TARTU ÜLIKOOL
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Leesi Peedumäe

Üldiste koonduvuseeskirjade suhtes pidevad funktsioonid

Matemaatika eriala

Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja: professor Toivo Leiger

Tartu 2017

Üldiste koonduvuseeskirjade suhtes pidevad funktsioonid

Magistritöö

Leesi Peedumäe

Lühikokkuvõte. Magistritöö eesmärgiks on erinevatest konkreetsetest koonduvuseeskirjadest – maatriksitega määratud eeskirjad, peaaegu koonduvus, statistiline koonduvus, tugev summeeruvus – lähtudes üldiste koonduvuseeskirjade G selliste omaduste kirjeldamine, mis garanteerivad vaadeldava eeskirja suhtes pidevate (nn G-pidevate) funktsioonide lineaarsuse või pidevuse. Töö aluseks on J. Connori ja K.-G. Grosse-Erdmanni 2003. a avaldatud põhjalik artikkel [7], mis üldistas kõiki selles valdkonnas varem ilmunud tulemusi. Käesoleva töö autori ülesandeks oli artiklis sisalduvate tõestuste detailne esitamine.

CERCS teaduseriala: P140 Read, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.

Märksõnad: jadade koonduvuseeskirjad, maatriksiga määratud koonduvuseeskiri, peaaegu koonduvus, statistiline koonduvus, tugev summeeruvus, G-pidevad funktsioonid.

Continuity of functions in terms of sequential convergence methods

Master's thesis

Leesi Peedumäe

Abstract. The definition of continuity in the ordinary sense can be modified by substituting the limit functional with an arbitrary linear functional G. The aim of this thesis is to describe some of the properties of general definitions of sequential convergence which guarantee linearity or continuity of G-continuous functions. Specific sequential methods of convergence (A-summability, strong summability, almost convergence, statistical convergence) are examined. This master's thesis is based on the article [7] by J. Connor and K.-G. Grosse-Erdmann from 2003 and this thesis contributes with presenting detailed proofs of the article.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.

Keywords: sequential convergence, A-summability, strong summability, almost convergence, statistical convergence, G-continuous functions.

Sisukord

Sissejuhatus

Teatavasti on funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pidev kohal u parajasti siis, kui

$$x_n \longrightarrow u \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(u).$$

1946. a püstitas H. Robbins [13] ajakirjas *Amer. Math. Monthly* järgmise probleemi: näidata, et tingimust

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to u \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \to f(u)$$

rahuldavad parajasti kõik lineaarsed funktsioonid $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, st funktsioonid kujul $u \longmapsto au + b$, kus $a, b \in \mathbb{R}$. Ajakirja toimetusele laekusid lahendused (vähemalt) kuuelt autorilt, toimetus avaldas 1948. a R. C. Bucki [4] poolt esitatud lahenduse.

Oli mõnevõrra üllatav, et jadade tavalise koonduvuse asendamisel nõrgema koonduvusega – antud juhul aritmeetiliste keskmiste koonduvusega ehk C_1-summeeruvusega – saadud uus nn C_1-pidevate funktsioonide klass osutub mitte laiemaks, vaid drastiliselt kitsaks. Eriti kui pidada silmas L. Fejeri poolt 1907. a tõestatud teoreemi, mille kohaselt iga pideva 2π-perioodilise funktsiooni f Fourier' rida on ühtlaselt C_1-summeeruv selleks funktsiooniks, kuigi üldjuhul pole see rida isegi punktiviisi koonduv. Selle pettumusega on ehk seletatav ka asjaolu, et järgmine selleteemaline töö [12] ilmus alles 1961. a. Artikli autor E. C. Posner vaatles C_1-summeeruvuse asemel suvalise regulaarse maatriksiga $A = (a_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ määratud A-summeeruvust, kus

$$A\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$$

(eeldusel, et rida $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$ koondub iga $n \in \mathbb{N}$ korral) ja regulaarsus tähendab, et $A\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = u$, kui $\lim_{n\to\infty} x_n = u$ (vt ka näide 1.2). Ta tõestas, et kui $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on selline funktsioon, et iga A-summeeruva jada (x_n) korral on jada $(f(x_n))$ A-summeeruv, siis on ta pidev tavalises mõttes. 1972. aastal ilmunud T. B. Iwiński artikli [8] põhitulemus kirjeldab selliste regulaarsete maatriksite A klassi, et teatavate lihtsate elementaarfunktsioonide $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ korral (näiteks ruutfunktsioon $u \longmapsto u^2$) järeldub jada (x_n) A-summeeruvusest jada $(f(x_n))$ A-summeeruvus. Tähelepanuväärne on Iwiński artikli viimane lause: *"In any case, the notion of A-continuity does not seem to be interesting."*

Peab veel märkima, et juba enne Posneri ja Iwiński tööde ilmumist avaldas I. J. Schoenberg 1959. a artikli [15], milles uuritakse Riemanni integraali definitsiooni ja summeerimismenetlusega määratud koonduvuseeskirjade vahekorda. Muuhulgas näitab autor, et leidub selliseid koonduvuseeskirju D, mille korral iga pidev funktsioon on D-pidev, mis tähendab, et iga pideva funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ korral kehtib implikatsioon

$$D\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = u \Rightarrow D\text{-}\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(u).$$

Selliseks koonduvuseeskirjaks on Schoenbergi väite kohaselt jadade statistiline koonduvus (vt näide 1.5).

Hoolimata esialgsest pettumusest, on üldiste koonduvuseeskirjade suhtes pidevate funktsioonide teema siiski mitmete autorite huvi äratanud ka hiljem. J. Antoni ja T. Šalát [2] näitasid 1980. a, et Bucki poolt tõestatud väide kehtib regulaarse maatriksiga määratud koonduvuseeskirja korral, kui see on teatava omadusega (L_1) (vt pt 2). Selle artikli jätkuna ilmunud Antoni töös [1] kirjeldatakse regulaarse maatriksiga määratud koonduvuseeskirju, mille suhtes ühes punktis pidevad saavad olla vaid lineaarsed funktsioonid. J. Borsík ja Šalát [3] uurisid 1993. a jadade peaaegu koonduvuse (vt näide 1.4) suhtes pidevaid funktsioone. E. Spigel ja N. Krupnik [16] püstitasid 1994. a nn dihhotoomia probleemi, millest käesolevas töös tuleb põhjalikumalt juttu 5. peatükis.

Kõigi eelpool nimetatud autorite tulemused on väga üldises koonduvuseeskirjade kontekstis kokku võetud ja süstemaatiliselt esitatud J. Connori ja K.-G. Grosse-Erdmanni 2003. a ilmunud ulatuslikus artiklis [7]. Lisaks eelpool mainitud koonduvuseeskirjadele – maatriksitega määratud eeskirjad, peaaegu koonduvus, statistiline koonduvus – käsitlevad autorid esmakordselt ka tugeva summeeruvusega määratud eeskirju (vt näide 1.3). See artikkel oli aluseks käesoleva magistritöö kirjutamisel.

Töö on referatiivne ja selle eesmärgiks oli eelpool nimetatud erinevatest konkreetsetest koonduvuseeskirjadest lähtudes üldiste koonduvuseeskirjade G selliste omaduste kirjeldamine, mis garanteerivad vaadeldava eeskirja suhtes pidevate (nn G-pidevate) funktsioonide lineaarsuse või pidevuse. Töö aluseks olevas artiklis [7] on tulemuste tõestused vaid (suurema või vähema detailsusega) markeeritud. Käesoleva töö autori ülesandeks oli tõestuste detailne esitamine.

Magistritöö esimeses peatükis esitame mitmed vajalikud tähistused ning anname ülevaate töös käsitletavatest jadade koonduvuseeskirjadest, mida edaspidi nimetame lihtsalt koonduvuseeskirjadeks või lühidalt eeskirjadeks: regulaarse maatriksiga määratud koonduvuseeskirjad, tugev summeeruvus, peaaegu koonduvus, statistiline koonduvus. Kirjeldame ka nende eeskirjade põhilisi omadusi.

Teine peatükk, lähtudes eespool mainitud Bucki [4] ja Antoni ning Šaláti [2] tulemustest, uurib lineaarsete ja G-pidevate funktsioonide vahekorda. Näitame, et
1) iga regulaarse koonduvuseeskirja G puhul on iga suvalises intervallis I määratud lineaarne funktsioon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ G-pidev ja
2) kui eeskiri G on omadusega (L_1), siis iga G-pidev funktsioon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ on lineaarne.

Kolmandas peatükis alustame pidevate ning G-pidevate funktsioonide omavaheliste seoste uurimist. Seejuures käsitleme põhiliselt nn osajada-tüüpi koonduvuseeskirju. Osutub, et niisuguse G korral on iga G-pidev funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pidev, vastupidine implikatsioon saab aga kehtida vaid osajada-tüüpi koonduvuseeskirja korral. Siit järeldub, et kõigi pidevate funktsioonide hulk ei saa ühegi regulaarse koonduvuseeskirja G korral olla G-pidevate funktsioonide hulga pärisalamhulk. Selle peatüki kõige tähelepanuväärsem tulemus saadakse eelpool mainitud Iwiński [8] tulemuse täpsustamisel ning laiendamisel: regulaarse maatriksiga või tugeva summeeruvusega määratud koonduvuseeskiri on osajada-tüüpi parajasti siis, kui pidevate funktsioonide hulk langeb kokku G-pidevate funktsioonide hulgaga. Tähelepanuväärne on ka fakt, et need kaks tingimust on samaväärsed ruutfunktsiooni $u \longmapsto u^2$ G-pidevusega.

Neljas peatükk lähtub Posneri [12] ja ka Iwiński [8] poolt tõestatud väitest, et kui regulaarse maatriksiga määratud koonduvuseeskirja G korral on funktsioon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ G-pidev mingis punktis, siis on ta selles punktis pidev. Me näitame, et see väide kehtib iga sellise koonduvuseeskirja G puhul, mis on Connori ja Grosse-Erdmanni poolt defineeritud omadusega (S). Peatüki põhiteoreemis loetletakse selle omadusega eeskirjade klasse. Osutub, et muuhulgas on ka statistiline koonduvus omadusega (S).

Viies peatükk käsitleb nn dihhotoomia hüpoteesi, mille püstitasid Spigel ja Krupnik [16]: kõigi G-pidevate funktsioonide $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hulk langeb kokku kas kõigi lineaarsete funktsioonide hulgaga või kõigi pidevate funktsioonide hulgaga. Nimelt ei olnud kaua ühtki näidet regulaarsest koonduvuseeskirjast G, mille korral see nii poleks. Me esitame Connori ja Grosse-Erdmanni [7] tõestuse, mis lükkab selle hüpoteesi ümber. Osutub, et vastavaid kontranäiteid saab leida nii tugeva summeeruvusega kui ka tavalise regulaarse maatriksiga määratud koonduvuseeskirjade hulgas. Peatüki teine osa kirjeldab selliste koonduvuseeskirjade klasse, mille korral vaadeldav dihhotoomia tõepoolest realiseerub.

Kuuendas peatükis pöördume tagasi G-pideva funktsiooni lineaarsuse probleemi juurde. Kirjeldame koonduvuseeskirju G, mille puhul iga funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, mis on G-pidev mingis punktis u_0, on lineaarne. Lähtekohaks on eeskätt Bucki [4], aga ka Antoni [1] ja Spigeli ning Krupniku [16] tulemused, mis kõik käsitlesid maatriksiga määratud eeskirju. Me kirjeldame üht selliste koonduvuseeskirjade klassi (omadusega (L_2)), mille puhul vaadeldav tingimus kehtib. Osutub, et teises peatükis vaadeldud nõrgem omadus (L_1) seda tingimust ei garanteeri, küll aga on sel juhul iga funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, mis on G-pidev mingis punktis u_0, tavalises mõttes pidev.

1 Jadade koonduvuseeskirjad

Tähistame tähega ω kõigi arvjadade $\mathbf{x} = (x_n)$ hulka, st

$$\omega := \{\mathbf{x} = (x_n) \mid x_n \in \mathbb{R}\ \}.$$

Hulk ω on vektorruum, kui selles tehted defineerida koordinaaditi:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_n + y_n), \quad \lambda\mathbf{x} := (\lambda x_n) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Vektorruumi ω vektoralamruume nimetatakse jadaruumideks. Jadaruumid on näiteks kõigi tõkestatud jadade ruum

$$\ell^\infty := \{\mathbf{x} = (x_n) \mid \|\mathbf{x}\| := \sup_n |x_n| < \infty\},$$

kõigi koonduvate jadade ruum

$$c := \{\mathbf{x} = (x_n) \mid \text{eksisteerib } \lim \mathbf{x} := \lim_{n\to\infty} x_n\}$$

ja kõigi nulliks koonduvate jadade ruum

$$c_0 := \{\mathbf{x} = (x_n) \mid \lim \mathbf{x} = 0\}.$$

Teatavasti on $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ Banachi ruum, c on selle kinnine vektoralamruum, seega samuti Banachi ruum. Selle elementideks on muuhulgas jadad

$$\mathbf{e}^k := (\delta_{ki})_{i\in\mathbb{N}}\ (k \in \mathbb{N}) \text{ ja } \mathbf{e} := (1, 1, ..., 1).$$

Definitsioon. *Jadade koonduvuseeskirjaks* nimetame järgnevas lineaarset funktsionaali $G\colon c_G \longrightarrow \mathbb{R}$, kus c_G on mingi jadaruum. Kui $\mathbf{x} = (x_n) \in c_G$ ja $G(\mathbf{x}) = l$, siis ütleme, et jada $\mathbf{x}$ on *G-koonduv* arvuks l. Eeskirja G nimetatakse *regulaarseks*, kui $c \subset c_G$ ja $G(\mathbf{x}) = \lim \mathbf{x}$ iga $\mathbf{x} \in c$ puhul.

Esitame mõned näited regulaarsetest koonduvuseeskirjadest.

Näide 1.1. Funktsionaal $\lim\colon c \longrightarrow \mathbb{R}$ on regulaarne koonduvuseeskiri.

Näide 1.2. Regulaarsed maatriksid. Olgu $A = (a_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ lõpmatu maatriks, kus $a_{nk} \in \mathbb{R}$. Tähistame

$$\omega_A := \{\mathbf{x} = (x_n) \in \omega \mid \text{rida } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \text{ koondub iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral}\}$$

ning

$$c_A := \{\mathbf{x} = (x_n) \in \omega_A \mid \text{eksisteerib } A\text{-}\lim \mathbf{x} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\}.$$

Kui $\mathbf{x} \in c_A$, siis ütleme, et jada $\mathbf{x}$ on *summeeruv maatriksiga* A või A-*summeeruv.* Kui $c \subset c_A$ ja $A\text{-}\lim \mathbf{x} = \lim \mathbf{x}$ iga $\mathbf{x} \in c$ korral, siis öeldakse, et maatriks A on *regulaarne.*

Teoreem A (vt [9], teoreemid 2.1 ja 2.2). *(a) Maatriks A on regulaarne parajasti siis, kui kehtivad järgmised tingimused:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty, \tag{1.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1, \tag{1.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{1.3}$$

(b) Iga $\mathbf{x} \in c_0$ korral leidub A-$\lim \mathbf{x}$ parajasti siis, kui kehtib tingimus (1.2) ja eksisteerib $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk}$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral.

Järgmisest teoreemist tuleneb, et kui regulaarne maatriks A ei summeeri tõkestamata jadasid, siis langeb A-summeeruvus kokku tavalise koonduvusega.

Teoreem B (vt [9], teoreem 10.5). *Kui $c \subset c_A \subset \ell^\infty$, siis $c_A = c$.*

Funktsionaal

$$G\colon c_A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \longmapsto A\text{-}\lim \mathbf{x}$$

on regulaarne jadade koonduvuseeskiri. Sel juhul ütleme, et koonduvuseeskiri G on *määratud maatriksiga A.* Seda tüüpi eeskiri on (eelpool mainitud) C_1, mis on määratud maatriksiga (a_{nk}), kus

$$a_{nk} := \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ kui } k \leqslant n, \\ 0, \text{ kui } k > n \quad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ja

$$C_1\text{-}\lim \mathbf{x} := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \quad (\mathbf{x} \in c_{C_1}).$$

Näide 1.3. Tugev summeeruvus. Olgu $A = (a_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ mittenegatiivne maatriks[1], mille korral on rahuldatud tingimused:

$$\begin{aligned} &\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} < \infty, \\ &\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \neq 0, \\ &\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{1.4}$$

[1] Ütleme, et maatriks $A = (a_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ on mittenegatiivne, kui $a_{nk} \geqslant 0$ iga $n, k \in \mathbb{N}$ korral.

Kui jada $\mathbf{x} = (x_k)$ korral leidub selline $l \in \mathbb{R}$, et rida $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}|x_k - l|$ koondub iga $n \in \mathbb{N}$ korral ning

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}|x_k - l| = 0,$$

siis ütleme, et jada $\mathbf{x}$ on *tugevalt A-summeeruv* arvuks l. Funktsionaal

$$G\colon c_{|A|} \longrightarrow \mathbb{R},\ \mathbf{x} \longmapsto l,$$

kus $c_{|A|}$ on kõigi tugevalt A-summeeruvate jadade hulk, on regulaarne jadade koonduvuseeskiri. Sel juhul ütleme, et koonduvuseeskiri G on *määratud tugeva A-summeeruvusega.*

Kasutame allpool G. G. Lorentzi ja K. Zelleri [11] poolt tõestatud teoreemi, mis kirjeldab tugeva summeeruvuse ja tavalise summeeruvuse vahekorda.

Teoreem C. *Iga regulaarse mittenegatiivse lõpliku pikkusega*[2] *ridadega maatriksi A korral saab leida sellise regulaarse mittenegatiivse lõpliku pikkusega ridadega maatriksi B, et jada $\mathbf{x}$ on tugevalt A-summeeruv arvuks l parajasti siis, kui ta on B-summeeruv arvuks l.*

Näide 1.4. Peaaegu koonduvus. Teatavasti on kõikide koonduvate jadade ruum c Banachi ruumi $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ kinnine vektoralamruum, seega samuti Banachi ruum. Seejuures on funktsionaal $\lim\colon c \longrightarrow \mathbb{R}$ lineaarne ning pidev ja $\|\lim\| = 1$. Hahn-Banachi teoreemi kohaselt saab seda funktsionaali pidevalt, lineaarselt ning normi säilitades jätkata kogu ruumile ℓ^∞. Selline jätk pole üheselt määratud: leidub terve hulk jätke $h \in (\ell^\infty)'$, mis on positiivsed, st

$$h(\mathbf{x}) \geqslant 0, \text{ kui } x_k \geqslant 0 \ (k \in \mathbb{N}),$$

nihke suhtes invariantsed, st

$$h((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = h((x_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}),$$

ja normiga 1. Neid jätke nimetatakse *Banachi piirväärtusteks.*

Kui $\mathbf{x} \in \ell^\infty$ on selline jada, et $h(\mathbf{x}) = l$ iga Banachi piirväärtuse h korral, siis öeldakse, et jada $\mathbf{x}$ on *peaaegu koonduv* arvuks l. Tähistame $\mathrm{Lim}\mathbf{x} := l$.

Teoreem D (Lorentz [10]). *Jada $\mathbf{x}$ on peaaegu koonduv arvuks l parajasti siis, kui*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k+m} = l \quad \textit{ühtlaselt } m \in \mathbb{N} \textit{ suhtes.}$$

Kõigi peaaegu koonduvate jadade hulka tähistame ac, funktsionaal

$$G\colon ac \longrightarrow \mathbb{R},\ \mathbf{x} \longmapsto \mathrm{Lim}\mathbf{x},$$

on regulaarne koonduvuseeskiri.

[2] Ütleme, et jada $\mathbf{t} = (t_n)$ on pikkusega k_0, kui $t_{k_0} \neq 0$ ja $t_k = 0$ iga $k > k_0$ korral.

Näide 1.5. Statistiline koonduvus. Tähistagu $|B|$ hulga B võimsust ehk kardinaalarvu. Kui $A \subset \mathbb{N}$, siis tähistame

$$\delta(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leqslant n \mid k \in A\}|.$$

Öeldakse, et jada $\mathbf{x}$ on *statistiliselt koonduv* arvuks $l \in \mathbb{R}$, kui

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - l| > \epsilon\}) = 0 \text{ iga } \epsilon > 0 \text{ korral.}$$

Sel juhul nimetatakse arvu st-lim $\mathbf{x} := l$ jada $\mathbf{x}$ *statistiliseks piirväärtuseks.*

Teoreem E (Šalát [17]). *Jada* $\mathbf{x} = (x_n)$ *on statistiliselt koonduv arvuks* l *(st* st-lim $\mathbf{x} = l$*) parajasti siis, kui leidub selline osajada* (x_{n_k})*, et* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$.

Tähistame kõigi statistiliselt koonduvate jadade hulka sümboliga c_{st}. Funktsionaal

$$G\colon c_{st} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \longmapsto \text{st-}\lim \mathbf{x}$$

on regulaarne koonduvuseeskiri.

Toome sisse veel ühe edaspidi kasutatava tähistuse[3]. Olgu funktsioon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ määratud intervallis I. Kui $\mathbf{x} = (x_n)$ on selline jada, et $x_n \in I$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis tähistame $f(\mathbf{x}) := (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Definitsioon. Olgu G jadade koonduvuseeskiri. Öeldakse, et funktsioon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ on *G-pidev punktis* $u \in I$, kui iga arvuks u G-koonduva intervalli I punktide jada $\mathbf{x} = (x_n)$ korral jada $f(\mathbf{x})$ on G-koonduv arvuks $f(u)$. Öeldakse, et funktsioon f on *G-pidev alamhulgas* $D \subset I$, kui f on G-pidev igas punktis $u \in D$. Funktsiooni f nimetatakse *G-pidevaks*, kui see on G-pidev oma määramispiirkonnas I.

Funktsioon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ on definitsiooni kohaselt G-pidev parajasti siis, kui

$$G(f(\mathbf{x})) = f(G(\mathbf{x}))$$

iga G-koonduva jada $\mathbf{x} = (x_n)$ korral intervallis I.

Kogu töös tähistab täht I intervalli arvteljel. Intervalli I korral tähistame sümbolitega $\mathcal{L}(I)$, $\mathcal{G}(I)$ ja $\mathcal{C}(I)$ kõigi vastavalt lineaarsete, G-pidevate ja pidevate funktsioonide $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ hulka. Kui $I = \mathbb{R}$, kirjutame $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ ja $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ asemel lihtsalt $\mathcal{L}$, $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{C}$.

[3]Selle (mõnevõrra problemaatilise) tähistuse võtsid kasutusele Connor ja Grosse-Erdmann [7] ning selle on võtnud üle mitmed teised autorid (vt näiteks [6]).

2 Lineaarsete funktsioonide G-pidevus

Buck [4] näitas, et funktsioon on C_1-lim-pidev parajasti siis, kui ta on lineaarne, mis tähendab, et koonduvuseeskirja $G = C_1$-lim korral $\mathcal{L} = \mathcal{G}$. Antoni ja Šalát [2] tõestasid, et sama kehtib suvalise regulaarse maatriksiga määratud koonduvuseeskirja G korral, kui G on teatava omadusega (L_1).

Definitsioon Ütleme, et koonduvuseeskiri G on *omadusega* (L_1), kui leidub selline 0-1-jada $\mathbf{z}$, et $G(\mathbf{z}) \notin \{0,1\}$.

Näide 2.1. C_1-lim-koonduvus on omadusega (L_1): kui $\mathbf{z} = (0,1,0,1,\dots)$, siis $C_1\text{-}\lim \mathbf{z} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$.

Antoni ja Šaláti poolt esitatud tõestuses kasutatakse asjaolu, et regulaarse maatriksiga määratud koonduvuseeskirja G puhul järeldub G-pidevusest pidevus, üldjuhul koonduvuseeskirjal G sellist omadust pole. Selles peatükis näeme, et võrdus $\mathcal{G}(I) = \mathcal{L}(I)$ kehtib iga regulaarse koonduvuseeskirja korral, mis on omadusega (L_1).

Lineaarsete ja G-pidevate funktsioonide vaheliste seoste uurimist alustame lausega, mille kohaselt lineaarsed funktsioonid $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ on G-pidevad iga regulaarse koonduvuseeskirja G korral.

Lause 2.1. *Kui G on regulaarne jadade koonduvuseeskiri, siis $\mathcal{L}(I) \subset \mathcal{G}(I)$ iga intervalli $I \subset \mathbb{R}$ korral.*

Tõestus. Eeldame, et G on regulaarne, st $G(\mathbf{x}) = \lim \mathbf{x}$ iga $\mathbf{x} \in c$ korral. Olgu funktsioon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ defineeritud seosega $f(u) = au + b$, kus a, $b \in \mathbb{R}$, näitame, et f on G-pidev. Fikseerime suvalise $u \in I$. Olgu $\mathbf{x} = (x_n) \in c_G$ selline jada, et $x_n \in I$ ja $G(\mathbf{x}) = u$. Kuna

$$f(\mathbf{x}) = (f(x_n)) = (ax_n + b)_{n\in\mathbb{N}} = a(x_n) + b\mathbf{e} = a\mathbf{x} + b\mathbf{e}$$

ja tänu koonduvuseeskirja G regulaarsusele $G(\mathbf{e}) = \lim \mathbf{e} = 1$, siis (peame silmas, et G on lineaarne funktsionaal)

$$G(f(\mathbf{x})) = G(a\mathbf{x} + b\mathbf{e}) = aG(\mathbf{x}) + bG(\mathbf{e}) = au + b = f(u) = f(G(\mathbf{x})).$$

Lause on tõestatud. ∎

Antoni ja Šaláti väite üldistamiseks kasutame järgmist lemmat.

Lemma 2.2. *Olgu $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Kui $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ on funktsioon omadusega*

$$f(\alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha f(u) + (1-\alpha)f(v) \tag{2.1}$$

eeldusel, et u, v ja $\alpha u + (1-\alpha)v$ kuuluvad hulka I, siis leidub hulgas I selline tihe alamhulk $D \subset I$, milles f on lineaarne.

Tõestus. Märgime kõigepealt, et iga vahemik $(s,t) \subset \mathbb{R}$ on esitatav kujul

$$(s,t) = \{\lambda s + (1-\lambda)t \mid 0 < \lambda < 1\}.$$

Tõepooolest, ühelt poolt

$$s = \lambda s + (1-\lambda)s < \lambda s + (1-\lambda)t < \lambda t + (1-\lambda)t = t$$

iga $\lambda \in (0,1)$ puhul, teisalt, kui $v \in (s,t)$, siis $0 < \frac{t-v}{t-s} =: \lambda < 1$ ning

$$v = t - \lambda t + \lambda s = \lambda s + (1-\lambda)t.$$

1. Vaatleme juhtu $0 < \alpha < 1$. Olgu $u_0, v_0 \in I$ ja $u_0 \neq v_0$, leiame sellised arvud $a, b \in \mathbb{R}$, et

$$\begin{cases} au_0 + b = f(u_0) \\ av_0 + b = f(v_0). \end{cases}$$

Kuna selle lineaarse võrrandisüsteemi determinant $\begin{vmatrix} u_0 & 1 \\ v_0 & 1 \end{vmatrix} = u_0 - v_0$ on nullist erinev, siis süsteemil on täpselt üks lahend. Tähistame

$$D := \{u \in I \mid f(u) = au + b\},$$

kuna $u_0, v_0 \in D$, siis $D \neq \emptyset$. Näitame, et hulga D sulund $\overline{D}$ on intervall. Oletame vastuväiteliselt, et $\overline{D}$ ei ole intervall, siis leiduvad $u_1, v_1 \in \overline{D}$ nii, et $u_1 < v_1$ ja $(u_1, v_1) \cap \overline{D} = \emptyset$. Kuna $u_1, v_1 \in \overline{D}$, siis hulgas D leiduvad jadad (s_n) ja (t_n), et $s_n \longrightarrow u_1$ ja $t_n \longrightarrow v_1$. Eelduse (2.1) kohaselt

$$\begin{aligned} f(\alpha s_n + (1-\alpha)t_n) &= \alpha f(s_n) + (1-\alpha)f(t_n) = \\ &= \alpha(as_n + b) + (1-\alpha)(at_n + b) = \\ &= a(\alpha s_n + (1-\alpha)t_n) + b, \end{aligned}$$

st $\alpha s_n + (1-\alpha)t_n \in D$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Seejuures

$$\alpha s_n + (1-\alpha)t_n \longrightarrow \alpha u_1 + (1-\alpha)v_1,$$

mistõttu $\alpha u_1 + (1-\alpha)v_1 \in \overline{D}$. Samas tõestuse alguses esitatud märkuse kohaselt

$$u_1 < \alpha u_1 + (1-\alpha)v_1) < v_1,$$

mis on vastuolus tingimusega $(u_1, v_1) \cap \overline{D} = \emptyset$. Oleme näidanud, et $\overline{D}$ on intervall.

Tõestame, et $I \subset \overline{D}$. Oletame vastuväiteliselt, et $\overline{D} \not\supset I$. Siis on kaks võimalust:
a) leidub $w \in I$, et $u < w$ iga $u \in \overline{D}$ korral,
b) leidub $r \in I$, et $u > r$ iga $u \in \overline{D}$ korral.
Vaatleme juhtu a), juhul b) on tõestus analoogiline.

Sel juhul on w hulga $\overline{D}$ ülemine tõke, seega on $\overline{D}$ ülalt tõkestatud ja pidevuse aksioomi kohaselt leidub $\sup \overline{D} =: v_2$. Kuna $\overline{D}$ on kinnine, siis sisaldab ta oma rajapunktid, mistõttu $v_2 = \max \overline{D} \in \overline{D}$. Seega leidub hulgas D selline jada (t_n), et $t_n \longrightarrow v_2$. Võime eeldada, et jada (t_n) on kasvav, st $t_n < t_{n+1}$, vajadusel võtame lihtsalt kasvava osajada. Olgu (w_n) selline jada hulgas I, et $\alpha t_1 + (1-\alpha)w_n = t_n$, st

$$w_n = \frac{1}{1-\alpha}t_n - \frac{\alpha}{1-\alpha}t_1 = t_n + \frac{\alpha}{1-\alpha}t_n - \frac{\alpha}{1-\alpha}t_1.$$

Protsessis $n \longrightarrow \infty$ jõuame võrratuseni

$$\lim_{n\to\infty} w_n = v_2 + \frac{\alpha}{1-\alpha}v_2 - \frac{\alpha}{1-\alpha}t_1 > v_2,$$

mistõttu saame leida indeksi n_0 nii, et $w_{n_0} > v_2$.
Kuna $t_{n_0} \in D$, siis

$$\begin{aligned} f(t_{n_0}) &= at_{n_0} + b = a(\alpha t_1 + (1-\alpha)w_{n_0}) + b = \\ &= \alpha(at_1 + b) + (1-\alpha)(aw_{n_0} + b). \end{aligned}$$

Teiselt poolt saame eelduse (2.1) põhjal, et

$$\begin{aligned} f(t_{n_0}) &= f(\alpha t_1 + (1-\alpha)w_{n_0}) = \alpha f(t_1) + (1-\alpha)f(w_{n_0}) = \\ &= \alpha(at_1 + b) + (1-\alpha)f(w_{n_0}). \end{aligned}$$

Seega $f(w_{n_0}) = aw_{n_0} + b$, järelikult $w_{n_0} \in D \subset \overline{D}$. See on vastuolus tingimusega $w_{n_0} > v_2$. Oleme saanud, et $I \subset \overline{D}$.

2. Vaatleme juhtu, kus $\alpha > 1$, siis $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$. Olgu $u, v \in I$ kaks suvalist punkti sellised, et $w := \alpha u + (1-\alpha)v \in I$. Siis

$$u = \frac{1}{\alpha}w - \frac{1-\alpha}{\alpha}v = \frac{1}{\alpha}w + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)v$$

ja seega

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\frac{1}{\alpha}w + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)v) = \frac{1}{\alpha}f(w) + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)f(v) = \\ &= \frac{1}{\alpha}f(\alpha u + (1-\alpha)v) + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)f(v), \end{aligned}$$

millest saame, et

$$f(\alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha f(u) + (1-\alpha)f(v).$$

Seega, kuna väide kehtib juhul $\alpha \in (0,1)$, siis ta kehtib ka juhul $\alpha > 1$.

3. Nüüd vaatleme juhtu, kus $\alpha < 0$, siis $0 < \frac{\alpha}{\alpha-1} < 1$. Olgu $u, v \in I$ kaks suvalist punkti sellised, et $w := \alpha u + (1-\alpha)v \in I$. Siis

$$v = \frac{1}{1-\alpha}w - \frac{\alpha}{1-\alpha}u = \frac{\alpha}{\alpha-1}u - \frac{1}{\alpha-1}w = \frac{\alpha}{\alpha-1}u + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\right)w$$

ja seega

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}u + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\right)w\right) = \frac{\alpha}{\alpha-1}f(u) + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\right)f(w) = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1}f(u) + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}\right)f(\alpha u + (1-\alpha)v), \end{aligned}$$

millest saame, et

$$f(\alpha u + (1-\alpha)v) = (1-\alpha)\frac{\alpha}{1-\alpha}f(u) + (1-\alpha)f(v) = \alpha f(u) + (1-\alpha)f(v).$$

Seega, kuna väide kehtib juhul $\alpha \in (0,1)$, siis ta kehtib ka juhul $\alpha < 0$.

■

Nüüd oleme valmis tõestama Antoni ja Šaláti teoreemi üldistuse suvaliste regulaarsete koonduvuseeskirjade jaoks, mis on omadusega (L_1).

Teoreem 2.3. *Kui G on regulaarne koonduvuseeskiri omadusega (L_1), siis iga G-pidev funktsioon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ on lineaarne, st $\mathcal{L}(I) = \mathcal{G}(I)$.*

Tõestus. Kuna lause (2.1) põhjal $\mathcal{L}(I) \subset \mathcal{G}(I)$, siis on teoreemi tõestuseks vaja kontrollida vaid sisalduvust $\mathcal{G}(I) \subset \mathcal{L}(I)$. Olgu funktsioon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ G-pidev. Vastavalt eeldusele (L_1) valime sellise G-koonduva 0-1-jada $\mathbf{z} = (z_n)$, et $\alpha := G(\mathbf{z}) \notin \{0,1\}$. Olgu $u, v \in I$ sellised arvud, et $\alpha u + (1-\alpha)v \in I$, moodustame jada $\mathbf{x} = (x_n)$, kus

$$x_n := z_n u + (1-z_n)v$$

ehk

$$\mathbf{x} = u\mathbf{z} + v(\mathbf{e} - \mathbf{z}),$$

seega

$$x_n = u, \text{ kui } z_n = 1, \text{ ja } x_n = v, \text{ kui } z_n = 0.$$

Tänu eeskirja G lineaarsusele ja regulaarsusele

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= G(\mathbf{z}u + (\mathbf{e} - \mathbf{z})v) = uG(\mathbf{z}) + vG(\mathbf{e} - \mathbf{z})) \\ &= uG(\mathbf{z}) + v(G(\mathbf{e}) - G(\mathbf{z})) = \alpha u + (1-\alpha)v \end{aligned}$$

ehk $\mathbf{x} = (x_n) \in c_G$ ja on G-koonduv arvuks $\alpha u + (1-\alpha)v$. Teiselt poolt

$$f(x_n) = f(u), \text{ kui } z_n = 1, \text{ ja } f(x_n) = f(v), \text{ kui } z_n = 0,$$

seega

$$f(x_n) = z_n f(u) + (1 - z_n) f(v)$$

ehk

$$f(\mathbf{x}) = f(u)\mathbf{z} + f(v)(\mathbf{e} - \mathbf{z}).$$

Kuna

$$\begin{aligned} G(f(\mathbf{x})) &= G(\mathbf{z}f(u) + (\mathbf{e} - \mathbf{z})f(v)) = f(u)G(\mathbf{z}) + f(v)(1 - G(\mathbf{z})) \\ &= \alpha f(u) + (1 - \alpha) f(v), \end{aligned}$$

siis funktsiooni f G-pidevusest järeldub, et

$$f(\alpha u + (1 - \alpha)v) = f(G(\mathbf{x})) = G(f(\mathbf{x})) = \alpha f(u) + (1 - \alpha) f(v),$$

kui $u, v \in I$ ja $\alpha u + (1 - \alpha)v \in I$. Lemma 2.2 põhjal leiduvad selline hulgas I tihe alamhulk D ja $a, b \in \mathbb{R}$, et

$$f(u) = au + b \quad \text{iga } u \in D \text{ korral.}$$

Näitame, et see võrdus kehtib iga $u \in I$ korral.

Olgu $w \in I$ ja $\mathbf{y} = (y_n)$ selline jada hulgas D, et $y_n \longrightarrow w$. Kuna G on regulaarne ja lineaarne, siis $G(\mathbf{y}) = \lim_{n\to\infty} y_n = w$ ja

$$G(f(\mathbf{y})) = G((ay_n + b)_n) = aG(\mathbf{y}) + bG(\mathbf{e}) = aw + b.$$

Funktsiooni f G-pidevusest järeldub lõpuks, et

$$f(w) = f(G(\mathbf{y})) = G(f(\mathbf{y})) = aw + b \quad \text{iga } w \in I \text{ korral,}$$

st funktsioon f on lineaarne intervallis I. ■

Teoreemist 2.3 tuleneb peatüki alguses mainitud Bucki tulemus suvalise intervalli I korral.

Järeldus 2.4. *Kui $G = C_1$-lim, siis $\mathcal{L}(I) = \mathcal{G}(I)$.*

Tegelikult tõestas Buck, et funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on lineaarne, kui ta on C_1-lim-pidev mingis punktis $u_0 \in \mathbb{R}$. Antoni ja Šalát näitasid, et see väide ei ole üle kantav kõigile regulaarse maatriksiga määratud koonduvuseeskirjadele. Niisuguse omadusega koonduvuseeskirju vaatleme lähemalt viimases peatükis.

Järgmine näide kinnitab, et teoreem 2.3 ei ole pööratav.

Näide 2.2. Olgu I suvaline intervall. Leiame sellise regulaarse koonduvuseeskirja G, et $\mathcal{L}(I) = \mathcal{G}(I)$, kuid G ei ole omadusega (L_1).

Olgu $\mathbf{z} = (1, 0, -1, 1, 0, -1, 1, \dots)$ ja

$$c_G = \{\mathbf{y} + \lambda\mathbf{z} \mid \mathbf{y} \in c, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

defineerime iga $\mathbf{x} \in c_G$ jaoks $G(\mathbf{x}) := \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n-1}$. Kuna

$$\mathbf{x} = (y_1 + \lambda, y_2, y_3 - \lambda, y_4 + \lambda, y_5, \dots),$$

siis $G(\mathbf{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} y_{3n-1} = \lim \mathbf{y}$. Seega, kuna $c \subset c_G$ ja $G(\mathbf{x}) = \lim \mathbf{x}$ iga $\mathbf{x} \in c$ korral, siis koonduvuseeskiri G on regulaarne. Samal ajal ei ole tal omadust (L_1), sest iga G-koonduva 0-1-jada $\mathbf{t}$ korral $G(\mathbf{t}) = \lim\limits_{n\to\infty} t_{3n-1} \in \{0, 1\}$.

Nüüd näitame, et $\mathcal{L}(I) \supset \mathcal{G}(I)$ suvalise intervalli I puhul. Olgu $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ G-pidev funktsioon. Olgu $\mathbf{x} = (\mathbf{y} + \lambda\mathbf{z}) \in c_G$ selline jada, et $x_n \in I$, ja $u_0 := \lim \mathbf{y}$. Kuna $G(\mathbf{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n-1} = \lim \mathbf{y} = u_0$, siis tänu funktsiooni f G-pidevusele

$$G(f(\mathbf{x})) = f(u_0),$$

seejuures

$$f(\mathbf{x}) = (f(y_1 + \lambda), f(y_2), f(y_3 - \lambda), \dots) \in c_G.$$

Kuna $f(\mathbf{x}) \in c_G$, siis avaldub ta kujul $f(\mathbf{x}) = \mathbf{u} + \mu\mathbf{z}$, kus $\mathbf{u} \in c$ ja $\mu \in \mathbb{R}$, mistõttu $\lim \mathbf{u} = G(f(\mathbf{x})) = f(u_0)$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(y_{3n-1}) &= \lim_{n\to\infty} u_{3n-1} = f(u_0), \\
\lim_{n\to\infty} f(y_{3n-2} + \lambda) &= \lim_{n\to\infty} (u_{3n-2} + \mu) = f(u_0) + \mu, \\
\lim_{n\to\infty} f(y_{3n} - \lambda) &= \lim_{n\to\infty} (u_{3n} - \mu) = f(u_0) - \mu.
\end{aligned}$$

Kui $\lambda = 0$, siis $\mu = 0$. Seega $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(u_0)$, kui $y_n \longrightarrow u_0$, niisiis on funktsioon f pidev punktis u_0. Üldjuhul, kui $\lambda \in \mathbb{R}$ on selline, et $u_0 - \lambda$, $u_0 + \lambda \in I$, võtame $y_n := u_0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Siis $f(u_0 \pm \lambda) = f(u_0) \pm \mu$, mistõttu

$$\frac{f(u_0 + \lambda) + f(u_0 - \lambda)}{2} = f(u_0).$$

See on seos (2.1), kus $u = u_0 + \lambda$, $v = u_0 - \lambda$ ja $\alpha = \frac{1}{2}$. Lemma 2.2 põhjal on funktsioon f lineaarne intervallis I.

3 Tarvilikud tingimused sisalduvuseks $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$

Selles ja järgnevates peatükkides uurime lähemalt seost pidevate ning G-pidevate funktsioonide vahel. Kõigepealt toome sisse osajada-tüüpi koonduvuseeskirja mõiste.

Definitsioon. Ütleme, et koonduvuseeskiri G on *osajada-tüüpi*, kui iga G-koonduval jadal $\mathbf{x} = (x_n)$ on osajada (x_{n_k}) omadusega $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = G(\mathbf{x})$. Antud osajada (n_k) korral tähistame $I_{(n_k)}$ koonduvuseeskirja G, kus $G(\mathbf{x}) := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.

On ilmne, et iga osajada-tüüpi eeskiri on regulaarne. Samuti on selge, et $I_{(n_k)}$ ja näites 2.2 vaadeldud eeskiri on osajada-tüüpi koonduvuseeskirjad. Teoreemi E kohaselt on ka statistiline koonduvus osajada-tüüpi eeskiri.

Osajada-tüüpi koonduvuseeskirjadega seotud probleemide ja omaduste uurimisel kasutame tavalise topoloogilise kinnisuse üldistamisel saadud G-kinnisuse mõistet.

Definitsioon. Olgu G mingi koonduvuseeskiri, mis ei pruugi olla regulaarne. Olgu $U \subset \mathbb{R}$ ja $l \in \mathbb{R}$. Ütleme, et $l \in \overline{U}^G$, kui hulgas U leidub selline G-koonduv jada $\mathbf{x} = (x_n)$, et $G(\mathbf{x}) = l$. Hulka $\overline{U}^G$ nimetatakse hulga U *G-sulundiks*. Kui $\overline{U}^G \subset U$, siis ütleme, et U on *G-kinnine*.

Esitame hulkade G-kinnisusega seotud tähtsamad omadused.

Lause 3.1. *(a) Kui G on regulaarne koonduvuseeskiri, siis $\overline{U} \subset \overline{U}^G$ ja U on G-kinnine parajasti siis, kui $U = \overline{U}^G$. Sel juhul $\overline{U} = \overline{U}^G$.*

(b) Kui G on osajada-tüüpi eeskiri, siis iga kinnine alamhulk $U \subset \mathbb{R}$ on G-kinnine.

(c) Kui funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on G-pidev ja U on G-kinnine, siis $f^{-1}(U)$ on G-kinnine.

Tõestus. (a) Eeldame, et G on regulaarne koonduvuseeskiri, olgu $l \in \overline{U}$. Siis leidub hulgas U selline jada $\mathbf{x}$, et $\lim \mathbf{x} = l$. Kuna G on regulaarne, siis $G(\mathbf{x}) = \lim \mathbf{x} = l$ ja seega $l \in \overline{U}^G$. Niisiis $U \subset \overline{U} \subset \overline{U}^G$.

Arvestades G-kinnisuse definitsiooni, on ilmne, et hulk U on regulaarse koonduvuseeskirja G korral G-kinnine parajasti siis, kui kehtib seos $U = \overline{U}^G$ ning sel juhul $\overline{U} = \overline{U}^G$.

(b) Olgu G osajada-tüüpi eeskiri, $l \in \overline{U}^G$ ja $\mathbf{x} = (x_n)$ selline jada hulgas U, et $G(\mathbf{x}) = l$. Siis leidub osajada (x_{n_k}) omadusega $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = G(\mathbf{x}) = l$. Seega $l \in \overline{U} \subset U$ ning $\overline{U}^G \subset U$.

(c) Olgu väite (c) eeldused täidetud, tähistame $V := f^{-1}(U)$ ja näitame, et hulk V on G-kinnine ehk $\overline{V}^G \subset V$. Olgu $l \in \overline{V}^G$, siis leidub hulgas V jada $\mathbf{x}$ nii, et $G(\mathbf{x}) = l$. Funktsioon f on G-pidev, järelikult $G(f(\mathbf{x})) = f(l)$. Kuna $f(\mathbf{x})$ on jada, mille elemendid on hulgast U, mis on G-kinnine, siis $f(l) \in \overline{U}^G \subset U$. Seega $l \in V$ ja V on G-kinnine. ■

Järgmised näited kinnitavad, et regulaarse koonduvuseeskirja G puhul on võimalikud mõlemad variandid $\overline{U} = \overline{U}^G$ ja $\overline{U} \subsetneqq \overline{U}^G$.

Näide 3.1. Olgu $G = C_1$-lim, kus C_1 on aritmeetiliste keskmiste maatriks, siis $\overline{\{0,1\}}^G$ =$[0,1]$.

Näide 3.2. Kui $G = I_{(n_k)}$, siis $\overline{\{0,1\}}^G = \{0,1\} = \overline{\{0,1\}}$.

Nüüd veendume, et $\overline{U}^G$ ei pruugi olla G-kinnine.

Näide 3.3. Kui $G(\mathbf{x}) := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$, siis $\overline{\{0,1\}}^G = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ ja $\overline{\overline{\{0,1\}}^G}^G = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

Osutub, et regulaarsete koonduvuseeskirjade korral langeb hulga tavaline sulund kokku G-sulundiga parajasti siis, kui tegemist on osajada-tüüpi eeskirjaga.

Lause 3.2. *Olgu G regulaarne koonduvuseeskiri. Seos $\overline{U} = \overline{U}^G$ kehtib suvalise $U \subset \mathbb{R}$ korral parajasti siis, kui G on osajada-tüüpi eeskiri.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu G selline regulaarne koonduvuseeskiri, et $\overline{U} = \overline{U}^G$ suvalise $U \subset \mathbb{R}$ korral. Näitame, et G on osajada-tüüpi. Olgu $\mathbf{x} = (x_n)$ G-koonduv jada hulgas U ja $G(\mathbf{x}) = l$. Paneme tähele, et G regulaarsuse tõttu sõltub $G(\mathbf{x})$ ainult jada $\mathbf{x}$ "sabast", sest

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) + (0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) =: \mathbf{y} + \mathbf{z}$$

ja

$$G(\mathbf{x}) = G(\mathbf{y}) + G(\mathbf{z}) = 0 + G(\mathbf{z}) = G(\mathbf{z}).$$

Seetõttu $l \in \overline{\{x_n : n \geq N\}}^G$ iga $N \in \mathbb{N}$ korral. Kuna eelduse kohaselt $\overline{\{x_n : n \geq N\}}^G = \overline{\{x_n : n \geq N\}}$, siis saame, et $l \in \bigcap\limits_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n : n \geq N\}}$, st arvu l igas ümbruses leidub lõpmatult palju jada (x_n) liikmeid. Seega leiduvad sellised

$$n_1 \in \mathbb{N}, \text{ et } x_{n_1} \in (l-1, l+1),$$

$$n_2 \in \mathbb{N}, \text{ et } n_2 > n_1 \text{ ja } x_{n_2} \in \left(l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right),$$

$$\dots$$

$$n_k \in \mathbb{N}, \text{ et } n_k > \cdots > n_2 > n_1 \text{ ja } x_{n_k} \in \left(l - \frac{1}{k}, l + \frac{1}{k}\right)$$

jne. Seejuures jada $\mathbf{x}$ osajada (x_{n_k}) koondub arvuks l:

$$|x_{n_k} - l| < \frac{1}{k} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty).$$

Seega $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l = G(\mathbf{x})$ ja G on osajada-tüüpi koonduvuseeskiri.

Piisavus. Olgu koonduvuseeskiri G osajada-tüüpi ja $l \in \overline{U}^G$. Siis leidub hulgas U jada $\mathbf{x} = (x_n)$ nii, et $G(\mathbf{x}) = l$ ja jadal $\mathbf{x}$ selline osajada (x_{n_k}), et $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$. Järelikult $l \in \overline{U}$ ning $\overline{U}^G \subset \overline{U}$. ■

Kahest järgnevast lausest näeme, et regulaarse koonduvuseeskirja korral ei saa pidevate funktsioonide hulk kunagi olla G-pidevate funktsioonide hulga pärisalamhulk.

Lause 3.3. *Kui G on osajada-tüüpi koonduvuseeskiri, siis $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$.*

Tõestus. Olgu G regulaarne osajada-tüüpi koonduvuseeskiri ja funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olgu G-pidev. Näitame, et $V := f^{-1}(U)$ on kinnine iga kinnise hulga $U \subset \mathbb{R}$ korral, sel juhul funktsioon f on pidev. Kuna $U = \overline{U}$ ja lause 3.2 põhjal $\overline{U} = \overline{U}^G$, siis U on G-kinnine. Rakendades lemmat 3.1 (c), saame, et V on G-kinnine, seega $V = \overline{V}^G$ ning lause 3.1 (a) põhjal $\overline{V} = \overline{V}^G$. Järelikult V on kinnine. ■

Lause 3.4. *Olgu G regulaarne koonduvuseeskiri. Kui $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, siis G on osajada-tüüpi.*

Tõestus. Olgu G regulaarne koonduvuseeskiri ning $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$. Oletame vastuväiteliselt, et G pole osajada-tüüpi. Siis lause 3.2 põhjal leidub selline hulk $U \subset \mathbb{R}$, et $\overline{U} \subsetneqq \overline{U}^G$. Olgu $l \in \overline{U}^G \setminus \overline{U}$. Kuna $l \in \overline{U}^G$, siis leidub hulgas U selline jada $\mathbf{x} = (x_n)$, et $G(\mathbf{x}) = l$. Samas leidub pidev funktsioon f nii, et $f(l) = 1$ ja $f|_{\overline{U}} = 0$. Nüüd $f(x_n) = 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ja eeskirja G regulaarsusest saame, et

$$G(f(\mathbf{x})) = \lim f(\mathbf{x}) = 0 \neq 1 = f(l),$$

st f ei ole G-pidev, mis on vastuolus tehtud eeldusega. ■

Näites 2.2 nägime sellist osajada-tüüpi koonduvuseeskirja, et ainsad G-pidevad funktsioonid on lineaarsed. Seega pole lause 3.4 pööratav.

Järeldus 3.5. *Regulaarse koonduvuseeskirja G korral*

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{G} \Longleftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{G}.$$

Lause 3.3 kohaselt kehtib sisalduvus $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$, kui G on regulaarne osajada-tüüpi eeskiri. Järgnevad teoreemid 3.6 ja 3.10 ütlevad, et kui osajada-tüüpi eeskiri G on määratud kas regulaarse maatriksiga või tugeva summeeruvusega, siis kehtib ka vastupidine sisalduvus, st $\mathcal{C} = \mathcal{G}$. Seega on lause 3.4 põhjal sellised koonduvuseeskirjad osajada-tüüpi parajasti siis, kui $\mathcal{C} = \mathcal{G}$. Tähelepanuväärne on, et need kaks tingimust on samaväärsed ruutfunktsiooni G-pidevusega. Järgmine teoreem lähtub Iwiński [8] tõestatud teoreemist.

Teoreem 3.6. *Olgu koonduvuseeskiri G määratud regulaarse maatriksiga $A = (a_{nk})$. Järgmised väited on samaväärsed:*
(a) funktsioon $u \longmapsto u^2$ on G-pidev,
(b) $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$,
(c) $\mathcal{C} = \mathcal{G}$,
(d) $G = I_{(n_k)}$ mingi osajada (n_k) korral.

Teoreemi 3.6 tõestus põhineb järgmistel lemmadel 3.7-3.9.

Lemma 3.7. *Kui $|t| \geqslant 1$ ja $|\rho| \leqslant \frac{1}{2}$, siis võrrandil*

$$\frac{(t+x)^2 - t^2}{t} = \rho \tag{3.1}$$

on vähemalt üks selline lahend x_0, et $|x_0| \leqslant |\rho|$.

Tõestus. Olgu lemma eeldused täidetud. Paneme tähele, et väide kehtib, kui $\rho = 0$: siis võrrand (3.1) saab kuju

$$\frac{(t+x)^2 - t^2}{t} = 0,$$

mille lahend $x_0 = 0$ rahuldab võrratust $|x_0| \leqslant |\rho|$.

Nüüd märgime, et võrrandil (3.1) on kaks lahendit $x_{1;2} = -t \pm \sqrt{t^2 + \rho t}$. Vaatleme nelja võimalikku olukorda.
1) Kui $t \geqslant 1$ ja $0 < \rho \leqslant \frac{1}{2}$, siis

$$\begin{aligned}
|-t+\sqrt{t^2+\rho t}| &= \left|-t + t\sqrt{1+\frac{\rho}{t}}\right| = t\left|\sqrt{1+\frac{\rho}{t}} - 1\right| = \\
&= t\left(\sqrt{1+\frac{\rho}{t}} - 1\right) < t\left(\sqrt{1+\frac{\rho}{t}} - 1\right)\left(\sqrt{1+\frac{\rho}{t}} + 1\right) = \\
&= t\left(1 + \frac{\rho}{t} - 1\right) = \rho = |\rho|.
\end{aligned}$$

2) Kui $t \geqslant 1$ ja $-\frac{1}{2} \leqslant \rho < 0$, siis

$$\begin{aligned}
|-t+\sqrt{t^2+\rho t}| &= t\left|\sqrt{1+\frac{\rho}{t}} - 1\right| = t\left(1 - \sqrt{1+\frac{\rho}{t}}\right) < \\
&< t\left(1 - \sqrt{1+\frac{\rho}{t}}\right)\left(1 + \sqrt{1+\frac{\rho}{t}} + 1\right) = \\
&= t\left[1 - \left(1 + \frac{\rho}{t}\right)\right] = -\rho = |\rho|.
\end{aligned}$$

3) Kui $t \leqslant -1$ ja $0 < \rho \leqslant \frac{1}{2}$, siis

$$\begin{aligned} |-t-\sqrt{t^2+\rho t}| &= \left|-t+t\sqrt{1+\frac{\rho}{t}}\right| = -t\left|\sqrt{1+\frac{\rho}{t}}-1\right| = \\ &= -t\left(1-\sqrt{1+\frac{\rho}{t}}\right) < -t\left[1-\left(1+\frac{\rho}{t}\right)\right] = \rho = |\rho|. \end{aligned}$$

4) Kui $t \leqslant -1$ ja $-\frac{1}{2} \leqslant \rho < 0$, siis

$$\begin{aligned} |-t-\sqrt{t^2+\rho t}| &= -t\left|\sqrt{1+\frac{\rho}{t}}-1\right| = -t\left(\sqrt{1+\frac{\rho}{t}}-1\right) < \\ &< -t\left(1+\frac{\rho}{t}-1\right) = -\rho = |\rho|. \end{aligned}$$

Oleme tõestanud, et igal juhul leidub võrrandil (3.1) vähemalt üks selline lahend x_0, et $|x_0| \leqslant |\rho|$. ∎

Lemma 3.8. *Olgu $B = (b_{nk})$ selline regulaarne nullveergudeta maatriks, et sellega määratud koonduvuseeskirja G suhtes ruutfunktsioon $u \longmapsto u^2$ on G-pidev. Siis iga $\mathbf{x} \in c_B$ korral leidub $M = M(\mathbf{x}) > 0$, et*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}x_k| \leqslant M \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Tõestus. Rahuldagu koonduvuseeskiri G lemma eeldusi. Märgime kõigepealt, et kui $\mathbf{x} \in c_B \cap \ell^\infty$, siis väide kehtib:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}x_k| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| =: M \quad (n \in \mathbb{N})$$

(peame silmas, et tänu regulaarsusele $T := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| < \infty$).

Eeldame, et $\mathbf{x} \in c_B$ ei ole tõkestatud, olgu (x_{k_i}) jada $\mathbf{x}$ kõigi selliste liikmete osajada, millel on omadus $|x_{k_i}| \geqslant 1$ $(i \in \mathbb{N})$. Kui (ρ_i) on suvaline selline jada, et

$$\lim_{i\to\infty} \rho_i = 0 \quad \text{ja} \quad |\rho_i| \leqslant \frac{1}{2} \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{3.2}$$

siis lemma 3.7 kohaselt leidub võrrandil

$$\frac{(x_{k_i}+\tau)^2 - x_{k_i}^2}{x_{k_i}} = \rho_i \quad (i \in \mathbb{N}) \tag{3.3}$$

selline lahend τ_{k_i}, et $|\tau_{k_i}| \leqslant |\rho_i|$. Moodustame jada (τ_k), kus

$$\tau_k := \begin{cases} \tau_{k_i}, & \text{kui } k = k_i \\ 0, & \text{kui } k \neq k_i, \end{cases}$$

siis $\tau_k \longrightarrow 0$. Kuna koonduvuseeskiri on lineaarne funktsionaal ning ruutfunktsioon $u \longmapsto u^2$ on G-pidev, siis jada $(s_k) := ((x_k + \tau_k)^2 - x_k^2)$ on G-koonduv, niisiis eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{nk}((x_k + \tau_k)^2 - x_k^2)$. Arvestades arvude τ_k valikut ja seost (3.3), saame, et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}((x_k + \tau_k)^2 - x_k^2) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{nk_i}((x_{k_i} + \tau_{k_i})^2 - x_{k_i}^2) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{nk_i} x_{k_i} \rho_i.\end{aligned}$$

Niisiis, iga jada (ρ_i), mis rahuldab tingimusi (3.2), on maatriksiga $(a_{nk_i}) := (b_{nk_i} x_{k_i})$ summeeruv. Paneme tähele, et sama maatriksiga on summeeruv ka iga nulliks koonduv jada $\mathbf{z} = (z_i)$. Tõepoolest, kui

$$\rho_i := \frac{1}{2\|\mathbf{z}\|_\infty} \ (i \in \mathbb{N}) \quad \text{ja} \quad L := 2\|\mathbf{z}\|_\infty,$$

siis $\mathbf{z} = L(\rho_i)$, kusjuures jada (ρ_i) rahuldab tingimusi (3.2). Seega piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{nk_i} x_{k_i} z_i = L \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{nk_i} x_{k_i} \rho_i$$

eksisteerib iga $\mathbf{z} \in c_0$ korral. Teoreemi A põhjal $K := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{i=1}^{\infty} |b_{nk_i} x_{k_i}| < \infty$. Seega

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk} x_k| = \sum_{\substack{k=1 \\ k=k_i}}^{\infty} |b_{nk} x_k| + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq k_i}}^{\infty} |b_{nk} x_k| < K + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq k_i}}^{\infty} |b_{nk}| \leqslant K + T =: M$$

■

Lemma 3.9. *Olgu $B = (b_{nk})$ selline regulaarne nullveergudeta maatriks, et sellega määratud koonduvuseeskirja G suhtes on ruutfunktsioon $u \longmapsto u^2$ G-pidev. Siis*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_{nk}| > 0.$$

Tõestus. Olgu lemma eeldused täidetud. Defineerime $\alpha_k := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |b_{nk}|$, siis $\alpha_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$ ja $\alpha := \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \geqslant 0$. Oletame vastuväiteliselt, et $\alpha = 0$ ja veendume kõigepealt, et leidub osajada omadusega (α_{k_i}), et $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sqrt[3]{\alpha_{k_i}} < \infty$. Olgu $k_1 = 1$, vastavalt supreemumi definitsioonile leidub

$$k_2 \in \mathbb{N} \ : \ k_2 > k_1, \ \alpha_{k_2} < \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 \ \text{ehk} \ \sqrt[3]{\alpha_{k_2}} < \frac{1}{2^2},$$

$$k_3 \in \mathbb{N} \ : \ k_3 > k_2, \ \alpha_{k_3} < \left(\frac{1}{2^3}\right)^3 \text{ ehk } \sqrt[3]{\alpha_{k_3}} < \frac{1}{2^3}$$

jne. Nii jätkates saame osajada (α_{k_i}) omadusega $\sqrt[3]{\alpha_{k_i}} < \frac{1}{2^i}$ $(i \in \mathbb{N})$. Kuna geomeetriline rida $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ koondub, siis esimese võrdluslause põhjal

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt[3]{\alpha_{k_i}} < \infty. \tag{3.4}$$

Moodustame jada $\mathbf{x} = (x_k)$, kus

$$x_k := \begin{cases} \alpha_{k_i}^{-\frac{2}{3}}, & \text{kui } k = k_i, \\ 0, & \text{kui } k \neq k_i. \end{cases}$$

Paneme tähele, et lisaks omadusele (3.4) kehtib võrratus

$$|b_{nk_i} x_{k_i}| = |b_{nk_i}| \alpha_{k_i}^{-\frac{2}{3}} \leqslant \alpha_{k_i} \alpha_{k_i}^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\alpha_{k_i}} \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Seega Weierstrassi koonduvustunnuse põhjal koondub rida $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk_i} x_{k_i}$ ühtlaselt $n \in \mathbb{N}$ suhtes , mistõttu

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{nk_i} x_{k_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} b_{nk_i} x_{k_i} = \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot x_k = 0.$$

Funktsioon $u \longmapsto u^2$ on G-pidev, seega kehtib ka võrdus

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x_k^2 = 0. \tag{3.5}$$

Kuna $0 < \alpha_{k_i} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |b_{nk_i}|$, siis iga $i \in \mathbb{N}$ puhul leidub selline indeks n_i, et $|b_{n_i k_i}| \geqslant \frac{\alpha_{k_i}}{2}$, siis

$$|b_{n_i k_i}| x_{k_i}^2 \geqslant \frac{\alpha_{k_i} \alpha_{k_i}^{-\frac{4}{3}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt[3]{\alpha_{k_i}}} \longrightarrow \infty \quad (i \longrightarrow \infty)$$

ja

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| x_k^2 \geqslant \sup_{i\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{n_i k}| x_k^2 \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} |b_{nk_i}| x_{k_i}^2 = \infty. \tag{3.6}$$

Oleme saanud vastuolu lemmaga 3.8, mis ütleb, et leidub selline M, et $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |b_{nk}| x_k^2 \leqslant M$. ■

Nüüd oleme valmis tõestama teoreemi 3.6.

Tõestus. Paneme tähele, et kui $f \in \mathcal{C}$, $\mathbf{x} \in c_G$ ja $G(\mathbf{x}) = I_{(n_k)}(\mathbf{x}) = l$ mingi osajada (x_{n_k}) korral, st $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$, siis

$$G(f(\mathbf{x})) = I_{(n_k)}(f(\mathbf{x})) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(l),$$

seega (d)$\Rightarrow$(b). Järelduse 3.5 põhjal (b) $\Leftrightarrow$ (c), kokkuvõttes (d)$\Rightarrow$(c)$\Leftrightarrow$(b)$\Rightarrow$(a). Näitame, et (a)$\Rightarrow$(d).

Olgu $A = (a_{nk})$ selline regulaarne maatriks, et sellega määratud koonduvuseeskirja G suhtes ruutfunktsioon $u \longmapsto u^2$ on G-pidev. Paneme tähele, et maatriksis A on lõpmata palju mitte-nullveerge: vastasel juhul leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $a_{nk} = 0$ iga $k > N$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral ning

$$G(\mathbf{e}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_{nk} = \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0,$$

mis on aga vastuolus koonduvuseeskirja G regulaarsusega. Vastaku indeksid k_i $(i \in \mathbb{N})$ mitte-nullveergudele maatriksis A. Eemaldame kõik nullveerud ning tähistame saadud uue maatriksi tähega $B = (b_{nk})$. Lihtne on näha, et ka B on regulaarne maatriks ja sellega määratud koonduvuseeskirja suhtes on ruutfunktsioon $u \longmapsto u^2$ pidev. Lemma 3.8 põhjal leidub iga $\mathbf{x} \in c_B$ korral $M = M(\mathbf{x}) > 0$, et

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}x_k| \leqslant M \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Seega

$$|b_{nk}||x_k| \leqslant M \quad (n, k \in \mathbb{N}),$$

järelikult

$$|x_k| \leqslant \frac{M}{\alpha_k} \leqslant \frac{M}{\alpha} \ (k \in \mathbb{N}),$$

kus $\alpha_k := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |b_{nk}|$ ja $\alpha := \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k > 0$ lemma 3.9 põhjal. Niisiis on iga jada $\mathbf{x} \in c_B$ tõkestatud, mistõttu $c \subset c_B \subset \ell^\infty$ ja teoreemi B põhjal $c_B = c$, regulaarsuse tõttu $B\text{-}\lim \mathbf{x} = \lim \mathbf{x}$ iga $\mathbf{x} \in c$ korral. Olgu $\mathbf{y} \in c_G$, siis

$$\begin{aligned} G(\mathbf{y}) &= A\text{-}\lim \mathbf{y} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}y_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{nk_i}y_{k_i} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{ni}y_{k_i} = B\text{-}\lim(y_{k_i}) = \lim_{i\to\infty} y_{k_i} = I_{(k_i)}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

■

Me veendume järgnevas, et teoreem 3.6 jääb kehtima ka tugeva summeeruvusega määratud koonduvuseeskirja korral. Seejuures kasutame asjaolu, et iga koonduvuseeskiri $I_{(n_k)}$ langeb kokku tugeva A-summeeruvusega sobivalt valitud maatriksi A korral.

Teoreem 3.10. *Olgu $A = (a_{nk})$ selline mittenegatiivne maatriks, mis rahuldab tingimusi (1.4), st*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} < \infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \neq 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Kui koonduvuseeskiri G on määratud tugeva A-summeeruvusega, siis järgmised väited on samaväärsed:
(a) funktsioon $u \longmapsto u^2$ on G-pidev,
(b) $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$,
(c) $\mathcal{C} = \mathcal{G}$,
(d) $G = I_{(n_k)}$ mingi osajada (n_k) korral.

Teoreemi 3.10 tõestuses vajame järgnevat lemma 3.9 analoogi.

Lemma 3.11. *Olgu $B = (b_{nk})$ selline nullveergudeta mittenegatiivne maatriks, mis rahuldab tingimusi (1.4), st*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} < \infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \neq 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} b_{nk} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Kui tugeva B-summeeruvusega määratud koonduvuseeskirja G suhtes ruutfunktsioon $u \longmapsto u^2$ on G-pidev, siis

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} b_{nk} > 0.$$

Tõestus. Kordame lemma 3.9 tõestust kuni viimase tingimuseni (3.6), st $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}x_k^2 = \infty$. Seega saame vastuolu seoste (3.5) (st $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}x_k^2 = 0$) ja (3.6) vahel. ∎

Tõestame teoreemi 3.10.

Tõestus. Samuti nagu teoreemi 3.6 tõestuses saame, et (d)⇒(b)⇔(c)⇒(a). Implikatsiooni (a)⇒(d) tõestamisel toimime taaskord sarnaselt teoreemiga 3.6.

Olgu $A = (a_{nk})$ mittenegatiivne maatriks, mis rahuldab tingimusi (1.4). Moodustame maatriksi $B = (b_{nk})$, kustutades maatriksi A kõik nullveerud, siis lemma 3.11 põhjal $\alpha > 0$, kus $\alpha = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} b_{nk}$. Supreemumi definitsiooni põhjal saame leida iga $k \in \mathbb{N}$ korral sellise indeksi n_k, et $b_{n_k k} \geqslant \frac{\alpha}{2}$. Seejuures, kuna $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{nk} < \infty$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis võime eeldada, et $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$.

Olgu jada $\mathbf{x} = (x_k)$ tugevalt B-summeeruv arvuks l, siis

$$\frac{\alpha}{2}|x_k - l| \leqslant b_{n_k k}|x_k - l| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} b_{n_k j}|x_j - l| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty).$$

Seega on jada $\mathbf{x}$ koonduv arvuks l ning tugev B-summeeruvus langeb kokku tavalise koonduvusega. Teisisõnu, tugev A-summeeruvus langeb kokku $I_{(n_k)}$-koonduvusega, kus indeksite jada (n_k) vastab maatriksi A nendele veergudele, mis ei ole nullveerud. ■

4 Piisavad tingimused sisalduvuseks $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$

Posner [12] (vt ka Iwiński [8]) tõestas, et kui regulaarse maatriksiga määratud koonduvuseeskirja G korral on funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ G-pidev mingis punktis, siis on ta selles punktis pidev, seega regulaarse maatriksiga määratud koonduvuseeskirja G korral kehtib sisalduvus $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$. Käesolevas peatükis veendume, et Posneri väide kehtib oluliselt laiema koonduvuseeskirjade klassi korral, aga see ei kehti kõigi regulaarsete koonduvuseeskirjade korral.

Definitsioon. Ütleme, et koonduvuseeskiri G on *omadusega* (S), kui ei leidu ühtki jada $\mathbf{x}$ omadusega $x_n \longrightarrow \infty$, mille kõik osajadad on G-koonduvad.

Näitame (vt lause 4.2), et *regulaarse maatriksiga määratud koonduvuseeskiri on omadusega* (S). Selle väite tõestus kuulub Buckile [5]. Alustame järgmise lihtsa lemmaga.

Lemma 4.1. *Olgu* $M > 0,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ *ja* $\mathbf{x} = (x_k) \in \omega \setminus \ell^\infty$. *Siis leidub niisugune osajada* (x_{k_i}), *et*

$$|a_0 + a_1 x_{k_1} + \cdots + a_n x_{k_n}| \geqslant M.$$

Tõestus. Olgu jada $\mathbf{x}$ tõkestamata ning $M > 0$. Kui $a_0,\ a_1 \in \mathbb{R},\ a_1 \neq 0$, siis tänu jada $\mathbf{x}$ tõkestamatusele leidub selline indeks k_1, et

$$|a_0 + a_1 x_{k_1}| \geqslant M.$$

Olgu $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{n-1}}$ vastavalt etteantud tingimusele leitud, olgu $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, kus $a_n \neq 0$. Tähistame

$$a := a_0 + a_1 x_{k_1} + \cdots + a_{n-1} x_{k_{n-1}}.$$

Kuna $a_n \neq 0$ ja jada $\mathbf{x}$ on tõkestamata, siis leidub selline indeks $k_n > k_{n-1}$, et

$$|a + a_n x_{k_n}| \geqslant M,$$

st

$$|a_0 + a_1 x_{k_1} + \cdots + a_n x_{k_n}| \geqslant M.$$

■

Lause 4.2. *Olgu* $A = (a_{nk})$ *regulaarne maatriks. Kui arvjada* $\mathbf{x} = (x_k)$ *on omadusega* $x_k \longrightarrow \infty$, *siis leidub jada* $\mathbf{x}$ *osajada* (x_{k_i}), *mis pole* A*-summeeruv.*

Tõestus. Olgu koonduvuseeskiri G määratud regulaarse maatriksiga $A = (a_{nk})$ ning $\mathbf{x}$ tõkestamata jada.

(a) Esiteks vaatleme juhtu, kus maatriksil A on lõpmata palju lõpliku pikkusega ridu. Kuna A on regulaarne, siis selliste ridade pikkuste jada ei saa olla tõkestatud. Tõepoolest, kui oletada, et iga $i \in \mathbb{N}$ korral k_{n_i} on rea $(a_{n_ik})_{k\in\mathbb{N}}$ pikkus, ning $\max\limits_{i\in\mathbb{N}} k_{n_i} =: N < \infty$, siis saame vastuolu:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{k_{n_i}} a_{n_ik} = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_{n_ik} = \sum_{k=1}^{N} \lim_{i\to\infty} a_{n_ik} = 0.$$

Valime sellised rangelt kasvavad indeksite jadad (n_j), (k_{n_j}), et $a_{n_jk_{n_j}}$ on viimane nullist erinev element reas indeksiga n_j. Kuna jada $\mathbf{x}$ on tõkestamata, siis lemma 4.1 põhjal saame valida niisuguse osajada $\mathbf{x}' := (x_{k_i})$, et

$$\left| \sum_{i=1}^{k_{n_j}} a_{n_ji} x_i' \right| \geqslant j$$

iga $j = 1, 2, \dots$ korral. Seega on jada $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ni} x_i' \right)_{n\in\mathbb{N}}$ tõkestamata, mistõttu pole osajada $\mathbf{x}'$ A-summeeruv.

(b) Teisel juhul on maatriksil A vaid lõplik arv lõpliku pikkusega ridu. Olgu n_0 viimase sellise rea indeks. Kui $n > n_0$, siis $a_{nk} \neq 0$ lõpmatu arvu indeksite k korral. Valime jada $\mathbf{x}$ sellise osajada (x_{k_i}), et

$$|a_{11}|^2 |x_{k_1}| \geqslant |a_{11}|,$$

$$|a_{12}|^2 |x_{k_2}| \geqslant |a_{12}|, \quad |a_{22}|^2 |x_{k_2}| \geqslant |a_{22}|,$$

jne. Nii saame osajada (x_{k_i}) omadusega

$$|a_{ni}|^2 |x_{k_i}| \geqslant |a_{ni}| \quad (n = 1, 2, \dots, i).$$

Kui $n > n_0$, siis $|a_{ni} x_{k_i}| \geqslant 1$ lõpmatu arvu indeksite i korral, seega

$$\limsup_{i\to\infty} |a_{ni} x_{k_i}| \geqslant 1.$$

Niisiis, $\lim\limits_{i\to\infty} a_{ni} x_{k_i} \neq 0$, mistõttu rida $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ni} x_{k_i}$ ei koondu. Seega osajada (x_{k_i}) pole A-summeeruv.

■

Osutub, et sisalduvus $\mathcal{G}(I) \subset \mathcal{C}(I)$ kehtib iga intervalli $I \subset \mathbb{R}$ korral, kui G on regulaarne koonduvuseeskiri omadusega (S).

Teoreem 4.3. *Kui G on regulaarne koonduvuseeskiri omadusega (S), siis iga funktsioon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, mis on G-pidev punktis $u_0 \in I$, on selles punktis pidev.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et funktsioon f on punktis u_0 G-pidev, aga pole pidev. Siis leidub intervallis I selline jada $\mathbf{x}$, et $x_n \longrightarrow u_0$, aga $f(x_n) \not\longrightarrow f(u_0)$. Saame leida jada $\mathbf{x}$ osajada $\mathbf{y}$ nii, et $|f(y_n) - f(u_0)| \geq \delta$ iga $n \in \mathbb{N}$ ja mingi $\delta > 0$ korral. Vaatleme juhtu $f(y_n) \geq f(u_0) + \delta$ $(n \in \mathbb{N})$, juhul $f(y_n) \leq f(u_0) - \delta$ $(n \in \mathbb{N})$ on arutelu analoogiline.

Vaatleme kahte juhtu. Esiteks, kui jada $f(\mathbf{y})$ on tõkestatud, siis leidub jada $\mathbf{y}$ osajada $\mathbf{w}$ nii, et $f(w_n) \longrightarrow a \geq f(u_0) + \delta$. Nüüd aga $G(\mathbf{w}) = u_0$ ja $G(f(\mathbf{w})) = a \neq f(u_0)$ (peame silmas, et $w_k \longrightarrow u_0$ ning G on regulaarne), mis on vastuolus eeldusega funktsiooni f G-pidevusest punktis u_0.

Teiseks, kui $f(\mathbf{y})$ on tõkestamata, siis leidub jada $\mathbf{y}$ selline osajada $\mathbf{w}'$, et $|f(w'_n)| \longrightarrow \infty$. Kuna jada $\mathbf{w}'$ iga osajada koondub arvuks u_0, siis G-pidevuse tõttu on jada $f(\mathbf{w}')$ ja kõik selle osajadad G-koonduvad. Saime vastuolu eeldusega, et koonduvuseeskirjal G on omadus (S). $\blacksquare$

Järgnev teoreem loetleb nende koonduvuseeskirjade klasse, mille korral jääb kehtima Posneri väide.

Definitsioon. Ütleme, et koonduvuseeskiri G on *täielikult regulaarne*, kui ei leidu ühtki G-koonduvat jada $\mathbf{x}$, et $x_n \longrightarrow \infty$.

Teoreem 4.4. *Kui regulaarne koonduvuseeskiri G on kas*
(a) määratud maatriksiga,
(b) määratud tugeva summeeruvusega,
(c) täielikult regulaarne või
(d) osajada-tüüpi,
siis iga funktsioon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, mis on G-pidev punktis $u_0 \in I$, on selles punktis pidev.

Tõestus. Juhul (a) tuleneb väide teoreemist 4.3 ja lemmast 4.2, mille põhjal on regulaarse maatriksiga määratud koonduvuseeskiri omadusega (S). Kuna täielikult regulaarne koonduvuseeskiri on ilmselt omadusega (S), siis väide kehtib juhul (c). Juhul (d) on väide taandatav juhule (c), sest iga osajada-tüüpi koonduvuseeskiri on täielikult regulaarne.

Lõpuks näitame, et ka juhul (b) taandub väide juhule (c). Vaatame jada $\mathbf{x} = (x_k)$ omadusega $x_k \longrightarrow \infty$, siis leidub selline indeks k_0, et $|x_k - l| \geqslant 1$ iga $k > k_0$ korral. Kuna koonduvuseeskiri G on määratud tugeva summeeruvusega, siis leidub ka selline indeksite jada (n_i) ja $\alpha > 0$, et $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_i k} > \alpha$ iga $i \in \mathbb{N}$ korral. Järelikult

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_i k}|x_k - l| &= \sum_{k=1}^{k_0} a_{n_i k}|x_k - l| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_{n_i k}|x_k - l| \geqslant \\ &\geqslant \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_{n_i k}|x_k - l| \geqslant \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_{n_i k} > \alpha \quad (i \in \mathbb{N}),\end{aligned}$$

mis tähendab, et $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}|x_k - l| \neq 0$ ning jada $\mathbf{x}$ pole G-koonduv. ■

Kuna statistiline koonduvus on osajada-tüüpi eeskiri, siis saab sellele rakendada teoreemi 4.4. Osutub, et antud juhul on väide pööratav, st funktsiooni f pidevusest punktis u_0 järeldub funktsiooni G-pidevus selles punktis. Selle väite tõestus kuulub Schoenbergile [15].

Järeldus 4.5. *Olgu koonduvuseeskiri G määratud statistilise koonduvusega, st $G = st$-lim. Funktsioon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ on G-pidev punktis $u_0 \in I$ parajasti siis, kui ta on selles punktis pidev.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Kuna statistilise koonduvusega määratud koonduvuseeskiri on regulaarne ja osajada-tüüpi, siis teoreemi 4.4 põhjal on iga punktis $u_0 \in I$ G-pidev funktsioon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ selles punktis pidev.

Piisavus. Olgu funktsioon f pidev kohal u_0, vaatame sellist intervallis I sisalduvate liikmetega jada $\mathbf{x} = (x_n)$, et st-lim $\mathbf{x} = u_0$ ning näitame, et funktsioon f on ka statistiliselt pidev selles punktis. Olgu $\epsilon > 0$ suvaline. Funktsiooni f pidevuse tõttu kohal u_0 leidub selline $\rho > 0$, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral kehtib implikatsioon

$$|x_n - u_0| < \rho \ \Rightarrow\ |f(x_n) - f(u_0)| < \epsilon.$$

Järelikult, kui $|f(x_n) - f(u_0)| \geqslant \epsilon$, siis $|x_n - u_0| \geqslant \rho$, mistõttu

$$\{n \in \mathbb{N} \mid |f(x_n) - f(u_0)| \geqslant \epsilon\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - u_0| \geqslant \rho\}.$$

Eelduse kohaselt on jada $\mathbf{x}$ statistiliselt koonduv arvuks u_0, seega

$$0 \leqslant \delta(\{n \in \mathbb{N} \mid f(x_n) - f(u_0)| \geqslant \epsilon\}) \leqslant \delta(\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - u_0| \geqslant \rho\}) = 0.$$

Näeme, et st-lim $f(\mathbf{x}) = f(u_0)$ ehk funktsioon f on statistiliselt pidev punktis u_0. ■

Veendume, et teoreem 4.3 ei kehti kõikide regulaarsete koonduvuseeskirjade korral.

Näide 4.1. Leiame regulaarse koonduvuseeskirja G ja funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, mis on G-pidev kohal 0, aga ei ole pidev selles punktis.

Tähistame tähega Y kõigi selliste jadade $\mathbf{y} = (y_n)$ hulga, et
1) $y_n \in \{0\} \cup \{j^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ $(n \in \mathbb{N})$,
2) osajada, mis saadakse jadast $\mathbf{y}$ kõigi nulliga võrduvate liikmete kustutamisel, on piirväärtusega ∞.
Olgu $W :=$ span$Y$. Näitame, et iga jada $\mathbf{w} \in W \setminus \{\mathbf{0}\}$ korral tema nullist erinevate liikmete piirväärtus on ∞.

Olgu $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \mathbf{y}^k \neq \mathbf{0}$, kus $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y}^k \in Y$ ja $N \in \mathbb{N}$. Tähistame $M := \max_{1 \leqslant k \leqslant N} |\lambda_k|$ ning

$$m := \min\{\big|\sum_{k\in H} \lambda_k\big| \mid H \subset \{1, \ldots, N\}, \sum_{k\in H} \lambda_k \neq 0\},$$

sealjuures paneme tähele, et $m > 0$. Tänu hulga Y definitsioonile leidub selline positiivsete täisarvude jada (J_n), et $J_n \longrightarrow \infty$ $(n \longrightarrow \infty)$ ning

$$y_n^k = 0 \text{ või } y_n^k \geqslant (J_n)^{J_n}$$

iga $k = 1, \ldots, N$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral, selleks võtame

$$J_n := \min\{y_n^k \mid y_n^k \neq 0,\ i = 1, \ldots, N\}.$$

Iga fikseeritud $n \in \mathbb{N}$ korral

$$w_n = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{y_n^k = j^j} a_k \right) j^j,$$

kus ainult lõplik arv liidetavaid on nullist erinevad. Kui $w_n \neq 0$, siis $\sum_{y_n^k = j^j} a_k \neq 0$ mingi j korral, tähistame suurima sellise indeksi j tähega $K = K(n)$. Siis $K \geqslant J_n$ ning seetõttu

$$\begin{aligned}
|w_n| \ &= \ \Big|\big(\sum_{y_n^k = K^K} a_k\big)K^K + \sum_{y_n^k < K^K} a_k y_n^k\Big| \geqslant \Big|\big(\sum_{y_n^k = K^K} a_k\big)K^K\Big| - \Big|\sum_{y_n^k < K^K} a_k y_n^k\Big| \geqslant \\
&\geqslant \ mK^K - MN(K-1)^{(K-1)} \geqslant (mK - MN)(K-1)^{(K-1)} \geqslant \\
&\geqslant \ (mJ_n - MN)(J_n - 1)^{(J_n - 1)} \longrightarrow \infty \ (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Seega tekib jadas $\mathbf{w}$ pärast nulliga võrduvate liikmete kustutamist osajada piirväärtusega ∞.

Olgu G selline koonduvuseeskiri, et $c_G = c + W$. Kuna $c \cap W = \{\mathbf{0}\}$, siis on tegemist otsesummaga, st iga $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{w} \in c_G$ korral on komponendid $\mathbf{z} \in c$ ja $\mathbf{w} \in W$ üheselt määratud. Defineerime $G(\mathbf{x}) := \lim \mathbf{z}$ ning märgime, et koonduvuseeskiri G on lineaarne ning regulaarne.

Olgu funktsioon $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ defineeritud järgmiselt:

$$f(u) := \begin{cases} j^j, & \text{kui } u = \frac{1}{j}, \\ 0, & \text{kui } u \neq \frac{1}{j} \end{cases} \qquad (j \in \mathbb{N}).$$

On selge, et funktsioon f pole pidev punktis 0: kui $u_j := \frac{1}{j} \longrightarrow 0$, siis $f(u_j) = j^j \longrightarrow \infty$ $(j \longrightarrow \infty)$. Näitame, et funktsioon f on G-pidev kohal

$u = 0$. Olgu $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{w} \in c_G$ selline jada, et $G(\mathbf{x}) = \lim \mathbf{z} = 0$. Siis $f(x_n) \in \{0\} \cup \{j^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Paneme tähele, et $f(x_n) \neq 0$ parajasti siis, kui $z_n + w_n \in \{\frac{1}{j} \mid j \in \mathbb{N}\}$. Kuna $z_n \longrightarrow 0$, siis piisavalt suurte indeksite n korral tähendab see, et $w_n = 0$ ja $z_n \in \{\frac{1}{j} \mid j \in \mathbb{N}\}$. Seega kas jadas $f(\mathbf{x})$ sisaldub lõplik hulk nullist erinevaid liikmeid või tema nullist erinevate liikmete piirväärtus on ∞. Esimesel juhul on tegemist nulliks koonduva jadaga ning G regulaarsuse tõttu $f(\mathbf{x}) \in c_G$ ja $G(f(\mathbf{x})) = 0$. Teisel juhul $f(\mathbf{x}) \in Y$, mistõttu $f(\mathbf{x}) \in c_G$ ning $G(f(\mathbf{x})) = \lim \mathbf{0} = 0$. Järelikult f on G-pidev kohal 0.

Märgime, et funktsioon f näites 4.1 on küll G-pidev punktis 0, aga ei ole G-pidev üheski punktis $u = \frac{1}{j}$ $(j \in \mathbb{N})$.

Probleem. Me tegelikult ei tea, kas leidub sellist regulaarset koonduvuseeskirja G, et mingi G-pidev funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ei ole pidev.

5 Dihhotoomia probleem

Kaua aega ei olnud ühtki näidet regulaarsetest koonduvuseeskirjadest G, mille korral $\mathcal{L} \subsetneqq \mathcal{G} \subsetneqq \mathcal{C}$. Tundus, et on ainult kaks võimalust: kas $\mathcal{G} = \mathcal{L}$ või $\mathcal{G} = \mathcal{C}$. Spigel ja Krupnik [16] püstitasid sellekohase probleemi maatriksitega määratud koonduvuseeskirjade kohta. Connor ja Grosse-Erdmann [7] näitasid, et sellise koonduvuseeskirja saab määrata tugeva summeeruvusega ning ka tavalise regulaarse maatriksiga.

Teoreem 5.1. *Olgu G tugeva summeeruvusega määratud koonduvuseeskiri. Kui G pole osajada-tüüpi eeskiri, siis $\mathcal{L} \subsetneqq \mathcal{G} \subsetneqq \mathcal{C}$.*

Tõestus. Olgu G tugeva summeeruvusega määratud koonduvuseeskiri. Kuna G on regulaarne, siis lause 2.1 ja teoreemi 4.4 põhjal $\mathcal{L} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{C}$.

Olgu $\mathbf{x} \in c_G$ ja $G(\mathbf{x}) = l$, siis

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} ||x_k| - |l|| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} |x_k - l| \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty),$$

mistõttu mittelineaarne funktsioon $u \longmapsto |u|$ on G-pidev igas punktis $u \in \mathbb{R}$, järelikult $\mathcal{L} \neq \mathcal{G}$.

Olgu G koonduvuseeskiri, mis pole osajada-tüüpi, siis teoreemi 3.10 põhjal $\mathcal{G} \neq \mathcal{C}$. ∎

Märgime, et selliseid tugeva summeeruvusega määratud regulaarseid koonduvuseeskirju G, mis pole osajada-tüüpi, kindlasti leidub. Selline eeskiri on näiteks tugev C_1-lim-summeeruvus, st

$$G(\mathbf{x}) = l, \text{ kus } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - l| = 0.$$

Teoreemidest 5.1 ja C tuleneb järgmine teoreem.

Teoreem 5.2. *Leiduvad sellised regulaarsed maatriksid, mis määravad koonduvuseeskirja G omadusega $\mathcal{L} \subsetneqq \mathcal{G} \subsetneqq \mathcal{C}$.*

Selle peatüki ülejäänud osas uurime selliseid koonduvuseeskirju, mille puhul vaadeldav dihhotoomia tegelikult realiseerub. Kirjeldame üht selliste eeskirjade G klassi, et kehtib üks seostest $\mathcal{G}(I) = \mathcal{L}(I)$ ja $\mathcal{G}(I) = \mathcal{C}(I)$, kus $I = [a, b]$ või $I = \mathbb{R}$. Seejuures eeldame, et fikseeritud I korral on vaadeldavatel koonduvuseeskirjadel omadus

(GC_I): *iga G-pidev funktsioon $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ on pidev, st $\mathcal{G}(I) \subset \mathcal{C}(I)$.*

Nagu eespool märgitud, ei ole teada, kas iga regulaarne koonduvuseeskiri rahuldab tingimust (GC_I).

Järgnevad arutelud põhinevad olulisel määral teatavatel funktsionaalanalüütilistel argumentidel.

Definitsioon. Vektorruumi X üle korpuse K, kus $K = \mathbb{R}$ või $K = \mathbb{C}$, nimetatakse *algebraks*, kui selles iga järjestatud elementide paari (f, g) korral on defineeritud nende korrutis $fg \in X$ nii, et
$h(fg) = (hf)g$ $(h \in X)$,
$h(f + g) = hf + hg$, $(f + g)h = fh + gh$ $(h \in X)$,
$a(fg) = (af)g = f(ag)$ $(a \in K)$.

Definitsioon. Olgu X algebra üle korpuse K. Kui $(X, \| \cdot \|)$ on selline Banachi ruum, et

$$\| fg \| \leqslant \| f \| \| g \| \quad (f, g \in X),$$

siis ütleme, et X on *Banachi algebra*.

Teatavasti on $\mathcal{C}([a, b])$ Banachi ruum normiga

$$\| f \|_\infty := \sup_{u \in [a,b]} |f(u)|,$$

seega $f_n \longrightarrow f$ ruumis $\mathcal{C}([a, b])$ parajasti siis, kui $f_n(u) \longrightarrow f(u)$ ühtlaselt lõigus $[a, b]$. Pole kahtlust, et $\mathcal{C}([a, b])$ on Banachi algebra üle korpuse $\mathbb{R}$ tavalise funktsioonide korrutamise

$$fg(u) := f(u)g(u) \quad (u \in [a, b])$$

suhtes. Seejuures kehtib järgmine *Stone-Weierstrassi teoreem*.

Teoreem F (vt [14], Theorem 7.32). *Kui $X \subset \mathcal{C}([a, b])$ on selline alamalgebra, mis sisaldab mingi konstantse funktsiooni, siis järgmised tingimused on samaväärsed:*
(a) X eraldab punktid lõigus $[a, b]$, st

$$[u, v \in [a, b],\ u \neq v] \Rightarrow \exists f \in X \colon f(u) \neq f(v),$$

(b) X on tihe Banachi ruumis $(\mathcal{C}([a, b]), \| \cdot \|_\infty)$, st $\overline{X} = \mathcal{C}([a, b])$.

Kõigi kogu arvteljel pidevate funktsioonide $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ algebra $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ meetriline struktuur on keerulisem. Tegemist on täieliku meetrilise vektorruumiga (seda nimetatakse F-ruumiks), mille topoloogia on määratud poolnormide jadaga $(p_l)_{l \in \mathbb{N}}$, kus

$$p_l(f) := \max\{|f(u)| \,|u \in [-l, l]\} \quad (f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}))$$

ehk meetrikaga

$$\rho(f, g) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \frac{p_l(f - g)}{1 + p_l(f - g)} \quad (f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})).$$

Seega on jada (f_n) F-ruumis $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ koonduv elemendiks f parajasti siis, kui $f_n(u) \longrightarrow f(u)$ ühtlaselt igas lõigus $[-l, l]$ $(l \in \mathbb{N})$.

Me tõestame järgmise teoreemi, mis näitab, et teatavate koonduvuseeskirjade klasside korral otsitav dihhotoomia tõepoolest realiseerub.

Teoreem 5.3. *Olgu G selline regulaarne koonduvuseeskiri, et*
1^0 $c_G \cap \ell^\infty$ *on kinnine alamruum Banachi ruumis* $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *ja*
2^0 *lineaarne funktsionaal* $G\colon (c_G \cap \ell^\infty, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *on pidev.*
Kui G on omadusega (GC_I), kus
(a) $I = [a, b]$ *või*
(b) $I = \mathbb{R}$ *ja G-pidevus on tõkestatult määratud, st* $f \in \mathcal{G}$, *kui* $f|_{[a,b]} \in \mathcal{G}([a, b])$ *iga lõigu* $[a, b]$ *korral,*
siis kehtib üks kahest seosest $\mathcal{G}(I) = \mathcal{L}(I)$ *või* $\mathcal{G}(I) = \mathcal{C}(I)$.

Teoreemist 5.3 saame järgmise tulemuse regulaarse maatriksiga määratud koonduvuseeskirja jaoks. Märgime, et teoreemi 4.4 kohaselt on sellised eeskirjad omadusega (GC_I) iga intervalli I korral.

Järeldus 5.4. *Olgu koonduvuseeskiri G määratud regulaarse maatriksiga* $A = (a_{nk})$. *Kui kas*
(a) $I = [a, b]$ *või*
(b) $I = \mathbb{R}$ *ja G-pidevus on tõkestatult määratud,*
siis kehtib üks kahest seosest $\mathcal{G}(I) = \mathcal{L}(I)$ *või* $\mathcal{G}(I) = \mathcal{C}(I)$.

Tõestus. Funktsionaalanalüüsi kursuses tõestatakse, et kui maatriks $A = (a_{nk})$ rahuldab tingimust $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$, siis sellega määratud lineaarne operaator

$$A\colon \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty, \quad \mathbf{x} \longmapsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

on pidev. Kuna

$$\ell^\infty \cap c_A = A^{-1}(c)$$

ja $c \subset \ell^\infty$ on kinnine alamruum, siis $\ell^\infty \cap c_A$ on kinnine Banachi ruumis ℓ^∞. Seejuures

$$A\text{-}\lim\colon \ell^\infty \cap c_A \longrightarrow \mathbb{R}$$

kui pidevate operaatorite $A\colon (\ell^\infty \cap c_A, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow c$ ja $\lim\colon c \longrightarrow \mathbb{R}$ kompositsioon on samuti pidev. Niisiis, kui G on määratud regulaarse maatriksiga A, siis teoreemi 5.3 eeldused 1^0 ja 2^0 on täidetud. ■

Teoreemi 5.3 tõestuse esitame lemmade 5.5-5.7 abil.

Lemma 5.5. *Olgu G selline regulaarne koonduvuseeskiri, et* $\mathcal{L}(I) \subsetneqq \mathcal{G}(I) \subset \mathcal{C}(I)$, *kus* $I = \mathbb{R}$ *või* $I = [a, b]$. *Siis ruutfunktsioon* $u \longmapsto u^2$ *kuulub hulka* $\mathcal{H}(I) := \overline{\mathcal{G}(I)}$, *kus sulund on võetud F-ruumis* $\mathcal{C}(I)$.

Tõestus. Vaatame kõigepealt juhtu $I = \mathbb{R}$. Olgu lemma eeldused täidetud ning $f \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{L}$. Võime eeldada, et $f|_{[0,1]} \notin \mathcal{L}([0, 1])$ (vajaduse korral asendame funktsiooni f funktsiooniga $u \longmapsto f(u+a)$, kus $a \in \mathbb{R}$ on sobivalt valitud). Defineerime

$$f_n(u) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}u\right) \qquad (u \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

ja paneme tähele, et funktsioonid $f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on G-pidevad: kui $\mathbf{x} \in c_G$ ja $G(\mathbf{x}) = s$, siis tänu koonduvuseeskirja G lineaarsusele ning funktsiooni f G-pidevusele

$$\begin{aligned} G(f_n(\mathbf{x})) &= G\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\mathbf{x}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} G\left(f\left(\frac{k}{n}\mathbf{x}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}G(\mathbf{x})\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}s\right) = f_n(s). \end{aligned}$$

Kuna $f \in \mathcal{G} \subset \mathcal{C}$, siis võime defineerida funktsiooni $g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seosega

$$g(u) := \begin{cases} \frac{1}{u}\displaystyle\int_0^u f(t)dt, & \text{kui } u \neq 0, \\ f(0), & \text{kui } u = 0. \end{cases}$$

Peame silmas, et iga $u \neq 0$ korral

$$f_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}u\right) = \frac{1}{u}\sum_{k=1}^{n} \frac{u}{n} f\left(\frac{k}{n}u\right) = \frac{1}{u}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)u}{n}}^{\frac{ku}{n}} f\left(\frac{k}{n}u\right) dt,$$

seega

$$\begin{aligned} |g(u) - f_n(u)| &= \Big|\frac{1}{u}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{(k-1)u}{n}}^{\frac{ku}{n}}\left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}u\right)\right)dt\Big| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\substack{|t-\tau| \leqslant \frac{|u|}{n} \\ t,\tau \in [-l,l]}} |f(t) - f(\tau)|, \end{aligned}$$

kus $l := |u|$. Saadud hinnang kehtib ka juhul $u = 0$. Paneme tähele, et kuna $f \in \mathcal{C}$, siis f on igas lõigus $[-l, l] \subset \mathbb{R}$ ühtlaselt pidev, mistõttu

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\substack{|t-\tau| < \delta \\ t,\tau \in [-l,l]}} |f(t) - f(\tau)| = 0,$$

järelikult

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\substack{|t-\tau| \leqslant \frac{|u|}{n} \\ t,\tau \in [-l,l]}} |f(t) - f(\tau)| = 0.$$

Seega oleme saanud, et

$$\sup_{u \in [-l,l]} |g(u) - f_n(u)| \leqslant \sup_{\substack{|t-\tau| \leqslant \frac{|u|}{n} \\ t,\tau \in [-l,l]}} |f(t) - f(\tau)| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty),$$

mille kohaselt $f_n(u) \longrightarrow g(u)$ ühtlaselt igas lõigus $[-l, l]$, kus $l > 0$, st $f_n \longrightarrow g$ F-ruumis $\mathcal{C}$, mistõttu $g \in \mathcal{H}$.

Kuna ka funktsioon $u \longmapsto g(\alpha u)$ kuulub hulka $\mathcal{H}$ iga $\alpha \in \mathbb{R}$ korral, siis seosega

$$g_n(u) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}u\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

määratud funktsioonid g_n kuuluvad hulka $\mathcal{H}$. Kui defineerida $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seosega

$$h(u) := \begin{cases} \frac{1}{u}\displaystyle\int_0^u g(t)dt, & \text{kui } u \neq 0, \\ g(0), & \text{kui } u = 0, \end{cases}$$

siis, korrates eelnevat arutelu, näeme, et $g_n \longrightarrow h$ F-ruumis $\mathcal{C}$, seega $h \in \overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. Seejuures

$$h'(u) = g(u), \quad h''(u) = g'(u) = f(u) \quad (u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Näitame, et $h''\colon (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ ei ole nullfunktsioon. Tõepoolest, vastasel juhul $h(u) = au + b$ lõigus $[0,1]$, mistõttu

$$\int_0^u g(t)dt = au^2 + bu,$$

niisiis, $g(u) = 2au + b$ ning

$$\int_0^u f(t)dt = 2au^2 + bu.$$

Seega

$$f(u) = 4au + b,$$

mis on vastuolus tehtud eeldusega, et funktsioon f pole lõigus $[0,1]$ lineaarne.

Kokkuvõttes oleme leidnud sellise funktsiooni $h \in \mathcal{H}$, mis on kaks korda diferentseeruv hulgas $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $h''(u_0) \neq 0$ mingi $u_0 \in (0,1)$ korral. Võime eeldada, et funktsioon h on kaks korda diferentseeruv nulli ümbruses ning $h''(0) \neq 0$ (vajaduse korral asendame funktsiooni h funktsiooniga $u \longmapsto h(u+a)$, kus $a \in \mathbb{R}$ on sobivalt valitud). Seega võime kirjutada välja funktsiooni h Taylori valemi punktis 0:

$$h(u) = h(0) + h'(0)u + \frac{1}{2}h''(0)u^2 + r(u) \quad (u \in \mathbb{R}), \tag{5.1}$$

kus jääkliige $r(u)$ protsessis $u \longrightarrow 0$ läheneb kiiremini nullile kui $(u-0)^2$, st

$$\frac{r(u)}{u^2} \longrightarrow 0 \quad (u \longrightarrow 0).$$

Asendades valemis (5.1) muutuja u murruga $\frac{u}{n}$ ja korrutades võrduse (5.1) mõlemat poolt arvuga n^2, saame võrduse

$$\frac{1}{2}h''(0)u^2 - \left(n^2 h\left(\frac{u}{n}\right)\right) - n^2h(0) - nh'(0)u) = -n^2 r\left(\frac{u}{n}\right) \quad (u \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}),$$

kusjuures funktsioonid

$$h_n(u) := n^2 h\left(\frac{u}{n}\right) - n^2 h(0) - nh'(0)u$$

kuuluvad hulka $\mathcal{H}$. Kuna iga $m > 0$ korral

$$\begin{aligned}\sup_{u\in[-m,m]}\left|\frac{1}{2}h''(0)u^2 - h_n(u)\right| &= \sup_{u\in[-m,m]}\left|-n^2 r\left(\frac{u}{n}\right)\right| = \\ &= \sup_{\substack{u\in[-m,m]\\ u\neq 0}}\left|\frac{r(\frac{u}{n})}{(\frac{u}{n})^2}\right| |u|^2 \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty),\end{aligned}$$

siis funktsionaaljada $(h_n(u))$ koondub ühtlaselt funktsiooniks $\frac{1}{2}h''(0)u^2$ igas lõigus $[-m, m]$ $(m \in \mathbb{R})$, mis tähendab, et

$$h_n \longrightarrow \frac{1}{2}h''(0)u^2 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

F-ruumis $\mathcal{C}$ ning funktsioon $u \longmapsto u^2$ kuulub hulka $\mathcal{H}$ tänu tingimusele $h''(0) \neq 0$.

Juhul $I = [a, b]$ kordame eelnevat tõestust, kusjuures eeldame, et 0 on lõigu $[a, b]$ keskpunkt (vajadusel asendame funktsiooni f funktsiooniga $u \longmapsto f(u - \frac{a+b}{2})$.

■

Lemma 5.6. *Olgu G regulaarne koonduvuseeskiri omadusega (GC_I), kus $I = \mathbb{R}$ või $I = [a, b]$. Siis kas $\mathcal{G}(I) = \mathcal{L}(I)$ või $\mathcal{G}(I)$ on tihe F-ruumis $\mathcal{C}(I)$.*

Tõestus. Vaatame esiteks juhtu $I = \mathbb{R}$ ning eeldame, et $\mathcal{G} \neq \mathcal{L}$. Meie eesmärk on veenduda, et $\mathcal{H} := \overline{\mathcal{G}} = \mathcal{C}$. Kuna funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on pidev parajasti siis, kui $f|_{[a,b]}\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ on pidev igas lõigus $[a, b]$, siis piisab näidata, et

$$\mathcal{H}|_{[a,b]} := \{f|_{[a,b]}\colon f \in \mathcal{H}\} = \mathcal{C}([a, b]).$$

Pidades silmas, et $\mathcal{H}|_{[a,b]} = \overline{\mathcal{G}([a, b])}$ on kinnine Banachi ruumis $\mathcal{C}([a, b])$, piisab näidata, et $\mathcal{H}|_{[a,b]}$ on tihe ruumis $\mathcal{C}([a, b])$.

Kuna $\mathcal{L} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{C}$, siis $\mathcal{H}|_{[a,b]}$ eraldab punktid lõigus $[a, b]$ ning sisaldab konstantsed funktsioonid. Stone-Weierstrassi teoreemi põhjal piisab näidata, et $\mathcal{H}|_{[a,b]}$ on Banachi algebra $\mathcal{C}([a, b])$ alamalgebra. Selleks veendume, et $fg \in \mathcal{H}$ iga $f, g \in \mathcal{H}$ korral. Paneme tähele, et $fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$, mistõttu piisab näidata, et $f^2 \in \mathcal{H}$ iga $f \in \mathcal{H}$ puhul.

Olgu $f \in \mathcal{H}$, siis leidub selline jada (h_n), et $h_n \in \mathcal{G}$ ja $h_n \longrightarrow f$ ühtlaselt igas lõigus $[-l, l]$, kus $l > 0$. Teiseks, kuna lemma 5.5 põhjal ruutfunktsioon

$$R\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto u^2$$

kuulub hulka $\mathcal{H}$, siis leidub hulgas $\mathcal{G}$ selline jada (g_n), et $g_n \longrightarrow R$ ühtlaselt igas lõigus $[-m, m]$, kus $m > 0$. Näitame, et
1) $g_n \circ h_n \in \mathcal{G}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral,
2) $\| g_n \circ h_n - f^2 \|_{\mathcal{C}([-l,l])} \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$.

Esimese väite tõestuseks olgu $\mathbf{x} \in c_G$ ja $G(\mathbf{x}) = s$. Siis funktsioonide g_n ja h_n G-pidevusest järeldub, et

$$\begin{aligned} G(g_n \circ h_n(\mathbf{x})) &= G(g_n(h_n(\mathbf{x}))) = g_n(G(h_n(\mathbf{x}))) = \\ &= g_n(h_n(G(\mathbf{x}))) = g_n(h_n(s)) = g_n \circ h_n(s) \end{aligned}$$

ning liitfunktsioon $g_n \circ h_n$ on tõepoolest G-pidev.

Veendume ka teise väite kehtivuses. Olgu $l > 0$ suvaliselt fikseeritud ja olgu $m > 0$ selline arv, et $f(u), h_n(u) \in [-m, m]$ iga $u \in [-l, l]$ korral. Siis

$$\begin{aligned} \| g_n \circ h_n - f^2 \|_{\mathcal{C}([-l,l])} &= \| g_n \circ h_n - R \circ h_n + R \circ h_n - R \circ f \|_{\mathcal{C}([-l,l])} \leqslant \\ &\leqslant \| g_n \circ h_n - R \circ h_n \|_{\mathcal{C}([-l,l])} + \\ &+ \| R \circ h_n - R \circ f \|_{\mathcal{C}([-l,l])} \leqslant \\ &\leqslant \| g_n - R \|_{\mathcal{C}([-m,m])} \| h_n \|_{\mathcal{C}([-l,l])} + \\ &+ \| R \|_{\mathcal{C}([-m,m])} \| h_n - f \|_{\mathcal{C}([-l,l])} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty), \end{aligned}$$

sest $(\| h_n \|_{\mathcal{C}([-l,l])})$ on tõkestatud jada ja

$$\| g_n - R \|_{\mathcal{C}([-m,m])} \longrightarrow 0, \; \| h_n - f \|_{\mathcal{C}([-l,l])} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Seega $f^2 \in \mathcal{H}$ ning kokkuvõttes oleme tõestanud, et $\mathcal{H}|_{[a,b]} = \mathcal{C}[a, b]$ iga lõigu $[a, b]$ korral.

Juhul $I = [a, b]$ on lemma tõestus analoogiline. Seejuures me kasutame asjaolu, et kui ruutfunktsioon $u \longmapsto u^2$ kuulub hulka $\mathcal{H}([a, b]) := \overline{\mathcal{G}([a, b])}$, siis kuulub ta ka hulka $\mathcal{H}([c, d])$ iga lõigu $[c, d]$ korral. ■

Lemma 5.7. *Olgu G selline regulaarne koonduvuseeskiri, et*
1^0 *$c_G \cap \ell^\infty$ on kinnine Banachi ruumis $(\ell^\infty, \| \cdot \|_\infty)$ ja*
2^0 *lineaarne funktsionaal $G\colon (c_G \cap \ell^\infty, \| \cdot \|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ on pidev.*
Kui G on omadusega (GC_I), kus
(a) $I = [a, b]$ või
(b) $I = \mathbb{R}$ ja G-pidevus on tõkestatult määratud,
siis $\mathcal{G}(I)$ on F-ruumi $\mathcal{C}(I)$ kinnine alamruum.

Tõestus. (a) Eeldame, et $I = [a, b]$. Olgu $f \in \mathcal{C}([a, b])$ ja $f_n \in \mathcal{G}([a, b])$ sellised funktsioonid, et $\| f_n - f \|_{\mathcal{C}([a,b])} \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$. Meie eesmärk on veenduda, et $f \in \mathcal{G}([a, b])$.

Olgu $s \in [a,b]$ suvaliselt fikseeritud ja olgu $\mathbf{x} = (x_k)$ selline jada lõigus $[a,b]$, et $G(\mathbf{x}) = s$. Kuna iga funktsioon f_n on G-pidev ja seega ka pidev lõigus $[a,b]$, siis $f_n(\mathbf{x}) \in c_G \cap l_\infty$ iga n korral ja

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_n(x_k) - f(x_k)| \leqslant \sup_{v\in[a,b]} |f_n(v) - f(v)| =\| f_n - f \|_\infty \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Järelikult $f(\mathbf{x}) \in c_G \cap l_\infty$ tänu eeldusele 1^0, niisiis $f_n(\mathbf{x}) \longrightarrow f(\mathbf{x})$ ruumis $(c_G \cap \ell^\infty, \| \cdot \|_\infty)$. Nüüd pidades silmas eeldust 2^0 ja funktsioonide f_n G-pidevust saame, et

$$f(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(G(\mathbf{x})) = \lim_{n\to\infty} G(f_n(\mathbf{x})) = G(f(\mathbf{x})),$$

seega $f \in \mathcal{G}([a,b])$. Sellega on tõestatud, et $\mathcal{G}([a,b])$ on kinnine ruumis $\mathcal{C}([a,b])$.
(b)Eeldame, et $I = \mathbb{R}$. Olgu $f \in \mathcal{C}$ ja $f_n \in \mathcal{G}$ sellised funktsioonid, et $f_n \longrightarrow f$ F-ruumis $\mathcal{C}$. Siis suvalise lõigu $[a,b]$ korral $f|_{[a,b]} \in \mathcal{C}([a,b])$, $f_n|_{[a,b]} \in \mathcal{G}([a,b])$ ja

$$\| f_n - f \|_{\mathcal{C}([a,b])} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

Väite (a) kohaselt $f|_{[a,b]} \in \mathcal{G}([a,b])$ iga lõigu $[a,b]$ korral. Kuna G-pidevus on eelduse kohaselt tõkestatult määratud, siis $f \in \mathcal{G}$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et $\mathcal{G}$ on kinnine F-ruumis $\mathcal{C}$.

■

Teoreemist 5.2 ning järeldusest 5.4 selgub, et regulaarse maatriksiga määratud koonduvuseeskirja G korral ei pruugi G-pidevus üldjuhul olla tõkestatult määratud.

6 Ühes punktis G-pidevad funktsioonid

Buck [4] tõestas, et kui funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on C_1-lim-pidev mingis üksikus punktis, siis on ta lineaarne. Antoni [1] ja Spigel ning Krupnik [16] said sarnaseid tulemusi maatriksiga määratud koonduvuseeskirjade korral. Meie tõestame järgnevas tugevama teoreemi 6.1, kus maatriksiga määratud koonduvuseeskirjade asemel vaadatakse suvalisi regulaarseid koonduvuseeskirju omadusega (L_2).

Definitsioon. Ütleme, et kaks 0-1-jada $\mathbf{z}$ ja $\mathbf{z}'$ on *disjunktsed*, kui $z_n z_n' = 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Definitsioon. Ütleme, et koonduvuseeskiri G on *omadusega* (L_2), kui leiduvad sellised disjunktsed 0-1-jadad $\mathbf{z}$ ja $\mathbf{z}'$, et

$$G(\mathbf{z}) = \alpha \neq 0,\ G(\mathbf{z}') = \beta \neq 0 \text{ ning } \alpha + \beta \neq 1. \tag{6.1}$$

Teoreem 6.1. *Olgu G regulaarne koonduvuseeskiri omadusega (L_2). Siis iga funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, mis on G-pidev mingis punktis u_0, on lineaarne.*

Tõestus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et funktsioon f on G-pidev punktis 0 ja $f(0) = 0$: vajaduse korral asendame funktsiooni f funktsiooniga $x \longmapsto f(x + u_0) - f(u_0)$.

Rahuldagu disjunktsed 0-1-jadad $\mathbf{z}$ ja $\mathbf{z}'$ tingimusi (6.1). Defineerime jada $\mathbf{z}'' = (z_n'')$ seosega $z_n := 1 - z_n - z_n'$. Paneme tähele, et tegemist on G-koonduva 0-1-jadaga, mille korral $\gamma := G(\mathbf{z}'') = 1 - (\alpha + \beta) \neq 0$, ning jadad $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}'$ ja $\mathbf{z}''$ on paarikaupa disjunktsed.

Olgu $u, v \in \mathbb{R}$ ja

$$x_n := -\frac{\gamma}{2\alpha} u z_n - \frac{\gamma}{2\beta} v z_n' - \frac{u+v}{2} z_n''.$$

Siis jada $\mathbf{x} = (x_n)$ on G-koonduv ning

$$G(\mathbf{x}) = -\frac{\gamma}{2} u - \frac{\gamma}{2} v - \frac{(u+v)\gamma}{2} = 0.$$

Funktsioon f on eelduse kohaselt G-pidev kohal 0, mistõttu $G(f(\mathbf{x})) = f(0) = 0$. Kuna

$$f(x_n) = z_n f\left(-\frac{\gamma}{2\alpha} u\right) + z_n' f\left(-\frac{\gamma}{2\beta} v\right) + z_n'' f\left(-\frac{u+v}{2}\right),$$

siis

$$0 = G(f(\mathbf{x})) = \alpha f\left(-\frac{\gamma}{2\alpha} u\right) + \beta f\left(-\frac{\gamma}{2\beta} v\right) + \gamma f\left(\frac{u+v}{2}\right). \tag{6.2}$$

Kui $u = 0$ või $v = 0$, saame võrdusest (6.2), et

$$\alpha f\left(-\frac{\gamma}{2\alpha} u\right) = -\gamma f\left(\frac{u}{2}\right)$$

ja

$$\beta f\left(-\frac{\gamma}{2\beta}v\right) = -\gamma f\left(\frac{v}{2}\right).$$

Asendades need võrdusesse (6.2) ja jagades võrduse (6.2) mõlemat poolt läbi arvuga γ, näeme, et iga $u, v \in \mathbb{R}$ korral peab kehtima valem

$$f\left(\frac{u}{2}\right) + f\left(\frac{v}{2}\right) = f\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

Kui võtame $u = v$, siis $f\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{f(u)}{2}$, mistõttu

$$\frac{f(u)+f(v)}{2} = f\left(\frac{u+v}{2}\right) \tag{6.3}$$

iga $u, v \in \mathbb{R}$ korral.

Lemma 2.2 põhjal leiduvad selline tihe alamhulk $D \subset \mathbb{R}$ ja arvud $a, b \in \mathbb{R}$, et

$$f(u) = au + b \quad (u \in D).$$

Olgu arv $u \in \mathbb{R}$ suvaline. Hulga D tiheduse tõttu leidub seal selline jada $\mathbf{t} = (t_n)$, et $t_n \longrightarrow 2u$. Siis võrduse (6.3) põhjal

$$f(u) = \frac{1}{2}(f(t_n) + f(2u - t_n)) = \frac{1}{2}(at_n + b + f(2u - t_n)).$$

Kuna jada $(2u - t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on G-koonduv arvuks 0, siis sama kehtib ka jada $(f(2u - t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ korral. Paneme tähele, et koonduvuseeskirja G regulaarsuse ning lineaarsuse tõttu

$$\begin{aligned} f(u) &= G((\frac{1}{2}(at_n + b + f(2u - t_n)))_{n\in\mathbb{N}}) = G(\frac{1}{2}(a\mathbf{t} + b\mathbf{e} + f(2u\mathbf{e} - \mathbf{t}))) = \\ &= \frac{1}{2}(a2u + b + 0) = au + \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Näeme, et funktsioon f on lineaarne. ■

Osutub, et peaaegu koonduvusel on omadus (L_2), mistõttu saab sellele rakendada teoreemi 6.1 (vt Borsík ja Šalát [3]).

Järeldus 6.2. *Olgu G peaaegu koonduvusega määratud koonduvuseeskiri. Siis iga funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, mis on G-pidev mingis punktis, on lineaarne.*

Tõestus. Jadad $\mathbf{z} := (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$ ja $\mathbf{z}' := (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots)$ on disjunktsed ja peaaegu koonduvad arvuks $\frac{1}{3}$, seega on koonduvuseeskiri G omadusega (L_2). Teoreemi 6.1 põhjal on mingis punktis G-pidev funktsioon f lineaarne. ■

Võib küsida, kas teoreem 6.1 jääb kehtima ka siis, kui asendada omadus (L_2) nõrgema omadusega (L_1). Antoni ja Šalát [2] näitasid, et see nii pole. Nad leidsid näite regulaarsest koonduvuseeskirjast G omadusega (L_1) ning mittelineaarsest funktsioonist f, mis on G-pidev vaid täpselt ühes punktis. Antoni [1] näitas hiljem, et kui regulaarsel koonduvuseeskirjal on omadus (L_1), siis iga funktsioon, mis on mingis punktis G-pidev, on pidev. Märgime, et Antoni tõestuses oli lünk, mille täitsid hiljem Connor ja Grosse-Erdmann [7].

Teoreem 6.3. *Olgu G regulaarne koonduvuseeskiri omadusega (L_1). Siis iga funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, mis on G-pidev mingis punktis, on pidev kogu arvteljel $\mathbb{R}$.*

Tõestus. Funktsioon $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olgu G-pidev punktis z_0. Oletame vastuväiteliselt, et funktsioon f on katkev mingis punktis u_0, siis eksisteerib selline nulliks koonduv jada (u_n), et

$$\lim_{n\to\infty} f(u_0 + u_n) = y \neq f(u_0).$$

Me esitame siinkohal Antoni tõestuse, st eeldame, et $y \in \mathbb{R}$. Üldjuhul on väide tõestatud artiklis [7].

Vaatame 0-1-jada $\mathbf{z} = (z_n)$, mille korral $G(\mathbf{z}) = \alpha \notin \{0, 1\}$. Paneme tähele, et iga nulliks koonduva jada (t_n) korral on jada $\mathbf{x} = (x_n)$, kus

$$x_n := z_n(u_0 + t_n) + (1 - z_n)\frac{z_0 - \alpha u_0}{1 - \alpha},$$

G-koonduv arvuks z_0. Seega on G-koonduvad arvuks z_0 ka jada $\mathbf{x}' = (x'_n)$, kus

$$x'_n := z_n(u_0 + u_n) + (1 - z_n)\frac{z_0 - \alpha u_0}{1 - \alpha},$$

ning jada $\mathbf{x}'' = (x''_n)$, kus

$$x''_n := z_n u_0 + (1 - z_n)\frac{z_0 - \alpha u_0}{1 - \alpha}.$$

Kuna funktsioon f on G-pidev punktis z_0, siis

$$G(f(\mathbf{x}')) = \alpha y + (1 - \alpha) f\left(\frac{z_0 - \alpha u_0}{1 - \alpha}\right) = f(z_0)$$

ja

$$G(f(\mathbf{x}'')) = \alpha f(u_0) + (1 - \alpha) f\left(\frac{z_0 - \alpha u_0}{1 - \alpha}\right) = f(z_0),$$

mistõttu $f(u_0) = y$. Oleme saanud vastuolu tehtud eeldusega.

■

Kirjandus

[1] J. Antoni, *On the A-continuity of real functions II*, Math. Slovaca. **36** (1986), 283–288.

[2] J. Antoni, T. Šalát, *On the A-continuity of real functions*, Acta Math. Univ. Comenian. **39** (1980), 159–164.

[3] J. Borsík, T. Šalát, *On F-continuity of real functions*, Tatra Mt. Math. Publ. **2** (1993), 37–42.

[4] R. C. Buck, *Solution of problem 4216*, Amer. Math. Monthly **55** (1948), 36.

[5] R. C. Buck, *An addendum to "A note on subsequences"*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 1074–1075.

[6] H. Çakalli, *On G-continuity*, Comput. Math. Appl. **61** (2011), 313–318.

[7] J. Connor, K.-G. Grosse-Erdmann, *Sequential definitions of continuity for real functions*, Rocky Mountain J. Math. **33** (2003), 93–121.

[8] T. B. Iwiński, *Some remarks on Toepliz methods and continuity*, Comment. Math. Prace Mat. **16** (1972), 37–43.

[9] T. Leiger, *Funktsionaalanalüüsi meetodid summeeruvusteoorias*, Tartu Ülikooli trükikoda, Tartu, 1992.

[10] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent sequences*, Acta Math. **80** (1948), 167–190.

[11] G. G. Lorentz, K. Zeller, *Strong and ordinary summability*, Tôhoku Math. J. **15** (1963), 315–321.

[12] E. C. Posner, *Summability-preserving functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 73–76.

[13] H. Robbins, *Problem 4216*, Amer. Math. Monthly **53** (1946), 470–471.

[14] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis.* Third edition. International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill Book Co. New-York-Auckland-Düsseldorf, 1976.

[15] I. J. Schoenberg, *The integrability of certain functions and related summability methods*, Amer. Math. Monthly **66** (1959), 361–375.

[16] E. Spigel, N. Krupnik, *On the A-continuity of real functions*, J. Anal. **2** (1994), 145–155.

[17] T. Šalát, *On statistically convergent sequences of real numbers*, Math. Slovaca **30** (1980), 139–150.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Leesi Peedumäe,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose
"Üldiste koonduvuseeskirjade suhtes pidevad funktsioonid",
mille juhendaja on professor Toivo Leiger,
1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 11.05.2017