Nõukogude Kool 1978 nr.2, 134–137

HULGA-TEOORIA MÕISTETE RAKENDUSI FÜÜSIKAS

Hannes Tammet
TPedI füüsikakateedri juhataja

Sissejuhatus

Nagu hästi teada, on matemaatika füüsika jaoks tähtsamaid vahendeid ja füüsika matemaatika jaoks probleemide allikas ning esimene rakendusala. Nii võib öelda matemaatika ja füüsika kui teaduste kohta. Aastaid tagasivõis sama öelda ka kooli õppeainete kohta. Nüüd on aga matemaatika- ja füüsikaõpetus teineteisest eemaldunud ning nende vastastikune toetus nõrgenenud. Matemaatikaõpetaja ei leia matemaatikakursuses kesksele kohale tõusnud hulgateoreetilistele mõistetele rakendusi füüsikas. Seetõttu jäävad matemaatikamõisted abstraktseteks ja nende omandamine on raske. Õpilane tuleb matemaatikatunnist füüsikatundi tühjade kätega. Küsime: kas matemaatikaõpetuse ja füüsikaõpetuse vastastikune eemaldumine on paratamatu või on see vaid kasvuraskus? Matemaatikaõpetuse reform väärib kriitikat. See oleks aga ühekülgne, kui me ei otsiks võimalikke sidepunkte ainete vahel.

Järgnevas vaadeldakse matemaatikakursuse elementide mõningaid rakendusi füüsika algmõistete käsitlemisel. Keskseks probleemiks on valitud füüsikalise suuruse ja mõõtmise mõistete analüüs. Kuigi esitatavat materjali ei sobi programmilistes koolikursustes otseselt kasutada, loodame, et nii matemaatika- kui ka füüsikaõpetaja leiab siit mõtteid iseenese ja õpilaste jaoks.

Loodus ja mudel

Objektiivselt eksisteeriv loodus on ühtne ning lõpmata keeruline igas ilmingus. Meenutagem Lenini näidet: elektron on samavõrd ammendamatu kui aatom. Füüsikaline kirjeldus eraldab loodusest mingi osa ning kasutab lõpliku keerukusega formaalseid skeeme. Näiteks kirjeldab füüsik klotsi demonstratsioonilaual kui risttahukat. Risttahukas on matemaatiline objekt, seega ideaalne. Kujund, mille tahkude paralleelsus on tuhandiku millimeetri võrra rikutud, pole risttahukas. Klots laual pole kindlasti matemaatiline risttahukas. Me ei suuda leida looduses ühtki matemaatilist risttahukat ning võime öelda, et risttahukaid ei eksisteeri looduses üldse. Risttahukas on vaid klotsi abstraktne mudel. Igapäevane väljend "see klots on risttahukas" on tinglik ja tähendab vaid seda, et klotsi mudeliks sobib risttahukas. Mudel peegeldab looduse objektiivseid omadusi. Näiteks kera ei sobi klotsi mudeliks ja see väide sisaldab objektiivset tõde looduse kohta.

Lepime kokku nimetada kõiki füüsikale huvi pakkuvaid looduse osi (esemeid. nähtusi) reaalseteks objektideks. Vaatleme loodust kui reaalsete objektide hulka P'. Füüsika uurib hulga P' struktuuri, võrdleb katse teel reaalseid objekte omavahel. Seejuures kirjeldab füüsik hulga P' elemente matemaatiliste mudelite abil. Abstraktsete objektide hulk P" koostatakse koos loodust modelleeriva "kanoonilise" kujutisega P'→P". Füüsikaliste uurimuste alusel defineeritakse hulgas P" struktuur, mida võib vaadelda kui hulgast P' "indutseeritud struktuuri.

Füüsikaraamatuid lugedes täheldame terminite kahemõttelisust: sama sõnaga nimetatakse nii reaalset kui ka sellega vastavusse seatud abstraktset objekti. Niisugune pruuk on ökonoomne, võimaldades ühe lausega esitada kaht väidet, üht looduse, teist abstraktse mudeli kohta. Ka järgnevas kasutatakse duaalset terminoloogiat. Termin "objekt" tähistab kas reaalset või abstraktset objekti, sümbol P aga kas hulka P' või P". Kirjutades P asemel P' võib teksti tõlgendada kui sisulisi väiteid looduse kohta, kirjutades P" aga kui matemaatikat.

Modelleerimise üldpõhimõtte puudulik mõistmine metafüüsilises maailmakäsitluses viis füüsika sajandivahetusel kriisiolukorrani. Kui õpilane ei mõista looduse ja mudeli vahekorda, kordab ta individuaalses arengus sama kriisi. Kriis algab keskkoolis ja saavutab haripunkti kõrgkoolis, kui asutakse järjekindlalt õppima kvantteooriat ja relatiivsusteooriat.

Füüsikalise suuruse mõiste

Ütleme, et seos hulgas P on sisukas siis, kui seos on defineeritud looduses realiseeritava eeskirja kaudu. Vaatleme sisukaid binaarseid seoseid ja nende omadusi.

N ä i d e 1. Seos, mis ühendab neid objekte, mille füüsilisel ühendamisel tekib keemiline reaktsioon, ei ole ilmselt transitiivne. Kui aga seose graafik moodustada objektipaaridest, mille elemendid tasakaalustavad teineteist kangkaaludel, saame transitiivse seose. Transitiivsuse omadust või selle puudumist on võimalik kontrollida vaid katse abil, see on sisukas omadus.

Ühtaegu refleksiivset, sümmeetrilist ja transitiivset seost nimetatakse teatavasti ekvivalentsiseoseks. Füüsikaline suurus on sisukas ekvivalentsiseos looduses. See on kõige üldisem definitsioon. Enamasti on füüsikalistel suurustel ka täiendavaid omadusi.

Konkreetse füüsikalise suuruse defineerimisel vaadeldakse tavaliselt mingit looduse osahulka.

N ä i d e 2. Vaatleme jäikade varraste hulka ja moodustame graafiku vardapaaridest, mida on võimalik niiviisi kõrvuti seada, et nii ühed kui teised otsad langevad kokku. Vaadeldav seos osutub katselisel kontrollimisel ekvivalentsiseoseks, vastavat füüsikalist suurust nimetatakse pikkuseks.

N ä i d e 3. Samas varraste hulgas võib defineerida teise ekvivalentsiseose, valides graafikusse objektipaarid, mille elemendid tasakaalustavad teineteist raskuskangkaalul. Niiviisi defineeritakse raske mass.

N ä i d e 4. Inertskangkaalu konstruktsioon on sama mis raskuskangkaalul. Inertskangkaalu abil võrreldakse objekte kaalutus olekus, tõmmates kaalu tugiprisma kaudu kiirendatult liikuma. Asendades eelmises näites raskuskangkaalu inertskangkaaluga, saame inertse massi definitsiooni.

Näited 2...4 demonstreerivad, kuidas üht ja sama osahulka vaadeldes defineeritakse erinevaid ekvivalentsiseoseid ja kuidas definitsioonid avavad erinevuse standardses koolikursuses raskelt eristatavate mõistete (raske mass ja inertne mass) vahel.

Öeldakse, et füüsikalisel suurusel A on kahe ekvivalentse objekti korral võrdsed ja kahe mitteekvivalentse objekti korral mittevõrdsed väärtused. Seega on füüsikalise suuruse mingi objektiga esindatud väärtus omane parajasti ühele ekvivalentsiklassile hulgas P. Niiviisi võib füüsikalise suuruse väärtuse mõiste siduda ekvivalentsiklassi mõistega. Füüsikalise suuruse väärtuste hulgana vaatleme faktorhulka $P_A = P/A$.

Füüsikalise suuruse väärtus eksisteerib looduses. Väärtusele viitamiseks seatakse väärtusega vastavusse väärtuse nimi. Funktsiooni, mis seab igale väärtusele vastavusse nime, nimetatakse füüsikalise suuruse mõõtskaalaks. Kui nimede hulka tähistada sümboliga N, siis mõõtskaala graafik on hulga $P_A \times N$ osahulk.

Mõõtmise käsitlus

Mõõtmine on füüsikalise suuruse väärtuse nime määramine objekti järgi. Mõõtmist teostatakse objektide võrdlemise teel. Mõõtmise algoritm sõltub mõõtskaala struktuurist.

Ainult ekvivalentsiseaduse abil kirjeldatud füüsikalise suuruse mõõtskaalat nimetatakse nimiskaalaks ehk nominaalskaalaks.

N ä i d e 5. Vaatleme elektriliselt laetud kehade hulka ja nimetame kaht keha ekvivalentseteks, kui nad mehaaniliste sidemete vahenduseta tõukavad teineteist. Niiviisi defineeritud suurus on laengu polaarsus. Väärtuste hulk koosneb vaid kahest elemendist, millele seatakse vastavusse nimed + ja –. Kirjeldatud mõõtskaala on nimiskaala.

Füüsikas on objektide võrdlemise võimalused peaaegu alati rikkamad, mis võimaldab kasutada täiuslikumaid mõõtskaalasid.

Seost, mis on refleksiivne ja transitiivne, kuid pole sümmeetriline, nimetatakse eeljärjestuseks. Termineid *eeljärjestus* ja *järjestus* kasutame Bourbaki mõttes. Olgu hulgas P kirjeldatud sisukas eeljärjestus B. Eraldame selle graafikust lisatingimust $B(p_1, p_2) \wedge B(p_2, p_1)$ rahuldava osahulga. Selles osahulgas B_E on rahuldatud ka sümmeetria aksioom. Niiviisi võimaldab eeljärjestus defineerida ekvivalentsiseose B_E ning vastava füüsikalise suuruse, mida nimetame järjestatud füüsikaliseks suuruseks.

N ä i d e 6. Eespool vaatlesime kaalumist kui võrdlemist, kus taotletakse otsust "võrdne-mittevõrdne". Nüüd vaatleme võrdlemist, kus taotletakse otsust "raskem-mitteraskem", see võrdlusprotseduur sisaldab varemvaadeldut kui erijuhtu. Eeljärjestuse seos hõlbustab mõõtmist. Varem oli tarvis kõik objektid süsteemitult läbi vaadata, nüüd saab tööd korraldada otstarbekamalt.

Järjestatud suuruse väärtuste hulgaks on faktorhulk $P_B = P/B_E$. Eeljärjestus B indutseerib väärtuste hulgas assotsieeritud seose B_o, millel on omadus

$$B_o(v_1, v_2) \wedge (v_2, v_1) \rightarrow v_1 = v_2$$

ja mis osutub järjestuseks. Kui objektide hulk on eeljärjestatud, on väärtuste hulk järjestatud.

Järjestatud suuruse nimede hulgaks valitakse seesmiselt järjestatud hulk, näiteks mingi arvuhulk. Järjestatud suuruse skaalaks valitakse monotoonne funktsioon $P_B \rightarrow N$.

N ä i d e 7. Mineraalide kõvaduse mõõtmisel kasutatakse kümnepallilist Mohsi skaalat. Üks mineraal on teisest kõvem, kui ta teist kriimustab. Kaks mineraali, mis kumbki teineteist kriimustavad, on võrdkõvad. Niiviisi eraldatakse eeljärjestusest ekvivalents. Võrdkõvad võivad olla ka erinevad mineraalid, seega pole esimene vaadeldud seos mineraalid hulgas järjestus. Kõvaduse väärtus on kõigi võrdkõvade mineraalide hulk, väärtuste hulk on juba järjestatud. Kõvaduse väärtuste hulk fikseeritakse looduses esindajate ehk etalonide hulgaga, kuhu kuuluvad näiteks pehme mineraal talk ja eriti kõva mineraal teemant. Igale etalonile märgitakse nimi, see on arv vahemikust 1...10. Funktsioon kõvadus → nimi on koostatud monotoonselt kasvavana.

N ä i d e 8. Segame kujutluses numbrisildid Mohsi skaala etalonmineraalidel. Segamine ei muuda ei väärtuste hulka, esindajate hulka ega nimede hulka, küll aga muudab mõõtskaala.

Vaatleme nüüd sisukat kompositsiooni, mis seab objektipaarile (p_1, p_2) vastavusse kolmanda objekti $p_3 \in P$.

N ä i d e 9. Jätkame kaks varrast ja nimetame jätkatud liitvarrast jätkude kompositsiooniks.

Kompositsioon objektide hulgas indutseerib assotsieeritud kompositsiooni T füüsikalise suuruse väärtuste hulgas. Tähistame füüsikalise suuruse A väärtuse objekti p_1 jaoks a_1. Väärtust a_1 nimetatakse kompositsiooni T suhtes regulaarseks, kui kõigi paaride (p_2, p_3) korral kehtib lause

$$a_1Ta_2 = a_1Ta_3 \rightarrow$$
$$a_2 = a_3 \wedge a_2Ta_1 = a_3Ta_1 \rightarrow a_2 = a_3.$$

Nimetame regulaarseks kompositsiooni, mille suhtes kõik füüsikalise suuruse väärtused on regulaarsed

Kui mingi füüsikalise suuruse jaoks eksisteerib sisukas kompositsioon, mis väärtuste hulgas on assotsiatiivne, kommutatiivne ja regulaarne, nimetatakse seda kompositsiooni liitmiseks ning vaadeldavat füüsikalist suurust ennast aditiivseks suuruseks.

Füüsikalise suuruse aditiivsuse omadust saab kontrollida ainult katse teel ning aditiivsuse konstateering väljendab loodusest ammutatud teadmist. Aditiivsuse seadused on füüsikas fundamentaalsete loodusseaduste tähendusega.

N ä i d e 10. Varda pikkus on jätkamise kompositsiooni suhtes aditiivne suurus.

Aditiivse suuruse väärtuste nimede hulgaks valitakse hulk, milles on sisemiselt defineeritud liitmistehe (tavaliselt reaalarvude hulk) ning mõõtskaalaks valitakse vastav isomorfism väärtuste hulgast nimede hulka.

Peaaegu kõik tuntud füüsikalised suurused on aditiivsed ning mõõtskaalad käsitletavad kui isomorfismid väärtuste hulgast reaalarvude hulka. Aditiivse suuruse mõõtmisel kasutatakse Archimedese algoritmi: Olgu meil aditiivne järjestatud suurus A ning kaks objekti p_1, p_2, niiviisi, et kummagi jaoks pole suuruse A väärtus null. Valmistame hulga p_2-ga ekvivalentseid objekte ning ühendame neid, kuni liitobjekt muutub objektist p_1 suuremaks. Archimedese aksioomi kohaselt on see alati võimalik. Võtame nüüd ära viimase liidetava ja tähistame p_1-st mittesuuremaks osutuva liitobjekti osade arvu n_1. Valmistame vee hulga omavahel ekvivalentseid abiobjekte niiviisi, et k abiobjekti ühendamisel saaks p_2-ga ekvivalentse objekti. k olgu naturaalarv, mis pole väiksem kahest. Nimetame uusi abiobjekte k-ndikeks. Lisame nüüd esialgsele n_1-osalisele liitobjektile endise eeskirja kohaselt k-ndikke. Kulugu neid n_2 tükki. Järgnevalt valmistame k^2-ndikud jne. Lõpuks moodustame k-ndsüsteemi arvu $r = n_{1,}\ n_2\ n_3$ ... ning vaatleme seda kui väärtuste paari (a_1, a_2) kujutist reaalarvude hulgas.

Archimedese algoritmiga defineeritud funktsiooni nimetatakse füüsikalise suuruse väärtuste suhteks ning siin kasutatavat mõõtskaalat suhteskaalaks. Archimedese algoritm on tarvitusel pea kõigi füüsikaliste suuruste otsese mõõtmise juures.

Järeldusi

Arvamus, nagu puuduks füüsikal seos kooli matemaatikakursuse uute elementidega, pole õige. Abstraktset matemaatikat ja hulgateoreetilist mõtlemisviisi saab kasutada ka füüsika põhimõistete analüüsimisel. See võiks ühelt poolt soodustada matemaatikakursuse omandamist, teiselt poolt avada sügavamalt füüsikaliste mõistete olemuse. Koolifüüsika ja -matemaatika konflikti põhjuseks on asjaolu, et matemaatikakursust reformiti isoleeritult. Vana matemaatikaprogrammiga kooskõlastatud füüsikakursuse sisu jäi põhijoontes endiseks. Öeldu aga ei tähenda, et füüsikakursuse uuendamine matemaatikareformi mudeli järgi oleks õige. Niisuguse reformi tulemusena kaotaks füüsika palju senisest rakenduslikust suunitlusest. Autori arvates võib abstraktse suunitlusega uuendusi koolikursustesse sisse viia vaid niivõrd, kuivõrd see ei nõua kompensatsiooniks olulisi ohvreid aine rakenduslikkuses.