja erinevate koolide õpilaste vahelised kovariatsioonid nullid.

Kui kooli mõjudel on ühtlane hajuvus σ_v^2 ja õpilaste mõjudel on ühtlane hajuvus σ_τ^2 , siis on kovariatsioonimaatriks $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} D(\mathbf{v}) & cov(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) \\ cov(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) & D(\boldsymbol{\tau}) \end{pmatrix}$ kujul

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \sigma_v^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_v^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_\tau^2 \end{pmatrix}.$$

Kui matemaatika ja eesti keele eksami tulemuste jäägid on sõltumatud, siis $\mathbf{R} = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}$.

1.2 Longituudandmed

Segamudeleid kasutatakse tihti longituudandmete korral. Longituudandmetega on tegemist, kui uuritavat tunnust on vaatlusalusel objektil ajas korduvalt mõõdetud. Need mõõtmised on tavaliselt korreleeritud ning seda tuleb analüüsis arvesse võtta. (McCulloch & Searle, 2001, lk 14, 187) Näiteks on korreleeritud ühe lehma päevased piimatoodangud, inimesel nädalaste vahedega mõõdetud kaalud, ühe firma aktsiahinnad jms.

Otsus faktori juhuslikkuse või fikseerituse kohta tehakse longituuduuringus tavaliselt selle põhjal, kas faktori mõjud on vaatlusalustel objektidel varieeruvad või konstantsed. Vaatlusalused objektid ise on juhuslik valim suuremast populatsioonist ja iga efekt, mis pole objektidel konstantne, loetakse juhuslikuks. (McCulloch & Searle, 2001, lk 15)

Näide 1.3. Kovariatsioonistruktuur korreleeritud andmete korral

Olgu meil vaatluse all ühe inimese 10 järjestikust süstoolse vererõhu mõõtmistulemust, kusjuures mõõtmised on tehtud päevaste vahedega. Uuritava tunnuse võib kirja panna mudelina $\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i$, kus $\boldsymbol{\mu}$ on indiviidi keskmine vererõhk, \mathbf{v}_i on i . mõõtmise erinevus keskmisest ehk mõõtmise omapära ning $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ on juhuslik kõrvalekalle, mis võib olla tingitud näiteks aparadi mõõtmisveast, mõõtmisele eelnevast tegevusest vms. Maatrikskujul näeks mudel välja järgmine:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{10} \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} \cdot \underbrace{\mu}_{\boldsymbol{\beta}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{10} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\gamma}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{10} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Kuna mõõtmised on tehtud 10 järjestikusel päeval, siis võib eeldada, et mõõtmiste omapärad v_i on omavahel korreleeritud. Eeldame, et tegemist on esimest järku autoregressiivse mudeliga ehk $v_i = \rho v_{i-1} + e_i$, kus suurused e_i on omavahel sõltumatud ning $-1 \leq \rho \leq 1$. Seega on mõõtmiste omapärade kovariatsioonimaatriks $\mathbf{G} = D\boldsymbol{\gamma}$ kujul

$$\mathbf{G} = \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \vdots & \rho^9 \\ \rho & 1 & \rho & \vdots & \rho^8 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \vdots & \rho^7 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \rho^9 & \rho^8 & \rho^7 & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Eeldame, et erinevate mõõtmiste juhuslikud vead ε_i on sõltumatud, mistõttu on kovariatsioonimaatriks $\mathbf{R} = D\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \mathbf{I}$. Mõõtmistulemuste \mathbf{y} kovariatsioonimaatriks $\mathbf{V} = \mathbf{ZGZ}' + \mathbf{R}$ on seega

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 + \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 & \rho\sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \rho^2\sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \vdots & \rho^9\sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 \\ \rho\sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 + \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 & \rho\sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \vdots & \rho^8\sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 \\ \rho^2\sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \rho\sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 + \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 & \vdots & \rho^7\sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \rho^9\sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \rho^8\sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \rho^7\sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \vdots & \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 + \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

1.3 Parameetrite hindamine

Fikseeritud parameetrite $\boldsymbol{\beta}$ ja kovariatsioonimaatriksi parameetrite $\boldsymbol{\theta}$ hindamiseks kasutatakse tihti suurima tõepära meetodit. Rakendades meetodit vaatlusvektorile $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}; \mathbf{V} = \mathbf{ZGZ}' + \mathbf{R})$, otsime samaaegselt hinnanguid nii $\boldsymbol{\beta}$ -le kui ka \mathbf{V} -le. (McCulloch & Searle, 2001, lk 174)

Mitmemõõtmelise normaaljaotuse tihedusfunktsioon on kujul $f(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{V}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\right\}$, kus n on vaatluste arv. Log-tõepära on kujul $l(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}) = c - \frac{1}{2}\log(|\mathbf{V}|) - \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$, kus c on konstant, mis ei sõltu $\boldsymbol{\beta}$ -st ja $\boldsymbol{\theta}$ -st. (Jiang, 2007, lk 10)

Võttes log-tõepärasust tuletised tundmatute parameetrite järgi, saame (vaata lisa 1)

$$\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}} = -(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{V}^{-1}(-\mathbf{X}) = \mathbf{y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X} - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_r} = -\frac{1}{2} \text{tr} \left(\mathbf{V}^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta_r} \right) + \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{V}^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta_r} \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}), \quad (3)$$

kus $r = 1, \dots, q$ ning θ_r on r . element q -mõõtmelises tundmatute parameetrite vektoris $\boldsymbol{\theta}$.

Võrdsustades (2) nulliga, saame $\boldsymbol{\beta}$ suurima tõepära hinnanguks

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{y}, \quad (4)$$

kus $\hat{\mathbf{V}}$ on kovariatsioonimaatriksi suurima tõepära hinnang. Viimase leidmiseks tuleb aga (3) nulliga võrdsustada. Juhul, kui keskväärtus ei sõltu dispersiooniparameetritest, saame

$$\text{tr} \left(\hat{\mathbf{V}}^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{V}}}{\partial \theta_r} \right) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{V}}}{\partial \theta_r} \hat{\mathbf{V}}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}). \quad (5)$$

Näeme aga, et võrrandi (5) parem pool sisaldab $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, mis omakorda kasutab $\hat{\mathbf{V}}$. Olukorra lahendamiseks saab võrrandis (5) oleva liikme $\hat{\mathbf{V}}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$ kirjutada võrrandi (4) abil kujule $\hat{\mathbf{V}}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \hat{\mathbf{V}}^{-1}[\mathbf{y} - \mathbf{X}(\mathbf{X}' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{y}] = [\hat{\mathbf{V}}^{-1} - \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{X}(\mathbf{X}' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \hat{\mathbf{V}}^{-1}] \mathbf{y} = \hat{\mathbf{P}} \mathbf{y}$. (McCulloch & Searle, 2001, lk 174)

Nüüd saame võrrandi (5) kujule $\text{tr} \left(\hat{\mathbf{V}}^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{V}}}{\partial \theta_r} \right) = \mathbf{y}' \hat{\mathbf{P}} \frac{\partial \hat{\mathbf{V}}}{\partial \theta_r} \hat{\mathbf{P}} \mathbf{y}$. Tegemist on aga keeruliste dispersioonikomponentide funktsioonidega, mis tuleb lahendada iteratiivselt numbriliste meetoditega. (Searle, Casella, & McCulloch, 2006, lk 236) Sedasi saavutame kõigepealt hinnangu vektorile $\boldsymbol{\theta}$ ja seejärel saame arvutada $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ otse võrrandist (4).

Näide 1.4. Suurima tõepära meetodi rakendamine I

Olgu meil esialgu vaatluse all lihtne mudel $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, kus

$$\mathbf{y} \sim N \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta}; \sigma^2 \mathbf{I} \right).$$

Leidmaks parameetrite σ^2 ja $\boldsymbol{\beta}$ hinnanguid, tuleb korruga lahendada võrrandid (4) ja (5). Seega saame

$$(4) \Rightarrow \mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\mathbf{y} = \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(1 \quad \dots \quad 1)\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\mathbf{y}$$

$$= \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{y} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \sum \mathbf{y}_i \\ \vdots \\ \sum \mathbf{y}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{y}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix}$$

$$(5) \Rightarrow (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma^2}\hat{\mathbf{V}}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) - \text{tr}\left(\hat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma^2}\right)$$

$$= \left(\mathbf{y} - \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{y}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix}\right)'\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\mathbf{I}\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\left(\mathbf{y} - \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{y}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix}\right) - \text{tr}\left(\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\mathbf{I}\right) = \frac{1}{\hat{\sigma}^4}\sum_{i=1}^n(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^2 - \frac{n}{\hat{\sigma}^2} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^2}{n}$$

Kokkuvõttes saime, et parameetri β hinnang on vaatluste keskmine ning σ^2 hinnang on hälvete ruutude keskmine. Saadud dispersiooni hinnang on nihkega (McCulloch & Searle, 2001, lk 30).

Näide 1.5. Suurima tõepära meetodi rakendamine II

Võtame uuesti vaatluse alla näites 1.3 tutvustatud vererõhu mudeli $\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i$. Eeldame, et mõõtmistulemused on normaaljaotusega $\mathbf{y} \sim N\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\beta; \mathbf{V}\right)$, kus kovariatsioonimaatriks \mathbf{V} on kujul (1).

Soovime leida hinnanguid parameetritele β , σ_γ^2 , σ_ϵ^2 ja ρ . Selle jaoks peame lahendama võrrandisüsteemi, mis koosneb võrranditest (4) ja (5), kusjuures kasutame võrrandi (5) alternatiivset kuju $\text{tr}\left(\hat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta_r}\right) = \mathbf{y}'\hat{\mathbf{P}}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta_r}\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}$.

Et lihtsustada osatuletiste võtmist, kirjutame kovariatsioonimaatriksi kujule $\mathbf{V} = \sigma_\gamma^2\mathbf{K} + \sigma_\epsilon^2\mathbf{I}$,

$$\text{kus } \mathbf{K} := \begin{pmatrix} 1 & \rho & \vdots & \rho^9 \\ \rho & 1 & \vdots & \rho^8 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \rho^9 & \rho^8 & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Siis } \frac{\partial V}{\partial \sigma_Y^2} = \mathbf{K}, \frac{\partial V}{\partial \sigma_\epsilon^2} = \mathbf{I} \text{ ning } \frac{\partial V}{\partial \rho} = \sigma_Y^2 \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho} = \sigma_Y^2 \mathbf{L}, \text{ kus } \mathbf{L} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \vdots & 9\rho^8 \\ 1 & 0 & \vdots & 8\rho^7 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 9\rho^8 & 8\rho^7 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Lahendada tuleb seega järgmine võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} \hat{\beta} = (\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{y} \\ \text{tr}\left(\hat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial V}{\partial \sigma_Y^2}\right) = \mathbf{y}'\hat{\mathbf{P}}\frac{\partial V}{\partial \sigma_Y^2}\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y} \\ \text{tr}\left(\hat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial V}{\partial \sigma_\epsilon^2}\right) = \mathbf{y}'\hat{\mathbf{P}}\frac{\partial V}{\partial \sigma_\epsilon^2}\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y} \\ \text{tr}\left(\hat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) = \mathbf{y}'\hat{\mathbf{P}}\frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\beta} = (\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{y} \\ \text{tr}(\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{K}) = \mathbf{y}'\hat{\mathbf{P}}\mathbf{K}\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y} \\ \text{tr}(\hat{\mathbf{V}}^{-1}) = \mathbf{y}'\hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y} \\ \sigma_Y^2 \text{tr}(\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{L}) = \sigma_Y^2 \mathbf{y}'\hat{\mathbf{P}}\mathbf{L}\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y} \end{cases}. \quad (6)$$

Võrreldes näitega 1.4, on siin kovariatsioonistruktuur oluliselt keerulisem ning analüütiliselt on lahendeid leida tülikas. Vaatlusvektori \mathbf{y} olemasolul saab süsteemi lahendada R-is käsuga *multiroot*.

Olgu vaatlusvektoris \mathbf{y} järgmised 10 vererõhu mõõtmistulemust:

$$\mathbf{y}' = (119.8, 120.4, 120.6, 120, 121.4, 120, 120.2, 120, 119, 120.4)$$

Lahendades võrrandisüsteemi (6), saame parameetrite hinnanguteks $\hat{\beta} = 120.18$, $\hat{\sigma}_Y^2 = 0.18$, $\hat{\sigma}_\epsilon^2 = 0.16$ ja $\hat{\rho} = -0.31$ (vt vastavat R-i koodi lisast 2).

1.3.1 Parameetrite hindamine, kui keskväärtus sõltub dispersioonist

Eelnevas arutelus sisaldasid tundmatud parameetrid $\boldsymbol{\theta}$ vaid kovariatsioonimaatriksis \mathbf{V} ning log-tõepärast θ_r järgi tuletist võttes olid kõik maatriksid peale \mathbf{V} ja \mathbf{V}^{-1} konstandi rollis. Mõnes olukorras võib aga keskväärtus dispersioonist sõltuda. Näiteks võib aktsiahind sõltuda volatiilsusest ehk aktsiahinna varieeruvusest. Vaatame, kuidas sellisel juhul parameetritele $\boldsymbol{\beta}$ ja $\boldsymbol{\theta}$ suurima tõepära hinnanguid leida.

Disainimaatriksis \mathbf{X} on nüüd uus veerg dispersioonidega ja vektoris $\boldsymbol{\beta}$ on vastavalt uus parameeter dispersiooni jaoks. Tuletis log-tõepärast $\boldsymbol{\beta}$ järgi on sama nagu varem, seega on $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ endiselt kujul (4). Muutub aga $\frac{\partial l}{\partial \theta_r}$, sest ka disainimaatriks \mathbf{X} sisaldab nüüd tundmatuid kovariatsioonimaatriksi parameetreid.

Paneme log-tõepära kirja kujul $l(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}) = c - \frac{1}{2}\log(|\mathbf{V}|) - \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = c - \frac{1}{2}\log(|\mathbf{V}|) - \frac{1}{2}\mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, kus c on konstant, mis ei sõltu $\boldsymbol{\beta}$ -st ja $\boldsymbol{\theta}$ -st. Võtame tuletise θ_r järgi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \theta_r} = & -\frac{1}{2}\text{tr}\left(\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta_r}\right) + \frac{1}{2}\mathbf{y}'\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta_r}\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{y}'\left(-\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta_r}\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X} + \widehat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_r}\right)\widehat{\boldsymbol{\beta}} \\ & - \frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\left(\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \theta_r}\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{X}'\left(-\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta_r}\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X} + \widehat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_r}\right)\right)\widehat{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned}$$

Võrdsustades selle nulliga, saame iga θ_r jaoks võrrandi kujul:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\text{tr}\left(\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta_r}\right) = & \frac{1}{2}\mathbf{y}'\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta_r}\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{y}'\left(-\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta_r}\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X} + \widehat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_r}\right)\widehat{\boldsymbol{\beta}} \\ & - \frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\left(\frac{\partial \mathbf{X}'}{\partial \theta_r}\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{X}'\left(-\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta_r}\widehat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X} + \widehat{\mathbf{V}}^{-1}\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta_r}\right)\right)\widehat{\boldsymbol{\beta}}. \quad (7) \end{aligned}$$

Võrranditest (4) ja (7) koosneva süsteemi lahendamine annabki $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$.

1.4 Juhusliku suuruse prognoosimine

Järgnev tuletuskäik juhusliku suuruse prognoosimise kohta põhineb Searle, Casella, ja McCullochi raamatu „Variance Components“ lehekülgedel 269-272.

Juhuslike suuruste prognoosimiseks kasutatakse meetodit nimega *BLUP*, mis on akronüüm inglisekeelselt väljendist *Best Linear Unbiased Prediction* ehk parim lineaarne nihketa prognoos.

Olgu vaatluse all varasemalt tutvustatud mudel $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}$, kus $E\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$, $E\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, $E\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ ja $D\mathbf{y} = \mathbf{Z}'\mathbf{G}\mathbf{Z} + \mathbf{R} = \mathbf{V}$. Soovime prognoosida suurust $\mathbf{w} = \mathbf{L}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}$ mingi konkreetse \mathbf{L}' jaoks nii, et $\mathbf{L}'\boldsymbol{\beta}$ oleks hinnatav. See tähendab, et peab leiduma maatriks \mathbf{T}' nii, et \mathbf{L}' oleks esitatav kujul $\mathbf{L}' = \mathbf{T}'\mathbf{X}$.

Juhusliku suuruse \mathbf{w} prognoosiks valime sellise $\tilde{\mathbf{w}}$, mis rahuldab kolme nõuet.

1. On parim selles mõttes, et minimiseerib keskmise ruutvea $E(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w})'\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w})$.
2. On \mathbf{y} suhtes lineaarne ehk $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{y}$, kus \mathbf{a} ja \mathbf{B} ei sõltu vektorist $\boldsymbol{\beta}$.
3. On nihketa ehk $E(\tilde{\mathbf{w}}) = E(\mathbf{w})$.

Kuna $E\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, siis $E(\mathbf{w}) = E(\mathbf{L}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{L}'\boldsymbol{\beta}$. Kokkuvõttes on \mathbf{w} ja \mathbf{y} ühisjaotus $\begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{L}'\boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' & \mathbf{V} \end{pmatrix}$, kus $\mathbf{C} := \text{cov}(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \text{cov}(\mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{Z}\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{S}\mathbf{G}\mathbf{Z}'$.

Nihketuse nõudest järeldub, et $E(\tilde{\mathbf{w}}) = E(\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{y}) = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{L}'\boldsymbol{\beta} = E(\mathbf{w})$ ehk $\mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{L}'\boldsymbol{\beta} \quad \forall \boldsymbol{\beta}$. Kuna see peab kehtima iga $\boldsymbol{\beta}$ korral, st ka juhul, kui $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, siis $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ning $\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{L}'$. Seega oleme saanud, et \mathbf{w} prognoosiks on $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{B}\mathbf{y}$.

Valime \mathbf{B} sedasi, et prognoosi keskmine ruutviga oleks \mathbf{B} elementide suhtes minimaalne, tingimusel, et $\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{L}'$. Prognoosi keskmine ruutviga on

$$\begin{aligned} q &:= E(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w})' \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}) = E(-\mathbf{L}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma})' \mathbf{A}(-\mathbf{L}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}) \\ &= \boldsymbol{\beta}' \mathbf{L} \mathbf{A} \mathbf{L}' \boldsymbol{\beta} - 2\boldsymbol{\beta}' \mathbf{L} \mathbf{A} \cdot E(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}) + E[(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma})' \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma})] = \dots \end{aligned}$$

lisame liikme $\pm E(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma})' \mathbf{A} E(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma})$ ja kasutame vahe ruudu valemit

$$\begin{aligned} \dots &= [-\mathbf{L}'\boldsymbol{\beta} + E(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma})]' \mathbf{A} [-\mathbf{L}'\boldsymbol{\beta} + E(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma})] - E(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma})' \mathbf{A} E(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}) \\ &\quad + E[(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma})' \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma})]. \end{aligned}$$

Kuna $E(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{B}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{L}'\boldsymbol{\beta}$, siis on avaldise esimene liige 0. Edasi peame minimiseerima ülejäänud kahte liidetavat \mathbf{B} suhtes. Minimiseerime seega avaldist

$$\begin{aligned} q_1 &:= -E(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma})' \mathbf{A} E(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}) + E[(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma})' \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma})] \\ &= \text{tr}[\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma})] = \text{tr}[\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{V}\mathbf{B}' + \mathbf{S}\mathbf{G}\mathbf{S}' - \mathbf{B}\mathbf{C}' - \mathbf{C}\mathbf{B}')], \\ &\text{vt lisa 3} \end{aligned}$$

kus $\mathbf{C} = \text{cov}(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \text{cov}(\mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{y})$.

Kuna $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{G}\mathbf{S}')$ ei sisalda \mathbf{B} -d, siis minimiseerime avaldist

$$q_2 = \text{tr}[\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{V}\mathbf{B}' - \mathbf{B}\mathbf{C}' - \mathbf{C}\mathbf{B}')], \text{ tingimusel, et } \mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{L}'.$$

Selle jaoks defineerime

$$\mathbf{T} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} \text{ ja } \mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{T} \quad (8)$$

ning paneme tähele, et

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^2 \text{ ja } \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^2. \quad (9)$$

Lisaks kehtivad võrdused

$$\mathbf{T}\mathbf{V}\mathbf{T}' = \mathbf{T}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{T}' \text{ ja } \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{Q}'. \quad (10)$$

Paneme veel tähele, et $\mathbf{B} = \mathbf{BI} = \mathbf{B}(\mathbf{T} + \mathbf{Q}) = \mathbf{BT} + \mathbf{BQ}$. Nüüd saame q_2 avaldise kujule

$$\begin{aligned} q_2 &= \text{tr}[\mathbf{A}(\mathbf{BVB}' - \mathbf{BC}' - \mathbf{CB}')] = \\ &= \text{tr}[\mathbf{A}((\mathbf{BT} + \mathbf{BQ})\mathbf{V}(\mathbf{BT} + \mathbf{BQ})' - (\mathbf{BT} + \mathbf{BQ})\mathbf{C}' - \mathbf{C}(\mathbf{BT} + \mathbf{BQ})')] \\ &= \text{tr} \left[\mathbf{A} \left(\mathbf{BTVTB}' + \mathbf{BT} \underbrace{\mathbf{VQ}'}_{\mathbf{QV}} \mathbf{B}' + \mathbf{BQ} \underbrace{\mathbf{VT}'}_{\mathbf{TV}} \mathbf{B}' + \mathbf{BQVQ}'\mathbf{B}' - \mathbf{BTC}' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathbf{BQC}' - \mathbf{CT}'\mathbf{B}' - \mathbf{CQ}'\mathbf{B}' \right) \right] = \dots \end{aligned}$$

liikmed $\mathbf{BTQVB}' = 0$ ja $\mathbf{BQTVB}' = 0$, sest valemite (8) ja (9) põhjal $\mathbf{TQ} = \mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{T}) = \mathbf{T} - \mathbf{T}^2 = 0$ ning samamoodi $\mathbf{QT} = 0$

$$\dots = \text{tr}[\mathbf{ABTVT}'\mathbf{B}' - \mathbf{ABTC}' - \mathbf{ACT}'\mathbf{B}'] + \text{tr}[\mathbf{ABQVQ}'\mathbf{B}' - \mathbf{ABQC}' - \mathbf{ACQ}'\mathbf{B}'].$$

Kuna $\mathbf{BT} = \mathbf{BX}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}$, siis esimene liidetav ei sisalda \mathbf{B} -d ning edasi minimiseerime teist liidetavat. Kasutame võrduse (10) põhjal kehtivat seost $\mathbf{Q} = \mathbf{QVV}^{-1} = \mathbf{QVQ}'\mathbf{V}^{-1}$ ning lisame liikme $\pm \mathbf{ACV}^{-1}\mathbf{QVQ}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}'$

$$\begin{aligned} q_3 &:= \text{tr}[\mathbf{ABQVQ}'\mathbf{B}' - \mathbf{ABQC}' - \mathbf{ACQ}'\mathbf{B}'] \\ &= \text{tr} \left[\mathbf{ABQVQ}'\mathbf{B}' - \mathbf{AB} \underbrace{\mathbf{QVQ}'\mathbf{V}^{-1}}_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}' - \mathbf{AC} \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{QVQ}'\mathbf{B}'}_{\mathbf{Q}'} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{ACV}^{-1}\mathbf{QVQ}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}' - \mathbf{ACV}^{-1}\mathbf{QVQ}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}' \right] \\ &= \text{tr}[\mathbf{A}(\mathbf{BQ} - \mathbf{CV}^{-1}\mathbf{Q})\mathbf{V}(\mathbf{BQ} - \mathbf{CV}^{-1}\mathbf{Q})' - \mathbf{ACV}^{-1}\mathbf{QVQ}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}'] \end{aligned}$$

Kuna viimane liidetav $\mathbf{ACV}^{-1}\mathbf{QVQ}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}'$ ei sisalda \mathbf{B} -d, siis annab q_3 minimiseerimine tulemuseks $\mathbf{BQ} = \mathbf{CV}^{-1}\mathbf{Q}$.

Viimaks oleme saanud, et

$$\mathbf{B} = \mathbf{BT} + \mathbf{BQ} = \mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{CV}^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}].$$

Seega prognoos $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{By} = \mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{CV}^{-1}[\mathbf{y} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}]$. Asendame siia valemisse $\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ vähimruutude hinnangu $\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$, mis on ühtlasi parim lineaarne nihketa hinnang. (Searle, Casella, & McCulloch, 2006, lk 463) Kokkuvõttes on uue väärtuse prognoos kujul $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{BLUP}(\mathbf{w}) = \mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{CV}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$.

Praktikas pole tavaliselt ka maatriksite \mathbf{C} ja \mathbf{V} väärtused teada. Sel juhul asendatakse tundmatute dispersiooniparameetrite vektor $\boldsymbol{\theta}$ selle hinnanguga $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ning tulemuseks on empiiriline parim lineaarne nihketa prognoos $EBLUP(\mathbf{w}) = \mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{V}}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$. (Jiang, 2007, lk 77)

1.4.1 Prognoosiintervall

Prognoosiintervall on vahemik, mis kindlaks määratud tõenäosusega hõlmab tulevikuväärtust (Jiang, 2007, lk 81). Soovime leida prognoosiintervalli tulevikuväärtusele $\mathbf{w} = \mathbf{L}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}$. Kui prognoos on kujul

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{C}\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{S} \underbrace{\mathbf{G}\mathbf{Z}'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}^1} = \mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{S}\hat{\boldsymbol{\gamma}},$$

siis on prognoosiviga $\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w} = \mathbf{L}'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma})$.

Peame leidma prognoosivea dispersiooni $D(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w})$. On teada, et keskmine prognoosi ruutviga $MSPE$ (mean squared prediction error) on kujul

$$\mathbf{m} = D(\mathbf{w}) - \mathbf{C}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}' + (\mathbf{L} - \mathbf{C}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{L}' - \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}'), \quad (11)$$

kus $\mathbf{C} = cov(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ (Zimmerman & Cressie, 1992, lk 30).

Kuna praktikas on maatriksite \mathbf{C} ja \mathbf{V} väärtused harva teada, siis on tavapärase lähenemine see, et prognoosivea dispersiooni valemis (11) asendatakse kovariatsioonimaatriksi parameetervektor $\boldsymbol{\theta}$ selle hinnanguga $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ehk kasutatakse maatrikseid $\hat{\mathbf{C}}$ ja $\hat{\mathbf{V}}$. Sedasi saadakse empiiriline keskmine prognoosi ruutviga $EMSPE$ (Zimmerman & Cressie, 1992, lk 28):

$$\hat{\mathbf{m}} = \hat{D}(\mathbf{w}) - \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{V}}^{-1}\hat{\mathbf{C}}' + (\mathbf{L} - \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X})(\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{L}' - \mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\hat{\mathbf{C}}'). \quad (12)$$

Leiame ka prognoosivea keskvaartuse. Esmalt näeme, et

$$E\hat{\boldsymbol{\gamma}} = E[\mathbf{G}\mathbf{Z}'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})] = \mathbf{G}\mathbf{Z}'\mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} E\mathbf{y} - E\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} = 0.$$

¹ $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ pärineb Searle, Casella, ja McCullochi raamatu „Variance Components“ leheküljelt 277

Nüüd saamegi, et

$$\begin{aligned} E(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}) &= E\left(\mathbf{L}'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma})\right) = E\left(\mathbf{B}\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma})\right) = \\ &= \mathbf{B}\left(\underbrace{E\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}}_{\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right) + \mathbf{S}\underbrace{E(\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\gamma})}_0 = 0. \end{aligned}$$

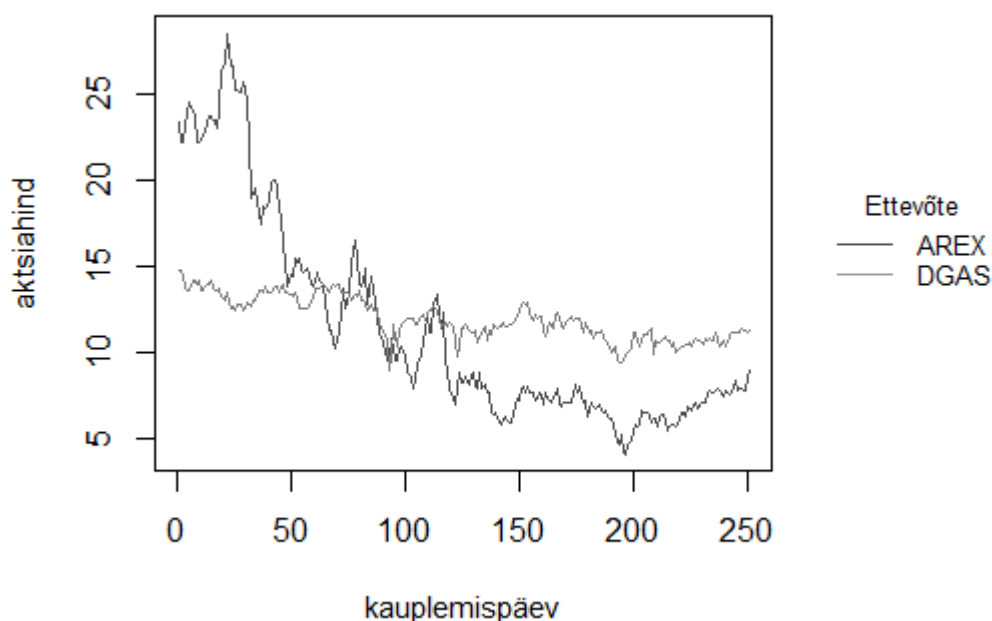
Teame, et kahe sõltumatu normaaljaotusega juhusliku suuruse summa on samuti normaaljaotusega. Seega, kui $\tilde{\mathbf{w}}$ ja \mathbf{w} on normaaljaotusega, siis on normaaljaotusega ka prognoosiviga

$$\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w} \sim N(0; D(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w})).$$

Standardiseerides prognoosivea, saame, et $\frac{\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}}{\sqrt{D(\tilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w})}} \sim N(0; 1)$. Kasutades dispersiooni hinnangut $\hat{\mathbf{m}}$, saame ligikaudseks $(1 - \alpha)$ -prognoosiintervalliks $\tilde{\mathbf{w}} \pm \bar{z}_{\alpha/2}\sqrt{\hat{\mathbf{m}}}$, kus $\bar{z}_{\alpha/2}$ on standardse normaaljaotuse $\alpha/2$ -täiendkvantiil.

2 Aktsiahindade modelleerimine

Olgu vaatluse all USA nafta- ja gaasiettevõtted Approach Resources, Inc. lühendiga AREX ja Delta Natural Gas Company, Inc lühendiga DGAS. Andmestikus on ettevõtete aktsiahinnad perioodil 2.juuni 2008 – 29.mai 2009, kus kauplemisspäevi on 251. (NASDAQ:AREX, 2009; NASDAQ:DGAS, 2009) Aktsiahindade aegread on toodud joonisel 1. Lisaks aktsiahindadele on andmestikus ettevõtete kvartaalsete finantstulemuste esitamise kuupäevad. (Approach Resources, Inc., 2009; Delta Natural Gas Company, Inc., 2009)



Joonis 1. Aktsiahinnad

Järgnevas võtame vaatluse alla erinevate keskväärtuste ja kovariatsioonimaatriksitega aktsiahinna mudelid. Hindame tundmatud parameetrid suurima tõepära meetodil ning võrdleme leitud mudeleid Akaike informatsioonikriteeriumi (AIC) põhjal. Parima mudeli abil prognoosime tulevikuväärtuseid, millele anname juurde prognoosiintervallid.

2.1 Kovariatsioonistruktuurid

Eeldame, et aktsiahind järgib multiplikatiivset mudelit $y_i = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\gamma}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i$, kus $\boldsymbol{\mu}$ on ettevõtte õiglane hind, $\boldsymbol{\gamma}_i > 0$ on kõrvalekalle õiglasest hinnast näiteks turu meeleolu tõttu konkreetsetel päeval ning $\boldsymbol{\varepsilon}_i > 0$ on juhuslik viga. Mudelis sisalduv faktor $\boldsymbol{\gamma}$ on juhulik.

Üks põhjus, miks eeldada multiplikatiivset mudelit on see, et aktsiahind ei saa olla negatiivne. Kui kasutaksime aditiivset mudelit $y_i = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i$, peaksime aktsiahinna languse kirjeldamiseks lubama ka $\boldsymbol{\gamma}_i$ ja $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ negatiivseid väärtuseid. Samas ei saaks siis kindel olla, et aktsiahind y_i jääb positiivseks. Multiplikatiivse mudeli korral toimub aga aktsiahinna langus, kui $\boldsymbol{\gamma}_i < 1$ või $\boldsymbol{\varepsilon}_i < 1$, kuid aktsiahind jääb igal juhul positiivseks. (Brandimarte, 2014)

Et rakendada aktsiahindadele segamudelite teooriat, logaritmime hindu. Seega saame mudeli $\log(y_i) = \log(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\gamma}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i) = \log(\boldsymbol{\mu}) + \log(\boldsymbol{\gamma}_i) + \log(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$. Kasutades tähistusi $y_i' = \log(y_i)$, $\boldsymbol{\mu}' = \log(\boldsymbol{\mu})$, $\boldsymbol{\gamma}_i' = \log(\boldsymbol{\gamma}_i)$ ning $\boldsymbol{\varepsilon}_i' = \log(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$, jõuame klassikalise segamudeli kujuni $y_i' = \boldsymbol{\mu}' + \boldsymbol{\gamma}_i' + \boldsymbol{\varepsilon}_i'$.

Lisaks teeme eelduse, et turu meeleolu ühel päeval on eelmiste päevade mõjudega korreleeritud, kätitudes esimest järku autoregressiivse mudeli järgi. Seega $\boldsymbol{\gamma}_i' = \rho \boldsymbol{\gamma}_{i-1}' + \boldsymbol{e}_i$, kus $-1 \leq \rho \leq 1$ ning suurused \boldsymbol{e}_i on omavahel sõltumatud.

2.1.1 Keskväertuse modelleerimine

Eeldame esialgu, et logaritmitud aktsiahinnad on normaaljaotusest $\boldsymbol{y} \sim N\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{V}_1\right)$, kus kovariatsioonimaatriks on kujul

$$\boldsymbol{V}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 + \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 & \rho \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \rho^2 \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \vdots & \rho^{n-1} \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 \\ \rho \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 + \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 & \rho \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \vdots & \rho^{n-2} \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 \\ \rho^2 \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \rho \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 + \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 & \vdots & \rho^{n-3} \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \rho^{n-1} \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \rho^{n-2} \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \rho^{n-3} \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 & \vdots & \sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2 + \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \end{pmatrix}.$$

Meil on $n = 251$, sest vaatluse all on 251 kauplemispäeva.

Aktsiahindade logaritmidel on selle mudeli puhul konstantne keskväertus ning hajuvus. Soovime leida suurima tõepära hinnanguid parameetritele $\boldsymbol{\beta}$, $\sigma_{\boldsymbol{\gamma}}^2$, $\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2$ ja ρ . Selle jaoks peame maksimiseerima tõepärafunktsiooni, nagu peatükis 1.3 kirjeldatud on. Praegusel juhul oleks kõige mõistlikum parameetreid hinnata R-i lisamooduli *nlme* käsuga *lme*, aga kuna hiljem

tulevad vaatluse alla keerulisemad mudelid, mida antud funktsioon hinnata ei võimalda, siis võtame kohe kasutusse *optim* või *nminb* käsu. Need funktsioonid sobivad hästi tõepära maksimiseerimiseks.

Paneme tähele, et dispersioon saab olla ainult positiivne ning korrelatsioon võib olla vahemikus -1 kuni 1 . Et optimiseerimiskäsule saaks algväärtuseks anda reaalarvud ilma lisapiiranguteta, kasutame *log* ja *logit* teisendust. Nimelt eeldame, et dispersiooni tegelikud algväärtused on logaritmitud ning korrelatsiooni tegelikule algväärtusele on tehtud *logit* teisendus: $\theta_1 = \log(\sigma_{Y_{alg}}^2)$, $\theta_2 = \log(\sigma_{\varepsilon_{alg}}^2)$ ning $\theta_3 = \log(\frac{\rho_{alg}}{1-\rho_{alg}})$. Niimoodi teeme kindlaks, et kehtivad nõuded $\sigma_{Y_{alg}}^2 > 0$, $\sigma_{\varepsilon_{alg}}^2 > 0$ ning $0 < \rho_{alg} < 1$.

Soovides tõepärafunktsiooni väärtust leida, tuleb tegelike algväärtuste saamiseks teha tagasiteisendused: $\sigma_{Y_{alg}}^2 = \exp(\theta_1)$, $\sigma_{\varepsilon_{alg}}^2 = \exp(\theta_2)$ ning $\rho_{alg} = \frac{\exp(\theta_3)}{1+\exp(\theta_3)}$. Lisaks, et korrelatsioon asuks vahemikus -1 kuni 1 , tuleb see ka ümber skaleerida, saades tulemuseks $\rho_{alg}^* = 2 \cdot \rho_{alg} - 1$.

Seega, kui *optim* käsule anda päeva mõju dispersiooni algväärtuseks näiteks -2 ning korrelatsiooni algväärtuseks -4 , siis funktsiooni sees kasutatakse tõepära arvutamisel hoopis väärtuseid $\sigma_{Y_{alg}}^2 = \exp(-2) = 0.135$ ning $\rho_{alg}^* = 2 \cdot \frac{\exp(-4)}{1+\exp(-4)} - 1 = -0.964$.

Nimetatud teisenduste ning R-i optimiseerimiskäskude abil saame leida tõepära maksimiseerivad parameetrid, mis on toodud tabelis 1 (vt vastavat näidiskoodi lisast 4). Paneme tähele, et juhusliku vea dispersioon $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$ on mõlema ettevõtte puhul ligikaudu nulliks hinnatud ning korrelatsioon järjestikuste päevade vahel on tugev.

Tabelis on ka AIC väärtused, mis on arvutatud valemi $AIC = 2k - 2\ln(\hat{L})$ abil, kus k on hinnatavate parameetrite arv ning \hat{L} on tõepärafunktsiooni väärtus hinnatud parameetrite korral.

Tabel 1. Parameetrite hinnangud ja AIC

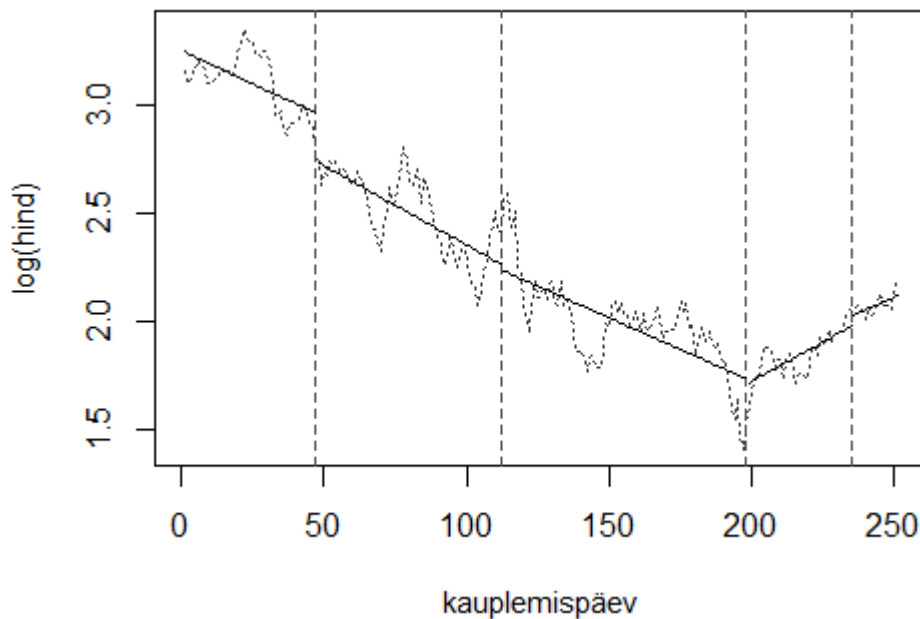
	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}_Y^2$	$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$	$\hat{\rho}$	AIC
AREX	2.50	$2.61 \cdot 10^{-1}$	$1.68 \cdot 10^{-11}$	0.992	-656.326
DGAS	2.49	$1.17 \cdot 10^{-2}$	$2.06 \cdot 10^{-9}$	0.948	-966.752

Järgmisena eeldame, et logaritmitud aktsiahinnad on normaaljaotusest $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}; \mathbf{V}_1)$, kus kovariatsioonimaatriksi \mathbf{V}_1 kuju on sama nagu enne, aga keskvärtus ei ole enam konstantne. Täpsemalt, eeldame, et keskvärtus on modelleeritud sirglõikudena, kusjuures kasutatud on ettevõtte kvartaalsete finantstulemuste kuupäevi. Kui tulemusi esitatakse aastas neljal korral, saab aktsiahindade vektori jagada viieks: esimesse gruppi kuuluvad aktsiahinnad kuni esimese tulemuse kuupäevani, teise gruppi aktsiahinnad, mis on esimese ja teise finantstulemuse vahel jne. Viiendasse gruppi kuuluvad aktsiahinnad pärast neljandat finantstulemust.

Keskvärtus järgib iga kahe tulemuse vahel erinevat sirglõiku võrrandiga

$$s = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{päev} + \beta_2 \cdot I_{grupp=1} + \dots + \beta_6 \cdot I_{grupp=5} + \beta_7 \cdot \text{päev} \cdot I_{grupp=1} + \dots + \beta_{11} \cdot \text{päev} \cdot I_{grupp=5}.$$

Joonisel 2 on ettevõtte AREX logaritmitud aktsiahindade aegrida, kus vertikaalse joonega on märgitud finantstulemuste kuupäevad. Iga finantstulemuse vahel on keskvärtus modelleeritud erineva sirglõigu abil. Ettevõtte DGAS graafikut võib vaadata lisast 5.



Joonis 2. Ettevõtte AREX logaritmitud aktsiahinna keskvärtuse modelleerimine finantstulemuste kuupäevade abil

Tabelis 2 on toodud parameetrite hinnangud ning AIC väärtused. Kuna vektoris $\boldsymbol{\beta}$ on nüüd 12 elementi, siis parema loetavuse huvides nende hinnanguid tabelisse kirja pole pandud. Näeme, et võrreldes eelmise mudeliga, kus keskvärtus oli konstantne, on AIC siin mõlema ettevõtte

puhul väiksem. Järelikult sobib andmetega paremini mudel, kus keskvärtus on erinevate sirglõikudega modelleeritud.

Tabel 2. Parameetrite hinnangud ja AIC

	$\hat{\sigma}_\gamma^2$	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	$\hat{\rho}$	AIC
AREX	$1.65 \cdot 10^{-2}$	$1.96 \cdot 10^{-14}$	0.881	-662.845
DGAS	$2.91 \cdot 10^{-3}$	$4.87 \cdot 10^{-12}$	0.790	-968.375

2.1.2 Dispersiooni modelleerimine

Eeldame endiselt andmete normaaljaotust, $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}; \mathbf{V}_2)$. Keskvärtus olgu modelleeritud finantstulemuste kuupäevade abil, sest see mudel sobib andmetega paremini kui konstantne keskvärtus. Loobume nüüd ka dispersiooni konstantsuse eeldusest ning laseme sel ajas muutuda. Nii nagu keskvärtuse puhul, kasutame ka dispersiooni modelleerimiseks finantstulemuste kuupäevi.

Võib arvata, et mida lähemal on finantstulemuste tähtaeg, seda suurem on aktsiahinna volatiilsus ehk hajuvus. Vaatame kõigepealt mudelit, kus päeva mõju dispersioon σ_γ^2 suureneb vahetult enne ja pärast tulemuste kuupäeva, ning modelleerime volatiilsust suurendavaid kordajaid normaaljaotuse tihedusfunktsiooni abil.

Kui kovariatsioonimaatriksi $\mathbf{G} = D\boldsymbol{\gamma}$ diagonaali elementi ehk päeva mõju dispersiooni tuleb läbi korrutada kordajaga a , siis maatriksi vastavat rida ja veergu tuleb korrutada \sqrt{a} -ga. Seda seetõttu, et kui esimese päeva mõju uus dispersioon on a -kordne vana dispersioon, siis kehtib $\mathbf{G}_{11}^{uus} = a\mathbf{G}_{11} = aD(\boldsymbol{\gamma}_1) = D(\sqrt{a}\boldsymbol{\gamma}_1)$ ehk see on sama, mis dispersioon \sqrt{a} -kordsest mõjust $\boldsymbol{\gamma}_1$. Nüüd, kui teise päeva mõju puhul $\mathbf{G}_{22}^{uus} = b\mathbf{G}_{22} = bD(\boldsymbol{\gamma}_2) = D(\sqrt{b}\boldsymbol{\gamma}_2)$, siis uus kovariatsioon esimese ja teise päeva mõju vahel on $\mathbf{G}_{12}^{uus} = cov(\sqrt{a}\boldsymbol{\gamma}_1, \sqrt{b}\boldsymbol{\gamma}_2) = \sqrt{ab}cov(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2) = \sqrt{ab}\mathbf{G}_{12}$.

Kovariatsioonimaatriks \mathbf{V}_2 on seega kujul

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} \sigma_\gamma^2(1 + \mathbf{k}_1) & \rho\sigma_\gamma^2\sqrt{(1 + \mathbf{k}_1)(1 + \mathbf{k}_2)} & \vdots & \rho^{n-1}\sigma_\gamma^2\sqrt{(1 + \mathbf{k}_1)(1 + \mathbf{k}_n)} \\ \rho\sigma_\gamma^2\sqrt{(1 + \mathbf{k}_1)(1 + \mathbf{k}_2)} & \sigma_\gamma^2(1 + \mathbf{k}_2) & \vdots & \rho^{n-2}\sigma_\gamma^2\sqrt{(1 + \mathbf{k}_2)(1 + \mathbf{k}_n)} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \rho^{n-1}\sigma_\gamma^2\sqrt{(1 + \mathbf{k}_1)(1 + \mathbf{k}_n)} & \rho^{n-2}\sigma_\gamma^2\sqrt{(1 + \mathbf{k}_2)(1 + \mathbf{k}_n)} & \vdots & \sigma_\gamma^2(1 + \mathbf{k}_n) \end{pmatrix} + \sigma_\varepsilon^2\mathbf{I},$$

kus vektor $\mathbf{k}_i = S \cdot f(\mathbf{d}_i; 0, sd) > 0$. Funktsioon $f(\mathbf{d}_i; 0, sd) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(sd)^2}} e^{-\frac{(\mathbf{d}_i)^2}{2(sd)^2}}$ on keskvaartusega 0 ja standardhälbega sd normaaljaotuse tihedusfunktsioon, \mathbf{d}_i on i . päeva kaugus finantstulemuste kuupäevast ning S on lisakordaja.

Soovime hinnata parameetreid β , σ_γ^2 , σ_ε^2 , ρ , sd ja S ning näha, kuidas muutub AIC väärtus võrreldes varasemaga, kui vaatluse all oli konstantse dispersiooniga mudel. Tabelist 3 näeme, et AIC väärtused, mis enne olid -662.845 ja -968.375 , on mõlema ettevõtte puhul nüüd suuremad. Järelikult ei ole keerukama dispersioonimudeli kasutamine antud pikkusega aegrea puhul õigustatud.

Tabel 3. Parameetrite hinnangud ja AIC

	$\hat{\sigma}_\gamma^2$	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	$\hat{\rho}$	\widehat{sd}	\hat{S}	AIC
AREX	$1.45 \cdot 10^{-2}$	$7.24 \cdot 10^{-12}$	0.878	3.504	7.156	-662.023
DGAS	$2.89 \cdot 10^{-3}$	$3.04 \cdot 10^{-11}$	0.790	$6.85 \cdot 10^{-5}$	$2.45 \cdot 10^{-5}$	-964.440

Järgmisena vaatame, kas volatiilsus on erinev enne ja pärast finantstulemuste kuupäeva, st kas kordajad peaks olema valitud erinevatest normaaljaotuse tihedusfunktsioonidest. Seega on uued kordajad $\mathbf{k}_i = S_1 \cdot f(\mathbf{d}_i; 0, sd_1) \cdot I_{\mathbf{d}_i > 0} + S_2 \cdot f(\mathbf{d}_i; 0, sd_2) \cdot I_{\mathbf{d}_i \leq 0}$, kus $\mathbf{d}_i > 0$ tähendab, et i . päev asub finantstulemustele eelnevas perioodis. Indikaator $\mathbf{d}_i \leq 0$ seevastu tähendab, et i . päeva näol on tegemist tulemuste kuupäeva või sellele järgneva perioodiga.

Selgub aga, et ka sellise kovariatsioonistruktuuri korral on AIC väärtused suuremad kui varem ning pigem tuleks eelistada mudelit, kus dispersioon on konstantne (vt tabelit 4).

Tabel 4. Parameetrite hinnangud ja AIC

	$\hat{\sigma}_\gamma^2$	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	$\hat{\rho}$	\widehat{sd}_1	\widehat{sd}_2	\hat{S}_1	\hat{S}_2	AIC
AREX	$1.47 \cdot 10^{-2}$	$5.32 \cdot 10^{-12}$	0.881	2.362	6.096	8.227	6.842	-660.269
DGAS	$2.91 \cdot 10^{-3}$	$6.60 \cdot 10^{-12}$	0.790	$7.44 \cdot 10^{-7}$	$2.74 \cdot 10^4$	$6.17 \cdot 10^{-6}$	$1.99 \cdot 10^{-8}$	-960.375

Edasi uurime, kas andmetega sobib ehk paremini see, kui volatiilsus suureneb ainult kas enne või pärast finantstulemuste kuupäeva. Seega kordajad on kas $\mathbf{k}_i = S \cdot f(\mathbf{d}_i; 0, sd) \cdot I_{\mathbf{d}_i > 0}$ või $\mathbf{k}_i = S \cdot f(\mathbf{d}_i; 0, sd) \cdot I_{\mathbf{d}_i \leq 0}$.

Selgub, et volatiilsuse suurenemine ainult pärast tulemuste kuupäeva ei anna kummagi ettevõtte puhul väiksemaid AIC väärtuseid, kui senini saavutanud oleme. Seevastu volatiilsuse suurenemine enne finantstulemuste kuupäeva sobib ettevõtte AREX andmetega paremini kui eelnevalt proovitud mudelid. Parameetrite hinnangud ja AIC väärtused on toodud tabelis 5, kus ülemised read vastavad finantstulemuste-eelsele perioodile ning alumised read finantstulemustejärgsele perioodile.

Näeme, et AREX-i andmetega sobib mudel, kus volatiilsust suurendavad kordajad on keskväärtusega 0 ja standardhälbega 2.34 normaaljaotuse tihedusfunktsiooni väärtused. Lisakordaja S hinnang on 6.097. See tähendab, et finantstulemustele eelneval päeval suureneb päeva mõju γ dispersioon $1 + 6.097 \cdot f(1; 0, 2.34) \approx 1 + 6.097 \cdot 0.156 \approx 1.95$ korda.

Tabel 5. Parameetrite hinnangud ja AIC

		$\hat{\sigma}_\gamma^2$	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	$\hat{\rho}$	\widehat{sd}	\hat{S}	AIC
$d_i > 0$	AREX	$1.62 \cdot 10^{-2}$	$5.28 \cdot 10^{-12}$	0.884	2.340	6.097	-663.138
	DGAS	$2.91 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-11}$	0.790	17.725	$4.85 \cdot 10^{-7}$	-964.375
$d_i \leq 0$	AREX	$1.65 \cdot 10^{-2}$	$8.46 \cdot 10^{-9}$	0.881	26.610	$8.09 \cdot 10^{-4}$	-660.413
	DGAS	$2.89 \cdot 10^{-3}$	$9.22 \cdot 10^{-12}$	0.790	$9.63 \cdot 10^{-11}$	$3.44 \cdot 10^{-11}$	-964.440

Eelnevalt leidsime kordajaid normaaljaotuse abil, kuid uurida võib ka teisi jaotuseid või funktsioone. Läbides samad etapid nagu varem, vaatame nüüd, kui hästi sobib andmetega see, kui volatiilsust suurendavad kordajad on pärit eksponentjaotuse tihedusest $f(\mathbf{d}_i; \lambda) = \lambda e^{-\lambda \mathbf{d}_i}$. Lisaks, kuna kauplemispäevade kaugused finantstulemustest on täisarvulised, võib vaatluse alla võtta ka mõne diskreetse jaotuse tõenäosusfunktsiooni. Olgu selleks Poissoni jaotuse tõenäosusfunktsioon $f(\mathbf{d}_i; \lambda) = \frac{\lambda^{\mathbf{d}_i} e^{-\lambda}}{\mathbf{d}_i!}$.

Osutub, et eksponentjaotuse kasutamine ei anna kummagi ettevõtte puhul paremat sobivust, kui siiani saavutanud oleme. Erinevate mudelite korral leitud AIC väärtused on toodud tabelis 6. Näeme, et need on kas võrdsed või suuremad kui eelnevalt normaaljaotuse puhul leitud arvud. Olgu meenutuseks toodud, et AREX-i puhul on siiani parima mudeli AIC -663.138 ning DGAS puhul -968.375.

Tabel 6. AIC väärtused, kui kordajad on eksponentjaotuse tihedusest

	Kordajad samast eksponentjaotusest	Kordajad erinevatest eksponentjaotustest	Volatiilsus suureneb enne tulemusi	Volatiilsus suureneb pärast tulemusi
AREX	-658.845	-658.567	-662.567	-658.845
DGAS	-964.440	-964.440	-964.375	-964.440

Kui modelleerime volatiilsust suurendavaid kordajaid Poissoni jaotuse tõenäosusfunktsioonist, siis on ettevõtte AREX puhul võimalik saavutada vähim AIC väärtus (vt tabelit 7). Ettevõtte DGAS puhul varasemast väiksemat AIC väärtust leida ei õnnestunud. Seega võib öelda, et DGAS-i andmetega ei sobi volatiilsuse suurenemine ning kasutada tuleks mudelit, kus dispersioon on igal kauplemispäeval sama.

Tabel 7. AIC väärtused, kui kordajad on Poissoni jaotuse tõenäosusfunktsioonist

	Kordajad samast Poissoni jaotusest	Kordajad erinevatest Poissoni jaotustest	Volatiilsus suureneb enne tulemusi	Volatiilsus suureneb pärast tulemusi
AREX	-663.673	-659.797	-663.491	-658.845
DGAS	-964.440	-960.375	-964.375	-964.440

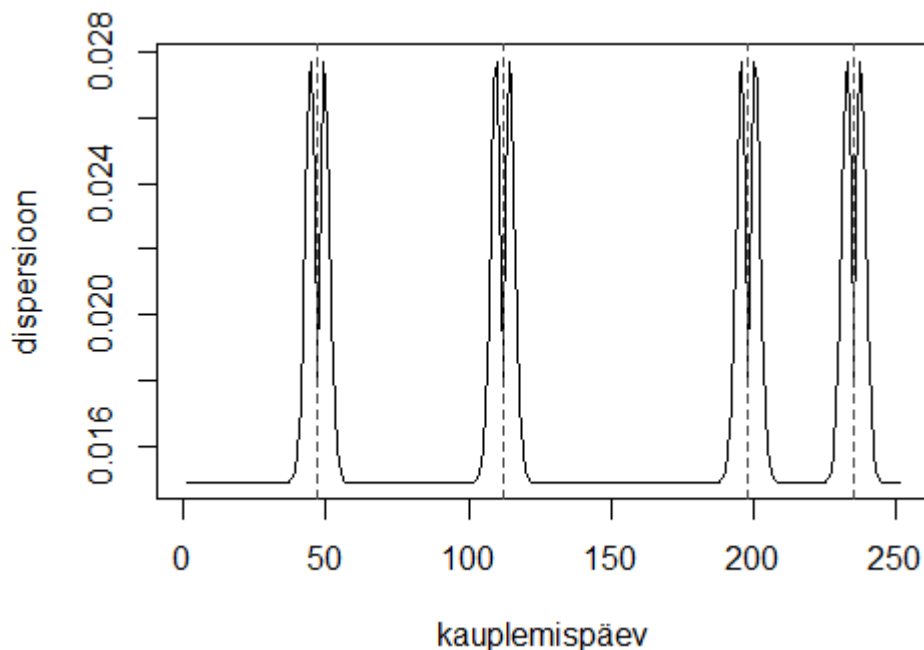
Näeme, et AREX-i minimaalse AIC väärtuse -663.673 saavutame siis, kui volatiilsus suureneb nii enne kui pärast finantstulemuste esitamist ja kordajad on seejuures samast Poissoni jaotusest. Tabelis 8 on toodud parameetrite hinnangud. Juhusliku vea dispersioon on ka siin hinnatud ligikaudu nulliks, Poissoni jaotuse keskvärtuse λ hinnang on 2.849 ehk ligikaudu 3 kauplemispäeva ning lisakordaja hinnang on 3.641.

Seega suureneb päeva mõju γ dispersioon finantstulemustele eelneval päeval $1 + 3.641 \cdot f(1; 2.849) \approx 1 + 3.641 \cdot 0.165 \approx 1.601$ korda ning kaks päeva enne finantstulemusi $1 + 3.641 \cdot f(2; 2.849) \approx 1 + 3.641 \cdot 0.235 \approx 1.856$.

Tabel 8. Parameetrite hinnangud

	$\hat{\sigma}_\gamma^2$	$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$	$\hat{\rho}$	$\hat{\lambda}$	\hat{S}
AREX	$1.49 \cdot 10^{-2}$	$2.06 \cdot 10^{-9}$	0.882	2.849	3.641

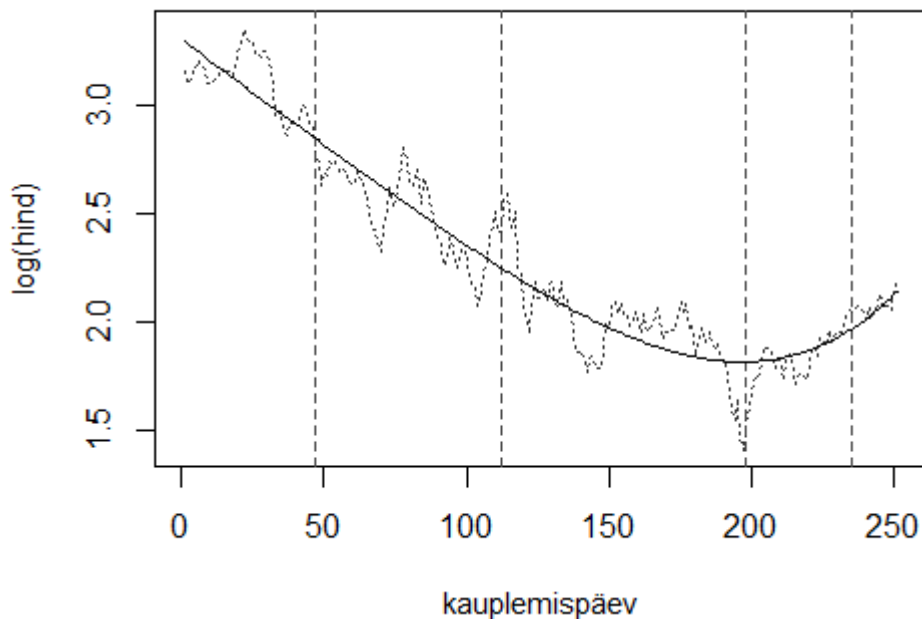
Jooniselt 3 on näha logaritmitud aktsiahindade dispersiooni ajas muutumine mudeli korral, mis sobis andmetega kõige paremini. Vertikaalse joonega on märgitud finantstulemuste esitamise kuupäevad. Tasub tähele panna, et finantstulemuste esitamise päeval on volatiilsuse kasv väiksem kui sellele eelneval ja järgneval päeval. Suurim kasv on 2 päeva enne ja pärast tulemusi.



Joonis 3. Ettevõtte AREX dispersiooni muutus, kus punktiirjoon tähistab finantstulemuste kuupäeva

Volatiilsuse kasvu uurides kasutasime keskväärtuse modelleerimiseks sirglõike. Sellest võib aga tekkida kahtlus, et hajuvuse suurenemine finantstulemuste ümbruses oli tingitud sirglõikude otste ebatäpsemast määratusest. Seetõttu vaatame järgnevalt, kas volatiilsuse kasvu saab täheldada ka siis, kui keskväärtus on modelleeritud sileda funktsiooni abil.

Valime selleks ajast sõltuva neljanda astme polünoomi võrrandiga $r = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{päev} + \beta_2 \cdot \text{päev}^2 + \beta_3 \cdot \text{päev}^3 + \beta_4 \cdot \text{päev}^4$ (vt joonist 4). Kui saame kinnituse, et hajuvus suureneb ka polünoomi korral, võime olla veendunud, et see on tõepoolest andmetega kooskõlas, mitte ei ole tingitud meie poolt valitud keskväärtuse mudelist.



Joonis 4. Ettevõtte AREX logaritmitud aktsiahinna keskväärtuse modelleerimine ajast sõltuva neljanda astme polünoomiga

Võrdleme kahte mudelit, kus keskväärtus on modelleeritud polünoomiga, aga ühel juhul on hajuvus konstantne, teisel juhul on lubatud ka hajuvuse suurenemine. Volatiilsuse kasvu on modelleeritud samamoodi nagu eelnevalt parimaks osutunud mudeli puhul ehk kordajad on Poissoni jaotuse tõenäosusfunktsioonist.

Osutub, et modelleeritud hajuvuse korral on AIC väärtus 3.5 võrra väiksem kui konstantse hajuvuse korral. Seega oleme saanud kinnituse, et andmetes tõepoolest esineb volatiilsuse kasv finantstulemuste ümbruses.

2.2 Hinna sõltumine hajuvusest

Erinevad majandusteadlased nagu W. F. Sharpe, F. Black ja M. Scholes on aktsiahinna muutuseid otseselt seostanud aktsiahinna volatiilsusega. Majandusteadlane R. S. Pindyck näitas oma uurimuses, et 1970. aastate aktsiahinna langused olid suuresti seotud kasvava volatiilsusega. (Baillie & DeGennaro, 1990, lk 203)

Näitena võib tuua ka ettevõtte Crestmont Research avaldatud raporti, kus indeksi S&P 500 varal on uuritud seost aktsiaturu liikumise ja päevase volatiilsuse vahel. Selgus, et mida väiksem on volatiilsus, seda suurema tõenäosusega läheb indeksi hind üles, ning mida suurem on volatiilsus, seda suurema tõenäosusega indeksi hind langeb. (Cresmont Research, 2016)

Uurime ka käesolevas töös, kas ettevõtte AREX aktsiahind sõltub volatiilsusest. Toimime nii, nagu peatükis 1.3.1 kirjeldatud on, ehk lisame disainimaatriksisse \mathbf{X} uue veeru dispersioonidega ja vektorisse $\boldsymbol{\beta}$ lisame 13. elemendiks dispersioonile vastava kordaja. Hinnata on vaja seega 18 parameetrit: 5 kovariatsioonimaatriksi parameetrit σ_γ^2 , σ_ε^2 , ρ , λ ja S ning 13 vektori $\boldsymbol{\beta}$ parameetrit. Hinnangud leiame suurima tõepära meetodil.

Selgub, et dispersioonile vastava kordaja hinnang on $\hat{\beta}_{13} = -0.023$. Mudeli AIC väärtus on aga -661.661 , mis on suurem kui siiani parima mudeli AIC väärtus -663.673 . Kuigi andmed vihjavad võimalusele, et kõrgem volatiilsus toob kaasa aktsiahinna languse, ei vii keerukam mudel, mis arvestab ka volatiilsuse muutumise mõju, täpsemate aktsiahinna prognoosideni. Seega pole vähemalt antud pikkusega aegrea puhul põhjust majandusteadlaste väitega nõustuda.

2.3 Aktsiahindade prognoosimine

Järgnevalt prognoosime mõlema ettevõtte jaoks 4 uut aktsiahinna väärtust kauplemispäevade 252–255 jaoks. Selleks kasutame AIC põhjal parimaks osutunud mudeleid. Ettevõtte AREX aktsiahindade jaoks on parim mudel selline, kus keskvärtus on modelleeritud sirglõikudena ning kovariatsioonimaatriks on kujul \mathbf{V}_2 . Hajuvus suureneb nii enne kui pärast finantstulemuste esitamist, kusjuures kordajad on samast Poissoni jaotusest. Ettevõtte DGAS puhul on samuti parim mudel selline, kus keskvärtus on modelleeritud sirglõikudena, kuid kovariatsioonimaatriks on kujul \mathbf{V}_1 . Aktsiahindade hajuvus on ettevõttel DGAS konstantne.

Peatüki 1.4 põhjal teame, et uue väärtuse prognoos on kujul $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{C}\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$, kus \mathbf{C} on kovariatsioonimaatriks prognoositavate ja olemasolevate väärtuste vahel. Kasutame kovariatsioonimaatriksite \mathbf{V} ja \mathbf{C} asemel nende suurima tõepära hinnanguid. See tähendab, et leiame empiirilised prognoosid (*EBLUP*). Uute väärtuste disainimaatriksis \mathbf{L}' peame arvestama, et tegemist on nüüd kauplemispäevadega 252–255 ning need kuuluvad finantstulemuste 5. gruppi.

Kuna ettevõtte AREX puhul ei ole hajuvus konstantne, peame kõigepealt leidma uute kauplemispäevade kaugused viimasest finantstulemuste kuupäevast, need on $\mathbf{d}_{252} \dots \mathbf{d}_{255}$. Seejärel saame teada hajuvust suurendavad kordajad $\mathbf{k}_i = 1 + \hat{S} \cdot f(\mathbf{d}_i; \hat{\lambda}) = 1 + \hat{S} \cdot \frac{\lambda^{d_i} e^{-\lambda}}{d_i!}$, kus kasutame λ ja S hinnanguid, mis on toodud tabelis 8.

Edasi leiame matriksi $\hat{\mathbf{C}}$, mis ettevõtte AREX puhul on kujul

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}^{251} \sqrt{(1 + \mathbf{k}_1)(1 + \mathbf{k}_{252})} & \hat{\rho}^{250} \sqrt{(1 + \mathbf{k}_2)(1 + \mathbf{k}_{252})} & \dots & \hat{\rho} \sqrt{(1 + \mathbf{k}_{251})(1 + \mathbf{k}_{252})} \\ \hat{\rho}^{252} \sqrt{(1 + \mathbf{k}_1)(1 + \mathbf{k}_{253})} & \hat{\rho}^{251} \sqrt{(1 + \mathbf{k}_2)(1 + \mathbf{k}_{253})} & \dots & \hat{\rho}^2 \sqrt{(1 + \mathbf{k}_{251})(1 + \mathbf{k}_{253})} \\ \hat{\rho}^{253} \sqrt{(1 + \mathbf{k}_1)(1 + \mathbf{k}_{254})} & \hat{\rho}^{252} \sqrt{(1 + \mathbf{k}_2)(1 + \mathbf{k}_{254})} & \dots & \hat{\rho}^3 \sqrt{(1 + \mathbf{k}_{251})(1 + \mathbf{k}_{254})} \\ \hat{\rho}^{254} \sqrt{(1 + \mathbf{k}_1)(1 + \mathbf{k}_{255})} & \hat{\rho}^{253} \sqrt{(1 + \mathbf{k}_2)(1 + \mathbf{k}_{255})} & \dots & \hat{\rho}^4 \sqrt{(1 + \mathbf{k}_{251})(1 + \mathbf{k}_{255})} \end{pmatrix} \hat{\sigma}_Y^2$$

ning ettevõtte DGAS puhul on kujul

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}^{251} & \hat{\rho}^{250} & \dots & \hat{\rho} \\ \hat{\rho}^{252} & \hat{\rho}^{251} & \dots & \hat{\rho}^2 \\ \hat{\rho}^{253} & \hat{\rho}^{252} & \dots & \hat{\rho}^3 \\ \hat{\rho}^{254} & \hat{\rho}^{253} & \dots & \hat{\rho}^4 \end{pmatrix} \hat{\sigma}_Y^2.$$

Nüüd saamegi prognoosida uusi aktsiahindu (ettevõtte AREX näidiskood on lisas 6). Kõigepealt leiame prognoosid järgmise nelja kauplemispäeva logaritmitud aktsiahindade keskväärtustele. Originaalskaalasse tagasi teisendamiseks võtame need e -astmele. Tulemuseks ei ole aga enam aktsiahinna keskväärtuse prognoos, vaid hoopis aktsiahinna geomeetrilise keskmise prognoos (Bland, 1996).

Leiame ka 95% prognoosiintervallid peatükis 1.4.1 toodud valemite abil. Esiteks peame leidma prognoosivigade dispersioonide hinnangud, mis asuvad valemis (12) toodud matriksi $\hat{\mathbf{m}}$ diagonaalil. Kõik matriksi $\hat{\mathbf{m}}$ liikmed peale esimese liidetava on meil varasemalt defineeritud.

Paneme kirja ka liikme $\hat{D}(\mathbf{w})$, mis ettevõtte AREX puhul on kujul

$$\hat{D}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} (1 + \mathbf{k}_{252}) & \hat{\rho} \sqrt{(1 + \mathbf{k}_{252})(1 + \mathbf{k}_{253})} & \dots & \hat{\rho}^3 \sqrt{(1 + \mathbf{k}_{252})(1 + \mathbf{k}_{255})} \\ \hat{\rho} \sqrt{(1 + \mathbf{k}_{253})(1 + \mathbf{k}_{252})} & (1 + \mathbf{k}_{253}) & \dots & \hat{\rho}^2 \sqrt{(1 + \mathbf{k}_{253})(1 + \mathbf{k}_{255})} \\ \hat{\rho}^2 \sqrt{(1 + \mathbf{k}_{254})(1 + \mathbf{k}_{252})} & \hat{\rho} \sqrt{(1 + \mathbf{k}_{254})(1 + \mathbf{k}_{253})} & \dots & \hat{\rho} \sqrt{(1 + \mathbf{k}_{254})(1 + \mathbf{k}_{255})} \\ \hat{\rho}^3 \sqrt{(1 + \mathbf{k}_{255})(1 + \mathbf{k}_{252})} & \hat{\rho}^2 \sqrt{(1 + \mathbf{k}_{255})(1 + \mathbf{k}_{253})} & \dots & (1 + \mathbf{k}_{255}) \end{pmatrix} \hat{\sigma}_Y^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \mathbf{I}$$

ning ettevõtte DGAS puhul kujul

$$\hat{D}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho} & \hat{\rho}^2 & \hat{\rho}^3 \\ \hat{\rho} & 1 & \hat{\rho} & \hat{\rho}^2 \\ \hat{\rho}^2 & \hat{\rho} & 1 & \hat{\rho} \\ \hat{\rho}^3 & \hat{\rho}^2 & \hat{\rho} & 1 \end{pmatrix} \hat{\sigma}_Y^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \mathbf{I}.$$

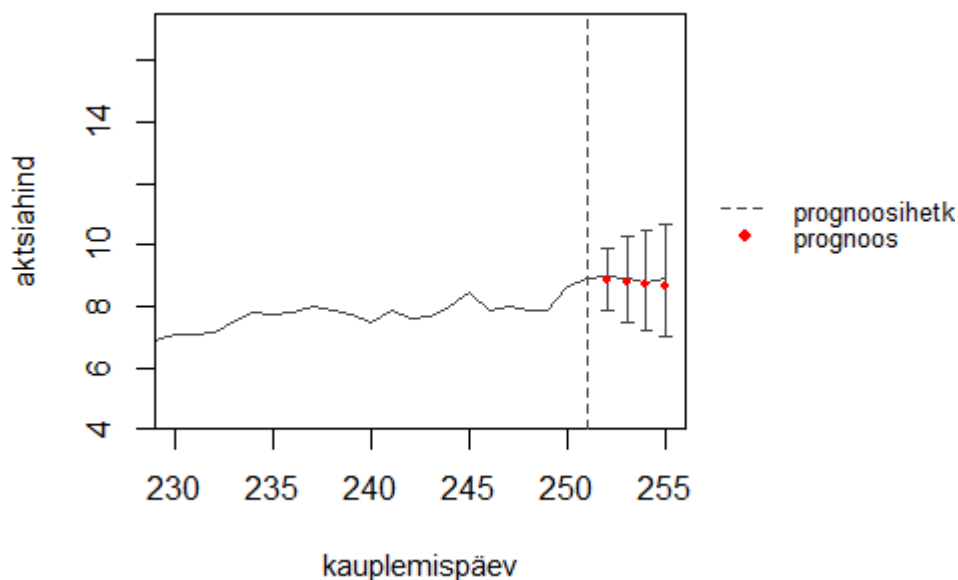
Olles leidnud matriksi $\hat{\mathbf{m}}$, saame kirja panna 95% prognoosiintervallid uutele logaritmitud aktsiahindadele. Need on $\tilde{\mathbf{w}} \pm 1.96 \sqrt{\hat{\mathbf{m}}}$. Teisendame ka prognoosiintervallid originaalskaalasse tagasi. Mõlema ettevõtte tulemused koos realiseerunud aktsiahindadega on

esitatud tabelis 9, toodud on ka vastavad joonised 5 ja 6. Pikema perioodiga joonis on toodud lisa 7.

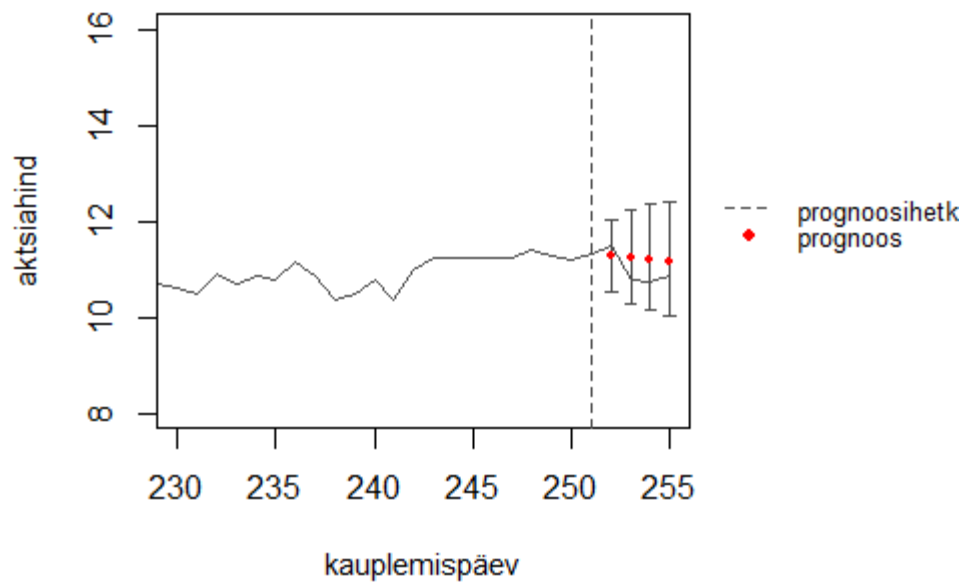
Tabelist ja joonistelt on näha, kuidas mõlema ettevõtte prognoositud aktsiahinnad ajas veidi langevad. Mõlema ettevõtte puhul asuvad reaalsed aktsiahinnad prognoosiintervallis ning ettevõtte AREX puhul on prognoosid lähedasel tegelikele hindadele.

Tabel 9. Nelja uue aktsiahinna geomeetrilise keskmise prognoosid koos prognoosiintervallide ja realiseerunud hindadega

	päev 252	päev 253	päev 254	päev 255	
AREX	prognoos	8.853	8.779	8.716	8.663
	tegelik	9.0	8.91	8.8	8.9
	P.I.	7.896 ... 9.926	7.506 ... 10.267	7.241 ... 10.492	7.042 ... 10.657
DGAS	prognoos	11.268	11.229	11.201	11.181
	tegelik	11.5	10.8	10.74	10.86
	P.I.	10.548 ... 12.040	10.299 ... 12.243	10.152 ... 12.358	10.056 ... 12.432



Joonis 5. Ettevõtte AREX nelja järgmise aktsiahinna prognoosid koos prognoosiintervallide ja realiseerunud hindadega



Joonis 6. Ettevõtte DGAS nelja järgmise aktsiahinna prognoosid koos prognoosiintervallide ja realiseerunud hindadega

Kokkuvõte

Käesolevas magistritöös modelleeriti segamudelite teooriale tuginedes USA nafta- ja gaasiettevõtete Approach Resources, Inc. ja Delta Natural Gas Company, Inc. aktsiahindu. Töö eesmärk oli leida parim struktuur aktsiahindade kovariatsioonimaatriksile ning hinnata selles sisalduvad tundmatud parameetrid suurima tõepära meetodil. Parima mudeli abil sooviti prognoosida tuleviku aktsiahindu.

Eeldati, et aktsiahinnad on normaaljaotusest $\mathbf{y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}; \mathbf{V})$ ning järgivad segamudelit kujul $\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i$, kus $\boldsymbol{\mu}$ on aktsia õiglane hind, $\boldsymbol{\gamma}_i$ on i . kauplemispäeva mõju ning $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ on i . aktsiahinna juhuslik häiritus. Lisaks eeldati, et päeva mõjud $\boldsymbol{\gamma}_i$ on omavahel korreleeritud läbi esimest järku autoregressiivse mudeli.

Esmalt võeti vaatluse alla aktsiahindade keskväärtus. Akaike informatsioonikriteeriumile tuginedes leiti, et võrreldes konstantse keskväärtusega sobib andmetega paremini mudel, kus keskväärtus järgib iga kahe finantstulemuse vahel erinevat sirglõiku.

Järgmisena sobitati erinevate struktuuridega kovariatsioonimaatrikseid, eeldades endiselt päeva mõjude korreleeritust. Esialgu prooviti mudelit, kus aktsiahinna dispersioon on konstantne, ning seejärel lasti päeva mõju dispersioonil ka varieeruda. Sooviti teada, kas finantstulemuste ümbruses saab täheldada volatiilsuse kasvu. Selle jaoks leiti dispersiooni suurendavad kordajad erinevate jaotuste tihedusfunktsioonidest. Vaatluse all olid normaaljaotus, eksponentjaotus ning Poissoni jaotus.

Osutus, et ettevõtte Approach Resources, Inc. aktsiahindadega sobib kõige paremini mudel, kus aktsiahinna dispersioon suureneb enne ja pärast finantstulemuste teatamist, kusjuures kordajad on Poissoni jaotuse tõenäosusfunktsioonist. Ettevõtte Delta Natural Gas Company, Inc. puhul aga dispersiooni suurenemist täheldada ei saanud ning andmetega sobib paremini mudel, kus dispersioon on konstantne.

Ettevõtte Approach Resources, Inc. puhul uuriti lisaks, kas kinnitada saab majandusteadlaste väidet, et aktsiahind sõltub volatiilsusest. Selle jaoks lisati keskväärtuse $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ disainimaatriksisse uus veerg parima mudeli abil hinnatud dispersioonidega. Seejärel hinnati uuesti parameetrid ning võrreldi mudeleid AIC põhjal. Kuna AIC väärtus ei vähenenud, polnud antud pikkusega aegrea puhul põhjust majandusteadlaste ütlust kinnitada.

Töö lõpus kasutati parimaid mudeleid uute aktsiahindade prognoosimiseks, kuhu juurde lisati ka prognoosiintervallid. Ettevõtte Approach Resources, Inc. puhul on prognoositud väärtused küllaltki lähedased tegelikele tulevikuväärtustele. Ettevõtte Delta Natural Gas Company, Inc. prognoosid on tegelikest väärtustest veidi enam erinevad, kuid sellegipoolest paiknevad prognoosiintervallide sees.

Kasutatud kirjandus

- Approach Resources, Inc. (2009). *SEC Filings*. Allikas: Approach Resources, Inc.: http://ir.approachresources.com/phoenix.zhtml?c=214016&p=irol-sec&control_symbol=. Vaadatud 15.05.2017
- Baillie, R. T., & DeGennaro, R. P. (1990). Stock Returns and Volatility. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.
- Bland, J. (1996). *Statistics notes: Transformations, means, and confidence intervals*. Allikas: The BMJ: <http://www.bmj.com/content/312/7038/1079>. Vaadatud 15.05.2017
- Brandimarte, P. (2014). *Handbook in Monte Carlo Simulation: Applications in Financial Engineering, Risk Management and Economics*.
- Cresmont Research. (2016). *Stock Market Returns & Volatility*. Allikas: Cresmont Research: <https://www.cresmontresearch.com/blog/document/stock-market-returns-volatility/>. Vaadatud 15.05.2017
- Delta Natural Gas Company, Inc. (2009). *Sec Filings*. Allikas: Delta Natural Gas Company, Inc.: <http://investors.deltagas.com/phoenix.zhtml?c=65310&p=irol-sec>. Vaadatud 15.05.2017
- Jiang, J. (2007). *Linear and Generalized Linear Mixed Models and Their Applications*.
- McCulloch, C. E., & Searle, S. R. (2001). *Generalized, Linear and Mixed Models*.
- NASDAQ:AREX. (2009). *Historical prices*. Allikas: Google Finance: <https://www.google.com/finance/historical?cid=717578&startdate=Jun+2%2C+2008&enddate=May+29%2C+2009&num=30&ei=4970WLG6EdbHswGktqFQ>. Vaadatud 15.05.2017
- NASDAQ:DGAS. (2009). *Historical prices*. Allikas: Google Finance: <https://www.google.com/finance/historical?cid=153344&startdate=Jun+2%2C+2008&enddate=May+29%2C+2009&num=30&ei=TOL0WLGuFZbDswH7w6KIAQ>. Vaadatud 15.05.2017
- Robinson, G. K. (1991). That BLUP Is a Good Thing: The Estimation of Random Effects. *Statistical Science*.
- Searle, S. R., Casella, G., & McCulloch, C. E. (2006). *Variance Components*.
- West, B. T., Welch, K. B., & T., G. A. (2007). *Linear Mixed Models A Practical Guide Using Statistical Software*.
- Zimmerman, D., & Cressie, N. (1992). Mean squared prediction error in the spatial linear model with estimated covariance parameters. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*.

Lisad

Lisa 1. Maatrikstuletised (Jiang, 2007, lk 234)

- (i) $\frac{\partial}{\partial x} x'Ax = 2x'A$
- (ii) $\frac{\partial A^{-1}}{\partial \theta_i} = -A^{-1} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta_i} \right) A^{-1}$, kus A on sümmeetriline maatriks
- (iii) $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log(|A|) = \text{tr}(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \theta_i})$, kus A on positiivselt määratud maatriks

Lisa 2. Näitele 1.5 vastav R-i kood

```
> library("rootSolve") #vaja paketti rootSolve
> #vererõhu andmed
> naide=data.frame(x=c(1:10),bp=c(119.8,120.4,120.6,120,121.4,
      120,120.2,120,119,120.4))
> tr=function(m){return(sum(diag(m)))} #maatriksi jälg
> #kovariatsioonimaatriks
> km=function(sigma_g,sigma_e,rho_g,n){
  d=as.matrix(dist(1:n))
  kor_g=matrix(outer(rho_g,d, FUN="^"),ncol=ncol(d))
  V=sigma_g*kor_g+sigma_e*diag(n)
  return(V)}
> K=function(rho,n){
  d=as.matrix(dist(1:n))
  kor_g=matrix(outer(rho,d, FUN="^"),ncol=ncol(d))
  return(kor_g)}
> #tuletis maatriksist K rho järgi
> L=function(rho,n){
  d=as.matrix(dist(1:n))
  Z=matrix(outer(rho,pmax((d-1),0), FUN="^"),ncol=ncol(d))
  hadamard.prod(d,Z)}
> #võrrandite nullkohtade leidmine
> #selgitus algväärtuste teisendamise kohta on ptk 2.1.1
```

```

> mudel=function(x_alg) {
  x[1]=exp(x_alg[1])
  x[2]=exp(x_alg[2])
  x3=exp(x_alg[3]) / (1+exp(x_alg[3]))
  x[3]=x3*2-1
  y=naide$bp
  n=length(y)
  X=rep(1,n)
  V=km(x[1],x[2],x[3],n)
  V_pöörd=solve(V)
  bhat=ginv(t(X)%*%V_pöörd%*%X)%*%t(X)%*%V_pöörd%*%y
  K=K(x[3],n)
  L=L(x[3],n)
  P=V_pöörd-V_pöörd%*%X%*%ginv(t(X)%*%V_pöörd%*%X)%*%
      t(X)%*%V_pöörd
  gamma=tr(V_pöörd%*%K)-t(y-X%*%bhat)%*%
      V_pöörd%*%K%*%V_pöörd%*%(y-X%*%bhat)
  eps=tr(V_pöörd)-t(y-X%*%bhat)%*%V_pöörd%*%
      V_pöörd%*%(y-X%*%bhat)
  rho=tr(V_pöörd%*%(x[1]*L))-t(y-X%*%bhat)%*%
      V_pöörd%*%(x[1]*L)%*%V_pöörd%*%(y-X%*%bhat)
  c(gamma,eps,rho) }
> param=multiroot(mudel, start = c(-1.6,-1.7,-1))
> exp(param$root[1])
[1] 0.182222
> exp(param$root[2])
[1] 0.1561885
> kor=exp(param$root[3]) / (1+exp(param$root[3]))
> kor*2-1 #üंबर skaleerimine
[1] -0.3070469

```

Lisa 3. Teoreem ruutvormi kohta (Searle, Casella, & McCulloch, 2006, lk 466)

Olgu A sümmeetriline maatriks. Olgu \mathbf{y} jaotusest $\mathbf{y} \sim (\boldsymbol{\mu}; V)$ ehk $E\mathbf{y} = \boldsymbol{\mu}$ ja $D\mathbf{y} = V$. Siis $E(\mathbf{y}'A\mathbf{y}) = \text{tr}(AV) + \boldsymbol{\mu}'A\boldsymbol{\mu}$.

Lisa 4. Parameetrite hinnangute leidmine R-is

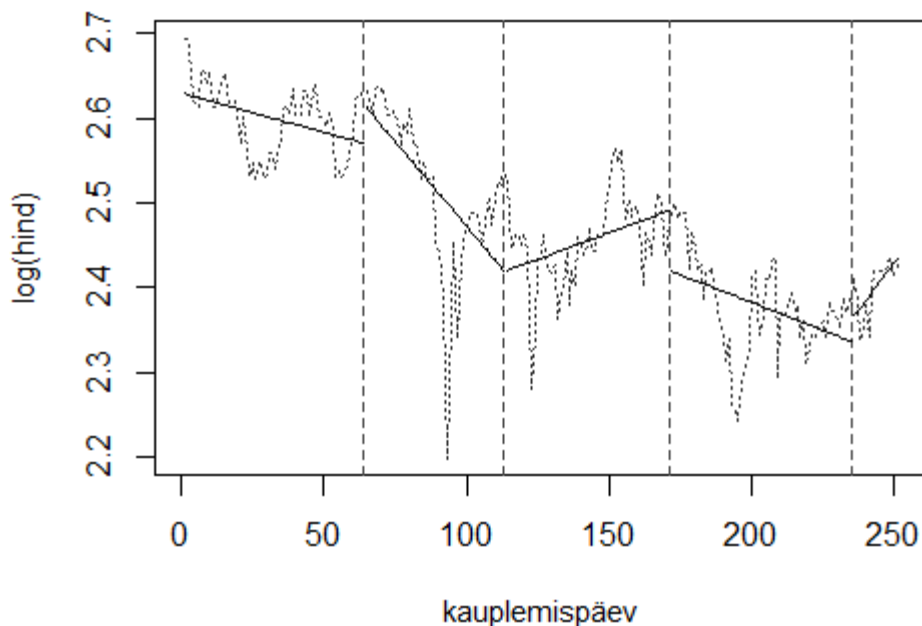
```
> h=log(aktsiahinnad)
> #kovariatsioonimaatriks
> kov=function(sigma_g, sigma_e, rho_g, n){
  d=as.matrix(dist(1:n))
  kor_g=matrix(outer(rho_g,d,FUN="^"),ncol=ncol(d))
  V=sigma_g*kor_g+sigma_e*diag(n)
  return(V)}
> toepara=function(x_alg,h,X){
  x[1]=exp(x_alg[1])
  x[2]=exp(x_alg[2])
  x3=exp(x_alg[3])/(1+exp(x_alg[3]))
  x[3]=x3*2-1 #überskaleerimine
  n=length(h)
  V=kov(x[1],x[2],x[3],n)
  V_pöörd=solve(V)
  X=rep(1,n)
  bhat=ginv(t(X)%*%V_pöörd%*%X)%*%t(X)%*%V_pöörd%*%h
  det=determinant(x=2*pi*V,logarithm=T)
  l=(-1/2)*det$modulus[1]-(1/2)*t(hX%*%bhat)%*%
    V_pöörd%*%(h-X%*%bhat)
  return(-l[1,1])} # nlminb minimiseerib, seega miinusmärk
> #parameetrite leidmine nlminb käsuga
> param=function(hinnad){
  o=nlminb(c(0,-3,1.7),toepara,
```

```

    gradient=NULL, hessian=NULL, h=hinnad,
    control=list(iter.max=10000))
  k=exp(o$par[3]) / (1+exp(o$par[3]))
  return(c(exp(o$par[1]), exp(o$par[2]), k*2-1)) }
> p=param(h) # 2.608454e-01 1.679517e-11 9.921445e-01
> AIC=2*4+2*toepara(c(log(p[1:2]),
    log(((p[3]+1)/2) / (1-(p[3]+1)/2))), h) # -656.3257

```

Lisa 5. Keskvärtuse modelleerimine ettevõtte DGAS puhul



Joonis 7. Ettevõtte DGAS logaritmitud aktsiahinna keskvärtuse modelleerimine finantstulemuste kuupäevade abil

Lisa 6. Nelja uue aktsiahinna prognoosimine R-is

```

> h=log(aktsiahinnad)
> #parameetrite hinnangud, mis on toodud ka tabelis 8, asuvad
vektoris p=c(1.492030e-02,2.060978e-09,8.822099e-
01,2.848537e+00,3.641596e+00)
> #vektori beeta hinnang on b=c(1.922508203,-
0.002678448,1.329208817,1.429884272,0.969665117,-1.508177063,-

```

```

0.298072940,-0.005465865,-0.008117137,-
0.003223134,0.009587267,0.004540421)
> #kovariatsioonimaatriks, kus n=251, n1=c(47,112,198,235)
> kov=function(sigma_g,sigma_e,rho_g,n,n1,sd,S){
  d=as.matrix(dist(1:n))
  kor_g=matrix(outer(rho_g,d, FUN="^"),ncol=ncol(d))
  #tulemuste kuupäevadest sõltumine:
  c=sapply(n1, function(x)abs(x-(1:n)),simplify=TRUE)
  dist=apply(c,1,min)
  dist_m=diag(sqrt(1+S*sapply(dist,dpois,sd)))
  yheda=matrix(1,ncol=n,nrow=n)
  abil=yheda**dist_m
  abi2=dist_m**yheda
  kordajad=hadamard.prod(abil,abi2)
  V=sigma_g*hadamard.prod(kor_g,kordajad)+sigma_e*diag(n)
  return(V)}
> V=kov(p[1],p[2],p[3],n,n1,p[4],p[5])
> G=V-p[2]*diag(n) #D(gamma)
> Xuus=matrix(c(1,252,0,0,0,0,1,0,0,0,0,252,
  1,253,0,0,0,0,1,0,0,0,0,253,
  1,254,0,0,0,0,1,0,0,0,0,254,
  1,255,0,0,0,0,1,0,0,0,0,255),nrow=4,ncol=12,byrow=T)
> # vanad vaatlused sõltuvad tulemuste kuupäevast:
> c=sapply(n1, function(x)abs(x-(1:n)),simplify=TRUE)
> dist=apply(c,1,min)
> kordajad=sqrt(1+p[5]*sapply(dist,dpois,p[4]))
> # uued vaatlused sõltuvad tulemuste kuupäevast:
> c2=sapply(n1, function(x)abs(x-(252:255)),simplify=TRUE)
> dist2=apply(c2,1,min)
> kordajad2=sqrt(1+p[5]*sapply(dist2,dpois,p[4]))
> #maatriks C=cov(h_uued,h_vanad)
> C1=p[3]^(251:1)*kordajad*kordajad2[1]*p[1]

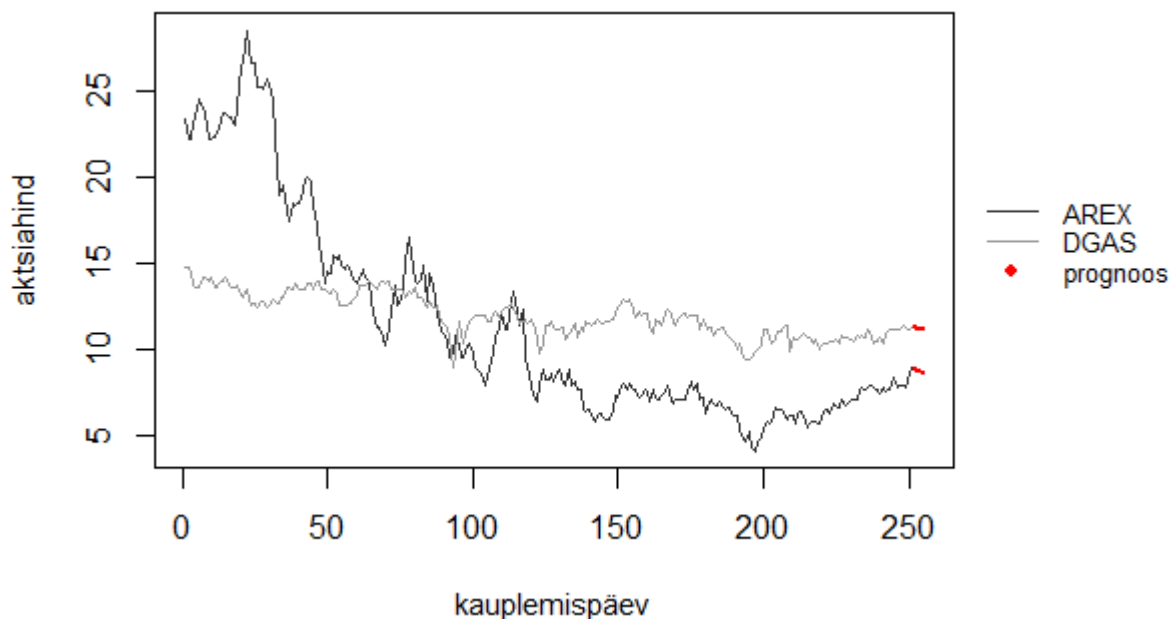
```

```

> C2=p[3]^(252:2)*kordajad*kordajad2[2]*p[1]
> C3=p[3]^(253:3)*kordajad*kordajad2[3]*p[1]
> C4=p[3]^(254:4)*kordajad*kordajad2[4]*p[1]
> C=rbind(C1,C2,C3,C4)
#disainimaatriksi X1 loomine
> date=1:n
> t=NA
> t[1:n1[1]]=1
> t[(n1[1]+1):n1[2]]=2
> t[(n1[2]+1):n1[3]]=3
> t[(n1[3]+1):n1[4]]=4
> t[(n1[4]+1):n]=5
> t=factor(t)
> X1=model.matrix(~ date+t+date*t,
contrasts.arg=list(t=contrasts(t, contrasts=F)))
> prognoos=Xuus%*%b+C%*%solve(V)%*%(h-X1%*%b)
> exp(prognoos) #8.853088, 8.779041, 8.716142, 8.662925

```

Lisa 7. Aktsiahinna aegread koos prognoosidega



Joonis 8. Ettevõtte AREX ja DGAS aktsiahindade aegread koos prognoositud hindadega

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Carmen Taimre,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Aktsiahindade modelleerimine lineaarsete segamudelite abil“, mille juhendaja on Märt Möls,
 - 1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - 1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **15.05.2017**