

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Jaanus Tomson
**Tolmani–Oppenheimeri–Volkovi võrrandi
numbriline uurimine**

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad Hardi Veermäe, PhD
Urve Kangro, PhD

TARTU 2022

TOLMANI–OPPENHEIMERI–VOLKOV VÕRRANDI NUMBRILINE UURIMINE

Bakalaureusetöö
Jaanus Tomson

Lühikokkuvõte

Antud töös vaatleme Tolmani-Oppenheimeri-Volkovi võrrandit, sellega seonduvaid klassikalise mehaanika valemeid ning mitmeid olekuvõrrandeid, mida rakendame Tolmani-Oppenheimeri-Volkovi võrrandi numbriliseks lahendamiseks. Tuletame erinevad valgete kääbuste ja neutrontähtede olekuvõrrandid. Rakendame mainitud olekuvõrrandeid erinevate tsentraalsete rõhkudega tähtede massi, raadiuse ja massi-raadiuse kõverate leidmiseks.

CERCS teaduseriala: P160 Statistika, operatsioonianalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika.

Märksõnad: Tolman, Oppenheimer, Volkov, olekuvõrrandid, numbriline lahendamine.

NUMERICAL STUDY OF TOLMAN–OPPENHEIMER–VOLKOFF EQUATION

Bachelor thesis
Jaanus Tomson

Abstract

In this work, we will be taking a look at Tolman-Oppenheimer-Volkov equation, the classical mechanics' formulas that relate to it, as well as various equations of state to solve the Tolman-Oppenheimer-Volkov equation numerically. We will derive various equations of state for white dwarves and neutron stars. Using said equations of state, we will find the mass, radius, as well as mass-radius curves for various stars with a given central pressure.

CERCS research specialisation: P160 Statistics, operations research, programming, financial and actuarial mathematics.

Key Words: Tolman, Oppenheimer, Volkov, equations of state, numeric solving.

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Tolmani–Oppenheimeri–Volkovi võrrand	4
1.1 Ühikud ja konstandid	4
1.2 Klassikalise mehaanika valemid	5
1.3 Tolmani–Oppenheimeri–Volkovi võrrand	6
2 Olekuvõrrandid ja TOV võrrandi numbriline lahendamine	8
2.1 Valgete kääbuste olekuvõrrand	8
2.2 Neutrontähtede olekuvõrrandid	12
2.3 Massiprofilid ja massi-raadiuse kõverad	15
Kokkuvõte	20
Kasutatud allikad	21
Lisa 1. Koodi lõigud	22

Sissejuhatus

Inimkond on alati tähtede poole vaadanud ja neid vaadelnud ning soovinud mõista, kuidas toimib see palja silmaga vaevu nähtav kompleksne süsteem, mis meid ümbritseb.

Antud töös vaatleme osa sellest suurest komplekssest süsteemist. Konkreetsemalt valgeid kääbuseid ning neutrontähti. Töö eesmärgiks on mõista Tolmani–Oppenheimeri–Volkovi võrrandit ning kuidas seda rakendada erinevate olekuvõrrandite puhul tähtede masside, raadiuste ja massi-raadiuse kõverate leidmiseks.

Töö esimeses osas tutvustame natukene tausta, kuidas kujuneb Tolmani–Oppenheimeri–Volkovi võrrand. Selleks tuletame kõigepealt vajalikud seosed klassikalise mehaanika lähenemist kasutades ning seejärel relativistlike parandeid rakendades.

Töö teises osas vaatleme eraldi kahte erinevat tähe tüüpi - valgeid kääbuseid ja neutrontähti. Leiame rõhu ja energia tiheduse valemite, teooria analüüsi põhjal ning arvutusprogramme kasutades olekuvõrrandid ja nende ligikaudsed lähendid. Rakendame neid olekuvõrrandeid koos Tolmani–Oppenheimeri–Volkovi võrrandiga ja klassikalise mehaanika valemitega, et leida erinevate tähtede tsentraalsete rõhkude kaudu tähtede maksimaalsed massid, raadiused ja massi-raadiuse kõverad.

1 Tolmani–Oppenheimeri–Volkovi võrrand

Selleks, et jõuda Tolmani–Oppenheimeri–Volkovi (TOV) võrrandi (edaspidi „TOV võrrand”) numbrilise lahendamiseni ja erinevate olekuvõrrandite massi-raadiuse kõverate leidmiseni, on meil eelkõige vajalik defineerida TOV võrrandiga seotud mõisted. Seda me käesolevas peatükis teemegi. Töö ülevaatlik osa tugineb tugevalt S. Weinbergi raamatule [6].

Alustame klassikalisest mehaanikast tuntud valemitega. Antud valemid on üldtuntud, aga täpsema kirjelduse saab leida ka lehelt [3]. Eeldame, et taevakehade puhul on tegu sfääriliselt sümmeetriliste keradega, mis on hüdrostaatilises tasakaalus ning kasutame ideaalse gaasi mudelit. Seega kõik suurused tähe sisemuses sõltuvad kaugusest tähe keskpunktist r . Leiame valemid rõhu tuletise jaoks r järgi ja kera raadiusega r sisalduva massi tuletise jaoks r järgi.

1.1 Ühikud ja konstandid

Ühikutena rakendame antud töös peamiselt geomeetrilisi ühikuid. Võrrandite lihtsustamiseks soovime võtta valguskiirus $c = 1$ ja gravitatsiooni konstant $G = 1$, kus konstandid c ja G oleksid dimensioonitud. Seda saame teha seades aja, kauguse ja kaalu ühikuks ühe valgusmeetri ehk siis olgu üks valgusmeeter aeg mis kulub valgusel ühe meetri läbimiseks.

Võttes aja ja kaalu ühikuks 1m, tuleb aga arvesse võtta säärase raamistiku mõju ka teistele töös kasutusele tulevatele konstantidele. Üheks neist on taandatud Plancki konstant \hbar .

Rakendame järgnevaid üleminekuksid.

Kuna $c = 1$, siis

$$1 \text{ s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

Seda seost $G = 1$ jõudmiseks kasutades saame

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} = 0.74 \cdot 10^{-27} \frac{\text{m}}{\text{kg}},$$

millest

$$1 \text{ kg} = 7,4 \cdot 10^{-28} \text{ m}.$$

Saame, et taandatud Plancki konstant

$$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}} = 0.351 \cdot 10^{-42} \text{ m kg} = 2,60 \cdot 10^{-70} \text{ m}^2.$$

1.2 Klassikalise mehaanika valemid

Vaatleme sfääriliselt sümmeetrilist tähte. Olgu tähe sisemuses tähe keskpunktist kaugusel r tähe massitihedus $\rho(r)$ ja rõhk $p(r)$. Vaatleme punktis r asuvat väikest risttahukat raadiuse suunalise kõrgusega dr ja sellega risti oleva põhja pindalaga dA . Selle risttahuka ruumala olgu dV ja mass dm . Siis

$$dm = \rho(r)dV. \quad (1)$$

Vaatleme igale säärasele risttahukale mõjuvat gravitatsioonijõudu dF_g ja üleslükkejõudu dF_p . Kuna üleslükkejõud on samasuunaline r -iga ja gravitatsioonijõud vastassuunaline, siis hüdrostaatilises tasakaalus kehtib

$$dF_p = dF_g. \quad (2)$$

Alustuseks leiame valemi dF_g arvutamiseks. (dF_g on vastassuunaline r -iga.) Olgu $M(r)$ tähe keskpunktist kaugusel r tähe sisemuse mass.

Definitsioon 1.1 Gravitatsioonijõud mõjub kehade massikeskmeid ühendava sirge sihil ning tõmbab neid teineteise poole. Gravitatsioonijõud avaldub valemiga (rakendame ka seost (1).)

$$dF_g = -\frac{M(r)dm}{r^2} = -\frac{M(r)\rho(r)dV}{r^2} = -\frac{M(r)\rho(r)drdA}{r^2}. \quad (3)$$

Leiame nüüd valemi dF_p arvutamiseks.

Olgu dp rõhu muutus, mis vastab kauguse muutusele dr .

Rõhu muut on füüsikaline suurus, mis väljendub pinnaühikule selle normaali sihis mõjuva jõuna.

$$dp = \frac{dF_p}{dA}. \quad (4)$$

Selle järgi saame, et

$$dF_p = dpdA = \frac{dp}{dr}drdA. \quad (5)$$

Asendades (3) ja (5) seosesse (2) saame, et

$$\frac{dp}{dr}drdA = -\frac{M(r)\rho(r)drdA}{r^2}. \quad (6)$$

Jagades mõlemad pooled läbi $drdA$ -ga, saame

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{M(r)\rho(r)}{r^2}. \quad (7)$$

Leiame järgnevalt valemi dM/dr arvutamiseks. Selleks läheme hetkeks üle sfäärilistele koordinaatidele ja leiame valemi tähe kera raadiusega r sisalduva massi arvutamiseks.

$$M(r) = \int_{V(r)} \rho(R) dV = \int_0^r 4\pi R^2 \rho(R) dR = 4\pi \int_0^r R^2 \rho(R) dR. \quad (8)$$

Eelnevast valemist r järgi tuletise võtmisel saame

$$\frac{dM}{dr} = 4\rho(r)\pi r^2. \quad (9)$$

Võtame arvesse, et kuna $c = 1$, siis energiatihedus on võrdne massi tihedusega.

Valemit (9) rakendame TOV võrrandite numbriliseks lahendamiseks.

Valemi (7) puhul peame ka üldrelativistlike parandusi arvesse võtma.

1.3 Tolmani–Oppenheimeri–Volkovi võrrand

Saadud valemite süsteemi saame kasutada järgnevalt TOV võrrandi üldkuuni jõudmiseks. Oluline on täheldada, et kuigi paljudel juhtudel ei ole tähe mass küllalt suur, et aegruumi mõjutada, siis leidub ikkagi olukordi, kus neid mõjusid on oluline arvesse võtta. Selleks peame sooritama üldrelativistlikud parandid.

S.Weinbergi raamatu *Gravitation and Cosmology* [6] põhjal saame, eeldades, et vaadeldava objekti puhul on tegu staatilise sfääriliselt sümmeetrilise ideaalse vedelikuga, tähe puhul kehtiva järgneva seose

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{M(r)\rho(r)}{r^2} \left[1 + \frac{p(r)}{\rho(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)} \right] \left[1 - \frac{2M(r)}{r} \right]^{-1}, \quad (10)$$

mis ongi Tolmani–Oppenheimeri–Volkovi võrrand.

Siinkohal võtame valemi (10) arvesse ilma tuletuskäiguta, kuna see on keerukas ning antud töö põhirõhk on TOV võrrandi numbrilisel lahendamisel. Tuletuskäiku on võimalik leida mitmest allikast, näiteks S. Weinbergi raamatus [6] ning artiklist [2].

Paneme tähele, et seose kehtimiseks peab $2M(r) < r$, kuna vastasel korral $2M(r) \geq r$ hakkab rõhk kasvama tähe keskpunktist kaugenedes ning sel taevakehal on sünduste horisont ehk tegu on musta auguga.

Paneme tähele, et valem (7) on valemi (10) erijuht. Valem (7) kehtib juhul kui gravitatsiooni mõju aegruumile on nii väike, et selle võib lugeda olematuks.

Vaatleme hetkeks valemit (10) ning milliseid tingimusi peab ta täitma, et võrrandi (7) lahendid selle omi lähendaks.

On ilmne, et selleks peab

$$\left[1 + \frac{p(r)}{\rho(r)}\right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)}\right] \left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right]^{-1} \rightarrow 1.$$

Selle põhjal saame, et (7) kehtimiseks peab $p(r) \ll \rho(r)$, $2M(r) \ll r$ ning $4\pi r^3 p(r) \ll M(r)$. Nende põhjal ka $p(r) \ll M(r) \ll r$.

Kasutades TOV võrrandit (10) ning massi kaugusel r leidmise võrrandit (8) moodustame võrrandi süsteemi. Selle võrrandi süsteemi abil kindla tsentraalse rõhuga tähe leidmiseks on tarvis võrrandi süsteemi sulgemiseks leida olekuvõrrand, mis seoks muutujaid ρ ja p .

2 Olekuvõrrandid ja TOV võrrandi numbriline lahendamine

Nüüd, kus meil on defineeritud TOV võrrandi üldkuju, on järgnevalt oluline selle numbriliseks lahendamiseks ja üldiseks mõistmiseks vaadelda erinevaid olekuvõrrandeid ning kuidas need TOV võrrandit mõjutavad.

Olekuvõrrandid loovad seose $\rho(r)$ ja $p(r)$ vahel ning sulgevad võrrandite (8) ja (10) süsteemi. Olekuvõrrandeid leidub mitmeid ning praeguse seisuga ei eksisteeri ühte kindlat olekuvõrrandit, mis perfektselt ja veatult kirjeldaks p ja ρ omavahelist seost. Järgnevalt vaatlemegi mõnesid potentsiaalseid võimalusi olekuvõrranditeks ning millise pildi säärased seosed looksid vaadeldavatest tähtedest endist. Selles peatükis leiame valgetele kääbustele ja neutrontähtedele suurel osal Fermi mudelil põhineva teooria abil ja Pythoni arvutusprogramme rakendades võimalikud olekuvõrrandid, vaatleme nende olekuvõrrandite massiprofile ning leiame massi-raadiuse kõverad.

2.1 Valgete kääbuste olekuvõrrand

Alustame olekuvõrrandite vaatlemist käsitledes algselt valgeid kääbuseid ja nendega seonduvaid olekuvõrrandeid. Valged kääbused on ülitihedad surnud tähed, väikeste ja keskmise massiga tähtede viimane evolutsioonile etapp, kuhu jõuab täht kui on ära kulutanud kogu oma kütuse ning temas enam termotuuma reaktsioone ei toimu. Kui säärane täht on oma eluea ära elanud, siis paisub ta punaseks hiiuks. Punane hiid aga omakorda paiskab välise kihi planetaarseks udukoguks, mis ümbritseb nüüd moodustunud valget kääbust. Valged kääbused on väga väikesed, maksimaalselt 1.4 kordse Päikese massiga (M_\odot) tähed [1].

Seepärast ongi meil hea alustada vaatlust just valgetest kääbustest, kuna nende mass on küllalt väike ja üldrelativistlikud parandused nende puhul niivõrd suurt rolli ei mängi. Elektronid valges kääbuses on kokku surutud ning toimivad nagu kõdunud gaasis, kusjuures kuna termotuuma reaktsioonid tähes on lõppenud, siis elektronide kompressioonist tingitud rõhk on peamine, mis tähe tema tugeva gravitatsiooni jõu vastu stabiliseerib. Seega saame rakendada rõhu ja energiatiheduse leidmiseks S.Weinbergi [6] raamatus leiduvaid valemeid.

Olgu siinkohal m_e elektroni mass ($6.7 \times 10^{-58}m$), m_n neutroni mass ($1.23 \times 10^{-54}m$) ja k_F fermi energia. k_F on maksimaalne energia millega elektronid saavad mingis kindlas tähes olla ning sõltub tähe kogu massist ning ühtlasi

ka tähe ajaloost. Kuna vaatleme mitmeid erinevate omadustega tähti, siis k_F on vabalt valitav.

Olekuvõrrandite leidmistel eristame kahte piirjuhtu:

1. Relativistlik kõdunud gaas $k_F \gg m_n$
2. Mitte-relativistlik kõdunud gaas $k_F \ll m_n$

Leiame alustuseks elektronide arvtiheduse n . Weinbergi raamatu kohaselt avaldub see kujul

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3}. \quad (11)$$

Selle abil leiame ka massitiheduse ρ , kui m_N on nukleoni mass ($1.23 \times 10^{-54} \text{ m}$) ning μ nukleonide arv ühe elektroni kohta.

$$\rho_N(k_F) = nm_N\mu = \frac{k_F^3 m_N \mu}{3\pi^2 \hbar^3}. \quad (12)$$

Eeldame, et nukleone on iga elektroni kohta ligikaudu 2 ehk $\mu \approx 2$.

Leiame järgnevalt kõdunud elektronidest tingitud rõhu [5]. Rakendame Weinbergi raamatus olevat valemit, et leida elektronide kompressioonist tingitud rõhk $p_e(k_F)$ tähes.

Rõhk on antud kujul

$$p_e(k_F) = \frac{8\pi}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_e^2}} = \frac{m_e^4}{\hbar^3} \tilde{P}\left(\frac{k_F}{m_e}\right), \quad (13)$$

kus defineerisime dimensioonitu funktsiooni

$$\tilde{P}(x) = \frac{1}{3\pi^2} \int_0^x \frac{z^4 dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{1}{24\pi^2} \left(x(2x^2 - 3)\sqrt{x^2 + 1} + 3\text{arsh}(x) \right). \quad (14)$$

Näeme, et nii rõhk kui ka energiatihedus on geomeetrilises ühikusüsteemis samade ühikutega.

Leiame $\tilde{P}(x)$ asümptoodi kui $x \rightarrow 0$. Kõige lihtsam moodus selleks on uurida integraalis sisalduvat seost $z^4 dz / \sqrt{z^2 + 1}$. Alustuseks vaatleme olukorda, kus $x \rightarrow \infty$ ehk relativistliku kõdunud gaasi ($k_F \gg m_n$).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{P}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3\pi^2} \int_0^x \frac{z^4 dz}{\sqrt{z^2 + 1}} \approx \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3\pi^2} \int_0^x z^3 dz = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{12\pi^2}.$$

Saadud järelduse, valemi (12) ning valemi (13) põhjal saame, et kui $k_F \gg m_e$,

$$p_e \approx \frac{m_e^4}{\hbar^3} \cdot \frac{\left(\frac{k_F}{m_e}\right)^4}{12\pi^2} = \frac{m_e^4}{12\pi^2 \hbar^3 m_e^4} \left(\frac{3\pi^2 \hbar^3 \rho_N}{m_N \mu}\right)^{4/3} = \frac{\hbar \pi^{2/3}}{12} \left(\frac{3}{m_N \mu}\right)^{4/3} \rho_N^{4/3}. \quad (15)$$

Selle järgi saame ka esimese olekuvõrrandi kujul

$$p = K_R \rho^{4/3}, \quad (16)$$

kus

$$K_R = \frac{\hbar \pi^{2/3}}{12} \left(\frac{3}{m_N \mu}\right)^{4/3} \approx 60.7 \text{ m}^{2/3}. \quad (17)$$

Leiame $\tilde{P}(x)$ asümptoodi kui $x \rightarrow \infty$ (mitte-relativistlik juht ($k_F \ll m_n$))

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{P}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3\pi^2} \int_0^x \frac{z^4 dz}{\sqrt{z^2 + 1}} \approx \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3\pi^2} \int_0^x z^4 dz = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{15\pi^2}. \quad (18)$$

Saadud järelduse, valemi (12) ning valemi (13) põhjal saame, et kui $k_F \ll m_e$,

$$p_e \approx \frac{m_e^4}{\hbar^3} \cdot \frac{\left(\frac{k_F}{m_e}\right)^5}{15\pi^2} = \frac{1}{15\pi^2 \hbar^3 m_e} \left(\frac{3\pi^2 \hbar^3 \rho_N}{m_N \mu}\right)^{5/3} = \frac{\hbar^2 \pi^{4/3}}{15m_e} \left(\frac{3}{m_N \mu}\right)^{5/3} \rho_N^{5/3}. \quad (19)$$

Selle järgi saame esitada mitte-relativistliku olekuvõrrandi kujul

$$p = K_{MR} \rho^{5/3}, \quad (20)$$

kus

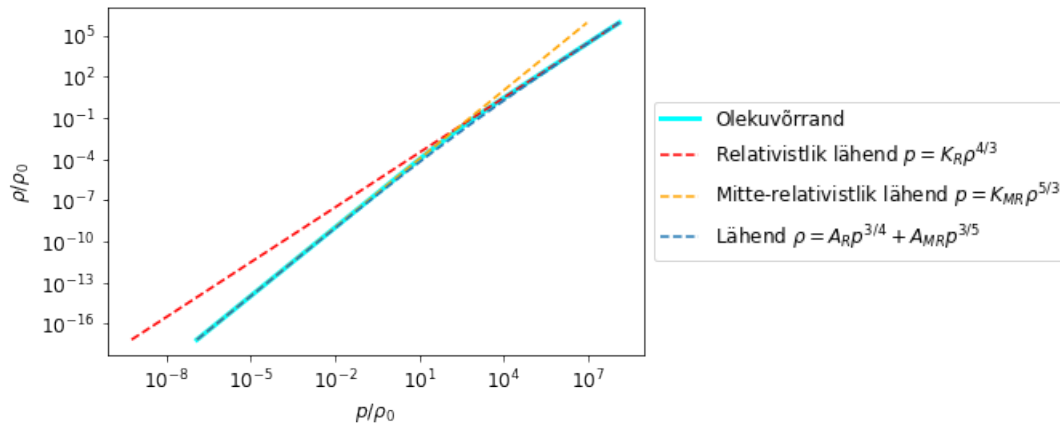
$$K_{MR} = \frac{\hbar^2 \pi^{4/3}}{15m_e} \left(\frac{3}{m_N \mu}\right)^{5/3} \approx 4.3 \times 10^7 \text{ m}^{4/3}. \quad (21)$$

Kujutame saadud olekuvõrrandid (16) ja (20) ka joonisel 1 ning tähistame $\rho_0 = \frac{m_e^4}{\hbar^3}$.

Kasutame nüüd Pythoni programmi (Lisa 1: koodijupp 2), et leida relativistliku ja mitte-relativistliku kõdunud gaasi puhul korruga kehtivat üldist olekuvõrrandi lähendit, kus ρ avaldub p kaudu. Säärase olekuvõrrandi lähendi leiame kujul

$$\rho = A_R p^{3/4} + A_{MR} p^{3/5}. \quad (22)$$

Seda teeme luues algselt hulga mitte-relativistlike ($k_F \ll m_e$ ehk $x \ll 1$) ja hulga relativistlike ($k_F \gg m_e$ ehk $x \gg 1$) x väärtusi. Seejärel leiame võrrandite (13) ja (12) abil energia tiheduse ja rõhu väärtused. Kasutame *scipy.optimize* pakketi, et leida umbkaudsed konstatide A_R ja A_{MR} väärtused,



Joonis 1: Valge kääbuse olekuvõrrand, asümptoodid ja lähendid (logaritmilisel skaalal)

mis seovad rõhu ja energia tiheduse väärtused. Seejärel kohandame ka võimalike väärtusi käsitsi katsetamise teel, et täpsemad tulemused saada. Protsessi tulemusena leiame, et võrrandis (22) oleks $A_R \approx 0.0426 \text{ m}^{-1/4}$ ja $A_{MR} \approx 2.63 \times 10^{-5} \text{ m}^{-4/5}$. (Lähendeid tehes saame standardveaks $\approx 4.08 \times 10^{-13}$, Pythoni programmi 2 põhjal.)

Olemegi leidnud olekuvõrrandi ja selle lähendid, mida saame edaspidi kasutada erinevate tsentraalrõhkudega valgete kääbuste massiprofilide ja massiraadiuste kõverate leidmiseks.

2.2 Neutrontähtede olekuvõrrandid

Liigume nüüd edasi neutrontähtede juurde ja uurime nende erinevaid olekuvõrrandeid.

Neutrontähed saavad alguse ülisuurtest tähtedest, mille massid jäävad umbkaudselt vahemikku $4M_\odot$ kuni $8M_\odot$, kus M_\odot tähistab Päikese massi. Tähed kujunevad neutrontähtedeks, täpselt nagu valgeteks kääbusteks, oma eluea lõpus, kui termotuuma reaktsioonid lakkavad. Antud tähed plahvatavad supernoovana ning allesjäänud tuumas surub gravitatsioon materjali niivõrd kokku, et prootonid ja elektronid kombineeruvad, et luua neutronid. Neutrontähti iseloomustab nende väike läbimõõt ning suur mass. [4].

Neutrontähtedele iseloomuliku suure massi tõttu on nende puhul aga oluline arvesse võtta ka üldrelativistlikuid parandusi ehk siis on õige rakendada valemit (7) asemel valemit (10).

Kasutame algselt Fermi gaasi mudelit, kus neutrontähtede olekuvõrrandite tuletuskäik sarnaneb valgete kääbuste olekuvõrrandite tuletuskäigule. Kuna tegu on neutrontähtedega, võtame valemid (12) ja (13) ning asendame neis elektronmassi m_e neutronmassiga m_n . Ignoreerime praegu tähes sisalduvaid elektrone ja prootoneid.

Võtame siinkohal $x = k_F/m_n$ ning saame kõdunud gaasi neutroni rõhuks

$$p_n(x) = \frac{m_n^4}{\hbar^3} \tilde{P}(x), \quad (23)$$

kus $\tilde{P}(x)$ avaldub kujul (14).

Massitihedus avaldub kujul (12), kus $k_F = x m_n$.

Sarnaselt valge kääbusega, saame mitte-relativistliku kõdunud gaasi puhul olekuvõrrandi

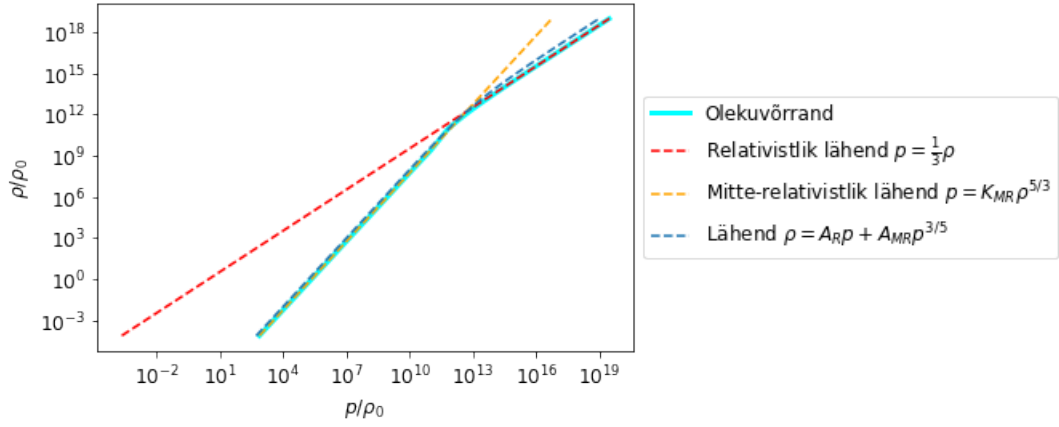
$$p = K_{MR} \rho^{5/3}, \quad (24)$$

kus

$$K_{MR} = \frac{\hbar^2 \pi^{4/3}}{15 m_n} \left(\frac{3}{m_N \mu} \right)^{5/3} \approx 23548.8 \text{ m}^{4/3}. \quad (25)$$

Vaadeldes aga relativistliku kõdunud gaasi, peame neutrontähe puhul arvesse võtma, et erinevalt valgest kääbusest, hakkab neutrontähe puhul lisaks massitihedusele rolli mängima nukleonidest tingitud energiatihedus. Seega leiame energiatiheduse ρ antud juhul Weinbergi raamatust [6] pärit valemiga

$$\rho_n(k_F) = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} (\sqrt{k^2 + m_n^2}) k^2 dk = \frac{m_n^4}{\hbar^3} \tilde{\rho} \left(\frac{k_F}{m_n} \right), \quad (26)$$



Joonis 2: Neutrontähe olekuvõrrand, asümptoodid ja lähendid (logaritmilisel skaalal)

kus

$$\tilde{\rho}(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^x z^2 \sqrt{z^2 + 1} dz = \frac{1}{8\pi^2} \left(x(2x^2 + x)\sqrt{x^2 + 1} - \operatorname{arsh}(x) \right). \quad (27)$$

Vaadeldes relativistlikut kõdunud gaasi juhul $x \rightarrow \infty$, näeme võrrandite (14) ja (27) põhjal, et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{P}(x) \approx \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\rho}(x).$$

Millest saame ka neutrontähe relativistliku olekuvõrrandi

$$p = \frac{\rho}{3}. \quad (28)$$

Kasutame koodi 2 sarnaselt meetodiga olekuvõrrandi lähendi (22) leidmisega ning leiame ka Fermi mudelil põhinevale neutrontähele olekuvõrrandi lähendi, mis kehtiks korraka nii mitte-relativistliku kui ka relativistliku kõdunud gaasi puhul. Lähendi saame kujul

$$\rho = A_R p + A_{MR} p^{3/5}, \quad (29)$$

kus $A_R \approx 0.99$ ja $A_{MR} \approx 1.7 \times 10^{-3} \text{ m}^{-4/5}$. (Olekuvõrrandi lähendi leidmisel saame standardveaks ≈ 0.0687 , Pythoni programmi 2 põhjal.)

Lõpetuseks vaatleme nüüd reaalseid neutrontähti, kus päris kõik elektronid ja prootonid veel neutroniteks kokku pole surutud ning kus leidub lisaks neutronitele ka elektrone ja prootoneid. Toome sisse ka prootoni massi $m_p =$

1.24×10^{-54} m. *S. Weinbergi* raamatu [6] põhjal saame, et säärase tähe kogu energiatihedus ja kogu rõhk avalduvad järgneval kujul.

$$\rho_t = \sum_{i=n,e,p} \rho_i(k_{Fi}) = \sum_{i=n,e,p} \frac{m_i^4}{\hbar^3} \tilde{\rho} \left(\frac{k_{Fi}}{m_i} \right). \quad (30)$$

$$p_t = \sum_{i=n,e,p} p_i(k_{Fi}) = \sum_{i=n,e,p} \frac{m_i^4}{\hbar^3} \tilde{P} \left(\frac{k_{Fi}}{m_i} \right). \quad (31)$$

Selleks, et leida seos k_{F_n} , k_{F_e} ja k_{F_p} vahel, kasutame ka arvulise tiheduse valemit (mille sammuti saame Weinbergi raamatust [6]), mis avaldub neutronitähes järgneval kujul (32). n_i on elektronidele, prootonitele või neutronitele vastav arvtihedus (ehk siis elektronide/prootonite/neutronite arv 1m^3 kohta.).

$$n_i = \frac{k_{Fi}}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad (32)$$

kus i on n , e või p . Kuna elektronide ja prootonite arv on võrdne, siis tuleneb valemist (32), et

$$k_{F_p} = k_{F_e}. \quad (33)$$

Rakendame ka järgnevat Weinbergi raamatust [6] tulenevat valemit

$$0 = \frac{d\rho}{dn_n} = (C^2(n_n)^{\frac{2}{3}} + m_n^2)^{\frac{1}{2}} - (C^2(n_p)^{\frac{2}{3}} + m_p^2)^{\frac{1}{2}} - (C^2(n_p)^{\frac{2}{3}} + m_e^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (34)$$

kus konstant C avaldub seosena

$$C = (3\pi^2 \hbar^3)^{\frac{1}{3}}. \quad (35)$$

Seega saame valemile (34) seoseid (35) ja (32) rakendades

$$\sqrt{k_{F_n}^2 + m_n^2} - \sqrt{k_{F_p}^2 + m_p^2} - \sqrt{k_{F_p}^2 + m_e^2} = 0. \quad (36)$$

Kasutame Pythoni koodi (Lisa1: k_{F_p} leidmine), et (36) kaudu leida $k_{F_p}(k_{F_n})$.

$$k_{F_p}(k_{F_n}) = \sqrt{\frac{(m_e^2 - 2m_e m_p - k_{F_n}^2 - m_n^2 + m_p^2)(m_e^2 + 2m_e m_p - k_{F_n}^2 - m_n^2 + m_p^2)^2}{4(k_{F_n}^2 + m_n)}}. \quad (37)$$

(30), (31), (33) ja (37) abil saab valemid $\rho_t(k_{F_n})$ ja $p_t(k_{F_n})$ leidmiseks.

2.3 Massiprofilid ja massi-raadiuse kõverad

Antud peatükis rakendame eelnevas kahes peatükis saadud olekuvõrrandeid, lähendeid, TOV võrrandit (10), seost (9) ja Pythoni koodi 3, et leida ja analüüsida erinevate olekuvõrrandite massiprofiile ja massi-raadiuse kõveraid.

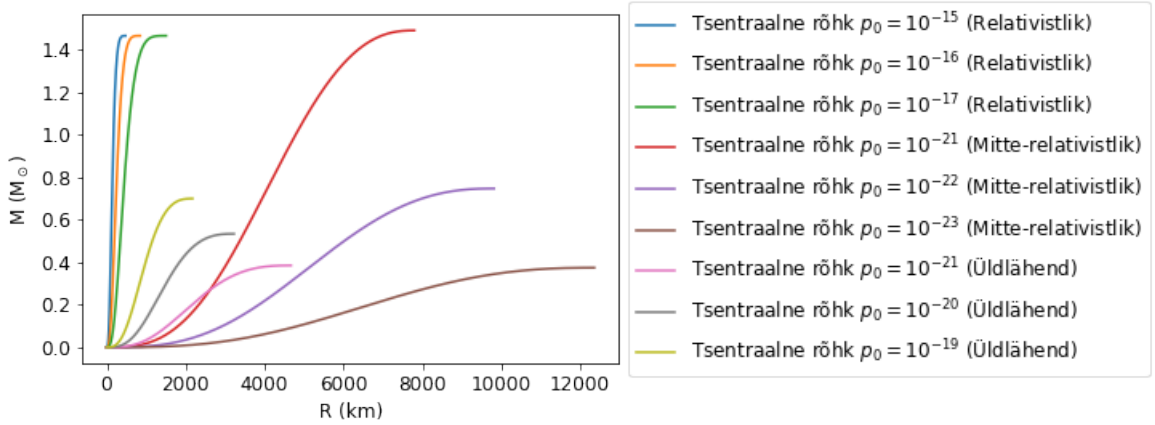
Massiprofilid kujutavad visuaalselt tähe keskpunktist kaugusel r tähe sise-muse massi sõltuvalt kaugusest r . Massiprofilid leiame koodi 3 abil, rakendades TOV võrrandit (10) ning erinevaid tuletatud olekuvõrrandeid. Massiprofilide leidmisel võtame fikseeritud tsentraalse rõhu ning lisame tükkhaaval väikeseid raadiuse muute, fikseerides iga muudu juures selleks hetkeks leitud raadiuse ja massi, ning jätkame seda protsessi, kuni programm jõuab rõhuni, mis on väiksem või võrdne nulliga. Sel hetkel lõpetab programm töö ning oleme leidnud antud tsentraalse rõhu jaoks vahetulemuste abil massiprofiili ning lõpptulemuse abil antud tsentraalsele rõhule ja olekuvõrrandile vastava massi ja raadiuse. Antud töös vaatleme massiprofiile juhuslike tsentraalse rõhkude puhul, et saada aimdust protsessist mille läbi leiame erinevate olekuvõrrandite massi ja raadiuse ning kuivõrd mõjutab tsentraalse rõhu valik seda protsessi. Neid teadmisi rakendame hiljem massi-raadiuste kõverate leidmiseks.

Massi-raadiuse kõverad kujutavad visuaalselt uuritava olekuvõrrandi puhul võimalike tähtede tegeliku massi ja raadiuse suhteid. Massi-raadiuse kõverate põhjal saame ka aimdust, millised on maksimaalsed tähe massid antud olekuvõrrandite jaoks. Massi-raadiuse kõverad leiame rakendades sama koodi mis massiprofilide leidmiselgi, kuid antud juhul vahetulemuse oluliseks ei pea, meid huvitab ainult erinevate tsentraalsete rõhkude puhul nende tähtede mass ja raadius. Võtame rõhkude vahemiku ning leiame selles vahemikus olevatele rõhkudele vastavad tähe massid ja raadiused vaadeldava olekuvõrrandi järgi ning loome visuaalse graafiku, et vaadelda milline kõver kujuneb nendest tulemustest ning mis võib antud juhul olla maksimaalseks massiks.

Alustame vaatlust valgetest kääbustest.

Vaatleme algselt valge kääbuse olekuvõrrandi relativistliku kuju (16). Näeme joonisel 3 massiprofiile uurides, et tegu on peamiselt suurte massidega läbimõõdult väikeste valgete kääbustega. Tähtede massid on küllaltki ühtlased, sõltumata tsentraalsest rõhust või tähe läbimõõdust. See-eest aga, mida suurem on tsentraalne rõhk, seda väiksema läbimõõduga on relativistlikud valged kääbused.

Mitte-relativistlikul kujul (20) aga näeme teistsugust pilti. Läbimõõdud on suured ning tähtede mass on sõltuvalt tsentraalsest rõhust küllaltki varieeruv. Selleks, et valge kääbus oleks sarnase massiga relatiivsele valgele kääbusele on



Joonis 3: Valge kääbuse massiprofilid.

tarvis, et täht oleks kordades suurema läbimõõduga. See-eest aga saavutab mitte-relativistlik suurema massi väiksema tsentraalse rõhuga.

Kui vaatame üldlähendi (22) massiprofile, näeme, et osaliselt sarnaneb nende käitumine mitte-relativistlikule olule (20). See eest aga nende läbi leiduvad lahendid on väiksema massi ning läbimõõduga. See eest on nad aga suurema läbimõõduga relativistlikest valgetest kääbustest, omades seejuures neist väiksemat massi.

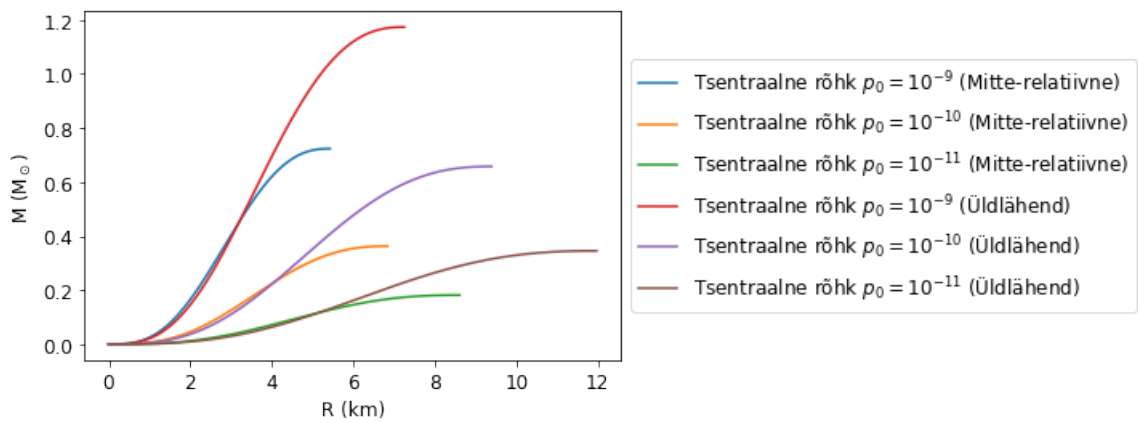
Jätkame massiprofilide uurimist neutrontähtedega.

Oluline täheldada, et olekuvõrrandi relativistliku kuju (28) ei saa me TOV võrrandi numbriliseks lahendamiseks ning massiprofilide ja massi-raadiuse kõverate leidmiseks rakendada. Seda põhjusel, et rakendades kuju (28) olekuvõrrandina, saame igal sammul dr niivõrd väikse dp , et $|dp(r)| \ll |p(r)|$ ning seetõttu ei saa me programmis 3 jõuda kauguseni r , kus $p(r) < 0$. Seda probleemi aga saame vältida, kasutades neutrontähe relativistlike olekuvõrrandite uurimiseks lähendit (29).

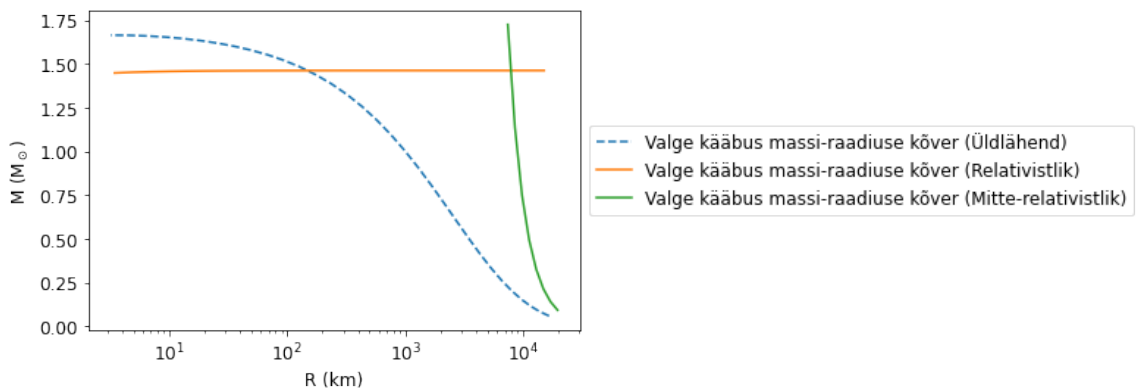
Vaatleme mitte-relativistliku kuju (24) ning seeläbi leitavaid massiprofile joonisel 4. Mida suurem on tsentraalne rõhk, seda suurem on neutrontähe mass ja väiksem tähe läbimõõt.

Sarnast käitumist näeme ka lähendi (29) puhul, kusjuures massiprofilid käituvad algselt samamoodi nagu ka kuju (24) puhul ning peamine erinevus massis tuleb alles tähe välimise kihi puhul, kus lähendi (29) puhul on massi muut suurem kui mitte-relativistliku kuju (24) puhul.

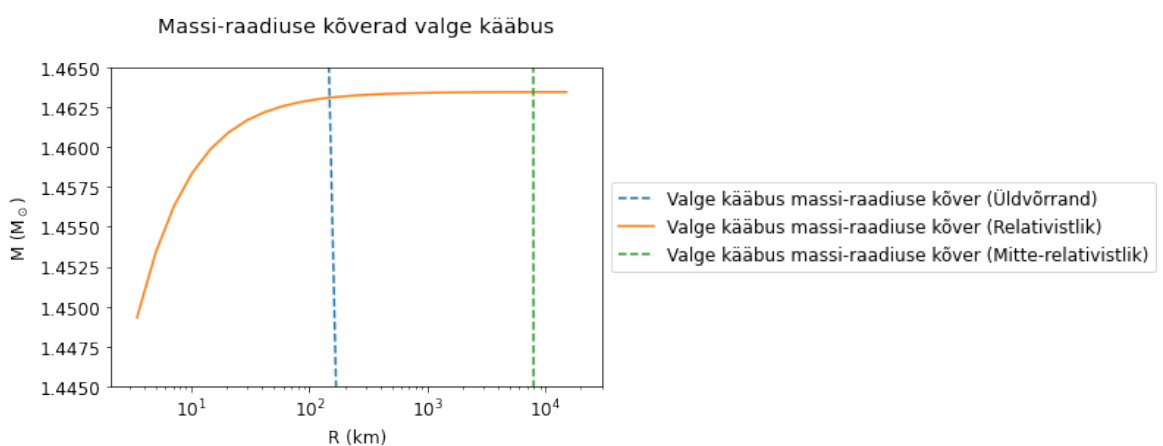
Vaatleme nüüd massi-raadiuse kõveraid.



Joonis 4: Neutrontähe massiprofilid.



Joonis 5: Valge kääbuse massi-raadiuse kõver.



Joonis 6: Valge kääbuse massi-raadiuse kõver (täpsem vaade relativistlikule juhule).

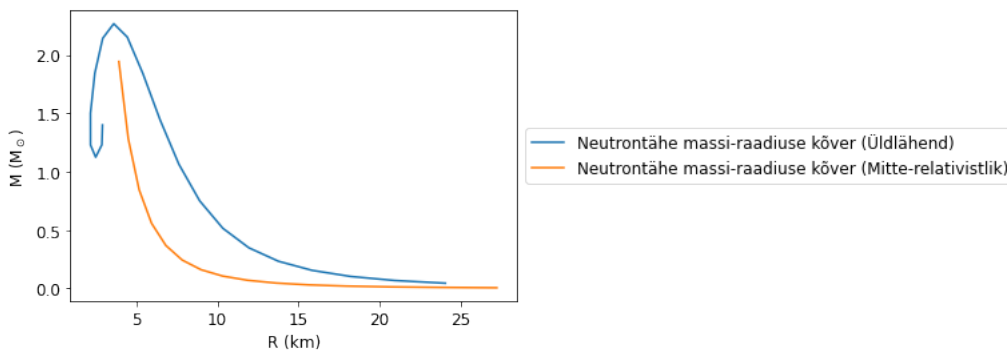
Taaskord alustame valgetest kääbustest. Kujutame joonisel 5 massi-raadiuse kõverad olekuvõrrandi relativistliku kuju (16), mitte-relativistliku kuju (20) ja mõlema puhul kehtiva lähendi (22) puhul.

Näeme, et kuigi valgete kääbuste läbimõõdud varieeruvad, on siiski valge kääbuse massil relativistliku ja üldvõrrandi poolt määratud piir, millest suurem ei tohiks valge kääbus olla. Teame, et täpselt nagu jooniseltki näha, jääb see piir umbkaudu 1.5 kordse Päikese massi juurde. Relativistlike valgete kääbuste puhul tihti mass just sinnakanti jääbki. Lähendi puhul on maksimaalne mass natukene kõrgem, mis tuleneb mitte-relativistlike olude mõjust lähendis. See eest aga saame olla kindlad, et maksimaalne valge kääbuse mass $\leq 1.75M_{\odot}$.

Jooniselt näeme ka, et kindlas punktis raadiuste 10^4 ligidal muutub tähe olek üle relativistlikelt oludelt mitte-relativistlikele, kus raadiuste väärtuste kasvades hakkavad tähed aina väiksemat massi omama. See punkt ongi määravaks relatiivsete ja mitte-relatiivsete keskkondade vahel. Seega on väiksema massiga valged kääbused tihti suurema läbimõõduga mitte-relativistlikust kõdunud gaasist koosnevad tähed.

Vaatleme hetkeks joonist 6, et saada joonisest 5 natukene täpsem pilt relativistlikest valgetest kääbustest. Kõik relativistlikud valged kääbused ei ole võrdse massiga, nagu algselt jooniselt 5 tunduda võib. See eest on aga nende masside varieeruvus väga väike ning peamine erinevus esineb väga väikeste läbimõõtudega relativistlike valgete kääbuste korral.

Vaatleme nüüd neutrontähe olekuvõrrandile vastavat massi-raadiuse kõverat joonisel 7.



Joonis 7: Neutrontähe massi-raadiuse kõver.

Näeme, et neutrontähe puhul on maksimaalseks massiks umbkaudu 2.1 kordne Päikese mass, kusjuures neutrontähe läbimõõdud on väga väikesed. Näeme, et vaid mõne kilomeetrise läbimõõduga neutrontähed omavad kahe kord-

set päikese massi. Neutrontähe massi-raadiuse kõver on küllaltki huvitav. Nagu näeme, on võimalik, et alla 5 km raadiuse puhul võib esineda erinevate massidega sama läbimõõduga tähti, kuna olekuvõrrand moodustab väikeste väärtuste puhul "spiraali". On lihtne ka näha, et neutrontähed saavutad oma maksimaalse massi peamiselt väikeste läbimõõtude puhul ning mida suurem on neutrontäht, seda väiksem on tema mass.

Kokkuvõte

Antud töös rakendasime Pythoni programme, et leida erinevaid kasutatavaid olekuvõrrandeid valgete kääbuste ja neutron tähtede masside, raadiuste ja massi-raadiuse kõverate leidmiseks. Töö käigus sai selgemaks, millist mõju avaldavad erinevad olekuvõrrandid Tolman-Oppenheimeri-Volkovi võrrandi kaudu info leidmisele.

Nägime ka kuivõrd erinevate omadustega võivad olla relativistlikust kõdunud gaasist ning mitte relativistlikust kõdunud gaasist moodustunud tähed.

Ei valged kääbused ega neutrontähed ole kuigi suure läbimõõduga, see eest on mõlemad vägagi suurte massidega. Valgete kääbuste maksimaalne mass on umbkaudu 1.5 kordne Päikese mass ning neutrontähe maksimaalne mass umbkaudu 2.1 kordne Päikese mass. See eest on valged kääbused väiksemad kui 10000 km ning neutrontähed koguniski väiksemad kui 25 km.

Võimalik edasine arendus oleks näiteks täiendavate olekuvõrrandite leidmine ja katsetamine. Kindlat olekuvõrrandit neutrontähe jaoks pole veel leitud, seega on tegu valdkonnaga, kus potentsiaalset uurimist ja analüüsimist on veel küllaga.

Kasutatud allikad

- [1] D. Dobrijevic N.T. Tillman. *White dwarfs: Facts about the dense stellar remnants*. 4. märts 2022. URL: <https://www.space.com/23756-white-dwarf-stars.html> (vaadatud 14.08.2022).
- [2] F. Weber O. Zubairi A. Romero. *Static solutions of Einstein's field equations for compact stellar objects*. 2015. URL: <https://s3.cern.ch/inspire-prod-files-1/11c0a36844990f63da2a6b0e7a26aae7> (vaadatud 12.08.2022).
- [3] *Physics Formulas List*. 2014. URL: https://www.easternct.edu/mathematical-sciences/_documents/Physics-Formulas.pdf (vaadatud 02.08.2022).
- [4] N.T. Tillman. *Neutron Stars: Definition & Facts*. 24. veebruar 2018. URL: <https://www.space.com/23756-white-dwarf-stars.html> (vaadatud 14.08.2022).
- [5] Swinburne University. *COSMOS - The SAO Encyclopedia of Astronomy*. URL: <https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/E/electron+degeneracy+pressure> (vaadatud 14.08.2022).
- [6] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. 1. väljaanne. United States of America: John Wiley & Sons, Inc., 1972.

Lisa 1. Koodi lõigud

Maxima käsud integraalide leidmiseks:

Koodijupp 1: Maxima kood integraali leidmiseks

```
1 integrate(((z^2) *(z^2+ 1)^(1/2)),z);
2 integrate((k^4/((k^2+1)^(1/2))),k);
```

Pythoni kood olekuvõrrandite leidmiseks ja neile vastavate jooniste tegemiseks:

Koodijupp 2: Pythoni kood olekuvõrrandite leidmiseks

```
1 import math as mt
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5
6 from scipy.optimize import curve_fit
7
8 #konstandid
9
10 h = 2.6*10**(-70)
11 G = 1
12
13 m_ühik = 7.4*10**(-28)
14 m_n = (1.66*10**(-27))*m_ühik
15 m_e = (9.1*10**(-31))*m_ühik
16 m_p = (1.673*10**(-27))*m_ühik
17
18
19 #Valge kääbuse funktsioonid
20 mu = 2
21 def rõhk_valgekääbus(x):
22     kordaja_dim = (m_e**4/(24*(mt.pi**2)*(h**3)))
23     valem = x*((2*x**2)-3)*((x**2 +1)**(1/2))+3* mt.
24         asinh(x)
25     return kordaja_dim*valem
26
27 def energiatihedus_valgekääbus(x):
28     valem = (((x*m_e)**3)*m_n*mu/(3*(mt.pi**2)*(h**3)))
29     return valem
```

```

30
31 #Valge kääbuse konstandid K
32 K_Relatiivne_vk = (h*(mt.pi**(2/3))/12)*((3/(mu*m_n))
    **(4/3))
33 print(K_Relatiivne_vk)
34
35
36 K_Mitterel_vk = ((h**2)*(mt.pi**(4/3))/(15*m_e))*((3/(
    m_n*mu))**(5/3))
37 print(K_Mitterel_vk)
38
39 def andmestiku_loome(rõhk, energiatihedus):
40     x_max = 100
41     x_keskel = 1
42
43     vahe2 = (x_max-x_keskel)/1000
44     vahe1 = ((x_keskel)/1000)
45
46     x_väärtused_MR = []
47     energ_tihedus_MR = []
48     rõhud_MR = []
49
50
51     x_väärtused_R = []
52     energ_tihedus_R = []
53     rõhud_R = []
54
55     x_väärtused = []
56     energ_tihedus = []
57     rõhud = []
58
59     x = 0+vahe1
60
61     while x < x_keskel:
62         energ_tihedus_MR.append(energiatihedus(x))
63         rõhud_MR.append(rõhk(x))
64         x_väärtused_MR.append(x)
65         x *= 2
66         #x += vahe1
67
68     x = x_keskel+vahe2
69     while x < x_max:
70         energ_tihedus_R.append(energiatihedus(x))

```



```

71     rõhud_R.append(rõhk(x))
72     x_väärtused_R.append(x)
73     x += vahe2
74
75     x_väärtused = x_väärtused_MR + x_väärtused_R
76     energ_tihedus = energ_tihedus_MR + energ_tihedus_R
77     rõhud = rõhud_MR + rõhud_R
78
79     # Teeme joonise, et visualiseerida rõhu ja energia
80     tiheduse väärtusi
81
82     plt.plot( rõhud, energ_tihedus, label="$p$ ja $\epsilon$
83     omavaheline seos ")
84
85     plt.xlabel('$p$ (1/m$^2$)')
86     plt.ylabel(r'$\rho$ (1/m$^2$)')
87
88     plt.legend(bbox_to_anchor=(0., 1.02, 1., .102), loc
89     = 'lower left',
90     ncol=2, mode="expand", borderaxespad=0.)
91
92     plt.show()
93
94     return([x_väärtused_MR, x_väärtused_R,
95     energ_tihedus_MR, energ_tihedus_R, rõhud_MR, rõ
96     hud_R])
97
98 andmed_vk = andmestiku_loome(rõhk_valgekääbus,
99     energiatihedus_valgekääbus)
100
101 rõhud_vk_R = andmed_vk[5]
102 rõhud_vk_MR = andmed_vk[4]
103 energ_tihedus_vk_R = andmed_vk[3]
104 energ_tihedus_vk_MR = andmed_vk[2]
105 k_väärtused_vk_R = andmed_vk[1]
106 k_väärtused_vk_MR = andmed_vk[0]
107
108 rõhud_vk = rõhud_vk_MR + rõhud_vk_R
109 energ_tihedus_vk = energ_tihedus_vk_MR +
110     energ_tihedus_vk_R

```

```

107 k_väärtused_vk = k_väärtused_vk_MR + k_väärtused_vk_R
108
109
110 def olek_R_vk(p):
111     return (1/(np.power(K_Relatiivne_vk,3/4)))*(np.
        power(p,(3/4)))
112
113
114 def olek_MR_vk(p):
115     return (1/(np.power(K_Mitterel_vk, 3/5)))*(np.power
        (p,(3/5)))
116
117
118
119 # ldv õrrandite leidmiseks
120 def leidmine_uldv(energ_tihedus_x, rõhud_x, p0, aste_R,
        aste_MR, kordaja, ül_piir):
121
122     #Võrrandi kuju
123     def funk_üld(p, A_R, A_MR):
124         return A_R*np.power(p,aste_R) + A_MR*np.power(p
            ,aste_MR)
125
126     #
127     #Kuna tegu on väga väikeste väärtustega, peame arve
        natukene kohandama, et popt funktsioon leiaks õ
        iged väärtused
128     energ_tihedus_x_kohandatud = [element_erg *kordaja
        for element_erg in energ_tihedus_x]
129     rõhud_x_kohandatud = [element_p*kordaja for
        element_p in rõhud_x]
130
131
132
133     #
134
135     popt, _ = curve_fit(funk_üld, rõhud_x_kohandatud,
        energ_tihedus_x_kohandatud, bounds=(0,ül_piir))
136     A_R, A_MR = popt
137
138     A_R_tgl = A_R/(kordaja**(1-aste_R))
139
140     A_MR_tgl = A_MR/(kordaja**(1-aste_MR))

```

```

141
142     energtih_uus = funk_üld(rõhud_x, A_R_tglt,
143         A_MR_tglt)
144
145     plt.plot(rõhud_x, energ_tihedus_x, label="Rõhu ja
146         energiatiheduse seos")
147     plt.plot(rõhud_x, energtih_uus, label="Võrrandiga
148         leitud seos")
149
150     plt.xlabel('$p$ (m$^{-2}$)')
151     plt.ylabel(r'$\rho$ (m$^{-2}$)')
152
153     plt.legend(bbox_to_anchor=(0., 1.02, 1., .102), loc
154         ='lower left',
155         ncol=2, mode="expand", borderaxespad=0.)
156
157     plt.xscale('log')
158     plt.yscale('log')
159     plt.show()
160     #print(np.sqrt(np.diag(popt)))
161     print(A_R_tglt)
162     print(A_MR_tglt)
163
164 #Leiame valge kääbuse puhul kehtiva oleku üldvõrrandi
165 leidmine_uldv(energ_tihedus_vk,rõhud_vk, [1/
166     K_Relatiivne_vk, 1/K_Mitterel_vk], 3/4, 3/5,
167     8*10**(6), 1)
168
169 #Joonis 1
170
171 def olek_vk_üld(p, A_R, A_MR):
172     return A_R*np.power(p,3/4) + A_MR*np.power(p
173         ,3/5)
174
175
176

```

```

177 esitlus_konstant_rho = 1/((m_e**4)/(h**3))
178 #esitlus_konstant_rho
179
180
181
182 plt.plot( np.multiply(energ_tihedus_vk,
    esitlus_konstant_rho), np.multiply(rõhud_vk,
    esitlus_konstant_rho), label="Olekuvõrrand", color =
    'cyan', linewidth=3)
183 plt.plot( np.multiply(olek_R_vk(rõhud_vk),
    esitlus_konstant_rho), np.multiply(rõhud_vk,
    esitlus_konstant_rho), label=r"Relativistlik lähend
    $p = K_R \rho^{4/3}$", linestyle='dashed' ,color = '
    red')
184 plt.plot( np.multiply(olek_MR_vk(rõhud_vk),
    esitlus_konstant_rho), np.multiply(rõhud_vk,
    esitlus_konstant_rho), label=r"Mitte-relativistlik
    lähend $p = K_{MR} \rho^{5/3}$", linestyle='dashed',
    color = 'orange')
185 plt.plot( np.multiply(olek_vk_uld(rõhud_vk, 1/(1.08*
    K_Relatiivne_vk**(3/4)), 1/(K_Mitterel_vk**(3/5))),
    esitlus_konstant_rho), np.multiply(rõhud_vk,
    esitlus_konstant_rho), label=r"Lähend $\rho = A_R p
    ^{3/4} + A_{MR} p^{3/5}$", linestyle='dashed')
186
187 plt.xlabel(r'$p / \rho_0$ ')
188 plt.ylabel(r'$\rho / \rho_0$ ')
189
190
191 plt.xscale('log')
192 plt.yscale('log')
193
194 plt.legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1, 0.5))
195
196 plt.show()
197
198
199
200 viga = np.std((energ_tihedus_vk,olek_vk_uld(rõhud_vk,
    1/(1.08*K_Relatiivne_vk**(3/4)), 1/(K_Mitterel_vk
    *(3/5))))))
201 viga
202

```

```

203
204 #Neutrontähed
205
206 def rõhk_fn(x):
207     kordaja_dim = (m_n**4/(24*(mt.pi**2)*(h**3)))
208     valem = x*((2*x**2)-3)*((x**2 +1)**(1/2))+3* mt.
         asinh(x)
209     return kordaja_dim*valem
210
211 def energiatihedus_fn_MR(x):
212     valem = (((x*m_n)**3)*m_n*mu/(3*(mt.pi**2)*(h**3)))
213     return valem
214
215
216 def energiatihedus_fn_R(x):
217     kordaja_dim = (m_n**4/(8*(mt.pi**2)*(h**3)))
218     valem = (((2*(x**3))+x)*((x**2)+1)**(1/2))-mt.
         asinh(x))
219     return kordaja_dim*valem
220
221
222 #Fermi neutrontähe konstant K_MR
223 K_Mitterel_fn = ((h**2)*(mt.pi**(4/3))/(15*m_n))*((3/(
         m_n*mu))**(5/3))
224 print(K_Mitterel_fn)
225
226
227
228 def andmestiku_loome2(rõhk, energiatihedus_R,
         energiatihedus_MR):
229     x_max = 100
230     x_keskel = 1
231
232     vahe2 = (x_max-x_keskel)/1000
233     vahe1 = ((x_keskel)/1000)
234
235     x_väärtused_MR = []
236     energ_tihedus_MR = []
237     rõhud_MR = []
238
239
240     x_väärtused_R = []
241     energ_tihedus_R = []

```

```

242     rõhud_R = []
243
244     x_väärtused = []
245     energ_tihedus = []
246     rõhud = []
247
248     x = 0+vahe1
249
250     while x < x_keskel:
251         energ_tihedus_MR.append(energiatihedus_MR(x))
252         rõhud_MR.append(rõhk(x))
253         x_väärtused_MR.append(x)
254         x *= 2
255         #x += vahe1
256
257     x = x_keskel+vahe2
258     while x < x_max:
259         energ_tihedus_R.append(energiatihedus_R(x))
260         rõhud_R.append(rõhk(x))
261         x_väärtused_R.append(x)
262         x += vahe2
263
264     x_väärtused = x_väärtused_MR + x_väärtused_R
265     energ_tihedus = energ_tihedus_MR + energ_tihedus_R
266     rõhud = rõhud_MR + rõhud_R
267
268     # Teeme joonise, et visualiseerida rõhu ja energia
269     tiheduse väärtusi
270
271     plt.plot( rõhud, energ_tihedus, label="$p$ ja $\epsilon$
272             omavaheline seos ")
273
274     plt.xlabel('$p$ (1/m$^2$)')
275     plt.ylabel(r'$\rho$ (1/m$^2$)')
276
277     plt.legend(bbox_to_anchor=(0., 1.02, 1., .102), loc
278             = 'lower left',
279             ncol=2, mode="expand", borderaxespad=0.)
280
281     plt.show()
282
283     return([x_väärtused_MR, x_väärtused_R,
284            energ_tihedus_MR, energ_tihedus_R, rõhud_MR, rõ

```

```

        hud_R])
281
282
283 andmed_fn = andmestiku_loome2(rõhk_fn,
        energiatihedus_fn_R, energiatihedus_fn_MR)
284
285
286 rõhud_fn_R = andmed_fn[5]
287 rõhud_fn_MR = andmed_fn[4]
288 energ_tihedus_fn_R = andmed_fn[3]
289 energ_tihedus_fn_MR = andmed_fn[2]
290 k_väärtused_fn_R = andmed_fn[1]
291 k_väärtused_fn_MR = andmed_fn[0]
292
293
294 rõhud_fn = rõhud_fn_MR + rõhud_fn_R
295 energ_tihedus_fn = energ_tihedus_fn_MR +
        energ_tihedus_fn_R
296 k_väärtused_fn = k_väärtused_fn_MR + k_väärtused_fn_R
297
298
299 def olek_R_fn(p):
300     return np.multiply(p,3)
301
302
303 def olek_MR_fn(p):
304     return (1/(np.power(K_Mitterel_fn, 3/5)))*(np.power
        (p,(3/5)))
305
306
307
308 leidmine_uldv(energ_tihedus_fn,rõhud_fn, [3, 1/
        K_Mitterel_fn], 1, 3/5, 8*10**(6), 1)
309
310
311
312 def olek_fn_üld(p, A_R, A_MR):
313     return A_R*np.power(p,1) + A_MR*np.power(p,3/5)
314
315
316 viga_n = np.std((energ_tihedus_fn,olek_fn_üld(rõhud_fn,
        0.99, 0.0017)))
317 viga_n

```

```

318
319 plt.plot( np.multiply(energ_tihedus_fn,
    esitlus_konstant_rho), np.multiply(rõhud_fn,
    esitlus_konstant_rho), label="Olekuvõrrand", color =
    'cyan', linewidth=3)
320 plt.plot( np.multiply(olek_R_fn(rõhud_fn),
    esitlus_konstant_rho), np.multiply(rõhud_fn,
    esitlus_konstant_rho), label=r"Relativistlik lähend
    $p = \frac{1}{3} \rho$", linestyle='dashed', color =
    'red')
321 plt.plot( np.multiply(olek_MR_fn(rõhud_fn),
    esitlus_konstant_rho), np.multiply(rõhud_fn,
    esitlus_konstant_rho), label=r"Mitte-relativistlik
    lähend $p = K_{MR} \rho^{5/3}$", linestyle='dashed',
    color = 'orange')
322 plt.plot( np.multiply(olek_fn_üld(rõhud_fn, 0.99,
    0.0017), esitlus_konstant_rho), np.multiply(rõhud_fn
    , esitlus_konstant_rho), label=r"Lähend $\rho = A_R
    p + A_{MR} p^{3/5}$", linestyle='dashed')
323
324 plt.xlabel(r'$p / \rho_0$ ')
325 plt.ylabel(r'$\rho / \rho_0$ ')
326
327 #plt.legend(bbox_to_anchor=(0., 1.02, 1., .102), loc='
    lower left',
328 #           ncol=2, mode="expand", borderaxespas=0.)
329
330
331 #plt.legend(loc = 'upper left')
332 plt.xscale('log')
333 plt.yscale('log')
334
335 #plt.savefig('VK_olek.png')
336 plt.legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1, 0.5))
337 plt.show()

```

Pythoni kood massiprofilide ja massi-raadiuse kõverate leidmiseks ja neile vastavate jooniste tegemiseks:

Koodijupp 3: Pythoni kood massiprofilide ja massi-raadiuse kõverate leidmiseks

```

1 import math as mt
2 import numpy as np

```



```

3 import matplotlib.pyplot as plt
4 #import numba
5 import sympy as sy
6
7 from scipy.integrate import odeint
8 import matplotlib.pyplot as plt
9
10
11 def lahendus_protsess(p0, olek, dr, joonistamiseks=
    False):
12     #Alustuseks
13
14     r = 0
15     rohk = p0
16     mass = 0
17     r_eelmine = 0
18
19     if joonistamiseks == True:
20         r_list = []
21         M_list = []
22
23
24     while True:
25         dz = [rohk, mass]
26         tuletised = lahendamine(dz,r, olek)
27         rohk_uus = rohk + (r-r_eelmine)*tuletised[0]
28
29         #print(rohk_uus)
30         if rohk_uus < 0:
31             if joonistamiseks == True:
32                 return([rohk, mass, r, r_list, M_list])
33                 return([rohk, mass, r])
34
35
36         rohk = rohk_uus
37         mass = mass+ (r-r_eelmine)*tuletised[1]
38         #print(mass)
39
40         r_eelmine = r
41
42         if joonistamiseks == True:
43             r_list.append(r/1000)
44             M_list.append(mass/((7.4*(10**(-28))))

```

```

45         *(1.989*(10**(30))))
46         r += dr
47
48
49
50
51
52
53 def lahendamine(z,r, olek):
54     #def massi_leidmine(r_x):
55     #     return (r_x**2)*(olek(p))
56
57     #v = sy.Symbol("v")
58     #M = 4*mt.pi*(sy.integrate(massi_leidmine(v), (v,
59         0, r)))
60
61     p = z[0]
62     M = z[1]
63
64     if M == 0:
65         dpdr = 0
66     else:
67         dpdr = (-olek(p)*M/(r**2))*(1+(p/olek(p)))
68             *(1+(4*mt.pi*(r**3) * p) / M)/(1-((2*M)/r))
69         #print((-olek(p)*M*G/(r**2))*(1+(p/olek(p)))
70             *(1+(4*mt.pi*(r**3) * p) / M)/(1-((2*M*G)/r)
71             ))
72         if dpdr >= 0:
73             dpdr = (-olek(p)*M/(r**2))
74         #print(dpdr)
75         dMdr = 4*mt.pi*(r**2)*olek(p)
76
77
78     dzdr = [dpdr, dMdr]
79     return dzdr
80
81 #Valge kääbus
82 def vk_R_olekuvõrrand(p):
83     enrg = (1/(60.7**(3/4)))*(p**(3/4))
84     return enrg

```

```

83
84
85
86 def vk_MR_olekuvõrrand(p):
87     enrg = (1/(42957062**(3/5)))*(p**(3/5))
88     return enrg
89
90
91 def vk_üld_olekuvõrrand(p):
92     enrg = (1/(1.08*(60.7**(3/4))))*(p**(3/4)) +
93           (1/(42957062**(3/5)))*(p**(3/5))
94     return enrg
95
96
97
98 #Fermi neutrontäht
99 def fn_MR_olekuvõrrand(p):
100     enrg = (1/(23548.7**(3/5)))*(p**(3/5))
101     return enrg
102
103
104 def fn_üld_olekuvõrrand(p):
105     enrg = 0.99*p + 0.0017*(p**(3/5))
106     return enrg
107
108
109
110 #Valge kääbuse massiprofiilid
111
112 #Relativistlikud
113 näitajad_vk_R_15 = lahendus_protsess(10**(-15),
114     vk_R_olekuvõrrand, 10, joonistamiseks=True)
115 näitajad_vk_R_16 = lahendus_protsess(10**(-16),
116     vk_R_olekuvõrrand, 10, joonistamiseks=True)
117 näitajad_vk_R_17 = lahendus_protsess(10**(-17),
118     vk_R_olekuvõrrand, 10, joonistamiseks=True)
119
120 plt.plot(näitajad_vk_R_15[3], näitajad_vk_R_15[4],
121     label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-15}$ (
122     Relativistlik)")
123 plt.plot(näitajad_vk_R_16[3], näitajad_vk_R_16[4],
124     label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-16}$ (

```

```

    Relativistlik)")
119 plt.plot(näitajad_vk_R_17[3], näitajad_vk_R_17[4],
    label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-17}$ (
    Relativistlik)")
120
121 #Mitte-relativistlikud
122 näitajad_vk_MR_21 = lahendus_protsess(10**(-21),
    vk_MR_olekuvõrrand, 100, joonistamiseks=True)
123 näitajad_vk_MR_22 = lahendus_protsess(10**(-22),
    vk_MR_olekuvõrrand, 100, joonistamiseks=True)
124 näitajad_vk_MR_23 = lahendus_protsess(10**(-23),
    vk_MR_olekuvõrrand, 100, joonistamiseks=True)
125
126 plt.plot(näitajad_vk_MR_21[3], näitajad_vk_MR_21[4],
    label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-21}$ (Mitte-
    relativistlik)")
127 plt.plot(näitajad_vk_MR_22[3], näitajad_vk_MR_22[4],
    label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-22}$ (Mitte-
    relativistlik)")
128 plt.plot(näitajad_vk_MR_23[3], näitajad_vk_MR_23[4],
    label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-23}$ (Mitte-
    relativistlik)")
129
130
131 # ldv õrrand
132 näitajad_vk_üld_21 = lahendus_protsess(10**(-21), vk_ü
    ld_olekuvõrrand, 10, joonistamiseks=True)
133 näitajad_vk_üld_20 = lahendus_protsess(10**(-20), vk_ü
    ld_olekuvõrrand, 10, joonistamiseks=True)
134 näitajad_vk_üld_19 = lahendus_protsess(10**(-19), vk_ü
    ld_olekuvõrrand, 10, joonistamiseks=True)
135
136 plt.plot(näitajad_vk_üld_21[3], näitajad_vk_üld_21[4],
    label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-21}$ ( ldl ä
    hend)")
137 plt.plot(näitajad_vk_üld_20[3], näitajad_vk_üld_20[4],
    label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-20}$ ( ldl ä
    hend)")
138 plt.plot(näitajad_vk_üld_19[3], näitajad_vk_üld_19[4],
    label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-19}$ ( ldl ä
    hend)")
139
140

```

```

141
142 plt.xlabel("R (km)")
143 plt.ylabel("M (M$_\odot$)")
144
145 #plt.legend(bbox_to_anchor=(0., 1.02, 1., .102), loc='
    lower left',
146 #           ncol=2, mode="expand", borderaxespad=0.)
147 #plt.legend(loc='lower right')
148
149 plt.legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1, 0.5))
150 plt.show()
151
152
153
154 def massiraadiusekõverad(p_rõhud, olekuvõrrand, dr):
155     massiraadiused = []
156     for rõhk in p_rõhud:
157         massiraadiused.append(lahendus_protsess(rõhk,
158             olekuvõrrand, dr))
159
160     massid = []
161     raadiused = []
162     for masrad in massiraadiused:
163         massid.append((masrad[1])/((7.4*(10**(-28)))
164             *(1.989*(10**(30)))))
165         raadiused.append((masrad[2])/1000)
166
167     return [massid, raadiused]
168
169
170
171
172
173 def rõhkudevahemik(p_alg, p_lõpp, kordaja):
174     p_vahemik = p_lõpp-p_alg
175     p_vahe = p_vahemik/100
176
177     p_praegu = p_alg
178
179     p_väärtused = []
180     while p_praegu <= p_lõpp:

```

```

181         p_väärtused.append(p_praegu)
182         p_praegu *= kordaja
183
184     return p_väärtused
185
186
187
188 #Massiraadiuste joonistamine
189
190
191
192 #Valge kääbus
193 Valgekääbus_massiraadiused_R = massiraadiusekõverad(rõ
    hkudevahemik(10**(-21), 10**(-6), 4), vk_R_olekuvõ
    rrand, 10)
194 Valgekääbus_massiraadiused_üld = massiraadiusekõverad(
    rõhkudevahemik(10**(-25), 10**(-6), 4), vk_ü
    ld_olekuvõrrand, 10)
195
196 plt.plot(Valgekääbus_massiraadiused_üld[1], Valgekää
    bus_massiraadiused_üld[0], label = "Valge kääbus
    massi-raadiuse kõver (ldl ähend)", linestyle='
    dashed')
197 plt.plot(Valgekääbus_massiraadiused_R[1], Valgekää
    bus_massiraadiused_R[0], label = "Valge kääbus massi
    -raadiuse kõver (Relativistlik)")
198
199
200 Valgekääbus_massiraadiused_MR = massiraadiusekõverad(r
    õhkudevahemik(10**(-25), 5*10**(-21), 4),
    vk_MR_olekuvõrrand, 100)
201 plt.plot(Valgekääbus_massiraadiused_MR[1], Valgekää
    bus_massiraadiused_MR[0], label = "Valge kääbus
    massi-raadiuse kõver (Mitte-relativistlik)")
202
203
204 plt.xlabel("R (km)")
205 plt.ylabel("M (M$_{\odot}$)")
206 #plt.title("Massi-raadiuse kõverad valge kääbus", y=
    1.08)
207 #plt.legend(bbox_to_anchor=(0., 1.02, 1., .102), loc='
    lower left',
208 #           ncol=2, mode="expand", borderaxespad=0.)

```

```

209 #plt.legend(loc='upper right')
210
211 plt.legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1, 0.5))
212 plt.xscale('log')
213 #plt.yscale('log')
214
215 plt.show()
216
217
218
219 #Täpsem vaade valge kääbuse Relativistliku võrrandi
    massiraadiuse kõverale
220
221
222 Valgekääbus_massiraadiused_R = massiraadiusekõverad(rõ
    hkudevahemik(10**(-21), 10**(-6), 4), vk_R_olekuvõ
    rrand, 10)
223 Valgekääbus_massiraadiused_üld = massiraadiusekõverad(
    rõhkudevahemik(10**(-25), 10**(-6), 4), vk_ü
    ld_olekuvõrrand, 10)
224
225 plt.plot(Valgekääbus_massiraadiused_üld[1], Valgekää
    bus_massiraadiused_üld[0], label = "Valge kääbus
    massi-raadiuse kõver (ldv õrrand)", linestyle='
    dashed')
226 plt.plot(Valgekääbus_massiraadiused_R[1], Valgekää
    bus_massiraadiused_R[0], label = "Valge kääbus massi
    -raadiuse kõver (Relativistlik)")
227
228
229 Valgekääbus_massiraadiused_MR = massiraadiusekõverad(r
    õhkudevahemik(10**(-25), 5*10**(-21), 4),
    vk_MR_olekuvõrrand, 100)
230 plt.plot(Valgekääbus_massiraadiused_MR[1], Valgekää
    bus_massiraadiused_MR[0], label = "Valge kääbus
    massi-raadiuse kõver (Mitte-relativistlik)",
    linestyle='dashed')
231
232
233 plt.xlabel("R (km)")
234 plt.ylabel("M (M$_{\odot}$)")
235 plt.title("Massi-raadiuse kõverad valge kääbus", y=
    1.08)

```

```

236 #plt.legend(bbox_to_anchor=(0., 1.02, 1., .102), loc='
      lower left',
237 #          ncol=2, mode="expand", borderaxespad=0.)
238 #plt.legend(loc='upper right')
239
240 plt.legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1, 0.5))
241 plt.xscale('log')
242 #plt.yscale('log')
243 plt.ylim([1.445, 1.465])
244
245 plt.show()
246
247
248
249 #Fermi neutrontäht
250
251 #Mitte-relativistlik
252 näitajad_fn_MR_9 = lahendus_protsess(10**(-9),
      fn_MR_olekuvõrrand, 1, joonistamiseks=True)
253 näitajad_fn_MR_10 = lahendus_protsess(10**(-10),
      fn_MR_olekuvõrrand, 1, joonistamiseks=True)
254 näitajad_fn_MR_11 = lahendus_protsess(10**(-11),
      fn_MR_olekuvõrrand, 1, joonistamiseks=True)
255
256
257 plt.plot(näitajad_fn_MR_9[3], näitajad_fn_MR_9[4],
      label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-9}$ (Mitte-
      relatiivne)")
258 plt.plot(näitajad_fn_MR_10[3], näitajad_fn_MR_10[4],
      label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-10}$ (Mitte-
      relatiivne)")
259 plt.plot(näitajad_fn_MR_11[3], näitajad_fn_MR_11[4],
      label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-11}$ (Mitte-
      relatiivne)")
260
261 # ldv õrrand
262
263 näitajad_fn_üld_9 = lahendus_protsess(10**(-9), fn_ü
      ld_olekuvõrrand, 0.1, joonistamiseks=True)
264 näitajad_fn_üld_10 = lahendus_protsess(10**(-10), fn_ü
      ld_olekuvõrrand, 0.1, joonistamiseks=True)
265 näitajad_fn_üld_11 = lahendus_protsess(10**(-11), fn_ü
      ld_olekuvõrrand, 0.1, joonistamiseks=True)

```



```

266
267
268 plt.plot(näitajad_fn_üld_9[3], näitajad_fn_üld_9[4],
          label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-9}$ ( ldl ä
          hend)")
269 plt.plot(näitajad_fn_üld_10[3], näitajad_fn_üld_10[4],
          label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-10}$ ( ldl ä
          hend)")
270 plt.plot(näitajad_fn_üld_11[3], näitajad_fn_üld_11[4],
          label = "Tsentraalne rõhk $p_0 = 10^{-11}$ ( ldl ä
          hend)")
271
272 plt.xlabel("R (km)")
273 plt.ylabel("M (M$_{\odot}$)")
274 plt.legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1, 0.5))
275 #plt.title("Massi-raadiuse profiilid neutrontähes (
          Mitte-relativistlik)")
276 #plt.legend(bbox_to_anchor=(0., 1.02, 1., .102), loc='
          lower left',
277 #           ncol=2, mode="expand", borderaxespad=0.)
278
279 plt.show()
280
281
282 #Neutrontäht
283
284 Fermineutron_massiraadiused_MR = massiraadiusekõverad(r
          õhkudevahemik(10**(-16), 1.02*10**(-7), 4),
          fn_MR_olekuvõrrand, 1)
285 Fermineutron_massiraadiused_üld = massiraadiusekõverad
          (rõhkudevahemik(10**(-14), 10**(-2), 4), fn_ü
          ld_olekuvõrrand, 1)
286
287
288 plt.plot(Fermineutron_massiraadiused_üld[1],
          Fermineutron_massiraadiused_üld[0], label = "
          Neutrontähe massi-raadiuse kõver ( ldl ähend)")
289
290
291 plt.plot(Fermineutron_massiraadiused_MR[1],
          Fermineutron_massiraadiused_MR[0], label = "Neutront
          ähe massi-raadiuse kõver (Mitte-relativistlik)")
292

```

```
293
294 plt.xlabel("R (km)")
295 plt.ylabel("M (M$_\odot$)")
296 #plt.title("Massi-raadiuse kõverad neutrontäht", y=
    1.08)
297 #plt.legend(bbox_to_anchor=(0., 1.02, 1., .102), loc='
    lower left',
298 #           ncol=2, mode="expand", borderaxespad=0.)
299 #plt.legend(loc='upper right')
300 plt.legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1, 0.5))
301 #plt.xscale('log')
302 #plt.yscale('log')
303 plt.show()
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Jaanus Tomson,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose Tolmani–Oppenheimeri–Volkovi võrrandi numbriline uurimine, mille juhendajad on Hardi Veermäe ja Urve Kangro, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Autor Jaanus Tomson
kuupäev 18.08.2022