

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Aljona Koliberskaja
Funktsiooni lähendamine kuupsplaini abil

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: prof. Arvet Pedas

Tartu 2017

Funktsiooni lähendamine kuupsplaini abil

Bakalaureusetöö

Aljona Koliberskaja

Lühikokkuvõte. Bakaureusetöös uuritakse funktsioonide interpoleerimist kuupsplainide abil. Töö eesmärk on anda veahinnang sellisele lähendamisele etteantud rajatingimuste korral. Kõnealune interpoleerimine on töös realiseeritud MathCadi keskkonnas.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: Kuupsplainid, lineaarvõrrandite kolmediagonaalne süsteem, veahinnangud, pakett MathCad.

Approximation of functions by cubic splines

Bachelor's thesis

Aljona Koliberskaja

Abstract. Interpolation of functions by means of cubic splines has been studied in this bachelor's thesis. The objective of the thesis is to give estimates for the error of such an approximation. Practical interpolation has been implemented in the Mathcad environment.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Keywords: Cubic splines, three-diagonal system of linear equations, estimates for the error, MathCad package.

Sisukord

| | |
|--|----|
| Sissejuhatus | 4 |
| § 1. Splaini mõiste | 6 |
| 1.1 Kuupsplaini definitsioon | 6 |
| § 2. Interpoleeriva kuupsplaini konstrueerimine | 8 |
| § 3. Splaini ja tema tuletiste pidevus | 11 |
| § 4. Domineeriva peadiagonaaliga maatriks | 14 |
| § 5. Interpoleeriva kuupsplaini olemasolu ja ühesus | 16 |
| 5.1 Interpoleeriva kuupsplaini olemasolu ja ühesus rajatingimustel (I) | 16 |
| 5.2 Interpoleeriva kuupsplaini olemasolu ja ühesus rajatingimustel (II) | 17 |
| § 6. Veahinnangud | 18 |
| 6.1 Splaini tuletise ja interpoleeritava funktsiooni tuletise vahe hinnang sõlmedes | 18 |
| 6.2 Interpoleeriva Hermite'i kuupsplaini viga | 23 |
| 6.3 Interpoleeriva kuupsplaini vea hinnang | 27 |
| § 7. Arvulised näited | 34 |
| Kirjandus | 44 |

Sissejuhatus

Bakalaureusetöös käsitletakse funktsioonide interpoleerimist kuupsplainidega. Lõigul $[a, b]$ määratud funktsiooni $f = f(x)$ interpoleerimisel polünoomidega on suure arvu interpolatsioonisõlmede korral ka interpoleeriva polünoomi aste suur, mis pika lõigu $[a, b]$ korral ei pruugi anda rahuldavaid tulemusi ka küllalt kõrge astme polünoomide kasutamise korral. Seepärast kasutatakse polünoomide asemel sageli splaine. Kuupsplainide kasutamise korral tükeldatakse lõik $[a, b]$ osalõikudeks võrgu $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ abil ning interpoleeritakse funktsiooni $f(x)$ võrgu sõlmedes $x = x_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) lõigul $[a, b]$ kaks korda pidevalt diferentseeruva funktsiooniga $s_3(x)$, mis on igal osalõigul $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) kolmandat järku polünoom. Niisugust funktsiooni nimetatakse *funktsiooni $f(x)$ interpoleerivaks kuupsplainiks*. Interpoleeriva kuupsplaini $s_3(x)$ leidmisel kasutatakse lisaks interpolatsioonitingimustele

$$s_3(x_k) = f(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (0.1)$$

sageli lähendatava funktsiooni $f(x)$ esimest või teist järku tuletise väärtusi lõigu $[a, b]$ otspunktides: $\{f'(a) = a', f'(b) = b'\}$ või $\{f''(a) = a'', f''(b) = b''\}$.

Käesoleval bakalaureusetööl on kolm peamist eesmärki. Esimene neist on konstrueerida kuupsplain $s_3(x)$, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi (0.1). Teine eesmärk on hinnata viga, mis tekib lõigul $[a, b]$ neli korda pidevalt diferentseeruva funktsiooni $f(x)$ lähendamisel kuupsplainiga $s_3(x)$, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi (0.1) ja rajatingimusi kujul $s'_3(a) = a', s'_3(b) = b'$ või $s''_3(a) = a'', s''_3(b) = b''$. Kolmas eesmärk on vaadelda kõnealuse lähendamisülesande lahendamisel tekkivat viga etteantud funktsiooni $f(x)$ korral paketi MathCad abil.

Bakalaureusetöös on tuginetud töödes [1, 4] kasutatud metoodikale. Erinevalt tööst [1] on käesolevas töös lisaks hinnangule $s_3(x) - f(x)$ jaoks leitud ka hinnang veale $s'_3(x) - f'(x)$ ning tõestatud üks tulemus interpoleeriva Hermite'i kuupsplaini jaoks.

Töö koosneb seitsmest paragrahvist ja lisast.

Paragrahvides 1–5 tuuakse sisse interpoleeriva kuupsplaini mõiste, tuletatakse selle üldkuju ning näidatakse, et selline kuupsplain on vaadeldavatel rajatingimustel üheselt määratud.

Paragrahvis 6 leiatakse hinnang vigadele

$$\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - f(x)| \quad \text{ja} \quad \max_{x \in [a, b]} |s'_3(x) - f'(x)|$$

suuruse $h = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$ kaudu.

Lõpuks, paragrahvis 7 analüüsitakse töö lisas paketi MathCad abil lahendatud konkreetsete interpolatsiooniülesannete lahendite viga.

§ 1. Splaini mõiste

Olgu lõigul $[a, b]$ antud võrk $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ ning olgu $m \in \mathbb{N}$. Sageli vaadeldakse võrguga Δ seotud funktsioone $s_m(x)$, mis lõigu $[a, b]$ igal osalõigul $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) on m järku polünoomid ning $s_m \in C^{m-1}[a, b]$. Sellised funktsioone nimetatakse m järku *splainideks* võrgul Δ .

1.1. Kuupsplaini definitsioon

Olgu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Olgu lõigus $[a, b]$ antud võrk

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (1.1)$$

Siin n on mingi etteantud naturaalarv. Punkte x_0 ja x_n nimetatakse võrgu Δ *rajasõlmedeks*, punkte x_1, \dots, x_{n-1} nimetatakse võrgu Δ *sisesõlmedeks*.

Definitsioon 1.1. Funktsiooni $s_3: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse võrguga Δ seotud kuupsplainiks kui:

(1) igas osalõigus $[x_{k-1}, x_k]$ on s_3 kuuppolünoom, s.t

$$s_3(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3, \\ \text{kui } x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

(2) $s_3 \in C^2[a, b]$, s.t s_3 on kaks korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[a, b]$.

Definitsioon 1.2. Kuupsplaini $s_3(x)$ nimetatakse funktsiooni $f \in C[a, b]$ *interpoleerivaks kuupsplainiks* võrgul Δ , kui

$$s_3(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

kus $f_k = f(x_k)$. Tingimusi (1.2) nimetatakse *interpolatsioonitingimusteks*.

Kuupsplain $s_3(x)$ on igal osalõigul $[x_{k-1}, x_k]$ kolmandat järku polünoom, mis on sellel lõigul määratud nelja kordajaga. Lõikude $[x_{k-1}, x_k]$ arv on n . Splaini täielikuks määramiseks tuleb leida $4n$ parameetrit: a_k , b_k , c_k ja d_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Tingimus (2) tähendab, et funktsioon $s_3(x)$ ning selle tuletised $s_3'(x)$ ja $s_3''(x)$ on pidevad kõikides võrgu Δ sisesõlmedes. Sisesõlmi on kokku $n - 1$.

Seega polünoomide parameetrite määramiseks on olemas $3(n - 1)$ lisatingimust, mis kitsendavad parameetrite valikut. Interpolatsioonitingimusi (1.2) on kokku $n + 1$. Seega vabade parameetrite arv, millest splain $s_3(x)$ sõltub, on $4n - 3(n - 1) - (n + 1) = 2$. Niisiis on interpolatsioonispaini määramiseks puudu kaks tingimust. Sagedamini kasutatavad lisatingimused on järgmised:

- (I) esimest tüüpi rajatingimused kujul $s'_3(a) = a'$ ja $s'_3(b) = b'$, kus $a', b' \in \mathbb{R}$ on etteantud arvud (s.t antakse ette s_3 esimest järku tuletise väärtused lõigu $[a, b]$ otspunktides);
- (II) teist tüüpi rajatingimused kujul $s''_3(a) = a''$ ja $s''_3(b) = b''$, kus $a'', b'' \in \mathbb{R}$ on etteantud arvud (s.t antakse ette s_3 teist järku tuletise väärtused lõigu $[a, b]$ otspunktides).

§ 2. Interpoleeriva kuupsplaini konstrueerimine

Olgu antud võrk (1.1). Selle võrgu kõrvuti asetsevate sõlmede vaheline kaugus olgu $h_k := x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Igas lõigus $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$, defineerime funktsiooni $s(x)$ kui kolmanda astme polünoomi:

$$s_3(x) := a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3, \quad (2.1)$$

kui $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$,

kus a_k , b_k , c_k ja d_k on tundmatud parameetrid. Tähistame

$$m_k := s_3'(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Suuruseid m_0, \dots, m_n nimetatakse sageli kuupsplaini $s_3(x)$ esimesteks momentideks.

Olgu $k \in \{1, \dots, n\}$ suvaline. Seosest (2.1) saame, et

$$s_3'(x) = b_k + 2c_k(x - x_{k-1}) + 3d_k(x - x_{k-1})^2, \quad x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Võttes eelnevas võrduses $x = x_{k-1}$ ja $x = x_k$, saame võrdused

$$m_{k-1} = b_k \quad \text{ja} \quad m_k = b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2,$$

millest

$$2c_k h_k + 3d_k h_k^2 = m_k - m_{k-1}. \quad (2.2)$$

Kui $x = x_{k-1}$ ja $x = x_k$, siis seostest (1.2) ja (2.1) saame, et

$$f_{k-1} = a_k \quad \text{ja} \quad f_k = a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3.$$

Eelnevatest võrdustest järeldub, et

$$c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = f_k - f_{k-1} - m_{k-1} h_k. \quad (2.3)$$

Moodustame võrranditest (2.2) ja (2.3) süsteemi

$$\begin{cases} 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 = m_k - m_{k-1}, \\ c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = f_k - f_{k-1} - m_{k-1} h_k, \end{cases} \quad (2.4)$$

kus c_k ja d_k on otsitavad. Avaldades esimesest võrrandist otsitava c_k , saame

$$c_k = \frac{m_k}{2h_k} - \frac{m_{k-1}}{2h_k} - \frac{3d_k h_k}{2}. \quad (2.5)$$

Asendades otsitava c_k eelnevast võrdusest süsteemi (2.4) teise võrrandisse, saame

$$\left(\frac{m_k}{2h_k} - \frac{m_{k-1}}{2h_k} - \frac{3d_k h_k}{2} \right) h_k^2 + d_k h_k^3 = f_k - f_{k-1} - m_{k-1} h_k,$$

millest

$$\frac{m_k h_k}{2} - \frac{m_{k-1} h_k}{2} - \frac{d_k h_k^3}{2} = f_k - f_{k-1} - m_{k-1} h_k.$$

Avaldame viimasest võrdusest otsitava d_k :

$$d_k = \frac{2(f_{k-1} - f_k)}{h_k^3} + \frac{m_{k-1}}{h_k^2} + \frac{m_k}{h_k^2}.$$

Asendades saadud d_k avaldisse (2.5), leiame

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{m_k}{2h_k} - \frac{m_{k-1}}{2h_k} - \frac{3h_k}{2} \left(\frac{2(f_{k-1} - f_k)}{h_k^3} + \frac{m_{k-1}}{h_k^2} + \frac{m_k}{h_k^2} \right) \\ &= -\frac{3(f_{k-1} - f_k)}{h_k^2} - \frac{2m_{k-1}}{h_k} - \frac{m_k}{h_k}. \end{aligned}$$

Seega polünoomi $s_3(x)$ kordajad lõigus $[x_{k-1}, x_k]$ on järgmised:

$$\begin{aligned} a_k &= f_{k-1}, \\ b_k &= m_{k-1}, \\ c_k &= -\frac{3(f_{k-1} - f_k)}{h_k^2} - \frac{2m_{k-1}}{h_k} - \frac{m_k}{h_k}, \\ d_k &= \frac{2(f_{k-1} - f_k)}{h_k^3} + \frac{m_{k-1}}{h_k^2} + \frac{m_k}{h_k^2}. \end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned} s_3(x) &= f_{k-1} + m_{k-1}(x - x_{k-1}) \\ &\quad - \left(\frac{3(f_{k-1} - f_k)}{h_k^2} + \frac{2m_{k-1}}{h_k} + \frac{m_k}{h_k} \right) (x - x_{k-1})^2 \\ &\quad + \left(\frac{2(f_{k-1} - f_k)}{h_k^3} + \frac{m_{k-1}}{h_k^2} + \frac{m_k}{h_k^2} \right) (x - x_{k-1})^3, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$\begin{aligned} s_3'(x) &= m_{k-1} - \left(\frac{6(f_{k-1} - f_k)}{h_k^2} + \frac{4m_{k-1}}{h_k} + \frac{2m_k}{h_k} \right) (x - x_{k-1}) \\ &\quad + \left(\frac{6(f_{k-1} - f_k)}{h_k^3} + \frac{3m_{k-1}}{h_k^2} + \frac{3m_k}{h_k^2} \right) (x - x_{k-1})^2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$s_3''(x) = -\frac{6(f_{k-1} - f_k)}{h_k^2} - \frac{4m_{k-1}}{h_k} - \frac{2m_k}{h_k} + \left(\frac{12(f_{k-1} - f_k)}{h_k^3} + \frac{6m_{k-1}}{h_k^2} + \frac{6m_k}{h_k^2} \right) (x - x_{k-1}), \quad (2.8)$$

$$x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$s_3'''(x) = \frac{12(f_{k-1} - f_k)}{h_k^3} + \frac{6m_{k-1}}{h_k^2} + \frac{6m_k}{h_k^2}, \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.9)$$

§ 3. Splaini ja tema tuletiste pidevus

Definitsioon 3.1. Öeldakse, et punkti x_0 ümbruses $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ ($\sigma > 0$) määratud funktsioon $s(x)$ on *paremalt pidev* punktis x_0 , kui

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} s(x) = s(x_0).$$

Öeldakse, et funktsioon $s(x)$ on *vasakult pidev* punktis x_0 , kui

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} s(x) = s(x_0).$$

Vastavalt definitsioonile on lõigus $[a, b]$ määratud kuupsplain kaks korda pidevalt diferentseeruv selles lõigus. Uurimaks, kas eelmises paragrahvis konstrueeritud funktsioon s_3 on kuupsplain, kontrollime esmalt selle funktsiooni ja tema tuletise s'_3 pidevust sõlmedes x_1, \dots, x_{n-1} .

Vaatleme kahte juhuslikult valitud naaberlõiku $[x_{k-1}, x_k]$ ja $[x_k, x_{k+1}]$. Võrdusest (2.6) järeldub, et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_k^-} s_3(x) &= f_{k-1} + m_{k-1}h_k - m_k h_k - 2m_{k-1}h_k - 3(f_{k-1} - f_k) + 2(f_{k-1} - f_k) \\ &\quad + m_{k-1}h_k + m_k h_k = f_{k-1} - f_{k-1} + f_k = f_k. \end{aligned}$$

Lõigus $[x_k, x_{k+1}]$ esitub funktsioon $s_3(x)$ võrduste (2.6) põhjal kujul

$$\begin{aligned} s_3(x) &= f_k + m_k(x - x_k) - \left(\frac{3(f_k - f_{k+1})}{h_{k+1}^2} + \frac{2m_k}{h_{k+1}} + \frac{m_{k+1}}{h_{k+1}} \right) (x - x_k)^2 \\ &\quad + \left(\frac{2(f_k - f_{k+1})}{h_{k+1}^3} + \frac{m_k}{h_{k+1}^2} + \frac{m_{k+1}}{h_{k+1}^2} \right) (x - x_k)^3, \end{aligned}$$

järelikult

$$\lim_{x \rightarrow x_k^+} s_3(x) = f_k.$$

Seega

$$\lim_{x \rightarrow x_k^-} s_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_k^+} s_3(x) = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1;$$

niisiis funktsioon $s_3(x)$ on pidev lõigus $[a, b]$.

Veendume nüüd, et funktsioon $s_3(x)$ on pidevalt diferentseeruv lõigus $[a, b]$. Võrdusest (2.7) järeldub, et mis tahes $k \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_k^-} s'_3(x) &= m_{k-1} - 2m_k - 4m_{k-1} - \frac{6(f_{k-1} - f_k)}{h_k} + \frac{6(f_{k-1} - f_k)}{h_k} + 3m_{k-1} + 3m_k \\ &= m_k. \end{aligned}$$

Lõigus $[x_k, x_{k+1}]$ esitub tuletis $s'_3(x)$ võrduste (2.7) põhjal kujul

$$s'_3(x) = m_k - \left(\frac{6(f_k - f_{k+1})}{h_{k+1}^2} + \frac{4m_k}{h_{k+1}} + \frac{2m_{k+1}}{h_{k+1}} \right) (x - x_k) \\ + \left(\frac{6(f_k - f_{k+1})}{h_{k+1}^3} + \frac{3m_k}{h_{k+1}^2} + \frac{3m_{k+1}}{h_{k+1}^2} \right) (x - x_k)^2,$$

järelikult

$$\lim_{x \rightarrow x_k^+} s'_3(x) = m_k.$$

Seega

$$\lim_{x \rightarrow x_k^-} s'_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_k^+} s'_3(x) = m_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

millest järeldub, et funktsiooni $s_3(x)$ tuletis on pidev punktides x_1, \dots, x_{n-1} . Niisiis funktsioon $s_3(x)$ on pidevalt diferentseeruv lõigus $[a, b]$.

Uurime nüüd, millal funktsioon $s_3(x)$ on kaks korda pidevalt diferentseeruv lõigus $[a, b]$, s.t millal $s_3 \in C^2[a, b]$. Võrdusest (2.8) järeldub, et mis tahes $k \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\lim_{x \rightarrow x_k^-} s''_3(x) = -\frac{6(f_{k-1} - f_k)}{h_k^2} - \frac{4m_{k-1}}{h_k} - \frac{2m_k}{h_k} + \left(\frac{12(f_{k-1} - f_k)}{h_k^2} + \frac{6m_{k-1}}{h_k} + \frac{6m_k}{h_k} \right) \\ = \frac{6(f_{k-1} - f_k)}{h_k^2} + \frac{4m_k}{h_k} + \frac{2m_{k-1}}{h_k}.$$

Lõigus $[x_k, x_{k+1}]$ esitub teine tuletis $s''_3(x)$ võrduste (2.8) põhjal kujul

$$s''_3(x) = -\frac{6(f_k - f_{k+1})}{h_{k+1}^2} - \frac{4m_k}{h_{k+1}} - \frac{2m_{k+1}}{h_{k+1}} + \left(\frac{12(f_k - f_{k+1})}{h_{k+1}^3} + \frac{6m_k}{h_{k+1}^2} + \frac{6m_{k+1}}{h_{k+1}^2} \right) (x - x_k),$$

järelikult

$$\lim_{x \rightarrow x_k^+} s''_3(x) = -\frac{6(f_k - f_{k+1})}{h_{k+1}^2} - \frac{4m_k}{h_{k+1}} - \frac{2m_{k+1}}{h_{k+1}}.$$

Teise tuletise $s''_3(x)$ olemasoluks ja pidevuseks punktis x_k on seega vaja, et

$$\frac{6(f_{k-1} - f_k)}{h_k^2} + \frac{4m_k}{h_k} + \frac{2m_{k-1}}{h_k} = -\frac{6(f_k - f_{k+1})}{h_{k+1}^2} - \frac{4m_k}{h_{k+1}} - \frac{2m_{k+1}}{h_{k+1}},$$

s.t

$$\frac{2m_{k-1}}{h_k} + \frac{2m_{k+1}}{h_{k+1}} + \frac{4m_k}{h_k} + \frac{4m_k}{h_{k+1}} = \frac{6(f_{k+1} - f_k)}{h_{k+1}^2} + \frac{6(f_k - f_{k-1})}{h_k^2},$$

s.t

$$\frac{m_{k-1}}{h_k} + 2m_k \left(\frac{1}{h_k} + \frac{1}{h_{k+1}} \right) + \frac{m_{k+1}}{h_{k+1}} = \frac{3(f_{k+1} - f_k)}{h_{k+1}^2} + \frac{3(f_k - f_{k-1})}{h_k^2}$$

ehk (korrutades eelneva võrratuse mõlemaid pooli arvuga $\frac{h_k h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}}$)

$$\frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} m_{k-1} + 2m_k + \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} m_{k+1} = \frac{3h_k(f_{k+1} - f_k)}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} + \frac{3h_{k+1}(f_k - f_{k-1})}{h_k(h_k + h_{k+1})}. \quad (3.1)$$

Kuna $k = 1, 2, \dots, n$, siis (3.1) esitab suuruste m_0, \dots, m_n leidmiseks $n - 1$ võrrandist koosneva võrrandisüsteemi. Tundmatute m_0, \dots, m_n leidmiseks lisame sellele süsteemile rajatingimustest (I) või (II) saadavad kaks võrrandit.

Rajatingimustest (I) saame võrdused

$$m_0 = a' \quad \text{ja} \quad m_n = b'. \quad (3.2)$$

Rajatingimuste (II) korral kirjutame (2.8) välja lõikudel $[x_0, x_1]$ ja $[x_{n-1}, x_n]$ ning võtame saadud avaldistes vastavalt $x = x_0$ ja $x = x_n$:

$$\begin{aligned} -\frac{4m_0}{h_1} - \frac{2m_1}{h_1} - \frac{6(f_0 - f_1)}{h_1^2} &= a'', \\ \frac{2m_{n-1}}{h_n} + \frac{4m_n}{h_n} + \frac{6(f_{n-1} - f_n)}{h_n^2} &= b''. \end{aligned}$$

Sellest järeldub, et

$$\begin{aligned} 2m_0 + m_1 &= \frac{3(f_1 - f_0)}{h_1} - \frac{h_1 a''}{2}, \\ m_{n-1} + 2m_n &= \frac{3(f_n - f_{n-1})}{h_n} + \frac{h_n b''}{2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Paragrahvis 5 näitame, et süsteimid $\{(3.1), (3.2)\}$ ja $\{(3.1), (3.3)\}$ on üheselt lahenduvad.

§ 4. Domineeriva peadiagonaaliga maatriks

Definitsioon 4.1. Maatriksit, millel on võrdne arv ridu ja veerge, nimetatakse *ruutmaatriksiks*.

Definitsioon 4.2. Öeldakse, et ruutmaatriks on *regulaarne*, kui tema determinant erineb nullist.

Definitsioon 4.3. Ruutmaatriksit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ nimetatakse *domineeriva peadiagonaaliga* maatriksiks, kui

$$|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Lemma 4.1. *Domineeriva peadiagonaaliga maatriks on regulaarne.*

TÕESTUS. Olgu $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ domineeriva peadiagonaaliga maatriks. Oletame vastuväiteliselt, et see maatriks ei ole regulaarne, s.t $\det A = 0$. Siis eksisteerib homogeenisel võrrandisüsteemil $Ax = 0$ ehk, teisisõnu, süsteemil

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

mittetriviaalne (s.t nullist erinev) lahend $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Olgu $k \in \{1, \dots, n\}$ selline, et $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$; siis $|x_k| > 0$. Süsteemi (4.1) k -ndast võrrandist järeldub, et

$$\begin{aligned} 0 &= \left| \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \right| \geq |a_{kk}x_k| - \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}x_j \right| \\ &\geq |a_{kk}||x_k| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}||x_j| \geq |a_{kk}||x_k| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}||x_k| \\ &= |x_k| \left(|a_{kk}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right), \end{aligned}$$

millest, arvestades, et $|x_k| \neq 0$, järeldub, et

$$|a_{kk}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \leq 0,$$

mis on vastuolus maatriksi A peadiagonaali domineerivusega. □

Lemma 4.2 (vt [4, lk 334, järelalus D.1]). *Olgu maatriks $A = (a_{ij})_1^n$ domineeriva peadiagonaaliga ning olgu $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Tähistame*

$$q = \min_{1 \leq i \leq n} \left(|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right) > 0.$$

Siis lineaarne võrrandisüsteem

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

on üheselt lahenduv ning tema lahendi $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ jaoks kehtib hinnang

$$\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq \frac{1}{q} \max_{1 \leq i \leq n} |b_i|.$$

§ 5. Interpoleeriva kuupsplaini olemasolu ja ühesus

Näitame, et võrrandisüsteemid $\{(3.1), (3.2)\}$ ja $\{(3.1), (3.3)\}$ on üheselt lahenduvad.

5.1. Interpoleeriva kuupsplaini olemasolu ja ühesus rajatingimustel (I)

Kirjutame süsteemi $\{(3.1), (3.2)\}$ tundmatute m_0, m_1, \dots, m_n leidmiseks kujul

$$\begin{cases} m_0 = a', \\ \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} m_{k-1} + 2m_k + \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} m_{k+1} = t_k, & k = 1, \dots, n-1, \\ m_n = b', \end{cases} \quad (5.1)$$

kus

$$t_k = \frac{3h_k(f_{k+1} - f_k)}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} + \frac{3h_{k+1}(f_k - f_{k-1})}{h_k(h_k + h_{k+1})}, \quad 1 \leq k \leq n-1. \quad (5.2)$$

Süsteem (5.1) esitub maatrikskujul $Am = t$, kus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_2}{h_1 + h_2} & 2 & \frac{h_1}{h_1 + h_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{h_2 + h_3} & 2 & \frac{h_2}{h_2 + h_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h_n}{h_{n-1} + h_n} & 2 & \frac{h_{n-1}}{h_{n-1} + h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$m = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad t = \begin{pmatrix} a' \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ b' \end{pmatrix}.$$

Näeme, et süsteemi (5.1) maatriks A on domineeriva peadiagonaaliga, sest esimeses ja viimases reas on peadiagonaali element 1 suurem ülejäänud elementide absoluutväärtuste summast 0 ning „keskmistes“ ridades on peadiagonaali element 2 suurem ülejäänud elementide absoluutväärtuste summast 1.

Seega süsteem (5.1) on üheselt lahenduv ning interpooleeriva kuupsplain kujul (2.6) on rajatingimuste (I) korral üheselt määratud.

5.2. Interpoleeriva kuupsplaini olemasolu ja ühesus rajatingimustel (II)

Kirjutame süsteemi $\{(3.1),(3.3)\}$ tundmatute m_0, m_1, \dots, m_n leidmiseks kujul

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = \frac{3(f_1 - f_0)}{h_1} - \frac{h_1 a''}{2}, \\ \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} m_{k-1} + 2m_k + \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} m_{k+1} = t_k, & k = 1, \dots, n-1, \\ m_{n-1} + 2m_n = \frac{3(f_n - f_{n-1})}{h_n} + \frac{h_n b''}{2} \end{cases} \quad (5.3)$$

kus t_k on defineeritud võrdusega (5.2).

Süsteem (5.3) esitub maatrikskujul $Am = t$, kus

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_2}{h_1 + h_2} & 2 & \frac{h_1}{h_1 + h_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{h_2 + h_3} & 2 & \frac{h_2}{h_2 + h_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h_n}{h_{n-1} + h_n} & 2 & \frac{h_{n-1}}{h_{n-1} + h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$m = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad t = \begin{pmatrix} \frac{3(f_1 - f_0)}{h_1} - \frac{h_1 a''}{2} \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ \frac{3(f_n - f_{n-1})}{h_n} + \frac{h_n b''}{2} \end{pmatrix}.$$

Me näeme, et süsteemi (5.3) maatriks A on domineeriva peadiagonaaliga ja seega süsteem (5.3) on üheselt lahenduv. Sellest jäeldub, et kuupsplain $s_3(x)$ kujul (2.6) on rajatingimuste (II) korral üheselt määratud.

§ 6. Veahinnangud

Selles paragrahvis hindame viga $s_3(x) - f(x)$ ja viga $s'_3(x) - f'(x)$, kus $s_3(x)$ on lõigul $[a, b]$ neli korda pidevalt diferentseeruva funktsiooni $f(x)$ võrgul Δ interpoleeriv kuupsplain rajatingimustel (I) või (II).

6.1. Splaini tuletise ja interpoleeritava funktsiooni tuletise vahe hinnang sõlmedes

Veahinnangu leidmisel interpoleeriva kuupsplaini jaoks kasutame me järgnevat splaini $s_3(x)$ tuletise vea hinnangut võrgu sõlmedes.

Lemma 6.1. *Olgu $f \in C^4[a, b]$ ning olgu $s_3(x)$ võrgule $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ vastav funktsiooni $f(x)$ interpoleeriv kuupsplain, mis on määratud rajatingimustega (I) või (II). Siis kehtib hinnang*

$$\max_{0 \leq k \leq n} |s'_3(x_k) - f'(x_k)| \leq \frac{1}{24} M_4 h^3, \quad (6.1)$$

kus

$$M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|, \quad (6.2)$$

$$h = \max_{1 \leq k \leq n} h_k = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}). \quad (6.3)$$

TÕESTUS. Vaatleme esmalt juhtu, kus interpolatsioonispain $s_3(x)$ on määratud rajatingimustega (I). Siis splain $s_3(x)$ esitub kujul (2.6), kus kordajad m_0, m_1, \dots, m_n on antud süsteemiga (5.1). Minnes selles süsteemis üle uutele muutujatele $\gamma_k = m_k - f'_k = s'_3(x_k) - f'(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, saame

$$\begin{cases} \gamma_0 = 0, \\ \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} \gamma_{k-1} + 2\gamma_k + \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} \gamma_{k+1} = \tilde{c}_k, & k = 1, 2, \dots, n-1, \\ \gamma_n = 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

kus

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k &= \frac{3h_k}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} f_{k+1} - \frac{3h_{k+1}}{h_k(h_k + h_{k+1})} f_{k-1} \\ &+ \left(\frac{3h_{k+1}}{h_k(h_k + h_{k+1})} - \frac{3h_k}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} \right) f_k \\ &- \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} f'_{k-1} - 2f'_k - \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} f'_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Süsteem (6.4) on domineeriva peadiagonaaliga, järelikult lemma 4.1 põhjal on ta üheselt lahenduv. Funktsiooni $f(x)$ ja tuletisfunktsiooni $f'(x)$ Taylori valemist punktis x_k jääkliikmega integraalkujul (vt näiteks [3, lk 224]) saame, et mis tahes $k = 1, 2, \dots, n-1$ korral

$$\begin{aligned}
f(x_{k+1}) &= f(x_k) + f'(x_k)h_{k+1} + \frac{h_{k+1}^2}{2}f''(x_k) + \frac{h_{k+1}^3}{6}f'''(x_k) \\
&\quad + \frac{1}{6}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-v)^3f^{(4)}(v)dv, \\
f(x_{k-1}) &= f(x_k) - f'(x_k)h_k + \frac{h_k^2}{2}f''(x_k) - \frac{h_k^3}{6}f'''(x_k) \\
&\quad - \frac{1}{6}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_{k-1}-v)^3f^{(4)}(v)dv, \\
f'(x_{k+1}) &= f'(x_k) + f''(x_k)h_{k+1} + \frac{h_{k+1}^2}{2}f'''(x_k) + \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-v)^2f^{(4)}(v)dv, \\
f'(x_{k-1}) &= f'(x_k) - f''(x_k)h_k + \frac{h_k^2}{2}f'''(x_k) - \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_{k-1}-v)^2f^{(4)}(v)dv.
\end{aligned}$$

Asendades saadud arvud $f_{k-1} = f(x_{k-1})$, $f_{k+1} = f(x_{k+1})$, $f'_{k-1} = f'(x_{k-1})$ ja $f'_{k+1} = f'(x_{k+1})$ süsteemi (6.5), saame, et mis tahes $k = 1, 2, \dots, n-1$ korral

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_k &= \frac{3h_k}{h_k + (h_k + h_{k+1})}f(x_k) + \frac{3h_k h_{k+1}}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})}f'(x_k) + \frac{3h_k h_{k+1}^2}{2h_{k+1}(h_k + h_{k+1})}f''(x_k) \\
&\quad + \frac{3h_k h_{k+1}^3}{6h_{k+1}(h_k + h_{k+1})}f'''(x_k) + \frac{3h_k}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})} \cdot \frac{1}{6}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-v)^3f^{(4)}(v)dv \\
&\quad - \frac{3h_{k+1}}{h_k(h_k + h_{k+1})}f(x_k) + \frac{3h_k h_{k+1}}{h_k(h_k + h_{k+1})}f'(x_k) - \frac{3h_k^2 h_{k+1}}{2h_k(h_k + h_{k+1})}f''(x_k) \\
&\quad + \frac{3h_k^3 h_{k+1}}{6h_k(h_k + h_{k+1})}f'''(x_k) + \frac{3h_{k+1}}{h_k(h_k + h_{k+1})} \cdot \frac{1}{6}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_{k-1}-v)^3f^{(4)}(v)dv \\
&\quad + \frac{3h_{k+1}}{h_k(h_k + h_{k+1})}f(x_k) - \frac{3h_k}{h_{k+1}(h_k + h_{k+1})}f(x_k) - \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}}f'(x_k) + \frac{h_k h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}}f''(x_k) \\
&\quad - \frac{h_k^2 h_{k+1}}{2(h_k + h_{k+1})}f'''(x_k) + \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} \cdot \frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_{k-1}-v)^2f^{(4)}(v)dv - 2f'(x_k) \\
&\quad - \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}}f'(x_k) - \frac{h_k h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}}f''(x_k) - \frac{h_k h_{k+1}^2}{2(h_k + h_{k+1})}f'''(x_k) \\
&\quad - \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} \cdot \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-v)^2f^{(4)}(v)dv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h_k}{2(h_k + h_{k+1})} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1} - v)^3}{h_{k+1}} f^{(4)}(v) dv + \frac{h_{k+1}}{2(h_k + h_{k+1})} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{(x_{k-1} - v)^3}{h_k} f^{(4)}(v) dv \\
&+ \frac{h_{k+1}}{2(h_k + h_{k+1})} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_{k-1} - v)^2 f^{(4)}(v) dv - \frac{h_k}{2(h_k + h_{k+1})} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - v)^2 f^{(4)}(v) dv \\
&= \frac{h_k}{2(h_k + h_{k+1})} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{(x_{k+1} - v)^3}{h_{k+1}} - (x_{k+1} - v)^2 \right) f^{(4)}(v) dv \\
&+ \frac{h_{k+1}}{2(h_k + h_{k+1})} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\frac{(x_{k-1} - v)^3}{h_k} + (x_{k-1} - v)^2 \right) f^{(4)}(v) dv.
\end{aligned}$$

Tehes integraalides

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{(x_{k+1} - v)^3}{h_{k+1}} - (x_{k+1} - v)^2 \right) f^{(4)}(v) dv$$

ja

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\frac{(x_{k-1} - v)^3}{h_k} + (x_{k-1} - v)^2 \right) f^{(4)}(v) dv$$

vastavalt muutuja vahetused $v = x_k + \tau h_{k+1}$ ja $v = x_{k-1} + \tau h_k$, saame \tilde{c}_k kirjutab kujul

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_k &= \frac{h_k h_{k+1}^3}{2(h_k + h_{k+1})} \int_0^1 ((1 - \tau)^3 - (1 - \tau)^2) f^{(4)}(x_k + \tau h_{k+1}) d\tau \\
&+ \frac{h_k^3 h_{k+1}}{2(h_k + h_{k+1})} \int_0^1 \tau^2 (1 - \tau) f^{(4)}(x_{k-1} + \tau h_k) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1.
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
|\tilde{c}_k| &\leq \frac{h_k h_{k+1}^3}{2(h_k + h_{k+1})} \left| \int_0^1 ((1 - \tau)^3 - (1 - \tau)^2) f^{(4)}(x_k + \tau h_{k+1}) d\tau \right| \\
&+ \frac{h_k^3 h_{k+1}}{2(h_k + h_{k+1})} \left| \int_0^1 \tau^2 (1 - \tau) f^{(4)}(x_{k-1} + \tau h_k) d\tau \right| \\
&\leq \frac{h_k h_{k+1}^3}{2(h_k + h_{k+1})} M_4 \int_0^1 (\tau + \tau^3 - 2\tau^2) d\tau + \frac{h_k^3 h_{k+1}}{2(h_k + h_{k+1})} M_4 \int_0^1 \tau^2 (1 - \tau) d\tau \\
&= \frac{h_k h_{k+1}^3}{2(h_k + h_{k+1})} M_4 \left(\frac{\tau^4}{4} - \frac{2\tau^3}{3} + \frac{\tau^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \frac{h_k^3 h_{k+1}}{2(h_k + h_{k+1})} M_4 \left(\frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{12} \cdot \frac{h_k h_{k+1}^3}{2(h_k + h_{k+1})} M_4 + \frac{1}{12} \cdot \frac{h_k^3 h_{k+1}}{2(h_k + h_{k+1})} M_4 = \frac{1}{24} M_4 \frac{h_k h_{k+1} (h_k^2 + h_{k+1}^2)}{h_k + h_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Arvestades, et $\frac{h_k^2 + h_{k+1}^2}{h_k + h_{k+1}} \leq \max\{h_k, h_{k+1}\}$, saame hinnangu

$$|\tilde{c}_k| \leq \frac{1}{24} M_4 h_k h_{k+1} \max\{h_k, h_{k+1}\} \leq \frac{1}{24} M_4 h^3, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (6.6)$$

Võrrandisüsteemi (6.4) puhul on lemmas 4.2 defineeritud konstant $q = 1$, järelikult lemma 4.2 põhjal

$$\max_{0 \leq k \leq n} |s'_3(x_k) - f'(x_k)| = \max_{0 \leq k \leq n} |\gamma_k| \leq \max_{0 \leq k \leq n} |\tilde{c}_k| \leq \frac{1}{24} M_4 h^3,$$

sest $k = 0$ või $k = n$ korral $s'_3(x_k) - f'(x_k) = \gamma_k = 0$. Seega rajatingimuste (I) korral hinnang 6.1 kehtib.

Olgu nüüd interpolatsiooniplain $s_3(x)$ on määratud rajatingimustega (II). Siis spline $s_3(x)$ esitub kujul (2.6), kus kordajad m_0, m_1, \dots, m_n on antud süsteemiga (5.3). Minnes selles süsteemis üle uutele muutujatele $\gamma_k = m_k - f'_k = s'_3(x_k) - f'(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, saame

$$\begin{cases} 2\gamma_0 + \gamma_1 = \tilde{c}_0, \\ \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} \gamma_{k-1} + 2\gamma_k + \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} \gamma_{k+1} = \tilde{c}_k, & k = 1, 2, \dots, n-1, \\ \gamma_{n-1} + 2\gamma_n = \tilde{c}_n, \end{cases} \quad (6.7)$$

kus $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{n-1}$ on defineeritud võrdusega (6.5) ning

$$\tilde{c}_0 = 3 \frac{f_1 - f_0}{h_1} - \frac{h_1}{2} f''_0 - 2f'_0 - f'_1, \quad (6.8)$$

$$\tilde{c}_n = 3 \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n} + \frac{h_n}{2} f''_n - 2f'_n - f'_{n-1}. \quad (6.9)$$

Süsteem (6.7) on domineeriva peadiagonaaliga, järelikult lemma 4.1 põhjal on ta üheselt lahenduv. Analoogiliselt rajatingimuse (I) juhuga saame arvude $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{n-1}$ jaoks hinnangud (6.6). Jääb hinnata arvusid \tilde{c}_0 ja \tilde{c}_n . Funktsiooni $f(x)$ ja tuletisfunktsiooni $f'(x)$ Taylori valemist punktides x_0 ja x_n jääkliikmega integraalkujul (vt näiteks [3, lk 224]) saame, et

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0) + f'(x_0)h_1 + \frac{h_1^2}{2} f''(x_0) + \frac{h_1^3}{6} f'''(x_0) + \frac{1}{6} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - v)^3 f^{(4)}(v) dv, \\ f'(x_1) &= f'(x_0) + f''(x_0)h_1 + \frac{h_1^2}{2} f'''(x_0) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - v)^2 f^{(4)}(v) dv, \\ f(x_{n-1}) &= f(x_n) - h_n f'(x_n) + \frac{h_n^2}{2} f''(x_n) - \frac{h_n^3}{6} f'''(x_n) - \frac{1}{6} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (x_{n-1} - v)^3 f^{(4)}(v) dv, \\ f'(x_{n-1}) &= f'(x_n) - h_n f''(x_n) + \frac{h_n^2}{2} f'''(x_n) - \frac{1}{2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (x_{n-1} - v)^2 f^{(4)}(v) dv. \end{aligned}$$

Asendades saadud arvud $f_1 = f(x_1)$ ja $f'_1 = f'(x_1)$ ning $f_{n-1} = f(x_{n-1})$ ja $f'_{n-1} = f'(x_{n-1})$ vastavalt võrranditesse (6.8) ning (6.9), saame, et

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_0 &= \frac{3}{h_1}f(x_0) + \frac{3h_1}{h_1}f'(x_0) + \frac{3h_1^2}{2h_1}f''(x_0) + \frac{3h_1^3}{6h_1}f'''(x_0) \\
&+ \frac{3}{h_1} \cdot \frac{1}{6} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - v)^3 f^{(4)}(v) dv - \frac{3}{h_1}f(x_0) - \frac{h_1}{2}f''(x_0) \\
&- 2f'(x_0) - f'(x_0) - h_1f''(x_0) - \frac{h_1^2}{2}f'''(x_0) - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - v)^2 f^{(4)}(v) dv \\
&= \frac{1}{2h_1} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - v)^3 f^{(4)}(v) dv - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - v)^2 f^{(4)}(v) dv \\
&= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{(x_1 - v)^3}{h_1} - (x_1 - v)^2 \right) f^{(4)}(v) dv, \\
\tilde{c}_n &= \frac{3}{h_n}f(x_n) - \frac{3}{h_n}f(x_n) + \frac{3h_n}{h_n}f'(x_n) - \frac{3h_n^2}{2h_n}f''(x_n) + \frac{3h_n^3}{6h_n}f'''(x_n) \\
&+ \frac{3}{h_n} \cdot \frac{1}{6} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (x_{n-1} - v)^3 f^{(4)}(v) dv + \frac{h_n}{2}f''(x_n) - 2f'(x_n) \\
&- f'(x_n) + h_nf''(x_n) - \frac{h_n^2}{2}f'''(x_n) + \frac{1}{2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (x_{n-1} - v)^2 f^{(4)}(v) dv \\
&= \frac{1}{2h_n} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (x_{n-1} - v)^3 f^{(4)}(v) dv + \frac{1}{2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} (x_{n-1} - v)^2 f^{(4)}(v) dv \\
&= \frac{1}{2} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(\frac{(x_{n-1} - v)^3}{h_n} + (x_{n-1} - v)^2 \right) f^{(4)}(v) dv.
\end{aligned}$$

Tehes integraalides

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{(x_1 - v)^3}{h_1} - (x_1 - v)^2 \right) f^{(4)}(v) dv$$

ja

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(\frac{(x_{n-1} - v)^3}{h_n} + (x_{n-1} - v)^2 \right) f^{(4)}(v) dv$$

vastavalt muutuja vahetused $v = x_0 + \tau h_1$ ja $v = x_{n-1} + \tau h_n$, saame

$$\tilde{c}_0 = \frac{h_1^3}{2} \int_0^1 (1 - \tau)^2 (-\tau) f^{(4)}(x_0 + \tau h_1) d\tau,$$

$$\tilde{c}_n = \frac{h_n^3}{2} \int_0^1 \tau (\tau - \tau^2) f^{(4)}(x_{n-1} + \tau h_n) d\tau.$$

Seega

$$\begin{aligned}
|\tilde{c}_0| &= \left| \frac{h_1^3}{2} \int_0^1 (1-\tau)^2 (-\tau) f^{(4)}(x_0 + \tau h_1) d\tau \right| \\
&\leq \frac{h_1^3}{2} \int_0^1 (1-\tau)^2 \cdot |(-\tau)| |f^{(4)}(x_0 + \tau h_1)| d\tau \\
&\leq \frac{h^3}{2} M_4 \int_0^1 (\tau - 2\tau^2 + \tau^3) d\tau = \frac{h^3}{2} M_4 \left(\frac{\tau^4}{4} - \frac{2\tau^3}{3} + \frac{\tau^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{h^3}{2} M_4 = \frac{1}{24} M_4 h^3, \\
|\tilde{c}_n| &= \left| \frac{h_n^3}{2} \int_0^1 \tau(\tau - \tau^2) f^{(4)}(x_{n-1} + \tau h_n) d\tau \right| \\
&\leq \frac{h_n^3}{2} \int_0^1 \tau^2(1-\tau) |f^{(4)}(x_{n-1} + \tau h_n)| d\tau \\
&\leq \frac{h^3}{2} M_4 \int_0^1 (\tau^2 - \tau^3) d\tau = \frac{h^3}{2} M_4 \left(\frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{h^3}{2} M_4 = \frac{1}{24} M_4 h^3.
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme saanud, et

$$\max_{0 \leq k \leq n} |\tilde{c}_k| \leq \frac{1}{24} M_4 h^3.$$

Võrrandisüsteemi (6.7) puhul on lemmas 4.2 defineeritud konstant $q = 1$, järelikult lemma 4.2 põhjal

$$\max_{0 \leq k \leq n} |s'_3(x_k) - f'(x_k)| = \max_{0 \leq k \leq n} |\gamma_k| \leq \max_{0 \leq k \leq n} |\tilde{c}_k| \leq \frac{1}{24} M_4 h^3.$$

□

6.2. Interpoleeriva Hermite'i kuupsplaini viga

Olgu $f \in C^4[a, b]$ ja olgu $\tilde{s}_3(x)$ funktsiooni $f(x)$ võrgul $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ interpoleeriv Hermite'i kuupsplain. Meie eesmärk on hinnata viga $f(x) - \tilde{s}_3(x)$ ja viga $f'(x) - \tilde{s}'_3(x)$, $x \in [a, b]$. Märgime, et funktsiooni f ja tema tuletist f' võrgul Δ interpoleeriva Hermite'i kuupsplaini $\tilde{s}_3(x)$ võime defineerida järgmiselt (vt näiteks [4, lk 58-59]):

(1) igas osalõigus $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) on \tilde{s}_3 kuuppolünoom, s.t.

$$\tilde{s}_3(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3;$$

(2) $\tilde{s}_3 \in C^1[a, b]$;

(3) $\tilde{s}_3(x_k) = f(x_k)$, $\tilde{s}'_3(x_k) = f'(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Interpolatsioonitingimustest (3) saame järgmise süsteemi:

$$\tilde{s}_3(x_k) = f_k, \quad \tilde{s}_3(x_{k-1}) = f_{k-1}, \quad \tilde{s}'_3(x_k) = f'_k, \quad \tilde{s}'_3(x_{k-1}) = f'_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Arvestades tingimust (1) saame siit järgmise võrrandisüsteemi splaini \tilde{s}_3 kordajate a_k , b_k , c_k ja d_k suhtes:

$$\begin{cases} a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = f_k, \\ a_k = f_{k-1}, \\ b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k = f'_k, \\ b_k = f'_{k-1}. \end{cases} \quad (6.10)$$

Lahendame süsteemi (6.10):

$$\begin{aligned} a_k &= f_{k-1}, \\ b_k &= f'_{k-1}, \\ c_k &= -\frac{3(f_{k-1} - f_k)}{h_k^2} - \frac{2f'_{k-1}}{h_k} - \frac{f'_k}{h_k}, \\ d_k &= \frac{2(f_{k-1} - f_k)}{h_k^3} + \frac{f'_{k-1}}{h_k^2} + \frac{f'_k}{h_k^2}. \end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned} \tilde{s}_3(x) &= f_{k-1} + f'_{k-1}(x - x_{k-1}) \\ &\quad - \left(\frac{3(f_{k-1} - f_k)}{h_k^2} + \frac{2f'_{k-1}}{h_k} + \frac{f'_k}{h_k} \right) (x - x_{k-1})^2 \\ &\quad + \left(\frac{2(f_{k-1} - f_k)}{h_k^3} + \frac{f'_{k-1}}{h_k^2} + \frac{f'_k}{h_k^2} \right) (x - x_{k-1})^3, \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$\begin{aligned} \tilde{s}'_3(x) &= f'_{k-1} - \left(\frac{6(f_{k-1} - f_k)}{h_k^2} + \frac{4f'_{k-1}}{h_k} + \frac{2f'_k}{h_k} \right) (x - x_{k-1}) \\ &\quad + \left(\frac{6(f_{k-1} - f_k)}{h_k^3} + \frac{3f'_{k-1}}{h_k^2} + \frac{3f'_k}{h_k^2} \right) (x - x_{k-1})^2, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Kirjutame võrduse (6.11) kujul

$$\begin{aligned}\tilde{s}_3(x) &= \left(1 - \frac{3(x-x_{k-1})^2}{h_k^2} + \frac{2(x-x_{k-1})^3}{h_k^3}\right) f(x_{k-1}) \\ &+ \left(\frac{3(x-x_{k-1})^2}{h_k^2} - \frac{2(x-x_{k-1})^3}{h_k^3}\right) f(x_k) \\ &+ \left(x-x_{k-1} - \frac{2(x-x_{k-1})^2}{h_k} + \frac{(x-x_{k-1})^3}{h_k^2}\right) f'(x_{k-1}) \\ &- \left(\frac{(x-x_{k-1})^2}{h_k} - \frac{(x-x_{k-1})^3}{h_k^2}\right) f'(x_k)\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}\tilde{s}_3(x) &= (1-3t^2+2t^3)f(x_{k-1}) + (3t^2-2t^3)f(x_k) \\ &+ (t-2t^2+t^3)h_k f'(x_{k-1}) - (t^2+t^3)h_k f'(x_k) \\ &= (1-t)^2(1+2t)f(x_{k-1}) + t^2(3-2t)f(x_k) \\ &+ t(1-t)^2 h_k f'(x_{k-1}) - t^2(1-t)h_k f'(x_k),\end{aligned}$$

kus $t = \frac{x-x_{k-1}}{h_k}$, $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Analoogiliselt saame, et

$$\begin{aligned}\tilde{s}'_3(x) &= f'_{k-1} - \left(\frac{6(f(x_{k-1})-f(x_k))}{h_k^2} + \frac{4f'_{k-1}}{h_k} + \frac{2f'_k}{h_k}\right)(x-x_{k-1}) \\ &+ \left(\frac{6(f(x_{k-1})-f(x_k))}{h_k^3} + \frac{3f'_{k-1}}{h_k^2} + \frac{3f'_k}{h_k^2}\right)(x-x_{k-1})^2 \\ &= \left(-\frac{6(x-x_{k-1})}{h_k^2} + \frac{6(x-x_{k-1})^2}{h_k^3}\right) f(x_{k-1}) \\ &+ \left(\frac{6(x-x_{k-1})}{h_k^2} - \frac{6(x-x_{k-1})^2}{h_k^3}\right) f(x_k) \\ &+ \left(1 - \frac{4(x-x_{k-1})}{h_k} + \frac{3(x-x_{k-1})^2}{h_k^2}\right) f'(x_{k-1}) \\ &- \left(\frac{2(x-x_{k-1})}{h_k} - \frac{3(x-x_{k-1})^2}{h_k^2}\right) f'(x_k)\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}\tilde{s}'_3(x) &= (6t^2-6t)\frac{1}{h_k}f(x_{k-1}) + (6t-6t^2)\frac{1}{h_k}f(x_k) \\ &+ (1-4t+3t^2)f'(x_{k-1}) + (3t^2-2t)f'(x_k) \\ &= (6t^2-6t)\frac{1}{h_k}f(x_{k-1}) + (6t-6t^2)\frac{1}{h_k}f(x_k) \\ &+ (1-t)(1-3t)f'(x_{k-1}) - t(2-3t)f'(x_k),\end{aligned}$$

kus $t = \frac{x-x_{k-1}}{h_k}$, $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Siit järeldub, et lõigus $[x_{k-1}, x_k]$

$$\tilde{s}_3(x) = \phi_1(t)f(x_{k-1}) + \phi_2(t)f(x_k) + \phi_3(t)h_k f'(x_{k-1}) + \phi_4(t)h_k f'(x_k), \quad (6.13)$$

$$\tilde{s}'_3(x) = \phi'_1(t)\frac{1}{h_k}f(x_{k-1}) + \phi'_2(t)\frac{1}{h_k}f(x_k) + \phi'_3(t)f'(x_{k-1}) + \phi'_4(t)f'(x_k), \quad (6.14)$$

kus

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= (1-t)^2(1+2t), & \phi_2(t) &= t^2(3-2t), & \phi_3(t) &= t(1-t)^2, & \phi_4(t) &= -t^2(1-t), \\ \phi'_1(t) &= 6t(t-1), & \phi'_2(t) &= -6t(t-1), & \phi'_3(t) &= (1-t)(1-3t), & \phi'_4(t) &= -t(2-3t), \end{aligned}$$

ja

$$t = \frac{x-x_{k-1}}{h_k}. \quad (6.15)$$

Lemma 6.2. *Olgu $f \in C^4[a, b]$ ning olgu \tilde{s}_3 võrguga $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ seotud Hermite'i kuupsplain. Siis*

$$f(x) - \tilde{s}_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_{k-1})^2(x-x_k)^2, \quad (6.16)$$

kus $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $\xi \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

TÕESTUS. Ilmselt valem (6.16) kehtib, kui $x = x_{k-1}$, $x = x_k$. Järgnevas eeldame, et $x \in (x_{k-1}, x_k)$. Toome sisse kaks abifunktsiooni w ja φ :

$$\begin{aligned} w(t) &= (t-x_{k-1})^2(t-x_k)^2, & t &\in [x_{k-1}, x_k], \\ \varphi(t) &= f(t) - \tilde{s}_3(t) - Kw(t), & t &\in [x_{k-1}, x_k], \end{aligned}$$

kus K on mingi konstant. Määrame konstandi K tingimusest, et punktis x kehtib võrdus $\varphi(x) = 0$. Me saame

$$f(x) - \tilde{s}_3(x) - Kw(x) = 0,$$

millest

$$K = \frac{f(x) - \tilde{s}_3(x)}{w(x)}.$$

Näeme, et funktsiooni φ nullkohtades on x , x_{k-1} , x_k . Siis Rolle'i teoreemi (vt näiteks [2, lk 125]) põhjal on funktsiooni φ tuletisel φ' iga kahe φ nullkoha vahel vähemalt üks nullkoht. Teiselt poolt

$$\varphi'(t) = f'(t) - \tilde{s}'(t) - Kw'(t) = 0,$$

kui $t = x_{k-1}$, $t = x_k$. Seega on tuletisel φ' olemas neli erinevat nullkohta. Siit saame Rolle'i teoreemi põhjal, et tuletisel φ'' on olemas kolm erinevat nullkohta, tuletisel φ''' on olemas kaks erinevat nullkohta ning tuletisel $\varphi^{(4)}$ on olemas üks nullkoht. Teiste sõnadega, leidub selline punkt $\xi \in (x_{k-1}, x_k)$, et $\varphi^{(4)}(\xi) = 0$. Kuna $w^{(4)} = 4!$ ja $\tilde{s}_3^{(4)} = 0$, saame

$$0 = \varphi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - Kw^{(4)}(\xi)$$

ehk

$$0 = \varphi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - \frac{f(x) - \tilde{s}_3(x)}{w(x)} \cdot 4!,$$

millest

$$f(x) - \tilde{s}_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_{k-1})^2(x - x_k)^2, \quad \xi \in (x_{k-1}, x_k).$$

□

6.3. Interpoleeriva kuupsplaini vea hinnang

Teoreem 6.3. *Olgu $f \in C^4[a, b]$ ning olgu s_3 võrgule $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ vastav funktsiooni f interpoleeriv kuupsplain, mis on määratud tingimustega (1.2) ja rajatingimustega (I) või (II). Siis kehtivad hinnangud*

$$\max_{x \in [a, b]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{5}{384} M_4 h^4, \quad (6.17)$$

$$\max_{x \in [a, b]} |s_3'(x) - f'(x)| \leq \frac{59}{192} M_4 h^3, \quad (6.18)$$

kus M_4 ja h on antud vastavalt valemitega (6.2) ja (6.3).

TÕESTUS. Olgu \tilde{s}_3 punktis 6.2 defineeritud Hermite'i kuupsplain. Arvestades, et $t = \frac{x - x_{k-1}}{h_k}$, esitame valemi (6.16) kujul

$$\begin{aligned}
f(x) - \tilde{s}_3(x) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \frac{h_k^2(x - x_{k-1})^2}{h_k^2} (x - x_{k-1} + x_{k-1} - x_k)^2 \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \frac{h_k^2(x - x_{k-1})^2}{h_k^2} (x - x_{k-1} - h_k)^2 \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \frac{h_k^2(x - x_{k-1})^2}{h_k^2} h_k^2 \left(\frac{x - x_{k-1}}{h_k} - 1 \right)^2 \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} h_k^4 t^2 (1 - t)^2, \quad x \in [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, \dots, n).
\end{aligned}$$

Lemma 6.2 põhjal saame

$$|\tilde{s}_3(x) - f(x)| \leq \frac{t^2(1-t)^2}{24} M_4 h^4, \quad t = \frac{x - x_{k-1}}{h_k}, \quad x \in [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (6.19)$$

kus M_4 ja h on antud vastavalt valemitega (6.2) ja (6.3).

Hindame nüüd vahet $|s_3(x) - \tilde{s}_3(x)|$. Valemi (2.6) põhjal esitame kuupsplaini $s_3(x)$ kujul

$$s_3(x) = (1-t)^2(1+2t)f(x_{k-1}) + t^2(3-2t)f(x_k) + t(1-t)^2 h_k m_{k-1} - t^2(1-t) h_k m_k, \quad (6.20)$$

kus $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $t = \frac{x - x_{k-1}}{h_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Tõepoolest, seose (2.6) tõttu

$$\begin{aligned}
s_3(x) &= f(x_{k-1}) + m_{k-1}(x - x_{k-1}) \\
&\quad - \left(\frac{3(f(x_{k-1}) - f(x_k))}{h_k^2} + \frac{2m_{k-1}}{h_k} + \frac{m_k}{h_k} \right) (x - x_{k-1})^2 \\
&\quad + \left(\frac{2(f(x_{k-1}) - f(x_k))}{h_k^3} + \frac{m_{k-1}}{h_k^2} + \frac{m_k}{h_k^2} \right) (x - x_{k-1})^3 \\
&= \left(1 - \frac{3(x - x_{k-1})^2}{h_k^2} + \frac{2(x - x_{k-1})^3}{h_k^3} \right) f(x_{k-1}) \\
&\quad + \left(\frac{3(x - x_{k-1})^2}{h_k^2} - \frac{2(x - x_{k-1})^3}{h_k^3} \right) f(x_k) \\
&\quad + \left(x - x_{k-1} - \frac{2(x - x_{k-1})^2}{h_k} + \frac{(x - x_{k-1})^3}{h_k^2} \right) m_{k-1} \\
&\quad - \left(\frac{(x - x_{k-1})^2}{h_k} - \frac{(x - x_{k-1})^3}{h_k^2} \right) m_k,
\end{aligned}$$

millest, arvestades, et $t = \frac{x - x_{k-1}}{h_k}$, saame

$$\begin{aligned}
s_3(x) &= (1 - 3t^2 + 2t^3)f(x_{k-1}) + (3t^2 - 2t^3)f(x_k) \\
&\quad + (t - 2t^2 + t^3)h_k m_{k-1} - (t^2 - t^3)h_k m_k \\
&= (1 - t)^2(1 + 2t)f(x_{k-1}) + t^2(3 - 2t)f(x_k) \\
&\quad + t(1 - t)^2 h_k m_{k-1} - t^2(1 - t)h_k m_k.
\end{aligned}$$

Valemite (6.13) ja (6.20) põhjal saame nüüd, et

$$\begin{aligned}
s_3(x) - \tilde{s}_3(x) &= (1 - t)^2(1 + 2t)f(x_{k-1}) + t^2(3 - 2t)f(x_k) + t(1 - t)^2 h_k m_{k-1} \\
&\quad - t^2(1 - t)h_k m_k - (1 - t)^2(1 + 2t)f(x_{k-1}) - t^2(3 - 2t)f(x_k) \\
&\quad - t(1 - t)^2 h_k f'(x_{k-1}) + t^2(1 - t)h_k f'(x_k) \\
&= t(1 - t)^2 h_k m_{k-1} - t^2(1 - t)h_k m_k \\
&\quad - t(1 - t)^2 h_k f'(x_{k-1}) + t^2(1 - t)h_k f'(x_k) \\
&= h_k t(1 - t) \left((1 - t)m_{k-1} - t m_k - (1 - t)f'(x_{k-1}) + t f'(x_k) \right) \\
&= h_k t(1 - t) \left((1 - t)(m_{k-1} - f'(x_{k-1})) - t(m_k - f'(x_k)) \right).
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
|s_3(x) - \tilde{s}_3(x)| &= \left| h_k t(1 - t) \left((1 - t)(m_{k-1} - f'(x_{k-1})) - t(m_k - f'(x_k)) \right) \right| \\
&\leq h_k t(1 - t) \left((1 - t) |m_{k-1} - f'(x_{k-1})| + t |m_k - f'(x_k)| \right) \\
&\leq h t(1 - t) \max_{0 \leq i \leq n} |m_i - f'(x_i)| (1 - t + t) \\
&= h t(1 - t) \max_{0 \leq i \leq n} |m_i - f'(x_i)|,
\end{aligned}$$

millest lemma 6.1 põhjal

$$|s_3(x) - \tilde{s}_3(x)| \leq \frac{t(1-t)}{24} M_4 h^4, \quad t = \frac{x - x_{k-1}}{h_k}, \quad x \in [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{6.21}$$

Võrratustest (6.19) ja (6.21) saame, et iga $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) korral

$$\begin{aligned}
|s_3(x) - f(x)| &= |\tilde{s}_3(x) - f(x) + s_3(x) - \tilde{s}_3(x)| \\
&\leq |\tilde{s}_3(x) - f(x)| + |s_3(x) - \tilde{s}_3(x)| \\
&\leq \frac{t^2(1-t)^2}{24} M_4 h^4 + \frac{t(1-t)}{24} M_4 h^4 \\
&= \frac{t(1-t)(1+(t-t^2))}{24} M_4 h^4 \\
&= (t - 2t^3 + t^4) \frac{M_4 h^4}{24}, \quad t = \frac{x - x_{k-1}}{h_k}.
\end{aligned}$$

Vaatleme eelnevas hinnangus esinevat funktsiooni $g(t) := t - 2t^3 + t^4$. Kuna

$$g'(t) = 4t^3 - 6t^2 + 1,$$

siis

$$\max_{t \in [0,1]} (t - 2t^3 + t^4) = \max_{t \in [0,1]} g(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16}.$$

Arvestades, et $x \in [x_{k-1}, x_k]$ korral $t \in [0, 1]$, saame, et iga $x \in [a, b]$ korral

$$|s_3(x) - f(x)| \leq \frac{1}{24} \cdot \frac{5}{16} M_4 h^4 = \frac{5}{384} M_4 h^4,$$

millest järeldub hinnang (6.17).

Näitame nüüd, et kehtib ka hinnang (6.18). Mis tahes $k \in \{1, \dots, n\}$ ja $x \in [x_{k-1}, x_k]$ korral, kasutades tähistust (6.15), kehtib võrdus (vt [4, lk 67])

$$f'(x) - \tilde{s}'_3(x) = \frac{1}{6} h_k^3 \left(\int_0^t \psi_1(t, \tau) f^{(4)}(x_{k-1} + \tau h_k) d\tau + \int_t^1 \psi_2(t, \tau) f^{(4)}(x_{k-1} + \tau h_k) d\tau \right),$$

kus

$$\begin{aligned}
\psi_1(t, \tau) &= 3(t-1)\tau^2(t(2\tau-3)+1), \\
\psi_2(t, \tau) &= 3t(1-\tau)^2(2t\tau+t-2\tau).
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
|f'(x) - \tilde{s}'_3(x)| &\leq \frac{1}{6} h_k^3 \left(\int_0^t |\psi_1(t, \tau)| |f^{(4)}(x_{k-1} + \tau h_k)| d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_t^1 |\psi_2(t, \tau)| |f^{(4)}(x_{k-1} + \tau h_k)| d\tau \right) \\
&\leq \frac{M_4}{6} h_k^3 \left(\int_0^t |\psi_1(t, \tau)| d\tau + \int_t^1 |\psi_2(t, \tau)| d\tau \right).
\end{aligned}$$

Kuna iga $t \in [0, 1]$ ja $\tau \in [0, t]$ korral

$$|\psi_1(t, \tau)| \leq 3(1-t)\tau^2(t|2\tau-3|+1) \leq 3(1-t)\tau^2(3t+1) \leq 12(1-t)\tau^2,$$

siis

$$\int_0^t |\psi_1(t, \tau)| d\tau \leq 12(1-t) \int_0^t \tau^2 d\tau = 12(1-t) \frac{\tau^3}{3} \Big|_0^t = 4t^3(1-t).$$

Vaatleme funktsiooni $g(t) := t^3(1-t) = t^3 - t^4$. Kuna

$$g'(t) = t^2(3-4t),$$

siis

$$\max_{t \in [0,1]} (t^3 - t^4) = \max_{t \in [0,1]} g(t) = g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{256}.$$

Lõpuks saame, et

$$\int_0^t |\psi_1(t, \tau)| d\tau = 4t^3(1-t) \leq 4 \cdot \frac{27}{256} = \frac{27}{64}.$$

Analoogiliselt saame, et iga $t \in [0, 1]$ ja $\tau \in [t, 1]$ korral

$$|\psi_2(t, \tau)| \leq 3t(1-\tau)^2(2t\tau + |t-2\tau|) \leq 3t(1-\tau)^2(2+2) \leq 12t(1-\tau)^2,$$

siis

$$\int_t^1 |\psi_2(t, \tau)| d\tau \leq 12t \int_t^1 (1-\tau)^2 d\tau = 12t \frac{(1-\tau)^3}{3} \Big|_t^1 = 4t(1-t)^3$$

Vaatleme funktsiooni $g(t) := t(1-t)^3$. Kuna

$$g'(t) = (-4t+1)(t-1)^2,$$

siis

$$\max_{t \in [0,1]} (t(1-t)^3) = \max_{t \in [0,1]} g(t) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{256}.$$

Lõpuks saame, et

$$\int_t^1 |\psi_2(t, \tau)| d\tau = 4t(1-t)^3 \leq 4 \cdot \frac{27}{256} = \frac{27}{64}.$$

Seega

$$|f'(x) - \tilde{s}'_3(x)| \leq \frac{M_4}{6} h_k^3 \left(\frac{27}{64} + \frac{27}{64} \right) \leq \frac{9}{64} M_4 h_k^3, \quad x \in [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (6.22)$$

Hindame nüüd vahet $|s'_3(x) - \tilde{s}'_3(x)|$, $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Selleks esitame kõigepealt kuupsplaini $s'_3(x)$ kujul

$$s'_3(x) = (6t^2 - 6t)h_k f(x_{k-1}) + (6t - 6t^2)h_k f(x_k) + (1-t)(1-3t)m_{k-1} - t(2-3t)m_k, \quad (6.23)$$

kus $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $t = \frac{x - x_{k-1}}{h_k}$. Tõepoolest, seose (2.7) tõttu

$$\begin{aligned} s'_3(x) &= m_{k-1} - \left(\frac{6(f(x_{k-1}) - f(x_k))}{h_k^2} + \frac{4m_{k-1}}{h_k} + \frac{2m_k}{h_k} \right) (x - x_{k-1}) \\ &\quad + \left(\frac{6(f(x_{k-1}) - f(x_k))}{h_k^3} + \frac{3m_{k-1}}{h_k^2} + \frac{3m_k}{h_k^2} \right) (x - x_{k-1})^2 \\ &= \left(-\frac{6(x - x_{k-1})}{h_k^2} + \frac{6(x - x_{k-1})^2}{h_k^3} \right) f(x_{k-1}) \\ &\quad + \left(\frac{6(x - x_{k-1})}{h_k^2} - \frac{6(x - x_{k-1})^2}{h_k^3} \right) f(x_k) \\ &\quad + \left(1 - \frac{4(x - x_{k-1})}{h_k} + \frac{3(x - x_{k-1})^2}{h_k^2} \right) m_{k-1} \\ &\quad - \left(\frac{2(x - x_{k-1})}{h_k} - \frac{3(x - x_{k-1})^2}{h_k^2} \right) m_k, \end{aligned}$$

millest, arvestades, et $t = \frac{x - x_{k-1}}{h_k}$, saame

$$\begin{aligned} s'_3(x) &= (6t^2 - 6t) \frac{1}{h_k} f(x_{k-1}) + (6t - 6t^2) \frac{1}{h_k} f(x_k) \\ &\quad + (1 - 4t + 3t^2)m_{k-1} + (3t^2 - 2t)m_k \\ &= (6t^2 - 6t) \frac{1}{h_k} f(x_{k-1}) + (6t - 6t^2) \frac{1}{h_k} f(x_k) \\ &\quad + (1 - t)(1 - 3t)m_{k-1} - t(2 - 3t)m_k. \end{aligned}$$

Valemite (6.14) ja (6.23) põhjal saame nüüd, et

$$\begin{aligned}
s'_3(x) - \tilde{s}'_3(x) &= 6t(t-1)\frac{1}{h_k}f(x_{k-1}) - 6t(t-1)\frac{1}{h_k}f(x_k) \\
&\quad + (1-t)(1-3t)m_{k-1} - t(2-3t)m_k - 6t(t-1)\frac{1}{h_k}f(x_{k-1}) \\
&\quad + 6t(t-1)\frac{1}{h_k}f(x_k) - (1-t)(1-3t)f'(x_{k-1}) + t(2-3t)f'(x_k) \\
&= (1-t)(1-3t)m_{k-1} - t(2-3t)m_k \\
&\quad - (1-t)(1-3t)f'(x_{k-1}) + t(2-3t)f'(x_k) \\
&= (1-t)(1-3t)(m_{k-1} - f'(x_{k-1})) - t(2-3t)(m_k - f'(x_k)).
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Seega

$$\begin{aligned}
|s'_3(x) - \tilde{s}'_3(x)| &= \left| (1-t)(1-3t)(m_{k-1} - f'(x_{k-1})) - t(2-3t)(m_k - f'(x_k)) \right| \\
&\leq |(1-t)(1-3t)| |m_{k-1} - f'(x_{k-1})| + t|2-3t| |m_k - f'(x_k)| \\
&\leq |(1-t)(1-3t)| \max_{0 \leq i \leq n} |m_i - f'(x_i)| + t|2-3t| \max_{0 \leq i \leq n} |m_i - f'(x_i)| \\
&\leq 4 \max_{0 \leq i \leq n} |m_i - f'(x_i)|,
\end{aligned}$$

millest lemma 6.1 põhjal järeldub hinnang

$$|s'_3(x) - \tilde{s}'_3(x)| \leq \frac{4}{24}M_4h^3 = \frac{1}{6}M_4h^3, \quad x \in [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{6.25}$$

Võrratustest (6.22) ja (6.25) saame nüüd, et kehtib hinnang (6.18), sest

$$\begin{aligned}
|s'_3(x) - f'(x)| &= |\tilde{s}'_3(x) - f'(x) + s'_3(x) - \tilde{s}'_3(x)| \\
&\leq |\tilde{s}'_3(x) - f'(x)| + |s'_3(x) - \tilde{s}'_3(x)| \\
&\leq \frac{9}{64}M_4h^3 + \frac{1}{6}M_4h^3 \\
&= \frac{59}{192}M_4h^3, \quad x \in [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1, 2, \dots, n).
\end{aligned}$$

□

Märkus 6.1. Bakalaureusetöös [1] on näidetud, et rajatingimuste (II) korral pole teoreemi 6.3 eeldustel hinnangus (6.17) esinevat konstanti $\frac{5}{384}$ võimalik vähendada.

§ 7. Arvulised näited

Selles paragrahvis esitame kolm konkreetset näidet interpoleeriva kuupsplaini konstrueerimise ja vea hindamise kohta.

Näide 7.1. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \sin(\sqrt{5}x) - \cos(x), \quad x \in [0, 2\pi] =: [a, b]. \quad (7.1)$$

Olgu lõigus $[a, b] = [0, 2\pi]$ antud ühtlane võrk

$$x_k = a + kh = 0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2\pi}{n}. \quad (7.2)$$

Rajatingimusi (I) (või (II)) rahuldava interpoleeriva kuupsplaini $s_3(x)$ ja tema tuletise $s'_3(x)$ konstrueerimiseks kujul (2.6) ja (2.7) leiame kõigepealt funktsiooni (7.1) väärtused $f_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$; seejärel lahendame paketi MathCad sisefunktsiooni `lsolve(A, t)` abil lineaarvõrrandite süsteemi (5.1) (rajatingimuste (II) korral süsteemi (5.3)), s.t leiame tundmatute m_0, \dots, m_n väärtused ning leiame splaini kujul (2.6) ja (2.7). Joonistel 7.1 ja 7.2 ning 7.3 ja 7.4 on esitatud funktsiooni (7.1) ning tema tuletist $f'(x) = \sin(x) + \sqrt{5} \cdot \cos(\sqrt{5}x)$ interpoleerivate funktsioonide $s_3(x)$ ja $s'_3(x)$ graafikud, mis vastavad rajatingimustele (I) või (II). Mustade ringikestega on kujutatud punktid $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, 1, \dots, n$. Mõlemal joonisel $n = 4$.

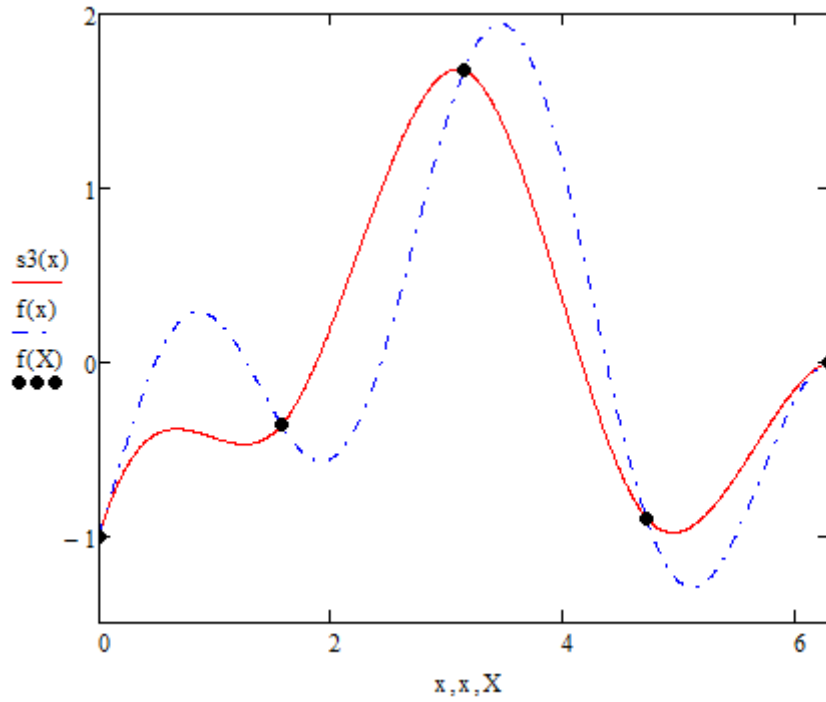
Kuna funktsiooni (7.1) korral $f \in C^4[0, 2\pi]$, $M_4 = 25,956$ (see hinnang on saadud arvuti abil), $b - a = 2\pi$ ja $h = \frac{2\pi}{n}$, siis teoreemi 6.2 põhjal kehtivad veahinnangud

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{5 \cdot (2\pi)^4 \cdot 25,956}{384n^4} = \frac{526,7}{n^4}, \quad (7.3)$$

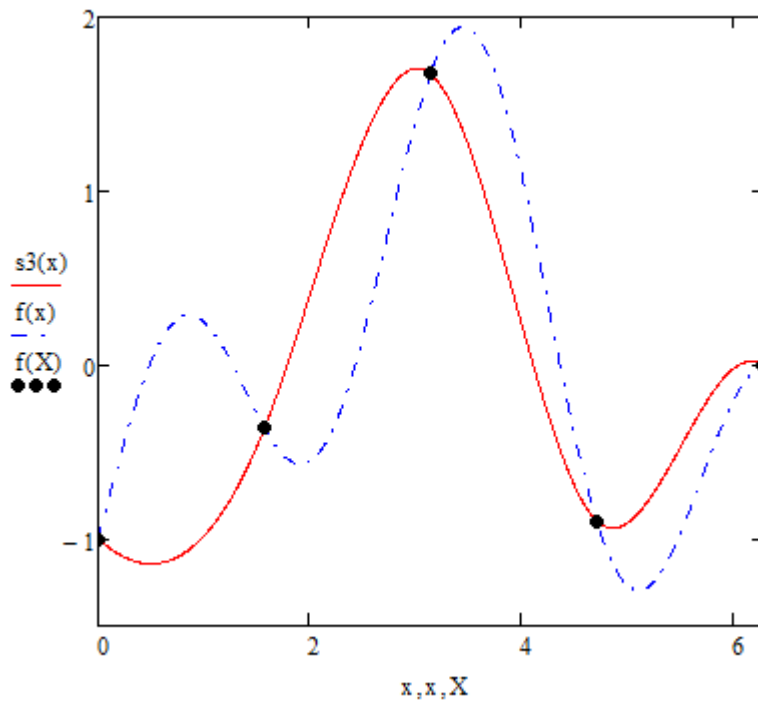
$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |s'_3(x) - f'(x)| \leq \frac{59 \cdot (2\pi)^3 \cdot 25,956}{192n^3} = \frac{1978,5}{n^3}, \quad (7.4)$$

kus

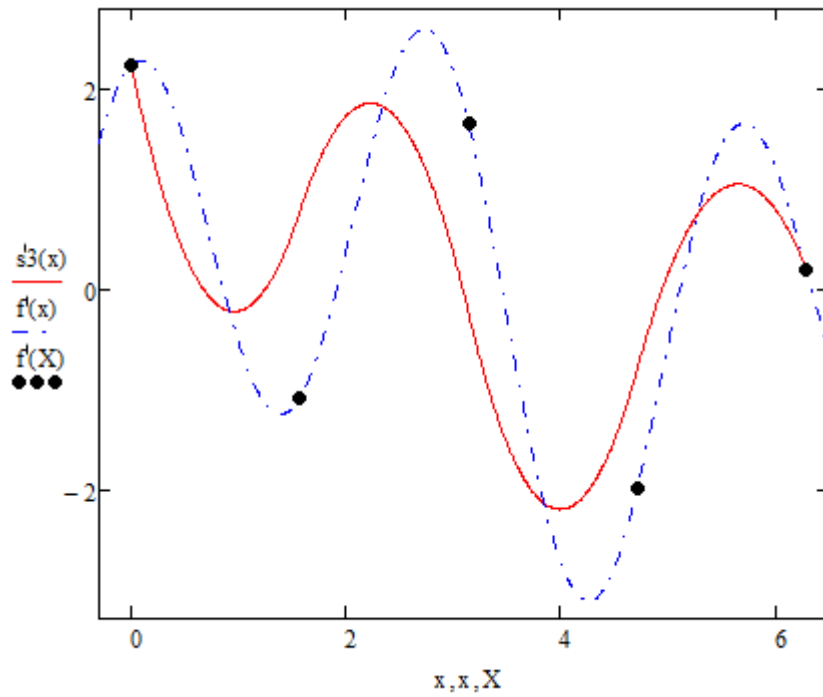
$$M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$



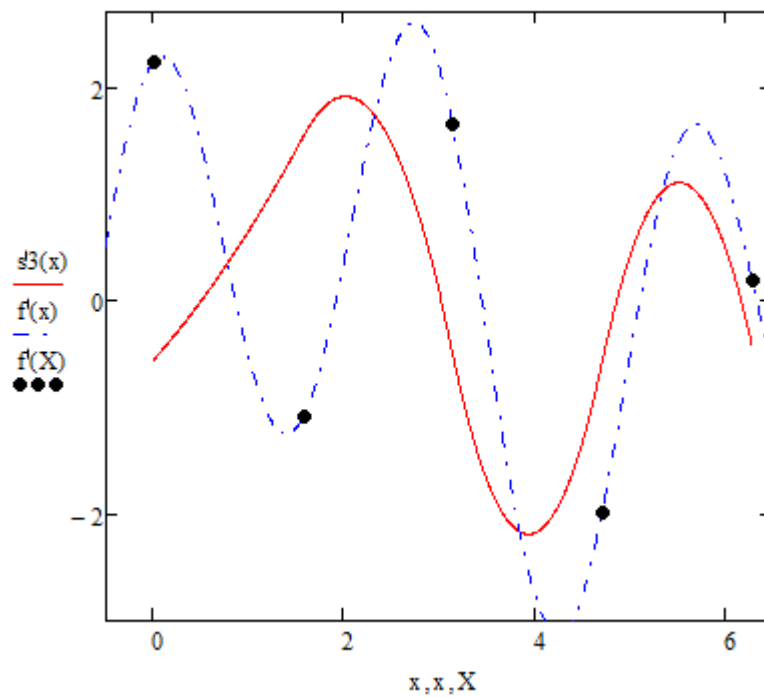
JOONIS 7.1. Funktsiooni (7.1) ja teda interpoleeriva rajatingimusi (I) rahuldava kuupsplaini $s_3(x)$ graafikud



JOONIS 7.2. Funktsiooni (7.1) ja teda interpoleeriva rajatingimusi (II) rahuldava kuupsplaini $s_3(x)$ graafikud



JOONIS 7.3. Funktsiooni (7.1) tuletise ja teda interpoleeriva rajatingimusi (I) rahuldava kuupsplaini $s_3(x)$ tuletise graafikud



JOONIS 7.4. Funktsiooni (7.1) tuletise ja teda interpoleeriva rajatingimusi (II) rahuldava kuupsplaini $s_3(x)$ tuletise graafikud

Järgnevat tabelites on esitatud arvulised tulemused

$$\varepsilon_n := \max_{\substack{k=0,1,\dots,n-1 \\ i=0,1,\dots,10}} |s_3(x_{ki}) - f(x_{ki})|, \quad n = 2^j, \quad j = 2, \dots, 11,$$

$$\varepsilon'_n := \max_{\substack{k=0,1,\dots,n-1 \\ i=0,1,\dots,10}} |s'_3(x_{ki}) - f'(x_{ki})|, \quad n = 2^j, \quad j = 2, \dots, 11,$$

jaoks, kus $x_{ki} = x_k + \frac{ih}{10}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $i = 0, 1, \dots, 10$.

Lisaks suurustele ε_n ja ε'_n on tabelites esitatud ka suhtub $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$ ja $\frac{\varepsilon'_n}{\varepsilon'_{2n}}$, mis iseloomustavad saadud vigade vastavust teoreetilistele hinnangutele (7.3) ja (7.4).

| n | teoreetiline viga | Rajatingimus I | | Rajatingimus II | |
|------|---------------------------|---------------------------|--|---------------------------|--|
| | | ε_n | $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$ | ε_n | $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$ |
| 4 | 2,05758 | 1,00207 | — | 1,36815 | — |
| 8 | 0,1286 | 0,04982 | 20,114 | 0,06312 | 21,675 |
| 16 | $8,03741 \times 10^{-3}$ | $1,88802 \times 10^{-3}$ | 26,387 | $3,77012 \times 10^{-3}$ | 16,742 |
| 32 | $5,02338 \times 10^{-4}$ | $1,03772 \times 10^{-4}$ | 18,194 | $2,30704 \times 10^{-4}$ | 16,342 |
| 64 | $3,13961 \times 10^{-5}$ | $6,33811 \times 10^{-6}$ | 16,373 | $1,43712 \times 10^{-5}$ | 16,053 |
| 128 | $1,96226 \times 10^{-6}$ | $3,93245 \times 10^{-7}$ | 16,117 | $8,98385 \times 10^{-7}$ | 15,997 |
| 256 | $1,22641 \times 10^{-7}$ | $2,45153 \times 10^{-8}$ | 16,041 | $5,61825 \times 10^{-8}$ | 15,99 |
| 512 | $7,66507 \times 10^{-9}$ | $1,53178 \times 10^{-9}$ | 16,004 | $3,51289 \times 10^{-9}$ | 15,993 |
| 1024 | $4,79067 \times 10^{-10}$ | $9,5729 \times 10^{-11}$ | 16,001 | $2,19609 \times 10^{-10}$ | 15,996 |
| 2048 | $2,99417 \times 10^{-11}$ | $5,98299 \times 10^{-12}$ | 16,000 | $1,37272 \times 10^{-11}$ | 15,998 |

TABEL 7.1. Vea ε_n väärtused funktsiooni (7.1) interpoleeriva kuupsplaini korral. Tabelist näeme, et osalõikude arvu n suurenemisel suurus ε_n väheneb ning suhe $\varepsilon_n/\varepsilon_{2n}$ läheneb arvule 16.

| n | teoreetiline viga | Rajatingimus I | | Rajatingimus II | |
|------|--------------------------|--------------------------|--|--------------------------|--|
| | | ε'_n | $\frac{\varepsilon'_n}{\varepsilon'_{2n}}$ | ε'_n | $\frac{\varepsilon'_n}{\varepsilon'_{2n}}$ |
| 4 | 30,91350 | 1,92668 | — | 2,79003 | — |
| 8 | 3,86419 | 0,18205 | 10,583 | 0,27714 | 10,067 |
| 16 | 0,48302 | 0,01412 | 12,893 | 0,03496 | 7,927 |
| 32 | 0,06038 | $1,60692 \times 10^{-3}$ | 8,787 | $4,34007 \times 10^{-3}$ | 8,055 |
| 64 | $7,54724 \times 10^{-3}$ | $1,97799 \times 10^{-4}$ | 8,124 | $5,42493 \times 10^{-4}$ | 8,000 |
| 128 | $9,43405 \times 10^{-4}$ | $2,45933 \times 10^{-5}$ | 8,043 | $6,78867 \times 10^{-5}$ | 7,991 |
| 256 | $1,17926 \times 10^{-4}$ | $3,06795 \times 10^{-6}$ | 8,016 | $8,49307 \times 10^{-6}$ | 7,993 |
| 512 | $1,47407 \times 10^{-5}$ | $3,83433 \times 10^{-7}$ | 8,001 | $1,06217 \times 10^{-6}$ | 7,996 |
| 1024 | $1,84259 \times 10^{-6}$ | $4,79272 \times 10^{-8}$ | 8,000 | $1,32807 \times 10^{-7}$ | 7,998 |
| 2048 | $2,30324 \times 10^{-7}$ | $5,99083 \times 10^{-9}$ | 8,000 | $1,66032 \times 10^{-8}$ | 7,999 |

TABEL 7.2. Vea ε'_n väärtused funktsiooni (7.1) interpoleeriva kuupsplaini tuletise jaoks. Tabelist näeme, et osalõikude arvu n suurenemisel suurus ε'_n väheneb ning suhe $\varepsilon'_n/\varepsilon'_{2n}$ läheneb arvule 8.

Näide 7.2. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = 2x - \cos(3x), \quad x \in [0, 2\pi] =: [a, b]. \quad (7.5)$$

Olgu lõigus $[a, b] = [0, 2\pi]$ antud ühtlane võrk

$$x_k = a + kh = 0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2\pi}{n}. \quad (7.6)$$

Rajatingimusi (I) (või (II)) rahuldava interpoleeriva kuupsplaini $s_3(x)$ ja tema tuletise $s'_3(x)$ konstrueerimiseks kujul (2.6) ja (2.7) leiame kõigepealt funktsiooni (7.5) väärtused $f_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$; seejärel lahendame paketi MathCad sisetfunktsiooni `lsolve(A, t)` abil lineaarvõrrandite süsteemi (5.1) (rajatingimuste (II) korral süsteemi (5.3)big), s.t leiame tundmatute m_0, \dots, m_n väärtused ning leiame splaini kujul (2.6) ja (2.7). Joonistel 7.5 ja 7.6 ning 7.7 ja 7.8 on esitatud funktsiooni (7.5) ning tema tuletist $f'(x) = 2(\sin 2x) + 2$ interpoleerivate funktsioonide $s_3(x)$ ja $s'_3(x)$ graafikud, mis vastavad rajatingimustele (I) või (II). Mustade ringikestega on kujutatud punktid $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, 1, \dots, n$. Joonistel 7.5 ja 7.6 $n = 4$, aga joonistel 7.7 ja 7.8 $n = 8$.

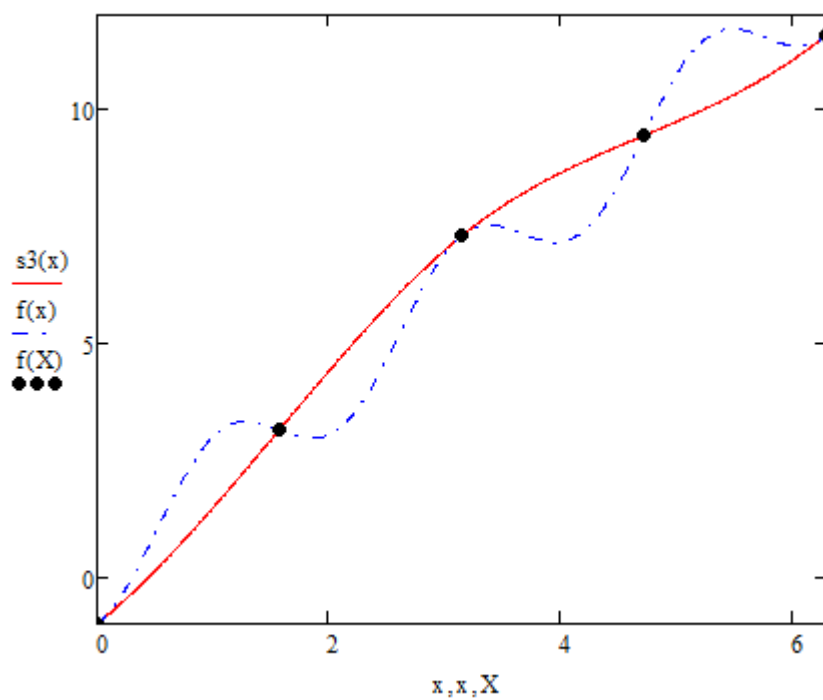
Kuna funktsiooni (7.5) korral $f \in C^4[0, 2\pi]$, $M_4 = 81$ (see hinnang on saadud arvuti abil), $b - a = 2\pi$ ja $h = \frac{2\pi}{n}$, siis teoreemi 6.2 põhjal kehtivad veahinnangud

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |s_3(x) - f(x)| \leq \frac{5 \cdot (2\pi)^4 \cdot 81}{384n^4} = \frac{1643,8}{n^4}, \quad (7.7)$$

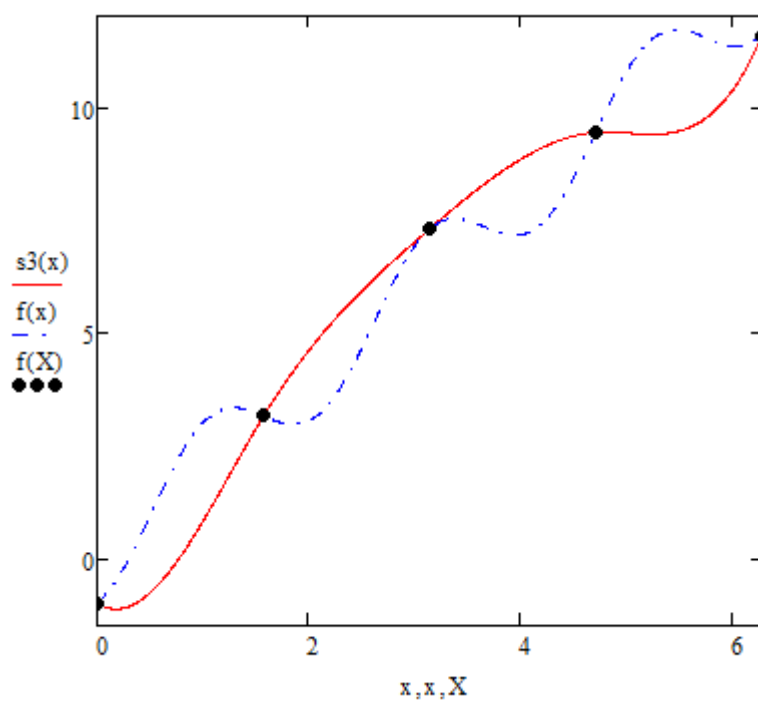
$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |s'_3(x) - f'(x)| \leq \frac{59 \cdot (2\pi)^3 \cdot 81}{192n^3} = \frac{6174,1}{n^3}, \quad (7.8)$$

kus

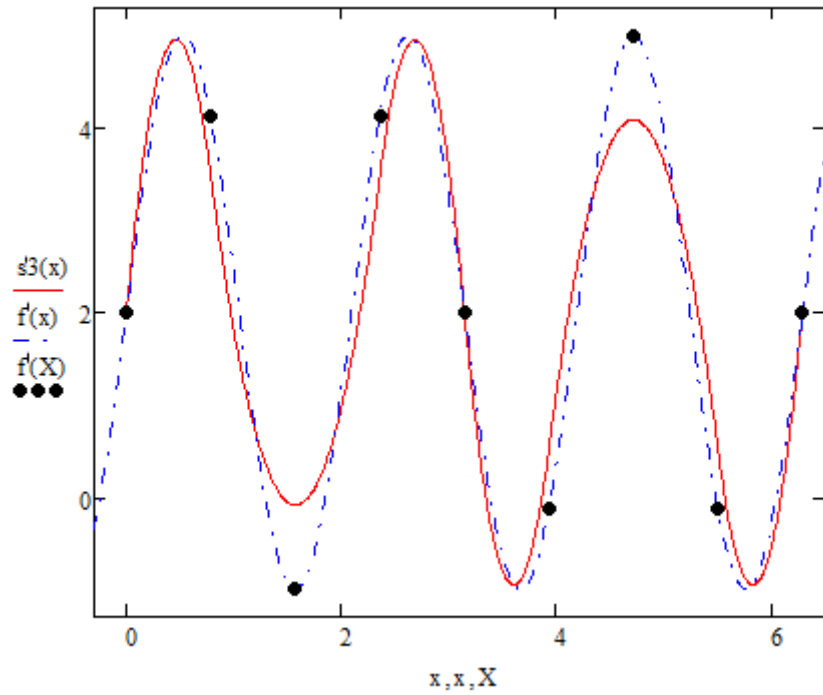
$$M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|.$$



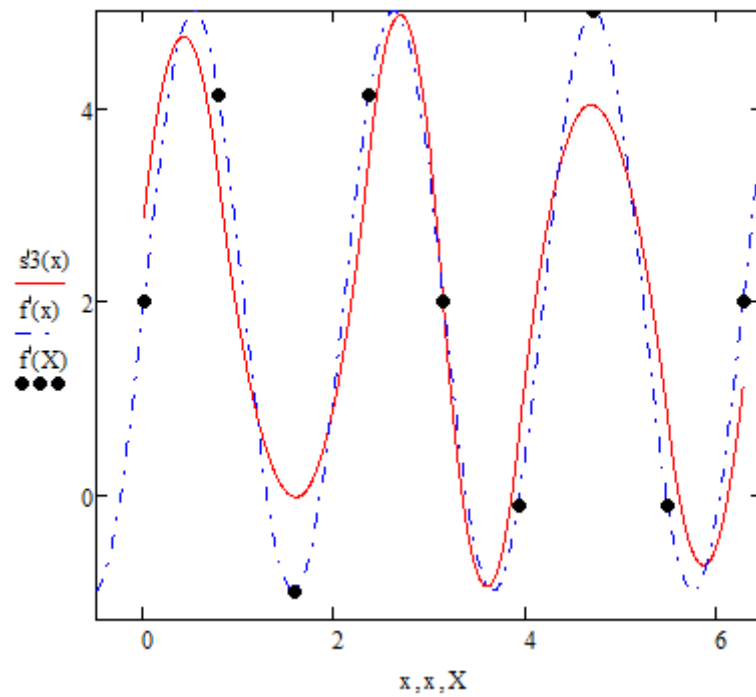
JOONIS 7.5. Funktsiooni (7.5) ja teda interpoleeriva rajatingimusi (I) rahuldava kuupsplaini $s_3(x)$ graafikud



JOONIS 7.6. Funktsiooni (7.5) ja teda interpoleeriva rajatingimusi (II) rahuldava kuupsplaini $s_3(x)$ graafikud



JOONIS 7.7. Funktsiooni (7.5) tuletise ja teda interpoleeriva rajatingimusi (I) rahuldava kuupsplaini $s_3(x)$ tuletise graafikud



JOONIS 7.8. Funktsiooni (7.5) tuletise ja teda interpoleeriva rajatingimusi (II) rahuldava kuupsplaini $s_3(x)$ tuletise graafikud

Järgnevates tabelites on esitatud arvulised tulemused

$$\varepsilon_n := \max_{\substack{k=0,1,\dots,n-1 \\ i=0,1,\dots,10}} |s_3(x_{ki}) - f(x_{ki})|, \quad n = 2^j, \quad j = 2, \dots, 11,$$

$$\varepsilon'_n := \max_{\substack{k=0,1,\dots,n-1 \\ i=0,1,\dots,10}} |s'_3(x_{ki}) - f'(x_{ki})|, \quad n = 2^j, \quad j = 3, \dots, 11,$$

jaoks, kus $x_{ki} = x_k + \frac{ih}{10}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $i = 0, 1, \dots, 10$.

Lisaks suurustele ε_n ja ε'_n on tabelites esitatud ka suhtub $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$ ja $\frac{\varepsilon'_n}{\varepsilon'_{2n}}$, mis iseloomustavad saadud vigade vastavust teoreetilistele hinnangutele (7.7) ja (7.8).

| n | teoreetiline viga | Rajatingimus I | | Rajatingimus II | |
|------|--------------------------|---------------------------|--|---------------------------|--|
| | | ε_n | $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$ | ε_n | $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$ |
| 4 | 6,42101 | 1,51906 | — | 2,25204 | — |
| 8 | 0,40131 | 0,22021 | 6,898 | 0,24923 | 9,036 |
| 16 | 0,02508 | $6,83084 \times 10^{-3}$ | 32,238 | 0,01341 | 18,585 |
| 32 | $1,56763 \times 10^{-3}$ | $3,3987 \times 10^{-4}$ | 20,098 | $7,94788 \times 10^{-4}$ | 16,872 |
| 64 | $9,79768 \times 10^{-5}$ | $1,99993 \times 10^{-5}$ | 16,994 | $4,90099 \times 10^{-5}$ | 16,217 |
| 128 | $6,12355 \times 10^{-6}$ | $1,23099 \times 10^{-6}$ | 16,247 | $3,05243 \times 10^{-6}$ | 16,056 |
| 256 | $3,82722 \times 10^{-7}$ | $7,66424 \times 10^{-8}$ | 16,061 | $1,90608 \times 10^{-7}$ | 16,014 |
| 512 | $2,39201 \times 10^{-8}$ | $4,78556 \times 10^{-9}$ | 16,015 | $1,19104 \times 10^{-8}$ | 16,003 |
| 1024 | $1,49501 \times 10^{-9}$ | $2,99026 \times 10^{-10}$ | 16,004 | $7,44359 \times 10^{-10}$ | 16,001 |
| 2048 | $9,3438 \times 10^{-11}$ | $1,86891 \times 10^{-11}$ | 16,000 | $4,65217 \times 10^{-11}$ | 16,000 |

TABEL 7.3. Vea ε_n väärtused funktsiooni (7.5) interpoleeriva kuupsplaini korral. Tabelist näeme, et osalõikude arvu n suurenemisel suurus ε_n väheneb ning suhe $\varepsilon_n/\varepsilon_{2n}$ läheneb arvule 16.

| n | teoreetiline viga | Rajatingimus I | | Rajatingimus II | |
|------|--------------------------|--------------------------|--|--------------------------|--|
| | | ε'_n | $\frac{\varepsilon'_n}{\varepsilon'_{2n}}$ | ε'_n | $\frac{\varepsilon'_n}{\varepsilon'_{2n}}$ |
| 8 | 12,05884 | 0,91093 | — | 0,97316 | — |
| 16 | 1,50735 | 0,05001 | 18,215 | 0,12246 | 7,947 |
| 32 | 0,18842 | $5,21696 \times 10^{-3}$ | 9,586 | 0,01491 | 8,213 |
| 64 | 0,02355 | $6,22711 \times 10^{-4}$ | 8,378 | $1,84908 \times 10^{-3}$ | 8,063 |
| 128 | $2,94405 \times 10^{-3}$ | $7,69421 \times 10^{-5}$ | 8,148 | $2,30641 \times 10^{-4}$ | 8,017 |
| 256 | $3,68007 \times 10^{-4}$ | $9,58991 \times 10^{-6}$ | 7,969 | $2,88145 \times 10^{-5}$ | 8,004 |
| 512 | $4,60008 \times 10^{-5}$ | $1,19787 \times 10^{-6}$ | 8,006 | $3,60133 \times 10^{-6}$ | 8,001 |
| 1024 | $5,75010 \times 10^{-6}$ | $1,49707 \times 10^{-7}$ | 8,001 | $4,50151 \times 10^{-7}$ | 8,000 |
| 2048 | $7,18763 \times 10^{-7}$ | $1,87133 \times 10^{-8}$ | 8,000 | $5,62683 \times 10^{-8}$ | 8,000 |

TABEL 7.4. Vea ε'_n väärtused funktsiooni (7.5) interpoleeriva kuupsplaini tuletise jaoks. Tabelist näeme, et osalõikude arvu n suurenemisel suurus ε'_n väheneb ning suhe $\varepsilon'_n/\varepsilon'_{2n}$ läheneb arvule 8.

Esitame lõpuks näite, mis kinnitab, et teoreemi 6.3 eeldus $f \in C^4[a, b]$ on oluline hinnangu (6.17) kehtivuseks.

Näide 7.3. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = x^{\frac{7}{2}}, \quad x \in [0, 1] =: [a, b]. \quad (7.9)$$

On selge, et funktsiooni (7.9) korral $f \in C^3[0, 1]$, kuid $f \notin C^4[0, 1]$.

Olgu lõigus $[a, b] = [0, 1]$ antud ühtlane võrk

$$x_k = a + kh = 0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}. \quad (7.10)$$

Rajatingimusi (I) (või (II)) rahuldava interpoleeriva kuupsplaini konstrueerimiseks kujul (2.6) leiame kõigepealt funktsiooni (7.9) väärtused $f_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$; seejärel lahendame paketi MathCad sisefunktsiooni `lsolve(A, t)` abil lineaarvõrrandite süsteemi (5.1) (rajatingimuste (II) korral süsteemi (5.3)), s.t leiame tundmatute m_0, \dots, m_n väärtused ning leiame splaini kujul (2.6). Joonistel 7.9 ning 7.10 on esitatud funktsiooni (7.9) ja teda interpoleerivate kuupsplainide $s_3(x)$ graafikud, mis rahuldavad vastavalt rajatingimusi (I) või (II). Mustade ringikestega on kujutatud punktid $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, 1, \dots, n$. Mõlemal joonisel $n = 4$.

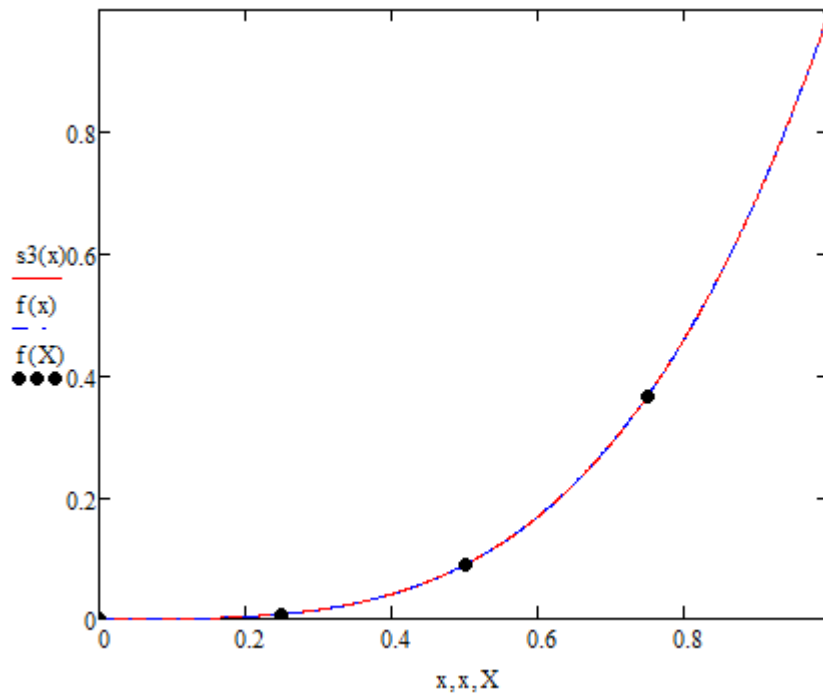
Järgnevas tabelis on esitatud arvulised tulemused

$$\varepsilon_n := \max_{\substack{k=0,1,\dots,n-1 \\ i=0,1,\dots,10}} |s_3(x_{ki}) - f(x_{ki})|, \quad n = 2^j, \quad j = 2, \dots, 11,$$

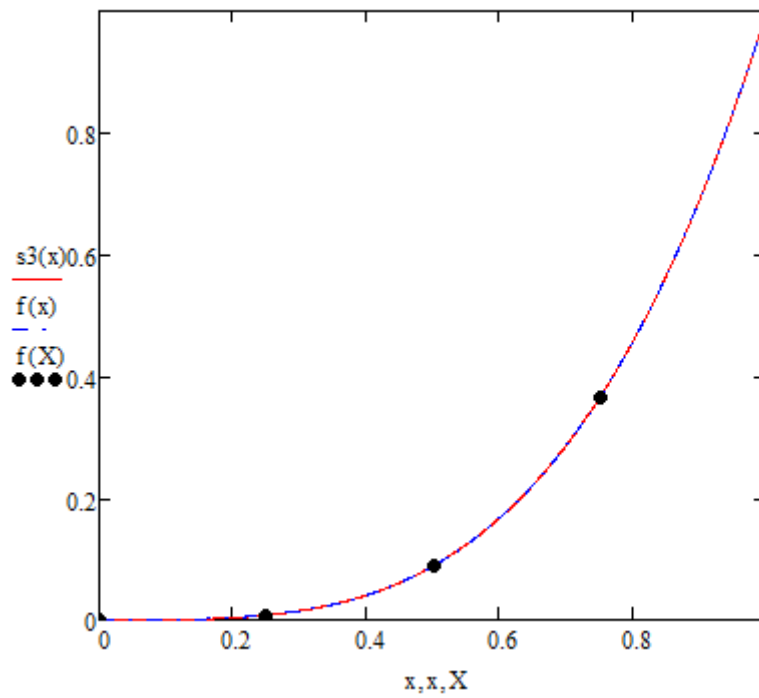
jaoks, kus $x_{ki} = x_k + \frac{ih}{10}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $i = 0, 1, \dots, 10$.

| n | Rajatingimus I | | Rajatingimus II | |
|------|---------------------------|--|---------------------------|--|
| | ε_n | $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$ | ε_n | $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{2n}}$ |
| 4 | $2,36978 \times 10^{-4}$ | — | $6,25764 \times 10^{-4}$ | — |
| 8 | $2,09433 \times 10^{-5}$ | 11,31522 | $5,54933 \times 10^{-5}$ | 11,27639 |
| 16 | $1,85115 \times 10^{-6}$ | 11,31367 | $4,90502 \times 10^{-6}$ | 11,31357 |
| 32 | $1,6362 \times 10^{-7}$ | 11,31371 | $4,33546 \times 10^{-7}$ | 11,31372 |
| 64 | $1,44621 \times 10^{-8}$ | 11,31371 | $3,83205 \times 10^{-8}$ | 11,31368 |
| 128 | $1,27828 \times 10^{-9}$ | 11,31372 | $3,38708 \times 10^{-9}$ | 11,31373 |
| 256 | $1,12985 \times 10^{-10}$ | 11,31371 | $2,99379 \times 10^{-10}$ | 11,31369 |
| 512 | $9,98656 \times 10^{-12}$ | 11,31371 | $2,64616 \times 10^{-11}$ | 11,31371 |
| 1024 | $8,82695 \times 10^{-13}$ | 11,31372 | $2,33889 \times 10^{-12}$ | 11,31374 |
| 2048 | $7,802 \times 10^{-14}$ | 11,31370 | $2,06731 \times 10^{-13}$ | 11,31369 |

TABEL 7.5. Vea ε_n väärtused funktsiooni (7.9) interpoleeriva kuupsplaini korral. Tabelist näeme, et osalõikude arvu n suurenemisel suurus ε_n väheneb kuid suhe $\varepsilon_n/\varepsilon_{2n}$ ei lähene arvule 16.



JOONIS 7.9. Funktsiooni (7.9) ja teda interpoleeriva rajatingimusi (I) rahuldava kuupsplaini $s_3(x)$ graafikud



JOONIS 7.10. Funktsiooni (7.9) ja teda interpoleeriva rajatingimusi (II) rahuldava kuupsplaini $s_3(x)$ graafikud

Kirjandus

- [1] KOOVIT A., *Interpoleerimine kuupsplainidega*, Bakalaureusetöö, Tartu Ülikool, Tartu, 2013.
- [2] LOONE L., SOOMER V., *Matemaatilise analüüsi algkursus*, Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu, 2009.
- [3] PEDAS A., VAINIKKO G., *Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Teooria, näiteid, ülesandeid*, Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu, 2011.
- [4] Ю. С. ЗАВЬЯЛОВ, Б. И. КВАСОВ, В. Л. МИРОШНИЧЕНКО, *Методы сплайн-функций*, Наука, Москва, 1980.

Lisa 1

Selles lisis toome näite interpoleeriva kuupsplaini konstrueerimisest ja vastava veahinnangu leidmisest rajatingimustel (I).

1. Lähteandmed

Interpoleeritav funktsioon: $f(x) := \sin(\sqrt{5}x) - \cos(x)$

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku tuletis: $dl(x) := \frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \sin(x) + \sqrt{5} \cdot \cos(\sqrt{5}x)$

Löigu otspunktid: $a := 0$ $b := 2\pi$

Ühtlase võrguga määratud osalõikude arv: $n := 4$

Ühtlase võrgu samm: $h := \frac{b-a}{n}$ $h = 1.571$

2. Võrgusõlmed ja funktsiooni väärtused nendes

$$k := 0, 1 \dots n$$
$$X := \begin{cases} \text{for } k \in 0 \dots n \\ x_k \leftarrow a + k \cdot h \\ x \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.57 \\ 3.14 \\ 4.71 \\ 6.28 \end{pmatrix} \quad f(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.36 \\ 1.68 \\ -0.9 \\ -3.83 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

3. Interpoleeriva kuupsplaini leidmine rajatingimustel (I)

Lineaarvõrrandite süsteem (5.1) esitub maatriksikujul järgmiselt:

$$A \cdot m = t$$

Maatriks A:

$$A_{0,0} := 1 \quad A_{n,n} := 1$$

$$k := 1, 2 \dots n-1$$

$$A_{k,k-1} := \frac{1}{2} \quad A_{k,k+1} := \frac{1}{2}$$

$$A_{k,k} := 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vabaliikmete maatriks t:

$$t_0 := dl(a)$$

$$t_n := dl(b)$$

$$t_k := \frac{3f(X_{k+1}) + 3f(X_{k-1})}{2 \cdot h}$$

$$t = \begin{pmatrix} 2.236 \\ 0.645 \\ -1.202 \\ 1.596 \\ 0.195 \end{pmatrix}$$

Lahendame süsteemi (5.1) tundmatute m_0, \dots, m_n suhtes paketi MathCad sisefunktsiooni *Isolve* (A, t) abil:

$$m := \text{Isolve}(A, t)$$

$$m = \begin{pmatrix} 2.236 \\ 0.782 \\ -0.254 \\ -0.787 \\ 0.195 \end{pmatrix}$$

Leiame kuupsplaini $s_3(x)$ kordajad c_k ja d_k :

$$k := 1, 2 \dots n$$

$$c_k := \frac{3 \cdot f(X_{k-1}) - 3 \cdot f(X_k)}{h^2} - \frac{m_k}{h} - \frac{2 \cdot m_{k-1}}{h}$$

$$d_k := \frac{2 \cdot f(X_{k-1}) - 2 \cdot f(X_k)}{h^3} + \frac{m_k}{h^2} + \frac{m_{k-1}}{h^2}$$

$$s_3(x) := \text{for } k \in 1, 2 \dots n$$

$$f(X_{k-1}) + m_{k-1} \cdot (x - X_{k-1}) + c_k \cdot (x - X_{k-1})^2 + d_k \cdot (x - X_{k-1})^3 \text{ if } X_{k-1} \leq x \leq X_k$$

6. Veahinnang

Leiame veahinnangu $\max |s_3(x) - f(x)|$ kümme korda tihedama võrgu sõlmedes:

$$\text{viga} := \begin{array}{|l} \max \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 0, 1 \dots n - 1 \\ \quad \text{for } m \in 0 \dots 10 \\ \quad \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow X_k + \frac{m \cdot h}{10} \\ \varepsilon \leftarrow |s_3(x) - f(x)| \\ \max \leftarrow \varepsilon \text{ if } \varepsilon \geq \max \end{array} \right. \\ \max \end{array}$$

$$\text{viga} = 1.00207$$

Lisa 2

Selles lisis toome näite interpoleeriva kuupsplaini konstrueerimisest ja vastava veahinnangu leidmisest rajatingimustel (II).

1. Lähteandmed

Interpoleeritav funktsioon: $f(x) := \sin(\sqrt{5}x) - \cos(x)$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku tuletis: $d2(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow \cos(x) - 5 \cdot \sin(\sqrt{5}x)$

Lõigu otspunktid: $a := 0$ $b := 2\pi$

Ühtlase võrguga määratud osalõikude arv: $n := 4$

Ühtlase võrgu samm: $h := \frac{b-a}{n}$ $h = 1.571$

2. Võrgusõlmed ja funktsiooni väärtused nendes

$$k := 0, 1..n$$
$$X := \begin{cases} \text{for } k \in 0..n \\ x_k \leftarrow a + k \cdot h \\ x \end{cases}$$
$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.571 \\ 3.142 \\ 4.712 \\ 6.283 \end{pmatrix} \quad f(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ -0.362 \\ 1.675 \\ -0.897 \\ -3.829 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

3. Interpoleeriva kuupsplaini leidmine rajatingimustel (II)

Lineaarvõrrandite süsteem (5.3) esitub maatriksikujul järgmiselt:

$$A \cdot m = t$$

Maatriks A:

$$A_{0,0} := 2 \quad A_{0,1} := 1$$

$$k := 1, 2..n-1 \quad A_{n,n-1} := 1$$

$$A_{k,k-1} := \frac{1}{2} \quad A_{k,k+1} := \frac{1}{2}$$

$$A_{k,k} := 2 \quad A_{n,n} := 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vabaliikmete maatriks t

$$t_0 := \frac{3f(X_1) - 3f(X_0)}{h} - \frac{h \cdot d2(a)}{2}$$

$$t_n := \frac{3f(X_n) - 3f(X_{n-1})}{h} + \frac{h \cdot d2(b)}{2}$$

$$t_k := \frac{3f(X_{k+1}) + 3f(X_{k-1})}{2 \cdot h}$$

$$t = \begin{pmatrix} 0.432 \\ 0.645 \\ -1.202 \\ 1.596 \\ -1.421 \end{pmatrix}$$

Lahendame süsteemi (5.3) tundmatute m_0, \dots, m_n suhtes paketi MathCad sisefunktsiooni *Isolve* (A, t) abil:

$m := \text{Isolve}(A, t)$

$$m = \begin{pmatrix} -0.554 \\ 1.54 \\ -0.497 \\ -0.571 \\ -0.425 \end{pmatrix}$$

Leiame kuupsplaini $s_3(x)$ kordajad c_k ja d_k :

$k := 1, 2 \dots n$

$$c_k := -\frac{3 \cdot f(X_{k-1}) - 3 \cdot f(X_k)}{h^2} - \frac{m_k}{h} - \frac{2 \cdot m_{k-1}}{h}$$

$$d_k := \frac{2 \cdot f(X_{k-1}) - 2 \cdot f(X_k)}{h^3} + \frac{m_k}{h^2} + \frac{m_{k-1}}{h^2}$$

$s_3(x) := \text{for } k \in 1, 2 \dots n$

$$f(X_{k-1}) + m_{k-1} \cdot (x - X_{k-1}) + c_k \cdot (x - X_{k-1})^2 + d_k \cdot (x - X_{k-1})^3 \text{ if } X_{k-1} \leq x \leq X_k$$

6. Veahinnang

Leiame veahinnangu $\max |s_3(x) - f(x)|$ kümme korda tihedama võrgu sõlmedes:

```
viga := |
  max ← 0
  for k ∈ 0..n-1
    for m ∈ 0..10
      |
      x ← Xk +  $\frac{m \cdot h}{10}$ 
      |
      ε ← |s3(x) - f(x)|
      |
      max ← ε if ε ≥ max
  |
  max
```

viga = 1.36815

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Aljona Koliberskaja (sünnikuupäev 25.05.1994),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Funktsiooni lähendamise kuupsplaini abil“, mille juhendaja on professor Arvet Pedas,
 - 1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - 1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **27.03.2017**