

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut

Raili Vilt

**ERILISED TÄISARVUDE JADAD, MIS ON DEFINEERITUD
ARVU JAGAJATE ARVU VÕI NUMBRITE ARVU, JAGAJATE
SUMMADE VÕI ARVU NUMBRITE SUMMADE ABIL**

Magistritöö

Juhendaja: dotsent Elts Abel

Tartu 2010

Sisukord

Sissejuhatus	4
1. Arvude liigitamine nende positiivsete jagajate summade järgi	7
1.1. Täiuslikud, puuduga ja liiaga arvud	7
1.1.1. Põhimõisted	7
1.1.2. Täiuslike arvude põhiomadused	8
1.1.3. Täiuslike arvude täiendavaid omadusi	13
1.1.4. Täiuslike arvude üldistusi	17
1.1.5. Puuduga ja liiaga arvud	20
1.2. Täisarvude positiivsete jagajate summade abil määratud paarid ja alikvootjad	25
1.2.1. Sõbralikud arvud	25
1.2.2. Lahked arvud	27
1.2.3. Täisarvude alikvootjad	29
1.3. Praktilised arvud	31
1.3.1. Põhimõisted	31
1.3.2. Põhitulemused	33
1.3.3. Praktiliste arvude omadused	37
1.3.4. Praktiliste arvude mitmikud	39
1.3.5. Peaaegu praktilised arvud	41
1.4. Zumkelleri arvud	42
1.4.1. Põhimõisted ja –tulemused	42
1.4.2. Zumkelleri arvude genereerimine	44
1.4.3. Praktilised ja Zumkelleri arvud	46
1.4.4. Pool-Zumkelleri arvud	47
1.4.5. Zumkelleri ja pool-Zumkelleri arvud	50
2. Arvu positiivsete jagajate arvuga seonduvad arvuhulgad	53
2.1. Tau-arvud	53
2.1.1. Põhimõisted	53
2.1.2. Põhitulemused	53
2.1.3. Tau-arvude seosed teiste arvuhulkadega	56
2.1.4. Järjestikused tau-arvud	57
2.1.5. Antitau-arvud	58

2.2. Ülikordarvud ja nende mõned alaliigid	60
2.2.1. Põhimõisted	60
2.2.2. Ülikordarvude mõningaid omadusi	61
2.2.3. Erilised ülikordarvud	63
2.2.4. Etteantud positiivsete jagajate arvuga määratud arvuhulga vähima elemendi leidmine	67
3. Arvu numbrite ja numbrite summaga seonduvad arvuhulgad	73
3.1. Niveni arvud	73
3.1.1. Põhimõisted ja -tulemused	73
3.1.2. Super-Niveni arvud	75
3.1.3. Nivenmorfisid arvud	77
3.2. Smith'i arvud	78
3.2.1. Põhimõisted ja -tulemused	78
3.2.2. Smith'i arvude mõningaid eriliike	83
3.2.3. Smith'i arvude mõningaid üldistusi	84
3.3. Raiskavad, võrdnumbrilised ja säästlikud arvud	87
3.3.1. Põhimõisted	87
3.3.2. Põhitulemused	88
4. Elementaarse arvuteooria põhivara	92
4.1. Täisarvude jaguvus	92
4.2. Suurim ühistegur, vähim ühiskordne	93
4.3. Algarvud ja kordarvud	94
4.4. Arvu algteguriteks lahutus, kanooniline kuju	96
4.5. Jäägiga jagamine	97
4.6. Kongruentsid	99
4.7. Euleri funktsioon	102
4.8. Täisarvu positiivsete jagajate arv	104
4.9. Täisarvu positiivsete jagajate summa	105
4.10. Hulknurkarvud	107
Summary	108
Kasutatud allikad	110
LISA 1. Defineeritud täisarvude nimetuste register	
LISA 2. Ülesannete kogu	

Sissejuhatus

Täisarvude jadad on olnud matemaatikute uurimisobjektiks juba antiikajast peale sõltumata sellest, kas need jadad on tekkinud mingi teadusliku probleemi lahendamise käigus või lihtsalt amatööride soovist „mängida“ naturaalarvudega. Ühed vanimad seda liiki arvudest on näiteks täiuslikud arvud, s.o arvud, mis võrduvad oma positiivsete pärisjagajate summaga. Vaatamata sellele, et need arvud on küllalt lihtsalt defineeritud, ei ole aastatuhandete jooksul matemaatikud suutnud tõestada, kas täiuslike arvude hulk on lõplik või lõpmatu. Vastuseta on ka küsimus, kas leidub paarituid täiuslikke arve. Kaasaegsete arvutite võimsuse piirides ei ole leitud ühtki paaritut täiuslikku arvu. Ei ole suudetud ka tõestada, et selliseid arve polegi olemas. Möödunud sajandi keskpaigast alates on oluliselt suurenenud matemaatikute huvi täisarvude jadade uurimise vastu ja seda osaliselt ka tänu Paul Erdösi ja tema õpilaste põhjapanevatele töödele arvuteooriast. Viimasel kümnel aastal on loodud kümneid uusi täisarvude jadasid arvutite abil ning on avastatud juba varem defineeritud jadade uusi omadusi. N.J.A. Sloane initsiatiivil on loodud suurim täisarvude jadade elektrooniline andmebaas (OEIS, [53]), mis sisaldab 2010. aasta maikuu andmetel üle 175000 täisarvude jada kirjet, millest enamus tugineb teadusartiklitele või mille juures on leitud ka teisi huvitavaid omadusi lisaks definitsioonis antutele. Iga jada selles andmebaasis on varustatud koodiga, mis algab tähega A ja millele järgneb kuuekohaline arv.

Käesolevas magistriöös on uuritud kaheksat suuremat positiivsete täisarvude jadade rühma üldnimetatud andmebaasist, mille defineerimisel on kasutatud kas arvu numbrite arvu, numbrite summa, positiivsete jagajate arvu või positiivsete jagajate summade mõisteid. Töös antakse erialasele kirjandusele toetudes süstematiseeritud ülevaade vaadeldavate jadade põhiomadustest, sõnastatakse mõned tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et antud täisarv kuuluks defineeritud jada elementide hulka, näidatakse selliste arvude konstrueerimise võimalusi, vaadeldakse teatud omadusega alamjadasid või defineeritud jada üldistusi, leitakse vaadeldava jada seosed teiste tuntud või vähemtuntud arvuhulkadega. Tulemused on sõnastatud teoreemide, lausete või lemmadena ja varustatud tõestustega.

Töös esitatud materjali valikul on silmas peetud, et nii jadade defineerimisel kui ka omaduste tõestamistel piisaks töö IV peatükis refereeritud eelteadmistest arvuteooria põhikursusest.

See tuleneb töö autori ühest põhieesmärgist: luua teoreetiline alus materjalidele, mida saaks kasutada üldhariduskooli uutesse õppekavadesse lülitatud valikkursuste „Arvuteooria elemendid I“ ja „Arvuteooria elemendid II“ väljatöötamisel, õpetajate koolitamisel ning töös

teadusandekate lastega TÜ teaduskoolis. Magistritöös sisalduvaid materjale on töö autor osaliselt kasutanud oma töös TÜ teaduskooli [64] õppematerjalide koostamisel.

Kõnesolevas töös vaadeldud 48 arvuhulgast vaid mõned üksikud on seni leidnud nimetamist eestikeelsetes teatmeteostes (näiteks [1]) ning ainsas eestikeelses arvuteooria raamatus „Arvuteooria” [47], kus mõningad tulemused on küll sõnastatud, aga ei ole tõestatud või siis tulemused on antud ülesannetena. Töö koostamise käigus tuli töö autoril välja mõelda suurele osale vaadeldavate jadade ingliskeelsetele nimetustele soovituslikud vasted eesti keeles. Nime leidmisel lähtuti nii ingliskeelsest nimetusest kui selle sobivusest eesti keeles olevate mõistetega. Töö lisast 1 leiab käesolevas töös defineeritud arvude nimetuste registri koos definitsioonidega.

Materjal on jaotatud nelja peatükki.

Esimeses neist on vaatluse all positiivsed täisarvud, mis on teatud viisil seotud oma positiivsete (päris)jagajate summaga. Esmalt on vaadeldud kõige enam tuntud ja teatud täiuslikke, puuduga ning liiaga arve. Seejärel arvu alikvootjadaga seotud arve. Kolmandas alajaotuses uuritakse ajaloolisi praktilisi arve ning neljandas juba kaasajal defineeritud Zumkelleri arve, mille uurimine on olnud ajendatud just eelmainitud praktilistest ja täiuslikest arvudest.

Põhilised kasutatud allikad: [1], [2], [4], [5], [12], [27],[31], [34], [37], [39], [42], [47], [48], [52], [53], [54], [56], [60]. [61], [65] ja [68].

Teises peatükis käsitletakse positiivseid täisarve, mis on teatud viisil seotud täisarvu positiivsete jagajate arvuga. Esimeses punktis vaadeldakse täisarve, mis jaguvad oma positiivsete jagajate arvuga (tau-arvud). Teisena on uurimise all arvud, millel on rohkem positiivseid jagajaid kui mis tahes temast väiksemal positiivsel täisarvul (ülikordarvud) ning vaadeldakse kuidas konstrueerida vähimat arvu, mille positiivsete jagajate arv on ette antud.

Allikatena on peamiselt kasutatud: [14], [17], [24], [40], [46], [51], [53], [58] ja [65].

Kolmandas peatükis välja toodud arvud on teatud viisil seotud arvu numbrite arvuga ja numbrite summadega. Esmalt vaadeldakse arve, mis jaguvad oma numbrite summaga (Niveni arvud). Seejärel arve, mille algtegurite lahutuses esinevate numbrite summa on võrdne arvu enda numbrite summaga (Smith'i arvud) ning viimasena täisarvude liigitamise võimalusi, lähtuvalt sellest, mitu numbrit on arvus endas ja tema kanoonilises kujus.

Allikatena on peamiselt kasutatud: [6], [15], [16], [18], [26], [33], [44], [53], [61], [63], [65]. [67] ja [69].

Viimases peatükis on loetletud arvuteooria põhimõisted ja mõned tulemused, millede teadmine on aluseks käesolevale tööle ning millele viidatakse ka töö kolmes esimeses peatükis. Tõestused on selles osas lisatud olulistele tulemustele.

Tööl on kaks lisa.

Lisa 1. Defineeritud täisarvude nimetuste register.

Lisa 2. Ülesannete kogu.

1. Arvude liigitamine nende positiivsete jagajate summade järgi

1.1. Täiuslikud, puuduga ja liiaga arvud

Positiivse täisarvu n positiivsete jagajate summa $\sigma(n)$ või selle osasummade abil täisarvude liigitamiseks on leitud palju võimalusi. Kui võrrelda arvu n ennast oma positiivsete jagajate summaga $\sigma(n)$, on õige üks järgmistest tingimustest: $n = \sigma(n)$, $n < \sigma(n)$ või $n > \sigma(n)$. Lähtuvalt nendest seostest saab positiivsete täisarvude hulga jaotada kolmeks mittelõikuvaks alamhulgaks. Arvude nimetatud omadusi tunti tõenäoliselt juba antiikajal.

1.1.1. Põhimõisted

Kaasaegses matemaatilises kirjanduses kasutatakse paralleelselt kahte samaväärset definitsiooni iga järgneva arvuliigi jaoks [1], [65].

Definitsioon 1.1.1.A. Positiivne täisarv n on *puuduga arv* (*deficient number*), kui selle pärisjagajate summa $\sigma(n) - n$ on väiksem arvust endast, s.t $n > \sigma(n) - n$.

Definitsioon 1.1.1.B. Positiivne täisarv n on *puuduga arv* (*deficient number*), kui selle positiivsete jagajate summa $\sigma(n)$ on väiksem kahekordsest antud arvust, s.t $2n > \sigma(n)$.

Esimesed puuduga arvud on: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17 [53, A005100].

Definitsioon 1.1.2.A. Positiivne täisarv n on *täiuslik arv* (*perfect number*), kui see võrdub oma pärisjagajate summaga $\sigma(n) - n$, s.t $n = \sigma(n) - n$.

Definitsioon 1.1.2.B. Positiivne täisarv n on *täiuslik arv* (*perfect number*), kui selle positiivsete jagajate summa $\sigma(n)$ on võrdne antud arvu kahekordsega, s.t $2n = \sigma(n)$.

Esimesed täiuslikud arvud on: 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056 [53, A000396].

Neli esimest täiuslikku arvu olid teada juba enne meie aja arvamist. Esimesed säilinud kirjalikud tõendid täiuslike arvude omaduste uurimise kohta võib leida Eukleidese teosest „Elemendid“ (IX raamat, lause 36).

Definitsioon 1.1.3.A. Positiivne täisarv n on *liiaga arv* (*abundant number*), kui selle pärisjagajate summa $\sigma(n) - n$ on suurem arvust endast, s.t $n < \sigma(n) - n$.

Definitsioon 1.1.3.B. Positiivne täisarv n on *liiaga arv* (*abundant number*), kui selle positiivsete jagajate summa $\sigma(n)$ on suurem kahekordsest antud arvust, s.t $2n < \sigma(n)$.

Esimesed liiaga arvud on: 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66 [53, A005101].

Seejuures vähim paaritu liiaga arv on 945, mis on suuruse poolest 232. liiaga arv.

Käesolevas töös kasutatavad eestikeelsed nimetused on võetud allikast [1]. E. Redi raamatus [47, lk 53], nimetatakse puuduga arve *alatäiuslikeks* ning liiaga arve *ületäiuslikeks* arvudeks.

1.1.2. Täiuslike arvude põhiomadused

Üsna põhjaliku ülevaate vaatluse all olevate täiuslike arvude ajaloost võib leida J.J O’Connori ja E.F. Robertsoni internetiartiklist [39]. Hämmastav on, et isegi arvutite ajastul ei ole veel suudetud leida ühtegi paaritud täiuslikku arvu, ega paari aastatuhande jooksul tõestada, et selliseid arve ei leidu. Ka pole leidnud tõestust või ümberlukkamist hüpotees täiuslike arvude hulga lõpmatusest. Suurim käsitsi arvutamise teel saadud täiuslik arv $2^{88}(2^{89} - 1)$ leiti 1911. aastal. Tänapäevaks on teada täiuslikke arve 47, neist suurim on $2^{43112608}(2^{43112609} - 1)$ ([65], mai 2010). Kuna täiuslike arvudega tegeleti ka Pythagorase koolkonnas, on mõistetav, et leiti seosed täiuslike arvude ja Vana-Egiptuse ning Antiik-Kreeka matemaatikas nii oluliste ühikmurdude ehk positiivsete täisarvude pöördarvude vahel.

Lause 1.1.1. Täiusliku arvu kõigi positiivsete pärisjagajate pöördarvude summa on 1.

Tõestus. Olgu n täiuslik arv ja $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, kus d_i ($i = 1, 2, \dots, k$) on arvu n kõik positiivsed jagajad. Kui täisarv n jagub arvuga d , siis leidub selline täisarv m , et $md = n$, s.t n jagub arvuga $m = \frac{n}{d}$.

$$\text{Seega } \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} d_i}{n} = \frac{\sigma(n) - n}{n} = \frac{2n - n}{n} = 1. \blacksquare$$

Juba Eukleidese aegadel pandi tähele, et neli teadaolevat täiuslikku arvu avalduvad kõik

teataval kujul:

$$6 = 2^1(1 + 2) = 2 \cdot 3$$

$$28 = 2^2(1 + 2 + 2^2) = 4 \cdot 7$$

$$496 = 2^4(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = 16 \cdot 31$$

$$8128 = 2^6(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) = 64 \cdot 127.$$

Seejuures märgati, et arvud $90 = 2^3(1 + 2 + 2^2 + 2^3)$ ja $2016 = 2^5(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)$ ei ole täiuslikud. Erinevuseks on, et viimastel juhtudel arvud $1 + 2 + 2^2 + 2^3$ ja $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$ ei ole algarvud. Eukleides näitas oma teoses „Elemendid“ (IX raamat, lause 36) [20], et kui $2^r - 1$ on algarv, siis $n = 2^{r-1}(2^r - 1)$ on täiuslik arv, aga ei näidanud vastupidist, et kõik paarisarvulised täiuslikud arvud peavad avalduma just sellisel kujul.

Teoreem 1.1.1. Kui $2^r - 1$ on algarv, siis $n = 2^{r-1}(2^r - 1)$ on täiuslik arv.

Tõestus. Teame, et algarvu q korral $\sigma(q) = q + 1$ ja $\sigma(2^r) = 2^{r+1} - 1$ (järgeldus 4.9.1) ning ühistegurita positiivsete täisarvude m ja n korral $\sigma(m \cdot n) = \sigma(m) \cdot \sigma(n)$ (lause 4.9.1).

Olgu $2^r - 1$ algarv. Vaatame positiivset täisarvu $n = 2^{r-1}(2^r - 1)$ ja leiame selle positiivsete jagajate summa $\sigma(n)$. Siis

$$\sigma(n) = \sigma(2^{r-1})\sigma(2^r - 1) = (2^r - 1)(2^r - 1 + 1) = (2^r - 1)2^r = 2n.$$

Seega n on täiuslik arv. ■

Algarve kujul $2^r - 1$ nimetatakse Mersenne'i algarvudeks, seejuures kui $2^r - 1$ on algarv, siis r peab olema algarv (teoreem 4.3.2).

Täiuslike arvude otsingute ja Eukleidese poolt tõestatud teoreemi 1.1.1 pöördteoreemi tõestusega tegelesid intensiivselt mitmed kuulsad renessansiajastu matemaatikud (R. Descartes, M. Mersenne, P. Fermat jt). Pöördteoreemi tõestus õnnestus leida lõpuks L. Euleril. Kuna järgnev tulemus on üks olulisemaid, esitame sellele ka mõned hilisemad tõestused, tuginedes J. Voighti artiklile [68].

Teoreem 1.1.2. Kui n on paarisarvuline täiuslik arv, siis $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, kus $(2^p - 1)$ on algarv.

Tõestus 1 (Euler). Paarisarvulise täiusliku arvu n saab alati esitada kujul $n = 2^{r-1}m$, kus m on paaritu täisarv ja $r \geq 2$. Et arvud 2^{r-1} ja m on ühistegurita, siis

$$\sigma(n) = \sigma(2^{r-1}m) = \sigma(2^{r-1})\sigma(m) = (2^r - 1)\sigma(m). \quad (1.1)$$

Teiselt poolt, arvu n täiuslikkusest järeldub, et

$$\sigma(n) = 2n = 2(2^{r-1}m) = 2^r m. \quad (1.2)$$

Seega võrdustest (1.1) ja (1.2) saame, et

$$2^r m = (2^r - 1)\sigma(m). \quad (1.3)$$

Olgu nüüd $\sigma(m) = s$. Sel juhul $m = (2^r - 1)\frac{s}{2^r}$. Kuna $2^r - 1$ ei jagu arvuga 2^r , siis s peab jaguma arvuga 2^r . Seega $m = (2^r - 1)q$, kus $q = s/2^r$. Kui $q = 1$, siis $n = 2^{r-1}(2^r - 1)$ ja järelikult täiuslik paarisarv avaldub vajalikul kujul, kus $m = 2^r - 1$ on algarv, sest $\sigma(m) = 2^r$.

Kui $q > 1$, siis arvu m jagajateks on kindlasti arvud $1, q, 2^r - 1$ ja m . Seega

$$s = \sigma(m) \geq 1 + q + (2^r - 1) + (2^r - 1)q = 2^r(q + 1).$$

Sel juhul aga

$$\frac{m}{s} \leq \frac{(2^r - 1)q}{2^r(q + 1)} = \left(\frac{2^r - 1}{2^r}\right)\left(\frac{q}{q + 1}\right) < \frac{2^r - 1}{2^r}.$$

Tekib vastuolu, sest võrdusest (1.1) järeldub, et $\frac{m}{s} = \frac{2^r - 1}{2^r}$. ■

Tõestus 2 (Dickson). Nagu tõestuses 1, jõuame võrduseni (1.3), millest saame, et

$$\sigma(m) = \frac{2^r m}{2^r - 1} = \frac{((2^r - 1) + 1)m}{2^r - 1} = m + \frac{m}{2^r - 1}.$$

Kuna $\sigma(m)$ ja m on mõlemad täisarvud, siis $d = \frac{m}{2^r - 1}$ on täisarv. Seega m jagub arvudega

$2^r - 1$ ja d . Kuna $\sigma(m) = m + \frac{m}{2^r - 1} = m + d$ on arvu m kõigi positiivsete jagajate summa, siis

on ainus võimalus, et $d = 1$. Seega $m = 2^r - 1$ ja arvul m on vaid kaks jagajat, arvud m ja 1 .

Seega m peab olema algarv ning täiuslik paarisarv avaldub vajalikul kujul. ■

Tõestus 3 (McDaniel). Nagu tõestuses 1, jõuame võrduseni (1.3). Kuna arvud $2^r - 1$ ja 2^r on ühistegurita, siis arvu $2^r - 1$ iga algtegur peab olema ka arvu m tegur. Oletame, et $2^r - 1$ jagub arvuga p^α , kus p on algarv.

Siis lause 4.9.2 põhjal

$$\frac{\sigma(m)}{m} \geq \frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} = \frac{1 + p + \dots + p^\alpha}{p^\alpha} \geq \frac{p^{\alpha-1} + p^\alpha}{p^\alpha} = \frac{1 + p}{p}.$$

Järelikult

$$1 = \frac{\sigma(n)}{2n} = \frac{\sigma(2^r - 1)\sigma(m)}{2^r m} \geq \frac{(2^r - 1)(1 + p)}{2^r p} = 1 + \frac{(2^r - 1) - p}{2^r p}.$$

Võrdus saab kehtida vaid juhul kui $\frac{(2^r - 1) - p}{2^r p} = 0$ ehk $p = 2^r - 1$, $\alpha = 1$ ja $m = p$.

Järelikult täiuslik arv on nõutud kujul. ■

Tõestus 4 (Carmichael). Olgu n paarisarvuline täiuslik arv, mille kanooniline kuju on

$$n = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = 2^{\alpha_1} \prod_{i=2}^k p_i^{\alpha_i}.$$

Siis

$$\frac{\sigma(n)}{2n} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma(2^{\alpha_1})}{2^{\alpha_1}} \right) \prod_{i=2}^k \frac{\sigma(p_i^{\alpha_i})}{p_i^{\alpha_i}} = \frac{2^{\alpha_1+1} - 1}{2^{\alpha_1+1}} \prod_{i=2}^k \frac{1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{\alpha_i}}{p_i^{\alpha_i}} = 1$$

ehk

$$\frac{2^{\alpha_1+1}}{2^{\alpha_1+1} - 1} = \prod_{i=2}^k \frac{1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{\alpha_i}}{p_i^{\alpha_i}}.$$

Võttes $d = 2^{\alpha_1+1} - 1$, saame

$$\frac{2^{\alpha_1+1}}{2^{\alpha_1+1} - 1} = \frac{d+1}{d} = 1 + \frac{1}{d} = \prod_{i=2}^k \frac{p_i^{\alpha_i} + \dots + p_i + 1}{p_i^{\alpha_i}} \geq \prod_{i=2}^k \frac{p_i^{\alpha_i} + p_i^{\alpha_i-1}}{p_i^{\alpha_i}} = \prod_{i=2}^k \left(1 + \frac{1}{p_i} \right). \quad (1.4)$$

Teiselt poolt

$$\sigma(n) = \sigma(2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = (2^{\alpha_1+1} - 1) \prod_{i=2}^k \sigma(p_i^{\alpha_i}) = d \prod_{i=2}^k \sigma(p_i^{\alpha_i}) = 2n = 2^{\alpha_1+1} \prod_{i=2}^k p_i^{\alpha_i}.$$

Kuna d on paaritu, siis leidub i , mille korral d jagub arvuga p_i . Kui $p_i < d$, siis saadud võrratus ei kehti ja järelikult $p_i = d$. Juhul kui $k > 2$, siis jällegi võrratus ei kehti. Järelikult $k = 2$. Kui $\alpha_2 > 1$, saaksime jälle, et võrratus ei kehti. Seega $\alpha_2 = 1$. Olemegi saanud, et n avaldub nõutud kujul. ■

Teoreemidest 1.1.1 ja 1.1.2 saame, et on tõestatud järgmine teoreem.

Teoreem 1.1.3. Positiivne paarisarv n on täiuslik arv parajasti siis, kui ta on esitatav kujul $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, kus $(2^p - 1)$ on algarv.

Sellisel kujul olevaid täiuslikke arve nimetatakse ka *Eukleidese täiuslikeks arvudeks* või *paarisarvulisteks täiuslikeks arvudeks*.

Vaatamata sellele, et paaritute täiuslike arvude olemasolu ei ole veel tõestatud ega ka ümber lükatud, on tegeletud nende arvude omaduste uurimisega ja on leitud tingimusi, mis peaksid paaritu täiusliku arvu korral täidetud olema. Aastal 1991 näitasid R.P. Brent, G.L. Cohen ja H.J.J. te Riele, et kui siiski leidub paaritu täiuslik arv n , siis $n > 10^{300}$ [65].

Euler näitas „Tractatus de numerorum doctrina capita sedecim, quae supersunt“ 3. osas, et kui paaritu täiuslik arv leidub, siis peab kehtima järgmine teoreem.

Teoreem 1.1.4 (Euler). Kui leidub paaritu täiuslik arv n , siis selle arvu kanooniline kuju peaks olema $n = p^\alpha q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} \dots q_t^{2\beta_t}$, kus p ja α annavad arvuga 4 jagamisel jäägi 1 ja $t \geq 2$.

Tõestus. Kui n on paaritu täiuslik arv kanoonilisel kujul $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, siis arvu n täiuslikkusest järeldub,

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^k (1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{\alpha_i}) = 2 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

Kuna n on paaritu, siis leidub täpselt üks selline i , $1 \leq i \leq k$, et summa $1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{\alpha_i}$ on paarisarv, mis annab arvuga 4 jagamisel jäägi 2. Seega α_i peab olema paaritu arv ja järelikult leidub selline täisarv x , et $\alpha_i = 2x + 1$. Kuna p_i^2 annab arvuga 4 jagamisel kindlasti jäägi 1 (lause 4.5.3), siis summa $1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{\alpha_i}$ jääk jagamisel arvuga 4 on sama, mis korrutise $(x+1)(p_i+1)$ jääk, s.t. $(x+1)(p_i+1)$ annab arvuga 4 jagamisel jäägi 2. Siit järeldub, et p_i annab arvuga 4 jagamisel jäägi 1 ning x peab olema paarisarv. Seega α_i annab arvuga 4 jagamisel jäägi 1.

Kui $j \neq i$ ja $1 \leq j \leq k$, siis $1 + p_j + p_j^2 + \dots + p_j^{\alpha_j}$ on paaritu. Järelikult α_j peab olema paarisarv. Tehes sobivalt mõned ümbertähistused, saamegi, et arv n on esitatud nõutud kujul, $n = p^\alpha q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} \dots q_t^{2\beta_t}$ ning p ja α annavad arvuga 4 jagamisel jäägi 1.

Näitame nüüd, et $t \geq 2$. Oletame vastuväiteliselt, et $t = 1$. Sel juhul kehtib võrdus

$$\frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{2\beta+1} - 1}{q - 1} = 2 p^\alpha q^{2\beta}. \text{ Järelikult}$$

$$2 = \frac{p - \frac{1}{p^\alpha}}{p-1} \cdot \frac{q - \frac{1}{q^{2\beta}}}{q-1} < \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} \leq \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{8}.$$

Oleme saanud vastuolu ja järelikult $t \geq 2$. ■

1.1.3. Täiuslike arvude täiendavaid omadusi

Järgmised märkmed pärast Eukleidest pärinevad täiuslike arvude kohta esimesest sajandist Nicomachuse tekstist „Introductio Arithmetica“. Selleks ajaks oli teada neli esimest täiuslikku arvu 6, 28, 496 ja 8128. Ta püstitas hüpoteesi, et täiuslike arvude viimane number on vaheldumisi 6 ja 8. Aastast 1456 teada olev viies täiuslik arv 33550336 kinnitas, et väide võib õige olla. Hüpoteesi lükkas ümber P.A. Cataldi 1588. aastal, kui leidis kuuenda täiusliku arvu 8589869056, mille üheliste number on sama, mis talle eelneval täiuslikul arvul. [39]

Täiuslike arvude täiendavaid omadusi ja seoseid teiste arvudega on uuritud läbi ajaloo palju. Peamistest omadustest tehtud järgneva kokkuvõtte allikatena on kasutatud [39], [61], [47] [23], [68], [42], [45].

Lause 1.1.2. Iga paarisarvulise täiusliku arvu üheliste number on kas 6 või 8.

Tõestus. Arvude 6 ja 28 korral on tingimus täidetud. Kuna paarisarvulise täiusliku arvu esituses $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ on p algarv, siis on võimalikud kaks juhtumit: $p = 4k + 1$ või $p = 4k + 3$. Iga positiivse täisarvu k korral on arvu 2^{4k} üheliste number 6 ja arvu $2^{4k+1} - 1$ üheliste number on 1 ning arvu 2^{4k+2} üheliste number on 4 ja arvu $2^{4k+3} - 1$ üheliste number on 7. Seega arvu $2^{4k}(2^{4k+1} - 1)$ üheliste number on 6 ja arvu $2^{4k+2}(2^{4k+3} - 1)$ üheliste number on 8. ■

Lause 1.1.3. Arvust 6 suuremad paarisarvulised täiuslikud arvud annavad arvuga 6 jagamisel jäägi 4.

Tõestus. Iga arvust 6 suurem paarisarvuline täiuslik arv avaldub kujul $2^{p-1}(2^p - 1)$, kus $2^p - 1$ on algarv ja järelikult ka $p \geq 3$ on algarv. Sel juhul arv 2^{p-1} annab arvuga 3 jagamisel jäägi 1 (lause 4.5.4). Seega paaritu algarvu p korral leidub paaritu naturaalarv k nii, et $2^{p-1} = 1 + 3k$. Seega

$$n = 1 + 9k + 18k^2 = 4 - 3 + 9k + 18k^2 = 4 + 3(6k^2 + 3k - 1).$$

Kuna k on paaritu arv, siis $6k^2$ ja $3k-1$ on paarisarvud ja järelikult $3(6k^2 + 3k - 1)$ jagub arvuga 6 ning $n = 6m + 4$. ■

Lause 1.1.4. Iga arvust 6 suurema paarisarvulise täiusliku arvu jagamisel arvuga 9 tekib jääk 1.

Tõestus. Kui p on paaritu algarv, siis $2^{p-1} - 1$ jagub arvuga 3 (lause 4.5.4) ehk leidub selline täisarv k , et $2^{p-1} = 3k + 1$. Järelikult $2^p = 6k + 2$ ja $2^p - 1 = 6k + 1$. Saame, et

$$2^{p-1}(2^p - 1) = (3k + 1)(6k + 1) = 18k^2 + 9k + 1,$$

millest järeldubki, et jagamisel arvuga 9 tekib jääk 1. ■

Järeldus 1.1.1. Arvust 6 suuremate paarisarvuliste täiuslike arvude ristjuur 1.

Teadad on ka täiuslike arvude seoseid hulknurkarvudega.

Lause 1.1.5. Iga paarisarvuline täiuslik arv on nii kolmnurkarv kui ka kuusnurkarv.

Tõestus: Iga paarisarvuline täiuslik arv n on kujul $2^{p-1}(2^p - 1) = \frac{(2^p - 1)2^p}{2}$.

Olgu $2^p - 1 = m$, siis $2^{p-1}(2^p - 1) = \frac{m(m+1)}{2}$, mis tähendabki, et n on m esimese naturaalarvu summa ehk n on kolmnurkarv.

Kui tähistada nüüd $2^{p-1} = m$, siis $n = 2^{p-1}(2^p - 1) = m(2m - 1)$, s.t arv n on kuusnurkarvude jada element indeksiga 2^{p-1} . ■

Lause 1.1.6. Arvust 6 suurem paarisarvuline täiuslik arv avaldub kujul $1 + 9T$, kus T on kolmnurkarv.

Tõestus. Lause 1.1.3 põhjal teame, et $2^{p-1}(2^p - 1) = 1 + 9k$. Näitame, et k on kolmnurkarv.

Et iga paarisarvuline täiuslik arv on kolmnurkarv (lause 1.1.5), siis $8(9k + 1) + 1 = 9(8k + 1)$ on mingi naturaalarvu täisruut (lause 4.10.1). Et arv 9 on täisruut, siis $8k + 1$ peab olema täisruut. Järelikult (lause 4.10.1) põhjal k peab olema kolmnurkarv. ■

Lause 1.1.7. Arvust 6 suurem paarisarvuline täiuslik arv $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ avaldub kujul

$$n = 1^3 + 3^3 + \dots + \left(2^{(p+1)/2} - 1\right)^3.$$

Tõestus. Tähistagu $k = 2^{(p-1)/2}$. Kasutades valemit

$$\sum_{i=1}^m i^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4},$$

saame avaldist teisendades

$$\begin{aligned} 1^3 + 3^3 + \dots + (2^{(p+1)/2} - 1)^3 &= \\ &= 1^3 + 3^3 + \dots + (2k-1)^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (2k-1)^3 + (2k)^3) - (2^3 + 4^3 + \dots + (2k)^3) = \\ &= \frac{(2k)^2(2k+1)^2}{4} - 2^3 \frac{k^2(k+1)^2}{4} = \\ &= k^2(2k+1)^2 - 2k^2(k+1)^2 = k^2(4k^2 + 4k + 1 - 2k^2 - 4k - 2) = k^2(2k^2 - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1). \blacksquare \end{aligned}$$

Lause 1.1.8. Ükski arvust 6 suurem täiuslik arv ei saa olla kahe algarvu korrutis või algarvu aste.

Tõestus. Olgu n mõne algarvu aste $n = p^\alpha$. Oletame, et n on täiusklik arv, s.t

$$2p^\alpha = \sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}.$$

Viimasest võrdusest saame, et $p^{\alpha+1} = 2p^{\alpha+1} - 2p^\alpha + 1$ ehk $p^{\alpha+1} = 2p^\alpha - 1$. Järelikult $p = 1$, mis aga on vastuolus eeldusega, et p on algarv.

Olgu n algarvude p ja q korrutis. Oletame, et n on täiuslik arv, s.t

$$2pq = \sigma(pq) = (p+1)(q+1).$$

Järelikult kas $p+1$ või $q+1$ peab olema paarisarv. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $q+1 = 2p$ ja $p+1 = q$. Sellel on vaid üks lahend $p = 2$ ja $q = 3$. Seega arv 6 on ainus täiuslik arv, mis on kahe algarvu korrutis. ■

Lause 1.1.9. Arv 6 on ainus selline täiuslik arv n , mille korral $\sigma(\sigma(n))$ on täiuslik arv.

Tõestus. Täiusliku arvu 6 korral $\sigma(\sigma(6)) = \sigma(12) = 28$ on täiuslik arv. Oletame, et n on paarisarvuline täiuslik arv, s.t $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$. Kui nüüd ka $\sigma(\sigma(n)) = 2^p(2^{p+1} - 1)$ on paarisarvuline täiuslik arv, siis arvud $2^p - 1$ ja $2^{p+1} - 1$ ning järjestikused täisarvud p ja $p+1$ peavad olema algarvud. Seega ainus võimalus on, et $p = 2$ ja $n = 6$.

Oletame, et leidub paaritu täiuslik arv n . Sel juhul $\sigma(n) = 2n$ ja $\sigma(\sigma(n)) = 6n$. Kui paarisarv $\sigma(\sigma(n))$ on täiuslik arv, siis $6n = 2^{p-1}(2^p - 1)$. Kuna n on paaritu, siis on see võimalik vaid siis, kui $p = 2$ ja $n = 1$. ■

Lause 1.1.10. Arvud 5 ja 7 on ainsad kaksikalgarvud, mille summa on kaks korda suurem täiuslikust arvust.

Tõestus. Olgu meil algarvud $p > 5$ ja $p + 2$. Siis arvu p jagamisel arvuga 6 saame jäägi 5. (Kui p jagamisel arvuga 6 saaksime jäägi 1, siis arv $p + 2$ oleks kordarv.) Seega leidub selline täisarv $k > 1$, et $p = 5 + 6k$. Sel juhul $p + (p + 2) = 2(p + 1)$. Seega $p + 1$ peaks olema täiuslik arv. Kuna aga $p = 5 + 6k$, siis $p + 1$ jagub arvuga 6. Lause 1.1.4 põhjal, aga annab täiuslik arv $p + 1$ jagamisel arvuga 6 jäägi 4. Samas $5 + 7 = 2 \cdot 6$ ja kuna 6 on täiuslik arv, siis 5 ja 7 on ainsad kaksikalgarvud, millede summa on kaks korda suurem täiuslikust arvust. ■

Lause 1.1.11. Paarisarvulise täiusliku arvu $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ jagajate korrutis on n^p .

Tõestus. Et $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, siis

$$\prod_{d|n} d = 2^{0+1+\dots+(p-1)} (2^p - 1)^p \cdot 2^{0+1+\dots+(p-1)} = (2^p - 1)^p (2^{p(p-1)/2})^2 = (2^p - 1)^p (2^{p-1})^p = n^p. \blacksquare$$

Lause 1.1.12. Iga täiusliku arvu n korral on arv $\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)}$ täisarv, kus $\tau(n)$ on arvu n positiivsete jagajate arv ja $\sigma(n)$ arvu n kõigi positiivsete jagajate summa.

Tõestus. Olgu n paarisarvuline täiuslik arv $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, kus $(2^p - 1)$ on algarv.

Siis $\tau(n) = (p - 1 + 1)(1 + 1) = 2p$, $\sigma(n) = 2n$ ja järelikult $\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} = \frac{n \cdot 2p}{2n} = p$.

Oletame, et leidub paaritu arvuline täiuslik arv n , siis on selge, et ühe algteguri aste on paaritu (teoreem 1.1.4) ja seega leidub täisarv k nii, et $\tau(n) = 2k$. Seega $\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} = \frac{n \cdot 2k}{2n} = k$. ■

Samas ei kehti vastupidine väide, sest näiteks $\frac{n\tau(140)}{\sigma(140)} = 5$, aga 140 ei ole täiuslik arv.

Täisarvuga n seotud arv $\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)}$ on andnud põhjuse veel ühe liigi täisarvude defineerimiseks [65].

Definitsioon 1.1.4. Positiivne täisarv n on *Ore arv*, kui $\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)}$ on täisarv.

Esimesed Ore arvud on: 1, 6, 28, 140, 270, 496, 672, 1638, 2970, 6200 [53, A001599].

Lausest 1.1.12 järeldub järgmine tulemus.

Järeldus 1.1.2. Kõik täiuslikud arvud on Ore arvud.

1.1.4. Täiuslike arvude üldistusi

Koos täiuslike arvudega uurisid Mersenne, Fermat, Descartes jt ka selliseid positiivseid täisarve, mille korral $\sigma(n) = kn$, kus $k > 1$ täisarv. Mõiste *Multiperfect Number* pärineb allika [61] põhjal aastast 1941, kui seda kasutas D.H. Lehmer.

Definitsioon 1.1.5. Positiivne täisarv n on k -täiuslik arv (*k-multiperfect, k-multiply perfect number*), kui selle arvu positiivsete jagajate summa on arvu n k -kordne, s.t $\sigma(n) = kn$ [65].

Juhul kui $k = 2$, siis k -täiuslik arv on täiuslik arv põhidefinitsioonide 1.1.2.A ja 1.1.2.B mõttes.

Näiteks arv 120 on 3-täiuslik, sest $\sigma(120) = 360 = 3 \cdot 120$. Esimeseks leitud 3-täiuslikuks arvuks oligi arv 120 ja selle leidis 1557. aastal Robert Recorde. Järgmise 3-täiusliku arvu 672 avastas Fermat aastal 1637. Praeguseks on teada 3-täiuslikke arve vaid 6, neist suurim on 51001180160 (Fermat, 1643). [61]

Samale mõistele leidub ka eelmisest veidi erinev definitsioon, näiteks E. Redi raamatus [47, lk 53].

Definitsioon 1.1.5.A. Positiivne täisarv n on k -täiuslik arv, kui selle arvu positiivsete pärisjagajate summa on arvu n k -kordne, s.t $\sigma(n) = (k + 1)n$.

Käesolevas töös lähtutakse põhidefinitsioonist 1.1.5.

Alljärgnevas tabelis on toodud mõned esimestest k -täiuslikest arvudest.

k	k -täiuslikud arvud
2	6, 28, 496, 8128 [53, A000396]
3	120, 672, 523776, 459818240, 1476304896, 51001180160 [53, A005820]
4	30240, 32760, 2178540, 23569920 [53, A027687]
5	14182439040, 31998395520, 518666803200 [53, A046060]

Järgmised kolm lauset pärinevad Descartes'i kirjast Mersennele aastast 1638 [52, lk 186].

Lause 1.1.13. Kui n on 3-täiuslik ja n ei jagu arvuga 3, siis arv $3n$ on 4-täiuslik arv.

Tõestus. Olgu arv n 3-täiuslik, s.t $\sigma(n) = 3n$ ning seejuures n ei jagu arvuga 3. Siis $\sigma(3n) = \sigma(3)\sigma(n) = 4 \cdot 3n$ ja järelikult $3n$ on 4-täiuslik arv. ■

Lause 1.1.14. Kui n on 3-täiuslik arv ja n jagub arvuga 3, aga ei jagu arvudega 5 ja 9, siis $45n$ on 4-täiuslik arv.

Tõestus. Olgu arv n 3-täiuslik ja jagugu arvuga 3, s.t $\sigma(n) = 3n$ ja $n = 3k$, kus k ei jagu arvudega 3 ja 5. Siis $\sigma(45n) = \sigma(3^2 \cdot 5n) = \sigma(3^3)\sigma(5)\sigma(k) = 40 \cdot 6 \cdot \sigma(k)$. Kuna $n = 3k$ ja k ei jagu arvuga 3, saame $\sigma(n) = \sigma(3)\sigma(k) = 4\sigma(k)$. Seega $\sigma(45n) = 60 \cdot 4 \cdot \sigma(k) = 60\sigma(n)$. Kuna $\sigma(n) = 3n$, siis $\sigma(45n) = 180n = 4 \cdot 45n$, mis tähendab, et $45n$ on 4-täiuslik arv. ■

Lause 1.1.15. Kui n ei jagu arvuga 3 ja arv $3n$ on $4k$ -täiuslik arv, siis n on $3k$ -täiuslik arv.

Tõestus. Kui n ei jagu arvuga 3 ja on $4k$ -täiuslik arv, siis $\sigma(3n) = 4k \cdot 3n$. Teiselt pool $\sigma(3n) = \sigma(3)\sigma(n) = 4\sigma(n)$. Järelikult $\sigma(n) = 3kn$ ehk n on $3k$ -täiuslik arv. ■

Lausele 1.1.14 saab leida kaks üldistust.

Lause 1.1.16. Kui n on p -täiuslik arv, kus p on algarv ja n ei jagu arvuga p , siis arv pn on $(p+1)$ -täiuslik arv.

Tõestus. Kui $\sigma(n) = pn$ ning arvud p ja n on ühistegurita, siis

$$\sigma(pn) = \sigma(p)\sigma(n) = (p+1)pn. \blacksquare$$

Lause 1.1.17. Kui n on a -täiuslik arv ja m on b -täiuslik arv ning arvud n ja m on ühistegurita arvud, siis arv nm on ab -täiuslik arv.

Tõestus. Kui $\sigma(n) = an$ ja $\sigma(m) = bm$ ning arvud n ja m on ühistegurita, siis

$$\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m) = an \cdot bm = ab \cdot nm. \blacksquare$$

D. Suryanarayana vaatles [57] järgmisi üsna loomulikult viisil saadud täiuslike arvude üldistusi ja andis ka selliste paarisarvuliste arvude jaoks üldkuju.

Definitsioon 1.1.6. Positiivne täisarv n on *supertäiuslik arv* (*superperfect number*), kui selle positiivsete jagajate summa kõigi positiivsete jagajate summa on kaks korda suurem arvust n , s.t $\sigma(\sigma(n)) = 2n$.

Esimesed supertäiuslikud arvud on: 2, 4, 16, 64, 4096, 65536, 262144 [53, A019279].

Lause 1.1.18. Kõik paarisarvulised supertäiuslikud arvud avalduvad kujul 2^{p-1} , kus p on selline positiivne täisarv, et $2^p - 1$ on algarv.

Tõestus. Olgu $n = 2^{p-1}$, kusjuures $2^p - 1$ on algarv. Sel juhul $\sigma(n) = 2^p - 1$. Kui $2^p - 1$ on algarv, siis $\sigma(\sigma(n)) = 2^p = 2 \cdot 2^{p-1} = 2n$ ja järelikult n on supertäiuslik.

Olgu nüüd n paarisarvuline supertäiuslik arv ja oletame vastuväiteliselt, et arvul n leidub ka paaritu tegur q , s.t $n = 2^{k-1} q$, kus $k \geq 2$ ja q on paaritu arv. Sel juhul saame, et

$$2n = 2^k q = \sigma(\sigma(n)) = \sigma((2^k - 1)\sigma(q)).$$

Kui $q > 1$, siis arvul $(2^k - 1)\sigma(q)$ on vähemalt kolm erinevat positiivset jagajat $(2^k - 1)\sigma(q)$, $\sigma(q)$ ja $2^k - 1$. Seega $\sigma((2^k - 1)\sigma(q)) \geq 2^k \sigma(q) + 2^k - 1 > 2^k q$. Oleme saanud vastuolu ja järelikult $q = 1$. Sel juhul $2^k = \sigma(2^k - 1)$. See võrdus saab aga kehtida vaid juhul kui $2^k - 1$ on algarv. ■

Tänapäeval on jõutud üldistustega (k,m) -supertäiuslike arvudeni, s.o positiivsete täisarvudeni n , mille korral $\sigma^k(n) = mn$.

Täiuslik arv on võrdne kõigi oma positiivsete pärisjagajate summaga. Täiuslikkuse tingimuse lõdvendamisel saadakse uus liik arve [65].

Definitsioon 1.1.7. Positiivne täisarv n on *pseudotäiuslik arv* ehk *pooltäiuslik arv* (*pseudoperfect number*, *semiperfect number*), kui arvu n on võimalik esitada mõne (või kõikide) oma pärsijagajate summana.

Näiteks arv 20 on pooltäiuslik, sest arvu 20 pärsijagajad on 1, 2, 4, 5 ja 10 ning $20 = 1 + 4 + 5 + 10$.

Esimesed pooltäiuslikud arvud on: 6, 12, 18, 20, 24, 28, 30, 36, 40 [53, A005835].

Toodud definitsioonide põhjal saame teha järgmised järeldused.

Järeldus 1.1.3. Iga täiuslik arv on pooltäiuslik arv.

Järeldus 1.1.4. Puuduga arv ei saa olla pooltäiuslik arv.

Lause 1.1.19. Iga pooltäiusliku arvu kordne on pooltäiuslik arv.

Tõestus. Olgu n pooltäiuslik arv. Sel juhul leiduvad arvu n pärisjagajad $d_1 < d_2 < \dots < d_m < n$ nii, et $n = d_1 + d_2 + \dots + d_m$. Vaatame arvu kn , kus täisarv $k > 0$. Arvu kn pärisjagajateks on kindlasti arvud $kd_1, kd_2, \dots, kd_m$. Leiame nende summa

$$kd_1 + kd_2 + \dots + kd_m = k(d_1 + d_2 + \dots + d_m) = kn.$$

Järelikult arv kn on esitatav oma pärisjagajate summana ja on pooltäiuslik arv. ■

1.1.5. Puuduga ja liiaga arvud

Erinevalt täiuslikest arvudest, on puuduga ja liiaga arvude hulkade lõpmatus kergesti näidatav, seejuures on mõlemal juhul isegi näha, et nii paarituid- kui paarisarve on nende seas lõpmata palju.

Anname mõned selliste lõpmatute jadade konstrueerimise võimalused, tuginedes allikatele [61], [47] ning vaatleme puuduga arvude ja liiaga arvude mõningaid erijuhte.

Lause 1.1.20. Leidub lõpmata palju puuduga paarisarve ja puuduga paarituid arve.

Tõestus. Kõik paaritud algarvud p on puuduga arvud, sest $\sigma(p) = p + 1 < 2p$ ja seega on ka puuduga paarituid arve lõpmatult palju.

Kõik arvud kujul $2p$, kus algarv $p > 5$, on paarisarvud ja puuduga arvud, sest $\sigma(2p) = \sigma(2)\sigma(p) = 3(p + 1) < 4p$, kui $p > 5$. Selliseid arve on lõpmata palju. ■

Võimaluse konstrueerida liiaga arvude lõpmatuid alamjadasid annab järgmine tulemus.

Lause 1.1.21. Iga täiusliku arvu kordne, mis on suurem arvust endast, ning iga liiaga arvu kordne on liiaga arv.

Tõestus. Kui arv n on täiuslik või liiaga arv, siis $\sigma(n) \geq 2n$. Vaatame arvu n kordset arvu kn , kus täisarv $k > 1$. Sel juhul $\sigma(kn) > k\sigma(n) \geq 2kn$. Seega arv kn on liiaga arv. ■

Järeldus 1.1.5. Liiaga paarisarve ja liiaga paarituid arve on lõpmata palju.

Täiusliku arvu kordsetest erinevalt on täiusliku arvu pärisjagajad puuduga arvud.

Lause 1.1.22. Iga täiusliku arvu iga pärisjagaja on puuduga arv.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et täiuslikul arvul n leidub pärisjagaja d nii, et $\sigma(d) \geq 2d$.

Seega

$$2n = \sigma(n) = \sigma\left(\frac{n}{d} \cdot d\right) > \frac{n}{d} \sigma(d) \geq \frac{n}{d} 2d = 2n.$$

Oleme saanud vastuolu ja järelikult täiuslikul arvul ei saa olla ei liiaga ega täiuslikku pärisjagajat. ■

Huvi on pakkunud ka mitmed teised puuduga ja liiaga arvude alaliigid. Neist esmalt vaatleme arve, mille pärisjagajate summa on ühe võrra väiksem või suurem arvust endast ja millele definitsioonid on antud allikas [65].

Definitsioon 1.1.8. Puuduga arv n on *peaaegu täiuslik arv (almost perfect number)* ehk *vähima puuduga arv (least deficient number)*, kui arvu n positiivsete jagajate summa on $2n - 1$.

Sellisteks arvudeks on arvu 2 positiivsete täisarvuliste astendajatega astmed, sest $\sigma(2^k) = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$.

Tõestamist või siis ümberlükkamist ootab hüpotees, et peaaegu täiuslikud arvud ongi ainult arvu 2 astmed [65].

Järgmine liiaga arvude alaliik on küll defineeritud P. Cattaneo [11] poolt 1951. aastal, kuid seni pole leitud ühtegi sellist arvu [65].

Definitsioon 1.1.9. Liiaga arv n on *kvaasitäiuslik arv (quasiperfect number)* ehk *vähima liiaga arv (least abundant number)*, kui arvu n positiivsete jagajate summa on $2n + 1$.

Aastal 1982 näitasid P. Hags ja C.L. Cohen, et kui leiduks kvaasitäiuslikke arve, siis need oleksid paaritud täisruudud, millel on vähemalt 7 erinevat positiivset jagajat ning need kvaasitäiuslikud arvud oleksid suuremad kui 10^{35} [13].

Järgnevalt vaatleme liiaga arvude erijuhtu, mis on välja toodud jadade entsüklopeedias [53] ja leiavad ka tutvustamist T. Trotteri kodulehel [62].

Lause 1.1.23. Kui $2^m - j - 1$, kus j on positiivne täisarv, on paaritu algarv, siis arv $n = 2^{m-1}(2^m - j - 1)$ on liiaga arv ning seejuures $\sigma(n) - 2n = j$.

Tõestus. Vaatleme vahet $\sigma(n) - 2n = (2^m - 1)(2^m - j) - 2^m(2^m - j - 1) = j$. Järelikult n on liiaga arv ja $\sigma(n) - 2n = j$. ■

Näiteks juhul $m = 3$ ja $j = 2$ on $2^m - j - 1 = 5$ paaritu algarv ja $n = 2^{m-1}(2^m - j - 1) = 20$ liiaga arv, kusjuures $\sigma(20) - 2 \cdot 20 = 2 = j$.

Vaatleme liiaga arvude erijuhtu, kus $\sigma(n) - 2n = j$ ning positiivne täisarv $j = 2d$, kus d on arvu n pärisjagaja.

Definitsioon 1.1.10. Positiivne täisarv n on *imetlusväärne arv* (*admirable number*), kui arvul n leidub pärisjagaja d nii, et kõigi positiivsete jagajate summa on $2n + 2d$.

Näiteks arv 20 on imetlusväärne, sest $\sigma(20) = 42 = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 1$.

Esimesed imetlusväärsed arvud on: 12, 20, 24, 30, 40, 42, 54, 56, 66, 70, 78 [53, A111592].

Lause 1.1.24. Kui $2^m - 2^k - 1$ on paaritu algarv, siis arv $n = 2^{m-1}(2^m - 2^k - 1)$ on imetlusväärne arv.

Tõestus. Leiame vahe $\sigma(n) - 2n = (2^m - 1)(2^m - 2^k) - 2^m(2^m - 2^k - 1) = 2^k = 2 \cdot 2^{k-1}$. Kuna $2^m - 2^k - 1$ on paaritu algarv, siis $k < m$ ja järelikult 2^{k-1} on arvu n pärisjagaja. ■

Jadade entüklopeedias [53] on välja toodud ja defineeritud sellised puuduga arvud, kus arvu positiivsete jagajate summa on arvu kahekordsest väiksem arvu positiivsete jagajate arvu võrra.

Definitsioon 1.1.11. Positiivne täisarv n on *diedraalne täiuslik arv* (*dihedral perfect number*), kui arvu positiivsete jagajate summa ja positiivsete jagajate arvu summa on $2n$, s.t $\sigma(n) + \tau(n) = 2n$.

Esimesed diedraalsed täiuslikud arvud on: 1, 3, 14, 52, 130, 184, 656, 8648, 12008, 34688, 2118656 [53, A083874].

Lause 1.1.25. Kui $2^{m+1} + 2m + 1$ on paaritu algarv, siis arv $n = 2^m(2^{m+1} + 2m + 1)$ on diedraalne täiuslik arv.

Tõestus. Leiame vahe

$$2n - \sigma(n) = 2^{m+1}(2^{m+1} + 2m + 1) - (2^{m+1} - 1)(2^{m+1} + 2m + 2) = 2(m + 1) = \tau(n). \blacksquare$$

Järgmisena defineeritavaid arve nimetatakse E. Redi raamatus [47, lk 53] *suurepäraseks*. Käesoleva töö autorile tundus sobivam tõlge aga olevat *veider arv*.

Definitsioon 1.1.12. Positiivne täisarv on *veider arv* (*weird number*), kui selle pärisjagajate summa on arvust suurem ning arvu ei ole võimalik esitada oma pärisjagajate summana.

Seega on veidrad arvud liiaga arvud, mis ei ole pooltäiuslikud arvud.

Esimesed veidrad arvud on: 70, 836, 4030, 5830, 7192, 7912, 9272, 10430 [53, A006037].

Veidraid arve on seni teada 24 ja kõik need on paarisarvud ning väiksemad kui, kuigi on tõestatud, et veidraid arve on lõpmata palju 10^6 ([65], mai 2010).

Lause 1.1.26. Kui n on veider arv ja algarv p on suurem kui $\sigma(n)$, siis ka korrutis np on veider arv.

Tõestus. Olgu n veider arv ja algarv $p > \sigma(n)$. Arvu np jagajad on arvud d ja dp , kus arv d on arvu n jagaja. Kuna $p > \sigma(n) > n$, siis kõik need arvud on erinevad.

Oletame vastuväiteliselt, et arvu np saab esitada oma pärisjagajate summana $np = d_1 + d_2 + \dots + d_r + pt_1 + pt_2 + \dots + pt_s$. Sel juhul summa $d_1 + d_2 + \dots + d_r$ jagub arvuga p . Kuna aga $p > \sigma(n) \geq d_1 + d_2 + \dots + d_r$, siis $d_1 + d_2 + \dots + d_r = 0$ ja saame võrduse $n = t_1 + t_2 + \dots + t_s$, mis tähendab, et n esitub oma pärsijagajate summana. Oleme saanud vastuolu ning arv np ei avaldu oma pärisjagajate summana. $\blacksquare$

Järgnevate liiaga arvude eristamise aluseks teistest liiaga arvudest on vaadeldud nende pärisjagajaid. Jadade entsüklopeediast [53] leiab kaks erinevalt defineeritud, kuid sama nimetusega jada.

Definitsioon 1.1.13. Positiivne täisarv on *primitiivse liiaga arv* (*primitive abundant numbers*), kui arv on liiaga arv, mille kõik pärsijagajad on puuduga arvud.

Esimesed primitiivsed liiaga arvud definitsiooni 1.1.13 järgi on: 20, 70, 88, 104, 272, 304, 368, 464, 550, 572, 650, 748, 836, 945, 1184, 1312, 1376, 1430, 1504, 1575 [53, A071395].

Definitsioon 1.1.14. Positiivne täisarv on *primitiivse liiaga arv* (*primitive abundant numbers*), kui arv on liiaga arv, mille ükski pärsijagaja ei ole liiaga arv.

Esimesed primitiivsed liiaga arvud definitsiooni 1.1.14 järgi on: 12, 18, 20, 30, 42, 56, 66, 70, 78, 88, 102, 104, 114, 138, 174, 186, 196, 222, 246, 258, 272, 282 [53, A091191].

On selge, et kõik definitsiooni 1.1.14 mõttes primitiivsed liiaga arvud on seda ka definitsiooni 1.1.13 mõttes.

Liiaga arvude üldistustena defineeritakse [65] järgmised arvud.

Definitsioon 1.1.15. Positiivne täisarv n on *üliliiaga arv* (*highly abundant number*), kui iga positiivse täisarvu $m < n$ korral kehtib võrratus $\sigma(m) < \sigma(n)$.

Esimesed üliliiaga arvud on: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 30 [53, A002093].

Järgneva mõiste võtsid kasutusele L. Alaoglu ja P. Erdős [2].

Definitsioon 1.1.16. Positiivne täisarv n on *üliküllane arv* (*superabundant number*), kui iga positiivse täisarvu $m < n$ korral kehtib võrratus $\frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{n}$.

Esimesed üliküllased arvud on: 1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260, 1680, 2520, 5040, 10080, 15120 [53, A004394].

Definitsioon 1.1.17. Positiivne täisarv n on *tohutu liiaga arv* (*colossally abundant number*), kui leidub $\varepsilon > 0$ nii, et kehtib $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}} < \frac{\sigma(k)}{k^{1+\varepsilon}}$ iga $k > 1$ korral.

Esimesed tohutu liiaga arvud on: 2, 6, 12, 60, 120, 360, 2520, 5040, 55440, 720720 [53, A004490].

1.2. Täisarvude positiivsete jagajate summade abil määratud paarid ja alikvootjad

Leidub positiivseid täisarve, millel positiivsete jagajate summad on võrdsed. Näiteks arvudel 6 ja 11 mõlemal on positiivsete jagajate summa 12, seejuures aga nende pärisjagajate summad on erinevad. Käesolevas osas vaatlemegi arve, kus arvud on üksteisega seotud oma positiivsete jagajate või pärisjagajate summade abil.

1.2.1. Sõbralikud arvud

Juba 4. sajandil enne meie aega teati Antiik-Kreekas, et arvude 220 ja 284 paar on eriline, sest arvu 220 pärisjagajate summa on $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ ja arvu 284 pärisjagajate summa on $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. Need olid pikka aega ainsad teadaolevad sellise omadusega arvud. Tõenäoliselt järgmised sellised arvud 17296 ja 18416 leidis Thabit ibn Qurra alles 9. sajandil. 17. sajandil Fermat taasavastas paari 17296 ja 18416 ja Descartes leidis järgmise selliste arvude paari 9363584 ja 9437056. [4]

Definitsioon 1.2.1. Positiivsed täisarvud a ja b on *sõbralikud arvud* (*amicable pair*), kui kumbki neist on võrdne teise pärisjagajate summaga, s.t kui $\sigma(a) - a = b$ ja $\sigma(b) - b = a$.

Definitsioonist järeldub vahetult järgmine tulemus.

Järeldus 1.2.1. Positiivsed täisarvud a ja b on sõbralikud arvud parajasti siis, kui

$$\sigma(a) = \sigma(b) = a + b.$$

Esimesed sõbralikud arvud paaridena on: (220, 284), (1184, 1210), (2620, 2924) (5020, 5564), (6232, 6368), (10744, 10856), (12285, 14595) [53, A002025, A002046].

Järgmine teoreem annab teadaolevalt esimese algebralise meetodi sõbralike arvude leidmiseks.

Teoreem 1.2.1. (Thabit). Kui täisarvu $n > 1$ korral arvud $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ ja $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ on algarvud, siis arvud $M = 2^n \cdot p \cdot q$ ja $N = 2^n \cdot r$ on sõbralikud arvud.

Tõestus. Olgu p, q ja r algarvud ning $M = 2^n \cdot p \cdot q$ ja $N = 2^n \cdot r$.

Leiame arvude M ja N kõigi positiivsete jagajate summa

$$\begin{aligned}\sigma(M) &= \sigma(2^n \cdot p \cdot q) = \sigma(2^n)\sigma(p)\sigma(q) = \sigma(2^n)\sigma(3 \cdot 2^{n-1} - 1)\sigma(3 \cdot 2^n - 1) = \\ &= (2^{n+1} - 1)(3 \cdot 2^{n-1})(3 \cdot 2^n) = 9 \cdot 2^{2n-1}(2^{n+1} - 1),\end{aligned}$$

$$\sigma(N) = \sigma(2^n \cdot r) = \sigma(2^n)\sigma(9 \cdot 2^{2n-1} - 1) = 9 \cdot 2^{2n-1}(2^{n+1} - 1).$$

Arvude M ja N summa on

$$\begin{aligned}M + N &= 2^n(p \cdot q + r) = 2^n((3 \cdot 2^{n-1} - 1)(3 \cdot 2^n - 1) + (9 \cdot 2^{2n-1} - 1)) = \\ &= 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 9 \cdot 2^{2n-1}) = 2^n(9 \cdot 2^{2n} - 9 \cdot 2^{n-1}) = 2^n(9 \cdot 2^{n-1}(2^{n+1} - 1)) = \\ &= 9 \cdot 2^{2n-1}(2^{n+1} - 1).\end{aligned}$$

Seega $\sigma(M) = \sigma(N) = M + N$. ■

Kui $n < 20000$, siis Thabiti teoreemi järgi moodustuvad sõbralike arvude paarid vaid juhul, kui $n = 2, 4$ ja 7 [65].

Aastal 1747 avaldas Euler artiklis *De Numeris Amicabilibus* 30 paari sõbralikke arve. Nende seas olid mõned juba teadaolevad paarid. Neist XIII paar ei ole tegelikult sõbralike arvude paar. Seejuures ei olnud kirjeldatud kuidas ta need leidis. [21]

Tänapäeval teatakse järgmist eeskirja *Euleri eeskirjana* sõbralike arvude paari leidmiseks.

Kui n ja m on positiivsed täisarvud nii, et $1 \leq m \leq n-1$ ning arvud $p = 2^m(2^{n-m} + 1) - 1$, $q = 2^n(2^{n-m} + 1) - 1$ ja $r = 2^{n+m}(2^{n-m} + 1)^2 - 1$ on kõik algarvud, siis arvud $M = 2^n \cdot p \cdot q$ ja $N = 2^n \cdot r$ moodustavad sõbralike arvude paari.

Juhul kui Euleri eeskirjas võtta $n - m = 1$, saame Thabit'i eeskirja.

Siiani ei ole teada, kas sõbralikke arve on lõpmata palju või mitte. Seni leitud sõbralike arvude paari kuuluvatel arvudel on arvust 1 suurem ühine tegur ja paari kuuluvad arvud on sama paarsusega. Siiani ei ole ka teada, kas leidub või ei leidu sõbralike arvude paari, milles üks oleks paaris- ja teine paaritu arv. On teada, et kui leiduks erineva paarsusega sõbralike arvude paar, siis paaritu arv peaks olema täisruut ja paarisarv peaks olema arvu 2 positiivse täisarvulise astendajaga astme ja paaritu täisruudu korrutis [19]. Samuti ei ole teada, kas leidub ühistegurita sõbralike arvude paari, kuid kui selline paar peaks leiduma, peaks neist kumbki olema suurem kui 10^{60} [28].

Sõbralike arvude üldistustena on vaadeldud ka järgmisi paare [65].

Definitsioon 1.2.2. Positiivsed täisarvud m ja n on *kvaasisõbralikud arvud* (*quasiamicable pair, betrothed numbers*), kui nende arvude positiivsete jagajate summad on võrdsed arvuga $m + n + 1$, s.t $\sigma(m) = \sigma(n) = m + n + 1$.

Esimesed kvaasisõbralike arvude paarid on: (48, 75), (140, 195), (1050, 1925), (1575, 1648) [53, A005276].

Definitsioon 1.2.3. Positiivsed täisarvud m ja n on *peaaegu sõbralikud arvud* (*augmented amicable pair*), kui nende positiivsete jagajate summad on võrdsed arvuga $m + n - 1$, s.t $\sigma(m) = \sigma(n) = m + n - 1$.

Esimesed peaaegu sõbralike arvude paarid on: (6160, 11697), (12220, 16005), (23500, 28917) [53, A007992, A015630].

Teadagi on 420 peaaegu sõbralike arvude paari, kus väiksem arvudest on väiksem kui 10^{10} [38].

Kõik teadaolevad nii kvaasisõbralike arvude paarid kui ka peaaegu sõbralike arvude paarid koosnevad erineva paarsusega arvudest. Pole teada, kas ühte paari saavad kuuluda sama paarsusega arvud.

Sõbralike arvude üldistusena on saadud *seltskondlikud arvud* (*sociable numbers*) [47, lk 55].

Definitsioon 1.2.4. Positiivsed täisarvud $a_1, a_2, \dots, a_k$ moodustavad *seltskondlike arvude k -tsükli* (*k -sociable numbers*), kui iga järgnev arv on eelmise pärisjagajate summa ning viimase arvu pärisjagajate summa on võrdne esimese arvuga.

Erijuhul, kui $k = 2$, saame sõbralike arvude paari. Seni pole teada näiteks ühtegi seltskondlike arvude 3-tsükli [65]. Näiteks arvu 12496 korral saame vähimate arvudega seltskondlike arvude 5-tsükli: 12496, 14288, 15472, 14536, 14264, 12496.

1.2.2. Lahked arvud

Inglisekeelses kirjanduses on defineeritud kaks erinevat arvude liiki: *amicable pair* ja *friendly pair* [65]. Need nimetused on tekitanud segadusi, sest mõnikord neid kasutatakse sünonüümidenä. Nii näiteks on P. Hoffman [32] ja T.L. Heat [29] kasutanud mõistet *friendly pair* eelnevalt vaadeldud sõbralike arvude (*amicable pair*) kohta.

Esimesena nimetatud (*amicable pair*) arvud on eesti keeles juba varem nimetatud *sõbralikeks arvudeks* [1, 47], teistel seni puudub eestikeelne vaste. Käesolevas töös on neid arve nimetatud *lahkete arvude paariks*. Mõiste *Friendly Pair* võtsid kasutusele 1977. aastal C.W. Anderson ja D. Hickerson [3].

Definitsioon 1.2.5. Positiivsed täisarvud m ja n moodustavad *lahkete arvude paari* (*friendly pair*), kui ühe arvu positiivsete jagajate summa ja arvu enda jagatis on võrdne teise arvu positiivsete jagajate summa ja arvu enda jagatise, s.t kui $\frac{\sigma(m)}{m} = \frac{\sigma(n)}{n}$.

Näiteks 84 ja 270 on selline arvude paar, sest $\frac{\sigma(84)}{84} = \frac{224}{84} = \frac{8}{3}$ ja $\frac{\sigma(270)}{270} = \frac{720}{270} = \frac{8}{3}$.

Esimesed lahkete arvude paarid, kus väikseima arvu paariliseks on vähim võimalik arv, on: (6, 28), (30, 140), (80, 200), (40, 224), (12, 234), (84, 270), (66, 308) [53, A050972, A050973].

On võimalik vaadelda ka lahkete arvude kolmikuid, mille korral siis $\frac{\sigma(m)}{m} = \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\sigma(k)}{k}$.

Näiteks moodustavad sellise kolmiku arvud (2160, 5400, 13104).

Üldiselt võib vaadelda ka enamast kui kolmest arvust koosnevaid lahkete arvude hulki. Neid nimetatakse *lahkete arvude n-ikuks* (loe: ennikuks) (*friendly n-tuple*).

Sisse on toodud ka *lahke arvu* mõiste (*friendly number*) [65].

Definitsioon 1.2.6. Positiivne täisarv n on *lahke arv* (*friendly number*), kui leidub vähemalt üks selline positiivne täisarv m , mille korral $\frac{\sigma(m)}{m} = \frac{\sigma(n)}{n}$, ehk kui ta kuulub vähemalt ühte lahkete arvude paari.

Lahkete arvude definitsioonist saab teha vahetu järelduse.

Järeldus 1.2.2. Kõik täiuslikud arvud on lahked arvud.

Huvi on pakkunud ka sellised positiivsed täisarvud, mis ei kuulu ühtegi lahkete arvude paari.

Definitsioon 1.2.7. Positiivne täisarv on *üksildane arv* (*solitary number*), kui see arv ei ole lahke arv.

Üksildased arvud on kindlasti kõik algarvud ja algarvude astmed ning arvud, mille korral arv ja selle positiivsete jagajate summa on ühistegurita [65].

Üksildaste arvude seast on välja eraldatud näiteks järgmised alamhulgad:

- 1) arvud, mis ei ole algarvu astmed, aga on ühistegurita oma positiivsete jagajate summaga, näiteks 21, 35, 36, 39, 50, 55, 57, 63 [53, A095739],
- 2) arvud, millel on oma positiivsete jagajate arvuga ühest suurem ühine tegur, näiteks 18, 45, 48, 52, 136, 148, 160, 162, 176, 192, 196, 208, 232, 244, 261, 272, 292, 296, 297, 304, 320, 352, 369 [53, A095738].

Samas ei ole veel kõikide arvude korral teada, kas nad on üksildased või mitte. Näiteks on sellisteks arvudeks 10, 14, 15, 20 [65].

1.2.3. Täisarvude alikvootjadad

Täisarvu positiivsete pärisjagajate summa abil, on defineeritud teatud täisarvude jadad, mida nimetatakse alikvootjadadeks (*aliquot sequences*). Lühiülevaate neist annab E. Redi oma artiklis [48].

Definitsioon 1.2.8. Positiivsete täisarvude jada on *alikvootjada*, kui selle jada iga element alates teisest on eelneva arvu kõigi pärisjagajate summa.

Näiteks arvu 20 alikvootjada on $\{20, 10, 8, 7, 1\}$. Kuna jada lõpus olev arv 1 saadakse vaid algarvust, siis viimane liige 1 jäetakse sageli kirjutamata ja selle jada viimaseks liikmeks loetakse arvule üks eelnevat algarvu.

Alikvootjadad võivad olla ka lõpmatud.

Näiteks arvu 6 alikvootjada on $\{6, 6, \dots\}$, arvu 220 alikvootjada aga $\{220, 284, 220, 284, \dots\}$.

Alikvootjadade pikkus ja iseloom sõltub sageli just jada esimesest arvust. Teadaolevalt võivad esineda järgmised olukorrad.

- 1) Kuna täiuslik arv võrdub oma pärisjagajate summaga, siis täiusliku arvu alikvootjada on lõpmatu jada, kus kordub see täiuslik arv. Näiteks $\{28, 28, \dots\}$.
- 2) Alikvootjada algab küll mittetäiusliku arvuga, aga teatud kohast alates hakkab üks arv lõpmatult korduma. Näiteks arvu 95 alikvootjada on $\{95, 25, 6, 6, \dots\}$.

Märkus: Selliseid arve, mille alikvootjadas jääb korduma üks ja sama arv nimetatakse ka *edasipüüdlikeks arvudeks* (*aspiring number*).

Esimesed mittetäiuslikud edasipüüdlikud arvud on: 25, 95, 119, 143, 417, 445 [53, A063769].

3) Alikvootjada on lõpmatu, aga kooseb ainult kahest vahelduvalt korduvast arvust. Sellised jadad tekivad sõbralike arvude korral.

Näiteks arvu 1184 alikvootjada on $\{1184, 1210, 1184, \dots\}$.

4) Alikvootjada on lõpmatu, aga koosneb $k \geq 3$ erinevast, aga tsükliliselt korduvast arvust ehk seltskondlike arvude k -tsüklist.

Näiteks arvu 1264460 korral saame alikvootjada

$\{1264460, 1547860, 1727636, 1305184, 1264460, \dots\}$.

Alikvootjada korduvat osa nimetatakse alikvoottsükliks ning arvu k selle pikkuseks [48].

Ei ole teada, kas kõik alikvootjadad on lõplikud või tsüklilised, sest mõningate arvude alikvootjadad on senini määramata, kuna on jõutud nii suurte arvudeni, mille tegurid ei ole teada. Selliste alikvootjadade kohta öeldakse *määramata lõpuga alikvootjadad*. [48].

Arvust 1000 väiksemate arvude seas ei ole alikvootjadad teada näiteks arvude 276, 552, 564, 660 ja 966 jaoks. Neid nimetatakse *Lehmeri viisikuks*. Praeguseks on arvust 10000 väiksemate positiivsete täisarvude seas 81 määramata lõpuga arvu, arvust 100000 väiksemate seas 904 ja miljonist väiksemate arvude seas 9317 määramata lõpuga arvu, nende seas ka 2010. [65],[59]

E. Catalan püstitas 1888. aastal hüpoteesi, mida L.E. Dickson laiendas 1975. aastal.

Catalani-Dicksoni hüpotees: Iga alikvootjada lõpus on kas algarv, täiuslik arv või alikvoottsükkel.

Hüpotees püsib tänapäevani.

On uuritud ka lõplikke alikvootjadasid, mis lõppevad ühe ja sama algarvuga [48].

Definitsioon 1.2.9. Algarvuga p lõppevad alikvootjadad moodustavad *algarvu p pere* (*p -aliquot tree*). [48]

Näiteks algarvu 7 pere esimesed arvud on 8, 10, 14, 22, 38, 49, 75,

sest $\{8, 7\}$; $\{10, 8, 7\}$, $\{14, 10, 8, 7\}$, $\{22, 14, 10, 8, 7\}$, $\{38, 22, 14, 10, 8, 7\}$, $\{49, 8, 7\}$, $\{75, 49, 8, 7\}$,.....

On selge, et algarvudel 2 ja 5 ei saa olla peres peale nende endi ühtegi arvu, sest ei leidu ühtegi arvu, mille pärisjagajate summa oleks kas 2 või 5.

Definitsioon 1.2.10. Positiivne täisarv on *kättesaamatu arv* (*untouchable number*), kui see ei ole ühegi täisarvu pärisjagajate summaks.

Esimesed kättesaamatud arvud on: 2, 5, 52, 88, 96, 120, 124, 146 [53,A005114].

Lause 4.9.3 põhjal on lõpmata palju selliseid arve, mis ei ole ühegi arvu positiivsete jagajate summaks. Seega leidub ka lõpmata palju arve, mis ei ole ühegi arvu pärisjagajate summaks.

Järeldus 1.2.3. Kättesaamatuid arve on lõpmata palju.

Kui kehtiks Goldbach'i hüpotees, siis arv 5 oleks ainus paaritu kättesaamatu arv ning arvud 2 ja 5 oleks ainsad algarvud, mis kuuluvad ainsana oma peresse.

Selle tõestuseks olgu meil $2n+1 > 7$. Siis Goldbach'i hüpoteesi kohaselt leiduvad erinevad algarvud p ja q nii, et $2n = p + q$, kus p ja q on erinevad algarvud. Seega arvu pq pärisjagajate summa oleks $1 + p + q = 2n + 1$. Seega arv $2n + 1$ ei saa olla kättesaamatu.

Arvud 3 ja 7 ei ole kättesaamatud, need on vastavalt arvude 4 ja 8 pärisjagajate summad.

1.3. Praktilised arvud

Positiivse täisarvu positiivsete jagajate summasid võib võrrelda arvu endaga, aga võib võrrelda ka teiste arvudega. Ideed avaldada antud arvust väiksemaid arve vaadeldava arvu jagajate summadena olid tuntud juba antiikajal.

1.3.1. Põhimõisted

Mõiste *praktiline arv* (*practical number*) võttis kasutusele A.K. Srinivasan 1948. aastal [54].

Definitsioon 1.3.1. Positiivne täisarv n on *praktiline arv*, kui iga temast väiksem positiivne täisarv on kas arvu n jagaja või on esitatav arvu n erinevate positiivsete jagajate summana.

Näiteks 16 on praktiline arv, sest arvud 1, 2, 4 ja 8 on ise arvu 16 pärisjagajad ning ülejäänud arvust 16 väiksemad positiivsed täisarvud on esitatavad arvu 16 erinevate jagajate summana: $3 = 1 + 2$, $5 = 1 + 4$, $6 = 2 + 4$, $7 = 1 + 2 + 4$, $9 = 1 + 8$, $10 = 2 + 8$, $11 = 1 + 2 + 8$, $12 = 4 + 8$, $13 = 1 + 4 + 8$, $14 = 2 + 4 + 8$ ja $15 = 1 + 2 + 4 + 8$.

Samas arv 10 ei ole ülaltoodud definitsiooni mõttes praktiline arv, sest näiteks arvu 4 ei ole võimalik esitada arvu 10 positiivsete jagajate 1, 2 ja 5 summana ilma jagajaid 1 või 2 korduvalt kasutamata.

Srinivasan leidis oma definitsioonist lähtuvalt kõik arvust 200 mitte suuremad praktilised arvud ning tegi ka esimesed tähelepanekud nende arvude kohta.

Esialgsed põhjused praktiliste arvude uurimiseks on olnud tõepoolest „praktilised“. Srinivasan huvi praktilistest arvudest lähtudes vajadusest leida otstarbekad kaalu- ja rahasüsteemid. Tuli leida vastuseid küsimustele: „Millised peaksid olema kaaluvihide massid või rahatähtede suurused, et saaks kaaluda kõiki massist n väiksemaid masse või saaks tasuda kõiki summast n väiksemaid rahasummasid?“.

Teine praktiliste arvude kasutusvaldkond on olnud seotud Vana-Egiptuse murdudega. Praktilisi arve (ilma neile nimetust omistamata) kasutas juba Fibonacci oma teoses *Liber Abaci* (1202), kus ta uuris meetodeid ratsionaalarvu $\frac{m}{n}$ ($m < n$) esitamiseks erinevate

ühikmurdude summana nagu tehti seda iidse Egiptuses. Ühe võimaliku variandina tõi Fibonacci välja võimaluse leida lugeja m esitus nimetaja n jagajate summana nii, et

$\frac{m}{n} = \frac{d_1}{n} + \frac{d_2}{n} + \dots + \frac{d_k}{n}$, kus d_i on arvu n positiivsed jagajad. Siit ka järeldus, et

ratsionaalarvu $\frac{m}{n}$ saab esitada ühikmurdude summana, kui nimetaja n on praktiline arv.

Fibonacci tõi välja ka nimetaja n väärtused 6, 8, 12, 20, 24, 60 ja 100, mille korral see tal õnnestus.

Näiteks:

$$\frac{13}{20} = \frac{10}{20} + \frac{2}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}.$$

Hilisemad Egiptuse murdude uurijad on praktilisi arve nimetanud ka *panaritmilisteks arvudeks* (*panarithmic numbers*) [49] ja [30].

Definitsiooni 1.3.1 mõttes saadud arve defineeritakse kaasajal põhiliselt järgmisel viisil [65].

Definitsioon 1.3.2. Positiivne täisarv n on *praktiline arv*, kui iga positiivse täisarvu k , kus $1 \leq k \leq n$, saab esitada arvu n erinevate positiivsete jagajate summana.

Definitsiooni 1.3.2 järgi on esimesed praktilised arvud: 1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 54 [53, A005153].

Aastal 1973 defineeris R. Honsberger praktilised arvud arvu pärisjagajate kaudu [31].

Definitsioon 1.3.3. Positiivne täisarv n on *praktiline arv*, kui iga positiivse täisarvu k , kus $1 \leq k \leq n$, saab esitada arvu n ($n > 1$) erinevate positiivsete pärisjagajate summana.

Definitsiooni 1.3.3 järgi on esimesed praktilised arvud: 1, 6, 12, 18, 20, 24, 28, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100, 104, 108, 112 [53, A007620].

Definitsiooni 1.3.3 järgi ei ole arvu 2 positiivse täisarvulise astendajaga aste praktiline arv, sest arvu 2^k pärisjagajate summa on $2^k - 1$. Erandina loetakse nende arvude hulka ka arv 1. Käesolevas töös, nii nagu ka selles töös refereeritud artikliteski, kasutatakse praktiliste arvude mõistet definitsiooni 1.3.2 mõttes.

1.3.2. Põhitulemused

Kuna ühest suurema paaritu arvu n korral ei ole võimalik arvu $2 < n$ esitada arvu n erinevate positiivsete jagajate summana, siis definitsioonist 1.3.2 järeldub järgmine tulemus.

Järeldus 1.3.1. Arv 1 on ainus paaritu praktiline arv.

Järgnevad olulised tulemused ja nende tõestuste ideed pärinevad B.M. Stewarti, G. Melfi, M. Margensterni ning D.F. Robinsoni töödest [56], [37], [34],[49].

Lemma 1.3.1. Kui praktilise arvu n positiivsed jagajad on $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_r = n$, siis iga $k \in \{1, \dots, r-1\}$ korral kehtib võrratus

$$d_{k+1} - 1 \leq \sum_{i=1}^k d_i .$$

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leidub selline indeks j , kus $1 \leq j \leq r-1$, mille korral

$d_{j+1} - 1 > \sum_{i=1}^j d_i$. Kuna arv n on praktiline arv, siis peaks arv $d_{j+1} - 1 < d_{j+1} \leq n$ esituma arvu

n positiivsete jagajate summana. Viimase ahelvõrratuse põhjal, ei saa sellesse summasse

kuuluda ükski jagajast d_j suurem jagaja. Tehtud oletusest $d_{j+1} - 1 > \sum_{i=1}^j d_i$ järeldub, et ainult

jagajatest $d_1, d_2, \dots, d_j$ ei piisa arvu $d_{j+1} - 1$ avaldamiseks arvu n jagajate summana. Saime

vastuolu. Seega võrratus $d_{k+1} - 1 \leq \sum_{i=1}^k d_i$ peab kehtima iga $k \in \{1, \dots, r-1\}$ korral. ■

Tõestame nüüd ühe põhitulemustest.

Teoreem 1.3.1. Positiivne täisarv n on praktiline arv parajasti siis, kui iga täisarv m , kus $1 \leq m \leq \sigma(n)$, on esitatav arvu n erinevate positiivsete jagajate summana.

Tõestus. Kuna positiivse täisarvu n korral $n < \sigma(n)$, siis tingimusest, et iga täisarv m , kus $1 \leq m \leq \sigma(n)$, on esitatav arvu n erinevate positiivsete jagajate summana, piisab selleks, et arv n oleks praktiline arv.

Olgu n praktiline arv positiivsete jagajatega $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_r = n$. Kui $n = 1$, on teoreemi tingimus täidetud. Olgu $n \geq 2$. Siis n on paarisarv (järgeldus 1.3.1) ning $d_1 = 1$ ja $d_2 = 2$.

Võtame kasutusele tähistuse $s_k = \sum_{i=1}^k d_i$ ($k \in \{1, \dots, r-1\}$). Tõestame, et iga täisarv t , kus

$s_k \leq t < s_{k+1}$, on esitatav praktilise arvu $n \geq 2$ erinevate positiivsete jagajate summana iga $k \in \{1, \dots, r-1\}$ korral. Kui $k = 1$, siis tingimust $s_1 \leq t < s_2$ rahuldavad vaid kaks täisarvu $t = 1 = d_1$ ja $t = 2 = d_2$. Oletame, et kõik täisarvud t , mis rahuldavad võrratusi $s_k \leq t < s_{k+1}$

kõikide $1 \leq k \leq u-1 \leq r-1$ korral, on esitatavad arvu n positiivsete jagajate summana.

Näitame, et kõik täisarvud t piirkonnast $s_u \leq t < s_{u+1}$ on samuti esitatavad arvu n positiivsete jagajate summana. Lemma 1.3.1 põhjal kehtivad praktilise arvu n korral võrratused

$d_{k+1} - 1 \leq \sum_{i=1}^k d_i = s_k$ iga $k \in \{1, \dots, r-1\}$ korral. Arvu t esitus nõutud kujul on saavutatud, kui

$t = s_u = d_1 + d_2 + \dots + d_u$ või kui $t = d_{u+1}$. Kui nüüd $d_{u+1} < t < s_{u+1} = s_u + d_{u+1}$, siis

$t - d_{u+1} < s_u$ ning positiivne täisarv $t - d_{u+1}$ on tehtud oletuse põhjal avaldatav arvu n positiivsete jagajate summana, millele liites jagaja d_{u+1} , saame ka arvu t nõutud esituse.

Seega oleme näidanud, et kõik täisarvud m piirkonnast $1 \leq m \leq \sigma(n)$ on esitatavad praktilise arvu n erinevate positiivsete jagajate summana. ■

Tõestatud teoreem annab veel ühe (definiitsiooniga 1.3.2 samaväärse) võimaluse praktiliste arvude defineerimiseks, mida on kasutatud ka näiteks Margensterni töödes.

Definiitsioon 1.3.4. Positiivne täisarv n on *praktiline arv*, kui iga positiivne täisarv m , kus $1 \leq m \leq \sigma(n)$, on esitatav arvu n erinevate positiivsete jagajate summana.

Aastate jooksul on leitud mitmeid tarvilikke ja piisavaid tingimusi selleks, et positiivne täisarv oleks praktiline arv.

Näiteks Margenstern [34] on tõestanud järgmise tulemuse.

Teoreem 1.3.2. Positiivne täisarv n on praktiline arv parajasti siis, kui selle arvu positiivsete jagajate $1 = d_1 < \dots < d_h < \dots < d_r = n$ korral, kus d_h on vähim selline jagaja, et $d_h \geq \sqrt{n}$, kehtib võrratus $d_{j+1} \leq d_1 + d_2 + \dots + d_j + 1$ iga $j = 1, \dots, h-1$ jaoks.

Huvitava struktuuriteoreemi tõestas Stewart [56] juhu jaoks, kui positiivne täisarv on antud kanoonilisel kujul. Tõestame esmalt põhiteoreemi jaoks vajaliku tulemuse.

Lemma 1.3.2. Kui praktiline arv m ja algarv p on ühistegurita arvud ning on täidetud võrratus $p \leq \sigma(m) + 1$, siis iga mittenegatiivse täisarvu t korral on arv mp^t praktiline arv.

Tõestus. Kui $t = 0$, siis väide kehtib. Oletame, et väide kehtib iga $t = n \geq 0$ korral ning näitame, et sel juhul ka arv mp^{n+1} on praktiline arv.

Olgu a positiivne täisarv, mille korral $a \leq \sigma(mp^{n+1})$. Näitame, et arvu a saab esitada arvu mp^{n+1} erinevate positiivsete jagajate summana. Olgu $a \leq \sigma(m)p^{n+1}$, siis $a = a_1p^{n+1} + r$, kus $a_1 \leq \sigma(m)$ ja $0 \leq r < p^{n+1}$. Kuna arv m on praktiline arv ja $a_1 \leq \sigma(m)$, siis arvu a_1 saab esitada arvu m erinevate positiivsete jagajate summana. Järelikult arv a_1p^{n+1} on esitatav arvu mp^{n+1} erinevate positiivsete jagajate summana. Kuna $r < p^{n+1}$, siis $r = \sum_{k=0}^n r_k p^k$, kus $0 \leq r_k < p$. Kuna $r_k < p \leq \sigma(m) + 1$, siis iga arv r_k on esitatav arvu m erinevate positiivsete jagajate summana. Järelikult iga k ($0 \leq k \leq n$) korral on $r_k p^k$ esitatav arvu mp^{n+1} selliste erinevate positiivsete jagajate summana, mis on p^k kordsed, aga ei ole p^l ($l > k$) kordsed. Iga täisarvu k korral on avaldise $r_k p^k$ jagajad erinevad ja need erinevad arvu $a_1 p^{n+1}$ jagajatest. Järelikult, kui $a \leq \sigma(m)p^{n+1}$, siis arvu a saab esitada arvu m erinevate positiivsete jagajate summana.

Oletame nüüd, et $\sigma(m)p^{n+1} < a \leq \sigma(mp^{n+1})$. Seega $a = \sigma(m)p^{n+1} + b$. Et m ja p on ühistegurita arvud, siis $\sigma(mp^{n+1}) = \sigma(m)\sigma(p^{n+1})$. Kuna $\sigma(p^{n+1}) = p^{n+1} + \sigma(p^n)$, siis saame, et $1 \leq b \leq \sigma(mp^n)$. Induktsiooni eelduse kohaselt on arv b esitatav arvu mp^n erinevate positiivsete jagajate summana, mis saavad olla arvu p^n kordsed ja seega on erinevad arvu

mp^{n+1} jagajatest, mis on arvu p^{n+1} kordsed. Järelikult arv mp^{n+1} on praktiline arv ning seega ka arv mp^t on praktiline arv iga täisarvu $t \geq 0$ korral. ■

Olgu positiivne täisarv n antud kanoonilisel kujul $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, kus $1 < p_1 < p_2 < \dots < p_k$ on arvu n erinevad algtegurid ja α_i on positiivsed täisarvud. Oma põhiteoreemi tõestuseks defineeris Stewart [56] arvu n kanoonilise kujuga seotud arvud $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ valemitega

$$\begin{cases} Q_0 = 1 \\ Q_i = Q_{i-1} p_i^{\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k). \end{cases}$$

On selge, et $1 = Q_0 < Q_1 < \dots < Q_k = n$.

Teoreem 1.3.3 (Stewart). Positiivne täisarv $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, kus $n > 1$, on praktiline arv siis ja ainult siis, kui $p_i = 2$ ja $i = 2, 3, \dots, k$ korral

$$p_i \leq 1 + \sigma(p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}) = 1 + \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_j^{\alpha_j+1} - 1}{p_j - 1}. \quad (3.1)$$

Tõestus. Olgu $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ praktiline arv. Siis järelduse 1.3.1 põhjal saame, et $p_1 = 2$. Näitame, et ka tingimus (3.1) on tarvilik. Oletame vastuväiteliselt, et leidub selline indeks $r \leq k-1$ nii, et $p_{r+1} > \sigma(Q_r) + 1$. Seega arvu $\sigma(Q_r) + 1 < n$ esituses arvu n tegurite summana ei saa esineda ühtki arvu n jagajat, mis jaguks algteguriga p_h , kus $h \geq r+1$. Teiselt poolt ei piisa ka ainult algteguritest $p_1, p_2, \dots, p_r$, sest $\sigma(Q_r) < \sigma(Q_r) + 1$. Järelikult arvu $\sigma(Q_r) + 1 < n$ ei ole võimalik esitada arvu n positiivsete jagajate summana, mis on vastuolus arvu n praktilisuse nõudega. Seega peavad olema täidetud tingimused (3.1).

Näitame, et see tingimus (3.1) on ka piisav. Arv 1 on praktiline arv. Kuna $p_1 = 2$ korral on täidetud võrratus $p_1 \leq \sigma(1) + 1$, siis Q_1 on praktiline arv lemma 1.3.2 põhjal. Oletame, et Q_r , kus $1 \leq r \leq k-1$, on praktiline arv. Kuna p_{r+1} korral on täidetud tingimus (3.1), siis lemma 1.3.2 põhjal on Q_{r+1} praktiline arv. Seega kõik arvud Q_r , kus $r = 1, 2, \dots, k$ on praktilised arvud ning järelikult ka arv $n = Q_k$ on praktiline arv. ■

Stewarti teoreemi põhjal saab suhteliselt hõlpsalt kindlaks teha, kas vaadeldav arv on praktiline arv või mitte.

Näiteks arv $429606 = 2 \cdot 3^2 \cdot 29 \cdot 823$ on praktiline arv, sest

$$3 \leq \sigma(2) + 1 = 4, \quad 29 \leq \sigma(2 \cdot 3^2) + 1 = 40 \quad \text{ja} \quad 823 \leq \sigma(2 \cdot 3^2 \cdot 29) + 1 = 1171.$$

Stewart'i teoreemi põhjal saab teha mõned olulised järeldused [37].

Järeldus 1.3.2. Kui arv n on praktiline arv ja $1 \leq m \leq \sigma(n) + 1$, siis arv nm on praktiline arv.

Järeldus 1.3.3. Kui arv n on praktiline arv ja $1 \leq m \leq 2n$, siis nm on praktiline arv.

1.3.3. Praktiliste arvude omadused

Stewarti teoreem võimaldab näidata, et positiivsete täisarvude faktoriaalid on kõik praktilised arvud. Seejärel võetakse vaatluse alla praktiliste arvude omadused ja seosed teiste arvuhulkadega. Kokkuvõtte aluseks on [56], [34], [37] ja [52].

Lause 1.3.1. Esimese k algarvu korrutis on praktiline arv.

Tõestus. Kui $k = 2$, siis $2 \cdot 3 = 6$, mis on praktiline arv. Oletame, et k esimese algarvu korrutis $2 \cdot \dots \cdot p_k$ on praktiline arv. Siis Stewarti teoreemi põhjal iga i korral ($i \leq k$) kehtib võrratus $p_i \leq 1 + \sigma(2 \cdot \dots \cdot p_{i-1})$. Vaatame $k+1$ esimese algarvu korrutist $2 \cdot \dots \cdot p_k \cdot p_{k+1}$. Oletame vastuväiteliselt, et $p_{k+1} > 1 + \sigma(2 \cdot \dots \cdot p_k)$. Siis

$$p_{k+1} > 1 + \sigma(2 \cdot \dots \cdot p_k) \geq 1 + \sigma(2) \dots \sigma(p_k) \geq 1 + 3(1 + p_k) > 4 + 3p_k > 2p_k.$$

Kuid Bertrand'i teoreemi (teoreem 4.3.3) põhjal teame, et $p_{k+1} < 2p_k$. Oleme jõudnud vastuoluni. Seega on järjestikuste algarvude korrutis $2 \cdot \dots \cdot p_k$ praktiline arv iga $k \geq 2$ korral. ■

Järeldus 1.3.4. Praktilisi arve on lõpmata palju.

Järeldus 1.3.5. Täisarvud, mille kanoonilises kujus on k esimest algarvu positiivsete astendajatega, on praktilised arvud.

Järeldus 1.3.6. Iga positiivse täisarvu n korral on $n!$ praktiline arv.

Näitame, et definitsiooni 1.3.2 mõttes on arvud 2^k tõepoolest praktilised arvud.

Lause 1.3.2. Arvu 2 kõik mittenegatiivsete täisarvuliste astendajatega astmed on praktilised arvud.

Tõestus. On selge, et arvud 1, 2 ja 2^2 on praktilised arvud.

Oletame, et 2^k ($k \geq 2$) on praktiline arv. Vaatleme arvu 2^{k+1} , mille positiivsed jagajad on $1, 2, 2^2, \dots, 2^k, 2^{k+1}$.

Kuna arve $1, 2, \dots, 2^k - 1$ saab eelduse kohaselt esitada arvu 2^k erinevate positiivsete jagajate, mis on väiksemad arvust 2^k , summana, siis on ilmne, et ka kõik arvud $2^k + 1, 2^k + 2, \dots, 2^{k+1} - 1$ on esitatavad arvu 2^{k+1} erinevate positiivsete jagajate summana. Seega arvud 2^k on tõepoolest praktilised arvud mis tahes täisarvu $k \geq 0$ korral. ■

Lause 1.3.3. Kui positiivne täisarv n on praktiline arv, siis ka arv $2n$ on praktiline arv.

Tõestus. Olgu arv n praktiline arv. Näitame, et arve $n+1, n+2, \dots, n+(n-1), 2n$ saab esitada arvu $2n$ erinevate positiivsete jagajate summana.

Kuna arv n on praktiline, siis arve 1 kuni $n-1$ saab esitada arvu n selliste erinevate positiivsete jagajate summana, mis on väiksemad arvust n . Lisades neile esitustele jagaja n , olemegi saanud arvude $n+1, n+2, \dots, n+(n-1), 2n$ vajalikud esitused. ■

Järeldus 1.3.7. Kui positiivne täisarv n on praktiline arv, siis arv $2^k n$ on ka praktiline arv.

Lause 1.3.4. Arvud kujul $2^{m-1}(2^m - 1)$ on praktilised arvud, kui $m > 1$.

Tõestus. Kui positiivne täisarv k on mitte suurem kui $2^m - 1$, siis arvu k saab esitada üheselt arvu 2 erinevate astmete $1, 2, 2^2, \dots, 2^{m-1}$ summana. Juhul kui $2^m - 1 < k \leq 2^{m-1}(2^m - 1)$, siis $k = (2^m - 1)t + r$, kus naturaalarv $t \leq 2^{m-1}$ ja $0 \leq r < 2^m - 1$. Seega arvud t ja r avalduvad arvu 2 erinevate positiivsete astmete $1, 2, 2^2, \dots, 2^{m-1}$ summana. Järelikult iga positiivne täisarv $k \leq 2^{m-1}(2^m - 1)$ on esitatav arvu $2^{m-1}(2^m - 1)$ erinevate positiivsete jagajate summana ja arv kujul $2^{m-1}(2^m - 1)$ on praktiline arv iga täisarvu $m > 1$ korral. ■

Teoreemi 1.1.3 põhjal on iga paarisarvuline täiuslik arv esitatav kujul $2^{m-1}(2^m - 1)$, kus m on algarv. Seega on õige järgmine väide.

Järeldus 1.3.8. Kõik paarisarvulised täiuslikud arvud on praktilised arvud.

Praktiliste arvude seas leidub ka puuduga arve. Näiteks arvud 1, 2, 4, 8 ja 16 on nii puuduga kui ka praktilised arvud.

Praktilise arvu definitsioonist 1.3.4 järeldub, et puuduga arvudest saavad praktilised olla vaid sellised arvud, mille korral kehtib võrdus $\sigma(m) = 2m - 1$ ehk arvud, mida on nimetatud ka peaaegu täiuslikeks arvudeks. Sellise omadusega on kõik arvud kujul 2^k ($k \geq 0$).

Järeldus 1.3.9. Kõik peaaegu täiuslikud arvud kujul 2^k ($k \geq 0$) on praktilised arvud.

Esimestest liiaga arvudest on praktilised arvud näiteks 12, 18, 20, 24. Vähim liiaga arv, mis ei ole praktiline arv, on arv 70, sest arvu 70 erinevate pärisjagajate 1, 2, 5, 7, 10, 14 ja 35 summana ei ole võimalik esitada näiteks arvu 4.

Osutub, et iga arvust 2 suurem praktiline arv jagub kas arvuga 4 või 6.

Lause 1.3.5. Iga arvust 2 suurem praktiline arv on kas arvu 4 või 6 kordne.

Tõestus. Olgu n praktiline arv ja $n \geq 4$, siis arvul n peavad leiduma erinevad positiivsed jagajad, mille summa on 4. Võimalused arvu 4 avaldamiseks erinevate positiivsete liidetavate summana on $4 = 4$ ja $4 = 1 + 3$. Seega arv n peab olema kas arvu 4 või 3 kordne. Kuna praktiline arv n on paarisarv, siis arv n peab jaguma kas arvuga 4 või 6. ■

Töös [37] on näidatud, et praktiliste arvude korral kehtib Goldbachi hüpoteesiga sarnane väide.

Lause 1.3.6. Iga paarisarv on esitatav kahe praktilise arvu summana.

1.3.4. Praktiliste arvude mitmikud

Positiivsete täisarvude jadade uurimise käigus püütakse tavaliselt ka välja selgitada, kas leidub k järjestikust täisarvu (sama paarsusega arvu jne), mis on vaadeldava jada liikmed.

Kuna praktiliste arvude seas on vaid üks paaritu arv 1, siis saab siin püstitada küsimuse vaid järjestikuste paarisarvude kohta. Järjestikuseid praktilisi arve on uuritud töodes [34], [36] ja [37].

Praktilisi arve n ja $n + 2$ nimetatakse *praktiliste arvude kaksikuteks*.

Näiteks on praktiliste arvude kaksikud 2 ja 4, 4 ja 6, 18 ja 20, 28 ja 30, 30 ja 32.

Neist näidetest on näha, et leidub praktilisi arve, mille korral $n-2$, n ja $n+2$ on kõik praktilised.

Praktilisi arve $n-2$, n ja $n+2$ nimetatakse *praktiliste arvude kolmikuteks*.

Praktiliste arvude kolmikud on näiteks 2, 4 ja 6 ning 28, 30 ja 32.

On tõestatud [36], et praktiliste arvude kolmikuid eksisteerib lõpmata palju.

Järgmisest lausest selgub, et praktiliste arvude nelikuid ei leidu.

Lause 1.3.7. Kui täisarv $n > 2$, siis vähemalt üks arvudest n , $n+2$, $n+4$, $n+6$ ei ole praktiline arv.

Tõestus. Kui n on paaritu arv, siis on selge, et väide kehtib.

Kui $n > 2$ on paarisarv, siis $n = 4k$ või $n = 4k + 2$. Näitame, et nendel juhtudel leidub vaadeldava nelja arvu n , $n+2$, $n+4$, $n+6$ seas vähemalt üks, mis ei jagu arvudega 4 ja 6 (lause 1.3.5).

Kui $n = 4k$, siis arvud $n+2$ ja $n+6$ ei jagu arvuga 4.

Vaatame nüüd paarisarvude n , $n+2$, $n+4$, $n+6$ jagamisel arvuga 6 tekkivaid jääke.

n	$n+2$	$n+4$	$n+6$
0	2	4	0
2	4	0	2
4	0	2	4

Näeme, et juhul $n = 4k$ leidub arvude $n+2$ ja $n+6$ seas vähemalt üks arv, mis ei jagu ei arvuga 4 ega 6. Seega ei saa see arv lause 1.3.5 põhjal olla praktiline arv.

Kui $n = 4k + 2$, siis arvud n ja $n+4$ ei jagu arvuga 4. Vaadates arvude n , $n+2$, $n+4$, $n+6$ jagamisel arvuga 6 tekkivaid jääke, näeme jälle, et nende arvude seas leidub vähemalt üks arv, mis ei jagu arvuga 4 ega 6. ■

On uuritud ka *praktiliste arvude viisikuid* $n-6$, $n-2$, n , $n+2$, $n+6$.

Arvu n vähim väärtus, mille korral arvud $n-6$, $n-2$, n , $n+2$, $n+6$ on kõik praktilised arvud on 18 ja vastav viisik on 12, 16, 18, 20 ja 24.

On püstitatud hüpotees, et praktiliste arvude viisikuid on lõpmata palju. Selle hüpoteesi kehtivust on uuritud näiteks töös [37] ja jõutud tulemusele, et kehtib üks kahest järgmisest väitest, kas teatud diofantilisel võrrandil [37, lk 49] on lõplik arv paarituarvulisi lahendeid või praktiliste arvude viisikuid on lõpmata palju.

1.3.5. Peaaegu praktilised arvud

Stewart vaatles artiklis [56] ka selliseid paarituid arve n , mille korral leidub täpselt kaks arvu, mis on väiksemad arvu n kõigi positiivsete jagajate summast, kuid ei ole esitatavad arvu n erinevate positiivsete jagajate summana. Selliseid arve on nimetatud ka *peaaegu praktilisteks arvudeks* (*almost practical numbers*) [53].

Definitsioon 1.3.5. Positiivne täisarv n on *peaaegu praktiline arv* (*almost practical number*), kui arvude $1 \leq m \leq \sigma(n)$ seas leidub täpselt kaks sellist arvu, mis ei ole esitatavad arvu n erinevate positiivsete jagajate summana.

Esimesed peaaegu praktilised arvud on: 70, 350, 490, 770, 910, 945, 1190, 1330, 1575, 1610, 1750, 2030 [53, A174533].

Paaritute arvude korral on selge, et neist kahest arvust üheks selliseks, mida ei saa avaldada, on arv 2 ja järelikult teiseks selliseks arvuks on $\sigma(n) - 2$.

Stewart'i töös [56] on näidatud, et iga paaritu peaaegu praktiline arv jagub arvuga 15 ning on antud tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et paaritu arv $m = 15t$ oleks peaaegu praktiline arv.

Lause 1.3.8. Iga paaritu peaaegu praktiline arv jagub arvuga 15.

Tõestus. On selge, et kui paaritu arv $n \geq 5$ on peaaegu praktiline arv, siis tema algteguriteks peavad olema 3 ja 5, sest vaid sel juhul on arve 3 ja 5 võimalik avaldada arvu n erinevate positiivsete jagajate summana. Vahetu kontroll näitab, et arvust 5 väiksemaid paarituid peaaegu praktilisi arve ei leidu. ■

Teoreem 1.3.4. Olgu paaritu positiivse täisarvu m kõik positiivsed jagajad järjestatud $d_1 = 1 < d_2 = 3 < d_3 = 5 < d_4 < \dots < d_k = m$. Paaritu arv $m = 15t$ on peaaegu praktiline siis ja ainult siis, kui iga $i \geq 3$ korral kas

$$d_{i+1} \leq \left(\sum_{j=1}^i d_j \right) - 2, \quad d_{i+1} \neq \left(\sum_{j=1}^i d_j \right) - 4$$

või

$$d_{i+1} = \left(\sum_{j=1}^i d_j \right) - 4, \quad d_{i+2} = \left(\sum_{j=1}^i d_j \right) - 2.$$

Teadaolevate paarisarvuliste peaaegu praktiliste arvude korral on nendeks kaheks arvuks, mida ei ole võimalik arvu n erinevate positiivsete summana esitada, 4 ja $\sigma(n) - 4$ [56, A174533].

1.4. Zumkelleri arvud

Täiuslike ja praktiliste arvude omadusi üldistades genereeris R. Zumkeller täisarvude uue jada, mis lisati 2003. aastal täisarvude jadade loetellu [53]. Viis aastat hiljem nimetas S. Clark oma ettekandes [12] neid arve *Zumkelleri arvudeks* ning tõi sisse ka *pool-Zumkelleri arvu* mõiste. Kokkuvõtte vaadeldavate arvude põhilistest uurimistulemustest sisaldub K.P.S. Bhaskara Rao ja Y. Pengi 2009. aastal ilmunud artiklis [5], mis on aluseks käesolevale osale.

1.4.1. Põhimõisted ja –tulemused

Definitsioon 1.4.1. Positiivne täisarv on *Zumkelleri arv* (*Zumkeller number*), kui selle arvu kõik positiivsed jagajad saab jaotada kahte mittelõikuvasse hulka nii, et kummaski hulgas olevate arvude summad on võrdsed.

Näiteks arv 30 on Zumkelleri arv, sest arvu 30 positiivseid jagajaid 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 ja 30 on võimalik jaotada (seejuures isegi kolmel erineval viisil) kahte hulka nii, et erinevates hulkades olevate arvude summad on võrdsed:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 5 + 10 + 15 &= 6 + 30, & 2 + 3 + 6 + 10 + 15 &= 1 + 5 + 30, \\ 5 + 6 + 10 + 15 &= 1 + 2 + 3 + 30. \end{aligned}$$

Arv 2835 on samuti Zumkelleri arv, sest $1 + 5 + 63 + 2835 = 3 + 7 + 9 + 15 + 21 + 27 + 35 + 45 + 81 + 105 + 135 + 189 + 315 + 405 + 56 + 945$.

Esimesed Zumkelleri arvud on: 6, 12, 20, 24, 28, 30, 40, 42, 48, 54, 56 [53, A083207].

Esimene paaritu arv selles jadas on 945, mille jagajate jaotus kaheks hulgaks on:

$$15 + 945 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 21 + 27 + 35 + 45 + 63 + 105 + 135 + 189 + 315.$$

Zumkelleri arvude definitsioonist 1.4.1 järelduvad vahetult järgmised tulemused.

Järeldus 1.4.1. Kui arv n on Zumkelleri arv, siis arvu n positiivsete jagajate summa $\sigma(n)$ peab olema paarisarv.

Järeldus 1.4.2. Zumkelleri arvul on paarisarv paaritu arvulisi positiivseid jagajaid.

Järeldus 1.4.3. Ükski algarv ei ole Zumkelleri arv.

Tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et positiivne täisarv oleks Zumkelleri arv, annab järgmine lause.

Teoreem 1.4.1. Positiivne täisarv n on Zumkelleri arv siis ja ainult siis, kui $\frac{\sigma(n) - 2n}{2}$ on kas null või esitatav arvu n erinevate pärisjagajate summana.

Tõestus. Definitsioonist 1.4.1 järeldub, et arv n on Zumkelleri arv siis ja ainult siis, kui leidub selline mittenegatiivne täisarv a , et $n + a = \sigma(n) - (n + a)$, kus arv a on kas null või avaldub erinevate pärisjagajate summana. Saadud tingimus on samaväärne sellega, et $a = \frac{\sigma(n) - 2n}{2}$. ■

Kui teoreemi 1.4.1 tõestuses $a = 0$, siis $\sigma(n) = 2n$, mis on tarvilik ja piisav selleks, et arv n võrduks oma pärisjagajate summaga ja oleks definitsiooni 1.1.2.B kohaselt täiuslik arv. Seega kehtib järgmine väide.

Järeldus 1.4.4. Iga täiuslik arv on Zumkelleri arv.

Esimene arv Zumkelleri arvude jadas ongi täiuslik arv 6, järgmised kolm arvu selles jadas 12, 20 ja 24 aga ei ole täiuslikud arvud.

Teoreemist 1.4.1 järeldub, et Zumkelleri arvu n korral on $\sigma(n) \geq 2n$.

Järeldus 1.4.5. Ükski Zumkelleri arv ei ole puuduga arv.

Paarisarvulistel Zumkelleri arvudel on järgmine täiendav omadus.

Lause 1.4.1. Kui n on paarisarvuline Zumkelleri arv kanoonilisel kujul $2^k p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, siis vähemalt üks astendajatest k_i ($i = 1, \dots, m$) on paaritu arv.

Tõestus. Arvu n kanoonilisest kujust järeldub, et arvul n on positiivseid paarituid jagajaid $(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_m)$. Kuna paarituid jagajaid peab olema järelduse 1.4.1 põhjal paarisarv, siis peab leiduma vähemalt üks k_i , mis on paaritu arv. ■

Järgnev lause [60] käsitleb Zumkelleri arvude ühte erijuhtu.

Lause 1.4.2. Kui kanoonilisel kujul oleva arvu $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ korral kehtib võrdus

$$\sigma(n) = 2 \left(n + \sum_{i=1}^k p_i \right), \text{ siis arv } n \text{ on Zumkelleri arv.}$$

Tõestus. Olgu $\sigma(n)$ arvu n kõigi positiivsete jagajate summa, $\sigma'(n)$ arvu n kõigi algarvuliste pärisjagajate summa ning $\sigma^*(n)$ arvu n kõigi kordarvuliste pärisjagajate summa. Sel juhul

$$\sigma(n) = 1 + \sigma'(n) + \sigma^*(n) + n.$$

On selge, et kui $\sigma(n) = 2 \left(n + \sum_{i=1}^k p_i \right)$, siis $n + \sigma'(n) = \sigma^*(n) + 1$, mis tähendab, et arvu n

kõiki positiivseid jagajaid saab jaotada kahte mitteloikuvasse hulka nii, et neis olevate arvude summad on võrdsed ehk arv n on Zumkelleri arv. ■

Näiteks $532 = 2^2 \cdot 7 \cdot 19$ ja $\sigma(532) = 2(532 + 2 + 7 + 19)$.

Sellisel kujul olevatest Zumkelleri arvudest esimesed on: 532, 945, 2624, 5704, 6536, 229648, 497696, 652970, 685088, 997408 [53, A048055].

1.4.2. Zumkelleri arvude genereerimine

Uute Zumkelleri arvude genereerimiseks mingi teadaoleva Zumkelleri arvu abil, on antud kaks olulist reeglit [5].

Lemma 1.4.1. Kui Zumkelleri arv n ja algarv p on ühistegurita arvud, siis iga positiivse täisarvu t korral on arv np^t Zumkelleri arv.

Tõestus. Olgu Zumkelleri arvu n positiivsed jagajad $d_1 = 1 < d_2 < \dots < d_k = n$. Arvu n positiivsed jagajad saab jaotada kahte mitteloikuvasse hulka A_0 ja B_0 nii, et hulkades olevate arvude summad on võrdsed.

Jaotame arvu np^t kõik positiivsed jagajad $t+2$ mittelõikuvasse hulka $A_0, B_0, D_1, \dots, D_t$ nii, et hulka D_i kuuluvad kõik need ja ainult need jagajad, mille üheks teguriks on p^i ($i = 1, \dots, t$). Kuna $S\ddot{U}T(n, p) = 1$, siis on selge, et hulgas D_i , on täpselt k arvu ja need on $p^i, d_2 p^i, \dots, d_k p^i$. Järelikult iga hulga D_i arve saab omakorda jaotada kahte mittelõikuvasse hulka nii, et nende summad on võrdsed ning p^i korda suuremad hulkadesse A_0 või B_0 kuuluvate arvude summast. Seega arvu np^t positiivseid jagajaid on võimalik jaotada kahte mittelõikuvasse hulka nii, et neis olevate arvude summad on võrdsed ning arv np^t on Zumkelleri arv. ■

Näiteks Zumkelleri arv 6 korral on eelneva lemma 1.4.1 tõttu Zumkelleri arvuks iga arv kujul $6p^t$, kus algarv $p > 3$ ning t on positiivne täisarv. Kui näiteks $p = 5$ ja $t = 3$, siis vaadeldava arvu $6 \cdot 5^3 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$ kõik 16 positiivset jagajat jaotatakse lemmas 1.4.1 tähistatud viieks hulgaks

$$A_0 = \{1, 2, 3\}, \quad B_0 = \{6\}, \quad D_1 = \{\{5; 2 \cdot 5; 3 \cdot 5\} \cup \{6 \cdot 5\}, \\ D_2 = \{\{5^2; 2 \cdot 5^2; 3 \cdot 5^2\} \cup \{6 \cdot 5^2\}\}, \quad D_3 = \{\{5^3; 2 \cdot 5^3; 3 \cdot 5^3\} \cup \{6 \cdot 5^3\}\}.$$

Sellisest jaotusest on ka selge, kuidas jaotada kõik 16 jagajat kahte mittelõikuvasse hulka nii, et arvude summad oleksid võrdsed:

$$1 + 2 + 3 + 5 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 5^2 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^2 + 5^3 + 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^3 = 6 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5^3 \\ \text{ehk } (1 + 2 + 3)(1 + 5 + 5^2 + 5^3) = 6(1 + 5 + 5^2 + 5^3).$$

Lemma 1.4.2. Kui arv n on Zumkelleri arv kanoonilisel kujul $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, siis mis tahes positiivsete täisarvude $t_1, \dots, t_m$ korral on arv $a = p_1^{k_1+t_1(k_1+1)} p_2^{k_2+t_2(k_2+1)} \dots p_m^{k_m+t_m(k_m+1)}$ samuti Zumkelleri arv.

Tõestus. Väite tõestuseks piisab, kui näidata, et kui $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ on Zumkelleri arv, siis ka arv $b = p_1^{k_1+t_1(k_1+1)} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ on Zumkelleri arv.

Olgu arvu n kõik positiivsed jagajad $d_1 = 1 < d_2 < \dots < d_k = n$. Kuna n on Zumkelleri arv, siis kõik need jagajad saab jaotada kahte mittelõikuvasse hulka A_0 ja B_0 nii, et hulkades olevate arvude summad on võrdsed. Paneme tähele, et nagu lemma 1.4.1 tõestuseski, saab siingi arvu $p_1^{k_1+t_1(k_1+1)} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ kõik positiivsed jagajad jaotada hulkadesse A_0, B_0 ja D_i kus

$0 < i \leq t_1$. Hulka D_i kuuluvad arvu $p_1^{i(k_1+1)}$ korrutised arvu n positiivsete jagajatega. Seejuures on hulgas D_i teguri p_1 astendaja vähemalt $i(t_1 + 1)$ ja ülimalt $k_1 + i(k_1 + 1)$. Seega kui $i \neq j$, siis hulkadel D_i ja D_j ei ole ühiseid elemente. Kuna arvu n positiivseid jagajaid sai jaotada hulkadesse A_0 ja B_0 , siis iga hulga D_i saab esitada kahe mittelõikuva alamhulga A_i ja B_i ühendina nii, et neis olevate arvude summad on võrdsed. Seega vaadeldav arv $b = p_1^{k_1+t_1(k_1+1)} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ on Zumkelleri arv. ■

Näiteks Zumkelleri arvu $6 = 2 \cdot 3$ abil genereeritud arvud $2^{1+2k} \cdot 3^{1+2m}$, kus k ja m on mis tahes positiivsed täisarvud, on lemma 1.4.2 põhjal Zumkelleri arvud.

Kuna nii algarvude hulk kui ka naturaalarvude hulk on lõpmatu, võib tõestatud lemmade põhjal tõestatuks lugeda ka järgmise teoreemi.

Teoreem 1.4.2. Zumkelleri arvude jadas on lõpmata palju nii paaris- kui ka paarituid positiivseid täisarve.

1.4.3. Praktilised ja Zumkelleri arvud

Näitame, et praktiliste arvude jadal ja Zumkelleri arvude jadal leidub ühiseid elemente. Tõestame järgmise lause [5].

Lause 1.4.3. Praktiline arv n on Zumkelleri arv siis ja ainult siis, kui arvu n positiivsete jagajate summa $\sigma(n)$ on paarisarv.

Tõestus. Tingimuse tarvilikkus on ilmne, sest kui praktiline arv n on Zumkelleri arv, siis vastavalt järeldusele 1.4.1 on $\sigma(n)$ paarisarv.

Kui n on praktiline arv ja $\sigma(n)$ on paarisarv, siis iga positiivne täisarv m , $1 \leq m \leq \sigma(n)$ on esitatav arvu n erinevate positiivsete jagajate summana vastavalt teoreemile 1.3.1. See tähendab, et ka täisarv $\frac{\sigma(n)}{2} < \sigma(n)$ on esitatav arvu n erinevate positiivsete jagajate summana. Järelikult saab arvu n kõik erinevad positiivsed jagajad jaotada kaheks mittelõikuvaks hulgaks nii, et neis olevate arvude summad on võrdsed ning arv n on Zumkelleri arv. ■

Kuna kõik arvust 1 suuremad praktilised arvud on paarisarvud (järelalus 1.3.1), siis saame sõnastada järelaluse.

Järelalus 1.4.6. Ükski paaritu Zumkelleri arv ei ole praktiline arv.

Lihtsalt on saadav ka järgmine tulemus.

Järelalus 1.4.7. Kõik paarisarvulised Zumkelleri arvud ei ole praktilised arvud.

Tõepoolest, näiteks 70 on paarisarvuline Zumkelleri arv, sest selle arvu positiivsed jagajad 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 ja 70 saab jaotada nii, et $70 + 2 = 1 + 5 + 7 + 10 + 14 + 35$. Samas ei ole arv 70 praktiline arv, sest arv 4 ei ole esitatav mõnede ülaltoodud jagajate summana.

1.4.4. Pool-Zumkelleri arvud

Zumkelleri arvude uurimine viis uute arvude defineerimiseni, mida töös [12] hakati nimetama *pool-Zumkelleri* arvudeks. Kui Zumkelleri arv n defineeritakse arvu n kõikide positiivsete jagajate summa $\sigma(n)$ abil, siis pool-Zumkelleri arvude korral vaadeldakse arvu n kõikide positiivsete pärisjagajate summat $\sigma(n) - n$.

Definitsioon 1.4.2. Positiivne täisarv on *pool-Zumkelleri arv* (*half-Zumkeller number*), kui selle arvu kõik positiivsed pärisjagajad saab jaotada kahte mittelõikuvasse hulka nii, et kummaski hulgas olevate arvude summad on võrdsed.

Näiteks on arv 350 pool-Zumkelleri arv, sest arvu 350 positiivsete pärisjagajate 1, 2, 5, 7, 10, 14, 25, 35, 50, 70 ja 175 korral on $175 + 14 + 5 + 2 + 1 = 70 + 50 + 35 + 25 + 10 + 7$.

Ka arv $225 = 3^2 \cdot 5^2$ on pool-Zumkelleri arv, sest positiivsed pärisjagajad 1, 3, 5, 9, 15, 25, 45 ja 75 saab jaotada nii, et $75 + 9 + 5 = 1 + 3 + 15 + 25 + 45$.

Pool-Zumkelleri arvude definitsioonist järelaluvad vahetult järgmised tulemused.

Järelalus 1.4.8. Pool-Zumkelleri arvu n positiivsete pärisjagajate summa $\sigma(n) - n$ on paarisarv.

Järelalus 1.4.9. Pool-Zumkelleri arv n ja selle positiivsete jagajate summa $\sigma(n)$ on sama paarsusega.

Järeldus 1.4.10. Ükski algarv ei ole pool-Zumkelleri arv.

Töös [5] on toodud ka mõned tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et positiivne täisarv oleks pool-Zumkelleri arv. Vahetult definitsioonist 1.4.2 ja järeldusest 1.4.1 saame ühe sellise tingimuse.

Lause 1.4.4. Positiivne täisarv n on pool-Zumkelleri arv siis ja ainult siis, kui $\frac{\sigma(n)-n}{2}$ on esitatav arvu n erinevate positiivsete pärisjagajate summana.

Zumkelleri arvude jaoks sõnastatud teoreemile 1.4.1 analoogilise lause saab tõestada ka paarisarvuliste pool-Zumkelleri arvude jaoks.

Teoreem 1.4.3. Positiivne paarisarvuline täisarv n on pool-Zumkelleri arv siis ja ainult siis, kui $\frac{\sigma(n)-2n}{2}$ on kas 0 või esitatav arvu n erinevate positiivsete pärisjagajate summana, milles ei esine jagaja $\frac{n}{2}$.

Tõestus. Kui n on paarisarv ja ka pool-Zumkelleri arv, siis arv $\frac{n}{2}$ on samuti arvu n pärisjagaja ning siis kas $\frac{n}{2} = \sigma(n) - n - \frac{n}{2}$ või leidub selline positiivne täisarv a , mis on võrdne arvu n mõningate positiivsete pärisjagajate summaga, milles ei ole jagajat $\frac{n}{2}$ nii, et

$$\frac{n}{2} + a = \sigma(n) - n - \left(\frac{n}{2} + a\right), \quad (4.1)$$

millest saame tarviliku tingimuse

$$a = \frac{\sigma(n) - 2n}{2}. \quad (4.2)$$

Tingimusega (4.2) samaväärsest tingimusest (4.1) järeldub, et kui täisarv a on kas null või avaldub arvu n positiivsete pärisjagajate summana, milles ei esine arvu $\frac{n}{2}$, on paarisarvu n pärisjagajad jaotatud kahte mittelõikuvasse hulka nii, et nende elementide summad on võrdsed, s.t paarisarv n on pool-Zumkelleri arv. ■

Kui tingimuses (4.2) on $a = 0$, siis $\sigma(n) = 2n$ ning paarisarv n on täiuslik arv definitsiooni 1.1.2.B põhjal.

Seega saame sõnastada järgmise tulemuse.

Järeldus 1.4.11. Iga täiuslik paarisarv on pool-Zumkelleri arv.

Paaritute pool-Zumkelleri arvude korral kehtib järgmine lause.

Lause 1.4.5. Kui n on paaritu pool-Zumkelleri arv, siis n on täisarvu ruut.

Tõestus. Kui arv n on paaritu pool-Zumkelleri arv, siis $\sigma(n) - n$ on paarisarv ja $\sigma(n)$ on paaritu arv (järeldused 1.4.8 ja 1.4.9). Olgu arvu n kanooniline kuju $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$. Siis

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i} p_i^j. \text{ Kui } \sigma(n) \text{ on paaritu, siis iga astendaja } k_i \text{ (} i = 1, \dots, m \text{) peab olema}$$

paarisarv. See aga tähendab, et arv n on täisarvu ruut. ■

Näiteks pool-Zumkelleri arv 225 on täisruut. Kuid mitte kõik paaritute arvude ruudud ei ole pool-Zumkelleri arvud. Selle põhjenduseks piisab kui vaadata algarvude $p > 2$ ruute p^2 , mille pärisjagajateks on vaid 1 ja p .

Saab tõestada ka üldisema tulemuse.

Lause 1.4.6. Algarvu p aste p^k ei ole ühegi täisarvu $k > 0$ korral ei Zumkelleri ega ka pool-Zumkelleri arv.

Tõestus. Arvu p^k positiivsed jagajad $1, p, p^2, \dots, p^k$ on geomeetrilise jada järjestikused elemendid teguriga p . Kuna iga $k > 0$ korral on arvu p^k pärisjagajate summa

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} p^i = \frac{p^k - 1}{p - 1} \text{ ilmselt väiksem suurimast jagajast } p^k, \text{ siis ei ole kõiki positiivseid}$$

jagajaid võimalik jaotada kahte mittelõikuvasse hulka nii, et elementide summad oleksid võrdsed. Seega arv p^k ei ole Zumkelleri arv ühegi täisarvu $k > 0$ korral. Analoogilisel põhjusel ei saa vaadeldava arvu pärisjagajaid jaotada kahte mittelõikuvasse hulka nii, et neis olevate arvude summad oleksid võrdsed. Järelikult ei ole vaadeldav arv p^k ühegi täisarvu $k > 0$ korral pool-Zumkelleri arv. ■

Töös [5] on näidatud mitmeid võtteid uute pool-Zumkelleri arvude genereerimiseks teadaolevate pool-Zumkelleri arvude abil. Tõestame järgmise lause.

Lause 1.4.7. Kui positiivsed täisarvud m ja n on ühistegurita pool-Zumkelleri arvud, siis ka korrutis mn on pool-Zumkelleri arv.

Tõestus. Kui arv m on pool-Zumkelleri arv, siis arvu m kõiki pärisjagajaid saab jaotada kahte mittelõikuvasse hulka D_1 ja D_2 nii, et neis olevate arvude summad on võrdsed. Olgu hulgas D_1 pärisjagajad $a_1, a_2, \dots, a_r$ ja hulgas D_2 pärisjagajad $b_1, b_2, \dots, b_s$, siis

$$\sum_{i=1}^r a_i = \sum_{j=1}^s b_j \quad (4.3)$$

Kui arv n on pool-Zumkelleri arv, siis arvu n kõiki pärisjagajaid saab jaotada kahte mittelõikuvasse hulka D_3 ja D_4 nii, et neis olevate arvude summad on võrdsed. Olgu hulgas D_3 pärisjagajad $c_1, c_2, \dots, c_t$ ja hulgas D_4 pärisjagajad $d_1, d_2, \dots, d_u$, siis

$$\sum_{k=1}^t c_k = \sum_{l=1}^u d_l. \quad (4.4)$$

Kuna $S\dot{U}T(m, n) = 1$, siis arvu mn kõik pärisjagajad võib esitada korrutistena $a_i c_k, a_i d_l, b_j c_k, b_j d_l, m c_k, m d_l, n a_i$ ja $n b_j$ kus $i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s; k = 1, \dots, t$ ja $l = 1, \dots, u$. Tingimuste (4.3) ja (4.4) kohaselt saab kõik need positiivsed jagajad jaotada kahte mittelõikuvaasse hulka nii, et neis olevate arvude summad on võrdsed nagu näitab järgmine võrdus

$$\sum_{i=1}^r a_i (\sum_{k=1}^t c_k + \sum_{l=1}^u d_l) + n \sum_{i=1}^r a_i + m \sum_{k=1}^t c_k = \sum_{j=1}^s b_j (\sum_{k=1}^t c_k + \sum_{l=1}^u d_l) + n \sum_{j=1}^s b_j + m \sum_{l=1}^u d_l.$$

Seega arv mn on pool-Zumkelleri arv. ■

1.4.5. Zumkelleri ja pool-Zumkelleri arvud

Järelduste 1.4.4 ja 1.4.11 põhjal võime öelda, et Zumkelleri ja pool-Zumkelleri arvude hulkade ühisosa ei ole tühi. Seal sisalduvad kindlasti kõik paarisarvulised täiuslikud arvud. Põhjalikumalt on uuritud mitmeid vaadeldavate arvude omavahelisi seoseid töös [5], mis on järgneva kokkuvõtte aluseks.

Lause 1.4.8. Kui positiivne täisarv n on Zumkelleri arv, siis arv $2n$ on pool-Zumkelleri arv.

Tõestus. Olgu $n = 2^k \cdot L$ Zumkelleri arv, kusjuures $k \geq 0$ ja L on paaritu arv. Arvu n kõik positiivsed jagajad saab jaotada kahte mittelõikuvasse hulka D_1 ja D_2 nii, et neis olevate

arvude summad on võrdsed. Arvu $2n$ iga positiivse jagaja, mis ei ole arvu n jagaja, saab kirjutada kujul $2^{k+1} \cdot l$, kus l on arvu L positiivne jagaja. On selge, et arv $2^k l$ kuulub ühte hulkadest D_1 või D_2 . Üldisust kitsendamata kuulugu arv $2^k l$ hulka D_1 . Tõstes nüüd arvu $2^k l$ hulka D_2 ja lisades arvu $2^{k+1} \cdot l$ hulka D_1 , oleme saanud, et uutes hulkades D_1 ja D_2 olevate arvude summad on võrdsed. Toimides samamoodi arvu $2n$ kõigi positiivsete pärisjagajatega, mis ei ole arvu n jagajaks, oleme saanud, et arvu $2n$ pärisjagajaid saab jaotada kahte mittelõikuvasse hulka nii, et neis olevate arvude summad on võrdsed. Seega arv $2n$ on pool-Zumkelleri arv. ■

Näiteks arv 12 on Zumkelleri arv, sest $1 + 3 + 4 + 6 = 2 + 12$ ning arv 24 on tõepoolest pool-Zumkelleri arv, sest $12 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 8$. Tegelikult osutuvad mõlemad arvud 12 ja 24 nii Zumkelleri kui ka pool-Zumkelleri arvudeks.

Vähima paaritu arvilise Zumkelleri arvu 945 positiivsete pärisjagajate summa $\sigma(945) - 945 = 975$ on aga paaritu arv. Seega arv 945 ei ole pool-Zumkelleri arv (järgeldus 1.4.8). Arv $2 \cdot 945 = 1890$ on aga pool-Zumkelleri arv, sest positiivsed pärisjagajad õnnestub jaotada kahte mittelõikuvasse hulka nii, et hulkades olevate arvude summad on võrdsed. Ühte neist hulkadest kuuluvad pärisjagajad 945, 630, 315 ja 45 ning teise hulka kõik ülejäänud pärisjagajad.

Sellest, et Zumkelleri arve on lõpmata palju (teoreem 1.4.1) ning äsjatõestatud lause 1.4.8 põhjal võime teha järgelduse.

Järgeldus 1.4.12. Pool-Zumkelleri arve on lõpmata palju.

Lause 1.4.9. Kui pool-Zumkelleri arv on paarisarv, siis on see arv ka Zumkelleri arv.

Tõestus. Olgu hulk D positiivse täisarvu n kõigi positiivsete jagajate hulk. Kuna n on paarisarv ja pool-Zumkelleri arv, siis teoreemi 1.4.3 põhjal leidub hulk $A \subset D \setminus \left\{n, \frac{n}{2}\right\}$ nii, et

$$\frac{n}{2} + \sum_{a \in A} a = \sum_{b \in D, b \notin \left\{n, \frac{n}{2}\right\} \cup A} b.$$

Liites võrduse mõlemale poolele täisarvu $\frac{n}{2}$, saame

$$n + \sum_{a \in A} a = \frac{n}{2} + \sum_{b \in D, b \notin \left\{n, \frac{n}{2}\right\} \cup A} b,$$

mis aga tähendab, et arvu n kõiki positiivseid jagajaid saab jaotada kaheks mittelõikuvaks hulgaks nii, et neis olevate arvude summad on võrdsed. ■

Äsjatõestatu põhjal kehtib ka järgmine tulemus.

Järeldus 1.4.13. Kui Zumkelleri arv n on paarisarv, siis arv n on pool-Zumkelleri arv parajasti siis, kui leidub arvu n positiivsete jagajate jaotus kahte mittelõikuvasse hulka, mille elementide summad on võrdsed ning arvud n ja $\frac{n}{2}$ ja kuuluvad erinevatesse hulkadesse.

Arvust 4000 väiksemate Zumkelleri arvude ja nende positiivsete jagajate jaotuste tabelite [60] esmane uurimine näitab, et kõik neisse kantud paarisarvulised Zumkelleri arvud on ka pool-Zumkelleri arvud.

Töös [12] on püstitatud hüpotees, et kõik paarisarvulised Zumkelleri arvud on ka pool-Zumkelleri arvud.

Mõnedel erijuhtumitel on hüpotees tõestatud töös [5] ning jõutud järgmise hinnanguni.

Lause 1.4.10. Kui leidub paarisarvuline Zumkelleri arv, mis ei ole pool-Zumkelleri arv, siis see arv ei ole väiksem arvust 7233498900.

2. Arvu positiivsete jagajate arvuga seonduvad arvuhulgad

2.1. Tau-arvud

Igal täisarvul on teatud arv positiivseid jagajaid. Arvu n positiivsete jagate arvu enamlevinud tähistusteks on $\tau(n)$, $\sigma_0(n)$ ja $d(n)$. Käesolevas töös on kasutatud tähistust $\tau(n)$. Järgnevalt vaatleme positiivseid täisarve, mis jaguvad oma positiivsete jagajate arvuga.

2.1.1. Põhimõisted

Mõiste *tau-arvud* võtsid 1990. aastal kasutusele R.E. Kennedy ja C.N. Cooper [17]. Nimetus tau-arv tuleneb tähistusest $\tau(n)$. Taasavastati need arvud 1999. aastal inglise teadlaste töörühmas (*Combined Reasoning Group*) spetsiaalsete arvutiprogrammide HR poolt, mis aitavad luua uusi mõisteid vanade baasil, leida seoseid, tõestada uusi tulemusi ja püstitada hüpoteese. Töörühma liige S. Colton, kes ei olnud sel ajal veel teadlik artiklist [17], nimetas need arvud *taastegurdivateks* (refaktoriseeruvateks) *arvudeks* (*refactorable numbers*) [14] ning tõestas vaadeldavate arvude mõned põhiomadused.

Käesolevas töös on kasutatud tau-arvu mõistet.

Definitsioon 2.1.1. Positiivne täisarv n on *tau-arv* (*tau number*), kui arv n jagub oma positiivsete jagajate arvuga $\tau(n)$.

Näiteks on arv 712 tau-arv, sest arvul $712 = 2^3 \cdot 89$ on positiivseid jagajaid $(1+3)(1+1) = 8$ ja arv 712 jagub arvuga 8.

Esimesed tau-arvud on: 1, 2, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 40, 56, 60, 72, 80, 84, 88 [53, A033950].

2.1.2. Põhitulemused

Vaatleme defineeritud tau-arvude mõningaid omadusi. Kokkuvõtte aluseks on S. Coltoni [14] (1999) ja J. Zelinsky [58] (2002) ilmunud artiklid.

Lause 2.1.1. Paaritu naturaalarv n on tau-arv siis ja ainult siis, kui arv $2n$ on tau-arv.

Tõestus. Olgu paaritu naturaalarv n esitatud kanoonilisel kujul $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Selle positiivsete jagajate arv on $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ (teoreem 4.8.1). Paarisarvu $2n$ positiivsete jagajate arv on seega $\tau(2n) = 2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = 2\tau(n)$ ning arv $2n$ jagub oma jagajate arvuga $2\tau(n)$ parajasti siis, kui paaritu arv n jagub oma jagajate arvuga $\tau(n)$. Vastavalt definitsioonile 2.1.1 on seega paaritu arv n ja arv $2n$ üheaegselt kas tau-arvud või ei ole seda mitte. ■

Lause 2.1.2. Paaritud tau-arve on lõpmata palju.

Tõestus. Kui algarv $p > 2$, siis arv $n = p^{p-1}$ on tau-arv, sest ta jagub oma positiivsete jagajate arvuga $\tau(n) = p$. Kuna paaritud algarve on lõpmata palju, siis on äsja konstrueeritud paaritud tau-arve samuti lõpmata palju. ■

Lausetest 2.1.1 ja 2.1.2 järeldub vahetult järgmine tulemus.

Lause 2.1.3. Paarisarvulisi tau-arve on lõpmata palju.

Kuna igal algarvul on täpselt kaks positiivset jagajat ja ainus paarisarvuline algarv on 2, siis võime sõnastada järgmise tulemuse.

Järeldus 2.1.1. Arv 2 on ainus algarv tau-arvude seas.

Lause 2.1.4. Kui n on tau-arv, mille vähim algarvuline tegur on p ja arv n jagub algarvuga q , siis jagub n ka arvuga q^{p-1} .

Tõestus. Olgu n tau-arv ja p selle vähim algarvuline tegur. Jagugu n algarvuga q ja olgu q^k arvu q suurim aste, mis jagab arvu n . Et n on tau-arv, siis n jagub arvuga $k+1$. Kuna p on arvu n vähim arvust 1 erinev jagaja, siis järelikult $k \geq p-1$. Millest järeldubki, et n jagub arvuga q^{p-1} . ■

Iga algarvu ruudul on 3 positiivset jagajat. Et algarvu ruut oleks tau-arv, peab algarv ise jaguma arvuga 3. Seega algarvu ruutudest vaid arv 9 on tau-arv.

Järeldus 2.1.2. Tau-arvude seas leidub vaid üks arv, mis on algarvu ruut.

Lause 2.1.5. Arv $n = p^k$, kus p on algarv ja $k \geq 2$, on tau-arv parajasti siis, kui leidub positiivne täisarv $i \leq k$ nii, et $k = p^i - 1$.

Tõestus. Algarvu astmel p^k on positiivseid jagajaid $k+1$ ja need on $1, p, p^2, \dots, p^k$. Seega p^k jagub vaid arvu p astmetega, mille astmenäitaja on mittesuurem kui k . Seega jagub arv p^k arvuga $\tau(p^k)$ parajasti siis, kui leidub positiivne täisarv $i \leq k$ nii, et $k+1 = p^i$. ■

Järgmised kolm lauset näitavad, kuidas teadaolevate tau-arvude abil saab genereerida uusi tau-arve.

Lause 2.1.6. Kui tau-arvud n ja m on ühistegurita arvud, siis korrutis nm on tau-arv.

Tõestus. Et n ja m on ühistegurita arvud, siis $\frac{nm}{\tau(nm)} = \frac{nm}{\tau(n)\tau(m)}$. Kuna eelduse kohaselt n ja m on tau-arvud, siis selle murru väärtus on kindlasti täisarv, s.t arv nm jagub arvuga $\tau(nm)$. ■

Lause 2.1.7. Kui p ja q on kaks erinevat ja arvust 3 suuremat algarvu, siis arv $36pq$ on tau-arv.

Tõestus. Arvu $36pq$ positiivsete jagajate arv on

$$\tau(36pq) = \tau(4)\tau(9)\tau(p)\tau(q) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36.$$

Seega arv $36pq$ jagub oma positiivsete jagajate arvuga ja on tau-arv. ■

Lause 2.1.8. Kui jagatis $\frac{n}{\tau(n)}$ on paarisarv, siis iga, arvu n mitte jagava, algarvu p korral on arv np tau-arv.

Tõestus. Vaatleme arvu $\frac{np}{\tau(np)}$. Kuna $\frac{n}{\tau(n)}$ jagub arvuga 2, siis leidub täisarv k , nii et

$n = 2k\tau(n)$. Et n ei jagu arvuga p , siis $\tau(np) = \tau(n)\tau(p)$. Seega saame, et

$$\frac{np}{\tau(np)} = \frac{2k\tau(n)p}{\tau(n)\tau(p)} = \frac{2k\tau(n)p}{\tau(n) \cdot 2} = kp$$

ning järelikult arv np on tau-arv. ■

2.1.3. Tau-arvude seosed teiste arvuhulkadega

Tau-arvude uurimisel olid Coltonil abiks arvutiprogrammid, mis otsisid ka seoseid teiste arvuhulkadega. Järgnevalt mõned nii leitud seostest.

Lause 2.1.9. Iga paaritu tau-arv on täisruut.

Tõestus. Olgu n paaritu tau-arv kanoonilisel kujul $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Kuna paaritu tau-arv n jagub oma tegurite arvuga $\tau(n)$, siis võrduses $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ peavad kõik tegurid $\alpha_i + 1$ olema paaritud ja jagama arvu n . Seega arvu n kanoonilises kujus on kõik astendajad α_i paarisarvud ning paaritu tau-arv n ise osutub täisruuduks. ■

Lause 2.1.10. Tau-arvud on kongruentsed arvudega 0, 1, 2 ja 4 mooduli 8 järgi.

Tõestus. Eelneva lause 2.1.9 põhjal võib paaritu tau-arvu esitada kujul

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1,$$

mis annab jagamisel arvuga 8 alati jäägi 1. Paarisarvu aga saab esitada kujul $8k$, $8k+2$, $8k+4$ või $8k+6$. Kui tau-arv esitaks kujul $8k+6 = 2(4k+3)$, siis teoreemi 2.1.1 põhjal peaks paaritu arv $4k+3$ olema samuti tau-arv ja seega olema teoreemi 2.1.9 tõttu täisruut. Ükski täisruut aga ei ole kongruentne arvuga 3 mooduli 4 järgi (lause 4.5.3). Seega arv $8k+6$ ei saa olla tau-arv. Järelikult, tau-arvude jagamisel arvuga 8 saavad tekkida jäägid 0, 1, 2 ja 4. ■

Nimetatud jäägid tõesti ka realiseeruvad, sest tau-arvud 1, 2, 8 ja 12 on kongruentsed vastavalt arvudega 1, 2, 0 ja 4 mooduli 8 järgi.

Lause 2.1.11. Ükski täiuslik arv ei ole tau-arv.

Tõestus. Tõestame väite eraldi paarisarvude ja paaritute arvude jaoks.

a) Olgu k paarisarvuline täiuslik arv. Vastavalt teoreemile 1.1.3 on iga paarisarvuline täiuslik arv esitatav kujul $2^{p-1}(2^p - 1)$, kus $(2^p - 1)$ on algarv ning ka p on algarv. Arvul $k = 2^{p-1}(2^p - 1)$ on positiivseid jagajaid $((p-1)+1)(1+1) = 2p$. Kui vaadeldav arv k jaguks oma positiivsete jagajate arvuga $2p$, siis kas $p = 2$ või $p = 2^p - 1$. Kui $p = 2$, siis täiuslik arv $k = 6$ ja see ei ole tau-arv. Võrdus $p = 2^p - 1$ ei ole aga võimalik, sest $p < 2^p - 1$, kui $p > 1$. Seega paarisarvuliste täiuslike arvude seas ei leidu tau-arve.

b) Näitame, et kui leidub paaritu täiuslik arv, siis ei saa see olla tau-arv. Oletame, et leidub paaritu täiuslik arv m . Paaritu arvu m kõik positiivsed jagajad $d_1 < d_2 < \dots < d_k = m$ on samuti paaritud arvud. Kuna m on täiuslik arv, siis $d_1 + d_2 + \dots + d_{k-1} = m$ ning arvude paarsust arvestades peab arvu m pärisjagajate arv $k-1$ olema paaritu arv. Seega saime, et arvul m on paarisarv positiivseid jagajaid. Paaritu täiuslik arv aga ei saa jaguda oma paarisarvulise positiivsete tegurite arvuga, ega ole seega ka tau-arv. ■

2.1.4. Järjestikused tau-arvud

Definitsioon 2.1.2. Kaks järjestikust täisarvu, mis mõlemad on tau-arvud, moodustavad *tau-arvude paari*.

Esimesed tau-arvude paarid on: (1, 2), (8, 9), (1520, 1521), (50624, 50625), (62000, 62001), (103040, 103041), (199808, 199809), (221840, 221841) [53, A036898].

Neid paare vaadates paneme tähele, et teisest paarist alates on paari kahest arvust väiksem alati paarisarv.

Töös [58] on näidatud, et tõesti paar (1, 2) on ainus tau-arvude paar, mille korral väiksem arv on paaritu arv.

Lause 2.1.12. Kui täisarvud a ja $a+1$ on mõlemad tau-arvud ja a on paaritu arv, siis $a=1$.

Tõestus. Kuna a on paaritu tau-arv, siis a on täisarvu ruut x^2 (lause 2.1.9) ja $a+1 = x^2 + 1$. Kuna paaritu arvu x korral $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$, siis $x^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$. Seega $a+1$ ei jagu arvuga 4 ja peab avalduma kujul $2p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, kus p_i on erinevad paaritud algarvud. Järelikult $\tau(a+1) = 2(1+\alpha_1) \dots (1+\alpha_k)$ ning iga $\alpha_i + 1$ peab olema paaritu arv, sest $a+1$ on tau-arv. Järelikult iga α_i peab olema paarisarv ja seega tau-arv $a+1$ avaldub kujul $2y^2$, kus y on paaritu arv. Arvu $a+1 = x^2 + 1 = 2y^2$ iga paarituarvuline jagaja peab olema kongruentne arvuga 1 mooduli 4 järgi [51]. Kuna $2y^2$ on tau-arv, siis selle iga algarvulise teguri astmenäitaja peab jaguma arvuga 4, sest muidu $2y^2$ saaks jaguda paaritu arvuga, mis on kongruentne arvuga 3 mooduli 4 järgi. Seega leidub täisarv v nii, et $2y^2 = 2v^4$ ja järelikult tuleb vaadelda diofantilist võrrandit $x^2 + 1 = 2v^4$. Sellel võrrandil on kaks lahendit $x=1, v=1$ ja $x=239, v=13$ [55].

Kui $x = 239$, siis $a + 1 = x^2 + 1 = 57122$ ja $\tau(57122) = \tau(2 \cdot 13^4) = (1+1)(1+5) = 12$, aga 57122 ei jagu arvuga 12. Kui $x = 1$, siis $a + 1 = 1 + 1 = 2$ ja $a = 1$. ■

Järeldus 2.1.3. Ei leidu rohkem kui kahte järjestikust tau-arvu.

Tau-arvude paari kohta näitas Colton, et paarisarv peab jaguma arvuga 4.

Lause 2.1.13. Kui täisarvud a ja $a + 1$ on mõlemad tau-arvud ja a on paarisarv, siis arv a jagub arvuga 4.

Tõestus. Kuna $a + 1$ on paaritu tau-arv, siis see peab olema täisarvu ruut (lause 2.1.9). Seega leidub paaritu arv b , nii et $b^2 = a + 1$. Kuna $b^2 \equiv 1 \pmod{4}$, siis järelikult $a = b^2 - 1 \equiv 0 \pmod{4}$. ■

Tau-arvude jada vaadates paneme tähele, et leidub järjestikuseid tau-arve, millede vahe on 2 (näiteks arvud 448 ja 450), vahe on 3 (näiteks arvud 9 ja 12) ning vahe on 4 (näiteks arvud 36 ja 40). Zelinsky [58] näitas, et ei leidu kahte järjestikust tau-arvu, millede vahe oleks 5.

Lause 2.1.14. Ei leidu kahte tau-arvu, millede vahe oleks 5.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leiduvad tau-arvud m ja n nii, et $m - n = 5$. Lause 2.1.11 põhjal iga tau-arv on kongruentne arvuga 0, 1, 2 või 4 mooduli 8 järgi. Seega $n \equiv 4 \pmod{8}$ ja $m \equiv 1 \pmod{8}$. Järelikult arvu 2 suurim aste, mis jagab arvu n , on 4 ning $\tau(4) \mid \tau(n)$. Kuna $\tau(n) \mid n$, siis saame, et $n \equiv 0 \pmod{3}$. Seega peab $m \equiv 2 \pmod{3}$. Et m on paaritu tau-arv, siis m peab olema täisruut, aga täisruudu jagamisel arvuga 3 ei saa tekkida jääki 2 (lause 4.5.2). ■

2.1.5. Antitau-arvud

Oma töös toob Zelinsky [58] sisse ka *antitau-arvude* mõiste, mida teadaolevalt varem ei ole käsitletud ning uurib nende omadusi.

Definitsioon 2.1.3. Positiivne täisarv n on *antitau-arv* (*anti-tau number*), kui arv n ja selle positiivsete jagajate arv $\tau(n)$ on ühistegurita arvud.

Definitsioonist saab teha kaks ilmset järeldust.

Järeldus 2.1.3. Arv 1 on ainus arv, mis on nii tau-arv kui ka antitau-arv.

Järeldus 2.1.4. Kui n on paarisarvuline antitau-arv, siis n on täisruut.

Näitame, et antitau-arvude hulk on lõpmatu hulk.

Lause 2.1.15. Algarvu p korral on arv $n = p^k$ antitau-arv parajasti siis, kui $k \neq pz - 1$ ühegi positiivse täisarvu z korral.

Tõestus. Arvul p^k on positiivseid jagajaid $k + 1$. Arv p^k on ühistegurita kõigi arvudega, mis ei ole arvu p kordsed. Seega arvud p^k ja $k + 1$ on ühistegurita parajasti siis, kui $k + 1 \neq zp$, kus z on mis tahes positiivne täisarv. ■

Järeldus 2.1.5. Kõik paaritud algarvud on antitau-arvud.

Järeldus 2.1.6. Kui algarv $p \neq 3$, siis p^2 on antitau-arv.

Tuginedes taas algarvude hulga lõpmatusse saab sõnastada järgmise tulemuse.

Lause 2.1.16. Antitau-arve on lõpmata palju.

Kui arvud n ja m on ühistegurita antitau-arvud, siis nende korrutis võib olla tau-arv, antitau-arv või mitte kumbki neist.

Näiteks

- a) 7 ja 4 on antitau-arvud, nende korrutis 28 ei ole tau-arv ega antitau-arv,
- b) 3 ja 4 on antitau-arvud, nende korrutis 12 on tau-arv,
- c) 7 ja 5 on antitau-arvud, nende korrutis 35 on antitau-arv.

Lause 2.1.17. Kui arvust 1 suuremad täisarvud n ja m on ühistegurita ning seejuures n on tau-arv ja m on antitau-arv, siis korrutis nm ei saa olla antitau-arv.

Tõestus. Olgu n ja m arvust 1 suuremad ühistegurita täisarvud nii, et n on tau-arv ja m on antitau-arv. Vaatame $S\ddot{U}T(nm, \tau(nm))$. Kuna n on tau-arv, siis leidub selline täisarv k nii, et $n = k\tau(n)$. Järelikult

$$S\ddot{U}T(nm, \tau(nm)) = S\ddot{U}T(k\tau(n)m, \tau(n)\tau(m)) = \tau(n) S\ddot{U}T(km, \tau(m)) > 1.$$

Seega ei saa korrutis mn olla antitau-arv. ■

Zelinsky oma töös ([58], lk 14. teoreem 55c)) kirjutab ekslikult, et lause 2.1.17 eeldustel korrutis mn ei saa olla tau-arv. Selle väite lükkab ümber lihtne näide: arv 8 on tau-arv, sest arv $\tau(8) = 4$ jagab arvu 8. Arv 7 on antitau-arv, sest arvud 7 ja $\tau(7) = 2$ on ühistegurita. Korrutis $8 \cdot 7 = 56$ on aga tau-arv, sest arv $\tau(56) = 8$ jagab arvu 56.

Samas tau-arvu 441 ja antitau-arvu 5 korrutis 2205 ei ole tau-arv ja ei ole ka antitau-arv, sest arvudel 2205 ja $\tau(2205) = 18$ on küll ühine tegur 9, aga 18 ei jaga arvu 2205.

2.2. Ülikordarvud ja nende mõned alaliigid

Tõenäoliselt juba vanas Babülooonias märgati nende arvude erilisust, sest vaadeldavate omadustega arvudest esimesi kasutati seal mõõtühikute süsteemis [7]. Taasavastati ja anti nimi neile arvudele 1915. aastal S. Ramanujani poolt, kelle vastava artikli avaldas samal aastal London Matemaatika Selts. Nende arvude uurimine oli ka Ramanujani väitekirja aluseks. [40]

2.2.1. Põhimõisted

Vaatluse alla tulevate arvude defineerimise aluseks on võetud positiivse täisarvu n kõigi positiivsete jagajate arv $\tau(n)$.

Definitsioon 2.2.1. Positiivne täisarv on *ülikordarv* (*highly composite number*), kui sel on positiivseid jagajaid rohkem, kui sellest mis tahes väiksemal positiivsel täisarvul.

Näiteks on arv 6 ülikordarv, sest $\tau(6) = 4$, aga arvude 1 kuni 5 positiivsete jagajate arvud ei ületa arvu 3.

Seega ülikordarvu n korral kehtib võrratus $\tau(m) < \tau(n)$ iga positiivse täisarvu $m < n$ jaoks.

Definitsioonist tulenevalt kuulub ülikordarvude hulka ka kaks mitte kordarvu, need on arvud 1 ja 2.

Esimesed ülikordarvud on: 1, 2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120, 180, 240, 360, 720, 840, 1260, 1680, 2520, 5040 [53, A002182].

Ramanujan leidis arvuti abita ülikordarvud kuni arvuni 6746328388800, millel on 10080 jagajat. Seejuures jäi tal vaid üks ülikordarv sellest piirkonnast leidmata.

Vaatluse alla tulevad ka järgmised ülikordarvude eriliigid.

Definitsioon 2.2.2. Ülikordarv on *eriline ülikordarv* (*special highly composite number*), kui see arv jagab kõiki temast suuremaid ülikordarve.

Töö alajaotuses 2.2.3 on näidatud, et leidub vaid 6 erilist ülikordarvu.

Definitsioon 2.2.3. Positiivne täisarv n on *kõrgem ülikordarv* (*superior highly composite number*) kui leidub arv $\varepsilon > 0$ nii, et kõikide positiivsete täisarvude m korral $\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} \geq \frac{\tau(m)}{m^\varepsilon}$.

Esimesed kõrgemad ülikordarvud on: 2, 6, 12, 60, 120, 360, 2520, 5040, 55440 [53, A002201].

2.2.2. Ülikordarvude mõningaid omadusi

Ülikordarvude hulga lõpmatuses on lihtne veenduda.

Lause 2.2.1. Ülikordarve on lõpmata palju.

Tõestus. Olgu n ülikordarv. Vaatame arvu $2n$. Arvul $2n$ on rohkem jagajaid kui arvul n . Seega peab leiduma ülikordarv, mis on suurem arvust n , aga mitte suurem arvust $2n$. ■

Ramanujan näitas, et kõik ülikordarvud on järjestikuste algarvude astmete korrutised.

Teoreem 2.2.1. Kõik ülikordarvud on kujul $2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}$, kus p_i on i -s algarv ja $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k$.

Tõestus. Olgu $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_s$ järjestikused algarvud ning q_l ($l = 1, \dots, t$) mingid algarvud.

Olgu ülikordarv n antud kanoonilisel kujul $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$. Kui leidub selline indeks i ($1 \leq i \leq k$) nii, et $p_i < q_i$, siis leidub positiivne täisarv

$$m = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_i^{\alpha_i} q_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots q_k^{\alpha_k} < q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_i^{\alpha_i} \dots q_k^{\alpha_k} = n.$$

Samal ajal aga $\tau(m) = \tau(n)$. See on aga võimatu, sest n oli eelduse kohaselt ülikordarv. Järelikult $p_i = q_i$ iga $i = 1, 2, \dots, k$ korral, s.t ülikordarvu kanoonilises kujus on vaid järjestikuste algarvude astmed.

Oletame nüüd vastuväiteliselt, et leidub ülikordarv kujul $2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}$, kus $\alpha_i < \alpha_j$ kui $1 \leq i < j \leq k$. Sel juhul arvul $n' = np_i^{\alpha_j - \alpha_i} p_j^{\alpha_i - \alpha_j}$ on sama palju positiivseid jagajaid kui arvul n ning $n' < n$. Tekib vastuolu, sest arv n oli ülikordarv. ■

Iga arv kujul $2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}$ ei tarvitse aga olla ülikordarv. Näiteks arv $m = 2^5 \cdot 3 = 96$ on nõutud kujul, kuid temast väiksemal arvul 60 on samuti 12 positiivset jagajat.

Vaatleme järgnevalt ülikordarvude mõningaid seoseid käesolevas töös käsitletud teiste arvuhulkadega.

Lause 2.2.2. Ülikordarvude hulk on praktiliste arvude hulga pärisalamhulk.

Tõestus. Äsja tõestasime (teoreem 2.2.1), et ülikordarvu algteguriteks on k esimest algarvu. Järelduse 1.3.4 põhjal on siis tegemist praktilise arvuga. Esimene praktilistest arvudest, mis ei ole ülikordarv, on 8. ■

Lause 2.2.3. Kõrgemate ülikordarvude hulk on ülikordarvude hulga pärisalamhulk.

Tõestus. Kui n on kõrgem ülikordarv, siis definitsiooni 2.2.3 järgi

$$\tau(n) \geq \tau(m) \left(\frac{n}{m} \right)^\varepsilon > \tau(m)$$

mis tahes positiivse täisarvu m korral. Seega saadud võrratus kehtib ka siis, kui $m < n$, mis tähendab, et n on ülikordarv. Esimesed kaks ülikordarvu, mis ei ole kõrgemad ülikordarvud on 1 ja 4. ■

Lause 2.2.4. Ülikordarvude ja liiaga arvude hulkadel leidub mittetühi ühisosa, mis on mõlema vaadeldava hulga pärisalamhulk.

Tõestus. Näitame esmalt, et kõik arvust 6 suuremad ülikordarvud on liiaga arvud. Olgu n arvust 6 suurem ülikordarv, siis $n = 2^a 3^b 5^c r$ ja $a \geq b \geq c \geq 1$, kus juhul $r > 1$, r ei jagu arvudega 2, 3 ja 5.

Vaatleme arvu n nelja suurima positiivse jagaja summat ja teeme seda kahel juhul:

$$1) \quad a \geq 2 \quad (a \geq b \geq c \geq 1),$$

$$2) \quad a = 1 \quad (a \geq b \geq c \geq 1).$$

Esimesel juhul saame, et arvu n nelja suurima positiivse jagaja summa on $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} > 2n$ ning seega arv n on liiaga arv.

Teisel juhul saame, et nelja suurima positiivse jagaja summa on $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{5} > 2n$ ning järelikult arv n on liiaga arv. Samas esimesed ülikordarvud 1, 2 ja 4 ei ole liiaga arvud ning liiaga arvud 18 ja 20 on esimesed, mis ei ole ülikordarvud. ■

2.2.3. Erilised ülikordarvud

Erilised ülikordarvud defineeris 1991. aastal S. Ratering artiklis [46], kus ta ka näitas, et selliste arvude hulk on lõplik.

Lause 2.2.5. Arvud 1 ja 2 on erilised ülikordarvud.

Tõestus. Ülikordarvu kanoonilisest kujust (teoreem 2.2.1) järeldub, et arvud 1 ja 2 jagavad kõiki endast suuremaid ülikordarve. ■

Lause 2.2.6. Arv 6 on eriline ülikordarv.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leidub ülikordarv $n > 6$, mis ei jagu arvuga 6. Teoreemi 2.2.1 põhjal ülikordarv n jagub arvuga 2. Kui arv n ei jagu arvuga 6, aga jagub arvuga 2, siis n ei jagu arvuga 3. Siit järeldub, et $n = 2^k$, kus $k \geq 3$. Kuna $2^{k-2} \cdot 3 < 2^k$ ja arv 2^k on ülikordarv, siis võrratusest $\tau(2^{k-2} \cdot 3) < \tau(2^k)$ järeldub, et $2(k-1) < k+1$. Järelikult $k < 3$. Oleme saanud vastuolu ja järelikult arvust 6 suuremad ülikordarvud jaguvad kõik arvuga 6. ■

Lause 2.2.7. Arv 12 on eriline ülikordarv.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leidub ülikordarv $n > 12$, mis ei jagu arvuga 12. Lause 2.2.6 põhjal teame, et see arv jagub arvuga 6. Seega arvu n algteguri 2 astmenäitaja peab olema 1. Teoreemi 2.2.1 ja tingimuse $n > 12$ põhjal saame, et $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot r$, kus r tähistab arvust 5 suuremate algtegurite korrutist. Kuna $2^3 \cdot 3 \cdot r < 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot r$ ja $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot r$ on ülikordarv, siis $\tau(2^3 \cdot 3 \cdot r) < \tau(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot r)$. Siit saame, et $8 \cdot \tau(r) < 8 \cdot \tau(r)$. Oleme saanud vastuolu ja järelikult arv 12 jagab kõiki endast suuremaid ülikordarve. ■

Lause 2.2.8. Arv 60 on eriline ülikordarv.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leidub ülikordarv $n > 60$, mis ei jagu arvuga 60. Lause 2.2.7 põhjal arv n jagub arvuga 12. Seega arv n jagub arvuga 3, aga ei jagu arvuga 5 ning teoreemi 2.2.1 põhjal $n = 2^a \cdot 3^b$, kus $a \geq b \geq 1$.

Vaatame nüüd arvu b erinevaid väärtusi.

Olgu $b = 1$. Et $2^a \cdot 3 > 60$, siis $a \geq 5$. Kuna $2^{a-3} \cdot 3 \cdot 5 < 2^a \cdot 3$ ja arv $2^a \cdot 3$ on ülikordarv, siis $\tau(2^{a-3} \cdot 3 \cdot 5) < \tau(2^a \cdot 3)$. Järelikult kehtib võrratus $4(a-2) < 2(a+1)$, millest $a < 5$. Oleme saanud vastuolu.

Olgu $b = 2$. Et $2^a \cdot 3^2 > 60$, siis $a \geq 3$. Kuna $2^{a-1} \cdot 3 \cdot 5 < 2^a \cdot 3^2$ ja arv $2^a \cdot 3^2$ on ülikordarv, siis $\tau(2^{a-1} \cdot 3 \cdot 5) < \tau(2^a \cdot 3^2)$. Saame, et kehtib võrratus $4a < 3(a+1)$, millest $a < 3$. Oleme saanud vastuolu.

Olgu $b \geq 3$. Kuna $a \geq b$, siis $a \geq 3$. Kuna $2^{a-1} \cdot 3^{b-1} \cdot 5 < 2^a \cdot 3^b$ ja arv $2^a \cdot 3^b$ on ülikordarv, siis $\tau(2^{a-1} \cdot 3^{b-1} \cdot 5) < \tau(2^a \cdot 3^b)$. Seega peab kehtima võrratus $2ab < (a+1)(b+1)$, millest järeldub, et $ab < a+b+1$. Kuna $b \geq 3$, siis $3a \leq ab < a+b+1$ ja $2a < b+1$. Kuna $a \geq b$, saame, et $2b \leq 2a < b+1$, millest $b < 1$. Oleme saanud vastuolu.

Järelikult arv 60 jagab kõiki temast suuremaid ülikordarve. ■

Lause 2.2.9. Arv 2520 on eriline ülikordarv.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leidub ülikordarv $n > 2520$, mis ei jagu arvuga $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Lause 2.2.8 põhjal arv n jagub arvuga $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Seega 4, 3 ja 5 on arvu n tegurid, aga vähemalt üks arvudest 8, 9 või 7 ei ole arvu n teguriks.

Vaatame järgmisi olukordi.

1) Arv n ei jagu arvuga 7.

Teoreemi 2.2.1 põhjal $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, kus $a \geq b \geq c \geq 1$.

Kui $a \geq 3$, siis $2^{a-3} \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7 < 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ ja kuna $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ on ülikordarv, siis kehtib võrratus $2(a-2) < (a+1)$. Saame, et $a < 5$.

Kui $b \geq 2$, siis $2^a \cdot 3^{b-2} \cdot 5^c \cdot 7 < 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ ning kuna $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ on ülikordarv, siis kehtib võrratus $2(b-1) < (b+1)$. Saame, et $b < 3$.

Kuna $c \leq b$, siis ka $c < 3$.

Oleme leidnud a , b ja c maksimaalsed väärtused. Kuna $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c > 2520$, siis $a = 4$, $b = 2$ ja $c = 2$. Seega $n = 3600$ ja kuna n on ülikordarv, siis peab kehtima $\tau(2520) < \tau(3600)$. Tekib vastuolu, sest $\tau(2520) = 48$ ja $\tau(3600) = 45$.

2) Arv n ei jagu arvuga 9, aga jagub arvuga 7.

Teoreemi 2.2.1 põhjal $n = 2^a \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^e \cdot r$, kus e on kas 0 või 1 ja täisarv r ei jagu arvudega 2, 3, 5, 7 ja 11.

Kui $e = 1$, siis $2^a \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot r < 2^a \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot r$. Kuna n on ülikordarv, siis peaks kehtima võrratus $4 < 2 \cdot 2$. Oleme saanud vastuolu ning järelikut peab $e = 0$ ja $r = 1$. Järelikut $n = 2^a \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Kuna $n > 2520$, siis saame, et $a \geq 5$.

Kuna $2^{a-2} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 < 2^a \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ja n on ülikordarv, siis peab kehtima võrratus $3(a-1) < 2(a+1)$, millest $a < 5$. Oleme saanud vastuolu.

3) Arv n ei jagu arvuga 8, aga jagub arvudega 7 ja 9.

Teoreemi 2.2.1 põhjal $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot r$, kus arv r ei jagu arvudega 2, 3, 5, 7 ja 11 ning $2 \geq c \geq d \geq e \geq 0$.

Kui $e > 0$, siis $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^{e-1} \cdot r < 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot r$. Kuna n on ülikordarv, siis peab kehtima võrratus $6e < 3(e+1)$, millest $e < 1$. Oleme saanud vastuolu ja järelikut $e = 0$ ja $r = 1$. Seega $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^c \cdot 7^d$.

Kui $c = 2$, siis $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 < 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 7^d$. Kuna n on ülikordarv, siis peab kehtima võrratus $5 \cdot 2 < 3 \cdot 3$. Jõudsimme vastuoluni ning järelikut $c = 1$ ja $d = 1$. Seega $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 < 2520$. Oleme saanud vastuolu.

Kuna kõik oletused viisid vastuoluni, siis ei leidu arvust 2520 suuremat ülikordarvu, mis ei jaguks selle arvuga. ■

Näitame, et ei leidu arvust 2520 suuremat erist ülikordarvu. Selleks tõestame esmalt järgmise tulemuse.

Lemma 2.2.1. Kahe järjestikuse arvust 2520 suurema ülikordarvu jagatis on väiksem kui 2.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leiduvad kaks järjestikust ülikordarvu n ja m , nii et $2520 < n < m$ ja $m/n \geq 2$. Kuna $\tau(2n) > \tau(n)$, siis peab $m \leq 2n$. Seega $m = 2n$. Et 2520 on eriline ülikordarv ja $n > 2520$, siis $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f \cdot r$, kus $a \geq 3$, $b \geq 2$, $c \geq 1$, $d \geq 1$ ning r ei jagu arvudega 2, 3, 5, 7, 11 ja 13.

Kuna $2n$ ja n on järjestikused ülikordarvud, siis $\tau\left(\frac{3n}{2}\right) \leq \tau(n)$ ja $\tau\left(\frac{4n}{3}\right) \leq \tau(n)$. Seega $a(b+2) \leq (a+1)(b+1)$ ja $(a+3)b < (a+1)(b+1)$. Neist võrratustest järeldub $a \leq b+1$ ja $2b-1 \leq a$. Seega $2b-1 \leq b+1$, millest $b \leq 2$. Et $a \leq b+1$, siis järelikult $a \leq 3$. Kuna eelnevalt oli teada, et $a \geq 3$ ja $b \geq 2$, siis nüüd saame, et $a = 3$ ja $b = 2$.

Kui $f \geq 1$, siis $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^{f-1} \cdot r < 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f \cdot r$. Kuna n on ülikordarv, siis peab kehtima võrratus $6 \cdot 4 \cdot f < 4 \cdot 3 \cdot (f+1)$, millest järeldub, et $f < 1$. Oleme saanud vastuolu ning seega $f = 0$ ja $r = 1$.

Järelikult $n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e$, kus c on kas 1 või 2.

Oletame, et $c = 2$. Kuna $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^d \cdot 11^e < 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^d \cdot 11^e$ ja n on ülikordarv, siis peab kehtima võrratus $6 \cdot 2 < 4 \cdot 3$. Oleme saanud vastuolu. Järelikult $c = 1$. Kuna $n > 2520$ ja 2520 on eriline ülikordarv, siis $d = e = 1$. Seega $n = 27720$ ning $\tau(n) = 96$. Kuna aga $\tau(45360) = 100$ ja $n < 45360 < m = 2n$, siis n ja m ei ole kaks järjestikust ülikordarvu. Saime vastuolu eeldusega. Seega oleme saanud, et kahe järjestikuse ja arvust 2520 suurema ülikordarvu jagatis on väiksem arvust 2. ■

Teoreem 2.2.2. Arv 2520 on suurim eriline ülikordarv.

Tõestus. Arvust 2520 suurema kahe järjestikuse ülikordarvu jagatis on väiksem kui 2, seega ei saa neist väiksem olla suurema jagajaks. Seega on arv 2520 suurim eriline ülikordarv. ■

Järeldus 2.2.1. Leidub vaid kuus erilist ülikordarvu ja need on 1, 2, 6, 12, 60 ja 2520.

Tõestus. Lausete 2.2.5 - 2.2.9 põhjal on loetletud kuus arvu tõepoolest erilised ülikordarvud. Teoreemi 2.2.2 tõestuses näitasime, et arvust 2520 suuremaid erilisi ülikordarve ei leidu. Vaadates arvust 2520 väiksemate ülikordarvude loendit alajaotuse 2.2 alguses, saame vahetult kontrollida, et kõikidel arvudest 1, 2, 6, 12 ja 60 erinevatel ülikordarvudel leidub juba selles loendis neist suurem ülikordarv, mida nad ei jaga ja seega ei ole ükski neist arvudest eriline ülikordarv. ■

2.2.4. Etteantud positiivsete jagajate arvuga määratud arvuhulga vähima elemendi leidmine

Eespool selgus, et iga ülikordarv on vähim sellistest arvudest, millel on sama palju positiivseid jagajaid, kui on vaadeldaval ülikordarvul. Kuid kas fikseeritud jagajate arvuga täisarvude seas on vähim alati ülikordarv? Vastus sellele on ei. Näiteks arv 16 on vähim positiivne täisarv, millel on 5 positiivset jagajat, kuid 16 ei ole ülikordarv, sest näiteks arvul 12 on 6 positiivset jagajat.

Vähimad arvud, millel on 1, 2, 3, ..., 15 positiivset jagajat, on vastavalt 1, 2, 4, 6, 16, 12, 64, 24, 36, 48, 1024, 60, 4096, 192, 144 [53, A005179].

Üldist algoritmi ülalnimetatud vähimate arvude konstrueerimiseks ei ole leitud. Mõningaid erijuhtumeid vaatles 1968. aastal M.E. Grost [24].

Olgu meil vaja leida vähim selline positiivne täisarv, millel on h positiivset jagajat.

Tähistagu arvule h vastavat sellist vähimat arvu $A(h)$.

Käesolevas alajaotuses tähistagu edaspidi p_i algarvude jada i -ndat elementi ning P_j ja q_m mis tahes algarve.

Kuna kanoonilisel kujul oleval arvul $n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}$ on positiivsete jagajate arv $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$, siis arvu $A(h)$ kanooniline kuju peaks olema

$$A(h) = P_1^{\alpha_1 - 1} P_2^{\alpha_2 - 1} \dots P_k^{\alpha_k - 1}, \quad (2.1)$$

kus

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k = h. \quad (2.2)$$

Järgmised kolm lemmat täpsustavad oluliselt arvu $A(h)$ esitust.

Lemma 2.2.2. Kui $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_k$ ja täisarvud $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ moodustavad mingi permutatsiooni positiivsetest täisarvudest $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, siis arvudest kujul $2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$ on vähim $2^{\beta_1} 3^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$.

Tõestus. Olgu arv $m = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}$ selline, mille korral leiduvad indeksid i ja j nii, et $i > j$ ja $\gamma_i > \gamma_j$, kus $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Kuna $p_i > p_j$, siis ka $p_i^{\gamma_i} p_j^{\gamma_j} > p_i^{\gamma_j} p_j^{\gamma_i}$ ning

$$m = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} \dots p_j^{\gamma_j} \dots p_i^{\gamma_i} \dots p_k^{\gamma_k} > 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} \dots p_j^{\gamma_i} \dots p_i^{\gamma_j} \dots p_k^{\gamma_k}.$$

Seega m ei ole vähim sellisel kujul antud arvudest. Järelikult arv $2^{\beta_1} 3^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ on vähim, kui $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_k$. ■

Lemma 2.2.3. Kui $\alpha > 1$ ja $\beta > 1$ ning $P_1^\alpha > P_2$, siis $P_1^{\alpha\beta-1} > P_1^{\alpha-1} P_2^{\beta-1}$.

Tõestus. Kui $\alpha > 1$ ja $\beta > 1$ ning $P_1^\alpha > P_2$, siis on selge, et $P_1^{\alpha(\beta-1)} > P_2^{\beta-1}$, millest järeldub ka võrratus $P_1^{\alpha\beta-1} > P_1^{\alpha-1} P_2^{\beta-1}$. ■

Lemma 2.2.4. Vähim positiivne täisarv $A(h)$, millel on täpselt h positiivset jagajat, on kujul $A(h) = 2^{\alpha_1-1} 3^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1}$, kus $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k$ ja $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k = h$, kusjuures mis tahes arvu α_i ($i = 1, 2, \dots, k$) iga pärisjagaja α korral kehtib võrratus

$$p_i^\alpha < p_{k+1}. \quad (2.3)$$

Tõestus. Kuna täisarvu (2.1) positiivsete jagajate arv sõltub vaid arvu kanoonilises kujus olevatest astendajatest ja mitte algteguritest endist, siis on arv vähim, kui $A(h) = 2^{\alpha_1-1} 3^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1}$. Lemma 2.2.2 põhjal saame, et $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k$.

Oletame vastuväiteliselt, et leidub indeks i ($i = 1, 2, \dots, k$), mille korral $\alpha_i = \alpha \cdot \beta$, $\alpha > 1$ kuid $p_i^\alpha > p_{k+1}$. Lemma 2.2.3 põhjal saame, et

$$A(h) = 2^{\alpha_1-1} \dots p_i^{\alpha_i-1} \dots p_k^{\alpha_k-1} > 2^{\alpha_1-1} \dots p_i^{\alpha-1} \dots p_k^{\alpha_k-1} p_{k+1}^{\beta-1} = b.$$

Leides nende arvude positiivsete jagajate arvud, saame $\tau(A(h)) = \tau(b)$. Oleme jõudnud vastuoluni, sest eelduse kohaselt oli $A(h)$ vähim selline arv. ■

Positiivsete jagajate arvu h võib esitada oma kõigi algtegurite korrutisena

$$h = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n,$$

kus $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$.

Grost tõi oma töös sisse mõisted, et h on *tavaline* (*ordinary*), kui vähim positiivne täisarv, millel on h positiivset jagajat, on kujul

$$A(h) = 2^{q_1-1} 3^{q_2-1} \dots p_n^{q_n-1}.$$

Ülejäänud juhtudel on h *erandlik* (*exceptional*) ning siis on

$$A(h) = 2^{\alpha_1-1} 3^{\alpha_2-1} \dots p_k^{\alpha_k-1}, \quad (2.4)$$

kus $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k = h = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$ ning $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k$ ja $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$.

Grost leidis oma töös mõned huvitavad seosed arvu h tegurite arvu $n \leq 6$ ja arvu h tavalisuse vahel ning leidis neil juhtudel arvu h erandlikud väärtused.

Olgu $h = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$ ja $n \leq 6$. Vaatame järgmisi võimalusi.

1) Juhud $n = 1$ ja $n = 2$.

Kui $n = 1$, siis $h = q_1$ ja on selge, et $A(h) = 2^{q_1-1}$, mis tähendab, et h on tavaline.

Kui $n = 2$, siis $h = q_1 q_2$. Oletame, et $A(h)$ üldkujus (2.4) on $\alpha_1 = q_1 q_2$. Kuna q_1 on arvu α_1 pärisjagaja, siis peab kehtima lemma 2.2.4. Teiselt poolt aga $2^{q_1} \geq 2^2 > 3 = p_{k+1}$. Seega tekib vastuolu tingimusega (2.3). Järelikult $\alpha_1 = q_1 \geq q_2 = \alpha_2$ ning h on tavaline ja $A(h) = 2^{q_1-1} 3^{q_2-1}$.

2) Juhud $n = 3$ ja $n = 4$.

Alustame juhu $n = 4$ vaatlemisega.

Kui $\alpha_1 = \alpha\beta$, kus $\alpha \geq 3$, $\beta \geq 2$, siis $2^\alpha \geq 2^3 > 7 \geq p_{k+1}$ ning tekib vastuolu tingimusega (2.3).

Seega lemma 2.2.4 kohaselt on α_1 kas algarv või 4.

Kui $i \geq 2$ ja $\alpha_i = \alpha\beta$, kus $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 2$, siis $p_i^\alpha \geq p_i^2 \geq 3^2 > 7 \geq p_{k+1}$ ning taas tekib vastuolu tingimusega (2.3). Seega peab α_i , kus $i \geq 2$, olema algarv.

Järelikult on $A(h)$ kas kujul

$$2^{4-1} 3^{q_1-1} 5^{q_2-1}, \quad 3 \geq q_1 \geq q_2 \geq 2, \quad h = q_1 q_2 \cdot 4,$$

või kujul

$$2^{q_1-1} 3^{q_2-1} 5^{q_3-1} 7^{q_4-1}.$$

Viimasel juhul on h tavaline.

Esimesel kujul on erandlikke arve h lõplik arv ja need saab läbi vaadata.

Kui $h = 2^4$, siis $A(h) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Kui $h = 3 \cdot 2^3$, siis $A(h) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Järelikult kõikidest arvudest $h = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4$, kus $q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq q_4$, on h on erandlik vaid siis, kui $h = 16$ ja $h = 24$.

Juhul kui $n = 3$, siis sarnase arutelu tulemusena saame, et kui $h = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$, kus $q_1 \geq q_2 \geq q_3$, siis vaid $h = 2^3 = 8$ on erandlik ja sel juhul $A(h) = 2^3 \cdot 3$.

3) Juhud $n = 5$ ja $n = 6$.

Alustame taas keerulisemast juhtumist kui $n = 6$.

Kui $\alpha_1 = \alpha\beta$, kus $\alpha \geq 4$, $\beta \geq 2$, siis saaksime $2^\alpha \geq 2^4 > 13 \geq p_{k+1}$ ning tekib vastuolu.

Kui $\alpha_2 = \alpha\beta$, kus $\alpha \geq 3$, $\beta \geq 2$, siis saaksime $3^\alpha \geq 3^3 > 23 \geq p_{k+1}$ ning jõuame vastuoluni.

Kui $i \geq 3$ korral $\alpha_i = \alpha\beta$, kus $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 2$, siis saame jälle vastuolu, sest $p_i^\alpha \geq p_i^2 \geq 5^2 > 23 > p_{k+1}$.

Seega $A(h)$ peab olema ühel järgmistest kujudest, kus $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ tähistab arvude $q_1, q_2, \dots, q_n$ mingit ümberjärjestust:

- a) $2^{\alpha_1-1} 3^{4-1} 5^{Q_1-1} 7^{Q_2-1}$, kus α_1 on kas 4, 6 või 9 ja $3 \geq Q_1 \geq Q_2$,
- b) $2^{\alpha_1-1} 3^{Q_1-1} 5^{Q_2-1} 7^{Q_3-1} 11^{Q_4-1}$, α_1 on kas 4, 6 või 9 ja $\alpha_1 > Q_1 \geq Q_2 \geq Q_3 \geq Q_4$,
- c) $2^{q_1-1} 3^{4-1} 5^{q_2-1} 7^{q_3-1} 11^{q_4-1}$, $q_1 \geq 5$, $3 \geq q_2 \geq q_3 \geq q_4 \geq 2$,
- d) $2^{q_1-1} 3^{q_2-1} 5^{q_3-1} 7^{q_4-1} 11^{q_5-1} 13^{q_6-1}$.

Neist viimasel juhul on h tavaline.

Kahel esimesel juhul saab arvul h olla vaid lõplik arv väärtusi ja on need võimalik ükshaaval läbi vaadata. Seega saame leida arvu $h = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5 \cdot q_6$, kus $q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq q_4 \geq q_5 \geq q_6$, järgmised erandlikud väärtused. Kui

- 1) $h = 2^6$, siis $A(h) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$,
- 2) $h = 3 \cdot 2^5$, siis $A(h) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$,
- 3) $h = 3^2 \cdot 2^4$, siis $A(h) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$,
- 4) $h = 3^3 \cdot 2^3$, siis $A(h) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$,
- 5) $h = 3^4 \cdot 2^2$, siis $A(h) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$,
- 6) $h = 3^5 \cdot 2$, siis $A(h) = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$,
- 7) $h = 3^6$, siis $A(h) = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$,
- 8) $h = 5 \cdot 3^5$, siis $A(h) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$.

Juhul c) kui $A(h) = 2^{q_1-1} 3^{4-1} 5^{q_2-1} 7^{q_3-1} 11^{q_4-1}$, $q_1 \geq 5$ ja $3 \geq q_2 \geq q_3 \geq q_4 \geq 2$, siis suhe

$$\frac{2^{q_1-1} 3^{q_2-1} 5^{q_3-1} 7^{q_4-1} 11^{2-1} 13^{2-1}}{2^{q_1-1} 3^{4-1} 5^{q_2-1} 7^{q_3-1} 11^{q_4-1}} = \frac{13}{3^{4-q_2} 5^{q_2-q_3} 7^{q_3-q_4} 11^{q_4-2}}$$

peab olema suurem kui 1. Seega

$q_2 = q_3 = q_4 = 2$. Järelikult kui $h = q_1 \cdot 2^5$, kus $q_1 \geq 5$, siis $A(h) = 2^{q_1-1} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ ning selliseid arve on lõpmatult palju.

Juhul kui $n = 5$, siis on võimaluste läbi vaatamine sarnane juhuga kui $n = 6$.

Sel juhul saame, et $h = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 \cdot q_5$, kus $q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq q_4 \geq q_5$ on erandlik, kui

- 1) $h = 2^5$, siis $A(h) = A(h) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$,
- 2) $h = 3 \cdot 2^4$, siis $A(h) = A(h) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$,
- 3) $h = 3^2 \cdot 2^3$, siis $A(h) = A(h) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$,
- 4) $h = 3^3 \cdot 2^2$, siis $A(h) = A(h) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$,
- 5) $h = 3^4 \cdot 2$, siis $A(h) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$,
- 6) $h = 3^5$, siis $A(h) = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$,
- 7) $h = q_1 \cdot 2^4$, $q_1 \geq 5$, siis $A(h) = 2^{q_1-1} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

Grost [24] esitas ka töötava algoritmi vähima arvu leidmiseks, mille positiivsete jagajate arv on võrdne algarvu astmega.

Lause 2.2.10. Kui q on mis tahes fikseeritud algarv ning täisarvudest $p_i^{(q-1)q^{(l-1)}}$, kus $i \geq 1$ ja $l \geq 1$, moodustuva kasvava jada j -s element on g_j , siis vähim arv, millel on q^n positiivset jagajat, avaldub kujul $A(q^n) = \prod_{j=1}^n g_j$.

Tõestus. Kui $\tau(m) = q^n$, siis täisarvu m kanooniline kuju on $m = p_1^{q^{\beta_1}-1} \cdot p_2^{q^{\beta_2}-1} \cdot \dots \cdot p_k^{q^{\beta_k}-1}$, kus $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k = n$. Kuna $p^{q^b-1} = p^{(q-1)} \cdot p^{(q-1)q} \cdot p^{(q-1)q^2} \cdot \dots \cdot p^{(q-1)q^{b-1}}$, siis m on täisarvude $p_i^{(q-1)q^{(l-1)}}$ kasvava jada n esimese elemendi korrutis. Et $\tau\left(\prod_{j=1}^n g_j\right) = q^n$, siis vähim sellise positiivsete jagajate arvuga positiivne täisarv on esitatav kujul $A(q^n) = \prod_{j=1}^n g_j$. ■

Näiteks leiame vähima arvu, millel on 2^{11} positiivset jagajat. Selleks on meil vaja leida 11 vähimat arvu, mis avalduvad kujul $p_i^{(2-1)2^{(l-1)}}$.

Kui $i = 1$, siis juhtudel $l = 1, 2, 3, 4$, saame arvudeks kujul $p_i^{(2-1)2^{(l-1)}}$ vastavalt arvud 2, $2^2 = 4$, $2^4 = 16$, $2^8 = 256$.

Kui $i = 2$, siis juhtudel $l = 1, 2, 3$, saame vastavateks arvudeks 3, $3^2 = 9$, $3^4 = 81$.

Kui $i = 3$, siis juhtudel $l = 1, 2, 3$, saame vastavateks arvudeks 5, $5^2 = 25$, $5^4 = 625$.

Kui $i = 4$, siis juhtudel $l = 1, 2$, saame vastavateks arvudeks 7, $7^2 = 49$.

Nii jätkates ja järjestades arve $p_i^{(2-1)2^{(l-1)}}$, saame järgmise jada

2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 25, . . .

Seega

$$A(2^{11}) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 19 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 19.$$

3. Arvu numbrite ja numbrite summaga seonduvad arvuhulgad

3.1. Niveni arvud

Aastal 1977 tõi Ivan Niven näite selle kohta, kuidas India matemaatiku D.R. Kaprekari (1955. a) poolt pakutud nuputamisesandest võib alguse saada valdkond, mis pakub huvi ja uurimist matemaatikutele. Kaprekari poolt pakutud ülesandes oli vaja leida esimesed kakskümmend kümnendsüsteemi positiivset täisarvu, mis jaguvad oma numbrite summaga. Selliseid arve hakati esialgu nimetama *Harshad'i arvudeks* (*Harshad number*). Viimane nimetus tuleneb sanskriti keelest ja tähendab *suurt rõõmu* (*great joy*), mida selliste arvude uurimine pakub. Alates aastast 1980 on matemaatilises kirjanduses sellise omadusega arve nimetatud ka Niveni auks *Niveni arvudeks*. [16],[63]

3.1.1. Põhimõisted ja -tulemused

Definitsioon 3.1.1. Positiivne kümnendsüsteemi täisarv on *Niveni arv* (*Niven number*), kui see arv jagub oma numbrite summaga [65].

Näiteks arv 2010 on Niveni arv, sest jagub oma numbrite summaga.

Esimesed Niveni arvud on: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21 [53, A005349].

Niveni arvude definitsioonist lähtuvalt saab teha kolm ilmset järeldust.

Järeldus 3.1.1. Algarv saab olla Niveni arv vaid sel juhul, kui see on väiksem kui 10.

Järeldus 3.1.2. Kõik positiivsed täisarvulised järkarvud on Niveni arvud.

Järeldus 3.1.3. Niveni arve on lõpmata palju.

Niveni arvud on näide sellistest arvudest, mille defineerimisel on oluline, millises arvusüsteemis on vaadeldav arv üles kirjutatud. Näiteks kümnendsüsteemi arv 7 jagub oma numbrite summaga ja on definitsiooni 3.1.1 mõttes Niveni arv. Kui kasutada selle arvu kahendesitust $7_{10} = 111_2$, siis see ei jagu oma numbrite summaga 11_2 . Seetõttu on kasutusele võetud järgmine mõiste [65].

Definitsioon 3.1.2. Positiivne k -ndsüsteemi $k \geq 2$ täisarv on k -Niveni arv (k -Niven number), kui see arv jagub oma numbrite summaga.

On selge, et k -ndsüsteemi $k \geq 2$ kõik positiivsed arvud, mis on väiksemad arvust k , on k -Niveni arvud.

Arve, mis osutuvad Niveni arvudeks mis tahes arvusüsteemis, nimetatakse *kõikjal Niveni* arvudeks (*all-Niven number*). On näidatud, et kõikjal Niveni arve on ainult neli: kümnendesituses arvud 1, 2, 4 ja 6.[65]

Huvipakkuv on olnud ka järjestikuste Niveni arvude olemasolu küsimus.

T. Cai [8] tõestas, et nii kahendsüsteemis kui ka kolmendsüsteemis on lõpmata palju järjestikuste positiivsete täisarvude nelikuid, milles kõik arvud on vastavalt 2-Niveni arvud või 3-Niveni arvud.

Aastal 1982 näitas R.E. Kennedy [33], et kümnendsüsteemis ei saa leiduda rohkem kui 21 järjestikust Niveni arvu.

Lause 3.1.1. Kümnendsüsteemis ei saa leiduda rohkem kui 21 järjestikust Niveni arvu.

Tõestus. Vaatleme kümnest järjestikusest positiivsest täisarvust koosnevat hulka $A_n = \{10n, 10n+1, \dots, 10n+9\}$ ja sajast järjestikusest täisarvust koosnevat hulka $B_i = \{A_{10i}, A_{10i+1}, \dots, A_{10i+9}\}$, kus n ja i on mittenegatiivsed täisarvud. Hulgas A_j olevate paaritute arvude numbrite summa on kas paarisarv või paaritu arv. Tähistame $A_j = E_j$ kui selle hulga paaritute arvude numbrite summa on paarisarv ja $A_j = O_j$, kui selle hulga paaritute arvude numbrite summa on paaritu arv. Kui $A_j = E_j$, siis selles olevad paaritud arvud ei saa olla Niveni arvud. Rohkem kui 11 järjestikust Niveni arvu saab olla järjest kui $A_{k-1} = O_{k-1}$ ja $A_k = O_k$ ehk A_{k-1} ja A_k ei saa kuuluda ühte ja samasse hulka B_i . Siit järeldub ka, et ei saa olla rohkem kui 21 järjestikust Niveni arvu. ■

Aastal 1993 näitasid C.N. Cooper ja R.E. Kennedy [15], et kümnendsüsteemis ei saa leiduda rohkem kui 20 järjestikust Niveni arvu. Neil õnnestus ka konstrueerida 20 järjestikusest Niveni arvust koosnev hulk, milles vähim arv on 44363342786-kohaline ning on numbrite summaga 2464645030. Nende konstruktsioonist selgub ka, et leidub lõpmata palju selliseid kahekümnest järjestikusest Niveni arvust koosnevaid hulki.

H.G. Grundman [25] üldistas aastal 1994 Cooperi ja Kennedy tulemuse, tõestades, et kui $q \geq 2$, siis q -Niveni arvude seas ei saa leiduda $r > 2q$ järjestikust q -Niveni arvu.

3.1.2. Super-Niveni arvud

Matemaatikute Cooperi ja Kennedy töödes on lähemalt uuritud ka ühte Niveni arvude alamhulka, mida nad nimetavad super-Niveni arvude hulgaks [16].

Nimetatud arvude defineerimisel vaadeldakse kümnendsüsteemi positiivse täisarvu n korral hulka K_n , mille moodustavad arvu n nullist erinevad numbrid ja kõik võimalikud nullist erinevate numbrite summad.

Näiteks $K_{18} = \{1, 8, 9 = 8 + 1\}$, $K_{2010} = \{1, 2, 3 = 2 + 1\}$, $K_{2011} = \{1, 2, 3 = 2 + 1, 4 = 2 + 1 + 1\}$.

Definitsioon 3.1.3. Positiivne kümnendsüsteemi täisarv n on *super-Niveni arv*, kui arv n jagub kõikide arvudega, mis kuuluvad hulka K_n .

Näiteks arv 2010 on super-Niveni arv, sest $K_{2010} = \{1, 2, 3 = 2 + 1\}$ ning 2010 jagub arvudega 1, 2 ja 3.

Esimesed super-Niveni arvud on: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 20, 24, 30, 36, 40, 48, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 102, 110, 120, 140, 150.

Super-Niveni arvu definitsioonist lähtuvalt saame teha kolm lihtsat järeldust.

Järeldus 3.1.4. Kõik super-Niveni arvud on Niveni arvud.

Vastupidine aga ei kehti, sest näiteks 18 on küll Niveni arv, aga ei ole super-Niveni arv, sest 18 ei jagu arvuga 8.

Järeldus 3.1.5. Kõik positiivsed täisarvulised järkarvud on super-Niveni arvud.

Järeldus 3.1.6. Super-Niveni arve on lõpmata palju.

Kui võrrelda esimeste Niveni arvude loetelu esimeste super-Niveni arvude loeteluga, võib tähele panna, et Niveni arvude seas leidub ka kahekohalisi paarituid arve, aga super-Niveni arvude seas neid ei kohta. Paarituurvuliste super-Niveni arvude kohta kehtibki järgmine lause [16].

Lause 3.1.2. Ainsad paarituurvulised super-Niveni arvud on 1, 3, 5, 7 ja 9.

Tõestus. Olgu n paaritu super-Niveni arv, milles on k numbrit ja $k \geq 2$. Seega $n = \sum_{i=1}^k a_i 10^{i-1}$, kus a_i tähistab numbrit. Oletuse kohaselt on arvu n üheliste number a_1 paaritu arv.

Vaatleme nüüd kahte võimalikku juhtu.

Olgu a_k paarisarv. Kuna super-Niveni arvu definitsiooni kohaselt arv n jagub arvuga a_k , siis järelikult n peaks olema paarisarv. Tekib vastuolu.

Olgu a_k paaritu arv. Kuna n on eelduse kohaselt super-Niveni arv, siis ta peab jaguma arvuga $a_1 + a_k$, mis on aga paarisarv, sest eelduse kohaselt a_1 on paaritu arv. Tekib taas vastuolu. ■

Huvitavaid seoseid super-Niveni arvude jaguvuse kohta on välja toodud töös [16].

Lause 3.1.3. Kui n on super-Niveni arv, milles on m nullist erinevat numbrit, siis arv n jagub täisarvudega 1 kuni m .

Tõestus. Olgu arvu n nullist erinevad numbrid $a_1, a_2, \dots, a_m$. Olgu k suvaline selline täisarv, et $1 \leq k \leq m$. Vaatleme hulka $A_k = \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_k\}$.

On selge, et hulk $A_k \subseteq K_n$. Vaatleme jääke, mis tekivad hulka A_k kuuluvate arvude jagamisel arvuga k . Olgu $a_1 = b_1 k + r_1, a_1 + a_2 = b_2 k + r_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_k = b_k k + r_k$.

Oletame, et kõik tekkinud k jääki on erinevad. Siis leidub indeks i ($1 \leq i \leq k$) nii, et $r_i = 0$.

Sel juhul $a_1 + a_2 + \dots + a_i$ jagub arvuga k . Kuna n on super-Niveni arv, siis arv n jagub arvuga $a_1 + a_2 + \dots + a_i$ ja järelikult jagub n arvuga k .

Kui leiduvad indeksid i ja j ($1 \leq j < i \leq k$) nii, et $r_i = r_j$, siis vahe

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_i) - (a_1 + a_2 + \dots + a_j) = a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_i$$

peab jaguma arvuga k . Kuna n on super-Niveni arv, siis n jagub arvuga $a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_i$ ja järelikult n jagub ka arvuga k . Seega super-Niveni arv n jagub iga arvuga k ($1 \leq k \leq m$). ■

Paraku ei ole lauses 3.1.3 antud tingimus piisav selleks, et arv n oleks super-Niveni arv. Näiteks arv 114 on kolm nullist erinevat numbrit ja arv 114 jagub arvudega 1, 2 ja 3, kuid arv 114 ei jagu arvuga $5 = 1 + 4$ ning ei ole seega super-Niveni arv.

Kui vaadelda super-Niveni arvu n , milles on vähemalt 5 nullist erinevat numbrit, siis äsjatõestatud lause põhjal vaadeldav arv jagub kindlasti ka arvudega 2, 3, 4 ja 5, s.t arv n lõpeb numbriga 0. Siit järeldub järgmine super-Niveni arvude omadus.

Järeldus 3.1.7. Kui super-Niveni arv $n \geq 10^4$, siis arvu n numbrite seas leidub vähemalt üks number 0.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et kõik numbrid on nullist erinevad. Seega peaks neid olema vähemalt 5. Lause 3.1.3 põhjal peaks see arv, aga jaguma arvudega 2 ja 5 ning järelikult peab selle üheliste number olema 0. Tekib vastuolu. ■

Kirjutades välja kõik arvust 10^4 väiksemad super-Niveni arvud, siis nende vaatlemisel selgub, et vaid arvudel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 24, 36 ja 48 ei ole ühtegi numbrit 0 [16].

Järeldus 3.1.8. Kui n on super-Niveni arv, mille numbrite summa on suurem kui $9(k-1)$, siis arv n jagub arvuga k .

Tõestus. Kui super-Niveni arvu n numbrite summa on suurem kui $9(k-1)$, siis on selles arvus vähemalt k nullist erinevat numbrit ning lause 3.1.3 põhjal arv n jagub arvuga k . ■

3.1.3. Nivenmorfse arvud

C. Pickoveri töös [43] käsitleti selliseid täisarve n , mille korral leidub hulknurkarv järjekorranumbriga n nii, et selle hulknurkarvu viimastest numbritest moodustub arv n . Sellest artiklist ajendatult defineeris S. Boscaro Niveni arvude jaoks analoogsed arvud [6].

Definitsioon 3.1.4. Kümnnendsüsteemi arv t on *Nivenmorfne arv* (*Nivenmorphic number*), kui leidub Niveni arv, mille numbrite summa on t ja selle arvu viimastest numbritest moodustub arv t .

Näiteks arv 12 on Nivenmorfne arv, sest arv 62112 jagub oma numbrite summaga 12 ja selle arvu kahest viimasest numbrist moodustub arv 12.

Boscaro tõestas (1997), et kümnnendsüsteemis on kõik arvud peale arvu 11 Nivenmorfse arvud. Tõestuses näitas ta esmalt, et kõik arvust 20 suuremad positiivsed täisarvud on Nivenmorfse arvud ning seejärel, et arvust 20 väiksematest arvudest vaid 11 ei ole Nivenmorfne arv. [6]

Toome ära osa sellest tõestusest.

Lause 3.1.4. Arv 11 ei ole Nivenmorfne arv.

Tõestus. Oletame, et arv 11 on Nivenmorfne arv, s.t leidub Niveni arv n , mille numbrite summa on 11 ja kahest viimasest numbrist moodustub arv 11. Tähistagu $s(n)$ arvu n numbrite summat. See tähendab, et arv n avaldub kujul $n = a10^2 + 11$ ja $s(n) = 11$. Sellest järeldeb, et $s(a) = 9$. Kuna n on Niveni arv, siis arv n jagub arvuga 11. Järelikult arv a peab jaguma arvuga 11. Tähistame arvu a paaritutel ja paarisarvulistel kohtadel olevate numbrite summad vastavalt $s_o(a)$ ja $s_e(a)$. Kasutades arvuga 11 jaguvuse tunnust, saame, et $s_o(a) - s_e(a) = 11k$, kus k on täisarv.

Kui $k = 0$, siis $s_o(a) = s_e(a)$ ja järelikult

$$s(a) = s_o(a) + s_e(a) = 2s_e(a),$$

mis on võimatu kuna $s(a) = 9$. Järelikult $k \neq 0$.

Kui $k > 0$, siis võrdusest $s_o(a) = s_e(a) + 11k$ saame, et

$$s(a) = s_o(a) + s_e(a) \geq s_o(a) \geq 11k \geq 11,$$

mis on taas samadel põhjustel võimatu. Järelikult k ei saa olla positiivne täisarv.

Kui $k < 0$, siis võrdusest $s_e(a) = s_o(a) - 11k$ saame, et

$$s(a) = s_o(a) + s_e(a) \geq s_e(a) \geq -11k \geq 11.$$

Järelikult k ei saa olla ka negatiivne. Tekkinud vastuolude tõttu oleme saanud, et arv 11 ei saa olla Nivenmorfne arv. ■

3.2. Smith'i arvud

Järgnevalt vaatleme positiivseid täisarve, mille numbrite summa on võrdne algtegurite numbrite summaga.

3.2.1. Põhimõisted ja tulemused

Aastal 1982 märkas Albert Wilansky [67], et tema naisevenna Helmut Smitd'i telefoninumbril $4937775 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 65837$ on nii numbrite summa kui ka algtegurite

numbrite summa 42. Tähistades täisarvu n numbrite summat $s(n)$ ja kõikide algtegurite numbrite summat $s_p(n)$, siis tõepoolest

$$s(4937775) = 4 + 9 + 3 + 7 + 7 + 7 + 5 = 42, \quad s_p(4937775) = 3 + 5 + 5 + 6 + 5 + 8 + 3 + 7 = 42.$$

Sellest tulenevalt said sellise omadusega arvud oma nime *Smith'i arvud* ja algas nende omaduste uurimine.

Definitsioon 3.2.1. Kordarv on *Smith'i arv* (*Smith number*), kui selle numbrite summa on võrdne arvu algtegurite numbrite summaga, s.t kordarv n on Smith'i arv, kui $s(n) = s_p(n)$.

Esimesed Smith'i arvud on: 4, 22, 27, 58, 85, 94, 121, 166, 202, 265 [53, A006753].

Wilansky leidis algul 360 Smith'i arvu, mis on väiksemad kui 10000. Hiljem leiti veel 16 Smith'i arvu, mis puudusid Wilansky loetelus, kuid oli väiksemad arvust 10000.

Väiksemate arvude korral on suhteliselt lihtne leida algteguriteks lahutust ja kontrollida definitsiooni järgi, kas antud arv on Smith'i arv või mitte. Ühtset eeskirja, mis suurte arvude korral võimaldaks lihtsamalt kindlaks teha, kas antud arv on Smith'i arv või mitte, ei ole veel leitud. Küll aga on leitud mõned eeskirjad teatud erijuhtude jaoks, millede selgitamiseks sõnastame esmalt järgmised abitulemused.

Lemma 3.2.1. Kui on teada täisarvu n kümnendesituse numbrid, siis arvu $2n$ numbrite summa leidmiseks, tuleb liita arvu n ristsummale arvu n kõik numbrid, mis ei ole suuremad kui 4 ning arvu n iga numbri $k \geq 5$ korral liita arv $k - 9$.

Tõestus. Kui $n = 0, 1, 2, 3, 4$, siis ilmselt $s(n) = n$ ning $s(2n) = 2n$. Seega sellisel juhul $s(2n) = s(n) + n$. Kui aga $n = 5, 6, 7, 8, 9$, siis $s(n) = n$ ja $2n = 10 + (2n - 10)$. Sel juhul $s(2n) = s(n) + n - 9$. Seega arvu n ristsummast tuleb sel juhul lahutada arv 4 numbri 5 korral, lahutada arv 3 numbri 6 korral, arv 2 numbri 7 korral ja arv 1 numbri 8 korral. Mitmekohalise arvu n korral tuleb ülaltoodud eeskirja rakendada iga numbri jaoks eraldi. Seega arvu $2n$ ristsumma leidmiseks tuleb liita arvu n ristsummale arvu n kõik numbrid, mis ei ole suuremad kui 4 ning iga numbri $k \geq 5$ korral liita arv $k - 9$. ■

Näiteks arvu $n = 1276$ korral $s(n) = 16$ ja $2n = 2552$. Siis lemma 3.2.1 põhjal $s(2n) = s(n) + 1 + 2 + (7 - 9) + (6 - 9) = 16 + 3 - 2 - 3 = 14$.

Lemma 3.2.2. Tähistagu $s_p(n)$ täisarvu n kõikide algtegurite numbrite summat ja $s(n)$ täisarvu n kõikide numbrite summat. Kehtivad järgmised väited:

- 1) $s(q) = s_p(q)$ mis tahes algarvu q korral;
- 2) $s_p(mn) = s_p(m) + s_p(n)$ mis tahes positiivsete täisarvude m ja n korral.

Tõestus. 1) Kuna algarvu algteguriks on arv ise, siis on selge, et $s(q) = s_p(q)$.

2) On ilmne, et kui m ja n on ühistegurita arvud, siis võrdus kehtib.

Olgu arvud m ja n on antud kanoonilisel kujul $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ja $n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r}$.

Oletame, et leiduvad indeksid i ja j nii, et $p_i = q_j$. Siis

$$\begin{aligned} s_p(mn) &= (\alpha_i + \beta_j)s(p_i) + \alpha_1 s(p_1) + \dots + \alpha_{i-1} s(p_{i-1}) + \alpha_{i+1} s(p_{i+1}) + \dots + \alpha_k s(p_k) + \\ &\quad + \beta_1 s(q_1) + \dots + \beta_{j-1} s(q_{j-1}) + \beta_{j+1} s(q_{j+1}) + \dots + \beta_r s(q_r) = s_p(m) + s_p(n). \end{aligned}$$

Näeme, et sel juhul võrdus kehtib ja on selge, et väide kehtib ka siis, kui ühiseid algtegureid oleks rohkem kui üks. ■

Lause 3.2.1. Kui q on algarv, siis kordarv $2q$ on Smith'i arv siis ja ainult siis, kui $s(2q) - s(q) = 2$.

Tõestus. Kui kordarv $2q$ on Smith'i arv, siis definitsiooni 3.2.1 ning lemma 3.2.2 põhjal saame, et $s(2q) = s_p(2q) = s_p(2) + s_p(q) = 2 + s(q)$ ehk $s(2q) - s(q) = 2$.

Teiselt poolt, kui algarvu q korral kehtib võrdus $s(2q) - s(q) = 2$, siis $s(2q) = s(q) + 2 = s_p(q) + s_p(2) = s_p(2q)$, millest järeldub, et $2q$ on Smith'i arv. ■

Tõestatud lause 3.2.1 ja lemma 3.2.1 põhjal saab sõnastada praktilise eeskirja kontrollimaks, kas kordarv $2q$, kus q on algarv, on Smith'i arv või mitte.

Selleks, et kindlaks teha, kas arv $2q$, kus q on algarv, on Smith'i arv, tuleb

- 1) liita arvu q kõik numbrid, mis ei ole suuremad kui 4;
- 2) saadud summast tuleb lahutada iga number 5 korral arv 4, iga number 6 korral arv 3, iga 7 korral arv 2 ja iga 8 korral arv 1.

Kui saadud tulemus on 2, siis arv $2q$ on Smith'i arv.

Näiteks $69214 = 2 \cdot 34607$, kus 34607 on algarv. Arvutame: $3 + 4 - 3 - 2 = 2$. Seega 69214 on Smith'i arv.

Tähistagu R_n n -kohalist täisarvu, mis koosneb ainult numbritest 1. Näiteks $R_5 = 11111$. On teada, et arvude R_n seas leidub algarve, näiteks R_2 , R_{19} , R_{23} ja R_{315} [65].

Selliste algarvude abil saab konstrueerida Smith'i arve. Järgnevalt üks selline konstruktsioon S. Oltikarilt [41].

Lause 3.2.2. Kui R_n on algarv ja $n \geq 3$, siis $3304 \cdot R_n$ on Smith'i arv.

Tõestus. Kuna $3304 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 59$ ja R_n on algarv, siis lemma 3.2.2 põhjal saame $s_p(3304 \cdot R_n) = 27 + n$. Näitame nüüd, et ka $s(3304 \cdot R_n) = 27 + n$ niipea, kui $n \geq 3$.

Kui $n = 3$, siis $s(3304 \cdot 111) = s(366744) = 30 = n + 27$. Juhtudel $n \geq 4$ esitame arvu R_n

kujul $R_n = \frac{10^n - 1}{9}$ ja leiame, et $3304 \cdot R_n = 3304 \cdot \frac{10^n - 1}{9} = \frac{33039 \dots 96696}{9} = 3671 \dots 1744$,

kus saadud arvu keskel on $n - 4$ numbrit 1.

Seega $s(3304 \cdot R_n) = s(3671 \dots 1744) = 31 + n - 4 = n + 27$ ning arv $3304 \cdot R_n$ on algarvulise R_n korral tõepoolest Smith'i arv. ■

Viimastel andmetel avaldub suurim teadaolev Smith'i arv kujul

$$9R_{1031} \cdot (10^{69882} + 3 \cdot 10^{34941} + 1)^{1476} \cdot 10^{3913210}$$

ja on 107060074-kohaline arv ([65], mai 2010).

Paneme tähele, et korrutamine arvuga 10 ei muuda arvu numbrite summat, küll aga suurendab 7 võrra arvu algtegurite numbrite summat. Järelikult kui $s(n) - s_p(n) = 7$, siis arv $10n$ on Smith'i arv.

Näiteks $s(69) - s_p(69) = 7$ ning arv 690 on tõesti Smith'i arv, sest $s(690) = 15$ ja $s_p(690) = 2 + 3 + 5 + 2 + 3 = 15$.

Kirjeldatud tähelepanek annab järgmise võimaluse Smith'i arvude genereerimiseks [41].

Lause 3.2.3. Kui täisarvu n korral $s(n) > s_p(n)$ ja $s(n) - s_p(n)$ jagub arvuga 7, siis kordarv

$10^k \cdot n$, kus $k = \frac{s(n) - s_p(n)}{7}$, on Smith'i arv.

Tõestus. Ülalpool öeldut arvestades saame, et kui $k = \frac{s(n) - s_p(n)}{7}$, siis

$$s(10^k \cdot n) = s(n) = s(n) - s_p(n) + s_p(n) = s_p(n) + 7k = s_p(10^k \cdot n).$$

Seega vaadeldav arv $10^k \cdot n$ on Smith'i arv. ■

Lause 3.2.4. Kui q on algarv, mis koosneb vaid numbritest 0 ja 1, siis leidub selline täisarv n , et nq on Smith'i arv.

Tõestus. Olgu algarvus q number ühtesid m tükki, s.t $s(q) = m$. Lause 3.2.3 põhjal on piisav näidata, et leidub selline positiivne täisarv n , et $s(nq) - s_p(nq)$ jagub arvuga 7, kui $s(nq) > s_p(nq)$.

Kui täisarv m jagub arvuga 7, siis $s(7q) = 7m$ ja $s_p(7q) = m + 7$. Kuna m ei saa olla 1, siis $s(7q) > s_p(7q)$ ja $s(nq) - s_p(nq)$ jagub arvuga 7. Seega arv nq on Smith'i arv.

Kui m annab arvuga 7 jagamisel ühe jääkidest 1, 2, 3, 4, 5 või 6, siis saab analoogiliselt eelnevaga näidata ja neil juhtudel sobib arvu n väärtuseks vastavalt arv 6, 2, 5, 14, 3 või 4. ■

Toodud konstruktsioonid ning mitmedki teised nendele sarnased moodused genereerivad vaid teatud tüüpi Smith'i arve. P. Castello ja K. Lewis konstrueerisid [8] (2002) ühe lõpmatu Smith'i arvude jada. Nimetatud autorite poolt konstrueeritud Smith'i arvude osajada üldliige on esitatud kujul

$$a_n = 10^k \cdot 11^j (10^n - 1),$$

kus $n > 7$, j on jääk, mis tekib arvu $4x$ jagamisel arvuga 7, kusjuures x on omakorda jääk, mis tekib arvu $s(10^n - 1) - s_p(10^n - 1)$ jagamisel arvuga 7 ning

$$k = \frac{s(11^j (10^n - 1)) - s_p(11^j (10^n - 1))}{7}.$$

Näiteks $n = 8$ korral $x = 6$, $j = 3$ ja $k = 5$ ning $a_8 = 10^5 \cdot 11^3 (10^8 - 1) = 13309999866900000$ on nimetatud Smith'i arvude lõpmatu osajada esimene liige [8].

Kuna pole veel suudetud leida Smith'i arvude jada üldliikme valemit, siis otsitakse ka arvjadasi, mille liikmed ei saa kindlasti olla Smith'i arvud. Järgmine lause annab ühe sellise jada [69].

Lause 3.2.5. Ei leidu Smith'i arve kujul $3^m \cdot q$, kus $q > 3$ on algarv ja m on positiivne täisarv.

Tõestus. Kui m ja q on positiivsed täisarvud, siis täisarv $3^m \cdot q$ jagub arvuga 3 ning seega ka $s(3^m \cdot q)$ jagub arvuga 3. Arv $s_p(3^m \cdot q) = s_p(3^m) + s_p(q) = 3m + s(q)$ aga ei jagu arvuga 3 algarvu $q > 3$ korral. Seega arvu $3^m \cdot q$ numbrite summa $s(3^m \cdot q)$ ei saa olla võrdne vaadeldava arvu algtegurite numbrite summaga $s_p(3^m \cdot q)$ ning järelkult ei leidu Smith'i arve kujul $3^m \cdot q$, kus $q > 3$ on algarv ja m on positiivne täisarv. ■

Samas aga, kui $q = 3$, siis näiteks arv $3^2 \cdot 3 = 27$ on Smith'i arv.

3.2.2. Smith'i arvude mõningaid eriliike

Smith'i arvude uurimiseks koostatud arvutiprogramm [36] on võimaldanud leida küllalt palju Smith'i arve, avastada mitmeid nende arvude eriliike ning Smith'i arvude mitmikuid. Nimetatud arvutiprogrammi abil on välja eraldatud näiteks järmised Smith'i arvude eriliigid:

1) *Smith'i palindroomarvud (palindromic Smith numbers, [53, A098834]).* Need on Smith'i arvud, mille esitus kümnendsüsteemis ei muutu, kui neid lugeda kas vasakult paremale või paremalt vasakule

Näiteks: 4, 22, 121, 202, 454, 535, 636, 666, 1111, 1881, 3663, 7227, 7447, 9229, 10201, 17271, 22522, 24142.

2) *Smith'i ümberpööratavad arvud (reversible Smith numbers, [53, A104171]).* Need on positiivsed täisarvud, mis nii vasakult paremale kui paremalt vasakule lugedes osutuvad Smith'i arvudeks.

Näiteks: 265 ja 562, 1507 ja 7051, 4369 ja 9634.

3) *Smith'i 2-algarvud (Smith semiprimes, [53, A098837]).* Need on Smith'i arvud, mis on esitatavad kahe (tingimata mitte erineva) algarvu korrutisena.

Näiteks: 4, 22, 58, 85, 94, 121, 166, 202, 265 jne.

4) *Smith'i liiaga arvud (abundant Smith numbers, [53, A098835]).* Need on Smith'i arvud, mille pärisjagajate summa on suurem arvust endast.

Näiteks: 378, 438, 576, 588, 636, 648, 654, 666.

5) *Smith'i puuduga arvud (deficient Smith numbers, [53, A098836]).* Need on Smith'i arvud, mille pärisjagajate summa on väiksem arvust endast.

Näiteks: 4, 22, 27, 58, 85, 94, 121, 166, 202, 265, 274.

6) *Smith'i ruutarvud (Smith square numbers, [53, A098839]).* Need on Smith'i arvud, mis osutuvad mõne täisarvu ruuduks.

Näiteks: 4, 121, 576, 729, 6084, 10201.

7) *Smith'i kuuparvud* (*Smith cubic numbers*, [53,A098838]). Need on Smith'i arvud, mis osutuvad mõne täisarvu kuubiks.

Näiteks: 27, 729, 19683, 474552.

8) *Smith'i kolmnurkarvud* (*Smith triangular numbers*, [53,A098840]). Need on Smith'i arvud, mis osutuvad ühtlasi ka kolmnurkarvudeks, s.t leidub selline positiivne täisarv k nii, et vaadeldav arv esitub kujul $k(k+1)/2$.

Näiteks: 378, 666, 861, 2556, 5253, 7503, 10296.

Nii nagu teistegi positiivsete täisarvude jadade korral, pakub Smith'i arvude korralgi uurijaile huvi selliste järjestikuste täisarvude leidmine, mis osutuvad kõik vaadeldava omadusega arvudeks, antud juhul siis Smith'i arvudeks.

Definitsioon 3.2.2. Kaks järjestikust täisarvu on *Smith'i vennad* (*Smith brothers*), kui mõlemad arvud on Smith'i arvud.

Esimesed Smith'i vennad on: (728, 729), (2964, 2965), (3864, 3865), (4959, 4960) [53, A050219,A050220].

Leidub ka rohkem kui kaks järjestikust täisarvu, mis on Smith'i arvud (kolmikud, nelikud, viisikud, kuuikud ja seitsmikud).

Näiteks vähim kolmest järjestikusest täisarvust koosnev Smith'i kolmik on (73615, 73616, 73617).

Jens Kruse Andersen leidis 28. aprillil 2008, et esimene järjestikuste Smith'i arvude seitsmik algab arvuga 164736913905 [26].

3.2.3. Smith'i arvude mõningaid üldistusi

Wayne Mc Daniel üldistas (1987) Smith'i arvude mõiste [35].

Definitsioon 3.2.3. Kordarv n on *k-Smith'i arv*, kui arvu n algtegurite numbrite summa on k korda suurem arvu n numbrite summast, s.t kui $s_p(n) = k \cdot s(n)$.

Wilansky poolt defineeritud Smith'i arvud on seega 1-Smith'i arvud.

Esimesed 2-Smith'i arvud on: 32, 42, 60, 70, 104, 152, 231, 315, 316 [53, A104390].

Mc Daniel näitas ka, et k -Smith'i arve on lõpmatult palju iga positiivse täisarvu k korral. See väide tõestas esimesena, et ka Smith'i arve on lõpmata palju.

Smith'i arvudega on seotud ka teatavad naturaalarvude hulgad.

M. Smith defineeris aastal 1996 kaks naturaalarvude hulka ja andis neile nimed oma nõbude Monica ja Suzanne järgi.

Definitsioon 3.2.4. Positiivse täisarvu n korral moodustavad *Monica hulga* M_n kõik sellised kordarvud r , mille korral n jagab arvu r numbrite summa $s(r)$ ja arvu r algtegurite numbrite summa $s_p(r)$ vahet, s.t $n \mid (s(r) - s_p(r))$.

Definitsiooni kohaselt kuuluvad hulka M_1 kõik kordarvud. Mõningate allikate (näiteks [65]) kohaselt loetakse ka arv 1 hulka M_1 .

Näiteks Monika hulga M_3 esimesed elemendid kasvavas järjekorras on: 4, 9, 10, 22, 24, 25, 27, 34, 42, 46, 55, 58, 60, 72, 78, 81, 82, 85, 94.

Vaatame millistesse Monica hulkadesse kuulub arv 10. Kuna $s(10) = 1$ ja $s_p(10) = 7$, siis $s(10) - s_p(10) = 1 - 7 = -6$. Järelikult arv 10 kuulub Monica hulkadesse M_1 , M_2 , M_3 ja M_6 .

Definitsioon 3.2.5. Positiivse täisarvu n korral moodustavad *Suzanne hulga* S_n kõik sellised kordarvud r , mille korral n jagab arvu r algtegurite numbrite summat $s_p(r)$ ja n jagab arvu r numbrite summat $s(r)$, s.t $n \mid s(r)$ ja $n \mid s_p(r)$.

Suzanne hulkade S_1 , S_2 ja S_3 esimesed elemendid kasvavas järjekorras on:

n	S_n
1	4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20
2	4, 8, 15, 22, 26, 35, 42, 44, 60, 62, 64
3	9, 24, 27, 42, 60, 72, 78, 81, 105, 114

Mõningate allikate (näiteks [65]) kohaselt loetakse ka arv 1 hulka S_1 .

Vaatame millistesse Suzanne hulkadesse kuulub arv 24. Kuna $s(24) = 6$ ja $s_p(24) = 9$, siis arv 24 kuulub Suzanne hulkadesse S_1 ja S_3 .

Järgnevalt mõned tulemused Monica ja Suzanne hulkade ning Smith'i arvude kohta, tuginedes raamatule [61].

Lause 3.2.6. Kui r on Smith'i arv, siis iga positiivse täisarvu n korral r kuulub hulka M_n .

Tõestus. Smith'i arvude korral $s(r) - s_p(r) = 0$ ning iga positiivne täisarv jagab arvu 0.

Järeldus 3.2.1. Iga Monica hulk on lõpmatu.

Lause 3.2.7. Kui arv m jagab arvu n , siis hulk M_n on Monica hulga M_m alamhulk.

Tõestus. Kui $x \in M_n$, siis $s(x) - s_p(x)$ jagub arvuga n . Kuna m jagab arvu n , siis ka $s(x) - s_p(x)$ jagub arvuga m . Seega $x \in M_m$. ■

Lause 3.2.8. Kui arv $k > 1$ on täisarv, siis k -Smith'i arvude hulk on Monica hulga M_{k-1} alamhulk.

Tõestus. Olgu x k -Smith'i arv, s.t. $s_p(x) = k \cdot s(x)$. Siis $s(x) - s_p(x) = -(k-1)s(x)$, mis tähendab, et $s(x) - s_p(x)$ jagub arvuga $k-1$. Järelikult $x \in M_{k-1}$. ■

Lause 3.2.9. Kui n on k -Smith'i arv, siis ta kuulub Suzanne hulka $S_{s(n)}$.

Tõestus. Kui n on k -Smith'i arv, siis $s_p(n) = k \cdot s(n)$ ja järelikult nii algtegurite numbrite summa kui ka arvu numbrite summa jaguvad arvuga $s(n)$. ■

Lause 3.2.10. Kui $\text{SÜT}(s(n), s_p(n)) = d$, siis arv n kuulub $\tau(d)$ erinevasse Suzanne hulka, kus $\tau(d)$ tähistab arvu d positiivsete jagajate arvu.

Tõestus. Kui $\text{SÜT}(s(n), s_p(n)) = d$, siis $d \mid s(n)$ ja $d \mid s_p(n)$. Jaguvuse omaduse põhjal ka arvu d kõik tegurid jagavad nii arvu $s(n)$ kui ka $s_p(n)$. Seega arv n kuulub $\tau(d)$ erinevasse Suzanne hulka. ■

Järeldus 3.2.2 Kui n on Smith'i arv, siis arv n kuulub $\tau(s(n))$ erinevasse Suzanne hulka.

3.3. Raiskavad, võrdnumbrilised ja säästlikud arvud

Kõige lihtsamaks viisiks positiivsete täisarvude jaotamiseks nende kanoonilise kuju järgi on jaotada need lähtuvalt sellest, mitu numbrit on arvus ning selle kanoonilises kujus.

3.3.1. Põhimõisted

Tähistagu $\delta(n)$ positiivse täisarvu n kümnendesituses olevate numbrite arvu ja $\gamma(n)$ selle arvu kanoonilises kujus olevate numbrite arvu.

Näiteks, kui $n = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, siis arvu 120 numbrite arv on 3, arvu 120 kanoonilises kujus aga esineb 4 numbrit: algtegurid 2, 3 ja 5 ning ühest suurem astendaja 3 (astet 1 ei kirjutata ja sellest tulenevalt ka ei loendata). Arvu 120 korral on seega $\delta(120) = 3$ ja $\gamma(120) = 4$.

Üldiselt, kui positiivse täisarvu n kanooniline kuju on $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$, siis

$$\gamma(n) = \sum_{i=1}^r \delta(p_i) + \delta'(\alpha_i), \text{ kus } \delta'(\alpha) = \delta(\alpha), \text{ kui } \alpha > 1 \text{ ja } \delta'(1) = 0.$$

Bernardo Recamán Santos (1995) võttis kasutusele *võrdnumbriliste arvude (equidigital number)* mõiste [50].

Definitsioon 3.3.1. Positiivne täisarv n on *võrdnumbriline arv (equidigital number)*, kui arvu n kanoonilises kujus on sama palju numbreid kui arvus n , s.t kui $\gamma(n) = \delta(n)$.

Esimesed võrdnumbrilised arvud on: 1, 2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 23 [53, A046758].

Järgmisele arvude liigile, kus kanoonilises kujus on rohkem numbreid kui arvus, annab *Wolfram MathWorld* [65] järgmise definitsiooni.

Definitsioon 3.3.2. Positiivne täisarv n on *raiskav arv (wasteful number)*, kui arvu n kanoonilises kujus on rohkem numbreid kui arvus n , s.t kui $\gamma(n) > \delta(n)$.

Esimesed raiskavad arvud on: 4, 6, 8, 9, 12, 18, 20, 22, 24 [53, A046760].

Wikipedia [66] ja ka mõned teised allikad [10] nimetavad äsja defineeritud raiskavaid arve aga *ekstravagantseteks arvudeks (extravagant numbers)*.

Säästlikeks arvudeks (*economical numbers*) nimetatud arvudel leidub aga kaks erinevat definitsiooni. *Wolfram MathWorld* [65] annab järgmise definitsiooni.

Definitsioon 3.3.3. Positiivne täisarv n on *säästlik arv* (*economical number*), kui arvu n kanoonilises kujus on vähem numbreid, kui arvus n , s.t kui $\gamma(n) < \delta(n)$.

Esimesed säästlikud arvud definitsiooni 3.3.3 järgi on: 125, 128, 243, 256, 343, 512, 625, 729 [53, A046759].

B.R. Santos [50] ja R.G.E. Pinch [44] ning nende tuginevad allikad nimetavad säästlikeks kõiki mitteraiskavaid positiivseid täisarve ning toovad sisse nn *kokkuhoidlike arvude* (*frugal numbers*) mõiste, mis ühtib definitsiooni 3.3.3 mõttes säästlike arvudega.

Definitsioon 3.3.3.A Positiivne täisarv n on *säästlik arv* (*economical number*), kui arvu n kanoonilises kujus ei ole rohkem numbreid, kui arvus n , s.t kui $\gamma(n) \leq \delta(n)$.

Definitsioon 3.3.4. Positiivne täisarv n on *kokkuhoidlik arv* (*frugal number*), kui arvu n kanoonilises kujus on vähem numbreid, kui arvus n , s.t kui $\gamma(n) < \delta(n)$.

Kohates kirjanduses säästlike arvude (*economical numbers*) mõistet, tuleb kindlaks teha, millisest definitsioonist autorid on lähtunud. Käesolevas töös lähtutakse *Wolfram MathWorld*'i [65] definitsioonidest 3.3.1 – 3.3.3, s.t samastatakse säästlike ja kokkuhoidlike arvude mõisted.

3.3.2. Põhitulemused

Tähistagu $h(n)$ positiivse täisarvu n numbrite arvu $\delta(n)$ ja kanoonilises kujus olevate numbrite arvu $\gamma(n)$ vahet, s.t $h(n) = \delta(n) - \gamma(n)$. Definitsioonidest 3.3.1 – 3.3.3 järelduvad vahetult järgmised tulemused.

Lause 3.3.1. Positiivne täisarv n osutub

- 1) võrdnumbriliseks arvuks parajasti siis, kui $h(n) = 0$;
- 2) raiskavaks arvuks parajasti siis, kui $h(n) < 0$;
- 3) säästlikuks arvuks parajasti siis, kui $h(n) > 0$.

Uute arvude defineerimisel kerkib alati üles ka küsimus nende arvuhulkade lõpmatusest. Võrdnumbriliste arvude korral laheneb probleem lihtsalt. Definitsioonist 3.3.1 saame vahetult järelduse.

Järeldus 3.3.1. Kõik algarvud on võrdnumbrilised arvud.

Kuna algarve on lõpmata palju, siis on õige järgmine väide.

Järeldus 3.3.2. Võrdnumbrilisi arve on lõpmata palju.

Näitamaks, et ka raiskavaid ning säästlike arve on lõpmata palju, tõestame eelnevalt teatud võrratuste kehtivuse [44].

On selge, et $\delta(n) = k$ parajasti siis, kui $10^{k-1} \leq n < 10^k$.

Lemma 3.3.1. Kui positiivsete täisarvude m ja n korral $m \geq n$, siis

$$\delta(m) \leq \delta(m+n) \leq 1 + \delta(m). \quad (3.1)$$

Tõestus. Olgu $\delta(m) = k$. Sel juhul $10^{k-1} \leq m+n \leq 2m \leq 2 \cdot 10^k \leq 10^{k+1}$ ehk

$$\delta(m) \leq \delta(m+n) \leq 1 + \delta(m). \blacksquare$$

Lemma 3.3.2. Positiivsete täisarvude m ja n korral

$$\delta(m) + \delta(n) - 1 \leq \delta(mn) \leq \delta(m) + \delta(n). \quad (3.2)$$

Tõestus. Olgu $\delta(m) = l$ ja $\delta(n) = k$, siis $10^{l-1} \leq m < 10^l$ ja $10^{k-1} \leq n < 10^k$. Järelikult $10^{l+k-2} \leq mn < 10^{l+k}$ ehk $\delta(m) + \delta(n) - 1 \leq \delta(mn) \leq \delta(m) + \delta(n)$. ■

Lemma 3.3.3. Positiivsete täisarvude m ja n korral

$$\gamma(mn) \leq \gamma(m) + \gamma(n). \quad (3.3)$$

Tõestus. Võrdus $\gamma(mn) = \gamma(m) + \gamma(n)$ kehtib parajasti siis, kui täisarvud m ja n on ühistegurita arvud. Leidugu arvu m ja n ühiseid algtegureid. Kui m teguriks on p^α ja n teguriks on p^β , siis korrutise mn teguriks on $p^{\alpha+\beta}$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\alpha \geq \beta$. On vaja näidata, et kehtib võrratus $\delta'(\alpha + \beta) + \delta(p) \leq \delta'(\alpha) + \delta'(\beta) + 2\delta(p)$.

Kui $\alpha = \beta = 1$, siis $\delta'(\alpha + \beta) = \delta'(2) = \delta(2) \leq \delta(p)$ ja $\delta'(\alpha) = \delta'(\beta) = 0$ ning tõepoolest $2\delta(p) \leq 2\delta(p)$.

Kui $\alpha > \beta = 1$, siis kasutades võrratust (3.1), saame

$$\delta'(\alpha + \beta) = \delta'(\alpha + 1) = \delta(\alpha + 1) \leq \delta(\alpha) + 1 \text{ ning } \delta'(\alpha) = \delta(\alpha) \text{ ja } \delta'(\beta) = 0.$$

Seega tõepoolest $\delta(\alpha) + 1 + \delta(p) \leq \delta(\alpha) + 2\delta(p)$, sest $\delta(p) \geq 1$.

Kui $\alpha \geq \beta > 1$, siis siis kasutades võrratust (3.1), saame

$$\delta'(\alpha + \beta) = \delta(\alpha + \beta) \leq \delta(\alpha) + \delta(\beta) \text{ ning } \delta'(\alpha) = \delta(\alpha) \text{ ja } \delta'(\beta) = \delta(\beta).$$

Seega tõepoolest $\delta(\alpha) + \delta(\beta) + \delta(p) \leq \delta(\alpha) + \delta(\beta) + 2\delta(p)$. ■

Lemma 3.3.4. Positiivsete täisarvude m ja n korral

$$h(mn) \leq h(m) + h(n) - 1. \quad (3.4)$$

Tõestus. Võrratus järelneb tõestatud lemmadest 3.3.2 ja 3.3.3. Tõepoolest

$$h(mn) = \delta(mn) - \gamma(mn) \leq \delta(m) + \delta(n) - 1 - (\gamma(m) + \gamma(n)) = h(m) + h(n) - 1. \blacksquare$$

Tõestatud võrratuse (3.4) põhjal võime sõnastada järgmise tulemuse.

Järeldus 3.3.3. Raiskavate arvude korrutis on raiskav arv.

Tähistagu $p\#$ kõigi algarvust p mitte suuremate algarvude korrutist.

Näiteks $11\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

Järgnevalt konstrueerime raiskavate ja säästlike arvude hulkade lõpmatud alamhulgad [10].

Lause 3.3.2. Kui $p > 2$ on algarv, siis $p\#$ on raiskav arv.

Tõestus. Lihtne on kontrollida, et $\delta(3\#) < \gamma(3\#)$. Oletame, et algarvu $p \geq 3$ korral kehtib võrratus $\delta(p\#) < \gamma(p\#)$. Olgu arvust p suuruselt järgmine algarv q . On selge, et kehtib võrdus $\delta(q) = \gamma(q)$. Et arvud $p\#$ ja q on ühistegurita, siis tehtud oletuse ja lemmade 3.3.2 ja 3.3.3 põhjal saame, et

$$\delta(q\#) = \delta(p\#q) \leq \delta(p\#) + \delta(q) < \gamma(p\#) + \delta(q) = \gamma(p\#) + \gamma(q) = \gamma(p\#q) = \gamma(q\#). \blacksquare$$

Kuna algarve on lõpmata palju, siis tõestatud lause annab võimaluse konstrueerida ühe raiskavate arvude lõpmatu alamjada. Seega võime sõnastada tulemuse.

Järeldus 3.3.4. Raiskavaid arve on lõpmata palju.

Lause 3.3.3. Kui $k > 6$ on täisarv, siis 2^k on säästlik arv.

Tõestus. Lihtne on kontrollida, et kui $1 \leq k \leq 6$, siis $\delta(2^k) \leq \gamma(2^k)$.

Kui $k = 7$, siis $\delta(2^7) = \delta(128) = 3$ ja $\gamma(2^7) = 2$. Seega arv 2^7 on säästlik arv.

Oletame, et täisarvu $k \geq 7$ korral kehtib võrratus $\gamma(2^k) < \delta(2^k)$, mis on samaväärne võrratusega $\gamma(2^k) \leq \delta(2^k) - 1$. Vaatame arvu 2^{k+1} . Kuna arvud 2 ja 2^k on ühisteguriga arvud, siis tehtud eelduse ja lemmade 3.3.2 ja 3.3.3 põhjal saame, et

$$\gamma(2^{k+1}) = \gamma(2 \cdot 2^k) < \gamma(2^k) + \gamma(2) \leq \delta(2^k) + \delta(2) - 1 \leq \delta(2^{k+1}).$$

Seega 2^k on kindlasti säästlik arv, kui $k > 6$. ■

Kuna arvust 6 suuremaid täisarve on lõpmata palju, võime sõnastada tulemuse.

Järeldus 3.3.5. Säästlikke arve on lõpmata palju.

4. Elementaarse arvuteooria põhivara

Töö selles osas antakse elementaarse arvuteooria põhimõisted ja tulemused, mis kuuluvad kas üldharidusliku kooli õppekavasse või on vajalikud erineva tasemega matemaatikavõistluste ülesannete lahendamiseks. Tulemustele, mida ei käsitleta koolimatemaatikas, on lisatud ka tõestusskeemid.

4.1. Täisarvude jaguvus

Definitsioon 4.1.1. Täisarv a jagub täisarvuga $b \neq 0$ parajasti siis, kui leidub täisarv k nii, et $a = kb$.

Definitsioon 4.1.2. Arvu *tegur* ehk *jagaja* on täisarv, millega vaadeldav täisarv jagub. Arvu *pärisjagaja* on arvu *tegur*, mis erineb arvust endast. Arvu *kordne* on täisarv, mis jagub vaadeldava täisarvuga.

Kui arv a jagab arvu b , siis kirjutame $a \mid b$.

Jaguvuse peamised omadused.

- 1) Kui $a \neq 0$, siis $a \mid a$ ja $a \mid 0$.
- 2) Iga a korral $1 \mid a$.
- 3) Kui $a \mid b$ ja $a \mid c$, siis mis tahes täisarvude x ja y korral $a \mid (bx + cy)$.
- 4) Kui $a \mid b$ ja $b \mid c$, siis $a \mid c$.
- 5) Kui $a > 0$ ja $b > 0$ ning $a \mid b$ ja $b \mid a$, siis $a = b$.
- 6) Kui $a > 0$ ja $b > 0$ ja $a \mid b$, siis $a \leq b$.
- 7) Kui $a \mid b$ ja $b \neq 0$, siis $\frac{b}{a} \mid b$.
- 8) Kui $a \mid b$ ja $c \mid d$, siis $ac \mid bd$.
- 9) Kui $k \neq 0$, siis $ka \mid kb$ siis ja ainult siis, kui $a \mid b$.

Jaguvustunnused

Jaguvustunnus annab tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et arv jaguks mingi etteantud arvuga.

Näiteks: Täisarv jagub arvuga 11 parajasti siis, kui arvu paaritutel kohtadel paiknevate numbrite summa ja paarisarvulistel kohtadel paiknevate numbrite summa vahe jagub arvuga 11.

4.2. Suurim ühistegur, vähim ühiskordne

Definitsioon 4.2.1. Täisarv t on arvude $a_1, a_2, \dots, a_k$ *ühistegur*, kui kõik arvud $a_1, a_2, \dots, a_k$ jaguvad selle arvuga t . Arv d on arvude $a_1, a_2, \dots, a_k$ *suurim ühistegur*, kui d on nende arvude ühistegur ja d jagub nende arvude iga ühisteguriga t .

Definitsioon 4.2.2. Kui arvude suurim ühistegur on 1, siis öeldakse, et need arvud on *ühistegurita arvud*.

Definitsioon 4.2.3. Täisarv n on arvude $a_1, a_2, \dots, a_k$ *ühiskordne*, kui see arv n jagub kõigi arvudega $a_1, a_2, \dots, a_k$. Arv m on arvude $a_1, a_2, \dots, a_k$ *vähim ühiskordne*, kui m on nende arvude ühiskordne ja iga ühiskordne n jagub arvuga m .

Täisarvude $a_1, a_2, \dots, a_k$ suurimat ühistegurit ja vähimat ühiskordset tähistame vastavalt $\text{SÜT}(a_1, a_2, \dots, a_k) = d$ ja $\text{VÜK}(a_1, a_2, \dots, a_k) = m$.

Lause 4.2.1. Kui $a = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ ja $b = \prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i}$, kus p_i on algarvud ning α_i ja β_i on mittenegatiivsed täisarvud, siis $\text{SÜT}(a, b) = \prod_i p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ ja $\text{VÜK}(a, b) = \prod_{i=1}^k p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$.

Arvude suurima ühisteguri ja vähima ühiskordse peamised omadused:

1) $\text{SÜT}(ma, mb) = m \cdot \text{SÜT}(a, b)$.

$$2) \text{SÜT}(a, a+1) = 1.$$

$$3) \text{ Kui } d \mid a \text{ ja } d \mid b, \text{ siis } \text{SÜT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{\text{SÜT}(a, b)}{d}.$$

$$4) \text{SÜT}\left(\frac{a}{\text{SÜT}(a, b)}, \frac{b}{\text{SÜT}(a, b)}\right) = 1.$$

$$5) \text{ Kui } \text{SÜT}(a, b) = 1, \text{ siis } \text{SÜT}(c, ab) = \text{SÜT}(c, a) \cdot \text{SÜT}(c, b).$$

$$6) \text{ Kui } ax + by = m, \text{ kus } x \text{ ja } y \text{ on täisarvud, siis } \text{SÜT}(a, b) \text{ jagub arvuga } m.$$

$$7) \text{ Kui } m \text{ on täisarv, siis } \text{SÜT}(a + mb, b) = \text{SÜT}(a, b).$$

$$8) \text{SÜT}(a, \text{SÜT}(b, c)) = \text{SÜT}(\text{SÜT}(a, b), c).$$

$$9) \text{VÜK}(ma, mb) = m \cdot \text{VÜK}(a, b).$$

$$10) \text{VÜK}(a, a+1) = a(a+1).$$

$$11) \text{VÜK}(a, \text{VÜK}(b, c)) = \text{VÜK}(\text{VÜK}(a, b), c).$$

$$12) \text{VÜK}(a, \text{SÜT}(a, b)) = a.$$

$$13) \text{SÜT}(a, b) \cdot \text{VÜK}(a, b) = a \cdot b.$$

4.3. Algarvud ja kordarvud

Definitsioon 4.3.1. Positiivne täisarv on *algarv*, kui sellel on täpselt kaks positiivset jagajat.

Teoreem 4.3.1. Leidub lõpmata palju algarve.

Tõestus 1. Oletame vastuväiteliselt, et algarve on lõplik hulk $A = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Vaatame arvu $m = p_1 p_2 \dots p_k + 1$. See arv ei jagu ühegi algarvuga $p_1, p_2, \dots, p_k$. Järelikult peab m olema kas algarv või kordarv, mille algtegurid erinevad algarvudest $p_1, p_2, \dots, p_k$. Mõlemal juhul leidub järelikult vähemalt üks algarv lisaks neile, mis moodustasid lõpliku hulga A . Tekkis vastuolu ja järelikult oletus, et algarve on lõplik hulk oli vale. ■

Tõestus 2. Näitame, et iga positiivse arvu m korral leidub temast suurem algarv. Vaatleme arvu $m!+1$. Olgu p selle mingi algtegur, siis $p \mid m!+1$. Kuna iga arvust m väiksema arvuga jagamisel annab $m!+1$ jäägi 1, siis $p > m$. ■

Definitsioon 4.3.2. *Mersenne'i arvud* on naturaalarvud kujul $2^p - 1$, kus p on positiivne täisarv. Kui $2^p - 1$ on algarv, kõneldakse *Mersenne'i algarvust*.

Esimesed Mersenne'i algarvud on: 3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647 [53, A000668].

Täna on teada 47 Mersenne'i algarvu ning neist suurim $2^{43112609} - 1$ on 12978189-kohaline kümnendsüsteemi arv ([9] mai 2010). Kinnitus, et see on algarv, saadi 23. augustil 2008. aastal. Ühtlasi on see ka teadaolevaks suurimaks algarvuks.

Teoreem 4.3.2. Kui $a^n - 1$ on algarv, kus $n > 1$ ja $a > 1$, siis $a = 2$ ja n on algarv.

Tõestus. Kuna $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$ on algarv, siis $a - 1 = 1$ ja järelikult $a = 2$. Oletame vastuväiteliselt, et n on kordarv, siis $n = rs$, kus $r > 1$ ja $s > 1$. Sel juhul $2^n - 1 = 2^{rs} - 1 = (2^r - 1)(2^{r(s-1)} + 2^{r(s-2)} + \dots + 1)$. Võrduse paremal pool on kumbki tegur suurem arvust 1 ja tekib vastuolu eeldusega, et $2^n - 1$ on algarv. ■

Definitsioon 4.3.3. Kaks algarvu on *kaksikalgarvud*, kui nende vahe on 2.

Definitsioon 4.3.4. Naturaalarv on *kordarv*, kui tal rohkem kui kaks positiivset jagajat.

Lause 4.3.1. Ühest suurema naturaalarvu vähim ühest suurem jagaja on algarv.

Tõestus. Olgu arvu $n > 1$ vähim ühest suurem jagaja p_1 . Kui p_1 ei oleks algarv, siis leiduks arvul p_1 jagaja d nii, et $1 < d < p_1$. Sellest, et $p_1 \mid n$ ja $d \mid p_1$ saame, et $d \mid n$. Eelduse kohaselt oli aga p_1 vähim arvust üks suurem arvu n jagaja. ■

Lause 4.3.2. Kordarvu n vähim algarvuline jagaja ei ületa arvu $\sqrt{n}$.

Tõestus. Olgu p_1 arvu n vähim algarvuline jagaja. Siis $n = n_1 p_1$, kus $n_1 \geq p_1$. Seega $n = n_1 p_1 \geq p_1^2$, millest $p_1 \leq \sqrt{n}$.

Lause 4.3.3. Naturaalarv n ja algarv p on kas ühistegurita või $p \mid n$.

Tõestus. Algarvu p ainsad positiivsed jagajad on 1 ja p . Seega tõesti, kas $SÜT(n, p) = 1$ või $SÜT(n, p) = p$. Viimane võrdus aga tähendabki, et $p \mid n$. ■

Lause 4.3.4. Kui korrutis mn jagub algarvuga p , siis vähemalt üks arvudest jagub arvuga p .

Tõestus. Kui arv m ei jagu arvuga p , siis need arvud on ühistegurita. Kuna mn jagus arvuga p , siis arv n peab jaguma arvuga p . ■

Teoreem 4.3.3. (Bertrand). Mis tahes naturaalarvu $n \geq 4$ korral leidub arvude n ja $2n-2$ vahel alati vähemalt üks algarv.

Goldbachi hüpotees. Iga arvust 2 suurem paarisarv on esitatav kahe algarvu summana.

Hüpotees on püstitatud aastal 1742 ja on siiani tõestamata või ümberlõkkamata.

4.4. Arvu algteguriteks lahutus, kanooniline kuju

Teoreem 4.4.1. (aritmeetika põhiteoreem). Iga ühest suurem naturaalarv n on ühesel viisil esitatav algarvude korrutisena $n = p_1 p_2 \dots p_k$, $k \geq 1$.

Tõestus 1. Olgu algarv p_1 arvu n vähim arvust 1 erinev jagaja, s.t leidub naturaalarv n_1 nii, et $n = p_1 n_1$. Kui $n_1 > 1$, siis olgu p_2 tema vähim algarvuline jagaja, s.t $n_1 = p_2 n_2$ ja $n = p_1 p_2 n_2$. Jätkame seda protsessi seni, kuni oleme saanud $n_k = 1$. Selline olukord tekib kindlasti, sest $n > n_1 > n_2 > \dots$, kus n ja iga i korral n_i on naturaalarvud. Järelikult $n = p_1 p_2 \dots p_k$, $k \geq 1$.

Oletame vastuväiteliselt, et arvu n saab esitada algarvude korrutisena kahel erineval viisil $p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_s$. Kuna iga p_i jagab korrutist $q_1 q_2 \dots q_s$, siis vastavalt lausele 4.3.4 peab leiduma q_j , mis on võrdne arvuga p_i . Järelikult võrduse $p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_s$ mõlemal poolel on teguriteks samad algarvud. Oletame nüüd, et algarvu p_i on ühel pool t korda ja teisel pool m korda ning $t > m$. Kui nüüd mõlemaid pooli läbi jagada arvuga p_i^m , siis saame olukorra, kus võrduse ühel pool on algarv p_i^{t-m} ja võrduse teisel pool ei ole tegurit p_i . See aga on vastuolus lausega 4.3.4. Järelikult kahe esituse erinevus saab olla vaid tegurite järjekorras. ■

Tõestus 2. Oletame vastuväiteliselt, et leidub arve, mida saab vähemalt kahel viisil esitada algarvude korrutisena. Olgu arv n vähim sellistest arvudest, s.t $n = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s$ kus r ja s on mõlemad suuremad arvust 1. Kui leiduvad $1 \leq i \leq r$ ja $1 \leq j \leq s$ nii, et $p_i = q_j$, siis saame võrduse mõlemaid pooli jagada arvuga p_i ja oleme saanud arvu $\frac{n}{p_i}$ kaks erinevat

esitust algarvude korrutisena. Tekib vastuolu, sest eelduse kohaselt oli arv n vähim selline arv. Järelikult iga i ja j korral $p_i \neq q_j$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $p_i < q_j$. Siis

$$m = (q_1 - p_1)q_2 \dots q_s = (q_1 q_2 \dots q_s) - (p_1 q_2 q_3 \dots q_s) = (p_1 p_2 \dots p_r) - (p_1 q_2 q_3 \dots q_s) = \\ = p_1 [(p_2 \dots p_r) - (q_2 q_3 \dots q_s)].$$

Kuna p_1 ei jaga arvu $(q_1 - p_1)$, siis oleme arvu m kahel erineval viisil esitanud algarvude korrutisena. Kuna $m < n$ oleme saanud vastuolu eeldusega, et arv n on vähim arv, mida saab esitada kahel erineval viisil algarvude korrutisena. ■

Definitsioon 4.4.1. Ühest suurema naturaalarvu n *kanooniline kuju* on

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \text{ kus } p_1 < p_2 < \dots < p_k \text{ on algarvud ja iga } i \ (i = 1, \dots, k) \text{ korral } \alpha_i > 0.$$

Arvu 1 kanooniliseks kujuks loetakse arvu 1.

Mõnikord on kasulik esitada arvu kujul $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, kus $\alpha_i \geq 0$.

4.5. Jäägiga jagamine

Teoreem 4.5.1. Iga täisarvu a ja positiivse täisarvu b korral leiduvad üheselt määratud täisarvud q ja r nii, et $a = bq + r$, kus $0 \leq r < b$.

Tõestus. Vaatame hulka $S = \{a - sb : s \text{ on täisarv ja } a - sb \geq 0\}$. Hulgast S on mittenegatiivsed arvud hulgast $\{\dots, a - 2b, a - b, a, a + b, a + 2b, \dots\}$. Kui $a < 0$, siis $a - ab = a(1 - b) \geq 0$ ja järelikult $a - ab$ kuulub hulka S . Kui $a \geq 0$, siis $a - (0 \cdot b) = a \geq 0$ ja järelikult a kuulub hulka S . Mõlemal juhul on S mittetühi mittenegatiivsete arvude hulk. Tähistame hulga S vähimat arvu $r = a - bq \geq 0$. Seega $r - b = (a - bq) - b = a - (q + 1)b < 0$ ning järelikult $a = bq + r$ ja $0 \leq r < b$.

Oletame, et see esitus ei ole ühene, s.t leiduvad ka täisarvud u ja v nii, et $a = bu + v$, kus $0 \leq v < b$. Kui $u < q$, siis kuna u ja q on mõlemad täisarvud, peab kehtima $u + 1 \leq q$. Järelikult $r = a - bq \leq a - b(u + 1) = (a - ub) - b = v - b < 0$. Oleme jõudnud vastuoluni sellega, et r on mittenegatiivne. Sarnase aruteluga jõuame vastuoluni kui oletame, et $u > q$. Järelikult $u = q$. Oleme saanud, et $a = bq + r = bq + v$, millest $v = r$. ■

Järeldus 4.5.1. Täisarvu k korral saab iga positiivse täisarvu $n > 1$ esitada kas kujul mk , $mk + 1$, $mk + 2$, ... või $mk + (k - 1)$, kus m on täisarv.

Lause 4.5.1. Iga algarv $p > 3$ on kas kujul $p = 6k + 1$ või $p = 6k - 1$, kus k on täisarv.

Tõestus. Iga positiivne täisarv avaldub ühel järgmisel kujul $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$ või $6k + 5$. Kui $k \geq 1$, siis $6k$, $6k + 2$, $6k + 3$ ja $6k + 4$ on kindlasti kordarvud. Seega arvust 3 suuremad algarvud saavad olla vaid kujul $6k \pm 1$. ■

Lause 4.5.2. Positiivse täisarvu ruudu jagamisel arvuga 3 tekib jääk 0 või 1.

Tõestus. Iga positiivne täisarv avaldub ühel järgmisel kujul $3k$, $3k + 1$ või $3k + 2$. Vaatleme nende arvude ruute: $(3k)^2 = 9k^2$, $(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$ ja $(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4$. Järelikult jagamisel arvuga 3 tekib kas jääk 0 või 1. ■

Lause 4.5.3. Positiivse täisarvu ruudu jagamisel arvuga 4 tekib jääk 0 või 1.

Tõestus. Iga positiivne täisarv avaldub ühel järgmisel kujul $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ või $4k + 3$. Vaatleme nende arvude ruute: $(4k)^2 = 16k^2$, $(4k + 1)^2 = 16k^2 + 8k + 1$, $(4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 4$, $(4k + 3)^2 = 16k^2 + 24k + 9$.

On näha, et nende jagamisel arvuga 4 tekib kas jääk 0 või 1. Seejuures paarisarvu ruut jagub arvuga 4 ja paaritu arvu ruudu jagamisel arvuga 4 tekib jääk 1. ■

Lause 4.5.4. Kui p on paaritu algarv, siis $2^{p-1} - 1$ jagub arvuga 3.

Tõestus. Et p on paaritu algarv, siis lause 4.5.1 põhjal $p = 6k + 1$ või $p = 6k - 1$.

Kui $p = 6k + 1$, siis $2^{6k+1-1} - 1 = 2^{6k} - 1 = (2^{3k})^2 - 1$. Lause 4.5.2 põhjal saame, et arv $(2^{3k})^2$ peab jagamisel arvuga 3 andma jäägi 1. Seega $2^{p-1} - 1$ jagub arvuga 3.

Kui $p = 6k - 1$, siis $2^{6k-1-1} - 1 = 2^{6k-2} - 1 = (2^{3k-1})^2 - 1$. Jällegi lause 4.5.2 põhjal saame, et arv $(2^{3k-1})^2$ peab jagamisel arvuga 3 andma jäägi 1. Seega $2^{p-1} - 1$ jagub arvuga 3. ■

4.6. Kongruentsid

Definitsioon 4.6.1. Kaks täisarvu a ja b on *kongruentsed mooduli m järgi* ehk modulo m , kui a ja b jagamisel mooduliga m saame ühe ja sama jäägi, s.o leiduvad sellised täisarvud q_1, q_2 ja r , et $a = mq_1 + r$ ja $b = mq_2 + r$, kus $0 \leq r < m$.

Kui täisarvud a ja b on kongruentsed mooduli m järgi, siis kirjutame $a \equiv b \pmod{m}$.

Arvu a kongruentsus arvuga 0 mooduli m järgi on samaväärne sellega, et arv a jagub arvuga m .

Täisarvud a ja b on kongruentsed mooduli m järgi parajasti siis, kui nende arvude vahe $a - b$ jagub arvuga m .

Täisarvud a ja b on kongruentsed mooduli m järgi parajasti siis, kui üks arv erineb teisest mooduli kordse võrra, s.t leidub selline täisarv t , et $a = b + mt$.

Lause 4.6.1. Kongruentside põhilised omadused on:

- 1) kui $a \equiv b \pmod{m}$ ja $d \mid a, d \mid m$, siis $d \mid b$
- 2) kui $a \equiv b \pmod{m}$, siis $\text{SÜT}(a, m) = \text{SÜT}(b, m)$

a) muutumatu mooduli korral:

- 3) $a \equiv a \pmod{m}$
- 4) kui $a \equiv b \pmod{m}$, siis $b \equiv a \pmod{m}$
- 5) kui $a \equiv b \pmod{m}$ ja $b \equiv c \pmod{m}$, siis $a \equiv c \pmod{m}$
- 6) kui $a \equiv b \pmod{m}$ ja $c \equiv d \pmod{m}$, siis $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
- 7) kui $a + b \equiv c \pmod{m}$, siis $a \equiv c - b \pmod{m}$
- 8) kui $a \equiv b \pmod{m}$, siis täisarvude t ja u korral $a \pm tm \equiv b \pm um \pmod{m}$
- 9) kui $a \equiv b \pmod{m}$ ja $c \equiv d \pmod{m}$, siis $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$

- 10) kui $a \equiv b \pmod{m}$, siis naturaalarvu n korral $a^n \equiv b^n \pmod{m}$
 11) kui $a \equiv b \pmod{m}$, siis täisarvu k korral $ak \equiv bk \pmod{m}$
 12) kui $ka \equiv kb \pmod{m}$, kus arvud k ja m on ühisteguriteta, siis $a \equiv b \pmod{m}$

b) muutuva mooduli korral:

- 13) kui $a \equiv b \pmod{m}$ ja $k \neq 0$ on täisarv, siis $ak \equiv bk \pmod{mk}$
 14) kui $ak \equiv bk \pmod{mk}$, siis $a \equiv b \pmod{m}$
 15) $ak \equiv bk \pmod{m}$ parajasti siis, kui $a \equiv b \pmod{\frac{m}{\text{SÜT}(m,k)}}$
 16) $a \equiv b \pmod{m_1}$, $a \equiv b \pmod{m_2}$, ..., $a \equiv b \pmod{m_n}$ parajasti siis, kui $a \equiv b \pmod{\text{VÜK}(m_1, m_2, \dots, m_n)}$
 17) kui $a \equiv b \pmod{m}$ ja $d \mid m$, siis $a \equiv b \pmod{d}$.

Tõestus:

- 1) Et $a \equiv b \pmod{m}$, siis $m \mid a - b$. Kuna $d \mid a$ ja $d \mid m$, siis jaguvuse omaduse põhjal $d \mid b$.
 2) Et $a \equiv b \pmod{m}$, siis $m \mid a - b$. Olgu $\text{SÜT}(a, m) = d_1$, siis $d_1 \mid a$ ja $d_1 \mid m$ ja omaduse 1) põhjal $d_1 \mid b$. Olgu $\text{SÜT}(b, m) = d_2$, siis $d_2 \mid b$ ja $d_2 \mid m$ ja omaduse 1) põhjal $d_2 \mid a$. Kuna d_1 oli arvude a ja m suurim ühine tegur ja d_2 arvude m ja b suurim ühine tegur, siis peab kehtima $d_1 = d_2$, s.t $\text{SÜT}(a, m) = \text{SÜT}(b, m)$.
 3) Kuna arv 0 jagub kõikide täisarvudega, siis $a - a = 0$ jagub arvuga m ja järelikult $a \equiv a \pmod{m}$.
 4) Kui $a \equiv b \pmod{m}$, siis $m \mid a - b$ ja $m \mid -(a - b)$, millest $b \equiv a \pmod{m}$.
 5) Et $a \equiv b \pmod{m}$ ja $b \equiv c \pmod{m}$, siis $m \mid a - b$ ja $m \mid b - c$.
 Kuna $a - c = a - b + b - c = (a - b) + (b - c)$ ja et m jagab mõlemat liidetavat, siis $m \mid a - c$, s.o $a \equiv c \pmod{m}$.
 6) Et $a \equiv b \pmod{m}$, siis $m \mid a - b$. Kuna $a + c - (b + d) = (a - b) + (c - d)$ ja $m \mid a - b$, siis $m \mid a + c - (b + d)$ parajasti siis kui $m \mid c - d$, s.t $c \equiv d \pmod{m}$ ja $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ on samaväärsed, kui $a \equiv b \pmod{m}$.
 7) Et $a + b \equiv c \pmod{m}$, siis $m \mid a + b - c$. Kuna $a + b - c = a - (c - b)$, siis $m \mid a - (c - b)$ ja järelikult $a \equiv c - b \pmod{m}$.

8) Et $a \equiv b \pmod{m}$, siis $m \mid a - b$. Kuna iga arv jagab enda kordseid, siis on selge, et $m \mid a - b \pm tm \pm um$ ehk $a \pm tm \equiv b \pm um \pmod{m}$.

9) Et $a \equiv b \pmod{m}$ ja $c \equiv d \pmod{m}$, siis $m \mid a - b$ ja $m \mid c - d$.

Kuna $ac - bd = ac - cb + cb - bd = c(a - b) + b(c - d)$ ja saadud võrduse parema poole mõlemad liidetavad jaguvad arvuga m , siis peab ka $m \mid ac - bd$ ehk $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

10) Et $a \equiv b \pmod{m}$, siis rakendades omadust 9) n korda järjest saame $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

11) järeldub vahetult omadustest 3) ja 9).

12) Et $ka \equiv kb \pmod{m}$, siis $ka - kb = k(a - b)$ jagub arvuga m . Kuna k ja m on ühisteguriteta, siis $m \mid (a - b)$, s.t. $a \equiv b \pmod{m}$.

13) Et $a \equiv b \pmod{m}$, siis $m \mid (a - b)$. Jaguvuse omaduse põhjal $km \mid k(a - b)$, s.t. $ak \equiv bk \pmod{mk}$.

14) Et $ak \equiv bk \pmod{mk}$, siis $km \mid k(a - b)$. Jaguvuse omaduse põhjal $m \mid (a - b)$, s.t. $a \equiv b \pmod{m}$.

15) Kui $ak \equiv bk \pmod{m}$, siis $m \mid ka - kb$. Jaguvuse definitsiooni järgi leidub selline täisarv c , et $k(a - b) = mc$. Kuna $\text{SÜT}(m, k)$ jagab arve m ja k , siis saame, et

$$\frac{k}{\text{SÜT}(m, k)}(a - b) = \frac{m}{\text{SÜT}(m, k)}c, \text{ kus } \text{SÜT}\left(\frac{k}{\text{SÜT}(m, k)}, \frac{m}{\text{SÜT}(m, k)}\right) = 1.$$

Võrdus kehtib siis ja ainult siis kui $\frac{m}{\text{SÜT}(m, k)} \mid a - b$, s.t. $a \equiv b \left(\text{mod } \frac{m}{\text{SÜT}(m, k)} \right)$.

16) Kui $a \equiv b \pmod{m_i}$ iga $i = 1, 2, \dots, k$ korral, siis iga i korral ka $m_i \mid a - b$. Järelikult $a - b$ on arvude m_i ühiskordne. Et ühiskordne jagub alati vähima ühiskordsega, siis $\text{VÜK}(m_1, \dots, m_k) \mid a - b$.

Kui $a \equiv b \pmod{\text{VÜK}(m_1, m_2, \dots, m_k)}$, siis $\text{VÜK}(m_1, \dots, m_k) \mid a - b$. Kuna iga i korral $m_i \mid \text{VÜK}(m_1, m_2, \dots, m_k)$, siis jaguvuse omaduse põhjal iga i korral $m_i \mid a - b$.

17) Et $a \equiv b \pmod{m}$, siis $m \mid a - b$. Kuna $d \mid m$, siis jaguvuse omaduse 4) järgi $d \mid a - b$, s.t. $a \equiv b \pmod{d}$. ■

4.7. Euleri funktsioon

Tähistame arvust n mitte suuremate ja temaga ühistegurita naturaalarvude arvu $\varphi(n)$.

Lause 4.7.1. Kui arvud m ja n on ühistegurita, siis $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Tõestus. Kirjutame arvud 1 kuni mn tabelisse nii, et esimeses reas oleks arvud 1 kuni m , teises reas arvud $(m+1)$ kuni $2m$ ja samamoodi jätkates oleks n . reas arvud $(n-1)m+1$ kuni mn . Siis igas reas on $\varphi(m)$ arvu, mis on arvuga m ühistegurita ja igas reas on $\varphi(n)$ arvu, mis on ühistegurita arvuga n .

Tabelisse kirjutatud arvudest on arvuga mn ühistegurita vaid need arvud, mis on ühistegurita nii arvuga m kui ka arvuga n . Ühes veerus olevad arvud annavad kõik arvuga m jagamisel sama jäägi. Kui veerus olevatest arvudest üks on arvuga m ühistegurita, siis on seda kõik selles veerus olevad arvud. Seega võime öelda, et meil on veerud, mille järjekorranumber on ühistegurita arvuga m . On selge, et selliseid veerge on kokku $\varphi(m)$. Vaadates nüüd tabeli mingit veergu, kus asuvad arvud $k, m+k, 2m+k, \dots, (n-1)m+k$, võime öelda, et seal asuvad arvud $mx+k$, kus arvu x väärtusteks on kõikvõimalikud jäägid, mis saavad tekkida jagamisel arvuga n . Kuna m ja n on ühistegurita arvud, siis selles veerus on $\varphi(n)$ arvu, mis on arvuga n ühistegurita. Seega on tabelis $\varphi(m)\varphi(n)$ arvu, mis on ühistegurita arvuga mn . ■

Algarvu p korral $\varphi(p) = p-1$.

Kui $n = p^\alpha$, kus p on algarv, siis arvuga n ühine tegur on vaid algarvu p kordsetel: $p, 2p, \dots, (p^{\alpha-1})p$. Seega arvust p^α väiksemaid ja temaga ühist tegurit omavaid arve on $p^{\alpha-1}$.

Järelikult $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Seega oleme saanud, et kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 4.7.1. Kui arv n on esitatud kanoonilisel kujul $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, siis

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Teoreem 4.7.2. (*Fermat' väike teoreem*). Kui p on algarv ja arvud a ja p on ühistegurita, siis

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Tõestus. Arvu a jagamisel arvuga p tekkivad jäägid on $1, 2, 3, \dots, p-1$. Ka nende jääkide korrutised arvuga a ($a, 2a, 3a, \dots, a(p-1)$) annavad kõik arvuga p jagamisel erinevad jäägid. Kui nende seas leiduks kaks, mis annavad arvuga p jagamisel sama jäägi ehk leiduksid k ja l nii, et $ka \equiv la \pmod{p}$, siis lause 4.6.1 alapunkt 14 kohaselt $k \equiv l \pmod{p}$, mis aga ei ole võimalik, sest k ja l on erinevad ja arvust p väiksemad arvud. Leiame arvude $a, 2a, 3a, \dots, a(p-1)$ korrutise

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p}.$$

See tähendab, et $(p-1)!a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}$. Kuna p on algarv, siis ta on arvuga $(p-1)!$ ühistegurita ja järelikult $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. ■

Teoreem 4.7.3. (Euleri teoreem). Olgu a täisarv ja m positiivne täisarv ning arvud a ja m olgu ühistegurita, siis $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, kus $\varphi(m)$ on arvust m mitte suuremate ja temaga ühistegurita naturaalarvude arv.

Tõestus. Tõestus on analoogne teoreemi 4.7.2 tõestusega, aga arvuga m jagamisel tekkivatest jääkidest vaadeldakse vaid neid, mis on arvuga m ühistegurita.

Vaatleme jääke, mis tekivad arvuga m jagamisel ja on arvuga m ühisteguriteta. On selge, et selliseid jääke on $\varphi(m)$. Olgu need jäägid $a_1 = 1, a_2, \dots, a_{\varphi(m)}$. Oletame, et arvu a jagamisel arvuga m saame jäägi a' . Kuna a ja m on ühistegurita, siis järelikult leidub i nii, et $a' = a_i$. On selge, et $(a')^{\varphi(m)} \equiv a^{\varphi(m)} \pmod{m}$. Vaatleme arve $a', a_2a', \dots, a_{\varphi(m)}a'$. Nende arvude jagamisel arvuga m saame erinevad jäägid.

Leiame korrutise $a' \cdot a_2a' \cdot \dots \cdot a_{\varphi(m)}a' = 1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{\varphi(m)}(a')^{\varphi(m)} \equiv 1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{\varphi(m)} \pmod{m}$.

Kuna iga i korral a_i ja m on ühistegurita, siis $(a')^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. ■

4.8. Täisarvu positiivsete jagajate arv

Tähistame arvu n positiivsete jagajate arvu $\tau(n)$. Matemaatilises kirjanduses on levinud ka tähistused $d(n)$, $\sigma_0(n)$.

Lause 4.8.1. Kui positiivsed täisarvud m ja n on ühistegurita, siis $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$.

Tõestus. Vaatleme arvu mn , kus m ja n on ühistegurita arvud.

Arvu mn iga jagaja avaldub kujul $m_i \cdot n_j$, kus m_i on arvu m jagaja ja n_j on arvu n jagaja.

Arvu m positiivsed jagajad on $1 = m_0, m_1, m_2, \dots, m_k = m$ ja arvu n positiivsed jagajad on $1 = n_0, n_1, n_2, \dots, n_t = n$. Seega $\tau(m) = k + 1$ ja $\tau(n) = t + 1$.

Vaadeldes arvu mn positiivseid jagajaid, siis iga m_i korral on arvu mn jagajaid kokku $t + 1$.

Seega $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$. ■

Teoreem 4.8.1. Kui täisarv $n > 1$ on antud kanoonilisel kujul $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, siis arvu n positiivsete jagajate arv on

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1).$$

Tõestus. Arv $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ jagub arvuga $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ parajasti siis kui iga i korral $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$. Seega arvu n iga positiivne jagaja esitub kujul $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$. Iga i korral on β_i valikuks $(1 + \alpha_i)$ võimalust. Seega $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ valikuks on kokku $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ võimalust. Järelikult arvul n on $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ erinevat positiivset jagajat. ■

Näiteks: $\tau(32670) = \tau(2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11^2) = (1 + 1)(3 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = 48$.

Kui $n > 1$, siis leidub lõpmata palju positiivseid täisarve m , mille korral $\tau(m) = n$. Näiteks mis tahes algarvu p korral $\tau(p^{n-1}) = n$.

4.9. Täisarvu positiivsete jagajate summa

Tähistame arvu n kõigi positiivsete jagajate summat $\sigma(n)$.

Arvu n pärisjagajate summa on $\sigma(n) - n$.

Lause 4.9.1. Kui täisarvud m ja n on ühistegurita, siis $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.

Tõestus. Vaatleme arvu mn , kus m ja n on ühistegurita. Arvu mn iga jagaja avaldub kujul $m_i \cdot n_j$ kus m_i on arvu m jagaja ja n_j on arvu n jagaja. Arvu m positiivsed jagajad on $1, m_1, m_2, \dots, m_k = m$ ja arvu n positiivsed jagajad on $1, n_1, n_2, \dots, n_t = n$. Seega

$$\sigma(m) = 1 + m_1 + m_2 + \dots + m_k \text{ ja } \sigma(n) = 1 + n_1 + n_2 + \dots + n_t.$$

Arvu mn positiivseid jagajaid vaadates näeme, et iga m_i korral on arvu mn jagajateks arvud, mille summa on $m_i(1 + n_1 + n_2 + \dots + n_t) = m_i\sigma(n)$.

Liites kõik jagajad, saame $(1 + m_1 + m_2 + \dots + m_k)\sigma(n) = \sigma(m)\sigma(n)$. ■

Teoreem 4.9.1. Kui täisarv $n > 1$ on antud kanoonilisel kujul $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, siis arvu n positiivsete jagajate arv on

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Tõestus. Kui $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, siis lause 4.9.1 põhjal $\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2}) \dots \sigma(p_k^{\alpha_k})$.

Algarvu $p_i^{\alpha_i}$ kõigi positiivsete jagajate summa on $1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{\alpha_i} = \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$.

Seega $\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2}) \dots \sigma(p_k^{\alpha_k}) =$

$$= (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_k + \dots + p_k^{\alpha_k}) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}. \blacksquare$$

Järeldus 4.9.1. Kui $n = q$, kus q on algarv, siis

$$\sigma(q) = \frac{q^2 - 1}{q - 1} = q + 1.$$

Kui $n = 2^k$, siis

$$\sigma(2^k) = \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1} = 2^{k+1} - 1.$$

Lause 4.9.2. Kui täisarv n jagub täisarvuga m , siis $\frac{\sigma(m)}{m} \leq \frac{\sigma(n)}{n}$ kusjuures võrdus kehtib kui $n = m$.

Tõestus. Kui n jagub arvuga d , siis leidub selline täisarv k , et $kd = n$, s.t n jagub arvuga $k = \frac{n}{d}$. Seega $\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{1}{d}$.

Kui m on arvu n pärisjagaja, siis $\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d} > \sum_{d|m} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(m)}{m}$.

Kui aga $m = n$, siis kehtib võrdus. ■

Lause 4.9.3. Leidub lõpmatult palju naturaalarve, mis ei ole ühegi täisarvu positiivsete jagajate summaks.

Tõestus. Olgu naturaalarv $n > 9$ ja k selline naturaalarv, et

$$\frac{n}{3} - 1 < k \leq \frac{n}{2}. \quad (9.1)$$

Seega $2k \leq n$ ja $3k + 3 > n$. Kuna $n > 9$, siis $3k > 6$ ja järelikult $k \geq 3$ ning arvu k väärtusi, mille korral võrratus (9.1) kehtib, on rohkem kui $\frac{n}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n}{6}$. Arvul $2k$ on vähemalt neli positiivset jagajat: 1, 2, k ja $2k$. Seega $\sigma(2k) \geq 1 + 2 + k + 2k$ ja kuna $3k + 3 > n$, siis saame, et $\sigma(2k) > n$. On selge, et arve k , mille korral võrratused $2k \leq n$, $3k + 3 > n$ ja $\sigma(2k) > n$ kehtivad, on rohkem kui $\frac{n}{6}$ ja seepärast arvude $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ seas on rohkem kui

$\frac{n}{6}$ arvu, mis on suuremad arvust n . Seega arvude 1, 2, $\dots, n$ seas on rohkem kui $\frac{n}{6}$ naturaalarvu, mis ei saa olla $\sigma(x)$ väärtuseks naturaalarvu $x \leq n$ korral. Need arvud ei saa olla ka $\sigma(x)$ väärtuseks naturaalarvu $x > n$ korral, sest need on mitte suuremad kui n ja $\sigma(x) \geq 1 + x > n$, kui $x > n$. Seega iga naturaalarvu $n > 9$ korral leidub arvude 1, 2, $\dots, n$ seas rohkem kui $\frac{n}{6}$ arvu, mis ei saa olla $\sigma(x)$ väärtuseks naturaalarvu x korral. ■

4.10. Hulknurkarvud

Definitsioon 4.10.1. *Hulknurkarv* on naturaalarv, mis näitab, mitu ühesugust ringi saab tasandile paigutada nii, et need moodustaksid vastava korrapärase hulknurga.

Üldavaldis k -nda n -nurkarvu jaoks on $k + \frac{(n-2)k(k-1)}{2}$.

Erijuhul: kolmnurkarvud on naturaalarvud kujul $\frac{m(m+1)}{2}$ ja kuusnurkarvud on naturaalarvud kujul $m(2m-1)$, kus m on mis tahes positiivne täisarv.

Lause 4.10.1. Positiivne täisarv T on kolmnurkarv siis ja ainult siis, kui $8T+1$ on täisruut.

Tõestus. Kui $T = \frac{m(m+1)}{2}$, siis $8T+1 = 8 \cdot \frac{m(m+1)}{2} + 1 = (2m+1)^2$.

Olgu $8T+1$ täisruut. Et vaadeldav arv $8T+1$ on paaritu arv, siis leidub selline täisarv t nii, et

$8T+1 = (2t+1)^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 4t(t+1) + 1$, millest $T = \frac{t(t+1)}{2}$ ja järelikult T on

kolmnurkarv. ■

Special Sequences of Integers: Defined by the Number of Divisors or Digits or by the Sums of Divisors or Digits of the Integer

Raili Vilt

Summary

The first studies of the natural numbers may go back to the earliest times when numbers first aroused curiosity. The sets of numbers attract the interest of the best-known theorists and recreational mathematicians. In this year the number of the sequences of integers, arising from different branches of science and have been under serious research, has exceeded the limit of 175 000 items in the electronic database OEIS.

The aim of the present Thesis is to study some special sequences of positive integers in the decimal system, defined by the sum of positive divisors or by their number of divisors as well by the sum of digits of the number and by the number of digits.

In every case of defined integers the problem of infinity of the set of these integers is studied, the necessary and sufficient conditions for the positive integer in order to be a special integer are given, several properties of integers are proved and the relations with other subsets of integers are examined.

This research includes 48 subsets of integers. The sets of numbers, which have been under research for thousands of years, like perfect numbers and amicable pairs, also in last decades defined and researched ones, like Zumkeller numbers and Niven numbers, are considered. The facts of history of the integer sequences under exploration are added.

There are four chapters, dealing with eight main classes of positive integers and related to them numbers. Positive integer n said to be

- 1) *deficient, perfect* or *abundant* number if the sum of its divisors is less than, equal to, or greater than n itself;
- 2) *practical* number if every positive integer less than n can be represented as a sum of the distinct positive divisors of n ;
- 3) *Zumkeller* number if the positive divisors of n can be partitioned into two disjoint parts so that the sums of the both parts are equal;
- 4) *tau number* if the number of positive divisors of n divides n ;

- 5) *highly composite* number if it has more positive divisors than all lesser positive numbers;
- 6) *Niven number* if it is divisible by the sum of its decimal digits,
- 7) *Smith number* if it is a composite number the sum of whose digits is the sum of the digits of its prime;
- 8) *economical*, *equidigital* or *wastful* number if the number of digits in its prime factorization (including exponents) less than, equal to, or greater than has n itself.

Chapter 4 contains basic concepts and tools of the elementary number theory needed for the chapters 1–3.

There are two appendices:

1. The register of the names and definitions of 48 sequences considered in the present Thesis;
2. Problem set related to the topics of the Theses.

Kasutatud allikad

1. Abel, E., Abel, M., Kaasik, Ü. Koolimatemaatika entsüklopeedia, Tartu, Ilmamaa, 1998.
2. Alaoglu, L., Erdős, P. On highly composite and similar numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.* 56, 1944, 448–469.
Kättesaadav: http://www.math-inst.hu/~p_erdos/1944-03.pdf (07.06.2010).
3. Anderson, C.W., Hickerson, D. Friendly integers, (partial) solution 6020 of problem 307 (1975), *The American Mathematical Monthly*, 65–66, January 1977.
4. Battiato, S., Borho, W. Are There Odd Amicable Numbers Not Divisible by Three, *Mathematics of Computation*, Vol. 50, No. 182, Apr., 1988, 633–637.
Kättesaadav: <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2008630.pdf> (07.06.2010).
5. Bhaskara Rao, K.P.S., Peng, Y. On Zumkeller numbers.
[www] http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0912/0912.0052v1.pdf (07.06.2010).
6. Boscaro, S. Nivenmorphic Integers, *Journal of Recreational Mathematics*, 28, 3, 1996–1997, 201–205.
7. Brefeld, W. Teilbarkeit hochzusammengesetzter Zahlen.
[www] <http://www.brefeld.homepage.t-online.de/teilbarkeit.html> (05.06.2010).
8. Cai, T. On 2-Niven numbers and 3-Niven numbers, *Fibonacci Quarterly*, 34, 1996, 118–120.
9. Caldwell, C. *The Largest Known Primes*.
[www] <http://primes.utm.edu/largest.html> (07.07.2010).
10. Caldwell, C. The Prime Glossary: extravagant number at The Prime Pages.
[www] <http://primes.utm.edu/glossary/page.php?sort=EconomicalNumber> (05.06.2010).
11. Cattaneo, P.IJ. Sui numeri quasiperfetti, *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) 6, 1951, 59–62.
12. Clark, S., Dalzell, J., Holliday, J., Leach, D., Liatti, M., Walsh, M. Zumkeller numbers. Presented in the Mathematical Ambulance Conference at Illinois State University,

April, 18th, 2008.

13. Cohen, G.L., Hagis, P.Jr. Some results concerning quasiperfect numbers, *The Journal of the Australian Mathematical Society*, 33, 1982, 275–286.
14. Colton, S. Refactorable Numbers-A Machine Invention, *Journal of Integer Sequences*, Vol 2, 1999, Article 99.1.2.
Kättesaadav: <http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/colton/joisol.html> (07.06.2010).
15. Cooper, C.N., Kennedy, R.E On consecutive Niven numbers, *Fibonacci Quarterly*. 21, 1993, 146–151.
16. Cooper, C.N., Kennedy, R.E., Saadatmanesh, M. Super Niven numbers, *Mathematics in College, Fall-Winter*, 1992, 21–30.
Kättesaadav: <http://www.math-cs.ucmo.edu/~curtisc/articles/super.pdf> (07.07.2010).
17. Cooper, C.N., Kennedy, R.E. Tau numbers, natural density, and Hardy and Wright's Theorem 437, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 13, 1990, 383–386. Kättesaadav:
<http://downloads.hindawi.com/journals/ijmms/1990/717323.pdf> (07.06.2010).
18. Costello, P., Lewis, K. Lots of Smiths, *Mathematics Magazine*, vol 75(3), 2002, 223–226. Kättesaadav: <http://www.jstor.org/stable/3219247> (05.07.2010).
19. D'Abramo, G. On Amicable Numbers with Different Parity.
[www] http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0501/0501402v4.pdf (07.06.2010).
20. Euclid, Elements, Book IX.
[www] <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookIX/propIX36.html> (31.05.2010).
21. Euler, L. Tractatus de numerorum doctrina capita sedecim, quae supersunt, 3. osa. Kättesaadav: <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/> (31.05.2010).
22. Euler, L. On amicable numbers, Originally: De numeris amicabilibus, Nova acta eruditorum, 1747, 267–269.
Kättesaadav: http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0409/0409196v6.pdf (07.06.2010).
23. Ghusayni, B. Maple explorations, perfect numbers, and Mersenne primes, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36: 6, 2005, 643–654.
Kättesaadav: <http://dx.doi.org/10.1080/00207390500064080> (07.06.2010).

24. Grost, M.E., The Smallest Number with a Given Number of Divisors, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 75, No. 7, Aug.-Sep., 1968, 725–729.
Kättesaadav: <http://www.jstor.org/pss/2315183> (07.07.2010).
25. Grundman, H.G. Sequences of consecutive Niven numbers, *Fibonacci Quarterly*, 32, 1994, 174–175.
26. Gupta, S.S. Smith Numbers.
[www] <http://www.shyamsundergupta.com/smith.htm> (05.06.2010).
27. Hags, P.Jr., Lord, G. Quasi-Amicable Numbers, *Mathematics of computation*, 31, 138, 1977, 608–611
Kättesaadav: <http://www.ams.org/journals/mcom/1977-31-138/S0025-5718-1977-0434939-3/S0025-5718-1977-0434939-3.pdf> (07.06.2010).
28. Hags, P.Jr. Lower bounds for relatively prime amicable numbers of opposite parity, *Mathematics of Computation*, Vol 24.No 112, Oct., 1970, 963–968.
Kättesaadav: <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2004629.pdf> (07.06.2010).
29. Heath, T.A. History of Greek Mathematics: From Thales to Euclid, 1, NY, Dover Publications, 1981.
30. Heyworth, M.R. More on Panarithmic Numbers, *New Zealand Mathematics Magazine*, 17, 1980, 28–34.
31. Hindin, H.J. Quasipractical numbers, *IEEE Communications Magazine*, March, 1980, 41–45. Kättesaadav:
<http://ieeexplore.ieee.org/iel5/35/23736/01090205.pdf?arnumber=1090205>
(07.06.2010).
32. Hoffman, P. The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth, New York: Hyperion, 1998.
33. Kennedy, R.E. Digital Sums, Niven Numbers, and Natural Density,
Crux Mathematicorum, 8, 1982, 129–133.
34. Margenstern, M. Les nombres pratiques: theorie, observations et conjectures,
J. Number Theory, 37, 1991, 1–36.
35. Mc Daniel, W.L. The Existence of infinitely Many k-Smith numbers, *Fibonacci Quarterly*, 25, 1987, 76–80.

36. Melfi, G. On Two Conjectures about Practical Numbers. *Journal Number Theory*, 56, 1996, 205–210. Kättesaadav: <http://members.unine.ch/giuseppe.melfi/articoli/jnt.pdf> (07.06.2010).
37. Melfi, G. Practical Numbers.
[www] http://www.dm.unipi.it/gauss-pages/melfi/public_html/articoli/tesi.ps (07.06.2010).
38. Mishima, H. Table of Augmented amicable pairs under 10^{10} .
[www] <http://www.asahi-net.or.jp/~kc2h-msm/mathland/math09/math09t3.htm> (05.06.2010).
39. O'Connor, J.J., Robertson, E.F. Perfect numbers.
[www] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Perfect_numbers.html (05.06.2010).
40. O'Connor, J.J., Robertson, E.F. Srinivasa Aiyangar Ramanujan.
[www] <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Ramanujan.html> (05.06.2010).
41. Oltikar, S., Wayland, K. Construction of Smith Number, *Mathematics Magazine*, vol 56(1), 1983, 36–37. Kättesaadav: <http://www.jstor.org/pss/2690265> (07.07.2010).
42. Ore, O. On the Averages of the Divisors of a Number, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 55, No. 10, Dec., 1948, 615–619.
Kättesaadav: <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2305616.pdf> (07.06.2010).
43. Pickover, C. Undulating Undecamorphic and Undulating Pseudofareymorphic Integers, *Journal of Recreational Mathematics*, 26:2, 1994, 110–116.
44. Pinch, R.G.E. Economical Numbers, 1998.
Kättesaadav: http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/9802/9802046v1.pdf (05.06.2010).
45. Problems, *Mathematics Magazine*, Vol. 69, No. 4, Oct., 1996, 304–310.
Kättesaadav: <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2690542.pdf> (07.06.2010).
46. Ratering, S. An Interesting Subset of the Highly Composite Numbers, *Mathematics Magazine*, Vol. 64, No. 5, Dec., 1991, 343–346.
Kättesaadav: <http://www.jstor.org/stable/2690653> (05.06.2010).
47. Redi, E. Arvuteooria, Tallinn, Avita, 1998.

48. Redi, E. Arvude alikvootjadad, *Koolimatemaatika* XXXIV, 2007, 68–71.
49. Robinson, D.F. Egyptian Fractions via Greek Number Theory, *New Zealand Mathematics Magazine*, 16, 1979, 47–52.
50. Santos, B.R. Equidigital representation: problem 2204, *J. Rec. Maths* 27, 1995, no 1, 58–59.
51. Shirali, S.A. Family Portrait of Primes—A Case Study in Discrimination, *Mathematics Magazine*, Vol. 70, No. 4, Oct., 1997, 263–272.
Kättesaadav: <http://www.jstor.org/stable/2690862> (05.06.2010).
52. Sierpiński, W. Elementary theory of numbers, 2nd Eng. Ed, Amsterdam, Netherlands: North-Holland, 1988.
53. Sloane, N.J.A. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.
[www] www.research.att.com/~njas/sequences/ (05.07.2010).
54. Srinivasan, A.K. Practical numbers, *Current Science*, 1948, 179–180.
Kättesaadav: <http://www.ias.ac.in/jarch/currsci/17/179.pdf> (07.06.2010).
55. Steiner, R., Tzanakis, N. Simplifying the solution of Ljunggren's equation $x^2 + 1 = 2y^4$, *Journal Number Theory*, 37, 1991, 123–132.
Kättesaadav: <http://www.math.uoc.gr/~tzanakis/Papers/LjunggrenEq.pdf> (05.06.2010).
56. Stewart, B.M. Sums of Distinct Divisors, *American Journal of Mathematics*, Vol. 76, No. 4, Oct., 1954, 779–785.
Kättesaadav: <http://www.jstor.org/pss/2372651> (07.06.2010).
57. Suryanarayana, D. Super perfect numbers, *Elem. Math.* 24, 1969, 16–17.
58. Zelinsky, J. Tau Numbers: A partial proof of a conjecture and other results, *Journal of Integer Sequences*, Vol 5, 2002, Article 02. 2.2. Kättesaadav:
<http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL5/Zelinsky/zelinsky9.pdf> (05.06.2010).
59. Zimmermann, P. Aliquot sequences.
[www] <http://www.loria.fr/~zimmerma/records/aliquot.html> (05.06.2010).
60. *Zumkeller Numbers*. [www] <http://www.luschny.de/math/seq/ZumkellerNumbers.html> (05.06.2010).

61. Tattersall, J.J. Elementary Number Theory in Nine Chapters, Cambridge University Press, 2005.
62. Trotter, T. Admirable Numbers.
[www] <http://www.trottermath.net/numthry/admirabl.html> (05.06.2010).
63. Trotter, T. Niven numbers.
[www] <http://www.trottermath.net/numthry/nivennos.html> (05.06.2010).
64. TÕ Teaduskool. [www] <http://www.teaduskool.ut.ee> (08.07.2010).
65. Weisstein, Eric W. Wolfram MathWorld. [www] <http://mathworld.wolfram.com> (07.06.2010).
66. Wikipedia. [www] http://en.wikipedia.org/wiki/Extravagant_number (05.06.2010).
67. Wilansky, A. Smith numbers, *Two-year College Mathematics Journal*, 13, 1982, 21.
Kättesaadav: <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/3026531.pdf> (05.07.2010).
68. Voight, J. Perfect numbers: an elementary introduction.
[www] <http://www.cems.uvm.edu/~voight/notes/perfelem.pdf> (05.06.2010).
69. Yates, S. Special Sets of Smith Numbers, *Mathematics Magazine*, Vol. 59, No.5 Dec., 1986, 293–296.
Kättesaadav: <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2689404.pdf> (05.07.2010).

Defineeritud täisarvude nimetuste register

Tähtedega on tähistatud samaväärsed definitsioonid ning numbritega erinevad (neist esimesena on antud käesolevas töös kasutatav definitsioon).

algarvu p pere (*p-aliquot tree*)

Algarvuga p lõppevad alikvootjadad moodustavad *algarvu p pere*.

antitau-arv (*anti-tau number*)

Positiivne täisarv n on *antitau-arv*, kui arv n ja selle positiivsete jagajate arv $\tau(n)$ on ühistegurita arvud.

diedraalne täiuslik arv (*dihedral perfect number*)

Positiivne täisarv n on *diedraalne täiuslik arv*, kui arvu positiivsete jagajate summa ja positiivsete jagajate arvu summa on $2n$, s.t $\sigma(n) + \tau(n) = 2n$.

edasipüüdlik arv (*aspiring number*)

Positiivne täisarv on *edasipüüdlik arv*, kui selle alikvootjadas jääb korduma üks ja sama arv.

eriline ülikordarv (*special highly composite number*)

Ülikordarv on *eriline ülikordarv*, kui see arv jagab kõiki temast suuremaid ülikordarve.

imetlusväärne arv (*admirable number*)

Positiivne täisarv n on *imetlusväärne arv*, kui arvul n leidub pärisjagaja d nii, et kõigi positiivsete jagajate summa on $2n + 2d$.

k-Niveni arv (*k-Niven number*)

Positiivne k -ndsüsteemi $k \geq 2$ täisarv on *k-Niveni arv* (*k-Niven number*), kui see arv jagub oma numbrite summaga.

k-Smith'i arv (*k-Smith number*)

Kordarv n on *k-Smith'i arv*, kui arvu n algtegurite numbrite summa on k korda suurem arvu n numbrite summast.

k-täiuslik arv (*k-multiply perfect number, k-multiperfect*)

1. Positiivne täisarv n on *k-täiuslik arv*, kui selle arvu positiivsete jagajate summa on arvu n k -kordne, s.t $\sigma(n) = kn$.
2. Positiivne täisarv n on *k-täiuslik arv*, kui selle arvu positiivsete pärisjagajate summa on arvu n k -kordne, s.t $\sigma(n) = (k + 1)n$.

kvaasisõbralikud arvud (*quasiamicable pair, betrothed numbers*)

Positiivsed täisarvud m ja n on *kvaasisõbralikud arvud*, kui nende arvude positiivsete jagajate summad on võrdsed arvuga $m + n + 1$, s.t $\sigma(m) = \sigma(n) = m + n + 1$.

kvaasitäiuslik arv ehk **vähima liiaga arv** (*quasiperfect number, least abundant number*)

Liiaga arv n on *kvaasitäiuslik arv* ehk *vähima liiaga arv*, kui arvu n positiivsete jagajate summa on $2n + 1$.

kõikjal Niveni arv (*all-Niven number*)

Arv on *kõikjal Niveni arv*, kui see arv osutub Niveni arvuks mis tahes arvusüsteemis.

kõrgem ülikordarv (*superior highly composite number*)

Positiivne täisarv n on *kõrgem ülikordarv* kui leidub arv $\varepsilon > 0$ nii, et kõikide positiivsete täisarvude m korral $\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} \geq \frac{\tau(m)}{m^\varepsilon}$.

kättesaamatu arv (*untouchable number*)

Positiivne täisarv on *kättesaamatu arv*, kui see ei ole ühegi täisarvu pärisjagajate summaks.

lahke arv (*friendly number*)

Positiivne täisarv n on *lahke arv*, kui leidub vähemalt üks selline positiivne täisarv m , mille korral $\frac{\sigma(m)}{m} = \frac{\sigma(n)}{n}$ ehk kui ta kuulub vähemalt ühte lahkete arvude paari.

lahkete arvude paar (*friendly pair*)

Positiivsed täisarvud m ja n moodustavad *lahkete arvude paari*, kui ühe arvu positiivsete jagajate summa ja arvu enda jagatis on võrdne teise arvu positiivsete jagajate summa ja arvu enda jagatise, s.t kui $\frac{\sigma(m)}{m} = \frac{\sigma(n)}{n}$.

liiaga arv (*abundant number*)

a. Positiivne täisarv n on *liiaga arv*, kui selle pärisjagajate summa $\sigma(n) - n$ on suurem arvust endast, s.t $n < \sigma(n) - n$.

b. Positiivne täisarv n on *liiaga arv*, kui selle positiivsete jagajate summa $\sigma(n)$ on suurem kahekordsest antud arvust, s.t $2n < \sigma(n)$.

Niveni arv (*Niven number*)

Positiivne kümnendsüsteemi täisarv on *Niveni arv*, kui see arv jagub oma numbrite summaga.

Nivenmorfne arv (*Nivenmorphic number*)

Kümnendsüsteemi täisarv t on *Nivenmorfne arv*, kui leidub Niveni arv, mille numbrite summa on t ja selle arvu viimastest numbritest moodustub arv t .

Ore arv (*Ore number*)

Positiivne täisarv n on *Ore arv*, kui $\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)}$ on täisarv.

peaaegu praktiline arv (*almost practical number*)

Positiivne täisarv n on *peaaegu praktiline arv*, kui arvude $1 \leq m \leq \sigma(n)$ seas leidub täpselt kaks sellist arvu, mis ei ole esitatavad arvu n erinevate positiivsete jagajate summana.

peaaegu sõbralikud arvud (*augmented amicable pair*)

Positiivsed täisarvud m ja n on *peaaegu sõbralikud arvud*, kui nende positiivsete jagajate summad on võrdsed arvuga $m + n - 1$, s.t $\sigma(m) = \sigma(n) = m + n - 1$.

peaaegu täiuslik arv ehk ***vähima puuduga arv*** (*almost perfect number, least deficient number*)

Puuduga arv n on *peaaegu täiuslik arv* ehk *vähima puuduga arv*, kui arvu n positiivsete jagajate summa on $2n - 1$.

pool-Zumkelleri arv (*half-Zumkeller number*)

Positiivne täisarv on *pool-Zumkelleri arv*, kui selle arvu kõik positiivsed pärisjagajad saab jaotada kahte mittelõikuvasse hulka nii, et kummaski hulgas olevate arvude summad on võrdsed.

praktiline arv (*practical number*)

a. Positiivne täisarv n on *praktiline arv*, kui iga positiivse täisarvu k , kus $1 \leq k \leq n$, saab esitada arvu n erinevate positiivsete jagajate summana.

b. Positiivne täisarv n on *praktiline arv*, kui iga positiivne täisarv m , kus $1 \leq m \leq \sigma(n)$, on esitatav arvu n erinevate positiivsete jagajate summana.

praktiliste arvude mitmikud

Praktilisi arve n ja $n + 2$ nimetatakse *praktiliste arvude kaksikuteks*. Praktilisi arve $n - 2$, n ja $n + 2$ nimetatakse *praktiliste arvude kolmikuteks*. Praktilisi arve $n - 6$, $n - 2$, n , $n + 2$, $n + 6$ nimetatakse *praktiliste arvude viisikuteks*.

primitiivse liiaga arv (*primitive abundant numbers*)

1. Positiivne täisarv on *primitiivse liiaga arv*, kui arv on liiaga arv, mille kõik pärsijagajad on puuduga arvud.

2. Positiivne täisarv on *primitiivse liiaga arv*, kui arv on liiaga arv, mille ükski pärsijagaja ei ole liiaga arv.

pseudotäiuslik arv ehk ***pooltäiuslik arv*** (*pseudoperfect number, semiperfect number*)

Positiivne täisarv n on *pseudotäiuslik* ehk *pooltäiuslik arv*, kui arvu n on võimalik esitada mõne (või kõikide) oma pärsijagajate summana.

puuduga arv (*deficient number*)

a. Positiivne täisarv n on *puuduga arv*, kui selle pärsijagajate summa $\sigma(n) - n$ on väiksem arvust endast, s.t $n > \sigma(n) - n$.

b. Positiivne täisarv n on *puuduga arv*, kui selle positiivsete jagajate summa $\sigma(n)$ on väiksem kahekordsest antud arvust, s.t $2n > \sigma(n)$.

raiskav arv (*wasteful number*)

Positiivne täisarv n on *raiskav arv*, kui arvu n kanoonilises kujus on rohkem numbreid kui arvus n .

Märkus: ka ***ekstravagantne arv*** (*extravagant number*)

seltskondlike arvude k-tsükkel (*k-sociable numbers*)

Positiivsed täisarvud $a_1, a_2, \dots, a_k$ moodustavad *seltskondlike arvude k-tsükli*, kui iga järgnev arv on eelmise pärisjagajate summa ning viimase arvu pärisjagajate summa on võrdne esimese arvuga.

Smith'i arv (*Smith number*)

Kordarv on *Smith'i arv*, kui selle numbrite summa on võrdne arvu algtegurite numbrite summaga.

Smith'i vennad (*Smith brothers*)

Kaks järjestikust täisarvu on *Smith'i vennad*, kui mõlemad arvud on Smith'i arvud.

super-Niveni arv (*super Niven number*)

Positiivne kümnendsüsteemi täisarv n on *super-Niveni arv*, kui arv n jagub kõikide arvudega, mis kuuluvad hulka, mille moodustavad arvu n nullist erinevad numbrid ja kõik võimalikud nullist erinevate numbrite summad.

supertäiuslik arv (*superperfect number*)

Positiivne täisarv n on *supertäiuslik arv*, kui selle positiivsete jagajate summa kõigi positiivsete jagajate summa on kaks korda suurem arvust n , s.t $\sigma(\sigma(n)) = 2n$.

sõbralikud arvud (*amicable pair*)

Positiivsed täisarvud a ja b on *sõbralikud arvud*, kui kumbki neist on võrdne teise pärisjagajate summaga, s.t kui $\sigma(a) - a = b$ ja $\sigma(b) - b = a$.

säästlik arv (*economical number*)

1. Positiivne täisarv n on *säästlik arv*, kui arvu n kanoonilises kujus on vähem numbreid, kui arvus n .

2. Positiivne täisarv n on *säästlik arv*, kui arvu n kanoonilises kujus ei ole rohkem numbreid, kui arvus n .

Märkus: definitsiooni 1. mõttes arve nimetatakse ka ***kokkuhoidlikeks arvudeks*** (*frugal number*)

Zumkelleri arv (*Zumkeller number*)

Positiivne täisarv on *Zumkelleri arv*, kui selle arvu kõik positiivsed jagajad saab jaotada kahte mitteloikuvasse hulka nii, et kummaski hulgas olevate arvude summad on võrdsed.

tau-arv (*tau number*)

Positiivne täisarv n on *tau-arv*, kui arv n jagub oma positiivsete jagajate arvuga $\tau(n)$.

tau-arvude paar

Kaks järjestikust täisarvu, mis mõlemad on tau-arvud, noodustavad *tau-arvude paari*.

tohutu liiaga arv (*colossally abundant number*)

Positiivne täisarv n on *tohutu liiaga arv*, kui leidub $\varepsilon > 0$ nii, et kehtib $\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}} < \frac{\sigma(k)}{k^{1+\varepsilon}}$ iga $k > 1$ korral.

täiuslik arv (*perfect number*)

a. Positiivne täisarv n on *täiuslik arv*, kui see võrdub oma pärisjagajate summaga $\sigma(n) - n$, s.t $n = \sigma(n) - n$.

b. Positiivne täisarv n on *täiuslik arv*, kui selle positiivsete jagajate summa $\sigma(n)$ on võrdne antud arvu kahekordsega, s.t $2n = \sigma(n)$.

veider arv (*weird number*)

Positiivne täisarv on *veider arv*, kui selle pärisjagajate summa on arvust suurem ning arvu ei ole võimalik esitada oma pärisjagajate summana.

võrdnumbriline arv (*equidigital number*)

Positiivne täisarv n on *võrdnumbriline arv*, kui arvu n kanoonilises kujus on sama palju numbreid kui arvus n .

üksildane arv (*solitary number*)

Positiivne täisarv on *üksildane arv*, kui see arv ei ole lahke arv.

ülikordarv (*highly composite number*)

Positiivne täisarv on *ülikordarv*, kui sel on positiivseid jagajaid rohkem, kui sellest mis tahes väiksemal positiivsel täisarvul.

üliküllane arv (*superabundant number*)

Positiivne täisarv n on *üliküllane arv*, kui iga positiivse täisarvu $m < n$ korral kehtib võrratus $\frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{n}$.

üliliiaga arv (*highly abundant number*)

Positiivne täisarv n on *üliliiaga arv*, kui iga positiivse täisarvu $m < n$ korral kehtib võrratus $\sigma(m) < \sigma(n)$.

Ülesannete kogu

Ülesande esimene number tähistab käesoleva töö peatükki, mille juurde ülesanded kuuluvad.

- 1.1. Põhjenda, et ükski paarisarvuline täiuslik arv ei saa olla täisruut.
- 1.2. Kas leidub täiuslikke paarisarve, mis on Fibonacci arvud?
(Fibonacci arvud: naturaalarvude jada, $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, \dots$, kus $F_1 = F_2 = 1$ ja alates kolmandast liikmest $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.)
- 1.3. Põhjenda, et 12 järjestikuse arvu seas leidub alati vähemalt üks liiaga arv.
- 1.4. Põhjenda, et arvud 2 ja 3 on ainsad üliliiaga algarvud.
- 1.5. Põhjenda, et 3 on ainus algarvuline diedraalne täiuslik arv.
- 1.6. Esita arvud 197 ja 49 arvu 100 erinevate positiivsete jagajate summana.
- 1.7. Millise naturaalarvu k korral arv 10^k osutub praktiliseks arvuks?
- 1.8. Kas leidub selline positiivne täisarv n , mille korral arve 1 kuni 4 saab esitada arvu n erinevate positiivsete jagajate summana, aga arvu 6 ei saa?
- 1.9. Teame, et arv $m = 12k$, kus k on positiivne täisarv, on praktiline arv. Kas arvud $m + 2$ ja $m - 2$ saavad olla praktilised arvud?
- 1.10. Leia arvude 5, 6, 10, 11, 12, 15 ja 20 kõik positiivsed jagajad. Milliste antud arvude korral on võimalik jaotada arvu kõik positiivsed jagajad kahte mittelõikuvasse hulka nii, et kummaski hulgas olevate arvude summad oleksid võrdsed?
- 1.11. Nimetame Zum-arvudeks positiivseid täisarve, mille korral on võimalik jaotada arvu kõik positiivsed jagajad kahte mittelõikuvasse hulka nii, et kummaski hulgas olevate arvude summad oleksid võrdsed. Millised arvudest 1 – 40 on Zum-arvud? (Sobib rühmatööks.)

1.12. Uuri ülesandes 1.11 leitud Zum-arve ja sõnasta vastused järgmistele küsimustele:

- a) Milline on vähim Zum-arv?
- b) Kas Zum-arvude seas saab olla algarve?
- c) Mida võib järeldada Zum-arvude positiivsete jagajate summa kohta?
- d) Mida võib järeldada Zum-arvude paaritu arvuliste positiivsete jagajate arvu kohta?

1.13. Tähistagu $\sigma(n)$ arvu n kõigi positiivsete jagajate summat. Millised järgmistest võrratustest kehtivad mis tahes Zum-arvu n korral?

- a) $\sigma(n) > n$ b) $\sigma(n) < 2n$ c) $\sigma(n) \geq 2n$ d) $\sigma(n) \leq n$ e) $\sigma(n) \geq n + 1$

1.14. Arvudel 12 ja 14 on mõlemal positiivsete jagajate summa paarisarv ning ka paaritu arvulisi jagajaid on mõlemal paarisarv. Kas nad mõlemad on Zum-arvud?

1.15. Vaata ülesandes 1.10 antud arve. Milliste korral on võimalik jaotada arvu kõik positiivsed pärisjagajad kahte mittelõikuvasse hulka nii, et kummaski hulgas olevate arvude summad oleksid võrdsed?

1.16. Nimetame PZum-arvudeks positiivseid täisarve, mille korral on võimalik jaotada arvu kõik positiivsed pärisjagajad kahte mittelõikuvasse hulka nii, et kummaski hulgas olevate arvude summad oleksid võrdsed. Millised arvudest 1 – 40 on PZum-arvud? (Sobib rühmatööks)

1.17. Uuri ülesandes 1.16 leitud PZum-arve ja sõnasta vastused järgmistele küsimustele:

- a) Milline on vähim PZum-arv?
- b) Kas PZum-arvude seas saab olla algarve või algarvude ruute?
- c) Mida võib järeldada PZum-arvude positiivsete pärisjagajate summa kohta?
- d) Mida võib järeldada PZum-arvude ja nende positiivsete jagajate summa paarsuse kohta?

2.1. Leia, mitu positiivset jagajat on arvudel

- a) 2, 8, 9, 12 ja 18;
- b) 3, 4, 6, 10 ja 14.

Esimeses reas olevaid arve nimetatakse tau-arvudeks. Teises reas ei ole ühtegi tau-arvu. Vaatle arve ja nende positiivsete tegurite arvu. Mis võiks eristada tau-arve teise rea arvudest?

- 2.2. Leia kõik
- ühekohalised tau-arvud
 - kahekohalised tau-arvud.
- 2.3. Mitu algarvu on tau-arvude seas?
- 2.4. Millised järgmistest arvudest 1520, 1521 ja 1522 on tau-arvud?
- 2.5. Too näiteid tau-arvudest, mille positiivseid jagajate arv on vastavalt 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Kas selliste jagajate arvuga leidub ka selliseid arve, mis ei ole tau-arvud?
- 2.6. Põhjenda, et kui n annab arvuga 24 jagamisel jäägi 4, siis n ei ole tau-arv.
- 2.7. Kas kõik mitte tau-arvud on antitau-arvud?
Kas kõik paaritud arvud, mille vähemalt üks algtegur on paaritu arvulise astendajaga on anti-tau arvud?
- 2.8. Tabelil on 130 veergu. Tabeli teise rea igasse teise ruutu on märgitud rist. Kolmanda rea igasse kolmandasse ruutu on märgitud rist. Neljanda rea igasse neljandasse ruutu on märgitud rist. Viienda rea igasse viiendasse ruutu on märgitud rist. Mitmendas veerus on kõige rohkem riste?
- 2.9. Kui palju on selliseid ülikordarve, mis on täpselt poole väiksemad järgmisest ülikordarvust?
- 2.10. Leia vähim arv, millel on arvuga 100 sama palju positiivseid jagajaid.
- 2.11. Leia vähim arv, millel on 3^8 positiivset jagajat.
- 3.1. Kas kõik arvuga 9 jaguvad arvud on Niveni arvud?
- 3.2. Leia vähim positiivne arv m , mille korral 2^m
- ei ole Niveni arv,
 - on Niveni arv, kui $m > 3$.
- 3.3. Nimetame arvu m *Niveniauguks*, kui arv m ei ole Niveni arv, aga arvud $m-1$ ja $m+1$ on Niveni arvud. Kui palju on arvust 100 väiksemaid Niveniauke? Kas on õige, et Niveniauk on alati paaritu arv?

- 3.4.** Leia vähimad Niveni arvud, mille numbrite summad on vastavalt 11 ja 13.
- 3.5.** Arvust 300 väiksemate Niveni arvude seas on neli sellist arvu, mille numbrite summa ei ole Niveni arv. Leia need arvud.
- 3.6.** Arv 10 on Nivenmorfne arv. Leia vähim selline Niveni arv, mille numbrite summa on 10 ja mille viimastest numbritest moodustub arv 10. Kui palju on selliseid neljakohalisi arve?
- 3.7.** Millised numbrid tuleks kirjutada 222222 arvule lõppu, et see oleks super-Niveni arv?
- 3.8.** Asenda tähed A ja B nullist erinevate numbritega nii, et arv $1AB000$ oleks super-Niveni arv. Leia kõik võimalused. Kui palju on nende seas selliseid, et ka arv $1AB00$ on super-Niveni arv?
- 3.9.** Arvu n algtegurite numbrite summa on m . Leia arvu $10n$ algtegurite numbrite summa.
- 3.10.** Kui palju on selliseid kordarve, mille algtegurite numbrite summa on 8?
- 3.11.** Kui palju on arvust 100 väiksemaid positiivseid täisarve, mis ei ole Smith'i arvud, aga mille korral arvu numbrite summa on võrdne arvu algtegurite numbrite summaga?
- 3.12.** Näita, et Suzanne hulk S_n on Monica hulga M_n alamhulk, kuid hulk M_n ei pruugi olla hulga S_n alamhulk.
- 3.13.** Kas leidub arv, mille numbrite summa on algarv ja mis kuulub täpselt kolme erinevasse Suzanne hulka?
- 3.14.** Näita, et
- a) kõik arvud kujul $7 \cdot 10^n$, kuuluvad Suzanne hulka S_7 .
 - b) kui n on paarisarv, siis $59 \cdot 10^n$ kuulub Suzanne hulka S_{14} .

- 3.15.** 1) Leia suurima järjekorranumbriga Monica hulk, millesse kuulub arv 10^n .
 2) Millistesse Suzanne hulkadesse kuulub arv 10^n ?
- 3.16.** Ütleme, et positiivne täisarv m kuulub hulka V_k ($k \geq 0$) kui $s(m) - s_p(m) = k$ ja kuulub hulka W_k , kui $s_p(m) - s(m) = k$.
 ($s(m)$ on arvu m numbrite summa ja $s_p(m)$ on arvu m kõigi algtegurite numbrite summa.)
- 1) Leia hulka V_1 kuuluvad ja arvust a) 30; b) 100 väiksemad arvud.
 - 2) Leia hulka W_1 kuuluvad ja arvust a) 30; b) 100 väiksemad arvud.
 - 3) Põhjenda, et kui $m \in V_6$, siis $10 \cdot m \in W_1$.
 - 4) Põhjenda, et kui $m \in V_8$, siis $10 \cdot m \in V_1$.
 - 5) Kui $100m$ on Smith'i arv, siis millistesse hulkadesse hulkadest V_k ja W_k kuulub arv m ?
 - 6) Arv 98900 on Smith'i arvude jada 3263. element. Millistesse hulkadesse hulkadest V_k ja W_k kuulub arv 989?
 - 7) Millistesse hulkadesse hulkadest V_i ja W_i kuulub k -Smith'i arv?
- 3.17.** Arvul m on viis erinevat algtegurit ja arv m ei jagu ühegi täisarvu ruuduga. Kas on õige, et arvu m^2 kanoonilises kujus on vähemalt 11 numbrit?
- 3.18.** Arv p on vähemalt kolmekohaline algarv. Kas arv p^2 on raiskav, võrdnumbriline või säästlik arv?
- 3.19.** Leia võrdnumbrilise positiivse täisarvu $m > 1$ vähim võimalik väärtus nii, et ka arv $10 \cdot m$ oleks võrdnumbriline arv.
- 3.20.** Näita, et kahe võrdnumbrilise arvu korrutis saab olla nii, raiskav, võrdnumbriline kui säästlik arv.