ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Л. А. ЭЙНАСТО
АСПИРАНТ

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНОЙ ТОЧКИ

АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ
ДОКТОР ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
ПРОФЕССОР Х. Я. ЯАКСОН

ТАРТУ 1954

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Л. А. ЭЙНАСТО
АСПИРАНТ

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ИРРЕГУЛЯРНОЙ ТОЧКИ

АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ
ДОКТОР ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
ПРОФЕССОР Х. Я. ЯАКСОН

ТАРТУ 1954

конечное число членов с отрицательными показателями степеней z, коэффициенты которых можно легко найти рекуррентным способом. Формальные решения подробно исследованы К. Я. Латышевой [4]. Основные результаты работ К. Я. Латышевой и X. Коха кратко изложены в первой главе реферируемой диссертации.

В последнее время Л. В. Канторовичем разработана теория приближённого решения линейных функциональных уравнений [5], [6]. Так как интересующая нас бесконечная система уравнений (4) является частным случаем исследованных Канторовичем уравнений, то это позволяет приступить к нахождению действительного решения (3) дифференциального уравнения (1). Для практического применения метода Канторовича необходимо только определить численное значение фигурирующего в бесконечной системе уравнений (4) величины ϱ.

В настоящей диссертации сделана попытка дать способ вычисления показателя ϱ. При этом применяется метод аналитического продолжения, использованный Фуксом для теоретического выяснения вида решения уравнения (1). Как известно, при аналитическом продолжении вычисленного в некоторой обыкновенной точке A решения $\mathbf{w}_A(z)$ вокруг особой точки $z=0$, решение подвергается линейному преобразованию C, которое называется фундаментальным преобразованием. Характеристическое уравнение матрицы C, $C-\lambda E=0$, называется фундаментальным уравнением. Показатель ϱ связана с решением фундаментального уравнения λ соотношением $2\pi i\varrho=\ln\lambda$.

Составление фундаментального уравнения рассматривается во второй главе диссертации. Для этого уравнение (1) решается в m обыкновенных точках A_j, находящихся на единичной окружности с центром в особой точке $z=0$, с координатами

$$a_j=e^{\frac{j-1}{m}2\pi i} \quad (j=1,2,\ldots,m), \tag{5}$$

причем m четное число ($m=2m_1$). Решение уравнения (1) в этих точках выражается рядами Тейлора $\mathbf{w}_{A_j}(z)$. Коэффициенты этих рядов вычисляются по рекуррентным формулам, при этом можно составить схемы, удобные для применения вычислительных машин. Если начальные условия в каждой точке фиксировать одинаковыми, то $\mathbf{w}_{A_{m_1+1+j}}=\mathbf{w}_{A_{m_1+1-j}}$ $(j=1,2,\ldots,m_1-1)$.

Следовательно, достаточно вычислить решение уравнения (1) лишь в m_1+1 точках. Решения $\mathbf{w}_{A_j}(z)$ и $\mathbf{w}_{A_{j+1}}(z)$ в общей части их областей сходимости связаны между собой линейным соотношением:

$$C_{j-1}\,\mathbf{w}_{A_j}^{(k)}(z) = C_j\,\mathbf{w}_{A_{j+1}}^{(k)}(z) \quad (j = 1, 2, \ldots, m;\ C_0 = 1). \tag{6}$$
$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$

Матрица C_m представляет собой, очевидно, искомое фундаментальное преобразование C. Для вычисления ее необходимо последовательно вычислить все матрицы $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}, C_m$. Эти матрицы могут быть найдены по формуле (6), вычисляя численные значения решений $\mathbf{w}_{A_j}(z)$ и $\mathbf{w}_{A_{j+1}}(z)$ в некоторых точках $z = b_j$, лежащих в общей части областей сходимости решений. Для практических вычислений координаты этих точек удобно взять следующими:

$$b_j = \cos\frac{\pi}{m}\, e^{\frac{\pi i}{m}} a_j. \tag{7}$$

Уравнения

$$C_j\,\mathbf{w}_{A_{j+1}}^{(k)}(b_j) = C_{j-1}\,\mathbf{w}_{A_j}^{(k)}(b_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, m;\ C_0 = 1) \tag{6a}$$
$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$

представляют собой относительно действительных и мнимых частей элементов матрицы C_j линейные неоднородные алгебраические системы $2n^2$ уравнений с $2n^2$ неизвестными. Эти системы разлагаются на n самостоятельных систем с $2n$ уравнениями, которые отличаются друг от друга только своими свободными членами.

Чем больше число m, тем быстрее ряды $\mathbf{w}_{A_j}^{(k)}(b_j)$ сходятся, но с другой стороны, тем больше и число этих рядов, а также число подлежащих решению систем уравнений. Целесообразно принимать для m значение 6.

В последней, третьей главе применяется развитая Л. В. Канторовичем теория функциональных уравнений для решения систем уравнений (4).

В своей работе [5] Л. В. Канторович отметил, что исследованная Кохом [3] система принадлежит к типу квазирегулярной системы уравнений, которая решается способом редукции. В представленной диссертации (§ 5) этим путем решается система (4) и даются формулы для оценки ошибок, допущенных при этом. Эти оценки принимают более простой вид, когда коэффициенты дифференциального уравнения (1) $P_r(z)$ являются многочленами.

В конце диссертации кратко рассматриваются некоторые частные случаи решений (3), а именно: регулярные решения в иррегулярной точке (§ 6), и случай, когда коэффициенты ряда (3) выражаются через Бесселевые функции (§ 7). Последний вопрос был рассмотрен В. И. Крыловым [7] в случае регулярных решений. Для функций Бесселя J_k получена следующая формула:

$$e^{-\frac{b_{-1}}{z}-b_1 z}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k z^k, \tag{8}$$

где

$$g_k = i^k(-b_1)^{\frac{k}{2}}(b_{-1})^{-\frac{k}{2}} J_k\left(2\sqrt{b_1 b_{-1}}\right) \tag{9}$$

и b_1, b_{-1} — произвольные постоянные числа. Формула (8) является более общей, чем известная формула

$$e^{\frac{b}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(b) z^k. \tag{10}$$

Литература

1. L. Fuchs, Crelle J. **66**, (1866).
2. H. v. Koch, Acta Mathematica **15**, (1891).
3. H. v. Koch, Acta Mathematica **16**, (1892—93).
4. К. Я. Латышева, Автореферат диссертации (1952).
5. Л. В. Канторович, Ученые записки ЛГУ № 17, т. **III**, (1937).
6. Л. В. Канторович, Успехи матем. наук, т. **III**, 6, (1948).
7. В. И. Крылов, Матем. сборник, т. **XXXVI**, 3—4, (1929).

Hans Heidemanni nim. trükik. Tartu, Vallikraavi 4. 1954. 3823. 100. MB-19606.

Бесплатно