1899. Годъ 7.

# УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ

## ИМПЕРАТОРСКАГО

## ЮРЬЕВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА

# ACTA

ET

# COMMENTATIONES

## IMP. UNIVERSITATIS JURIEVENSIS

(OLIM DORPATENSIS).

№ 4.

ЮРЬЕВЪ.

Типографія К. Маттисена.

1899.

1899. Годъ 7.

# УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ

## ИМПЕРАТОРСКАГО

## ЮРЬЕВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

№ 4.

ЮРЬЕВЪ.

Типографія К. Маттисена.

1899.

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Юрьевскаго Университета.

Юрьевъ, 4 сентября 1899 г.

№ 1947. Ректоръ: **А. Будиловичъ.**

## СОДЕРЖАНІЕ.

### Оффиціальный отдѣлъ.



А.

### Научный отдѣлъ.



B.

### Приложенія.

# ОБОЗРѢНІЕ
# ЛЕКЦІЙ

въ

## ИМПЕРАТОРСКОМЪ
## ЮРЬЕВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

---

**1899 г., II семестръ.**

---

## I. Богословскій Факультетъ.

Маг. **I. Х. Керстенъ**, испр. должн. ординарнаго профессора систематическаго богословія, Деканъ: 1) система догматики, ч. II, 5 ч. въ нед., по понед., вторн., сред., четв. и субб. отъ 12—1 ч.; — 2) система этики, 4 ч. въ нед., по вторн. и четв. отъ 1—2 ч., по пятн. отъ 12—1 ч. и по субб. отъ 11—12 ч.

Докт. **Ф. Л. Гершельманъ**, ординарный профессоръ практическаго богословія: 1) ученіе о богослуженіи и церковномъ устройствѣ, 4 ч. въ нед., по понед., вторн., четв. и пятн. отъ 11—12 ч.; — 2) гомилетическая и катехизическая семинарія, 2 ч. въ нед., по сред. отъ 11—12 и 6—7 ч.

Докт. **I. I. Квачала**, ординарный профессоръ историческаго богословія: церковная исторія, ч. II, 6 ч. въ нед., по понед., вторн., четв. и пятн. отъ 5—6 ч. и ио понед. и четв. отъ 6—7 ч.

Докт. **А. Р. Зебергъ**, ординарный профессоръ экзегетическаго богословія: 1) объясненіе I-го посланія къ Коринѳянамъ (окончаніе) и 2-го посланія къ Коринѳянамъ, 4 ч. въ нед., по понед., вторн., четв. и пятн. отъ 10—11 ч.; — 2) введеніе въ Новый Завѣтъ (окончаніе) и исторія новозавѣтнаго текста, 2 ч. въ нед., по сред. и субб. отъ 10—11 ч.

Маг. **А. М. фонъ Бульмерингъ**, экстраординарный профессоръ симитскихъ языковъ: 1) объясненіе пророковъ Амоса, Осіи, Михея, Аггея, Захарія и Малахія, 3 ч. въ нед., по понед., сред. и пятн. отъ 8—9 ч.; — 2) введеніе въ Ветхій Завѣтъ, ч. I (продолженіе) и ч. II, 3 ч. въ нед., по вторн., четв. и субб. отъ 8—9 ч.; — 3) еврейская грамматика, съ практическими упражненіями, 4 ч. въ нед., по понед., вторн., четв. и пятн. отъ 9—10 ч.

Маг. **А. Г. Берендтсъ**, доцентъ историческаго богословія: 1) исторія догматовъ (безплатно), 5 ч. въ нед., въ первые 5 дней недѣли отъ 7—8 ч.; — 2) практическія занятія по церковной исторіи (безплатно), по 1 ч. въ нед., который будетъ назначенъ впослѣдствіи.

Маг. **В. Л. Бергманъ**, приватъ-доцентъ экзегетическаго богословія: практическія занятія по экзегезѣ, по 1 ч. въ нед., который будетъ назначенъ впослѣдствіи.

Маг. **I. А. Фрей**, приватъ-доцентъ экзегетическаго богословія:

Евангеліе отъ Іоанна (продолженіе) и 1-ое посланіе отъ Іоанна, 3 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи.

## II. Юридическій Факультетъ.

Докт. **П. П. Пустороелевъ,** ординарный профессоръ уголовнаго права, Деканъ: 1) уголовное право (общая часть), 6 ч. въ нед., по понед. и сред. отъ 12—2 ч. и по четв. отъ 4—6 ч.; — 2) уголовное судоустройство, 3 ч. въ нед., по вторн. отъ 4—6 и по пятн. отъ 12—1 ч.

Докт. **И. Е. Энгельманъ,** заслуженный ординарный профессоръ русскаго гражданскаго права и судопроизводства: практическія занятія по гражданскому праву, для студентовъ IV курса (необязательно, безплатно), по 1 ч. въ нед., по субб. отъ 6—7 ч.

Докт. **А. Н. Филипповъ,** ординарный профессоръ государственнаго права: русское государственное право, 6 ч. въ нед., по вторн., четв. и субб. отъ 12—2 ч.

Маг. **М. Н. Красноженъ,** испр. должн. ординарнаго профессора церковнаго права: 1) введеніе (источники церковнаго права). Система церковнаго права. I. Внѣшнее право церкви. II. Внутреннее право церкви (церковное устройство), 4 ч. въ нед., по четв. и пятн. отъ 4—6 ч.; — 2) практическія занятія (необязательно, безплатно), 2 ч. въ нед., по субб. отъ 4—6 ч.

Маг. **М. А. Дьяконовъ,** испр. должн. ординарнаго профессора исторіи русскаго права: 1) исторія русскаго права, 6 ч. въ нед., въ первые 3 дня недѣли отъ 4—6 ч.; — 2) практическія занятія (необязательно, безплатно), 2 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи.

Маг. **Е. В. Пассекъ,** экстраординарный профессоръ римскаго права: догма римскаго права, ч. I, 6 ч. въ нед., по понед., сред. и пятн. отъ 12—2 ч.

Маг-нтъ **А. Ф. Зачинскій,** испр. должн. экстраординарнаго профессора энциклопедіи права: 1) энциклопедія права, 4 ч. въ нед., по вторн., сред., четв. и пятн. отъ 10—11 ч.; — 2) занятія и бесѣды по общей теоріи права (безплатно), 2 ч. въ нед., по понед. и субб. отъ 10—11 ч.

Маг-нтъ **В. М. Нечаевъ,** испр. должн. экстраординарнаго профессора русскаго гражданскаго права и судопроизводства: 1) русское гражданское право, ч. I, для студентовъ 5-го семестра, 3 ч. въ нед., по понед., вторн. и сред. отъ 5—6 ч.; — 2) русское гражданское право, ч. II, для студентовъ 7-го семестра, 3 ч. въ нед., по четв., пятн. и субб. отъ 5—6 ч.; — 3) русское гражданское судопроизводство, 3 ч. въ нед., по понед., сред. и пятн. отъ 6—7 ч.

Маг-нтъ **А. С. Невзоровъ,** испр. должн. экстраординарнаго профессора торговаго права: 1) русское торговое право, 4 ч. въ нед., по вторн. и четв. отъ 12—2 ч.; — 2) практическія занятія, 2 ч. въ нед. по пятн. отъ 1—3 ч.

Маг. **А. Н. Миклашевскій,** экстраординарный профессоръ политической экономіи и статистики: 1) политическая экономія (исторія политической экономіи), 4 ч. въ нед., по вторн. и четв. отъ 12—2 ч.; — 2) статистика (теорія статистическаго метода), 2 ч. въ нед., по понед. отъ 10—12 ч.

Маг. **А. С. Кривцовъ,** экстраординарный профессоръ римскаго права: 1) исторія римскаго права, 6 ч. въ нед., въ послѣдніе 3 дня недѣли отъ 4—6 ч.; 2) догма римскаго права, ч. III (семейное и наслѣдственное право), 2 ч. въ нед., по понед. и вторн. отъ 6—7 ч.; — 3) практическія занятія по римскому праву, для студентовъ 5-го и 6-го семестровъ, по 1 ч. въ нед., по сред. отъ 6—7 ч.

Маг. **Н. Н. Бѣлявскій,** экстраординарный профессоръ полицейскаго права: 1) полицейское право, 4 ч. въ нед., по вторн. и сред. отъ 10—12 ч.; — 2) университеты (необязательно), по 1 ч. въ нед., по четв. отъ 10—11 ч.

Маг-нтъ **В. Э. Грабарь,** испр. должн. доцента международнаго права, объявитъ свои лекціи по прибытіи въ Юрьевъ.

Маг-нтъ **О. И. Остроградскій,** приватъ-доцентъ финансоваго права, объявитъ свои лекціи по прибытіи въ Юрьевъ.

## III. Медицинскій Факультетъ.

Докт. **А. С. Игнатовскій,** ординарный профессоръ государственнаго врачебновѣдѣнія, Деканъ: 1) курсъ судебной медицины, для студентовъ 7-го семестра, 4 ч. въ нед., по понед. отъ 10—12 ч., по сред. отъ 6—7 ч. и по субб. отъ 10—11 ч.; — 2) практическія занятія, вскрытія труповъ, 2 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи.

Докт. **Б. А. Керберъ,** ординарный профессоръ государственнаго врачебновѣдѣнія: школьная гигіена (спеціальный курсъ, безплатно), по 1 ч. въ нед., по субб. отъ 5—6 ч.

Докт. **Э. П. Рельманъ,** ординарный профессоръ офталмологіи и офталмологической клиники: клиническія лекціи по общей офталмологіи съ поликлиническими демонстраціями, 6 ч. въ нед., ежедневно отъ 11—12 ч.

Докт. **А. С. Рауберъ,** ординарный профессоръ анатоміи: 1) анатомія человѣка, ч. II, 6 ч. въ нед., ежедневно отъ 8—9 ч.; — 2) приготовленіе анатомическихъ препаратовъ, ежедневно отъ 9—1 и отъ 3—6 ч.; — 3) занятія на препаратахъ и моделяхъ, 2 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи.

Докт. **К. К. Дегіо,** ординарный профессоръ спеціальной патологіи и клиники: 1) госпитальная клиника, 9 ч. въ нед., ежедневно отъ $9^1/_2$—11 ч.; — 2) избранныя главы общей терапіи (необязательно), по 1 ч. въ нед., по субб. отъ 5—6 ч.

Докт. **В. В. Кохъ,** ординарный профессоръ хирургіи и хирургической клиники: хирургическая клиника и поликлиника, 12 ч. въ нед., первая для студентовъ IV-го курса, 6 ч. въ нед., по вторн., четв. и субб. отъ 12—2 ч. и вторая для студентовъ V-го курса, 6 ч. въ нед., по понед., сред. и пятн. отъ $9^1/_2$—$11^1/_2$ ч.

Докт. **В. Ф. Чижъ,** ординарный профессоръ психіатріи: 1) клиника и поликлиника нервныхъ и душевныхъ болѣзней, для студентовъ V-го курса, 4 ч. въ нед., по сред. отъ 4—6, а остальные 2 часа будутъ назначены впослѣдствіи; — 2) судебная психіатрія, для студентовъ III и IV-го курсовъ (безплатно, необязательно), 2 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи.

Докт. **С. М. Васильевъ,** ординарный профессоръ спеціальной патологіи и клиники: 1) клиническія лекціи, 6 ч. въ нед., по вторн., сред. и четв. отъ 9—11 ч.; — 2) теоретическій курсъ частной патологіи и терапіи, ч. II, 4 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи.

Докт. **В. А. Афанасьевъ,** ординарный профессоръ общей патологіи и патологической анатоміи: 1) общая патологія, 4 ч. въ нед., по вторн., сред., четв. и пятн. отъ 9—10 ч.; — 2) частная патологическая анатомія, ч. I, 4 ч. въ нед., въ тѣ же самые дни отъ 10—11 ч.; — 3) практическій курсъ патологической гистологіи, 2 ч. въ нед., по субб. отъ

10—12 ч.; — 4) практическія упражненія въ патологическомъ институтѣ (безплатно), ежедневно отъ 9—6 ч.

Докт. **В. П. Курчинскій**, ординарный профессоръ физіологіи: 1) физіологія, 6 ч. въ нед., по вторн., сред. и четв. отъ 11—1 ч.; — 2) физіологическая химія, 4 ч. въ нед., по сред. и четв. отъ 2—3 ч. и по пятн. отъ 11—1 ч.; — 3) практическія занятія по физіологической химіи (безплатно), 7 ч. въ нед., по вторн. отъ 2—5 ч. и по сред. и четв. отъ 3—5 ч.

Маг. **И. Л. Кондаковъ**, испр. должн. ординарнаго профессора фармаціи: 1) фармакогнозія, для медиковъ и фармацевтовъ 3-го семестра, 3 ч. въ нед., по понед. отъ 11—12 ч. и по субб. отъ 9—11 ч.; — 2) фармацевтическая химія, для фармацевтовъ 3-го семестра, 5 ч. въ нед., въ первые 5 дней недѣли отъ 10—11 ч.; — 3) практическія занятія по качественному анализу: а) для медиковъ, 3 ч. въ нед., по пятн. отъ 2—5 ч. и б) для фармацевтовъ 1-го семестра, 5 ч. въ нед., по вторн. отъ 2—4 ч. и по пятн. отъ 2—5 ч.; — 4) лекціи по судебной химіи, для фармацевтовъ 3-го семестра, 3 ч. въ нед., по вторн., сред. и пятн. отъ 11—12 ч.

Докт. **С. І. Чирвинскій**, ординарный профессоръ фармакологіи, діэтетики и исторіи медицины: фармакологія: а) для студентовъ-медиковъ, 6 ч. въ нед., по понед. отъ 9—11 ч., по сред. отъ 11—1 ч. и по субб. отъ 8—10 ч. и б) для фармацевтовъ, часы будутъ назначены впослѣдствіи.

Докт. **Н. К. Чермакъ**, ординарный профессоръ сравнительной анатоміи, эмбріологіи и гистологіи: 1) гистологія и эмбріологія, съ практическими занятіями и демонстраціями, для студентовъ-медиковъ II-го курса, 6 ч. въ нед., по вторн., сред. и четв. отъ 9—11 ч.; — 2) сравнительная анатомія, для студентовъ-медиковъ I и II-го курсовъ, 2 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи; — 3) гистологическая техника (безплатно), для ограниченнаго числа студентовъ 3-хъ высшихъ курсовъ, часы будутъ назначены впослѣдствіи.

Докт. **Г. В. Хлопинъ**, ординарный профессоръ государственнаго врачебновѣдѣнія: 1) теоретическій курсъ гигіены, для студентовъ IV-го курса, 4 ч. въ нед., по сред. отъ 10—12 ч. и по субб. отъ 11—1 ч.; — 2) практическія занятія, для студентовъ V-го курса, 9 ч. въ нед., по вторн., четв. и субб. отъ 12—3 ч.

Докт. **М. И. Дружининъ**, экстраординарный профессоръ хирургіи: 1) оперативная хирургія, для студентовъ III-го курса, 2 ч. въ нед., по вторн. и пятн. отъ 12—1 ч.; — 2) десмургія, для студентовъ III-го курса, по 1 ч. въ нед., по пятн. отъ 1—2 ч.; — 3) практическія занятія на трупахъ, для студентовъ IV-го курса, 4 ч. въ нед., по вторн. и пятн. отъ 4—6 ч.

Докт. **Н. А. Савельевъ**, экстраординарный профессоръ спеціальной патологіи и клиники: 1) поликлиника, для студентовъ V-го курса, 6 ч. въ нед., по понед., вторн., четв. и пятн. отъ 3—$4^1/_2$ч.; — 2) врачебная діагностика (физико-химическіе методы клиническаго изслѣдованія), для студентовъ III-го курса, 4 ч. въ нед., по сред. и субб. отъ 3—5 ч.

Докт. **А. А. Муратовъ**, экстраординарный профессоръ акушерства, женскихъ и дѣтскихъ болѣзней: 1) теоретическій курсъ акушерства и женскихъ болѣзней, 3 ч. въ нед., по вторн. и пятн. отъ $3^1/_2$—5 ч.; — 2) клиника акушерства и женскихъ болѣзней, 6 ч. въ нед., по вторн., четв. и пятн. отъ 8—10 ч.

Докт. **В. Г. Цёге фонъ Мантейфель**, экстраординарный профессоръ хирургіи: 1) госпитальная хирургическая клиника, 6 ч. въ нед., ежедневно отъ 1—2 ч.; — 2) общая хирургическая патологія, 3 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи.

Докт. **Г. А. Адольфи**, прозекторъ при анатомическомъ институтѣ: ангіологія, по 1 ч. въ нед., по сред. отъ 7—8 ч.

Докт. **А. А. Крупецкій**, приватъ-доцентъ спеціальной патологіи и клиники и ассистентъ медицинской клиники: 1) дѣтскія болѣзни (необязательно), 2 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи; — 2) клиническія изслѣдованія больныхъ, 2 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи.

## IV. Историко-филологическій Факультетъ.

Докт. **Я. Ф. Озе**, ординарный профессоръ философіи и педагогики, Деканъ: 1) гносеологія, 3 ч. въ нед., по сред., пятн. и субб. отъ 11—12 ч.; — 2) исторія новой философіи, 3 ч. въ нед., по сред., пятн. и субб. отъ 12—1 ч.

Докт. **О. Л. Вальтцъ**, ординарный профессоръ всеобщей исторіи: 1) исторія Европы съ 1815 г., 4 ч. въ нед., въ первые

4 дня недѣли отъ 3—4 ч.; — 2) практическія упражненія по исторіи, 2 ч. въ нед., по пятн. отъ 3—5 ч.

Докт. **Р. П. Мунке,** ординарный профессоръ географіи, этнографіи и статистики: 1) общая этнографія, 4 ч. въ нед., по вторн., сред., четв. и пятн. отъ 6—7 ч.; — 2) практическія упражненія по географіи и этнографіи, 2 ч. въ нед., по понед. отъ 5—7 ч.

Докт. **А. С. Будиловичъ,** ординарный профессоръ сравнительной грамматики славянскихъ нарѣчій, Ректоръ: 1) введеніе въ славянскую филологію, для студентовъ I-го курса, 2 ч. въ нед., по вторн. и четв. отъ 11—12 ч.; 2) обзоръ славянской исторіи, для студентовъ III-го курса, 2 ч. въ нед., по вторн. и четв. отъ 12—1 ч.; 3) славянскія нарѣчія, для студентовъ III-го курса, 2 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи.

Докт. **Е. В. Пѣтуховъ,** ординарный профессоръ русскаго языка въ особенности и славянскаго языковѣдѣнія вообще: 1) исторія древней русской литературы съ XI вѣка (общій курсъ), 4 ч. въ нед., по вторн. и четв. отъ 12—2 ч.; 2) введеніе въ исторію русской литературы: источники и пособія (спеціальный курсъ, съ практическими упражненіями), 2 ч. въ нед., по субб. отъ 12—2 ч.

Маг. **Е. ф. Шмурло,** испр. должн. ординарнаго профессора русской исторіи: 1) русская исторія (общій курсъ), I ч., 4 ч. въ нед., по пятн. и субб. отъ 9—11 ч. — 2) законодательные памятники Петровскаго царствованія (спеціальный курсъ), 2 ч. въ нед., по понед. отъ 9—11 ч.

Маг. **В. К. Мальмбергъ,** испр. долж. ординарнаго профессора древне-классической филологіи и археологіи: 1) исторія греческаго искусства, 4 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи 2) практическія занятія (толкованіе вазовыхъ рисунковъ), 2 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи.

Докт. **М. Н. Крашенинниковъ,** ординарный профессоръ древне-классической филологіи и исторіи литературы: 1) избранныя мѣста изъ метаморфозъ Овидія, практическія упражненія для студентовъ 1 и 3-го семестровъ, 2 ч. въ нед., по четв. отъ 4—6 ч.; — 2) Теренцій Adelphoe, практическія упражненія для студентовъ 5 и 7-го семестровъ, 2 ч. въ нед., по пятн. отъ 4—6 ч.; — 3) избранныя мѣста изъ Иліады Гомера, практическія упражненія для студентовъ 1 и 3-го семестровъ, 2 ч. въ нед., по субб. отъ 4—6.

Маг. **А. Н. Ясинскій**, экстраординарный профессоръ всеобщей исторіи: 1) исторія средневѣковаго аграрнаго строя въ Германіи (продолженіе), по 1 ч. въ нед., по вторн. отъ 12—1 ч.; — 2) латинская дипломатика (продолженіе), по 1 ч. въ нед., по вторн. отъ 1—2 ч.; — 3) общій курсъ средней исторіи (первый періодъ), 2 ч. въ нед., по сред. отъ 12—2 ч.; — 4) практическія занятія, 2 ч. въ нед., по понед. отъ 12—2 ч.

Маг. **А. В. Никитскій**, экстраординарный профессоръ древне-классической филологіи и греческихъ и римскихъ древностей: 1) общій курсъ исторіи Греціи, 3 ч. въ нед., по вторн., сред. и четв. отъ 10—11 ч.; — 2) интерпретація рѣчи Андокида περὶ μυστηρίων, 2 ч. въ нед., по вторн. и четв. отъ 11—12 ч.; 3) разборъ отдѣльныхъ вопросовъ греческой исторіи, по 1 ч. въ нед., по сред. отъ 9—10 ч.

Маг-нтъ **Д. Н. Кудрявскій**, испр. должн. экстраординарнаго профессора нѣмецкаго и сравнительнаго языковѣдѣнія: 1) сравнительная грамматика индоевропейскихъ языковъ, съ краткимъ введеніемъ, 4 ч. въ нед., по понед. и вторн. отъ 10—12 ч.; — 2) краткій курсъ санскритскаго языка, съ практическими занятіями (продолженіе), 2 ч. въ нед., по сред. отъ 10—12 ч.

Докт. **Л. К. Мазингъ**, доцентъ русскаго языка и литературы: 1) грамматика древне-церковно-славянскаго языка, ч. I (ученіе о звукахъ), 2 ч. въ нед., по понед. и четв. отъ 5—6 ч.; — 2) древне-русскіе тексты, 2 ч. въ нед., по вторн. и пятн. отъ 5—6 ч.

Маг. **А. М. Придикъ**, доцентъ древне-классической филологіи: 1) греческій синтаксисъ, 2 ч. въ нед., по вторн. отъ 4—6 ч.; — 2) Плутархъ «Θεμιστοκλῆς» (практическія упражненія), 2 ч. въ нед., по сред. отъ 4—6 ч.

Докт. **В. Ф. Шлютеръ**, приватъ-доцентъ нѣмецкаго и сравнительнаго языковѣдѣнія: готскій языкъ (необязательно, безплатно), 2 ч. въ нед., по пятн. отъ 5—7 ч.

Маг. **Я. И. Лаутенбахъ**, приватъ-доцентъ сравнительнаго языковѣдѣнія и лекторъ латышскаго языка: литовскій языкъ, чтеніе и объясненіе Юшкевича «Svotbine Rėda Velünýčin Lietuvin» (свадебные обряды Велёнскихъ Литовцевъ), по 1 ч. въ нед., по пятн. отъ 3—4 ч.

## V. Физико-математическій Факультетъ.

Докт. **Ф. Ю. Левинсонъ-Лессингъ**, ординарный профессоръ минералогіи, Деканъ: 1) кристаллографія, 4 ч. въ нед., въ первые 4 дня недѣли отъ 6—7 ч.; — 2) минералогія и основы геологіи, для медиковъ и фармацевтовъ, 2 ч. въ нед., по четв. и субб. отъ 12—1 ч.; — 3) петрографія, 2 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи; — 4) практическія занятія по минералогіи, 2 ч. въ нед., по субб. отъ 10—12 ч.

Докт. **Ю. Г. фонъ Кеннель**, ординарный профессоръ зоологіи: 1) общая зоологія, 6 ч. въ нед., ежедневно отъ 12—1 ч.; — 2) зоологическія демонстраціи, 2 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи; — 3) практическія упражненія по сравнительной анатоміи и гистологіи, 6 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи.

Докторъ **И. И. Лембергъ**, ординарный профессоръ минералогіи: практическія упражненія по минералогіи (безплатно), 2 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи.

Докт. **А. А. Кнезеръ**, ординарный профессоръ прикладной математики: 1) аналитическая механика, ч. I, 5 ч. въ нед., въ первые 5 дней недѣли отъ 10—11 ч.; — 2) избранныя главы изъ динамики сплошныхъ массъ (безплатно), 2 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи; — 3) практическія упражненія по механикѣ, 2 ч. въ нед., по четв. отъ 4—6 ч.; — 4) дифференціальныя уравненія, ч. I, 3 ч. въ нед., по пятн. отъ 11—12 ч. и по субб. отъ 10—12 ч.

Докт. **Б. И. Срезневскій**, ординарный профессоръ физической географіи и метеорологіи: 1) метеорологія, 3 ч. въ нед., по четв. отъ 1—2 ч., и по субб. отъ 12—2 ч.; — 2) земной магнитизмъ, по 1 ч. въ нед., по сред. отъ 6—7 ч.; — 3) практическія занятія, 2 ч. въ нед., по субб. отъ 10—12 ч.

Докт. **Г. Г. Тамманъ**, ординарный профессоръ химіи: 1) неорганическая химія, 5 ч. въ нед., въ первые 5 дней недѣли отъ 10—11 ч.; — 2) физическая химія, ч. I, 2 ч. въ нед., по четв. и пятн. отъ 12—1 ч.; — 3) аналитическія упражненія и практическія занятія, 6 ч. въ нед., ежедневно отъ 11—12 ч.

Докт. **Г. В. Левицкій,** ординарный профессоръ астрономіи: 1) общій курсъ астрономіи, 4 ч. въ нед., по понед. и вторн. отъ 12—2 ч.; — 2) теоретическая астрономія, 2 ч. въ нед., по сред. отъ 12—2 ч.; — 3) практическія занятія по сферической астрономіи, 2 ч. въ нед., по четв. отъ 6—8 ч.

Маг. **А. И. Садовскій,** экстраординарный профессоръ физики: 1) общій курсъ физики, ч. I, 5 ч. въ нед., въ первые 5 дней недѣли отъ 11—12 ч.; — 2) термодинамика, 3 ч. въ нед., по понед., сред. и пятн. отъ 9—10 ч.; — 3) физическая лабораторія, только для студентовъ 5-го семестра, группа В, 6 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи.

Маг-нтъ **С. К. Богушевскій,** испр. должн. экстраординарнаго профессора сельскаго хозяйства и технологіи: 1) почвовѣдѣніе, 2 ч. въ нед., по понед. отъ 12—2 ч.; — 2) сельско-хозяйственная экономія, 4 ч. въ нед., по сред. и пятн. отъ 12—2 ч.

Маг. **Н. И. Кузнецовъ,** экстраординарный профессоръ ботаники: 1) общій курсъ ботаники, для естественниковъ, агрономовъ, химиковъ, медиковъ и фармацевтовъ 1-го семестра, 6 ч. въ нед., по вторн., сред., четв. и пятн. отъ 9—10 ч. и по субб. отъ 9—11 ч.; — 2) курсъ практическихъ занятій по систематикѣ растеній, по группамъ, по 2 ч. въ нед., по субб. отъ 11—5 ч.; — 3) спеціальный курсъ ботаники (избранныя главы изъ анатоміи и физіологіи растеній), для всѣхъ натуралистовъ и агрономовъ 3-хъ старшихъ курсовъ, 2 ч. въ нед., по понед. отъ 9—11 ч.; — 4) коллоквіумъ, разборъ новѣйшей или классической литературы по ботаникѣ (безплатно), 2 ч. въ нед., по четв. отъ 6—8 ч.

Маг. **В. Г. Алексѣевъ,** экстраординарный профессоръ чистой математики: 1) аналитическая геометрія, ч. I, для математиковъ и химиковъ 1-го семестра, 4 ч. въ нед., по вторн. и четв. отъ 9—10 ч. и по субб. отъ 9—11 ч.; — 2) геометрическія приложенія дифференціальнаго исчисленія, для математиковъ 3-го семестра, 3 ч. въ нед., по вторн. и четв. отъ 10—11 ч. и по субб. отъ 11—12 ч.

Докт. **Н. И. Андрусовъ,** экстраординарный профессоръ минералогіи: 1) динамическая геологія, 3 ч. въ нед., по четв. отъ 9—11 ч. и по субб. отъ 9—10 ч.; — 2) историческая геологія, 3 ч. въ нед., по пятн. отъ 9—11 ч. и по субб. отъ 10—11 ч.; — 3) палеонтологія, по 1 ч. въ нед., по понед. отъ 1—2 ч.; — 4) практическія занятія по палеонтологіи, 2 ч. въ нед., которые будутъ назначены впослѣдствіи.

Докт. **П. П. Граве,** экстраординарный профессоръ чистой математики: 1) введеніе въ анализъ и теорія опредѣлителей, для студентовъ 1-го семестра, 3 ч. въ нед., по понед., вторн. и пятн. отъ 12—1 ч.; — 2) интегральное исчисленіе, ч. I, для студентовъ 3-го семестра, 3 ч. въ нед., по понед., вторн. и пятн. отъ 11—12 ч.

Докт. **А. Н. Сѣверцовъ,** экстраординарный профессоръ зоологіи: 1) сравнительная анатомія и эмбріологія позвоночныхъ животныхъ, 5 ч. въ нед., по понед. и вторн. отъ 10—12 ч. и по сред. отъ 10—11 ч.; — 2) практическія занятія по зоотоміи, 3 ч. въ нед., по понед. отъ 12—1 ч. и по сред. отъ 11—1 ч.; — 3) коллоквіумъ (безплатно), по 1 ч. въ нед., который будетъ назначенъ впослѣдствіи.

Докт. **Ѳ. Э. Молинъ,** доцентъ чистой математики: 1) элементарная математика, 3 ч. въ нед., по понед., сред. и пятн. отъ 9—10; — 2) начала механики, для студентовъ химическаго отдѣленія, 3 ч. въ нед , по вторн., сред. и пятн. отъ 5—6 ч.

Маг-нтъ **К. Д. Покровскій,** астрономъ-наблюдатель: практическія упражненія по практической астрономіи, 2 ч. въ нед., по понед. и четв. отъ 7—8 ч.

Маг. **А. И. Томсонъ,** приватъ-доцентъ сельскаго хозяйства и технологіи: 1) технологія, 4 ч. въ нед., въ первые 4 дня недѣли отъ 9—10 ч.; — 2) кормовыя средства, 2 ч. въ нед., по пятн. и субб. отъ 9—10 ч.; — 3) практическія занятія, для студентовъ агрономіи 5-го и слѣдующихъ семестровъ, 6 ч. въ нед., ежедневно отъ 10—11 ч.

## VI. Профессоръ богословія для студентовъ православнаго исповѣданія.

Маг. **А. С. Царевскій,** протоіерей: богословіе, 6 ч. въ нед., по понед., сред. и пятн. отъ 9—10 ч., а остальные 3 часа будутъ назначены впослѣдствіи.

## VII. Уроки по языкамъ и искусствамъ.

Маг. **Я. И. Лаутенбахъ,** лекторъ латышскаго языка и приватъ-доцентъ сравнительнаго языковѣдѣнія: 1) латышская грамматика, по 1 ч. въ нед., по понед. отъ 3—4 ч.; — 2) чтеніе латышскихъ писателей съ литературно-историческимъ введеніемъ (продолженіе), по 1 ч. въ нед., по вторн. отъ 3—4 ч.; — 3) репетиторій латышскаго синтаксиса и письменныя работы на латышскомъ языкѣ, 2 ч. въ нед., по сред. отъ 3—5 ч.

Докт. **А. М. Германъ,** лекторъ эстонскаго языка: 1) исторія древней эстской литературы, по 1 ч. въ нед., по четв. отъ 5—6 ч.; — 2) грамматика эстскаго языка, по 1 ч. въ нед., по пятн. отъ 4—5 ч.; — 3) этимологическія и синтактическія объясненія, съ чтеніемъ эстскихъ и финскихъ текстовъ, по 1 ч. въ нед., по пятн. отъ 5—6 ч.

**С. И. Роше,** лекторъ французскаго языка: 1) теоретическій курсъ французской грамматики, по 1 ч. въ нед., по понед. отъ 6—7 ч.; — 2) чтеніе, переводъ и толкованіе французскихъ авторовъ, по 1 ч. въ нед., по вторн. отъ 6—7 ч.; — 3) практическія занятія (французскій разговорный языкъ), по 1 ч. въ нед., по сред. отъ 6—7 ч.; — 4) переводъ съ русскаго языка на французскій, по 1 ч. въ нед., по четв. отъ 6—7 ч. — 5) этимологія французскаго языка, (изслѣдованіе корней), по 1 ч. въ нед., по пятн. отъ 6—7 ч.; — 6) исторія французской литературы XVII столѣтія, по 1 ч. въ нед., по субб. отъ 6—7 ч.

**А. Г. Пунга,** учитель гимнастическихъ упражненій: гимнастическія упражненія, 2 ч. въ нед., по понед. и четв. отъ 7—8.

**Для обученія механическимъ работамъ** предполагаетъ свои услуги испр. должн. университетскаго механика П. В. Шульце.

## VIII. Принадлежащія къ составу Университета учебныя заведенія и музеи.

**Въ клиникахъ** будутъ обучать директоры оныхъ, а именно: въ медицинской проф. Васильевъ, въ хирургической проф. Кохъ, въ акушерской и гинекологической проф. Муратовъ, въ офталмологической проф. Рельманъ, въ клиникѣ нервныхъ и душевныхъ болѣзней проф. Чижъ, въ поликлиникѣ проф. Савельевъ и въ университетскомъ отдѣленіи городской больницы проф. Дегіо.

**Университетская библіотека,** которою завѣдываетъ въ качествѣ директора проф. Шмурло, открыта въ теченіи семестра ежедневно, кромѣ воскресныхъ и праздничныхъ дней, отъ 10—2 ч., а во время вакацій, за исключеніемъ воскресныхъ и праздничныхъ дней, ежедневно отъ 12—2 ч.

**Директоромъ музея изящныхъ искусствъ** состоитъ проф. Мальмбергъ, **музея отечественныхъ древностей** (вак.), **астрономической обсерваторіи** проф. Левицкій, **фармацевтическаго института** проф. Кондаковъ, **химическаго кабинета** проф. Тамманъ, **физическаго кабинета** проф. Садовскій, **математическаго кабинета** проф. Кнезеръ, **экономическаго кабинета и лабораторіи для сельско-хозяйственной химіи** проф. Богушевскій, **минералогическаго кабинета** проф. Левинсонъ-Лессингъ, **геологическаго кабинета** проф. Андрусовъ, **зоологическаго музея** проф. фонъ Кеннель, **зоотомическаго музея** проф. Сѣверцовъ, **ботаническаго сада** проф. Кузнецовъ, **метеорологической обсерваторіи** проф. Срезневскій, **анатомическаго института** проф. Рауберъ, **института сравнительной анатоміи** проф. Чермакъ, **физіологическаго института** проф. Курчинскій, **патологическаго института** проф. Афанасьевъ, **гигіеническаго кабинета** проф. Хлопинъ, **фармакологическаго института** проф. Чирвинскій, **судебно-медицинскаго института** проф. Игнатовскій, **коллекціи предметовъ по библейской и церковной археологіи** проф. Квачала, **статистическаго кабинета** проф. Мукке, **кабинета оперативной хирургіи** проф. Дружининъ.

# Задачи для соисканія наградъ на 1899 годъ.

## I. Отъ богословскаго факультета:

1. „Jom Jahve у пророковъ".
2. „Ученіе Меланхтона о свободѣ воли въ его развитіи".
3. Проповѣдь на текстъ: „Посланіе I къ Коринѳянамъ, гл. 3, ст. 22 и 23" (съ подробно обоснованною въ экзегетическомъ и гомилетическомъ отношеніяхъ диспозиціею).

## II. Отъ юридическаго факультета:

1. По русскому государственному праву: „Сравнительный очеркъ русскихъ земскихъ учрежденій по „Положеніямъ" о нихъ 1864 и 1890 годовъ".
2. По мѣстному гражданскому праву: „Имущественныя отношенія между супругами по мѣстному праву Прибалтійскихъ губерній".

## III. Отъ медицинскаго факультета:

1. „Условія образованія и выдѣленія химозина".
2. „Терапевтическое въ тѣсномъ смыслѣ слова леченіе рака (carcinoma ventriculi etc); изложить прежніе и новѣйшіе способы леченія".
3. „Явленія въ ядрѣ клѣтки, сопутствующія процессу фиброплазіи" (вторично).

Для соисканія медали Сенатора фонъ Брадке:

4. „Развитіе и современное состояніе ученія о патологическихъ измѣненіяхъ при спинной сухоткѣ".

Для соисканія медали Князя Суворова:

5. „Подвергнуть критическому разбору литературу о составныхъ частяхъ спорыньи и провѣрить выводы изъ него экспериментально-химически".

Для соисканія медали Креславскаго:

6. Изслѣдованіе продуктовъ распада сантонина, получаемыхъ при окисленіи".

На 1900 годъ:

Для соисканія медали Князя Суворова:

7. „Изслѣдованіе русскаго ланолина".

Для соисканія медали Креславскаго:

8. „Химическое изслѣдованіе вератрина".

## IV. Отъ историко-филологическаго факультета:

1. „Адамъ Мицкевичъ, какъ поэтъ и публицистъ, въ связи съ обстоятельствами его жизни, съ литературными и общественными теченіями и съ русско-польскими отношеніями его времени".
2. „Сочиненіе Фульхерія Шартскаго, какъ источникъ для внутренней и внѣшней исторіи Іерусалимскаго королевства".

## V. Отъ физико-математическаго факультета:

По метеорологіи: „О компенсаціи аномалій погоды на основаніи наблюденій во всѣхъ частяхъ свѣта".

*Изъ лабораторіи Юрьевскаго фармацевтическаго института.*

# По поводу правильностей окисленія непредѣльныхъ соединеній марганцовокаліевой солью.

И. Кондакова.

J. Kondakow; Ueber die Gesetzmässigkeiten bei der oxydation ungesättigter Verbindungen mit Permanganat.

Journal für praktische Chemie. Bd. 59, 287.

Занимаясь въ послѣднее время выясненіемъ строенія синтезированныхъ моимъ способомъ [1]) различныхъ полимерныхъ олефиновъ — октиленовъ, декиленовъ, додекиленовъ и т. п. — я, между прочимъ, остановился на окисленіи ихъ перманганатомъ, такъ какъ этотъ методъ въ ряду другихъ считается „самымъ надежнымъ" для опредѣленія строенія вообще непредѣльныхъ соединеній.

Однако при собственныхъ моихъ изслѣдованіяхъ, а также перечитывая обширную литературу, касающуюся окисленія такихъ соединеній, — литературу, особенно обогатившуюся за послѣднее время, — мнѣ пришлось обратить вниманіе на такіе факты, которые говорятъ скорѣе не въ пользу надежности указаннаго метода и мало гармонируютъ съ основными положеніями метода окисленія непредѣльныхъ соединеній перманганатомъ.

Методъ окисленія непредѣльныхъ соединеній упомянутымъ окислителемъ, какъ извѣстно, опирается на слѣдующихъ двухъ основныхъ положеніяхъ.

Первое изъ нихъ уже съ 1888 года и по настоящее время, горячо поддерживаемое Е. Е. Вагнеромъ [2]), можно форму-

---

1) Ж. Р. Ф. Х. О. 28, 784; Journal für prakt. Chemie 1896, 442.

2) Berichte 21, 1230, 3343—3360; 24, 3488; 28, 1636. Подробную справку по этому вопросу можно найти въ статьяхъ на русскомъ языкѣ и въ диссертаціи „къ реакціи окисленія непредѣльныхъ углеродистыхъ соединеній". Варшава 1888 г.

лировать такъ: ко всякому непредѣльному соединенію при окисленіи его перманганатомъ въ нейтральномъ растворѣ присоединяется по мѣсту многократной связи столько водныхъ остатковъ, сколько можетъ присоединиться къ нему атомовъ брома или сколько нужно для перехода его въ предѣльное соединеніе. Образовавшееся такимъ путемъ новое соединеніе подвергается дальнѣйшему окисленію по схемамъ соотвѣтствующихъ предѣльныхъ соединеній.

Второе положеніе, высказанное одновременно съ первымъ тѣмъ-же изслѣдователемъ, гласитъ, что при окисленіи непредѣльныхъ соединеній перманганатомъ не происходитъ ни перегруппировокъ, ни гидратацій, ни дегидратацій окисляемыхъ соединеній.

Изъ этихъ положеній по своей важности, пожалуй, слѣдуетъ поставить на первомъ планѣ второе, такъ какъ при несостоятельности его, хотя бы лишь отчасти, „самый методъ опредѣленія строенія былъ бы обезцѣненъ“ [1]) и вмѣстѣ съ тѣмъ утратилась бы возможность опредѣлить и мѣсто нахожденія многократной связи въ данномъ окисляемомъ непредѣльномъ соединеніи, а слѣдовательно и первое положеніе потеряло бы свою силу и значеніе.

Оба эти основныхъ положенія съ самаго момента ихъ зарожденія, какъ и въ данную минуту, не всѣми изслѣдователями одинаково раздѣляются.

Такъ напр. А. М. Зайцевъ [2]), повидимому, и по сіе время по этому вопросу продолжаетъ придерживаться того взгляда, который онъ высказалъ еще въ 1885 г. и который еще раньше высказывался мимоходомъ Цейдлерами [3]), Тиманомъ [4]), а впослѣдствіи подробнѣе былъ развитъ Эльтековымъ [5]).

Согласно этому взгляду при окисленіи непредѣльныхъ соединеній перманганатомъ сначала присоединяется къ нимъ по мѣсту многократной связи атомъ или атомы кислорода и

---

1) Ж. 28, 60.

2) Journal für prakt. Chemie. 1886, 300.

3) Liebig's Ann. 197, 743.

4) Berliner Berichte 11, 665.

5) „Матеріалы по вопросу о молекулярныхъ перемѣщеніяхъ этиленныхъ углеводородовъ и предѣльныхъ спиртовъ“. Харьковъ 1884 г. Диссертація.

затѣмъ къ образовавшейся уже такимъ путемъ окиси присоединяется вода [$>O + H_2O$.]

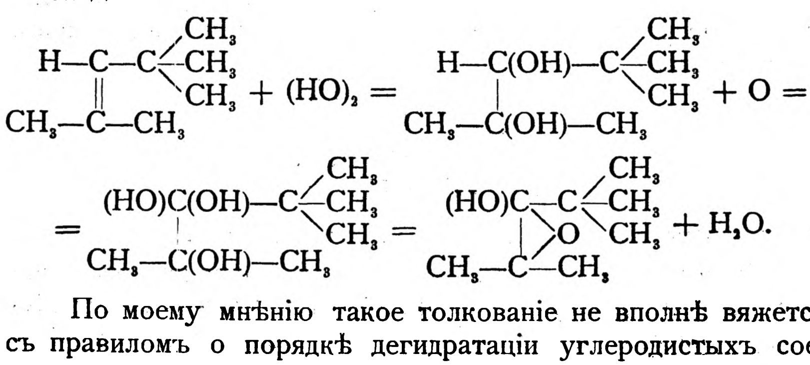
Этотъ взглядъ былъ признанъ неправильнымъ впервые **Вагнеромъ**, главнымъ образомъ потому, что предполагаемыхъ первоначальныхъ продуктовъ окисленія — окисей еще ни разу не пришлось констатировать при этой реакціи.

Какъ бы ни казался убѣдительнымъ такой доводъ Вагнера, нельзя не считаться однако и съ вѣскимъ противъ него возраженіемъ: если нѣкоторыя готовыя окиси и притомъ извѣстнаго строенія гидратируются, дѣйствительно, трудно, то нельзя того же сказать относительно окисей, образующихся въ моментъ реакціи окисленія.

Едва ли можно оспаривать то, что въ этомъ послѣднемъ случаѣ окиси должны гидратироваться несравненно легче, чѣмъ окиси уже готовыя.

Но по мимо этого, по моему мнѣнію, есть и другое основаніе признавать первыми продуктами окисленія непредѣльныхъ соединеній именно окиси. Я разумѣю здѣсь образованіе оксоктенола при окисленіи изодибутилена перманганатомъ.[1])

Образованіе этого и по сіе время загодочнаго соединенія, какъ извѣстно, объясняется Вагнеромъ[2]) такъ: одинъ изъ компонентовъ изодибутилена — диметилтретичнобутилэтиленъ при окисленіи перманганатомъ, присоединяя два гидроксила по двойной связи, даетъ гликолъ, который затѣмъ, окислившись въ тріокись и отщепивъ частицу воды, переходитъ въ оксоктенолъ. Слѣдующая схема выражаетъ это объясненіе:

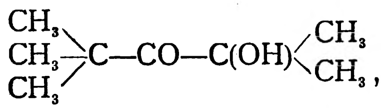


По моему мнѣнію такое толкованіе не вполнѣ вяжется съ правиломъ о порядкѣ дегидратаціи углеродистыхъ сое-

1) Бутлеровъ, Ж. Р. Ф. Х. О. 9, 38; 14, 199.
2) „Къ реакція окисленія . . . 50.

диненій, содержащихъ два гидроксила при одномъ атомѣ углерода.

Въ силу этого общепринятаго правила надо бы было ждать при дегидратаціи вышеприведенной тріокиси окси-кетона

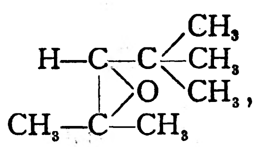


а не оксоктенола.

Почему въ этомъ случаѣ наблюдается отклоненіе отъ этого правила дегидратаціи, для меня не совсѣмъ ясно, тѣмъ болѣе, что подъ извѣстныя исключенія изъ этого правила этотъ случай подвести невозможно.

Но вмѣстѣ съ этимъ при принятіи объясненія Вагнера вышеприведенное второе положеніе объ отсутствіи дегидратацій при окисленіи перманганатомъ теряетъ свою надежность, такъ какъ, допуская дегидратацію съ образованіемъ окиси, мы, въ сущности, не имѣемъ основанія отрицать и всякій иной способъ выдѣленія воды при окисленіи.

Принимая во вниманіе вышеуказанныя обстоятельства и считая доказаннымъ изслѣдованіями Бутлерова[1]), В. Мейера[2]) и Вагнера строеніе оксоктенола, было бы правдоподобнѣе образованіе его при окисленіи изодибутилена перманганатомъ объяснять согласно Эльтековскимъ представленіямъ, тѣмъ болѣе, что такое толкованіе нисколько не уступаетъ по вѣроятности толкованію Вагнера, а именно: диметилтретичнобутилэтиленъ при этомъ присоединяетъ атомъ кислорода по мѣсту двойной связи и даетъ окисъ такого состава



которая уже окисляется далѣе въ оксоктенолъ.

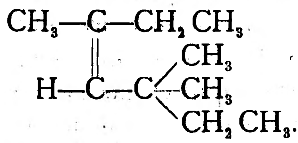
Кромѣ того представляется полная возможность такое толкованіе и провѣрить. Стоило-бы для этого къ изодибутилену присоединить хлорноватистую кислоту и отъ обра-

1) Ж. Р. Ф. Х. О. 9, 38; 14, 199.

2) Berichte 16, 1622.

зовавшагося затѣмъ хлоргидрина отнять хлористый водородъ, а полученную окись окислить перманганатомъ.

Правильность такого толкованія я надѣюсь подтвердить и другимъ путемъ — окисленіемъ ближайшаго къ диметилтретичнобутилэтилену аналога (одного изъ декиленовъ) со строеніемъ



Переходя теперь къ оцѣнкѣ второго положенія, приведеннаго въ началѣ, объ отсутствіи перегруппировокъ, гидратацій и дегидратацій при окисленіи непредѣльныхъ соединеній марганцевокаліевой солью, мы можемъ и противъ него привести не меньше возраженій, чѣмъ противъ перваго положенія.

Оставляя пока въ сторонѣ вопросъ о перегруппировкахъ, за отсутствіемъ какихъ либо указаній на возможность ихъ при указанномъ выше методѣ окисленія, мы скажемъ нѣсколько словъ лишь на счетъ гидратацій и дегидратацій.

Возможность такихъ осложненій въ условіяхъ окисленія различныхъ углеродистыхъ соединеній перманганатомъ на основаніи тѣхъ или другихъ соображеній допускалась еще Бутлеровымъ, а въ настоящее время въ лицѣ Тимана, Ейнгорна, Густавсона и другихъ мы имѣемъ сторонниковъ такого взгляда. Отрицать правдоподобность этого взгляда, по моему мнѣнію, нельзя по слѣдующимъ соображеніямъ.

Во-первыхъ потому, что мы гидратацію и дегидратацію признаемъ и постоянно допускаемъ, какъ только дѣло касается объясненія образованія того или иного соединенія, разсматриваемаго какъ продуктъ дальнѣйшаго распаденія любого окисляемаго непредѣльнаго соединенія. Въ подобныхъ случаяхъ мы допускаемъ и такую гидратацію, которая ведетъ не только къ расщепленію предѣльнаго соединенія на болѣе простыя, но даже и къ размыканію циклическихъ соединеній. Однимъ словомъ, мы при надобности не стѣсняемся допускать и такіе случаи гидратаціи, которыхъ и воспроизвести на самомъ дѣлѣ въ настоящее время не въ силахъ.

Допуская все это въ случаяхъ, не поддающихся опытной провѣркѣ, мы вмѣстѣ съ тѣмъ отрицаемъ безъ достаточныхъ основаній гидратацію непредѣльныхъ соединеній, соединеній, какъ извѣстно, гидратирующихся и кислотами, и щелочами, и солями во много разъ легче предѣльныхъ и при томъ гидратація которыхъ воспроизводится на опытѣ. Стало быть a priori отрицать гидратацію и дегитратацію непредѣльныхъ соединеній, особенно растворимыхъ въ водѣ, въ условіяхъ окисленія ихъ перманганатомъ въ силу вышеуказанныхъ соображеній значило бы противорѣчить себѣ.

Кромѣ того насъ принуждаютъ признавать подобную гидратацію еще и нѣкоторые факты, изъ числа которыхъ могу указать напр. на образованіе экгонина при окисленіи перманганатомъ ангирдоэкгонина.

Извѣстно, что Ейнгорнъ [1]) при окисленіи чистаго ангидроэкгонина названнымъ окислителемъ, въ условіяхъ указанныхъ Вагнеромъ, получилъ кромѣ діоксиангидроэкгонина и кислотъ еще и экгонинъ, который, конечно, могъ образоваться здѣсь, какъ полагалъ и самъ Ейнгорнъ, только на счетъ гидратаціи ангидроэкгонина [2]).

Образованіе экгонина изъ этого послѣдняго соединенія въ силу гидратаціи одинаково легко представить себѣ будемъ ли придавать ангидроэкгонину строеніе предложенное для него Мерлингомъ [3]), Ейнгорномъ-Тахара [4]) или весьма недавно Вильштедтеромъ [5]).

Указанныя выше соображенія я считалъ не лишнимъ изложить, такъ какъ, насколько мнѣ извѣстно, въ такой формѣ другіе изслѣдователи ихъ не высказывали. Что же касается подкрѣпленія ихъ новыми фактами, то я это постараюсь вскорѣ сдѣлать.

---

1) Berichte 21, 3035; 25, 1394.

2) Такое толкованіе Вагнеръ не признаетъ правильнымъ. Ber. 21, 3359.

3) Ibid. 24, 3108.

4) Ibid. 26, 324 и 1482.

5) Ibid. 31, 2498.

6) Окисленіе ангидроэкгонина перманганатомъ для провѣрки указаній Ейнгорна объ образованіи экгонина производится въ моей лабораторіи ассистентомъ моимъ г. Шиндельмейзеромъ.

# Обзоръ дѣятельности Ботаническаго Сада

Императорскаго Юрьевскаго Университета

за 1898 годъ.

---

Директора Сада, Проф. **Н. И. Кузнецова.**

---

**§ 1. Личный составъ.** Въ личномъ составѣ Сада произошли слѣдующія перемѣны: допущенный къ исполненію должности главнаго садовника А. Мурьянъ перешелъ на службу въ Императорскія Таврическія Оранжереи въ Петербургѣ, а на мѣсто главнаго садовника назначенъ былъ вольнослушатель Юрьевскаго Университета М. К. Ѳедосѣевъ, два года занимавшійся подъ моимъ руководствомъ спеціально систематикой и географіей растеній въ Юрьевскомъ Ботаническомъ Саду и знакомый съ садоводствомъ изъ личной практики. — Служителю Ботаническаго Кабинета, должность коего учреждена была въ прошломъ году, жалованіе повышено, постановленіемъ Правленія съ 12 на 15 р. ежемѣсячно, изъ спеціальныхъ средствъ Университета. — Вслѣдствіе неоднократныхъ ходатайствъ моихъ о необходимости учрежденія при Юрьевскомъ Ботаническомъ Садѣ персонала сторожей для охраненія имущества Сада отъ поврежденій, расхищеній, пожаровъ и другихъ несчастныхъ случаевъ, Правленіемъ Университета ассигновано было изъ спеціальныхъ средствъ Университета съ начала 1898 года по 6 р. въ мѣсяцъ на наемъ сторожа.

**§ 2. Ремонты и постройки.** Въ исторіи Ботаническаго Сада за 1898 годъ крупное явленіе составляетъ ассигнованіе изъ суммъ Государственнаго Казначейства 10,000 р. на постройку новаго Ботаническаго Кабинета, по смѣтѣ и плану составленнымъ въ 1896 г. по моимъ указаніямъ бывшимъ университетскимъ архитекторомъ Р. Ф. Гулеке (см. Обзоръ за 1896 г. стр. 7). Въ іюнѣ мѣсяцѣ приступлено было, согласно новой смѣтѣ, перечисленной архитекторомъ г. Пфейферомъ и подъ его руководствомъ, къ постройкѣ и къ осени отчетнаго года зданіе возведено было подъ крышу и выполнено вчернѣ. Въ такомъ видѣ приняты были работы отъ подрядчика Штальмейстера строительной комиссіей, состоящей изъ гг. Ректора, Декана Физико-Мат. Факультета и Директора Ботаническаго Сада, а окончательная отдѣлка зданія отложена до строительнаго періода 1899 года.

Вслѣдствіе перестройки Ботаническаго Кабинета пришлось въ теченіе 1898—99 учебнаго года значительно сократить практическія занятія и спеціальныя научныя работы по ботаникѣ, а инвентарь Ботаническаго Кабинета — гербарій, библіотеку, предметы для практическихъ занятій, временно размѣстить по другимъ помѣщеніямъ Ботаническаго Сада, а именно въ квартирахъ директора, помощника директора и въ аудиторіи. Гербарій временно помѣщенъ былъ въ квартирѣ директора, гдѣ и занимались нѣкоторые спеціалисты, библіотека и микроскопы переведены были въ квартиру помощника директора, гдѣ происходили въ теченіе осенняго семестра 1898 г. практическія занятія по анатоміи растеній со студентами старшихъ курсовъ. Практическія занятія по систематикѣ въ теченіе осенняго семестра 1898 г. совсѣмъ не могли происходить, за неимѣніемъ подходящаго помѣщенія.

Что касается ремонтовъ остальныхъ зданій Ботаническаго Сада, то на нихъ испрашивалась сумма въ размѣрѣ 5000 р. Однако и въ этомъ году Правленіе Университета не нашло возможнымъ ассигновать всей потребной на ремонты суммы, и, назначивъ на ремонты 1898 года лишь 500 р., предоставило Дирекціи Сада право произвести ремонтныхъ работъ до 1000 р. съ тѣмъ, чтобы покрыть перерасходы эти изъ могущихъ быть остатковъ отъ штатныхъ суммъ Университета, или изъ спеціальныхъ средствъ 1899 года.

Въ отчетномъ году произведены были поэтому самые необходимые ремонты, а именно:

1. Крупный ремонтъ произведенъ былъ въ большой холодной оранжереи, гдѣ починена была вся стеклянная крыша оранжереи, пришедшая въ ветхость и угрожавшая провалиться зимою 1898—99 года, при сильномъ снѣгопадѣ. Эту крышу слѣдовало бы перестроить совсѣмъ заново, но, за неимѣніемъ средствъ, новой крыши сдѣлать нельзя было, а потому пришлось ограничиться болѣе или менѣе возможной починкой старой крыши, что конечно, хотя обошлось и дешевле, но не такъ прочно и сравнительно не надолгое время,

чѣмъ устройство новой крыши. Однако этимъ самымъ удалось отсрочить радикальную перестройку крыши большой холодной оранжереи еще лѣтъ на пять.

2. Уже въ прошломъ году (1897), для уменьшенія сырости въ квартирѣ директора устроенъ былъ дренажъ близъ дома директора. Ввиду того, что дренажъ этотъ оказалъ нѣкоторую пользу, система дренажа въ отчетномъ году была увеличена, для чего представился удобный случай постройки новаго Ботаническаго Кабинета, примыкающаго къ зданію директора. При кладкѣ фундамента для Ботаническаго Кабинета одновременно проложена была подъ будущимъ зданіемъ Ботаническаго Кабинета цѣлая сѣть дренажныхъ трубъ, дабы осушить мѣстность, прилегающую къ директорскому дому. При этомъ обнаружилось крайне высокое стояніе грунтовой воды и можно безъ преувеличенія сказать, что домъ директора Ботаническаго Сада, расположенный въ самой низкой части Сада у пруда, прямо стоитъ на болотѣ. Немудрена поэтому та сырость, которая ощущается въ квартирѣ директора, и для окончательнаго искорененія которой слѣдовало бы проложить дренажную систему не только близъ директорскаго дома, но и подъ нимъ. Но для этого въ распоряженіи Дирекціи Сада средствъ совершенно не имѣется, а потому приходится дальнѣйшія мѣры къ осушенію квартиры директора отложить на болѣе или менѣе продолжительный срокъ.

3. Отремонтирована была прачешная, квартиры садовника, ассистента, произведены были необходимѣйшие ремонты въ помѣщеніяхъ рабочихъ и въ аудиторіи. Въ послѣднюю проведено было въ этомъ году газовое освѣщеніе, обошедшееся въ 202 р. 55 к. До сего времени аудиторія освѣщалась керосиновыми лампами.

4. Мелкіе текущіе ремонты произведены были въ оранжереяхъ: разводочной, пальмовой и большой холодной.

5. Произведены были ремонты въ квартирѣ директора — бѣлили потолки, ставили новыя обои, красили полы. Штукатурка потолка въ залѣ директора обвалилась и пришлось потолокъ чинить заново.

6. Отчасти отремонтирована была крыша директорскаго дома.

Всего въ текущемъ году ремонтовъ произведено было на сумму 938 р. 46 к.

За неимѣніемъ средствъ пришлось отремонтировать лишь часть квартиры директора и не всю квартиру главнаго садовника, и эти ремонты отложены на будущее время. Откладываемый изъ года въ годъ капитальный ремонтъ крыши директорскаго дома и въ этомъ году, за неимѣніемъ средствъ, долженъ былъ быть отложенъ. Но такъ какъ крыша уже пришла въ такую ветхость, что въ одной комнатѣ въ теченіе текущаго лѣта во время продолжительныхъ дождей сильно протекло, такъ что даже попортились вещи директора, то пришлось мѣстами обшить крышу заново желѣзомъ, воспользовавшись при этомъ свободнымъ листовымъ желѣзомъ со старой крыши бывшаго Ботаническаго Кабинета.

Изъ главнѣйшихъ необходимыхъ, но за неимѣніемъ средствъ отложенныхъ ремонтныхъ работъ Ботаническаго Сада, надо указать на ближайшую очередь: радикальную передѣлку крыши директорскаго дома, продолженіе дренажной сѣти вокругъ и подъ директорскимъ домомъ, основательный ремотъ стеклянныхъ стѣнъ пальмовой[1]) и холодной оранжереи, и частью стеклянной крыши пальмовой оранжереи, ремонтъ забора по Широкой улицѣ и главныхъ воротъ Сада; заборъ пришелъ по Широкой улицѣ въ такую ветхость, что уже частью обрушивается.

**§ 3. Охрана Сада.** Охрана Сада находится почти въ такомъ же положеніи, какъ и въ предъидущіе годы. Правда, съ 1898 года Правленіе ассигновало на наемъ сторожа 6 р. въ мѣсяцъ, но такъ какъ на эту сумму нанять сторожа нельзя, въ распоряженіи же Дирекціи Сада совершенно нѣтъ лишнихъ средствъ для найма сторожей, то пришлось должность сторожа совмѣстить съ должностью рабочаго Сада. Ассигнуя изъ суммъ Сада добавочное содержаніе сторожу, Дирекція Сада принуждена частью пользоваться имъ въ качествѣ сторожа, частью же въ качествѣ рабочей силы, кото-

---

1) Въ 1896 году произведенъ былъ капитальный ремонтъ крыши пальмовой оранжереи, но при этомъ два боковыхъ крыла оставлены безъ ремонта, такъ какъ могли еще продержаться нѣкоторое время. Въ настоящее время они уже тоже приходятъ въ ветхость, равно какъ и стеклянныя стѣны. Слѣдовало бы, во избѣжаніе дорогихъ ремонтовъ, устроить желѣзныя оранжереи, вмѣсто нынѣ существующихъ деревянныхъ.

рой такъ мало въ Саду, за неимѣніемъ средствъ держать большій персоналъ рабочихъ. Дальнѣйшее улучшеніе системы охраны Сада является одной изъ насущныхъ потребностей будущаго.

**§ 4. Посѣщеніе Сада.** Въ текущемъ году, кромѣ обычныхъ, пускаемыхъ по билетамъ, посѣтителей Сада, надо отмѣтить студентовъ старшаго курса Лѣсного Института въ Петербургѣ, посѣтившихъ весною сего года Юрьевскій Ботаническій Садъ во главѣ со своимъ Директоромъ проф. Н. С. Шафрановымъ и проф. дендрологіи В. Я. Добровлянскимъ. Объясненія цѣнныхъ коллекцій Сада посѣтившимъ гостямъ давались Директоромъ Сада и помощникомъ его Н. А. Бушемъ.

Въ концѣ отчетнаго года Ботаническій Садъ Юрьевскаго Университета посѣтилъ г. Министръ Народнаго Просвѣщенія Н. П. Боголѣповъ, причемъ Директоромъ доложено было г. Министру о важнѣйшихъ нуждахъ Сада.

**§ 5. Коллекціи Сада.** Въ текущемъ году коллекціи Сада продолжали пополняться и приводиться въ надлежащій порядокъ.

**Растенія оранжерейныя.** Коллекція оранжерейныхъ растеній въ отчетномъ году увеличилась частью полученіемъ живыхъ растеній отъ другихъ учрежденій въ даръ или въ обмѣнъ, частью же и путемъ покупки.

Отъ Императорскаго Ботаническаго Сада въ Петербургѣ, присылавшаго неоднократно живыя растенія Юрьевскому Ботаническому Саду уже въ прошлые годы, получена была, благодаря просвѣщенному содѣйствію Директора этого Сада, заслуженнаго профессора А. А. Фишера-фонъ Вальдгейма новая цѣнная коллекція живыхъ растеній, частью оранжерейныхъ, частью для открытаго воздуха. Всего отъ Императорскаго Ботаническаго Сада въ отчетномъ году получено было 78 растеній, изъ которыхъ особенно интересны: Dasylirion glaucophyllum Hook., D. serratifolium Zucc., Pandanus laevis Lour., P. Linnaei Gaudich., Phajus punctatus, Pseudophoenix Sargenti Wendl., Thunia alba Reichb. f., Vitiphoenix filifera Becc.

Отъ Харьковскаго Ботаническаго Сада, благодаря содѣйствію проф. Рейнгардта, получено было 16 растеній, изъ которыхъ особенно интересны: Apicra spiralis Baker, Eryngium eburneum Decne., Phoenix rupicola T. Anders., Senecio succulentus D. C.

Отъ Одесскаго, Московскаго и Краковскаго Ботаническихъ Садовъ Юр. Бот. Садъ получилъ въ отчетномъ году цѣнныя коллекціи печеночныхъ мховъ.

Весьма интересную коллекцію суккулентовъ получилъ Юрьевскій Ботаническій Садъ въ даръ отъ частнаго Ботаническаго Сада La Mortala въ Италіи[1]). Изъ этой коллекціи упомянемъ слѣдующія растенія: Apicra pentagona Willd., Cereus rostratus Lem., Crassula lycopodioides L., Cr. quadrifida Baker, Euphorbia Bertheloti Bolle, Fourcroya Bedinghausii C. Koch, Globulea canescens Haw., Kalanchoe marmorata Bak., Kleinia Anteuphorbium D. C., Kl. neriifolia Haw., Stapelia bufonia Jacq., St. variegata L.

Но въ особенности интересная коллекція суккулентовъ пріобрѣтена была Юрьевскимъ Ботаническимъ Садомъ отъ Гааге и Шмидта въ Эрфуртѣ. Тутъ прежде всего надо упомянуть такіе интересные кактусы, весьма важные для демонстрацій на лекціяхъ какъ по общему курсу ботаники, такъ и по спеціальной систематикѣ, какъ Anhalonium fissuratum Engelm. и Leuchtenbergia principis Fisch. Кромѣ того отъ Гааге и Шмидта пріобрѣтены были въ числѣ другихъ растеній — Mammillaria elephantidens Lem., Echinocactus myriostigma S. D., Echidnopsis Dammani Schwfth., Opuntia diademata Lem., Pelecyphora aselliformis Ehrenb., Stapelia gigantea N. E. Br.

Стремленіе Дирекціи Сада создать хорошую демонстративную для лекцій коллекцію насѣкомоядныхъ растеній однако не удалось до сихъ поръ. Хотя и были выписаны отъ Гааге и Шмидта Darlingtonia californica Torr., Cephalotus follicularis Labill., Dionaea muscipula Ellis и Sarracenia flava L., но они б. ч. пришли изъ Эрфурта въ такомъ плохомъ состояніи, что частью погибли сейчасъ же, частью вскорѣ. Вслѣдствіе письма директора Сада, отъ фирмы Гааге и Шмидта получено было извѣщеніе, что она готова весною 1899 года возмѣстить нѣкоторыя изъ этихъ растеній;

---

1) Близъ Ventimiglia въ Лигуріи, принадлежащій командору Th. Handburg.

хотя отчасти вина лежитъ не только на фирмѣ, но и на таможенныхъ нашихъ обрядностяхъ, вслѣдствіе которыхъ посылка съ столь нѣжными растеніями, требующими возможно скорой раскупорки, пролежала нѣсколько дней въ канцеляріи. Дальнѣйшей заботой Дирекціи будутъ новыя попытки завести при Юрьевскомъ Ботаническомъ Саду хорошую коллекцію насѣкомоядныхъ растеній, столь необходимыхъ для лекцій, но не легко культивируемыхъ.

Въ отчетномъ году изъ оранжерейныхъ растеній обращено было особое вниманіе на двѣ коллекціи: на коллекцію пальмъ и суккулентовъ. Для увеличенія коллекціи пальмъ возможно большимъ количествомъ видовъ были выписаны сѣмена пальмъ, какъ отъ различныхъ Ботаническихъ Садовъ, такъ и отъ торговой фирмы Бенари въ Эрфуртѣ. Наконецъ очень интересную коллекцію пальмовыхъ сѣмянъ (16 видовъ) получилъ Юрьевскій Ботаническій Садъ въ даръ отъ ботаника-путешественника В. Л. Комарова, вывезшаго коллекцію эту изъ Сингапура. Къ сожалѣнію однако большинство изъ этихъ послѣднихъ сѣмянъ оказалось невсхожими, и хорошо взошли лишь сѣмена Hyophorbe amaricaulis Mart. Отъ Бенари выписано было 8 видовъ (98 шт.) пальмъ, изъ которыхъ почти всѣ хорошо взошли. Наконецъ, сѣмена пальмъ, полученныхъ отъ различныхъ Ботаническихъ Садовъ, хотя и не отличались хорошей всхожестью, и далеко не всѣ взошли, тѣмъ не менѣе, вмѣстѣ съ сѣменами Бенари, значительно увеличили коллекцію пальмъ Юрьевскаго Ботаническаго Сада молодыми всходами. Изъ пріобрѣтенныхъ такимъ путемъ новыхъ для Сада пальмъ укажемъ въ особенности слѣдующіе интересные виды:

Kentia Canterburyana F. Muell., Sabal Adansoni Guerns., Ptychosperma Alexandrae F. Muell., Washingtonia robusta H. Wendl., Areca sapida Soland., Chamaerops excelsa Thunb., разновидности Cham. humilis L., Hyophorbe amaricaulis Mart., Cocos eriospatha Mart., Phoenix reclinata Jacq., tenuis Versch., canariensis Hort., rupicola T. Anders., paludosa Roxb.

Коллекція пальмъ провѣрена была ученымъ садовникомъ Сада М. К. Ѳедосѣевымъ; большинство пальмъ опредѣлено было вѣрно и носитъ вѣрныя названія; лишь немногія возбуждаютъ сомнѣнія въ вѣрности опредѣленій; г. Ѳедосѣевъ обратилъ вниманіе на научную постановку номенклатуры пальмъ и нѣкоторыя этикетки, имѣвшія названія садоводственныя, замѣнилъ спеціально ботаническими названіями.

Благодаря энергіи главнаго садовника г. Ѳедосѣева въ отчетномъ году приступлено было къ каталогизаціи оранжерейныхъ растеній, при чемъ каталогизація эта начата была именно съ коллекціи пальмъ. Каталоговъ оранжерейныхъ растеній предположено три: 1-й по текущимъ №№ каждой коллекціи, 2-й — по семействамъ, родамъ и видамъ и 3-й — карточный каталогъ, который долженъ войти въ общій алфавитный каталогъ всѣхъ живыхъ растеній Юрьевскаго Ботаническаго Сада. Для коллекціи пальмъ въ началѣ отчетнаго года г. Ѳедосѣевымъ составлены были всѣ три каталога. Въ эти каталоги, кромѣ Palmae включены были еще Cyclanthaceae, Pandanaceae, Cycadaceae и родъ Curculigo (изъ Amaryllidaceae). Всего въ оранжереяхъ Юрьевскаго Ботаническаго Сада оказалось 229 №№ этихъ растеній, которыя по систематическому (II.) каталогу группируются слѣдующимъ образомъ.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Palmae | 24 | рода | 58 | видовъ и | разновидностей |
| Cyclanthaceae | 2 | „ | 5 | „ | „ |
| Pandanaceae | 1 | „ | 5 | „ | „ |
| Cycadaceae | 5 | „ | 6 | „ | „ |
| Curculigo (Amaryllidaceae). | 1 | „ | 3 | „ | „ |
| Всего | 33 | „ | 77 | „ | „ |

Вторая оранжерейная коллекція, на которую обращено было особенное вниманіе въ отчетномъ году — это коллекція сочныхъ растеній — суккулентовъ. Уже въ Обзорѣ за 1897 годъ указано было, что одно изъ отдѣленій прежней орхидной оранжереи съ осени 1897 года предназначено было для культуры кактусовъ и прочихъ суккулентовъ. Коллекція кактусовъ и вообще суккулентовъ, какъ мы видѣли выше, значительно пополнилась въ отчетномъ году цѣлымъ рядомъ интересныхъ растеній, полученныхъ отъ Ботаническаго Сада La Mortala, спеціально суккулентами занимающагося, и отъ Гааге и Шмидта. Г. Ѳедосѣевъ занялся въ отчетномъ году тщательной провѣркой названій этой коллекціи, руководствуясь гл. обр. монографіей Шумана[1]) и

1) Karl Schuman. Gesamtbeschreibung der Kakteen (Monographia cactacearum).

отчасти сочиненіемъ Рюмплера. Всѣ суккуленты были пронумерованы и имъ были составлены тоже всѣ три каталога: нумерной, систематическій и карточный. Всего въ оранжереяхъ Юрьевскаго Ботаническаго Сада въ 1898 г. насчитывалось 915 №№ суккулентовъ, которые въ систематическомъ каталогѣ располагаются слѣдующимъ образомъ:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Amaryllidaceae | 2 рода | 17 вид. | Crassulaceae | 6 родовъ | 25 вид. |
| Aizoaceae | 1 „ | 5 „ | Euphorbiaceae | 1 „ | 3 „ |
| Bromeliaceae | 1 „ | 3 „ | Liliaceae | 5 „ | 33 „ |
| Cactaceae | 10 „ | 85 „ | Portulacaceae | 1 „ | 1 „ |
| Compositae | 1 „ | 3 „ | Всего | 28 „ | 165 „ |

Для остальныхъ оранжерейныхъ растеній каталогизація еще не закончена. Составлены черновые карточные каталоги для Aroideae (308 №№), Orchideae (314 №№, 43 рода, 133 вида), для остальныхъ однодольныхъ (398 №№) и начато составленіе каталога двудольныхъ растеній, причемъ уже зарегистрированы двудольныя растенія разводочной оранжереи и малой холодной.

Кромѣ пальмъ и суккулентовъ, ближайшее вниманіе обращено было въ текущемъ году на орхидеи, названія нѣкоторыхъ видовъ которыхъ провѣрены были главнымъ садовникомъ г. Ѳедосѣевымъ по монографіямъ Кренцлина и Stein'a (Orchideenbuch). Изъ интересныхъ орхидей въ отчетномъ году въ оранжереяхъ Ботаническаго Сада цвѣли слѣдующія *):

Aërides odoratum Lour.
Anectochilus Dawsonianus Low.
* Calanthe Veitchi Hort.
„ vestita Lindl.
* Cestichis (Liparis) pendula Lindl.
* Coelogyne cristata Lindl.
„ fimbriata Lindl.
* „ flaccida Lindl.
* „ speciosa Lindl.
* Cymbidium ensifolium Sw.
* „ sinense Willd.
Cypripedium Asbertoniae Hort.
„ Boxallii Reichb. f.
* „ insigne Wall.
„ longifolium Warscz. et Reichb. f.
* „ purpuratum Lindl.
„ superbiens Rchb. f.
„ venustum Wall.
* Dendrobium Farmerii Paxt.
„ Pierardi Roxb.
!! „ pulchellum Lodd.
* Epidendrum ciliare L.
Epidendrum cochleatum L.

*) Помѣченныя звѣздочкой (*) цвѣли и въ прошломъ году (1897).

Eria stellata Lindl.
Gongora galeata Rchb. f.
Haemaria discolor Lindl.
*Leptotes bicolor Lindl.
Maxillaria glaucescens Hort.
* „ tenuifolia Lindl.
*Oncidium altissimum Sw.
„ maculatum Lindl.
!! Oncidium Papilio Lindl.
„ pumilum Lindl.
„ sphacelatum Lindl.
Ornithidium densum Reichb. f.
*Pholidota imbricata Lindl.
*Thunia Marshalliana Reichb. f.
Xylobium squalens Lindl.

**§ 6. Отдѣленія воздушныхъ растеній: a) Деревья и кустарники.** Дендрологическая коллекція Юрьевскаго Ботаническаго Сада значительно пополнилась благодаря главнымъ образомъ новому щедрому дару извѣстнаго садовода Ф. Ф. Вагнера въ Туккумѣ (близъ Риги), который въ отчетномъ году 4 раза присылалъ безвозмедно Юрьевскому Ботаническому Саду саженцы различныхъ деревьевъ и кустарниковъ. Всего г. Вагнеромъ прислано Саду въ 1898 г. 43 №№ растеній въ 61 экземплярѣ. Изъ нихъ особенно интересны: коллекція разновидностей Fagus sylvatica L., обширная коллекція (22 №№) гибридныхъ формъ Diervilla, между которыми особенно интересенъ новый гибридъ D. Wagneri mihi (D. florida Sieb. et Zucc. × D. Middendorfiana Carr.), полученный г. Вагнеромъ искусственнымъ опыленіемъ лѣтъ шесть назадъ. Гибридъ этотъ въ отчетномъ году въ первый разъ цвѣлъ и г. Вагнеръ, приславъ экземпляръ его въ даръ Юрьевскому Ботаническому Саду, просилъ меня составить описаніе этой новой формы. Таковое описаніе, равно какъ и рисунокъ, были составлены и отправлены въ Берлинъ, для напечатанія въ Журналѣ „Gartenflora“, гдѣ и появятся въ 1-й половинѣ 1899 года. Названіе этого гибрида дано мною въ честь знаменитаго курляндскаго садовода г. Вагнера.

Весьма цѣнныя коллекціи живыхъ растеній и между ними и древесныхъ, получилъ Садъ въ текущемъ году отъ Императорскаго Ботаническаго Сада въ Петербургѣ и въ особенности отъ Я. К. Кессельринга, тоже уже неоднократно посылавшаго въ даръ Юрьевскому Ботаническому Саду интересныя и рѣдкія растенія. Изъ этихъ растеній въ особенности интересны нѣкоторыя хвойныя, обогатившія Pinetum Сада и нѣкоторыя Rhododendron'ы (Rh. Przewalskii Maxim., Rh. Ungerni Trautv. и др.).

**б) Травы многолѣтнія и однолѣтнія.** Коллекція травянистыхъ растеній также за отчетный годъ значительно обогатилась вслѣдствіе цѣнныхъ пожертвованій Императорскаго Ботаническаго Сада въ Петербургѣ и Я. К. Кессельринга. Благодаря пожертвованію послѣдняго значительно увеличилось и обогатилось отдѣленіе альпійскихъ растеній (Alpinetum) такими интересными растеніями, какъ Wulfenia carinthiaca Jacq., Swertia connata Schrenk, Trillium'ы (3 вида), Romanzoffia sitchensis Bong., Orchis (6 вид.), Incarvillea (3 вида), Cypripedium (6 вид.), Cornus canadensis L. и C. suecica L. и др. Далѣе Alpinetum обогатился въ этомъ году интересными растеніями, выписанными Юрьевскимъ Ботаническимъ Садомъ отъ извѣстнаго садоваго заведенія, спеціально занимающагося культурою альпійскихъ растеній — Sündermann'a (Lindau, Bayern). Отъ Sündermann'a Ботаническій Садъ выписалъ 20 видовъ рѣдкихъ альпійскихъ растеній, между которыми упомянемъ Asphodeline Balansae J. Gay, 4 вида Gentiana, Galanthus cilicicus, Horminum pyrenaicum L., Michauxia Tchichatcheffii Fisch. et Heldr., Ramondia pyrenaica Rich., Ornithogalum Hausknechtii и др.

Если мы къ этимъ растеніями, полученнымъ частью въ даръ, частью за деньги, присоединимъ такіе рѣдкіе виды, какъ Leontice altaica Pall., полученную въ большомъ количествѣ экземпляровъ отъ С. К. Ѳедосѣева изъ Николаева (Херсонской губ.), L. Smirnowii Trautv., присланную Л. Ф. Млокосѣвичемъ изъ Кахетіи, Calypso borealis Salisb., полученную тоже въ большомъ количествѣ экземпляровъ изъ Перми отъ П. В. Сюзева и Cypripedium calceolus L. отъ Н. И. Борщова изъ Черниговской губ., то общее заключеніе будетъ то, что за отчетный годъ (1898) Юрьевскій Ботаническій Садъ обогатился весьми рѣдкими и цѣнными видами живыхъ растеній, какъ оранжерейныхъ, такъ и на открытомъ воздухѣ культивируемыхъ.

Что касается провѣрки этикетокъ наружныхъ растеній, то въ отчетномъ году опредѣленіемъ живыхъ растеній наружной культуры гл. образомъ занимался опять таки М. К. Ѳедосѣевъ, провѣрившій опредѣленія многихъ растеній Кавказскаго и Систематическаго отдѣленій. Мною провѣрено было всего 74 растенія и нѣсколько видовъ А. В. Ѳоминымъ и Н. А. Бушемъ. Такая задержка въ провѣркѣ опредѣленій живыхъ растеній въ текущемъ году, по сравненію съ предшествующими годами, объясняется тѣмъ, что и г. Ѳоминъ, и я уѣзжали этимъ лѣтомъ на Кавказъ, и изъ научнаго персонала Сада на лѣто оставались въ Саду лишь помощникъ директора Сада Н. А. Бушъ и ученый садовникъ М. К. Ѳедосѣевъ, изъ которыхъ послѣдній и занимался дѣятельно все лѣто провѣркою опредѣленій растеній.

Что касается каталогизаціи наружныхъ культуръ Сада, то важнѣйшая работа произведена была уже въ прошломъ году, какъ о томъ и сказано въ Отчетѣ за прошлый годъ. Въ текущемъ году нѣкоторые каталоги были вторично провѣрены и въ нихъ внесены соотвѣтствующія измѣненія.

Карточный каталогъ Юр. Бот. Сада, какъ для растеній наружныхъ, такъ и для оранжерейныхъ въ значительной мѣрѣ готовъ; онъ написанъ еще вчернѣ, но провѣренъ для большинства отдѣленій Сада, распредѣленъ по алфавиту и возможенъ для пользованія. Наружныя растенія въ текущемъ году всѣ соотвѣтственнымъ образомъ занумерованы.

**§ 7. Акклиматизація растеній.** Не разъ указывалось мною на весьма важное значеніе Юрьевскаго Ботаническаго Сада въ дѣлѣ акклиматизаціи растеній. Крайне скудныя средства Юрьевскаго Ботаническаго Сада не позволяютъ пока поставить дѣло это на широкую ногу, но, принимая во вниманіе важность вопроса этого для нашего отечества, мною возбуждено ходатайство объ ассигнованіи особой суммы для расширенія означеннаго дѣла, а пока, насколько позволяютъ скудныя средства Сада, предприняты нѣкоторые болѣе интересные опыты акклиматизаціи растеній въ Юрьевѣ, напр. надъ Ginkgo biloba L., Taxus baccata L., Fagus sylvatica L., Carpinus Betulus L., Vitis vinifera L. и др. Предварительные результаты этихъ опытовъ и наблюденій изложены въ небольшой статьѣ на нѣмецкомъ языкѣ и опубликованы въ Bot. Centr. за 1899 годъ №№ $^{5}/_{7}$. Изъ опытовъ этихъ особенно интересно, что въ Юрьевскомъ Ботаническомъ Саду перезимовалъ въ зиму 1897/98 г. виноградъ (конечно подъ прикрытіемъ) и Ginkgo biloba L. Букъ обыкновенный однако погибъ, а грабъ растетъ довольно слабо. Дальнѣйшія наблюденія надъ разновидностями бука и надъ ихъ отношеніемъ къ здѣшнимъ климатическимъ условіямъ можно будетъ произвести, благодаря пожертвованію Ф. Ф. Вагнера, приславшаго Саду осенью 1898 года цѣнную коллекцію буковыхъ разновидностей и формъ.

**§ 8. Біологическія группы.** Въ отчетномъ году, по выработанному мною плану, начато было устройство главнымъ садовникомъ г. Ѳедосѣевымъ біологическихъ группъ, по примѣру таковыхъ въ нѣкоторыхъ заграничныхъ Ботаническихъ Садахъ. Вполнѣ закончена была первая довольно обширная группа — ліанъ, въ которой растенія въ свою очередь распредѣлены были на растенія вьющіяся, лазящія при помощи усиковъ — метаморфозированныхъ листьевъ или усиковъ — метаморфозированныхъ стеблевыхъ образованій, итд. Кромѣ того заложены были, но пока лишь вчернѣ, группы растеній съ различными приспособленіями для распространенія сѣмянъ и плодовъ по земной поверхности, группы растеній съ различными приспособленіями для защиты ихъ отъ нападенія животныхъ, группа солончаковыхъ растеній, группа растеній съ различными тератологическими и иными варьяціями листовыхъ, стеблевыхъ или цвѣточныхъ органовъ, и наконецъ группа растеній гибридныхъ, въ которой рядомъ должны помѣщаться гибридъ и произведшія его растенія. Дальнѣйшее, болѣе подробное и лучшее устройство біологическихъ группъ, отложено до слѣдующаго (1899) года. При каждой группѣ должны быть крупныя надписи съ поясненіями біологическихъ приспособленій данныхъ растеній. Надписи эти уже изготовлены для группы ліанъ и составлены, но еще не изготовлены для прочихъ біологическихъ группъ.

**§ 9. Семинарій.** Въ теченіе отчетнаго года Ботаническій Садъ въ каталогѣ своемъ отпечаталъ 1422 вида растеній (въ прошломъ году было 1260 вид., въ запрошломъ 924 вида). Онъ состоялъ въ обмѣнѣ съ 88 Ботаническими Садами (въ прошломъ году съ 77, въ запрошломъ съ 59) русскими и иностранными и получилъ отъ нихъ 2588 порцій сѣмянъ (въ прошломъ году 3315, въ запрошломъ 2778). До сихъ поръ Юрьевскій Ботаническій Садъ обмѣнивался гл. обр. съ Садами Западной Европы. Для дальнѣйшаго развитія научной и въ особенности акклиматизаціонной дѣятельности Сада весьма было бы важно вступить въ обмѣнъ съ американскими Ботаническими Садами. Въ этомъ отношеніи первый шагъ сдѣланъ былъ по отношенію къ Калифорнскому

Ботаническому Саду, отъ котораго въ текущемъ году нашъ Садъ получилъ 116 порцій сѣмянъ, и которому въ свою очередь выслалъ также рядъ различныхъ сѣмянъ. Кромѣ того въ текущемъ году Юр. Бот. Садъ состоялъ въ обмѣнѣ съ Ботаническимъ Садомъ въ Saigon (Кохинхинѣ), отъ котораго получилъ 24 №№ сѣмянъ, въ томъ числѣ и интересныя сѣмена нѣкоторыхъ пальмъ, изъ которыхъ однако далеко не всѣ взошли.

Кромѣ того Семинарій Сада обогатился въ отчетномъ году цѣннымъ пожертвованіемъ, полученнымъ отъ ботаника-путешественника В. Л. Комарова, приславшаго Саду, кромѣ вышеуказанныхъ 16 №№ сѣмянъ пальмъ изъ Сингапура, 104 №№ сѣмянъ, собранныхъ имъ въ Манчжуріи и Японіи. Сѣмена эти были высѣяны весною и дали б. ч. хорошіе всходы. Такъ какъ они были получены уже послѣ напечатанія каталога сѣмянъ, собранныхъ въ 1897 году, то Ботаническій Садъ въ отчетномъ году опубликовалъ второй, дополнительный каталогъ, куда вошло обширное собраніе сѣмянъ, полученныхъ отъ г. Комарова изъ Манчжуріи и Японіи, а равно и очень цѣнная коллекція сѣмянъ солончаковыхъ растеній, полученная отъ Д. И. Литвинова изъ Закаспійской области, изъ Асхабада. Въ главномъ каталогѣ сѣмянъ Сада, кромѣ сѣмянъ, собранныхъ въ Саду въ 1897 году, опубликованы были сѣмена, собранныя М. К. Ѳедосѣевымъ въ Херсонской губ., В. В. Марковичемъ — въ Осетіи и Н. А. Бушемъ въ Кубанской области.

Кромѣ двухъ каталоговъ сѣмянъ, Ботаническій Садъ, благодаря тому, что растенія Сада уже значительно были приведены въ извѣстность и зарегистрированы, а также благодаря энергичному веденію дѣла новымъ главнымъ садовникомъ г. Ѳедосѣевымъ, могъ выпустить еще печатный каталогъ живыхъ дублетныхъ растеній (оранжерейныхъ и наружной культуры) предлагаемыхъ въ обмѣнъ. Каталогъ этотъ разосланъ былъ русскимъ и важнѣйшимъ иностраннымъ Ботаническимъ Садамъ. Въ него вошли такія интересныя растенія, какъ Calypso borealis Salisb., полученная отъ г. Сюзева изъ Перми, Dioscorea caucasica Lipsky, собранная г. Бушемъ въ 1897 году на Кавказѣ, Leontice altaica Pall., собранная С. К. Ѳедосѣевымъ въ Херсонской губ., L. Smirnowii Trautv., полученная отъ г. Млокосѣвича изъ Кахетіи, Lilium monadelphum MB., полученная отъ г. Марковича изъ Осетіи.

Кромѣ вышеуказанныхъ сѣмянъ Ботаническій Садъ получилъ весною 1898 года цѣнную коллекцію сѣмянъ отъ Б. А. Федченко, собранную имъ въ Туркестанѣ. Отъ г. Дыбовскаго Ботаническій Садъ получилъ сѣмена Hieracium aurantiacum L. div. var., а отъ г. Ткешелашвили получены нѣкоторыя сѣмена съ Кавказа (изъ Кутаиса).

Мною собрана была лѣтомъ 1898 г. небольшая коллекція сѣмянъ въ Дагестанѣ, а А. В. Ѳоминымъ и Л. Ф. Млокосѣвичемъ въ Кахетіи. Цѣнныя коллекціи сѣмянъ присланы были въ концѣ отчетнаго года г. Марковичемъ изъ Осетіи и г. Стуковымъ изъ Нерчинска (Дауріи). Гг. Скалозубовъ, Храповицкій, Шестаковъ и Д-ръ Радде прислали также нѣкоторыя сѣмена изъ Сибири, Европейской Россіи и Кавказа.

Всѣ эти, полученныя уже въ концѣ лѣта, сѣмена высѣяны будутъ весною 1899 г. и войдутъ лишь въ каталогъ 1899 года.

Путемъ покупки Садъ пріобрѣлъ въ отчетномъ году 98 сѣмянъ пальмъ (8 видовъ) отъ Бенари изъ Эрфурта, 59 порцій сѣмянъ отъ Иммера изъ Москвы, и 10 сортовъ (1100 шт.) луковицъ гіацинтовъ и др. луковичныхъ растеній отъ Ванъ-Цантена изъ Голландіи.

**§ 10. Гербарій.** Общій Гербарій. Приведеніе въ порядокъ Общаго Гербарія въ отчетномъ году еще не закончено. Общій гербарій заключаетъ въ себѣ въ настоящее время 239 пачекъ, изъ которыхъ къ 1-му января 1899 года приведено совсѣмъ въ порядокъ было 202 пачки, а 37 пачекъ осталось еще въ прежнемъ мало доступномъ для пользованія видѣ. (Къ 1-му января 1898 г. было 239 пачекъ, изъ которыхъ 130 пачекъ было приведено въ порядокъ, а 109 оставалось еще въ прежнемъ мало доступномъ для пользованія видѣ.)

Что касается обогащенія Общаго Гербарія, то, по примѣру прошлыхъ двухъ лѣтъ, расширеніе это совершалось главнымъ образомъ путемъ пріобрѣтенія покупкою изъ за границы гербаріевъ, какъ флоръ смежныхъ съ Кавказомъ (Балканскаго полуострова, Малой Азіи, Персіи), такъ и нѣкоторыхъ другихъ, важныхъ для научной дѣятельности Сада (напр. американскихъ).

Въ отчетномъ году пріобрѣтены покупкою слѣдующіе гербаріи:

1) Отъ Бэница гербаріи изъ 1) Далмаціи и Герцеговины, 2) Босніи, Болгаріи и Сербіи, 3) изъ Болгаріи, Босніи, Греціи, Македоніи, Румыніи, Сербіи, Малой Азіи, 4) изъ Южной Америки (Чили — Buchtien), на сумму: 127 гер. мар. = 59 р. 31 к.
2) Отъ Siehe обширный гербарій изъ Киликіи (Iter Cilicicum, 1895 и 96 гг.), на сумму: 190 гер. мар. 25 пф. = 88 р. 88 к.
3) Отъ Haglundt и Köllström'а гербарій Скандинавскихъ растеній, на сумму: 40 гер. мар. = 18 р. 68 к.
4) Отъ Huter'а гербаріи 1) изъ Персіи, Курдистана, Сиріи, Палестины (Борнмюллера) и Турецкой Арменіи (Синтениса), 2) изъ Испаніи (Porta et Rigo), и нѣк. др., на сумму: . . 50 гульд. 81 кр. = 40 р. 14 к.
5) Отъ Hansen'а обширный гербарій изъ Калифорніи, на сумму: . . . . . . . . 88 долл. 54 пс. = 173 р. 66 к.

Всего на сумму 380 р. 67 к.

Кромѣ покупки, Общій Гербарій Сада увеличился значительно сухими растеніями, присланными въ даръ или въ обмѣнъ.

Цѣнное пожертвованіе сдѣлалъ Юрьевскому Ботаническому Саду проф. В. Я. Цингеръ, приславшій въ даръ Саду снова большую коллекцію растеній западно-европейскихъ, полученныхъ имъ отъ Dörfler'а.

Biltmore Herbarium присылалъ Саду вновь 3 раза сѣверо-американскія растенія, всего 419 видовъ (изъ нихъ 58 видовъ гербарія Chapman'а).

Baagoe прислалъ Саду цѣнную коллекцію Potomogeton'овъ (27 вид. въ 58 экз.).

Отъ Лѣсного Института, благодаря содѣйствію проф. И. П. Бородина, Садъ получилъ 55 видовъ африканскихъ и западно-европейскихъ растеній.

Значительное обогащеніе Общаго Гербарія Сада въ отчетномъ году проявилось также благодаря присылкѣ заграничныхъ растеній въ обмѣнъ на предлагаемые съ прошлаго (1897) года Юрьевскимъ Ботаническимъ Садомъ русскія растенія. Какъ только Юрьевскій Ботаническій Садъ опубликовалъ свой первый каталогъ дублетовъ гербарныхъ растеній (Del. I.) и сочувственные отзывы объ этомъ каталогѣ появились въ заграничной печати, такъ сейчасъ же цѣлый рядъ лицъ и учрежденій изъ заграницы обратился къ Юрьевскому Ботаническому Саду съ предложеніями и просьбою, пріобрѣсти отъ него русскія растенія или путемъ покупки, или путемъ обмѣна.

При этомъ нѣкоторыя лица присылали въ теченіе 1898 года заграничныя растенія въ большомъ количествѣ экземпляровъ для обмѣна и растенія эти войдутъ въ каталогъ 1899 года. Другія же лица присылали цѣнныя коллекціи растеній въ одномъ экземплярѣ, съ просьбою вмѣсто нихъ выслать растенія русскія.

Такимъ образомъ въ отчетномъ году Юрьевскій Ботаническій Садъ получилъ цѣнныя коллекціи:

Отъ Krebs'а изъ Вѣны герб. Алжира и герб. Испаніи.

Отъ Gandoger изъ Франціи герб. Испаніи и герб. Южной Франціи.

Отъ Palacky коллекцію мховъ и альпійскихъ растеній.

Интересныя растенія получены были также отъ Dörfler'а, Degen'а и Krebs'а изъ Австро-Венгріи, отъ Gross'а и Behrendsen'а изъ Германіи и отъ др.

Инсерація Общаго Гербарія за отчетный годъ подвинулась впередъ и значительная часть растеній Общаго Гербарія, пріобрѣтенныхъ въ 1896 и 97 гг. была уже вложена въ свои мѣста.

Русскій Гербарій. Къ концу отчетнаго года заключалъ въ себѣ 70 почекъ (къ концу предшествующаго года ихъ было 67).

Обогащеніе Русскаго Гербарія въ отчетномъ году совершалось главнымъ образомъ путемъ учрежденнаго съ

1897 года при Садѣ обмѣна растеніями, благодаря которому Русскій Гербарій Сада сильно нынѣ разрастается.

Кромѣ того цѣнныя, частью обработанныя, частью необработанныя коллекціи получилъ Садъ въ отчетномъ году отъ

гг. Гейнца — изъ Туркестана
Сѣдельникова — съ южнаго Алтая (изъ долины Нарыма)
Проф. Цингера — съ Кавказа
Марковича — съ Кавказа
Ткешелашвили — съ Кавказа
г-жи Ѳоминой — изъ Саратовской губ.
гг. Каспарсона — изъ южной Лифляндіи
Каменцева — изъ Смоленской губ.

Путемъ покупки пріобрѣтены были четыре первыхъ фасцикулы издаваемаго Академикомъ Коржинскимъ гербарія „Florae Rossicae Exiccatae“.

Ассистентъ Сада А. В. Ѳоминъ, путешествовавшій по порученію Юрьевскаго Университета и Императорскаго Русскаго Географическаго Общества въ Кахетіи собралъ тамъ обширный гербарій, часть котораго составляетъ собственность Юрьевскаго Ботаническаго Сада, другая же часть, послѣ обработки будетъ распредѣлена между Императорскимъ Ботаническимъ Садомъ въ Петербургѣ, Лѣснымъ Институтомъ и Медицинской Академіей въ Петербургѣ же.

Мною собранъ былъ гербарій въ Дагестанѣ.

**§ 11. Обмѣнъ Гербаріями.** Выпущенный въ началѣ отчетнаго года 1-й каталогъ дублетныхъ гербарныхъ растеній, предлагаемыхъ Юрьевскимъ Ботаническимъ Садомъ въ обмѣнъ на основаніи инструкціи, составленной и разосланной въ 1897 году въ количествѣ 3000 экземпляровъ, заключалъ въ себѣ 1153 вида растеній и нѣкоторыя критическія замѣтки къ видамъ въ систематическомъ или географическомъ отношеніи болѣе интереснымъ. Каталогъ этотъ, составленный на латинскомъ и русскомъ языкахъ, привлекъ къ означенному дѣлу вниманіе цѣлаго ряда лицъ не только въ Россіи, но и заграницей, и обусловилъ притокъ большого количества новыхъ гербаріевъ къ концу отчетнаго года, чѣмъ въ значительной мѣрѣ, какъ выше уже сказано, обогатились оба основныхъ гербарія Сада — Общій и Русскій, а также много внесено было въ дѣло изученія русской флоры.

Вотъ списокъ лицъ и учрежденій, принявшихъ участіе въ обмѣнѣ 97—98 года:

## I. Русскіе участники:

| | | 1897 | 1898 | |
|---|---|---|---|---|
| | | Обм. ед. | | |
| 1. | Алексѣенко | 1058 | 7019 | Кавказъ, Екатеринославъ. |
| 2. | Арсеньевъ | — | 1139 | Крымъ, Сред. и Южн. Евр. Россія, Зап. Европа. |
| 3. | Борщовъ | 445 | 419 | Черниговская губ. |
| 4. | Бот. Каб. Лѣсн. Инстит. (проф. Бородинъ) | 10976 | 3261 | Новогородск. губ., Курляндія |
| 5. | Бочаровъ | — | 913 | Кіевская губ. |
| 6. | Буржуа | 35 | 93 | Эстляндія. |
| 7. | Бушъ, А. | 1488 | 162 | Казанская губ. |
| 8. | Бѣлецкій | 730 | 774 | Казанск. губ. и др. губ. Южн. Евр. Россіи. |
| 9. | Вестбергъ | 4070 | — | |
| 10. | Виренъ | 813 | 144 | Саратовск. губ. |
| 11. | Высочинъ | — | 324 | Кавказъ. |
| 12. | Гейденъ | — | 1685 | Московск. губ. |
| 13. | Гольде | 1328 | 8090 | Крымъ. |
| 14. | Горайнъ | — | 295 | Петербургск. губ. |
| 15. | Григорьевъ | — | 2841 | Ср. и Южн. Евр. Россія. |
| 16. | Десулави | — | 6687 | Кавказъ. |
| 17. | Дыбовскій | 298 | — | |
| 18. | Ивановъ | — | 1155 | Новгор. губ. |
| 19. | Исполатовъ | 577 | 1221 | Псковск. и Астрахан. губ. |
| 20. | Карасевъ | — | 980 | Обл. Войска Донск. |
| 21. | Каспарсонъ | 343 | 554 | Лифляндія. |
| 22. | Купфферъ | 4148 | 4013 | Лифляндія и Курляндія. |
| 23. | Купцисъ | 247 | 335 | Екатериносл. губ. |
| 24. | Лакшевичъ | — | 1327 | Курляндія. |
| 25. | Марковичъ | 2024 | 27688 | Кавказъ. |
| 26. | Мержеевскіе | — | 192 | Остр. Эзель. |
| 27. | Мецъ | 311 | — | |
| 28. | Млокосѣвичъ | — | 1680 | Кавказъ. |

| | | 1897 | 1898 | |
|---|---|---|---|---|
| | | Обм. ед. | | |
| 29. | Мосоловъ . . . . | 113 | — | |
| 30. | Нерчинскій Музей (Стуковъ) . | 2242 | 18962 | Даурія. |
| 31. | Петунниковъ . | 1581 | 8488 | Сибирь, Московск. губ. |
| 32. | Пурингъ . . . . | 5007 | 7163 | Петербург. губ. |
| 33. | Рудминъ . . . . | 513 | — | |
| 34. | Скалозубовъ . . | 1654 | — | |
| 35. | Сюзевъ . . . . . | 893 | 8424 | Пермск. губ. |
| 36. | Сѣдельниковъ . | — | 504 | Алтай. |
| 37. | Ткешелашвили | 504 | — | |
| 38. | Федосѣевъ, М. . | 2543 | — | |
| 39. | Федосѣевъ, С. . | — | 1420 | Курляндія. |
| 40. | Федченко . . . . | 4424 | — | |
| 41. | Флеровъ . . . . | 1301 | — | |
| 42. | Хмѣлевскій . . . | — | 350 | Польша. |
| 43. | Цингеръ, В. . . | — | 890 | Тульск. губ. |
| 44. | Цингеръ, Н. . . | 2316 | 8137 | Кіевск. и др. губ. |
| 45. | Цибульская . . | — | 272 | Московск. губ. |
| 46. | Шарбе . . . . . | — | 343 | Лифляндія. |
| 47. | Шестаковъ . . . | 86 | 740 | Подольск. губ. |
| 48. | Энтомол. Каб. Тавр. Земства . | 1104 | — | |

Такимъ образомъ въ 1897 году Садъ состоялъ въ обмѣнѣ съ 31 участникомъ, въ 1898 г. съ 48 участниками. Изъ 31 участника прошлаго года въ этомъ году ничего не прислали 11 лицъ. Изъ 48 участниковъ нынѣшняго года впервые вступили въ обмѣнъ 17 новыхъ лицъ и того болѣе прошлогодняго на 6 лицъ.

## II. Заграничные участники.

| | | 1897 | 1898 | |
|---|---|---|---|---|
| | | Обм. ед. | | |
| 1. | Behrendsen . . . . | Не участвовали въ 1897 г. | 3596 | Сѣв. Германскія растенія. |
| 2. | Degen . . . . . . . | | 3668 | Австро-Венгерск. растенія. |
| 3. | Dörfler. . . . . . . | | 8250 | Крымскія растенія. |
| 4. | Gross . . . . . . . | | 766 | Сѣверо-Герман. растенія. |
| 5. | Krebs . . . . . . . | | 2783 | Австро-Венгерск. растенія. |

Кромѣ этихъ 5-ти заграничныхъ участниковъ, приславшихъ обширный и цѣнный матеріалъ для обмѣна изъ Германіи, Австро-Венгріи и Крыма (Dörfler), 7 заграничныхъ ботаниковъ пріобрѣли отъ Юрьевскаго Ботаническаго Сада русскія растенія путемъ покупки на сумму 107 р. 6 коп.

Кромѣ растеній, присланныхъ означенными 42 лицами и учрежденіями, въ дублетный гербарій 1898 г. вошли дублеты растеній, собранныхъ Н. А. Бушемъ въ Лифляндіи, А. В. Ѳоминымъ въ Кахетіи, мною въ Дагестанѣ и М. В. Ѳоминой въ Саратовской губерніи.

По поводу разосланныхъ въ началѣ 1898 года дублетныхъ растеній, Ботаническій Садъ получилъ отъ нѣкоторыхъ ботаниковъ (напр. отъ гг. Петунникова, Купффера, Коржинскаго и др.) весьма цѣнныя замѣчанія, поправки въ опредѣленіяхъ и дополненія.

Всѣ эти поправки, замѣчанія и дополненія, съ благодарностью принятыя Юрьевскимъ Ботаническимъ Садомъ, показываютъ, что начатое съ 1897 года дѣло обмѣна гербаріями имѣетъ не только значеніе механическаго обмѣна объектами, но дѣйствительно становится, согласно мысли учредителей обмѣна, научнымъ дѣломъ — дѣломъ обмѣна мыслями и мнѣніями по поводу критическихъ растеній русской флоры.

Для дальнѣйшаго развитія этой стороны дѣла всѣ полученныя Садомъ поправки и примѣчанія включены были въ каталогъ 1899 года, а для дальнѣйшаго расширенія изученія критическихъ формъ русской флоры были приняты 5 вышеуказанныхъ заграничныхъ участниковъ, приславшихъ главнымъ образомъ растенія двухъ смежныхъ съ Россіею флоръ — флоры сѣверной Германіи и флоры Австро-Венгріи. Участіе этихъ двухъ флоръ въ учрежденномъ при Юрьевскомъ Ботаническомъ Садѣ обмѣнѣ особенно важно, такъ какъ сравненіе русскихъ растеній съ растеніями сѣверной Германіи или Австро-Венгріи имѣетъ большое значеніе для дальнѣйшаго изученія флоры Россіи. Флора Германіи и Австро-Венгріи изучена гораздо обстоятельнѣе флоры Европ. Россіи; наши критическія формы лишь въ послѣднее время обратили на себя болѣе тщательное вниманіе со стороны русскихъ ботаниковъ, среди которыхъ особенно много въ этомъ отношеніи уже сдѣлалъ А. Н. Петунниковъ. Вотъ почему его дѣятельное участіе не только въ обмѣнѣ растеніями, но еще болѣе въ обмѣнѣ мыслями по поводу этихъ растеній принято

Юрьевскимъ Ботаническимъ Садомъ съ особою живѣйшею признательностью.

Къ концу отчетнаго года II-ой обмѣнный каталогъ Юрьевскаго Ботаническаго Сада, заключающій въ себѣ 1373 вида, т. е. на 220 видовъ болѣе прошлогодняго, снабженный многочисленными примѣчаніями, критическими замѣтками, и даже рисунками былъ готовъ и сданъ въ печать.

**§ 12. Научныя сношенія съ другими лицами и учрежденіями.** Дѣятельность по гербарію Юрьевскаго Ботаническаго Сада выразилась въ отчетномъ году не только собираніемъ и храненіемъ гербаріевъ, не только вышеописанной все расширяющейся дѣятельностью по обмѣну гербаріями, но и обработкой гербаріевъ, принадлежащихъ другимъ лицамъ и учрежденіямъ.

Съ 1896 г. при Юрьевскомъ Ботаническомъ Садѣ предпринята критическая обработка флоры Кавказа подъ моимъ руководствомъ. Работа эта начата была мною еще съ 1888 г. въ Петербургѣ. Переселившись въ концѣ 1895 года въ Юрьевъ, я не только продолжалъ работу по флорѣ Кавказа, но постарался привлечь къ ней своихъ учениковъ и помощниковъ, распредѣливъ между ними часть труда. Въ основу обработки положенъ былъ собранный мною въ 1888—90 гг. и принадлежащій Императорскому Ботаническому Саду въ Петербургѣ Кавказскій гербарій. Къ нему примкнулъ обширный гербарій Н. А. Буша, частью принадлежащій Лѣсному Институту (сборы 94—95 гг.), частью Юрьевскому Ботаническому Саду (сборы 96—97 гг.). Съ отчетнаго года въ эту же обработку вошли обширный гербарій, собранный А. В. Ѳоминымъ въ Кахетіи и гербарій, собранный мною этимъ лѣтомъ въ Дагестанѣ. Въ 1897 году г. Марковичъ прислалъ для обработки свой Чеченскій гербарій, а въ текущемъ году часть обширнаго Осетинскаго своего гербарія.

Къ этому новому матеріалу въ отчетномъ году присоединились слѣдующіе цѣнные гербаріи, присланные Юрьевскому Ботаническому Саду для временнаго пользованія и обработки:

Вслѣдствіе просвѣщеннаго отношенія Директора Императорскаго Ботаническаго Сада въ Петербургѣ заслуженнаго профессора А. А. Фишера-фонъ-Вальдгейма и благодаря любезному и предупредительному отношенію старшаго консерватора означеннаго Сада В. И. Липскаго Юрьевскій Ботаническій Садъ въ теченіе всего 1898 года постоянно получалъ для обработки необходимыя семейства обширной Кавказской коллекціи, хранящейся въ Императорскомъ Ботаническомъ Саду въ Петербургѣ, и содержащей растенія Д-ра Радде, Гогенаккера, Коленати, Байерна, кн. Масальскаго и мн. др.

Благодаря просвѣщенному отношенію и энергичной помощи того-же В. И. Липскаго, Юрьевскій Ботаническій Садъ получалъ на просмотръ также его личныя обширныя коллекціи и цѣнныя коллекціи, собранныя на Кавказѣ И. Я. Акинфіевымъ.

Благодаря просвѣщенному содѣйствію проф. И. П. Бородина, Юрьевскій Ботаническій Садъ въ теченіе всего отчетнаго года получалъ на просмотръ растенія изъ общаго и русскаго гербаріевъ Лѣснаго Института, нужныя при обработкѣ флоры Кавказа.

Благодаря содѣйствію проф. И. Н. Горожанкина и помощника его приватъ-доцента М. И. Голенкина, Юрьевскій Ботаническій Садъ получилъ для обработки обширный гербарій Полторацкаго, собранный въ Кубанской области.

Кромѣ этихъ весьма цѣнныхъ пособій Юрьевскій Ботаническій Садъ для работы своей по флорѣ Кавказа имѣлъ въ распоряженіи своемъ гербаріи Проф. Цингера, Ткешелашвили, Десулави и нѣк. др.

Въ теченіе отчетнаго года упомянутые выше гербаріи Императорскаго Ботаническаго Сада въ Петербургѣ и Лѣснаго Института присылались изъ отдѣла Corolliflorae, окончательной обработкѣ семействъ котораго посвящено было мною въ этомъ году не мало времени. По мѣрѣ обработки этихъ семействъ, соотвѣтственныя части гербаріевъ возвращались по принадлежности ихъ владѣтелямъ, съ соотвѣтственными помѣтками, сдѣланными мною.

Ассистентъ Сада А. В. Ѳоминъ въ теченіе отчетнаго года принялся за обработку Compositae Кавказской флоры, и также обрабатывалъ не только Compositae своего сбора, но отчасти и другихъ гербаріевъ. Часть Compositae гербарія проф. Цингера, обработанная А. В. Ѳоминымъ, возвращена тоже по принадлежности.

Обрабатывая такимъ образомъ Кавказскіе гербаріи, принадлежащіе другимъ лицамъ и учрежденіямъ, Юрьевскій Ботаническій Садъ въ свою очередь посылалъ свои гербаріи на обработку другимъ ботаникамъ.

Такъ виды рода Carex дублетнаго гербарія отправлены были на обработку г. Кнеукеру въ Карлсруэ (Германія) и получены отъ него обратно.

Проф. Цингеру Юрьевскій Ботаническій Садъ посылалъ на обработку нѣкоторые сибирскіе гербаріи, гербарій Гейнца, собранный въ Туркестанѣ и гербарій проф. Петцгольда тамъ-же. Гербаріи эти частью возвращены были къ концу отчетнаго года проф. Цингеромъ обратно съ соотвѣтствующими опредѣленіями и примѣчаніями.

Участіе Юрьевскаго Ботаническаго Сада въ Экспедиціи по изслѣдованію источниковъ главнѣйшихъ рѣкъ Европейской Россіи выразилось въ отчетномъ году печатаніемъ отчета А. В. Ѳомина по экскурсіи 1897 года.

Участіе Юрьевскаго Ботаническаго Сада въ изданіи популярныхъ географическихъ очерковъ различныхъ частей Россіи, подъ редакціей П. П. Семенова и В. И. Ламанскаго, выразилось въ томъ, что А. В. Ѳоминымъ былъ окончательно составленъ очеркъ по Московскому промышленному району, къ печатанію котораго и было приступлено, а студ. Гриневецкимъ заготовленъ былъ очеркъ по Уралу.

**§ 13. Музей.** Въ отчетномъ году коллекція Музея пополнилась нѣкоторыми спиртовыми препаратами, составленными ассистентомъ Сада А. В. Ѳоминымъ. Проф. Н. И. Андрусовъ пожертвовалъ Музею препаратъ Acetabularia mediterranea Strasb. et de Bary, а проф. Ф. Ю. Левинсонъ-Лессингъ препаратъ Parmelia esculenta (Манны небесной). Коллекція стѣнныхъ таблицъ пополнилась 16-ью новыми таблицами, нарисованными большею частью г. Рылемъ. Въ отчетномъ году составлены были таблицы по разноспоровымъ папоротникообразнымъ и начато было составленіе коллекціи таблицъ высшихъ цвѣтковыхъ растеній, совершенно въ Музеѣ Сада до сихъ поръ отсутсвовавшихъ. Всего нынѣ стѣнныхъ таблицъ числится въ Музеѣ 115. Кромѣ того Музеемъ пріобрѣтенъ былъ въ собственность отъ г-жи Руссовой цѣнный атласъ стѣнныхъ таблицъ Кни, который полученъ былъ покойнымъ проф. Руссовымъ въ личную собственность отъ автора и уже давно переданъ былъ имъ для пользованія Юрьевскому Ботаническому Саду.

**§ 14. Библіотека.** Библіотека Юрьевскаго Ботаническаго Сада въ отчетномъ году сильно обогатилась въ особенности благодаря двумъ весьма цѣннымъ и крупнымъ пожертвованіямъ, а именно, секретарь Императорскаго Русскаго Географическаго Общества, бывшій профессоръ ботаники Технологическаго Института въ Петербургѣ, А. В. Григорьевъ пожертвовалъ Юрьевскому Ботаническому Саду очень цѣнное собраніе книгъ ботаническаго содержанія, всего 150 №№. Среди этихъ книгъ особенно интересенъ цѣлый рядъ сочиненій по вопросу о броженіи, совершенно въ библіотекѣ Юрьевскаго Ботаническаго Сада отсутствовавшихъ; далѣе весьма цѣнны старинныя сочиненія по физіологіи растеній: Ingen-Housz, Expériences sur les végétaux. Ingen-Housz, Versuche mit Pflanzen. Hofmeister, Die Lehre von der Pflanzenzelle. Saussure, Recherches chimique sur la végétation. Boussingault, Agronomie, chimie agricole et physiologie, 5 томовъ, а также сочиненія: Bischoff, Handbuch der Terminologie und Systemkunde, 4 тома. Фаминцинъ, Обмѣнъ веществъ. Ch. Darwin, Ботаническія сочиненія, и проч.

Второе, тоже весьма цѣнное, пожертвованіе получилъ Юрьевскій Ботаническій Садъ въ отчетномъ году отъ Инспектора Студентовъ Юрьевскаго Университета М. А. Бутлерова. Имъ принесено въ даръ библіотекѣ Сада 74 №№ книгъ, изъ которыхъ особенно для Сада цѣнны работы гг. акад. Фаминцина, Крылова, проф. Гоби, Мартьянова, акад. Коржинскаго, Шелля и др.

Казанское Общество Естествоиспытателей прислало Саду въ даръ 14 №№ своихъ изданій.

Кромѣ того цѣлый рядъ цѣнныхъ книгъ и брошюръ получилъ Юрьевскій Ботаническій Садъ въ отчетномъ году въ даръ отъ проф. Андрусова, отъ проф. Бородина, отъ Д-ра Бретшнейдера (его большое, только что вышедшее сочиненіе: History of European Botanical Discoveries in China, 2 тома, съ картой), отъ гг. Л. Иванова, Клинге, Купффера, Липскаго, Медвѣдева, проф. Ростовцева, Серебряникова, Zalewsk'аго, отъ Общ. Ест. въ Ригѣ, отъ Минусинскаго и Нерчинскаго музеевъ, и др. Мною и помощниками моими (гг. Бушемъ и Ѳоминымъ) также переданы текущіе труды наши и брошюры въ даръ Саду.

Всего въ отчетномъ году библіотека Юрьевскаго Ботаническаго Сада получила 339 №№ книгъ и журналовъ, изъ нихъ 280 въ даръ и 59 за плату.

**§ 15. Чтеніе лекцій.** Въ І-мъ семестрѣ отчетнаго года мною читался общій курсъ ботаники (морфологія, анатомія и физіологія растеній), который посѣщался 262 слушателями, и спеціальный курсъ систематики и географіи растеній, который посѣщался 9 слушателями; во ІІ-мъ семестрѣ — общій курсъ ботаники (систематика), который посѣщался 160 слушателями.

**§ 16. Практическія занятія.** Въ І-мъ семестрѣ подъ моимъ наблюденіемъ велись практическія занятія по систематикѣ растеній (по опредѣленію растеній), посѣщавшіяся 166 слушателями. Занятія эти подъ моимъ руководствомъ велъ г. Ѳоминъ. Во ІІ-мъ семестрѣ велись г. Бушемъ подъ моимъ руководствомъ практическія занятія по анатоміи растеній, посѣщавшіяся 4 слушателями старшаго курса.

**§ 17. Экскурсіи и ботаническія путешествія** въ отчетномъ году носили чисто-научный характеръ.

Мною, совмѣстно съ проф. Андрусовымъ, совершена была поѣздка на собственныя средства въ Дагестанъ, для продолженія работы по флорѣ Кавказа. Начавъ съ Темиръ-ханъ-Шуры, мы прошли Дагестанъ черезъ Гимри, Хунзахъ, Гунибъ и, поднявшись въ верховья Кара-Койсу, перевалили въ Бѣлоканы и прошли въ Лагодехи, гдѣ и закончили наши изслѣдованія (геологическія и ботаническія *). Во время этого путешествія мною собраны были данныя для характеристики растительности Дагестана и отношенія ея къ растительности Кахетіи.

---

*) Въ теченіе означеннаго путешествія мы пользовались просвѣщеннымъ содѣйствіемъ и гостепріимствомъ Помощника Начальника Дагестана ген.-маіора Узбашева, Начальника Хунзахскаго Округа кап. Ашихманова и начальника Гунибскаго округа полк. Джаврова.

Растительность Кахетіи подробно и весьма обстоятельно изучена была ассистентомъ Сада А. В. Ѳоминымъ, командированнымъ въ Кахетію на средства: Совѣта, Правленія и Ботаническаго Сада Юрьевскаго Университета, на средства Императорскаго Русскаго Географическаго Общества, Императорскаго Ботаническаго Сада въ С.-Петербургѣ, Ботаническаго Кабинета Лѣсного Института и Ботаническаго Кабинета Медицинской Академіи. Всего такимъ образомъ была собрана сумма въ 501 р. 19 к. Г. Ѳоминъ пробылъ въ Кахетіи 3 мѣсяца, имѣя центральнымъ пунктомъ изслѣдованій своихъ Лагодехи, гдѣ г. Ѳоминъ получалъ цѣнныя указанія и руководство отъ такого знатока Кахетинской природы, какимъ по справедливости считается г. Млокосѣвичъ (мѣстный лѣсничій, издавна изучающій природу Кахетіи). Въ экскурсіяхъ своихъ А. В. Ѳоминъ не ограничился однако только одной Кахетіей, но и проникалъ въ Дагестанъ съ юга, а именно въ верховья Аварскаго Койсу.

Н. А. Бушъ совершилъ нѣсколько экскурсій по Лифляндіи, а именно на Святое озеро, въ окрестности Верро и въ окрестностяхъ Юрьева.

Бывшій слушатель Юрьевскаго Университета, кандидатъ ботаники, г. Вестбергъ экскурсировалъ, по ходатайству Директора Юрьевскаго Ботаническаго Сада, на средства и по порученію Императорскаго С.-Петербургскаго Общества Естествоиспытателей въ Ковенской губ.

Кандидатъ Естеств. Наукъ Юрьевскаго Университета г. Каспарсонъ продолжалъ изученіе флоры южной Лифляндіи.

Студентъ Гриневецкій продолжалъ свои экскурсіи на островѣ Эзелѣ.

Вольнослушатель Сѣдельниковъ экскурсировалъ въ Южномъ Алтаѣ, въ долинѣ р. Нарыма.

**§ 18. Коллоквіумы** со студентами, спеціально ботаникой занимающимися, продолжались въ отчетномъ году по той же программѣ, что и въ предъидущіе два года. Всего въ отчетномъ году было 11 коллоквіумовъ. Участіе въ нихъ принимало отъ 6 до 16 лицъ. Рефератовъ произнесено было 13. Въ I-мъ семестрѣ реферировались работы Варминга, Натгорста, Краснова, Блитта, Миддендорфа, Steenström'а и др. Во II-мъ семестрѣ реферировались работы Diels'а, Шульца, Ризположенскаго и др. Кромѣ того гг. Бушъ, Гриневецкій и Гавриловъ сообщили результаты своихъ собственныхъ изслѣдованій, наблюденій и литературныхъ работъ.

**§ 19. Научныя работы, произведенныя въ Юрьевскомъ Ботаническомъ Саду.** Въ теченіе отчетнаго года мною продолжалась обработка „Corolliflorae Caucasicae". Въ отчетномъ году для работы этой я имѣлъ возможность пользоваться, какъ уже выше сказано, цѣлымъ рядомъ кавказскихъ коллекцій, принадлежащихъ другимъ учрежденіямъ или лицамъ, благодаря въ особенности товарищеской помощи В. И. Липскаго, извѣстнаго знатока Кавказской флоры, а также благодаря содѣйствію проф. Фишера-фонъ Вальдгейма, Бородина и Горожанкина. Въ настоящее время Corolliflorae Caucasicae настолько уже мною обработаны, что съ будущаго года я надѣюсь приступить къ печатанію 1-го выпуска.

Кромѣ того я продолжалъ печатаніе перевода на нѣмецкій языкъ монографіи своей „Подродъ Eugentiana Kusnez., рода Gentiana Tournef.".

Въ Ежегодникѣ Географическаго Общества мною совмѣстно съ Н. А. Бушемъ отпечатанъ былъ „Обзоръ по фито-географіи Россіи за 1895—96 гг.", составленный уже въ 1897 году.

Въ Engler's Bot. Jahrbücher продалжалось печатаніе статьи „Uebersicht der in den Jahren 1891—94 über Russland erschienenen phyto-geographischen Arbeiten".

Въ Bot. Centr. помѣщены мною слѣдующія статьи:

1) Der Botanische Garten der Kaiserlichen Universität zu Jurjew (Dorpat): IV. Botanische Reisen. V. Herbarientausch.

2) Рефератъ о „Herbarium Florae Rossicae", издаваемомъ Акад. Коржинскимъ.

Въ отчетномъ году въ Ботаническомъ Кабинетѣ подъ моимъ руководствомъ происходили слѣдующія научныя работы.

Н. А. Бушъ продолжалъ обрабатывать Кавказскій гербарій, а именно семейства Papilionaceae, Berberidaceae и Fumariaceae.

Онъ-же напечаталъ въ Извѣстіяхъ Географическаго Общества отчетъ о поѣздкѣ лѣтомъ 1897 г. на Кавказъ.

Онъ-же въ Peterm. Geograph. Mitt. 1898. Hft. 12, напечаталъ статью: Vorläufiger Bericht über eine Reise in den nordwestlichen Kaukasus im Jahre 1896 zur Untersuchung der Gletscher und der Vegetation.

Онъ-же совмѣстно со мною напечаталъ въ Ежегодникѣ Географическаго Общества Обзоръ по фито-географіи растеній въ Россіи за годы 1895 и 96.

А. В. Ѳоминъ напечаталъ въ Изд. Экспед. по изслѣд. источ. главн. рѣкъ Европ. Россіи отчетъ по изслѣдованіямъ растительнаго покрова въ верховьяхъ Оки и Цона.

Онъ-же составилъ и передалъ въ печать популярный очеркъ растительности Московской промышленной области и верхняго Поволжья.

Онъ-же приступилъ къ обработкѣ собраннаго имъ на Кавказѣ гербарія и обработалъ семейства Compositae и Dipsaceae какъ своего гербарія, такъ и нѣкоторыхъ другихъ.

М. К. Ѳедосѣевъ обрабатывалъ свой Крымскій гербарій и гербарій, собранный г. Силантьевымъ на Алтаѣ.

Онъ-же напечаталъ списокъ растеній, собранныхъ проф. Шмурло на Алтаѣ.

Вслѣдствіе передѣлки Ботаническаго Кабинета спеціальныя работы по ботаникѣ должны были быть сильно ограничены какъ на этотъ годъ, такъ и на слѣдующій 1899.

Тѣмъ не менѣе и въ отчетномъ году, несмотря на тѣсноту и неудобство помѣщенія, спеціальныя научныя работы продолжались не только научнымъ персоналомъ Сада, но и студентами-спеціалистами и посторонними ботаниками.

Студ. Гриневецкій составилъ по имѣющимся литературнымъ даннымъ очеркъ растительности Урала, доложилъ о немъ мѣстному Обществу Естествоиспытателей и напечаталъ докладъ этотъ на нѣмецкомъ языкѣ въ Sitzungsbericht'ахъ Общества.

Онъ же напечаталъ въ журналѣ „Wszechswiat" рядъ рефератовъ по ботаникѣ.

Студ. Мецъ обрабатывалъ гербарій, собранный имъ въ Эстляндіи и Лифляндіи.

Студ. Каменцевъ обрабатывалъ гербарій, собранный имъ въ Смоленской губ.

Вольнослушатель Сѣдельниковъ обрабатывалъ собранный имъ на Алтаѣ гербарій.

Кандидатъ ботаники Вестбергъ обрабатывалъ собранный имъ въ Ковенской губ. по порученію Петербургскаго Общества Естествоиспытателей гербарій, пользуясь для сравненія гербаріями Юрьевскаго Ботаническаго Сада.

С. К. Өедосѣевъ обрабатывалъ гербарій, собранный имъ въ Курляндіи и занимался провѣркой нѣкоторыхъ гербаріевъ, присланныхъ Саду для обмѣна.

Н. И. Борщовъ обрабатывалъ гербарій, собранный имъ въ Черниговской губ., закончилъ обработку гербарія Донской области, собраннаго тамъ проф. Алексѣевымъ, и занимался приведеніемъ въ порядокъ Общаго Гербарія Сада.

**§ 20. Бюджетъ Ботаническаго Сада.** Неоднократныя ходатайства дирекціи объ увеличеніи скуднаго бюджета Юрьевскаго Ботаническаго Сада въ текущемъ году увѣнчались хотя и малымъ, но все же нѣкоторымъ успѣхомъ. А именно, кромѣ обычныхъ штатныхъ 2000 р. Ботаническій Садъ Юрьевскаго Университета съ нынѣшняго (1898 года) постановленіемъ Правленія имѣетъ получать ежегодно еще 300 р. добавочныхъ на нужды преподованія и Ботаническаго Кабинета. Кромѣ этихъ ежегодныхъ 300 руб. Правленіе Университета и въ этомъ году, подобно двумъ предъидущимъ, нѣсколько разъ по моимъ ходатайствамъ, ассигновывало дополнительныя суммы на нужды хозяйства Сада или на нужды Ботаническаго кабинета и преподаванія. Означенная дополнительная сумма въ отчетномъ году равнялась 890 руб.*) (въ томъ числѣ и вышеуказанная ежегодная ассигновка въ 300 р.). Наконецъ отъ продажи растеній Ботаническій Садъ выручилъ въ отчетномъ году 557 р. 77 к., т. е. на 34 р. 32 к. менѣе предъидущаго (1897) года и на 7 р. 97 к. болѣе года 1896.

Хотя таковой бюджетъ Сада и является болѣе чѣмъ ничтожнымъ, однако же дальнѣйшія заботы дирекціи Сада по возможному уменьшенію расходовъ Сада по веденію хозяйства и перенесенію остающихся свободныхъ суммъ на расходы, касающіеся нуждъ практическаго преподаванія и научныхъ потребностей института привели къ слѣдующимъ результатамъ:

---

*) Въ прошломъ (1897) году сумма эта равнялась 982 р. 53 к., а въ 1896 г. — 880 р.

# Таблица расходовъ Ботаническаго Сада.

| Годы. | Плата рабочимъ. | Содержаніе лошади и ремонтъ экипажей. | Мелкіе ремонты зданій. | Матеріалы и освѣщеніе. | Книги. | Печатаніе каталоговъ, бланокъ и т. д. | Горшки, кадки, пробки, корзины. | Сѣмена, луковицы и живыя растенія. | Почтовые и желѣзно-дорожные расходы. | Переплетчикъ. | Награда садовнику. | Мелкіе расходы. | Столярныя работы. | Гербаріи. | Этикетированіе Сада. | Учебныя пособія. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1896 Изъ штатн. и спец. средствъ Ботан. Сада. | 1491 р. 81 к. | 166 р. 59 к. | 18 р. 80 к. | 326 р. 36 к. | 2 р. 41 к. 159 м. 73 пф. | 44 р. 25 к. | 119 р. 28 к. | 97 р. 50 к. 66 м. 60 пф. | 14 р. 29 к. | — | — | 12 р. 99 к. | 66 р. 37 к. | 3 р. 8 к. | 26 к. 88 к. | — |
| 1896 Изъ сверхштатныхъ ассигновокъ Правленія. | — | — | — | — | 238 р. 56 к. 158 м. 23 пф. | — | — | — | — | 79 р. 32 к. | 50 р. | — | 142 р. 21 к. | 85 р. 51 к. | 47 р. 50 к. | 203 р. 56 к. |
| 1897 Изъ штатн. и спец. средствъ Ботан. Сада. | 1083 р. 82 к. | 245 р. 35 к. | 2 р. 20 к. | 496 р. 51 к. | — | 26 р. 96 к. | 162 р. 84 к. | 73 р. 75 к. 62 г. м. 5 пф. 108 фл. 6 цент. | 92 р. 08 к. | — | — | 12 р. 18 к. | 33 р. 92 к. | 5 р. 3 к. | 96 р. 74 к. | 115 р. 22 к. |
| 1897 Изъ сверхштатныхъ ассигновокъ Правленія. | — | 37 р. 05 к. | 14 р. 10 к. | 222 р. 28 к. | 94 м. 40 пф. 6 р. 40 к. | 12 р. 50 к. | 1 р. 20 к. | — | 10 р. 95 к. | 57 р. 70 к. | — | 85 к. | — | 35 шв. м. 181 г. м. 48 пф. 72 р. 53 к. | 4 р. 50 к. | 262 р. 97 к. 150 авст. флор. |
| 1898 Изъ штатн. и спец. средствъ Ботан. Сада. | 907 р. 29 к. | 161 р. 09 к. | 13 р. 20 к. | 158 р. 31 к. | 106 р. 91 к. 49 г. м. | 34 р. 57 к. | 222 р. 41 к. | 25 р. 63 к. 79 г. м. 50 пф. 134 фл. 22 цент. | 132 р. 18 к. | 48 р. 25 к. | — | 10 р. 70 к. | 176 р. 65 к. | 213 р. 80 к. | 156 р. 30 к. | 39 р. 10 к. |
| 1898 Изъ сверхштатныхъ ассигновокъ Правленія. | 39 р. 20 к. | — | — | 203 р. 35 к. | 96 р. 95 к. 71 г. м. 25 пф. | 28 р. 45 к. | — | — | 5 р. 61 к. | — | — | 4 р. | — | 181 р. 87 к. | — | 264 р. 65 к. |

1) Расходы по найму рабочихъ, благодаря внимательному отношенію къ дѣлу новаго главнаго садовника г. Ѳ е д о с ѣ е в а, сокращены въ текущемъ году еще на 137 р. 33 к. и доведены до суммы 946 р. 49 к. (въ 1896 г. на рабочихъ было израсходовано 1491 р. 81 к., въ 1897 г. — 1083 р. 82 к.).

2) Достигнуто было нѣкоторое сокращеніе расходовъ по содержанію лошади и закупки матеріаловъ.

3) Зато болѣе или менѣе увеличились расходы по покупкѣ книгъ, живыхъ растеній и гербаріевъ.

Однако указанныя измѣненія въ характерѣ распредѣленія суммъ Ботаническаго Сада, на первый взглядъ производящія какъ бы благопріятное впечатлѣніе, на самомъ цѣлѣ сами по себѣ имѣютъ мало значенія, во первыхъ потому, что измѣненія эти въ ту и другую сторону (т. е. въ сторону сокращенія расходовъ по хозяйственнымъ нуждамъ и увеличенія ихъ въ сторону нуждъ преподаванія и научныхъ потребностей) сами по себѣ весьма незначительны, во вторыхъ же потому, что измѣненія эти колеблются въ предѣлахъ все той же общей суммы 3500—3600 р., тогда какъ фактически Юрьевскій Ботаническій Садъ по штату имѣетъ всего 2000 рубл. Несмотря однако на то, что вотъ уже 3-й годъ, благодаря особо заботливому отношенію къ нуждамъ Юрьевскаго Ботаническаго Сада Правленія Университета, и въ особенности Ректора его А. С. Б у д и л о в и ч а и Декана Физико - Математическаго Факультета Ф. Ю. Л е в и н с о н ъ - Л е с с и н г а, вмѣсто означенной штатной суммы въ 2000 р. Ботаническій Садъ тратитъ ежегодно до 3500—3600 р., однако же и эта сумма оказывается весьма и весьма скромной, такъ что приходится вопервыхъ каждую расходуемую копѣйку ставить, такъ сказать, ребромъ, во вторыхъ же приходится означенную дополнительную сумму съ большимъ усердіемъ добывать. И тѣмъ не менѣе средствъ не хватаетъ, и тѣмъ не менѣе каждый годъ бюджетъ Сада заканчивается большимъ или меньшимъ дефицитомъ (въ размѣрѣ 300—500 рублей).

Такимъ образомъ одной изъ ближайшихъ настоятельныхъ нуждъ бюджета Юрьевскаго Ботаническаго Сада является необходимость сдѣлать бюджетъ этотъ покрайней мѣрѣ постояннымъ хотя бы относительно указанной минимальной суммы въ размѣрѣ 3500—3600 р. (Бюджетъ Московскаго

Ботаническаго Сада напримѣръ доходитъ до 5000 р. ежегодныхъ, какъ видно это изъ нѣкоторыхъ отчетовъ означеннаго Сада).

Достигнуть же такого увеличенія бюджета возможно однимъ лишь путемъ, а именно увеличеніемъ штатной суммы Ботаническаго Сада съ 2000 р. на 3000 р. и ассигнованіемъ на нужды преподаванія и Ботаническаго Кабинета, по примѣру другихъ русскихъ Университетовъ, особой суммы въ размѣрѣ отъ 500—800 рублей ежегодныхъ, на что мною уже неоднократно и указывалось.

# ТЕОРІЯ

# РАЦІОНАЛЬНЫХЪ ИНВАРІАНТОВЪ

## БИНАРНЫХЪ ФОРМЪ

въ направленіи

Софуса Ли, Кэли и Аронгольда.

**В. Г. Алексѣева,**

Э. О. Профессора ИМПЕРАТОРСКАГО Юрьевскаго Университета.

# Оглавленіе.

## Глава II.

## Совмѣстные инваріанты системы бинарныхъ формъ.

## Глава III.

## Коваріанты и контраваріанты бинарныхъ формъ.

## Глава IV.

## Различные способы построеній и преобразованій коваріантовъ бинарныхъ формъ.

## Замѣченныя опечатки.

| Стрн. | Стрк. | Напечатано: | Должно быть: |
|---|---|---|---|
| 4 | 16 св. | коваріантовъ | неприводимыхъ коваріантовъ |
| 15 | 7 св. | $f(\alpha, \gamma)\frac{\gamma^n}{n!}$ | $f(\beta, \delta)\frac{\gamma^n}{n!}$ |
| 30 | 3 св. | $\frac{\beta_1}{d_1}, \frac{\gamma_1}{d_1}$ | $\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_1}{\alpha_1}$ |
| 37 | 5 св. | $\delta F = V(F)\delta t$ | $\delta F = -V(F)\delta t$ |
| 41 | 5 сн. | $Z_1[f_2(f)]$ | $Z_1[Z_2(f)]$ |
| 45 | 14 св. | $X_3(J)$ | $-X_3(J)$ |
| 45 | 16 св. | $a_1 X_3(J)$ | $-a_1 X_3(J)$ |
| 59 | 1 сн. | $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$ | $-\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$ |
| 80 | 3 св. | $4_2{}^3 a_0$ | $4a_2{}^3 a_0$ |
| 80 | 2 сн. | $-vx_2{}^4$ | $+vx_2{}^4$ |
| 92 | 3 сн. | $J_{12}$ | $J_{21}$ |
| 93 | 1 св. | $J_{12}$ | $J_{21}$ |
| 115 | 8 св. | $+6a_2{}^2$ | $+3a_2{}^2$ |
| 150 | 3 сн. | 1 должна стоять не въ пятомъ, а въ шестомъ столбцѣ | |
| 167 | 1 сн. | 38 | 36 |
| 184 | 1 сн. | $\ldots \phi(x_1, x_2)$ | $\ldots \omega(x_1, x_2)$ |

# Введеніе.

Unzweifelhaft eignen sich die vollkommenen Methoden der Invariantentheorie sehr gut zur Behandlung vieler wichtiger Probleme meiner allgemeinen Transformationstheorie; andererseits wird aber auch die letztere für die Invariantentheorie neue Gesichtspunkte liefern.

*Sophus Lie.* (Vorrede S. VI. Bearb. von Engel. Bd. I).

Отдѣлъ математики, которому посвящена настоящая работа, зародился въ 1841 году въ изслѣдованіяхъ англійскаго математика Boole'я, обнаружившаго, что дискриминанты алгебраическихъ формъ при преобразованіи формъ посредствомъ линейныхъ подстановокъ пріобрѣтаютъ только множитель, равный степени детерминанта подстановки. Въ слѣдующемъ году этотъ же ученый показалъ, что поляры одной формы приводятъ къ функціямъ обладающимъ такимъ же свойствомъ, но содержащимъ въ себѣ кромѣ коэффиціентовъ формы также и перемѣнныя. Такимъ образомъ были получены первые инваріанты и коваріанты алгебраическихъ формъ. Затѣмъ, въ 1845 году, другой англійскій математикъ Cayley построилъ цѣлый рядъ инваріантовъ при помощи изобрѣтеннаго имъ исчисленія гипердетерминантовъ и ввелъ нѣкоторыя сокращенныя обозначенія вычисленій.

Въ 1849 году Aronhold далъ уже довольно систематичное изложеніе нѣкоторыхъ свойствъ инваріантовъ троичной формы третьей степени, а два года спустя, онъ представилъ въ философскій факультетъ Кёнигсбергскаго Университета рукописную работу, въ которой далъ общую постановку теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ. Въ этой работѣ были выведены впервые дифференціальныя уравненія инваріантовъ алгебраическихъ формъ, которыя въ 1852 году были выведены Cayley и Silvester'омъ для инваріантовъ бинарной формы и легли въ основаніе замѣчательныхъ изслѣдованій Cayley, изложеныхъ въ десяти мемуарахъ „upon Quantics"

Въ 1863 году появились въ печати изслѣдованія Aronhold'а о новой постановкѣ, лишенной всякаго произвола, теоріи инваріантовъ: разсматривая соотношенія между коэффиціентами данной формы и преобразованной посредствомъ линейной подстановки, онъ приходитъ къ заключенію, что должны существовать абсолютные инваріанты, и что число раціонально независимыхъ абсолютныхъ инваріантовъ равно числу коэффиціентовъ данной формы безъ числа коэффиціентовъ линейной подстановки. Далѣе Aronhold вывелъ дифференціальныя уравненія абсолютныхъ инваріантовъ и показалъ, что числители и знаменатели абсолютныхъ инваріантовъ суть обыкновенные инваріанты; такимъ образомъ существованіе и обыкновенныхъ инваріантовъ алгебраическихъ формъ сдѣлалось вполнѣ конкретнымъ, тогда какъ раньше было только формальное и подтверждалось лишь эмпирически — на отдѣльныхъ примѣрахъ.

Въ 1861 году Clebsch, воспользовавшись символическими обозначеніями Aronhold'а, положилъ въ основаніе своихъ изслѣдованій чисто формальное опредѣленіе инваріантныхъ функцій при помощи символовъ и различныхъ символическихъ процесовъ. Это направленіе, благодаря замѣчательнымъ изслѣдованіямъ самаго Clebsch'а, а затѣмъ — его ученика Gordan'а, быстро развилось и сдѣлалось вскорѣ господствующимъ направленіемъ въ изслѣдованіяхъ, относящихся къ теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ, по крайней мѣрѣ въ нѣмецкой литературѣ.

Въ это время въ Англіи установилось направленіе, созданное Cayley и его первымъ послѣдователемъ Silvester'омъ, который многое создалъ и самостоятельно, независимо отъ Cayley.

Англійское направленіе носило въ началѣ формальный характеръ, потому что Cayley въ основаніе его положилъ эмпирическій выводъ дифференціальныхъ уравненій инваріантовъ и коваріантовъ: Cayley разсматриваетъ такіе дифференціальные процесы, относящіеся только къ коэффиціентамъ данной формы $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, которые, будучи примѣнены къ данной формѣ, давали бы одинаковый результатъ съ процесами $x_i \frac{\partial}{\partial x_k}$; обозначивъ указанные дифференціальные процесы символомъ $\left\{x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$, онъ опредѣляетъ коваріантъ данной формы какъ функцію, цѣлую, раціональную и однородную коэффиціентовъ и перемѣнныхъ данной формы, которая удовлетворяетъ всѣмъ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\left\{x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\right\} - x_i \frac{\partial}{\partial x_k} = 0.$$

Cayley показалъ, что полученные раньше коваріанты удовлетворяютъ такимъ дифференціальнымъ уравненіямъ, но не доказалъ, что эти дифференціальныя уравненія вполнѣ характеризуютъ всѣ коваріанты алгебраической формы. Это послѣднее было доказано только Aronhold'омъ, и тогда все направленіе англійскихъ ученыхъ пріобрѣло вполнѣ прочныя матеріальныя основанія.

Въ 1856 году Cayley и Silvester показали, что бинарныя формы первыхъ четырехъ степеней имѣютъ конечное число такъ называемыхъ неприводимыхъ коваріантовъ т. е. такихъ коваріантовъ, которые не могутъ быть выражены въ цѣлыхъ раціональныхъ функціяхъ черезъ коваріанты низшихъ степеней; такимъ образомъ возникла задача (Endlichkeitsproblem) о конечности числа неприводимыхъ коваріантовъ одной или нѣсколькихъ алгебраическихъ формъ, рѣшеніемъ которой занимались многіе ученые до самаго послѣдняго времени.

Gordan первый, въ 1868 году, доказалъ конечность числа неприводимыхъ коваріантовъ для одной бинарной формы, какой угодно степени, и эта теорема обыкновенно называется теоремой Gordan'a. Его методъ, основанный на символическихъ обозначеніяхъ Aronhold'a-Clebsch'a и весьма сложный даже въ позднѣйшей усовершенствованной формѣ, далъ возможность построить полную систему неприводимыхъ коваріантовъ для бинарныхъ формъ 5-й и 6-й степеней.

Нѣсколько позже — въ концѣ семидесятыхъ годовъ, Silvester обнаружилъ конечность числа неприводимыхъ коваріантовъ для бинарныхъ формъ первыхъ десяти степеней и 12-й степени, вычисливъ для этихъ формъ при содѣйствіи своего ученика Franklin'a такъ называемыя представительныя формы женератрисныхъ функцій. Но этотъ способъ, безъ сомнѣнія весьма важный для практическаго построенія коваріантовъ, нельзя считать строгимъ потому, что онъ основанъ на одномъ до сихъ поръ еще недоказанномъ постулатѣ о невозможности существованія коваріантовъ и сидзигантовъ перваго рода одного и того-же типа.

Въ 1880 году von Gall построилъ при помощи способа Gordan'a полную систему неприводимыхъ коваріантовъ для бинарной формы 8-й степени, а въ 1888 ему удалось выполнить тоже самое и для бинарной формы 7-й степени, представившей больше трудностей, чѣмъ форма 8-й степени.

Попытки обобщить методъ Gordan'a для системъ общихъ формъ окончились полной неудачей вслѣдствіе того, что потребовалось ввести для такого обобщенія множество символовъ. Въ 1888 году одинъ изъ послѣдователей формальнаго символическаго направленія Stroh, пользуясь символами Aronhold'a-Clebsch'a изучилъ цѣлыя раціональныя соотношенія (syzygies) между неприводимыми коваріантами одной бинарной формы и предложилъ для нихъ особую классификацію.

Въ 1884 году одинъ изъ ученыхъ англійской школы Hammond построилъ женератрисныя функціи для сидзигантовъ перваго рода и вычислилъ при помощи ихъ полную систему неприводимыхъ сидзигантовъ перваго рода для бинарныхъ формъ 5-й и 6-й степеней, а также и нѣкоторые сидзиганты втораго рода.

Наконецъ, въ 1890 году теорема Gordan'а была доказана Hilbert'омъ и при томъ въ самомъ общемъ видѣ — для системы формъ съ нѣсколькими рядами перемѣнныхъ. Это доказательство явилось какъ слѣдствіе весьма общихъ изысканій нѣмецкаго ученаго въ области безконечныхъ системъ цѣлыхъ функцій. Hilbert показалъ кромѣ того, что число неприводимыхъ сидзигантовъ каждаго рода конечно и что цѣпь сидзигій разныхъ родовъ прерывается.

Эти новыя изслѣдованія нѣмецкаго математика, замѣчательныя по своей простотѣ и общности, пролили новый свѣтъ на теорію инваріантовъ алгебраическихъ формъ, связавъ ее съ весьма общей теоріей, такъ называемыхъ, алгебраическихъ тѣлъ.

Въ то время какъ многіе ученые, заинтересовавшись задачей Gordan'а, посвящали свои труды почти исключительно вопросамъ о полныхъ системахъ неприводимыхъ инваріантовъ и коваріантовъ, а также и ихъ сидзигій, нѣкоторые начинаютъ постепенно обобщать понятіе объ инваріантѣ.

Въ 1885 году Silvester создалъ теорію ресипрокантовъ, которою, затѣмъ, занимались Hammond, Mac-Mahon, Leudesdorf, Elliot, Forsith и другіе.

Одна, наиболѣе важная чать этого ученія, а именно — дифференціальные инваріанты, была разработана еще раньше въ 1878 году Halphen'омъ, и затѣмъ изслѣдованіями норвежскаго ученаго Sophus'a Lie была доведена постепенно до такой общности, что всѣ изслѣдованія другихъ математиковъ являются только слѣдствіями его общей теоріи инваріантовъ ненрерывныхъ группъ преобразованій.

Изъ всѣхъ изслѣдованій Sophus'a Lie послѣднее время особенное значеніе пріобрѣла теорія группъ касательныхъ преобразованій, т. е. такихъ преобразованій, относительно которыхъ условія касанія геометрическихъ формъ соотвѣтствѣнныхъ измѣреній остаются инваріантными; классическимъ примѣромъ этихъ преобразованій служитъ извѣстное преобразованіе Лежандра для уравненій съ частными производными.

Несомнѣнно, что теорія инваріантовъ алгебраическихъ формъ имѣла и въ настоящее время имѣетъ большое вліяніе на прогресъ различныхъ отдѣловъ математики, но общая теорія инваріантовъ норвежскаго ученаго и въ особенности ея часть, относящаяся къ группѣ касательныхъ преобразованій, сдѣлалась основнымъ ученіемъ для многихъ отдѣловъ математики, какъ напримѣръ — для теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, для теоріи минимальныхъ поверхностей и поверхностей переноса вообще, для теоріи изгибанія поверхностей, и т. д.

Нѣсколько лѣтъ занимаясь общей теоріей инваріантовъ, я интересовался, конечно, и теоріей инваріантовъ алгебраическихъ формъ, при чемъ мнѣ постоянно казалось символическое направленіе Clebsch'a-Gordan'a въ теоріи инваріантовъ крайне нецѣлесообразнымъ, вслѣдствіе того обособленія отъ другихъ отдѣловъ математики, которое вносится спеціальными символическими обозначеніями и вслѣдствіе крайней сложности различныхъ символическихъ операцій.

Неудачныя попытки обобщить доказательство Gordan'a предложенія о конечности числа неприводимыхъ коваріантовъ для случая системы общихъ формъ блестяще показали всю несостоятельность этого направленія, этого безконечнаго нагроможденія спеціальныхъ символовъ въ довольно элементарномъ отдѣлѣ математики. Еще болѣе блестяще было послѣднее подтверждено замѣчательными по своей простотѣ и общности изслѣдованіями Hilbert'a, разрѣшившими основные вопросы теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ во всей ихъ общности помимо всякихъ спеціальныхъ символовъ.

Съ другой стороны и общая теорія инваріантовъ Sophus'a Lie не воспользовалась символическими обозначеніями Aronhold'a-Clebsch'a: въ ней стали играть главную роль обычныя, по своей формѣ, въ дифференціальномъ исчисленіи символы безконечно-малыхъ преобразованій, которые суть ничто другое, какъ обобщенія символовъ

$$\left\{x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\right\} - x_i \frac{\partial}{\partial x_k},$$

введенныхъ Cayley для обозначенія извѣстныхъ дифференціальныхъ процесовъ при построеніи дифференціальныхъ уравненій коваріантовъ алгебраическихъ формъ, о чемъ было уже сказано выше.

Вслѣдствіе всего этого, я задался мыслью изложить теорію инваріантовъ алгебраическихъ формъ въ такомъ направленіи, которое наиболѣе соотвѣтствуетъ новѣйшимъ ученіямъ о непрерывныхъ группахъ — съ одной стороны, и объ алгебраическихъ тѣлахъ или ариѳмизаціи функцій — съ другой стороны, т. е. тѣмъ ученіямъ, которыя, можно сказать, сами зародились въ теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ.

Въ главѣ I, посвященной инваріантамъ одной бинарной формы, я изучаю сначала свойства группы линейныхъ подстановокъ для перемѣнныхъ бинарной формы и свойства подгруппы безконечно-малыхъ линейныхъ подстановокъ для этихъ же перемѣнныхъ, что даетъ мнѣ возможность, въ § 7, предложить новый выводъ дифференціальныхъ уравненій инваріантовъ бинарной формы и показать, что они вполнѣ характеризуютъ послѣдніе. Но еще не очевидно, что эти дифференціальныя уравненія должны имѣть цѣлыя, раціональныя и однородныя интегралы; поэтому я пользуюсь въ § 11 изслѣдованіями Aronhold'а объ абсолютныхъ инваріантахъ и такимъ образомъ доказываю не только существованіе инваріантовъ для всякой бинарной формы, кромѣ формы первой степени, но опредѣляю также въ § 16 число основныхъ инваріантовъ, черезъ которые всѣ остальные выражаются алгебраически.

Въ главѣ II я обобщаю предыдущія изслѣдованія на случай системы бинарныхъ формъ и, слѣдуя представителямъ англійской школы Cayley и Silvester'у, опредѣляю при помощи женератрисной функціи число линейно-независимыхъ инваріантовъ данной системы бинарныхъ формъ, при чемъ въ § 24 я даю вполнѣ строгое и, въ тоже время, весьма простое доказательство независимости уравненій системы $(L)$, что лежитъ въ основаніи опредѣленія числа линейно-независимыхъ инваріантовъ. Въ заключеніе этой главы, въ § 27, я вывожу нѣкоторыя свойства женератрисной функціи и какъ слѣдствіе изъ нихъ — теорему Hermite'a о взаимности бинарныхъ формъ и обобщеніе этой теоремы, предложенное Hurvitz'омъ.

Въ главѣ III излагаются сначала опредѣленія коваріантовъ и контраваріантовъ бинарныхъ формъ, и, затѣмъ, выводятся ихъ дифференціальныя уравненія на основаніи того, что ихъ можно разсматривать какъ совмѣстные инваріанты данной системы формъ, увеличенной еще одной линейной формой. Теорема Cayley, изложенная въ § 31 этой главы сводитъ построеніе коваріантовъ къ построенію такъ называемыхъ полуинваріантовъ; этимъ я и пользуюсь при построеніи основныхъ коваріантовъ въ § 35. Въ §§ 37, 38 и 39 излагаются различные способы опредѣленія числа и типовъ неприводимыхъ коваріантовъ при помощи женератрисныхъ функцій. Въ §§ 40, 41 разсматриваются различныя цѣлыя раціональныя соотношенія — сидзигіи между неприводимыми коваріантами и излагается способъ Hammond'a для опредѣленія числа и типовъ неприводимыхъ сидзигій при помощи особой женератрисной функціи. Наконецъ, въ § 42 излагается теорема Gordan'a и ея доказательство, данное Hilbert'омъ.

Въ главѣ IV излагаются различные способы построенія коваріантовъ и между прочимъ излагается замѣчательный процесъ [ ] Hilbert'a, который даетъ возможность обращать такъ называемые дериванты въ коваріанты, а въ частномъ случаѣ — полуинваріанты въ инваріанты; этимъ процесомъ приходится пользоваться въ доказательствѣ Hilbert'a теоремы Gordan'a, изложенномъ въ концѣ предыдущей главы. Здѣсь же излагается преобразованіе коваріантовъ, предложенное Hermite'омъ и приводящее къ системѣ союзныхъ формъ. Въ заключеніе дается понятіе о типическомъ представленіи формъ.

Приложенный при семъ литературный указатель содержитъ только тѣ сочиненія, которыми я пользовался въ своей работѣ, иначе говоря, — тѣ сочиненія, которыя относятся къ теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ въ несимволическомъ направленіи. Болѣе подробныя литературныя указанія можно найти въ прекрасномъ историческомъ очеркѣ развитія теоріи инваріантовъ, составленномъ профессоромъ F. Meyer'омъ (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. I, или французскій переводъ въ Bulletin des sciences mathématiques, t. 18, 19).

## Литература теорiи инварiантовъ въ несимволическомъ направленiи.


1. Cayley. On linear transformations. Cambrige and Dublin mathematical Journal, Vol. 4. 1844.
2. Cayley. Mémoire sur les hyperdéterminantes. Crelle's Journal, Bd. 30. 1845.
3. Sylvester. On the calculus of forms, otherwise the theory of invariants. Cambrige and Dublin mathematical Journal, Vol. 6—9 (1851—1854).
4. Sylvester. On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants. Philosophical Magazine. 1851.
5. Cayley. Reschersches sur les covariants. Crelle's Journal, Bd. 47. 1854.
6. Cayley. Seven memoirs upon quantics. Philosophical Transactions, Vol. 144, 146, 148, 149, 151, (1854—1861).
7. Cayley. Researsches on the partition of numbers. Quarterly Journal, 1855.
8. Roberts. On the covariants of a binary quantic of the n-th degree. Quarterly Journal, Vol. 4. 1861.
9. Aronhold. Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie. Crelle's Journal, Bd. 62. 1863.
10. Clebsch. Ueber simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen. Crelle's Journal, Bd. 65. 1866.
11. Cayley. 8-th memoir upon quantics. Philosophical Transactions, Vol. 157. 1867.
12. Christoffel. Beweis des Fundamentalsatzes der Invariantentheorie. Crelle's Journal, Bd. 68. 1868.
13. Aronhold. Neuer und directer Beweis eines Fundamentalsatzes der Invariantentheorie. Crelle's Journal, Bd. 69. 1968.
14. Cayley. 9-th. memoir upon quantics. Philosophical Transactions. Vol. 161. 1871.

15. Gram Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'agèbre moderne. Mathematische Annalen, Bd. 7. 1873.
16. Cayley. 10-th memoir upon quantics. Philosophical Transactions. Vol. 169. 1878.
17. Silvester. Détermination d'une limite supérieure au nombre total des invariants et covariants irréducibles des formes binaires. Comptes Rendus, t. 86. 1878.
18. Silvester. Table of the generating functions and groundforms for the binary quantics of the first ten orders. American Journal, V. 2. 1879.
19. Silvester. Tables of the generating functions and groundforms for simultaneous binary quantics of the first four orders taken two and two together. Ibid.
20. Franklin. On the calculation of the generating functions and tables of groundforms for binary quantics. American Journal V. 3. 1880.
21. Faa di Bruno. Einleitung in die Theorie der binären Formen, deutsch bearbeitet von Walter. Leipzig. 1881.
22. Silvester. Tables of the generating functions and groundforms of the binary duodecimic, with some general remarks, and tables of the irreducible syzygies of certain quantics. American Journal, V. 4. 1881.
23. Silvester. A demonstration of the impossibility of the binary octavic possessing any groundform of deg-order 10. 4. Ibid.
24. Cayley. A memoir on seminvariants. American Journal, V. 7 1885.
25. Hammond. On the syzygies of the binary sextic and their relations. Ibid.
26. Hilbert. Ueber die invarianten Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen. (Dissertation). Königsberg. 1885.
27. Hammond. Sydzygy tables for the binary quintic. American Journal. V. 8. 1886.
28. Hilbert. Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete. Mathematische Annalen. Bd. 30. 1887.
29. Hammond. A simple proof of the existence of irreducible invariants of degrees 20 and 30 for the binary seventhic. Mathematische Annalen. Bd. 36. 1890.
30. Hilbert. Ueber die Theorie der algebraischen Formen. Ibid.
31. Sophus Lie. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig. 1891.

32. Hilbert. Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. Göttingen Nachrichten. 1891.
33. Schönflies. Bemerkung zu Hilbert's Theorie der algebraischen Formen. Ibid.
34. Elliott. A proof of the exactness of Cayley's number of seminvariant of given type. Proceeding of the London Math. Society. V. 23. 1892.
35. Hilbert. Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. Göttingen Nachrichten. 1892.
36. Sophus Lie. Vorlesungen über continuirliche Gruppen. Leipzig. 1893.
37. Hurwitz. Zur Invariantentheorie. Mathematische Annalen, Bd. 45. 1894.

## ГЛАВА I.

# Инваріанты бинарныхъ формъ.

### § 1. Опредѣленія бинарной формы и ея инваріантовъ.

Бинарной формой $n$-го порядка мы будемъ называть цѣлый однородный многочленъ $n$-й степени съ двумя перемѣнными. Обыкновенно ее пишутъ съ биноміальными коэффиціентами въ такомъ видѣ:

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{m} a_m x_1^{n-m} x_2^m \ldots + a_n x_2^n,$$

гдѣ $\binom{n}{m}$ обозначаетъ числовой факторъ $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}$.

Если перемѣнныя $x_1$, $x_2$ замѣнить другими перемѣнными $y_1$, $y_2$ при помощи соотношеній

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

то вышеприведенная бинарная форма преобразуется въ другую бинарную форму тоже $n$-го порядка, но съ новыми коэффиціентами и новыми перемѣнными; выполнивъ указанную подстановку, мы получимъ:

$$f(\alpha y_1+\beta y_2, \gamma y_1+\delta y_2) =$$

$$= a_0(\alpha y_1+\beta y_2)^n + \binom{n}{1} a_1(\alpha y_1+\beta y_2)^{n-1}(\gamma y_1+\delta y_2) + \ldots + a_n(\gamma y+\delta y_2)^n$$

$$= \alpha_0 y_1^n + \binom{n}{1}\alpha_1 y_1^{n-1} y_2 + \binom{n}{2}\alpha_2 y_1^{n-2} y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_2^n;$$

эту новую бинарную форму мы будемъ сокращенно обозначать черезъ $\varphi(y_1, y_2)$.

Соотношенія $x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2$, $x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$, связывающія перемѣнныя $x_1$, $x_2$ съ перемѣнными $y_1$, $y_2$, мы будемъ называть *линейной подстановкой* и будемъ сокращенно обозначать ее черезъ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, или просто черезъ $S$. Детерминантъ $\Delta = \begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma)$ мы будемъ называть *модулемъ* линейной подстановки.

Бинарная форма $f(x_1, x_2)$ переходитъ вслѣдствіе подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ въ другую бинарную форму $\varphi(y_1, y_2)$; это обстоятельство можно выразить символическимъ равенствомъ

$$\varphi(y_1, y_2) = Sf(x_1, x_2).$$

Очевидно, что коэффиціенты $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ суть, съ одной стороны, цѣлыя раціональныя и однородныя функціи степени $n$-й коэффиціентовъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ подстановки $S$ и, съ другой стороны, линейныя однородныя функціи коэффиціентовъ $a_0$, $a_1$, $a_2 \ldots a_n$ первоначальной формы $f(x_1, x_2)$.

Не трудно получить эти выраженія коэффиціентовъ $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$. Раздѣлимъ обѣ части равенства

$$f(\alpha y_1+\beta y_2, \gamma y_1+\delta y_2) = \alpha_0 y_1^n + \binom{n}{1} y_1^{n-1} y_2 + \ldots$$

одинъ разъ на $y_1^n$, другой разъ на $y_2^n$, и обозначимъ $\frac{y_2}{y_1} = \xi$, а $\frac{y_1}{y_2}$ черезъ $\eta$; тогда

$$f(\alpha+\beta\xi,\gamma+\delta\xi)=a_0+\binom{n}{1}a_1\xi+\ldots+\binom{n}{k}a_k\xi^k+\ldots,$$

$$f(\alpha\eta+\beta,\gamma\eta+\delta)=a_0\eta^n+\binom{n}{1}a_1\eta^{n-1}+\ldots+\binom{n}{k}a_k\eta^{n-k}+\ldots,$$

а по строка Тэйлора:

$$f(\alpha+\beta\xi,\gamma+\delta\xi)=f(\alpha,\gamma)+\frac{\xi}{1}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta+\frac{\partial}{\partial\gamma}\delta\right)f(\alpha,\gamma)+\ldots+$$
$$+\frac{\xi^k}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta+\frac{\partial}{\partial\gamma}\delta\right)^k f(\alpha,\gamma)+\ldots,$$

и

$$f(\alpha\eta+\beta,\gamma\eta+\delta)=f(\alpha,\gamma)\frac{\eta^n}{n!}+\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial}{\partial\delta}\gamma\right)^{n-1}f(\beta,\delta)\frac{\eta^{n-1}}{(n-1)!}+$$
$$+\ldots+\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial}{\partial\delta}\gamma\right)^{n-k}f(\beta,\delta)\frac{\eta^{n-k}}{(n-k)!}+\ldots;$$

слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\binom{n}{k}a_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta+\frac{\partial}{\partial\gamma}\delta\right)^k f(\alpha,\gamma)=\frac{1}{(n-k)!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial}{\partial\delta}\gamma\right)^{n-k}f(\beta,\delta),$$

т. е.

$$a_k=\frac{(n-k)!}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta+\frac{\partial}{\partial\gamma}\delta\right)^k f(\alpha,\gamma)$$

или

$$a_k=\frac{k!}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial}{\partial\delta}\gamma\right)^{n-k}f(\beta,\delta).$$

Изъ этихъ выраженій ясно, что $a_k$ есть однородная функція степени $n-k$ относительно пары количествъ $(\alpha,\gamma)$ и однородная функція степени $k$ относительно нары количествъ $(\beta,\delta)$.

*Инваріантомъ* бинарной формы $f(x_1,x_2)$ называется такая цѣлая раціональная функція $J(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)$ коэффиціентовъ этой формы, которая удовлетворяетъ тождественно равенству

$$J(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)=(\alpha\delta-\beta\gamma)^\lambda J(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n),$$

коль скоро мы замѣнимъ въ немъ $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n$ ихъ выраженіями черезъ $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n$ и $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$. Иначе говоря, инваріантъ бинарной формы $f(x_1, x_2)$ есть такая цѣлая раціональная функція ея коэффиціентовъ, которая измѣняется только на постоянный множитель $\Delta^\lambda = (\alpha\delta - \beta\gamma)^\lambda$, если въ ней коэффиціенты $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ замѣнить коэффиціентами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ преобразованной при помощи линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ формы.

*Примѣръ.* Выраженіе $J(a_0, a_1, a_2) = a_0 a_2 - a_1^2$ служитъ инваріантомъ бинарной формы втораго порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ, черезъ подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ эта форма перейдетъ въ форму

$$\varphi(y_1, y_2) = \alpha_0 y_1^2 + 2\alpha_1 y_1 y_2 + \alpha_2 y_2^2,$$

коэффиціенты которой выражаются черезъ коэффиціенты $a_0$, $a_1$, $a_2$ первоначальной формы слѣдующимъ образомъ:

$$\alpha_0 = a_0 \alpha^2 + 2a_1 \alpha\gamma + a_2 \gamma^2,$$

$$\alpha_1 = a_0 \alpha\beta + a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_2 \gamma\delta,$$

$$\alpha_2 = a_0 \beta^2 + 2a_1 \beta\delta + a_2 \delta^2;$$

отсюда мы видимъ, что разсматриваемое выраженіе

$$J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (a_0 a_2 - a_1^2)$$

дѣйствительно удовлетворяетъ опредѣленію инваріанта бинарной формы.

Изъ вышеизложеннаго общаго опредѣленія инваріанта бинарной формы не трудно вывести нѣкоторыя его свойства, если разсмотрѣть частные виды линейныхъ подстановокъ.

## § 2. Однородность, изобарность и симметричность инваріанта.

1) Если взять частный видъ $\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & \rho\end{pmatrix}$ линейной подстановки, при которой $x_1 = \rho y_1$, $x_2 = \rho y_2$, и для которой модуль

$\alpha\delta - \beta\gamma = \rho^2$, то коэффиціенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ будутъ равны первоначальнымъ коэффиціентамъ $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, умноженнымъ на одинъ и тотъ-же факторъ $\rho^n$; и въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n =$$

$$= a_0 \rho^n y_1^n + \binom{n}{1} a_1 \rho^n y_1^{n-1} y_2 + \ldots + a_n \rho^n y_2^n$$

$$= \alpha_0 y_1^n + \binom{n}{1} \alpha_2 y_1^{n-1} y_2 + \ldots + \alpha_n y_2^n.$$

Но, такъ какъ инваріантъ по отношенію къ разсматриваемой подстановкѣ долженъ удовлетворять тождественному равенству

$$J(a_0 \rho^n, a_1 \rho^n, a_2 \rho^n, \ldots a_n \rho^n) = \rho^{2\lambda} J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n),$$

или

$$J(a_0 t, a_1 t, a_2 t, \ldots a_n t) = t^{\frac{2\lambda}{n}} J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n),$$

если $t = \rho^n$, то мы и заключаемъ, что онъ есть функція *однородная* степени $\frac{2\lambda}{n}$ коэффиціентовъ данной формы.

Число $\lambda$ называется *индексомъ* инваріанта; если обозначить его *степень* относительно коэффиціентовъ бинарной формы черезъ $\mu$, то на основаніи только что сказаннаго $\mu = \frac{2\lambda}{n}$; иначе говоря, между порядкомъ данной бинарной формы $n$, степенью $\mu$ ея инваріанта и индексомъ послѣдняго существуетъ соотношеніе

$$2\lambda = n \, . \, \mu.$$

2) Если взять другой частный видъ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ линейной подстановки, при которой $x_1 = y_1$, $x_2 = \rho y_2$, и модуль которой равенъ $\rho$, то коэффиціенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ преобразованной формы будутъ соотвѣтственно равны $a_0, a_1 \rho, a_2 \rho^2, \ldots a_n \rho^n$, такъ какъ

$$a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n =$$

$$= a_0 y_1^n + \binom{n}{1} a_1 \rho\, y_1^{n-1} y_2 + \ldots + a_n \rho^n y_2^n$$

$$= \alpha_0 y_1^n + \binom{n}{1} \alpha_1 y_1^{n-1} y_2 + \ldots + \alpha_n y_2^n.$$

Для разсматриваемой подстановки инваріантъ долженъ удовлетворять тождественному равенству

$$J(a_0,\ a_1 \rho,\ a_2 \rho^2, \ldots a_n \rho^n) = \rho^\lambda J(a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots a_n)\ ;$$

такъ какъ инваріантъ есть цѣлая раціональная функція количествъ $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... $a_n$, то онъ состоитъ изъ суммы членовъ вида $A \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}$ и его можно представить символомъ

$$\sum A \,.\, a_0^{e_0} a_2^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}\ ;$$

пользуясь этимъ обозначеніемъ для инваріанта $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$, мы напишемъ вышеприведенное тождественное равенство въ такомъ видѣ:

$$\sum A \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n} \rho^{0 \,.\, e_0 + 1 \,.\, e_1 + 2 \,.\, e_2 + \ldots + n \,.\, e_n} =$$

$$= \rho^\lambda \sum A \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}\ ;$$

отсюда мы заключаемъ, что число

$$0 \,.\, e_0 + 1 \,.\, e_1 + 2 \,.\, e_2 + \ldots + n \,.\, e_n$$

должно быть одинаково для всѣхъ членовъ инваріанта и должно равняться индексу инваріанта $\lambda$. Это число $0 \,.\, e_0 + 1 \,.\, e_1 + 2 \,.\, e_2 + \ldots + n \,.\, e_n$ называется *вѣсомъ* члена

$$A \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}\,.$$

Слѣдовательно, всѣ члены детерминанта имѣютъ одинъ и тотъ же вѣсъ равный индексу инваріанта $\lambda$, или инваріантъ есть функція коэффиціентовъ бинарной формы не только цѣлая, раціональная и однородная, но еще и *изобарная* — съ вѣсомъ, равнымъ индексу $\lambda$. Едва ли надо пояснить, что изобарность функціи есть ничто другое, какъ однородность ея относительно показателей степеней и индексовъ перемѣнныхъ количествъ.

3) Наконецъ, если мы разсмотримъ третій частный видъ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ линейной подстановки, при которой $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$, и модуль которой равенъ $(-1)$, то коэффиціенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ преобразованной формы будутъ соотвѣтственно равны $a_n$, $a_{n-1}$, $a_{n-2}$, . . . $a_0$, такъ какъ

$$a_0 x_1^n + \left(\frac{n}{1}\right) a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n =$$

$$= a_0 y_2^n + \left(\frac{n}{1}\right) a_1 y_2^{n-1} y_1 + \ldots + a_n y_1^n$$

$$= \alpha_n y_2^n + \left(\frac{n}{1}\right) \alpha_{n-1} y_2^{n-1} y_1 + \ldots + \alpha_0 y_1^n.$$

Инваріантъ въ данномъ случаѣ долженъ удовлетворять тождественному равенству

$$J(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_0) = (-1)^\lambda J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n).$$

Слѣдовательно, если инваріантъ имѣетъ четный индексъ $\lambda = \frac{\mu . n}{2}$, то онъ есть функція *симметрическая* относительно паръ коэффиціентовъ $a_0$, $a_1$, $a_2$ . . . $a_n$, равноотстоящихъ отъ начала и конца, такъ какъ онъ не измѣняетъ своей величины при перестановкѣ коэффиціентовъ $a_i$ и $a_{n-i}$; если же инваріантъ имѣетъ нечетный индексъ $\lambda = \frac{\mu . n}{2}$, то онъ мѣняетъ знакъ, не измѣняя своей абсолютной величины, при перестановкѣ коэффиціентовъ $a_i$ и $a_{n-i}$, т. е. абсолютная величина инваріанта съ нечетнымъ индексомъ есть функкія симметрическая относительно паръ коэффиціентовъ $a_0$, $a_1$, $a_2$, . . . $a_n$, равноотстоящихъ отъ начала и конца.

Инваріантъ, имѣющій четный индексъ, называется иногда *четнымъ* инваріантомъ, и инваріантъ съ нечетнымъ индексомъ — *нечетнымъ* инваріантомъ. Такъ какъ индексъ $\lambda$ инваріанта равенъ половинѣ произведенія $n\mu$ — порядка формы на степень самаго инваріанта, то для нечетныхъ инваріантовъ произведеніе $n\mu$ должно дѣлиться на 2, а для четныхъ инваріантовъ — на 4. Слѣдовательно, бинарная форма нечетнаго порядка совсѣмъ не имѣетъ инваріантовъ нечетной степени; четные инваріанты могутъ быть нечетной степени только тогда, когда порядокъ $n$ бинарной формы дѣлится на 4.

### § 3. Нѣкоторыя свойства линейныхъ подстановокъ.

Въ этомъ параграфѣ мы изложимъ нѣкоторыя свойства линейныхъ подстановокъ, которыми будемъ пользоваться впослѣдствіи.

Если имѣется такая совокупность преобразованій перемѣнныхъ $x_1$, $x_2$ въ другія перемѣнныя $y_1$, $y_2$, что каждая пара преобразованій вмѣстѣ даетъ новое преобразованіе, принадлежащее къ той же совокупности преобразованій, то говорятъ, что всѣ эти преобразованія составляютъ *группу*. Не трудно показать, что всевозможныя линейныя преобразованія $x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2$, $x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ коэффиціентовъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$, составляютъ группу.

Въ самомъ дѣлѣ, если взять два линейныхъ преобразованія:

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \quad x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2 \quad \text{или} \quad S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

и

$$y_1 = \alpha' z_1 + \beta' z_2, \quad y_2 = \gamma' z_1 + \delta' z_2 \quad \text{или} \quad S'\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

то совмѣстно они дадутъ преобразованіе

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (\alpha\alpha' + \beta\gamma')z_1 + (\alpha\beta' + \beta\delta')z_2 = \alpha'' z_1 + \beta'' z_2 \\ x_2 &= (\gamma\alpha' + \delta\gamma')z_1 + (\gamma\beta' + \delta\delta')z_2 = \gamma'' z_1 + \delta'' z_2 \end{aligned}\right\} \quad S''\begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix},$$

которое есть также линейное преобразованіе, и, слѣдовательно, *всѣ линейныя преобразованія* $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *образуютъ группу.*

Будемъ изображать символическимъ равенствомъ

$$S'' = SS'$$

то обстоятельство, что линейная подстановка $S''$ есть результатъ двухъ подстановокъ $S$ и $S'$. Изъ вышеприведеннаго развернутаго вида подстановки $S''$ не трудно замѣтить, что она, будучи представлена въ формѣ детерминанта, равна дѣйствительному произведенію детерминантовъ, представляющихъ подстановки $S$ и $S'$:

$$\begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma', & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma', & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix};$$

отсюда слѣдуетъ, что модуль $\varDelta''$ составной подстановки $S''$ равенъ произведенію модулей $\varDelta . \varDelta'$ подстановокъ сатавляющихъ $S$ и $S'$.

Если мы условимся разсматривать только такія линейныя подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, *модули которыхъ не равны нулямъ*, то для каждой подстановки $S$

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$
$$x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$$

будетъ существовать ей обратная

$$y_1 = \quad \frac{\delta}{\varDelta} x_1 - \frac{\beta}{\varDelta} x_2,$$

$$y_2 = -\frac{\gamma}{\varDelta} x_1 + \frac{\alpha}{\varDelta} x_2,$$

которую мы будемъ сокращенно обозначать черезъ $S^{-1}$; ея модуль очевидно равенъ $\frac{1}{\varDelta}$, т. е. обратному модулю подстановки $S$.

Двѣ подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ и $S'\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ тождественны только въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ одной соотвѣтственно равны коэффиціентамъ $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ другой; слѣдовательно, линейная подстановка $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ опредѣляется вполнѣ и единственнымъ образомъ, если даны ея четыре коэффиціента $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$; поэтому можно назвать $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ *существенными параметрами* линейной подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Наконецъ, очевидно, что $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ въ линейной подстановкѣ могутъ получать *непрерывно-измѣняющіяся* значенія.

Все сказанное въ этомъ параграфѣ о линейныхъ подстановкахъ можно формулировать въ слѣдующемъ предложеніи:

*Всѣ линейныя подстановки вида*

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$
$$x_1 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

*модуль которыхъ* $\Delta$ *не равенъ нулю, образуютъ непрерывную группу* $\infty^4$ *попарно обратныхъ преобразованій перемѣнныхъ* $(x_1, x_2)$ *и* $(y_1, y_2)$.

Если функція $J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ коэффиціентовъ данной бинарной формы обладаетъ инваріантнымъ свойствомъ относительно двухъ подстановокъ $S$ и $S'$, т. е. удовлетворяетъ соотношеніямъ

$$J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \Delta^\lambda J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n),$$
$$J(\alpha_0', \alpha_1', \alpha_2' \ldots \alpha_n') = \Delta'^\lambda J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n),$$

то эта функція обладаетъ тѣмъ же свойствомъ и относительно составной подстановки $S'' = SS'$; въ самомъ дѣлѣ, примѣняя къ бинарной формѣ $f(x_1, x_2)$ сначала подстановку $S$, а къ полученному результату подстановку $S'$ мы будемъ имѣть соотвѣтственно для функціи $J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ соотношенія:

$$J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) = \Delta^\lambda J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n),$$
$$J(\alpha_0'', \alpha_1'', a_2'' \ldots \alpha_n'') = \Delta'^\lambda J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n);$$

откуда слѣдуетъ соотношеніе

$$J(\alpha_0'', \alpha_1'', \alpha_2'' \ldots \alpha_n'') = \Delta^\lambda \Delta'^\lambda J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$$

или соотношеніе

$$J(\alpha_0'', \alpha_1'', \alpha_2'' \ldots \alpha_n'') = \Delta''^\lambda J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n),$$

выражающее инваріантное свойство функціи $J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ относительно составной подстановки $S''$.

## § 4. Унимодулярныя линейныя подстановки и новое опредѣленіе инваріанта бинарной формы.

Линейную подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, у которой модуль $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ равенъ единицѣ, мы будемъ называть *унимодулярною*.

Очевидно, что двѣ унимодулярныхъ подстановки $S$ и $S'$ даютъ составную подстановку $S'' = SS'$, тоже унимодулярную, такъ какъ $\Delta'' = \Delta . \Delta' = 1 . 1 = 1$. Слѣдовательно, всѣ унимодулярныя линейныя подстановки образуютъ непрерывную группу преобразованій; а такъ какъ всѣ онѣ заключаются въ группѣ общихъ линейныхъ подстановокъ, то мы скажемъ, что онѣ образуютъ непрерывную *подгруппу* преобразованій въ группѣ всѣхъ линейныхъ подстановокъ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$.

Конечно унимодулярная подстановка имѣетъ три существенныхъ параметра, ибо $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ для нея связаны соотношеніемъ $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Слѣдовательно, подгруппа унимодулярныхъ подстановокъ содержитъ $\infty^3$ различныхъ преобразованій и при томъ попарно обратныхъ, потому что подстановка, обратная унимодулярной подстановкѣ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$, есть сама унимодулярная подстановка $S^{-1}\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}_{\Delta=1}$.

Изученіе весьма разнообразныхъ свойствъ непрерывныхъ группъ линейныхъ подстановокъ облегчается въ значительной степени разсмотрѣніемъ группъ соотвѣтственныхъ *безконечно-малыхъ* линейныхъ преобразованій.

Идея о группахъ безконечно-малыхъ преобразованій принадлежитъ норвежскому ученому Софусу Ли. Это понятіе было положено Софусомъ Ли въ основаніе его изслѣдованій о непрерывныхъ группахъ преобразованій, давшихъ столь много блестящихъ открытій. Такое огромное значеніе понятія о группахъ безконечно-малыхъ преобразованій для теоріи непрерывныхъ группъ объясняется бо́льшею простотою свойствъ группъ безконечно-малыхъ преобразованій сравнительно съ группами конечныхъ непрерывныхъ преобразованій; въ этомъ отношеніи понятіе о безконечно-малыхъ преобразованіяхъ на столько же упрощаетъ изученіе свойствъ непрерывныхъ группъ, на сколько исчисленіе безконечно-малыхъ упрощаетъ изученіе свойствъ непрерывныхъ функцій.

Нижеизложенныя изслѣдованія о группахъ линейныхъ подстановокъ въ примѣненіи къ теоріи инваріантовъ бинарныхъ формъ могутъ служить прекрасными примѣрами, какъ надо оперировать съ группами безконечно-малыхъ преобразованій. Но прежде, чѣмъ перейти къ этимъ изслѣдованіямъ, мы укажемъ на новое опредѣленіе инваріанта бинарной формы, которое представляетъ больше удобствъ для нашихъ цѣлей, чѣмъ опредѣленіе въ § 1.

Каждую линейную подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ можно разсматривать какъ составную изъ двухъ подстановокъ:

$$\begin{pmatrix}\sqrt{\Delta} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Delta}\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}\dfrac{\alpha}{\sqrt{\Delta}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{\Delta}} \\ \dfrac{\gamma}{\sqrt{\Delta}} & \dfrac{\delta}{\sqrt{\Delta}}\end{pmatrix},$$

изъ которыхъ вторая — унимодулярная, если $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$; эти составляющія подстановки въ развернутомъ видѣ —

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\Delta}\,.\,y_1, \\ x_2 &= \sqrt{\Delta}\,.\,y_2 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\alpha}{\sqrt{\Delta}}y_1 + \frac{\beta}{\sqrt{\Delta}}y_2, \\ x_2 &= \frac{\gamma}{\sqrt{\Delta}}y_1 + \frac{\delta}{\sqrt{\Delta}}y_2. \end{aligned}$$

Если цѣлая, раціональная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ коэффиціентовъ бинарной формы удовлетворяетъ извѣстному условію инваріантности по отношенію къ первой составляющей подстановкѣ, то это равносильно условію однородности функціи $J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ относительно количествъ $a_0$, $a_1$, $a_2$, $\ldots$ $a_n$.

Слѣдовательно, для того, чтобы цѣлая раціональная функція $J(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ коэффиціентовъ бинарной формы удовлетворяла условію инваріантности

$$J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \Delta^\lambda J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$$

относительно произвольной линейной подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, необходимо и достаточно, чтобы она была, во-первыхъ, однородна и, во-вторыхъ, удовлетворяла бы условію инваріантности относительно всякой унимодулярной линейной подстановки, т. е. условію

$$J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = J(a_0, a_1, a_1, \ldots a_n).$$

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ новому опредѣленію инваріанта бинарной формы: *цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ служитъ инваріантомъ бинарной формы, если она совсѣмъ не измѣняется, когда перемѣнныя бинарной формы преобразуются посредствомъ подгруппы линейныхъ унимодулярныхъ подстановокъ* $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}_{\Delta=1}$.

## § 5. Группа безконечно-малыхъ линейныхъ подстановокъ. Унимодулярная подгруппа.

Если въ линейной подстановкѣ

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$
$$x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

положить параметры $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ соотвѣтственно равными 1, 0, 0, 1, то получится подстановка, такъ сказать, *тождественная,* не измѣняющая перемѣнныхъ. Если же $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ дать значенія, безконечно-мало отличающіяся отъ предыдущихъ: $1 + \alpha_1 . \delta t$, $\beta_1 . \delta t$, $\gamma_1 . \delta t$, $1 + \delta_1 . \delta t$, то перемѣнныя $y_1$, $y_2$, переходя въ $x_1$, $x_2$, измѣнятся на безконечно-малыя величины; поэтому подстановка

$$x_1 = (1 + \alpha_1 . \delta t) y_1 + \beta_1 . \delta t y_2,$$
$$x_2 = \gamma_1 . \delta t y_1 + (1 + \delta_1 . \delta t) y_2$$

называется *безконечно-малой линейной подстановкой;* мы будемъ обозначать ее черезъ $S\begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 \delta t, & \beta_1 \delta t \\ \gamma_1 \delta t, & 1 + \delta_1 \delta t \end{pmatrix}$.

Не трудно найти выраженіе безконечно-малыхъ приращеній $x_1$ и $x_2$ при такомъ безконечно-маломъ преобразованіи.

Пусть $x_1$, $x_2$ переходятъ черезъ подстановку $S\begin{pmatrix} 1+\alpha_1\,\delta t & \beta_1\,\delta t \\ \gamma_1\,\delta t & 1+\delta_1\,\delta t \end{pmatrix}$ въ $x_1'$, $x_2'$, и пусть $\delta x_1 = x_1' - x_1$, $\delta x_2 = x_2' - x_2$; тогда мы будемъ имѣть:

$$x_1' = (1+\alpha_1\,\delta t)\,x_1 + \beta_1\,\delta t\,.\,x_2,$$
$$x_2' = \gamma_1\,\delta t\,.\,x_1 + (1+\delta_1\,\delta t)\,x_2;$$

отсюда

$$\delta x_1 = \alpha_1\,\delta t\,.\,x_1 + \beta_1\,\delta t\,.\,x_2 = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\,\delta t,$$
$$\delta x_2 = \gamma_1\,\delta t\,.\,x_1 + \delta_1\,\delta t\,.\,x_2 = (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\,\delta t.$$

Не трудно также вычислить приращеніе $\delta f(x_1, x_2)$ какой угодно функціи $f(x_1, x_2)$, когда ея перемѣнныя подвергнуты безконечно-малой подстановкѣ: въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\delta f(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2,$$

вставляя въ это равенство вмѣсто $\delta x_1$, $\delta x_2$ ихъ вышеприведенныя выраженія, мы получимъ

$$\delta f(x_1 x_2) = \left\{(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\}.\,\delta t.$$

Выраженіе

$$U(f) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

вполнѣ опредѣляетъ нашу безконечно-малую подстановку, потому что, положивъ въ немъ послѣдовательно $f = x_1$ и $f = x_2$, мы будемъ имѣть

$$U(x_1) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\,.\,1,$$
$$U(x_2) = (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\,.\,1,$$

и отсюда получаемъ

$$\delta x_1 = x'_1 - x_1 = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\,\delta t,$$
$$\delta x_2 = x'_2 - x_1 = (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\,\delta t$$

или

$$x_1' = (1+\alpha_1\,\delta t)\,x_1 + \qquad \beta_1\,\delta t\,.\,x_2,$$
$$x_2' = \qquad \gamma_1\,\delta t\,.\,x_1 + (1+\delta_1\,\delta t)\,x_2;$$

это и есть наша безконечно-малая подстановка. Вслѣдствіе всего этого мы можемъ назвать выраженіе $U(f)$ символомъ безконечно-малой линейной подстановки. Мы видимъ, что символъ $U(f)$ содержитъ четыре произвольныхъ количества $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$, но его существенными параметрами служатъ только ихъ отношенія $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$, $\frac{\delta_1}{\alpha_1}$, потому что $\alpha_1$ можно въ выраженіи $U(f)$ вынести за скобку и $\alpha_1\,\delta t$ принять за новую безконечно-малую величину $\delta t'$. Кромѣ того, очевидно, что двѣ безконечно-малыхъ линейныхъ подстановки даютъ составную подстановку, тоже безконечно-малую и линейную.

Слѣдовательно, *безконечно-малыя линейныя подстановки образуютъ въ группѣ всѣхъ линейныхъ подстановокъ* $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ *новую подгруппу съ* $\infty^3$ *различныхъ безконечно-малыхъ преобразованій.*

Если, наоборотъ, перейти отъ соотношеній между безконечно-малыми величинами

$$\delta x_1 = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\,\delta t,$$
$$\delta x_2 = (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\,\delta t,$$

къ соотношеніямъ между конечными количествами, т. е. проинтегрировать систему дифференціальныхъ ур-ій d'Alembert'a

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2,$$

то мы получимъ, конечно, линейную подстановку

$$x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2,$$
$$x'_2 = \gamma x_1 + \delta x_2,$$

гдѣ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ будутъ функціями трехъ параметровъ $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$, $\frac{\delta_1}{\alpha_1}$ безконечно-малой подстановки $U(f)$ и четвертаго параметра $t$ (или $t'$); произвольныя жѐ постоянныя интегрированія опредѣлятся условіями: $t = 0$, $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$. Слѣдовательно, каждая безконечно-малая подстановка $U(f)$ образуетъ цѣлый непрерывный рядъ конечныхъ линейныхъ подстановокъ, характеризуемый однимъ параметромъ $t$, т. е. $\infty^1$ конечныхъ линейныхъ подстановокъ. Остается показать, что всякую конечную подстановку можно получить изъ этихъ безконечно-малыхъ.

Коэффиціенты $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ опредѣляются какъ функціи $t$ изъ соотношеній:

$$\frac{d\alpha}{dt}x_1 + \frac{d\beta}{dt}x_2 = \alpha_1(\alpha x_1 + \beta x_2) + \beta_1(\gamma x_1 + \delta x_2),$$

$$\frac{d\gamma}{dt}x_1 + \frac{d\delta}{dt}x_2 = \gamma_1(\alpha x_1 + \beta x_2) + \delta_1(\gamma x_1 + \delta x_2),$$

т. е.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1\alpha + \beta_1\gamma, \qquad \frac{d\beta}{dt} = \alpha_1\beta + \beta_1\delta,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1\alpha + \delta_1\gamma, \qquad \frac{d\delta}{dt} = \gamma_1\beta + \delta_1\delta.$$

Если при $t = 0$ начальныя значенія $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ обозначить черезъ $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$, $\delta_0$, то по строкѣ Тэйлора

$$\alpha = \alpha_0 + (\alpha_1\alpha_0 + \beta_1\gamma_0)t + \ldots \beta = \beta_0 + (\alpha_1\beta_0 + \beta_1\delta_0)t + \ldots$$

$$\gamma = \gamma_0 + (\gamma_1\alpha_0 + \delta_1\gamma_0)t + \ldots \delta = \delta_0 + (\gamma_1\beta_0 + \delta_1\delta_0)t + \ldots$$

слѣдовательно, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ суть функціи $\alpha_1 t$, $\beta_1 t$, $\gamma_1 t$, $\delta_1 t$, — всегда существующія; кромѣ того, эти функціи независимы между собою, такъ какъ детерминантъ Якоби

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial(\alpha_1 t)} & \frac{\partial a}{\partial(\beta_1 t)} & \frac{\partial a}{\partial(\gamma_1 t)} & \frac{\partial a}{\partial(\delta_1 t)} \\ \frac{\partial \beta}{\partial(\alpha_1 t)} & \frac{\partial \beta}{\partial(\beta_1 t)} & \frac{\partial \beta}{\partial(\gamma_1 t)} & \frac{\partial \beta}{\partial(\delta_1 t)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 0 \\ \beta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta & \delta \end{vmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

не равенъ нулю; слѣдовательно, всякая конечная подстановка $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ можетъ быть получена комбинаціей безконечно-малыхъ подстановокъ

$$U(f) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Разсмотримъ, далѣе, подгруппу линейныхъ унимодулярныхъ подстановокъ $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}_{\Delta=1}$.

Безконечно-малая линейная подстановка

$$x'_1 = (1 + \alpha_1 \delta t)\ x_1 + \beta_1 \delta t \,.\, x_2,$$
$$x'_2 = \gamma_1 \delta t \,.\, x_1 + (1 + \delta_1 \delta t)\, x_2$$

будетъ унимодулярной, если выполняется условіе

$$(1 + \alpha_1 \delta t)(1 + \delta_1 \delta t) - \beta_1 \gamma_1 \delta t^2 = 1$$

при всякомъ $\delta t$, то есть условіе

$$1 + (\alpha_1 + \delta_1)\,\delta t = 1,$$

если пренебречь безконечно-малою величиною втораго порядка; отсюда мы имѣемъ $\delta_1 = -\alpha_1$. Слѣдовательно, символъ безконечно-малой линейной унимодулярной подстановки долженъ имѣть видъ:

$$U_1(f) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 - \alpha_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2},$$

или

$$U_1(f) = \alpha_1\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \beta_1 x_2\frac{\partial f}{\partial x_1} + \gamma_1 x_1\frac{\partial f}{\partial x_2};$$

отсюда мы заключаемъ, что безконечно-малая линейная унимодулярная подстановка имѣетъ *два существенныхъ* параметра $\frac{\beta_1}{d_1}$, $\frac{\gamma_1}{d_1}$, такъ какъ въ выраженіи

$$\delta f = U_1(f) \,.\, \delta t$$

можно $\alpha_1$ вынесть за скобку и принять $\alpha_1 \delta t$ за безконечно-малое приращеніе $\delta t'$ новой переменной величины $t'$.

Конечно, двѣ безконечно-малыхъ линейныхъ унимодулярныхъ подстановки даютъ подстановку того-же типа; слѣдовательно, *всѣ безконечно-малыя линейныя унимодулярныя подстановки образуютъ группу съ* $\infty^2$ *различныхъ преобразованій.*

Въ случаѣ унимодулярныхъ подстановокъ какъ и въ общемъ случаѣ какихъ угодно линейныхъ подстановокъ, если перейти отъ соотношеній

$$\delta x_1 = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\,\delta t,$$
$$\delta x_2 = (\gamma_1 x_1 - \alpha_1 x_2)\,\delta t,$$

къ соотношеніямъ между конечными величинами, т. е. проинтегрировать систему дифференціальныхъ ур-ій d' Alembert'a:

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \gamma_1 x_1 - \alpha_1 x_2,$$

конечно, въ результатѣ получится линейное[1]) унимодулярное преобразованіе

---

1) Выше мы видѣли, что всякую подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ можно получить, комбинируя безконечно-малыя подстановки

$$U(f) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Если при этомъ $\delta_1 = -\alpha_1$, то не трудно показать, что детерминантъ $\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta$ конечной подстановки будетъ равенъ 1; въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{\partial(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\partial t} = \alpha\frac{\partial\delta}{\partial t} + \delta\frac{\partial\alpha}{\partial t} - \beta\frac{\partial\gamma}{\partial t} - \gamma\frac{\partial\beta}{\partial t}$$

$$x'_1 = \alpha x_1 + \beta x_2,$$
$$x'_1 = \gamma x_1 + \delta x_2,$$

у котораго $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ суть функціи двухъ параметровъ $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$ безконечно-малой подстановки $U(f)$ и третьяго параметра $t$ (или $t'$), удовлетворяющія условія $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; произвольныя же постоянныя интегрированія опредѣляются изъ условій: $t = o$, $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$.

Слѣдовательно, каждая безконечно-малая линейная унимодулярная подстановка образуетъ цѣлый непрерывный рядъ конечныхъ линейныхъ унимодулярныхъ подстановокъ, характеризуемый однимъ параметромъ $t$, т. е. $\infty^1$ конечныхъ линейныхъ унимодулярныхъ подстановокъ.

## § 6. Дифференціальныя уравненія инваріантовъ бинарной формы. Способъ Gordan'а.

Въ 1852 году Cayley[1]) и Sylvester[2]) нашли систему дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, опредѣляющую инваріанты данной бинарной формы.

Эти дифференціальныя уравненія еще раньше были найдены Aronhold'омъ, который положилъ ихъ въ основаніе своихъ изслѣдованій, представленныхъ имъ Кёнигсберскому Университету въ 1851 году, но эти изслѣдованія были опубликованы только въ 1863 году въ журналѣ Crell'я, Bd. 62.

Gordan въ своихъ лекціяхъ по теоріи инваріантовъ[3]) далъ слѣдующій весьма изящный выводъ этихъ дифферен-

---

или, принявъ во вниманіе формулы на страницѣ 28, получимъ

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \alpha(\gamma_1\beta + \delta_1\delta) + \delta(\alpha_1\alpha + \beta_1\gamma) - \beta(\gamma_1\alpha + \delta_1\gamma) - \gamma(\alpha_1\beta + \beta_1\delta) =$$
$$= (\alpha_1 + \delta_1)\Delta;$$

при начальныхъ условіяхъ $t=0$, $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=1$ и, слѣдовательно, $\Delta=1$, мы получимъ $\Delta = e^{(\alpha_1+\delta_1)t}$; слѣдовательно $\Delta = 1$, если $\delta_1 = -\alpha_1$.

1) Crelle's Journal. Bd. 47, S. 109.

2) Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 1852, Section VI.

3) Gordan. *Vorlesungen über Invariantentheorie,* herausgegeben von G. Kerschensteiner. Bd. 2. S. 119.

ціальныхъ уравненій, въ сущности сходный съ общимъ выводомъ Aronhold'а въ журналѣ Crelle'я, Bd. 62.

Будемъ исходить изъ опредѣленія инваріанта бинарной формы, приведеннаго въ § 1: цѣлая раціональная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ коэффиціентовъ бинарной формы $f(x_1, x_2)$ служитъ инваріантомъ послѣдней, если удовлетворяетъ тождественно равенству

$$J(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \Delta^\lambda J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n), \tag{1}$$

гдѣ $\Delta$ есть модуль линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, а количества $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ суть коэффиценты бинарной формы $\varphi(y_1, y_2)$, полученной изъ $f(x_1, x_2)$ при помощи этой линейной подстановки.

Модуль $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ удовлетворяетъ слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma}\gamma &= \Delta,\\
\frac{\partial\Delta}{\partial\alpha}\beta + \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma}\delta &= 0,\\
\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}\alpha + \frac{\partial\Delta}{\partial\delta}\gamma &= 0,\\
\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}\beta + \frac{\partial\Delta}{\partial\delta}\delta &= \Delta;
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

въ справедливости ихъ не трудно убѣдиться непосредственнымъ вычисленіемъ.

Если примѣнить къ обѣимъ частямъ равенства (1) четыре операціи

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial\gamma}\gamma,\\
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta + \frac{\partial}{\partial\gamma}\delta,\\
&\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha + \frac{\partial}{\partial\delta}\gamma,\\
&\frac{\partial}{\partial\beta}\beta + \frac{\partial}{\partial\delta}\delta
\end{aligned}$$

и принять во вниманіе равенства (2), то мы получимъ:

$$\frac{\partial J(a)}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial J(a)}{\partial \gamma}\gamma = \lambda J(a),$$

$$\frac{\partial J(a)}{\partial \alpha}\beta + \frac{\partial J(a)}{\partial \gamma}\delta = 0,$$

$$\frac{\partial J(a)}{\partial \beta}\alpha + \frac{\partial J(a)}{\partial \delta}\gamma = 0,$$

$$\frac{\partial J(a)}{\partial \beta}\beta + \frac{\partial J(a)}{\partial \delta}\delta = \lambda J(a);$$

эту же систему дифференціальныхъ уравненій можно представить въ другомъ видѣ, если замѣтимъ, что $J(a) = J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ есть сложная функція отъ количествъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$, входящихъ въ количества $a_0$, $a_1$, $a_2$, $\ldots$ $a_n$; такимъ образомъ мы получимъ слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{\partial J(a)}{\partial a_k}\left(\frac{\partial a_k}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial a_k}{\partial \gamma}\gamma\right) = \lambda J(a)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{\partial J(a)}{\partial a_k}\left(\frac{\partial a_k}{\partial \alpha}\beta + \frac{\partial a_k}{\partial \gamma}\delta\right) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{\partial J(a)}{\partial a_k}\left(\frac{\partial a_k}{\partial \beta}\alpha + \frac{\partial a_k}{\partial \delta}\gamma\right) = 0, \qquad (3)$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{\partial J(a)}{\partial a_k}\left(\frac{\partial a_k}{\partial \beta}\beta + \frac{\partial a_k}{\partial \delta}\delta\right) = \lambda J(a).$$

Въ § 1 мы замѣтили, преобразуя бинарную форму $f(x_1, x_2)$ посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, что коэффиціенты $a_0$, $a_1$, $a_2$, $\ldots$ $a_n$ преобразованной формы $\varphi(y_1, y_2)$ суть однородныя функціи каждой пары величинъ $(\alpha, \gamma)$ и $(\beta, \delta)$, при чемъ $a_k$ имѣетъ степень $n-k$ относительно $(\alpha, \gamma)$ и степень $k$ относительно $(\beta, \delta)$. Слѣдовательно, по теоремѣ Эйлера объ однородныхъ функціяхъ мы можемъ написать:

$$\frac{\partial a_k}{\partial \alpha}\alpha+\frac{\partial a_k}{\partial \gamma}\gamma=(n-k)\,a_k\,,$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial \beta}\beta+\frac{\partial a_k}{\partial \delta}\delta=\qquad k\,a_k\,.$$

Точно также изъ выраженій коэффиціента $a_k$ въ § 1 слѣдуетъ

$$\frac{\partial a_k}{\partial \alpha}\beta+\frac{\partial a_k}{\partial \gamma}\delta=(n-k)\,a_{k+1}\,,$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial \beta}\alpha+\frac{\partial a_k}{\partial \delta}\gamma=\qquad k\,a_{k-1}\,.$$

Такимъ образомъ уравненія (3) можно представить въ формѣ:

$$\sum_{k=0}^{k=n}(n-k)\frac{\partial J(a)}{\partial a_k}a_k\quad=\lambda J(a),$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}(n-k)\frac{\partial J(a)}{\partial a_k}a_{k+1}=0,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}\qquad k\frac{\partial J(a)}{\partial a_k}a_{k-1}=0,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n}\qquad k\frac{\partial J(a)}{\partial a_k}a_k\quad=\lambda J(a).$$

Эти уравненія должны имѣть мѣсто для всякой подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$; слѣдовательно, разсматривая ихъ относительно подстановки $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и обозначая $J(a_0,\,a_1,\,a_2,\,\ldots\,a_n)$ черезъ $J$, мы можемъ представить ихъ въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned}
&n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_0}a_0+(n-1)\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_1+(n-2)\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2+\ldots+1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_{n-1}}a_{n-1}=\lambda J,\\
&n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_0}a_1+(n-1)\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_2+(n-2)\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_3+\ldots+1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_{n-1}}a_n\quad=0,\\
&1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_0+\qquad 2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_1+\qquad 3\cdot\frac{\partial J}{\partial a_3}a_2+\ldots+n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_n}a_{n-1}=0,\\
&1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_1+\qquad 2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2+\qquad 3\cdot\frac{\partial J}{\partial a_3}a_3+\ldots+n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_n}a_n\quad=\lambda J.
\end{aligned}\tag{4}$$

Если сложить первое съ четвертымъ, то получится еще дифференціальное уравненіе инваріанта

$$n\frac{\partial J}{\partial a_0}a_0+n\frac{\partial J}{\partial a_1}a_1+n\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2+\ldots+n\frac{\partial J}{\partial a_n}a_n=2\lambda J,$$

или раздѣливъ обѣ части его на $n$ и полагая $\frac{2\lambda}{n}=\mu$ ($\mu$ по § 2 есть степень инваріанта), мы получимъ уравненіе

$$\frac{\partial J}{\partial a_0}a_0+\frac{\partial J}{\partial a_1}a_1+\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2+\ldots.+\frac{\partial J}{\partial a_n}a_n=\mu.J, \tag{5}$$

которое по теоремѣ Эйлера характеризуетъ однородность функціи $J$.

## § 7. Новый способъ выводить дифференціальныя уравненія инваріантовъ бинарной формы.

Будемъ исходить изъ опредѣленія инваріанта бинарной формы, приведеннаго въ § 4: цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ коэффиціентовъ бинарной формы $f(x_1, x_2)$ служитъ инваріантомъ послѣдней, если она совсѣмъ не измѣняется, когда бинарная форма подвергается преобразованію посредствомъ какой-нибудь подстановки подгруппы линейныхъ унимодулярныхъ подстановокъ.

Въ то время какъ перемѣнныя $x_1$, $x_2$ преобразуются линейною унимодулярною подстановкою $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$ въ перемѣнныя $y_1$, $y_2$, *коэффиціенты* $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ *переходятъ въ коэффиціенты* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *тоже посредствомъ линейныхъ унимодулярныхъ подстановокъ* [1]), которыя получатся въ явномъ видѣ, если разрѣшить относительно $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ систему уравненій § 1:

$$\frac{n-k\,!}{n\,!}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta+\frac{\partial}{\partial\gamma}\delta\right)^k f(\alpha,\gamma)=\alpha_k,\quad k=0,1,2,\ldots,n,$$

1) Не трудно доказать, что модуль подстановки $S_a$ для коэффиціентовъ $a$ равенъ степени модуля соотвѣтственной подстановки $S$ для перемѣнныхъ.

или другую систему тогоже параграфа:

$$\frac{k!}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial}{\partial\delta}\gamma\right)^{n-k} f(\beta,\delta)=\alpha_k,\quad k=0,1,2,\ldots,n.$$

Назовемъ эти выраженія для количествъ $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... $a_n$ *подстановкою* $S_a$. Очевидно, что подстановка $S_a$ имѣетъ три существенныхъ параметра — количества $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, связанныя соотношеніемъ $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Кромѣ того, очевидно, что двѣ подстановки $S_a$ и $S'_a$ даютъ составную подстановку $S''_a$ тогоже типа, потому что эта составная подстановка $S''_a$ соотвѣтствуетъ подстановкѣ $S''\begin{pmatrix}\alpha'' & \beta''\\ \gamma'' & \delta''\end{pmatrix}$ перемѣнныхъ $(x_1, x_2)$. Слѣдовательно, *линейныя унимодулярныя подстановки* $S_a$ *коэффиціентовъ* $a_0$, $a_1$, ... $a_n$, *соотвѣтствующія линейнымъ унимодулярнымъ подстановкамъ* $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$ *перемѣнныхъ* $(x_1, x_2)$, *образуютъ группу* $\infty^3$ *различныхъ попарно обратныхъ преобразованій.*

Если въ подстановкѣ $S_a$, имѣющей видъ

$$a'_k = \alpha_{k,0}\,a_0 + \alpha_{k,1}\,a_1 + \ldots + \alpha_{k,n}\,a_n,\ k=0,1,2,\ldots n, \qquad \text{(A)}$$

положить $\alpha_{0,0}$, $\alpha_{1,1}$, ... $\alpha_{n,n}$ соотвѣтственно равными $1+\beta_{0,0}\,\delta t$, $1+\beta_{1,1}\,\delta t$, ... $1+\beta_{n,n}\,\delta t$, а остальные коэффиціенты $\alpha_{i,k}$ — равными $\beta_{i,k}\,\delta t$, то мы получимъ безконечно-малую подстановку группы подстановокъ $S_a$, принявъ, конечно, во вниманіе, что детерминантъ изъ коэффиціентовъ подстановки долженъ равняться 1. Перенеся, затѣмъ, изъ вторыхъ частей конечныя члены $a_0$, $a_1$, ... $a_n$ въ первыя, мы получимъ выраженія приращеній $a'_k - a_k = \delta a_k$ количествъ $a_k$ при этомъ безконечно-маломъ преобразованіи:

$$\delta a_k = a_0\,\beta_{k,0}\,\delta t + a_1\,\beta_{k,1}\,\delta t + \ldots + a_n\,\beta_{k,n}\,\delta t,\ k=0,1,2,\ldots n,$$

или сокращено

$$\delta a_k = -\,\xi_k(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)\,\delta t\ ^{1)}.$$

---

1) Знакъ — ставимъ для большаго удобства въ дальнѣйшихъ вычисленіяхъ.

Слѣдовально, какая-нибудь функція $F(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ получаетъ приращеніе:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial a_0}\delta a_0 + \frac{\partial F}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial F}{\partial a_2}\delta a_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\delta a_n =$$

$$= -\left\{\frac{\partial F}{\partial a_0}\xi_0 + \frac{\partial F}{\partial a_1}\xi_1 + \frac{\partial F}{\partial a_2}\xi_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\xi_n\right\}.\delta t, \qquad \text{(B)}$$

или сокращено $\delta F = V(F).\delta t.$

Въ то время какъ конечныя преобразованія (А) группы $S_a$ опредѣляются сравнительно сложно, весьма не трудно опредѣлить ея безконечно-малыя преобразованія; въ этомъ мы можемъ уже замѣтить плодотворность идеи норвежскаго ученаго о группахъ безконечно-малыхъ преобразованій.

Преобразуемъ перемѣнныя $x_1$, $x_2$ бинарной формы $f(x_1, x_2)$ посредствомъ унимодулярной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$, а коэффиціенты ея посредствомъ соотвѣтственной унимодулярной подстановки $S_a$, тогда бинарная форма $f(x_1, x_2)$ обратится въ бинарную форму $\varphi(y_1, y_2)$, равную ей самой: $f(x_1, x_2) = \varphi(y_1, y_2)$. Слѣдовательно, при безконечно-малыхъ преобразованіяхъ $S\begin{pmatrix}1+\alpha_1\,\delta t & \beta_1\,\delta t\\ \gamma_1\,\delta t & 1+\delta_1\,\delta t\end{pmatrix}_{\Delta=1}$ и $S_a$ приращеніе $\delta f(x_1, x_2)$ должно равняться нулю независимо отъ $\delta t$; но при этихъ двухъ преобразованіяхъ приращеніе будетъ имѣть видъ:

$$\delta f(x_1 x_2) = \{U_1(f) - V(f)\}\delta t,$$

гдѣ $U_1(f)$ по § 5 равно $(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 - \alpha_1 x_2)\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$, а $V(f)$ дано выше формулой (В). Слѣдовательно, мы получаемъ равенство:

$$(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (\gamma_1 x_1 - \alpha_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial a_0}\xi_0 - \frac{\partial f}{\partial a_1}\xi_1 - \frac{\partial f}{\partial a_2}\xi_2 - \ldots - \frac{\partial f}{\partial a_n}\xi_n = 0,$$

которое должно имѣть мѣсто при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ $x_1$, $x_2$, т. е. коэффиціенты всѣхъ его членовъ по ихъ приведеніи должны быть нулями. Это равенство въ развернутой формѣ имѣетъ видъ:

$$(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\left[n a_0 x_1^{n-1} + \binom{n}{1}(n-1)\, a_1 x_1^{n-2} x_2 + \ldots\right]$$

$$+(\gamma_1 x_1 - \alpha_1 x_2)\left[\qquad + \binom{n}{1} \qquad 1.a_1 x_1^{n-1} \qquad + \ldots + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{1}(n-1)\, a_{n-1} x_1 x_2^{n-2} + n a_n x_2^{n-1}\right]$$

$$-\left[\xi_0 x_1^n + \binom{n}{1}\xi_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + \xi_n x_2^n\right] \equiv 0\,;$$

слѣдовательно,

$$\begin{array}{llllll}
\xi_0 & = & n\, a_0 & .\alpha_1 + & 0 & .\beta_1 + \qquad n\,.\,a_1\,.\gamma_1, \\
\xi_1 & = & (n-2)\, a_1 & .\alpha_1 + & 1\,.\,a_0 & .\beta_1 + (n-1)\,.\,a_2\,.\gamma_1, \\
\xi_2 & = & (n-4)\, a_2 & .\alpha_1 + & 2\,.\,a_1 & .\beta_1 + (n-2)\,.\,a_3\,.\gamma_1, \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & \ldots \qquad (6) \\
\xi_{n-1} & = & (n-2n+2)\, a_{n-1} & .\alpha_1 + & (n-1)\,.\,a_{n-2} & .\beta_1 + \qquad 1\,.\,a_n\,.\gamma_1, \\
\xi_n & = & (n-2n)\, a_n & .\alpha_1 + & n\,.\,a_{n-1} & .\beta_1 + \qquad 0 \quad .\gamma_1.
\end{array}$$

Такимъ образомъ мы опредѣлили безконечно-малыя подстановки группы $S_a$.

Теперь не трудно вывесть дифференціальныя уравненія инваріантовъ бинарной формы, исходя изъ ихъ опредѣленія, приведеннаго въ началѣ этого параграфа.

Приращеніе инваріанта $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ при какихъ угодно безконечно-малыхъ преобразованіяхъ группы $S_a$ должно равняться нулю; слѣдовательно,

$$V[J(a)] = \frac{\partial J(a)}{\partial a_0}\xi_0 + \frac{\partial J(a)}{\partial a_1}\xi_1 + \frac{\partial J(a)}{\partial a_2}\xi_2 + \ldots + \frac{\partial J(a)}{\partial a_n}\xi_n \qquad (7)$$

должно равняться нулю независимо отъ $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$; поэтому, принимая во вниманіе значенія (6) количествъ $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, мы получаемъ три дифференціальныхъ уравненія инваріантовъ бинарной формы:

$$2\left[1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_1+2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2+3\cdot\frac{\partial J}{\partial a_3}a_3+\ldots+n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_n}a_n\right]-n\mu.J=0,$$
$$\left(\frac{n\mu}{2}=\lambda\right)$$

$$1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_0+2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_1+3\cdot\frac{\partial J}{\partial a_3}a_2+\ldots+n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_n}a_{n-1}=0, \tag{D}$$

$$n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_0}a_1+(n-1)\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_2+(n-2)\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_3+\ldots+1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_{n-1}}a_n=0;$$

этимъ дифференціальнымъ уравненіямъ должна удовлетворять цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$, служащая инваріантомъ бинарной формы.

Наоборотъ, если цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ удовлетворяетъ этимъ дифференціальнымъ уравненіямъ, то не трудно показать, что она служитъ инваріантомъ бинарной формы.

Въ самомъ дѣлѣ, если цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ удовлетворяетъ уравненіямъ (D), то приращеніе этой функцій при всякомъ безконечно-маломъ преобразованіи группы $S_a$ равно нулю. Но такъ какъ всякую конечную подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$ можно получить послѣдовательнымъ примѣненіемъ безконечно-малыхъ подстановокъ

$$U_1(f)=(\alpha_1 x_1+\beta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(\gamma_1 x_1-\delta_1 x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}\text{[1]},$$

то и всякую конечную подстановку группы $S_a$ можно получить послѣдовательнымъ примѣненіемъ безконечно-малыхъ подстановокъ этой группы:

$$V(f)=\frac{\partial f}{\partial a_0}\xi_0+\frac{\partial f}{\partial a_1}\xi_1+\frac{\partial f}{\partial a_2}\xi_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial a_n}\xi_n;$$

1) См. § 5.

слѣдовательно, приращеніе функціи $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ и при всякой конечной подстановкѣ группы $S_a$ будетъ равно нулю, если оно равно нулю для всякой безконечно-малой подстановки $V(f)$, и функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ будетъ инваріантомъ бинарной формы.

Присоединимъ къ системѣ дифференціальныхъ уравненій (D) еще уравненіе

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} a_0 + \frac{\partial J}{\partial a_1} a_1 + \frac{\partial J}{\partial a_2} a_2 + \ldots + \frac{\partial J}{\partial a_n} a_n = \mu J, \qquad (D')$$

характеризующее по теоремѣ Эйлера однородность функціи $J$, и еще уравненіе

$$n \cdot \frac{\partial J}{\partial a_0} a_0 + (n-1) \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_1 + (n-2) \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_2 + \ldots + 1 \cdot \frac{\partial J}{a_{n-1}} a_{n-1} = \lambda J \qquad (D'')$$

которое получается вычитаніемъ перваго уравненія (D) изъ уравненія (D′), предварительно умноженнаго на $n$. Такимъ образомъ получится система дифференціальныхъ уравненій (D), (D′), (D″) совершенно тождественная съ системою уравненій 4 и 5 предыдущаго параграфа.

## § 8. Значеніе дифференціальныхъ уравненій инваріантовъ бинарной формы.

Если обозначить сокращенно первыя части уравненій (D) предыдущаго параграфа черезъ $-X_3(J)$, $X_2(J)$ и $X_1(J)$ то символъ (7) всѣхъ безконечно-малыхъ подстановокъ группы $S_a$ приметъ видъ

$$V(J) = \alpha_1 X_3(J) + \beta_1 X_2(J) + \gamma_1 X_1(J);$$

слѣдовательно, $X_3(J)$, $X_2(J)$, $X_1(J)$ суть ничто другое какъ символы трехъ безконечно-малыхъ подстановокъ группы $S_a$, соотвѣтствующихъ частнымъ значеніямъ $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$:

$$1,\ 0,\ 0; \quad 0,\ 1,\ 0; \quad 0,\ 0,\ 1.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что дифференціальныя уравненія (D) предыдущаго параграфа:

$$X_3(J) = 0, \quad X_2(J) = 0, \quad X_1(J) = 0,$$

опредѣляющія инваріанты бинарной формы, имѣютъ слѣдующій смыслъ: *для того, чтобы цѣлая раціональная и однородная функція* $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ *служила инваріантомъ бинарной формы, т. е. не измѣнялась при всѣхъ преобразованіяхъ группы* $S_a$, *вполнѣ достаточно, чтобы она не измѣнялась отъ трехъ безконечно-малыхъ преообразованій* $X_3(J)$, $X_2(J)$ и $X_1(J)$ *группы* $S_a$.

Далѣе, мы докажемъ, что изъ трехъ уравненій

$$X_3(J) = 0, \quad X_2(J) = 0, \quad X_1(J) = 0$$

только два существенно необходимы, а третье есть слѣдствіе этихъ двухъ.

Разсмотримъ два линейныхъ выраженія съ частными производными перваго порядка:

$$Z_2(f) = A_0'' \frac{\partial f}{\partial a_0} + A_1'' \frac{\partial f}{\partial a_1} + A_2'' \frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots + A_n'' \frac{\partial f}{\partial a_n} = \sum_0^n A_k'' \frac{\partial f}{\partial a_k},$$

$$Z_1(f) = A_0' \frac{\partial f}{\partial a_0} + A_1' \frac{\partial f}{\partial a_1} + A_2' \frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots + A_n' \frac{\partial f}{\partial a_n} = \sum_0^n A_k' \frac{\partial f}{\partial a_k},$$

гдѣ $A_k''$ и $A_k'$ суть функціи количествъ $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$.

Возьмемъ операцію $Z_1$ отъ $Z_2(f)$; получится

$$Z_1[Z_2(f)] = \sum_0^n B_k'' \frac{\partial f}{\partial a_k} + \sum A_k' A_i'' \frac{\partial^2 f}{\partial a_k \partial a_i};$$

точно также

$$Z_2[Z_1(f)] = \sum_0^n B_k' \frac{\partial f}{\partial a_k} + \sum A_k' A_i'' \frac{\partial^2 f}{\partial a_k \partial a_i};$$

слѣдовательно, выраженіе

$$Z_1[f_2(f)] - Z_2[Z_1(f)]$$

есть линейное и перваго порядка относительно частныхъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial a_k}$. Такимъ образомъ, мы видимъ, если операціи $Z_2$ и $Z_1$ линейныя и перваго порядка относительно частныхъ производныхъ $\frac{\partial}{\partial a_k}$, то операція $(Z_1 Z_2 - Z_2 Z_1)$ тоже будетъ линейная и перваго порядка относительно этихъ частныхъ производныхъ.

Не трудно видѣть, что функція, удовлетворяющая уравненіямъ $Z_2(f) = 0$ и $Z_1(f) = 0$, удовлетворяетъ и уравненію

$$Z_3(f) = (Z_1 Z_2 - Z_2 Z_1) f = 0,$$

потому что послѣднее уравненіе можно представить въ видѣ

$$Z_1[Z_2(f)] - Z_2[Z_1(f)] = 0,$$

гдѣ каждый членъ обращается въ нуль въ силу равенствъ $Z_2(f) = 0$ и $Z_1(f) = 0$.

Слѣдовательно, имѣя два линейныхъ уравненія съ частными производными перваго порядка

$$Z_2(f) = 0 \quad Z_1(f) = 0,$$

мы можемъ получить уравненіе

$$Z_3(f) = (Z_1 Z_2 - Z_2 Z_1) f = 0,$$

какъ слѣдствіе двухъ данныхъ, но не равное ихъ линейному сочетанію. Затѣмъ, посредствомъ операцій

$$(Z_2 Z_3 - Z_3 Z_2) \quad \text{и} \quad (Z_1 Z_3 - Z_3 Z_1)$$

можемъ получить еще два уравненія

$$Z_5(f) = 0 \quad \text{и} \quad Z_4(f) = 0; \quad \text{и т. д.}$$

наконецъ, мы должны получить такую систему равненій

$$Z_m(f) = 0, \quad Z_{m-1}(f) = 0 \; . \; . \; . \; Z_2(f) = 0 \text{ и } Z_1(f) = 0,$$

что дальнѣйшее примѣненіе нашихъ операцій даютъ линейныя сочетанія уравненій, уже полученныхъ; тогда система уравненій называется *полною* [1]).

Не трудно видѣть, что уравненіе $X_3(J) = 0$ инваріан-

---

1) Этотъ процесъ долженъ имѣть конецъ, потому что для $n+1$ перемѣнныхъ могутъ быть только $n+1$ линейно независимыхъ линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка.

товъ бинарной формы есть слѣдствіе другихъ двухъ уравненій $X_2(J)=0$ и $X_1(J)=0$, и есть ничто другое какъ уравненіе

$$(X_1X_2-X_2X_1)J=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$X_1(J)=n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_0}a_1+(n-1)\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_2+(n-2)\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_3+\ldots+ \\ +1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_{n-1}}a_n,$$

$$X_2(J)=1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_0+\quad 2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_1+\quad 3\cdot\frac{\partial J}{\partial a_3}a_2+\ldots+ \\ +n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_n}a_{n-1}$$

слѣдовательно,

$$X_1[X_2(J)]=n\frac{\partial J}{\partial a_1}a_1+2(n-1)\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2+3(n-2)\frac{\partial J}{\partial a_3}a_3+\ldots+ \\ +n\cdot1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_n}a_n+\sum k(n-i)\frac{\partial^2 J}{\partial a_k\,\partial a_i}a_{k-1}a_{i+1},$$

$$X_2[X_1(J)]=n\frac{\partial J}{\partial a_0}a_0+2(n-1)\frac{\partial J}{\partial a_1}a_1+3(n-2)\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2+\ldots+ \\ +n\cdot1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_{n-1}}a_{n-1}+\sum k(n-i)\frac{\partial^2 J}{\partial a_k\,\partial a_i}a_{k-1}a_{k+1};$$

отсюда получаемъ выраженіе

$$(X_1X_2-X_2X_1)J=-n\frac{\partial J}{\partial a_0}a_0-(n-2)\frac{\partial J}{\partial a_1}a_1-(n-4)\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2-\ldots- \\ -(n-2n+2)\frac{\partial J}{\partial a_{n-1}}a_{n-1}+n\frac{\partial J}{\partial a_n}a_n$$

$$=2\left[1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_1+2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2+\ldots+n\frac{\partial J}{\partial a_n}a_n\right]-n\mu J,$$

которое, будучи приравнено нулю, и даетъ намъ третье уравненіе инваріантовъ

$$X_3(J)=0.$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: *для того, чтобы цѣлая, раціональная и однородная функція* $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ *служила инваріантомъ бинарной формы, необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она удовлетворяла двумъ дифференціальнымъ уравненіямъ*

$$X_2(J)=0 \quad \text{и} \quad X_1(J)=0,$$

*или, что тоже самое, чтобы она не измѣнялась отъ двухъ безконечно-малыхъ преобразованій* $X_1(f)$ и $X_2(f)$ *группы* $S_a$.

Не трудно показать, что система трехъ дифференціальныхъ уравненій

$$X_3(J)=0,\ X_2(J)=0,\ X_1(J)=0.$$

есть *полная система.*

Составимъ выраженія $(X_1X_3-X_3X_1)J$ и $(X_2X_3-X_3X_2)J$:

$$(X_1X_3-X_3X_1)J=$$

$$=n\cdot n\frac{\partial J}{\partial a_0}a_1+(n-1)(n-2)\frac{\partial J}{\partial a_1}a_2+$$

$$+(n-2)(n-4)\frac{\partial J}{\partial a_2}a_3+\ldots+1.(n-2n+2)\frac{\partial J}{\partial a_{n-1}}a_n$$

$$-(n-2)n\frac{\partial J}{\partial a_0}a_1-(n-4)(n-1)\frac{\partial J}{\partial a_1}a_2-$$

$$-(n-6)(n-2)\frac{\partial J}{\partial a_2}a_3-\ldots-(n-2n).1\frac{\partial J}{\partial a_{n-1}}a_n$$

$$=2n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_0}a_1+2(n-1)\frac{\partial J}{\partial a_1}a_2+2(n-2)\frac{\partial J}{\partial a_2}a_3+$$

$$+\ldots 2\cdot 1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_{n-1}}a_n$$

$$=2[X_1(J)];$$

$$(X_2X_3-X_3X_2)J=$$

$$=1.(n-2)\frac{\partial J}{\partial a_1}a_0+2(n-4)\frac{\partial J}{\partial a_2}a_1+3(n-6)\frac{\partial J}{\partial a_3}a_2+$$

$$+\ldots+n(n-2n)\frac{\partial J}{\partial a_n}a_{n-1}$$

$$-n\cdot 1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_0-(n-2)\cdot 2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_1-(n-4)\cdot 3\cdot\frac{\partial J}{\partial a_3}a_2-$$
$$-\ldots-(n-2n+2)\cdot n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_n}a_{n-1}$$
$$=-2\frac{\partial J}{\partial a_1}a_0-2\cdot 2\frac{\partial J}{\partial a_2}a_1-2\cdot 3\frac{\partial J}{\partial a_3}a_2-\ldots-2\cdot n\frac{\partial J}{\partial a_n}a_{n-1}$$
$$=-2\left[X_2(J)\right];$$

отсюда заключаемъ, что наши операціи не даютъ новыхъ уравненій, линейно независимыхъ отъ прежнихъ трехъ, и слѣдовательно система

$$X_3(J)=0,\ X_2(J)=0,\ X_1(J)=0$$

есть полная [1]).

Если $n=2$, то мы имѣемъ

$$X_2(J)=1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_0+2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_1,$$
$$X_1(J)=2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_0}a_1+1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_2;$$

слѣдовательно,

$$X_3(J)=(X_1X_2-X_2X_1)J=-2\frac{\partial J}{\partial a_0}a_0+2\frac{\partial J}{\partial a_2}a_2$$

или

$$a_1X_3(J)=-a_0X_1(J)+a_2X_2(J);$$

отсюда мы видимъ, что при $n=2$ два изъ дифференціальныхъ уравненій

$$X_3(J)=0, X_2(J)=0, X_1(J)=0$$

образуютъ полную систему. Тоже самое имѣетъ мѣсто при $n=1$.

---

1) Это вытекаетъ также какъ слѣдствіе изъ основнаго предложенія теоріи непрерывныхъ группъ Софуса Ли: *Для того, чтобы $r$ линейно независимыхъ безконечно-малыхъ преобразованій $X_1(f)$, $X_2(f)$, ... $X_r(f)$ образовали непрерывную группу $\infty^r$ попарно обратныхъ преобразованій, заключающую въ себѣ всѣ конечныя преобразованія, которыя образуются посредствомъ всякаго безконечно-малаго преобразованія $X(f)=e_1X_1(f)+e_2X_2(f)+\ldots+e_nX_n(f)$, необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы каждое изъ выраженій $(X_iX_k-X_kX_i)f$ равнялось линейному сочетанію выраженій $X_1(f)$, $X_2(f)$, ... $X_r(f)$.*

## § 9. Конечныя подстановки, образуемыя безконечно-малыми преобразованіями $X_2(J)$ и $X_1(J)$.

Въ предыдущемъ параграфѣ мы показали, что цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ только тогда служитъ инваріантомъ бинарной формы, когда она не измѣняется отъ двухъ безконечно-малыхъ преобразованій $X_2(J)$ и $X_1(J)$; но если она не измѣняется отъ безконечно-малыхъ преобразованій $X_2(J)$ и $X_1(J)$, то, конечно, она не измѣняется отъ конечныхъ преобразованій, получаемыхъ послѣдовательными примѣненіями этихъ безконечно-малыхъ преобразованій $X_2(J)$ и $X_1(J)$. Такимъ образомъ, для того, чтобы цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ служила инваріантомъ бинарной формы, необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она не измѣнялась отъ конечныхъ преобразованій, получаемыхъ безконечно-малыми преобразованіями $X_2(J)$ и $X_1(J)$.

Найдемъ эти двѣ системы[1]) конечныхъ преобразованій, которыя вполнѣ опредѣляютъ инваріантъ бинарной формы.

При этихъ безконечно-малыхъ преобразованіяхъ функція $J$ получаетъ безконечно-малыя приращенія:

$$\delta'' J = \left[1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + \quad 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 + \ldots + n \cdot \frac{\partial J}{\partial a_n} \quad a_{n-1}\right] \delta t\,,$$

$$\delta' J = \left[n \cdot \frac{\partial J}{\partial a_0} a_1 + (n-1) \frac{\partial J}{\partial a^1} a_2 + \ldots + 1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_{n-1}} a_n \quad\right] \delta t:$$

полагая послѣдовательно $J = a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, мы получимъ безконечно-малыя приращенія

$$1)\quad \delta'' a_0 = 0,\ \ \delta'' a_1 = 1\,.\,a_0\,\delta t,\ \ \delta'' a_2 = 2\,.\,a_1\,\delta t, \ldots \delta'' a_n = n\,.\,a_{n-1}\,\delta t,$$

$$2)\quad \delta' a_0 = n a_1\,\delta t,\ \ \delta' a_1 = (n-1)\,.\,a_2\,\delta t,\ \ \delta' a_2 = (n-2)\,.\,a_3\,\delta t, \ldots$$
$$\delta' a_{n-1} = 1\,.\,a_n\,\delta t,\ \ \delta' a_n = 0; \qquad \text{(A)}$$

---

1) Каждая изъ этихъ системъ въ отдѣльности составляетъ *группу* $\infty^1$ преобразованій; *см.* Sophus Lie. *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitezimalen Transformationen.* (Kap. 2). Leipzig. 1891; это слѣдуетъ также изъ ихъ формулъ (B) и (C).

первая система имѣетъ интегралы вида

$$a_0 = c_0,\ a_1 = c_0 t + c_1,\ a_2 = c_0 t^2 + 2 c_1 t + c_2, \ldots \qquad (B)$$

это и есть система конечныхъ преобразованій, получаемыхъ безконечно-малымъ преобразованіемъ $X_2(J)$.

Возьмемъ цѣлую, раціональную и однородную функцію $J$ отъ этихъ интеграловъ, тогда $\delta'' J = 0$ и, слѣдовательно,

$$J(c_0,\ c_0 t + c_1,\ c_0 t^2 + 2 c_1 t + c_2, \ldots) = C,$$

или полагая $t = 0$, получимъ $C = J(c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_n)$; слѣдовательно, функціональное соотношеніе

$$J(c_0,\ c_0 t + c_1,\ c_0 t^2 + 2 c_1 t + c_2, \ldots) = J(c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots c_n)$$

совершенно равносильно дифференціальному соотношенію $\delta'' J = 0$; это же функціональное соотношеніе есть ничто иное какъ условіе инваріантности функціи $J$ относительно преобразованій (B), соотвѣтствующихъ линейной унимодулярной подстановкѣ:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + t y_2, \\ x_2 &= y_2. \end{aligned} \qquad (8)$$

Точно также вторая система уравненій (A) имѣетъ интегралы вида

$$a_n = c_n,\ a_{n-1} = c_n t + c_{n-1},\ a_{n-2} = c_n t^2 + 2 c_{n-1} t + c_{n-2}, \ldots, \quad (C),$$

и эта система преобразованій коэффиціентовъ $c_n,\ c_{n-1}, \ldots c_0$ въ коэффиціенты $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots\ a_0$, соотвѣтствуетъ линейной унимодулярной подстановкѣ

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= \tau y_1 + y_2. \end{aligned} \qquad (9)$$

*Слѣдовательно, для того, чтобы цѣлая раціональная и однородная функція $J(a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots a_n)$ служила инваріантомъ бинарной формы необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она удовлетворяла равенству*

$$J(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n) = J(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)$$

*относительно двухъ линейныхъ унимодулярныхъ подстановокъ*

$$T\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ и } R\begin{pmatrix}1 & 0\\ \tau & 1\end{pmatrix}.$$

Не трудно также показать, что всякую линейную унимодулярную подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$ можно составить изъ подстановокъ $T$ и $R$. Въ самомъ дѣлѣ, если взять подстановки $T$ и $R$, то составная изъ нихъ будетъ

$$TR = \begin{pmatrix}1+t\tau & t\\ \tau & 1\end{pmatrix};$$

возьмемъ еще подстановку $T'\begin{pmatrix}1 & t'\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, тогда составная

$$TRT' = \begin{pmatrix}1+t\tau & (1+t\tau)t'+t\\ \tau & \tau t'+1\end{pmatrix};$$

если

$$TRT' = S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1},$$

то

$$\tau=\gamma,\ t=\frac{\alpha-1}{\gamma},\ t'=\frac{\delta-1}{\gamma};$$

слѣдовательно, можно найти такія значенія $\tau$, $t$, $t'$, чтобы подстановка $TRT'$ представляла $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$, если только $\gamma \neq 0$; если же $\gamma=0$, то данная унимодулярная подстановка $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \frac{1}{\alpha}\end{pmatrix}$ равна $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \tau & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\tau\alpha & \frac{1}{\alpha}-\tau\beta\end{pmatrix}$, и слѣдовательно равна подстановкѣ $RTR'T'$; причемъ подстановку $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\tau\alpha & \frac{1}{\alpha}-\tau\beta\end{pmatrix}$ всегда можно представить черезъ $TR'T'$, потому что $-\tau\alpha \neq 0$, ибо $\alpha \neq 0$, иначе модуль $\Delta=\alpha\delta-\beta\gamma$ равнялся бы нулю.

Наконецъ, подобно предыдущему, мы можемъ найти такую подстановку, чтобы условіе инваріантности относительно ней было равносильно равенству $X_3(J)=0$, или равенству

$$\delta''' J = \left[ n\frac{\partial J}{\partial a_0} a_0 + (n-2)\frac{\partial J}{\partial a_1} a_1 + (n-4)\frac{\partial J}{\partial a_2} a_2 + \ldots + \right.$$
$$\left. + (n-2n)\frac{\partial J}{\partial a_n} a_n \right] \delta t = 0.$$

Для этого надо найти систему конечныхъ преобразованій, получаемыхъ послѣдовательнымъ примѣненіемъ безконечно-малыхъ преобразованій $X_3(J)$.

Полагая въ послѣдней формулѣ $J = a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n$, мы получимъ выраженія безконечно-малыхъ приращеній:

$$\delta''' a_0 = n a_0 \delta t,\quad \delta''' a_1 = (n-2) a_1 \delta t,\quad \delta''' a_2 = (n-4) a_2 \delta t, \ldots$$
$$\delta''' a_n = (n-2n) a_n \delta t;$$

интегрируя эту систему, мы получимъ:

$$a_0 = e^{nt+\sigma_0},\quad a_1 = e^{(n-2)t+\sigma_1},\quad a_2 = e^{(n-4)t+\sigma_2}, \ldots\ a_n = e^{(n-2n)t+\sigma_n};$$

или, обозначивъ $e^{\sigma_0}$, $e^{\sigma_1}$, $e^{\sigma_2}$, ... $e^{\sigma_n}$ соотвѣтственно черезъ $c_0,\ c_1,\ c_2\ \ldots\ c_n$, получимъ

$$a_0 = c_0 e^{nt},\quad a_1 = c_1 e^{(n-2)t},\quad a_2 = c_2 e^{(n-4)t}, \ldots\ a_n = c_n e_n^{(n-2n)t}; \quad \text{(D)}$$

это и есть система конечныхъ преобразованій, получаемыхъ при помощи безконечно-малаго преобразованія $X_3(J)$.

Если взять цѣлую, раціональную и однородную функцію $J$ отъ выраженій (D), то $\delta''' J$ будетъ равно нулю, и слѣдовательно

$$J(c_0 e^{nt},\ c_1 e^{(n-2)t},\ c_2 e^{(n-4)t}, \ldots\ c_n e^{(n-2n)t}) = C;$$

а полагая $t=0$, получимъ $C = J(c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots\ c_n)$; слѣдовательно, функція $J$ удовлетворяетъ функціональному уравненію

$$J(c_0 e^{nt},\ c_1 e^{(n-2)t},\ c_2 e^{(n-4)t}, \ldots\ c_n e^{(n-2n)t}) = J(c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots\ c_n) \quad \text{(E)}$$

т. е. не измѣняется отъ преобразованій (D).

Конечныя преобразованія (D) можно представить въ такомъ видѣ:

$$a_0 = c_0 e^{nt}, \quad a_1 = c_1 e^{nt} e^{-2t}, \quad a_2 = c_2 e^{nt} e^{-4t}, \ldots \quad a_n = c_n e^{nt} e^{-2nt}$$

слѣдовательно, эти преобразованія коэффиціентовъ бинарной формы соотвѣтствуютъ составной линейной унимодулярной подстановкѣ перемѣнныхъ $(x_1, x_2)$:

$$\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

или иначе — подстановкѣ

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} \end{pmatrix},$$

если положить $e^t = \sigma$.

Подстановка $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$, или иначе — подстановка $\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$, какъ мы знаемъ, преобразуетъ перемѣнныя бинарной формы такъ, что соотвѣтственное преобразованіе ея коэффиціентовъ не измѣняетъ цѣлой, раціональной и однородной функціи $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$, а даетъ ей только факторъ $e^{n\mu t} = \sigma^{n\mu}$; слѣдовательно, для выполненія соотношенія (E) необходимо, чтобы преобразованіе коэффиціентовъ бинарной формы, соотвѣтствующее подстановкѣ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma^{-2} \end{pmatrix}$, не измѣняя функціи $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$, давало бы факторъ $e^{-n\mu t} = \sigma^{-n\mu}$; это же возможно только въ томъ случаѣ, если функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ *изобарна*, и вѣсъ ея равенъ $\frac{n\mu}{2}$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что условіе неизмѣняемости цѣлой, раціональной и однородной функціи $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ относительно безконечно-малаго преобразованія $X_3(J)$, равносильно условію изобарности съ вѣсомъ $\frac{n\mu}{2}$.

Изъ всего предыдущаго слѣдуетъ, что *цѣлая раціональная и однородная функція* $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ *коэффи-*

*ціентовъ* $a_0$, $a_1$, $a_2$, . . . $a_n$ *бинарной формы, служитъ инваріантомъ послѣдней, если выполняются условія: во-первыхъ, если она изобарна съ вѣсомъ* $\frac{n\mu}{2}$ *(гдѣ* $\mu$ *— порядокъ инваріанта), и во-вторыхъ, если она удовлетворяетъ уравненіямъ съ частными производными*

$$X_2(J) = 1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + \quad 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 + \quad 3 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_3} a_2 + \ldots + \\ + n \frac{\partial J}{\partial a_n} a_{n-1} = 0,$$

$$X_1(J) = n \frac{\partial J}{\partial a_0} a_1 + (n-1) \frac{\partial J}{\partial a_1} a_2 + (n-2) \frac{\partial J}{\partial a_2} a_3 + \ldots + \\ + 1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_{n-1}} a_n = 0.$$

Теперь мы докажемъ, что послѣднее условіе $X_1(J) = 0$ можетъ быть опущено, потому что оно вытекаетъ изъ остальныхъ.

Мы знаемъ, что

$$(X_2 X_1 - X_1 X_2) J = X_3(J) = \sum_0^n (n-2i) \frac{\partial J}{\partial a_i} a_i;$$

если же взять изобарную функцію $J$ съ вѣсомъ $p$ въ видѣ суммы $\sum A \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}$, то

$$\sum_0^n (n-2i) \frac{\partial J}{\partial a_i} a_i = \sum A \,.\, [(n-2\,.\,0) e_0 + (n-2\,.\,1) e_1 + \ldots + \\ + (n-2\,.\,n) e_n] \, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}$$

$$= (n\mu - 2p) \,.\, \sum A \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}$$

$$= \chi \,.\, J;$$

слѣдовательно, операція $X_3$ измѣняетъ изобарную функцію $J$ съ вѣсомъ $p$ на постоянный множитель $\chi = n\mu - 2p$, который будемъ называть *эксцессомъ* изобарной функціи $J$. Очевидно, что условіе $X_3(J) = 0$ тождественно съ условіемъ $\chi = 0$ для изобарной функціи $J$.

Изъ соотношенія $(X_2 X_1 - X_1 X_2) J = \chi J$, слѣдуетъ соотношеніе

$$(X_2 X_1 - X_1 X_2) X_1 J = (\chi - 2) X_1 J,$$

потому что операція $X_1$ повышаетъ вѣсъ функціи $J$ на единицу, а эксцессъ $\chi = n\mu - 2p$ понижаетъ на 2. Кромѣ того, мы имѣемъ соотношеніе

$$X_1 (X_2 X_1 - X_1 X_2) J = \chi X_1 (J);$$

изъ этихъ двухъ соотношеній, складывая ихъ почленно, получимъ соотношеніе

$$(X_2 X_1^2 - X_1^2 X_2) J = 2 (\chi - 1) X_1 J;$$

способомъ отъ $\nu$ къ $\nu + 1$ можемъ доказать

$$(X_2 X_1^\nu - X_1^\nu X_2) J = \nu (\chi - \nu + 1) X_1^{\nu - 1} (J).$$

Пусть однородная изобарная функція $J$ имѣетъ эксцессъ $\chi$, равный нулю, и удовлетворяетъ уравненію $X_2(J) = 0$; тогда послѣдняя формула дастъ рядъ соотношеній, если въ ней послѣдовательно положить $\nu = 1, 2, 3, \ldots$:

$$X_2 X_1 (J) = 0, \quad X_2 X_1^2 (J) = -2.1 X_1 (J),$$
$$X_2 X_1^3 (J) = -3.2 X_1^2 (J), \ldots;$$

но операція $X_1$ повышаетъ на единицу вѣсъ изобарной функціи $J$, который имѣетъ высшій предѣлъ $p = n\mu$, слѣдовательно въ ряду $X_1 J$, $X_1^2 J$, $X_1^3 (J), \ldots$ мы встрѣтимъ $X_1^\nu (J) \equiv 0$; тогда въ силу нашихъ соотношеній $X_2 X_1^\nu (J) \equiv 0$, $X_1^{\nu-1} (J) \equiv 0$, $X_1^{\nu-2} (J) \equiv 0 \ldots X_1 (J) \equiv 0$.

Такимъ образомъ мы доказали, *что цѣлая, однородная и изобарная функція $J$, имѣющая вѣсъ $p = \frac{n\mu}{2}$ и удовлетворяющая дифференціальному уравненію $X_2 (J) = 0$, удовлетворяетъ также уравненію $X_1 (J) = 0$ и, слѣдовательно, служитъ инваріантомъ бинарной формы.*

Этимъ послѣднимъ опредѣленіемъ инваріанта мы воспользуемся въ слѣдующемъ параграфѣ для построенія инваріантовъ бинарныхъ формъ различныхъ порядковъ.

## § 10. Примѣры построенія инваріантовъ бинарныхъ формъ.

Если мы имѣемъ бинарную форму $n$-го порядка:

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n,$$

то всякая цѣлая раціональная функція $J$ ея коэффиціентовъ можетъ быть представлена въ видѣ суммы

$$J = \sum c \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}.$$

Такая функція $J$ служитъ инваріантомъ бинарной формы, какъ намъ извѣстно изъ предыдущаго параграфа, въ томъ случаѣ, если она, во-первыхъ, однородна, т. е.

$$e_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_n = \mu,$$

во-вторыхъ — изобарна съ вѣсомъ $\frac{n\mu}{2}$, т. е. $1 \,.\, e_1 + 2 \,.\, e_2 + \ldots + n \,.\, e_n = \frac{n\mu}{2}$ и, въ-третьихъ, удовлетворяетъ уравненію съ частными производными

$$1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 + 3 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_3} a_2 + \ldots + n \cdot \frac{\partial J}{\partial a_n} a_{n-1} = 0.$$

*Примѣръ 1.* Пусть мы имѣемъ бинарную форму втораго порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2.$$

Инваріантъ второй степени разсматриваемой бинарной формы долженъ имѣть видъ цѣлаго, однороднаго и изобарнаго многочлена съ вѣсомъ $\frac{n\mu}{2} = \frac{2 \,.\, 2}{2} = 2$ относительно количествъ $a_0$, $a_1$, $a_2$:

$$J = c_0 a_0 a_2 + c_1 a_1^2,$$

и долженъ удовлетворять уравненію

$$1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 = 0; \tag{10}$$

подставивъ это выраженіе $J$ въ уравненіе съ частными производными $1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1$, мы получимъ соотношеніе

$$2 c_1 a_1 a_0 + 2 c_0 a_0 a_1 \equiv 0, \quad \text{или} \quad 2 (c_1 + c_0) a_0 a_1 \equiv 0;$$

отсюда получаемъ $c_1 = - c_0$; слѣдовательно, искомый инваріантъ —

$$J = c_0 (a_0 a_2 - a_1^2),$$

т. е. бинарная форма втораго порядка имѣетъ *одинъ* инваріантъ

$$D = a_0 a_2 - a_1^2$$

второй степени, если принимать во вниманіе только *линейно-независимыя* выраженія $J$. Этомъ единственный инваріантъ второй степени бинарной формы втораго порядка называется ея *дискриминантомъ;* приравненный нулю, онъ даетъ условіе того, что данная бинарная форма второй степени обращается въ квадратъ бинарной формы перваго порядка; и въ самомъ дѣлѣ, если $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$, то

$$a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = (\sqrt{a_0}\, x_1 + \sqrt{a_2}\, x_2)^2.$$

*Примѣръ 2.* Не трудно показать, что всякій инваріантъ — какой угодно четной степени $\mu = 2m$ бинарной формы втораго порядка равенъ $m$-й степени ея дискриминанта, и что инваріантовъ нечетной степени она совсѣмъ не имѣетъ.

Инваріантъ степени $\mu$ долженъ имѣть видъ

$$J = \sum c \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2},$$

при чемъ $e_0 + e_1 + e_2 = \mu$ и $e_1 + 2e_2 = \frac{2 . \mu}{2} = \mu$; слѣдовательно, $e_2 = e_0$ и $e_1 = \mu - 2e_0$, и поэтому

$$J = \sum c \,.\, (a_0 a_2)^{e_0} a_1^{\mu - 2e_0};$$

если положить $\mu = 2m$, то получимъ

$$J = c_0 a_1^{2m} + c_1 (a_0 a_2) a_1^{2(m-1)} + c_2 (a_0 a_2)^2 a_1^{2(m-2)} + \ldots + c_m (a_0 a_2)^m;$$

подставивъ это выраженіе $J$ въ уравненіе съ частными производными (10), мы получимъ

$$a_0\left[c_0 . 2m . a_1^{2m-1} + c_1 (a_0 a_2) . 2(m-1) a_1^{2m-3} + \right.$$
$$\left. + c_2 (a_0 a_2)^2 2 (m-2) a_1^{2m-5} + \ldots + c_{m-1} (a_0 a_2)^{m-1}\right]$$
$$+ 2a_1 \left[c_1 a_0 a_1^{2m-2} + c_2 2a_0 (a_0 a_2) a_1^{2m-4} + \ldots + \right.$$
$$\left. c_{m-1} (m-1) a_0 (a_0 a_2)^{m-2} a_1 + c_m m a_0 (a_0 a_2)^{m-1}\right] \equiv 0,$$

или

$$mc_m + c_{m-1} = 0,\ (m-1) c_{m-1} + 2c_{m-2} = 0,\ (m-2) c_{m-2} + 3 c_{m-3} = 0,$$
$$\ldots c_1 + mc_0 = 0\,;$$

отсюда получаемъ

$$c_{m-1} = -\frac{m}{1} c_m,\quad c_{m-2} = \frac{m(m-1)}{1.2} c_m,\quad c_{m-3} = -\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} c_m,$$
$$\ldots c_0 = (-1)^m c_m\,;$$

слѣдовательно, инваріантъ четной степени $\mu = 2m$ равенъ

$$J = c_m \left[(a_0 a_2)^m - \frac{m}{1} (a_0 a_2)^{m-1} a_1^2 + \ldots + (-1)^m a_1^{2m}\right]$$
$$= c_m (a_0 a_2 - a_1^2)^m .$$

Если же положить $\mu = 2m + 1$, то

$$J = c_0 a_1^{2m+1} + c_1 (a_0 a_2) a_1^{2m-1} + c_2 (a_0 a_2)^2 a_1^{2m-3} + \ldots + c_m (a_0 a_2)^m a_1\,;$$

подставивъ это выраженіе въ уравненіе (10), мы получимъ

$$a_0 \left[c_0 (2m+1) a_1^{2m} + c_1 (a_0 a_2)(2m-1) a_1^{2m-2} + \ldots + \right.$$
$$\left. + c_{m-1} (a_0 a_2)^{m-1} 3a_1^2 + c_m (a_0 a_2)^m\right]$$
$$+ 2a_1 \left[c_1 a_0 a_1^{2m-1} + c_2 a_0 2 (a_0 a_2) a_1^{2m-3} + \ldots + \right.$$
$$\left. + c_m a_0 m (a_0 a_2)^{m-1} a_1\right] \equiv 0,$$

отсюда имѣемъ

$$(2m+1) c_0 + 2c_1 = 0,\quad (2m-1) c_1 + 4c_2 = 0,\ \ldots$$
$$3c_{m-1} + 2m\, c_m = 0,\quad c_m = 0,$$

слѣдовательно, $c_m = 0$, $c_{m-1} = 0$, $c_{m-2} = 0, \ldots$ $c_0 = 0$, т. е. *бинарная форма второй степени совсѣмъ не имѣетъ инваріантовъ нечетныхъ степеней.*

*Примѣръ 3.* Возьмемъ бинарную форму третьяго порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3,$$

и построимъ ея инваріантъ четвертой степени.

Искомый инваріантъ долженъ быть цѣлымъ, однороднымъ и изобарнымъ многочленомъ съ вѣсомъ $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$, т. е.

$$J = c_0 a_3^2 a_0^2 + c_1 a_3 a_2 a_1 a_0 + c_2 a_3 a_1^3 + c_3 a_1^3 a_0 + c_4 a_2^2 a_1^2,$$

и долженъ удовлетворять уравненію съ частными производными

$$1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 + 3 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_3} a_2 = 0;$$

это послѣднее условіе даетъ возможность опредѣлить коэффиціенты $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$:

$$\begin{aligned} & a_0(\ c_1 a_3 a_2 a_0 + 3c_2 a_3 a_1^2 + 2c_4 a_2^2 a_1) \\ + & 2a_1(\ c_1 a_3 a_1 a_0 + 3c_3 a_2^2 a_0 + 2c_4 a_2 a_1^2) \\ + & 3a_1(2c_0 a_3 a_0^2 + c_1 a_2 a_1 a_0 + c_2 a_1^3) \equiv 0, \end{aligned}$$

отсюда

$$c_1 + 6c_0 = 0,\ 3c_2 + 2c_1 = 0,\ 2c_4 + 6c_3 + 3c_1 = 0,\ 4c_4 + 3c_2 = 0,$$

или

$$c_1 = -6c_0,\ c_2 = 4c_0,\ c_3 = 4c_0,\ c_4 = -3c_0;$$

слѣдовательно, искомый инваріантъ имѣетъ видъ

$$J = c_0(a_3^2 a_0^2 - 6 a_3 a_2 a_1 a_0 + 4 a_3 a_1^3 + 4 a_2^3 a_0 - 3 a_2^2 a_1^2).$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что бинарная форма третьяго порядка имѣетъ единственный инваріантъ, если принимать во вниманіе только линейно-независимыя выраженія $J$; этотъ инваріантъ есть ея *дискриминантъ*

$$R = a_3^2 a_0^2 - 6a_3 a_2 a_1 a_0 + 4a_3 a_1^3 + 4a_2^3 a_0 - 3a_2^2 a_1^2;$$

приравненный нулю, онъ даетъ условіе того, что бинарная форма третьей степени выдѣляетъ квадратъ линейнаго фактора, т. е.

$$a_0x_1^3+3a_1x_1^2x_2+3a_2x_1x_2^2+a_3x_2^3\equiv(a_0'x_1+a_1'x_2)^2(a_0''x_1+a_1''x_2).$$

*Примѣръ 4.* Не трудно показать, *что бинарныя формы совсѣмъ не имѣютъ инваріантовъ первыхъ степеней.*

Пусть мы имѣемъ форму $n$-го порядка

$$f(x_1,\, x_2)=a_0\,x_1^n+\binom{n}{1}a_1\,x_1^{n-1}\,x_2+\ldots+a_n\,x_2^n;$$

ея инваріантъ первой степени долженъ имѣть видъ

$$J=c_0\,a_0+c_1\,a_1+c_2\,a_2+\ldots+c_n\,a_n;$$

кромѣ того, вѣсъ каждаго его члена долженъ равняться $\frac{n.1}{2}$; это есть цѣлое число только въ случаѣ четнаго $n$; слѣдовательно, для нечетной формы невозможность инваріанта первой степени очевидна; въ случаѣ четнаго $n$

$$J=c\,.\,a_{\frac{n}{2}};$$

подставивъ это выраженіе въ уравненіе

$$1\cdot\frac{\partial J}{\partial a_1}a_0+2\cdot\frac{\partial J}{\partial a_2}a_1+\ldots+n\cdot\frac{\partial J}{\partial a_n}a_{n-1}=0, \qquad (11)$$

мы получимъ

$$\frac{n}{2}\,.\,c\,.\,a_{\frac{n}{2}-1}\equiv0,$$

т. е. $c=0$; слѣдовательно, у формъ четныхъ порядковъ тоже нѣтъ инваріантовъ первой степени.

*Примѣръ 5.* Построимъ инваріантъ второй степени для бинарной формы $n$-го порядка.

Искомый инваріантъ долженъ быть вида:

$$J=c_0\,a_0\,a_n+c_1\,a_1\,a_{n-1}+c_2\,a_2\,a_{n-2}+\ldots+c_n\,a_n\,a_0,$$

такъ какъ его вѣсъ равенъ $\frac{n.2}{2}=n$; при чемъ мы можемъ положить $c_n = c_0$, $c_{n-1} = c_1$, . . . . Уравненіе (11) даетъ тождество:

$$a_0(c_1 a_{n-1} + c_{n-1} a_{n-1}) + 2a_1(c_2 a_{n-2} + c_{n-2} a_{n-2}) + \ldots + \\ + n a_{n-1}(c_0 a_0 + c_n a_0) \equiv 0,$$

которое можно представить въ видѣ

$$[c_1 + nc_0]a_0 a_{n-1} + [2c_2 + (n-1)c_1]a_1 a_{n-2} + [3c_3 + (n-2)c_2]a_2 a_{n-3} + \\ + \ldots \equiv 0;$$

отсюда мы имѣемъ

$$c_1 + nc_0 = 0,\ 2c_2 + (n-1)c_1 = 0,\ 3c_3 + (n-2)c_2 = 0, \ldots$$

или

$$c_1 = -\frac{n}{1}c_0,\ c_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}c_0,\ c_3 = -\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}c_0, \ldots\ldots;$$

слѣдовательно, если $n$ есть четное число, то получится единственный инваріантъ второй степени:

$$J = a_0 a_n - \binom{n}{1} a_1 a_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 a_{n-2} - \ldots + a_n a_0;$$

если же $n$ есть нечетное число, то всѣ $c$ должны изчезнуть, т. е. *бинарныя формы нечетныхъ порядковъ не имѣютъ инваріантовъ второй степени.*

*Примѣръ 6.* Возьмемъ бинарную форму четвертаго порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4.$$

Инваріантъ второй степени этой формы опредѣлится по формулѣ предыдущаго примѣра:

$$S = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2.$$

Построимъ ея инваріантъ третьей степени, пользуясь нашимъ общимъ способомъ.

Искомый инваріантъ долженъ быть цѣлымъ, однороднымъ и изобарнымъ многочленомъ съ вѣсомъ $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, т. е. такого вида:

$$J = c_0 a_0 a_3^2 + c_1 a_1 a_2 a_3 + c_2 a_0 a_2 a_4 + c_3 a_2^3 + c_4 a_1^2 a_4;$$

кромѣ того, онъ долженъ удовлетворять уравненію съ частными производными

$$1 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + 2 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 + 3 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_3} a_2 + 4 \cdot \frac{\partial J}{\partial a_4} a_3 = 0;$$

это послѣднее условіе даетъ тождественное равенство:

$$\begin{aligned} & a_0 (\ c_1 a_2 a_3 + 2c_4 a_1 a_4) \\ & + 2a_1 (\ c_1 a_1 a_3 + \ c_2 a_0 a_4 + 3c_3 a_2^2) \\ & + 3a_2 (2c_0 a_0 a_3 + \ c_1 a_1 a_2) \\ & + 4a_3 (\ c_2 a_0 a_2 + \ c_4 a_1^2) \equiv 0, \end{aligned}$$

которое можно представить въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{r|lr|lr|lr|l} c_1 & a_0 a_2 a_3 & + 2c_4 & a_0 a_1 a_4 & + 2c_1 & a_1^2 a_3 & + 6c_3 & a_1 a_2^2 \equiv 0; \\ + 6c_0 & & + 2c_2 & & + 4c_4 & & + 3c_1 & \\ + 4c_2 & & & & & & & \end{array}$$

отсюда получаемъ

$$c_1 + 6c_0 + 4c_2 = 0, \quad 2c_4 + 2c_2 = 0, \quad 2c_1 + 4c_4 = 0,$$
$$6c_3 + 3c_1 = 0,$$

или

$$c_1 = -2c_0, \quad c_2 = -c_0, \quad c_3 = +c_0, \quad c_4 = c_0;$$

слѣдовательно, бинарная форма четвертаго порядка имѣетъ единственный инваріантъ третьей степени:

$$T = a_0 a_3^2 - 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_2 a_4 + a_2^3 + a_1^2 a_4 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Далѣе мы покажемъ, что всѣ инваріанты бинарной формы четвертаго порядка суть цѣлыя раціональныя функціи этихъ двухъ инваріантовъ.

## § 11. Абсолютные инваріанты бинарной формы.

*Абсолютнымъ инваріантомъ* бинарной формы называется такая раціональная функція ея коэффиціентовъ, которая совсѣмъ не измѣняется отъ всякой линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ перемѣнныхъ бинарной формы.

Слѣдовательно, абсолютный инваріантъ характеризуется равенствомъ

$$\Pi(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n) = \Pi(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n),$$

которое обращается въ тождество, если количества $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ замѣнить ихъ выраженіями черезъ $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ и $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ по формуламъ § 1:

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{(n-k)!}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta + \frac{\partial}{\partial\gamma}\delta\right)^k f(\alpha, \gamma) \qquad \text{(A)}\\ &= \frac{k!}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha + \frac{\partial}{\partial\delta}\gamma\right)^{n-k} f(\beta, \delta),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n.\end{aligned}$$

Обозначимъ эти выраженія новыхъ коэффиціентовъ черезъ старыя сокращенно такимъ образомъ

$$\alpha_k = A_k(a;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta),\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n. \qquad \text{(A')}$$

Если эти равенства раздѣлить почленно на одно изъ нихъ, напримѣръ, — на $\alpha_n = A_n(a, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, то мы получаемъ соотношенія

$$\frac{\alpha_k}{\alpha_n} = \frac{A_k(a;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta)}{A_n(a;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta)},\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1);$$

гдѣ вторыя части можно разсматривать какъ раціональныя функціи отношеній $\frac{a_0}{a_n}$, $\frac{a_1}{a_n}$, $\frac{a_2}{a_n}$, ... и отношеній $\frac{\alpha}{\delta}$, $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$; если освободить эти соотношенія отъ знаменателей, то получится $n$ соотношеній, цѣлыхъ и раціональныхъ относительно

$\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$, которыя имѣютъ коэффиціентами линейныя сочетанія отношеній $\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \frac{a_2}{a_n}, \ldots \frac{\alpha_0}{\alpha_n}, \frac{\alpha_1}{\alpha_n}, \frac{\alpha_2}{\alpha_n}, \ldots$; если изъ послѣднихъ $n$ соотношеній исключить $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$, то получится вообще $n-3$ соотношенія, цѣлыхъ и раціональныхъ относительно количествъ $\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \frac{a_2}{a_n}, \ldots \frac{\alpha_0}{\alpha_n}, \frac{\alpha_1}{\alpha_n}, \frac{\alpha_2}{\alpha_n}, \ldots$, если соотношенія (A) между собою независимы. Полученныя такимъ образомъ $n-3$ соотношенія можно представить въ видѣ:

$$R_k(a, \alpha) = 0, \quad k = 1,\ 2, \ldots (n-3), \tag{B}$$

гдѣ $R_k(a, \alpha)$ суть цѣлые многочлены, однородные какъ относительно $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, такъ и относительно $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$. Слѣдовательно каждое изъ этихъ соотношеній можно представить въ видѣ:

$$P.Q + P_1.Q_1 + P_2.Q_2 + \ldots = 0, \tag{B'}$$

гдѣ $P, P_1, \ldots$ суть цѣлые однородные многочлены относительно $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, и $Q, Q_1, \ldots$ суть цѣлые однородные многочлены относительно $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; кромѣ того, степени всѣхъ $P$ между собой равны, и степени всѣхъ $Q$ — между собой.

Если разрѣшить равенство (B') относительно $P$, то получимъ равенство

$$P = -\frac{P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + \ldots}{Q}; \tag{C}$$

обозначимъ вторую часть послѣдняго равенства черезъ $\Pi(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$. Очевидно, что раціональная функція $\Pi(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ остается безъ перемѣны при всякомъ линейномъ преобразованіи $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ перемѣнныхъ бинарной формы, и, слѣдовательно, она для всякой подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & a\end{pmatrix}$ удовлетворяетъ равенству

$$\Pi(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \Pi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n), \tag{D}$$

т. е. служитъ абсолютнымъ инваріантомъ бинарной формы. Такимъ образомъ можно получить, конечно, безчисленное множество абсолютныхъ инваріантовъ бинарной формы, но они будутъ между собою зависимы; независимыхъ же абсолютныхъ инваріантовъ должно быть число конечное, потому что каждый изъ абсолютныхъ инваріантовъ налагаетъ опредѣленное соотношеніе (D) на коэффиціенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ и $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, и такихъ независимыхъ соотношеній существуетъ вполнѣ опредѣленная система (B); другихъ соотношеній между коэффиціентами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ и $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, неприводимыхъ къ соотношеніямъ системы (B), быть не можетъ.

Очевидно, что функція $\Pi(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, обозначающая вторую часть равенства (C) есть отношеніе двухъ цѣлыхъ, раціональныхъ и однородныхъ функцій коэффиціентовъ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, имѣющихъ, кромѣ того, одинаковыя степени относительно этихъ коэффиціентовъ; слѣдовательно, *всякій абсолютный инваріантъ бинарной формы есть отношеніе двухъ цѣлыхъ, раціональныхъ и однородныхъ функцій коэффиціентовъ бинарной формы, которыя имѣютъ одинаковыя степени.*

Теперь мы перейдемъ къ выводу дифференціальныхъ уравненій, которымъ удовлетворяютъ абсолютные инваріанты бинарныхъ формъ, при чемъ воспользуемся опять методомъ, посредствомъ котораго мы вывели въ § 7 дифференціальныя уравненія инваріантовъ бинарныхъ формъ.

## § 12. Дифференціальныя уравненія абсолютныхъ инваріантовъ бинарныхъ формъ.

Изъ опредѣленія абсолютнаго инваріанта, даннаго въ предыдущемъ параграфѣ, слѣдуетъ, что раціональная функція $\Pi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ коэффиціентовъ бинарной формы въ томъ случаѣ служитъ абсолютнымъ инваріантомъ послѣдней, если она совершенно не измѣняется отъ линейныхъ подстановокъ $S_\alpha$, преобразующихъ коэффиціенты $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ въ коэффиціенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, когда перемѣнныя бинарной формы преобразуются посредствомъ группы подстановокъ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. Эти линейныя подстановки для коэффиціентовъ бинарной формы, соотвѣтствующія подстановкамъ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ для перемѣнныхъ, можно получить, разрѣшивъ систему уравненій (A) въ предыдущемъ параграфѣ относительно $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$. Очевидно, что эти подстановки для коэффиціентовъ бинарной формы

$$a_k = A_k^{-1}(\alpha;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n, \qquad (S_a)$$

содержатъ четыре существенныхъ параметра $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, такъ какъ двѣ подобныхъ подстановки тождественно равны только въ томъ случаѣ, если соотвѣтственныя подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ тождественно равны, что имѣетъ мѣсто только при равенствѣ параметровъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ для этихъ двухъ подстановокъ. Очевидно также, что подстановки $S_a$ образуютъ непрерывную группу, потому что двѣ подстановки $S_a$ и $S_a'$ составляютъ вмѣстѣ подстановку, которая соотвѣтствуетъ подстановкѣ $S'' = SS'$ для перемѣнныхъ бинарной формы, слѣдовательно, составная подстановка $S_a S_a' = S_a''$ есть подстановка того же типа какъ и составляющія $S_a$ и $S_a'$.

Слѣдовательно, *подстановки $S_a$, преобразующія коэффиціенты бинарной формы, образуютъ $\infty^4$ попарно обратныхъ преобразованій.*

Подгруппѣ безконечно-малыхъ линейныхъ преобразованій $S\begin{pmatrix}1+\alpha_1\,\delta t & \beta_1\,\delta t \\ \gamma_1\,\delta t & 1+\delta_1\,\delta t\end{pmatrix}$ соотвѣтствуетъ, конечно, подгруппа безконечно-малыхъ преобразованій коэффиціентовъ $S_a$.

Мы знаемъ изъ § 5, что при безконечно-маломъ преобразованіи $S\begin{pmatrix}1+\alpha_1\,\delta t & \beta_1\,\delta t \\ \gamma_1\,\delta t & 1+\delta_1\,\delta t\end{pmatrix}$ перемѣнныя $x_1$ и $x_2$ получаютъ приращенія

$$\delta x_1 = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)\,\delta t,$$
$$\delta x_2 = (\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\,\delta t,$$

а какая-нибудь функція $F(x_1, x_2)$ получаетъ приращеніе

$$\delta F(x_1, x_2) = \left\{\frac{\partial F}{\partial x_1}(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2)\right\}\delta t.$$

Но намъ еще не извѣстны выраженія приращеній $\delta a_0$, $\delta a_1$, $\delta a_2$, ... $\delta a_n$, которыя получаютъ коэффиціенты бинарной формы, когда перемѣнныя $x_1$, $x_2$ получаютъ вышеуказанныя приращенія $\delta x_1$, $\delta x_2$ вслѣдствіе безконечно-малаго преобразованія $S\begin{pmatrix}1+\alpha_1\delta t & \beta_1\delta t\\ \gamma_1\delta t & 1+\delta_1\delta t\end{pmatrix}$; пусть они имѣютъ выраженія:

$$\delta a_k = -\xi_k(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)\delta t, \ k = 0, 1, 2, \ldots n$$

подобно тому, какъ и въ § 7. Приращеніе какой-нибудь функціи $\phi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ при такомъ безконечно-маломъ преобразованіи $S_a$ будетъ имѣть выраженіе

$$\delta\phi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n) = -\left\{\frac{\partial\phi}{\partial a_0}\xi_0 + \frac{\partial\phi}{\partial a_1}\xi_1 + \ldots + \frac{\partial\phi}{\partial a_n}\xi_n\right\}\delta t.$$

Для того, чтобы опредѣлить эти неизвѣстныя выраженія $\xi_0$, $\xi_1$, $\xi_2$, ... $\xi_n$, обратимъ вниманіе на то, что данная бинарная форма $f(x_1, x_2)$ остается безъ приращенія, если перемѣнныя $x_1$, $x_2$ преобразовать посредствомъ кокой-нибудь подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ и въ тоже время коэффиціенты ея — посредствомъ соотвѣтственной подстановки $S_a$. Слѣдовательно, приращеніе

$$\delta f(x_1, x_2) = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma_1 x_1 + \delta_1 x_2) - \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial f}{\partial a_0}\xi_0 + \frac{\partial f}{\partial a_1}\xi_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_n}\xi_1\right]\right\}\delta t$$

должно равняться нулю независимо отъ $x_1$ и $x_2$. Это условіе въ развернутой формѣ будетъ:

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1 x_1+\beta_1 x_2)\Big[ & n a_0 x_1^{n-1}+\binom{n}{1}(n-1)\,a_1 x_1^{n-2} x_2+\ldots+ \\
& +\binom{n}{1}\qquad a_{n-1} x_2^{n-1}+ \qquad\Big] \\
+(\gamma_1 x_1+\delta_1 x_2)\Big[ & \quad +\binom{n}{1}\qquad a_1 x_1^{n-1}\quad+\ldots+ \\
& +\binom{n}{1}(n-1)\,a_{n-1} x_1 x_2^{n-2}+n a_n x_2^{n-1}\Big] \\
& -\Big[\xi_0 x_1^n+\binom{n}{1}\xi_1 x_1^{n-1} x_2+\ldots+\xi_n x_2^n\Big]\equiv 0;
\end{aligned}
$$

отсюда получаемъ искомыя выраженія $\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_n$:

$$
\begin{aligned}
\xi_0 &= \quad n\,.\,a_0\,.\,\alpha_1+0\quad.\,\beta_1+\quad n\,.\,a_1\,.\,\gamma_1+0\quad.\,\delta_1, \\
\xi_1 &= (n-1)\,.\,a_1\,.\,\alpha_1+1\,.\,a_0\,.\,\beta_1+(n-1)\,.\,a_2\,.\,\gamma_1+1\,.\,a_1\,.\,\delta_1, \\
\xi_2 &= (n-2)\,.\,a_2\,.\,\alpha_1+2\,.\,a_1\,.\,\beta_1+(n-2)\,.\,a_3\,.\,\gamma_1+2\,.\,a_2\,.\,\delta_1, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (12) \\
\xi_n &= \quad 0\quad.\,\alpha_1+n\,.\,a_{n-1}\,.\,\beta_1+\quad 0\quad.\,\gamma_1+n\,.\,a_n\,.\,\delta_1;
\end{aligned}
$$

такимъ образомъ мы опредѣлили безконечно-малую подстановку $S_a$ для коэффиціентовъ бинарной формы, соотвѣтствующую безконечно-малой подстановкѣ $S\begin{pmatrix}1+\alpha_1\,\delta t & \beta_1\,\delta t\\ \gamma_1\,\delta t & 1+\delta_1\,\delta t\end{pmatrix}$ для ея перемѣнныхъ $x_1,\ x_2$.

Теперь не трудно вывести дифференціальныя уравненія абсолютныхъ инваріантовъ бинарной формы.

Такъ какъ абсолютный инваріантъ $\Pi\,(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)$ не измѣняется при всѣхъ преобразованіяхъ группы $S_a$, то онъ, конечно, не долженъ измѣняться при всѣхъ преобразованіяхъ подгруппы безконечно-малыхъ преобразованій $S_a$; слѣдовательно, приращеніе его

$$
\delta\Pi=-\Big[\frac{\partial\Pi}{\partial a_0}\xi_0+\frac{\partial\Pi}{\partial a_1}\xi_1+\ldots+\frac{\partial\Pi}{\partial a_n}\xi_n\Big]\delta t \qquad (13)
$$

должно равняться нулю независимо отъ коэффиціентовъ $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \delta_1$

безконечно-малаго преобразованія $S\begin{pmatrix}1+\alpha_1\,\partial t & \beta_1\,\partial t\\ \gamma_1\,\partial t & 1+\delta_1\,\partial t\end{pmatrix}$; принимая во вниманіе вышеприведенныя значенія количествъ $\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_n$, мы получимъ четыре дифференціальныхъ уравненія съ частными производными перваго порядка:

$$
\begin{aligned}
&n\,.\,a_0\frac{\partial \Pi}{\partial a_0}+(n-1)\,.\,a_1\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}+\ldots+1\,.\,a_{n-1}\frac{\partial \Pi}{\partial a_{n-1}}=0,\\
&1\,.\,a_0\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}+\ldots+(n-1)\,.\,a_{n-2}\frac{\partial \Pi}{\partial a_{n-1}}+\\
&\qquad+n\,.\,a_{n-1}\frac{\partial \Pi}{\partial a_n}=0,\\
&n\,.\,a_1\frac{\partial \Pi}{\partial a_0}+(n-1)\,.\,a_2\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}+\ldots+1\,.\,a_n\frac{\partial \Pi}{\partial a_{n-1}}=0,\\
&1\,.\,a_1\frac{\partial \Pi}{\partial a_1}+\ldots+(n-1)\,.\,a_{n-2}\frac{\partial \Pi}{\partial a_{n-1}}+\\
&\qquad+n\,.\,a_n\frac{\partial \Pi}{\partial a_n}=0;
\end{aligned}
\tag{D}
$$

этимъ уравненіямъ долженъ удовлетворять каждый абсолютный инваріантъ бинарной формы.

Наоборотъ, если какая-либо раціональная функція $\Pi(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)$ удовлетворяетъ всѣмъ этимъ уравненіямъ, то не трудно показать, что она служитъ абсолютнымъ инваріантомъ бинарной формы.

Въ самомъ дѣлѣ, если данная раціональная функція $\Pi(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)$ удовлетворяетъ уравненіямъ (D), то ея приращеніе $\partial\Pi$ при всякомъ безконечно-маломъ преобразованіи $S_{\alpha}$ равно нулю. Но такъ какъ всякую подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ можно получить послѣдовательнымъ примѣненіемъ безконечно-малыхъ подстановокъ этой группы [1])

$$U(f)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha_1\,x_1+\beta_1\,x_2)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma_1\,x_1+\delta_1\,x_2),$$

---

1) См. § 5.

то и всякую конечную подстановку группы $S_a$ можно получить послѣдовательнымъ примѣненіемъ безконечно-малыхъ подстановокъ группы $S_a$: —

$$V(\phi)=\frac{\partial\phi}{\partial a_0}\xi_0+\frac{\partial\phi}{\partial a_1}\xi_1+\ldots+\frac{\partial\phi}{\partial a_n}\xi_n;$$

отсюда слѣдуетъ то, что приращеніе функціи $\Pi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ и при всякомъ конечномъ преобразованіи группы $S_a$ будетъ равно нулю, если оно равно нулю для всякой безконечно-малой подстановки $V(\phi)$, и функція $\Pi(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ будетъ служить абсолютнымъ инваріантомъ бинарной формы.

## § 13. Значеніе дифференціальныхъ уравненій абсолютныхъ инваріантовъ бинарной формы.

Обозначимъ сокращенно первыя уравненій (D) предыдущаго параграфа черезъ $Y_1(\Pi)$, $Y_2(\Pi)$, $Y_3(\Pi)$ и $Y_4(\Pi)$, тогда символъ безконечно-малой подстановки группы $S_a$ приметъ видъ

$$V(\phi)=\alpha_1 Y_1(\phi)+\beta_1 Y_2(\phi)+\gamma_1 Y_3(\phi)+\delta_1 Y_4(\phi);$$

слѣдовательно, $Y_1(\phi)$, $Y_2(\phi)$, $Y_3(\phi)$, $Y_4(\phi)$ суть ничто другое какъ символы четырехъ безконечно-малыхъ подстановокъ группы $S_a$, соотвѣтствующихъ частнымъ значеніямъ параметровъ $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$:

$$1,0,0,0;\ 0,1,0,0;\ 0,0,1,0;\ 0,0,0,1.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что дифференціальныя уравненія (D) предыдущаго параграфа, опредѣляющія абсолютныя инваріанты бинарной формы, имѣютъ слѣдующій смыслъ: *для того, чтобы раціональная функція $\Pi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ служила абсолютнымъ инваріантомъ бинарной формы, т. е. не измѣнялась при всѣхъ преобразованіяхъ группы $S_a$, необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она не измѣнялась отъ четырехъ безконечно-малыхъ преобразованій $Y_1(\phi)$, $Y_2(\phi)$, $Y_3(\phi)$, $Y_4(\phi)$.*

Принимая во вниманіе свойства линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, изложенныя въ § 8, мы можемъ замѣтить что четыре уравненія системы (D) предыдущаго параграфа между собою зависимы; и въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$(Y_1 Y_2 - Y_2 Y_1)\phi \equiv Y_2(\phi),$$
$$(Y_1 Y_3 - Y_3 Y_1)\phi \equiv Y_3(\phi),$$
$$(Y_2 Y_3 - Y_3 Y_2)\phi \equiv Y_1(\phi) - Y_4(\phi);$$

отсюда слѣдуетъ, что функція $\phi$, удовлетворяющая тремъ уравненіямъ системы (D):

$$Y_1(\phi)=0,\ Y_2(\phi)=0,\ Y_3(\phi)=0,$$

удовлетворяетъ и четвертому уравненію $Y_4(\phi)=0$; такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: *для того, чтобы раціональная функція* $\Pi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ *служила абсолютнымъ инваріантомъ бинарной формы, необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она удовлетворяла тремъ дифференціальнымъ* $Y_1(\phi)=0$, $Y_2(\phi)=0$, $Y_3(\phi)=0$, *или, что тоже самое, чтобы она не измѣнялась при трехъ безконечно-малыхъ преобразованіяхъ* $Y_1(\phi)$, $Y_2(\phi)$, $Y_3(\phi)$.

Не трудно найти конечныя подстановки $S_a$, образуемые безконечно-малыми подстановками $Y_1(\phi)$, $Y_2(\phi)$, $Y_3(\phi)$, $Y_4(\phi)$.

Изъ развернутыхъ формъ этихъ подстановокъ можно замѣтить, что безконечно-малыя приращенія, получаемыя количествами $a_0$, $a_1$, $a_2$, . . . $a_n$ при этихъ подстановкахъ $Y_1(\phi)$, $Y_2(\phi)$, $Y_3(\phi)$, $Y_4(\phi)$ имѣютъ соотвѣтственно слѣдующія выраженія:

$$\begin{array}{llll}
\delta'\,a_0=na_0\delta t, & \delta'\,a_1=(n-1)a_1\delta t, & \delta'\,a_2=(n-2)a_2\delta t, & \ldots\delta a_n=0,\\
\delta''\,a_0=0\quad, & \delta''\,a_1=a_0\delta t, & \delta''\,a_2=2\,a_1\delta t, & \ldots\delta a_n=na_{n-1}\delta t,\\
\delta'''\,a_0=na_1\delta t, & \delta'''\,a_1=(n-1)a_2\delta t, & \delta'''\,a_2=(n-2)a_3\delta t, & \ldots\delta a_n=0,\\
\delta''''a_0=0\quad, & \delta''''a_1=a_1\delta t, & \delta''''a_2=2\,a_2\delta t, & \ldots\delta a_n=na_n\delta t.
\end{array}$$

Проинтегрировавъ эти системы дифференціальныхъ уравненій, мы получимъ конечныя преобразованія группы $S_a$:

$$a_0 = c_0 e^{nt},\ a_1 = c_1 e^{(n-1)t},\ a_2 = c_2 e^{(n-2)t} \quad ,\dots a_n = c_n,$$

$$a_0 = c_0 \quad ,\ a_1 = c_0 t + c_1 \ ,\ a_2 = c_0 t^2 + 2c_1 t + c_2, \dots a_n = c_0 t^n + nc_1 t^{n-1} + \dots,$$

$$a_0 = c_n t^n + nc_{n-1} t^{n-1} + \dots, \dots\dots\dots\dots\dots\dots a_n = c_n$$

$$a_0 = c_0 \quad ,\ a_1 = c_1 e^t \quad ,\ a_2 = c_2 e^{2t} \quad ,\dots a_n = c_n e^{nt};$$

эти преобразованія коэффиціентовъ $a_0$, $a_1$, $a_2$, . . . $a_n$ бинарной формы соотвѣтствуютъ слѣдующимъ четыремъ подстановкамъ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ для ея перемѣнныхъ $x_1$, $x_2$:

$$S'\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S''\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S'''\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix},\quad S''''\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^t\end{pmatrix}; \tag{14}$$

ихъ можно написать такъ:

$$S'\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S''\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S'''\begin{pmatrix}1 & 0\\ \tau & 1\end{pmatrix},\quad S''''\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sigma\end{pmatrix}. \tag{14'}$$

Эти подстановки даютъ составную подстановку

$$\begin{pmatrix}\rho + t\tau\rho & t\rho\\ \tau\sigma & \sigma\end{pmatrix},$$

и можно подобрать $\rho$, $t$, $\tau$, $\sigma$ такъ, чтобы эта составная подстановка представляла какую-нибудь подстановку $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$; для этого надо взять

$$\sigma = \delta,\quad \tau = \frac{\gamma}{\delta},\quad \rho = \frac{\Delta}{\delta} \quad \text{и} \quad t = \frac{\beta\delta}{\Delta};$$

если же $\delta = 0$, то $\beta\gamma = \Delta$, и данная подстановка $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \frac{\Delta}{\beta} & 0\end{pmatrix}$ равна

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \tau & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\alpha\tau + \frac{\Delta}{\beta} & -\beta\tau\end{pmatrix},$$

слѣдовательно, можетъ быть представлена какъ составная

$$S''' \ S' \ S'' \ S''' \ S'''',$$

потому что въ подстановкѣ

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha\tau + \frac{\Delta}{\beta} & -\beta\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

$\delta_1 = -\beta\tau$ не равно нулю, иначе при $\beta = 0$, и $\Delta = \beta\gamma = 0$.

## § 14. Число основныхъ абсолютныхъ инваріантовъ бинарной формы. Замѣчаніе.

Система дифференціальныхъ уравненій

$$Y_1(\varphi) = 0,\ \ Y_2(\varphi) = 0,\ \ Y_3(\varphi) = 0,\ Y_4(\varphi) = 0, \qquad \text{(D)}$$

опредѣляющихъ абсолютные инваріанты бинарной формы есть *полная* система линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, потому что всѣ операціи $(Y_i\, Y_k - Y_k\, Y_i)$ выражаются линейно черезъ операціи $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$, $Y_4$; въ послѣднемъ не трудно убѣдиться непосредственными вычисленіями:

$$\begin{aligned}
&(Y_1 Y_2 - Y_2 Y_1)\varphi \equiv Y_2(\varphi),\\
&(Y_1 Y_3 - Y_3 Y_1)\varphi \equiv Y_3(\varphi),\\
&(Y_2 Y_3 - Y_3 Y_2)\varphi \equiv Y_1(\varphi) - Y_4(\varphi),\\
&(Y_1 Y_4 - Y_4 Y_1)\varphi \equiv 0,\\
&(Y_2 Y_4 - Y_4 Y_2)\varphi \equiv Y_2(\varphi),\\
&(Y_3 Y_4 - Y_4 Y_3)\varphi \equiv Y_3(\varphi).
\end{aligned} \qquad (15)$$

Изъ теоріи линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка извѣстно, что полная система $k$ такихъ уравненій съ $m$ независимыми перемѣнными всегда имѣетъ

$$m - k$$

независимыхъ общихъ уравненій; слѣдовательно, система дифференціальныхъ уравненій (D) абсолютныхъ инваріантовъ имѣетъ

$$n + 1 - 4 = n - 3$$

независимыхъ рѣшеній. Каждое рѣшеніе $\varphi_i(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)$, гдѣ $i = 1, 2, 3, \ldots (n-3)$, системы (D), какъ мы знаемъ изъ § 12, должно не измѣняться при преобразованіяхъ группы $S_a$, соотвѣтствующихъ линейнымъ подстановкамъ группы $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$; слѣдовательно, каждое рѣшеніе системы (D) даетъ опредѣленное соотношеніе между старыми и новыми коэффиціентами бинарной формы:

$$\phi_i(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \phi_i(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n);$$

слѣдовательно, независимыя рѣшенія системы (D) дадутъ $n$—3 подобныхъ соотношеній между старыми и новыми коэффиціентами бинарной формы; съ другой же стороны, намъ извѣстно изъ § 11, что между старыми и новыми коэффиціентами бинарной формы возможны только раціональныя соотношенія (B) въ § 11, или же соотношенія, къ нимъ приводимыя. Сопоставляя это вмѣстѣ, мы придемъ къ такому заключенію: *система дифференціальныхъ уравненій абсолютныхъ инваріантовъ имѣетъ $n$—3 независимыхъ рѣшеній, которыя могутъ быть приведены къ раціональному виду; и всякая бинарная форма $n$-го порядка имѣетъ $n$—3 основыхъ, независимыхъ между собою, абсолютныхъ инваріантовъ, черезъ которыя алгебраически выражаются всѣ остальныя ея абсолютныя инваріанты.*

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что бинарныя формы перваго, второго и третьяго порядка совсѣмъ не имѣютъ абсолютныхъ инваріантовъ, а бинарная форма четвертаго порядка имѣетъ одинъ абсолютный инваріантъ, въ функціи котораго выражаются остальныя ея инваріанты. Изъ примѣра 6 въ § 10 мы знаемъ, что для бинарной формы четвертаго порядка функціи

$$S = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$

$$T = a_0 a_3^2 - 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_2 a_4 + a_2^3 + a_1^2 a_4,$$

послѣ преобразованія перемѣнныхъ $x_1$, $x_2$ посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, пріобрѣтаютъ соотвѣтственно множителей

$$\Delta^4 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^4 \quad \text{и} \quad \Delta^6 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^6;$$

слѣдовательно, функція

$$\frac{S^3}{T^2} = \frac{(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2)^3}{(a_0 a_3^2 - 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_2 a_4 + a_2^3 + a_1^2 a_4)^2}$$

послѣ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ пріобрѣтаетъ множитель $\frac{\Delta^{12}}{\Delta^{12}}$, т. е. совсѣмъ не измѣняется; слѣдовательно, эта функція и есть единственный основной абсолютный инваріантъ бинарной формы четвертаго порядка черезъ который выражаются всѣ остальныя ея инваріанты.

*Замѣчаніе.* Въ изложенномъ опредѣленіи числа основныхъ абсолютныхъ инваріантовъ бинарной формы имѣетъ мѣсто одно обстоятельство, которое можетъ породить сомнѣніе въ вѣрности полученныхъ результатовъ: нами не доказано, что система дифференціальныхъ уравненій абсолютныхъ инваріантовъ содержитъ только линейно-независимыя уравненія и не доказано также, что въ системѣ (A) соотношеній въ § 11 коэффиціенты $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ подстановки не входятъ нѣкоторыми группами — въ числѣ $4-\mu$; если бы оказалось, что коэффиціенты $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ входятъ въ соотношенія (A) группами въ числѣ $4-\mu$, то для исключенія $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ изъ соотношеній (A) было бы достаточно исключить эти группы, и мы получили бы $n-3+\mu$ независимыхъ абсолютныхъ инваріентовъ, тогда и система дифференціальныхъ уравненіи абсолютныхъ инваріентовъ должна бы содержать $\mu$ лишнихъ уравненій, выражаемыхъ линейно черезъ остальныя. Докажемъ, что этого быть не можетъ[1]). Пусть посредствомъ подстановки

1) См. болѣе общее доказательство для формы съ $n$ перемѣнными, данное Aronhold'омъ, Crelle's Journal, Bd. 69, S. 185—189. 1868.

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$
$$x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2 \qquad (16)$$

преобразована форма самаго общаго вида $f(x_1, x_2)$; тогда мы получимъ равенство

$$f(x_1, x_2) = \varphi(y_1, y_2) \qquad (17)$$

обращающееся въ тождество, если $x_1$, $x_2$ замѣнить ихъ выраженіями черезъ $y_1$, $y_2$. Предположимъ, что коэффиціенты $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ послѣ замѣны $x_1$, $x_2$ черезъ $y_1$, $y_2$ въ формѣ $f(x_1, x_2)$ будутъ входить въ коэффиціенты преобразованной формы извѣстными группами въ числѣ $4-\mu$, т. е. будутъ зависѣть отъ $\mu$ параметровъ. Обозначимъ дифференцированіе по этимъ параметрамъ черезъ $\delta(\ )$; тогда

$$\delta(x_1) = \delta(\alpha) y_1 + \delta(\beta) y_2,$$
$$\delta(x_2) = \delta(\gamma) y_1 + \delta(\delta) y_2, \qquad (18)$$

а дифференцированіе равенства (17) по этимъ параметрамъ дастъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta(x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta(x_2) = 0. \qquad (19)$$

Если мы выберемъ пару значеній $x_1$, $x_2$, удовлетворяющихъ уравненію $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, которыя не должны удовлетворять уравненію $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, иначе форма $f(x_1, x_2)$ не была бы общаго вида, то получимъ уравненіе

$$\delta(x_1) = 0,$$

которое удовлетворяется всѣми $n-1$ рѣшеніями уравненія $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$; но мы должны при этомъ въ $\delta(x_1)$ замѣнить $y_1$, $y_2$ черезъ $x_1$, $x_2$ посредствомъ обратной подстановки

$$y_1 = \alpha' x_1 + \beta' x_2,$$
$$y_2 = \gamma' x_1 + \delta' x_2;$$

слѣдовательно, уравненіе первой степени

$$[\alpha' \delta(\alpha) + \gamma' \delta(\beta)] x_1 + [\beta' \delta(\alpha) + \delta' \delta(\beta)] x_2 = 0$$

должно удовлетворяться всѣми $n-1$ рѣшеніями уравненія $\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$, при чемъ $n-1 \geqq 2$, кромѣ двухъ случаевъ: $n=1$ или $n=2$. Такъ какъ форма $f(x_1, x_2)$ имѣетъ общій видъ, то всѣ рѣшенія уравненія $\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$ могутъ удовлетворять линейному уравненію только въ томъ случаѣ, если послѣднее имѣетъ оба коэффиціента, равные нулямъ, т. е.

$$\alpha' \delta(\alpha) + \gamma' \delta(\beta) = 0,$$

$$\beta' \delta(\alpha) + \delta' \delta(\beta) = 0;$$

но такъ какъ детерминантъ обратной подстановки $\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$ не равенъ нулю, то необходимо должно быть

$$\delta(\alpha) = 0, \quad \delta(\beta) = 0;$$

подобно предыдущему можно показать, что

$$\delta(\gamma) = 0, \quad \delta(\delta) = 0;$$

слѣдовательно, четыре коэффиціента $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ подстановки при преобразованіи бинарной формы не могутъ быть функціями какихъ-либо параметровъ. Исключеніе составляютъ случаи бинарныхъ формъ 1-го и 2-го порядковъ.

Изъ этого разсужденія не трудно получить также доказательство линейной независимости четырехъ дифференціальныхъ уравненій абсолютныхъ инваріантовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіе (19) внесемъ выраженія $\delta(x_1)$, $\delta(x_2)$ изъ равенствъ (18), замѣнивъ въ нихъ предварительно $y_1$, $y_2$ черезъ $x_1$, $x_2$, то получится равенство

$$[\alpha' \delta(\alpha) + \gamma' \delta(\beta)]\, x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + [\alpha' \delta(\gamma) + \gamma' \delta(\delta)]\, x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} +$$

$$+ [\beta' \delta(\alpha) + \delta' \delta(\beta)]\, x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + [\beta' \delta(\gamma) + \delta' \delta(\delta)]\, x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,$$

у котораго по предыдущему всѣ коэффиціенты при $x_i \frac{\partial f}{\partial x_k}$ суть нули; слѣдовательно, только въ этомъ одномъ смыслѣ оно и можетъ быть удовлетворено, и поэтому между выраженіями $x_i \frac{\partial f}{\partial x_k}$ не можетъ существовать линейнаго соотношенія; если же въ этихъ выраженіяхъ замѣнить произведенія и степени перемѣнныхъ соотвѣтственными частными производными абсолютнаго инваріанта, то получатся первыя части дифференціальныхъ уравненій абсолютныхъ инваріантовъ.

## § 15. Абсолютный инваріантъ бинарной формы какъ отношеніе двухъ инваріантовъ одинаковыхъ степеней.

Въ § 11 мы видѣли, что каждый абсолютный инваріантъ бинарной формы есть отношеніе двухъ цѣлыхъ многочленовъ одинаковыхъ степеней:

$$\Pi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n) = \frac{P(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)}{Q(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)}.$$

Такъ какъ абсолютный инваріантъ, будучи подставленъ въ уравненія

$$Y_1(\varphi) = 0, \quad Y_2(\varphi) = 0, \quad Y_3(\varphi) = 0, \quad Y_4(\varphi) = 0,$$

обращаетъ ихъ въ тождества, то его числитель и знаменатель должны быть такими функціями, чтобы выполнялись условія

$$Y_1\left(\frac{P}{Q}\right) \equiv 0, \quad Y_2\left(\frac{P}{Q}\right) \equiv 0, \quad Y_3\left(\frac{P}{Q}\right) \equiv 0, \quad Y_4\left(\frac{P}{Q}\right) \equiv 0,$$

которыя можно представить въ видѣ

$$Q Y_k(P) - P Y_k(Q) \equiv 0, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

или въ другомъ видѣ

$$\frac{Y_k(P)}{P} \equiv \frac{Y_k(Q)}{Q} = \lambda_k, \; k = 1, 2, 3, 4,$$

гдѣ $\lambda_k$, конечно, должно быть независимымъ отъ $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, потому что числители и знаменатели соотвѣтственно одинаковыхъ степеней. Если вмѣсто $P$ взять $P'(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, т. е. ту же самую функцію, но только отъ коэффиціентовъ преобразованной формы, и положить $L = lg\,P'$, то $L$ будетъ удовлетворять слѣдующимъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$Y_1'(L) = \lambda_1,\quad Y_2'(L) = \lambda_2,\quad Y_3'(L) = \lambda_3,\quad Y_4'(L) = \lambda_4.$$

Эти дифференціальныя уравненія можно написать въ такомъ видѣ

$$\sum_0^n (n-i)\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\alpha_i = \lambda_1,\quad \sum_0^n i\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\alpha_{i-1} = \lambda_2,\quad \sum_0^n (n-i)\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\alpha_{i+1} = \lambda_3,$$

$$\sum_0^n i\frac{\partial L}{\partial \alpha_i}\alpha_i = 0. \tag{D}$$

Мы представимъ эти уравненія нѣсколько въ иномъ видѣ.

Равенство

$$f(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)$$

обращается въ тождество, если $x_1$, $x_2$ замѣнить выраженіями $\alpha y_1 + \beta y_2$, $\gamma y_1 + \delta y_2$; предположивъ, что эта замѣна сдѣлана, мы получимъ дифференцированіемъ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial x_1}y_1,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \frac{\partial f}{\partial x_1}y_2,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = \frac{\partial f}{\partial x_2}y_1,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} = \frac{\partial f}{\partial x_2}y_2;$$

точно также получимъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\alpha + \frac{\partial f}{\partial x_2}\gamma,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\beta + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta;$$

изъ всѣхъ этихъ равенствъ мы получаемъ

$$\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = y_1\frac{\partial \varphi}{\partial y_1},\quad \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} = y_2\frac{\partial \varphi}{\partial y_1},$$

$$\beta\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \delta\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = y_1\frac{\partial \varphi}{\partial y_2},\quad \beta\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \delta\frac{\partial \varphi}{\partial \delta} = y_2\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}.$$

Принимая во вниманіе, что

$$\varphi(y_1, y_2) = \sum_0^n \binom{n}{i}\alpha_i y_1^{n-i} y_2^{i},$$

мы получимъ при помощи послѣднихъ равенствъ слѣдующія тождества:

$$\alpha\sum_0^n\left(\frac{n}{i}\right)\frac{\partial a_i}{\partial\alpha}y_1^{n-i}y_2^i+\gamma\sum_0^n\left(\frac{n}{i}\right)\frac{\partial a_i}{\partial\gamma}y_1^{n-i}y_2^i=\sum\left(\frac{n}{i}\right)a_i(n-i)y_1^{n-i}y_2^i$$ 1)

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;

посредствомъ этихъ тождествъ можно уравненія (D) привести къ виду

$$\begin{aligned}\alpha\frac{\partial L}{\partial\alpha}+\gamma\frac{\partial L}{\partial\gamma}&=\lambda_1,\\ \alpha\frac{\partial L}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial L}{\partial\delta}&=\lambda_2,\\ \beta\frac{\partial L}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial L}{\partial\gamma}&=\lambda_3,\\ \beta\frac{\partial L}{\partial\beta}+\delta\frac{\partial L}{\partial\delta}&=\lambda_4.\end{aligned}\tag{D'}$$

Не трудно показать, что въ послѣдней системѣ количества $\lambda_1$ и $\lambda_4$ должны быть равны между собою, а $\lambda_2$ и $\lambda_3$ равны нулямъ; и въ самомъ дѣлѣ, изъ перваго и третьяго получаемъ

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha}=\frac{1}{\varDelta}(\lambda_1\delta-\lambda_3\gamma),$$

а изъ втораго и четвертаго —

$$\frac{\partial L}{\partial\beta}=\frac{1}{\varDelta}(\lambda_2\delta-\lambda_4\gamma);$$

продифференцировавъ первое изъ этихъ двухъ равенствъ по $\beta$ и второе — по $\alpha$, мы должны получить одинаковые результаты; слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\lambda_1\frac{\delta\gamma}{\varDelta^2}-\lambda_3\frac{\gamma^2}{\varDelta^2}=-\lambda_2\frac{\delta^2}{\varDelta^2}+\lambda_4\frac{\gamma\delta}{\varDelta^2};$$

---

1) Соотношенія между коэффиціентами $a_i$ и ихъ частными производными по $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, вытекающія изъ этихъ тождествъ, суть ничто другое какъ извѣстныя соотношенія Эйлера для однородныхъ функцій. См. § 6.

при независимости количествъ $\gamma$ и $\delta$ это равенство возможно только при $\lambda_1 = \lambda_4$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Такимъ образомъ мы показали, что функція $L = lg\,P'$ должна удовлетворять уравненіямъ:

$$\alpha\frac{\partial L}{\partial \alpha} + \gamma\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \lambda,$$

$$\alpha\frac{\partial L}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial L}{\partial \delta} = 0,$$

$$\beta\frac{\partial L}{\partial \alpha} + \delta\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 0,$$

$$\beta\frac{\partial L}{\partial \beta} + \delta\frac{\partial L}{\partial \delta} = \lambda.$$

Непосредственно можно убѣдиться, что $L = \lambda\, lg\,\Delta + lg\, C$ удовлетворяетъ этимъ уравненіямъ; слѣдовательно, $lg\,P' = \lambda\, lg\,\Delta + lg\,C$ или $P' = C\,.\,\Delta^\lambda$; если же положить $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$, то $P = C$, и слѣдовательно мы имѣемъ равенство

$$P' = P\,.\,\Delta^\lambda,$$

характеризующее цѣлую и раціональную функцію $P$ какъ инваріантъ бинарной формы.

Собственно говоря, эти послѣднія соображенія даже излишни: разъ мы показали, что въ системѣ (D) $\lambda_1 = \lambda_4$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то имѣемъ такую систему уравненій.

$$Y_1(P) = \lambda P, \quad Y_2(P) = 0, \quad Y_3(P) = 0, \quad Y_4(P) = \lambda P,$$

которымъ должна удовлетворять цѣлая раціональная функція $P$, служащая числителемъ абсолютнаго инваріанта, это же показываетъ на основаніи § 7, что функція $P$ служитъ инваріантомъ бинарной формы.

Далѣе мы знаемъ, что и знаменатель $Q$ абсолютнаго инваріанта удовлетворяетъ тѣмъ же самымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, какъ и его числитель; слѣдовательно, $Q$ служитъ тоже инваріантомъ бинарной формы.

Такимъ образомъ мы доказали, что абсолютный инваріантъ бинарной формы есть отношеніе двухъ ея инваріантовъ одинаковыхъ степеней.

Напримѣръ, для бинарной формы четвертаго порядка ея единственный основной абсолютный инваріантъ равенъ отношенію двухъ ея инваріантовъ $S^3$ и $T^2$, какъ намъ извѣстно изъ предыдущаго параграфа.

## § 16. Число основныхъ инваріантовъ бинарной формы.

Изъ § 14 и предыдущаго параграфа слѣдуетъ, что при $n > 3$ у бинарныхъ формъ существуютъ абсолютные инваріанты въ числѣ $n-3$ и для ихъ образованія необходимо имѣть $n-3+1=n-2$ простыхъ инваріанта, т. е. *каждая бинарная форма выше 3-го порядка имѣетъ $n-2$ основныхъ инваріанта.*

Въ концѣ § 8 мы показали, что система уравненій

$$X_3(J)=0, \quad X_2(J)=0, \quad X_1(J)=0, \tag{D}$$

которымъ должна удовлетворять цѣлая, раціональная и однородная функція $J(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$ для того, чтобы быть инваріантомъ бинарной формы, есть *полная* система линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка. Только при $n=2$ или $n=1$ эта система приводится къ полной системѣ двухъ уравненій

$$X_2(J)=0, \quad X_1(J)=0. \tag{D'}$$

Слѣдовательно, при $n>2$ система уравненій (D) имѣетъ $n-2$ независимыхъ рѣшенія [1]); всѣ эти рѣшенія при $n>3$ должны приводиться къ $n-2$ независимымъ цѣлымъ и однороднымъ многочленамъ, служащимъ инваріантами формы.

---

1) См. Goursat. *Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (deutsche Ausgabe von Maser),* § 27. Leipzig. 1893.

При $n=3$ система уравненій (D) можетъ имѣть одно независимое рѣшеніе, которое должно приводиться къ виду

$$R=a_3^2\, a_0^2-6a_3\, a_2\, a_1\, a_0+4a_3\, a_1^3+4_2^3\, a_0-3a_2^2\, a_1^2,$$

такъ какъ изъ § 10 (*Прим.* 3) мы знаемъ, что $R$ служитъ общимъ рѣшеніемъ всѣхъ трехъ уравненій системы (D). При $n=2$ система (D) приводится къ полной системѣ (D′) и, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ существуетъ одно независимое рѣшеніе дифференціальныхъ уравненій инваріанта

$$D=a_0\, a_2-a_1^2,$$

такъ какъ изъ § 10 (*Прим.* 1) намъ извѣстно, что D служитъ общимъ рѣшеніемъ обоихъ уравненій системы (D′).

При $n=1$ система (D′) не имѣетъ рѣшеній, если не считать $J=\mathrm{Const}$.

Такимъ образомъ, мы не только доказали существованіе инваріантовъ у всякой бинарной формы степени выше первой, но доказали также, что число *основныхъ* инваріантовъ у каждой бинарной формы есть конечное и равно $n-2$, если степень $n$ бинарной формы больше 2, или равно $n-1$, если степень $n$ равна 2 или 1.

Для $n=4$ число основныхъ инваріантовъ равно 2; остальные будутъ выражаться алгебраически черезъ эти два.

Такими двумя основными инваріантами бинарной формы четвертой степени могутъ служить инваріанты $S$ и $T$, вычисленные нами въ § 10 (*Прим.* 6), потому что они между собою независимы; въ самомъ дѣлѣ, если бы между $S$ и $T$ существовала зависимость, то она имѣла бы мѣсто для всякой бинарной формы четвертой степени, но этого нѣтъ для бинарной формы $4x_1^3 x_2-ux_1 x_2^3-vx_2^4$, для которой $S=u$ и $T=v$, гдѣ $u$ и $v$ суть совершенно произвольныя величины.

# ГЛАВА II.

## Совмѣстные инваріанты системы бинарныхъ формъ.

### § 17. Опредѣленіе совмѣстнаго инваріанта системы бинарныхъ формъ.

Разсмотримъ систему $k$ бинарныхъ формъ различныхъ порядковъ — $n$-го, $m$-го, . . . $q$-го;

$$f_1(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n,$$

$$f_2(x_1, x_2) = b_0 x_1^m + \binom{m}{1} b_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots + b_m x_2^m,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f_k(x_1, x_2) = s_0 x_1^q + \binom{q}{1} s_1 x_1^{q-1} x_2 + \ldots + s_q x_2^q.$$

Если въ этой системѣ бинарныхъ формъ преобразовать перемѣнныя $x_1$, $x_2$ посредствомъ линейной подстановки

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$
$$x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

то получится новая система бинарныхъ формъ тѣхъ же порядковъ — $n$-го, $m$-го, . . . $q$-го, съ новыми перемѣнными $y_1$, $y_2$:

$$\varphi_1(y_1,\ y_2)=\alpha_0 y_1^n+\binom{n}{1}\alpha_1 y^{n-1}y_2+\ldots+\alpha_n y_2^n,$$

$$\varphi_2(y_1,\ y_2)=\beta_0 y_1^m+\binom{m}{1}\beta_1 y^{m-1}y_2+\ldots+\beta_m y_2^m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_k(y_1,\ y_2)=\sigma_0 y_1^q+\binom{q}{1}\sigma_1 y^{q-1}y_2+\ldots+\sigma_q y_2^q.$$

Коэффиціенты $\alpha_i$, $\beta_i$, . . . $\sigma_i$ этой новой системы, какъ намъ извѣстно изъ § 1 предыдущей главы, суть линейныя функціи прежнихъ коэффиціентовъ $a_i$, $b_i$, . . . $s_i$ и однородныя функціи относительно каждой пары — $(\alpha,\ \gamma)$ и $(\beta,\ \delta)$ коэффиціентовъ линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}$; выраженія этихъ коэффиціентовъ не трудно написать по формуламъ § 1 предыдущей главы:

$$\alpha_i=\frac{(n-i)!}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta+\frac{\partial}{\partial\gamma}\delta\right)^i f_1(\alpha,\gamma)=\frac{i!}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial}{\partial\delta}\gamma\right)^{n-i} f_1(\beta,\delta),$$
$$i=0,\ 1,\ \ldots\ n,$$

$$\beta_i=\frac{(m-i)!}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta+\frac{\partial}{\partial\gamma}\delta\right)^i f_2(\alpha,\gamma)=\frac{i!}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial}{\partial\delta}\gamma\right)^{m-i} f_2(\beta,\delta),$$
$$i=0,\ 1,\ \ldots\ m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_i=\frac{(q-i)!}{q!}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta+\frac{\partial}{\partial\gamma}\delta\right)^i f_k(\alpha,\gamma)=\frac{i!}{q!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\alpha+\frac{\partial}{\partial\delta}\gamma\right)^{q-i} f_k(\beta,\delta),$$
$$i=0,\ 1,\ \ldots\ q.$$

*Совмѣстнымъ инваріантомъ* системы бинарныхъ формъ называется цѣлая раціональная функція

$$J(a_0,a_1,\ldots a_n,\ b_0,b_1,\ldots b_m\ldots s_0,\ s_1\ldots s_q)\ \text{или}\ J(a,b,\ldots s)$$

коэффиціентовъ $a_0$, $a_1$, . . . $a_n$, $b_0$, $b_1$, . . . $b_m$, . . . $s_0$, $s_1$, . . . $s_n$ формъ, однородная относительно коэффиціентовъ каждой формы въ отдѣльности и удовлетворяющая тождественно равенству

$$J(\alpha, \beta, \ldots \sigma) = \Delta^\lambda J(a, b, \ldots s), \text{ гдѣ } \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma, \tag{B}$$

если въ немъ замѣнить $\alpha_i$, $\beta_i$, ... $\sigma_i$ ихъ выраженіями изъ формулъ (A). Показатель степени $\lambda$ называется индексомъ совмѣстнаго инваріанта; его величину не трудно опредѣлить, если мы представимъ $J(a, b, \ldots s)$ въ видѣ суммы

$$\sum A \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} \ldots a_n^{e_n} b_0^{g_0} b_1^{g_1} \ldots b_m^{g_m} \ldots$$

и возьмемъ подстановку $x_1 = \rho y_1$, $x_2 = \rho y_2$, для которой $\Delta = \rho^2$; тогда мы увидимъ, что всѣ члены суммы будутъ имѣть общій множитель

$$\rho^{n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k},$$

гдѣ $\mu_1$, $\mu_2$, ... $\mu_k$ суть степени совмѣстнаго инваріанта относительно $a$, $b$, ... $s$; этотъ множитель долженъ равняться $\Delta^\lambda = \rho^{2\lambda}$, откуда мы получаемъ соотношеніе

$$n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k = 2\lambda. \tag{20}$$

Мы знаемъ, что всякую линейную постановку $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ можно разсматривать какъ составную изъ двухъ подстановокъ:

$$S'\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad S''\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\rho} & \frac{\beta}{\rho} \\ \frac{\gamma}{\rho} & \frac{\delta}{\rho} \end{pmatrix}_{\Delta''=1}$$

если $\rho = \sqrt{\Delta} = \sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}$; но для того, чтобы функція $J$ удовлетворяла равенству (B) относительно подстановки $S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, достаточно, чтобы она удовлетворяла этому равенству для составныхъ подстановокъ $S'$ и $S''$, потому что изъ равенствъ

$$J(\alpha', \beta', \ldots \sigma') = \Delta'^\lambda J(a, b, \ldots s),$$
$$J(\alpha, \beta, \ldots \sigma) = \Delta''^\lambda J(\alpha', \beta', \ldots \sigma')$$

слѣдуетъ равенство

$$J(\alpha, \beta, \ldots \sigma) = (\Delta' \Delta'')^\lambda J(a, b, \ldots s)$$

или равенство

$$J(\alpha,\ \beta,\ \ldots\ \sigma) = \Delta^{\lambda} J(a,\ b,\ \ldots\ s),$$

такъ какъ $\Delta' \Delta'' = \Delta$.

Не трудно понять, что цѣлая раціональная и однородная, относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы данной системы, функція $J(a,\ b,\ \ldots\ s)$ вслѣдствіе своей однородности должна удовлетворять равенству (B) относительно подстановки $S'\begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & \rho\end{pmatrix}$; слѣдовательно, для того, чтобы она служила совмѣстнымъ инваріантомъ системы бинарныхъ формъ, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соотношенію (B) относительно всякой унимодулярной подстановки $S''$, т. е. соотношенію

$$J(\alpha,\ \beta,\ \ldots\ \sigma) = J(a,\ b,\ \ldots\ s).$$

Преобразуя перемѣнныя $x_1$, $x_2$ бинарныхъ формъ данной системы, мы въ то же время преобразуемъ ихъ коэффиціенты $a_i$, $b_i$, ... $s_i$ посредствомъ формулъ, линейныхъ относительно $\alpha_i$, $\beta_i$, ... $\delta_i$:

$$\begin{array}{l}
a_i = A_0^{(i)}\alpha_0 + A_0^{(i)}\alpha_1 + \ldots + A_n^{(i)}\alpha_n,\quad i=0,1,2,\ldots n;\\
b_i = B_0^{(i)}\beta_0 + B_0^{(i)}\beta_1 + \ldots + B_m^{(i)}\beta_m,\quad i=0,1,2,\ldots m;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (A')\\
s_i = S_0^{(i)}\sigma_0 + S_0^{(i)}\sigma_1 + \ldots + S_q^{(i)}\sigma_q,\quad i=0,1,2,\ldots q;
\end{array}$$

эти формулы получатся, если разрѣшить систему (A) относительно $a_i$, $b_i$, ... $s_i$.

Система преобразованій (A′) содержитъ $k$ отдѣльныхъ группъ линейныхъ унимодулярныхъ преобразованій

$$S_a,\ S_b,\ \ldots\ S_s$$

для коэффиціентовъ данной системы бинарныхъ формъ. Каждая изъ этихъ группъ, какъ намъ извѣстно изъ § 7 предыдущей главы, имѣетъ три существенныхъ параметра и именно — три параметра подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$; слѣдовательно, эти группы находятся въ однозначномъ соотвѣтствіи съ группою подстановокъ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$ и въ такомъ же соотвѣтствіи между собою, т. е. каждой подстановкѣ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$ соотвѣтствуетъ по одной подстановкѣ въ каждой изъ группъ $S_a$, $S_b$, $\ldots$ $S_s$, и наоборотъ. На основаніи всего предыдущаго мы можемъ сказать, что *совмѣстный инваріантъ системы бинарныхъ формъ есть такая цѣлая, раціональная и однородная, относительно коэффиціентовъ каждой формы, функція $J(a, b, \ldots s)$, которая совсѣмъ не измѣняется отъ системъ соотвѣтственныхъ подстановокъ группъ $S_a$, $S_b$, $\ldots$ $S_s$.*

Имѣя въ виду это послѣднее опредѣленіе совмѣстнаго инваріанта, не трудно получить его дифференціальныя уравненія, если воспользоваться методами §§ 7 и 12 предыдущей главы.

## § 18. Дифференціальныя уравненія совмѣстныхъ инваріантовъ.

Изъ § 7 предыдущей главы мы знаемъ, что подгруппа безконечно-малыхъ подстановокъ группы $S_a$ имѣетъ символъ

$$V_1(J)=\alpha_1\sum_0^n(n-2i)\frac{\partial J}{\partial a_i}a_i+\beta_1\sum_0^n i\frac{\partial J}{\partial a_i}a_{i-1}+\gamma_1\sum_0^n(n-i)\frac{\partial J}{\partial a_i}a_{i+1}\,;$$

точно также можно получить символы подгруппъ безконечно-малыхъ подстановокъ группъ $S_a$, $S_b$, $\ldots$ $S_s$:

$$V_2(J)=\alpha_1\sum_0^m(m-2i)\frac{\partial J}{\partial b_i}b_i+\beta_1\sum_0^n i\frac{\partial J}{\partial b_i}b_{i-1}+\gamma_1\sum_0^n(m-i)\frac{\partial J}{\partial b_i}b_{i+1}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_k(J)=\alpha_1\sum_0^q(q-2i)\frac{\partial J}{\partial s_i}s_i+\beta_1\sum_0^q i\frac{\partial J}{\partial s_i}s_{i-1}+\gamma_1\sum_0^q(q-i)\frac{\partial J}{\partial s_i}s_{i+1}\,;$$

всѣ эти безконечно-малыя подстановки съ одинаковыми значеніями $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ соотвѣтствуютъ одной безконечно-малой унимодулярной подстановкѣ $S\begin{pmatrix}1+\alpha_1\,\delta t & \beta_1\,\delta t \\ \gamma_1\,\delta t & 1-\alpha_1\,\delta t\end{pmatrix}$.

Приращеніе совмѣстнаго инваріанта при всей этой системѣ соотвѣтственныхъ безконечно-малыхъ преобразованій будетъ

$$\delta J = \delta' J + \delta'' J + \ldots + \delta^{(k)} J$$
$$= -\{V_1(J) + V_2(J) + \ldots + V_k(J)\}\,\partial t;$$

оно должно равняться нулю при всякихъ значеніяхъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, а это возможно, если функція $J(a, b, \ldots s)$ удовлетворяетъ уравненіямъ:

$$\sum_0^n (n-2i)\frac{\partial J}{\partial a_i}a_i + \sum_0^m (m-2i)\frac{\partial J}{\partial b_i}b_i + \ldots + \sum_0^q (q-2i)\frac{\partial J}{\partial s_i}s_i = 0$$
$$\sum_0^n i\,\frac{\partial J}{\partial a_i}a_{i-1} + \sum_0^m i\,\frac{\partial J}{\partial b_i}b_{i-1} + \ldots + \sum_0^q i\,\frac{\partial J}{\partial s_i}s_{i-1} = 0 \qquad \text{(D)}$$
$$\sum_0^n (n-i)\frac{\partial J}{\partial a_i}a_{i+1} + \sum_0^m (m-i)\frac{\partial J}{\partial b_i}b_{i+1} + \ldots + \sum_0^q (q-i)\frac{\partial J}{\partial s_i}s_{i+1} = 0$$

Такимъ образомъ мы получили дифференціальныя уравненія, которымъ долженъ удовлетворять всякій совмѣстный инваріантъ данной системы бинарныхъ формъ.

Наоборотъ, если цѣлая, раціональная и однородная, относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы системы, функція $J(a, b, \ldots s)$ удовлетворяетъ уравненіямъ (D), то ея приращеніе при соотвѣтственныхъ безконечно-малыхъ преобразованіяхъ группъ $S_a, S_b, \ldots S_s$ будетъ нуль:

$$\delta J = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что и при конечныхъ соотвѣтственныхъ преобразованіяхъ группъ $S_a, S_b, \ldots S_s$ эта функція не измѣняется:

$$J(a, b, \ldots s) = \text{Const.} = J(\alpha, \beta, \ldots \delta),$$

и слѣдовательно она служитъ совмѣстнымъ инваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ.

Обозначимъ первыя части уравненій (D) черезъ

$$X_3(J), \quad X_2(J), \quad X_1(J);$$

не трудно видѣть, что

$$-X_3(J)=(X_1X_2-X_2X_1)J.$$

Слѣдовательно, функція $J(a,\ b,\ \ldots s)$, удовлетворяющая двумъ уравненіямъ

$$X_2(J)=0,\ X_1(J)=0,$$

удовлетворяетъ и третьему

$$X_3(J)=0;$$

поэтому мы можемъ сказать: для того, чтобы цѣлая, раціональная и однородная, относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы данной системы, функція $J(a,\ b,\ \ldots s)$ служила совмѣстнымъ инваріантомъ, необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она удовлетворяла двумъ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$X_2(J)=0,\ X_1(J)=0.$$

Наконецъ, не трудно показать, что система трехъ дифференціальныхъ уравненій совмѣстнаго инваріанта

$$X_3(J)=0,\ X_2(J)=0,\ X_1(J)=0$$

есть *полная* система; и въ самомъ дѣлѣ, непосредственныя вычисленія даютъ

$$\begin{aligned}(X_1X_2-X_2X_1)J&\equiv-\ X_3(J),\\(X_1X_3-X_3X_1)J&\equiv\ \ 2X_1(J),\\(X_2X_3-X_3X_2)J&\equiv-2X_2(J);\end{aligned}\tag{21}$$

эти же соотношенія характеризуютъ полную систему.

Уравненія

$$X_3(J)=0,\ X_2(J)=0,\ X_1(J)=0$$

линейно-зависимы только въ случаѣ одной бинарной формы первой или второй степени; въ остальныхъ случаяхъ они линейно-независимы, что непосредственно слѣдуетъ изъ замѣчанія въ § 14. Эти уравненія имѣютъ тотъ смыслъ, что совмѣстный инваріантъ $J$ не долженъ измѣняться отъ безконечно-малыхъ преобразованій $X_3(J)$, $X_2(J)$, $X_1(J)$. Отсюда слѣдуетъ, что совмѣстный инваріантъ не долженъ измѣняться также отъ конечныхъ преобразованій, составленныхъ изъ этихъ безконечно-малыхъ подстановокъ. Пользуясь способомъ § 9 предыдущей главы, мы можемъ показать, что конечныя подстановки, образуемыя послѣдовательнымъ примѣненіемъ безконечно-малыхъ $X_3(J)$, $X_2(J)$, $X_1(J)$, соотвѣтствуютъ слѣдующимъ конечнымъ подстановкамъ группы $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$:

$$\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ \tau & 1\end{pmatrix}.$$

Мы знаемъ, что первую подстановку можно разложить на двѣ:

$$\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ 0 & \sigma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sigma^{-2}\end{pmatrix};$$

изъ этихъ двухъ составляющихъ подстановокъ новое условіе для совмѣстнаго инваріанта даетъ только вторая, потому что первая не измѣняетъ никакой функціи, однородной относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы системы. Представивъ совмѣстный инваріантъ въ видѣ суммы

$$\sum A \, . \, a_0^{e_0} a_1^{e_1} \ldots a_n^{e_n} b_0^{g_0} b_1^{g_1} \ldots b_m^{g_m} \ldots,$$

и примѣнивъ къ перемѣннымъ $x_1$, $x_2$ подстановку $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sigma^{-2}\end{pmatrix}$, мы замѣтимъ, что приведенный членъ суммы выдѣлитъ факторъ $\sigma^{-2[0.e_0+1.e_1+\ldots+ne_n+0.g_0+1.g_1+\ldots+mg_m+\ldots]}$; такой же факторъ долженъ быть выдѣленъ и другими членами для того, чтобы вся функція могла выдѣлить факторъ $\sigma^{-2\lambda}=\Delta^{\lambda}$; слѣдовательно

$$-2\left[\sum_0^n i e_i+\sum_0^m i g_i+\ldots\right]=\text{Const.}=-2\lambda,$$

или

$$\sum_0^n i e_i+\sum_0^m i g_i+\ldots=\lambda. \tag{22}$$

Такимъ образомъ, условіе инваріантности однородной функціи $J(a, b, \ldots s)$ относительно подстановки $\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma^{-1} \end{pmatrix}$ или, что тоже самое, условіе $X_3(J)=0$, совершенно тождественно съ условіемъ, чтобы эта функція была *изобарна и съ вѣсомъ* $\lambda$; индексъ $\lambda$ равенъ $\frac{1}{2}[n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots q\mu_k]$, какъ намъ извѣстно изъ § 17.

Слѣдовательно, если мы возьмемъ цѣлую раціональную функцію $J(a, b, \ldots s)$, однородную относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы системы и изобарную съ вѣсомъ $\lambda = \frac{1}{2}[n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k]$, то она будетъ совмѣстнымъ инваріантомъ данной системы тогда, когда она удовлетворяетъ двумъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$X_2(J)=0 \text{ и } X_1(J)=0;$$

Теперь можно замѣтить, что послѣднее условіе $X_1(J)=0$ не необходимо, ибо оно вытекаетъ изъ остальныхъ.

Подобно тому, какъ и въ § 9 предыдущей главы, мы можемъ показать, что для цѣлой однородной и изобарной функціи $J(a, b, \ldots s)$ съ вѣсомъ $p$ имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$(X_2 X_1^\nu - X_1^\nu X_2) J = \nu(\chi - \nu + 1) X_1^{\nu-1}(J), \tag{23}$$

гдѣ $\chi = n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - 2p$ есть *эксцессъ* изобарной функціи $J$; пользуясь же этимъ соотношеніемъ не трудно показать, что изъ условій $\chi = 0$ и $X_2(J) \equiv 0$ слѣдуетъ для изобарной функціи тождество $X_1(J) \equiv 0$.

Итакъ, *для того, чтобы цѣлая раціональная функція, однородная относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы системы, и изобарная относительно нихъ — съ вѣсомъ* $p = \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k)$, *служила совмѣстнымъ инваріантомъ, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла одному дифференціальному уравненію*

$$\Sigma i \frac{\partial J}{\partial a_i} a_{i-1} + \Sigma i \frac{\partial J}{\partial b_i} b_{i-1} + \ldots + \Sigma i \frac{\partial J}{\partial s_i} s_{i-1} = 0.$$

### § 19. Примѣры вычисленія совмѣстныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ.

Послѣднее предложеніе предыдущаго параграфа даетъ возможность вычислить совмѣстный инваріантъ какого угодно порядка данной системы бинарныхъ формъ.

*Примѣръ 1.* Пусть мы имѣемъ систему двухъ бинарныхъ формъ первыхъ порядковъ $(n=m=1)$:

$$a_0 x_1 + a_1 x_2, \quad b_0 x_1 + b_1 x_2;$$

вычислимъ ихъ совмѣстный инваріантъ первой степени относительно коэффиціентовъ каждой формы, т. е. $\mu_1 = \mu_2 = 1$; его вѣсъ $p$ будетъ равенъ $\frac{1}{2}[1.1+1.1]=1$; слѣдовательно, искомый совмѣстный инваріантъ долженъ имѣть видъ

$$J = c_0 a_0 b_1 + c_1 a_1 b_0;$$

но, кромѣ того, онъ долженъ удовлетворять дифференціальному уравненію

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + \frac{\partial J}{\partial b_1} b_0 = 0,$$

что даетъ

$$c_1 a_0 b_0 + c_0 b_0 a_0 \equiv 0 \quad \text{или} \quad c_1 = -c_0;$$

слѣдовательно, искомый совмѣстный инваріантъ — единственный

$$R_{11} = a_0 b_1 - a_1 b_0;$$

это ничто другое какъ *результантъ* двухъ данныхъ формъ.

*Примѣръ 2.* Не трудно показать, что результантъ $R_{11} = a_0 b_1 - a_1 b_0$ есть единственный *основной* совмѣстный инваріантъ двухъ бинарныхъ формъ первой степени и что другіе совмѣстные инваріанты суть степени его.

Пусть $\mu_1$ и $\mu_2$ будутъ степени искомаго совмѣстнаго инваріанта; его вѣсъ $p = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$; слѣдовательно, числа $\mu_1$ и $\mu_2$ должны быть одновременно четными или нечетными; пусть $\mu_1 = q$, тогда $\mu_2 = q + 2r$, и вѣсъ $p = q + r$.

Искомый совмѣстный инваріантъ долженъ имѣть видъ:

$$J = c_0 a_0^q a_1^0 b_0^0 b_1^{q+r} + c_1 a_0^{q-1} a_1^1 b_0^1 b_1^{q+r-1} + \ldots +$$
$$+ c_{q-1} a_0^1 a_1^{q-1} b_0^{q-1} b_1^{r+1} + c_q a_0^0 a_1^q b_0^q b_1^r;$$

кромѣ того, онъ долженъ удовлетворять уравненію

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + \frac{\partial J}{\partial b_1} b_0 = 0;$$

это послѣднее условіе даетъ тождественное равенство:

$$c_1 a_0^q b_0 b_1^{q+r-1} + 2c_2 a_0^{q-1} a_1 b_0^2 b_1^{q+r-2} + \ldots + qc_q a_0 a_1^{q-1} b_0^q b_1^r +$$
$$+ (q+r) c_0 a_0^q b_0 b_1^{q+r-1} + (q+r-1) c_1 a_0^{q-1} a_1 b_0^2 b_1^{q+r-2} + \ldots +$$
$$+ rc_q a_1^q b_0^{q+1} b_1^{r-1} \equiv 0;$$

отсюда мы имѣемъ соотношенія

$$c_1 + (q+r)c_0 = 0,\ 2c_2 + (q+r-1)c_1 = 0 \ldots qc_q + (r+1)c_{q-1} = 0$$

и еще

$$c_q = 0,$$

если $r \neq 0$.

Слѣдовательно, если $r \neq 0$ или $\mu_1 \neq \mu_2$, то совмѣстный, инваріантъ не существуетъ; если же $\mu_1 = \mu_2$, то коэффиціенты $c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_q$ выражаются черезъ $c_0$:

$$c_1 = -\frac{\mu_1}{1} c_0,\ c_2 = \frac{\mu_1(\mu_1-1)}{1.2} c_0, \ldots c_k = (-1)^k \frac{\mu_1(\mu_1-1)\ldots(\mu_1-k+1)}{1.2\ldots k} c_0,$$

и совмѣстный инваріантъ имѣетъ видъ

$$J = c_0 \left[a_0^{\mu_1} b_1^{\mu_1} - \frac{\mu_1}{1} a_0^{\mu_1-1} a_1 b_0 b_1^{\mu_1-1} + \ldots + (-1)^{\mu_1} a_1^{\mu_1} b_0^{\mu_1}\right]$$
$$= c_0 [a_0 b_1 - a_1 b_0]^{\mu_1}$$
$$= c_0 R_{11}^{\mu_1}.$$

*Примѣръ 3.* Разсмотримъ двѣ бинарныхъ формы

$$a_0 x_1 + a_1 x_2 \quad \text{и} \quad b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2;$$

въ данномъ случаѣ $n = 1$ и $m = 2$; слѣдовательно, вѣсъ совмѣстнаго инваріанта $p = \frac{1 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_2}{2}$, и отсюда заключаемъ что $\mu_1$ должно быть четнымъ числомъ.

Вычислимъ совмѣстный инваріантъ для этихъ двухъ формъ, полагая $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$; его вѣсъ будетъ $p = 2$; слѣдовательно,

$$J = c_0 b_0 b_2 + c_1 b_1^2;$$

подставивъ это значеніе $J$ въ уравненіе

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + \frac{\partial J}{\partial b_1} b_0 + 2 \frac{\partial J}{\partial b_2} b_1 = 0,$$

мы получимъ $c_1 = -c_0$; искомый совмѣстный инваріантъ есть ничто другое какъ инваріантъ бинарной формы втораго порядка

$$J_{02} = b_0 b_2 - b_1^2.$$

Вычислимъ, далѣе, совмѣстный инваріантъ двухъ данныхъ формъ, полагая $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$; для него $p = 2$, поэтому онъ долженъ имѣть видъ

$$J = c_0 b_0 a_1^2 + c_1 b_1 a_1 a_0 + c_2 b_2 a_0^2;$$

подставивъ это выраженіе въ уравненіе

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + \frac{\partial J}{\partial b_1} b_0 + 2 \frac{\partial J}{\partial b_2} b_1 = 0,$$

мы получимъ тождественное равенство

$$2 c_0 b_0 a_0 a_1 + c_1 b_1 a_0^2 + c_1 b_0 a_1 a_0 + 2 c_2 b_1 a_0^2 \equiv 0,$$

изъ котораго слѣдуетъ

$$2 c_0 + c_1 = 0, \quad c_1 + 2 c_2 = 0;$$

искомый инваріантъ будетъ

$$J_{12} = b_0 a_1^2 - 2 b_1 a_1 a_0 + b_2 a_0^2$$

и есть ничто иное какъ *результантъ* двухъ данныхъ бинарныхъ формъ.

Далѣе мы покажемъ, что $J_{02}$ и $J_{12}$ суть основные совмѣстные инваріанты двухъ данныхъ формъ, и что всякій совмѣстный инваріантъ ихъ выражается цѣлой раціональной функціей этихъ двухъ инваріантовъ.

*Примѣръ 4.* Разсмотримъ двѣ бинарныхъ формы втораго порядка

$$a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2, \quad b_0 x_1^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2;$$

въ данномъ случаѣ $n=2$, $m=2$, слѣдовательно $p=\mu_1+\mu_2$.

Не трудно показать, что совмѣстныя инваріанты $J_{02}$ и $J_{20}$ суть ничто другое какъ инваріанты $b_0 b_2 - b_1^2$ и $a_0 a_2 - a_1^2$ каждой формы въ отдѣльности.

Вычислимъ совмѣстный инваріантъ, полагая $\mu_1=1$ и $\mu_2=1$; его вѣсъ $p=2$, и поэтому онъ долженъ имѣть видъ

$$J = c_0 a_0 b_2 + c_1 a_1 b_1 + c_2 a_2 b_0;$$

подставивъ это выраженіе въ уравненіе

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} a_0 + 2\frac{\partial J}{\partial a_2} a_1 + \frac{\partial J}{\partial b_1} b_0 + 2\frac{\partial J}{\partial b_2} b_1,$$

мы получимъ тождественное равенство

$$c_1 a_0 b_1 + 2c_2 a_1 b_0 + c_1 a_1 b_0 + 2c_0 a_0 b_1 \equiv 0,$$

изъ котораго слѣдуетъ

$$c_1 + 2c_0 = 0, \quad 2c_2 + c_1 = 0;$$

искомый совмѣстный инваріантъ долженъ равняться

$$J_{11} = a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0.$$

Далѣе мы покажемъ, что три совмѣстныхъ инваріанта $J_{02}$, $J_{20}$, $J_{11}$ суть основныя для системы двухъ бинарныхъ формъ второй степени, и остальные совмѣстные инваріанты выражаются цѣлыми раціональными функціями черезъ эти три инваріанта.

Результантъ двухъ разсматриваемыхъ формъ

$$R = -a_0^2 b_2^2 - a_2^2 b_0^2 + 2a_0 a_2 b_0 b_2 + 4a_0 a_1 b_1 b_2 + 4a_1 a_2 b_0 b_1 -$$
$$- 4a_1^2 b_0 b_2 - 4a_0 a_2 b_1^2$$

есть ихъ совмѣстный инваріантъ второй степени относительно коэффиціентовъ каждой формы, и не трудно провѣрить непосредственнымъ вычисленіемъ, что онъ слѣдующимъ образомъ выражается черезъ основные совмѣстные инваріанты:

$$R = J_{02} \cdot J_{20} - J_{11}^2.$$

## § 20. Абсолютные совмѣстные инваріанты системы бинарныхъ формъ и ихъ дифференціальныя уравненія.

По аналогіи съ изложеннымъ въ § 11 мы можемъ назвать *абсолютнымъ совмѣстнымъ инваріантомъ* системы бинарныхъ формъ такую раціональную функцію $\Pi(a, b, \ldots s)$ коэффиціентовъ данныхъ формъ, которая *совсѣмъ* не измѣняется при всякомъ линейномъ преобразованіи $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ перемѣнныхъ $x_1$, $x_2$ данныхъ формъ:

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что абсолютный совмѣстный инваріантъ характеризуется равенствомъ

$$\Pi(\alpha, \beta, \ldots \sigma) = \Pi(a, b, \ldots s),$$

которое обращается въ тождество, если $\alpha_i$, $\beta_i$, $\ldots$ $\sigma_i$ замѣнить ихъ выраженіями по формуламъ (A) въ § 17; эти формулы (A) въ § 17 мы будемъ писать сокращенно въ видѣ:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= A_i(a;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta), \\ \beta_i &= B_i(b;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sigma_i &= S_i(s;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta). \end{aligned} \tag{A}$$

Число этихъ соотношеній равно

$$(n + m + \ldots + q) + k,$$

если система содержитъ $k$ бинарныхъ формъ соотвѣтственно порядковъ $n$, $m$, $\ldots$ $q$.

Если изъ равенствъ (A) исключить параметры $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, то мы получимъ, вообще говоря, $(n+m+\ldots+q)+k-4$ соотношеній:

$$R_i(a, b, \ldots s;\ \alpha, \beta, \ldots \sigma)=0,\ i=1, 2, \ldots[(n+m+\ldots+q)+k-4], \quad \text{(B)}$$

если соотношенія (A) между собою независимы. Функція $R_i$ суть цѣлыя раціональныя и, вообще говоря, неоднородныя какъ относительно всѣхъ количествъ $a$, $b$, ... $s$, такъ и относительно всѣхъ количествъ $\alpha$, $\beta$, ... $\sigma$. Слѣдовательно каждое изъ соотношеній (B) можно представить въ видѣ:

$$P \cdot Q + P_1 \cdot Q_1 + P_2 \cdot Q_2 + \ldots = 0, \qquad \text{(B')}$$

гдѣ $P$, $P_1$, ... суть цѣлые, вообще говоря, неоднородные и различныхъ степеней многочлены относительно $a$, $b$, ... $s$, а $Q$, $Q$, ... суть цѣлые, вообще говоря, неоднородные и различныхъ степеней многочлены относительно $\alpha$, $\beta$, ... $\sigma$.

Если разрѣшить соотношеніе (B′) относительно $P$, то мы получимъ

$$P = -\frac{P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + \ldots}{Q}.$$

Обозначимъ вторую часть этого равенства черезъ $\Pi(\alpha, \beta, \ldots \sigma)$. Очевидно, что эта функція $\Pi(\alpha, \beta, \ldots \sigma)$ остается безъ перемѣны при всякомъ линейномъ преобразованіи $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ перемѣнныхъ данныхъ формъ, т. е. она удовлетворяетъ соотношенію

$$\Pi(\alpha, \beta, \ldots \sigma) = \Pi(a, b, \ldots s) \qquad \text{(C)}$$

и, слѣдовательно, служитъ абсолютнымъ совмѣстнымъ инваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ. Такимъ образомъ можно получить безчисленное множество абсолютныхъ совмѣстныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ, но между ними независимыхъ будетъ конечное число, потому что каждый изъ нихъ налагаетъ опредѣленную зависимость (C) на коэффиціенты $a$, $b$, . . . $s$, съ одной стороны, и $\alpha$, $\beta$, . . . $\sigma$, съ другой стороны; такихъ же соотношеній, независимыхъ между собою, должно быть конечное число, и всѣ они должны приводиться къ системѣ (B); другихъ соотношеній между этими количествами, неприводимыхъ къ соотношеніямъ (B), быть не можетъ. Не трудно вывести дифференціальныя уравненія абсолютныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ, если воспользоваться методомъ §§ 7, 12 и 18.

Безконечно-малыя подстановки группъ $S_a$, $S_b$, . . . $S_s$ преобразованій коэффиціентовъ $a$, $b$, . . . $s$, соотвѣтствующія безконечно-малой подстановкѣ $S\begin{pmatrix} 1+\alpha_1\,\delta t & \beta_1\,\delta t \\ \gamma_1\,\delta t & 1+\delta_1\,\delta t \end{pmatrix}$ перемѣнныхъ $x_1$, $x_2$ данныхъ бинарныхъ формъ, на основаніи § 12 должны имѣть видъ:

$$V_1(\phi)=\alpha_1\sum_0^n(n-i)\frac{\partial\phi}{\partial a_i}a_i+\beta_1\sum_0^n i\frac{\partial\phi}{\partial a_i}a_{i-1}+\gamma_1\sum_0^n(n-i)\frac{\partial\phi}{\partial a_i}a_{i+1}+$$
$$+\delta_1\sum_0^n i\frac{\partial\phi}{\partial a_i}a_i,$$

$$V_2(\phi)=\alpha_1\sum_0^m(m-i)\frac{\partial\phi}{\partial b_i}b_i+\beta_1\sum_0^m i\frac{\partial\phi}{\partial b_i}b_{i-1}+\gamma_1\sum_0^m(m-i)\frac{\partial\phi}{\partial b_i}b_{i+1}+$$
$$+\delta_1\sum_0^n i\frac{\partial\phi}{\partial b_i}b_i,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$V_k(\phi)=\alpha_1\sum_0^q(q-i)\frac{\partial\phi}{\partial s_i}s_i+\beta_1\sum_0^q i\frac{\partial\phi}{\partial s_i}s_{i-1}+\gamma_1\sum_0^q(q-i)\frac{\partial\phi}{\partial s_i}s_{i+1}+$$
$$+\delta_1\sum_0^n i\frac{\partial\phi}{\partial s_i}s_i.$$

Такъ какъ абсолютный совмѣстный инваріантъ $\Pi(a,b,\dots s)$ не измѣняется отъ соотвѣтственныхъ подстановокъ группъ $S_a$, $S_b$, . . . $S_s$, то его приращеніе

$$\delta\Pi=-\{V_1(\Pi)+V_2(\Pi)+\dots+V_k(\Pi)\}\,\delta t$$

должно равняться нулю независимо отъ количествъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, т. е. онъ долженъ удовлетворять четыремъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$\sum_0^n (n-i)\frac{\partial \Pi}{\partial a_i}a_i + \sum_0^m (m-i)\frac{\partial \Pi}{\partial b_i}b_i + \ldots + \sum_0^q (q-i)\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}s_i = 0, \tag{D}$$

$$\sum_0^n i\frac{\partial \Pi}{\partial a_i}a_{i-1} + \sum_0^m i\frac{\partial \Pi}{\partial b_i}b_{i-1} + \ldots + \sum_0^q i\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}s_{i-1} = 0,$$

$$\sum_0^n (n-i)\frac{\partial \Pi}{\partial a_i}a_{i+1} + \sum_0^m (m-i)\frac{\partial \Pi}{\partial b_i}b_{i+1} + \ldots + \sum_0^q (q-i)\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}s_{i+1} = 0,$$

$$\sum_0^n i\frac{\partial \Pi}{\partial a_i}a_i + \sum_0^m i\frac{\partial \Pi}{\partial b_i}b_i + \ldots + \sum_0^q i\frac{\partial \Pi}{\partial s_i}s_i = 0.$$

Эти условія для того, чтобы раціональная функція $\Pi(a, b, \ldots s)$ коэффиціентовъ данныхъ бинарныхъ формъ служила абсолютнымъ совмѣстнымъ инваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ, не только необходимы, но и достаточны, въ чемъ не трудно убѣдиться посредствомъ разсужденій, аналогичныхъ тѣмъ, которыя приведены въ концѣ § 12.

Если обозначить сокращенно первыя части уравненій (D) черезъ $Y_1(\Pi)$, $Y_2(\Pi)$, $Y_3(\Pi)$, $Y_4(\Pi)$, то всѣ результаты изслѣдованій въ § 13 будутъ имѣть мѣсто и по отношенію къ изучаемымъ нами въ этомъ параграфѣ абсолютнымъ совмѣстнымъ инваріантамъ системы бинарныхъ формъ.

## § 21. Число основныхъ абсолютныхъ совмѣстныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ.

Система дифференціальныхъ уравненій

$$Y_1(\varphi) = 0, \quad Y_2(\varphi) = 0, \quad Y_3(\varphi) = 0, \quad Y_4(\varphi) = 0, \tag{D}$$

опредѣляющая абсолютные совмѣстные инваріанты, есть *полная* система линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, потому что всѣ операціи $(Y_i Y_k - Y_k Y_i)$ выражаются линейно черезъ операціи $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$, $Y_4$ такимъ же образомъ какъ и въ § 14 (*форм. 15*).

Такъ какъ разсматриваемая полная система четырехъ уравненій съ частными производными имѣетъ $(n+m+\ldots+q)+k$ независимыхъ перемѣнныхъ:

$$a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_n,\ b_0,\ b_1,\ \ldots\ b_m,\ \ldots\ s_0,\ s_1\ \ldots\ s_q,$$

то на основаніи извѣстнаго предложенія теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка эта система уравненій должна непремѣнно имѣть

$$(n+m+\ \ldots\ +q)+k-4=N \tag{24}$$

независимыхъ рѣшеній. Каждое изъ этихъ рѣшеній $\varphi_i(a, b, \ldots s)$, гдѣ $i=1,\ 2, \ldots N$, какъ намъ извѣстно, не должно измѣняться отъ системъ соотвѣтственныхъ преобразованій группъ $S_a,\ S_b, \ldots S_s$; но каждое общее рѣшеніе уравненій системы (D) даетъ опредѣленное соотношеніе между старыми и новыми коэффиціентами данныхъ бинарныхъ формъ

$$\varphi_i(\alpha,\ \beta,\ \ldots\ \sigma)=\varphi_i(a,\ b,\ \ldots\ s); \tag{E}$$

слѣдовательно, $N$ независимыхъ рѣшеній системы (D) дадутъ столько же независимыхъ соотношеній вида (E). Съ другой стороны, намъ извѣстно изъ предыдущаго параграфа, что между старыми и новыми коэффиціентами бинарныхъ формъ возможны только соотношенія, приводимыя къ раціональнымъ соотношеніямъ

$$R_i(a,\ b,\ \ldots s;\ \alpha,\ \beta,\ \ldots\ \sigma)=0,\ \text{гдѣ}\ i=1,\ 2,\ \ldots\ N,$$

предыдущаго параграфа. Сопоставляя все это, мы приходимъ къ такому заключенію: *система дифференціальныхъ уравненій абсолютныхъ совмѣстныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ имѣетъ* $(n+m+\ldots+q)+k-4$ *независимыхъ рѣшеній, приводимыхъ къ раціональному виду, и всякая система бинарныхъ формъ имѣетъ* $(n+m+\ldots+q)+k-4$ *независимыхъ между собою абсолютныхъ инваріантовъ, черезъ которые выражаются алгебраически всѣ ея абсолютные совмѣстные инваріанты.*

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что двѣ бинарныхъ формы первой степени не имѣютъ абсолютнаго совмѣстнаго инваріанта, потому что въ этомъ случаѣ $n=1$, $m=1$, $k=2$, и $N=0$.

Двѣ бинарныхъ формы

$$a_0 x_1 + a_1 x_2, \quad b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2$$

на основаніи доказаннаго предложенія должны имѣть одинъ ($N=1+2+2-4=1$) абсолютный совмѣстный инваріантъ; но изъ примѣра 3 въ § 19 мы знаемъ, что совмѣстные инваріанты этихъ формъ

$$J_{0,2}=b_0 b_2 - b_1^2, \quad J_{2,1}=b_0 a_1^2 - 2b_1 a_1 a_0 + b_2 a_0^2$$

пріобрѣтаютъ множитель $\Delta^2=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$ при преобразованіи перемѣнныхъ $x_1$, $x_2$ посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$; слѣдовательно, отношеніе $\frac{J_{0,2}}{J_{2,1}}$ совсѣмъ не измѣняется при этомъ преобразованіи и служитъ единственнымъ основнымъ инваріантомъ двухъ разсматриваемыхъ формъ.

Двѣ бинарныхъ формы второй степени на основаніи доказаннаго предложенія должны имѣть два ($N=2+2+2-4=2$) основныхъ абсолютныхъ совмѣстныхъ инваріанта; изъ примѣра 4 въ § 19 мы знаемъ, что инваріанты двухъ такихъ формъ суть $J_{0,2}$, $J_{2,0}$, $J_{1,1}$; такъ какъ они пріобрѣтаютъ множитель $\Delta^2=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$ при преобразованіи перемѣнныхъ $x_1$, $x_2$ посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & a\end{pmatrix}$, то отношенія двухъ изъ нихъ къ третьему совсѣмъ не измѣняются отъ этого преобразованія и поэтому служатъ основными совмѣстными инваріантами двухъ разсматриваемыхъ формъ.

### § 22. Число основныхъ совмѣстныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ.

Изъ предыдущаго параграфа мы уже знаемъ, что отношеніе двухъ простыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ можетъ служить абсолютнымъ совмѣстнымъ инваріантомъ; но можно показать, что абсолютный совмѣстный инваріантъ системы бинарныхъ формъ всегда есть отношеніе двухъ суммъ совмѣстныхъ инваріантовъ этой системы.

Изъ § 20 мы знаемъ, что абсолютный инваріантъ есть раціональная дробь $\frac{P}{Q}$, удовлетворяющая четыремъ уравненіямъ съ частными производными:

$$Y_1\left(\frac{P}{Q}\right)\equiv 0, \quad Y_2\left(\frac{P}{Q}\right)\equiv 0, \quad Y_3\left(\frac{P}{Q}\right)\equiv 0, \quad Y_4\left(\frac{P}{Q}\right)\equiv 0,$$

эти тождественныя равенства даютъ

$$Q\,Y_i(P)-P\,Y_i(Q)\equiv 0, \text{ гдѣ } i=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

или

$$\frac{Y_i(P)}{P}\equiv\frac{Y_i(Q)}{Q}=\lambda_i,$$

гдѣ $\lambda_i$ не должно содержать $a, b, \ldots s$, потому что числители и знаменатели имѣютъ соотвѣтственно одинаковые порядки относительно этихъ буквъ. Точно также какъ и въ § 15 можно показать, что выраженіе $L=lg\,P'(\alpha, \beta, \ldots \sigma)$, гдѣ P$'$ есть функція $P$, но только отъ коэффиціентовъ преобразованныхъ формъ, удовлетворяетъ уравненіямъ:

$$\alpha\frac{\partial L}{\partial\alpha}+\gamma\frac{\partial L}{\partial\gamma}=\lambda,$$

$$\alpha\frac{\partial L}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial L}{\partial\delta}=0,$$

$$\beta\frac{\partial L}{\partial\alpha}+\delta\frac{\partial L}{\partial\gamma}=0,$$

$$\beta\frac{\partial L}{\partial\beta}+\delta\frac{\partial L}{\partial\delta}=\lambda;$$

этимъ же уравненіямъ удовлетворяетъ $L=\lambda\,lg\,\varDelta+lg\,C$, если $\varDelta=\alpha\delta-\beta\gamma$; слѣдовательно, $lg\,P'=\lambda lg\,\varDelta+lg\,C$, или $P'=C.\varDelta^{\lambda}$; но при $\alpha=1, \beta=0, \gamma=0, \delta=1$ мы имѣемъ равенство $P=C$; слѣдовательно, $P'=P.\varDelta^{\lambda}$. Тоже самое можно доказать и относительно знаменателя $Q$ абсолютнаго совмѣстнаго инваріанта.

Если выраженіе $P$, удовлетворяющее соотношенію инваріантности $P' = P.\Delta^\lambda$, разбить на такія слагаемыя $J_1, J_2, \ldots$, которыя были бы однородны относительно коэффиціентовъ каждой формы, то, конечно, каждое изъ этихъ слагаемыхъ будетъ тоже удовлетворять соотношенію $J_1' = J_1 . \Delta^\lambda$; слѣдовательно, выраженіе $P$, а также и $Q$, представляютъ собою суммы совмѣстныхъ инваріантовъ, т. е. абсолютный совмѣстный инваріантъ имѣетъ такой видъ:

$$\Pi = \frac{J_1 + J_2 + \ldots}{J_1' + J_2' + \ldots}.$$

Изъ всего этого ясно, что для образованія

$$N = (n + m + \ldots + q) + k - 4$$

абсолютныхъ, независимыхъ между собою, совмѣстныхъ инваріантовъ надо имѣть, по крайней мѣрѣ,

$$N + 1 = \{(n + m + \ldots + q) + k - 4\} + 1 \tag{25}$$

независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ; кромѣ того, больше $N+1$ не можетъ быть такихъ совмѣстныхъ инваріантовъ, иначе полная система независимыхъ уравненій (§ 18)

$$X_3(J) = 0, \quad X_2(J) = 0, \quad X_1(J) 0$$

имѣла бы болѣе

$$(n + m + \ldots + q) + k - 3$$

независимыхъ рѣшеній, чего быть не можетъ. Слѣдовательно, *если система бинарныхъ формъ имѣетъ абсолютные совмѣстные инваріанты, т. е. если*

$$(n + m + \ldots + q) + k > 4,$$

*то число простыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ равно*

$$(n + m + \ldots + q) + k - 3.$$

Если система бинарныхъ формъ не имѣетъ ни одного абсолютнаго совмѣстнаго инваріанта, какъ въ случаяхъ:

$n=1,\ k=1;\ n=1,\ m=1,\ k=2;\ n=2,\ k=1;\ n=3,$ $k=1$, то рѣшить вопросъ о существованіи или отсутствіи совмѣстнаго инваріанта не трудно непосредственнымъ вычисленіемъ (§§ 10, 19).

Сопоставляя выводы этого параграфа съ изслѣдованіями въ § 18, мы приходимъ къ такому заключенію: *дифференціальныя уравненія* $X_3(J)=0$, $X_2(J)=0$, $X_1(J)=0$ *въ § 18 имѣютъ*

$$(n+m+\ldots+q)+k-3$$

*общихъ независимыхъ рѣшеній, приводимыхъ къ цѣлому раціональному и однородному, относительно количествъ* $a, b, \ldots s$, *виду.*

## § 23. Абсолютные совмѣстные инваріанты нулеваго измѣренія относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы системы.

Разсмотримъ соотношенія между коэффиціентами $a, b, \ldots s$ бинарныхъ формъ данной системы и коэффиціентами $\alpha, \beta, \ldots \sigma$ формъ, преобразованныхъ посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_i = A_i(a;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta), & i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n,\\
\beta_i = B_i(b;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta), & i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ m,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\sigma_i = S_i(s;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta), & i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ q.
\end{array} \tag{A}$$

Раздѣлимъ равенства для $\alpha_i$ почленно на равенство для $\alpha_n$; точно также равенства для $\beta_i$ — на равенство для $\beta_m$, и т. д.; мы получимъ соотношенія:

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\alpha_i}{\alpha_n}=\dfrac{A_i(a;\alpha,\beta,\gamma,\delta)}{A_n(a;\alpha,\beta,\gamma,\delta)}, & i=0,\ 1,\ 2,\ldots(n-1),\\
\dfrac{\beta_i}{\beta_m}=\dfrac{B_i(b;\alpha,\beta,\gamma,\delta)}{B_n(b;\alpha,\beta,\gamma,\delta)}, & i=0,\ 1,\ 2,\ldots(m-1),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\dfrac{\sigma_i}{\sigma_q}=\dfrac{S_i(s;\alpha,\beta,\gamma,\delta)}{S_n(s;\alpha,\beta,\gamma,\delta)}, & i=0,\ 1,\ 2,\ldots(q-1);
\end{array} \tag{A'}$$

эти равенства связываютъ отношенія $\frac{\alpha_i}{\alpha_n}, \frac{\beta_i}{\beta_m}, \ldots \frac{\sigma_i}{\sigma_q}$ съ отношеніями $\frac{a_i}{a_n}, \frac{b_i}{b_m}, \ldots \frac{s_i}{s_q}$ и съ отношеніями $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$; всѣхъ равенствъ мы имѣемъ

$$(n+m+\ldots+q);$$

если изъ нихъ исключить $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$, то, вообще говоря, получится $(n+m+\ldots+q)-3$ раціональныхъ соотношенія между отношеніями $\frac{\alpha_i}{\alpha_n}, \frac{\beta_i}{\beta_m}, \ldots \frac{\sigma_i}{\sigma_q}$ и $\frac{a_i}{a_n}, \frac{b_i}{b_m}, \ldots \frac{s_i}{s_q}$, которыя можно привести къ цѣлому виду:

$$R_i(a, b, \ldots s;\ \alpha, \beta, \ldots \sigma)=0,\ i=1, 2, \ldots [(n+m+\ldots+q)-3], \quad \text{(B)}$$

гдѣ $R_i$ суть цѣлыя раціональныя функціи, *однородныя* относительно коэффиціентовъ каждой формы въ отдѣльности. Каждое изъ этихъ послѣднихъ соотношеній можетъ быть приведено къ виду

$$PQ+P_1Q_1+P_2Q_2+\ldots=0,$$

гдѣ $P, P_1, P_2, \ldots$ суть цѣлыя многочлены одинаковыхъ степеней и однородные относительно коэффиціентовъ каждой формы данной системы, а $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ суть функціи такого же характера какъ и предыдущія только отъ коэффиціентовъ $\alpha, \beta, \ldots \sigma$ формъ преобразованной системы.

Изъ послѣдняго соотношенія опредѣляемъ $P$:

$$P=-\frac{P_1Q_1+P_2Q_2+\ldots}{Q}=\Pi(\alpha, \beta, \ldots \sigma).$$

Полученная такимъ образомъ функція $\Pi(\alpha, \beta, \ldots \sigma)$, если въ ней замѣнить $\alpha, \beta, \ldots \sigma$ соотвѣтственно черезъ $a, b, \ldots s$, конечно, служитъ *абсолютнымъ совмѣстнымъ инваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ* и при томъ *нулеваго измѣренія относительно коэффиціентовъ каждой формы данной системы.*

Такъ какъ число соотношеній въ системѣ (B) равно $(n+m+\ldots+q)-3$, то *число независимыхъ между собою* *абсолютныхъ совмѣстныхъ инваріантовъ нулеваго измѣренія для данной системы должно быть равнымъ*

$$(n+m+\ldots+q)-3,$$

потому что каждый изъ нихъ даетъ опредѣленное соотношеніе

$$\Pi(\alpha,\beta,\ldots\sigma)=\Pi(a,b,\ldots s)$$

между коэффиціентами формъ данной и преобразованной системы, такихъ же соотношеній должно быть $(n+m+\ldots q)-3$, и всѣ они должны сводиться къ соотношеніяхъ (B).

*Примѣръ.* Изъ § 19 мы знаемъ, что двѣ бинарныхъ формы втораго порядка

$$a_0x_1^2+2a_1x_1x_2+a_2x_2^2,\ b_0x_1^2+2b_1x_1x_2+b_2x_2^2$$

имѣютъ совмѣстные инваріанты:

$$J_{2,0}=a_0a_2-a_1^2,\ J_{0,2}=b_0b_2-b_1^2,$$
$$J_{1,1}=a_0b_2-2a_1b_1+a_2b_0;$$

очевидно, что выраженіе

$$\Pi=\frac{J_{1,1}^2}{J_{2,0}\,.\,J_{0,2}}$$

служитъ *единственнымъ основнымъ* абсолютнымъ совмѣстнымъ инваріантомъ нулеваго измѣренія для данныхъ формъ.

## § 24. Число линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ данныхъ степеней.

На основаніи предложенія, выведеннаго въ концѣ § 18, цѣлая раціональная функція

$$J=\sum A\,.\,a_0^{e_0}a_1^{e_1}\ldots a_n^{e_n}b_0^{l_0}b_1^{l_1}\ldots b_m^{l_m}\ldots s_0^{t_0}s_1^{t_1}\ldots s_q^{t_q}$$

служитъ совмѣстнымъ инваріантомъ системы бинарныхъ формъ, если она, во-первыхъ, однородна относительно коэффиціентовъ каждой формы въ отдѣльности, во-вторыхъ, изобарна въ вѣсомъ $p=\frac{n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu_k}{2}$, т. е. ея эксцессъ $\chi=0$, и, въ-третьихъ, удовлетворяетъ тождественно одному уравненію съ частными производными

$$X_2(J) = \sum_0^n i\frac{\partial J}{\partial a_i}a_{i-1} + \sum_0^m i\frac{\partial J}{\partial b_i}b_{i-1} + \ldots + \sum_0^q i\frac{\partial J}{\partial s_i}s_{i-1} \equiv 0.$$

Условіе однородности и изобарности налагаютъ на показателей степеней цѣлой раціональной функціи слѣдующія соотношенія:

$$\begin{array}{l} e_0 + e_1 + \ldots + e_n = \mu_1, \\ l_0 + l_1 + \ldots + l_m = \mu_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_0 + t_1 + \ldots + t_q = \mu_k, \\ e_1 + 2e_2 + \ldots + l_1 + 2l_2 + \ldots + t_1 + 2t_2 + \ldots + qt_q = p, \end{array} \tag{26}$$

$$\text{гдѣ } p = \frac{n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k}{2};$$

если рѣшить эту систему уравненій въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ, то получится нѣсколько системъ значеній для показателей степеней, которыя имѣютъ мѣсто въ цѣлой раціональной функцій $J$ въ томъ случаѣ, если она удовлетворяетъ двумъ первымъ условіямъ; пусть число системъ цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній этой Діофантовой системы уравненій будетъ $\Psi_p(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k)$; тогда цѣлая функція $J$, удовлетворяющая первымъ двумъ условіямъ, будетъ имѣть, конечно, $\Psi_p(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k)$ членовъ и столько же произвольныхъ коэффиціентовъ $A$. Эти произвольныя постоянныя $A$ связаны третьимъ условіемъ

$$X_2(J) \equiv 0.$$

Если къ цѣлому полиному $J$ примѣнить операцію $X_2$, то получится опять цѣлый однородный и изобарный многочленъ тѣхъ же степеней $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$, но съ вѣсомъ $p-1$; слѣдовательно, число членовъ въ полиномѣ $X_2(J)$ равно

$\Psi_{p-1}(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k)$; поэтому тождественное равенство $X_2(J) \equiv 0$ даетъ $\Psi_{p-1}(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k)$ линейныхъ соотношеній между произвольными количествами $A$; если эти линейныя соотношенія между собою независимы, то они даютъ возможность опредѣлить $\Psi_{p-1}$ произвольныхъ количествъ $A$, и тогда останутся въ полиномѣ $J$ неопредѣленными только

$$\Psi_p - \Psi_{p-1} = N$$

произвольныхъ коэффиціентовъ $A$; то есть мы будемъ имѣть $\Psi_p - \Psi_{p-1} = N$ линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ.

Пусть

$$X_2(J) = \sum_{1}^{\Psi_{p-1}} L_i \,.\, a_0^{e_0'} a_1^{e_1'} \ldots b_0^{l_0'} b_1^{l_1'} \ldots s_0^{t_0'} s_1^{t_1'} \ldots s_q^{t_q'} \equiv 0\,,$$

тогда линейныя соотношенія, связывающія произвольныя коэффиціенты $A$ функціи $J$, будутъ

$$L_1 = 0,\ L_2 = 0,\ L_3 = 0, \ldots L_{\Psi_{p-1}} = 0\,; \tag{L}$$

эти линейныя соотношенія будутъ между собою независимы, т. е. не будутъ допускать тождественнаго равенства

$$l_1 L_1 + l_2 L_2 + l_3 L_3 + \ldots \equiv 0 \tag{27}$$

въ томъ случаѣ, если можно подобрать произвольныя величины $A$, заключающіяся въ нихъ, такъ, чтобы всѣ $L_i$ равнялись бы произвольнымъ независимымъ между собою количествамъ $c_i$; и въ самомъ дѣлѣ, при существованіи тождества (27) всякая система значеній $L_i = c_i$ должна удовлетворять этому тождественному равенству

$$l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3 + \ldots \equiv 0,$$

и слѣдовательно $c_i$ не могутъ быть независимыми между собою.

Въ независимости системы (L) можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ произвольный полиномъ

$$\varphi = \sum_{1}^{\Psi_{p-1}} c_i \,.\, a_0^{e_0'} a_1^{e_1'} \ldots b_0^{l_0'} b_1^{l_1'} \ldots s_0^{t_0'} s_1^{t_1'} \ldots s_q^{t'_q},$$

однородный относительно коэффиціентовъ каждой формы, степеней $\mu_1$, $\mu_2$, . . . $\mu_k$, и изобарный съ вѣсомъ $p-1$; если окажется возможнымъ подобрать произвольные коэффиціенты $A$ функціи $J$ такъ, чтобы она удовлетворяла уравненію

$$X_2(J) = \varphi,$$

то это будетъ вѣрнымъ признакомъ независимости линейныхъ уравненій системы (L).

Изъ § 9 намъ извѣстно соотношеніе между операціями $X_1$ и $X_2$:

$$X_2 X_1^\nu - X_1^\nu X_2 = \nu(\chi - \nu + 1) X_1^{\nu-1};$$

на основаніе этого соотношенія мы можемъ написать слѣдующія равенства:

$$\begin{aligned}
&(X_2 X_1 - X_1 X_2) \quad F = \chi F,\\
&(X_2 X_1^2 - X_1^2 X_2) X_2 \, F = 2(\chi+1) X_1 X_2 F,\\
&(X_2 X_1^3 - X_1^3 X_2) X_2^2 F = 3(\chi+2) X_1^2 X_2^2 F,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

если принять во вниманія, что эксцессы функцій $X_2 F, X_2^2 F, \ldots$ соотвѣтственно равны $\chi+2$, $\chi+4$, . . . . Изъ послѣднихъ равенствъ мы имѣемъ такія соотношенія:

$$\begin{aligned}
\chi F + X_1 X_2 F &= X_2 X_1 F,\\
2(\chi+1) X_1 X_2 F + X_1^2 X_2^2 F &= X_2 X_1^2 X_2 F,\\
3(\chi+2) X_1^2 X_2^2 F + X_1^3 X_2^3 F &= X_2 X_1^3 X_2^2 F,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&;
\end{aligned}$$

отсюда же мы можемъ получить соотношеніе

$$\chi F = X_2 \left\{ X_1 - \frac{X_1^2 X_2}{2(\chi+1)} + \frac{X_1^3 X_2^2}{2.3(\chi+1)(\chi+2)} - \ldots \right\} F. \tag{28}$$

Для функціи $\varphi$ съ эксцессомъ $\chi = 2$ мы будемъ имѣть

$$\varphi = X_2 \left\{ \frac{X_1}{1!\,2!} - \frac{X_1^2 X_2}{2!\,3!} + \frac{X_1^3 X_2^2}{3!\,4!} - \ldots\ldots\ldots \right\} \varphi; \quad (29)$$

изъ этого послѣдняго соотношенія мы заключаемъ, что въ изобарномъ многочленѣ

$$J = \sum A \,.\, a_0^{e_0} a_1^{e_1} \ldots b_0^{l_0} b_1^{l_1} \ldots s_0^{t_0} s_1^{t_1} \ldots s_q^{t_q}$$

съ эксцессомъ $\chi = 0$ и одинаковыхъ степеней съ многочленомъ $\varphi$ надо подобрать произвольные коэффиціенты $A$ такимъ образомъ, чтобы онъ обратился въ изобарный многочленъ съ нулевымъ эксцессомъ такого вида

$$\left\{ \frac{X_1}{1!\,2!} - \frac{X_1^2 X_2}{2!\,3!} + \frac{X_1^3 X_2^2}{3!\,4!} - \ldots\ldots\ldots \right\} \varphi,$$

и тогда многочленъ $J$ будетъ удовлетворять соотношенію

$$X_2(J) = \varphi,$$

гдѣ $\varphi$ есть совершенно произвольный изобарный многочленъ съ вѣсомъ $p-1$ и одинаковыхъ степеней съ многочленомъ $J$.

Такимъ образомъ мы доказали независимость уравненій системы (L).

## § 25. Опредѣленіе числа линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ данныхъ степеней.

Такъ какъ система соотношеній $L_i = 0$ содержитъ только независимыя между собою уравненія, то число линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ степеней $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ и съ вѣсомъ $p = \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k)$ выражается формулой

$$N = \Psi_p - \Psi_{p-1}, \quad (30)$$

гдѣ $\Psi_p$ есть число системъ рѣшеній Діофантовой системы уравненій

$$
\begin{aligned}
&e_0 + e_1 + \ldots + e_n = \mu_1, \\
&l_0 + l_1 + \ldots + l_m = \mu_2, \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&t_0 + t_1 + \ldots + t_q = \mu_k, \\
&e_1 + 2e_2 + \ldots + l_1 + 2l_2 + \ldots + t_1 + 2t_2 + \ldots + qt_q = p \text{ [1]}.
\end{aligned}
$$

Для того, чтобы опредѣлить это число $\Psi_p$, разсмотримъ сумму

$$\sum x^{e_0+e_1+\ldots} y^{l_0+l_1+\ldots} \ldots u^{t_0+t_1+\ldots} v^{e_1+2e_2+\ldots+l_1+2l_2+\ldots+t_1+2t_2+\ldots+qt_q},$$

гдѣ $e_0$, $e_1$, ... $l_0$, $l_1$, ... $t_0$, $t_1$, ... суть какія угодно положительныя числа; очевидно, что коэффиціентъ при $x^{\mu_1} y^{\mu_2} \ldots u^{\mu_k} v^p$ и будетъ число $\Psi_p$.

Мы можемъ представить нашу сумму въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sum x^{e_0} . \sum (xv)^{e_1} . \sum (xv^2)^{e_2} \ldots \sum (xv^n)^{e_n} \sum y^{l_0} . \sum (yv)^{l_1} \ldots;$$

это же есть произведеніе

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-vx} \cdot \frac{1}{1-v^2 x} \cdots \frac{1}{1-v^n x} \cdot \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{1-vy} \cdots .$$

Такимъ образомъ, мы показали, что число $\Psi_p$ есть коэффиціентъ при $x^{\mu_1} y^{\mu_2} \ldots u^{\mu_k} v^p$ въ разложеніи по степенямъ $x$, $y$, ... $u$, $v$ выраженія

$$\frac{1}{(1-x)(1-vx)\ldots(1-v^n x)} \cdot \frac{1}{(1-y)(1-vy)\ldots(1-v^m y)} \cdots$$
$$\cdots \frac{1}{(1-u)(1-vu)\ldots(1-v^q u)}.$$

---

1) Очевидно, что это число $\Psi_p$ есть ничто другое, какъ число, показывающее, сколько разъ можно составить число $p$ какъ сумму $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ слагаемыхъ въ натуральныхъ рядахъ чиселъ 0, 1, 2, ... $n$; 0, 1, 2, ... $m$; 0, 1, 2, ... $q$; эту же задачу теоріи чиселъ для случая $k = 1$ рѣшилъ Euler по способу, обобщеніемъ котораго служитъ способъ Cayley, излагаемый нами.

Разсмотримъ отдѣльно факторы этого произведенія и вообразимъ, что они развернуты по возрастающимъ степенямъ перемѣнныхъ $x$, $y$, ... $u$:

$$\frac{1}{(1-x)(1-vx)\ldots(1-v^n x)}=$$
$$=1+\phi_{1,n}(v).x+\phi_{2,n}(v).x^2+\ldots+\phi_{\mu_1,n}(v).x^{\mu_1}+\ldots,$$
$$\frac{1}{(1-y)(1-vy)\ldots(1-v^m x)}=$$
$$=1+\phi_{1,m}(v).y+\phi_{2,m}(v).y^2+\ldots+\phi_{\mu_2,m}(v).y^{\mu_2}+\ldots,$$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
$$\frac{1}{(1-u)(1-vu)\ldots(1-v^q u)}=$$
$$=1+\phi_{1,q}(v).u+\phi_{2,q}(v).u^2+\ldots+\phi_{\mu_k,q}(v).u^{\mu_k}+\ldots.$$

Очевидно, что число $\Psi_p$, которое мы желаемъ опредѣлить, равно коэффиціенту при $v^p$ въ разложеніи произведенія

$$\phi_{\mu_1,n}(v).\phi_{\mu_2,m}(v)\ldots\phi_{\mu_k,q}(v)=\Phi(v)$$

по степенямъ $v$; это можно обозначить символически такъ:

$$\Psi_p=[\phi_{\mu_1,n}(v).\phi_{\mu_2,m}(v)\ldots\phi_{\mu_k,q}(v)]_{v^p}.$$

Изучимъ нѣкоторыя свойства этихъ функцій $\phi$.

Мы имѣемъ равенство

$$\frac{1}{(1-x)(1-vx)\ldots(1-v^n x)}=\sum_0^\infty \phi_{i,n}(v)\,x^i;$$

замѣнивъ въ немъ $x$ черезъ $vx$, получимъ равенство

$$\frac{1}{(1-vx)(1-v^2x)\ldots(1-v^{n+1}x)}=\sum_0^\infty \phi_{i,n}(v)\,v^i x^i;$$

отсюда слѣдуетъ равенство

$$(1-x)\sum_0^\infty \phi_{i,n}(v)\,x^i=(1-v^{n+1}x)\sum_0^\infty \phi_{i,n}(v)\,v^i x^i;$$

сравнивая коэффиціенты при $x^i$ въ обѣихъ частяхъ послѣдняго равенства, мы получимъ

$$\psi_{i,n}(v)-\psi_{i-1,n}(v)=\psi_{i,n}(v)\,.\,v^i-\psi_{i-1,n}(v)\,.\,v^{i+n},$$

или

$$\psi_{i,n}(v)=\psi_{i-1,n}(v)\cdot\frac{1-v^{n+i}}{1-v^i};$$

слѣдовательно функцію $\psi_{\mu_1,n}$ можно представить такъ:

$$\psi_{\mu_1,n}(v)=\frac{(1-v^{n+1})(1-v^{n+2})\dots(1-v^{n+\mu_1})}{(1-v\quad)(1-v^2\quad)\dots(1-v^{\mu_1}\quad)}\psi_{0,n},\quad\text{гдѣ}\quad\psi_{0,n}(v)=1.$$

Обозначимъ произведеніе

$$(1-v)(1-v^2)\dots(1-v^k)$$

черезъ $\varphi_k(v)$, тогда мы будемъ имѣть

$$\psi_{\mu_1,n}(v)=\frac{\varphi_{n+\mu_1}(v)}{\varphi_n(v)\,\varphi_{\mu_1}(v)};$$

слѣдовательно, искомое число $\Psi_p$ можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ

$$\Psi_p=\left[\frac{\varphi_{n+\mu_1}(v)\cdot\varphi_{m+\mu_2}(v)\qquad\dots\varphi_{q+\mu_k}(v)}{\varphi_n(v)\,\varphi_{\mu_1}(v)\cdot\varphi_m(v)\,\varphi_{\mu_2}(v)\dots\varphi_q(v)\,\varphi_{\mu_k}(v)}\right]_{v^p}.\tag{31}$$

Опредѣливъ выраженіе числа $\Psi_p$, не трудно найти число линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ

$$N=\Psi_p-\Psi_{p-1}.$$

Такъ какъ число $\Psi_{p-1}$ есть коэффиціентъ при $v^{p-1}$ въ разложеніи нѣкоторой функціи $\phi(v)$ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $v$, то конечно оно равно коэффиціенту при $v^p$ въ разложеніи функціи $v\phi(v)$; слѣдовательно, мы имѣемъ

$$N=[\phi(v)-v\phi(v)]_{v^p}=[(1-v)\phi(v)]_{v^p}.$$

Такимъ образомъ мы показали, что *число $N$ линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ данной системы формъ равно коэффиціенту при* $v^{\frac{1}{2}(n\mu_1+m\mu_2+\dots+q\mu_k)}$

*въ разложенiи по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ функцiи*

$$\Psi(v) = (1-v)\frac{(1-v^{\mu_1+1})(1-v^{\mu_1+2})\ldots(1-v^{\mu_1+n})(1-v^{\mu_2+1})(1-v^{\mu_2+2})\ldots}{(1-v)\quad(1-v^2)\qquad(1-v^n)\quad(1-v)\quad(1-v^2)\quad\ldots} \tag{32}$$

## § 26. Число линейно-независимыхъ инварiантовъ данной степени одной бинарной формы.

Изъ предложенiя, выведеннаго нами въ концѣ предыдущаго параграфа, слѣдуетъ, что число линейно-независимыхъ инварiантовъ степени $\mu$ одной бинарной формы равно коэффицiенту при $v^{\frac{1}{2}n\mu}$ въ разложенiи по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ функцiи

$$\Psi(v) = (1-v)\frac{(1-v^{\mu+1})(1-v^{\mu+2})\ldots(1-v^{\mu+n})}{(1-v)\quad(1-v^2)\quad\ldots(1-v^n)};$$

вычислимъ этотъ коэффицiентъ для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ.

1° Пусть $n=1$, т. е. мы имѣемъ линейную форму

$$a_0 x_1 + a_1 x_2;$$

тогда $\Psi(v) = (1-v)\dfrac{1-v^{\mu+1}}{1-v} = 1 - v^{\mu+1}$, и слѣдовательно коэффицiентъ при $v^{\frac{1.\mu}{2}}$ равенъ нулю, т. е. бинарная форма перваго порядка совсѣмъ не имѣетъ инварiантовъ.

2° Пусть $n=2$, т. е. мы имѣемъ форму втораго порядка

$$a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2;$$

тогда $\Psi(v) = (1-v)\dfrac{(1-v^{\mu+1})(1-v^{\mu+2})}{(1-v)(1-v^2)}$, и слѣдовательно искомое число

$$N = \left[\frac{1-v^{\mu+1}(1+v)+v^{2\mu+3}}{1-v^2}\right]_{v^\mu} =$$

$$= \left[\frac{1}{1-v^2}\right]_{v^\mu} + \left[v^{\mu+1}\frac{(1-v)+v^{\mu+2}}{1-v}\right]_{v^\mu},$$

причемъ послѣднее слагаемое конечно нуль; такимъ образомъ, искомое число есть

$$N=[1+v^2+v^4+\ldots]_{u^\mu},$$

т. е. бинарная форма втораго порядка совсѣмъ не имѣетъ инваріантовъ нечетныхъ степеней, но имѣетъ по одному инваріанту каждой четной степени. Въ § 10 мы видѣли, что для такой формы инваріантомъ четной степени $\mu$ служитъ ея дискриминантъ въ $\frac{\mu}{2}$ степени, т. е. $D^{\frac{\mu}{2}}$, или

$$(a_0 a_2 - a_1^2)^{\frac{\mu}{2}}.$$

3° Пусть $n=3$, т. е. мы имѣемъ бинарную форму третьяго порядка

$$a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3;$$

тогда $\Psi(v)=(1-v)\frac{(1-v^{\mu+1})(1-v^{\mu+2})(1-v^{\mu+3})}{(1-v)(1-v^2)(1-v^3)}$; слѣдовательно, искомое число $N$ выражается такъ:

$$N=\left[\frac{1-v^{\mu+1}(1+v^2+v^3)+\ldots}{(1-v^2)(1-v^3)}\right]_{v^{\frac{3}{2}\mu}}$$

$$=\left[\frac{1}{(1-v^2)(1-v^3)}\right]_{v^{\frac{3}{2}\mu}}-\left[\frac{v^{\mu+1}(1+v+v^2)}{(1-v^2)(1-v^3)}\right]_{v^{\frac{3}{2}\mu}}$$

$$=\left[\frac{1}{(1-v^2)(1-v^3)}\right]_{v^{\frac{3}{2}\mu}}-\left[\frac{v(1+v+v^2)}{(1-v^2)(1-v^3)}\right]_{v^{\frac{1}{2}\mu}},$$

замѣнивъ $v$ черезъ $v^2$, мы получимъ

$$N=\left[\frac{1}{(1-v^4)(1-v^6)}\right]_{v^{3\mu}}-\left[\frac{v^2(1+v^2+v^4)}{(1-v^4)(1-v^6)}\right]_{v^\mu}$$

$$=\left[\frac{1+v^4+v^8}{(1-v^{12})(1-v^6)}\right]_{v^{3\mu}}-\left[\frac{v^2}{(1-v^2)(1-v^4)}\right]_{v^\mu}$$

$$=\left[\frac{1}{(1-v^4)(1-v^2)}\right]_{v^\mu}-\left[\frac{v^2}{(1-v^2)(1-v^4)}\right]_{v^\mu}$$

$$=\left[\frac{1}{1-v^4}\right]_{v^\mu}=[1+v^4+v^8+\ldots]_{v^\mu}.$$

Слѣдовательно, бинарная форма третьяго порядка не имѣетъ инваріантовъ степеней $\mu$, некратныхъ четырехъ, и имѣетъ по одному инваріанту каждой степени $\mu$, кратной четырехъ. Изъ § 10 мы знаемъ, что бинарная форма третьяго порядка имѣетъ одинъ инваріантъ четвертой степени — ея дискриминантъ

$$R = a_3^2 a_0^2 - 6a_3 a_2 a_1 a_0 + 4a_3 a_1^3 + 4a_2^3 a_0 - 3a_2^2 a_1^2;$$

слѣдовательно, при $\mu \equiv 0$ (мод. 4) единственнымъ инваріантомъ формы служитъ $R^{\frac{\mu}{4}}$.

4⁰ Пусть $n = 4$, т. е. мы имѣемъ бинарную форму четвертаго порядка

$$a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4;$$

тогда

$$\Psi(v) = (1 - v)\frac{(1 - v^{\mu+1})(1 - v^{\mu+2})(1 - v^{\mu+3})(1 - v^{\mu+4})}{(1 - v)(1 - v^2)(1 - v^3)(1 - v^4)},$$

и число линейно-независимыхъ инваріантовъ порядка $\mu$ будетъ

$$N = \left[\frac{(1 - v^{\mu+1})(1 - v^{\mu+2})(1 - v^{\mu+3})(1 - v^{\mu+4})}{(1 - v^2)(1 - v^3)(1 - v^4)}\right]_{v^{2\mu}}$$

$$= \left[\frac{1 - v^{\mu+1}(1 + v + v^2 + v^3)}{(1 - v^2)(1 - v^3)(1 - v^4)}\right]_{v^{2\mu}}$$

$$= \left[\frac{1}{(1 - v^2)(1 - v^3)(1 - v^4)}\right]_{v^{2\mu}} - \left[\frac{v}{(1 - v)(1 - v^2)(1 - v^3)}\right]_{v^{\mu}}$$

$$= \left[\frac{1 + v^3}{(1 - v^2)(1 - v^4)(1 - v^6)}\right]_{v^{2\mu}} - \left[\frac{v^2}{(1 - v^2)(1 - v^4)(1 - v^6)}\right]_{v^{2\mu}}$$

$$= \left[\frac{1 - v^2 + v^3}{(1 - v^2)(1 - v^4)(1 - v^6)}\right]_{v^{2\mu}} = \left[\frac{1 - v^2}{(1 - v^2)(1 - v^4)(1 - v^6)}\right]_{v^{2\mu}}$$

$$= \frac{1}{(1 - v^2)(1 - v^3)}\Big]_{v^{\mu}} = \{[1 + v^2 + v^4 + \ldots][1 + v^3 + v^6 + \ldots]\}_{v^{\mu}}$$

$$= \{1 + v^2 + v^3 + \ldots + c_\mu v^\mu + \ldots\}_{v^{\mu}}.$$

Очевидно, что $c_\mu$ существуетъ только въ томъ случаѣ, если $\mu = 2k + 3l$, и что оно равно числу цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній уравненія

$$2k + 3l = \mu.$$

Назовемъ черезъ $(k_1, l_1)$, $(k_2, l_2)$, ... $(k_\nu, l_\nu)$ всѣ цѣлыя и положительныя рѣшенія этого послѣдняго уравненія.

Такъ какъ мы знаемъ изъ § 10, что

$$S = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 6a_2^2,$$

$$T = a_0 a_3^2 - 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_2 a_4 + a_2^3 + a_1^2 a_4$$

служатъ инваріантами бинарной формы четвертаго порядка, то выраженія

$$S^{k_1} T^{l_1},\ S^{k_2} T^{l_2},\ \ldots\ S^{k_\nu} T^{l_\nu}$$

служатъ ея инваріантами степени $\mu$.

Не трудно показать, что эти инваріанты степени $\mu$ между собою линейно-независимы.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы между ними существовала линейная зависимость:

$$c_1 S^{k_1} T^{l_1} + c_2 S^{k_2} T^{l_2} + \ldots c_\nu S^{k_\nu} T^{l_\nu} = 0,$$

то она имѣла бы мѣсто и для соотвѣтственныхъ инваріантовъ бинарной формы $4x_1^3 x_2 - ux_1 x_2^3 + vx_2^4$, для которой $S = u$, $T = v$, но этого быть не можетъ, потому что количества $u$ и $v$ произвольныя и, вообще говоря, не удовлетворяютъ соотношенію

$$c_1 u^{k_1} v^{l_1} + c_2 u^{k_2} v^{l_2} + \ldots + c_\nu u^{k_\nu} v^{l_\nu} = 0.$$

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что *бинарная форма четвертаго порядка имѣетъ только выраженія*

$$S^{k_1} T^{l_1},\ S^{k_2} T^{l_2},\ \ldots\ S^{k_\nu} T^{l_\nu}$$

*своими инваріантами порядка* $\mu$, *при чемъ* $(k_1, l_1)$, $(k_2, l_2)$,

. . . $(k_\nu, l_\nu)$ *суть пары всевозможныхъ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ, удовлетворяющихъ уравненію*

$$2k+3l=\mu;$$

*остальные ея инваріанты порядка $\mu$ выражаются линейно черезъ эти линейно-независимые инваріанты.*

Этотъ результатъ можно формулировать еще такимъ образомъ: *всѣ инваріанты бинарной формы четвертаго порядка суть цѣлыя раціональныя функціи ея двухъ основныхъ инваріантовъ $S$ и $T$, при чемъ показатели степеней $S$ и $T$ въ членахъ этихъ функцій должны удовлетворять уравненію*

$$2k+3l=\mu,$$

*гдѣ $\mu$ есть степень инваріанта.*

## § 27. Нѣкоторыя свойства функцій $\psi_{\mu,n}(v)$. Теорема Hermite'а о взаимности бинарныхъ формъ. Обобщеніе Hurvitz'а.

Функція $\psi_{\mu,n}(v)$ имѣетъ такой видъ (§ 25)

$$\psi_{\mu,n}(v)=\frac{\varphi_{\mu+n}(v)}{\varphi_\mu(v)\,\varphi_n(v)}=\frac{(1-v)(1-v^2)\ldots(1-v^\mu)\;\ldots\ldots\;(1-v^{\mu+n})}{(1-v)(1-v^2)\ldots(1-v^\mu)(1-v)(1-v^2)\ldots(1-v^n)};$$

докажемъ слѣдующія свойства этой функціи:

1° *Функція $\psi_{\mu,n}(v)$ есть цѣлая раціональная функція $v$ съ положительными и цѣлыми коэффиціентами, обладающая свойствомъ взаимности: $\psi_{\mu,n}(v)=\psi_{n,\mu}(v)$.*

Для доказательства этого предложенія обратимъ вниманіе на то, что функція $\psi_{\mu,n}$ есть коэффиціентъ при $x^\mu$ въ разложеніи по цѣлымъ положительнымъ степенямъ произведенія (§ 25)

$$\prod_0^n\frac{1}{(1-v^i x)}=1+\psi_{1,n}(v)\,.\,x^2+\ldots+\psi_{\mu,n}(v)\,x^\mu+\ldots;$$

такъ какъ каждый изъ факторовъ этого произведенія разлагается извѣстнымъ образомъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $(v^i x)$, то функція $\Psi_{\mu,n}(v)$ служитъ коэффиціентомъ при $x^\mu$ въ результатѣ умноженія такихъ факторовъ:

$$(1+x+x^2+\ldots)(1+vx+v^2x^2+\ldots)\ldots(1+v^nx+v^{2n}x^2+\ldots),$$

это же обнаруживаетъ справедливость первой части нашего предложенія; справедливость второй части предложенія относительно взаимности функціи $\psi_{\mu,n}(v)$ усматривается непосредственно изъ формы этой функціи, приведенной выше — въ началѣ параграфа.

2° *Степень цѣлой раціональной функціи* $\psi_{\mu,n}(v)$ *равна* $n\mu$.

Изъ приведеннаго въ началѣ параграфа вида функціи $\psi_{\mu,n}(v)$ слѣдуетъ, что ея степень равна

$$(\mu+1)+(\mu+2)+\ldots+(\mu+n)-(1+2+3+\ldots+n)=n\mu.$$

3° *Функція* $\psi_{\mu,n}(v)$ *обладаетъ свойствомъ*

$$v^{n\mu}\,\psi_{\mu,n}\left(\frac{1}{v}\right)=\psi_{\mu,n}(v). \tag{33}$$

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\psi_{\mu,n}\left(\frac{1}{v}\right)=\frac{\left(1-\frac{1}{v^{\mu+1}}\right)\left(1-\frac{1}{v^{\mu+2}}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{v^{\mu+n}}\right)}{\left(1-\frac{1}{v}\right)\left(1-\frac{1}{v^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{v^n}\right)}$$

$$=\frac{v^{1+2+\ldots+n}}{v^{(\mu+1)+(n+2)+\ldots(\mu+n)}}\,\psi_{\mu,n}(v)=\frac{1}{v^{n\mu}}\,\psi_{\mu,n}(v).$$

4° *Сумма коэффиціентовъ функціи* $\psi_{\mu,n}(v)$ *равна*

$$\frac{(\mu+n)!}{\mu!\,n!}=\frac{(\mu+1)(n+2)\ldots(\mu+n)}{1.2\ldots n}=\binom{\mu+n}{n}. \tag{34}$$

Для того, чтобы обнаружить это свойство функціи $\psi_{\mu,n}(v)$, примемъ во вниманіе, что на основаніи свойства 1° она есть цѣлый полиномъ съ положительными коэффиціентами, и слѣдовательно сумма ея коэффиціентовъ равна $\psi_{\mu,n}(1)$; но съ другой стороны $\psi_{\mu,n}(v)$ можно представить въ видѣ

$$\psi_{\mu,n}(v)=\frac{\dfrac{\varphi_{\mu+n}(v)}{(1-v)^{\mu+n}}}{\dfrac{\varphi_{\mu}(v)}{(1-v)^{\mu}}\cdot\dfrac{\varphi_{n}(v)}{(1-v)^{n}}},$$

при чемъ

$$\left[\frac{\varphi_n(v)}{(1-v)^n}\right]_{v=1}=\left[\frac{1-v}{1-v}\cdot\frac{1-v^2}{1-v}\cdot\frac{1-v^3}{1-v}\cdots\frac{1-v^n}{1-v}\right]_{v=1}=1.2.3\ldots n;$$

слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\psi_{\mu,n}(1)=\frac{(\mu+n)!}{\mu!\;n!}.$$

Такъ какъ число линейно-независимыхъ инваріантовъ порядка $\mu$ данной бинарной формы степени $n$ равно коэффиціенту при $x^{\nu}$, или при $x^{\frac{\mu n}{2}}$, въ функціи

$$(1-v)\,\psi_{\mu,n}(v),$$

а эта функція на основаніи свойства перваго функціи $\psi_{\mu,n}(v)$ тождественна съ функціей

$$(1-v)\,\psi_{n,\mu}(v),$$

то мы можемъ высказать слѣдующее предложеніе Hermite'а о *взаимности* бинарныхъ формъ:

*Число линейно-независимыхъ инваріантовъ степени $\mu$ бинарной формы порядки $n$ равно числу линейно-независимыхъ инваріантовъ степени $n$ бинарной формы порядка $\mu$.*

1) Пусть $\mu=1$; тогда мы знаемъ, что бинарная форма перваго порядка не имѣетъ инваріантовъ (§ 10, *Прим.* 1, и § 26, 1°); слѣдовательно, на основаніи теоремы Hermite'а, бинарныя формы совсѣмъ не имѣютъ инваріантовъ первой степени (§ 10, *Прим.* 4).

2) Пусть $\mu=2$; тогда мы знаемъ, что бинарная форма второго порядка имѣетъ одинъ инваріантъ степени $n\equiv 0$(мд. 2) и ниодного степени $n\equiv 1$ (мд. 2) (§ 10, *Прим.* 2, и § 26, 2°); слѣдовательно, на основаніи теоремы Hermite'а, бинарныя

формы четныхъ порядковъ имѣютъ одинъ инваріантъ второй степени, а бинарныя формы нечетныхъ порядковъ совсѣмъ не имѣютъ инваріантовъ второй степени (§ 10, *Прим.* 5).

3) Пусть $\mu = 3$; тогда мы знаемъ, что бинарная форма третьяго порядка имѣетъ одинъ инваріантъ степени $n \equiv 0$ (мд. 4) и совсѣмъ не имѣетъ инваріантовъ степеней, некратныхъ четырехъ (§ 26, 3°); слѣдовательно, на основаніи теоремы Hermite'a, бинарныя формы порядковъ $n \equiv 0$ (мд. 4) имѣютъ одинъ инваріантъ третьей степени, а остальныя бинарныя формы совсѣмъ не имѣютъ такого инваріанта.

4) Пусть $\mu = 4$; тогда мы знаемъ, что бинарная форма четвертаго порядка имѣетъ только инваріанты степени $\mu = 2k + 3l$, гдѣ $k$ и $l$ произвольныя цѣлыя и положительныя числа, и число такихъ линейно-независимыхъ инваріантовъ равно числу паръ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ $(k, l)$, удовлетворяющихъ уравненію $2k + 3l = \mu$ (§ 26, 4°); слѣдовательно, на основаніи теоремы Hermite'a только бинарныя формы порядковъ $n = 2k + 3l$ имѣютъ инваріанты четвертой степени и число послѣднихъ равно числу паръ цѣлыхъ и положительныхъ чиселъ $(k, l)$, удовлетворяющихъ уравненію $2k + 3l = n$.

Изъ свойства 1° функціи $\psi_{\mu,n}(v)$ вытекаетъ также и обобщеніе теоремы Hermite'a для системы бинарныхъ формъ, предложенное Hurvitz'омъ [1]):

*Если взять двѣ системы бинарныхъ формъ:*

$$\text{I)}\quad f_1,\ f_2,\ \ldots f_r;\quad F_1,\ F_2,\ \ldots F_k$$

*соотвѣтственно порядковъ* —

$$n_1, n_2, \ldots n_r;\quad l_1,\ l_2,\ \ldots l_k,$$

*и*

$$\text{II)}\quad g_1,\ g_2,\ \ldots g_r;\quad F_1,\ F_2,\ \ldots F_k$$

*соотвѣтственно порядковъ* —

$$m_1, m_2, \ldots m_r;\quad l_1,\ l_2,\ \ldots l_k,$$

---

1) Hurwitz. *Zur Invariantentheorie.* Math. An. Bd. 45. S. 403.

*то число линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ первой системы, имѣющихъ соотвѣтственно степени* $m_1, m_2, \ldots m_r; \; h_1, h_2, \ldots h_k$, *равно числу линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ второй системы, имѣющихъ соотвѣтственно степени* $n_1, n_2, \ldots n_r; \; h_1, h_2, \ldots h_k$.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи перваго свойства функціи $\psi_{\mu,n}(v)$ мы можемъ написать равенство

$$(1-v)\,\psi_{m_1,n_1}(v)\,\psi_{m_2,n_2}(v)\ldots\psi_{h_1,l_1}(v)\ldots\psi_{h_k,l_k}(v)\equiv$$
$$\equiv(1-v)\,\psi_{n_1,m_1}(v)\,\psi_{n_2,m_2}\ldots\psi_{h_1,l_1}(v)\ldots\psi_{h_k,l_k}(v);$$

слѣдовательно, коэффиціенты при

$$v^{\frac{1}{2}(m_1 n_1 + m_2 n_2 + \ldots + h_1 l_1 + \ldots + h_k l_k)}$$

выраженій, стоящихъ въ двухъ частяхъ тождественнаго равенства, одинаковы; эти же коэффиціенты соотвѣтственно суть числа линейно-независимыхъ совмѣстныхъ инваріантовъ указанныхъ степеней для двухъ данныхъ системъ.

# ГЛАВА III.

## Коваріанты и контраваріанты бинарныхъ формъ.

### § 28. Опредѣленіе коваріанта бинарной формы. Совмѣстный коваріантъ системы бинарныхъ формъ.

Возьмемъ бинарную форму $n$-го порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0\, x_1^n + \binom{n}{1} a_1\, x_1^{n-1}\, x_2 + \ldots + a_n\, x_2^n.$$

*Коваріантомъ* этой формы называется цѣлая раціональная функція $\Gamma\,(a; x_1, x_2)$ коэффиціентовъ $a_0, a_1, \ldots a_n$ и перемѣнныхъ $x_1, x_2$, однородная какъ относительно этихъ коэффиціентовъ такъ и относительно перемѣнныхъ $x_1$, $x_2$, и удовлетворяющая тождественно соотношенію

$$\Gamma(\alpha; y_1, y_2) = \Delta^\lambda\, \Gamma(a; x_1, x_2), \text{ гдѣ } \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

если перемѣнныя $x_1, x_2$ преобразовать въ перемѣнныя $y_1, y_2$ посредствомъ произвольной линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ и количества $a$ — въ количества $\alpha$ посредствомъ соотвѣтственной системы подстановокъ $S_\alpha$ (§ 7). Показатель $\lambda$ называется *индексомъ* коваріанта.

Пусть *степень* коваріанта $\Gamma(a; x_1, x_2)$ относительно количествъ $a$ будетъ $\mu$ и пусть его *порядокъ* относительно $x_1$, $x_2$ будетъ $\nu$; тогда очевидно, что въ вышеприведенномъ равенствѣ правая часть будетъ имѣть степень $2\lambda + \nu$ относительно $\alpha$, $\beta$,

$\gamma$, $\delta$, если $x_1$, $x_2$ замѣнить ихъ выраженіями черезъ $y_1$, $y_2$ посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$; лѣвая же часть этого равенства будетъ степени $n\mu$ относительно $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, если въ ней количества $\alpha_0$, $\alpha_1$, ... $\alpha_n$ преобразовать посредствомъ подстановокъ $S_\alpha$; слѣдовательно, *индексъ* $\lambda$, *степень* $\mu$ *и порядокъ* $\nu$ *коваріанта данной формы связаны соотношеніемъ*

$$2\lambda + \nu = n\mu.$$

Конечно, сама форма $f(x_1, x_2)$ служитъ коваріантомъ для ней самой; степень этого коваріанта равна 1, порядокъ — $n$, слѣдовательно индексъ $\lambda = \frac{n\mu - \nu}{2} = 0$.

Разсмотримъ, далѣе, систему бинарныхъ формъ

$$f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, x_2)\ \ldots f_k(x_1, x_2),$$

имѣющихъ соотвѣтственно порядки $n$, $m$, ... $q$ и коэффиценты $a_0$, $a_1$, ... $b_0$, $b_1$, ... $b_m$, ... $s_0$, $s_1$, ... $s_q$.

*Совмѣстнымъ коваріантомъ* такой системы бинарныхъ формъ называется цѣлая раціональная функція $\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2)$ коэффиціентовъ и перемѣнныхъ бинарныхъ формъ системы, однородная какъ относительно коэффиціентовъ каждой формы такъ и относительно перемѣнныхъ, и удовлетворяющая тождественно соотношенію

$$\Gamma(\alpha, \beta, \ldots \sigma; y_1, y_2) = \Delta^\lambda\, \Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2),$$

если въ послѣднемъ преобразовать $x_1$, $x_2$ посредствомъ линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ и $a$, $b$, ... $s$ посредствомъ системы соотвѣтственныхъ подстановокъ $S_a$, $S_b$, ... $S_s$ (§ 17).

Показатель $\lambda$ называется *индексомъ* совмѣстнаго коваріанта.

Пусть степени совмѣстнаго коваріанта $\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2)$ относительно коэффиціентовъ $a$, $b$, ... $s$ будутъ соотвѣтственно $\mu_1$, $\mu_2$, ... $\mu_k$ и пусть его порядокъ относительно перемѣнныхъ $x_1$, $x_2$ будетъ $\nu$; тогда послѣ преобразованій

$S$, $S_\alpha$, $S_\beta \dots S_\sigma$ правая часть вышеприведеннаго тождественнаго равенства будетъ имѣть степень $2\lambda + \nu$ относительно параметровъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, а лѣвая часть — степень $n\mu_1 + m\mu_2 + \dots + q\mu_k$; слѣдовательно, *идексъ* $\lambda$, *степени* $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_k$ *и порядокъ* $\nu$ *совмѣстнаго коваріанта системы бинарныхъ формъ связаны соотношеніемъ*

$$n\mu_1 + m\mu_2 + \dots + q\mu_k = 2\lambda + \nu. \tag{35}$$

Едва ли надо дополнить, что коваріантъ, имѣющій порядокъ $\nu = 0$, есть инваріантъ.

### § 29. Когредіентныя и контрагредіентныя перемѣнныя. Опредѣленіе контраваріанта бинарныхъ формъ.

Если перемѣнныя $x_1$, $x_2$ переходятъ въ перемѣнныя $y_1$, $y_2$ посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, то мы будемъ это обстоятельство выражать символическимъ равенствомъ

$$(x_1, x_2) = S(y_1, y_2);$$

если мы имѣемъ еще пару перемѣнныхъ $\xi_1$, $\xi_2$, которыя преобразуются въ перемѣнныя $\eta_1$, $\eta_2$ тоже посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, т. е.

$$(\xi_1, \xi_2) = S(\eta_1, \eta_2),$$

то эти перемѣнныя $\xi_1$, $\xi_2$ называются *когредіентыми* съ перемѣнными $x_1$, $x_2$.

Преобразуемъ перемѣнныя $x_1$, $x_2$ линейной формы $u_1 x_2 + u_2 x_2$ посредствомъ подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, тогда получимъ

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 &= (\alpha u_1 + \gamma u_2) y_1 + (\beta u_1 + \delta u_2) y_2 \\ &= v_1 y_1 + v_2 y_2, \end{aligned}$$

при чемъ коэффиціенты $(v_1, v_2)$ преобразованной формы выражаются черезъ прежніе коэффиціенты такъ:

$$v_1 = \alpha u_1 + \gamma u_2,$$
$$v_2 = \beta u_1 + \delta u_2,$$

т. е. посредствомъ подстановки $S_1\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$, и, наоборотъ, количества $u_1$, $u_2$ переходятъ въ количества $v_1$, $v_2$ посредствомъ обратной подстановки

$$S_1^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{\delta}{\Delta} & \dfrac{-\gamma}{\Delta}\\ \dfrac{-\beta}{\Delta} & \dfrac{\alpha}{\Delta}\end{pmatrix},$$

которую мы назовемъ *контрагредіентною* съ подстановкою $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ и будемъ сокращенно обозначать черезъ $CS$; ея модуль $\Delta_1$ равенъ обратной величинѣ $\frac{1}{\Delta}$ модуля подстановки $S$.

Количества $u_1$, $u_2$, переходящія въ $v_1$, $v_2$ посредствомъ подстановки контрагредіентной съ подстановкою $S$, мы будемъ называть *перемѣнными, котрагредіентными съ перемѣнными* $x_1$, $x_2$; они характеризуются символическимъ равенствомъ

$$(u_1,\ u_2) = CS(v_1,\ v_2).$$

Какъ слѣдствіе изъ равенствъ

$$(x_1,\ x_2) = S(y_1,\ y_2)$$
$$(u_1,\ u_2) = CS(v_1,\ v_2)$$

вытекаетъ равенство

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 = v_1 y_1 + v_2 y_2.$$

Если составить контрагредіентную подстановку съ $CS$, то получится начальная; слѣдовательно, мы можемъ написать

$$CCS = S.$$

Если $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ унимодулярная подстановка, то $CS$ имѣетъ видъ

$$\begin{pmatrix}\delta & -\gamma\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix};$$

слѣдовательно, относительно унимодулярной подстановки перемѣнныя $x_1$, $x_2$ и $u_1=x_2$, $u_2=-x_1$ суть контрагредіентныя, потому что

$$\begin{array}{l|l} x_1=\alpha y_1+\beta y_2 & \quad x_2=\quad \delta y_2-\gamma(-y_1), \\ x_2=\gamma y_1+\delta y_2 & -x_1=-\beta y_2+\alpha(-y_1),\text{ если } \varDelta=\alpha\delta-\beta\gamma=1, \end{array}$$

или

$$(x_1,\ x_2)=S_{\varDelta=1}(y_1,\ y_2),\ (x_2,\ -x_1)=CS_{\varDelta=1}(y_2,\ -y_1).$$

*Контраваріантомъ* [1]) бинарной формы $f(x_1,\ x_2)$ называется цѣлая раціональная функція $K(a;\ u_1,\ u_2)$ коэффиціентовъ $a_0$, $a_1$, . . . $a_n$ и перемѣнныхъ $u_1$, $u_2$, контрагредіентныхъ съ перемѣнными $x_1$, $x_2$, однородная какъ относительно коэффиціентовъ такъ и относительно перемѣнныхъ $u_1$, $u_2$ въ отдѣльности, и удовлетворяющая тождественному соотношенію

$$K(\alpha;\ v_1\ v_2)=\varDelta^\lambda K(a;\ u_1,\ u_2),\ \text{гдѣ } \varDelta=\alpha\delta-\beta\gamma,$$

если въ немъ преобразовать $u_1$, $u_2$ посредствомъ подстановки $CS$ въ перемѣнныя $v_1$, $v_2$, а количества $a$ посредствомъ соотвѣтственной подстановки $S_a$ — въ количества $\alpha$.

*Между индексомъ $\lambda$ контраваріанта, его степенью $\mu$ относительно $a$ и классомъ $\rho$ относительно $u_1$, $u_2$ существуетъ соотношеніе*

$$n\mu=2\lambda-\rho. \tag{36}$$

*Контраваріантъ $K(a;\ u_1,\ u_2)$ обратится въ коваріантъ $K(a;x_2,\ -x_1)$, если замѣнить въ немъ $u_1$ черезъ $x_2$ и $u_2$ черезъ $-x_1$.* Въ самомъ дѣлѣ, для всякой унимодулярной подстановки контраваріантъ удовлетворяетъ условію.

$$K(\alpha;\ v_1,\ v_2)=K(a;\ u_1,\ u_2),$$

замѣнивъ $u_1$, $u_2$ черезъ $x_2$, $-x_1$ и $v_1$, $v_2$ черезъ $y_2$, $-y_1$, мы получимъ

$$K(\alpha;\ y_2,\ -y_1)=K(a;\ x_2,\ -x_1),$$

1) Sylvester называетъ эти инваріантныя функціи *конкоминантами*.

а такъ какъ функція $K(a\,;\ x_2,\ -x_1)$ кромѣ того однородна относительно $a$ и $x_2,\ -x_1$ въ отдѣльности, то она удовлетворяетъ соотношенію

$$K(a\,;\ y_2,\ -y_1) = \Delta^\lambda K(a\,;\ x_2,\ -x_1)$$

относительно всякой подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ и поэтому служитъ коваріантомъ бинарной формы.

Наоборотъ, *если въ коваріантѣ* $\Gamma(a\,;\ x_1,\ x_2)$ *замѣнить* $x_1$ *черезъ* $-u_2$ *и* $x_2$ — *черезъ* $u_1$, *то онъ обратится въ контраваріантъ* $\Gamma(a\,;\ -u_2,\ u_1)$.

*Совмѣстнымъ контраваріантомъ* системы бинарныхъ формъ называется цѣлая раціональная функція $K(a, b, \ldots s\,;\ u_1, u_2)$ коэффиціентовъ $a_0,\ a_1,\ \ldots\ b_0,\ b_1,\ \ldots\ b_m,\ \ldots\ s_0,\ s_1,\ \ldots\ s_q$ этихъ формъ и перемѣнныхъ $u_1,\ u_2$, контрагредіентныхъ съ $x_1,\ x_2$, однородная относительно коэффиціентовъ каждой формы и относительно перемѣнныхъ $u_1,\ u_2$, и удовлетворяющая тождественно соотношенію

$$K(\alpha,\ \beta,\ \ldots\ \sigma\,;\ v_1,\ v_2) = \Delta^\lambda K(a,\ b,\ \ldots\ s\,;\ u_1,\ u_2),$$

если въ послѣднемъ $u_1,\ u_2$ преобразовать посредствомъ подстановки $CS$, а количества $a,\ b,\ \ldots\ s$ — посредствомъ системы соотвѣтственныхъ подстановокъ $S_a,\ S_b,\ \ldots\ S_s$ (§ 17).

*Между индексомъ* $\lambda$ *совмѣстнаго контраваріанта, его степенями* $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ \mu_k$ *относительно коэффиціентовъ* $a,\ b,\ \ldots\ s$, *и его классомъ* $\rho$ *относительно перемѣнныхъ* $u_1,\ u_2$, конечно, *существуетъ соотношеніе*

$$n\mu + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k = 2\lambda - \rho. \tag{37}$$

Подобно предыдущему можно показать, *что совмѣстный контраваріантъ* $K(a, b, \ldots s\,;\ u_1, u_2)$ *обратится въ совмѣстныи коваріантъ, если въ немъ замѣнить* $u_1,\ u_2$ *черезъ* $x_2,\ -x_1$; и наоборотъ, *совмѣстный коваріантъ* $\Gamma(a,\ b,\ \ldots\ s\,;\ x_1,\ x_2)$ *обратится въ совмѣстный контраваріантъ, если въ немъ замѣнить* $x_1,\ x_2$ *черезъ* $-u_2,\ u_1$.

### § 30. Коваріанты и контраваріанты какъ совмѣстные инваріанты; ихъ дифференціальныя уравненія.

Изъ опредѣленія совмѣстнаго контраваріанта данной системы бинарныхъ формъ слѣдуетъ, что его можно разсматривать какъ совмѣстный инваріантъ данной системы формъ

$$\text{I)} \qquad f_1(x_1,\ x_2),\ f_2(x_1,\ x_2),\ \ldots f_k(x_1,\ x_2)$$

вмѣстѣ съ линейной формой

$$\text{II)} \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2;$$

и наоборотъ, каждый совмѣстный инваріантъ системы (I, II) есть, конечно, совмѣстный контраваріантъ системы (I).

Если мы напишемъ совмѣстный коваріантъ системы (I) съ перемѣнными $\xi_1$, $\xi_2$:

$$\Gamma(a,\ b,\ \ldots s;\ \xi_1,\ \xi_2),$$

то его можно разсматривать какъ совмѣстный инваріантъ системы (I) вмѣстѣ съ линейной формой

$$\text{(III)} \qquad \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2.$$

Такимъ образомъ мы можемъ вывести многія свойства контраваріантовъ и коваріантовъ изъ извѣстныхъ уже свойствъ совмѣстныхъ инваріантовъ.

На основаніи § 18 мы можемъ, напримѣръ, написать полную систему дифференціальныхъ уравненій, опредѣляющихъ совмѣстный контраваріантъ или коваріантъ системы бинарныхъ формъ.

Для совмѣстнаго контраваріанта мы будемъ имѣть слѣдующую полную систему дифференціальныхъ уравненій:

$$\sum_0^n (n-2i)\frac{\partial K}{\partial a_i}a_i + \sum_0^m (m-2i)\frac{\partial K}{\partial b_i}b_i + \ldots + \sum_0^q (q-2i)\frac{\partial K}{\partial s_i}s_i + \frac{\partial K}{\partial u_1}u_1 - \frac{\partial K}{\partial u_2}u_2 = 0, \qquad \text{(D)}$$

$$\sum_0^n i\frac{\partial K}{\partial a_i}a_{i-1}+\sum_0^m i\frac{\partial K}{\partial b_i}b_{i-1}+\ldots+\sum_0^q i\frac{\partial K}{\partial s_i}s_{i-1}+ \\ +\frac{\partial K}{\partial u_2}u_1=0,$$

$$\sum_0^n (n-i)\frac{\partial K}{\partial a_i}a_{i+1}+\sum_0^m (m-i)\frac{\partial K}{\partial b_i}b_{i+1}+\ldots+\sum_0^q (q-i)\frac{\partial K}{\partial s_i}s_{i+1}+ \\ +\frac{\partial K}{\partial u_1}u_2=0.$$

Слѣдовательно, *для того, чтобы цѣлая раціональная функція $K(a, b, \ldots s;\ u_1, u_2)$, однородная относительно коэффиціентовъ каждой формы системы и относительно перемѣнныхъ $u_1$, $u_2$, служила совмѣстнымъ контраваріантомъ этой системы, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла тремъ уравненіямъ:*

$$X_3(K)+\frac{\partial K}{\partial u_1}u_1-\frac{\partial K}{\partial u_2}u_2=0,$$

$$X_2(K)+\frac{\partial K}{\partial u_2}u_1=0, \qquad \text{(D)}$$

$$X_1(K)+\frac{\partial K}{\partial u_1}u_2=0,$$

*гдѣ $X_1$, $X_2$ и $X_3$ имѣютъ тѣ-же значенія какъ и въ § 18.*

Мы знаемъ, что уравненіе первое системы (D) для цѣлой раціональной функціи $K$, однородной относительно $a, b, \ldots s$, и — въ отдѣльности, равносильно изобарности съ вѣсомъ $\lambda=\frac{1}{2}(n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu_k+\rho)$, если $u_1$ считать съ вѣсомъ 0 и $u_2$ — съ вѣсомъ 1. Принявъ, затѣмъ, во вниманіе доказательство послѣдняго предложенія въ § 18, мы можемъ сказать: *для того, чтобы цѣлая раціональная функція $K(a, b, \ldots s;\ u_1, u_2)$, однородная относительно $a, b, \ldots s$, и — въ отдѣльности и изобарная съ вѣсомъ, равнымъ индексу $\lambda=\frac{1}{2}(n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu_k+\rho)$, служила совмѣстнымъ контраваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ,* *необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она удовлетворяла одному уравненію съ частными производными*

$$X_2(K)+\frac{\partial K}{\partial u_2}u_1=0. \tag{38}$$

Такъ какъ совмѣстный контраваріантъ системы обращается въ ея совмѣстный коваріантъ, если въ первомъ замѣнить $u_1$, $u_2$ черезъ $x_2$, $-x_1$, то не трудно получить изъ вышеприведенныхъ уравненій контраваріанта соотвѣтственныя уравненія коваріанта. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\frac{\partial K}{\partial u_2}=\frac{\partial K}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_2}=-\frac{\partial K}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial K}{\partial u_1}=\frac{\partial K}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_1}=\quad\frac{\partial K}{\partial x_2};$$

слѣдовательно, *для того, чтобы цѣлая раціональная функція $K(a, b, \ldots s;\ x_2, -x_1)$ или $\Gamma(a, b, \ldots s;\ x_1, x_2)$, однородная относительно $a, b, \ldots s$, $x$ въ отдѣльности, служила совмѣстнымъ коваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ необходимо и вполнѣ достаточно, чтобы она удовлетворяла уравненіямъ*

$$\begin{aligned} &X_3(\Gamma)-\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}x_1+\frac{\partial \Gamma}{\partial x_2}x_2=0,\\ &X_2(\Gamma)-\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}x_2=0,\\ &X_1(\Gamma)-\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}x_1=0; \end{aligned} \tag{D'}$$

*если же функція $\Gamma$, кромѣ того, еще изобарна съ вѣсомъ $p=\frac{1}{2}(n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu_k+\nu)$, то достаточно, чтобы она удовлетворяла только одному уравненію*

$$X_2(\Gamma)-\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}x_2=0; \tag{39}$$

при чемъ вѣсъ $x_2$ считается равнымъ 0 и вѣсъ $x_1$ равнымъ 1.

### § 31. Коэффиціенты коваріанта и ихъ взаимная зависимость. Теорема Cayley. Полуинваріанты.

Пусть коваріантъ $\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2)$ представленъ въ видѣ

$$\Gamma = C_0 x_1^{\nu} + \binom{\nu}{1} C_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \ldots + C_{\nu} x_2^{\nu};$$

тогда коэффиціенты его $C_i$ должны быть цѣлыми однородными полиномами относительно коэффиціентовъ каждой формы и изобарными съ вѣсомъ

$$\begin{aligned} p_i &= p - (\nu - i) \\ &= \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots q\mu_k + \nu) - (\nu - i), \end{aligned} \tag{40}$$

т. е. ихъ вѣсъ $p_i$ равняется $\lambda + i$, потому что изъ § 29 мы знаемъ, что индексъ $\lambda$ коваріанта равенъ $\frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - \nu)$. Для того, чтобы найти соотношенія между коэффиціентами $C_i$ коваріанта, подставимъ его выраженіе въ вышеприведенной формѣ въ дифференціальное уравненіе коваріанта

$$X_2(\Gamma) = \frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} x_2;$$

тогда мы получимъ тождественное равенство

$$\begin{aligned} \sum_0^{\nu} \binom{\nu}{i} X_2(C_i) x_1^{\nu-i} x_2^{i} &\equiv \sum_0^{\nu-1} (\nu - i \qquad) \binom{\nu}{i} C_i \quad x_1^{\nu-(i+1)} x_2^{i+1} \\ &\equiv \sum_1^{\nu} (\nu - i + 1) \binom{\nu}{i-1} C_{i-1} x_1^{\nu-i} x_2^{i}; \end{aligned}$$

сравнивая коэффиціенты подобныхъ членовъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства, мы получимъ

$$\begin{aligned} X_2(C_0) &= 0, \\ X_2(C_1) &= \quad C_0, \\ X_2(C_2) &= 2C_1, \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \tag{41}$$

$$X_2(C_i) = iC_{i-1},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$X_2(C_\nu) = \nu C_{\nu-1}.$$

Эта система равенствъ, конечно, равносильна уравненію коваріанта

$$X_2(\Gamma) - \frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}x_2 = 0.$$

Подобно предыдущему уравненіе коваріанта

$$X_1(\Gamma) = \frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}x_1$$

дастъ тождественное равенство

$$\sum_0^\nu \binom{\nu}{i} X_1(C_i)\,x_1^{\nu-i}\,x_2^i \equiv \sum_1^\nu \quad i\,.\binom{\nu}{i}C_i \quad x_1^{\nu-(i-1)}\,x_2^{i-1}$$
$$\equiv \sum_0^{\nu-1}(i+1)\binom{\nu}{i+1}C_{i+1}\,x_1^{\nu-i}\,x_2^i;$$

сравнивая коэффиціенты подобныхъ членовъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства, мы получимъ

$$\begin{aligned}
X_1(C_0) &= \qquad \nu\,.\,C_1,\\
X_1(C_1) &= (\nu-1)C_2,\\
X_1(C_2) &= (\nu-2)C_3,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
X_1(C_i) &= (\nu-i)C_{i+1},\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
X_1(C_{\nu-1}) &= \qquad\quad C_\nu.
\end{aligned} \tag{42}$$

Эта система равенствъ, конечно, равносильна уравненію коваріанта

$$X_1(\Gamma) - \frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}x_1 = 0.$$

Изъ послѣдней системы соотношеній между коэффиціентами $C_i$ коваріанта мы имѣемъ

$$C_1 = \frac{1}{\nu} X_1(C_0),\quad C_2 = \frac{1}{\nu(\nu-1)} X_1^2(C_0), \ldots C_\nu = \frac{1}{\nu(\nu-1)\ldots 2.1} X_1^\nu(C_0);$$

слѣдовательно, мы можемъ всякій коваріантъ представить въ видѣ

$$\Gamma = C_0 x_1^\nu + \frac{1}{1} X_1(C_0) x_1^{\nu-1} x_2 + \frac{1}{1.2} X_1^2(C_0) x_1^{\nu-2} x_2^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots\nu} X_1^\nu(C_0) x_2^\nu.$$

Коэффиціентъ $C_0$, опредѣляющій такимъ образомъ вполнѣ коваріантъ $\Gamma$, назовемъ *главнымъ коэффиціентомъ коваріанта.*

Мы знаемъ, что главный коэффиціентъ $C_0$ коваріанта $\Gamma$ есть цѣлый многочленъ, однородный относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы системы, изобарный съ вѣсомъ $p_0 = \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - \nu)$ и удовлетворяющій уравненію $X_2(C_0) = 0$.

Теперь мы докажемъ обратное предложеніе:

**Теорема Cayley**[1]). *Если* $C_0(a, b, \ldots s)$ *есть цѣлая раціональная функція, однородная относительно коэффиціентовъ каждой бинарной формы системы, изобарная съ вѣсомъ* $p_0 = \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - \nu)$, *и если она удовлетворяетъ уравненію* $X_2(C_0) = 0$, *то функція*

$$\Gamma = C_0 x_1^\nu + \frac{1}{1} X_1(C_0) x_1^{\nu-1} x_2 + \frac{1}{1.2} X_1^2(C_0) x_1^{\nu-2} x_2^2 + \ldots + \tag{43}$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots\nu} X_1^\nu(C_0) x_2^\nu$$

*служитъ совмѣстнымъ коваріантомъ данной системы формъ.*

Такъ какъ вѣсъ коэффиціента $X_1^i(C_0)$ равенъ $p_0 + i$, то

1) Cayley. *A second memoir upon quantics.* Philosophical Transactions, vol. 146, pp. 101—126. 1856.

вѣсъ всего члена $\frac{1}{1.2\ldots i}X_1^i(C_0)x_1^{\nu-i}x_2^i$ равенъ

$$p_0+i+\nu-i=\frac{1}{2}(n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu+\nu),$$

если принимать вѣсъ $x_2$ равнымъ 0 и вѣсъ $x_1$ — равнымъ 1; слѣдовательно, на основаніи послѣдняго предложенія въ § 30, для того, чтобы доказать нашу теорему, необходимо только доказать, что функція $\Gamma$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$X_2(\Gamma)-\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}x_2=0,$$

или, что тоже самое, системѣ соотношеній (41), т. е. надо доказать, что ея коэффиціенты $C_i$ удовлетворяютъ равенствамъ

$$X_2(C_i)=iC_{i-1},\ \text{гдѣ}\ i=1,\ 2,\ \ldots\nu;$$

но мы имѣемъ $C_i=\frac{1}{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-i+1)}X_1^i(C_0)$, слѣдовательно надо обнаружить справедливость равенствъ

$$\frac{1}{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-i+1)}X_2X_1^i(C_0)=\frac{i}{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-i+2)}X_1^{i-1}(C_0),$$

гдѣ $$i=1,\ 2,\ \ldots\nu,$$

или равенствъ

$$X_2X_1^i(C_0)=i(\nu-i+1)X_1^{i-1}(C_0),\ \text{гдѣ}\ i=1,\ 2,\ \ldots\nu;$$

мы знаемъ изъ § 18 соотношеніе

$$(X_2X_1^i-X_1^iX_2)\varphi=i(\chi-i+1)X_1^{i-1}(\varphi),$$

при чемъ въ данномъ случаѣ $\varphi=C_0$ имѣетъ эксцессъ $\chi=n\mu_1+m\mu_2+\ldots+q\mu_k-2p_0=\nu$, и $X_1^iX_2(C_0)=X_1^i(0)\equiv0$, слѣдовательно, равенства

$$X_2X_1^i(C_0)=i(\nu-i+1)X_1^{i-1}(C_0),\ \text{гдѣ}\ i=1,\ 2,\ \ldots\nu$$

справедливы, и теорема Cayley, такимъ образомъ, доказана.

*Замѣчаніе.* Цѣлая раціональная функція $C(a, b, \dots s)$, однородная относительно коэффиціентовъ каждой формы данной системы, изобарная съ произвольнымъ вѣсомъ $p$ и удовлетворяющая уравненію $X_2(C) = 0$, называется *полуинваріантомъ* данной системы бинарныхъ формъ; онъ отличается отъ инваріанта только тѣмъ, что $p \neq \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \dots + q\mu_k)$.

Слѣдовательно, полуинваріантъ удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ главнаго коэффиціента для коваріанта порядка $\nu = n\mu_1 + m\mu_2 + \dots + q\mu_k - 2p$, и необходимо только, чтобы $n\mu_1 + m\mu_2 + \dots + q\mu_k - 2p > 0$.

Пусть $n\mu_1 + m\mu_2 + \dots + q\mu_k - 2p < 0$; вообразимъ другую систему бинарныхъ формъ

$$F_1(x_1, x_2),\ F_2(x_1, x_2),\ \dots\ F_k(x_1, x_2)$$

порядковъ $N > n$, $M > m$, ... $Q > q$; пусть ихъ коэффиціенты будутъ $a_0, a_1, \dots a_N, b_0, b_1, \dots b_M, \dots s_0, s_1, \dots s_Q$. Очевидно, что функція $C(a, b, \dots s)$ будетъ удовлетворять и для новой системы уравненію $X_2(C) = 0$; если для новой системы число

$$\nu = N\mu_1 + M\mu_2 + \dots + Q\mu_k - 2p$$

положительное, то $C$ будетъ служить главнымъ коэффиціентомъ коваріанта порядка $\nu$ для новой системы; такихъ новыхъ системъ можно, конечно, вообразить безчисленное множество.

## § 32. Число основныхъ*) совмѣстныхъ коваріантовъ системы бинарныхъ формъ.

Мы уже знаемъ, что совмѣстный коваріантъ $\Gamma(a, b, \dots s; x_1, x_2)$ данной системы бинарныхъ формъ послѣ замѣны въ немъ $x_1$, $x_2$ черезъ $\xi_1$, $\xi_2$ дѣлается совмѣстнымъ инваріантомъ данной системы

I) $$f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, x_2),\ \dots\ f_k(x_1, x_2)$$

---

1) Здѣсь говорится объ **основныхъ** совмѣстныхъ коваріантахъ въ смыслѣ Aronhold'a — черезъ нихъ выражаются алгебраически всѣ остальные коваріанты данной системы.

съ прибавленіемъ къ ней еще линейной формы

II) $$\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2,$$

и наоборотъ, если въ совмѣстномъ инваріантѣ $J(a, b, \ldots s, \xi)$ системы (I, II) замѣнить $\xi_1$, $\xi_2$ черезъ $x_1$, $x_2$, то получится совмѣстный коваріантъ системы (I).

Слѣдовательно, на основаніи предпослѣдняго предложенія въ § 22 мы скажемъ, что система бинарныхъ формъ, для которой имѣетъ мѣсто неравенство

$$(n+m+\ldots+q+1)+k+1>4$$

или, что тоже самое, неравенство

$$(n+m+\ldots+q)+k>2,$$

имѣетъ

$$(n+m+\ldots+q)+k-1$$

основныхъ совмѣстныхъ коваріантовъ, черезъ которые выражаются всѣ остальные. Но вышеприведенное неравенство не имѣетъ мѣста только въ единственномъ случаѣ, если данная система состоитъ изъ одной линейной формы, для которой

$$(n+m+\ldots+q)+k=2;$$

для этой же системы существуетъ единственный основной коваріантъ — это сама линейная форма, такъ какъ эта форма $a_0 x_1 + a_1 x_2$ съ линейной формы $\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2$ имѣетъ только одинъ основной совмѣстный инваріантъ $J_{1,1} = a_0 \xi_1 + a_1 \xi_2$ (§ 19, *Прим.* 2).

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ заключенію, что *всякая система бинарныхъ формъ имѣетъ*

$$(n+m+\ldots+q)+k-1 \tag{44}$$

*основныхъ въ смыслѣ* Aronhold'а *совмѣстныхъ коваріантовъ.*

Въ частномъ случаѣ, когда мы имѣемъ одну бинарную форму $n$-го порядка число ея основныхъ коваріантовъ равно $n$.

*Примѣръ.* Изъ § 19 (*Прим.* 3) мы заключаемъ, что форма $\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2$ съ формою 2-го порядка $a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$

имѣетъ два совмѣстныхъ инваріанта:

$$a_0 a_2 - a_1^2 \text{ и } a_0 \xi_1^2 + 2a_1 \xi_1 \xi_2 + a_2 \xi_2^2;$$

слѣдовательно, бинарная форма втораго порядка

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

имѣетъ два коваріанта: одинъ нулеваго порядка, т. е. инваріантъ

$$a_0 a_2 - a_1^2,$$

и другой втораго порядка — это сама бинарная форма

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2;$$

эти два коваріанта и суть ея основные коваріанты.

## § 33. Число линейно-независимыхъ совмѣстныхъ коваріантовъ системы бинарныхъ формъ.

Такъ какъ всѣ коваріанты $\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2)$ данной системы бинарныхъ формъ, если въ нихъ ввести вмѣсто $x_1$, $x_2$ перемѣнныя $\xi_1$, $\xi_2$, могутъ быть получены изъ совмѣстныхъ инваріантовъ этой системы и линейной формы $\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2$, то при опредѣленіи числа линейно-независимыхъ коваріантовъ данныхъ степеней $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ и даннаго порядка $\nu$ надо воспользоваться формулами §§ 24, 25.

Искомое число будетъ выражаться такъ:

$$N_\nu = \Psi_p(\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_k, \nu) - \Psi_{p-1}(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k, \nu), \tag{45}$$

гдѣ $\Psi_p(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k, \nu)$ есть число рѣшеній Діофантовой системы уравненій:

$$\begin{aligned}
&e_0 + e_1 + \ldots + e_n = \mu_1,\\
&l_0 + l_1 + \ldots + l_m = \mu_2,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&t_0 + t_1 + \ldots + t_q = \mu_k,\\
&\gamma_0 + \gamma_1 \qquad\qquad = \nu,\\
&e_1 + 2e_2 + \ldots + l_1 + 2l_2 + \ldots + t_1 + 2t_2 + \ldots + qt_q + \gamma_1 = p,
\end{aligned} \tag{46}$$

гдѣ $$p = \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k + 1 . \nu).$$

Изъ § 25 мы знаемъ, что это число $\Psi_p(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k, \nu)$ равно коэффиціенту при $x^{\mu_1} y^{\mu_2} \ldots u^{\mu_k} w^{\nu} v^{p}$ въ разложеніи по возрастающимъ степенямъ выраженія

$$\frac{1}{(1-x)(1-vx)\ldots(1-v^n x)} \cdot \frac{1}{(1-y)(1-vy)\ldots(1-v^m y)} \cdot \ldots\ldots$$

$$\ldots \frac{1}{(1-u)(1-vu)\ldots(1-v^q u)} \cdot \frac{1}{(1-w)(1-vw)},$$

и число $N_\nu$ приводится къ такому виду:

$$N_\nu = [(1-v)\,\phi_{\mu_1,n}(v) \cdot \phi_{\mu_2,m}(v) \ldots \phi_{\mu_k,q}(v) \cdot \phi_{\nu,1}(v)]_{v^p}. \quad (47)$$

Такъ какъ

$$\phi_{\nu,1}(v) = \frac{1-v^{\nu+1}}{1-v},$$

то

$$N_\nu = [(1-v^{\nu+1})\,\phi_{\mu_1,n}(v)\,\phi_{\mu_2,m}(v) \ldots \phi_{\mu_k,q}(v)]_{v^p}. \quad (48)$$

Мы знаемъ изъ § 27, что функція $\phi_{\mu,n}(v)$ обладаетъ свойствомъ

$$\phi_{\mu,n}(v) = v^{n\mu}\,\phi_{\mu,n}\left(\frac{1}{v}\right);$$

пусть $\Psi(v) = \phi_{\mu_1,n}(v)\,\phi_{\mu_2,m}(v) \ldots \phi_{\mu_k,q}(v)$, тогда мы имѣемъ

$$\Psi(v) = v^{n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k}\,\Psi\left(\frac{1}{v}\right);$$

пусть $(v^\nu - 1)\,\Psi(v) = \mathit{f}(v)$, тогда

$$\mathit{f}(v) = -v^{n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k + \nu}\,\mathit{f}\left(\frac{1}{v}\right)$$

или

$$\mathit{f}(v) = -v^{\varkappa}\mathit{f}\left(\frac{1}{v}\right), \quad \text{гдѣ } \varkappa = n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k + \nu;$$

такъ какъ $\mathit{f}(v)$ цѣлый полиномъ степени $\varkappa$, что слѣдуетъ изъ § 27, 1° и 2°, то мы имѣемъ

$$\mathit{f}(v) = c_0 v^{\varkappa} + c_1 v^{\varkappa-1} + \ldots + c_{\varkappa},$$

$$v^{\varkappa}\mathit{f}\left(\frac{1}{v}\right) = c_0 + c_1 v + \ldots + c_{\varkappa} v^{\varkappa},$$

и въ силу равенства $\phi(v) = -v^{\varkappa}\phi\left(\frac{1}{v}\right)$ получимъ

$$c_0 = -c_{\chi},\ c_1 = -c_{\chi-1},\ \ldots\ c_{\frac{\chi}{2}} = -c_{\frac{\chi}{2}} = 0;$$

слѣдовательно, принявъ во вниманіе, что $\frac{\chi}{2} = p$, мы получимъ;

$$0 = \left[(v^{\nu} - 1)\,\phi_{\mu_1,n}(v)\,\phi_{\mu_2,m}(v)\ldots\phi_{\mu_k,q}(v)\right]_{v^p};$$

складывая это равенство почленно съ равенствомъ (48), мы получимъ

$$N_{\nu} = \left[(v^{\nu} - v^{\nu+1})\,\phi_{\mu_1,n}(v)\,\phi_{\mu_2,m}(v)\ldots\phi_{\mu_k,q}(v)\right]_{v^p} \tag{49}$$

или

$$N_{\nu} = \left[(1 - v)\,\phi_{\mu_1,n}(v)\,\phi_{\mu_2,m}(v)\ldots\phi_{\mu_k,q}(v)\right]_{v^{p-\nu}}, \tag{50}$$

гдѣ $p - \nu$ равно $\frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - \nu)$, т. е. равно вѣсу $p_0$ главнаго коэффиціента коваріанта или индексу $\lambda$. Этотъ результатъ можно было предвидѣть, исходя изъ теоремы Cayley, потому что число $\left[(1-v)\phi_{\mu_1,n}(v)\phi_{\mu_2,m}(v)\ldots\phi_{\mu_k,q}(v)\right]_{v^{p_0}}$, равно (§ 25) числу линейно-независимыхъ полиномовъ $C(a, b, \ldots s)$, однородныхъ относительно коэффиціентовъ каждой формы данной системы, изобарныхъ съ вѣсомъ $p_0 = \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - \nu)$ и удовлетворяющихъ уравненію $X_2(C) = 0$, изъ которыхъ каждый при $\nu > 0$ служитъ главнымъ коэффиціентомъ вполнѣ имъ опредѣляемаго коваріанта порядка $\nu$ данной системы. Но это послѣднее разсужденіе нельзя считать строгимъ доказательствомъ нашей формулы, потому что въ данномъ случаѣ для полуинваріанта съ $\chi \neq 0$ не доказана независимость системы $(L)$, что было доказано для инваріантовъ въ § 24. Наоборотъ, изъ нашего вывода формулы (50) слѣдуетъ, что система $(L)$ независима и при $\chi > 0$.

Вслѣдствіе взаимности двухъ индексовъ функціи $\phi_{\mu,n}(v)$ въ выраженіи $N_r$, т. е. вслѣдствіе свойства $\phi_{\mu,n}(v) = \phi_{n,\mu}(v)$, одна бинарная форма и система бинарныхъ формъ обладаютъ свойствомъ взаимности и по отношенію къ ихъ коваріантамъ.

Въ данномъ случаѣ обобщеніе теоремы Hermite'a, предложенное Hurwitz'омъ для совмѣстныхъ инваріантовъ системы бинарныхъ формъ, надо видоизмѣнить такимъ образомъ:

*Если взять двѣ системы бинарныхъ формъ:*

I) $$f_1, f_2, \ldots f_r; \quad F_1, F_2, \ldots F_k,$$

*соотвѣтственно порядковъ*

$$n_1, n_2, \ldots n_r; \quad l_1, l_2, \ldots l_k,$$

*и*

II) $$g_1, g_2, \ldots g_r; \quad F_1, F_2, \ldots F_k,$$

*соотвѣтственно порядковъ*

$$m_1, m_2, \ldots m_r; \quad l_1, l_2, \ldots l_k,$$

*то число линейно-независимыхъ совмѣстныхъ коваріантовъ порядка* $\nu$, *имѣющихъ степени* $m_1, m_2, \ldots m_r; h_1, h_2, \ldots h_k$, *для первой системы равно числу линейно-независимыхъ совмѣстныхъ коваріантовъ того же порядка* $\nu$, *имѣющихъ степени* $n_1, n_2, \ldots n_r; h_1, h_2, \ldots h_k$, *для второй системы.*

## § 34. Опредѣленіе числа линейно-независимыхъ коваріантовъ одной бинарной формы.

$1^0$ Пусть мы имѣемъ одну форму третьяго порядка. Для нея число линейно-независимыхъ коваріантовъ степени $\mu$ и порядка $\nu$ равно коэффиціенту при $x^\mu v^{p_0}$, гдѣ $p_0 = \frac{1}{2}(3\mu - \nu)$, разности двухъ разложеній по восходящимъ степенямъ

$$\frac{1}{(1-v)(1-vx)(1-v^2x)(1-v^3x)} - \frac{v}{(1-x)(1-vx)(1-v^2x)(1-v^3x)};$$

первое разложеніе имѣетъ видъ

$$1 + x(1+v+v^2+v^3) + x^2(1+v+2v^2+2v^3+2v^4+2v^5+v^6) + \ldots$$

Такъ какъ мы имѣемъ $\nu = 3\mu - 2p_0 \geqq 0$, то $p_0 \leqq \frac{3}{2}\mu$; слѣдовательно для насъ имѣютъ значеніе только первые $1 + \frac{3}{2}\mu$

или, лучше, $1 + E\frac{3}{2}\mu$ членовъ въ каждой скобкѣ. Помѣстимъ коэффиціенты этихъ членовъ въ слѣдующую таблицу:

| | | | | | | | | | | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 1 | 0 |
| | | | | | | | | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 4 |
| | | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 5 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 7 | 8 | 8 | 6 |
| | | | | | | | | | | 7 |

Подобно этому коэффиціенты втораго разложенія располагаются въ таблицѣ, которую получимъ изъ этой же, если отбросимъ послѣдній квадратъ въ каждой строкѣ. Наконецъ, коэффиціенты разности этихъ двухъ разложеній мы получимъ, если изъ каждаго коэффиціента перваго разложенія вычтемъ стоящій въ таблицѣ слѣва коэффиціентъ втораго разложенія; такимъ образомъ получится слѣдующая таблица:

| | | | | | | | | | | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 1 | 0 |
| | | | | | | | | 1 | 0 | 1 |
| | | | | | | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| | | | | | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| | | | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| | | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| | | | | | | | | | | 7 |

Изъ этой таблицы мы видимъ, что для бинарной формы третьяго порядка существуютъ слѣдующіе линейно-независимые коваріанты:

1-й степени — одинъ; его порядокъ $\nu = 3.1 - 2.0 = 3$; это сама бинарная форма $f_3$.

2-й степени — два; ихъ порядки: $\nu = 3.2 - 2.0 = 6$, $\nu = 3.2 - 2.2 = 2$; это квадратъ формы, т. е. $f_3^2$, и $\Gamma_{2,2}$.

3-й степени — три; ихъ порядки: $\nu = 3.3 - 2.0 = 9$, $\nu = 3.3 - 2.2 = 5$, $\nu = 3.3 - 2.3 = 3$; это суть коваріанты: $f_3^3$, $f_3 . \Gamma_{2,2}$, $\Gamma_{3,3}$.

4-й степени — пять; ихъ порядки: $\nu = 3.4 - 2.0 = 12$, $\nu = 3.4 - 2.2 = 8$, $\nu = 3.4 - 2.3 = 6$, $\nu = 3.4 - 2.4 = 4$, $\nu = 3.4 - 2.6 = 0$; это суть коваріанты: $f_3^4$, $f_3^2 . \Gamma_{2,2}$, $f_3 . \Gamma_{3,3}$, $\Gamma_{2,2}^2$, $\Gamma_{4,0}$.

5-й степени — шесть; ихъ порядки: $\nu = 3.5 - 2.0 = 15$, $\nu = 3.5 - 2.2 = 11$, $\nu = 3.5 - 2.3 = 9$, $\nu = 3.5 - 2.4 = 7$, $\nu = 3.5 - 2.5 = 5$, $\nu = 3.5 - 2.6 = 3$; это суть коваріанты: $f_3^5$, $f_3^3 . \Gamma_{2,2}$, $f_3^2 . \Gamma_{3,3}$, $f_3 . \Gamma_{2,2}^2$, $\Gamma_{2,2} . \Gamma_{3,3}$, $\Gamma_{4,0} . f_3$.

6-й степени — восемь; ихъ порядки: $\nu = 3.6 - 2.0 = 18$, $\nu = 3.6 - 2.2 = 14$, $\nu = 3.6 - 2.3 = 12$, $\nu = 3.6 - 2.4 = 10$, $\nu = 3.6 - 2.5 = 8$, $\nu = 3.6 - 2.6 = 6$ (два коваріанта), $\nu = 3.6 - 2.8 = 2$; это суть коваріанты: $f_3^6$, $f_3^4 . \Gamma_{2,2}$, $f_3^3 . \Gamma_{3,3}$, $f_3^2 . \Gamma_{2,2}^2$, $f_3 . \Gamma_{2,2} . \Gamma_{3,3}$, два изъ трехъ — $\Gamma_{2,2}^3$, $\Gamma_{3,3}^2$, $\Gamma_{4,0} . f_3^2$, и $\Gamma_{4,0} . \Gamma_{2,2}$.

Такъ какъ только два изъ трехъ коваріантовъ 6-й степени и 6-го порядка суть линейно-независимые, то между $\Gamma_{2,2}^3$, $\Gamma_{3,3}^2$, $\Gamma_{4,0} . f_3^2$ должно существовать линейное соотношеніе; и дѣйствительно, Cayley нашелъ, что эти три коваріанта связаны соотношеніемъ

$$\Gamma_{3,3}^2 - \Gamma_{4,0} . f_3^2 + 4\,\Gamma_{2,2}^3 = 0, \tag{51}$$

которое мы выведемъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

2° Возьмемъ, далѣе, бинарную форму четвертаго порядка; для нея число линейно-независимыхъ коваріантовъ степени $\mu$

и порядка $\nu$ равно коэффиціенту при $x^\mu v^{p_0}$, гдѣ $p_0 = \frac{1}{2}(4\mu - \nu)$, въ разложеніи по восходящимъ степенямъ разности выраженій

$$\frac{1}{(1-x)(1-vx)(1-v^2x)(1-v^3x)(1-v^4x)} - \qquad (52)$$

$$\frac{v}{(1-v)(1-vx)(1-v^2x)(1-v^3x)(1-v^4x)};$$

первое изъ этихъ выраженій разлагается такъ:

$$1 + x(1 + v + v^2 + v^3 + v^4) + x^2(1 + v + 2v^2 + 2v^3 + 3v^4 + 3v^5 + 2v^6 + 2v^7 + v^8) + \ldots$$

для насъ имѣютъ значенія только тѣ члены въ скобкахъ, для которыхъ $4\mu - 2p_0 \geqq 0$ или $p_0 \leqq 2\mu$, т. е. первые $1 + 2\mu$ членовъ; коэффиціенты этихъ членовъ можно размѣстить въ слѣдующей таблицѣ:

| | | | | | | | | | | | | | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | 1 | 0 |
| | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | | | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| | | | | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 3 |
| | | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 5 | 7 | 7 | 8 | 4 |
| | | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 11 | 12 | 5 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 | 10 | 13 | 14 | 16 | 16 | 18 | 6 |
| | | | | | | | | | | | | | 7 |

Коэффиціенты въ разложеніи втораго выраженія будутъ, конечно, представлены этою же таблицей, если въ ней отбросить послѣдніе квадраты. Коэффиціенты въ разложеніи разности двухъ данныхъ выраженій получатся, если мы въ нашей таблицѣ изъ каждаго числа вычтемъ число, стоящее слѣва въ той же строкѣ; такимъ образомъ мы получимъ таблицу:

| | | | | | | | | | | | | | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | 1 | 0 |
| | | | | | | | | | | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | | | | | | | | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| | | | | | | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 |
| | | | | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 | 4 |
| | | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 5 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 0 | 2 | 6 |
| | | | | | | | | | | | | | 7 |

Изъ этой таблицы мы видимъ, что для бинарной формы четвертой степени существуютъ слѣдующіе линейно-независимые коваріанты:

1-й степени — одинъ; его порядокъ $\nu=4.1-2.0=4$, это сама форма $f_4$.

2-й степени — три; ихъ порядки: $\nu=4.2-2.0=8$, $\nu=4.2-2.2=4$, $\nu=4.2-2.4=0$; это суть — $f_4^2$, $\Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{2,0}$.

3-й степени — пять; ихъ порядки: $\nu=4.3-2.0=12$, $\nu=4.3-2.2=8$, $\nu=4.3-2.3=6$, $\nu=4.3-2.4=4$, $\nu=4.3-2.6=0$; это суть — $f_4^3$, $f_4 . \Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{3,6}$, $\Gamma_{2,0} . f_4$, $\Gamma_{3,0}$.

4-й степени — восемь; ихъ порядки: $\nu=4.4-2.0=16$, $\nu=4.4-2.2=12$, $\nu=4.4-2.3=10$, $\nu=4.4-2.4=8$, (два коваріанта), $\nu=4.4-2.6=4$ (два коваріанта), $\nu=4.4-2.8=0$; это суть — $f_4^4$, $f_4^2 . \Gamma_{2,4}$, $f_4 . \Gamma_{3,6}$, $\Gamma_{2,0} . f_4^2$ и $\Gamma_{2,4}^2$, $\Gamma_{3,0} . f_4$ и $\Gamma_{2,0} . \Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{2,0}^2$.

5-й степени — двѣнадцать; ихъ порядки: $\nu=4.5-2.0=20$, $\nu=4.5-2.2=16$, $\nu=4.5-2.3=16$, $\nu=4.5-2.4=12$ (два коваріанта), $\nu=4.5-2.5=10$, $\nu=4.5-2.6=8$

(два коваріанта), $\nu = 4.5 - 2.7 = 6$, $\nu = 4.5 - 2.8 = 4$ (два коваріанта), $\nu = 4.5 - 2.10 = 0$; это суть — $f_4^5$, $f_4^3 . \Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{2,0} . f_4^3$ и $f_4 . \Gamma_{2,4}^2$, $\Gamma_{2,4} . \Gamma_{3,6}$, $\Gamma_{3,0} . f_4^2$ и $\Gamma_{2,0} . f_4 . \Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{2,0} . \Gamma_{3,6}$, $\Gamma_{2,0}^2 . f_4$ и $\Gamma_{3,0} . \Gamma_{2,4}$.

6-й степени — восемнадцать; ихъ порядки: $\nu = 4.6 - 2.0 = 24$, $\nu = 4.6 - 2.2 = 20$, $\nu = 4.6 - 2.3 = 18$ $\nu = 4.6 - 2.4 = 16$ (два коваріанта), $\nu = 4.6 - 2.5 = 14$, $\nu = 4.6 - 2.6 = 12$ (три коваріанта), $\nu = 4.6 - 2.7 = 10$, $\nu = 4.6 - 2.8 = 8$ (три коваріанта), $\nu = 4.6 - 2.9 = 6$, $\nu = 4.6 - 2.10 = 4$ (два коваріанта), $\nu = 4.6 - 2.12 = 0$ (два инваріанта); это суть коваріанты — $f_4^6$, $f_4^4 . \Gamma_{2,4}$, $f_4^3 . \Gamma_{3,6}$, $\Gamma_{2,0} . f_4^4$ и $f_4^2 . \Gamma_{2,4}^2$, $f_4 . \Gamma_{2,4} . \Gamma_{3,6}$, три изъ четырехъ — $\Gamma_{3,0} . f_4^3$, $\Gamma_{2,0} . f_4^2 . \Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{2,4}^3$ и $\Gamma_{3,6}^2$, $\Gamma_{2,0} . f_4 . \Gamma_{3,6}$, $\Gamma_{2,0}^2 . f_4^2$, $\Gamma_{2,0} . \Gamma_{2,4}^2$, $\Gamma_{3,0} . f_4 . \Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{3,0} . \Gamma_{3,6}$, $\Gamma_{2,0} . \Gamma_{3,0} . f_4$ и $\Gamma_{2,0}^2 . \Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{2,0}^3$ и $\Gamma_{3,0}^2$.

Такъ какъ изъ четырехъ коваріантовъ 6-й степени и 12-го порядка только три линейно-независимыхъ, то между ними должно существовать линейное соотношеніе; Cayley нашелъ это соотношеніе:

$$\Gamma_{3,6}^2 - \Gamma_{3,0} . f_4^3 - \Gamma_{2,0} . f_4^2 . \Gamma_{2,4} + 4\,\Gamma_{2,4}^3 = 0; \tag{53}$$

мы выведемъ его въ слѣдующемъ параграфѣ.

Подобно предыдущему можно составить таблицу для чиселъ линейно-независимыхъ коваріантовъ бинарной формы пятаго порядка:

| | | | | | | | | | | | | | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | 1 | 0 |
| | | | | | | | | | | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | | | | | | | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| | | | | | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| | | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 4 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 5 |
| | | | | | | | | | | | | | 6 |

Такимъ образомъ Cayley составилъ таблицы для коваріантовъ бинарныхъ формъ:

для формъ 3-го, 4-го и 5-го порядковъ до 18-й степени,
для формы шестаго порядка до 15-й степени,
„ „ седьмаго „ „ 12-й „
„ „ восьмаго „ „ 10-й „

## § 35. Построеніе основныхъ коваріантовъ бинарныхъ формъ при помощи теоремы Cayley.

Изъ теоремы Cayley, доказанной въ § 31, слѣдуетъ, что для построенія коваріанта степени $\mu$ и порядка $\nu$ для бинарной формы $n$-го порядка достаточно найти его главный коэффиціентъ $C_0$, т. е. найти однородный полиномъ степени $\mu$ относительно коэффиціентовъ данной бинарной формы, изобарный съ вѣсомъ $\frac{1}{2}(n\mu - \nu)$ и удовлетворяющій уравненію $X_2(C_0) = 0$. Воспользуемся этимъ способомъ для построенія основныхъ коваріантовъ для бинарныхъ формъ 3-го и 4-го порядковъ.

1⁰ Бинарная форма третьяго порядка

$$f_3 = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$$

имѣетъ три основныхъ коваріанта (§ 32), черезъ которые алгебраически выражаются всѣ остальные; такими коваріантами можно считать (§ 34, 1⁰) — $f_3$, $\Gamma_{2,2}$, $\Gamma_{4,0}$, изъ нихъ послѣдній есть извѣстный намъ изъ § 10 (*Прим.* 3) дискриминантъ

$$\Gamma_{4,0} = a_3^2 a_0^2 - 6\, a_3 a_2 a_1 a_0 + 4\, a_3 a_1^3 + 4\, a_2^3 a_0 - 3\, a_2^2 a_1^2;$$

для того, чтобы вычислить коваріантъ $\Gamma_{2,2}$, мы опредѣлимъ его главный коэффиціентъ $C_0$; это будетъ однородный полиномъ 2-й степени относительно $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, изобарный съ вѣсомъ $p_0 = \frac{1}{2}(3\,.\,2 - 2) = 2$ и удовлетворяющій уравненію $\frac{\partial C_0}{\partial a_1} a_0 + 2\frac{\partial C_0}{\partial a_2} a_1 + 3\frac{\partial C_0}{\partial a_3} a_2 = 0$; что опредѣляетъ $C_0 = a_0 a_2 - a_1^2$. Остальные коэффиціенты на основаніи теоремы Cayley будутъ:

$$2C_1 = X_1(C_0) = \quad a_0 a_3 - a_1 a_2,$$
$$2.1C_2 = X_1^2(C_0) = 2(a_1 a_3 - a_2^2);$$

слѣдовательно, искомый коваріантъ будетъ (54)

$$\Gamma_{2,2} = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2;$$

этотъ коваріантъ называется Гессевскимъ: онъ равенъ детерминанту

$$\frac{1}{36}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f_3}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

свойства котораго впервые были изучены Hesse.

Подобно предыдущему можно найти и коваріантъ $\Gamma_{3,3}$, который выражается ирраціонально черезъ основные, но квадратъ котораго выражается черезъ нихъ раціонально (§ 34, 1°). Для этого коваріанта главный коэффиціентъ $C_0$ долженъ быть однороднымъ полиномомъ степени 3 и изобарнымъ съ вѣсомъ $p_0 = \frac{1}{2}(3.3 - 3) = 3$, т. е. вида

$$a_0^2 a_3 + c_1 a_0 a_1 a_2 + c_2 a_1^3;$$

кромѣ того онъ долженъ удовлетворять уравненію $X_2(C_0) = 0$, что даетъ для $c_1$, $c_2$ значенія $-3$, $+2$; слѣдовательно, мы имѣемъ $C_0 = a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3$. Остальные коэффиціенты будутъ:

$$3C_1 = \quad X_1(C_0) = \quad 3(a_0 a_1 a_3 - 2a_0 a_2^2 \quad + a_1^2 a_2),$$
$$3C_2 = \frac{1}{2} X_1^2(C_0) = -3(a_0 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 \quad + a_1 a_2^2),$$
$$C_3 = \frac{1}{2.3} X_1^3(C_0) = - \quad (a_0 a_3^2 \quad + 3a_1 a_2 a_3 - 2a_2^3);$$

такимъ образомъ мы получаемъ (55)

$$\Gamma_{3,3} = (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) x_1^3 + 3(a_0 a_1 a_3 - 2a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2) x_1^2 x_2 -$$
$$- 3(a_0 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2) x_1 x_2^2 - (a_0 a_3^2 + 3a_1 a_2 a_3 - 2a_2^3) x_2^3.$$

Для того, чтобы найти линейное соотношеніе Cayley (§ 34, 1°) для $\Gamma_{3,3}^2$, $\Gamma_{4,0}.f_3^2$ и $\Gamma_{2,2}^3$, воспользуемся способомъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ: пусть искомое соотношеніе будетъ

$$\Gamma_{3,3}^2 + c\Gamma_{4,0}.f_3^2 + c'\Gamma_{2,2}^3 = 0;$$

для опредѣленія коэффиціентовъ $c$ и $c'$ разсмотримъ форму $f_3 = x_1^3 + x_2^3$, для которой $\Gamma_{4,0} = 1$, $\Gamma_{2,2} = x_1 x_2$ и $\Gamma_{3,3} = x_1^3 - x_2^3$; подставивъ эти частныя значенія въ наше соотношеніе мы получимъ тождественное равенство

$$(1+c)x_1^6 - (2 - 2c - c')x_1^3 x_2^3 + (1+c)x_2^6 \equiv 0,$$

которое даетъ $c = -1$ и $c' = 4$; слѣдовательно, искомое линейное соотношеніе имѣетъ видъ:

$$\Gamma_{3,3}^2 - \Gamma_{4,0}.f_3^2 + 4\Gamma_{2,2}^3 = 0.$$

Коваріанты $\Gamma_{4,0}$, $f_3$, $\Gamma_{2,2}$, $\Gamma_{3,3}$ называются *неприводимыми* коваріантами бинарной формы 3-го порядка: они не могутъ быть выражены цѣлыми и раціональными функціями черезъ коваріанты низшихъ степеней и порядковъ. Дальше мы покажемъ, что другихъ неприводимыхъ коваріантовъ для формы $f_3$ не существуетъ.

2° Бинарная форма четвертаго порядка

$$f_4 = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4$$

имѣетъ четыре основныхъ коваріанта (§ 32), черезъ которые выражаются всѣ остальные; такими коваріантами можно считать (§ 34, 2°) — $f_4$, $\Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{3,0}$, изъ нихъ послѣдніе два суть извѣстные намъ изъ § 10 (*Прим.* 6) инваріанты $S$ и $T$:

$$\Gamma_{2,0} = S = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$
$$\Gamma_{3,0} = T = a_0 a_3^2 - 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_2 a_4 + a_2^3 + a_1^2 a_4.$$

Для того, чтобы вычислить коваріантъ $\Gamma_{2,4}$, найдемъ его главный коэффиціентъ $C_0$; это будетъ опять $C_0 = a_0 a_2 - a_1^2$.

Остальные коэфиціенты опредѣлятся такъ:

$$4\,C_1 = X_1\,(C_0) = 2\,(a_0 a_3 - a_1 a_2),$$

$$6\,C_2 = \frac{1}{2}\,X_1^2\,(C_0) = (a_0 a_4 + 2\,a_1 a_3 - 3\,a_2^2),$$

$$4\,C_3 = \frac{1}{6}\,X_1^3\,(C_0) = 2\,(a_1 a_4 - a_2 a_3),$$

$$C_4 = \frac{1}{24}\,X_1^4\,(C_0) = (a_2 a_4 - a_3^2);$$

слѣдовательно, искомый коваріантъ имѣетъ видъ:

$$\Gamma_{2,4} = (a_0 a_2 - a_1^2)\,x_1^4 + 2\,(a_0 a_3 - a_1 a_2)\,x_1^3 x_2 + (a_0 a_4 + 2\,a_1 a_3 - \\ - 3\,a_2^2)\,x_1^2 x_2^2 + 2\,(a_1 a_4 - a_2 a_3)\,x_1 x_2^3 + (a_2 a_4 - a_3^2)\,x_2^4; \qquad (56)$$

это есть Гессевскій коваріантъ: онъ равенъ детерминанту

$$\frac{1}{144}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f_4}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f_4}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f_4}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f_4}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}.$$

Подобно предыдущему можно найти и коваріантъ $\Gamma_{3,6}$, который выражается черезъ основные коваріанты ирраціонально, но квадратъ котораго выражается черезъ нихъ раціонально (§ 34, 2°). Для этого коваріанта главный коэффиціентъ долженъ имѣть видъ

$$C_0 = a_0^2 a_3 + c_1 a_0 a_1 a_2 + c_2 a_1^3,$$

при чемъ условіе $X_2(C_0) = 0$ даетъ $c_1 = -3$, $c_2 = +2$; то есть

$$C_0 = a_0^2 a_3 - 3\,a_0 a_1 a_2 + 2\,a_1^3;$$

Остальные коэффиціенты получатся такимъ образомъ:

$$6\,C_1 = X_1\,(C_0) = a_0^2 a_4 + 2\,a_0 a_1 a_3 - 9\,a_0 a_2^2 + \\ + 6\,a_1^2 a_2,$$

$$15\,C_2 = \frac{1}{2}\,X_1^2\,(C_0) = 5\,(a_0 a_1 a_0 - 3\,a_0 a_2 a_3 + 2\,a_1^2 a_3),$$

$$20\, C_3 = \frac{1}{6}\, X_1^3 (C_0) = -10 (a_0\, a_3^2 \quad - \quad a_1^2 a_4),$$

$$15\, C_4 = \frac{1}{24}\, X_1^4 (C_0) = -5 (a_0\, a_3\, a_4 - 3\, a_1\, a_2 a_4 + 2\, a_1\, a_3^2),$$

$$6\, C_5 = \frac{1}{120}\, X_1^5 (C_0) = \qquad a_0\, a_4^2 \quad - 2\, a_1\, a_3 a_4 + 9\, a_2^2 a_4 - \\ - 6\, a_2\, a_3^2,$$

$$C_6 = \frac{1}{720}\, X_1^6 (C_0) = - \quad (a_1 a_4^2 \quad - 3\, a_2\, a_3 a_4 + 2\, a_3^3).$$

Слѣдовательно, искомый коваріантъ имѣетъ видъ:

$$\Gamma_{3,6} = (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) x_1^6 + (a_0^2 a_4 + 2a_0 a_1 a_3 - 9a_0 a_2^2 + \\ + 6a_1^2 a_2)\, x_1^5\, x_2 + 5\, (a_0\, a_1\, a_4 - 3a_0\, a_2\, a_3 + 2a_1^2\, a_3)\, x_1^4\, x_2^2 - \\ - 10\, (a_0\, a_3^2 - a_1^2\, a_4)\, x_1^3\, x_2^3 - 5\, (a_0\, a_3\, a_4 - 3a_1\, a_2\, a_4 + \\ + 2a_1 a_3^2) x_1^2 x_2^4 - (a_0 a_4^2 + 2a_1 a_3 a_4 - 9a_2^2\, a_4 + 6a_2\, a_3^2)\, x_1\, x_2^5 - \\ - (a_1\, a_4^2 - 3a_2\, a_3\, a_4 + 2a_3^3)\, x_2^6. \qquad (57)$$

Для того, чтобы найти линейное соотношеніе Cayley (§ 34, 2°) для коваріантовъ шестой степени и двѣнадцатаго порядка, воспользуемся неопредѣленными коэффиціентами:

$$\Gamma_{3,6}^2 + c\Gamma_{3,0} \,.\, f_4^3 + c'\Gamma_{2,0} \,.\, f_4^2 \,.\, \Gamma_{2,4} + c''\Gamma_{2,4}^3 = 0;$$

для формы $f_4 = x_1^4 + x_2^4$ мы имѣемъ $\Gamma_{2,0} = 1$, $\Gamma_{3,0} = 0$, $\Gamma_{2,4} = x_1^2 x_2^2$, $\Gamma_{3,6} = x_1^5 x_2 - x_1 x_2^5$; подставивъ эти частныя выраженія коваріантовъ въ линейное соотношеніе, мы получимъ тождественное равенство:

$$(c' + 1)\, x_1^{10}\, x_2^2 + (2c' + c'' - 2)\, x_1^6\, x_2^6 + (c' + 1)\, x_1^2\, x_2^{10} \equiv 0,$$

откуда опредѣлимъ $c' = -1$, $c'' = 4$; для того, чтобы опредѣлить $c$, разсмотримъ форму $f_4 = 6x_1^2 x_2^2$, для которой $\Gamma_{2,0} = 3$, $\Gamma_{3,0} = 1$, $\Gamma_{2,4} = -3x_1^2 x_2^2$, $\Gamma_{3,6} \equiv 0$; подставивъ эти частныя значенія коваріантовъ въ линейное соотношеніе, мы получимъ тождественное равенство:

$$(c \,.\, 1 \,.\, 6^3 - c' \,.\, 3 \,.\, 6^2 \,.\, 3 - c'' \,.\, 3^3)\, x_1^6\, x_2^6 \equiv 0,$$

откуда получимъ $c \cdot 2^3 = c' \cdot 2^2 \cdot 3 + c''$, или $c = -1$, если $c' = -1$, $c'' = 4$; слѣдовательно, искомое соотношеніе имѣетъ видъ:

$$\Gamma_{3,6}^2 - \Gamma_{3,0} \cdot f_4^3 - \Gamma_{2,0} \cdot f_4^2 \cdot \Gamma_{2,4} + 4\,\Gamma_{2,4}^3 = 0.$$

Коваріанты $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{3,0}$, $f_4$, $\Gamma_{2,4}$, $\Gamma_{3,6}$ суть *неприводимые* коваріанты бинарной формы 4-го порядка. Дальше мы покажемъ, что другихъ неприводимыхъ коваріантовъ для формы $f_4$ не существуетъ.

## § 36. Опредѣленіе числа неприводимыхъ коваріантовъ бинарныхъ формъ.

*Неприводимыми коваріантами* данной бинарной формы мы будемъ называть, какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, такіе коваріанты, которые не могутъ быть выражены цѣлыми раціональными функціями черезъ коваріанты низшихъ степеней и порядковъ.

Построивъ по способу Cayley (§ 34) таблицы для чиселъ линейно-независимыхъ коваріантовъ, не трудно вычислить таковыя же для чиселъ неприводимыхъ коваріантовъ данныхъ степеней и порядковъ.

Напишемъ таблицы Cayley, полученныя нами въ § 34 для чиселъ линейно-независимыхъ коваріантовъ бинарныхъ формъ третьяго и четвертаго порядковъ, въ слѣдующемъ видѣ:

1° для формы 3-го порядка —

порядки

| степени | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 1 | | | | |
| 2 | | | 1 | | | | 1 | |
| 3 | | | | 1 | | 1 | | |
| 4 | 1 | | | | 1 | 1 | | |
| 5 | | | | 1 | | 1 | | 1 |
| 6 | | | 1 | | | | 2 | |

$2^0$ для формы 4-го порядка —

порядки

| степени | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | 1 | | | | | | | | |
| 2 | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | | |
| 3 | 1 | | | | 1 | | 1 | | 1 | | | | 1 |
| 4 | 1 | | | | 2 | | | | 2 | | 1 | | 1 |
| 5 | 1 | | | | 2 | | 1 | | 2 | | 1 | | 2 |
| 6 | 2 | | | | 2 | | 1 | | 3 | | 1 | | 3 |

Для построенія соотвѣтственныхъ таблицъ неприводимыхъ коваріантовъ воспользуется правиломъ *просѣиванія (tamisage)* Sylvester'a[1]): пусть будетъ извѣстно число неприводимыхъ коваріантовъ степеней низшихъ $\mu$ и порядковъ не выше $\nu$; предположимъ, что число всѣхъ коваріантовъ типа $(\mu, \nu)$, т. е. степени $\mu$ и порядка $\nu$, получаемыхъ черезъ умноженіе этихъ неприводимыхъ коваріантовъ, будетъ $\beta$; пусть число всѣхъ линейно-независимыхъ коваріантовъ типа $(\mu, \nu)$, даваемое таблицей, подобной таблицамъ $1^0$ и $2^0$, будетъ $\alpha$; тогда, если $\alpha > \beta$, то число неприводимыхъ коваріантовъ типа $(\mu, \nu)$ равно $\alpha - \beta$; если же $\alpha \leqq \beta$, то совсѣмъ не существуетъ неприводимыхъ коваріантовъ типа $(\mu, \nu)$, и при томъ, если $\alpha < \beta$, то между указанными выше неприводимыми коваріантами существуетъ $\beta - \alpha$ соотношеній.

Примѣняя это правило къ случаю бинарной формы 3-го порядка, мы получимъ слѣдующіе результаты, которые можно отмѣтить послѣдовательно на таблицѣ I:

1) Franklin. *On the Calculation of the Generating Functions* etc. American Journal, Vol. 3, P. 131.

Первый столбецъ таблицы 1° показываетъ, что существуетъ одинъ, конечно неприводимый, коваріантъ типа (4, 0). Третій столбецъ показываетъ, что существуетъ одинъ коваріантъ типа (2, 2), и такъ какъ нѣтъ составныхъ коваріантовъ типа (2, 2), то онъ, конечно, неприводимъ; кромѣ того третій столбецъ даетъ еще одинъ коваріантъ типа (6, 2), но такъ какъ предыдущіе неприводимые коваріанты даютъ одинъ коваріантъ (4, 0) . (2, 2)

I)

| | порядки | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| степени | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | | | | 1 | | | |
| 2 | | | 1 | | | | |
| 3 | | | | 1 | | | |
| 4 | 1 | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | $\bar{1}$ |

типа (6, 2), то число неприводимыхъ коваріантовъ типа (6, 2) равно нулю. Четвертый столбецъ даетъ одинъ неприводимый коваріантъ типа (1, 3), одинъ неприводимый коваріантъ типа (3, 3) и ниодного неприводимаго коваріанта типа (5, 3), ибо (5, 3) = (4, 0) . (1, 3).

Кромѣ этихъ неприводимыхъ коваріантовъ другихъ мы не получимъ. При разсмотрѣніи коваріантовъ типа (6, 6) мы получимъ для $\beta$ значеніе 3 и для $\alpha$ значеніе 2, т. е. между четырьмя неприводимыми коваріантами (4, 0), (2, 2), (1, 3) и (3, 3) существуетъ $\beta - \alpha = 1$ *соотношеніе типа* (6, 6); это обстоятельство мы можемъ отмѣтить на таблицѣ отрицательнымъ значеніемъ $\alpha - \beta = -1$.

Точно также можно построить таблицу чиселъ неприводимыхъ коваріантовъ для бинарной формы 4-го порядка:

II)

| | порядки | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| степени | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | | | | | 1 | | | | | | | | |
| 2 | 1 | | | | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 1 | | | | | | 1 | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | $\bar{1}$ |

Этотъ способъ опредѣленія числа неприводимыхъ коваріантовъ данной бинарной формы, а также и ихъ типовъ, требуетъ, конечно, весьма длинныхъ вычисленій; кромѣ того, онъ имѣетъ еще и тотъ недостатокъ, что при помощи его нельзя обнаружить *конечности* числа неприводимыхъ коваріантовъ.

Cayley[1]) предложилъ другой способъ, основанный на преобразованіи женератрисной функціи

$$\frac{1-v}{(1-x)(1-vx)\ldots(1-v^n x)};$$

къ изложенію этого способа мы теперь и перейдемъ.

## § 37. Опредѣленіе числа и типовъ неприводимыхъ коваріантовъ данной бинарной формы при помощи женератрисной функціи по способу Cayley.

Мы знаемъ изъ § 33, что число линейно-независимыхъ коваріантовъ степени $\mu$ и порядка $\nu$ для бинарной формы

1) Cayley. *„Second Memoir on Quantics"*, Philos. Transact. Vol. 141 и видоизмѣненіе въ *„Ninth Memoir on Quantis"*, Philos. Transact. Vol. 161; послѣдній способъ изложенъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

$n$-го порядка равно коэффиціенту при $a^\mu x^{\frac{1}{2}(n\mu-\nu)}$ въ разложеніи по восходящимъ степенямъ $a$ женератрисной функціи:

$$\frac{1-x}{(1-a)(1-ax)\ldots(1-ax^n)}. \tag{51}$$

Если же въ этой функціи мы замѣнимъ $a$ черезъ $ax^n$ и $x$ черезъ $\frac{1}{x^2}$, то получится выраженіе

$$\frac{1-x^{-2}}{(1-ax^n)(1-ax^{n-2})\ldots(1-ax^{-n+2})(1-ax^{-n})}, \tag{52}$$

въ которомъ коэффиціентъ при $a^\mu x^\nu$ будетъ тотъ же самый, какой былъ при $a^\mu x^{\frac{1}{2}(n\mu-\nu)}$ въ первоначальной, и слѣдовательно будетъ равенъ числу линейно-независимыхъ коваріантовъ степени $\mu$ и порядка $\nu$ для бинарной формы порядка $n$.

1° Пусть мы имѣемъ бинарную форму 2-го порядка. На основаніи предыдущаго мы скажемъ, что число линейно-независимыхъ коваріантовъ степени $\mu$ и порядка $\nu$ этой формы равно коэффиціенту при $a^\mu x^\nu$ въ разложеніи функціи

$$\frac{1-x^{-2}}{(1-ax^2)(1-a)(1-ax^{-2})};$$

это разложеніе имѣетъ видъ

$$\left.\begin{array}{ll}1 & -x^{-2}\\ +a(x^2+1+x^{-2}) & \\ +a^2(x^4+x^2+2+x^{-2}+x^{-4}) & \\ +a^3(x^6+x^4+\ldots+x^{-6}) & \\ +\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right| \begin{array}{l}1\\ +a(x^2+1+x^{-2})\\ +a^2(x^4+x^2+2+x^{-2}+x^{-4})\\ +a^3(x^6+x^4+\ldots+x^{-6})\\ +\ldots\ldots\ldots;\end{array}$$

по сокращеніи мы получимъ:

$$\left.\begin{array}{ll}1 & -x^{-2}\\ +ax^2 & \\ +a^2(x^4+1) & \\ +a^3(x^6+x^2) & \\ +\ldots\ldots & \end{array}\right| \begin{array}{l}1\\ +ax^{-2}\\ +a^2(x^{-4}+1)\\ +a^3(x^{-6}+x^{-2})\\ +\ldots\ldots;\end{array}$$

это же выраженіе равно

$$A(x)-\frac{1}{x^2}A\left(\frac{1}{x}\right),$$

если черезъ $A(x)$ обозначить выраженіе

$$\frac{1}{(1-ax^2)(1-a^2)}.$$

Такъ какъ второй членъ полученнаго выраженія имѣетъ въ своемъ разложеніи только отрицательныя степени $x$, то искомое число линейно-независимыхъ коваріантовъ типа $(a^\mu x^\nu)$ — т. е. степени $\mu$ и порядка $\nu$ равно коэффиціенту при $a^\mu x^\nu$ въ разложеніи выраженія

$$\frac{1}{(1-ax^2)(1-a^2)}=1+ax^2+a^2+ax^2.a^2+a^2x^4.a^2+\ldots.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что у бинарной формы 2-го порядка существуютъ два неприводимыхъ коваріанта типовъ: $(ax^2)$ и $(a^2x^0)$, черезъ степени и произведенія которыхъ выражаются всѣ остальные коваріанты.

$2^0$ Для бинарной формы 3-го порядка число линейно-независимыхъ коваріантовъ типа $(a^\mu x^\nu)$ равно коэффиціенту при $a^\mu x^\nu$ въ разложеніи функціи

$$\frac{1-x^{-2}}{(1-ax^3)(1-ax)(1-ax^{-1})(1-ax^{-3})};$$

подобно предыдущему эту функцію можно представить въ видѣ

$$A(x)-\frac{1}{x^2}A\left(\frac{1}{x}\right),$$

гдѣ

$$A(x)=\frac{1-a^6x^6}{(1-ax^3)(1-a^2x^2)(1-a^3x^3)(1-a^4)}.$$

Такъ какъ второй членъ $-\frac{1}{x^2}A\left(\frac{1}{x}\right)$ имѣетъ въ своемъ разложеніи только отрицательныя степени $x$, то число линейно-независимыхъ коваріантовъ типа $(a^\mu x^\nu)$ равно коэффиціенту при $a^\mu x^\nu$ въ разложеніи $A(x)$; это же разложеніе содержитъ члены $a\,x^3$, $a^2 x^2$, $a^3 x^3$, $a^4$, а остальные члены его суть степени и произведенія этихъ четырехъ членовъ — съ числовыми коэффиціентами, при чемъ членъ $a^6 x^6$ имѣетъ коэффиціентъ 2, хотя изъ четырехъ первыхъ членовъ можно составить 3 подобныхъ произведенія: $(a\,x^3)^2 . a^4$, $(a^2 x^2)^3$, $(a^3 x^3)^2$; это послѣднее обстоятельство происходитъ отъ присутствія члена — $a^6 x^6$ въ числителѣ. Все это указываетъ на то, что бинарная форма 3-го порядка имѣетъ четыре неприводимыхъ коваріанта типовъ: $(ax^3)$, $(a^2 x^2)$, $(a^3 x^3)$, $(a^4)$, между которыми существуетъ соотношеніе 6-й степени относительно коэффиціентовъ $a$ бинарной формы и 6-го порядка относительно перемѣнныхъ $x_1$, $x_2$.

$3^0$ Для бинарной формы 4-го порядка число линейно-независимыхъ коваріантовъ типа $(a^\mu x^\nu)$ равно коэффиціенту при $a^\mu x^\nu$ въ разложеніи функціи

$$\frac{1-x^{-2}}{(1-a\,x^4)(1-a\,x^2)(1-a)(1-a\,x^{-2})(1-a\,x^{-4})},$$

которую можно представить въ видѣ

$$A(x)-\frac{1}{x^2}A\left(\frac{1}{x}\right),$$

гдѣ

$$A(x)=\frac{1-a^6 x^{12}}{(1-a\,x^4)(1-a^2 x^4)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^3 x^6)}.$$

Изъ этой формы женератрисной функцій, подобно предыдущему, мы заключаемъ, что бинарная форма 4-го порядка имѣетъ пять неприводимыхъ коваріантовъ — типовъ: $(a\,x^4)$, $(a^2 x^4)$, $(a^2)$, $(a^3)$, $(a^3 x^6)$, между которыми существуетъ одно соотношеніе 6-й степени относительно коэффиціентовъ $a$ бинарной формы и 12-го порядка относительно перемѣнныхъ $x_1$, $x_2$.

Въ примѣненіи этого способа къ опредѣленію числа и типовъ неприводимыхъ коваріантовъ бинарной формы 5-го порядка Cayley встрѣтилъ уже значительныя затрудненія. Sylvester нѣсколько видоизмѣнилъ способъ Cayley, что дало ему возможность опредѣлить число и типы неприводимыхъ коваріантовъ для бинарныхъ формъ первыхъ десяти порядковъ, а затѣмъ, и для бинарной формы 12-го порядка; къ изложенію этого видоизмѣненія способа Cayley мы теперь и перейдемъ.

## § 38. Видоизмѣненіе способа Cayley, предложенное Sylvester'омъ [1]).

Функцію

$$\mathscr{F}^{(0)}(x) = \frac{1-x^{-2}}{(1-ax^n)(1-ax^{n-2})\ldots(1-ax^{-n+2})(1-ax^{-n})}.$$

Sylvester называетъ *первоначальной формой (crude form) женератрисной функціи.*

Если разложить эту функцію на элементарныя дроби, то для множителя $1-ax^\lambda$ въ знаменателѣ мы будемъ имѣть $\lambda$ дробей вида

$$\frac{A}{1-\rho a^{\frac{1}{\lambda}} x},$$

гдѣ $\rho$ есть одинъ изъ корней уравненія $\rho^\lambda - 1 = 0$; сумма этихъ $\lambda$ дробей можетъ быть представлена въ видѣ

$$\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots A_{\lambda-1} x^{\lambda-1}}{1-ax^\lambda}.$$

Точно также сумма элементарныхъ дробей, соотвѣтствующихъ фактору $1-ax^{-\lambda}$ въ знаменателѣ можетъ быть представлена въ видѣ

$$\frac{1}{x^\lambda}\cdot\frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{\lambda-1} x^{\lambda-1}}{1-ax^{-\lambda}};$$

это выраженіе, разложенное по возрастающимъ степенямъ $a$, будетъ содержать только члены съ отрицательными степенями $x$ и для насъ не имѣетъ значенія при опредѣленіи числа линейно-независимыхъ коваріантовъ данной бинарной формы,

---

1) Franklin. American Journal, Vol. 3.

поэтому мы можемъ опустить всѣ элементарныя дроби, соотвѣтствующія факторамъ $1 - ax^{-\lambda}$ въ знаменателѣ.

Оставшаяся часть функціи $\varphi(x)$ имѣетъ видъ

$$\varphi^{(1)}(x) = \Sigma \frac{A}{1 - \rho\, a^{\frac{1}{\lambda}} x}, \tag{53}$$

при чемъ коэффиціенты $A$ имѣютъ выраженіе

$$\frac{1}{\lambda} \varphi_\lambda (\alpha^{-1}),$$

гдѣ $\varphi_\lambda$ обозначаетъ $\varphi(x) \,.\, (1 - ax^\lambda)$ и $\alpha = \rho\, a^{\frac{1}{\lambda}}$, и получаются обычнымъ способомъ.

Развернутое выраженіе $A$ имѣетъ видъ:

$$A = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha^{-n+\lambda})(1 - \alpha^{-n+2+\lambda}) \ldots (1 - \alpha^{-2})(1 - \alpha^2) \ldots (1 - \alpha^{n+\lambda})}$$

$$= (-1)^{\frac{n-\lambda}{2}} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\alpha^{\frac{n-\lambda}{2} \cdot \frac{n-\lambda+2}{2}} (1 - \alpha^2)}{(1 - \alpha^{n-\lambda})(1 - \alpha^{n-2-\lambda}) \ldots (1 - \alpha^2)(1 - \alpha^2) \ldots (1 - \alpha^{n+\lambda})}$$

$$= (-1)^{\frac{n-\lambda}{2}} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\alpha^{\frac{n-\lambda}{2} \cdot \frac{n-\lambda+2}{2}} (1 - \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^2 (1 - \alpha^4)^2 (1 - \alpha^6)^2 \ldots (1 - \alpha^{n-\lambda})^2 (1 - \alpha^{n-\lambda+2}) \ldots (1 - \alpha^{n+\lambda})};$$

каждый изъ факторовъ $1 - \alpha^m$ въ знаменателѣ можно представить такъ:

$$\frac{1 - \alpha^{k\lambda}}{1 - \alpha^m} = 1 + \alpha^m + \alpha^{2m} + \ldots,$$

если $k\lambda$ есть кратное $m$, поэтому

$$A = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots}{(1 - a^k)(1 - a^{k'}) \ldots},$$

такъ какъ $\alpha^{k\lambda} = (\rho^\lambda a)^k = a^k$.

Слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\mathfrak{f}^{(1)}(x)=\sum_{\lambda=1,2}^{\lambda=n}\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\Sigma(c_0+c_1 a+c_2 a^2+\ldots)(1+ax+a^2x^2+\ldots+a^{\lambda-1}x^{\lambda-1})}{(1-ax^{\lambda})(1-a^k)(1-a^{k'})\ldots}, \tag{54}$$

гдѣ $\Sigma$ въ числителѣ распространяется на всѣ корни двучленнаго уравненія $\rho^{\lambda}-1=0$; или

$$\mathfrak{f}^{(1)}(x)=\sum_{\lambda=1,2}^{\lambda=n}\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{L_0+L_1x+L_2x^2+\ldots+L_{\lambda-1}x^{\lambda-1}}{(1-ax^{\lambda})(1-a^k)(1-x^{k'})\ldots}, \tag{54'}$$

или, наконецъ,

$$\mathfrak{f}^{(1)}(x)=\frac{C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots}{(1-ax^n)(1-ax^{n-2})\ldots(1-a^k)(1-a^{k'})\ldots}, \tag{55}$$

гдѣ числитель имѣетъ, конечно, низшую степень относительно $x$, чѣмъ знаменатель; это выраженіе Sylvester назвалъ *приведенною формою (reduced form) женератрисной функціи.* Но при помощи этой приведенной формы женератрисной функціи нельзя непосредственно получить число и типы неприводимыхъ коваріантовъ данной формы, — ее необходимо еще преобразовать слѣдующимъ образомъ.

Каждый изъ факторовъ $1-ax^{\lambda}$ и $1-a^k$ въ знаменателѣ надо привести умноженіемъ числителя и знаменателя $\mathfrak{f}^{(1)}(x)$ на надлежащаго множителя къ такому виду, чтобы онъ соотвѣтствовалъ заранѣе извѣстному неприводимому коваріанту: факторъ $1-ax^n$ уже соотвѣтствуетъ неприводимому коваріанту типа $(ax^n)$, т. е. самой бинарной формѣ; факторы $1-ax^{n-2}$, $1-ax^{n-4}$, ... по умноженіи числителя и знаменателя на $1+ax^{n-2}$, $1+ax^{n-4}$, ... будутъ соотвѣтствовать коваріантамъ типа $[a^2x^{2(n-2)}]$, $[a^2x^{2(n-4)}]$, ..., — конечно неприводимымъ; факторъ $1-a^k$, если бинарная форма не имѣетъ неприводимаго инваріанта степени $k$, надо представить въ видѣ

$$\frac{1-a^{mk}}{1-a^k}=1+a^m+a^{2m}+\ldots,$$

гдѣ $mk$ должно равняться степени какого-нибудь неприводимаго инваріанта.

Преобразованная такимъ образомъ функція $\mathcal{F}^{(1)}(x)$ названа Sylvester'омъ *представляющей формой (representative form) женератрисной функціи;* она имѣетъ видъ

$$\mathcal{F}(x) = \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots}{(1-ax^n)(1-a^2x^{2(n-2)})(1-a^2x^{2(n-4)})\ldots(1-a^k)(1-a^{k'})}, \tag{56}$$

гдѣ каждый факторъ $(1-a^r x^s)$ соотвѣтствуетъ неприводимому коваріанту типа $(a^r x^s)$ данной формы.

Sylvester'у и его ученику Franklin'у удалось найти представляющія формы женератрисныхъ функцій для бинарныхъ формъ первыхъ десяти порядковъ, а также и для бинарной формы 12-го порядка.

Когда женератрисная функція приведена къ представляющей формѣ, то не трудно опредѣлить всѣ неприводимые коваріанты данной бинарной формы: во первыхъ, факторы въ знаменателѣ дадутъ рядъ неприводимыхъ коваріантовъ, и, во-вторыхъ, положительные члены въ числителѣ, если къ нимъ примѣнить способъ просѣиванія (tamisage). Для примѣра мы разсмотримъ въ слѣдующемъ параграфѣ примѣненіе этого способа къ опредѣленію числа и типовъ неприводимыхъ коваріантовъ бинарной формы 5-го порядка.

## § 39. Неприводимые коваріанты бинарныхъ формъ 5-го и 6-го порядковъ.

1° Приведенная форма женератрисной функціи для бинарной формы 5-го порядка имѣетъ видъ

$$\frac{\left\{\begin{array}{c}1+a(-x-x^3)+a^2(x^2+x^4+x^6)-a^3x^7+a^4x^4+a^5(x+x^3-\\ -x^5)+a^6(-1-x^4)+a^7(2x+x^3+x^5)+a^8(-x^2-x^4-2x^6)+\\ +a^9(x^3+x^7)+a^{10}(x^2-x^4-x^6)-a^{11}x^3+a^{12}+a^{13}(-x-x^3-\\ -x^5)+a^{14}(x^4+x^6)-a^{15}x^7\end{array}\right\}}{(1-a^4)(1-a^6)(1-a^8)(1-ax)(1-ax^3)(1-ax^5)}; \tag{57}$$

представляющая форма имѣетъ знаменатель

$$D = (1-a^4)(1-a^8)(1-a^{12})(1-a^2x^2)(1-a^2x^6)(1-ax^5)$$

и числитель

$$N = 1 + a^3(x^3 + x^5 + x^9) + a^4(x^4 + x^6) + a^5(x + x^3 + x^7 - x^{11}) + \\ + a^6(x^2 + x^4) + a^7(x + x^5 - x^9) + a^8(x^2 + x^4) + a^9(x^3 + x^5 - x^7) + \\ + a^{10}(x^2 + x^4 - x^{10}) + a^{11}(x + x^3 - x^9) + a^{12}(x^2 - x^8 - x^{10}) + \\ + a^{13}(x - x^7 - x^9) + a^{14}(x^4 - x^6 - x^8) + a^{15}(-x^7 - x^9) + \\ + a^{16}(x^2 - x^6 - x^{10}) + a^{17}(-x^7 - x^9) + a^{18}(1 - x^4 - x^8 - x^{10}) + \\ + a^{19}(-x^5 - x^7) + a^{20}(-x^2 - x^6 - x^8) - a^{23}x^{11}.$$

Знаменатель даетъ неприводимые коваріанты типовъ:

$$(4,0),\ (8,0),\ (12,0),\ (1,5),\ (2,2),\ (2,6);$$

положительные члены числителя даютъ типы:

$$\begin{matrix} (3,3), & (3,5), & (3,9), & (4,4), & (4,6), \\ (5,1), & (5,3), & (5,7), & (6,2), & (6,4), \\ (7,1), & (7,5), & (8,2), & (8,4), & (9,3), \\ (9,5), & (10,2), & (10,4), & (11,1), & (11,3), \\ (12,2), & (13,1), & (14,4), & (16,2), & (18,0), \end{matrix}$$

но изъ нихъ способомъ просѣиванія придется выдѣлить

$$\begin{matrix} (8,4) = (3,3)\ (5,1), & (9,5) = (4,4).(5,1), \\ (10,2) = (5,1)^2, & (10,4) = (3,3).(7,1), \\ (11,3) = (5,1).(6,2), & (12,2) = (5,1).(7,1), \\ (14,4) = (5,1).(9,3), & (16,2) = (5,1).(11,1), \end{matrix}$$

и тогда остальные 23 будутъ неприводимыми коваріантами разсматриваемой формы; ихъ можно представить на нижеприведенной таблицѣ (III).

$2^0$ Для бинарной формы 6-го порядка приведенная форма женератрисной функціи имѣетъ видъ

$$\frac{\left\{\begin{matrix} 1 + a(-x^2 - x^4) + a^2(-1 + x^4 + x^6 + x^8) + a^3(-1 + 2x^2 + \\ + x^4 - x^{10}) + a^4(x^2 - x^6 - x^8) + a^5(-x^6 - x^8 + x^{10}) + a^6(1 - \\ - x^2 - x^8 + x^{10}) + a^7(1 - x^2 - x^4) + a^8(-x^2 - x^4 + x^8) + \\ + a^9(-1 + x^6 + 2x^8 - x^{10}) + a^{10}(x^2 + x^4 + x^6 + x^{10}) + a^{11}(-x^6 - \\ - x^8) + a^{12}x^{10} \end{matrix}\right\}}{(1 - a^2)^2(1 - a^3)(1 - a^4)(1 - a^5)(1 - ax^2)(1 - ax^4)(1 - ax^6)}; \tag{58}$$

представляющая форма имѣетъ знаменатель

$$D=(1-a^2)(1-a^4)(1-a^6)(1-a^{10})(1-a^2x^4)(1-a^2x^8)(1-ax^6)$$

и числитель

$$\begin{aligned}N=1&+a^3(x^2+x^6+x^8+x^{12})+a^4(x^4+x^6+x^{10})+a^5(x^2+x^4+\\&+x^8-x^{16})+a^6(x^4+2x^6)+a^7(x^2+x^4+x^8-x^{12})+\\&+a^8(x^2+x^4+x^6-x^{14})+a^9(x^4+x^6-x^{10}-x^{12})+a^{10}(x^2+\\&+x^4-x^{12}-x^{14})+a^{11}(x^4+x^6-x^{10}-x^{12})+a^{12}(x^2-x^{10}-\\&-x^{12}-x^{14})+a^{13}(x^4-x^8-x^{12}-x^{14})+a^{14}(-2x^{10}-x^{12})+\\&+a^{15}(1-x^8-x^{12}-x^{14})+a^{16}(-x^6-x^{10}-x^{12})+a^{17}(-x^4-\\&-x^8-x^{10}-x^{14})-a^{20}x^{16}.\end{aligned}$$

III)

| степени \ порядки | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | 1 | | | |
| 2 | | | 1 | | | | 1 | | |
| 3 | | | | 1 | | 1 | | | 1 |
| 4 | 1 | | | | 1 | | 1 | | |
| 5 | | 1 | | 1 | | | | 1 | |
| 6 | | | 1 | | 1 | | | | |
| 7 | | 1 | | | | 1 | | | |
| 8 | 1 | | 1 | | | | | | |
| 9 | | | | 1 | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | |
| 11 | | 1 | | | | | | | |
| 12 | 1 | | | | | | | | |
| 13 | | 1 | | | | | | | |
| 18 | 1 | | | | | | | | |

Факторы знаменателя соотвѣтствуютъ неприводимымъ коваріантамъ типовъ:

$$(2,0),\ (4,0),\ (6,0),\ (10,0),\ (2,4),\ (2,8),\ (1,6);$$

положительные члены числителя даютъ типы:

$$
\begin{array}{ccccc}
(3,2), & (3,6), & (3,8), & (3,12), & (4,4),\\
(4,6), & (4,10), & (5,2), & (5,4), & (5,8),\\
(6,4), & 2(6,6), & (7,2), & (7,4), & (7,8),\\
(8,2), & (8,4), & (8,6), & (9,4), & (9,6),\\
(10,2), & (10,4), & (11,4), & (11,6), & (12,2),
\end{array}
$$

$$(13,4),\quad (15,0),$$

IV)

| | | порядки | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| степени | 1 | | | | 1 | | | |
| | 2 | 1 | | 1 | | 1 | | |
| | 3 | | 1 | | 1 | 1 | | 1 |
| | 4 | 1 | | 1 | 1 | | 1 | |
| | 5 | | 1 | 1 | | 1 | | |
| | 6 | 1 | | | 2 | | | |
| | 7 | | 1 | 1 | | | | |
| | 8 | | 1 | | | | | |
| | 9 | | | 1 | | | | |
| | 10 | 1 | 1 | | | | | |
| | 12 | | 1 | | | | | |
| | 15 | 1 | | | | | | |

но изъ нихъ способомъ просѣиванія придется выдѣлить типы:

$$
\begin{array}{ll}
(6,4)=(3,2)^2, & (7,8)=(3,2).(4,6),\\
(8,4)=(3,2).(5,2), & (8,6)=(3,2).(5,4),\\
(9,6)=(4,4).(5,2), & (10,4)=(3,2).(7,2),\\
(11,4)=(3,2).(8,2), & (11,6)=(5,2).(6,4),
\end{array}
$$

$$(13,4)=(3,2).(10,2),$$

и тогда остальные 26 будутъ неприводимыми коваріантами.

Примѣняя способъ просѣиванія къ положительнымъ членамъ числителя въ этомъ примѣрѣ, а также и въ предыдущемъ, необходимо обращать вниманіе только на неприводимые коваріанты, соотвѣтствующіе членамъ въ числителѣ, и совершенно игнорировать коваріантами, соотвѣтствующими факторамъ знаменателя[1]).

Неприводимые коваріанты бинарной формы 6-го порядка представлены на таблицѣ (IV').

Подобно предыдущему Sylvester и Franklin вычислили неприводимые коваріанты, для бинарныхъ формъ до 10-го порядка включительно[2]).

Числа неприводимыхъ коваріантовъ для формъ первыхъ десяти порядковъ, полученныя Sylvester'омъ, таковы: 1, 2, 4, 5, 23, 26, 124, 69, 415 и 475.

Наконецъ, Sylvester при помощи своего метода вычислилъ неприводимые коваріанты бинарной формы 12-го порядка[3]); число ихъ равно 948.

## § 40. Цѣлыя раціональныя соотношенія (syzygies) между неприводимыми коваріантами. Система неприводимыхъ сидзигій. Способъ Hammond'a.

Изъ § 32 мы знаемъ, что число *основныхъ* въ смыслѣ Aronhold'а коваріантовъ бинарной формы $n$-го порядка равно $n$; числа же *неприводимыхъ* (въ смыслѣ Cayley-Sylvester'a) коваріантовъ для бинарныхъ формъ порядковъ: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 12-го, какъ намъ извѣстно изъ предыдущаго параграфа, больше $n$; слѣдовательно, между неприводимыми коваріантами этихъ бинарныхъ формъ должны существовать

1) Это довольно очевидно; подробное разсужденіе изложено въ вышеупомянутомъ мемуарѣ Franklin'a (American Journal, Vol. 3, P. 136—137).

2) Sylvester. American Journal, Vol. 2, 1879.

Hammond. Mathematische Annalen, Bd. 36, 1890.

3) Sylvester. American Journal, Vol. 4. P. 41—48. 1881.

алгебраическія соотношенія. Для бинарныхъ формъ 3-го и 4-го порядковъ мы нашли эти алгебраическія (и при томъ цѣлыя) соотношенія (§§ 34 и 35), и другихъ соотношеній между неприводимыми коваріантами этихъ формъ, конечно, быть не можетъ. Будемъ называть подобныя цѣлыя раціональныя соотношенія *сидзигіями.* Въ § 34 мы опредѣлили типы сидзигій для бинарныхъ формъ 3-го и 4-го порядковъ при помощи метода просѣиванія: если для какого-нибудь типа $(\mu, \nu)$ существуетъ $\alpha$ линейно-независимыхъ коваріантовъ, а изъ неприводимыхъ коваріантовъ низшихъ типовъ можно построить $\beta > \alpha$ коваріантовъ типа $(\mu, \nu)$, то, конечно, между послѣдними должно существовать $\beta - \alpha$ линейныхъ соотношеній; такимъ образомъ мы обнаруживаемъ $\beta - \alpha$ сидзигій типа $(\mu, \nu)$ между коваріантами низшихъ типовъ, или точнѣе $\beta - \alpha$ линейно-независимыхъ сидзигій. Между этими $\beta - \alpha$ линейно-независимыми сидзигіями типа $(\mu, \nu)$ нѣкоторыя могутъ быть получены различными комбинаціями сидзигій низшихъ типовъ; если отбросить таковыя, то останутся *неприводимыя* сидзигіи типа $(\mu, \nu)$.

Для опредѣленія числа и типовъ неприводимыхъ сидзигій можно воспользоваться представляющими формами женератрисныхъ функцій.

Мы уже знаемъ, что отрицательные члены въ числителѣ представляющей формы женератрисной функціи соотвѣтствуютъ неприводимымъ сидзигіямъ; такимъ образомъ, для бинарной формы 5-го порядка мы получаемъ слѣдующіе типы сидзигій:

$$
\begin{array}{cccccc}
(5,11), & (7,9), & (9,7), & (10,10), & (11,9), & (12,8), \\
(12,10), & (13,7), & (13,9), & (14,6), & (14,8), & (15,7), \\
(15,9), & (16,6), & (16,10), & (17,7), & (17,9), & (18,4), \\
(18,8), & (18,10), & (19,5), & (19,7), & (20,2), & (20,6), \\
 & & (20,8), & (23,11); & &
\end{array}
$$

остальные типы можно опредѣлить способомъ просѣиванія: напримѣръ, въ числителѣ женератрисной функціи коэффиціенты членовъ $a^6 x^6$, $a^6 x^8$, $a^6 x^{10}$, $a^6 x^{12}$, $a^6 x^{14}$, $a^6 x^{18}$ равны нулямъ, слѣдовательно коваріантовъ этихъ типовъ не должно быть; но изъ коваріантовъ (3,3), (3,5), (3,9) перемноженіемъ ихъ попарно можно получить по одному коваріанту указанныхъ типовъ; отсюда заключаемъ, что существуютъ сидзигіи типовъ: (6,6), (6,8), (6,10), (6,12), (6,14), (6,18). Точно также можно обнаружить существованіе сидзигій типовъ: (7,7), (7,9) — двѣ, (7,11), (7,13), (7,15) и т. д.

Такимъ образомъ Sylvester совмѣстно съ Franklin'омъ опредѣлили числа и типы неприводимыхъ сидзигій для бинарныхъ формъ 5-го и 6-го порядковъ и составили нижеприведенныя двѣ таблицы, въ которыхъ помѣщены неприводимые коваріанты и неприводимыя сидзигіи бинарныхъ формъ 5-го и 6-го порядковъ [1]). Англійскій ученый Hammond [2]) предложилъ другой способъ опредѣленія неприводимыхъ сидзигій, основанный на построеніи женератрисной функціи для *сидзигантовъ* (такъ называются выраженія, стоящія въ первыхъ частяхъ сидзигій). Сущность этого способа состоитъ въ слѣдующемъ.

Пусть существуютъ для бинарной формы $n$-го порядка $\alpha$ линейно-независимыхъ коваріантовъ типа $(\mu, \nu)$ и $\beta$ сидзигій этого же типа, и пусть между ними $\gamma$ неприводимыхъ коваріантовъ и $\delta$ составныхъ коваріантовъ; тогда

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta.$$

Предположимъ, что мы знаемъ всѣ неприводимые коваріанты данной бинарной формы, пусть ихъ типы $(r, s)$, $(r', s')$, ....

Обозначимъ произведеніе

$$(1-a^r x^s)(1-a^{r'} x^{s'}) \ldots \text{ черезъ } \Pi(1-a^r x^s);$$

тогда мы будемъ имѣть разложеніе

$$\frac{1}{\Pi(1-a^r x^s)}=\sum(\gamma+\delta)\, a^\mu x^\nu;$$

---

1) American Journal, Vol. 4 P. 48–61.

2) American Journal. Vol. 7, P. 331. 1885.

## V'. Для бинарной формы 5-го порядка.

| степени \ порядки | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | 1 | | | | 1 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | 1 | | 1 | | | | 1 | | | | | | | | |
| 4 | 1 | | | | 1 | | 1 | | | | | | | | | | | |
| 5 | | 1 | | 1 | | | | 1 | | | | $\bar{1}$ | | | | | | |
| 6 | | | 1 | | 1 | | $\bar{1}$ | | $\bar{1}$ | | $\bar{1}$ | | $\bar{1}$ | | $\bar{1}$ | | | $\bar{1}$ |
| 7 | | 1 | | | | 1 | | $\bar{1}$ | | $\bar{3}$ | | $\bar{1}$ | | $\bar{1}$ | | $\bar{1}$ | | |
| 8 | 1 | | 1 | | | | $\bar{2}$ | | $\bar{2}$ | | $\bar{3}$ | | $\bar{3}$ | | | | $\bar{1}$ | |
| 9 | | | | 1 | | $\bar{1}$ | | $\bar{5}$ | | $\bar{2}$ | | $\bar{2}$ | | $\bar{2}$ | | | | |
| 10 | | | | | $\bar{1}$ | | $\bar{3}$ | | $\bar{4}$ | | $\bar{4}$ | | | | $\bar{2}$ | | | |
| 11 | | 1 | | | | $\bar{4}$ | | $\bar{3}$ | | $\bar{3}$ | | $\bar{3}$ | | | | | | |
| 12 | 1 | | | | $\bar{2}$ | | $\bar{4}$ | | $\bar{5}$ | | | | $\bar{2}$ | | | | | |
| 13 | | 1 | | $\bar{2}$ | | $\bar{3}$ | | $\bar{3}$ | | $\bar{3}$ | | | | | | | | |
| 14 | | | $\bar{1}$ | | $\bar{2}$ | | $\bar{6}$ | | | | $\bar{3}$ | | | | | | | |
| 15 | | | | $\bar{2}$ | | $\bar{3}$ | | $\bar{4}$ | | $\bar{1}$ | | | | | | | | |
| 16 | | | | | $\bar{5}$ | | $\bar{2}$ | | $\bar{2}$ | | $\bar{1}$ | | | | | | | |
| 17 | | | | $\bar{2}$ | | $\bar{3}$ | | | | | | | | | | | | |
| 18 | 1 | | $\bar{2}$ | | $\bar{2}$ | | $\bar{2}$ | | $\bar{1}$ | | | | | | | | | |
| 19 | | | | $\bar{2}$ | | $\bar{3}$ | | | | | | | | | | | | |
| 20 | | | $\bar{2}$ | | $\bar{1}$ | | $\bar{2}$ | | | | | | | | | | | |
| 21 | | | | $\bar{3}$ | | $\bar{1}$ | | | | $\bar{1}$ | | | | | | | | |
| 22 | | | $\bar{1}$ | | $\bar{2}$ | | $\bar{1}$ | | | | | | | | | | | |
| 23 | | $\bar{1}$ | | $\bar{1}$ | | | | $\bar{1}$ | | | | | | | | | | |
| 24 | | | $\bar{2}$ | | $\bar{1}$ | | | | | | | | | | | | | |
| 25 | | $\bar{1}$ | | | | $\bar{1}$ | | | | | | | | | | | | |
| 26 | | | $\bar{2}$ | | | | | | | | | | | | | | | |
| 27 | | | | $\bar{1}$ | | | | | | | | | | | | | | |
| 28 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 29 | | $\bar{1}$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 30 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 31 | | $\bar{1}$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 38 | $\bar{1}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |

## VI. Для бинарной формы 6-го порядка.

порядки

степени

| | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | | 1 | | 1 | | | | | | | | |
| 3 | | 1 | | 1 | 1 | | 1 | | | | | | |
| 4 | 1 | | 1 | 1 | | 1 | | | | | | | |
| 5 | | 1 | 1 | | 1 | | | | $\bar{1}$ | | | | |
| 6 | 1 | | | 2 | $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | | $\bar{1}$ |
| 7 | | 1 | 1 | $\bar{1}$ | | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | | $\bar{1}$ | |
| 8 | | 1 | | | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | | $\bar{2}$ | | |
| 9 | | | 1 | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ | $\bar{5}$ | $\bar{4}$ | | $\bar{3}$ | | | |
| 10 | 1 | 1 | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{6}$ | $\bar{5}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | | | | |
| 11 | | | | | $\bar{6}$ | $\bar{5}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | | | | | |
| 12 | | 1 | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{7}$ | $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | | | | |
| 13 | | | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | | | | | |
| 14 | | | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{6}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | | | | | | |
| 15 | 1 | | $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | | | | | |
| 16 | | | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | | | | | | |
| 17 | | | $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | | $\bar{1}$ | | | | | |
| 18 | | $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | | $\bar{1}$ | | | | | | |
| 19 | | | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | | $\bar{1}$ | | | | | | | |
| 20 | | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | | $\bar{1}$ | | | | $\bar{1}$ | | | | |
| 21 | | | | $\bar{3}$ | | | | | | | | | |
| 22 | | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | | | | | | | | | | |
| 23 | | $\bar{1}$ | | | | | | | | | | | |
| 24 | | | $\bar{2}$ | | | | | | | | | | |
| 25 | | $\bar{1}$ | | | | | | | | | | | |
| 26 | | | | | | | | | | | | | |
| 27 | | $\bar{1}$ | | | | | | | | | | | |
| 30 | $\bar{1}$ | | | | | | | | | | | | |

или замѣнивъ $\gamma+\delta$ черезъ $\alpha+\beta$, мы получимъ

$$\frac{1}{\Pi(1-a^r x^s)}=\sum(\alpha+\beta)\,a^\mu x^\nu;$$

но мы знаемъ, что $\sum \alpha\, a^\mu x^\nu = \phi(x)$, гдѣ $\phi(x)$ есть женератрисная функція для коваріантовъ разсматриваемой бинарной формы; слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\sum \beta\, a^\mu x^\nu = \frac{1}{\Pi(1-a^r x^s)}-\phi(x),$$

т. е. коэффиціентъ при $a^\mu x^\nu$ въ разложеніи функціи

$$\frac{1}{\Pi(1-a^r x^s)}-\phi(x)=\frac{1-\phi(x)\,.\,\Pi(1-a^r x^s)}{\Pi(1-a^r x^s)} \tag{59}$$

равенъ числу линейно-независимыхъ сидзигантовъ типа $(\mu, \nu)$; послѣдняя функція и есть *женератрисная функція для сидзигантовъ* данной бинарной формы.

1° Для бинарной формы 3-го порядка

$$\Pi(1-a^r x^s)=(1-a x^3)(1-a^2 x^2)(1-a^3 x^3)(1-a^4),$$

а представляющая форма женератрисной функціи —

$$\phi(x)=\frac{1+a^3x^3}{(1-a^3)(1-a^2x^2)(1-ax^3)};$$

слѣдовательно, женератрисная функція для сидзигантовъ будетъ

$$\frac{a^6x^6}{(1-ax^3)(1-a^2x^2)(1-a^3x^3)(1-a^4)}; \tag{60}$$

она показываетъ, что существуетъ единственная неприводимая сидзигія типа (6, 6) между четырьмя неприводимыми коваріантами бинарной формы 3-го порядка.

2° Точно также можно получить женератрисную функцію для сидзигантовъ въ случаѣ бинарной формы 4-го порядка; это будетъ

$$\frac{a^6 x^{12}}{(1-ax^4)(1-a^2)(1-a^2x^4)(1-a^3)(1-a^3x^6)};$$

она показываетъ, что существуетъ единственная неприводимая сидзигія между пятью неприводимыми коваріантами бинарной формы 4-го порядка.

$3^0$ Для бинарной формы 5-го порядка мы имѣемъ (§ 39):

$$\Pi(1-a^r x^s)=(1-ax^5)(1-a^2x^2)(1-a^2x^6)\ldots(1-a^{18}),$$

а представляющая форма женератрисной функціи имѣетъ видъ

$$\phi(x)=\frac{N}{D},$$

гдѣ $N$ и $D$ имѣютъ выраженія, данныя въ § 39, $1^0$.

Слѣдовательно, женератрисная функція для сидзигантовъ будетъ имѣть видъ:

$$\frac{\begin{aligned}1-N.\{&(1-a^3x^3)(1-a^3x^5)(1-a^3x^9)(1-a^4x^4)(1-a^4x^6)\\&(1-a^5x)(1-a^5x^3)(1-a^5x^7)(1-a^6x^2)(1-a^6x^4)\\&(1-a^7x)(1-a^7x^5)(1-a^8x^2)(1-a^9x^3)(1-a^{11}x)\\&(1-a^{13}x)(1-a^{18})\}\end{aligned}}{(1-ax^5)(1-a^2x^2)(1-a^2x^6)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1-a^{18})}; \tag{61}$$

ея числитель имѣетъ степень 140 относительно $a$ и 68 относительно $x$.

Если вмѣсто $N$ подставить его выраженіе изъ § 39, $1^0$, то числитель женератрисной функціи для сидзигантовъ будетъ имѣть видъ

$$\begin{aligned}a^5x^{11}&+a^6(x^6+x^8+x^{10}+x^{14}+x^{18})\\&+a^7(x^7+3x^9+x^{11}+x^{13}+x^{15})\\&+a^8(2x^6+2x^8+3x^{10}+3x^{12}-x^{14}+x^{16}-x^{16}-x^{20})\\&+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\end{aligned}$$

въ этомъ выраженіи нельзя сдѣлать приведенія членовъ $+x^{16}$ и $-x^{16}$, иначе не было бы члена, соотвѣтствующаго сидзигіи типа (8,16), которая непремѣнно существуетъ, что намъ извѣстно изъ опредѣленія сидзигій по способу Sylvester'а.

$4^0$ Для бинарной формы 6-го порядка мы имѣемъ (§ 39, $2^0$)

$$\Pi(1-a^r x^s) = (1-ax^6)(1-a^2)(1-a^2x^4)(1-a^2x^8)\ldots(1-a^{15}),$$

а представляющая форма женератрисной функціи имѣетъ видъ

$$\phi(x) = \frac{N}{D},$$

гдѣ $N$ и $D$ имѣютъ выраженія, приведенныя въ § 39, $2^0$.

Слѣдовательно, женератрисная функція для сидзигантовъ имѣетъ видъ

$$\frac{\begin{aligned}1 - N.\{&(1-a^3x^2)(1-a^3x^6)(1-a^3x^8)(1-a^3x^{12})(1-a^4x^4)\\ &(1-a^4x^6)(1-a^4x^{10})(1-a^5x^2)(1-a^5x^4)(1-a^5x^8)\\ &(1-a^6x^6)^2(1-a^7x^2)(1-a^7x^4)(1-a^8x^2)(1-a^9x^4)\\ &(1-a^{10}x^2)(1-a^{12}x^2)(1-a^{15})\}\end{aligned}}{(1-ax^6)(1-a^2)(1-a^2x^4)(1-a^2x^8)\ldots\ldots\ldots(1-a^{15})}. \tag{62}$$

Если въ числитель этого выраженія подставить значеніе $N$, данное въ § 39, $2^0$, и произвести умноженіе, то онъ приметъ видъ:

$$\begin{aligned}&a^5x^{16} + a^6(x^8 + x^{10} + x^{12} + 2x^{14} + x^{16} + x^{18} + x^{20} + x^{24})\\ &+ a^7(x^6 + x^{10} + 4x^{12} + x^{14} + 2x^{16} + 2x^{18} + x^{22})\\ &+ a^8(2x^8 + 4x^{10} + 2x^{12} + 4x^{14} + 3x^{16} - x^{18} + 2x^{20} - x^{22} - x^{24} - x^{28})\\ &+ a^9(x^6 + 4x^8 + 2x^{10} + 5x^{12} + 4x^{14} - x^{14} - 2x^{16} + 3x^{18} - x^{18} - 4x^{20}\\ &\qquad - 4x^{22} - x^{24} - 4x^{26} - x^{28} - x^{30} - x^{32})\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}$$

въ этомъ выраженіи нельзя сдѣлать приведенія двухъ паръ членовъ $+4a^9x^{14}$, $-a^9x^{14}$ и $+3a^9x^{18}$, $-a^9x^{18}$, иначе не было бы надлежащихъ членовъ, соотвѣтствующихъ 4 сидзигіямъ типа (9,14) и 3 сидзигіямъ типа (9,18), существованіе которыхъ намъ извѣстно изъ опредѣленія сидзигій по способу Sylvester'a.

Такимъ образомъ методъ Hammond'a можетъ служить для провѣрки результатовъ, полученныхъ при опредѣленіи сидзигій по способу Sylvester'a, и на оборотъ.

## § 41. Сидзигіи втораго, третьяго и высшихъ родовъ.

Въ случаѣ бинарной формы 3-го порядка, мы знаемъ, существуетъ одна сидзигія между четырьмя неприводимыми коваріантами этой формы, и она есть единственная, потому что бинарная форма 3-го порядка имѣетъ три основныхъ (въ смыслѣ Aronhold'a) коваріантовъ, между которыми не должно существовать никакого алгебраическаго соотношенія.

Тоже самое имѣетъ мѣсто въ случаѣ бинарной формы 4-го порядка: между ея пятью неприводимыми коваріантами существуетъ единственная сидзигія, и другихъ сидзигій быть не можетъ, потому что бинарная форма 4-го порядка имѣетъ четыре основныхъ коваріанта, между которыми не должно быть никакого соотношенія.

Въ случаѣ бинарной формы 5-го порядка между ея 23 неприводимыми коваріантами существуютъ 167 сидзигій, и такъ какъ эта форма должна имѣть пять основныхъ коваріантовъ, алгебраически-независимыхъ между собою, то изъ всѣхъ этихъ сидзигій только 18 суть независимыя; слѣдовательно, между 167 сидзигантами должно существовать 149 алгебраическихъ соотношеній. Цѣлыя раціональныя соотношенія между сидзигантами называются *сидзигіями втораго рода.* Если окажется, что число неприводимыхъ сидзигіи втораго рода больше 149, то онѣ не суть независимыя, и, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ между сидзигантами втораго рода должны существовать *сидзигіи третьяго рода* и т. д.

Если мы имѣемъ бинарную форму $n$-го порядка и обозначимъ число ея неприводимыхъ коваріантовъ черезъ $\sigma$, число неприводимыхъ сидзигій перваго рода между этими коваріантами — черезъ $\sigma_1$, число неприводимыхъ сидзигій втораго рода — черезъ $\sigma_2$, число неприводимыхъ сидзигій третьяго рода — черезъ $\sigma_3$ и т. д., то должно существовать равенство

$$\sigma - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 + \ldots\ldots = n,$$

потому что бинарная форма $n$-го порядка имѣетъ $n$ основныхъ коваріантовъ, которые между собою алгебраически независимы.

Число неприводимыхъ сидзигій втораго рода можно опредѣлить по способу просѣиванія: если мы имѣемъ представляющую форму женератрисной функціи для данной бинарной формы, то при опредѣленіи сидзигантовъ перваго рода можетъ оказаться для нѣкотораго типа $(\mu, \nu)$ $\alpha$ неприводимыхъ сидзигантовъ перваго рода въ то время какъ изъ неприводимыхъ сидзигантовъ перваго рода младшихъ типовъ можно составить $\beta > \alpha$ сидзигантовъ перваго рода типа $(\mu, \nu)$; это обстоятельство обнаружитъ существованіе $\beta - \alpha$ сидзигій между сидзигантами перваго рода, т. е. — существованіе $\beta - \alpha$ сидзигій втораго рода; если же мы имѣемъ женератрисную функцію для сидзигантовъ перваго рода, то часть сидзигантовъ втораго рода опредѣлится отрицательными членами числителя, а остальные сидзиганты втораго рода опредѣлятся по способу просѣиванія. Лучше, конечно, пользоваться двумя женератрисными функціями для коваріантовъ и для сидзигантовъ перваго рода, дабы имѣть возможность провѣрять результаты. Для опредѣленія числа неприводимыхъ сидзигій третьяго и высшихъ родовъ надо пользоваться способомъ просѣиванія.

## § 42. Теорема Gordan'a. Доказательство Hilbert'a.

Cayley обнаружилъ для бинарныхъ формъ первыхъ четырехъ порядковъ существованіе конечнаго числа неприводимыхъ коваріантовъ, черезъ которые всѣ остальные ихъ коваріанты выражаются въ цѣлыхъ раціональныхъ функціяхъ. Затѣмъ, дальнѣйшія изслѣдованія Cayley и Sylvester'a о числѣ неприводимыхъ коваріантовъ нѣкоторыхъ бинарныхъ формъ высшихъ порядковъ показали, что и для нихъ существуютъ *полныя* системы неприводимыхъ коваріантовъ; но всѣ эти изслѣдованія англійскихъ ученыхъ основываются на недоказанномъ до сихъ поръ *постулатумѣ о несуществованіи неприводимыхъ коваріантовъ и сидзигій перваго рода одинаковыхъ типовъ;* если это послѣднее обстоятельство не имѣло бы мѣста для нѣкоторыхъ бинарныхъ формъ, то женератрисныя функціи дали бы только низшіи предѣлы для чиселъ неприводимыхъ коваріантовъ, такъ какъ ихъ числители въ этомъ случаѣ содержали бы члены, служащіе результатами приведенія положительныхъ и отрицательныхъ членовъ одного типа.

Gordan[1]) впервые доказалъ, пользуясь символическими обозначеніями бинарныхъ формъ, что одна бинарная форма всегда имѣетъ конечное число неприводимыхъ коваріантовъ, но обобщить это доказательство на случай системы бинарныхъ формъ оказалось дѣломъ весьма сложнымъ вслѣдствіе множества символовъ, и только нѣсколько позже нѣмецкому ученому удалось это обобщеніе [2]).

Несравненно проще доказалъ это предложеніе, называемое обыкновенно *теоремой* Gordan'a, Hilbert[3]), и при томъ онъ доказалъ это предложеніе не только для системы бинарныхъ формъ, но и для системы алгебраическихъ формъ съ какимъ угодно числомъ перемѣнныхъ.

Мы приведемъ доказательство Hilbert'a для теоремы Gordan'a въ случаѣ системы бинарныхъ формъ, основанное на нѣкоторыхъ свойствахъ извѣстныхъ намъ операцій $X_1$ и $X_2$.

Не трудно убѣдиться въ справедливости слѣдующей леммы:

*Лемма 1. Если имѣется безконечный рядъ формъ* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *съ* $n$ *перемѣнными* $x_1, x_2, \ldots x_n$, *составленныхъ по извѣстному закону, то всегда существуетъ между ними конечное число* $m$ *такихъ формъ* $f_1, f_2, \ldots f_m$, *черезъ которыя остальныя формы даннаго ряда выражаются такъ:*

$$f = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \ldots A_m f_m,$$

*гдѣ* $A_1, A_2, \ldots A_m$ *суть нѣкоторыя формы съ тѣми же перемѣнными какъ и формы* $f_1, f_2, f_3, \ldots$

1) Crelle's Journal, Bd. 69, S. 323 — 354. 1868.

2) *„Programm"*. Leipzig. Teubner. 1875.
*Vorlesungen über Invariantentheorie*, T. II, § 20, 21. Leipzig. Teubner. 1887.

3) Mathematische Annalen. Bd. 36, S. 473—534. 1890.

Если мы имѣемъ рядъ формъ съ однимъ перемѣннымъ $x_1$, то выбравъ изъ нихъ форму $f_1$ съ самою низшею степенью $x_1$, мы будемъ, конечно, въ состояніи каждую изъ остальныхъ представить въ видѣ

$$A_1 f_1,$$

гдѣ $A_1$, будетъ нѣкоторая положительная степень $x_1$, умноженная на постоянный факторъ.

Не трудно также и въ случаѣ бинарныхъ формъ обнаружить справедливость нашей леммы.

Если бинарныя формы даннаго ряда имѣютъ нѣкоторую бинарную форму общимъ множителемъ, то мы можемъ дѣленіемъ устранить этотъ множитель. Послѣ этого будетъ возможно взять такія два линейныхъ сочетанія $G$ и $H$ данныхъ бинарныхъ формъ, которыя не имѣли бы общаго множителя. Очевидно, что всякую бинарную форму $f$ порядка $n$, не ниже суммы $p$ и $q$ порядковъ $G$ и $H$, можно представить въ видѣ

$$f = AG + BH,$$

такъ какъ $f$ имѣетъ $n+1$ коэффиціентовъ, а во второй части $A$ содержитъ $n-p+1$ и $B$ содержитъ $n-q+1$ произвольныхъ коэффиціентовъ, которыхъ общее число

$$2n-(p+q)+2 > n+1,$$

если $n \geqq p+q$.

Что касается до бинарныхъ формъ даннаго ряда, порядки которыхъ ниже $p+q$, то между ними, конечно, можно выбрать нѣсколько формъ такъ, чтобы остальныя выражались бы черезъ ихъ линейныя сочетанія.

Для случая троичныхъ формъ уже довольно трудно обнаружить непосредственно справедливость леммы[1]). Поэтому мы воспользуемся способомъ отъ $n$ къ $n+1$.

Допустимъ, что наша лемма справедлива для системы $S_0$ формъ съ $n$ перемѣнными $x_1, x_2, \ldots x_n$ и докажемъ, что

---

1) Noether. Mathematische Annalen Bd. 6, S. 352.

она справедлива для системы $S_r$ формъ съ $(n+1)$ перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_n, y$, при чемъ $y$ входитъ въ степени не выше $r$.

Каждая форма новой системы можетъ быть представлена единственнымъ образомъ въ видѣ

$$f = y^r . \varphi + \psi,$$

гдѣ въ формѣ $\psi$ перемѣнное $y$ можетъ имѣть степень не выше $r-1$, а въ формѣ $\varphi$ должно совсѣмъ отсутствовать. На основаніи нашего допущенія вся система формъ $\varphi$ можетъ быть представлена черезъ нѣкоторыя изъ формъ этой системы:

$$\varphi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_\mu\varphi_\mu.$$

Пусть $f_1, f_2, \ldots f_\mu$ соотвѣтствуютъ въ системѣ $S_r$ формамъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\mu$, т. е.

$$\begin{aligned} f_1 &= y_r . \varphi_1 + \psi_1, \\ f_2 &= y^r . \varphi_2 + \psi_2, \\ &\ldots\ldots \\ f_\mu &= y^r . \varphi_\mu + \psi_\mu. \end{aligned}$$

Если положить

$$\Psi = \psi - a_1\psi_1 - a_2\psi_2 - \ldots - a_\mu\psi_\mu,$$

то мы можемъ написать

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_\mu f_\mu + \Psi,$$

гдѣ $\Psi$ содержитъ перемѣнное $y$ не выше $r-1$ степени.

Мы предположимъ, что для системы $S_{r-1}$ наша лемма справедлива; тогда мы имѣемъ

$$\Psi = b_1\Psi_1 + b_1\Psi_2 + \ldots + b_\nu\Psi_\nu.$$

Пусть $f', f'', \ldots f^{(\nu)}$ суть формы системы $S_r$, соотвѣтствующія формамъ $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_\nu$, т. е.

$$\left.\begin{aligned}
f' &= a_1' f_1 + a_2' f_2 + \ldots + a_\mu' f_\mu + \Psi_1 \\
f'' &= a_1'' f_1 + a_2'' f_2 + \ldots + a_\mu'' f_\mu + \Psi_2 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
f^{(\nu)} &= a_1^{(\nu)} f_1 + a_2^{(\nu)} f_2 + \ldots + a_\mu^{(\nu)} f_\mu + \Psi_\nu ;
\end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

если эти равенства умножить соотвѣтственно на $b_1, b_2, \ldots b_\nu$ и сложить, то мы получимъ, принимая во вниманіе соотношеніе

$$b_1 \Psi_1 + b_2 \Psi_2 + \ldots + b_\nu \Psi_\nu = \Psi$$
$$= f - a_1 f_1 - a_2 f_2 - \ldots - a_\mu f_\mu,$$

слѣдующее равенство

$$\left.\begin{aligned}
f = b_1 f' + b_2 f'' + \ldots + b_\nu f^{(\nu)} \\
+ \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \ldots + \beta_\mu f_\mu,
\end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

гдѣ

$$\beta_i = a_i - a_i' b_1 - a_i'' b_2 - \ldots - a_i^{(\nu)} b_\nu ;$$

полученное такимъ образомъ равенство и доказываетъ справедливость нашей леммы.

Далѣе, не трудно также доказать слѣдующую вторую лемму:

*Лемма 2. Если къ совершенно произвольному изобарному многочлену $F(a, b, \ldots s)$ съ нулевымъ эксцессомъ, однородному относительно коэффиціентовъ каждой формы, примѣнить операцію*

$$\left[1 - \frac{X_1 X_2}{1!\ 2!} + \frac{X_1^2 X_2^2}{2!\ 3!} - \frac{X_1^3 X_2^3}{3!\ 4!} + \ldots\right], \qquad (65)$$

*то получится совмѣстный инваріантъ данной системы бинарныхъ формъ.*

Въ § 24 мы вывели для изобарнаго многочлена $\mathfrak{f}$ съ эксцессомъ $\chi = 2$ слѣдующее соотношеніе

$$\mathfrak{f} = X_2 \left\{ \frac{X_1}{1!\ 2!} - \frac{X_1^2 X_2}{2!\ 3!} + \frac{X_1^3 X_2^2}{3!\ 4!} - \ldots \right\} \mathfrak{f}.$$

Если мы возьмемъ произвольный изобарный многочленъ $F(a, b, \ldots s)$ съ нулевымъ эксцессомъ, однородный относительно коэффиціентовъ каждой формы данной системы, то $X_2(F)$ будетъ тоже изобарный многочленъ, однородный относительно коэффиціентовъ каждой формы и тѣхъ же степеней какъ и многочленъ $F$, но его эксцессъ равенъ 2. Подставивъ въ вышеуказанное соотношеніе вмѣсто $\mathfrak{f}$ многочленъ $X_2(F)$, мы получимъ соотношеніе

$$X_2(F) = X_2 \left\{ \frac{X_1}{1!\ 2!} - \frac{X_1^2 X_2}{2!\ 3!} + \frac{X_1^3 X_2}{3!\ 4!} - \ldots \right\} X_2(F),$$

которое можно написать въ такомъ видѣ:

$$X_2 \left[ 1 - \frac{X_1 X_2}{1!\ 2!} + \frac{X_1^2 X_2^2}{2!\ 3!} - \frac{X_1^3 X_2^3}{3!\ 4!} + \ldots \right] F = 0; \quad (66)$$

это послѣднее соотношеніе и обнаруживаетъ справедливость нашей леммы, такъ какъ оно показываетъ, что изобарный многочленъ

$$J = \left[ 1 - \frac{X_1 X_2}{1!\ 2!} + \frac{X_1^2 X_2^2}{2!\ 3!} - \frac{X_1^3 X_2^3}{3!\ 4!} + \ldots \right] F,$$

однородный относительно коэффиціентовъ каждой формы и съ нулевымъ эксцессомъ, удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$X_2(J) = 0,$$

т. е. выполняетъ условіе, достаточное для того, чтобы служить совмѣстнымъ инваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ.

При помощи доказанныхъ нами двухъ леммъ не трудно доказать теорему Gordan'a для системы бинарныхъ формъ.

Вообразимъ, что построены всѣ совмѣстные инваріанты

$$J(a_0,\ a_1,\ \dots a_n,\ b_0,\ b_1,\ \dots b_m,\ \dots s_0,\ s_1,\ \dots s_q)$$

для данной системы бинарныхъ формъ. Тогда на основаніи первой леммы между ними возможно выбрать конечное число $N$ такихъ инваріантовъ $J_1,\ J_2,\ \dots J_N$, чтобы всѣ остальные выражались черезъ нихъ формулой

$$J = A_1 J_1 + A_2 J_2 + \dots + A_N J_N, \tag{67}$$

гдѣ $A_1,\ A_2, \dots A_N$ суть однородные относительно коэффиціентовъ каждой формы и изобарные многочлены, потому что все выраженіе $J$ должно быть изобарнымъ многочленомъ, однороднымъ относительно коэффиціентовъ каждой формы; такимъ же свойствомъ обладаютъ, конечно, и многочленны $J_1,\ J_2,\ \dots J_N$.

Теперь при помощи второй леммы можно замѣнить многочлены $A_1,\ A_2,\ \dots A_N$ нѣкоторыми опредѣленными инваріантами $j_1,\ j_2,\ \dots j_N$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть вѣса инваріантовъ $J,\ J_1,\ J_2,\ \dots J_N$ будутъ $p,\ p_1,\ p_2,\ \dots p_N$; тогда вѣса многочленовъ $A_1,\ A_2,\ \dots A_N$ будутъ, конечно, равны

$$p - p_1,\ p - p_2,\ \dots p - p_N.$$

Такъ какъ для каждаго изъ инваріантовъ $J,\ J_1,\ J_2, \dots J_N$ вѣсъ имѣетъ видъ

$$p_i = \frac{n\mu_1^{(i)} + m\mu_2^{(i)} + \dots + q\mu_k^{(i)}}{2},$$

то $p - p_i$ имѣетъ видъ

$$p - p_i = \frac{n(\mu_1 - \mu_1^{(i)}) + m(\mu_2 - \mu_2^{(i)}) + \dots + q(\mu_k - \mu_k^{(i)})}{2}$$

гдѣ $\mu_1 - \mu_1^{(i)},\ \mu_2 - \mu_2^{(i)},\ \dots \mu_k - \mu_k^{(i)}$ суть степени многочлена $A_i$ относительно коэффиціентовъ формъ данной системы; слѣдовательно, эксцессы многочленовъ $A_i$ равны нулямъ. Такимъ образомъ мы можемъ обратить многочлены $A_i$ въ инваріанты данной системы бинарныхъ формъ посредствомъ операціи второй леммы:

$$[A_i]=\left[1-\frac{X_1 X_2}{1!\,2!}+\frac{X_1^2 X_2^2}{2!\,3!}-\frac{X_1^3 X_2^3}{3!\,4!}+\ldots\right]A_i=j_i. \quad (68)$$

Примѣнивъ эту операцію къ обѣимъ частямъ равенства (67), мы получимъ

$$[J]=[A_1 J_1]+[A_2 J_2]+\ldots+[A_N J_N],$$

но такъ какъ $X_2(J)$, $X_2(J_1)$, $X_2(J_2)$, ... $X_2(J_N)$ равны нулямъ, то

$$[J]=J,\ [A_1 J_1]=[A_1]J_1,\ [A_2 J_2]=[A_2]J_2,\ldots[A_N J_N]=[A_N]J_N,$$

слѣдовательно

$$J=[A_1]J_1+[A_2]J_2+\ldots+[A_N]J_N,$$

или, наконецъ, на основаніи соотношенія (68), получаемъ равенство

$$J=j_1 J_1+j_2 J_2+\ldots+j_N J_N, \quad (69)$$

которое и доказываетъ справедливость теоремы Gordan'а.

Надо, впрочемъ, замѣтить, что инваріанты $j_1, j_2, \ldots j_N$ въ свою очередь могутъ быть выражены черезъ инваріанты $J_1$, $J_2$, ... $J_N$; такимъ образомъ всякій инваріантъ $J$ можетъ быть, въ концѣ концовъ, выраженъ черезъ неприводимые инваріанты $J_1$, $J_2$, ... $J_N$ цѣлой раціональной функціей.

Изложенное нами доказательство Hilbert'а даетъ возможность обобщить теорему Gordan'а не только на случай инваріантовъ формъ съ какимъ угодно числомъ перемѣнныхъ, но даже и на случаи инваріантовъ формъ съ нѣсколькими рядами перемѣнныхъ, при чемъ для обращенія многочленовъ $A_i$ формулы (67) въ инваріанты въ этихъ случаяхъ приходится пользоваться совсѣмъ новою операціей $\Omega$[1]).

Hilbert въ своихъ изслѣдованіяхъ затронулъ также вопросъ о сидзигіяхъ между неприводимыми инваріантами данной системы формъ и показалъ, что *могутъ существовать сидзигіи перваго, втораго и т. д. родовъ, но если полная система неприводимыхъ инваріантовъ содержитъ $N$ инваріантовъ, то возможны сидзигіи не выше $N+1$ рода.* Къ сожалѣнію, эти изслѣдованія имѣютъ еще далеко несовершенную форму по своей сложности, и мы не будемъ на нихъ останавливаться[2]).

Что касается до сидзидій каждаго рода въ отдѣльности, то при помощи первой леммы не трудно доказать, что онѣ имѣютъ полныя системы неприводимыхъ сидзигій. Для этого надо только обратить вниманіе на то, что первая лемма остается справедливой и для неоднородныхъ формъ, если подъ неоднородною формою подразумѣвать обыкновенную форму, въ которой одно перемѣнное $x_n$ равно 1. Но сидзиганты $\Sigma$ перваго рода, конечно, можно разсматривать какъ такія неоднородныя формы, если за перемѣнныя считать неприводимые инваріанты $J_1, J_2, \ldots J_N$ данной системы формъ. Слѣдовательно, каждый изъ сидзигантовъ перваго рода можетъ быть выраженъ линейно черезъ *конечное* число неприводимыхъ сидзигантовъ перваго рода — $\Sigma_1', \Sigma_2', \ldots \Sigma_{\omega'}'$:

$$\Sigma' = A_1' \Sigma_1' + A_2' \Sigma_2' + \ldots + A_{\omega'}' \Sigma_{\omega'}', \tag{70}$$

гдѣ $A_1', A_2', \ldots A_{\omega'}'$ суть цѣлыя раціональныя функціи неприводимыхъ коваріантовъ $J_1, J_2, \ldots J_N$.

Подобно этому можно показать, что всѣ сидзиганты $\Sigma''$ втораго рода, разсматриваемые какъ неоднородныя формы съ

1) Hilbert. Mathematische Annalen, Bd. 36, S. 529. 1890.
2) Ibid. S. 492 und 534.

перемѣнными $\Sigma_1'$, $\Sigma_2'$, ... $\Sigma_{\omega'}'$, выражаются линейно черезъ *конечное* число неприводимыхъ сидзигантовъ второго рода — $\Sigma_1''$, $\Sigma_2''$, ... $\Sigma_{\omega''}''$:

$$\Sigma'' = A_1'' \Sigma_1'' + A_2'' \Sigma_2'' + \ldots + A_{\omega''}'' \Sigma_{\omega''}'', \tag{71}$$

гдѣ $A_1''$, $A_2''$, ... $A_{\omega''}''$ суть цѣлыя раціональныя функціи неприводимыхъ сидзигантовъ $\Sigma_1'$, $\Sigma_2'$, ... $\Sigma_{\omega'}'$ перваго рода; и т. д.

## ГЛАВА IV.

# Различные способы построеній и преобразованій коваріантовъ бинарныхъ формъ.

### 43. Коваріанты неоднородныхъ бинарныхъ формъ.

Будемъ называть *неоднородною формою* многочленъ

$$f(x,1) = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n, \quad (72)$$

который получается изъ бинарной формы

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n,$$

если въ ней положить $x_1 = x$ и $x_2 = 1$.

Коваріанты бинарной формы $f(x_1, x_2)$ послѣ замѣны въ нихъ $x_1$ черезъ $x$ и $x_2$ черезъ 1 мы будемъ называть *коваріантами неоднородной формы* $f(x, 1)$.

Если намъ удалось опредѣлить коваріанты неоднородной формы $f(x, 1)$, то достаточно только замѣнить въ нихъ $x$ черезъ $x_1$ и возстановить однородность при помощи $x_2$, и мы получимъ коваріанты бинарной формы $f(x_1, x_2)$.

Будемъ сокращенно обозначать:

$$f(x, 1) = f_0, \quad \frac{1}{n} f'(x,1) = f_1, \quad \frac{1}{n(n-1)} f''(x, 1) = f_2, \ldots; \quad (73)$$

тогда по строкѣ Тэйлора мы будемъ имѣть:

$$f(x+h,1)=f_0(h)+\binom{n}{1}f_1(h).x+\binom{n}{2}f_2(h).x^2+\ldots+f_n(h).x^n.$$

Положимъ въ послѣднемъ равенствѣ $x=\frac{y_2}{y_1}$, тогда получится равенство

$$f(hy_1+y_2,y_1)=f_0(h)y_1^n+\binom{n}{1}f_1(h)y_1^{n-1}y_2+$$
$$+\binom{n}{2}f_2(h)y_1^{n-2}y_2^2+\ldots+f_n(h)y_2^n.$$

Если мы имѣемъ коваріантъ $\Gamma(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n;\, x_1, x_2)$ бинарной формы $f(x_1, x_2)$, то онъ по отношенію къ подстановкѣ $x_1=hy_1+y_2$, $x_2=y_1$ съ модулемъ $\Delta=-1$ долженъ удовлетворять тождественному равенству

$$\Gamma[f_0(h), f_1(h), \ldots f_n(h);\, y_1, y_2]\equiv$$
$$\equiv(-1)^\lambda\Gamma(a_0, a_1, \ldots a_n;\, hy_1+y_2, y_1).$$

Положивъ въ этомъ равенствѣ $y_1=1$, $y_2=0$, $h=x$, мы получимъ тождественное равенство

$$\Gamma(f_0, f_1, \ldots f_n;\, 1,0)\equiv(-1)^\lambda\Gamma(a_0, a_1, \ldots a_n;\, x, 1), \quad (74)$$

которое даетъ намъ слѣдующее предложеніе Faa di Bruno[1]):

*Если въ главномъ коэффиціентѣ* $\Gamma(a_0, a_1, \ldots a_n;\, 1,0)$ *коваріанта бинарной формы* $f(x_1, x_2)$ *количества* $a_0, a_1, \ldots a_n$ *замѣнить черезъ* $f_0, f_1, \ldots f_n$, *то получится коваріантъ неоднородной формы* $f(x, 1)$.

Это предложеніе можно обобщить для системы бинарныхъ формъ

$$f(x_1, x_2),\ F(x_1, x_2),\ \varphi(x_1, x_2),\ \ldots\ \varphi(x_1, x_2),$$

---

1) Faa di Bruno. Comptes Rendus. Vol. XC, P. 1203—1205. 1880.

если воспользоваться разсужденіями, подобными предыдущимъ:

*Если въ главномъ коэффиціентѣ* $\Gamma(a,\ b,\ \ldots\ s;\ 1,0)$ *совмѣстнаго коваріанта системы бинарныхъ формъ*

$$f(x_1,\ x_2),\ F(x_1,\ x_2),\ \phi(x_1,\ x_2),\ \ldots\ \omega(x_1,\ x_2)$$

*количества* $a_i,\ b_i,\ \ldots\ s_i$ *замѣнить черезъ* $f_i,\ F_i,\ \ldots\ \omega_i$, *то получится совмѣстный коваріантъ системы неоднородныхъ формъ*

$$f(x,1),\ F(x,1),\ \phi(x,1),\ \ldots\ \omega(x,1). \tag{75}$$

Изъ § 31 (*Замѣчаніе*) мы знаемъ, что всякій полуинваріантъ системы бинарныхъ формъ можетъ служить главнымъ коэффиціентомъ совмѣстнаго коваріанта порядка $\nu = n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - 2p$ этой системы, если только вѣсъ $p$ полуинваріанта удовлетворяетъ неравенству:

$$n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - 2p > 0,$$

гдѣ $n,\ m,\ \ldots\ q$ суть порядки бинарныхъ формъ системы, а $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ \mu_k$ степени полуинваріанта относительно коэффиціентовъ каждой формы.

Слѣдовательно, если въ такой полуинваріантъ $J(a, b, c, \ldots s)$ мы подставимъ вмѣсто количествъ $a_i,\ b_i,\ \ldots\ s_i$ соотвѣтственно количества $f_i,\ F_i,\ \ldots\ \omega_i$, то получится совмѣстный коваріантъ $J(f_i,\ F_i,\ \ldots\ \omega_i)$ системы неоднородныхъ формъ, а для того, чтобы получить совмѣстный коваріантъ данной системы бинарныхъ формъ, надо только въ полученномъ коваріантѣ $J(f_i,\ F_i,\ \ldots\ \omega_i)$ замѣнить $x$ черезъ $x_1$ и возстановить однородность при помощи $x_2$.

Но очевидно, что послѣдній результатъ мы получимъ также, если въ каждой изъ функцій $f_i,\ F_i,\ \ldots\ \omega_i$ мы сначала замѣнимъ $x$ черезъ $x_1$, возстановимъ въ нихъ однородность при помощи $x_2$ и затѣмъ внесемъ ихъ выраженія въ $J(f_i,\ F_i, \ldots\ \omega_i)$, при этомъ получится только *лишній множитель* $x_2^p$.

Функціи $f_i$, $F_i$, . . . $\omega_i$ имѣютъ выраженія

$$
\begin{aligned}
f_i &= \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-i+1)} f^{(i)}(x,1),\\
F_i &= \frac{1}{m(m-1)\ldots(m-i+1)} F^{(i)}(x,1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\omega_i &= \frac{1}{q(q-1)\ldots(q-i+1)} \omega^{(i)}(x,1);
\end{aligned}
\tag{76}
$$

если въ нихъ замѣнить $x$ черезъ $x_1$ и возстановить однородность при помощи $x_2$, то мы получимъ ихъ новыя выраженія въ однородномъ видѣ:

$$
\begin{aligned}
f_i' &= \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-i+1)} \frac{\partial^i f(x_1, x_2)}{\partial x_1{}^i},\\
F_i' &= \frac{1}{m(m-1)\ldots(m-i+1)} \frac{\partial^i F(x_1, x_2)}{\partial x_1{}^i},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\omega_i' &= \frac{1}{q(q-1)\ldots(q-i+1)} \frac{\partial^i \omega(x_1, x_2)}{\partial x_1{}^i}.
\end{aligned}
\tag{77}
$$

Слѣдовательно, если въ полуинваріантъ $J(a, b, \ldots s)$ вставить вмѣсто количествъ $a_i$, $b_i$, . . . $s_i$ соотвѣтственно *одностороннія производныя* (*einseitige Dirivirten*) бинарныхъ формъ съ надлежащими числовыми факторами и отбросить множитель $x_2^p$, то получится совмѣстный коваріантъ $J(f_i', F_i', \ldots \omega_i')$ данной системы бинарныхъ формъ, порядокъ котораго

$$\nu = n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - 2p.$$

Припоминая опредѣленіе полуинваріанта, мы можемъ полученные нами результаты формулировать еще такимъ образомъ:

*Цѣлая раціональная функція* $J(f_0, f_1, \ldots f_n, F_0, F_1, \ldots F_m, \ldots)$ *одностороннихъ производныхъ бинарныхъ формъ, однородная относительно* $f_i$, $F_i$, . . . *въ отдѣльности и имѣющая соотвѣтственно степени*

*$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$, есть совмѣстный коваріантъ порядка $\nu$ данной системы бинарныхъ формъ (умноженный на факторъ $x_2^p$), если она изобарна съ вѣсомъ*

$$p = \frac{1}{2}(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - \nu)$$

*и удовлетворяетъ уравненію съ частными производными*

$$f_0 \frac{\partial J}{\partial f_1} + 2f_1 \frac{\partial J}{\partial f_2} + \ldots + nf_{n-1} \frac{\partial J}{\partial f_n} + F_0 \frac{\partial J}{\partial F_1} + 2F_1 \frac{\partial J}{\partial F_2} + \ldots +$$
$$+ mF_{m-1} \frac{\partial J}{\partial F_m} + \ldots = 0.$$

Послѣднее уравненіе мы сокращенно обозначаемъ —

$$X_2(J) = 0.$$

Пусть полученный такимъ образомъ коваріантъ $J(f_0, f_1, \ldots f_n, F_0, F_1, \ldots)$ въ развернутомъ видѣ и въ неоднородной формѣ будетъ

$$J = c_0 x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} + \ldots + c_\nu. \tag{78}$$

Очевидно, что

$$1.2\ldots k.c_{\nu-k} = \left(\frac{d^k J}{dx^k}\right)_{x=0}.$$

Принимая во вниманіе

$$\frac{df_i}{dx} = (n-i)f_{i+1},$$

и обозначая черезъ $X_1$ операцію

$$nf_1 \frac{\partial J}{\partial f_0} + (n-1)f_2 \frac{\partial J}{\partial f_1} + \ldots + f_n \frac{\partial J}{\partial f_{n-1}} + mF_1 \frac{\partial J}{\partial F_0} +$$
$$+ (m-1)F_2 \frac{\partial J}{\partial F_1} + \ldots + F_m \frac{\partial J}{\partial F_{m-1}} + \ldots,$$

мы получимъ

$$1.2\ldots k.c_{\nu-k} = [X_1^k(J)]_{x=0}$$

или

$$1.2\ldots k.c_{\nu-k} = [X_1^k(J)]_{f_i = a_{n-i},\ F_i = b_{m-i}, \ldots};$$

слѣдовательно, мы имѣемъ

$$c_k = \frac{(-1)^p}{1.2\ldots k.}[X_1^k(J)]_{f_i=a_i,\ F_i=b_i,\ldots} \tag{79}$$

— результатъ, равносильный теоремѣ Cayley (§ 31).

*Примѣръ.* Разсмотримъ бинарную форму третьяго порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3;$$

соотвѣтственная неоднородная форма будетъ

$$f(x, 1) = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = f_0;$$

кромѣ того,

$$f_1 = a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2,$$
$$f_2 = a_0 x + a_1,$$
$$f_3 = a_0.$$

Выраженія $a_0$ и $a_0 a_2 - a_1^2$ суть полуинваріанты данной бинарной формы, слѣдовательно $f_0$ и $f_0 f_2 - f_1^2$ суть коваріанты неоднородной формы $f(x, 1)$. Послѣдній коваріантъ имѣетъ видъ

$$f_0 f_2 - f_1^2 = (a_0 a_2 - a_1^2) x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x + (a_1 a_3 - a_2^2);$$

если въ немъ замѣнить $x$ черезъ $x_1$ и возстановить однородность при помощи $x_2$, то получится извѣстный Гессевскій коваріантъ

$$(a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2$$

бинарной формы 3-го порядка. Но онъ получится сразу, если въ полуинваріантъ $a_0 a_2 - a_1^2$ подставить одностороннія производныя (съ надлежащими числовыми факторами) данной бинарной формы:

$$f_1' = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$
$$f_2' = a_0 x_1 + \ \ a_1 x_2,$$
$$f_3' = a_0$$

и отбросить множитель $x_2^2$.

## § 44. Сопоставленіе двухъ бинарныхъ формъ.

Мы будемъ называть *сопоставленіемъ* двухъ бинарныхъ формъ ихъ совмѣстный коваріантъ первой степени относительно коэффиціентовъ каждой формы [1]).

Не трудно опредѣлить число линейно-независимыхъ сопоставленій какого-нибудь порядка $\nu$.

Формула (III) въ § 33 даетъ для даннаго случая

$$N_\nu = \left[(1-v)\,\Psi_{1,n}(v)\,.\,\Psi_{1,m}(v)\right]_{v^p}, \tag{80}$$

гдѣ $p_0 = \frac{1}{2}(n+m-\nu)$ есть вѣсъ главнаго члена и

$$\Psi_{1,n}(v) = \frac{1-v^{n+1}}{1-v}, \quad \Psi_{1,m} = \frac{1-v^{m+1}}{1-v}.$$

Слѣдовательно, число линейно-независимыхъ сопоставленій порядка $\nu$ двухъ бинарныхъ формъ порядковъ $n$ и $m$ дается формулой

$$N_\nu = \left[(1-v^{n+1})\frac{1-v^{m+1}}{1-v}\right]_{v^p}. \tag{80'}$$

Мы имѣемъ разложеніе

$$\begin{aligned}(1-v^{n+1})\frac{1-v^{m+1}}{1-v} &= (1-v^{n+1})(1+v+v^2+\ldots+v^m)\\ &= (1+v+v^2+\ldots+v^m)-(v^{n+1}+v^{n+2}+\\ &\qquad +\ldots+v^{n+m+1});\end{aligned}$$

если $n \geqq m$, то для $p=0,\ 1,\ 2,\ldots m$ существуетъ по одному сопоставленію; другихъ же сопоставленій не существуетъ.

Построимъ существующія сопоставленія двухъ бинарныхъ формъ:

$$f\,(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n,$$

$$F(x_1, x_2) = b_0 x_1^m + \binom{m}{1} b_1 x_1^{m-1} x_2 + \ldots + b_m x_2^m.$$

1) Нѣмецкіе ученые употребляютъ для этихъ коваріантовъ названіе „*Ueberschiebung*"; французскіе — названіе „*composé*".

Мы будемъ называть $p$-мъ сопоставленіемъ такое сопоставленіе, котораго главный коэффиціентъ имѣетъ вѣсъ $p$, и будемъ обозначать его символомъ $(f, F)_p$.

Для $p$-го сопоставленія главный коэффиціентъ будетъ имѣть видъ

$$c_0 a_0 b_p + c_1 a_1 b_{p-1} + c_2 a_2 b_{p-2} + \ldots + c_p a_p b_0,$$

при чемъ $c_0, c_1, c_2, \ldots c_p$ должны удовлетворять условію

$$X_2 [c_0 a_0 b_p + c_1 a_1 b_{p-1} + c_2 a_2 b_{p-2} + \ldots + c_p a_p b_0] \equiv 0,$$

которое имѣетъ слѣдующій развернутый видъ:

$$\begin{aligned} &c_1 a_0 b_{p-1} + \quad 2c_2 a_1 b_{p-2} + \quad 3c_3 a_2 b_{p-3} + \ldots + pc_p a_{p-1} b_0 \\ &+ pc_0 a_0 b_{p-1} + (p-1) c_1 a_1 b_{p-2} + (p-2) c_3 a_2 b_{p-3} + \ldots + c_p a_{p-1} b_0 \equiv 0; \end{aligned}$$

отсюда мы получаемъ

$$c_1 = -pc_0,$$

$$c_2 = \frac{p(p-1)}{1.2} c_0 = \binom{p}{2} c_0,$$

$$c_3 = -\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} c_0 = -\binom{p}{3} c_0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$c_p = (-1)^p \frac{p(p-1)\ldots 1}{1.2\ldots p} c_0 = (-1)^p c_0.$$

Слѣдовательно, главный членъ $p$-го сопоставленія имѣетъ видъ

$$a_0 b_p - \binom{p}{1} a_1 b_{p-1} + \binom{p}{2} a_2 b_{p-2} - \ldots + (-1)^p a_p b_0.$$

Если въ этомъ выраженіи замѣнить $a_i$ и $b_i$ соотвѣтственно черезъ одностороннія производныя $f_i$ и $F_i$, то получится искомое сопоставленіе (если не считать множителя $x_2^p$)

$$(f, F)_p = \left[f_0 F_p - \binom{p}{1} f_1 F_{p-1} + \binom{p}{2} f_2 F_{p-2} + \ldots + (-1)^p f_p F_0\right]; \tag{81}$$

при $n \geqq m$ индексъ $p$ можетъ равняться $0, 1, 2 \ldots m$. Послѣдняя формула даетъ возможность составить слѣдующую таблицу сопоставленій различныхъ порядковъ двухъ бинарныхъ формъ

| | | порядки |
|---|---|---|
| $(f,F)_0$ | $f_0 F_0$ | $n+m$ |
| $(f,F)_1$ | $f_0 F_1 - f_1 F_0$ | $n+m-2$ |
| $(f,F)_2$ | $f_0 F_2 - 2f_1 F_1 + f_2 F_0$ | $n+m-4$ |
| $(f,F)_3$ | $f_0 F_3 - 3f_1 F_2 + 3f_2 F_1 - f_3 F_0$ | $n+m-6$ |
| . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . |
| . . . | . . . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . |
| $(f,F)_m$ | $f_0 F_m - \binom{m}{1} f_1 F_{m-1} + \binom{m}{2} f_2 F_{m-2} + \ldots + (-1)^m f_m F_0$ | $n+m-2m$ |

Если $n=m$, то послѣднее сопоставленіе будетъ совмѣстнымъ инваріантомъ

$$a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} \ldots + (-1)^n a_n b_0$$

двухъ данныхъ формъ.

*Примѣръ.* Разсмотримъ двѣ бинарныхъ формы втораго порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$
$$F(x_1, x_2) = b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2;$$

для нихъ возможны слѣдующія три сопоставленія:

$$(f, F)_0 = f_0 . F_0 = f(x_1, x_2) . F(x_1, x_2),$$

$$\begin{aligned}(f, F)_1 = f_0 F_1 - f_1 F_0 = \frac{1}{x_2}\big[&(a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2)(b_0 x_1 + b_1 x_2) \\ &- (b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2)(a_0 x_1 + a_1 x_2)\big] \\ = (a_1 b_0 - a_0 b_1) x_1^2 &+ (a_2 b_0 - a_0 b_2) x_1 x_2 + \\ &+ (a_2 b_1 - a_1 b_2) x_2^2,\end{aligned}$$

$$(f, F)_2 = a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0;$$

послѣднее сопоставленіе есть совмѣстный инваріантъ разсматриваемыхъ формъ.

## § 45. Дериванты; коваріантный процессъ Hilbert'а.

Мы будемъ называть *дериватомъ* цѣлую раціональную функцію

$$\varphi(f_0,\ f_1,\ \ldots\ f_n,\ F_0,\ F_1,\ \ldots)$$

одностороннихъ производныхъ (съ надлежащими числовыми факторами) $f_0$, $f_1$, . . . $f_n$, $F_0$, $F_1$, . . . бинарныхъ формъ данной системы, однородную относительно производныхъ каждой формы и изобарную относительно этихъ производныхъ. Такую функцію называютъ также *полуковаріантомъ*.

Если деривантъ $\varphi$ имѣетъ эксцессъ

$$\chi = n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - 2p,$$

то онъ удовлетворяетъ соотношенію (§§ 9, 18)

$$(X_2 X_1^{\nu} - X_1^{\nu} X_2)\varphi = \nu(\chi - \nu + 1) X_1^{\nu-1}\varphi; \tag{82a}$$

можно вывести также соотношеніе

$$(X_2^{\nu} X_1 - X_1 X_2^{\nu})\varphi = \nu(\chi + \nu - 1) X_2^{\nu-1}\varphi, \tag{82b}$$

если воспользоваться способомъ, аналогичнымъ способу въ § 9.

Эти соотношенія (82a) и (82b) суть частные случаи болѣе общихъ соотношеній:

$$(X_1^{\mu} X_2^{\nu} - X_2^{\nu} X_1^{\mu})\varphi = \mu!\,\nu!\left\{\left(\frac{\mu-\nu-\chi}{1}\right)\frac{X^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\,\frac{X^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mu-\nu-\chi}{2}\right)\frac{X_2^{\nu-2}}{(\nu-2)!}\,\frac{X_1^{\mu-2}}{(\mu-2)!} + \ldots\ldots\right\}\varphi, \tag{83a}$$

$$(X_2^{\nu} X_1^{\mu} - X_1^{\mu} X_2^{\nu})\varphi = \mu!\,\nu!\left\{\left(\frac{\chi+\nu-\mu}{1}\right)\frac{X_1^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\,\frac{X_2^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\chi+\nu-\mu}{2}\right)\frac{X_1^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\,\frac{X_2^{\nu-2}}{(\nu-2)!} + \ldots\ldots\right\}\varphi, \tag{83b}$$

которыя можно получить изъ формулъ (82a), (82b) посредствомъ способа отъ $\nu$, $\mu$ къ $\nu+1$, $\mu+1$.

Если деривантъ $\varphi$ удовлетворяетъ уравненію

$$X_2(\varphi) = 0,$$

то онъ служитъ коваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ; въ этомъ случаѣ соотношеніе (83b) приметъ болѣе простой видъ

$$X_2^{\nu} X_1^{\mu} \mathfrak{f} = \mu!\, \nu! \left( \frac{\chi + \nu - \mu}{\nu} \right) \frac{X_1^{\mu-\nu} \mathfrak{f}}{(\mu-\nu)!};$$

или, полагая $\mu = \nu + k$, мы получимъ соотношеніе

$$X_2^{\nu} X_1^{\nu} (X_1^k \mathfrak{f}) = \frac{(k+\nu)!\,(\chi-k)!}{(\chi-k-\nu)!\,k!} X_1^k \mathfrak{f}. \tag{84}$$

Послѣднее соотношеніе показываетъ, что дериванты $X_1^k \mathfrak{f}$, гдѣ $\mathfrak{f}$ есть коваріантъ системы, измѣняются отъ операцій $X_2^{\nu} X_1^{\nu}$ только на числовые факторы.

Эксцессъ $\chi$ дериванта имѣетъ выраженіе

$$\chi = n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k - 2p,$$

слѣдовательно, высшій предѣлъ его такой:

$$\chi \leqq n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k.$$

Съ другой стороны, наибольшій вѣсъ $p$ можетъ равняться $n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k$, если взять членъ $a_n^{\mu_1} b_m^{\mu_2} \ldots s_q^{\mu_k}$, т. е.

$$\chi \geqq -(n\mu_1 + m\mu_2 + \ldots + q\mu_k).$$

Такъ какъ операція $X_1$ понижаетъ эксцессъ дериванта $\mathfrak{f}$ на 2, а операція $X_2$ повышаетъ его на 2, то примѣняя къ деривангу послѣдовательно нѣсколько разъ операцію $X_1$ и операцію $X_2$, мы получимъ, наконецъ,

$$X_1^{q+1} \mathfrak{f} \equiv 0, \quad X_2^{r+1} \mathfrak{f} \equiv 0.$$

Если $r+1$-ое примѣненіе операціи $X_2$ къ дериванту $\mathfrak{f}$ даетъ въ результатѣ нуль, то дериванть называется деривантомъ $r$-го *ранга.*

Очевидно, что дериванть $r$-го ранга дастъ коваріантъ, если къ нему примѣнить $r$ разъ операцію $X_2$, т. е. $\Gamma^{(r)} = X_2 \mathfrak{f}$ есть коваріантъ, ибо

$$X_2 \Gamma^{(r)} = X_2^{r+1} \mathfrak{f} \equiv 0;$$

но кромѣ этого коваріанта $\Gamma^{(r)}$ деривантъ $\varphi$ даетъ еще слѣдующіе коваріанты:

$$\Gamma^{(r-1)} = X_2^{r-1}\varphi - \frac{(\sigma-r)!}{\sigma!\; r!} X_2^{r-1} X_1^r \Gamma^{(r)}, \qquad (\sigma = \chi + 2r)$$

$$\Gamma^{(r-2)} = X_2^{r-2}\varphi - \frac{(\sigma-r)!}{\sigma!\; r!} X_2^{r-2} X_1^r \Gamma^{(r)} - \\ - \frac{(\sigma-r-1)!}{(\sigma-2)!\;(r-1)!} X_2^{r-2} X_1^{r-1} \Gamma^{(r-1)},$$

$$\Gamma^{(r-3)} = X_2^{r-3}\varphi - \frac{(\sigma-r)!}{\sigma!\; r!} X_2^{r-3} X_1^r \Gamma^{(r)} - \\ - \frac{(\sigma-r-1)!}{(\sigma-2)!\;(r-1)!} X_2^{r-3} X_1^{r-1} \Gamma^{(r-1)}, \\ - \frac{(\sigma-r-2)!}{(\sigma-4)!\;(r-2)!} X_2^{r-3} X_1^{r-2} \Gamma^{(r-2)}, \tag{85}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\Gamma^{(0)} = \varphi - \frac{(\sigma-r)!}{\sigma!\; r!} X_1^r \Gamma^{(r)} - \frac{(\sigma-r-1)!}{(\sigma-2)!\;(r-1)!} X_1^{r-1} \Gamma^{(r-1)} - \dots \\ \dots - \frac{(\sigma-2r+1)!}{(\sigma-2r+2)!\;1!} X_1 \Gamma^{(1)};$$

что эти выраженія суть коваріанты, не трудно обнаружить при помощи соотношенія (84), и для этого надо только показать, что они удовлетворяютъ уравненію

$$X_2(\Gamma) = 0.$$

Разсмотримъ для примѣра выраженіе

$$\Gamma^{(r-1)} = X_2^{r-1}\varphi - \frac{(\sigma-r)!}{\sigma!\; r!} X_2^{r-1} X_1^r \Gamma^{(r)},$$

гдѣ $\sigma = \chi + 2r$; тогда мы имѣемъ

$$X_2 \Gamma^{(r-1)} = X_2^r \varphi - \frac{(\chi+r)!}{(\chi+2r)!\; r!} X_2^r X_1^r \Gamma^{(r)},$$

гдѣ $\Gamma^{(r)} = X_2^r \varphi$ есть коваріантъ; на основаніи соотношенія (84) мы будемъ имѣть для коваріанта $\Gamma^{(r)}$ слѣдующее соотношеніе:

$$X_2^{r-1} X_1^{r-1}(X_1 \Gamma^{(r)}) = \frac{r!\,(\chi+2r-1)!}{(\chi+r)!\,1!} X_1(\Gamma^{(r)});$$

вслѣдствіе этого соотношеніе мы будемъ имѣть

$$X_2 \Gamma^{(r-1)} = X_2^r \varphi - \frac{1}{\chi+2r} X_2 X_1 X_2^r \varphi,$$

но на основаніи соотношенія (82a), полагая въ немъ $\nu = 1$, мы имѣемъ

$$(X_2 X_1 - X_1 X_2)(X_2^r \varphi) = (\chi + 2r)(X_2^r \varphi),$$

гдѣ $\chi + 2r$ есть эксцессъ деривантa $X_2^r \varphi$; слѣдовательно,

$$X_2 \Gamma^{(r-1)} = X_2^r \varphi - \frac{1}{\chi+2r}\{X_1 X_2^{r+1} \varphi + (\chi+2r) X_2^r \varphi\};$$

но во второй части $X_1 X_2^{r+1} \varphi \equiv 0$, потому что $X_2^{r+1} \varphi \equiv 0$, а остальные два члена взаимно сокращаются; слѣдовательно, мы убѣждаемся въ томъ, что существуетъ тождество

$$X_2 \Gamma^{(r-1)} = 0,$$

показывающее, что $\Gamma^{(r-1)}$ есть коваріантъ.

Вышеприведенные коваріанты, полученные изъ деривантa $\varphi$ $r$-го ранга, можно представить въ слѣдующемъ видѣ, если въ ихъ выраженіяхъ послѣдовательно замѣнить $\Gamma^{(r)}$, $\Gamma^{(r-1)}$, ... изъ предудыщихъ равенствъ:

$$\Gamma^{(r)} = X_2^r \varphi,$$

$$\Gamma^{(r-1)} = \left\{X_2^{r-1} - \frac{1}{\sigma} X_1 X_2^r\right\} \varphi, \tag{86}$$

$$\Gamma^{(r-2)} = \left\{X_2^{r-2} - \frac{1}{(\sigma-2)\,.\,1!} X_1 X_2^{r-1} + \frac{1}{(\sigma-2)(\sigma-1)\,.\,2!} X_1^2 X_2^r\right\} \varphi,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\Gamma^{(0)} = \left\{1 - \frac{1}{(\sigma-2\nu+2)\,.\,1!} X_1 X_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(\sigma-2r+2)(\sigma-2r+3)\,.\,2!} X_1^2 X_2^2 - \ldots\right\} \varphi.$$

Обозначимъ сокращенно операцію

$$\left\{\frac{1}{(\chi+1)!}-\frac{X_1 X_2}{1!(\chi+2)!}+\frac{X_1^2 X_2^2}{2!(\chi+3)!}-\dots\right\}$$

символомъ [ ]; тогда наша система коваріантовъ можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(0)} &= (\chi+1)!\,[\;\;\varphi],\\
\Gamma^{(1)} &= (\chi+3)!\,[X_2\varphi],\\
\Gamma^{(2)} &= (\chi+5)!\,[X_2^2\varphi],\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\Gamma^{(\nu)} &= (\chi+2r+1)!\,[X_2^\nu\varphi].
\end{aligned} \tag{86'}$$

Если $\chi=0$, то $\Gamma^{(0)}$ будетъ, очевидно, инваріантъ, что намъ извѣстно изъ § 42.

## § 46. Построеніе линейно-независимыхъ коваріантовъ. Сопоставленіе какъ частный случай операціи [ ].

Разсмотримъ систему формъ

$$f,\ F,\ \dots$$

и составимъ всевозможные дериванты $\varphi$ степеней $\mu_1,\ \mu_2,\ \dots$ и вѣса $p$ въ ихъ простѣйшемъ видѣ:

$$f_0^{e_0} f_1^{e_1} f_2^{e_2}\dots f_n^{e_n}\, F_0^{l_0} F_1^{l_1} F_2^{l_2}\dots F_m^{l_m}\dots;$$

пусть ихъ число будетъ $\Psi_p$. Пусть $\Psi_{p-1}$ обозначаетъ число дериватовъ $\varphi'$ тѣхъ же степеней и такого же вида какъ и дериванты $\varphi$, но только съ вѣсомъ $p-1$.

Изъ послѣдняго равенства (85) предыдущаго параграфа мы имѣемъ

$$\varphi=\Gamma_0+\frac{(\chi+1)!}{(\chi+2)!\,1!}X_1\Gamma^{(1)}+\frac{(\chi+2)!}{(\chi+4)!\,4!}X_1^2\Gamma^{(2)}+\dots \tag{87}$$

$$\dots+\frac{(\chi+r)!}{(\chi+2r)!\,r!}X_1^r\,\Gamma^{(r)},$$

т. е. *всякій деривантъ ранга r можно представить какъ линейное сочетаніе $r+1$ выраженій*

$$\Gamma_0,\ X_1\Gamma^{(1)},\ X_1^2\Gamma^{(2)},\ \ldots\ X_2\Gamma^{(\nu)},$$

*гдѣ* $\Gamma_0,\ \Gamma^{(1)},\ \Gamma^{(2)},\ \ldots\ \Gamma^{(\nu)}$ *суть коваріанты данной системы.*

Изъ этого выраженія дериванта $\mathcal{F}$, мы получаемъ

$$X_1 X_2 \mathcal{F} = 0 + \frac{(\chi+1)!}{(\chi+2)!\,1!} X_1 X_2 X_1 \Gamma^{(1)} +$$
$$+ \frac{(\chi+2)!}{(\chi+4)!\,2!} X_1 X_2 X_1^2 \Gamma^{(2)} + \ldots + \frac{(\chi+r)!}{(\chi+2r)!\,r!} X_1 X_2 X_1 \Gamma^r,$$

гдѣ первый членъ $X_1 X_2 \Gamma^{(0)}$ равенъ нулю, потому что $\Gamma^{(0)}$ коваріантъ и, слѣдовательно, $X_2\Gamma^{(0)} \equiv 0$.

На основаніи соотношенія (84) предыдущаго параграфа, мы получимъ формулу

$$X_1 X_2 \mathcal{F} = \frac{(\chi+1)!}{(\chi+2)!\,1!}(\chi+2) X_1 \Gamma^{(1)} +$$
$$+ \frac{(\chi+2)!}{(\chi+4)!\,2!}\, 2(\chi+3) X_1^2 \Gamma^{(2)} + \ldots,$$

а примѣняя символъ [ ], получимъ соотношеніе

$$[X_1 X_2 \mathcal{F}] = 0, \tag{88}$$

потому что

$$[X_1\Gamma^{(1)}] \equiv 0,\quad [X_1^2\Gamma^{(2)}] \equiv 0,\ \ldots,$$

въ чемъ не трудно убѣдиться провѣркой, если имѣть въ виду соотношеніе (84) предыдущаго параграфа.

Такъ какъ $X_2\,\mathcal{F}$ есть деривантъ типа $\mathcal{F}'$, то мы имѣемъ

$$X_2 \mathcal{F} = \Sigma \mathcal{F}';$$

подставивъ это выраженіе $X_2\mathcal{F}$ въ уравненіе (88), мы получимъ соотношеніе

$$[\Sigma X_1 \mathcal{F}'] = 0 \text{ или } \Sigma[X_1\mathcal{F}'] = 0; \tag{89}$$

такихъ соотношеній между $\Psi_{p-1}$ выраженіями $[X_1\mathcal{F}']$ мы можемъ получить $\Psi_p$; въ случаѣ $\Psi_p \geqq \Psi_{p-1}$ мы имѣемъ $\Psi_{p-1}$ равенствъ

$$[X_1\mathcal{F}'] = 0, \tag{90}$$

которыя даютъ $\Psi_{p-1}$ линейныхъ соотношеній

$$\Sigma[\varphi]=0,$$

если положить, $X_1\varphi'=\Sigma\varphi$, между $\Psi_p$ коваріантами $[\varphi]$ данной системы; слѣдовательно, существуетъ $\Psi_p-\Psi_{p-1}$ линейно-независимыхъ коваріантовъ данныхъ степеней $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k$ и порядка

$$\nu=n\mu_1+m\mu_2++\ldots+q\mu_k-2p.$$

Такимъ образомъ мы можемъ построить всѣ линейно-независимые коваріанты, пользуясь операціей [ ].

Приложимъ этотъ способъ къ наиболѣе простому случаю: построимъ коваріанты двухъ бинарныхъ формъ $f$ и $F$, линейные относительно коэффиціентовъ каждой формы, т. е. сопоставленія этихъ двухъ формъ.

Въ данномъ случаѣ мы имѣемъ

$$\varphi=f_0F_p,\quad f_1F_{p-1},\ f_2F_{p-2},\ \ldots\ f_pF_0,$$
$$\varphi'=f_0F_{p-1}, f_1F_{p-2},\ f_2F_{p-3},\ \ldots\ f_{p-1}F_0;$$

слѣдовательно $\Psi_p=p$, $\Psi_{p-1}=p-1$.

Между $p$ коваріантами

$$[\varphi]=[f_0F_p],\ [f_1F_{p-1}],\ [f_2F_{p-2}]\ \ldots\ [f_pF_0]$$

на основаніи вышеизложеннаго должны существовать $p-1$ линейныхъ соотношеній (90):

$$\begin{aligned}\mu\,[f_1F_{p-1}]+(\mu_1-p+1)\ [f_0F_p]\quad&=0,\\ (\mu-1)\ [f_2F_{p-2}]+(\mu_1-p+2)\ [f_1F_{p-1}]&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ (\mu-p+1\ [f_pF_0]\ +\qquad \mu_1[f_{p-1}F_1]&=0;\end{aligned}\tag{91}$$

Слѣдовательно, существуетъ только одинъ коваріантъ двухъ бинарныхъ формъ, линейный относительно коэффиціентовъ каждой формы и порядка $\nu = n + m - 2p$; его можно получить приложивъ операцію [ ] къ $f_0 F_p$:

$$[f_0 F_p] = f_0 F_p - \binom{p}{1} f_1 F_{p-1} + \binom{p}{2} f_2 F_{p-2} - \ldots + (-1)^p f_p F_0$$
$$= (f, F)_p, \tag{92}$$

Такимъ образомъ операція [ ] въ разсматриваемомъ случаѣ приводится къ операціи сопоставленія двухъ формъ. Слѣдовательно, операція [ ] есть въ нѣкоторомъ родѣ обобщеніе операціи сопоставленія.

## § 47. Полярный процесъ **Aronhold'a**.

*Полярнымъ процесомъ* называется слѣдующая операція:

$$D_{a,b} = b_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots + b_n \frac{\partial}{\partial a_n}. \tag{93}$$

Разсмотримъ функцію

$$f = f(a_0, a_1, \ldots a_n, b_0, b_1, \ldots b_n)$$

и замѣнимъ въ ней $a_i$ черезъ $a_i + \lambda b_i$; тогда получится функція

$$F = f(a_0 + \lambda b_0, a_1 + \lambda b_1, \ldots a_n + \lambda b_n, b_0, b_1, \ldots b_n),$$

которую можно представить въ видѣ

$$F = C_0 + \lambda C_1 + \frac{\lambda^2}{1.2} C_2 + \ldots + \frac{\lambda^\nu}{1.2\ldots\nu} C_\nu + \ldots;$$

при чемъ, конечно, $C_0 = f(a_0, a_1, \ldots a_n, b_0, b_1, \ldots b_n)$.

Приложимъ полярный процесъ $D_{a,b}$ къ функціи $F$; тогда получимъ изъ послѣдняго равенства

$$D_{a,b} F = D_{a,b} C_0 + \lambda D_{a,b} C_1 + \frac{\lambda^2}{1.2} D_{a,b} C_2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\lambda^\nu}{1.2\ldots\nu} D_{a,b} C_\nu + \ldots;$$

но съ другой стороны

$$D_{a,b} F = b_0 \frac{\partial F}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial F}{\partial a_1} + \ldots + b_n \frac{\partial F}{\partial a_n} = \frac{dF}{d\lambda},$$

т. е.

$$D_{a,b} F = C_1 + \lambda C_2 + \ldots + \frac{\lambda^{\nu-1}}{1 \, . \, 2 \ldots (\nu - 1)} C_\nu + \ldots;$$

слѣдовательно, сравнивая два выраженія для $D_{a,b} F$, мы получимъ

$$C_1 = D_{a,b} C_0 = D_{a,b} f$$

$$C_2 = D_{a,b} C_1 = D^2_{a,b} f$$

$$C_3 = D_{a,b} C_2 = D^3_{a,b} f$$

. . . . . . . .

Такимъ образомъ, мы можемъ написать

$$f(a_0 + \lambda b_0, a_1 + \lambda b_1, \ldots a_n + \lambda b_n, b_0, b_1, \ldots b_n) = \tag{94}$$

$$= f + \lambda D_{a,b} f + \frac{\lambda^2}{2.1} D_{a,b}^2 f + \ldots + \frac{\lambda^\nu}{1.2 \ldots \nu} D_{a,b}^\nu f \ldots$$

Функціи $D_{a,b} f, D_{a,b}^2 f, \ldots D_{a,b}^\nu f$ называются *полярами* функціи $f$, при чемъ $D_{a,b}^\nu f$ называется $\nu$-тою полярою функціи $f$.

Операція $D_{a,b}^\nu$ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$D_{a,b}^\nu = \left( b_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots + b_n \frac{\partial}{\partial a_n} \right)^\nu$$

$$= \sum \frac{\nu!}{k_0! \, k_1! \, k_2! \ldots k_n!} b_0^{k_0} b_1^{k_1} b^{k_2} \ldots b_n^{k_n} \frac{\partial^\nu}{\partial a_0^{k_0} \partial a_1^{k_1} \partial a_2^{k_2} \ldots \partial a_n^{k_n}},$$

гдѣ $k_0 + k_1 + k_2 + \ldots k_n = \nu$.

Разсмотримъ цѣлую раціональную и однородную функцію степени $\mu$

$$f(a) = f(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n);$$

тогда на основаніи вышеизложеннаго мы будемъ имѣть

$$f(a_0+\lambda b_0,\ a_1+\lambda b_1,\ \ldots\ a_n+\lambda b_n)=$$
$$=f(a)+\lambda D_{a,b}f(a)+\frac{\lambda^2}{2!}D^2_{a,b}f(a)+\ldots+\frac{\lambda^\mu}{\mu!}D^\mu_{a,b}f(a);$$

если въ этомъ равенствѣ замѣнить $\lambda$ черезъ $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, то получится равенство

$$f(\lambda_1 a_0+\lambda_2 b_0,\ \lambda_1 a_1+\lambda_2 b_1,\ \ldots\ \lambda_1 a_n+\lambda_2 b_n)= \tag{95}$$
$$=\lambda_1^\mu f(a)+\lambda_1^{\mu-1}\lambda_2 D_{a,b}f(a)+\frac{\lambda_1^{\mu-2}\lambda_2^2}{2!}D^2_{a,b}f(a)+\ldots+\frac{\lambda_2^\mu}{\mu!}D^\mu_{a,b}f(a);$$

переставивъ въ этомъ равенствѣ $\lambda_1$ съ $\lambda_2$ и $a_i$ съ $b_i$, мы получимъ

$$f(\lambda_2 b_0+\lambda_1 a_1,\ \lambda_2 b_1+\lambda_1 a_1,\ \ldots+\lambda_2 b_n+\lambda_1 a_n)= \tag{95'}$$
$$=\lambda_2^\mu f(b)+\lambda_2^{\mu-1}\lambda_1 D_{b,a}f(b)+\frac{\lambda_2^{\mu-2}\lambda_1^2}{2!}D^2_{b,a}f(b)+\ldots+\frac{\lambda_1^\mu}{\mu!}D^\mu_{b,a}f(b);$$

сопоставивъ это равенство съ предыдущимъ, мы получаемъ сравненіемъ коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ $\lambda_1$ и $\lambda_2$ слѣдующія соотношенія:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu!}D^\mu_{a,b}\ f(a)=f(b),\\
&\frac{1}{(\mu-1)!}D^{\mu-1}_{a,b}f(a)=D_{b,a}f(a)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{1}{(\mu-k)!}D^{\mu-k}_{a,b}f(a)=\frac{1}{k!}D^k_{b,a}f(b),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{96}$$

Если въ соотношеніи (96) положить $b_0=a_0$, $b_1=a_1,\ldots$ $b_n=a_n$, то получится равенство

$$(\lambda_1+\lambda_2)^\mu f(a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_n)=\lambda_1^\mu f(a)+\lambda_1^{\mu-1}\lambda_2\left[D_{a,b}f(a)\right]_{b=a}+$$
$$+\frac{\lambda_1^{\mu-2}\lambda_2^2}{2!}\left[D^2_{a,b}f(a)\right]_{b=a}+\ldots+\frac{\lambda_2^\mu}{\mu!}\left[D^\mu_{a,b}f(a)\right]_{b=a};$$

но съ другой стороны, развернувъ въ первой части $(\lambda_1+\lambda_2)^\mu$ по формулѣ бинома Ньютона, мы получимъ

$$(\lambda_1+\lambda_2)^\mu f(a_0,\, a_1,\, \ldots\, a_n) = \lambda_1^\mu f(a) + \left(\frac{\mu}{1}\right)\lambda_1^{\mu-1}\lambda_2 f(a) + \\ + \left(\frac{\mu}{2}\right)\lambda_1^{\mu-2}\lambda_2^2 f(a) + \ldots + \lambda_2^\mu f(a);$$

сравнивая коэффиціенты въ правыхъ частяхъ этихъ двухъ равенствъ при одинаковыхъ степеняхъ $\lambda_1$ и $\lambda_2$, мы получимъ слѣдующія соотношенія:

$$\begin{aligned} &[D_{a,b} f(a)]_{b=a} = \mu f(a), \\ &[D^2_{a,b} f(a)]_{b=a} = \mu(\mu-1) f(a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[D^k_{a,b} f(a)]_{b=a} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1) f(a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (96'$$

Разсмотримъ бинарную форму $f(x_1,\, x_2)$ $n$-го порядка. На основаніи вышеизложеннаго мы можемъ написать

$$f(x_1+\lambda y_1,\; x_2+\lambda y_2) = f(x) + \lambda D_{x,y} f(x) + \\ + \frac{\lambda^2}{2!} D_{x,y}{}^2 f(x) + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} D_{x,y}{}^n f(x), \qquad (97)$$

гдѣ

$$\begin{aligned} &D_{x,y} f(x) = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \\ &D^2_{x,y} f(x) = y_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} + 2y_1 y_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} + y_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2} = \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 f, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (98) \\ &D_{x,y}{}^n f(x) = y_1{}^n \frac{\partial^n f}{\partial x_1{}^n} + \left(\frac{n}{1}\right) y_1{}^{n-1} y_2 \frac{\partial^n f}{\partial x_1{}^{n-1}\partial x_2} + \ldots + y_2{}^n \frac{\partial^n f}{\partial x_2{}^n} = \\ &\qquad = \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^n f \end{aligned}$$

## § 48. Полярный процесъ Aronhold'а какъ инваріантный процесъ.

Полярнымъ процесомъ можно воспользоваться для построенія новыхъ инваріантовъ или коваріантовъ системы бинарныхъ формъ, если извѣстны нѣкоторые инваріанты или коваріанты этой системы.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть мы имѣемъ коваріантъ $\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2)$ системы бинарныхъ формъ $n$-го порядка:

$$f_1(x_1, x_2), \; f_2(x_1, x_2), \; \ldots \; f_k(x_1, x_2);$$

не трудно доказать слѣдующее предложеніе:

*Если надъ коваріантомъ* $\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2)$ *системы бинарныхъ формъ совершить процесъ* $D_{a,b}$, *то въ результатѣ получится снова коваріантъ этой же системы.*

Для доказательства этого предложенія достаточно только показать, что $D_{a,b}\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2)$ совсѣмъ не измѣняется, когда перемѣнныя бинарныхъ формъ подвергаются какой-нибудь унимодулярной подстановкѣ $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$, такъ какъ процесъ $D_{a,b}$, конечно, не нарушаетъ однородности функціи $\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2)$. Но при унимодулярномъ преобразованіи перемѣнныхъ мы будемъ имѣть соотношенія:

$$f_1(x_1, x_2) = \varphi_1(y_1, y_2), \; f_2(x_1, x_2) = \varphi_2(y_1, y_2), \; \ldots\ldots$$

$$\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2) = \Gamma(\alpha, \beta, \ldots \sigma; y_1, y_2);$$

умноживъ обѣ части втораго соотношенія на $\lambda$ и сложивъ его почленно съ первымъ, мы получимъ

$$(a_0 + \lambda b_0)x_1^n + \binom{n}{1}(a_1 + \lambda b_1)x_1^{n-1}x_2 + \ldots + (a_n + \lambda b_n)x_2^n =$$

$$= (\alpha_0 + \lambda\beta_0)y_1^n + \binom{n}{1}(\alpha_1 + \lambda\beta_1)y_1^{n-1}y_2 + \ldots + (\alpha_n + \lambda\beta_n)y_2^n;$$

слѣдовательно, мы можемъ написать

$$\Gamma(a + \lambda b, b, \ldots s; x_1, x_2) = \Gamma(\alpha + \lambda\beta, \beta, \ldots \sigma; x_1, x_2);$$

если развернуть обѣ части этого равенства, то мы получимъ: для лѣвой —

$$\Gamma(a, b, \ldots) + \lambda D_{a,b}\Gamma(a, b, \ldots) + \frac{\lambda^2}{2!} D^2_{a,b}\Gamma(a, b, \ldots) + \ldots,$$

и для правой —

$$\Gamma(\alpha, \beta, \ldots) + \lambda D_{\alpha,\beta}\Gamma(\alpha, \beta, \ldots) + \frac{\lambda^2}{2!} D^2_{\alpha,\beta}\Gamma(\alpha, \beta, \ldots) + \ldots;$$

сравнивая коэффиціенты при первой степени $\lambda$ въ этихъ выраженіяхъ, мы получимъ равенство

$$D_{a,b}\,\Gamma(a, b, \ldots s; x_1, x_2) = D_{\alpha,\beta}\,\Gamma(\alpha, \beta, \ldots \sigma; y_1, y_2), \qquad (99)$$

доказывающее справедливость нашего предложенія.

*Примѣръ 1.* Выраженіе $a_0 a_2 - a_1^2$ служитъ инваріантомъ двухъ бинарныхъ формъ втораго порядка

$$f_1(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$
$$f_2(x_1, x_2) = b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2;$$

примѣнивъ къ нему процесъ $D_{a,b}$, мы получимъ новый инваріантъ этихъ двухъ формъ:

$$D_{a,b}(a_0 a_2 - a_1^2) = b_0 a_2 + b_1(-2a_1) + b_2 a_0 =$$
$$= b_0 a_2 - 2b_1 a_1 \quad + b_2 a_0,$$

который есть ничто другое какъ второе сопоставленіе $(f_1, f_2)_2$ двухъ данныхъ формъ.

Мы знаемъ, что коваріантъ бинарной формы $f(x_1, x_2)$ съ перемѣнными $\xi_1, \xi_2$ есть совмѣстный инваріантъ двухъ формъ

$$f(\xi_1, \xi_2) \text{ и } \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2.$$

Сама бинарная форма есть коваріантъ для ней самой; слѣдовательно, $f(\xi_1, \xi_2)$ служитъ совмѣстнымъ инваріантомъ системы трехъ бинарныхъ формъ

$$f(x_1, x_2), \ \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2, \ \eta_2 x_1 - \eta_1 x_2;$$

а отсюда мы заключаемъ, что поляры формы $f(\xi_1, \xi_2)$

$$D_{\xi,\eta} f(\xi_1, \xi_2), \ D^2_{\xi,\eta} f(\xi_1, \xi_2), \ \ldots$$

суть инваріанты указанной системы трехъ бинарныхъ формъ. Слѣдовательно, поляры формы $f(\xi_1, \xi_2)$ съ перемѣнными $x_1$, $x_2$

$$D_{\xi,x} f(\xi_1, \xi_2), \; D^2_{\xi,x} f(\xi_1, \xi_2), \ldots,$$

гдѣ

$$D^k_{\xi,x} f(\xi_1, \xi_2) = x_1^k \frac{\partial f}{\partial \xi_1^k} + \binom{n}{1} x_1^{k-1} x_2 \frac{\partial f}{\partial \xi_1^{k-1} \partial \xi_2} + \ldots + x_2^k \frac{\partial f}{\partial \xi_2^k}$$

суть совмѣстные коваріанты двухъ бинарныхъ формъ

$$f(x_1, x_2) \text{ и } \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2.$$

*Примѣръ 2.* Разсмотримъ бинарную форму

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2;$$

поляры формы $f(\xi_1, \xi_2) = a_0 \xi_1^2 + 2a_1 \xi_1 \xi_2 + a_2 \xi_2^2$:

$$\frac{1}{2} D_{\xi,x} f(\xi_1, \xi_2) = x_1(a_0 \xi_1 + a_1 \xi_2) + x_2(a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2) =$$
$$= a_0 \xi_1 x_1 + a_1(\xi_1 x_2 + \xi_2 x_1) + a_2 \xi_2 x_2,$$

$$\frac{1}{2} D_{\xi,x}^2 f(\xi_1, \xi_2) = x_1^2 . a_0 + 2x_1 x_2 . a_1 + x_2^2 . a_2 =$$
$$= a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

суть совмѣстные коваріанты двухъ бинарныхъ формъ

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 \text{ и } \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2,$$

при чемъ коваріантъ $\frac{1}{2} D_{\xi,x} f(\xi_1, \xi_2)$ есть ничто другое какъ первое сопоставленіе $(f, f_1)_1$ двухъ данныхъ формъ.

Если мы разсмотримъ двѣ бинарныхъ формы

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n,$$

$$F(x_1, x_2) = (\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2)^n = \xi_2^n x_1^n - \binom{n}{1} \xi_2^{n-1} \xi_1 x_1^{n-1} x_2 +$$
$$+ \ldots + (-1)^n \xi_1^n x_2^n,$$

то на основаніи вышеизложеннаго въ этомъ параграфѣ мы можемъ сказать, что выраженіе

$$\frac{\partial J}{\partial a_0}\xi_2^{\,n}-\frac{\partial J}{\partial a_1}\xi_2^{\,n-1}\xi_1+\ldots+(-1)^n\frac{\partial J}{\partial a_n}\xi_1^{\,n},$$

гдѣ $J$ обозначаетъ инваріантъ формы $f(x_1,\ x_2)$, есть совмѣстный инваріантъ формы $f(x_1,\ x_2)$ и формы $\xi_2 x_1-\xi_1 x_2$; слѣдовательно, если въ этомъ выраженіи $\xi_1,\ \xi_2$ замѣнить черезъ $x_1,\ x_2$, то получится коваріантъ формы $f(x_1,\ x_2)$, т. е. *операція*

$$\frac{\partial}{\partial a_0}x_2^{\,n}-\frac{\partial}{\partial a_1}x_2^{\,n-1}x_1+\ldots+(-1)^n\frac{\partial}{\partial a_n}x_1^{\,n},\tag{100}$$

*примѣненная къ какому-нибудь инваріанту бинарной формы* $f(x_1,\ x_2)$, *обращаетъ послѣдній въ коваріантъ этой формы.* Получаемый такимъ образомъ коваріантъ Cayley назвалъ *эвектантомъ* бинарной формы. Этой операціей Cayley воспользовался для приведенія бинарной формы къ каноническому виду [1]).

*Примѣръ 3.* Если къ инваріанту $J=a_0^2a_3^2+4a_0a_2^3+4a_1^3a_3-3a_1^2a_2^2-6a_0a_1a_2a_3$ бинарной формы 3-го порядка примѣнить разсматриваемую нами операцію, то получится ея эвектантъ:

$$(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)\,x_1^3+3\,(a_0a_1a_3-2a_0a_2^2+a_1^2a_2)\,x_1^2x_2-$$
$$-3\,(a_0a_2a_3-2a_1^2a_3+a_1a_2^2)\,x_1x_2^2-(a_0a_3^2-3a_1a_2a_3+2a_2^3)\,x_2^2.$$

## § 49. Замѣна нѣкоторыхъ бинарныхъ формъ данной системы коваріантами остальныхъ формъ системы.

При построеніи инваріантовъ и коваріантовъ бинарныхъ формъ можно пользоваться слѣдующимъ способомъ.

Пусть мы имѣемъ систему бинарныхъ формъ

$$f_1,\ f_2,\ \ldots f_k,\ F_1,\ F_2,\ \ldots F_r,$$

---

1) Faa di Bruno. *Einleitung in die Theorie der binären Formen,* S. 173. Leipzig. 1881.

и пусть цѣлая раціональная функція $J(a, b, \ldots s, p', p'', \ldots)$, однородная относительно коэффиціентовъ каждой формы данной системы, служитъ совмѣстнымъ коваріантомъ данной системы бинарныхъ формъ; тогда эта функція $J$ должна удовлетворять соотношенію

$$J(\alpha, \beta, \ldots \sigma, \pi', \pi'', \ldots) = J(a, b, \ldots s, p', p'', \ldots) \qquad (101)$$

для всякой унимодулярной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}_{\Delta=1}$. Замѣнимъ формы $F_1, F_2, \ldots F_r$ совмѣстными коваріантами остальныхъ формъ $f_1, f_2, \ldots f_k$ данной системы, тогда инваріантъ $J(a, b, \ldots s, p', p'', \ldots)$ обратится въ функцію $J_1(a, b, \ldots s)$, конечно — цѣлую, раціональную и однородную относительно коэффиціентовъ каждой формы остаточной системы

$$f_1, f_2, \ldots f_k.$$

Такъ какъ при унимодулярной подстановкѣ мы имѣемъ равенства

$$f_1(x_1, x_2) = \varphi_1(y_1, y_2),\ f_2(x_1, x_2) = \varphi_2(y_1, y_2), \ldots f_k(x_1, x_2) = \varphi_k(y_1 y_2),$$

гдѣ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ суть преобразованныя формы, и какъ слѣдствія для коваріантовъ этой остаточной системы — равенства

$$F_1(x_1, x_2) = \Phi_1(y_1, y_2), F_2(x_1, x_2) = \Phi_2(y_1, y_2), \ldots F(x_1, x_2) = \Phi_2(y_1 y_2),$$

то будетъ имѣть мѣсто равенство

$$J_1(\alpha, \beta, \ldots \sigma) = J_1(a, b, \ldots s),$$

которое показываетъ, что функція $J_1(a, b, \ldots s)$ служитъ инваріантомъ остаточной системы

$$f_1, f_2, \ldots f_k.$$

Полученный нами результатъ можно формулировать въ слѣдующее предложеніе:

*Если въ системѣ бинарныхъ формъ замѣнить часть формъ совмѣстными коваріантами остальныхъ, то прежніе инваріанты обратятся въ инваріанты остаточной системы.*

Изъ этого предложенія, какъ слѣдствіе, вытекаетъ другое предложеніе:

*Если въ системѣ бинарныхъ формъ замѣнить часть формъ совмѣстными коваріантами остальныхъ, то прежніе коваріанты обратятся въ коваріанты остаточной системы.*

*Примѣръ 1.* Двѣ бинарныхъ формы 2-го порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$
$$F(x_1, x_2) = b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2$$

имѣютъ инваріантъ

$$(f, F)_2 = a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0;$$

замѣнивъ $F$ черезъ $f$, мы получимъ инваріантъ

$$a_0 a_2 - 2a_1 a_1 + a_2 a_0 = 2(a_0 a_2 - a_2^2)$$

бинарной формы $f(x_1, x_2)$.

*Примѣръ 2.* Двѣ бинарныхъ формы

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3,$$
$$F(x_1, x_2) = b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2$$

имѣютъ коваріантъ

$$(f, F)_1 = f_0 F_1 - f_1 F_0 = (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1^3 + \ldots;$$

если $F(x_1, x_2)$ замѣнить черезъ Гессевскій коваріантъ

$$2(a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + 2(a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2$$

бинарной формы $f(x_1, x_2)$, то получится коваріантъ

$$\Gamma_{3,3} = [a_0(a_0 a_3 - a_1 a_2) - 2a_1(a_0 a_2 - a_1^2)] x_1^3 + \ldots$$
$$= (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3) x_1^3 + \ldots$$

бинарной формы $f(x_1, x_2)$.

Зная главный членъ этого коваріанта, не трудно составить его выраженіе черезъ одностороннія производныя формы $f(x_1, x_2)$:

$$\Gamma_{3,3} = f_0^2 f_3 - 3f_0 f_1 f_2 + 2f_1^3.$$

*Примѣръ 3.* Бинарная форма 3-го порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$$

имѣетъ Гессевскій коваріантъ

$$(a_0 a_2 - a_1^2) x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2) x_2^2;$$

этотъ же коваріантъ имѣетъ инваріантъ

$$(a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2),$$

который служитъ, конечно, инваріантомъ данной формы $f(x_1, x_2)$ третьяго порядка.

## § 50. Детерминантъ системы бинарныхъ формъ какъ совмѣстный инваріантъ.

Разсмотримъ систему $n+1$ бинарныхъ формъ $n$-го порядка

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_n x_2^n,$$

$$f_1(x_1, x_2) = b_0 x_1^n + \binom{n}{1} b_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + b_n x_2^n,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$f_n(x_1, x_2) = s_0 x_1^n + \binom{n}{1} s_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + s_n x_2^n.$$

Обозначимъ детерминантъ изъ коэффиціентовъ этихъ формъ черезъ $D$, т. е.

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ . & . & . & . & . \\ s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_n \end{vmatrix}. \tag{102}$$

Равенство нулю этого детерминанту показываетъ, что между данными формами существуетъ линейная зависимость

$$c_0 f + c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n \equiv 0.$$

Не трудно показать, что детерминантъ $D$ есть совмѣстный коваріантъ данной системы бинарныхъ формъ.

Детерминантъ $D$ есть однородный относительно коэффиціентовъ каждой формы многочленъ.

Кромѣ того, каждый членъ детерминантъ $D$ имѣетъ вѣсъ

$$0+1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

слѣдовательно $D$ есть изобарный многочленъ съ вѣсомъ $\frac{n(n+1)}{2}$.

Наконецъ, детерминантъ $D$ удовлетворяетъ уравненію въ частныхъ производныхъ

$$X_2(J)=0;$$

и дѣйствительно, мы имѣемъ

$$\begin{aligned}X_2(D)=\, & a_0\frac{\partial D}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial D}{\partial a_2}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial D}{\partial a_n}\\ & +b_0\frac{\partial D}{\partial b_1}+2b_1\frac{\partial D}{\partial b_2}+\ldots+nb_{n-1}\frac{\partial D}{\partial b_n}\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +s_0\frac{\partial D}{\partial s_1}+2s_1\frac{\partial D}{\partial s_2}+\ldots+ns_{n-1}\frac{\partial D}{\partial s_n},\end{aligned}$$

или, обозначивъ субдетерминанты черезъ $A_0$, $A_1$, ... $B_0$, $B_1$, ..., мы получимъ выраженіе

$$\begin{aligned}X_2(D)=\, & a_0A_1+2a_1A_2+\ldots+na_{n-1}A_n\\ & +b_0B_1+2b_1B_2+\ldots+nb_{n-1}B_n\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (103)\\ & +s_0S_1+2s_1S_2+\ldots+ns_{n-1}S_n,\end{aligned}$$

въ которомъ вертикальные столбцы суть нули, слѣдовательно $X_2(D)\equiv 0$.

Такимъ образомъ, детерминантъ $D$ удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ инваріанта, потому что его эксцессъ

$$\chi = n\mu_0 + n\mu_1 + \ldots + n\mu_n - 2p =$$
$$= n.1 + n.1 + \ldots + n.1 - 2.\frac{n(n+1)}{2}$$

равенъ нулю.

*Примѣръ 1.* Двѣ бинарныхъ формъ 1-го порядка

$$a_0 x_1 + a_1 x_2,$$
$$b_0 x_1 + b_1 x_2,$$

имѣютъ совмѣстный инваріантъ

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}.$$

*Примѣръ 2.* Три бинарныхъ формы 2-го порядка

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$
$$b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2,$$
$$c_0 x_1^2 + 2c_1 x_1 x_2 + c_2 x_2^2$$

имѣютъ совмѣстный инваріантъ

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Разсмотримъ систему $k+2$-хъ бинарныхъ формъ

$$f,\ f_1,\ f_2,\ \ldots f_k,\ \xi = \xi_2 x_1 - \xi_1 x_2.$$

Изъ § 47 слѣдуетъ, что поляры

$$D_{\xi,x}\, f(\xi_1, \xi_2),\ D_{\xi,x}\, f_1(\xi_1 \xi_2),\ \ldots D_{\xi,x}\, f_k(\xi_1 \xi_2),$$
$$D^2_{\xi,x}\, f(\xi_1, \xi_2),\ D^2_{\xi,x}\, f_1(\xi_1 \xi_2),\ \ldots D^2_{\xi,x}\, f_k(\xi_2 \xi_2),$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

суть совмѣстные коваріанты данной системы $k+2$-хъ формъ.

Предположивъ, что порядки формъ $f$, $f_1$, $f_2$, $\ldots f_k$ не ниже $k$, мы будемъ въ состояніи построить $k$-ыя поляры

$$D^k_{\xi,x}\, f(\xi_1, \xi_2),\ D^k_{\xi,x}\, f_1(\xi_1, \xi_2),\ \ldots\ D^k_{\xi,x}\, f_k(\xi_1\, \xi_2),$$

служащія коваріантами $k$-го порядка данной системы бинарныхъ формъ. Детерминантъ изъ коэффиціентовъ этихъ коваріантовъ имѣетъ видъ

$$D(\xi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^k f}{\partial \xi_1^{\,k}} & \dfrac{\partial^k f}{\partial \xi_1^{\,k-1}\,\partial \xi_2} & \ldots & \dfrac{\partial^k f}{\partial \xi_2^{\,k}} \\ \dfrac{\partial^k f_1}{\partial \xi_1^{\,k}} & \dfrac{\partial^k f_1}{\partial \xi_1^{\,k-1}\,\partial \xi_2} & \ldots & \dfrac{\partial^k f_1}{\partial \xi_2^{\,k}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^k f_k}{\partial \xi_1^{\,k}} & \dfrac{\partial^k f_k}{\partial \xi_1^{\,k-1}\,\partial \xi_2} & \ldots & \dfrac{\partial^k f_k}{\partial \xi_2^{\,k}} \end{vmatrix} \tag{104}$$

и, конечно, служитъ инваріантомъ какъ системы формъ

$$D^k_{\xi,x}\, f(\xi_1, \xi_2),\ D^k_{\xi,x}\, f_1(\xi_1, \xi_2),\ \ldots\ D^k_{\xi,x}\, f_k(\xi_1, \xi_2),$$

такъ и данной системы бинарныхъ формъ (§ 48), а слѣдовательно это выраженіе $D$, если въ немъ написать вмѣсто $\xi_1$, $\xi_2$ перемѣнныя $x_1$, $x_2$, будетъ служить коваріантомъ системы $k+1$ бинарныхъ формъ

$$f,\ f_1,\ f_2,\ \ldots f_k.$$

*Примѣръ 3.* Разсмотримъ систему двухъ бинарныхъ формъ

$$f = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,\quad f_1 = b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2;$$

для нихъ на основаніи предыдущаго мы будемъ имѣть коваріантъ

$$D = \begin{vmatrix} a_0 x_1 + a_1 x_2, & a_2 x_1 + a_2 x_2 \\ b_0 x_1 + b_1 x_2, & b_1 x_1 + b_2 x_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) x_1 x_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_2^2,$$

который есть ничто другое какъ первое сопоставленіе $(f, f_1)_1$ двухъ данныхъ формъ (§ 44).

## § 51. Дифференціальный процесъ Boole'я.

Пусть мы имѣемъ двѣ бинарныхъ формы

$$f(x_1, x_2) \text{ и } F(x_1, x_2),$$

которыя посредствомъ линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ съ модулемъ $\Delta$ переходятъ въ формы

$$\varphi(y_1, y_2) \text{ и } \Phi(y_1, y_2).$$

Не трудно показать, что имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_2}, -\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\Phi(y_1, y_2) = \Delta^n f\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right)F(x_1, x_2), \qquad (105)$$

т. е. что процесъ

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right),$$

будучи примѣненъ къ формѣ $F(x_1, x_2)$, даетъ совмѣстный коваріантъ двухъ данныхъ формъ $f$ и $F$.

Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ подстановку

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$
$$x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2;$$

слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\alpha + \frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\gamma,\\ \frac{\partial}{\partial y_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\beta + \frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\delta;\end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

отсюда мы имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{1}{\Delta}\left\{\alpha\frac{\partial}{\partial y_2} + \beta\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\right\}\\ -\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{1}{\Delta}\left\{\gamma\frac{\partial}{\partial y_2} + \delta\left(-\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \qquad (106')$$

т. е. операціи $\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}$ переходятъ въ операціи $\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial y_2}, -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial y_1}$ посредствомъ той же линейной подстановки $S\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, посредствомъ которой $x_1$, $x_2$ переходятъ въ $y_1$, $y_2$. Точно также можно показать, что операціи $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$, $-\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ переходятъ въ $\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$, $-\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2}$, $\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ какъ $x_1^2$, $x_1 x_2$, $x_2^2$ переходятъ въ $y_1^2$, $y_1 y_2$, $y_2^2$, и т. д. Слѣдовательно, мы имѣемъ полное право написать равенство

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \varphi\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial y_2}, -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial y_1}\right)$$

или

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_2}, -\frac{\partial}{\partial y_1}\right) = \Delta^n f\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right),$$

гдѣ всякую операцію $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^k$ надо считать какъ операцію $\frac{\partial^{i+k}}{\partial x_1^i \partial x_2^k}$. Примѣнивъ эти операціи къ равенству

$$\Phi(y_1, y_2) = F(x_1, x_2)$$

мы получимъ равенство

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_2}, -\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\Phi(y_1, y_2) = \Delta^n f\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right)F(x_1, x_2),$$

справедливость котораго желали доказать и которое впервые было получено Boole'емъ[1]).

Если примѣнить процесъ $f\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ къ коваріанту $\Gamma(x_1, x_2)$ бинарной формы $f(x_1, x_2)$, то получится, конечно, новый коваріантъ этой же формы. Точно также примѣняя процесъ $\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$ къ какому-нибудь другому коваріанту $\Gamma_1(x_1, x_2)$ мы получимъ новый коваріантъ данной бинарной формы. Такимъ образомъ посредствомъ процеса Boole'я можно получить изъ одного коваріанта цѣлый рядъ новыхъ коваріантовъ.

---

1) Boole. Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Vol. 6. 1851.

Конечно, и въ случаѣ системы бинарныхъ формъ можно пользоваться этимъ замѣчательнымъ процесомъ для построенія новыхъ коваріантовъ.

*Примѣръ 1.* Возьмемъ бинарную форму порядка $n = 2\nu$ и примѣнимъ процесъ

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \ -\frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

къ самой бинарной формѣ $f(x_1, x_2)$; тогда получится извѣстный намъ инваріантъ второй степени

$$2\left[a_0 a_{2\nu} - \binom{2\nu}{1} a_1 a_{2\nu-1} + \binom{2\nu}{2} a_2 a_{2\nu-2} - \ldots + (-1)^\nu \frac{1}{2}\binom{2\nu}{\nu} a_\nu^2\right] \ldots$$

*Примѣръ 2.* Возьмемъ систему двухъ бинарныхъ формъ втораго порядка

$$a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2,$$

$$b_0 x_1^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2;$$

примѣнимъ процесъ

$$a_0 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - 2a_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$$

ко второй бинарной формѣ; тогда получится извѣстный намъ совмѣстный инваріантъ данной системы формъ:

$$2(a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0).$$

## § 52. Видоизмѣненіе процеса Bool'я, предложенное Sylvester'омъ.

Boole, нашедшій замѣчательный процесъ, изложенный въ предыдущемъ параграфѣ, не обратилъ вниманія на то, что замѣна въ бинарной формѣ $f(x_1, x_2)$ ея перемѣнныхъ соотвѣтственно *дѣйствительными* производными $\frac{\partial F}{\partial x_2}, -\frac{\partial F}{\partial x_1}$ даетъ выраженіе, удовлетворяющее равенству

$$\varphi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, \ -\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\right) = \Delta^n f\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}, \ -\frac{\partial F}{\partial x_1}\right), \tag{107}$$

и, слѣдовательно, *служащее совмѣстнымъ коваріантомъ двухъ данныхъ формъ* $f$ и $F$. Послѣднее обстоятельство было замѣчено Sylvester'омъ [1]); его не трудно пояснить слѣдующимъ образомъ:

Если перемѣнныя $x_1$, $x_2$ переходятъ въ $y_1$, $y_2$ посредствомъ подстановки

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,$$

$$x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2,$$

то мы получаемъ равенство

$$f(x_1, \ x_2) = \varphi(y_1, \ y_2);$$

это равенство не нарушится, если мы возьмемъ вмѣсто двухъ паръ перемѣнныхъ $(x_1, x_2)$, $(y_1, y_2)$ другія двѣ пары перемѣнныхъ $(X_1, X_2)$, $(Y_1, Y_2)$, когредіентныхъ съ первыми, т. е. связанныхъ между собою соотношеніемъ

$$X_1 = \alpha\, Y_1 + \beta\, Y_2,$$

$$X_2 = \gamma\, Y_1 + \delta\, Y_2;$$

но такими перемѣнными служатъ

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}, -\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) \text{ и } \left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right),$$

потому что изъ равенства

$$F(x_1, \ x_2) = \Phi(y_1, \ y_2)$$

дифференцированіемъ мы получаемъ соотношенія:

---

1) Sylvester. Cambridge and Dublin Matematical Journal, Vol. 7. 1852.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} &= \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_1}\alpha \quad + \frac{\partial F}{\partial x_2}\gamma, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} &= \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_1}\beta \quad + \frac{\partial F}{\partial x_2}\delta;\end{aligned} \tag{108}$$

откуда имѣемъ соотношенія:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_2} &= \alpha \cdot \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} - \beta \cdot \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \\ -\frac{\partial F}{\partial x_1} &= \gamma \cdot \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} - \delta \cdot \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial y_1},\end{aligned} \tag{108'}$$

подтверждающія вышесказанное.

На основаніи всего этого мы можемъ написать равенство

$$f\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}, \ -\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) = \varphi\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, \ -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\right),$$

изъ котораго непосредственно вытекаетъ соотношеніе Sylvester'а

$$\varphi\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, \ -\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\right) = \Delta^n f\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}, \ -\frac{\partial F}{\partial x_1}\right),$$

показывающее то, что $f\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}, \ -\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)$ *служитъ совмѣстнымъ коваріантомъ двухъ формъ* $f$ *и* $F$.

*Примѣръ 1.* Замѣнимъ въ бинарной формѣ 2-го порядка

$$f_2(x_1, \ x_2) = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

перемѣнныя $x_1$, $x_2$ соотвѣтственно черезъ

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 2(a_1 x_1 + a_2 x_2), \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -2(a_0 x_1 + a_1 x_2);\end{aligned}$$

тогда получится коваріантъ разсматриваемой формы

$$\begin{aligned}\Gamma_{3,2} &= 4 \,.\, (a_0 a_2 - a_1^2) \,.\, f_2 \\ &= 4 \,.\, \Gamma_{2,0} \,.\, f_2.\end{aligned}$$

*Примѣръ 2.* Разсмотримъ двѣ бинарныхъ формы:

$$\begin{aligned}f_1(x_1,\ x_2) &= a_0 x_1 + a_1 x_2, \\ F_2(x_1,\ x_2) &= b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2,\end{aligned}$$

и замѣнимъ $x_1$, $x_2$ во второй бинарной формѣ соотвѣтственно черезъ производныя

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = a_1, \quad -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -a.$$

первой; тогда получится совмѣстный инваріантъ

$$J_{2,1} = b_0 a_1^2 - 2b_1 a_0 a_1 + b_2 a_0^2$$

двухъ данныхъ формъ (§ 19, *Прим. 3.*)

## § 53. Преобразованіе коваріантовъ Hermite'а какъ обобщеніе преобразованія Sylvester'а въ § 52.

Въ § 22 мы показали, что система бинарныхъ формъ имѣетъ $N-3$ основныхъ въ смыслѣ Aronhold'а инваріантовъ, если $N$ есть число коэффиціентовъ данныхъ формъ; черезъ эти основные инваріанты всѣ остальные инваріанты данной системы выражаются алгебраически, т. е. вообще говоря ирраціонально. Является вопросъ, нельзя ли выбрать

$$N-3+\lambda$$

такихъ инваріантовъ данной системы, чтобы всѣ остальные ея инваріанты выражались бы черезъ нихъ раціонально, и чтобы между избранными $N-3+\lambda$ инваріантами существовало $\lambda$ соотношеній.

Этотъ вопросъ былъ впервые поставленъ и разрѣшенъ въ положительномъ смыслѣ французскимъ ученымъ Hermite'омъ[1]). Clebsch[2]) показалъ, что возможно множество рѣшеній этого вопроса.

Прежде, чѣмъ приступить къ рѣшенію этого вопроса, мы изложимъ преобразованіе Hermite'a.

Изъ главы III намъ извѣстно, что совмѣстный коваріантъ системы бинарныхъ формъ

I) $$f_1,\ f_2,\ \ldots f_k,$$

по замѣнѣ въ немъ $x_1$, $x_2$ черезъ перемѣнныя $\xi_1$, $\xi_2$, можно разсматривать какъ совмѣстный инваріантъ этой же системы и еще линейной формы

II) $$\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2.$$

Пусть мы имѣемъ два такихъ коваріанта $\Gamma(\xi_1,\ \xi_2)$ и $\Gamma_1(\xi_1,\ \xi_2)$, порядковъ $\nu$ и $\nu_1$.

Въ коваріантѣ $\Gamma_1(\xi_1,\ \xi_2)$ перемѣнныя $\xi_1$, $\xi_2$ можно замѣнить какими угодно когредіентными перемѣнными $x_1$, $x_2$ или $X_1$, $X_2$, и т. д. или же линейными сочетаніями когредіентныхъ съ $\xi_1$, $\xi_2$ перемѣнныхъ; напримѣръ, возьмемъ

$$\xi_1 = \eta_1 x_1 + \eta_2 X_1,$$
$$\xi_2 = \eta_1 x_2 + \eta_2 X_2.$$

Въ этихъ двухъ выраженіяхъ за $X_1$, $X_2$ можно взять $\frac{\partial \Gamma(x_1, x_2)}{\partial x_2}$, $-\frac{\partial \Gamma(x_1, x_2)}{\partial x_1}$, потому что изъ § 52 намъ извѣстна когредіентность $x_1$, $x_2$ съ $\frac{\partial \Gamma(x_1, x_2)}{\partial x_2}$, $-\frac{\partial \Gamma(x_1, x_2)}{\partial x_1}$.

Слѣдовательно, *выраженіе*

$$\Gamma_1\left\{\eta_1 x_1 + \eta_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial x_2},\ \ \eta_1 x_2 - \eta_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}\right\} \tag{109}$$

---

1) Hermite. *Sur la théorie des fonctions homogénes à deux indéterminées.* Cambridge and Dublin mathematical Journal, Vol. 9; Crelle's Journal, Bd. 52. 1856.

2) Clebsch. *Theorie der binären algebraischen Formen.* S. 317. Leipzig. 1872.

*при всякихъ значенія* $\eta_1, \eta_2$ *есть коваріантъ данной бинарной формы* $f(x_1, x_2)$.

Очевидно, что это преобразованіе коваріантовъ есть обобщеніе преобразованія Sylvester'а въ § 52; оно было впервые предложено Hermite'омъ [1]).

Развернувъ это послѣднее выраженіе по строкѣ Тэйлора, мы получимъ цѣлый многочленъ степени $\nu$ относительно $\eta_1, \eta_2$, коэффиціенты котораго, конечно, должны быть коваріантами данной бинарной формы $f(x_1, x_2)$; въ послѣднемъ не трудно убѣдиться слѣдующимъ образомъ: коэффиціентъ при $\eta_1^{\nu_1-k}\eta_2^k$, помимо числоваго множителя, есть ничто другое какъ поляра

$$D^k_{x,X}\Gamma_1(x_1,x_2)=X_1^k\frac{\partial^k\Gamma_1}{\partial x_1{}^k}+\binom{\nu_1}{1}X_1^{k-1}X_2\frac{\partial^k\Gamma_1}{\partial x_1{}^{n-1}\partial x_2}+\ldots+X_2^k\frac{\partial^k\Gamma_1}{\partial x_2{}^k},$$

въ которой $X_1$, $X_2$ замѣнены черезъ когредіентныя съ ними $\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}$, $-\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}$; слѣдовательно, на основаніи § 52 это будетъ коваріантъ данной бинарной формы.

## § 54. Система союзныхъ формъ.

Приложимъ преобразованіе Hermite'а къ самой бинарной формѣ $f(x_1, x_2)$:

$$f\left(\eta_1x_1+\eta_2\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2},\ \eta_1x_2-\eta_2\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\right)=\Gamma_0\eta_1^n+\binom{n}{1}\Gamma_1\eta_1^{n-1}\eta_2+\ldots+\Gamma_n\eta_2^n; \tag{110}$$

здѣсь коэффиціенты $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ имѣютъ такія выраженія:

$$\Gamma_0=f(x_1, x_2),$$

$$n\Gamma_1=\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и суть коваріанты данной бинарной формы $f(x_1, x_2)$.

1) Hermite. *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées.* Crelle's Journal. Bd. 52. 1856.

Система коваріантовъ

$$\Gamma,\ f,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \ldots \Gamma_n$$

называется *системою союзныхъ (associé) съ коваріантомъ* Г *формъ.*

Теперь не трудно рѣшить вопросъ, о которомъ было сказано въ началѣ этого параграфа: система союзныхъ формъ и есть именно та система $(n+3-3)+2$ коваріантовъ, черезъ которые можно выразить *раціонально* всякій коваріантъ данной формы $f(x_1,\ x_2)$ и между которыми существуютъ два соотношенія.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\Gamma_1(\xi_1,\ \xi_2)$ есть другой коваріантъ данной бинарной формы $f(x_1,\ x_2)$, отличный отъ коваріанта $\Gamma(x_1,\ x_2)$; пусть его развернутая форма будетъ такая:

$$c_0\,\xi_1^{\nu_1}+\binom{\nu_1}{1}c_1\,\xi_1^{\nu_1-1}\xi_2+\ldots+c_{\nu_1}\,\xi_2^{\nu_1}.$$

Преобразуемъ этотъ коваріантъ посредствомъ линейной подстановки

$$\begin{aligned}\xi_1&=\eta_1 x_1+\eta_2\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2},\\ \xi_2&=\eta_1 x_2-\eta_2\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1},\end{aligned}\qquad(111)$$

которой модуль равенъ

$$x_1\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}=-\nu\,.\,\Gamma;$$

тогда мы можемъ написать равенство

$$(-\nu)^k\,\Gamma^k\,.\,\Gamma_1\left(\eta_1 x_1+\eta_2\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2},\ \eta_1 x_2-\eta_2\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\right)=\Gamma_1'(\eta_1,\ \eta_2)=$$

$$=C_0\,\eta_1^{\nu_1}+\binom{\nu_1}{1}C_1\eta_1^{\nu_1-1}\eta_2+\ldots+C_{\nu_1}\eta_2^{\nu_1},$$

гдѣ коэффиціенты $C_0,\ C_1,\ \ldots C_{\nu_1}$ суть *такія же* функціи союзныхъ формъ

$$f,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \ldots \Gamma_n$$

какъ и $c_0, c_1, c_2, \ldots c_{\nu_1}$ — коэффиціентовъ $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$; сравнивъ въ послѣднемъ равенствѣ коэффиціенты при $\eta_1^{\nu_1}$ въ обѣихъ частяхъ, мы получимъ

$$(-\nu)^k \Gamma'^k . \Gamma_1(x_1, x_2) = C_0(f, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n), \qquad (112)$$

что и доказываетъ справедливость первой части нашего предложенія: *всякій коваріантъ* $\Gamma_1(x_1, x_2)$ *выражается раціонально черезъ систему союзныхъ формъ* $\Gamma, f, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$ *при чемъ знаменателемъ этого выраженія служитъ нѣкоторая степень коваріанта* $\Gamma(x_1, x_2)$, *а числитъ его есть цѣлая раціональная и однородная функція остальныхъ союзныхъ формъ.*

Не трудно найти также два соотношенія, существующія между союзными формами: для этого надо только вышеприведенную линейную подстановку примѣнить къ коваріанту

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2) = b_0 \xi_1^\nu + \binom{\nu}{1} b_1 \xi_1^{\nu-1} \xi_2 + \ldots + b_\nu \xi_2^\nu;$$

тогда получимъ соотношеніе

$$(-\nu)^l \Gamma^l . \Gamma\left(\eta_1 x_1 + \eta_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial x_2}, \eta_1 x_2 - \eta_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}\right) = \Gamma'(\eta_1, \eta_2) =$$

$$= B_0 \eta_1^\nu + \binom{\nu}{1} B_1 \eta_1^{\nu-i} \eta_2 + \ldots + B_\nu \eta_2^\nu,$$

въ которомъ коэффиціенты $B_0, B_1, B_2, \ldots B_\nu$ суть такія же функціи союзныхъ формъ какъ и $b_0, b_1, b_2, \ldots b_\nu$ — коэффиціентовъ данной формы. Сравнивая въ этомъ соотношеніи коэффиціенты при $\eta_1^\nu$ и при $\eta_1^{\nu-1}\eta_2$, мы получимъ искомыя соотношенія между союзными формами

$$\left.\begin{aligned} (-\nu)^l [\Gamma(x_1, x_2)]^{l+1} &= B_0(f, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n), \\ 0 &= B_1(f, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n). \end{aligned}\right\} \qquad (113)$$

Такимъ образомъ мы доказали справедливость второй части нашего предложенія и рѣшили вопросъ, поставленный въ началѣ § 52, для системы двухъ формъ: $f(x_1, x_2)$ и $\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2$, въ положительнымъ смыслѣ.

## § 55. Система формъ, союзныхъ съ данною формою.

Если въ изслѣдованіяхъ предыдущаго параграфа мы замѣнимъ коваріантъ $\Gamma(x_1, x_2)$ самою бинарною формою $f(x_1, x_2)$, то преобразованіе Hermite'а приметъ видъ

$$f\left(\eta_1 x_1 + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \eta_1 x_2 - \eta_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = f_0 \eta_1^n + \binom{n}{1} f_1 \eta_1^n \eta_2 + \ldots + f_n \eta_2^n,$$

гдѣ коэффиціенты имѣютъ значенія:

$$f_0 = f(x_1, x_2),$$

$$nf_1 = \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Слѣдовательно, система формъ, союзныхъ съ самою бинарною формою, есть система $n$ формъ

$$f, 0, f_2, f_3, \ldots f_n,$$

между которыми, очевидно, не существуетъ никакого соотношенія, потому что соотношенія (113) предыдущаго параграфа въ данномъ случаѣ приводятся къ тождествамъ

$$f = f, \; 0 = f_1.$$

Соотношеніе (112) предыдущаго параграфа теперь принимаетъ видъ

$$(-n)^k f^k . \Gamma_1(x_1, x_2) = C_0(f, 0, f_2, \ldots f_n), \tag{114}$$

и отсюда слѣдуетъ, что *всякій коваріантъ выражается раціональною дробью черезъ союзныя съ $f$ формы, при чемъ знаменателемъ служитъ нѣкоторая степень данной формы $f$, а числителемъ — результатъ подстановки въ первый членъ коваріанта вмѣсто $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ союзныхъ съ $f$ формъ*

$$f, 0, f_2, \ldots f_n.$$

## § 56. Типическое представленіе бинарной формы.

Разсмотримъ три коваріанта бинарной формы $f(x_1, x_2)$ порядка $n$:

$$\Gamma(x_1, x_2),\ \Gamma'(x_1, x_2),\ \Gamma''(x_1, x_2)$$

— соотвѣтственно порядковъ $\nu$, $\nu'$, $\nu''$.

Напишемъ послѣдній коваріантъ съ перемѣнными $\xi_1$, $\xi_2$:

$$\Gamma''(\xi_1, \xi_2)$$

и замѣнимъ эти перемѣнныя линейными сочетаніями двухъ паръ перемѣнныхъ

$$(X_1, X_2) \text{ и } (X_1', X_2'),$$

когредіентныхъ съ перемѣнными $x_1$, $x_2$:

$$\xi_1 = \eta_1 X_1 + \eta_2 X_1',$$
$$\xi_2 = \eta_1 X_2 + \eta_2 X_2';$$

за перемѣнныя $(X_1, X_2)$, $(X_1', X_2')$ можно взять на основаніи § 52 соотвѣтственно производныя

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}, -\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\right),\ \left(\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_2}, -\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_1}\right).$$

Такимъ образомъ мы получимъ *выраженіе*

$$\Gamma''(\xi_1, \xi_2) = \Gamma''\left(\eta_1\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2} + \eta_2\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_2}, -\eta_1\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1} - \eta_2\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_1}\right),$$

*которое служитъ*, конечно, *коваріантомъ данной бинарной формы при всякихъ значеніяхъ количествъ* $\eta_1$, $\eta_2$. Послѣднее не трудно также подтвердить, если мы развернемъ наше выраженіе по строкѣ Тэйлора по степенямъ $\eta_1$, $\eta_2$; и въ самомъ дѣлѣ, тогда коэффиціентомъ при $\eta_1^{\nu''}$ будетъ служить

$$\Gamma''\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}, -\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\right),$$

это же на основаніи § 52, есть коваріантъ данной формы;

остальные коэффиціенты получаются изъ перваго полярнымъ процесомъ, и имѣютъ выраженія: при $\eta_1^{\nu''-k}\eta_2^k$ —

$$D^k{}_{X,X'}\Gamma''(X_1,\ X_2)=X'^k_1\frac{\partial^k\Gamma''}{\partial X_1^k}+\binom{\nu''}{1}X'^{k-1}_1X'_2\frac{\partial_1{}^k\Gamma''}{\partial X_1^{k-1}\partial X_2}+\ldots+$$
$$+X'^k_2\frac{\partial^k\Gamma''}{\partial_2{}^kX},$$

гдѣ

$$\begin{aligned} X_1&=\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}, & X_2&=-\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1},\\ X'_1&=\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_2}, & X'_2&=-\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_1}; \end{aligned}\qquad(115)$$

очевидно, что всѣ эти коэффиціенты разложенія суть коваріанты данной бинарной формы.

Въ частномъ случаѣ, когда мы возьмемъ вмѣсто коваріанта $\Gamma''$ самую бинарную форму $f$, мы получимъ выраженіе

$$f(\xi_1,\ \xi_2)=f\left(\eta_1\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}+\eta_2\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_2},\ -\eta_1\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}-\eta_2\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_1}\right)=\qquad(116)$$
$$=\Gamma_0\eta_1^n+\binom{n}{1}\Gamma_1\eta_1^{n-1}\eta_2+\ldots+\Gamma_n\eta_2^n;$$

въ этомъ разложеніи коэффиціены $\Gamma_0,\ \Gamma_1,\ \ldots\ \Gamma_n$ суть коваріанты данной формы; они имѣютъ значенія:

$$\Gamma_k=D^k{}_{X,X'}f(X_1,\ X_2),$$

гдѣ $(X_1,\ X_2)$, $(X'_1,\ X'_2)$ имѣютъ вышеприведенныя значенія (115).

Не трудно показать по аналогіи съ § 54, что всякій коваріантъ данной формы, будучи умноженъ на нѣкоторую степень

$$\Delta=-\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial x_2}\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_1}-\frac{\partial\Gamma}{\partial x_1}\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_2}\right)$$

— модуля нашей линейной подстановки, выражается *цѣлой раціональной функціей* черезъ коваріанты $\Gamma,\ \Gamma',\ \Gamma_0,\ \Gamma_1,\ldots\Gamma_n$;

между этими коваріантами и модулемъ $\varDelta$, кромѣ того, существуетъ четыре соотношенія.

Разсмотримъ два коваріанта перваго порядка для данной бинарной формы $f(x_1, x_2)$; такіе коваріанты возможны только у бинарныхъ формъ *нечетнаго порядка,* что слѣдуетъ непосредственно изъ соотношенія $2\lambda+\nu=n\mu$ для индекса $\lambda$, порядка $\nu$ и степени $\mu$ коваріанта; напримѣръ, бинарная форма 5-го порядка имѣетъ четыре такихъ коваріанта: $\Gamma_{5,1}$, $\Gamma_{7,1}$, $\Gamma_{11,1}$, $\Gamma_{13,1}$ (*Табл.* V въ § 40). Пусть два коваріанта перваго порядка для бинарной формы $f(x_1, x_2)$ *нечетнаго порядка* $n=2p+1$ будутъ:

$$\Gamma\ = A_0 x_1 + A_1 x_2 .$$

$$\Gamma' = A'_0 x_1 + A'_1 x_2 ;$$

тогда формулы (115) примутъ видъ:

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1 , \quad X_2 = -A_0 , \\ X_1' &= A_1', \quad X_2' = -A_0'; \end{aligned} \tag{115'}$$

слѣдовательно, разложеніе (116) приметъ въ данномъ случаѣ видъ:

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2) &= f(A_1\eta_1 + A_1'\eta_2, -A_0\eta_1 - A_0'\eta_2) \qquad (116') \\ &= J_0\eta_1^{2p+1} + \left(\frac{2p+1}{1}\right) J_1 \eta_1^{2p}\eta_2 + \ldots + J_{2p+1}\eta_2^{2p+1}, \end{aligned}$$

гдѣ коэффиціенты $J_0$, $J_1$, . . . $J_{2p+1}$ суть *инваріанты* данной бинарной формы; они имѣютъ видъ

$$\begin{aligned} J_0 &= f(A_1, -A_0), \\ J_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial A_1} A_1' + \frac{\partial}{\partial A_0} A_0'\right) f(A_1, -A_0) = D_{A,A'} f(A_1, -A_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (117) \\ J_k &= D^k_{A,A'} f(A_1, -A_0), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ J_{2p+1} &= f(A_1', -A_0'). \end{aligned}$$

Преобразованіе (116') бинарной формы нечетнаго порядка посредствомъ двухъ коваріантовъ перваго порядка называется *типическимъ представленіемъ бинарной формы нечетнаго порядка.*

Изъ всего вышеизложеннаго въ этомъ параграфѣ слѣдуетъ, что *всякій коваріантъ бинарной формы* $f(x_1, x_2)$ *нечетнаго порядка* $n = 2p + 1$, *имѣющей два коваріанта перваго порядка:* $A_0 x_1 + A_1 x_2$ *и* $A_0' x_1 + A_1' x_2$, *будучи умноженъ на нѣкоторую степень детерминанта*

$$\varDelta = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 \\ A_0' & A_1' \end{vmatrix},$$

*выражается цѣлой раціональной функціей черезъ эти два коваріанта и черезъ коэффиціенты*

$$J_0,\ J_1,\ \ldots\ J_{2p+1}, \tag{118}$$

*полученнаго при помощи нихъ* типическаго представленія *данной формы.*

Въ случаѣ бинарной формы четнаго порядка не можетъ быть и рѣчи о подобномъ типическомъ представленіи при помощи двухъ коваріантовъ перваго порядка, потому что у нея ихъ нѣтъ; но въ этомъ случаѣ возможно получить типическое представленіе при помощи трехъ коваріантовъ втораго порядка, какъ это показалъ Clebsch[1]).

Дабы выяснить полную возможность типическаго представленія бинарныхъ формъ, остается еще рѣшить вопросы: *всегда ли бинарная форма нечетнаго порядка имѣетъ два линейно-независимыхъ коваріанта перваго порядка, и всегда ли бинарная форма четнаго порядка имѣетъ три линейно-*

---

1) Clebsch. *Theorie der binären algebraischen Formen.* S. 413. Leipzig. 1872.

*независимыхъ коваріанта 2-го порядка?* Hilbert[1]) рѣшилъ эти вопросы въ *положительномъ* смыслѣ весьма простымъ *ариѳметическимъ* пріемомъ при помощи женератрисныхъ функцій Cayley-Sylvester'a.

Для случая системы бинарныхъ формъ не трудно обобщить вышеизложенныя въ §§ 53, 54, 55 преобразованія коваріантовъ и получить утвердительный отвѣтъ на вопросъ, поставленный въ началѣ § 53; типическое же представленіе системы формъ по методу настоящаго параграфа будетъ возможно для всякой системы, содержащей по крайней мѣрѣ одну форму нечетнаго порядка, а для системы бинарныхъ формъ четныхъ порядковъ необходимо прибѣгнуть къ вышецитированному методу Clebsch'a.

## § 57. Краткій очеркъ новѣйшихъ изслѣдованій Hilbert'a по ариѳмизаціи теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ. Заключеніе.

Въ нашихъ изслѣдованіяхъ свойствъ инваріантовъ бинарныхъ формъ, составляющихъ содержаніе этого сочиненія, мы выяснили главнѣйшія задачи теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ, при чемъ пользовались такими методами, которые безъ труда могутъ быть обобщены и для какихъ угодно алгебраическихъ формъ. Между этими задачами особенно важными являются вопросы о *полныхъ системахъ* инваріантовъ, черезъ которые остальные инваріанты выражаются алгебраическими функціями различнаго характера.

Мы познакомились съ тремя типами *полныхъ системъ* инваріантовъ для данной системы бинарныхъ формъ: *полная система (основныхъ инваріантовъ)* Aronhold'a есть система такихъ инваріантовъ, черезъ которые всѣ остальные выражаются *вообще алгебраическими* функціями; *полная система (неприводимыхъ инваріантовъ)* Gordan'a есть система

1) Hilbert. *Ueber die vollen Invariantensysteme.* Mathematische Annalen, Bd. 42, S. 342. 1893.

такихъ инваріантовъ, черезъ которые всѣ остальные выражаются *цѣлыми раціональными* функціями; *полная система (союзныхъ инваріантовъ)* Hermite'a есть система такихъ инваріантовъ, черезъ которые остальные выражаются *вообще раціональными* функціями.

Построеніе полныхъ системъ всѣхъ трехъ типовъ, какъ намъ извѣстно, представляетъ большія затрудненія и выполнены только для немногихъ частныхъ системъ бинарныхъ формъ. Hilbert[1]) впервые далъ общій методъ построенія этихъ полныхъ системъ, сущность котораго заключается въ слѣдующемъ:

Сначала Hilbert устанавливаетъ понятіе о новой *полной системѣ* такихъ инваріантовъ одинаковыхъ порядковъ, черезъ которые всѣ остальные выражаются *цѣлыми алгебраическими* функціями; и оказывается, что всякая система инваріантовъ имѣетъ такую полную системы — съ конечнымъ числомъ инваріантовъ

$$J_1,\ J_2,\ \ldots\ J_x. \tag{119}$$

*Эта полная система* Hilbert'a *обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что при равенствѣ нулю инваріантовъ, ее составляющихъ, всѣ инваріанты данной системы алгебраическихъ формъ обращаются въ нули.*

Построеніе полной системы Hilbert'a не представляетъ особенныхъ алгебраическихъ затрудненій, если имѣть въ виду это ея свойство, и Hilbert даетъ общій методъ такого построенія.

Далѣе, не трудно для полной системы $J_1,\ J_2,\ \ldots\ J_x$ Hilbert'a пріискать еще одинъ инваріантъ $J$ такъ, чтобы остальные инваріанты выражались бы *раціонально* черезъ инваріанты

$$J,\ J_1,\ J_2,\ \ldots\ J_x, \tag{120}$$

---

1) См. стр. 228, *Прим.*

между которыми существуетъ соотношеніе вида

$$J^r + A_1 J^{r-1} + A_2 J^{r-2} + \ldots + A_r = 0, \qquad (121)$$

гдѣ $A_1, A_2, \ldots A_r$ суть цѣлыя алгебраическія функціи отъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$.

Вся эта система $\varkappa + 1$ инваріантовъ, конечно, можетъ быть также получена при помощи типическаго представленія.

Система $J, J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ опредѣляетъ такъ называемое *алгебраическое функціональное тѣло* (*Functionenkörper*), въ которомъ цѣлыя раціональныя функціи образуютъ всю совокупность инваріантовъ данной системы алгебраическихъ формъ (*Invariantenkörper*). Степень $r$ уравненія (121), которому удовлетворяетъ $J$, называется *порядкомъ* этого функціональнаго тѣла.

Kronecker, основавшій теорію алгебраическихъ функціональныхъ тѣлъ, доказалъ, что въ каждомъ такомъ тѣлѣ всегда можно построить алгебраическими пріемами *полную систему* неприводимыхъ — въ смыслѣ Gordan'а, цѣлыхъ и раціональныхъ функцій[1]; это и даетъ Hilbert'у возможность высказать слѣдующее основное въ его ученіи предложеніе:

*Когда извѣстны инваріанты* $J, J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$, *построеніе полной системы неприводимыхъ инваріантовъ* Gordan'а *требуетъ только рѣшенія одной элементарной задачи изъ ариѳметической теоріи алгебраическихъ функцій.*

Hilbert даетъ также алгебраическій пріемъ, при помощи котораго можно непосредственно отъ системы инваріантовъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ перейти къ полной системѣ неприводимыхъ инваріантовъ Gordan'а, не опредѣляя инваріанта $J$.

Если система инваріантовъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ построена для одной бинарной формы $f(x_1, x_2)$, то для двухъ бинарныхъ формъ $f(x_1, x_2)$ и $F(x_1, x_2)$ подобная система получается

1) Kronecker. *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.* Crelle's Journal, Bd. 92, S. 16—19. 1882.

простымъ примѣненіемъ полярныхъ процесовъ $D^i_{a,b}$ къ инваріантамъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$.

Наконецъ, не трудно также получить полную систему Hilbert'а для коваріантовъ одной или нѣсколькихъ бинарныхъ формъ, если таковая извѣстна для ихъ инваріантовъ; для этого надо только примѣнить извѣстный намъ изъ § 48 процесъ

$$\frac{\partial}{\partial a_0}x_2^n - \frac{\partial}{\partial a_1}x_2^{n-1}x_1 + \ldots + (-1)^n \frac{\partial}{\partial a_n}x_1^n$$

къ инваріантамъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$. Это же непосредственно получится изъ предыдущаго, если мы положимъ

$$F(x_1, x_2) = (\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2)^n,$$

и примѣнимъ полярные процесы $D^i_{a_k, \xi^k}$ къ инваріантамъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$.

При построеніи системы инваріантовъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ иногда можно съ выгодою воспользоваться слѣдующею теоремой Hilbert'а.

*Если всѣ инваріанты бинарной формы порядка $n = 2h$ или $n = 2h + 1$ равны нулю, то форма содержитъ $h+1$-кратный линейный факторъ, и наоборотъ, если она имѣетъ такой факторъ, то всѣ ея инваріанты равны нулю.*

Въ силу этого предложенія, для построенія системы инваріантовъ $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$, надо найти такіе инваріанты, равенство нулю которыхъ составляетъ необходимое и достаточное условіе для того, чтобы бинарная форма порядка $n = 2h$ или $n = 2h + 1$ содержала $h+1$-кратный линейный факторъ. Напримѣръ, въ случаѣ бинарной формы 5-го порядка равенство нулю ея инваріантовъ $J_4, J_8, J_{12}$ есть необходимое и достаточное условіе для того, чтобы она содержала трехкратный линейный факторъ, слѣдовательно эти три инваріанта и составляютъ полную систему Hilbert'а — черезъ нихъ выражаются *цѣлыми алгебраическими* функціями всѣ остальные инваріанты этой формы; полная система Gordan'а для нея содержитъ кромѣ этихъ трехъ инваріантовъ $J_4, J_8, J_{12}$

еще инваріантъ $J_{18}$, и между этими четырьмя инваріантами существуетъ одна сидзигія 36-й степени (§ 40, *Табл.* V).

Мы не будемъ входить въ дальнѣйшія подробности этого новаго направленія теоріи инваріантовъ: читатель можетъ познакомиться съ ними въ вышецитированномъ мемуарѣ Hilbert'a; замѣтимъ только — въ заключеніе нашей работы, что теорія инваріантовъ алгебраическихъ формъ въ несимволическомъ направленіи не только является отображеніемъ теоріи непрерывныхъ группъ Sophus'a Lie, какъ мы старались выяснить это нашими изслѣдованіями, но также содержитъ въ себѣ принципы, лежащіе въ основаніи другаго, новѣйшаго, направленія математики — въ основаніи ариѳмизаціи функцій. Значеніе теоріи инваріантовъ алгебраическихъ формъ въ этой области математическихъ изслѣдованій прекрасно характеризуется слѣдующими словами Hilbert'a: онъ говоритъ въ введеніи къ вышецитированному мемуару, — „dass die Theorie der Invarianten lediglich als ein besonders bemerkenswerthes Beispiel für die Theorie der algebraischen Functionenkörper mit mehr Veränderlichen erscheint — gerade wie man in der Zahlentheorie die Theorie der Kreistheilungskörper lediglich als ein besonders bemerkenswerthes Beispiel aufzufassen hat, an welchem die wichtigsten Sätze der Theorie allgemeinen Zahlenkörper zuerst erkannt und bewiesen worden sind.

# Neue Beiträge

zum

# Briefwechsel zwischen D. E. Jablonsky und G. W. Leibniz.

---

Herausgegeben

von

**Prof. Dr. J. Kvačala.**

---

## I.

Der grosse Philosoph und neben Aristoteles wohl der grösste Polyhistor aller Zeiten, G. W. Leibniz, der über die Wissenschaft das Leben nicht vergass und neben seinen grossangelegten christlich-irenischen Entwürfen und Bemühungen im Dienste der Hannoveranischen (später englischen) Dynastie vor 200 Jahren Frankreich an Egypten, Russland an China verwies und, obwohl in rathender Ahnung eines slavischen Ursprungs seines bereits germanisirten Stammes[1]), das preussische Herrscherhaus pries und für deutsche Sprache und deutschen Patriotismus eiferte, er darf mit Recht auch gerade heute dasselbe Interesse beanspruchen, wie es Ludw. Stein vor etwa 10 Jahren vielleicht etwas hyperbolisch[1a]) beschrieb, „als die Kunde auftauchte, es seien in Halle über 100 Briefe des Philosophen zufällig aufge-

1) Die vielerörterte Stelle seiner Autobiographie (mehrfach abgedruckt), wo er seine Familie mit den Lubenieczs in Verbindung bringt, ist zum grossen Bedauern aller seiner Verehrer lückenhaft. — Foucher de Careil hatte Recht darauf zu verweisen, wie auch Kuno Fischer die Bedeutung jener Notiz auf ihr Mass zu reduciren (Gesch. d. n. Philos. Bd. 2. Leibniz S. 41—43). Ich habe mit Interesse Leibniz's Aufzeichnungen über seine Genealogie durchgenommen, gelangte aber zu dem Resultate, dass Leibniz selbst nicht im Besitz irgend einer Tradition in Betreff der Herkunft seiner Familie gewesen (Vgl. die Leibn. Handschr. Kgl. Bibl. Hannover, nach Bodemann's Katalog XLI). Nach den neueren Forschungen des Herrn D. Krocker, (mir nur nach der Notiz in der Beilage der M. Allg. Zeitg. 1898 1. Oct. Nr. 244 zugänglich) war die Germanisirung der Familie eine bereits seit Langem vollständige. Wollte man dennoch nach den Theorien der Ethnosophen Leibnizens geistige Constitution analysiren: so würde man seine Milde und Versöhnlichkeit als einen slavischen, seine speculative Begabung als einen germanischen Bestandtheil bezeichnen dürfen.

1a) Vgl. hiezu die Anm. 32, wo die grosse Anzahl der noch nicht publicirten Leibniz'schen Briefe in Hannover angegeben ist.

funden worden. Die Zeitschriften der Culturnationen verkündeten nun diese frohe Botschaft mit blitzartiger Raschheit der gesammten gebildeten Welt, und es regte sich allenthalben das Interesse für diese Briefe" [1b]). Die Zahl Leibniz'scher Briefe, die ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, ist wohl nicht so gross, wie damals, ihr Ertrag für die Geschichte Leibniz's, seiner Entwickelung und seiner Zeit gewiss grösser. Und dies Interesse dürfte auch die Persönlichkeit des Zweiten mehren, dessen Name auf dem Titel steht, [trotz seiner offenbaren Geringschätzung in einer, vielleicht allzu beachteten Recension[2])], wie ich es nach einer an die Redaction der Münchener Allg. Zeitung gerichteten Zuschrift annehmen zu können glaube[3]). Wenn diese letztere Annahme richtig ist, so ist es zum grossen Theile ein Verdienst P. Kleinerts, der durch seine beiden Arbeiten über Comenius[4]) und Jablonsky[5]) die nunmehr nur dürftigen Reste des einst mächtigen slavischen Protestantismus zum grossen Dank verpflichtet hat. — Und dies Interesse dürfte erhöhen auch die Geschichte dieses Briefwechsels selbst, denn es gilt sehr von ihm der alte Spruch: habent sua fata libelli.

Ist Leibniz auch fast ungemerkt verschieden, und ohne Begleitung begraben worden[6]), so regte sich bald die Auf-

---

1b) Archiv für Geschichte der Philosophie, hsgeb. v. Ludwig Stein I. Berlin 1888. S. 78.

2) Ueber meinen Vortrag: Fünfzig Jahre im preussischen Hofpredigerdienste. D. E. Jablonsky (S.-A. aus den Acta et Commentationes Univ. Jurjev. 1895. I.) urtheilt H. S. Eck in Rumpenheim, dass darin im „wichtigsten Puncte" nicht „wesentlich" Neues enthalten ist; weil ich es nicht nöthig fand, was Andere (besonders Kleinert) schon gut gesagt haben, was aber nicht einmal den vierten Theil des Ganzen ausmacht, mit anderen Sätzen auszudrücken. Vgl. Theol. Liter. Zeitg. 1896, S. 146, 147. Angesichts dieses mathematischen Verhältnisses ist es noch viel schlimmer, dass Herr Hegler in Tübingen sich nicht genirt hat, dies Urtheil sich anzueignen („diese Grundzüge theilen noch wenig Neues mit"). Theol. Jahresber. 1896, S. 331. Alles kann man gewiss nicht wissen, und alle irren wir, man möge dann doch in Sachen, die man nicht gut kennt, nicht einen Ton anschlagen, mit dem man ignotos fallit. Ich gebe dabei zu, dass die von mir im Vorstehenden citirten Ausdrücke relativ und objectiv sind.

3) Vgl. die Nummer v. 10. Sept. 1898, S. 2.

4) Amos Comenius. Ein Vortrag von P. Kleinert. Theol. Stud. u. Krit. 1878, ebenso die glänzende Zusammenfassung in Herzogs Realencyclopädie, 3. Aufl. Bd. 4.

5) Der Artikel Jablonsky in ders. Realencycl. 2. Aufl. Bd. 6.

merksamkeit der Gelehrten auf seinen Nachlass. Sein Amtsnachfolger Eckart hat schon im folgenden Jahre den Vorsatz, L.'s Werke zu ediren, kundgegeben [7]). Früh begannen die Sammlungen seiner Briefe, zumeist solche gelehrten Inhalts, und besonders der Kieler Professor Seb. Kortholt hat sich nach allen Seiten hin um Denkmäler dieser Art gewendet und hat es zu einer ansehnlichen Sammlung gebracht [8]). Nach seinem Tode gab sie in 4 Bänden sein Sohn Christian heraus [9]). Unter denen, die er als Förderer seines Unternehmens nennt, ist der erste der Leipziger Professor Kapp, dann aber Krusicke, Fogel, Bernoulli, Nettelblatt, Thomasius, Löffler, Gottsched in Deutschland; — er hatte aber auch auf Dänemark, Schweden, Russland seine Aufmerksamkeit gerichtet [10]). Dem Herausgeber scheint es sich aber mehr um Förderung der verschiedenen Wissensgebiete, als um die historische Kenntniss der L.'schen Ideen gehandelt zu haben. Das Interesse an der Completheit, oder gar, L.'s Beziehungen zu irgend einem der zahlreichen Correspondenten nachzuweisen, ist bei seiner Eintheilung des Stoffes durchaus nicht ersichtlich.

Einen Versuch dieser Art unternahm der an erster Stelle genannte Kapp [11]). Unterstützt wurde er durch Jordan, Vicepräsident der kgl. Societät, preuss. Rath, der ihm aus Kirchens Nachlass auch einen Theil der Correspondenz zwischen Jablonsky und Leibniz übergab. Dies war 1733, wohl am Anfang des Jahres, denn schon im Juli desselben konnte Kortholt einen Theil der Sammlung in seine Publication aufnehmen [12]). Daraus, dass die Sammlung aus Leibnizens Nachlass stammt, erweisen

6) Vgl. über sein Lebensende den Artikel Dr. Doebners: Leibnizens Briefwechsel mit dem Minister von Bernstorff und andere Leibniz betreffende Briefe und Actenstücke aus den Jahren 1705—1716. (Zeitschr. des histor. Vereins für Niedersachsen. Hannover 1881. S. 205 ff.

7) Ueber den Charakter dieses Gehilfen Leibnizens vgl. Doebner a. a. O. 223. Ueber diesen Vorsatz vgl. O. Klopp: Die Werke v. Leibniz. Erste Reihe. I. Hannover 1864. Vorw. S. XI, XII.

8) Chr. Kortholtus: G. G. Leibnitii Epistolae ad diversos. Lipsiae 1734. Vgl. den ausführlichen Bericht der Praefatio.

9) Der 2. Bd. erschien 1735; der 3. 1738; der 4. 1742.

10) Vgl. den Bericht der Praef. nach Anm. 8, der leider unpaginirt ist.

11) Joh. Erh. Kappens Professoris zu Leipzig Sammlung einiger Vertrauten Briefe .. zwischen G. W. Leibniz .. und .... D. E. Jablonsky Leipzig 1745. Vgl. die den 30. Sept. 1744 datirte Vorrede.

12) Vgl. den Bericht nach Anm. 8.

sich die Schreiben L.'s als Concepte, etwa Copien, die Briefe der Correspondenten als Originalbriefe.

Es war nur natürlich, dass Kapp mit der Zeit an eine Vervollständigung seiner Sammlung dachte, und gemäss der Werthschätzung eben der Verbindung zwischen Jablonsky und Leibniz wandte er sich an den damals noch blühenden Hofprediger um Ueberlassung der etwa von ihm aufbewahrten hierhergehörigen Stücke. Nach dem Antwortconcept Jablonsky's[13]) am 29. März 1734 besass dieser 70 Briefe von Leibniz und erklärte sich bereit, sie Kapp mitzutheilen. Warum diese Mittheilung nicht erfolgte, ist uns unbekannt; dass sie aber nicht erfolgte, muthmassen wir aus Kapp's Publication selbst, die nach Jablonsky's Tode (4 Jahre später) erschien. Die Vorrede schweigt über des Herausgebers Bemühen, Jablonsky's Beiträge für die Sammlung zu erhalten; und es ist schon aus der Zahl der in Kapp's Publication enthaltenen Leibniz'schen Briefe sicher, dass Jablonsky's Bereitwilligkeit nicht zur Erfüllung des Kapp'schen Anliegens geführt hat. Vielleicht fand es Jablonsky später doch nicht rathsam, namentlich die Documente, die sich auf ein auch damals noch so actuelles Thema, wie die Union bezogen, der Oeffentlichkeit preiszugeben. In Friedrichs II. ersten Tagen erfolgte sein Tod, die Ordnung seines Nachlasses nahm viel Zeit in Anspruch; aber an Kapp scheint man nicht mehr gedacht zu haben und so beschränkte sich dieser wesentlich auf die Kirchschen Stücke, die mit Hülfe eines weitschichtigen gelehrten Materials zu einem grossen Bande anwuchsen.

Begreiflich schätzt Kapp seine Sammlung vorzüglich als Beitrag zum Leben und zur Lehre Leibnizens, für den er die Elogia fleissig gesammelt. Aber er ist auch von Jablonsky's grosser Bedeutung für die Kirche überhaupt, besonders die Irenik, und namentlich für die preussische Akademie hocherfüllt, „deren ersten Entwurf er gemacht, und der er, so zu sagen, nebst den Herrn von Leibniz auf die Beine geholfen hat, und bis an seinen Tod ihr ferner aufzuhelffen beflissen gewesen, und als ihr würdiger Präsident gestorben ist“ [11]). Die Söhne würden durch Publicirung von Documenten zur Lebensgeschichte ihres Vaters dessen Verehrern „und überhaupt der Kirchen- und gelehrten Welt“ einen grossen Dienst erweisen. „Die Lesung dieser

---

13) Aufbewahrt in der Bibliothek der Gemeinde der Mähr. Brüder in South Bethlehem, Pennsylvanien.

Sammlung ist wegen ihres wichtigen Inhalts nützlich und angenehm" [14]). Es entspricht dem in weiterem Sinne gefassten Ziele des Herausgebers, bedeutende Beiträge zur Geschichte der Wissenschaft und der Kirche zu liefern, wenn er auch einige verwandte Stücke aufnimmt, und charakteristisch für seine Bezugsquelle ist, dass sich darunter Briefe des Secretärs der Akademie, Theod. Jablonsky, befinden [15]).

Ueber die Aufnahme der Sammlung weiss ich nichts, dagegen wohl, dass der Herausgeber die Lücken seiner Sammlung, wie er selbst bekennt, lebhaft empfand. Daher wandte er sich, nach der Publication selbst an die Jablonskyschen Erben, um Mittheilung (wahrscheinlich) der einst versprochenen Documente, um seine Sammlung zu vervollkommnen. — Ueber die Schicksale der ihm jetzt wirklich verliehenen, wie anzunehmen, sehr werthvollen Stücke giebt nun ein Brief D. E. J.'s Sohns, Pauls, die Aufklärung, dass sie von dem unterdessen verstorbenen Kapp nicht mehr in die Hände der Jablonsky'schen Familie gelangt sind [16]). Alle meine Bemühungen Kappens Nachlass aufzufinden waren vergeblich; allerdings lässt der Bericht zweifeln, ob sich darinnen etwas zur Sache vorfindet. In die Hände der Jablonsky'schen Erben kamen die ausgeliehenen Stücke nie zurück [17]).

Die Kapp'sche Sammlung, die der verdienstvolle Leibniz-Forscher und Editor Dutens aus naheliegenden Gründen bei Seite liess, wurde später von einigen anderen, wie auch von dem Unionshistoriker Hering benutzt [18]), besonders aber von dem um Leibniz so verdienten Guhrauer verwerthet [19]), ja sogar von Neuem herausgegeben [20]). Seine Ausgabe ruht völlig auf

---

14) Vgl. die Vorrede Kapp's, Anm. 11.

15) Daraus scheint mir ein Interesse an der Geschichte der Societät hervorzuleuchten.

16) An Busch 28. April 1757 M. S. Leibnitiana. VII. (Hannov.) XVII.

17) Bekanntlich kamen die Papiere D. E. Jablonsky's theils in das Archivum unitatis zurück, theils in die Hände seiner Erben. In ersterer Sammlung findet sich alles in allem eine belanglose Notiz von Leibniz, in der letzteren garnichts. — Namentlich hätte mich der Brief Leibnizens, worauf D. E. Jablonsky 3. Sept. 1715 antwortet, sehr interessirt.

18) Geschichte der kirchl. Unionsversuche etc. in Leipzig 1836, 1838.

19) In seinem G. W. Freiherr v. Leibniz. Breslau 1846.

20) Leibnitz's Deutsche Schriften. Herausgeg. von Dr. G. E. Guhrauer. 2 Bd. Berlin 1840. — Schriften der höheren Periode. S. 57–300.

der Kapp'schen, einige auffallende Irrthümer seiner Einleitung möchte ich hiermit corrigiren.

Guhrauer erzählt nach Brucker die Anfänge der irenischen Verhandlungen zwischen Hannover und Berlin und meint, nachdem Jablonsky im Sommer (1698) Hannover aufgesucht hatte, sei er mit Leibniz in Briefwechsel getreten [21]). Die gegenwärtige Sammlung weist deutlich nach, dass diese Annahme eine irrige ist, und ich hebe dies nur deshalb hervor, weil bereits früher Varnhagen von Ense, dem Guhrauer seinen ersten Band gewidmet, genau festgestellt hatte, dass die Correspondenz zwischen Jablonsky und Leibniz den 5. März 1698 begonnen [22]). Allerdings ist er der einzige, der vor dem Erscheinen meiner Ausgabe das richtige Datum gemerkt und aufgezeichnet hat und zwar ohne einen Beleg für die Behauptung. Woher wusste er es? — Damit ist auch Guhrauers Annahme widerlegt, als hätte directes persönliches Verhältniss zwischen den beiden Männern früher nicht stattgefunden und ich verweise diesbezüglich nur auf den I. Brief [23]). Ebenso irrthümlich ist auch die Ansicht, der Briefwechsel gehe nicht über 1704 hinaus, worauf ich schon im kurzen Vorwort aufmerksam gemacht [24]). — Ferner irrthümlich ist Guhrauers Ansicht, als hätten die beiden Männer bei der Zusammenkunft in Hannover die deutsche Sprache für die Correspondenz in Aussicht genommen, denn den sehr einleuchtenden Grund dafür giebt Jablonski an, der nicht französisch konnte [25]). Ob nun der Briefwechsel Leibnizens mit den Brüdern Jablonsky „in der Geschichte deutscher wissenschaftlicher Institute in ähnlicher Art Epoche“ macht, wie des Thomasius Vorlesungen auf der Universität Halle, möchte ich nicht prüfen; dass es trotz der beiden Jablonskys noch lange Zeit gedauert, bis sich die Akademie von der französischen Sprache und Vormundschaft befreite, wissen wir aus dem Buche von Bartholmess [26]) und dem Referate Trendelen-

21) Guhrauer. Leibniz's Deutsche Schriften. 2. Bd. S. 68.

22) Biographische Denkmäler. Bd. IV (Sophie Charlotte) S. 92.

23) Darin wird auch die thatsächliche Urheberin der Verbindung in der Kurfürstin angegeben.

24) Das Vorwort zur Einleitung dieser Sammlung S. 1—3 (Acta et Commentat. 1896. IV.) fand ich nicht für zweckmässig hier von neuem abzudrucken.

25) Die Curfürstin wollte nämlich den Briefwechsel mitverfolgen. Vgl. S. 13.

26) Histoire philosoph. de l'academie de Prusse depuis Leibniz. Paris 1850—51.

burgs [27]) darüber. Obwohl nun Jablonsky in seinem Briefe an Mayer die deutsche Sprache „unsere Teutsche“ nennt [28]), so ist doch dies sein angebliches Verdienst immerhin ein unfreiwilliges.

Der folgende Herausgeber von Leibnizens Werken (Foucher de Careil [29]) kann hier ausser Acht gelassen werden) ist O. Klopp, dem wir 11 Bände historischer Schriften verdanken [30]). Obwohl er an der Quelle sass (in Hannover) wusste er — wie es scheint — um den gegenwärtigen Briefwechsel nichts, wenigstens hat er ihn bei Seite gelassen, dagegen einen Brief Leibnizens an D. E. Jablonsky von 1711 drucken lassen [31]), der die Guhrauersche Annahme, als wäre der Briefwechsel 1704 abgebrochen worden, schon an und durch sich corrigirte. Immerhin ist z. B. auch das, was er aus dem Briefwechsel mit v. Printzen mittheilt, so willkürlich-fragmentarisch, dass man aus dem Mitgetheilten auf seine Orientirtheit betr. die Jablonsky'schen Papiere zu schliessen nicht genügenden Grund hat.

Dass die Lücken der Kapp'schen Sammlung auszufüllen seien, hat Bodemann durch seine Beschreibung des Leibnizschen Nachlasses gezeigt [32]). B. hat nach Guhrauer wohl die meisten und grössten Verdienste um die Erforschung und das Studium

---

27) Leibniz und die philos. Thätigkeit d. Akad. im vorigen Jahrhundert. Berlin 1852.

28) Vgl. Guhrauer, Leibn. D. Schr. 2. S. 73. Den Brief bei Kapp. S. 130.

29) Er hat deutsches nicht publicirt.

30) Vgl. Anm. 7. Die erste Reihe umfasst: Historisch-politische und staatswissenschaftliche Schriften von 1864—1884.

31) Den 9. Januar 1711. Klopp. a. a. O. Bd. X. S. 430.

32) E. Bodemann: Der Briefwechsel des G. W. Leibniz in der Königl. öff. Bibl. zu Hannover. Hannover 1889. S. 100, 101. Die Mängel der Bodemann'schen Arbeit hat B. Erdmann in einem gründlichen Referat des Archivs für Gesch. der Philos. 1891 zusammengestellt, Mängel, die sich sogar bei der Acceptirung der Bodemann'schen Darstellungsweise ergeben. Allerdings folgt aus Erdmann's Ausführungen (S. 299, 300) mehr als er fordert, nämlich die unbedingte Nothwendigkeit eines genauen Inventars; denn wie kann man eine Rechnung ordentlich summiren, wo man nicht alle Posten zusammengestellt. Der Kostenpunct (S. 294) ist hier ziemlich irrelevant, da man bei der Aufweisung der Datirung mit dem Raume sehr sparsam umgehen kann; — andererseits ergiebt sich auch aus der Umgebung häufig das nicht angegebene Datum. — Ein solches, alle bisherigen Leibniz-Editionen mitberücksichtigendes Inventar seines Nachlasses ist die erste Vorbedingung dazu, dass man endlich einmal auf diesem Gebiete sicheren Schritts vorwärts komme.

Leibniz's und hat sich der grossen, oft undankbaren Arbeit der Catalogisirung dessen Nachlasses mit rühmlichem Fleiss und Ausdauer gewidmet. Doch möchte ich bezweifeln, ob die von ihm gewählte Art der Publication die zweckentsprechendste ist. Besser wäre es, meines Erachtens, gewesen, wenn er die Arbeit getheilt, und ausser einem genauen Inventar einen Band Anekdota gegeben hätte, enthaltend die jetzt so zerstreuten Excerpte: mochten diese nun nach den Correspondenten oder nach sachlichen Kategorien geordnet sein. Denn in Ermangelung solchen vollständigen Inventars kann man sich thatsächlich über das Verhältniss des Gedruckten zum Ungedruckten nach seinem Verzeichniss nicht orientiren. — Ausserdem ist namentlich der sonst ebenfalls verdienstliche Abschnitt über die Correspondenz mit D. E. Jablonsky nicht genau. Ist man von vornherein geneigt, gemäss dem Hinweis auf Kapp, die Correspondenz bis 1704 zum grossen Theil mit jener von diesem mitgetheilten als identisch anzunehmen, so ist die noch folgende Angabe, vom Jahre 1706 bis 1716 sei eine Lücke vorhanden, falsch, irreführend [33]). Eine Folge dieser Ungenauigkeit zeigt sich bei zwei weiteren Benutzern dieser Sammlung. R. Rocholl, der sogar seine Benennung der lutherischen Kirche als evangelischen aus diesem Briefwechsel motivirt, bemerkt, dass die Briefe, deren Inhalt er S. 336 ff. angiebt (sämmtlich aus der Zeit nach 1704), bei Kapp und Guhrauer nicht enthalten sind. Dagegen merkt er nicht, dass auch die Belegstelle für jene Benennung, wie auch das übrigens falsch [33a]) wiedergegebene Citat, das er zur Einleitung in die irenischen Versuche anführt, sich ebenfalls bei Kapp und Guhrauer nicht vorfindet [34]). A. Harnack nimmt (wahrscheinlich) aus Bodemann's Hinweis auf Kapp an, die Briefe (bis 1704) seien sämmtlich bei Kapp enthalten, denn er sagt über den Briefwechsel mit D. E. Jablonsky: „Der Briefwechsel... ist von Kapp herausgegeben worden; die zahlreichen späteren

33) Daselbst S. 101.

33a) S. 332. Der Adressat des Jablonsky'schen Briefes ist nämlich nicht Leibniz, sondern J. F. Mayer in Hamburg, vgl. die Nr. 39 und 42 dieser Sammlung.

34) Geschichte der evang. Kirche in Deutschland. Leipzig 1897. S. 577. Anm. 98. Dass sich jener in seinem Vorwort citirte Brief (über die Benennung „evangelisch") bei Kapp und Guhrauer ebenfalls nicht vorfindet, dazu vgl. S. 22 dieser Publication? Allerdings sind dievon ihm mitgetheilten Briefe bei Bodemann (a. a. O.) ebenfalls nicht verzeichnet.

Briefe sind in Hannover, wo ich sie excerpiert habe" [34a]). Daraus muss man schliessen, dass Harnack sein Excerpieren mit dem Jahre 1704 angefangen hat. — Gewiss sind Bodemanns Mittheilungen aus den vergangenen Jahren lückenhaft, aber bei seinem beschränkten Raume konnte er, wie jeder, nur das, was ihm besonders wichtig erschien, geben, — und so ist es, infolge ungenügender Orientirtheit in diesen Materien, der Aufmerksamkeit der beiden Gelehrten entgangen, dass Bodemanns Mittheilungen sämmtlich, also auch für die Zeit, die Kapp umfasst, ausserhalb des Inhalts der Kappschen Sammlung liegen, aus welcher Guhrauer, trotz ihrer Lücken, meinte (allerdings irrthümlich), „die ersten Anfänge dieser berühmten Versammlung (näml. der Societät) mit allen Umständen . . . . . kennen zu lernen" [34b]).

## II.

Das „habent sua fata" gilt in entsprechendem Maasse auch von dieser bescheidenen Publication. Dass ich zu ihr durch das Studium der Wirksamkeit Jablonsky's gelangte, ist dem Leser dieser Zeilen bereits bekannt [35]). Als ich noch mit dem Jablonsky'schen Nachlass nicht eingehender bekannt war, plante ich eine allgemeine Auslese aus demselben, zur Erneuerung seines Gedächtnisses und zur Grundlage für eine genauere Erkenntniss seiner Persönlichkeit und seiner Verdienste. Als sich dem Weiterforschenden der Umfang immer grösser und eine Auswahl auch aus technischen Gründen immer schwerer gestaltete, gab ich den Gedanken einer allgemeinen Sammlung trotz mancher Ermuthigung auf: die einzelnen Gebiete der Jablonsky'schen Thätigkeit führten zu einer bequemen Gruppirung des Materials. Den Theil, der sich auf Jablonsky's Thätigkeit für den ungarischen Aufstand bezieht, liess sich die ungarische Akademie

34a) Ad. Harnack: Berichte des Secr. . . . J. Th. Jablonsky an den Präsid. G. W. Leibniz 1700—1715 etc. Berlin 1897. S. 4, Anm. 1.

34b) Guhrauer: Leibn. D. Sch. 2. Bd. 73. Ich wäre übrigens ungerecht, wenn ich verschwiege, dass auch ich auf den Bodemann'schen Verweis auf Kapp so sicher baute, dass ich erst bei einem zweiten Aufenthalt in Hannover mich bewogen fühlte, jene Sammlung ganz durchzunehmen.

35) Vgl. die Vorrede in Acta et Com. 1896. IV. S. 2.

der Wissenschaften durch meine Vermittelung copiren[36]); die Publication desselben, namentlich in Verbindung mit der Kritik der Fiedler'schen Sammlung, konnte ich nicht übernehmen[37]). Die nicht minder wichtige Sammlung der noch weit umfangreicheren Akten, die sich auf Interventionen zu Gunsten polnischer Evangelischer beziehen, wird zum Theil von einer historischen Gesellschaft verwerthet werden[38]). Das Studium seiner Arbeiten im Interesse des geistigen Lebens in Berlin und der evangelischen Kirche überhaupt erhielt eine willkommene Unterlage, als ich fand, dass Guhrauer und Klopp den in Hannover befindlichen Nachlass Leibnizens nicht ausgebeutet, offenbar weil sie ihn nicht geprüft hatten, oder um mich ganz kurz zu fassen, als ich constatirte, was bereits oben gesagt wurde, dass der in Hannover aufbewahrte Briefwechsel Leibnizens mit Jablonsky von dem, den Kapp und Guhrauer veröffentlicht haben, von Anfang bis zum Ende (also von 1698 bis 1716) unterschiedene Stücke enthält. Da mir dabei namentlich nach Einblick in die Berliner Archive Jablonsky's Bedeutung für seine Zeit und deren mannigfaltige Institutionen grösser, als ich früher dachte, erschien, reifte in mir der Entschluss, diesen Theil meiner Sammlung vor Allem zu publiciren. Es ist für mich eine Freude gewesen, ein halbes Jahrhundert hingebender und erfolgreicher slavischer[38a])

36) Theils aus dem Unit.-Archiv, dep. im Staatsarchiv zu Posen, theils aus dem kgl. geh. Staatsarchiv zu Berlin. Ich habe einen ausführlichen Bericht darüber an die Akademie gerichtet.

37) Den Ertrag habe ich in einer eingehenden Abhandlung zusammengestellt: „Zur Geschichte der preussischen Verbindungen Fr. Rakoczy's II in der Zeitschr. Századok 1898, September. Ich sprach darüber mit dem seither verstorbenen Ministrath Dr. Szilágyi. Hoffentlich wird die Akademie die krit. Aufgabe jemand anders übertragen.

38) Die histor. Gesellschaft für die Provinz Posen, der es allerdings hauptsächlich an die localen (grosspolnischen) Details ankommt. Eine Arbeit „Jablonsky und Grosspolen“ sollte Grundzüge der evang. Kirchengeschichte Polens, in Verbindung mit der Geschichte der preuss. Politik 1690—1740 liefern. Doch ist diese, übrigens bereits sehr reichhaltige Sammlung bisher nicht abgeschlossen.

38a) Bereits oben erinnerte ich an Kleinert's Verdienst in der Sache, dass man namentlich Jablonsky's Persönlichkeit neuerer Zeit viel Interesse abgewinnt. Ist mit den Jahren zu dem, was Kl. gesagt, wie bei den meisten historischen Gegenständen überhaupt, neues historisches Material eröffnet worden, woraus ihm niemand Vorwurf machen wird, so wird doch jeder Specialforscher seine nüchtern und doch so warm, in der bei ihm gewohnten feinsinnigen Weise geschriebenen Ausführungen

Arbeit im Interesse deutscher Cultur verfolgen zu können. Zur näheren Erläuterung der etwas übermässigen Eile und der hier irrelaventen Nebenumstände verweise ich auf das Vorwort [39]). Persönlich und amtlich traten nun einer prompten Beendigung des Druckes mannigfaltige Hindernisse in den Weg — und um einer noch grösseren Verschleppung vorzubeugen, beschloss ich, die geplanten Excerpte aus Jablonsky's anderweitigen Briefen und Aufzeichnungen, trotzdem sie zum Verständniss dieses Briefwechsels wesentlich beitragen, aufgebend, die gegenwärtige Publication auf seine briefliche Verbindung mit Leibniz zu beschränken. Bildet sie einen bereits durch vorangegangene Arbeiten Interesse weckenden Gegenstand, so war die Aufmerksamkeit für eine solche Publication namentlich in den Zeiten, wo ich sie anfing, historisch begründet. Im vorjährigen März waren es 200 Jahre, seit die Verbindung begann [40]), und das Jahr 1700 bezeichnet den Höhepunct in den Beziehungen der beiden Männer, deren einer in Entwürfen, der andere in treuer und hingebungsvoller Arbeit grosse Charismata aufzuweisen hatten.

Abweichend von dem ursprünglichen Plan enthält also die gegenwärtige Sammlung im Wesentlichen eine Ergänzung der Kapp-Guhrauer'schen Ausgaben des Jablonsky-Leibnizschen Briefwechsels. Dass auch einiges Amtliche hinzukam, ist eigentlich Ausfluss des früheren Vorhabens, behält aber, wie ich glaube, vollständig den Sinn; namentlich ist die Auseinandersetzung zwischen der Societät (Jablonsky) und Leibniz ein integrirender Bestandtheil des Briefwechsels selbst [41]); dagegen erschien es angezeigt, die Rede des Ministers Fuchs, die nicht zum Thema gehört, wegzulassen [42]). — Freilich zeigt auch

---

nicht umgehen dürfen, wenn sie sich auch hauptsächlich nur auf gedrucktes Material stützen. Auch dieses ist nämlich recht selten und wie ich jetzt sehe, sind bei Jablonsky auch Archivalien beigezogen worden.

39) Vgl. S. 2 der öfter citirten Vorrede.

40) Aus diesem Anlass habe ich März 1698 in der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag einen Vortrag über die Familie Jablonsky gehalten: Jedna exulantská rodina česká. Abgedr. in Slov. Pohľady XVIII. S. 587—597 (slovakisch).

41) Der Briefwechsel ist ohne diese Stücke, die begreiflich in ihm nicht enthalten sind, nicht völlig klar.

42) Es war leider meiner Aufmerksamkeit entgangen, dass sie bereits in den Jablonsky'schen Predigten gedruckt war. Ein Vergleich der beiden Texte der Rede erschien mir nicht ausgiebig genug.

dieser Briefwechsel noch erhebliche Lücken. Nach einem Vergleich mit dem oben erwähnten Jablonsky'schen Schreiben an Kapp ergiebt sich, dass uns noch fast die Hälfte der Leibnizschen Briefe fehlt[43]) und auch die vorhandene Hälfte wahrscheinlich aus Concepten besteht, deren Werth wir erst zu prüfen haben. An vielen Orten, wo ich Veranlassung zu haben meinte, suchte ich nach der Spur der verschwundenen Schreiben, kaum nennenswerth ist der Ertrag, und so bleibt dieser Sammlung nur die Hoffnung, dass sie an ihrem Theile auch der eventuellen Wiederauffindung der Reste vorarbeiten wird.

Man kann die hier veröffentlichten Stücke als eigentlich und als nur indirect zum Briefwechsel gehörend unterscheiden. Da uns der Jablonsky'sche Nachlass fehlt, so sind wir auf den Leibniz'schen angewiesen, der bekanntlich viele Concepte seiner Schreiben, zum Theil in Anschluss an die erhaltenen Originale enthielt. Der Thatbestand, wie ich ihn bereits berührt, zeugt davon, dass aus dem Ganzen des Leibniz'schen Besitzes der Theil, den durch Kirch Jordan, und durch diesen Kapp erhielt, frühzeitig herausgenommen worden war; ob durch Leibniz selbst, oder was wahrscheinlicher, durch Andere, lässt sich nicht feststellen. — Aus dem Briefe Paul Jablonsky's an Busch könnte man ferner schliessen, dass die Leibniz'schen Schreiben, wie sie auch bei Kapp vorliegen, nur Concepte sind, — dasselbe gilt von dem grossen Theile der hiemit ans Licht tretenden Sammlung.

Die hier publicirten Briefe, bis zu Nr. 152 (laut der Uebersicht) sind der kgl. Bibliothek zu Hannover entnommen. — Ich bemerke nur, dass sich der Brief **143$^{b}$** (Leib. a. J. 9. Jan. 1711) in dem Convolut der D. E. Jablonsky'schen Briefe nicht vorfindet, ich ihn nur bei Klopp vorgefunden, weshalb ich hiemit darauf verweise[44]). Die Briefe von 149 bis 169 sind zum Theil in der Bibl. Hann., theils in dem geheimen Staatsarchiv in Berlin vorhanden. Nach den Vorlagen der Bibliothek habe ich abdrucken lassen: Nr. 149—152, 155, 157—159, 161, 164, 168.

Dem geh. Staatsarchive sind entnommen: 153, 154, 154$^{b}$, 156, 160, 162, 163, 165, 166, 167, 169[45]).

---

43) Vgl. Anm. 13. Danach wäre Jablonsky im Besitze von 70 Leibniz'schen Briefen gewesen. Davon sind bei Kapp und hier alles in allem bloss 37 veröffentlicht.

44) Vgl. Anm. 31.

45) Theils dem Convol. 1716 und 1717 in der Rep. 13 N. 19d. Theils der Rep. 9 K. lit. M. Acta Generalia.

Die Beilagen sind ebenfalls theils der kgl. Bibliothek zu Hannover, theils dem Staatsarchiv zu Berlin entnommen. Der Bibliothek gehört Nr. II. S. 171, und zwar dem Convolute der Briefe J. Th. Jablonsky's, die Harnack publicirte, wobei er aber auffallender Weise eben dieses kleine charakteristische Brieflein ausgelassen[46]). Nr. VI. VII. VIII. S. 176—185 die ich nach Guerrier's Sammlung aufgenommen habe[47]). Die übrigen Nummern gehören dem genannten geh. Staatsarchiv, wobei ich nur bemerke, dass der Brief auf Seite 180 bereits von Klopp aus einem undatirten Hannover'schen Concept veröffentlicht worden war[48]).

Die Jablonsky'schen Schreiben sind durchwegs Originale[48a]), (dabei sind allerdings manche copirte Beilagen; so das Edict betreffend die Beichte S 36; bereits abgedruckt[48b]) von den Leibniz-schen nur die 5, die der Berliner Sammlung entnommen sind[49]), alle anderen sind Concepte[49b]. Deshalb ist von grossem Belang die Frage, welchen Werth die Leibniz'schen Concepte haben? Ist es wahr, was Klopp behauptet[50]), dass Leibniz seine Concepte so lange umgearbeitet, bis er sie für die Originalbriefe einfach copiren konnte? Danach hätten die Concepte den Werth der Originalien. Dies hat er aus Leibniz's Briefen an Burnet

---

46) Trotzdem er andere Briefe desselben Schreibers aufgenommen. Vielleicht nimmt er an, dass die darin erwähnten Zusammenkünfte mit den sog. Societätsconventen identisch sind, was jedoch nach Jablonsky's Aufzeichnungen sicher irrig ist.

47) Guerrier: Leibniz in seinen Beziehungen zu Russland und zu Peter dem Grossen. S. Petersburg u. Leipzig 1873 Nr. 129. 130. 137.

48) Bd. X. S. 460 ff. Leibniz an v. Printzen (Sans date).

48a) „Dass die beiden Schreiben, vom 30. Juli und 1. August 1716, welche, abweichend von den folgenden, die Anrede „Hochwürdiger" tragen, doch an Printzen gerichtet seien, gewinnt dadurch Grund, dass Printzen „1709 das Präsidium beim Consistorio und das Directorium über alle geistlichen Sachen des Kirchenraths am Dom" und „1713 (das Präsidium) des Reformirten Kirchen-Directorii" übertragen wurde". (Vergl. Klapproth, „Geh. Staats-Rath", pag. 395 ff.). Mittheilung des Herrn Taege.

48b) bei Mylius: Corp. Const. March. I. 419. 420.

49) Bei dieser ist es nicht zu bezweifeln.

49b) Das Concept S. 66 ist wohl für L. selbst zur Hülfe für das Gedächtniss bei dem bevorstehenden Berliner Besuch abgefasst worden.

50) Vgl. Bd. I, Einl. X. Bd. VIII, Einl. S. XVI u. Bd. IX. S. XLVII über den Quellenwerth der Concepte.

constatiren können. Dagegen hat Doebner[51]) an mehreren Briefen nicht nur Abweichungen der Originale constatirt, sondern gar modificirte Datirung. Schon an und für sich erscheint es wahrscheinlicher, dass der verbessernde Autor sich auch in der Schlussredaction nicht auf unbedingtes Copiren beschränkt. — Zeigt uns der Brief 134 die Art der Leibniz'schen Correcturen, so beweisen die Nr. 141 und 141[a], dass gar Copien von Concepten vorhanden sind, die ihre Vorlage nicht im Ganzen wiedergeben, so dass man diese in Ermangelung von Originalen immerhin willkommenen Concepte durchaus nicht als ganz verlässliche historische Documente verwenden darf. — In zwei Fällen ist uns eine definitive Prüfung möglich. Der Brief 160 liegt im Hannoverschen Concept und im Berliner Original vor. Nun sind sinnändernde Abweichungen nicht vorhanden, aber identisch sind die beiden Texte nicht; augenscheinlich hat sich der Autor bemüht sein Schreiben stilistisch zu vervollkommnen[52]). Wie schon erwähnt, hat den Brief S. 180 aus Hann. Concept Klopp abgedruckt: ein Vergleich bestätigt die vorangeschickte These.

Wie ebenfalls schon gesagt worden, ist die Datirung der Concepte nicht verlässlich; ausserdem giebt es aber auch solche ohne Daten. Mir blieb nichts übrig, als die Anordnung der Bibliothek (ich weiss nicht ob solche von Leibniz herrührt) zu acceptiren[53]). Ich behielt sie selbst in dem Falle, wo mir die Chronologie nicht die richtige zu sein scheint[53a]).

## III.

Eine völlige Ausbeutung des Inhalts wird hier nicht beabsichtigt. Ist ja fürs nächste Jahr eine eingehende Geschichte der Berliner Akademie zu erwarten, die auch den sie betreffenden Theil dieser Sammlung erläutern und verarbeiten dürfte[54]). Die

51) A. a. O. S. 207.

52) Da ich das Original abgedruckt habe, erschien es mir nicht nöthig die Varianten des Concepts anzugeben.

53) Im Ganzen ist sie verlässlich.

53a) Einen solchen wichtigeren Fall erwähne ich später Anm. 62.

54) Dies hat Ad. Harnack veranlasst, von einem Commentar abzusehen, da sein Geschichtswerk solchen bringen wird. Andererseits ist

irenischen Verhandlungen verdienen eine selbständige Behandlung, die sich nicht auf diesen Briefwechsel beschränken wird. Deshalb möchte ich nur auf einige Einzelheiten mit Nachdruck hinweisen, die entweder als Correctur, oder als Ergänzung bisheriger Annahmen besonderes Interesse zu verdienen erscheinen. Mit Hilfe des die Personalien aufhellenden Index dürfte alles hier Gebotene verständlich sein.

Hervorzuheben ist der erste Brief Jablonsky's. Ueber den Vorgang bei der Tafel der Churfürstin war m. W. nur eine wortkarge Relation nach Hannover gekommen [55]). Nun haben wir den Bericht des Augen- und Ohrenzeugen. Nach seinem Diarium [56]) hätte diese Mahlzeit den 13. Mai 1697 stattgefunden. Der Ausdruck: „ward einmal erwähnet", dass kein Kalender etc. . . scheint zu zeugen, dass es nicht Worte der Kurfürstin gewesen seien. Jedenfalls ermüdete seitdem Jablonsky in der Arbeit fürs Observatorium nicht. Schon im Sommer, den 29. Aug. 97, hat er sich nach einem Garten umgesehen; im Herbst (10. Sept.) sprach er in dieser Angelegenheit bei Rabener vor; zwei mal besuchte er Dobrzensky, den 26. Sept. und 17. October. Den 29. October war er beim Oberpräsidenten Dankelmann. Wiewohl er für den bald gefallenen Minister grosse Sympathien hatte [57]), unterliess er es nicht, auch bei seinem Nachfolger die Angelegenheit bestens zu empfehlen; am Vorweihnachtstage (24. Dec.) sprach er bei Kolbe vor, und schrieb darüber „satis benigne me excepit". Am 4. Januar des folgenden Jahres war er beim Hofmedicus Albinus. Den Tag, wo Jablonsky von der Curfürstin den Auftrag erhielt, mit Leibniz in Correspondenz zu treten [58]), finden wir nicht verzeichnet. Dagegen wohl den Tag, an dem er bei Fuchs das Leibniz'sche Schreiben betr. die Union [59]) kennen lernte: es war d. 29. Januar (98).

---

es mir, mit Rücksicht auf unsere Zeitschrift unthunlich das Erscheinen seiner Geschichte abzuwarten. Dass dieser Cirkel nicht von mir verschuldet ist, darüber vgl. die Vorrede in den Acta etc. 1896 IV., S. 2.

55) Klopp VIII., S. 46. Vgl. auch Varnhagen v. Ense, d. a. O. S. 88.

56) Besitz des Herrn Red. Max Jablonsky in Berlin. Es geht von 1693 bis 1705, es ist in ein grösseres und ein kleineres eingetheilt; hier kommt nur das kleinere in Betracht.

57) Dies erhellt aus dem kleinen Diarium. Er scheint ihn auch im Gefängniss besucht zu haben.

58) Seite 12 „neulichst".

59) Vgl. das kleine Diarium.

Soviel zur Chronologie dieser Vorgänge. Von besonderem Interesse aber ist namentlich das Nachwort, wo er die Beifügung eines Buches erwähnt: dies ist nichts Anderes, als die „Stultitia atheismi“ [60]), eine lateinische Uebersetzung von Bentley's apologetischen Reden. Diese Reden hatte Jablonsky in der Spanheim-Conferenz [61]), den zwanglosen gelehrten Zusammenkünften, die mit dem vorangegangenen Jahre abgebrochen wurden, vorgelesen, und deren Uebersendung zeigt nunmehr auch äusserlich den Zusammenhang der beiden gelehrten Republiken.

Jablonsky hat die erste Antwort den 1. April erhalten, daraus ergiebt sich, dass die hier sub 2 und 4 veröffentlichten Concepte einen Brief ausmachten [62]), mag sein, dass ihre Entstehung in der gegenwärtigen Anordnung chronologisch richtig gekennzeichnet ist. Das Gerücht, auf welches sich sowohl Jablonsky im ersten Briefe wie auch dies Concept bezieht, ist aller Wahrscheinlichkeit nach Molanus' Uebertritt zum römischen Glauben [63]). Dass die confessionelle Polemik in Mitteln, auch wenn sie Verleumdung heissen, nicht wählerisch war, überrascht umso weniger, als thatsächlich Molanus nahegelegt worden war zu katholisiren [64]). Ebenso wird ihm heute ungerecht vorgeworfen, er sei mit dem Pietismus gegen die Orthodoxie verbündet gewesen, da er im Gegentheil an Speners Reform wenig Gefallen hatte [66]).

Von den übrigen Einzelheiten berühre ich nur wenige. Zu den sehr wichtigen gehört, dass Leibniz mit dem Societäts-Plan des grossen Curfürsten, dem Jablonsky eine besondere „Hoheit“ zuschreibt, eben durch den intellectuellen Urheber des Entwurfs bekannt geworden war [67]). Dieser schwedische Aristo-

60) Dass dem so ist, erhellt aus der 1696 herausgegebenen Schrift selbst.

61) Ueber diese Conferenz werde ich in einem selbständigen Aufsatz in den Monatsh. der Comenius-Gesellschaft berichten. Er beruht wesentlich auf den beiden Diarien des D. E. Jablonsky.

62) Der Brief 3. wäre demnach als Brief 2 zu betrachten. Doch ist diese bestehende Anordnung historisch von Interesse, weshalb ich auch nichts daran geändert habe.

63) Ein anderes ist mir nicht bekannt, und dieses passt in diese Zeit.

64) Vgl. den Artikel Molanus in Herzogs Realencycl. 2. Aufl.

66) Vgl. Leibnizens Worte S. 22.

67) Vgl. S. 61 u. 64.

krat, Skytte, gehörte zu dem Bekanntenkreise des Comenius Hartlib. Im Jahre 1651, wo Comenius seine Secta heroica zu begründen suchte[68]), war er eben in Ungarn anwesend gewesen, und befand sich gewiss unter jenen, die ihren Antheil daran versprachen[69]). Später (1662) interessirt er sich für ein „Collegium", und gedenkt deshalb Hartlib aufzusuchen, der aber bald darauf vom Schauplatze verschwindet, offenbar gestorben ist[70]). Nun liegt die Vermuthung sehr nahe, dass der junge Leibniz die Bekanntschaft mit Skytte durch Hesenthaler, den württembergischen Historiographen gemacht hat, den bekannten Freund des Comenius, den er mit Val. Andreä versöhnt hatte[71]). Dieser Hesenthaler, ein besonderer Verehrer Andreä's[72]), hatte offenbar durch die Nürnberger Leibnize[73]) Kenntniss von diesem vielversprechenden Jüngling G. W. erhalten[74]). Und hier dürfte man vielleicht eine Combination über Leibnizens geheime Rosenkreuzer-Genossen wagen. In meiner Abhandlung über Andreä's Antheil an geheimen Gesellschaften[75]) legte ich die Daten, die ich über eine Nürnberger geheime Verbindung, Antilia, in Wolfenbüttel und Oxford gefunden habe[76]) kurz dar. Wahrscheinlich neben ihr[77]) bestand nun der Andreä'sche Freundeskreis, dem Andreä ein pietistisch gefärbtes Specimen[78]) gewidmet hat. Jedenfalls war in diesem letzteren Bunde der Justus Jacob Leibniz, der mit unserem

68) Vgl. über die Secta heroica, die ich jüngst in Lissa gefunden, die vorläufige Mittheilung in den Monatsh. der Com.-Gesellschaft 1897 S. 272.

69) Dies ist zu schliessen aus des Comenius Andeutungen über fremde Freunde des Planes Secta heroica.

70) White Kennet: Chronicle and Register Vol I. 868.

71) Vgl. hierüber meine Sammlung: Comenianische Correspondenz S. 129. 138.

72) Daselbst S. 138. 184.

73) Dies vermuthe ich bloss, weil mir eine Freundschaft zwischen diesen Freunden Andreä's wahrscheinlich erscheint. Aber es konnte ebensogut auch Skythe gewesen sein, der die Bekanntschaft vermittelte.

74) Dies wird wohl bald nach Leibniz's Abgang von Leipzig erfolgt sein. Die Bekanntschaft ist für den viel älteren Hesenthaler ein Zeugniss von besonderer Menschenkenntniss.

75) Vgl. Acta et Comment. 1899, II.

76) Vgl. daselbst Ss. 28 ff.

77) Dass neben ihr, und nicht identisch mit ihr, erscheint mir jetzt fast sicher.

78) Verae unionis in Christo Jesu Specimen, verfasst 1628, erschienen zuerst 1642.

Leibniz auch in einem „Rosenkreuzer“ Verein gewesen sein soll[79]). Da es sich um einen verwandten Kreis handelt, glaube ich dass die Antilia mit diesem Rosenkreuzer Bunde identisch ist, und verweise auf die Argumentation der erwähnten Abhandlung[80]).

Wichtig ist dieser Umstand, insofern dadurch die Quelle für seine Societätsbegeisterung und Pläne offenbar wird[81]). Und es ist fast überraschend, indem man dieser Quelle weiter nachgeht, durch die Antilia mittelst Andreä, durch den Skytheschen Plan mittelst Comenius zu dem Dominicaner Campanella zu gelangen: und nach der Erkenntniss dieser Thatsache, und nach einem Blick auf Leibnizens Missionspläne, in der Stiftung der preussischen Societät auch eine Nachwirkung der grossartigen Missionstriebe der Gegenreformation zu finden[81a]). Wahrscheinlich gab dem Leibniz Skytte auch die Veranlassung mit Comenius bekannt zu werden, was wohl am besten in das Ende der sechziger Jahre zu verlegen ist, bei einer vermuthlichen Reise Leibniz's nach Amsterdam[82]). Eine Vermittlung der Bekanntschaft durch

79) Eine Erzählung Eckardt's ..... Vgl. Guhrauer: G. W. Leibniz etc. Dresden 1846, S. 44—48 .... ausführlich bei Keller: Comenius und die Akademien der Naturphilosophen, in den Monatsh. der Comen.-Gesellsch. 1895 S. 91 ff.

80) Acta etc. 1899, S. A. S. 45.

81) Der Skytte'sche Plan war gewiss im Zusammenhange mit all den Bewegungen, die ich in der öfter citirten Abhandlung geschildert habe. Ein classisches Beleg dafür ist folgende Mittheilung Leibnizens an Fabricius 14. Oct. 1702): „Scriptum, cui titulus: Civitas sapientium adumbrata, non vidi. Suspicor, esse profectum a Barone Benedicto Skyttio, Suecici regni Senatore, qui, quum esset in exilio, talia moliebatur, et civitatem illam Heliosophopolin adpellabat credo in civitate solis Campanellae exstruendam.“ Dutens Leib. Op. V 260. Auf die Verwandtschaft seiner Gesammtauffassung mit der Comenianischen hat zuerst Kleinert hingewiesen: Zur christl. Cultur u. Culturgeschichte Berlins 1889, S. 301.

81a) Gegen allzuweitgehende Schlüsse (namentlich aus folgenden) ist darauf zu verweisen, dass ihm die Utopia, die Civitas Solis, die Neue Atlantis (von Baco) schon recht frühe als Chimäre erschienen; dies erhellt aus Klopp L. W. I. S. 120. 121. Aber Campanellas grossartige Missionspläne werden erst bekannt werden durch meine Eröffnungen in einem Vortrag über Campanella in der philos. Gesellschaft zu Petersburg auf Grund seiner (bisher trotz den zahlreichen Amabilischen und Felicischen Arbeiten unbekannt gebliebenen) Schrift: Quod reminiscentur etc., die mir gelungen ist aufzufinden.

82) Hesenthaler ist in diesem Jahre über Amsterdam nach London gereist, hat sich bei Comenius eine Zeit lang aufgehalten.

Hesenthaler ist ebenso wahrscheinlich, zumal wir wissen, dass ihn dieser zur Abfassung des bekannten Gedichtes auf Comenius noch in einem besonderen Brief aufgefordert hat [83]). Auch die Werke des Comenius hatte ihm dieser zur Verfügung gestellt [84]), ebenso wie er auch für englische Bekanntschaften ihm den Weg geebnet [85]). Ich verweise dabei nochmals auf die Analogie der beiden Männer (Comenius und Leibniz) in derer Arbeiten um das perpetuum mobile, worüber ich eine kleine Feuilletonskizze vor einigen Jahren entworfen [86]).

Ob mit diesen Vorgängen Leibnizens Vorliebe für geheime Zusammenkünfte zusammenhängt, weiss ich nicht, jedenfalls ist, gegen Rocholl [87]), darauf zu verweisen, dass nicht Jablonsky, sondern Leibniz solche vorgeschlagen, wo sie vielleicht nicht unbedingt nöthig gewesen: so bei der ersten Hannoverschen Reise Jablonsky's [88]); für seine eigene zweite Berliner Reise sucht Leibniz nach Prätext [89]); auch später meint er, Jablonsky solle einen Vorwand für eine geplante Reise suchen [90]), wogegen Jablonsky direct darauf dringt, dass Leibniz schon einmal cognito nach Berlin kommen möge [91]).

Sehr mangelhaft waren bisher die Leibniz'schen Reisen nach Berlin, wie auch ihre Motive bekannt. Ich möchte mich diesmal auf die Hauptdaten beschränken.

Die erste Berliner Reise Leibnizens fand bald nach Jablonsky's Reise nach Hannover schon Ende October 1698 statt. Sie galt officiell den Irenicis; ausserdem wurde eine Berufung Leibnizens erwogen [91a]). Die zweite, von der Bodemann auch nur

---

83) Der Brief, kurz nach Comenius' Tode, also wohl noch 1671 geschrieben, befindet sich in der kön. Bibl. Hannover, und wird in meiner neuen Sammlung Comenianischer Analecta gedruckt werden.

84) Brief Leibniz's an Hesenthaler leider ohne Datum, auch ohne jedweden Anhaltspunct zur Datirung. Vgl. Kortholt, Leibnitii Epistolae III. pag. 263.

85) Gerhardt: Die philos. Schriften von Leibniz VII. 5.

86) Politik 1896, 16. Juni.

87) Gesch. der evang. Kirche, S. 338.

88) Vgl. diese Sammlung, S. 21.

89) Hierselbst S. 45.

90) Daselbst S. 107.

91) Daselbst S. 99.

91a) Am 30. Oct. hat ihn bereits Jablonsky besucht, — den 2. Nov. nimmt er von ihm Abschied. Zum 3. Nov. steht verzeichnet: „Adii Dn. a Fuchs in causa Leibnizii vocandi". (Jabl. Diar. minus).

als geplanter weiss, erfolgte 1699, in den ersten drei Tagen Februars[92]). Auch bei dieser Gelegenheit erfolgte eine allseitige Aussprache zwischen den beiden Männern. Wie stets, dachte Leibniz auch an sich, und ich vermuthe, dass dabei besprochen wurde, dass Jablonsky an Spanheim schreiben solle, dass er für Leibniz die durch Puffendorff's Tod freigewordene Stelle eines preussischen Historiographen erwirken möge[93]). Wenigstens berichtet Jablonsky, bald danach, er hätte in diesem Sinne nach Paris geschrieben[94]). Dass man dabei auch die Abfassung einer, den beiden evangelischen Parteien gemeinsamen Confession Leibniz überwiesen hat, erscheint wahrscheinlich[95]).

Jablonsky selbst war sich der geistigen Grösse Leibniz's bewusst. Wie sein erster Brief, so besonders jene vom Anfang 1699 zeigen fasst eine Ueberschwänglichkeit angesichts der Ehre, die ihm aus dieser Bekanntschaft erwachse[95a]). Leibniz fand auch an seinem Berliner Freunde immer mehr Wohlgefallen, und namentlich war es seine Begeisterung für die Wissenschaft, auch die Societät, die L. hoch schätzte[96]). Jabl.'s vom König fürs erste acceptirten Entwurf nennt er sehr gut[97]), später räth er ihm, mit dem Hof zu ziehen und über die Societät zu vigiliren[98]). Hat sich Leibniz vielleicht auch einmal über Jablonsky geärgert, wie Guhrauer will[99]), so war doch der Briefwechsel recht lebhaft, besonders wenn man erwägt, dass Leibniz bei seinen häufigen Berliner Aufenthalten fast täglich mit Jablonsky verkehrte[99a]). Bei den ersten Besuchen in Berlin, die nur einige Tage währten, dauerten die Besprechungen mehrere Stunden lang täglich[99b]). Damit ist wohl auch zu erklären, dass die so schön begonnenen philosophischen Auseinandersetzungen[99c])

92) Im Diarium Minus finden wir das Datum 1–3. Februar, leider ist dabei über den Gegenstand der Besprechungen nichts verzeichnet.

93) Vgl. über diesen Plan Guhrauer: G. W. Leibniz etc. S. 182. 183.

94) Im Diarium Minus lesen wir zum Tage 7. Febr. 1699: er habe nach Paris geschrieben in causa Leibniziana.

95) Vgl. S. 62 dieser Sammlung.

95a) Daselbst S. 47, 48.

96) Daselbst S. 63.

97), 98) Daselbst.

99) Leibn. Deutsche Schriften I. S. 96.

99a) Das Diarium minus giebt an manchem Tage sogar 2 Zusammenkünfte an.

99b) Vgl. dasselbe Diar. minus.

99c) Vgl. S. 14—18 dieser Sammlung.

später völlig aufhörten: man hatte sich eben ausgesprochen. — Das auf die Societät bezügliche Detail hatte Daniel E.'s Bruder zu berichten[99d]). Wenn auch nicht wörtlich, so hat doch im Wesentlichen der Brief Papen's Recht[99e]). Noch erklärlicher wird die Lauheit in der Verbindung in der Zeit, als Jablonsky den politischen Sorgen, namentlich den ungarischen, übermässig viel Zeit widmen musste[100]), ja gar die englische Reise mit Rakóczy's Agenten unternahm[101]). Es war dann namentlich die Ernennung des G. Rath von Printzen zum Ehrenpräsidenten, was Leibniz von Neuem zu dem Gedanken brachte, er werde präteriirt, und zwar von der Societät, was jedoch Jablonsky bestritt, indem er das Arrangement direct auf den königlichen Beschluss zurückführte[102]). Aber die grosse Katastrophe, die durch Friedrich Wilhelm's Regierungsantritt eintrat[103]), Leibniz's lange Entfernung und seine Ansprüche auf Gehalt[104]), sie stimmten die anderen Mitglieder umsomehr gegen ihn, als er in seinem Schreiben an v. Printzen die Societät fast nur als sein ausschliessliches Werk ausgab[105]). Deshalb die Reduction seiner Verdienste in der von Jablonsky abgefassten Eingabe der Societät[106]), deshalb die gewiss bis zur Ungerechtigkeit anerkennende, fast als Zurechtweisung erscheinende Würdigung Chuno's eben in dieser Zeit von Seiten des für die Societät doch am meisten thätigen Jablonsky[107]). Den Verlauf mögen, zur Ergänzung der Nr. 9, der III. Abth. dieser Sammlung, noch die folgenden Aktenstücke[107a]) beleuchten.

---

99d) Allerdings erst vom 1. Nov. 1700 an.

99e) Vgl. diese Sammlung S. 168. 9.

100) Dies besonders seit dem Jahre 1707. Vgl. meine Abhdl. in den Századok 1898 Sept.

101) Vgl. meinen übrigens in vielen seiner Ausführungen bereits über holten Vortrag: Fünfzig Jahre im preuss. Hofpredigerdienste. Acta et Comment. 1895. S. 7.

102) Vgl. Klopp IX., S. LIX. u. S. 123. 4. . . . dieser Sammlung.

103) Vgl. die beiden königl. Schreiben, und des Secret. Jabl. Bericht bei Harnack: Bericht Th. Jablonsky's an Leibniz, S. 99.

104) Vgl. hierüber S. 127 . . . . dieser Sammlung.

105) Vgl. daselbst S. 188.

106) Daselbst S. 191.

107) Daselbst S. 130.

107a) Geh. Staatsarchiv zu Berlin. Rep. 9 K. lit. m. Acta generalia, betr. die Fundation der Akademie der Wissenschaften.

„Es wird dem Könige der Etat der Akademie, bestehend in 1550 Thaler für Besoldungen und 1330 Thaler für zufällige und unständige Ausgaben, zur Bestätigung vorgelegt. Unter den Gehältern figurirt das des Präsidenten Leibniz mit 600 Thalern und das des Secretärs Jablonski mit 400 Thalern."

Der König kürzte jede der beiden Hauptsummen um je 500 Thaler mit dieser eigenhändigen Bemerkung [107b]):

„Leibniz soll hinführo 300 Rthl. haben, der Secretarius 200 Rthl., hinführo extraordinair 830 Rthl. zum Bau und Matema instrumenta und der geleichen: würden über diesen [107c]) Ettat 1000 rt. Diese 1000 sollen an Gundelsheim quartaliter mit 250 rtt. getzahlet werden vor meine angerichtete Sössissiaetaet [107d]), die dar viell nützl. ist als diese Narren-Possen. Meine Sossiätet ist vor der Weldt und Menschen Beste, die andehrn nichts als der dollen Menschen ihre Curieusitet. Dieses ist mein Wille sonder Remonstracion".

Wie so Jablonsky angesichts dessen noch die Möglichkeit erwähnen konnte, dass man Leibniz, wenn er fleissiger werde, den Lohn erhöhen dürfte, wird voraussichtlich in der Geschichte näher sichtbar sein [109]). Ich vermuthe es, dass es sich auch hierbei um Jablonsky's besondere Intervention bei dem Könige handelt [110]).

---

Es ist allgemein bekannt, dass der Gedanke der irenischen Verhandlungen am Ende des XVII Jahrhunderts durch die sog. Ryswicker Clausel in den Vordergrund gestellt worden war; dass Leibniz dabei ebenso in Diensten seines Hofes stand, wie Jablonsky, und dass es sich dabei auch noch um eine Annäherung der beiden Höfe handelte [111]). Dabei wird Niemand die

---

107b) Marginal Friedrich Wilhelms I, d. d. Wusterhausen 27. Nov. 1714.

107c) D. i. also den durch die Kürzung reducirten.

107d) Das von des Königs Leibmedico Gundelsheimer geleitete „Theatrum anatomicum".

109) Vgl. diese Sammlung. S. 191.

110) Von solchen haben wir häufig Kenntniss aus J. Th. Briefwechsel mit Leibniz. Vgl. auch diese Sammlung S. 126. 7.

111) Vgl. Klopp X., S. XXXI. Diese Bedeutung der Ryswickschen Clausel wird allgemein anerkannt. Z. B., Guerrier S. 26.

überzeugungsfreudige Theilnahme der Hannoverschen wie der Berliner Theologen schief beurtheilen[112]. Nur erwies sich hier Leibniz keineswegs besonders charaktervoll. Nachdem er so viel davon geschrieben, fährt er nach Wien und strebt daselbst eine Hofwürde an, er, der früher erklärte, es wäre zweckmässig ihn zum Agenten der Unionsverhandlungen der Protestanten zu ernennen — mit Gehaltbestimmung[113]. Auch die Methode giebt Rocholl gerechten Anlass zum Vorwurf[114]. Der Gedanke der Medaillen als Anknüpfungsobjecte, stammt von Leibniz, dass ihn auch Jablonsky und wohl auf seinen Vortrag seine Regierung annahm, ist sehr zu beklagen[115]. Wie nun Leibniz die einst sicher und freiwillig eintretende Verwirklichung der Pläne voraussagte[116], sagte er zugleich anderwärts eine bittere Wahrheit: er habe nichts verabsäumt, was zu dem Zwecke dienlich hätte sein können[117]. Irgend einen festen Plan Leibniz's finden wir trotz der vielen Geheimnissthuerei nicht; rechnen wir nur nicht schon den Anglisirungsgedanken dazu, bei dem doch auch die weltlichen Pläne seines Hofes eine Rolle spielten[118], wie auch die Schulstudien und die eheliche Verbindung des den Gedanken zuerst aussprechenden Jablonsky. Dass Jablonsky in dieser Angelegenheit viel gearbeitet, und zwar auch nach dem Tode Friedrichs[119], ist zum Theil bekannt. Seine Mühe hat Leibniz ebenso anerkannt[120], wie seinen letzten Unionsentwurf[121], der wahrlich die Grundgedanken der späteren preussischen Union anticipirt. Seine Uneigennützigkeit hält der in dieser Hinsicht gar zu empfindliche Hofprediger in stolzen Worten eben dem wenig scheuen Leibniz vor[122].

---

112) Sogar Rocholl giebt zu, dass Leibniz aufrichtig evangelisch gesinnt war. S. 338.

113) Vgl. Kapp's Sammlung Nr. LXXXVIII.

114) S. 336—338.

115) Vgl. Guhrauer L. D. Schr. II, 70.

116) Die bekannte Prophezeiung Leibniz's. Guhrauer: S. W. v. Leibniz II. S. 237.

117) Vgl. diese Sammlung S. 110.

118) Diese Gedanken spricht 15. Oct. 1698 zuerst Jablonsky aus. Dass sich Leibniz seiner sehr annahm, beweist die ganze Verbindung.

119) Vgl. über den Grund dafür, meinen Vortrag über Jablonsky S. 4.

120) Vgl. diese Sammlung S. 107.

121) Daselbst S. 150.

122) Daselbst S. 152.

Schliesslich möge hier nur ganz kurz vermerkt werden, dass uns in dieser Sammlung, u. zw. im Briefe an v. Printzen, vom 3. Nov. 1716, das Letzte vorliegt, was bisher m. W. von Leibniz bekannt ist [122a]).

Zeigt uns auch diese Verbindung die Arbeit zweier hervorragender Männer an denselben Gedanken, so lässt sich selbstverständlich die geistige Grösse Leibnizens mit den bescheideneren, wenn auch nicht alltäglichen Geistesgaben Jablonsky's nicht vergleichen. Aber in der Praxis war Jablonsky nicht nur gewandter, eifriger, ihn begeisterte auch zu Opfern der Gedanke der evangelischen Kirche. Hinter dem Zwecke verschwindet der Arbeiter. Leibnizens grosse immerhin fast als Vergnügen erscheinende Arbeiten auf allen Gebieten des Wissens lassen beinahe den Gedanken der praestabilita harmonia, die die Monas zum Selbstzweck erhebt, als den leitenden auch aus diesen Acten erscheinen: ein Optimismus im edlen Geniessen. Dieses Sichergänzen der beiden Charaktere verleiht auch ihren Briefen noch eigenthümlichen Reiz.

Die Grundsätze nach denen ich die mir durch Herrn Bibliothekar Dr. K. Meyer in Hannover und den Schriftsteller Herrn A. Taege in Berlin zur Verfügung gestellten Abschriften wiedergab, habe ich in der Einleitung erwähnt [123]). Leider hat sich eine Anzahl von Versehen und Druckfehlern eingeschlichen, wovon die sinnstörenden hiermit zusammengestellt werden:

| | | | |
|---|---|---|---|
| S. 33 | ist zu lesen statt | Commendono | Commendone |
| „ 41 | „ „ „ „ | Gönuer | Gönner |
| „ 51 | „ „ „ „ | Nr. 25 | Nr. 35 |
| „ 58 | „ „ „ „ | Scuteti | Sculteti |
| „ 60 (Nr. 56) | „ „ „ „ | Ebendesselben Schreiben | D. E. J. Schr. |
| „ 63 | „ „ „ „ | Groingen | Groningen |
| „ 72 (Anm.) | „ „ „ „ | Briefsammlung H. J. | Briefs. H. Schrift. |
| „ 84 | „ „ „ „ | Ofiander | Orander |
| „ 158 | „ „ „ „ | juge | jugé |
| „ 158 | „ „ „ „ | Molenus | Molanus |
| „ 188 | „ „ „ „ | dontant | doutant. |

Auch ist die Numerierung nicht durchwegs korrekt; namentlich kommt in Abtheilung III die Ziffer 7 zweimal nach einander vor.

---

122a) Vgl. S 161 dieser Sammlung.

123) Acta et Comment. 1896. IV. in Anschluss an Klopp I. Vorwort XXIV.

Zur Entschuldigung führe ich meine längere Abwesenheit von unserer Universitätsstadt an, während welcher sich mein Commissionär nicht ganz verlässlich erwies. Die letzte Seite habe ich sogar umdrucken lassen müssen. Im Ganzen glaube ich, dass meritorisch nichts fehlt, bei einer Zeitschrift-Publication wird man wohl auf Nachsicht für einige formelle Fehler hoffen dürfen. — Sollte es gelingen die noch fehlenden Briefe Leibnizens zu finden (und nach Jablonsky's Antworten ist es klar, dass sie viel Hochinteressantes enthielten [124]), könnte eine selbständige Gesammtausgabe vorgenommen werden. Jedenfalls sage ich der Redaction unserer Acta Dank, dass sie sich der Sammlung mit vieler Rücksicht annahm.

---

Vor etwa 50 Jahren hat Guhrauer in der Berliner Akademie einen Vortrag über die Art der Herausgabe der sämmtlichen Werke Leibnizens gehalten. Sein Plan ist mir näher nicht bekannt. Nach Anderen hatte vor 27 Jahren den Wunsch, dass die genannte Akademie Leibnizens Schriften herausgebe, Guerrier wiederholt. Nach den deutschen Siegen über Frankreich schrieb der russische Professor mit dem französischen Namen in dem von der Petersburger Akademie herausgegebenen Buche: „Jetzt..... wäre es wohl Zeit, in Deutschland an ein solches Nationalwerk zu denken. Ein Unternehmen solcher Art überschreitet natürlich die Kraft einzelner Personen. Der Herausgabe der gesammten Leibniz'schen Schriften könnte sich nur eine gelehrte Körperschaft unterziehen, und zwar mit der grössten Berechtigung, nach unsrem Dafürhalten, diejenige, deren Existenz an den Namen Leibniz's anknüpft, die jetzt im Mittelpuncte deutschen Lebens wirkt und deren Mitglieder es sich angelegen sein lassen — auf den verschiedensten Gebieten der heutigen Wissenschaft die Ausführung Leibniz'scher Gedanken nachzuweisen“ [125]).

Drei Jahre darauf begann Gerhardt eine Neuausgabe von Leibnizens philosophischen Werke, mit Unterstützung der Akademie; aber nicht einmal für dies Gebiet kann der Aufschluss

124) Vgl. Anmerkung 17.
125) Guerrier: o. a. O. S. VI.
126) Leibn. philos. Schriften I. S.VI.

über die Begrenzung seiner Arbeit befriedigen, nach welcher seine Sammlung das bereits Gedruckte „und das, was sein Nachlass, soweit es sich herbeischaffen lässt, als der Veröffentlichung werth bietet, enthalten“ werde [126]). Ein Nachweis, dass seine Sammlung in dem angeführten Sinne erschöpfend ist, hat vielleicht der Akademie vorgelegen, er wird aber schon durch den ersten Leibniz'schen Brief dieser Sammlung wiederlegt, wie seine Publication, die fast nur bereits mehrmals Gedrucktes wiederholt, auch in ihrem selbstgewählten Umfang ihre Aufgabe nicht löst, darüber vgl. Erdmann's bereits erwähntes Referat [126a]).

Schon vor dem Abschluss der Gerhardt'schen Publication war die Klopp'sche mit dem XI. Bande eingegangen, in welcher Klopp klagte, auf die Anschuldigungen gegen die Berliner Akademie keine Antwort erhalten zu haben [127]). Wie seine Sammlung auch nicht erschöpfend ist, ist bereits gesagt worden. Was noch speciell für Geschichte des geistigen Lebens in Berlin, namentlich der Societät, von Bedeutung wäre, hat auch nicht ein Akademiker, sondern Dr. L. Fischer in seinem „J. L. Frisch's Briefwechsel mit G. W. Leibniz“, näher gezeigt [128]); und sich dadurch Anspruch auf Anerkennung erworben, die ihm auch Ad. Harnack in seiner obencitirten Sammlung nicht vorenthält [129]).

Fischer's Verdienst soll auch nicht dadurch vermindert werden, dass sogar er, der in die sich mit seiner Aufgabe berührenden Theile des Hannover'schen Nachlasses tiefer als Andere geblickt, die Lücke, die die gegenwärtige Publication ausfüllt, nicht gemerkt hat [130]). Wohl aber möchte ich dem in Bezug auf die Erkenntniss Leibnizens geäusserten Wunsche einen ähnlichen betreffend seinen Freund und Arbeitsgenossen, D. E. Jablonsky, beifügen, den Wunsch, den Kapp vor 150 Jahren, als die Societät noch lange nicht die Bedeutung, wie heute, hatte, und auch kein besonderer Anlass dazu vorlag, in der Vorrede seiner Publication ausgesprochen [131]). — „Allerdings

126a) Vgl. S. VII. Anm. 32.

127) Vorrede S. IX—XII.

128) S. VII.

129) A. a. O. S. 7. 8. Er verweist bis zum Erscheinen seiner Geschichte der Akademie betr. der Einzelheiten auf Frischen's Einleitung und Anmerkungen.

130) Auch er erwähnt ihn a. a. O. S. VII neben anderen nicht.

131) Vgl. S. IV u. V dieser Sammlung.

ohne grosse Opfer an Zeit, an anliegender Arbeit, an Geld, ohne planvolles Zusammenwirken kundigster Kräfte werden diese Wünsche auch heut, nachdem anderthalb Jahrhunderte verflossen und mit der gesteigerten Möglichkeit ihrer Befriedigung das Interesse an derselben erheblich gewachsen ist, nicht zu erfüllen sein. Die zunächst zuständige berühmte Körperschaft der Berliner Akademie, deren Liberalität für andere Zwecke Tausende hat zur Verfügung stellen können, wird sich, so möchten wir annehmen, auf die Dauer dem officium nobile gegen ihre eigenen Väter und gegen die ausreichend zu fundamentirende Kenntniss von der für die Gegenwart so hochbedeutsamen Zeit ihrer Wirksamkeit nicht entziehen und die Lösung dieser Aufgaben der verstreuten Bemühung privater Kräfte nicht anheimgestellt lassen dürfen.“ —

Für gewandte Hilfe bei Zusammenstellung des Index und der Correctur bin ich meinem lieben Schüler, Herrn stud. theol. Günther Saucas zu Dank verpflichtet.

---

127) Es ist für den Historiker erfreulich zu constatiren, wie man darin, dass diese durchwegs chronologisch angelegte Biographie die beste ist, fast ohne Widerspruch übereinstimmt; trotzdem ihr dies der Philos E. Pfleiderer in der Vorrede seines Leibniz-Buches zum Vorwurf macht. Gewiss kann man die einzelnen Thätigkeitsrichtungen im Leben eines bedeutenden Mannes betrachten, summiren, und dies ist im Interesse der einzelnen Wissenszweige sogar sehr nöthig. Eine Biographie hat die Gesammtheit der geistigen Zustände wie auch des allmäligen geistigen Werdens und des fortschreitenden Schaffens ihres Helden als ihre Aufgabe zu betrachten. Eine ähnliche Biographie Leibnizens setzt als Vorarbeit auch eine chronologische Gruppirung seines Briefwechsels und seiner Schriften voraus. Wie weit sind wir noch von der Lösung dieser Aufgabe?

# Register.

# PROLEGOMENA.

## PARS I.

## DE ANECDOTON CODICIBVS[1]).

### CAPVT I.

### CODICES DESCRIBVNTVR.

Procopii Ἀνεκδότων quae dicuntur libri manu scripti nobis noti sunt duodeviginti hice:

1. **A** = cod. Ambrosianus A 182 sup., bombycinus[2]), saeculi XIV, forma maxima seu binaria (m. 0,316 × 0,214), foliorum (numeratorum) 247. Vtrimque singula folia non numerata chartacea a bibliopego adiecta sunt, quorum prius indicem exhibet recenti quadam manu scriptum hunce:

*Procopij Gottica historia*
*Ejusdem de Justiniani Imperatoris operibus lib. 6.*
*Ejusdem απορρητα idest. Aporreta sed mutilata*

cui haec verba *idest. Aporreta sed mutilata* alia adscripsit manus, quae praeterea paulo infra adnotavit:

*Codex ex Thessalia.*

1) Cf. commentationem nostram: *О рукописномъ предании „Тайной Исторiи" Прокопiя*, in ephemeridis, quae *Византiйскiй Временникъ* inscribitur, vol. II (a. 1895) p. 416—425 publici iuris factam, atque I. Haury *Ueber Prokophandschriften* (in *Sitzungsber. der philos.-philol. und der histor. Classe der k. b. Akademie der Wiss. zu München* 1895, fasc. I).

2) Excepto folio 188, quod chartaceum est et *De bellis* libri VIII finem continet (ed. Bonnensis p. 642, 9 [θανα]τῶσιν — — p. 643, 4 συνέγραψεν), manu saeculi XVI exaratum.

Continentur igitur hoc codice tria opera Procopiana:

1) *De bellis* libri V—VIII, fol. $1^r$—$188^r$ (exceptis tamen foliis $9^r$—$24^v$ atque $182^r$—$183^v$, quae ad *Anecdota* pertinent), praemisso hoc titulo minio scripto (fol. $1^r$): προκοπίου καισαρέως ἱστορία τῶν γοτθικῶν πολέμων, οὓς διὰ τοῦ βελισαρίου στρατηγοῦ ἰουστινιανὸς βασιλεὺς συνεστήσατο, ἐν τέσσαρσι τόμοις διῃρημένη. ἀρχὴ τοῦ $\alpha^{\text{του}}$ τόμου.

2) *De aedificiis* librorum I—VI *epitome*, fol. $189^r$—$223^v$, praemisso titulo: περὶ τοῦ δεσπότου ἰουστινιανοῦ κτισμάτων λόγοι ἕξ : λόγος πρῶτος, item minio scripto.

3) *Anecdota* quae dicuntur, fol. $224^r$—$247^v$, $17^r$—$24^v$, $9^r$—$16^v$, $182^r$—$183^v$ [1]), nulla inscriptione praemissa, quam ceteris quoque omnibus codicibus deesse monemus.

Ex foliorum enumeratione modo facta iustum quaternionum ordinem valde perturbatum esse perspicitur.

Tota codicis pars, quae Ἀνέκδοτα continet, una eademque manu (saeculi XIV) clare pulchreque exarata est, qua *De aedificiis* quoque librorum epitome et *De bellis* librorum maior pars scriptae sunt [2]). Hic illic singulis paginis, quarum plerasque 32 versus continere obiter moneo, litterae, quibus versus incipiunt, *minio* in margine adscriptae sunt — et quidem ab ipso librario, qui hanc codicis partem exaravit [3]).

Codex *A* solus omnium, qui aetatem tulerunt, integrum nobis Ἀνεκδότων initium servavit; fine tamen

---

1) Foliis in hunc ordinem redactis *continuum* habebis Ἀνεκδότων textum. De Henrici Rostagno errore, qui lacunam quandam inter fol. $16^v$ et $182^r$ deprehendisse sibi visus est, infra (cap. II § 8) dicemus.

2) Fol. $177^r$ (inde a vs. 4 ab imo) — fol. $181^v$, quibus *De bellis* libri VIII pars (ed. Bonn. p. 609, 16 στρατιὰν — p. 628, 13 αὐτοῦ) continetur, alia manu (saeculi XV) sunt exarata; de fol. $188^r$ cf. quae supra (p. VII adnot. 2) monuimus.

3) Cf. adnotationes eiusdem manu minio margini adscriptas, veluti illud „γνώμη" (ad p. 2, 27 sq. editionis meae) atque illa „οἶμαι, στασιωτῶν" (ad p. 34, 22).

mutilus est, quippe cuius ultimum Ἀνεκδότων folium (fol. 183$^v$) verbis ἔπιπτον μὲν (p. 140, 15 sq.) terminetur.

Praeter correctiones passim obvias, quae ipsi librario debentur, aliquot locis Ἀνεκδότων textus ab alia quadam manu ($A^2$) correctus est, veluti p. 27, 20 sq., et 91, 14, quae praeterea p. 4, 5 τῇ γυναικί παῖδα, p. 4, 6 sq. -σιον ἅτε, p. 5, 25 -νον δὲ οὐ πολλῷ, p. 5, 27 τοῖς ξιφιδίοις in margine scripsit, quippe quae verba in textu atramento perfusa sint. Tertiae denique manui cuidam eique, ut videtur, recentissimae corruptelae tribuendae sunt, qualem ex. gr. p. 14, 15 invenimus, ubi κατατεινόμενος hac manu pessime in κατακτεινόμενος mutatum est.

Restat, ut moneam vix esse diversum, ut mea quidem fert opinio, codicem modo descriptum ab illo, cuius mentionem hisce verbis fecit Alemannus (praefat. p. 14): „saepe inter interpretandum . . . expetivimus Ioannis Lascaris [codicem] . . Constantinopoli ad Laurentium Medicem adlatum, quem deinde (ut fama est) Catharina Medices Regina in Gallias asportavit, et Galli hodie in exteris Bibliothecis requirunt", — quemque frustra tam Isambert (p. 364) eundem esse atque *Parisinum Coislinianum 132* (𝔓), quam ipse olim [1]) — eundem esse atque *Vaticanum 16* (W) dubitanter coniecimus.

Contuli codicem anno 1894, iterum locos aliquot a. 1897 inspexi. Praeterea locos haud paucos ab Ioanne Mercati a. 1895 atque ab Antonio Ceriani hoc anno nuperrime meo rogatu diligentissime examinatos esse gratissimo, ut par est, animo commemoro.

2. **V** = cod. Vaticanus 1001, bombycinus, saeculi XIV, forma octonaria maiore (m. 0,250 × 0,165), foliorum 151, quorum 50 prima, quibus Ἀνέκδοτα continentur, paginatim (pagg. 1—100), reliqua solito more numerantur, ita tamen, ut numeri illi continuentur, qua de causa folium, quod re vera 51 est, numero 101 insigni-

---

1) In commentatione mea supra commemorata, p. 418 adnot. 4.

tur et sic deinceps. Singulae paginae non ubique unum eundemque versuum numerum habent, sed inter 25 et 30 fluctuare solent.

Continentur hoc codice quattuor opera haece:

1) *Anecdota*, pagg. 1—100;
2) *De bellis* libri I (inde a verbis τὸν παῖδα p. 13,10 ed. Bonn.) et II, fol. 101r—187v;
3) Ἀριστείδου ῥήτορος περὶ ὁμονοίας, fol. 188r—193v;
4) τοῦ μεγάλου Βασιλείου λόγος πρὸς τοὺς νέους, fol. 194r—201v,

quorum utrumque opus Procopianum una eademque manu sat nitida exaratum est.

Ἀνεκδότων initium mutilum est, cum folii primi (pag. 1—2) dimidia fere pars ab imo oblique abscissa sit. Praeterea totum fere cap. XXX (inde a verbis λόγον, τὰ ἐς δρόμον p. 137, 6) desideratur.

Hic illic correctiones inveniuntur manu quadam recentiori factae, veluti p. 14, 8[1]. In margine passim Alemannus praeter codicum *W* et Pinelliani (π) lectiones aliquot coniecturas suas scripsit nominis sui sigla (*N. A.*) plerumque addens.

Hunc codicem a. 1893 conlatum totum denuo a. 1897 excussi.

3. **W** = cod. Vaticanus 16, bombycinus, saeculi XV, forma octonaria minore (m. 0,220 × 0,145), „tumultuaria" — ut Alemanni utar verbis — „scriptione exaratus".

Folio 179v bibliothecae Nationalis Parisinae rubrum signum invenitur („*Bibliothèque Nationale*"), unde perspicitur fuisse hunc codicem — aut certe eam eius partem, qua Ἀνέκδοτα continentur, — olim Lutetiam Parisiorum nimirum Napoleonis I iussu transmissum ibique aliquot annos in bibliotheca Nationali adservatum[2].

---

1) Ab hac diversa esse videtur manus saeculi XVI, quae in margine pag. 15 „*Bellisario indigna*", pag. 17 „φιλοχρήματος bελλϊσάριος" (*sic*) scripsit.

2) Propter illud bibliothecae Nationalis signum olim frustra conieci codicem *W* fortasse eundem esse atque Ioannis Lascaris illum, cuius mentionem Alemannus fecit, cf. supra p. IX.

Inter alia multa, quae enumerare supersedemus, continet hic codex *Anecdota* foliis $137^{r}$ [1]) — $179^{v}$, una eademque manu scriptis, quae separatim quoque (fol. 1—43) numerantur. Singulae horum paginae plerumque 30, nonnullae 31 versus habent.

'Ἀνεκδότων initium (usque ad p. 4, 14 ἔργου) deest, cum fol. $137^{r}$ verbis τούτου κώλυμα ἔβλεπε (p. 4, 14 sq.) incipiat.

Correctiones — praeter eas, quae primae debentur manui, quam in margine quoque hic illic σημείωσαι similiave adnotasse obiter moneo, — locis haud paucis inveniuntur alia quoque quadam manu ($W^2$) factae, de qua in capite insequenti (§ 10) uberius agemus. Tertiae denique manui interpolatio ter obvia debetur, qua *Vigilii* nomen ineptissime in *Virgilii* mutatum est (p. 127, 18. 19. 128, 17).

Hunc codicem, utpote lectu difficiliorem, bis contuli — primum a. 1893, deinde a. 1897. Praeterea eiusdem aliquot locos a. 1895 Venceslaum Ivanov virum doctissimum a me rogatum diligentissime examinasse grato memini animo.

4. **G** = cod. Ambrosianus G 14 sup., bombycinus, saeculi XIV [2]) forma octonaria minore (m. 0,170 × 0,126), foliorum numeratorum 196, si quidem numeris antiquioribus (eodem, ut videtur, atramento, quo ipse codex, scriptis) in margine inferiori adnotatis credere mavis, vel 198, si quidem recentioribus numeris margini superiori plumbo adscriptis maior fides habenda est. Quae folia (numerata) omnia excepto primo, de quo infra agemus, una eademque exarata sunt manu, eaque lectu mehercules non admodum sunt facilia.

Fol. $1^{v}$ [3]) indicem, quem exscribere supersedemus,

---

1) Quod in commentationis nostrae supra commemoratae p. 416 datur *143*$^{r}$, typothetae esse errorem data occasione moneo.

2) Olim saeculo XV hunc codicem exaratum esse opinatus sum (*Византійскій Временникъ* l. c. p. 418), quem errorem ipse in eadem ephemeride (vol. V, a. 1898, p. 460 adnot. 2) correxi, postquam a. 1897 codicem diligentius examinavi.

3) Fol. $1^{r}$ vacuum est.

nomen viri docti excipit, cuius olim hunc codicem fuisse elucet, —

*J. V. Pinelli*

ipsius nimirum manu exaratum, qui indicem quoque modo commemoratum scripsisse videtur atque aliquot ex Anecdotis excerpta, quae folio chartaceo non numerato inter folia 1 et 2 inserto continentur [1]).

Praeter opera quaedam Themistii, Libanii, Platonis (Φαίδων et Εὐθύφρων), aliorum continet hic codex tria Procopiana haece:

1) *Anecdota*, fol. $125^{r}$—$158^{v}$ [2]), quorum fol. 150 per bibliopegi videlicet errorem post fol. 151 collocatum est.

2) Excerpta ex libris I—IV *De bellis*, fol. $158^{v}$—$187^{v}$), ad quae titulus pertinet : προκοπίου καισαρέως ἱστοριῶν λόγος πρῶτος, — in fol. $158^{v}$ margine superiori litteris fere evanidis scriptus.

Quibus accedit

3) „Procopij proemium [*sic*] in libros de bello Persico“ (= *De bellis* I, 1 p. 10 ed. Bonn. Προκόπιος — 13, 2 ξυμβῆναι), — quod folio *formae binariae* [3]) non numerato, post fol. 158 inserto, manu saeculi XVI vel XVII exarato continetur.

Ἀνεκδότων desideratur initium, quia fol. $125^{r}$ verbis (ἀνα)πεισθῆναι δόξας p. 4, 21 incipit, unde perisse unum folium perspicitur.

Permultis locis puncta singulis vocibus superscripta cernuntur, quas scilicet librarius suspectas habuit; quae puncta fere omnia eodem atramento, quo codex exaratus est, sunt scripta, unde ipsi librario ea deberi intellegitur.

---

1) Quorum excerptorum tria prima et ultimum ex. gr. profero : ἐξαναστάντα περιπάτους (insequitur ποιεῖν inductum) [p. 58, 20 sq.] — τῆς δὲ κεφαλῆς ἐν τῷ παραυτίκα τῷ ἰουστινιανῷ ἀφανισθείσης [p. 58, 22 sq.] — τοὺς διαύλους ποιεῖν δοκεῖν [p. 58, 23 sq.] — τὸν ἄνθρωπον ἔχειν ἣν μέντοι τὶς αὐτὸν ἰλευμένως (*sic*) [p. 61, 12].

2) Numeros a me ubique afferri illos antiquiores, *inferiori adscriptos margini*, praemoneo.

3) Qua de causa complicatum est.

Hic illic alio quodam atramento puncta superscripta (veluti p. 102, 13) inveniuntur. Praeterea passim in margine prima manus σημείωσαι similesve adnotationes adscripsit tam locos, qui librario suspicionem aliqua de causa moverunt, quam auctoris sententias narrationesve in primis animadvertendas[1]) notans, quarum notarum has in adnotatione critica commemorare supersedimus, illas autem, ut par est, omnes suis locis curavimus indicandas.

Diversum esse codicem *G* ab illo Pinelliano naufrago (Π), cuius mentionem Alemannus facit[2]), equidem crediderim (cf. p. XV), pro certo tamen affirmare non ausim.

Hunc quoque codicem, utpote lectu difficiliorem, bis contulimus et quidem primum a. 1894, deinde a. 1897. Praeterea locos eiusdem haud paucos Ioannes Mercati amicus a nobis rogatus a. 1895 diligentissime, ut solet, examinavit.

5. 𝔅 = cod. Oxoniensis Bodleianus misc. 187, qui sic a Coxio[3]) describitur:

„Codex chartaceus, in folio, ff. 47, sec. XVII.

„Procopii Caesareensis Historia Arcana. Incip. a verbis, λόγοις ἐῤῥήθη ἔνταυθα[4]), in ed. Paris. e typ. Reg. 1663, tom. II. p. 3, B. 10 [= *p. 3, 21 ed. meae*], et desinit cum ξυμφόρου ποιεῖται. Adscripsit in margine codicis nostri scriba, λείπει ἔνταυθα[4]) ἐν τῷ παλαιῷ φύλλα

---

1) Veluti σημείωσαι p. 42, 11 sq. 57, 8. 59, 22 sq. 61, 4 sq. 14-17. 64, 18 sq. 67, 24 sq. 80, 5 sq.; σημείωσαι γνώμη p. 31, 6 sq.; γνώμη p. 33, 8-10. Quibus accedit *punctum* in margine ad p. 68, 30 sqq. adscriptum.

2) Praefat. p. 14: „saepe inter interpretandum duos illos celebres ἀνεκδότων Procopii Codices expetivimus, Ioannis Lascaris alterum . . . . ., alterum Ioannis Vincentii Pinelli, quem ante aliquot annos, praeter hosce Vaticanos unicum (quod ego sciam) habuit Italia, sed hic, ut accepimus, in navigatione Neapolitana naufragium fecit. Ex eo tamen quaedam a Petro Pithaeo, et Guido Pancirolo, Pinelli familiaribus excerpta fragmenta, maris et undarum discrimen evaserunt".

3) *H. O. Coxe* Catalogi codicum mss. bibliothecae Bodleianae pars I, Oxonii 1853, col. 740.

4) Sic utrubique apud Coxium legitur.

ὀκτώ, παρά τινος μισαληθοῦς ἐκκεκομμένα, ἀξίου εἰς τεμάχη κατακοπῆναι αὐτοῦ τοῦ ἐναγοῦς ἀνθρώπου, 90 paginis in totum comprehenditur in exemplari, quod praefert nomen Iosephi Castanei.

„Praemittitur fragmentum de rebus a Persis gestis, quod incip. ἐπονεῖτο, χρημάτων μὲν ἄπειρον ἀριθμὸν διανέμων".

6. **g** = cod. Ambrosianus P 74 sup., chartaceus, saeculi XV exeuntis vel XVI ineuntis, forma octonaria maiore (m. 0, 228 × 0, 171), foliorum 120, una eademque manu totus clare exaratus.

Continentur hoc codice eadem opera Procopiana, quae codicis *G* folia numerata praebent, et quidem:

1) *Anecdota*, quae hic quoque verbis [ἀνα]πεισθῆναι δόξας ἀφῆκε (p. 4, 21 sq.) incipiunt, fol. 1ʳ—60ʳ.

2) Excerpta ex libris I—IV *De bellis*, fol. 60ʳ—120ʳ.

In margine eaedem fere notae, quae in *G*, leguntur. Hunc codicem totum a. 1894 contuli.

7. **𝔐** = cod. Ambrosianus C 118 sup., chartaceus, saeculi XVI, forma maxima (m. 0,370 × 0,253), foliorum 59, quorum singulae paginae 30 habent versus; una eademque manu clare scriptus.

Continet Ἀνέκδοτα, quae, ut in *Gg*, verbis [ἀνα]πεισθῆναι δόξας ἀφῆκε (p. 4, 21 sq.) incipiunt. In margine eaedem notae, quae in *Gg* occurrunt, adscriptae sunt.

Hunc quoque codicem totum a. 1894 contuli.

8. **𝔑** = cod. Ambrosianus C 121 sup., chartaceus, saeculi XVI, forma maxima (m. 0, 370 × 0, 253), foliorum 57, quorum fol. 57ᵛ vacat; singulae paginae 30, ut in 𝔐, versus habent; eadem, quantum quidem nunc memini, manu, qua codex 𝔐, exaratus est. In folii 1ʳ marginis inferioris parte sinistra *„copiato dal riscontrato"* legitur, in parte dextra *„M. 255* [vel *235*]" adnotatum est.

Continentur hoc codice, qui iusto iure illius 𝔐 frater geminus dici potest, Ἀνέκδοτα, quae hic quoque verbis illis [ἀνα]πεισθῆναι δόξας ἀφῆκε incipiunt. In margine eaedem notae, quae in *Gg*𝔐 adscriptae sunt, leguntur.

Hunc codicem ferme totum a. 1894 contuli.

9. O = cod. Oxoniensis Bodleianus Canonic. 41, „chartaceus, in 4-to, ff. 176, sec. XV ineuntis" [1]).

Continet inter alia multa, quae enumerare supersedemus, — fol. 137ᵛ *Theodorae ad Belisarium epistolam* („τῆς Βασιλίδος Θεοδώρας ἐπιστολὴ πρὸς Βελισάριον") (p. 19, 14-19), *manu recentiori exaratam* [2]).

10. P = cod. Parisinus gr. 3023, chartaceus, saeculi XV, forma quaternaria [3]).

Continet inter alia quaedam eandem *Theodorae ad Belisarium epistolam* (fol. 24ʳ).

Codicum *OP* neutrum vidi neque conlationem nancisci potui.

11. Π = cod. Pinellianus, hodie deperditus, quem in (Pinellii?) navigatione Neapolitana naufragium fecisse accepit Alemannus [4]). Quem codicem olim [5]) quidem eundem esse atque *G* supra descriptum affirmavi, nunc tamen ab hoc diversum esse putaverim (cf. p. XIII): licet enim sint codicis *G* aliquot paginae ita detritae evanidaeque, ut nisi maxime intentis oculis non legantur, verum tamen eiusmodi damnum tempori potius edaci quam maris Tusci undis factum esse crediderim. Adde quod p. 112, 22 sq. ἐκάλουν — ὑπεραρίθμους *G*, ἐπειδὴ δὲ — ἀπεσείσατο codex π (ex Π descriptus) Alemanno teste omittit, unde illud ἐκάλουν (vs. 22), quod in *G* desideratur, codici Π non defuisse colligitur, — si qua fides Alemanni diligentiae hac in re habenda est.

Vtrum *G* an Π in Isaaci Casauboni ad Pinellium epistola a. 1601 scripta [6]) sit intellegendus, non liquet.

---

1) *H. O. Coxe* Catalogi codicum mss. bibliothecae Bodleianae pars III, Oxonii 1854, col. 43.

2) *Coxe* l. c. col. 47.

3) Cf. *Catalogi codicum mss. biblioth. Regiae* vol. II (Parisiis 1740) p. 597, quo utor, cum catalogi Omontiani vol. III hic Iurievi non habeam.

4) Cf. supra p. XIII adn. 2.

5) *Византійскій Временникъ* II p. 418.

6) „*Vincentio Pinello, a. 1601, Lutetiae Parisiorum, a. d. IX Kalend. Septemb.* — Ab hoc doctissimo viro [*Francisco Pithoeo*] cognovimus, esse penes te Ἀνεκδότων Procopii manu

12. π = cod. Pinellianus, hodie deperditus, cuius mentionem Alemannus eodem loco supra adlato fecit et lectiones aliquot ad Ἀνέκδοτα pertinentes in codicis *V* margine atque in *Notis Censoriis* suis enotavit.

Continuisse hunc codicem *ex illo Π naufrago „quaedam* a Petro Pithaeo, et Guido Pancirolo, Pinelli familiaribus *excerpta fragmenta*" Alemannus l. c. monuit.

Diversum eum esse a codice *G* — praeterquam quod aetate inter se tantum differunt — vel hinc perspicitur, quod verba Ἰουστῖνος (p. 112, 17) atque ἄχρι ἐς Δακίβιζαν — — εὐθὺς (p. 138, 7 sq.), quae desiderari in codice Pinelliano (π) dixit Alemannus, codex *G* suis locis exhibet.

13. 𝔓 = cod. Parisinus Coislinianus 132 (olim Seguerianus), chartaceus[1]), saeculi XVI, forma maxima (m. 0, 336 × 0, 232), foliorum 107[2]) paginatim numeratorum. Exaratus est a Christophoro Auero quodam Georgii Armaniaci (*d' Armagnac*) iussu, qui Francogallorum regis legatus Romae inde ab a. 1539 fuit.

Continentur hoc codice duo opera Procopiana:

1) *De aedificiis* („προκοπίου ῥήτορος τοῦ καισαρέως περὶ τῶν τοῦ δεσπότου ἰουστινιανοῦ κτισμάτων") libri I—VI[3]),

---

exaratum Codicem. Cujus libri invisi adhuc nobis, exemplar sicunde possemus aliqua ratione nancisci, faceremus libentissime, ut caeteris ejus excellentissimi scriptoris libris, quorum editionem nunc paramus, eum adjungeremus. Quamobrem oro te, praestantissime Pinelle, atque adeo per tuum in literas amorem te obsecro, ut exemplaris tui, de quo solo nobis aliquid compertum est, copiam nobis quam primum facias. Poteris, si videbitur, amplissimo Regis Legato, qui nunc ad vos proficiscitur, viro excellentis doctrinae, veterique amicitia mihi conjunctissimo, tuum librum committere. Ille summa fide curabit, ut absque periculo ad nos perferatur" (*Isaaci Casauboni epistolae*, ed. *Theod. Janson. ab Almeloveen*, Roterodami 1709, *ep.* 244, p. 125).

1) Bombycinum eum esse parum recte dixit Montfaucon (*Bibliotheca Coisliniana olim Segueriana . . . . studio et opera D. Bernardi de Montfaucon*, Paris. 1715) p. 202.

2) *Constare foliis 160* parum recte ait Montfaucon l. c.

3) „In ultimi libri fine desunt pauca, nempe ab his verbis p. 117. Edit. [*Maltretianae = p. 342, 22 sq. ed. Bonn.*] παράδεισοι κατάφυτοι δένδροις ἀρώματα, ubi deficit Codex, usque ad finem" *Montfaucon* l. c.

pag. 1—117, — quam codicis partem e codice Vaticano 1065 esse descriptam vidit Haury l. c. p. 175 sq.

2) *Anecdota*, pag. 121—210, — utrimque mutila, quippe quae verbis λόγοις ἐρρήθη (p. 3, 21) incipiant, in verba ξυμφόρου ποιεῖται (p. 137, 5) desinant, unde perspicitur hanc codicis partem ea continere, quae codicis *V* paginae 2 — 100 praebent.

In ultima Ἀνεκδότων pagina (210) Auer adnotavit: λείπει ἐνταῦθα ἐν τῷ παλαιῷ φύλλα ὀκτώ, παρά τινος μισαληθοῦς ἐκκεκομμένα ἀξίου εἰς τεμάχη κατακοπῆναι αὐτοῦ τοῦ ἐναγοῦς ἀνθρώπου [1]), quam adnotationem in codice 𝔅 repetitam vidimus.

Fol. 106 (pag. 211—212), cuius tertia fere pars ab imo abscissa est, totum vacat. In pag. 213, quae insequitur, sententia illa οὐκ ἀνθρώπων βουλαῖς — ἄνθρωποι (p. 21, 21-23) exscripta est.

Contuli codicem (non totum tamen) anno 1895 Petropoli, quo almae universitatis Petropolitanae historicorum et philologorum ordine amplissimo intercedente a bibliothecae Nationalis Parisinae praefectis insigni cum liberalitate transmissus erat.

14-16. 𝔔 = cod. Ambrosianus C 171 inf., chartaceus, saeculi XVI, forma maxima (m. 0,390 × 0,260), foliorum 173, totus una eademque exaratus manu.

Continentur hoc codice

1) „*Constantini militaria quaedam*", fol. $1^r$—$6^r$;

2) Ἀνεκδότων *tria* [2]) exemplaria (fol. $7^r$—$173^r$), quorum unum quodque, pariter atque codices *Gg*𝔐𝔑, verbis illis [ἀνα]πεισθῆναι δόξας ἀφῆκε (p. 4, 21 sq.) incipit. Quae exemplaria singula litteris $𝔔^{I}$, $𝔔^{II}$, $𝔔^{III}$ notabimus.

Horum trium codicum locos haud paucos a. 1894 contulimus.

---

1) Non εὐαγοῦς ἀνδρός, ut Montfaucon (p. 203) refert.

2) Non *duo*, ut dictum est („duplici exemplari") in bibliothecae Ambrosianae codicum catalogo manu scripto *inventario* qui dicitur.

17. 𝕽 = cod. Florentinus Magliabecchianus[1]) gr. 19[2]) (XXIII, 88), quo „inter latina multa" haec tria contineri graeca refert Hieronymus Vitelli[3]):

1) „Folia chartacea 2, cm. 29 × 31, s(aeculi) XVI. Posito folio 2 ante folium 1 habebis: τούτοις σὺ χρύσῃ (sic) οὐδενὸς ἀπεχόμενος — τοὺς μὴ φίλους ἄδικόν (sic) εἶναι δοκεῖ, τοὺς δὲ (Xenophont. Memorab. II 1, 25 — 2, 2)".

2) „Folia chartacea 5 (4ᵛ. 5 vacua), cm. 30 × 21; s(aeculi) XVIII manu Antonii Cocchi. «*Capitis noni* Ἀνεκδότων *sive Historiae arcanae Procopii loci duo e codice ms. Vaticano suppleti et latine redditi*», scil. τέως μὲν οὖν ἄωρος οὖσα ἡ Θεοδώρα — τοῦ σώματος διατριβὴν εἶχεν (p. 59, 22 — — 60, 5 Dindorf [= *p. 41, 13-20 ed. meae*]) et Ἀποδυσαμένη τε τὰ πρόσω καὶ τὰ ὀπίσω — τὰς μίξεις ποιοῦντες (p. 60, 18 — 62, 22 [= *p. 42, 5 — 43, 22 ed. meae*])".

3) „(olim XVIII 5) Foliolum chartaceum, cm. fere 16 × 14, s. XVI (?), continens «fragmentum de Persis». Sunt admodum pauca: τὸ περσικὸν ἔθνος μοχθηρόν ἐστι — τὰ τοιαῦτα προτείνεσθαι · *sequitur* τις η ὁπλισις των περσων σε".

Hunc codicem inspicere supersedimus, quippe quem nullius esse ad Ἀνεκδότων crisin momenti manifestissimum esset.

18. 𝕾 = cod. Londiniensis (Musei Britannici), olim Sloanensis, 1144, plut. LXXXIII, chartaceus, saeculi XVIII. De quo haece referuntur ab Isambertio p. 362 sq.: „On a cru mal à propos qu'il contenait 46 pages de texte, quoiqu'en caractères très-larges; mais, en réalité, on'y trouve que la transcription

---

1) *Riccardianum* hunc codicem olim per errorem dixi (*Византійскій Временникъ* II p. 419).

2) Secundum novam, quae Vitellio debetur, numerationem.

3) *Indice de' codici greci Riccardiani, Magliabechiani e Marucelliani* (in *Studi italiani di filologia classica* vol. II, a. 1894) p. 554.

du passage relatif aux moeurs de Théodora, supprimé dans l'édition *princeps*, et dans celle de 1663, commençant par ces mots: Τέως μὲν οὖν ἄωρος οὖσα ἡ Θεοδώρα, εἰς κοίτην ἀνδρί, lequel se trouve dans les mss. du Vatican, de Milan et de Paris. Le reste appartient à un ms. d'Hiéroclès (Lettre de M. Panizzi, direct. du British Museum, 28 juillet 1853)".

---

Superest, ut codicum *AV* supra descriptorum tria commemoremus apographa, quibus Dindorfium esse usum ex ipsius praefatione (p. XXXIV) atque adnotatione critica perspicitur.

1) Codicis *A* initii apographon Holstenianum, quod nos quoque semel laudavimus, eo scilicet loco (p. 3, 19), ubi Holstenii neglegentiae certam debemus emendationem.

2) Codicis *V* illorum de Theodorae libidine locorum, quos a prioribus editoribus de industria omissos primus in Ἀνεκδότων textum Orelli recepit (p. 41, 13-20 τέως — εἶχεν et p. 42, 5 ἀποδυσαμένη — p. 43, 22 ποιοῦνται), apographon Alemannianum.

3) Codicis *V* eorundem locorum apographon Holstenianum.

## CAPVT II.

## QVANAM NECESSITVDINE CODICES AVWGg𝔅𝔐𝔑ΠΠπ𝔓𝔔𝔑 INTER SE CONIVNCTI SINT.

**1.** Cur hoc capite non omnium codicum, qui in praecedenti enumerantur, a nobis ratio habeatur, paucis praemoneamus necesse est.

Codicum *OP*[1]) 𝔖 propterea nullam habuimus ra-

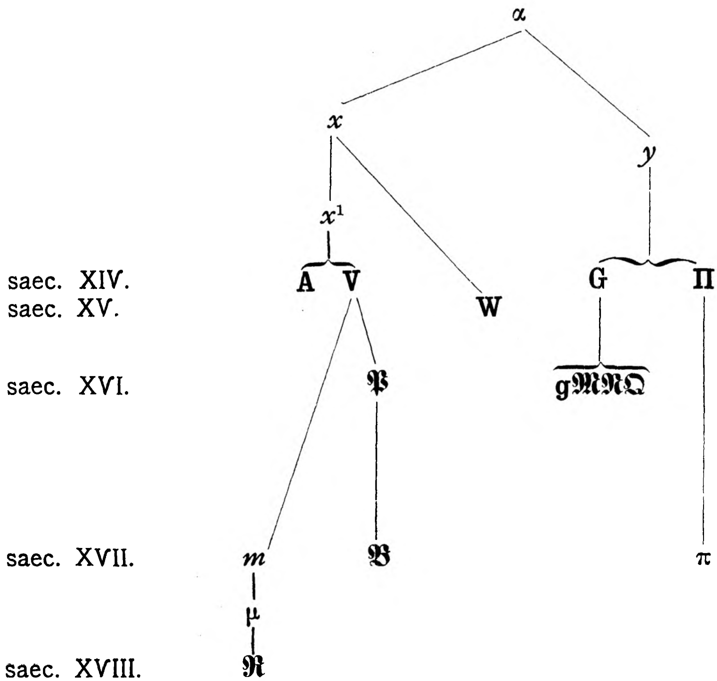
---

1) Codicem *O* (fol. $137^{v}$) ex *P*, si quidem hoc recentior est, descriptum esse putarim.

tionem, quod conlationes eorum nancisci non potuimus. Ceterum hunc Londiniensem (𝔖) sui utique non esse iuris ideoque nullam ad Ἀνεκδότων crisin habere auctoritatem pro certo affirmari potest [1]).

Oxoniensem vero 𝔅 cum ex Parisino 𝔓 descriptum esse vel propter illam Aueri subscriptionem λείπει ἐνταῦθα — τοῦ ἐναγοῦς ἀνθρώπου in 𝔅 repetitam certissimum sit, stemmati adiungere non dubitavimus, licet huius quoque codicis conlatione careamus.

**2.** Quibus igitur necessitudinis vinculis codices illi *AVWGg*𝔅𝔐𝔑Ππ𝔓𝔔ℜ inter se coniuncti sint, hoc fere [2]) stemmate definimus.




Iam singula argumentis confirmemus.

---

1) Si quidem coniecturam licet facere, descriptum esse hunc 𝔖 codicem ex illo codicis *V* apographo (*m*) hodie deperdito, quo editio Menagiana (quam in stemmate littera μ notabimus) nititur, crediderim.

2) Cur hanc voculam „*fere*“ adiecerim, infra docebo.

**3.** Codices supra commemoratos in duas dividi familias, quarum altera ($x$) sex *AVW*𝔅𝔓ℜ complectitur, altera ($y$) septem *Gg*𝔐𝔑𝔒[2]) comprehendit, permultis demonstratur locis.

Primum eorum locorum proferamus delectum, qui, quantum inter se in singulis lectionibus utraque discrepet familia, docent.

p. 6, 7 ἤδη $x$ — * δὴ $y$[1])
p. 7, 5 εὔχαριν $x$ — * εὔχαρι $y$
p. 7, 9 * βασιλέα $x$ — βασιλέως $y$
p. 7, 23 * παρὰ $x$ — ἐς $y$
p. 7, 24 βουλῇ $x$ — * σπουδῇ $y$
p. 9, 1 συμβήσεται $x$ — * ξυμβήσεται $y$
p. 9, 4 * διαφθορέα $x$ — διαφορέα $y$
p. 10, 2 * ὑποτοπάζουσα $x$ — ὑποτοπάσασα $y$
p. 10, 23 * ὁρίων $x$ — ὅρων $y$
p. 10, 26 * ἀσσυρίας (ἀσυρίας *AV*) $x$ — συρίας $y$
p. 11, 7 * ἐμβαλὼν $x$ — ἐσβαλὼν $y$
p. 11, 11 * λοιμοῦ $x$ — λιμοῦ $y$
p. 11, 28 * λαζοῖς $x$ — λαζικοῖς $y$
p. 12, 10 * ζαβεργάνη $x$ — ζαβαργάνη $y$
p. 13, 9 * ξυνεπεπτώκει $x$ — συνεπεπτώκει $y$
p. 13, 13 * ἄνδρα $x$ — ἀνδρέα (ἀνδρέαν 𝔐𝔑𝔒) $y$
p. 13, 22 * ἐγχειρίσασα $x$ — ἐγχειρήσασα $y$
p. 14, 3 * δὴ $x$ — μὴ $y$
p. 15, 16 ὃς παρὰ (περὶ *AV*) $x$ — * ὅς περ ἐν $y$
p. 18, 23 * εἰώθει $x$ — εἴθισται $y$
p. 19, 19 * ταῦτα $x$ — ταύτῃ $y$
p. 20, 16 sq. * εὐθὺς, ἰωαννίνα $x$ — εὐθύ · ἰωαννία $y$
p. 21, 12 * ἐπειδὴ $x$ — ἐπεὶ $y$
p. 21, 27 * ταύτῃ $x$ — οὕτω $y$
p. 29, 18 * καθεσταμένων $x$ — καθισταμένων $y$
p. 30, 2 * παντελῶς $x$ — παντελοῦς $y$

---

1) Stellula adpicta lectiones in textum receptas significamus.

2) Codicum Ππ, quamquam eos quoque ad eandem familiam $y$ pertinere pro certo affirmari potest, hic de industria nullam habemus rationem, quippe quorum alterius tantum (π) lectiones eaeque perpaucae nobis notae sint; de quibus infra separatim agemus.

p. 32, 15 * δίστομα *x* — διστόμωτα *y*
p. 32, 22 * ἅπαντες *x* — ἅπασι *y*
p. 33, 10 * ἀποκόπτεσθαι *x* — ἀποτέμνεσθαι [1]) *y*
p. 33, 24 διέφθειρον *x* — * ἔκτεινον *y*
p. 33, 27 * ἤδη ἢ *x* — ἔτι οὐδ' *y*
p. 34, 2 * ἐπίδειξιν *x* — ἀπόδειξιν *y*
p. 34, 11 * μέντοι *x* — τε *y*
p. 34, 12 * ἐγίνετο *x* — ἔτεινέ τι *y*
p. 34, 20 γνώμας *x* — * γνώσεις *y*
p. 34, 24 ἐκέκριτο *x* — * ἐπέκειτο *y*
p. 35, 13 * τοι *x* — τι *y*
p. 35, 21 * κακουργούντων *x* — κακούργων *y*
p. 36, 19 [2]) * ῥωμαίου *x* — ῥωμαίων *y*
p. 36, 24 * καθάπερ *x* — καθάπαξ *y*
p. 36, 25 * θαλάττης *x* — θαλάσσης *y*
p. 37, 12 * καταδικάσασθαι *x* — καταδιαιτήσασθαι *y*
p. 37, 15 * ἀνθρώπου *x* — ἀνδρὸς *y*
p. 37, 20 * οὐεσπασιανοῦ (οὐεσπεσιανοῦ *VW*) *x* — οὐεσπιανοῦ *y*
p. 38, 26 * ὑποκείμενος *x* — ἀποκείμενος *y*
p. 39, 1 * μέντοι *x* — τοίνυν *y*
p. 39, 14 ξυμβολῇ *x* — * ξυμβουλῇ *y*
p. 44, 7 ἧκεν *x* — * ἦλθεν *y*
p. 50, 30 * ξυμφόρῳ *x* — δικαίῳ *y*
p. 51, 1 ἦν *x* — * εἰ *y*
p. 51, 2 * ἴσχυσεν *x* — ἔσχεν *y*
p. 51, 5 * ἔλαβε *x* — ἐλάμβανε *y*
p. 51, 13 * φιλοτιμία *x* — ἐπιθυμία *y*
p. 51, 15 ἰουστινιανοῦ *x* — * ἰουστίνου *y*
p. 51, 20 * ἠνδραπόδιζόν *x* — ἠνδραποδίζοντό *y*
p. 53, 2 * ὀνομάζεται *x* — νενόμισται *y*
p. 53, 12 sq. στασιωτῶν *x* — * στρατιωτῶν *y*
p. 53, 27 * μετῆν, πιστοὶ *x* — μετὸν, μεστοὶ *y*
p. 54, 23 ἀποστροφὴ *x* — * ἐπιστροφὴ *y*
p. 55, 17 πάντα *x* — * σύμπαντα *y*
p. 60, 19 * ἅτε *x* — ἅμα *y*

---

1) Hanc lectionem illi iam praetulerim.

2) Hunc numerum (19) in adnotatione critica intercidisse data occasione moneo.

p. 60, 21 γενέσθαι *x* — * γενήσεσθαι *y*
p. 61, 1 ἀπρόσιτον *x* — * εὐπρόσιτον *y*
p. 61, 4 * οὐδέποτε *x* — οὐδεπώποτε [1]) *y*
p. 61, 9 διαφθαρῆναι *x* — * διαφθεῖραι *y*
p. 64, 26 * ἐκεχωρήκει *x* — ἦρε *y*
p. 71, 26 * ἀποκεκρίσθαι *x* — ἀποκρίνεσθαι *y*
p. 75, 27 * μέντοι *x* — μὲν τῆς *y*
p. 87, 3 τυραννικὸς *x* — * παλαμναῖος *y*
p. 88, 21 * ἀνάζαρβον *x* — ἀνάβαρζον *y*
p. 89, 26 οἰκονομητικώτατος *x* — οἰκονομικώτατος *y*
p. 91, 20 * ἄρκτον *x* — ἄρκτους *y*
p. 96, 25 * γῆς *x* — ἀρχῆς *y*
p. 98, 23 ἐπιγενησομένων *x* — * ἐπιγενομένων *y*
p. 99, 1 παρουσίας *x* — * παρρησίας *y*
p. 101, 2 ἐμπορίζεσθαι πρᾶξιν *x* — * ἐμπορίαν ἐργάζεσθαι *y*
p. 103, 10 * ὅτι *x* — ἅπερ *y*
p. 103, 13 δὲ *x* — * μὲν *y*
p. 103, 28 λέγουσι *x* — * λέγεται *y*
p. 105, 11 ἄνθρωποι *x* — * ἄρχοντες *y*
p. 105, 20 * φόρου *x* — χώρου *y*
p. 107, 21 * μετὰ *x* — περὶ *y*
p. 108, 23 ἔστι *x* — * ἔτι *y*
p. 110, 4 * οὐκ εἴων *x* — οἰκείων *y*
p. 110, 28 καὶ *x* — * ἢ *y*
p. 112, 21 * ἐντέθεικεν *x* — ἀντέθηκεν *y*
p. 113, 9 * καλουμένου *x* — καλουμένην *y*
p. 118, 13 τιμῆς *x* — * αὐτὰ *y*
p. 124, 12 εἴωθε *x* — * εἶα *y*
p. 125, 1 δήμου *x* — * δημοσίου *y*
p. 127, 22 * καί περ *x* — καί τοι *y*
p. 135, 16 * ὅπως μὴ *x* — ὅπερ μοι *y*
p. 136, 3 * βασιλίδος *x* — βασιλέως *y*.

Sequantur exempla selecta, quibus, quomodo in verborum quorundam omissionibus *x* et *y* inter se differant, demonstratur.

p. 8, 5 οἱ; 18, 12 ἡ; 36, 2 γὰρ; 43, 15 ἐπὶ τῆς σκηνῆς; 44, 12 οὖν; 54, 31 τοῖς τυραννοῦσι; 61, 4 διὰ ταῦτα; *61, 14-17* ὡς μή τινι — ἐδόκει; 71, 22 ἦλθε; *90, 9-12* ἐν δη-

1) Cf. adnot. crit. ad h. l.

μοσίῳ — κεντηνάρια; *91, 11 sq.* γινόμενος — αὐτῶν; 107, 17 ὥσπερ εἴρηται; *115, 21* δὴ τὴν ἀρχὴν — — *116, 2* πρὸς βασιλέως; 135, 21 ἔμπροσθεν; 136, 24 καὶ — haec omnia in *x* omissa ex *y* supplentur

p. 6, 30 καὶ; 9, 11 ἅπαντας; 10, 15 γῆς; 10, 27 πόλιν; 13, 6 τε; 13, 13 τοῦτον; 15, 23 πώποτε; 18, 23 ξὺν; 20, 10 τινα; 20, 18 Ἀναστασίῳ; 20, 20 μὲν; 22, 25 αὐτῷ; 23, 16 ἐξ; *26, 1* λόγῳ δεήσει — *29, 6* τοῦ πρόσθεν; 29, 25 ξυνέβη; 30, 22 δύο; 36, 21 τινὰς; 37, 20 ἐκ τοῦ; 37, 26 τῶν; *48, 22-24* δοκῇ — ξυμπεπλέχθαι; 103, 20 Μανιχαίους; *112, 22 sq.* ἐκάλουν — ὑπεραρίθμους; *119, 19* ὅντινα δὲ — — *124, 4* τῇδε κεχώρηκεν; 127, 17 sq. τὸ Βιγιλίου; *129, 15* ὅπως δὲ καὶ — *133, 15* χρήμασι λάθρᾳ — haec omnia familiae *y* desunt, exstant in *x*. Adde, quod omnes illi septem familiae *y* codices verbis [ἀνα]πεισθῆναι δόξας ἀφῆκε (p. 4, 21 sq.) incipiunt.

Superest, ut utriusque familiae discrepantiam, qualis in verborum collocatione deprehenditur, aliquot exemplis potioribus adlatis demonstremus.

p. 17, 27 * τῆς ἑῴας στρατηγὸν *x* — στρατηγὸν τῆς ἑῴας *y*
p. 20, 27 * χρήματα μήποτε *x* — μήποτε χρήματα *y*
p. 29, 26 τῶν πάντων ῥωμαίω *x* — * ῥωμαίω τῶν πάντων *y*
p. 31, 9 * ἀρχὴ ἐκινήθη *x* — ἐκινήθη ἀρχή *y*
p. 32, 4 ἡ χεὶρ αὐτοῖς *x* — * αὐτοῖς ἡ χεὶρ *y*
p. 54, 29 * τὸ κακὸν κατ' ἀρχὰς *x* — κατ' ἀρχὰς τὸ κακὸν *y*
p. 55, 26 * ἐνθένδε ὅτι τάχιστα *x* — ὅτι τάχιστα ἐνθένδε *y*
p. 56, 19 sq. ἐτύγχανεν ἔτι *x* — * ἔτι ἐτύγχανε *y*
p. 79, 20 sq. * τὰ νόμιμα ποιήσας ἐξ ἀνθρώπων ἀφανισθέντι *x* — ποιήσας ἐξ ἀνθρώπων ἀφανισθέντι τὰ νόμιμα *y*
p. 84, 1 sq. * τῶν πάντων ἀνθρώπων ἱκανὸς εἴη *x* — ἱκανὸς εἴη τῶν πάντων ἀνθρώπων *y*
p. 103, 16 sq. * ὡς μάλιστα ἐπιτηδείως *x* — ἐπιτηδείως ὡς μάλιστα *y*
p. 107, 10 * μακράν που οὔσης, ἂν οὕτω τύχοι *x* — ἂν οὕτω τύχοι, μακράν που οὔσης[1]) *y*
p. 108, 11 sq. ἀφίημι λέγειν ἐν τῷ παρόντι *x* — * ἐν τῷ παρόντι ἀφίημι λέγειν *y*

---

1) Hanc verborum collocationem illi vulgatae iam praetulerim.

p. 135, 19 * δοκούντων εἶναι *x* — εἶναι δοκούντων[1]) *y*.

**4.** Quod ad singulos prioris familiae (*x*) codices attinet, 𝕽 codicem recentissimum, quamquam non vidimus, ex editione Menagiana esse descriptum pro certo affirmare possumus. Quae codicis 𝕽 origo vel hinc perspicitur, quod, ut Vitellii ostendit descriptio supra prolata, τὰ πρόσω pro τά τε πρόσω (p. 42, 5) atque ποιοῦντες pro ποιοῦνται (p. 43, 22) iste praebet codex editionis Menagianae errores repetens[2]). Adde quod Latina quoque versio in 𝕽 subiungitur, quae quin ex eadem editione Menagiana exscripta sit, nullus dubito.

Editionem vero Menagianam — nimirum apographo quodam (*m*) intercedente — codice niti *V*(aticano) certum est, ubi utrumque illum locum a prioribus editoribus de industria omissum uncis (fortasse ab Alemanno scriptis) inclusum esse data monemus occasione.

**5.** Codicem 𝔅 ex 𝔓 esse descriptum iam supra (p. XX) demonstravimus.

**6.** Codicis 𝔓 eam partem, qua Ἀνέκδοτα continentur, ex V descriptam esse certissimum est[3]).

Praeterquam enim quod Ἀνεκδότων non continet iste codex nisi quae codicis Vaticani modo commemorati *integra* praebent folia (pagg. 2—100)[4]), haec illius origo permultis eius demonstratur locis, quibus codicis *V* errores repetuntur, veluti p. 6, 15 ῥαβαίνης; 7, 25 sq. ἐρεσχεῖν; 11, 5 κοχλίδος[5]) (κολχίδος, ut videtur, 𝔓 pr.); 11, 7 κοχλίδα; 15, 17 περὶ; 20, 9 οὐΐττιδος; 22, 4 ναυτιλόμε-

---

1) Hanc verborum collocationem illi vulgatae non praetulisse me iam poenitet.

2) Non novisse me hanc editionem Menagianam nisi Orelliana intercedente, ubi uterque error modo commemoratus deprehenditur, data occasione moneo.

3) Cf. Haury l. c. p. 175 atque Isambert p. 366.

4) *Primum* vero folium (pag. 1—2) exscribere propterea supersedisse Auerum, quod nimis est mutilum, per se intellegitur.

5) Quod in codicis *V* margine 'κολχίδος' legitur, id Alemanno deberi moneo.

νος; 22, 19 τουτίλλα; 26, 32 εἴη. Cf. praeterea p. 5, 16 ἄχθος (cum ε supra versum inter αχ et accenti signum corrigendi gratia inserto) *V* — ἄχθος 𝔓 in textu, ἔχθος 𝔓 in margine; p. 10, 4 ἀγγέλλεται, καὶ ὃς] ἀνέλλεται καὶ κομίζεται · ἄρτι βελισ[αρ]ίω τὸ ἰσαυρανῶν[1]) φρούριον ἑλόντι καὶ ὃς *V*, male illa κομίζεται · ἄρτι βελισαρίω τὸ ἰσαυρανῶν φρούριον ἑλόντι ex vs. 3 sq. repetens[2]) — ἀναστέλλεται (sic) καὶ κομίζεται · ἄρτι βελισαρίῳ τὸ ἰσαυρᾶν (sic) φρούριον ἑλόντι · καὶ ὃς 𝔓 ducta sub verbis ἄρτι — ἑλόντι linea.

Adde denique quod in codicis *V* pg. 15 margine manu quadam saeculi XVI adscriptum est: „*Bellisario indigna*“, quae adnotatio ad p. 18, 30 sqq. spectat, — in codicis 𝔓 pg. 131 margine adscripsit Auer: „ἀνάξια βελλισσαρίου“; *V* pg. 17 eadem manus in margine scripsit: „φιλοχρήματος bελλϊσάριος“ (sic) idque Auer suo loco in 𝔓 margine repetiit („φιλοχρήματος βελλισάριος“).

7. C o d i c e s **AV** p r o x i m a i n t e r s e c o g n a t i o n e e s s e c o n i u n c t o s, ut vel eodem patre ($x^1$) utrumque natum esse iusto iure colligas, sat multi eorum errores communes evincunt, quorum aliquot exempla selecta hic proferre liceat.

Primum errores indicabimus, quales in singulis verbis locutionibusve deprehenduntur.

p. 4, 17 δωματείω; 6, 15 ῥαβαίνης; 6, 20 ἐνθάδε; 8, 11 ἡ; 9, 26 διαπεπραμένη; 10, 6 ἅττα; 10, 26 ἀσυρίας; 11, 6 δηλώσαιμι; 11, 17 μλησχάμην; 11, 20 λεηλατήσει; 11, 30 διαφθαροῖεν; 12, 14 sq. βούλεσθαι; 13, 9 βελισάριος; 13, 29 τιμῆς (pro βουλῆς); 15, 22 κἂνθένδεν; 16, 8 ὁμωσμένα; 17, 9 κοινολογησαμένη; 17, 26 μαρτινον (sine accentu); 18, 5 ποι; 18, 30 (cf. adnot. crit.) atque 19, 10 στοιβάδος; 19, 8 περὶ (pro παρὰ); 22, 23 ἐπιδηλώτατόν; 22, 25 sq. γε-

---

1) ῶν (compendium) superscriptum est.

2) Ceterum cum Ambrosianus quoque codex *A* eiusdem erroris (ex parte saltem) sit particeps (cf. adnot. crit.), in utriusque codicis *AV* fonte communi ($x^1$) huius librarium ἀν ἑλλεται καὶ κομίζεται · ἄρτι βελισαρίω τὸ ἰσαυρανῶν φρούριον ἑλόντι καὶ ὃς exarasse, sed postea verba male repetita expunxisse, inde colligamus necesse est.

γόνασι (pro διαγεγόνασι); 29, 24 ἡ (pro ᾗ); 35, 6 τούτω (ex τοῦτο corr.); 51, 6 βάρων (pro βαρβάρων); 64, 23 καταδραθὼν; 81, 21 sq. ξυγκαταδραθὼν; 109, 21 ἐλλάσσων; 123, 22 πελοπόνησον; 123, 24 πελοπονησίων, al. — quibus locis omnibus tam *W* quam altera codicum familia (*y*) rectas suppeditant lectiones[1]).

Sequantur loci selecti, quibus verba locutionesve, quae in *AV* desiderantur, ex *Wy* supplentur.

p. 5, 4 τὸν; 8, 1 λάθρᾳ; 10, 26 ἂν; 12, 5 τε (alterum); 13, 14 κεκρυμμένως; 18, 10 οἱ; 19, 10 τῆς; 21, 3 ἃ δεδιήγηται; 22, 13 τε; 23, 15 ὁ.

Subiungo locos, ubi e contrario supervacanea quaedam in *AV* praebentur, qui errores itidem ex *Wy* corriguntur.

p. 10, 9 ὅπερ μοι (pro ὅπερ); 11, 30 ἐν οὐδενὶ κόσμῳ (pro οὐδενὶ κόσμῳ); 23, 13 μηχανῇ τῇ πάσῃ διακωλύοι (pro διακωλύοι).

Quod denique ad verborum collocationem attinet, hisce locis quin ea male in *AV*, recte in *Wy* collocata sint, equidem nullus dubito.

p. 13, 6 ἐπιεικῶς καὶ *AV* — καὶ ἐπιεικῶς *Wy*

p. 14, 9 sq. καὶ οὕτω δὴ ταύτης τῆς εἱρκτῆς ἀφεθεὶς *AV* — καὶ οὕτω ταύτης δὴ τῆς εἱρκτῆς ἀφεθεὶς *Wy*.

**8.** Ne cui tamen propter tantam codicum **AV** inter se similitudinem suboriatur suspicio horum alterum alterius esse apographon, eorum discrepantiae luculenta statim proferam exempla, quibus, quin sui sit uterque iuris, dubium non esse evincitur.

p. 6, 21 δὲ omittit *A*, item p. 17, 10 τε; 23, 9 ὅτι; 32, 15 σχεδὸν; 46, 3 πῃ; 85, 25 χωρία; 113, 21 τε — quae omnia suis locis in *VWy* exstant[2]).

---

1) Nisi quod p. 64, 23 κατὰ | δαρόων (sic) pro καταδαρθὼν *g* praebet.

2) Prorsus nulla est in *A* inter fol. 16$^v$ et 182$^r$ lacuna, quam deprehendisse sibi visus est Henricus Rostagno (in Procopii editione Comparettiana — *La guerra Gotica di Procopio di Cesarea*, vol. I, Romae 1895, praefat. p. XXX), — scilicet folio *15* pro *16* habito.

E contrario, p. 30, 27 τοῦ in *V* omissum ex *Ay* suppletur, qui codices Reiskii confirmant coniecturam. Cum vero *W* quoque hanc voculam omittat, aut merae utriusque librarii neglegentiae hic error tribuendus est aut — quod equidem probabilius esse putarim — propterea commissus est, quod illa vocula tam in $x$ quam in $x^1$ supra versum erat adscripta, unde librariorum illorum neglegentia excusationem quandam habet, — ne dicam illam voculam in $x$ superscriptam centum fere annis praeteritis, postquam $x^1$ ex $x$ descriptus erat, iam evanidiorem esse potuisse, quam quae a codicis *W* librario, quem summa in universum excellere diligentia obiter moneo, cerneretur.

Accedit alterum eiusdem generis exemplum, quod primo quidem adspectu diversum ab illo esse videtur. Legimus p. 30, 29 sq. προϊόντος ἤδη <τοῦ δ>εινοῦ σωφρονέστατοι ἔδοξαν εἶναι ἀνθρώπων ἁπάντων, ubi pro illis τοῦ δεινοῦ, quae certae emendationi Alemannianae debentur, $\overset{\text{ει}}{\text{νοῦ}}$ *W*, νοῦ *A* atque (puncto superscripto) *G*, νου *V* (sine accentu) praebent; praeterea codicis *A* librarius primum ἔδοξαν recte scripsit, deinde hoc in ἔδειξαν male mutavit. Quibus lectionibus omnibus inter se conlatis facere non possum, quin colligam codicis $x^1$ librarium illud ει in $x$ supra νοῦ scriptum voci ἔδοξαν parum recte superscripsisse, qua de causa codicis *A* librarius illud ἔδοξαν sine dolo malo pessumdedit; *V*(aticani) vero scribae salutari nimirum neglegentia factum esse, ut veram servaret scripturam, luce clarius est.

Sequatur tertium exemplum huic alteri haud dissimile. Legimus p. 5, 13 sq. καὶ τοῦτο ἐπεῖπεν ὡς «ἔγωγε θᾶσσον ἂν τὴν γυναῖκα ἢ τὸν νεανίαν κατειργασάμην», ubi illud ἔγωγε certa Dindorfii est emendatio lectionis traditae ἐγώ τε (sic *AVWG*, nisi quod τε a $W^1$ omissum super versum adscripsit $W^2$; ἐγώγε *g*). Cum vero ἐπεῖγεν pro ἐπεῖπεν in *A* legatur, fuisse in $x^1$ fere $\overset{\text{γε}}{\text{ἐπεῖπεν}}$ ὡς ἐγώ τε scriptum — scilicet ex ἐπεῖπεν ὡς ἐγώ $\overset{\text{γε}}{\text{τε}}$ corruptum — colligatur necesse est. Quod γε superscriptum solus *A*(mbrosiani) codicis librarius animadvertit ideoque veram illam lectionem ἐπεῖπεν bona sane fide corrupit.

Claudatur agmen exemplo, quod cum ad scripturae discrepantiam tum ad verborum collocationem spectat.

p. 19, 22 παρὰ τοὺς τῆς γυναικὸς πόδας *A* — παρὰ τοὺς γυναικὸς τοὺς πόδας (sic) *V*[1]).

Aliis exemplis — veluti p. 7, 25 sq. ἐρεσχελεῖν *AWG*: ἐρεσχεῖν V; 12, 24 τὴν *AW*: τῶν *VG*; 20, 23 εἶα *AW*²(mg.): εἴη *VW*¹*G*; 26, 32 ἤει *AW*: εἴη *V*; 88, 18 ἕως *AG*: ὡς *VW* — iam nihil post illa prolata opus esse vix quisquam, puto, negabit.

**9.** Exemplis, quae paulo supra adlata sunt (§ 7), satis superque evincitur c o d i c e m **W** neque ex *V*(aticano), ut Alemannus opinatus est[2]), neque ex *A*(mbrosiano) neque ex horum utriusque fonte communi ($x^1$) esse descriptum, unde eum quoque s u i e s s e i u r i s fit manifestissimum.

Eadem exempla si cum illis, quae in huius capitis § 3 congesta sunt, contuleris, codicem *W* ab illo $x$, huius familiae archetypo, qui pariter atque $x^1$ aetatem non tulit, originem ducere colligas necesse est.

**10.** Quod vero ad c o r r e c t i o n e s in *W* passim obvias, q u a e s e c u n d a e m a n u i (**W**²) d e b e n t u r, pertinet, *harum originem* paululum *diversam esse*, hisce demonstratur exemplis, ubi stellula iis lectionibus adponitur, quae in textum sunt receptae.

p. 5, 15 * ἔγκοτα AV*W*²(*mg.*) G — ἔγγιστα *W*¹

p. 6, 24 * ἦλθεν *W*¹ G — ἦκεν AV*W*²(*mg.*)

---

1) Veram verborum collocationem τῆς γυναικὸς τοὺς πόδας esse codicum *WG* consensus docet, unde colligamus necesse est illa τῆς γυναικὸς in $x^1$ supra versum fuisse adscripta.

2) Praefat. p. 14: „Duo eius [*scil.* *Ἀνεκδότων libri*] exempla servat Vaticana Bibliotheca, a l t e r u m e x a l t e r o d e r i v a t u m, utrumque in principio mutilum, multisque passim hiatibus deforme. Ex his quod est antiquius [*V*] etiam fine decurtatum est, recentius vero [*W*], licet tumultuaria scriptione exaratum, extremam nobis partem ab interitu conservavit, qui [*quod*?], praeter hanc accessionem, nulla nobis in re usui fuit".

p. 6, 25 * τὸ συνειδέναι $W^1$ G — τῷ συνειδέναι AV$W^2$

p. 7, 1 * ἐσέγραψεν $W^1$ G — ἐνέγραψεν AV(prius ν ex corr., ut vid.) $W^2$(*mg.*)

p. 7, 7 * ἔκλαε $W^1$ G — ἔκαμε AV$W^2$(*mg.*)

p. 7, 27 * αὐτή τε γὰρ γράφουσα AVG — γὰρ om. $W^1$ idque versui superscripsit $W^2$; quam voculam delendam esse non sine probabilitatis specie coniecit Reiske, quem Dindorf est secutus.

p. 8, 4 * ὑπερφυῶς $W^1$ — ὑπερφυῶς, ὡς AVG; — — ὡς inseruit $W^2$, quae manus in margine quoque eandem voculam una cum insequentibus verbis repetiit: ὡς παρὰ τοὺς τοῦ. Quibus lectionibus cum iis, quae deinceps traduntur, — παρὰ τοὺς τοῦ φωτίου πόδας *W*, παρὰ τοῦ φωτίου πόδας *AVG* — collatis colligo fuisse in utriusque codicum familiae fonte communi (α) haec fere scripta:

τοὺς
ὑπερφυῶς παρὰ τοῦ φωτίου πόδας

ubi illud τοὺς superscriptum, ut mea quidem fert opinio, per α librarii incuriam sedem mutavit, cum scilicet in illo codice, ex quo α descriptus fuit, haece exhiberentur:

τοὺς
ὑπερφυῶς παρὰ τοῦ φωτίου πόδας

unde παρὰ τοῦ Φωτίου τοὺς πόδας scripsi, conlato loco simillimo — p. 19, 22, de quo supra (p. XXIX § 8) egimus.

Non tamen negarim illud τοὺς voculae τοῦ *corrigendae* causa superscriptum esse potuisse; — quod si verum est, cum Alemanno παρὰ τοὺς Φωτίου πόδας scribendum, — aut non ad illud τοῦ corrigendum, sed ut textui ante τοῦ insereretur, quod et fecisse codicis *W* librarium vidimus.

Quaequae tamen trium lectionum modo commemoratarum praeferenda est, pro certo affirmare possumus illud ὡς, quod *AVG* praebent, ex illo τοὺς superscripto ortum esse, ut male hac vocula a $W^2$ inserta codicem *W* interpolatum esse in propatulo sit.

p. 10, 3 * δὲ AV (adscr. in mg.) $W^2$(*sscr.*) — om. V pr. $W^1$G; quae vocula num in textum sit recipienda, codicum $W^1G$ consensus ratione habita iam subdubito.

p. 10, 9 * ὅπερ τοῦδε τοῦ λόγου ἀρχόμενος εἶπον $W^1$G —

— ὅπερ μοι κτλ. AV, quibus accedit $W^2$ male illud μοι super versum adscribens, quod in $x^1$ per librarii errorem propter insequentia οὗ μοι in textum irrepsisse vix est ut moneam.

p. 11, 6 * αὐτίκα δηλώσω $W^1$ G — αὐτίκα δηλώσαιμι AV, quibus accedit $W^2$ super illud δηλώσω scribens γρ. σαιμι.

p. 11, 30 * οὐδενὶ κόσμῳ $W^1$G — ἐν οὐδενὶ κόσμῳ AV, quibus accedit $W^2$ illud ἐν supra versum adscribens, quod ex versu praecedenti male (in $x^1$) repetitum fuisse manifestum est.

p. 12, 4 οὐδὲν προσῆκον $W^1$ — οὐδενὶ προσῆκον AVG, quibus $W^2$ accedit illud ι supra versum addens; οὐδέν οἱ προσῆκον de coniectura in textu dedimus illius οὐδενὶ ratione, ut par est, habita, quippe quod in archetypo quoque (α) scriptum fuisse codicum AVG consensu evincatur.

p. 12, 5 alterum τε servarunt $W^1$ G — omittunt AV, quibus $W^2$ accedit hanc expungens voculam.

p. 12, 13 * τῇ δόξῃ, ἣν ἀμφί σοι ἔχω $W^1$ G — τῇ δόξῃ, ἣν ἐπί σοι ἔχω AV, quibus accedit $W^2$ illud ἐπί super ἀμφί scribens; quod ἐπί in $x^1$ per librarii incuriam hic male ex vs. 11 repetitum fuisse putaverim.

p. 13, 29 * ἐς ἀξίωμα βουλῆς $W^1$G — ἐς ἀξίωμα τιμῆς AV, quibus $W^2$ accedit τιμῆς in margine scribens.

p. 14, 25 μάργαρον, quam lectionem tam $W^1$ quam AVG praebent, in μάργαρος mutavit $W^2$ de sua videlicet ipsius coniectura — haud dubie illorum τὸν μάργαρόν οἱ ἐπιδεῖξαι (p. 14, 28) ratione habita, ubi τὸ restituendum esse vidit Maltretus.

p. 20, 23 * εἶα A$W^2$(*mg.*) — εἴη V$W^1$G

p. 23, 14 * ἀπολεῖν $W^1$ — ἀπόλλειν AV$W^2$(*mg.*) G

p. 23, 20 [1]) βελισσάριον G (quae vera est lectio, nisi

---

1) *In adnotatione critica ad hunc locum pro* Βελισάριον Alemannus : βελισσάριον G, *reponendum esse* βελισσάριον (sic) G : *data occasione moneo.* — Alemanni vero nomen, licet in eius quoque schedis a Dindorfio in adnotatione critica laudatis illud βελισσάριον legatur, hic nolo adiungere, quippe quam lectionem non ab ipso Alemanno coniectura inventam, sed ex *G* enotatam esse in propatulo sit.

quod Βελισάριον scribendum) — βελισαρίου AV, quibus $W^2$ accedit hanc vocem a $W^1$ omissam supra versum supplens.

Harum omnium lectionum ratione habita correctiones a $W^2$ factas — sola illa μάργαρος excepta — ad codicum familiam $x^1$ pertinere colligamus necesse est. Cui conclusioni haudquaquam repugnant ceteri loci, quibus eadem manus $W^2$ textum, qualem $W^1$ dedit, sive verba ab hoc librario omissa supplens sive alio quo modo corrigit, qui loci sunt — p. 5, 13. 23. 9, 3. 19. 10, 6. 12, 3. 29. 14, 27 sq. 15, 6. 16, 12. 20. 17, 5-7. 18, 1. 19, 16. 21, 19. 107, 8.

Vtrum vero $W^2$ correctiones, quas fecit, ipsi codici $x^1$ an *A*(mbrosiano) an *V*(aticano) debeat, diiudicari quidem, ut nullus restet scrupulus, vix potest, ut mea tamen fert opinio, e *V*(aticano) eas esse a $W^2$ depromptas veri simillimum est — exceptis sane illis μάργαρος (p. 14, 25) atque εἶα (p. 20, 23), quarum correctionum utramque $W^2$ suo Marte fecisse putarim.

Superest ut moneam, si cui in mentem venerit, correctorem istum ($W^2$) ipsum Alemannum esse, quem iusto liberius codices tractasse vel *V*(aticanus) docet [1]), — tam propter manus utriusque diversitatem quam propter illud μάργαρος aliasque quasdam correctiones a $W^2$ factas — veluti p. 10, 9. 11, 6. 13, 29 — huiusmodi suspicionem parum esse probabilem.

**11.** Iam ad alteram codicum familiam (*y*) examinandam transeamus.

Primum, quod ad codices $\mathbf{Gg}\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{Q}^{I}\mathfrak{Q}^{II}\mathfrak{Q}^{III}$ attinet, cum horum $g\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{Q}^{I}\mathfrak{Q}^{II}\mathfrak{Q}^{III}$ omnes pariter atque *G* verbis illis [ἀνα]πεισθῆναι δόξας ἀφῆκε (p. 4, 21 sq.) incipiant cumque iisdem, quibus *G*, hient locis [2]), facillima inde fit coniectura hos omnes $g\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{Q}^{I}\mathfrak{Q}^{II}\mathfrak{Q}^{III}$ codices a *G* originem ducere, quippe qui ceteris aetate antecellat.

Verissimam esse hanc conclusionem permultis luculentisque demonstratur exemplis, quae statim proferemus.

---

1) Cf. quae ad p. 30, 18 adnotantur.

2) Cf. supra § 3 p. XXIII sq.

**12.** Codicem *G* cum propter ipsas litteras minus composite nec clare a librario exaratas tum propterea, quod passim scriptura tam detrita decolorataque est, ut fere evanescat, lectu adeo esse difficilem iam scimus, ut locis permultis, nisi maxime oculorum aciem intendas, longe alia atque quae codex praebet possis legere, quod librariis quoque codicum *g*𝔐𝔑𝔒, utpote minus diligenter munere suo functis, vel iusto saepius accidit.

Itaque codicis **g** librarius p. 41,26 legit scripsitque κάστρον pro θέατρον, quod *G* praebet; p. 41,28 γελεῖτο ποιοῖς pro γελωτοποιοῖς (cf. adnot. crit.); 5,13 sq. τὴν γυναῖκα θᾶσσον ἂν pro θᾶσσον ἂν τὴν γυναῖκα, quod in *G* ex τὴν γυναῖκα θᾶσσον ἂν punctis (fere evanidis) superscriptis, quae codicis *g* librarium non animadvertisse patet, correctum est; 24,9 ἔντοι pro ἰόντος; 33,4 ὅπερ pro ὅπως; 43,22 ἐπισπουδῇ pro σπουδῇ; 47,19 ὀρθότερον pro ὀρθότθον; 47,21 ἀλλ' pro οὐχ; 48,26 διατέτμηται pro διατέτακται; 50,28 ἐφιέρου pro ἐφίστῃ; 54,21 πᾶν δερασταῖς pro παιδεραστεῖν; 56,7 ἱπαρᾶς pro ἱλαρᾶς; 56,8 ἅπερ pro οἷπερ; 57,12 κρατημένοις pro κεκτημένοις; 60,11 δυσφοβουμένην pro δυσφορουμένην; 60,14 τὸν ἄνθρωπον οὔτε pro τὴν ἄνθρωπον ἅτε; 62,9 ἐπὶ νόσον pro ἐπινοῶν; 64,23 κατὰ|δαρόων pro καταδαρθὼν; 66,9 τινὰν pro τινὰ; 69,9 εἶεν pro ἦγεν; 69,21 εὐπροτόδος pro εὐπρόσοδος; 71,4 φυτῇ pro φυγῇ; 71,6 ἑτέρας τῷ pro ἑτέρῳ τῳ; 71,10 sq. πεποίηκεν pro πεποίηται; 77,9 ἐς τὴν pro ἑορτὴν, — cuiusmodi errores aliis quoque locis[1]) permultis in *g* deprehenduntur, qui omnes ne Pyrrhoni quidem illi Eleo, si ab inferis exsisteret, quidquam dubii relinquerent, quin ea codicis *g* pars, quae 'Ανέκδοτα continet, ex *G* descripta sit.

Adde quod alteram quoque illius codicis partem, qua excerpta ex libris I—IV *De bellis* continere supra (p. XIV) monuimus, ex *G* descriptam esse certissimum est; qua de re fusius in editionis nostrae voluminum I atque II praefationibus agemus.

---

1) Cf. locos, quos in § 13 *stellula* notavimus.

**13**. Non minus manifesta fiet cuivis codicum 𝔐𝔑𝔔[1]) eadem atque codicis *g* origo, si illorum quoque errores cum codicis *G* lectionibus contulerit.

Ita p. 5, 13 sq. hi quoque codices 𝔐𝔑𝔔 male * τὴν γυναῖκα θᾶσσον ἂν[2]) pro θᾶσσον ἂν τὴν γυναῖκα praebent[3]); 6, 3 εἴσατο pro ἐτίσατο[4]); 6, 28 * ἐγκεκρυμμένως pro κεκρυμμένως[5]); 7, 13 sq. μετάπλαστος pro κατάπλαστος[6]); 7, 22 * atque 18 σὺν pro ξὺν (σὺν *G* utrubique, utroque ξ minus clare scripto); 9, 2 * ἡμῶν pro ἐμοῦ (in *G* ἐμοῦ ex ἡμῶν correctum legitur); 10, 23 * ἀπέχει pro διέχει (απεχει, πε tantum inductis, διέ praebet *G*); 11, 15 * ἤγγελον pro ἤγγελλον; 11, 21 οὔνιων (*sic*) pro οὔννων; 11, 25 * ἀπήγγελον pro ἀπήγγελλον; 11, 25 * βαλλεριανῷ pro βαλεριανῷ (cf. adnot. crit.); 12, 5 ἐν pro ἧς; 12, 29 * ἐγκαταλαμβανόμενον pro καταλαμβανόμενον[7]); 17, 6 τοὺς pro εὐθὺς; 19, 5 ὀξιορεγμίαν pro ὀξυρεγμίαν; 21, 11 αὐτὸν pro αὐτὴν; 23, 12 μηχανικῇ pro μηχανῇ; 31, 4 μεταμόνας pro κατὰ μόνας; 31, 13 συσχύσεως pro συγχύσεως; 33, 4 * ὅπερ pro ὅπως; 65, 10 sq. * ταλοιπὰ (τὰ λοιπὰ g) ξύμπαντα σιωπῇ δοτέον pro σιωπῇ δοτέον τὰ λοιπὰ ξύμπαντα (cf. adnot. crit.); 138, 24 ἐσετίζοντο pro ἐσιτίζοντο, — ut pauca tantum proferam huiusmodi exempla, — quorum ratione habita codices 𝔐𝔑𝔔ᴵ e codice quodam *z* hodie deperdito sine necessitate olim me coniecisse[8]) obiter moneo.

---

1) De his tamen tribus codicibus (𝔔) cf. quae infra (§ 15) monemus.

2) *Stellula* eos locos notamus, quibus *g* quoque codicis librarius errat.

3) Cf. supra § 12.

4) Huius verbi litteras ετ ita inter se conligatae in *G* praebentur, ut facillime pro sola ε littera haberi possint, — quem errorem ut evitaret, soli *g* codicis librario contigit.

5) ἐγκεκρυμμένως *cum* ἐγ *litteris expunctis* in *G* legitur.

6) Cf. append. crit. p. 147.

7) ἐγκαταλαμβανόμενον *cum* ἐγ *litteris expunctis* praebet *G*.

8) *Византійскій Временникъ* II p. 423.

**14.** Restat, ut, ne quis codicum istorum *g*𝔐𝔑𝔔 alios ex aliis descriptos esse propter tantam errorum communionem opinetur, omnino falsam esse huiusmodi suspicionem paucis exemplis demonstremus.

𝔐𝔑𝔔 non esse codicis *g* apographa vel hinc elucet, quod hic codex verba τὴν οἰκείαν — ἐς γῆν (p. 12, 22-24) atque ἐν ἀλογίᾳ πεποιημένος — διαχρησάμενος (p. 25, 28 sq.) omittit, quae ceteri omnes suis locis praebent [1]).

Neque 𝔐 nec 𝔑 ex 𝔔 descriptos esse hisce demonstratur exemplis: p. 139, 7 τε omissum in 𝔔 exstat in 𝔐𝔑(*G*); p. 137, 13 πανταχόθι 𝔐𝔑(*G*) — πανταχόθεν male 𝔔; 138, 4 προσῆν 𝔐𝔑(*G*) — προσῆκον male 𝔔; 141, 1 καὶ 𝔐𝔑(*G*) — ἡ male 𝔔; 141, 11 καταγωγίοις 𝔐𝔑(*G*) — καταγωνίοις male 𝔔; 141, 17 ἀνδρῶν 𝔐𝔑(*G*) — — ἀνδρὸν male 𝔔.

Neque 𝔐 neque 𝔔 esse codicis 𝔑 apographa vel hinc perspici potest, quod illi tam νέος (p. 29, 12) quam ἐξ (p. 30, 1) praebent, quae verba a codicis 𝔑 librario omissa sunt; adde quod hic p. 24, 8 περιουσίαν, illi vero recte cum *G* περυσίαν tradunt.

𝔑 non esse ex 𝔐 descriptum vel hi docent loci: p. 83, 5 ἀπολογουμένων male in 𝔐 pro ἀπολουμένων (𝔑*G*) legitur; item p. 62, 12 διαλλάσσεις pro διαλλάσσειν (𝔑*G*); 62, 13 ἐναντιώτητα pro ἐναντιώτατα (𝔑*G*)[2]); 63, 28 τελλομένων pro στελλομένων (𝔑*G*); 89, 7 ἀπήνεγκα pro ἀπήνεγκε (𝔑 [ἀπήνεγκεν pr.] *G*); 139, 13 ἀγγαφορεῖν pro ἀγγαροφορεῖν (𝔑*G*).

Neque 𝔔 ex 𝔐 descriptum esse vel solo illo evincitur loco, quo 𝔐 male ἀγγαφορεῖν (p. 139, 13) pro ἀγγαροφορεῖν (𝔔𝔑*G*) praebet. Cf. praeterea p. 140, 17 λείπει 𝔐 — χείπει 𝔔 (tribus punctis triangulatim superscriptis) — pro χείλει, quod minus clare in *G* exaratum est.

---

1) Adde quod p. 140, 12 ἅπαντες γόνυ atque p. 140, 22 πώποτε in *g* leguntur pro illis ἅπαντες ἐς γόνυ atque πώποτε οὐ, quae ceteri pariter atque *G* tradunt.

2) In codice *G* hoc vocabulum sic scriptum est: ἐναντιω τ τα΄ .

Codicem *g* denique ex istorum 𝔐𝔑𝔒 aliquo esse descriptum sane nemo sanus — argumentis, quae supra (§ 12) congessimus, cognitis — contendet.

**15.** Ceterum non alienum esse videtur haec quoque de $\mathfrak{O}^{I}\mathfrak{O}^{II}\mathfrak{O}^{III}$ codicibus adnotare.

Vtrum omnes tres isti codices ex *G* descripti sint, — quod in stemmate supra (p. XX) proposito significavi, — an solus eorum aliquis — veluti $\mathfrak{O}^{I}$, cuius apographa ceteri ($\mathfrak{O}^{II}\mathfrak{O}^{III}$) sunt, — an $\mathfrak{O}^{I}$ ex *G*, $\mathfrak{O}^{II}$ ex $\mathfrak{O}^{I}$, $\mathfrak{O}^{III}$ ex $\mathfrak{O}^{II}$ sint descripti, quod olim conieci[1]), — ne alias huiusmodi proferam coniecturas, — anquirere me supersedisse libere profiteor. Quae cum nullius omnino esse ad Ἀνεκδότων crisin momenti manifestissimum sit, otiosiorum cuivis diligenter indaganda libentissime relinquimus.

**16.** Iam codicis π lectiones, quascumque Alemannus enotavit, hic componamus easque cum codicum *GAVW*[2]) scripturis comparemus. *Stellula* eas illius lectiones a nobis notari, quas ipsi vidimus in codicis *V* margine ab Alemanno scriptas, praemonemus.

p. 41, 21 * εἰς τὰς ἐπίσκηνας male π — ἐς | τὰς ἐπὶ σκηνῆς (ῆς compend. superscripto) *G*, εἰς τὰς ἐπὶ σκηνῆς *Z*.

p. 67, 1 * τοὺς δὲ ῥεφερενδαρίους π — τοῖς δὲ ῥαιφερενδαρίοις *G*[3])*Z*.

p. 67, 3 * ἀναγγεῖλαι π*G* — ἀγγεῖλαι *Z*.

p. 67, 4[4]) * ἱκέτῃ bene π — οἰκέτῃ *G* (puncto super spiritus signum scripto, ut haec ; superscripta facillime pro ἱ, si quidem minus diligenter legas, haberi possint)[5]) *W*, οἰκέτῃ *AV*.

p. 67, 9 * ἀνεξελέγκτως π*G* — om. *Z*.

---

1) *Византійскій Временникъ* II p. 420.

2) Codicum *AVW* consensum littera *Z* significabimus.

3) ῥεφερενδαρίοις 𝔐𝔑, ῥαιφενδαρίοις (sic) *g*.

4) *In adnotatione critica ad h. l. reponas velim* — ἱκέτῃ π, Alemannus : οἰκέτῃ (οἰκέτῃ AV) ZG (puncto sscr.).

5) Solito diligentiores hic se praebuerunt codicum *g*𝔐𝔑(𝔒) librarii, qui itidem οἰκέτῃ tradunt, nisi quod hoc ex οὐκέτῃ in 𝔐 correctum est.

p. 67, 10 * στασιῶται πGZ — pro στρατιῶται.

p. 93, 18 οὐκ om. π[1])G — exstat in Z.

p. 94, 13 ὅπερ male π[2]) — ὅπως G (ως compend. superscripto, ut, si quidem iusto neglegentius legas, pro ερ habere possis)[3]) Z.

p. 112, 17 Ἰουστῖνος om. π[4]) — exstat in GZ.

p. 112, 22 sq. ἐπειδὴ δὲ αὐτὸς τὴν βασιλείαν ἔσχε, τούτους δὴ τοὺς ὑπεραρίθμους ἀπεσείσατο om. π[5]) — ἐκάλουν. ἐπειδὴ δὲ αὐτὸς τὴν βασιλείαν ἔσχε, τούτους δὴ τοὺς ὑπεραρίθμους om. G[6]), — quae verba omnia exstant in Z.

138, 7 sq. ἄχρι ἐς Δακίβιζαν καθελὼν δρόμον ἠνάγκασε πάντας ἐκ Βυζαντίου εὐθὺς om. π[7]) — quae verba exstant in GZ, et quidem in G (fol. 157ᵛ) ita praebentur, ut huius folii versus 12 (ab imo) verbis τὸν ἐκ καλχηδόνος ἄχρις terminetur, insequens vero (vs. 11 ab imo), qui illis ἐς δακίβιζαν incipit, verbis εὐθὺς ἄχρις ἐς τὴν ἐλε(νούπολιν) finiatur, — unde non sine summae sane probabilitatis specie suspicaremur, π ex G descriptum esse[8]), nisi, quominus hanc faceremus coniecturam, illa vocula ἐκάλουν (p. 112, 22) obstaret, quam codici π non defuisse concedamus necesse est, si quidem Alemanni diligentiae confidimus. Quo concesso nihil relinquitur nisi ut coniiciamus in Π quoque verba, quae p. 138, 6-8 continentur, sic disposita fuisse, ut Pithoeus Panciroliusve, qui codicem π exararunt, facile ab altero ἄχρις ἐς ad alterum aberrare potuerint.

Quod vero ad p. 112, 22 sq. attinet, cur codicum Gπ utrique undena desint verba supra commemorata,

1) Cf. Orelli p. 288, 5.

2) Cf. Orelli p. 288, 10.

3) Alibi a librariis codicum *g*𝔐𝔑𝔒 eundem in modum erratum esse (p. 33, 4) iam supra monui (§ 13), hic vero diligentius legentes illud ὅπως tradiderunt.

4) Cf. Orelli p. 295, 20.

5) Cf. Orelli p. 295, 22.

6) G fol. 153ʳ: οὕσ|περ (*vs. 21*) ὑπεραρίθμους (sic) ἀπεσείσατο (*vs. 23*) αὐτίκα μάλα κτλ.

7) Cf. Orelli p. 300.

8) Quo concesso iam dubitari non posset, hunc G codicem eundem esse atque illum Π naufragum, ut olim coniecimus.

equidem hunc fere in modum explicarim: fuisse in codicum *GΠ* fonte communi (*y*) sic fere scriptum suspicor:

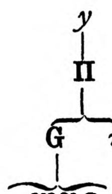
*ἥσθετο, ἑτέρους αὐτοῖς ἐς δισχιλίους ἐντέθειχεν, οὕσπερ ὑπεραρίθμους ἐκάλουν. ἐπειδὴ δὲ αὐτὸς τὴν βασιλείαν ἔσχε, τούτους δὴ τοὺς ὑπεραρίθμους ἀπεσείσατο αὐτίκα μάλα κτλ.*

unde factum est, ut codicis *G* librarius ab altero illo ὑπεραρίθμους ad alterum aberraverit; illius vero *Π* librarius totum versum, qui verba ἐπειδὴ — ἀπεσείσατο continuit, per meram praetermisit neglegentiam.

Vtcumque tamen haec se res habet, codicis *π* lectiones supra prolatae tam hunc codicem quam illum *Π* naufragum ad eandem familiam (*y*) atque *G* pertinuisse satis superque demonstrant.

**17.** Restat, ut de codicum familiae *y* stemmate — praeter ea, quae paulo supra (§ 15) monuimus, — pauca adnotemus.

Cum de codice **Π** nihil fere certi nobis notum sit, huic certum in stemmate locum attribui non posse per se intellegitur. Quod igitur in stemmate, quod supra proposuimus (p. XX), hunc codicem ex eodem atque *G* fonte fluxisse significavimus, ut huius Ambrosiani tamquam frater sit, id mera niti coniectura vix est quod moneamus, neque obstare quidquam videtur, quominus codicis *G* fratrem *π*, patrem *Π* esse coniiciamus, hoc scilicet stemma proponentes:



Quo facto in explicatione ad verborum omissionem p. 112, 22 sq. spectanti, quam paulo supra dedimus (§ 16), illi *Π* codicem *π* esse substituendum in propatulo est[1]).

1) Sin autem ἐκάλουν quoque voculam (p. 112, 22) in *π* omissam fuisse, Alemanno videlicet invito, contenderis eaque fretus

## CAPVT III.

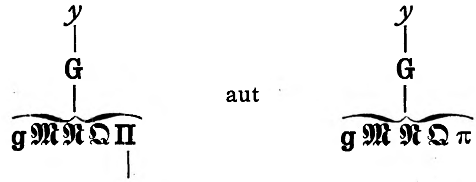
# DE AVWG CODICVM COMMVNIS FONTIS ($\alpha$) INDOLE.

Quibusnam inter se cognationis vinculis Ἀνεκδότων codices coniuncti sint, quaestione examinata et, quod eius facere potuimus, soluta omnium, qui aetatem tulerunt quorumve conlationes nancisci nobis licuit, non esse sui iuris nisi quattuor illos — *AVWG*, quos in capite priore ceteris codicibus praeposuimus, videmus.

Iam antequam de horum quattuor indole atque in Ἀνεκδότων crisi auctoritate agimus, non alienum esse videtur eorundem archetypi quoque indolem paucis adumbrare.

Et primum quidem in universum est monendum bonae fuisse notae hunc illorum quattuor codicum communem fontem ($\alpha$), quae res vel hinc perspicitur, quod $\alpha$ ubique rectas Τουτίλας atque Οὐίττιγις nominum scripturas praebuit[1]). Hic haud ab re dicere duco Procopii *De bellis* librorum tetradis posterioris (ll. V—VIII) textum duobus in universum niti codicibus, quorum alterum — Vaticanum 1690 — optimae esse notae summamque in huius tetradis textus crisi habere auctoritatem contra Hauryi sententiam solo eoque perquam futtili

coniectura *Π* pro codicis *G* apographo habueris, aut si omnino codicem *Π* eundem esse atque *G* credideris,




stemmata habebis.

1) Codicis *A* lectiones Τωτίλας et Οὐίτιγις interpolatori deberi infra demonstrabimus.

fultam argumento [1]) pro certo atque adeo pro certissimo affirmo, alterum — Laurentianum pl. 69, 8, — quem Haury in illa tetrade edenda potissimum vult sequi parum hercle feliciter, Vaticano illo codice longe deteriorem esse passimque vel inpudentissimis inquinatum interpolationibus [2]) iam dudum docui quam certissimis nisus argumentis [3]). Horum igitur codicum ille Vaticanus Τουτίλας [4]) et Οὐίττιγις formas, Laurentianus vero male Τωτίλας et Οὐίτιγις praebere solet.

Ceterum — ut ad propositum revertamur — codicum illorum *AVWG* communis fontis aut certe illius codicis, ex quo hic α descriptus fuerat, librarium nimia, ut ita dicam, diligentia nequaquam laborasse sat multae corruptelae nec rarae lacunae, quales in omnibus illis quattuor codicibus passim deprehenduntur, certissime demonstrant.

Et potiorum quidem lacunarum, quae omnibus his quattuor codicibus communes sunt nec ab ipso illius α librario indicatae erant, haece habes exempla: p. 32, 6 sq. (cf. adnot. crit.). 45, 14. 59, 17 (cf. adnot. crit.). 74, 3. 82, 22 sq. 117, 8. 139, 4 sqq.

Praeterea singula verba verborumve partes quasdam passim in illo α omissa erant, veluti p. 6, 29. 10, 22 14, 22 (?). 30, 29. 46, 22 (?). 49, 27. 50, 27. 58, 24. 60, 12. 23. 62, 3. 25. 64, 23. 65, 21. 67, 22. 68, 29 sq. 73, 4. 73, 23 (cf. adnot. crit.). 74, 19. 80, 11. 81, 15 (?).

---

1) *Haury* l. c. p. 128. — Cf. quae dixi in censura editionis Comparettianae supra laudatae voluminis I (in ephemeridis, quae Журналъ Министерства Народнаго Просвѣщенія inscribitur, a. 1895, fasc. XI) p. 132 sq.

2) Has tamen interpolationes non ipsi huius codicis Laurentiani librario deberi, sed omnino ab interpolatorum codicum familiae fonte communi originem ducere in editionis nostrae voluminis III praefatione argumentis adlatis docebimus.

3) In commentationis meae: Къ рукописному преданію Ὑπὲρ τῶν πολέμων Прокопія Кесарійскаго, insertae libro, qui inscribitur: „Commentationes philologicae. Сборникъ статей въ честь проф. И. В. Помяловскаго" (Petropoli 1897), p. 192 sq.

4) τουτίλλας hic illic obvium pariter atque τουττίλας, quae forma inde a libri VII cap. 16 saepissime traditur, equidem merae librarii neglegentiae deberi crediderim.

17. 84, 26. 85, 18. 86, 15 sq. 87, 6. 9. 88, 21. 92, 10. 97, 12. 16. 102, 15. 106, 9. 109, 15. 110, 19. 126, 4.

Aliquot vero locis ab ipsis *AVWG* codicum librariis sive omnibus sive singulis lacunae indicantur, — veluti p. 17, 20. 22, 18. 28, 20. 29, 24. 36, 9. 24. 47, 7. 90, 21. 124, 1 sq. 127, 10 — quibus locis aut illum codicem α detritum minusve clare exaratum fuisse aut ipsum quoque hiasse colligamus necesse est.

Quod autem ad corruptelas attinet, quibus ipsum illud archetypum α inquinatum fuisse codicum *AVWG* docet consensus, earum haece sunt exempla potiora.

p. 5, 26 sq. περσιδίω pro Πραισιδίῳ; 9, 4 ἐξῆν pro ἐξῇ; 9, 13 ἀλλήλων pro ἀλλήλω; 9, 23 γε pro τε; 10, 3. 21 sq. 11, 16 ἰσαυρανῶν pro Σισαυράνων; 10, 15 εἰ δ' ἂν pro ἐπειδὰν; 10, 24 μεταξὺ pro ἥμισυ; 11, 29 ἀπορία pro ἀποπορείᾳ; 12, 4 οὐδενὶ pro οὐδέν οἱ vel οὐδὲν; 13, 1 κάτοχος (κάτοικος) pro κατὰ τάχος; 14, 18 ἔμπειρος pro ἄπειρος; 14, 28 τὸν μάργαρον pro τὸ μάργαρον; 16, 28 ἐπιστρέψωσιν pro ἐπιτρέψωσιν; 17, 12 ἐντηρῇ pro ἐτήρει; 17, 20 ταῦτα pro τούτου; 18, 24 εὐμενῶς pro εὐμενῶν; 19, 8 ἀνδρωνίτιδα pro ἀνδρωνίτιδος; 21, 24 εἴ περ pro ἧπερ; 23, 3 βελισάριον pro Βελισαρίου; 23, 18 ταύτην pro ταύτῃ; 30, 2 ἔκτενεν pro ἔκτεινεν; 30, 11 ἀβάντιον pro Ἀμάντιον; 31, 20 ἐν οὐδενὶ pro οὐδενὶ; 31, 22 ταρμάτια pro τὰ ἱμάτια; 32, 6 αὖ pro αὐτοῖς; 32, 10 ἠρημωμένω pro ἠραιωμένῳ; 32, 11 διελεγχθῇ pro διελεγχθείη; 32, 18 ἀφανιούμενοι pro ἀφαιρούμενοι; 34, 22 στρατιωτῶν pro στασιωτῶν; 35, 7 μὴ pro μία; 35, 22 διατάξεως pro δι' ἀταξίας; 36, 1 ἀφανοῦς pro ἐμφανοῦς; 36, 24 πλοῦ pro πλούτου; 39, 22 ἅπαν pro ἄγαν; 41, 18 ἀκαιρίας pro εὐκαιρίας; 43, 15 πορδουμένη pro λορδουμένη; 50, 27 μενούσας pro μὲν οὔσας; 52, 4 ἀσκλαβηνῶν pro Σκλαβηνῶν; 83, 18 ἀργυριουμένων pro ἀναιρομένων vel ἀναιρουμένων; 97, 7 αὐτῶν ἄνθρωποι οἱ pro αὐτοῖς ἀνθρώποις; 101, 10 περιῆρξε· τότε pro περιήρχετο; 103, 20 ἐτέθη· ἐπεὶ pro ἐτεθήπει; 104, 17 γενόμενος pro γένος; 108, 21 πρὸς τήνδε pro προσῆν δὲ; 110, 6 πολεμίους pro πολέμους; 110, 12 χεῖρας pro μοίρας; 111, 22 ῥωμαίων pro Περσῶν; 118, 30 οἰκίαν pro οὐγκίαν; 123, 19 τοὺς — — φυλακτηρίους οἳ pro τοῦ — φυλακτηρίου οἱ; 127, 26 ὅμως pro ὅπως.

Quae cum ita sint, ne consensui quidem illorum quattuor optimorum codicum *AVWG* nimiam in Anecdotis edendis fidem habendam esse patet.

## CAPVT IV.

## DE SINGVLORVM AVWG CODICVM INDOLE.

**1.** Codicis **A** librarius in universum quidem satis diligenter officio suo functus est, gravissimi tamen vitii omninoque in librariis quam maxime vituperandi, quod est interpolandi studium, coarguitur. Namque et Οὐίττιγις (p. 20, 5. 9. 21, 15) et Τουτίλας (p. 22, 5. 19) nomina ubique et Καλχηδών duobus locis (p. 126, 5. 138, 6) male in Οὐίτιγις, Τωτίλας, Χαλκηδών mutavit. Nec latet causa, cur ista fecerit: etenim pro certo equidem affirmare possum descriptam esse huius codicis partem, qua *De bellis* libri V—VIII *eadem saeculi XIV manu, quae* Ἀνέκδοτα *quoque scripsit*, exarati continentur [1]), ex illo codice Laurentiano plut. 69, 8, quem valde interpolatum esse paulo supra diximus (p. XL); qui codex interpolatus cum et pravas illas scripturas Οὐίτιγις atque Τωτίλας constantia haudquaquam sane laudanda usurpet et Χαλκηδών omnibus illis tribus locis — p. 463, 12. 481, 8 [2]). 15 ed. Bonnensis, — quibus huius oppidi nomen in altera *De bellis* librorum tetrade occurrit, male pro Καλχηδών praebeat [3]), —

---

1) Cf. supra p. VIII.

2) Hunc locum tam in Maltreti atque Dindorfii indicibus quam in Comparettiano (vol. III, Romae 1898, p. 333) praetermissum esse obiter moneo.

3) Quae in editionis Comparettianae apparatu critico non enotari sane mirarer, nisi istam farraginem, quam pessimorum codicum lectionibus vel iusto refertiorem esse innumerisque scatere erroribus iam dudum docui (Журналъ Министерства Народнаго Просвѣщенія, a. 1895, fasc. XI, p. 129 sqq.), incre-

eius nimirum auctoritatis specie fretum codicis *A* librarium in Anecdotis quoque bonas trium horum nominum scripturas (*tacite*) corrupisse in propatulo est.

Locis supra commemoratis accedit alius eundem librarium interpolationis quam manifestissime coarguens. Legimus p. 66, 13 sq. ἦν δέ τῳ δόξειεν οὐκ ἐν ἀσφαλεῖ εἶναι παρανενομηκότι νενικηκέναι, ubi ἐν praepositionem, quae in priore codicum familia (*x*) omissa est, ex *G* supplevi; ἀσφαλεῖ vero, quod *VW* codices, qua par est, fide ac religione tradiderunt, solum ferri hoc loco non posse intellegens codicis *A* librarius male in ἀσφαλὲς mutare non dubitavit, quae interpolatio in priorum quoque editionum textum inrepsit.

Quae cum ita sint, aliis quoque aliquot locis, quibus hic codex *eadem prima manu correctus* alia atque ceteri, quorum lectiones cum eiusdem *A* prioribus scripturis plane congruunt, praebet, veluti

p. 9, 23 τὴν *A corr.* — τὸν *A pr.* VWG

p. 22, 20 βιταλιανοῦ *A corr.* — βιταλιανῷ *A pr.* VWG

p. 132, 32 λιβέριον *A corr.* — βελισσάριον *A pr.* VW,

has esse archetypi scripturas, illas vero nihil aliud nisi ipsius librarii coniecturas non sine summa sane probabilitate suspicari licet, praesertim cum a coniectandi studio hunc librarium minime alienum fuisse vel illa „οἶμαι, στασιωτῶν“ ab eodem ad p. 34, 22 adnotata ostendant.

2. Codicis **V** librarium iusto saepius dormitasse in universum dici potest, quod tam Ἀνεκδότων locis compluribus demonstratur — veluti p. 2, 22. 30. 3, 21. 6, 18. 21. 7, 25 sq. 29. 8, 21. 9, 8. 11, 5. 7. 31 sq. 12, 6. 13, 28. 14, 13. 15. 26. 15, 17. 22. 18, 5. 20, 5. 21, 13. 22, 13. 24, 7. 25, 21. 26, 32. 29, 25. 32, 21 sq. — quam ex illa eiusdem codicis parte, qua *De bellis* libros I et II contineri supra diximus (p. X), perspici posse praemoneo uberius de hac codicis parte in editionis meae voluminis I praefatione acturus.

---

dibili paene neglegentia conflatam esse scirem. Cuius culpa neglegentiae ipsine Comparettio an Henrico Rostagno, qui illi omnes fere contulit codices, sit potius tribuenda, non liquet.

3. Codicis **W** librarium [1]) summa in universum excellere diligentia iam supra monuimus (p. XXVIII). Quorum dictorum tantum abest ut nos nunc poeniteat, ut vel principem huic codici locum inter ceteros omnes attribuere non dubitemus, quippe qui non solum ab interpolandi studio sit alienissimus, verum etiam summa cum religione tradat, quaecumque in codicis ($x$), quem exscripsit, invenit [2]), huius ne manifestos quidem errores corrigere audens, immo vel calami sui videlicet lapsibus profecto salutaribus, quibus felicissime vera Procopii manus restituitur, statim scripturas pravas quidem, sed quae in $x$ praebentur, substituens, veluti

p. 14, 18 * ἄπειρος *W in textu* [3]) — ἔμπειρος AV*Wmg.* G

p. 76, 10 * ἀπαγόρευσις A*W*(*in textu*) G — ἀπαγαρόρευσις (sic) V, γρ. ἀπαγαρόρευσις *Wmg.*

Cf. praeterea p. 89, 27 * οἵ ὁ AV corr. G — οἵό Vpr. — οἷον (ν ex ι, ut vid.) *W*, unde non sine probabilitate sane colligi potest codicis $x$ librarium primum quidem fere οἷοι exarasse, postmodo vero ι alterum induxisse, ita tamen ut hoc ι inductum litterae ν simillimum fieret.

Quae cum ita sint, non est quod miremur hunc codicem solum omnium veras scripturas nobis locis haud paucis servasse, veluti p. 8, 1 (mg.). 4 [4]). 21. 10, 26. 15, 26 [5]). 16, 6. 19, 15. 21, 1. 23, 1. 14. 131, 9 — alibi autem quaedam a ceterorum omnium codicum librariis omissa solum suppeditare, veluti p. 7, 8. 16, 16. 20, 23. 22, 6.

---

1) Quem (*W*[1]) cave cum *correctore* (*W*[2]) confundas.

2) Cf. adnot. crit. ad p. 27, 19. 53, 13. 57, 21. 60, 4. 21. 85, 7. 116, 6. 130, 2. 3. 131, 27. Ceterum omnibus locis, quos modo laudavimus, eiusdem diligentiae *V*(aticanum) quoque codicem participem esse notandum est.

3) Stellula eas lectiones notamus, quae in textum receptae sunt.

4) Cf. supra p. XXX.

5) Hoc loco codicis *W* lectionem ἐνεχώρουν (pro ἀνεχώρουν *AVG*) etiam Suidae testimonio (s. ἐνεχώρουν) confirmari moneo, in quod nuperrime incidi: (*p. 15, 25 sq.*) οἱ δὲ ἱερεῖς καταπεπληγμένοι τῷ δέει ἐξίσταντο καὶ ἐνεχώρουν αὐτῇ ἅπαντες (*sic*). ἀντὶ τοῦ συνεχώρουν.

4. Codicis **G** denique librarium et ab interpolandi studio esse vacuum et omnino diligenter suo functum esse munere pro certo affirmari potest, nisi quod fere iusto neglegentiorem se in verbis collocandis praebet, cuius rei semet ipse passim coarguit, scilicet sive punctis superscriptis sive alio quo modo verba male collocata in iustum ordinem redigens, veluti p. 5, 13 sq. τὴν γυναῖκα θᾶσσον ἄν, — item p. 10, 23. 11, 5. 15, 20 sq. 24. 20, 22. 23, 6. 35, 17 sq. 43, 23. 55, 21. 65, 10 sq. 67, 23 sq. (cf. adnot. crit.). 70, 21. 129, 13 (cf. adnot. crit.). 134, 14. 135, 8 sq.

Summa cum laude commemorandum est huius codicis librarium, quoscumque 'Ανεκδότων locos aliqua de causa — neque omnino inepte — pro suspectis habuit, punctis tantum superscriptis notasse satis habuisse neque, ut de coniectura eos temere corrigeret, sibi umquam sumisse.

## CAPVT V.

## DE AVWG CODICVM IN ANECDOTON CRISI AVCTORITATE.

Primum, quod ad utriusque codicum familiae in 'Ανεκδότων crisi auctoritatem attinet, *x* familiam propius ab illo archetypo (α) quam *y* abesse vel illorum exemplorum, quae supra congessimus (p. XXI sqq.), ratione habita in universum dici potest.

Cavendum tamen est ne priori illi familiae fides iusto maior habeatur neve lectiones, quae *AVW* codicum consensu nituntur, ubique codicis *G* scripturis temere praeferantur. Immo, ubicumque familiae *x* et *y* inter se dissentiunt, quam cautissime diligentissimeque circumspiciendum esse editori eadem edocent exempla (p. XXI sqq.), quorum modo mentionem fecimus, neque paucos esse locos, quibus eiusmodi optio perquam est difficilis, vix est quod moneamus.

Deinde, ubicumque codices *WG* alia atque *AV* praebent, his illa praeferenda esse et per se intellegitur — stemmatis scilicet codicum, quod supra proposuimus (p. XX), ratione habita — — et singulis exemplis luculentis satis superque evincitur, veluti p. 6, 4. 20. 8, 11. 18. 10, 9. 11, 6. 17. 20. 30 (bis). 12, 13[1]). 14 sq. 17. 13, 9. 29. 14, 10. 18, 5. 17, 9. 19, 8. 22, 19. 25 sq. 30, 4. 51, 6. 64, 23. 81, 21 sq.

Quorum *WG* auctoritatem, ubicumque codicum *AV* consensui opponuntur, nec propterea quidquam infringi, quod $W^2$ quoque cum his fere semper facit, post ea, quae de huius manus correctionibus supra diximus (p. XXIX sqq.), vix est ut moneamus.

De singulorum denique *AVWG* codicum in Ἀνεκδότων crisi auctoritate quidnam statuendum sit, ex illis, quae de unius cuiusque indole supra monuimus, facillime perspicitur.

## *Ad pag. XV, 10.*

**P** codicem Parisinum gr. 3023 (olim Fontebladensem regium 3248), chartaceum, *foliorum 158*, quibus continentur: „Libanii declamationes aliquot (*inc. fol.* 1 et 32), — *Theodorae Augustae epistola ad Belisarium* (24), — Anonymi opusculum de barbarismo, soloecismo et de syntaxi: Βαρβαρισμὸς ἐστὶ λέξις . . . . (24ᵛ et 44), — De variis foetus in utero statibus (46ᵛ), — — De IV Evangeliis etc. (47), — Plutarchi opuscula, de garrulitate (48), de insano divitiarum amore (60), utrum animi an corporis peiores sint morbi (65), aquane an ignis sit utilior (67ᵛ), — Dionysii Alexandrini orbis descriptio, cum Eustathii Thessalonicensis commentario (72)", — *saec. XV—XVI* H. Omont attribuit et, quod

---

1) Cf. supra p. XXXI.

ad formam attinet, *p*(arvum) esse dicit[1]), — unde *forma octonaria* hunc codicem esse colligimus.

## *Ad pag. XVI, 12.*

Cum Petrum Pithoeum a. 1596 esse mortuum constet, codicem $\pi$ saeculo XVI exeunte exaratum esse apparet.

## *Ad pag. XXXVII.*

*Adde* p. 108, 9 sq. τῇδέ πῃ ἔχει — περιβαλέσθαι om. $\pi$[2]) — exstant in *GZ*.

1) *H. Omont* Inventaire sommaire des mss. grecs de la Bibliothèque Nationale, III p. 94, — quem locum Ernesto Radlov v. d. intercedente Vladimirus Bank bibliothecae Caesareae publicae Petropolitanae hypobibliothecarius mecum comissime communicavit.

2) Cf. Orelli p. 293, 15.

III*

# PARS II.

# DE ANECDOTON FRAGMENTIS, QVAE IN SVIDAE, ZONARAE QVOD FERTVR, VINDOBONENSI, CANTABRIGIENSI LEXICIS INVENIVNTVR.

## CAPVT I.

## DE ANECDOTON FRAGMENTIS, QVAE IN SVIDAE LEXICO INVENIVNTVR.

Ἀνεκδότων fragmenta permulta in Suidae lexico occurrere inter omnes constat, quorum alia alii viri docti agnoverunt et mihimet ipsi non data quidem opera ad illa expiscanda Suidae opus perlegenti, sed mero plerumque adiuvante casu contigit, ut aliquot ab aliis nondum agnita ex ἀδεσπότων tenebris, — quibus quin alia quoque (eaque fortasse haud pauca) adhuc obruta delitescant, equidem nullus dubito, — in lucem protraherem, et quidem ea, quae s. vv. * ἀντελαμβάνοντο[1]), * ἀπεψηφίσατο[2]), διαγραφή gl. 2 (p. 108)[3]), * ἐνεχώρουν[4]), * καθεστάμενος[5]), * κατ-

1) ἀντελαμβάνοντο. *ὕπνοι τε αὐτῆς ἀεὶ μακρότατοι ἀντελαμβάνοντο* (ἀντὶ τοῦ διεδέχοντο) *ἡμερινοὶ μὲν ἄχρι πρώτων νυκτῶν, νυκτερινοὶ δὲ ἄχρις ἡλίου ἀνίσχοντος* [*p. 69, 11 sq.*].

2) ἀπεψηφίσατο. τουτέστι κατεδίκασεν. *ἡ δὲ βουλὴ τὴν διάγνωσιν ποιουμένη τῶν πεπραγμένων ἀπεψηφίσατο τοῦ ἀνθρώπου, ἐπεὶ αὐτοῦ οὐκ ἐπελθόντος, ἀλλ' ἀμυνομένου τὸ μίασμα γέγονε* [*p. 133, 11-14*],— quo loco coniecturam meam ἐπελθόντος (p. 133, 13) confirmari gaudeo.

3) De hoc loco infra (cap. IV) uberius agemus.

4) ἐνεχώρουν. *οἱ δὲ ἱερεῖς καταπεπληγμένοι τῷ δέει ἐξίσταντο καὶ ἐνεχώρουν αὐτῇ ἅπαντες* (sic) [*p. 15, 25 sq.*]. ἀντὶ τοῦ συνεχώρουν.

5) *καὶ φυλάσσειν μὲν τῶν καθεσταμένων οὐδὲν ἠξίου* [*p. 29, 18 sq.*], τουτέστι τῶν ἤδη τελεσθέντων s. καθεστάμενος.

ἔλυεν[1]), μαγγανεία (p. 3)[2]), * παραλύσας[3]) afferuntur. Quorum fragmentorum in sex supra stellulis notata post descripta demum typis «*Addenda et corrigenda*» incidi ideoque illa hic profero testimoniorum suis locis addenda[4]).

Inveniuntur praeterea in Suidae lexico singula quoque vocabula sat multa, quae quidem ad Procopii Ἀνέκδοτα spectare *possunt*, veluti ἀνῆκεν· ἀφῆκεν (cf. p. 6, 2. 18), καιριώτατα· ἐπικινδυνότατα, θανάσιμα (cf. p. 10, 12), παρετέον· σιωπητέον, παραληπτέον (cf. adnot. crit. ad p. 67, 17), — verum tamen cum utrum talia re vera spectent ad Ἀνέκδοτα an ex aliis eiusdem auctoris aliorumve scriptis a Suida sint excerpta, diiudicari non possit, ista in testimoniis enotare supersedemus, solis illis Ἧριον· ὄνομα τόπου (p. 72) exceptis.

## CAPVT II.

## DE SVIDAE LEXICI CODICIBVS.

Iam, antequam ad Suidae in Ἀνεκδότων crisi auctoritatem aestimandam transimus, de huius lexici codicibus quaestionem strictim attingere, ut vel paululum promoveamus, nobis liceat.

De codicibus Suidianis haece Godofredus Bernhardy monet (praefat. p. XX): „Momentum . . in scriptura constituenda sane quattuor habent codices et [editio] princeps Mediolanensis; sed propius intuentibus certo constat ex sola duorum librorum auctoritate sin-

---

1) κατέλυεν. ἔμενεν. *εἰς τὸ δωμάτιον, οὗ δὴ κατέλυε, γεγονότα* [*p. 59, 17 sq.*].

2) Hoc fragmentum (Προκόπιος· καὶ τὸν ἄνδρα μαγγανείαις κατειλήφει πολλαῖς) „ad Procopium Gazaeum pertinere, non extare apud historicum Procopium" videbatur Bernhardyo (*ind.* p. 2004).

3) παραλύσας. ἀντὶ τοῦ διαδεξάμενος. *παραλύσας αὐτὸν τῆς ἀρχῆς* [*cf. p. 17, 26*].

4) E contrario, *delendus est Suidae locus s. v. Τριβωνιανός (gl. 1) in testimoniis p. 62 prolatus.*

cerum Suidae sermonem pendere. Nam *E* [1]) nemo non perspicit interpolatum et ab homine non illitterato ex ipsis recentissimis poetarum codicibus esse refictum; huic vero qui simillimus est *B* [2]) saepe cum optimis libris conspirat, saepius deteriora sequitur, nec facile singularem praebet scripturam, quin ab *A* [3]) *V* [4]) ea commendetur vel plane reiiciatur. Gaisfordus tamen utrique frequenter fidem habet. His inferioris ordinis MSS. collata Mediolanensis nihil quod proprium sit aut insperatum affert; neque magnam ea nacta fuisset existimationem, si Küsterus fideliter libros suos repraesentasset ac receptam orationem intactam sivisset. Contra Parisinus *A* et Leidensis [*V*] tam manifestas ostendunt bonitatis et altioris originis notas, tantoque consensu nunc verba reddunt castigata, nunc mutilas partes explent, ulcera vero depravatissima quaeque nullo fuco reliquerunt illita, his ducibus ut criticus et debeat et possit cum eventus prosperi fiducia Suidam emendare. Iam etsi praestantiam utriusque vel mediocriter Graece doctus agnoscat, accedit tamen etiam incorrupta vox ipsius antiquitatis, qua luculentior suffragatio fingi non potuit: quicquid enim veterum ac proborum codicum in iis scriptorum fontiumve locis extat, unde Suidas profecerat, eximie cum nostris *AV* consentit. Ceterum longe praestat alteri Parisinus *A*, qui non modo princeps huius lexicographi liber est, sed inter reliquorum etiam grammaticorum optimos excellit. Huic igitur cum omnium integerrimam et purissimam scripturam ubique servet, libenter obtemperavi, nec facile sprevi, sicubi tot inter dubitationes et suspectas dicendi formulas res fide testium magis quam liquidis rationibus ageretur".

---

1) [*E* = cod. Bruxellensis 11281, saec. XV, de quo vid. *H. Omont* Catalogue des mss. Grecs de la bibliothèque royale de Bruxelles, Gand 1885, p. 21 num. 59].

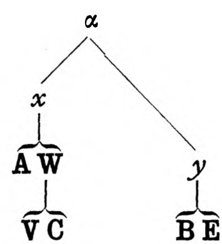
2) [*B* = cod. Parisinus 2622, saec. XIII; cf. *Omont* Inventaire sommaire des mss. grecs de la Biblioth. Nationale, III p. 15].

3) [*A* = cod. Parisinus 2625, bombycinus, saec. XIII—XIV, quo Α — Θ continentur, + cod. Parisin. 2626, membranaceus, saec. XII, qui Κ — Ψ continet].

4) [*V* = cod. Leidensis Vossianus F 2].

Huic Suidae editoris clarissimi sententiae in universum assentimur, nisi quod codici Leidensi *V*(ossiano) *Vaticanum 1296* substituendum esse affirmamus, cuius cum *V*(ossianum) illum tum Oxoniensem[1]) littera *C* a Gaisfordio atque Bernhardyo notatum apographa esse nobis persuasum est[2]). Huius codicis Vaticani 1296 (*W*), quem bombycinum esse et saeculo XIII ineunte[3]) exaratum tribusque formae maximae voluminibus constare obiter moneo, aliquot locos, qui ad Procopii 'Ανέκδοτα aliaque scripta spectant, contulimus[4]) eumque plane cum *V*(ossiano) consentire vidimus.

Codicum supra commemoratorum inter se necessitudo ut magis perspicua fiat, non alienum esse videtur stemma subiicere.




Ceterum ut editioni illi principi Mediolaniensi omnino auctoritatem esse abiudicandam ita codices *BE* saltem in crisi Procopiana minime spernendos esse contendimus. Etenim his codicibus maiorem hac in re auctoritatem, quam quae utrique a Bernhardyo[5]) tributa est, vindicandam esse vel hisce demonstratur exemplis

---

1) Cf. Bernhardy l. c. p. LXXXVIII.

2) Horum codicum „utrumque ex eodem archetypo derivari“ iam Gaisford intellexit.

3) Anno 1205 confectum eum esse subscriptio docet, quam in ephemeridis *Византійскій Временникъ* vol. V p. 470 adnot. 1 attulimus.

4) Temporis enim angustiae impedierunt, quominus omnia fragmenta Procopiana conferremus.

5) Cf. huius praefat. p. LXXXIX : „[*E*] liber est *ordinis infimi*, quem ab critico temerario recensum fuisse breviter monui p. XX“.

(in quibus proferendis Suidae lexici singulos codices, ne cum Procopianis confundantur, litteris $\Sigma^{a}$ $\Sigma^{b}$ $\Sigma^{e}$ $\Sigma^{v}$ $\Sigma^{w}$, ut in adnotatione critica, a me notari, *stellula* vero eas scripturas, quae in textum receptae sunt, insigniri praemoneo):

p. 28, 16[1] * ἐπήγγελλεν $\Sigma^{be}$ — ἐπήγγειλεν *W* $\Sigma^{avw}$, ἐπήγγειλλεν *AV*, unde fuisse in archetypo scriptum ἐπ$^{\lambda}$ήγγειλεν suspicor (codicis *G* ope hoc loco nos destitutos esse valde dolendum).

p. 32, 1 * τὸ *AVWG* $\Sigma^{be}$ — τοῦ $\Sigma^{avw}$.

p. 107, 26 * γάρ τὸ *AVWG* — τε γάρ $\Sigma^{be}$, γάρ $\Sigma^{avw}$.

p. 113, 9 * ἀεὶ *AVWG* $\Sigma^{be}$ — ἀεὶ καὶ $\Sigma^{avw}$ (utra lectio sit praeferenda, admodum difficilis est optio).

p. 115, 8 * ἑστὸν *G* $\Sigma^{be}$ — ἕστον *AVW*, ἕστων $\Sigma^{avw}$.

p. 115, 11 * οὖν *AVWG* $\Sigma^{be}$ — δὴ $\Sigma^{avw}$.

p. 129, 20 * ἡ *AVW* $\Sigma^{be}$ — om. $\Sigma^{avw}$.

p. 129, 23 * μαμιανὸς *AVW* $\Sigma^{abe}$ — μαξιμιανὸς $\Sigma^{vw}$.

p. 129, 23 * ὄνομα *AVW* $\Sigma^{bevw}$ — τὸ ὄνομα $\Sigma^{a}$.

p. 130, 2 * πλούτῳ *AVW* $\Sigma^{bevw}$ — om. $\Sigma^{a}$.

## CAPVT III.

## DE SVIDAE IN ANECDOTON CRISI AVCTORITATE.

**1.** Primum, unde Suidas Procopiana sua hauserit, anquiramus.

Apud Bernhardyum quidem haece legimus (praef. p. LXI): „Impensissime . . [Suidas] historicos post Alexandrum M. perlegit et decerpsit, quorum insignes flores per vasta Collectanea Constantini Porphyrogenneti sparsos invenerat. Ac prae ceteris

---

1) *Delenda esse illa* et lemma $\Sigma^{II}$ *in adnotatione critica ad h. l. data occasione moneo.*

eum tituli de legationibus, de virtutibus et vitiis, tertius sententiarum oblectarunt; nam de reliquis non satis tuto iudicare licet, quamquam et ipse sub v. Σάμβυκες ad caput Περὶ Ἐκφράσεως ablegat et nuper demum novum exemplorum fontem (v. Add. in v. Ἐφεστρίς et Ὑστερίζειν) recuperavimus, titulum poliorceticum ab C. Müllero protractum. Cf. III, 5. His igitur horreis et tabulariis historiarum maximam partem Polybii, Diodori, Nicolai Damasceni, Dionysii Halicarnassensis, Iosephi, Appiani, Dionis Cassii, Eunapii, Prisci, Malchi, Menandri Protectoris et minorum quorundam auctorum, quorum agmen claudit supra (8.) dictus Ioannes Antiochenus, Suidas rettulit acceptam. . . . Iam in tanta historicorum familia fuerunt quos lexicographus non solum ex Constantini Eclogis sed suis etiam laboribus cognitos haberet ac proprio iudicio decerperet. Horum principatum tenet Polybius, quem assidue tractavit...... Deinde historicos, qui rerum Byzantinarum initia tradiderant, saepenumero laudat *privatis studiis exploratos, praesertim* Procopium, cuius ne Anecdota quidem sprevit, Agathiam et Theophylactum Simocattam", — verum tamen, quod saltem ad Procopii *De bellis* libros attinet, egregie sese fefellit vir doctissimus, quippe quorum fragmenta non ex ipso Procopii opere, sed ex eclogis illis Constantinianis a Suida esse excerpta vel solo hoc exemplo quam certissime demonstretur:

*De bellis* VI, 28 p. 261, 11 sqq. ed. Bonnensis (= p. 220, 16 sqq. ed. meae, quae nunc typis describitur) γνόντες δὲ οἱ Φράγγων ἄρχοντες τὰ ποιούμενα προσποιεῖσθαί τε τὴν Ἰταλίαν ἐθέλοντες πρέσβεις παρὰ τὸν Οὐίττιγιν πέμπουσι, ξυμμαχίας ὑπόσχεσιν προτεινόμενοι — excerpens eclogarius haece dedit[1]: Ὅτι γνόντες οἱ φράγγων ἄρχοντες τὰ ποιούμενα, ὡς βελισάριον ἐντυχεῖν [sic][2], προσ-

---

1) Cod. Bruxellensis 11301—16, fol. $124^r$; Monacensis 267, fol. $205^r$; Vaticanus Palatinus 413, fol. $130^r$, — quos codices singulos litteris *BCD* infra notabimus.

2) Huiusmodi errores non eclogario sane, sed codicum *BCD* communis fontis librario tribuendi sunt, — qui fons utrum

ποιεῖσθαί τε τὴν ἰταλίαν ἐθέλοντες πρέσβεις παρὰ τὸν οὐττίγην [sic] [1]) πέμπουσι, ξυμμαχίας ὑπόσχεσιν προςποιούμενοι [sic], quae Suidas s. v. προσποιεῖται [2]) hunc in modum refert: γνόντες οἱ Φράγγοι, ὡς Βελισάριος εὐτυχεῖ, καὶ προσποιεῖσθαι τὴν Ἰταλίαν ἐθέλοντες περὶ συμμαχίας βουλεύονται.

Quod vero ad Ἀνέκδοτα pertinet, utrum ipsum hoc opus Suidas an excerpta tantum legerit, diiudicari non potest et quidem propterea, quod, sintne Ἀνέκδοτα ab illis eclogariis Constantinianis excerpta necne, non constat; verum tamen cum Ἀνέκδοτα quoque plus uno nomine excerpendi materiem praebere pateat, nihil obstare videtur, quominus coniiciamus hoc quoque Procopii opus pariter atque *De bellis* libros, quorum supplementum est, Constantini Porphyrogenneti iussu excerptum fuisse.

Quod si verum est, iam dubitari vix poterit, quin excerptis Constantinianis, non integro Ἀνεκδότων libro Suidas usus sit.

Codices autem Procopianos, quibus eclogarii illi Constantiniani usi sunt, optimae fuisse indolis in editionis nostrae voluminum I—III praefationibus luculentis exemplis adlatis docebimus.

2. His praemissis iam ad Suidae in Ἀνεκδότων crisi auctoritatem examinandam transeamus.

Iusto liberius a Suida auctorum verba, quae excerpsit, tractata esse nemo nescit, et Procopiana quoque fragmenta istius licentiae exempla permulta suppeditant, quorum unum proferre satis habeo: illa p. 8, 15 sq. οὐχ αἵματι γάρ, ἀλλὰ τοῖς ἔργοις εἰώθασι δῆτα σταθμᾶσθαι τὴν ἐς ἀλλήλους στοργὴν ἄνθρωποι hunc in modum a Suida s. σταθμᾶσθαι laudantur: οὐ ῥήμασιν, ἀλλ' ἔργοις ἀεὶ εἰώθασι τὴν ἐς ἀλλήλους σταθμᾶσθαι στοργὴν οἱ ἄνθρωποι.

---

codex Escurialensis *R. III. 14* putandus sit necne, in ephemeridis *Византійскій Временникъ* vol. V p. 477 sqq. disputavimus.

1) Cf. adnotationem praecedentem.

2) Cf. Bernhardy in *indice scriptorum apud Suidam* p. 2004: „In Gothicis fortasse delituit locus quem servat v. Προςποιεῖται“.

Verum tamen si ab ista huius lexicographi licentia discesserimus, minime spernendum eum esse ad Ἀνεκδότων textum emendandum subsidium atque adeo nulli codicum *AVWG* auctoritate secundum reamur necesse est vel horunce locorum ratione habita, quibus solus veram Procopii manum servavit: p. 3, 16. 4, 4. 9, 11. 27, 13. 29, 19. 23. 31, 15. 22. 32, 10. 11. 43, 15. 57, 18. 111, 22. 130, 2 — ne eorum locorum mentionem faciamus, quibus lacunae ex Suida supplentur, veluti p. 31, 20. 32, 6 sq. 59, 17.

Quae cum ita sint, ubicumque Suidas — nempe a prava illa licentia sua vacuus — ab *AVWG* codicibus dissentit, illius quoque testimonia attente audienda nec nisi omnibus, quae in examen cadunt, cum cura perpensis scripturas horum codicum consensu fultas Suidianis praeferendas esse apparet.

## CAPVT IV.

## DE ANECDOTON FRAGMENTIS, QVAE IN ZONARAE QVOD FERTVR, VINDOBONENSI, CANTABRIGIENSI LEXICIS INVENIVNTVR.

**1.** In Zonarae quod fertur lexico haec tredecim inveniuntur Ἀνεκδότων fragmenta, quae ad fidem editionis Tittmannianae[1]) laudamus — *stellulis* utrumque nec a Tittmanno agnitum notantes.

1. ἐξερρωγυῖα (col. 773). διεφθαρμένη. Προκόπιος· *γυνὴ τὸν τρόπον ἐξερρωγυῖα* (*p. 3, 7*).

*Suidas* plane eadem praebet.

2. ἐγγυητή (col. 599). γυνή[2]) ἡ μεμνηστευμένη. [Προκό-

1) Iohannis Zonarae lexicon ex tribus codicibus mss. nunc primum edidit, observationibus illustravit et indicibus instruxit *Ioh. Aug. Henr. Tittmann*, voll. I—II, Lipsiae MDCCCVIII.

2) Sitne interpunctio ex Suida emendanda, non liquet.

*πιος· ἡ δὲ ἐγγυητὴ ὕστερον Βελισαρίῳ γυνὴ γέγονεν ἤδη παίδων μήτηρ πολλῶν*] [1]) (*p. 3, 9 sq.*).

*Suid.* ἐ γ γ υ ή σ α σ θ α ι. μνηστεύσασθαι. καὶ ἐγγυητὴ γυνή, ἡ μεμνηστευμένη. Προκόπιος· *ἡ δὲ — μήτηρ γενομένη πολλῶν. εὐθὺς οὖν ἠξίου μοιχεύτρια τὸ ἑξῆς εἶναι.*

3. ἐ σ ε σ ή ρ ε ι (col. 882). ὠργίζετο. *λίαν γὰρ ε ἰ ς αὐτὴν ἡ Θεοδώρα* [*ἠγριαίνετο καὶ ἐσεσήρει* (*p. 3, 16*). ἢ ἐσεσήρει] ἀντὶ τοῦ ἐδυσχέραινεν.

*Suid.* s. ἐ σ ε σ ή ρ ε σ α ν: ἐσεσήρει· ἐδυσχέραινεν, ὠργίζετο. *λίαν γὰρ ἐ ς αὐτὴν ἡ Θεοδώρα ἠγριαίνετο καὶ ἐσεσήρει.*

4. ἔ λ ο υ σ ε ν (col. 694). ἀντὶ τοῦ ἐβάπτισεν. *τὸν γὰρ Εὐνομιανὸν ἔλουσε Βελισσάριος τὸ θεῖον λοῦτρον* (*sic*), [*χερσὶ δὲ οἰκείαις ἀνελόμενος εἰσποιητὸν ἐποιήσατο παῖδα, ᾗπερ εἰσποιεῖσθαι Χριστιανοῖς νόμος*] (*p. 4, 3-6*).

Apud *Suidam* s. ἔ λ ο υ σ ε eadem leguntur, nisi quod in Procopii verbis recte Βελισάριος et λουτρὸν praebet.

5. ἀ ν α δ ο υ μ έ ν η ν (col. 197). στεφανουμένην. [*ἀναδουμένην οὕτω μέγα πρὸ* (*sic*) *πάντων ἀνθρώπων*] (*p. 8, 19 sq.*).

*Suid.* ἀ ν α δ ο ύ μ ε ν ο ς (gl. 1). στέφανον τιθέμενος. καὶ ἀναδουμένην, στεφανουμένην. Προκόπιος· *αἶσχος ἀναδουμένην οὕτω μέγα πρὸς* [2]) *πάντων ἀνθρώπων.*

*6. ἐ ν ε χ ώ ρ ο υ ν (col. 745). συνεχώρουν. *οἱ δὲ ἱερεῖς καταπεπληγμένοι τῷ δέει ἐξίσταντο καὶ ἐνεχώρουν αὐτῇ ἅπαντες* (*p. 15, 25 sq.*).

*Suidae* locum supra protulimus (p. XLVIII adnot. 4).

7. δ ί π υ ρ ο ς ἄ ρ τ ο ς (col. 509). ὁ παρὰ Ῥωμαίοις λεγόμενος παξαμᾶς. *σισύρας ἐπὶ τῶν ὤμων φέροντες, ἐν αἷς δὴ ἄλλο οὐδὲν ὅτι μὴ διπύρους ἄρτους οἴκοθεν ἐμβεβλημένοι ἀφίκοντο* (*p. 27, 12-14*).

*Suidas* prorsus eadem praebet.

8. ἀ μ α θ ή ς (col. 140). ἀδίδακτος, ἀμύητος. ὁ δὲ ἀκούει ταῦτα καὶ μὴ ὢν ἀμαθὴς οἰωνῶν τὸν παῖδα ἐπανάγει καὶ τρέφει ὡς γνήσιον. *ὁ δὲ Ἰουστῖνος ἀμάθητος ἦν γραμμάτων ἁπάντων καὶ τὸ δὴ λεγόμενον ἀναλφάβητος* (*p. 28, 12 sq.*). Quae conflata sunt ex

*Suid.* ἀ μ α θ ή ς. ἀμύητος. ὁ δὲ — ἐκτρέφει ὡς γνήσιον atque ἀ μ ά θ η τ ο ς. ἀδίδακτος. *ὁ δὲ — ἀναλφάβητος.*

9. ἀ ν ά δ ι κ α (col. 188). τὰ ἤδη κριθέντα. *ἀνάδικα τὰ δεδικασμένα ποιῶν αἰσχροκερδείας ἡσσώμενος* (*p. 66, 1-3*).

---

1) Vncis angulatis inclusa in istius lexici codice Augustano desiderantur.

2) Male Bernhardy πρὸ scripsit „vitium librorum πρὸς refingens cum Zonara".

*Suidas* prorsus eadem praebet.

10. ἀ κ ρ α τ ί ζ ω (col. 114). τὸ ἄκρατον πίνω. [*καὶ ἀκρατισαμένη ἡσυχίαν ἦγεν* (*p. 69, 8 sq.*), ἀκράτου σπάσασα].

*Suid.* ἀ κ ρ α τ ί ζ ω. τὸ ἄκρατον πίνω. καὶ ἀκρατισαμένη, ἀκράτου σπάσασα. *ἡ δὲ Θεοδώρα ἀκρατισαμένη ἡσυχίαν ἦγεν.*

11. ἀ έ ν ν α ο ς (col. 54). ὁ ἀεὶ νάων καὶ ῥέων. [*ὁ δὲ Ἰουστινιανὸς ὥσπερ ποταμὸς ἀέναος ἐδῄου τοὺς ὑπηκόους*] (*p. 90, 19 sq.*).

*Suid.* ἀ έ ν ν α ο ν. τὸ ἄπαυστον. καὶ ἀένναος, ὁ ἀεὶ ῥέων. ἀπὸ τοῦ νάω, ὅ ἐστι ῥέω. *ὁ δὲ — ἀέννaος ἐς ἡμέραν ἑκάστην ἐδῄου τε καὶ ἐληίζετο τοὺς ὑπηκόους.*

* 12. s. δ ι α γ ρ α φ ή (col. 513) : *καὶ καθυποβάλλεσθαι ζημίαις πολλαῖς τὴν πόλιν*, ὡς καὶ ἐπὶ Ἰουστινιανοῦ (*p. 108, 9 sq.*).

*Suid.* δ ι α γ ρ α φ ή (gl. 2). καὶ τοῦτο ἐπὶ Ἰουστινιανοῦ ἐγένετο *ζημίαις πολλαῖς καθυποβάλλεσθαι τὴν πόλιν*, — ad quae adnotat Bernhardy : „Obscura narratio, fortasse ex Arcanis Procopii ducta", in indice tamen (p. 2004) nullam huius loci mentionem facit.

13. ἀ ν ά γ ε σ θ α ι (col. 196). ἀποπλεῖν, ἀνέρχεσθαι. [τὸ] ἐκ Βυζαντίου [ἢ ἀπὸ ἑτέρας πόλεως ἀπαίρειν. Προκόπιος· *οὐ γὰρ θέμις τινὰ ἐκ Βυζαντίου ἀνάγεσθαι πρὸς τῶν ἀνδρῶν*] (*p. 115, 16 sq.*).

*Suid.* ἀ ν ά γ ε σ θ α ι. τὸ [ἐκ Βυζαντίου][1]) ἀπαίρειν. Προκόπιος· *οὐ γὰρ — ἀνδρῶν.*

Quae omnia quin ex Suidae lexico ab isto Zonara Tittmanniano[2]) hausta sint, cum dubitari non possit cumque Suidas Procopii verba aut plane eadem aut plenius et melius quam ille praebeat, nullius omnino esse istud lexicon ad Ἀνεκδότων crisin momenti nemo non videt; qua de causa istius mentionem in testimoniis facere, ut par est, supersedimus.

2. L e x i c o n V i n d o b o n e n s e Ἀνεκδότων fragmentum hoce solum — quod litteris diductis damus — suppeditat (p. 51, 2 ed. A. Nauck.) : δ ι α γ ρ α φ ή ἡ διατύπωσις τῶν πιπρασκομένων μετάλλων[3]) καὶ τὸ κ α θ υ π ο β ά λ λ ε σ θ α ι ζ η μ ί α ι ς π ο λ λ α ῖ ς τ ὴ ν π ό λ ι ν. διαγραφή

1) Haec „ut e sequentibus huc translata deleri iusserunt Portus et Küsterus, delevit *E* sec. m." (*Bernhardy*).

2) Cf. Bernhardy l. c. p. XXXI sqq.

3) Pergit *Suidas* (s. διαγραφή gl. 1) : δηλοῦσα διὰ γραμμάτων, ἀπὸ ποίας ἀρχῆς μέχρι πόσου πέρατος πιπράσκεται.

καὶ ὅταν ἀπαλλαγῇ τοῦ ἐγκλήματος ὁ φεύγων ἢ[1]) κατὰ συγχώρησιν τοῦ διώκοντος ἢ κατὰ διάγνωσιν καὶ μηκέτι ὑπὲρ[2]) οὐδενὸς[3]) ἐγκαλῆται.

Eadem fere in Lexico Cantabrigiensi (p. 336, 9 ed. A. Nauck.) legimus: διαγραφή. καὶ ὅταν ἀπαλλαγῇ τοῦ ἐγκλήματος ὁ φεύγων ἢ κατὰ συγχώρησιν τοῦ διώκοντος ἢ κατὰ διάγνωσιν τυχόντος[4]) καὶ μηκέτι περὶ μηδενὸς ἐγκαλῆται, λέγεται διαγραφὴ δίκης. λέγεται διαγραφὴ καὶ τὸ καθυποβάλλεσθαι ζημίαις πολλαῖς, — ubi ad verba novissima (diductis data litteris) adnotat Nauck: *„paulo uberiora sunt nec tamen magis perspicua Suidae verba* καὶ τοῦτο ἐπὶ Ἰουστινιανοῦ ἐγένετο ζημίαις πολλαῖς καθυποβάλλεσθαι τὴν πόλιν, *ubi Procopii orationem agnoscere sibi visus est Bernhardy"*, — quae non dicturum fuisse credo virum clarissimum, si Ἀνεκδότων locum huc pertinentem (p. 108, 9 sq.) ante oculos habuisset.

Vtriusque lexici locos modo prolatos si cum iis, quae apud Suidam s. vv. διαγραφή (gl. 1 et 2) atque διαγραφὴ δίκης leguntur, contulerimus, aut ex Suidae lexico (quod equidem crediderim) aut ex eodem fonte, unde Suidiana quoque illa fluxere, haustos eos esse colligamus necesse est. Cum vero Procopiana illa verba pleniora Suidas praebeat, horum quoque lexicorum utriusque testimonia sprevimus.

1) ἤτοι *Suidas* s. διαγραφὴ δίκης.
2) παρὰ *Suidas* (περὶ $\Sigma^a$, Lexicon Cantabrigiense, Zonarae quod fertur lexicon).
3) μηδενὸς *Suidas* atque Lexicon Cantabrigiense.
4) Sic *Suidas* quoque (τοῦ ἄρχοντος coniecit Hemsterhusius).

# PARS III.

# DE ANECDOTON EDITIONIBVS.

## CAPVT I.

## DE PRIORVM EDITIONIBVS.

Primus edidit 'Ἀνέκδοτα (in initio mutila) Lugduni anno 1623 Nicolaus Alemannus, olim bibliothecae Vaticanae praefectus, — praeter Pinellianum (π) utroque usus codice Vaticano (*VW*), quorum alterum (*W*), quem pro alterius (*V*) apographo perperam habuit[1]), se nisi ad eam 'Ἀνεκδότων partem, quae huic *V*(aticano) deest, edendam non adhibuisse ipse monuit. Adiecit interpretationem Latinam, notas historicas „singulari" — ut Maltreti utar verbis —„plenas eruditione", notas censorias omninoque de Procopio cum commentando tum emendando praeclare meritus est[2]).

Anno 1654 Helmestadii Eicheliana prodiit editio[3]), cuius editor nullis ipse codicibus usus textum Graecum, qualem Alemannus praebuit, cum huius conversione Latina repetens tantum abest, ut emendationi

---

1) Cf. supra p. XXIX § 9.

2) Cave tamen putes Alemannum suis ipsius coniecturis veras invenisse scripturas, ubicumque huius nomen in nostra adnotatione critica codicum Ambrosianorum *AG* sive singulorum sive utriusque siglis adpositum vides: immo ex his ipsis codicibus haud paucas enotavit emendationes (in exemplari Barberiniano vel in schedis, quae a Dindorfio laudantur, cf. infra p. 179). — Quae de Alemanno modo monui, ad Maltretum quoque hic illic pertinere praemoneo.

3) ANEKΔOTA seu Historia Arcana Procopii Caesariensis Nicolao Alemanno defensore Primum ex Biblioth. Vaticana prolata *NVNC Plerisque in locis συγχρόνων testimoniis falsitatis convicta* a Ioanne Eichelio Franco Prof. Helmst. *gemino indice locupletata. HelmestadI* CIↃ IↃ C LIV.

quicquam consuluerit, ut vel pluribus eum operarum mendis inquinarit. Praemisit verbosam inanemque „*Praefationem ad lectorem*“ atque „*Elogia Iustiniani Imperatoris*“; adiecit „*Animadversiones, quibus* Ἀνεκδότων *Procopii Caesariensis, quae Nicolaus Alemannus falso Historiam Arcanam appellat, mendacia contra Iustinianum Imperatorem sparsa, plurimis in locis deteguntur et refelluntur*“ (p. 1—304), opus vastissimum, inane tamen satisque ineptum.

Anno 1663 Lutetiae Parisiorum Claudius Maltretus Ἀνέκδοτα in omnium Procopii operum vol. II edidit codicibus 𝔓(arisino) atque *A*(mbrosiano) usus, quorum tamen utriusque lectiones Possino tantum intercedente cognovit[1]). Qui editor bene de Procopio meritus est, namque et initium Ἀνεκδότων integrum ex *A*(mbrosiano) codice primus dedit Latineque reddidit et ceterum eorundem textum, quem ex editione Alemanniana cum huius interpretatione Latina ac notis historicis fere repetiit, tam codicibus illis adhibitis quam de suis ipsius coniecturis passim correxit. Adiecit „*Lectiones varias et emendationes Arcanae Historiae*“ (p. 213—215), ubi interpretationem quoque Alemannianam aliquot locis corrigendam proposuit. Idem denique Ἀνεκδότων textum in capita divisit, quorum singulis argumenta Latino sermone conscripta praemisit.

---

1) Cf. Maltreti praef. p. V: „Iam vero sine, Lector, paucis commemorem beneficium R. P. Possini. Eram admodum adolescens, et a consilio suscipiendae interpretationis Procopii longissime aberam; quando inter ipsius manus Codicem [𝔓] vidi huius Historiae MS. quem habet amplissima Bibliotheca Illustrissimi Cancellarii Petri Seguierii. Ex eo ille in exemplar Lugdunense transtulit quidquid diversi legerat, ac multis post annis mihi, Procopii interpretationem aggresso, reliquit, Romam proficiscens. Sed hiabat adhuc exordium cum magna parte sequentis narrationis. Neque enim ex MS. utpote mutilo, suppleri potuerant quae desiderabantur. At eruditissimus Possinus in Italiam consilium afferens iuvandi Procopii, feliciter incidit in MS. Bibliothecae Ambrosianae [*A*]. Unde cum lectiones varias, atque in primis ea, quae exordio deerant, excerpsisset, ad me pro sua humanitate misit. Ea nunc, a me Latine reddita et huic libro inserta, sic lege, ut magistro meo gratiam habeas“.

Anno 1669 Coloniae editio Alemanniana, anno 1729 Venetiis Maltretiana repetitae sunt.

His omnibus quinque editionibus uterque locus, ubi de Theodorae libidine Procopius loquitur[1]), deest — nimirum de industria ab Alemanno praetermissus. Qui loci primum in *Menagianis* ad fidem codicis *V*(aticani) editi sunt atque Latine redditi[2]).

Anno 1827 Lipsiae prodiit editio Orelliana[3]), quam Ioannes Conradus Orelli (anno 1826 mortuus) nullis ipse codicibus, sed editionibus tantum Alemanniana, Maltretiana, Menagiana usus confecit, typis vero describendam cum Alemanni Maltretique interpretatione Latina Ioannes Casparus Orelli curavit, — — non magni sane aestimanda.

Anno 1838 Bonnae Graece et Latine edidit 'Ανέκδοτα Guilielmus Dindorf omnium Procopii operum vol. III inserta — itidem nullis codicibus usus, — nisi quorum scripturas ex Alemanni notis in editionis principis exemplaris Barberiniani margine scriptis[4]) atque ex eiusdem itemque Holstenii schedis quibusdam[5]) cognovit, — sed Alemanni et maxime Maltreti, quorum subiecit interpretationem Latinam, editiones fere repe-

---

1) Cf. supra p. XVIII.

2) Ipsene Aegidius Menagius illos locos ediderit Latineque reddiderit, ut Orelli (p. 271 sq.) ait *Menagianorum* vol. III p. 255 sqq. laudans, — an Bernardus de la Monnaye, ut Dahn (*Prokopius von Cäsarea*, Berlin 1865, p. 464) affirmat, qui *Menagianorum* vol. I (Lutet. Paris. 1715) p. 347 laudat, mihi quidem non liquet (cf. supra p. XXV adn. 2), illud tamen probabilius esse puto conlata Isambertii adnotatione (p. 380): „Gilles Ménage . . quoique ecclésiastique, l'a publiée dans le [*sic*] *Menagiana*, vers 1693 (III, 254 de l'édition d'Amsterdam)".

3) Procopii Caesariensis Anecdota sive Historia Arcana Graece. Recognovit emendavit lacunas supplevit interpretationem Latinam Nicolai Alemanni eiusdemque, Claudii Maltreti, Pauli Reinhardi, Ioannis Toupii et aliorum annotationes criticas et historicas suasque animadversiones adiecit *Io. Conradus Orellius.* Accedunt descriptiones pestis et famis ex eiusdem Procopii libris De bellis excerptae. Lipsiae MDCCCXXVII.

4) Cf. infra p. 179.

5) Cf. infra p. 179 atque supra p. XIX.

tens. Nec maioris profecto quam Orelliana ista editio Bonnensis aestimanda foret, nisi *Reiskii* coniecturas contineret[1]).

Denique anno 1856 Lutetiae Parisiorum prodiit editio Isambertiana[2]), cuius editor F. A. Isambert tribus codicibus usus est et quidem 𝔓(arisino), quem ipse contulisse videtur, atque Ambrosianis 𝔐𝔑, quos sua gratia ab Aemilio Isambert esse inspectos p. 362 monuit; nec sine fructu hos codices adhibuit, quamquam potius editiones Orellianam atque Bonnensem secutus esse videtur; ceterum in textu graeco constituendo a Dübnero sese adiutum esse ait (p. 361). Singula Ἀνεκδότων capita, in quae divisionem Maltretianam duodecim locis — nec ubique infeliciter — mutavit, in paragraphos divisit.

Continet hic liber sermone Francogallico totus (nimirum praeter Ἀνεκδότων textum) conscriptus haece: commentationem de Procopii vita, scriptis, auctoritate; argumentum (Maltretiano illo longe uberius); tabulam chronologam ad totam Iustiniani dominationem spectantem; addenda; Ἀνεκδότων textum cum interpretatione; notas philologas, quibus commentatio de Ἀνεκδότων editionibus atque codicibus praemissa est; notas historicas; *N(icolai?) Piccolos* adnotationes criticas; „notas auctoris" criticas; tres notas, quibus aliquot loci Procopiani explanantur; commentationes geographicas; commentationes ad nummorum doctrinam spectantes; addenda.

Quanti editio Isambertiana aestimanda sit, rectissimum est Dahnii (l. c. p. 494) iudicium luculentis fultum exemplis, quod proferre nobis liceat: „Während . . der dicke Band nicht nur überall einen sehr imponirenden Apparat und Anschein von Gelehrsamkeit zeigt, sondern in einzelnen Partien, in geographischen und numisma-

---

1) Cf. infra p. 180.

2) ΑΝΕΚΔΟΤΑ ou Histoire secrète de Justinien traduite de Procope avec notice sur l' auteur et notes philologiques et historiques. — Géographie du VI^e siècle et revision de la numismatique d' après la livre de Justinien avec figures, cartes et cinq tables par M. *Isambert.* Paris 1856.

tischen Excursen unverkennbar ein wirkliches, nicht unbeträchtliches Wissen, stösst der Leser daneben fortwährend auf so ungeheure Missübersetzungen, Missdeutungen und Missverständnisse der einfachsten Stellen des griechischen Textes, dass man bei dem besten Willen nicht die befremdliche Alternative vermeiden kann: entweder besitzt der gelehrte Verfasser nicht die Anfangsgründe der griechischen Sprache, oder aber er besitzt ein Mass von Oberflächlichkeit, das bisher kaum je von einem Schriftsteller erreicht worden ist. Die Belege für diese starke Anklage wimmeln".

## CAPVT II.

## DE HAC EDITIONE.

De hac nostra 'Ανεκδότων editione pauca tantum praemonenda nobis sunt, quoniam et de codicibus, quos adhibuimus, supra uberius egimus et, quaenam artis criticae praecepta in 'Ανεκδότων textu constituendo secuti simus, ex prolegomenon partis primae capitibus III—V atque ex partis secundae capite III facillime perspici potest.

Vbicumque codicum scripturae ferri posse nobis visae sunt, eas qua par est religione retinuimus; ubi vero traditae lectiones aliqua de causa suspicionem moverunt eaque suspicio ne omnibus quidem, quae in examen vocanda erant, via ac ratione perpensis ex animo evelli potuit, locos corruptos coniecturis sanare non dubitavimus illorum memores, quae supra p. XLII monuimus [1]).

---

1) Errare tamen cum humanum sit, nobis quoque accidit, ut codicum lectionibus, quas genuinas esse post descripta demum typis 'Ανέκδοτα perspeximus, hic illic immerito coniecturas praeferremus. Cuiusmodi locis iam infra (p. 203, *a*) correctis hosce duos nunc addimus: p. 45, 15 sq. π α ρ ά δ ο ξ ο ν διασωθεὶς ἐξάπινα σ ω τ η ρ ί α ν cum codicibus scribendum esse puto (malim tamen illud ἐξάπινα post σωτηρίαν collocare); p. 137, 9 ἀπαγγέλλοιτο scripserim, etsi illud ἅπαντα vicinum dittographiae suspicionem facile excitet.

In *adnotatione critica* nisi probabiliores coniecturas non enotavimus ceteris omnibus in *appendicem criticam* relegatis, cui plebi, ut ita dicam, coniecturarum ne monstra quidem coniectandi velut illud Isambertianum ἀμέλγει [1]) adscripsisse nos taedet scilicet, ut plenius fiat istud cornu copiae, prospicientes.

'Ανεκδότων textus in capita divisionem Maltretianam retinuimus; praeterea singulorum capitum textum Isambertii exemplum secuti subdividendum curavimus.

Quod ad interpunctionem attinet, parciores quam prolixiores esse maluimus.

Numeris in margine adscriptis paginas editionum Maltretianae et Bonnensis notavimus [2]); litteris vero *ABCD* editionis Maltretianae singularum paginarum partes notari per se intellegitur.

Nominum et rerum indicem haud ab re visum est nobis huic volumini addere, longe uberiorem illo Maltretiano, quem ſere repetunt Orelli atque Dindorf, nedum ceterorum mentionem faciam. Pleniorem autem et quidem talem fere, quali Carolus de Boor Theophanem suum adornavit, tota editione Procopiana ad finem perducta dabimus — fortasse cum Graecitatis indice Procopianae.

Restat, ut munere fungar omnium iucundissimo gratissimoque gratias quam maximas hisce viris summe venerandis agendi, quorum alii aliter me in Procopii Caesariensis operum omnium edendorum onere gravissimo, quod suscepi, sustinendo summa cum benignitate atque humanitate adiuvant adiuveruntve: Victori Iernstedt, Academiae Caesareae scientiarum Petropolitanae socio, olim magistro meo in universitate Caesarea

1) Cf. infra p. 149 (ad 22, 12).

2) Numeros 87 A 130 (scilicet p. 87 A ed. Maltretianae, p. 130 ed. Bonnensis) ad p. 106, *17* adscribendos per operarum errorem sedem mutasse data occasione moneo.

Petropolitana omnium optimo dilectissimo; Alexandro Izvolski, Caesaris nostri legato olim apud Sanctam Sedem, nunc apud regem Bavarorum; Mariano Rampolla marchioni del Tindaro, Cardinali Eminentissimo, regni Pontificii secretario; Alexandro Nelidov, Caesaris nostri legato apud Italorum regem; Valerio Tscharykov, Caesaris nostri legato apud Sanctam Sedem; Francisco Ehrle, bibliothecae Vaticanae praefecto; Leopoldo Delisle, Deprez, Henrico Omont, bibliothecae Parisinae Nationalis praefectis; Antonio Ceriani, bibliothecae Ambrosianae praefecto; Ioanni Mercati, olim bibliothecae Ambrosianae doctori, nunc Vaticanae hypobibliothecario; Hemidio Martini, olim bibliothecae regiae Braidensis Mediolanii, nunc bibliothecae universitatis regiae Neapolitanae praefecto; Sergio Shebelev, academiae Caesareae artium Petropolitanae professori, privatim in universitate Caesarea Petropolitana docenti; Alexandro Nikitski, conlegarum in universitate Caesarea Iurievensi omnium optimo carissimo amicissimo.

# ANECDOTON ARGVMENTVM[1]).

*Prooemium.* Cur hoc opus scriptum sit, exponitur[2]).

*Cap. 1.* Antoninae genus et educatio. Belisario nupta dedit se adulteriis. caede Silverii papae Theodoram Aug. sibi conciliat. eius flagitia cum Theodosio adolescente. deprehenditur a Belisario. in delatores saevit. Photium filium suum insidiis petit. Theodosius fit Ephesi monachus.

*Cap. 2.* Belisarius adversus Chosroem mittitur. Photium privignum suum hortatur ad necem Theodosii ad Antoninam reversi. res Orientis et in his culpa Belisarii. ex epistola Theodorae Aug. ansam Chosroes carpendi Romanos arripit.

*Cap. 3.* Antoninam Belisarius in custodiam dat. Theodosius Antoninae amasius in templum confugit. Belisarius Byzantium revocatur. Photius Theodosium in vincla coniicit. Theodora in amicos Belisarii saevit. Theodosium senatorem ad praesepium damnat. Antoninae Theodosium amasium reddit. Photium habet in carcere. asylum violat. elabitur Photius monitu Zachariae prophetae in somnis visi. fit monachus.

*Cap. 4.* Ob prolatam temere vocem aegrotante Iustiniano Buzes in carcerem subterraneum coniicitur. exauctoratur Belisarius. indigna passum tandem Theodora Antoninae condonat. Ioannina Belisarii filia Anastasio spondetur. altera Belisarii in Italiam expeditio, infelix. Fortuna nihil aliud nisi divina providentia.

---

1) Argumentum Maltretianum hic illic correctum ac suppletum repetisse satis habuimus.

2) „Auctoris praefatio“ *Maltretus.*

*Cap. 5.* Avaritia Belisarii in Italia. ab eo Ioannes se abalienat. Italiam Belisarius afflictam relinquit. <Theodora> nuptiarum conciliatrix turpissima. Belisarius uxorius. Sergii perfidia ac crudelitas in <Leuetharum> legatos. Solomon Pegasium, a quo pie monebatur, occidit. ab imperatore absolutus a Deo plectitur.

*Cap. 6.* Iustini senioris genus et patria. cum esset praetorianus, mortem evasit Ioanne <Gibbo> in somnis monito, ne illum occideret. praetorianis ab Anastasio praeficitur. fit imperator, quamvis analphabetus. nova subscribendi ars. Lupicina Iustini uxor. Iustiniani ingenium. auctor caedis Amantii ac Vitaliani.

*Cap. 7.* Factionum circi licentia egregie describitur. novitas in cultu corporis. latrocinia ac caedes. exarmatae leges. libido vaga. uxoris mira in maritum fides. Iustiniani reprehensio.

*Cap. 8.* Iustinianus asino similis. aerarium exhaurit. insanas moles in mari substruit. pecuniae quaerendae viam init iniustam. forma corporis Domitianum refert. de statua Domitiani narratio parum hactenus nota. Iustiniani mores, sane pessimi.

*Cap. 9.* Theodorae genus obscurissimum, turpissima educatio, infamis corporis quaestus. amasia Iustiniani. Theodotus Cucurbitinus iniquissime habitus. uxor Iustini non sinit Iustiniano nubere Theodoram. Iustini lege senatoribus connubia cum scenicis ac meretricibus permissa. quo die ad imperium accitus Iustinianus.

*Cap. 10.* Auctoris iudicium de Iustiniani matrimonio cum Theodora. quae forma corporis Theodorae. eius consensio cum Iustiniano.

*Cap. 11.* Iustinianus nihil non mutat, ut nomen suum propaget, illud rebus multis indendo. pecuniam profundit. sua prodigentia barbaros allicit. avaritiae causa haereticos exagitat. Montanistarum horrenda desperatio. Samaritani ad Christum conversi maximam partem ad Manichaeos et polytheos deficiunt. rustici Samaritani cum suo rege caesi. persequitur Iustinianus gentiles, turpes puerorum amatores et astrologos (μετεωρολόγοι).

*Cap. 12.* Insignis fraus in Zenonem, in alios senatores et in Ioannem Edessenum. Iustinianus ac Theodora daemones habiti. Iustinianus a daemone fertur genitus. visus sine capite ambulare. mira monachi visio. Iustinianus non cibo, non somno, sed Veneri deditus. rem cum lemuribus habet Theodora. eius somnium.

*Cap. 13.* Iustiniani lenitas affectata, ira in supplices, favor impensus sacerdotibus, qualis pietas, consensio cum Theodora, levitas. Triboniani assentatio. Iustiniani amor et odium, avaritia, pretio fixae et refixae leges. quinam illi carissimi. eius perfidia. ieiunia.

*Cap. 14.* Iustiniani barbaries. iniqua iudicia. nihil senatui nisi nomen relictum. pondera librae Themidis aurum. referendarii munus. praetoriani extorquent iudicia. Leo Cilix auctor vendendi iuris.

*Cap. 15.* Theodorae crudelitas, cura corporis, fastus, pedum oscula, calumniae, saevitia, ignominiosa iniuria in patricium, secessus in Heraeum.

*Cap. 16.* Theodora Amalasunthae parat exitium. ad id Petrum inducit. Prisco insidiatur. Areobindum famulum pessime habet. Bassianum crudelissime necat. exagitat Diogenem. Theodorum torquet.

*Cap. 17.* Theodora in crucem agit <Callinicum Ciliciae secundae> praefectum, quod Venetos damnarit. meretrices ad meliorem frugem adigit. nobiles feminas vexat. Ioannem filium suum nothum occidit. mulieribus adulteris patrocinatur. episcopos et magistratus creat. matrimonia nobilium curat. Saturnino meretricem despondet et querentem illum, ceu puerum, flagro excipit. acta in Ioannem Cappadocem.

*Cap. 18.* Clades a Iustiniano orbi illatae. Africana calamitas. Belisarius male ex Africa revocatus. Italiae clades. fines imperii Gotthici. incursiones barbarorum in Europam. Saracenorum ac Persarum irruptiones. Iustinianus bellorum auctor. praepostere theologus. strages civiles. inundationes fluminum. terrae motus. pestilentia.

*Cap. 19.* Somnium de Iustiniani avaritia. relictas ab imp. Anastasio opes profundit. subditos expilat, in barbaros prodigus.

*Cap. 20.* Praefectus venaliciis. instituta monopolia. praetor [plebis] et quaesitor nove creati. deformata quaestura. Triboniano succedit Iunilus, huic Constantinus. utriusque mores.

*Cap. 21.* Aërium tributum (τὸ ἀερικόν). rapacitas praefectorum praetorio. Phocae et Bassi integritas. praefecturae locatae pretio. lex de praefecturis gratis dandis. magistratus conducticii. scelerati rei publicae praefecti. barbaris data grassandi copia.

*Cap. 22.* Ioanni Cappadoci praefecto praetorio subrogatur Theodotus, huic Petrus Barsymes. eius scelera. collector (συλλογή). frumenti putridi distributio. Petrus Theodorae carissimus ob magiae peritiam. Iustiniani levitas. Petrus aerario praeficitur. nummus aureus diminutus.

*Cap. 23.* Sublata vectigalium condonatio. de annona (συνωνή), impositione (ἐπιβολή) ac descriptione (διαγραφή). barbarorum Byzantii agentium multitudo.

*Cap. 24.* Vexati milites. triplex eorum ordo. quam inique a logothetis habiti. milites limitanei. scholarii. supernumerarii. domestici et protectores. quinquennale donativum sublatum.

*Cap. 25.* Vexati institores. nummularii. sericarii. serici pretium.

*Cap. 26.* Iacent causidici. medici et liberalium disciplinarum magistri. sublata spectacula. sublati consules. pauperum vexatio. Romae praetorianis relictum a Theodorico stipendium itemque frumentum pauperibus D. Petri. haec Alexander Forficula resecat. avertit Hephaestus assignatam a Diocletiano pauperibus Alexandrinis annonam.

*Cap. 27.* Rhodo Alexandriae praefectus Pauli eiusdem urbis antistitis impulsu et Iustiniani iussu Psoem diaconum necat. sententia Vigilii papae Paulus deiicitur solio. Iustinianus Rhodonem, Theodora Arsenium capite plectunt. Vigilii constantia. Faustinus Samarita reus ab imperatore absolvitur.

*Cap. 28.* Priscus Emesenus falsarius. praescriptio centenaria ecclesiis [1]) data. Longinus Prisci fraudem deprehendit. Hebraeos vexat Iustinianus.

*Cap. 29.* Iustiniani dissimulatio rixam gravissimam parit. Eudaemonis et Euphratae hereditates occupat. lex de

---

1) *Scil. decurionum ordinibus.*

heredibus senatorum <ac decurionum>. iniqua Iustiniani sententia. praesente illectus pecunia nec Venetis favet.

*Cap. 30.* Quae olim ratio cursus publici. sublati a Iustiniano veredarii plurimis in locis et exploratores. eius ridiculum. salutandi imperatoris et Augustae mos. regiae frequentia.

## *Ad p. XXXIIII.*

*Vs. 6 (ab imo)* contineri *pro* continere *legendum.*

# EVAGRII

## HISTORIAE ECCLESIASTICAE*)

### IV, 30.

*Ἰουστινιανὸς ἦν μὲν χρημάτων ἄπληστος καὶ τῶν ἀλλοτρίων οὕτως ἐκτόπως ἐραστὴς ὡς καὶ τὸ ὑπήκοον ἅπαν χρυσίου πιπράσκειν τοῖς τε τὰς ἀρχὰς ἐπιτροπεύουσι τοῖς τε τοὺς φόρους ἐκλέγουσι καὶ τοῖς ὅσοι ἀπ' οὐδεμιᾶς αἰτίας ῥάπτειν ἐπιβουλὰς τοῖς ἀνθρώποις ἐθέλουσι. πολλοὺς δὲ καὶ ἀναρίθμους τῶν τὰ πολλὰ κεκτημένων προφάσεις ἀπροφασίστως ἐπιχρώσας τὰς οὐσίας ἁπάσας ἐζημίωσεν. ἦν δὲ καὶ γυνὴ ἑταιριζομένη ἐποφθαλμιῶσά τῳ ὁμιλίαν τινὰ ἢ μῖξιν ἀνέπλασεν, εὐθὺς ἅπαντα φροῦδα τὰ τῶν νόμων καθίστατο, καὶ τὸν Ἰουστινιανὸν προσεταιρισαμένη τοῦ ἀτόπου κέρδους ὅλον τὸν πλοῦτον τοῦ συκοφαντηθέντος οἴκοι μετεσκευάσατο. καὶ ἀφειδὴς δὲ χρημάτων ὑπῆρχεν, ὥστε καὶ πολλοὺς ἁγίους καὶ ἑκασταχοῦ νεὼς μεγαλοπρεπεῖς ἀναστῆσαι, ἄλλους τε εὐαγεῖς οἴκους ἐς ἐπιμέλειαν ἀνδρῶν τε καὶ γυναίων ἀώρων τε καὶ ἐξώρων καὶ τῶν ὑπὸ νοσημάτων ποικίλων ἐνοχλουμένων συντάξεις τε μεγάλας ἀποκληρῶσαι, ὅθεν δέοι ταῦτα γίγνεσθαι, πρᾶξαί τε καὶ ἄλλα μυρία εὐσεβῆ καὶ θεῷ ἀρέσκοντα, εἴπερ ἐξ οἰκείων δρῷεν οἱ τούτων ἐργάται καὶ καθαρὰς τὰς σφῶν πράξεις καρποφοροῖεν.*

### IV, 32.

*ὑπῆν δὲ καὶ ἕτερον τῷ Ἰουστινιανῷ πᾶσαν θηριώδη γνώμην ἐκβαῖνον, εἴτε δὲ φύσεως ἁμαρτία εἴτε δειλίας τε καὶ φόβων ἔκγονον, οὐκ ἔχω λέγειν, ἐκ τῆς δημώδους στάσεως τοῦ Νίκα τὴν ἀρχὴν ἕλκον. ἐδόκει γὰρ θατέρῳ τῶν μερῶν, τῷ κυανέῳ φημὶ, ἀτεχνῶς προσκεκλίσθαι ἐς τοσοῦτον ὥστε καὶ μιαιφονίας αὐτοὺς ἐν μέσῃ ἡμέρᾳ καὶ ἐν μέσῃ τῇ πόλει ἐργάζεσθαι*

---

*) Ed. I. Bidez et L. Parmentier, Londinii 1898.

*τῶν ἀπ' ἐναντίας καὶ μὴ μόνον ποινὰς μὴ δεδιέναι, ἀλλὰ καὶ γερῶν ἀξιοῦσθαι, ὡς πολλοὺς ἀνδροφόνους ἐντεῦθεν γενέσθαι. ἐξῆν δὲ αὐτοῖς καὶ τοῖς οἴκοις ἐπιέναι καὶ τὰ ἐναποκείμενα κειμήλια ληίζεσθαι καὶ τοῖς ἀνθρώποις τὰς σφῶν πιπράσκειν σωτηρίας. καὶ ἤν τις τῶν ἀρχόντων εἴργειν ἐπειράθη, περὶ τὴν σωτηρίαν αὐτὴν ἐκινδύνευεν. ὅθεν ἀμέλει εἷς τις τὴν ἑῴαν ἐπιτροπεύων ἀρχήν, ἐπεὶ ἐνίους τῶν νεωτεριζόντων νεύροις ἐσωφρόνισεν, ἀνὰ τὸ μεσαίτατον τῆς πόλεως νεύροις ᾐκίσθη τε καὶ περιηνέχθη. Καλλίνικος δὲ τῶν Κιλίκων ἡγούμενος δύο ἀνδροφόνω Κίλικε, Παῦλον καὶ Φαυστῖνον, ἐπελθόντε οἱ καὶ διαχρήσασθαι βουλομένω, ἐπεὶ ταῖς ἐκ νόμων ποιναῖς ἐκτέθειχεν, ἀνεσκολοπίσθη, ποινὴν ὑπὲρ ὀρθῆς συνέσεως καὶ τῶν νόμων ταύτην καταβαλών. ἐντεῦθεν οἱ θατέρου μέρους τὰ οἰκεῖα φεύγοντες καὶ πρὸς οὐδένων ἀνθρώπων δεξιούμενοι, ἀλλὰ καὶ ὡς ἄγη πάντοθεν ἐλαυνόμενοι τοῖς ὁδοιποροῦσιν ἐφήδρευον λωποδυσίας τε καὶ μιαιφονίας ἐργαζόμενοι ὡς πάντα πλήρη θανάτων ἀώρων λεηλασίας τε καὶ τῶν λοιπῶν ἀτοπημάτων εἶναι. ἔστιν δὲ οὗ πρὸς τὰ ἐναντία μεταχωρήσας καὶ αὐτοὺς διεχρήσατο τοῖς νόμοις ἐκδούς, οὓς ἀφῆκεν ἀνὰ τὰ ἄστη ἀνοσιουργεῖν βαρβάροις ἴσα. καὶ τὰ μὲν περὶ τούτων λεπτομερῶς λέγειν κρεῖττον καὶ λόγου καὶ χρόνου, ἀπόχρη δὲ ταῦτα τεκμηριῶσαι καὶ τὰ ἐπίλοιπα.*

---

# IOANNIS ZONARAE

## EPITOMAE HISTORIARVM

## XIV, 6, 1–9 *).

1 *Ἄρξαντος δὲ Ἰουστινιανοῦ οὐκ εἰς μοναρχίαν ἡ βασιλεία κατέστη, ἀλλ' εἰς διπλοῦν τὸ κράτος μεμέριστο· οὐδὲν γὰρ ἧττον τοῦ κρατοῦντος, εἰ μὴ καὶ μᾶλλον, ἡ κοινωνὸς αὐτῷ τοῦ βίου*
2 *δεδύνητο. ἦν δὲ ὁ βασιλεὺς οὗτος ῥᾷστος μὲν πρὸς ἔντευξιν καὶ ἀναπεπταμένας εἶχε τὰς ἀκοὰς πρὸς διαβολήν, ὀξὺς δὲ πρὸς ἄμυναν, ἀφειδὴς πρὸς χρημάτων ἐξάντλησιν καὶ πρὸς συλλογὴν*
3 *αὐτῶν ἀφειδέστερος. τὰ μὲν γὰρ ἀνήλισκεν εἰς οἰκοδομάς, τὰ δὲ ἵν' αὐτῷ κατορθοῖντο ὅσα οἱ ἐτύγχανε πρὸς βουλῆς, τὰ δὲ*

---

*) Ed. Th. Büttner-Wobst, Bonnae MDCCCXCVII.

εἰς πολέμους καὶ τὰς πρὸς τοὺς ἀνθισταμένους ταῖς ἑαυτοῦ θελήσεσιν ἔριδας. ὅθεν ἀεὶ χρημάτων δεόμενος ἐξελέγετο ταῦτα 4
ἐκ τρόπων οὐκ εὐαγῶν καὶ χάριτας ᾔδει τοῖς προφάσεις αὐτῷ
τοῦ ἀργυρολογεῖν ἐφευρίσκουσι. καὶ οὐχ ὁ μὲν οὕτω διέκειτο, 5
ἡ δὲ βασιλὶς ἠλαττοῦτο κατά τι τοῦ αὐτοκράτορος ἢ πρὸς ἐξουσίαν ἢ πρὸς χρημάτων κτῆσιν ἐκ τρόπου παντός. ἠδύνατο 6
μὲν γὰρ πολλῷ τῷ μέσῳ τοῦ ξυνευνέτου ἐπέκεινα, ἦν δὲ καὶ 7
ποριμωτάτη πρὸς εὕρεσιν καινοτέρων καὶ πολυτρόπων ἐπινοιῶν.
ἐντεῦθεν τοῖς ὑπηκόοις διχόθεν αἱ συμφοραί· οἵ τε γὰρ ἐτήσιοι 8
δασμοὶ ἐπὶ μεῖζον ἐξῄροντο καὶ καινοὶ προσεπινενόηντο, καὶ οἱ μὲν 9
ὡς μὴ περὶ τὴν εἰς τὸ θεῖον δόξαν ὀρθῶς διακείμενοι, οἱ δὲ ὡς ἀκολάστως βιοῦντες [ἢ ἀσελγῶς] ἐκολάζοντο καὶ τὰς περιουσίας ἀφῄρηντο. οἱ δὲ διὰ τὰς πρὸς ἀλλήλους διαφοράς, καὶ ἄλλοι ἐξ ἄλλων τρόπων καὶ ἕτεροι ἐξ ἑτέρων. πάντας γὰρ ἀπαριθμεῖν μακρᾶς ἂν δέοιτο συγγραφῆς.

# NOTAE EXPLICANTVR.

A cod. Ambrosianus A 182 sup., saec. XIV.
V cod. Vaticanus 1001, saec. XIV.
W cod. Vaticanus 16, saec. XV.
G cod. Ambrosianus G 14 sup., saec. XIV.
Z codicum AVW consensus.

g cod. Ambrosianus P 74 sup., saec. XVI.
𝔐 cod. Ambrosianus C 118 sup., saec. XVI.
𝔑 cod. Ambrosianus C 121 sup., saec. XVI.
π cod. Pinellianus ab Alemanno laudatus, saec. XVI exeuntis.
𝔓 cod. Parisinus Coislinianus 132, saec. XVI.
𝔔 cod. Ambrosianus C 171 inf., saec. XVI.

Σ Suidas.
$\Sigma^a$ Suidae lexici codd. Parisini 2625 et 2626 (cf. supra p. L adn. 3).
$\Sigma^b$ Suidae lexici cod. Parisinus 2622, saec. XIII.
$\Sigma^e$ Suidae lexici cod. Bruxellensis 11281, saec. XV.
$\Sigma^v$ Suidae lexici cod. Leidensis Vossianus F 2.
$\Sigma^w$ Suidae lexici cod. Vaticanus 1296, saec. XIII ineuntis.
Vbi Σ et ex. gr. $\Sigma^a$ inter se opponuntur, illa littera ceterorum Suidae codicum consensus notatur.
$\Sigma^I$ priorem, $\Sigma^{II}$ posteriorem Suidae locum notamus, sicubi sub diversis lemmatis eadem Procopiana verba proferuntur.

mg. margo.
sscr. superscriptum, superscripsit, sim.
v vulgo.

* una stellula notavi quaecumque in Ἀνεκδότων textu sive codicibus adiutus sive de meis ipsius aliorumve virorum doctorum coniecturis novavi.
*** vel ** tribus duabusve stellulis lacunae notantur.
+ cruce unius litterae rasuram notavimus.
[ ] uncis angulatis in Ἀνεκδότων textu inclusi quaecumque delenda esse mihi aliisve visa sunt.
< > his uncis inclusa codicibus desunt.
| finem versus aut paginae codicis significat.
( | ) veluti in hisce: „γῆς om. G ( | )“ (ad p. 10, 15) — vocem (γενέσθαι), quae illam omissam praecedit, in hoc codice *in fine versus* stare significamus.

# ΠΡΟΚΟΠΙΟΥ ΚΑΙΣΑΡΕΩΣ

## ΤΑ ΚΑΛΟΥΜΕΝΑ

## ΑΝΕΚΔΟΤΑ

p. 65, 11 μή] μή <μοι> Alemannus (μοι in editione), quem Dindorf atque Isambert secuti sunt.

p. 65, 16 διοικεῖσθαι] „Legendum videtur γράφεσθαι, e coniectura Alemanni" Orelli. — ποιεῖσθαι Reiskianum Dindorf et Isambert receperunt.

p. 65, 17 ἠξίου καί] ἠξίου. Ἦν male Maltretus, quem Orelli est secutus. — Voci ἠξίου Alemannus in V stellulam adpinxit eamque in mg. repetiit.

p. 65, 18 sq. „ὥστε τοῖς ἐνθένδε ἠδικημένοις, οὐκ ἔχειν ὅτῳ ἐπικαλοῖεν] Legendum videtur: ὥστε τοὺς ἐνθένδε ἠδικημένους οὐκ ἔχειν ὅτῳ ἐπικαλοῖεν, vel etiam: ὥστε τοῖς ἐνθένδε ἠδικημένοις οὐκ εἶναι, ὅτῳ ἐπικαλοῖεν" Orelli.

p. 65, 19 οὐκ ἔχειν] „peut-être y avait-il: . . . οὐκέτι εἶναι ὅτῳ ἐπικαλοῖεν, ce qui s'accorde avec le datif τοῖς ἠδικημένοις" Piccolos.

p. 65, 23 <ἠγνόουν>, ὅποι ποτὲ sine iusta causa Reiske, quem Dindorf atque Isambert sequuntur.

p. 65, 24 τὰ ἐς τὴν γνῶσιν <ἰόντα διαθησομένοις> ἰτέον εἴη Reiske perperam.

p. 65, 27 ἐσομένας] ἐσαγομένας Reiske.

p. 66, 2 sq. αἰσχροκερδείᾳ ἡσσώμενος] illud αἰσχροκερδείας Suidianum haud scio an per dittographiam sit ortum; de dativo cum verbo ἡσσᾶσθαι coniuncto vid. Classen ad Thucyd. 3, 38, 7 atque Schmid *Der Atticismus* III p. 57.

p. 66, 12 <ὑπὲρ> τῶν διαφερομένων Reiske.

p. 66, 22 sq. καὶ ταῦτα ἐκ παλατίου] πάντα τὰ ἐκ <τοῦ> παλατίου Reiske addens interpretationem: „*opes palatii omnes iacebant in publico foro venum expositae, omnis iubendi vetandique potestas erat venalis*", — quae coniectura mirum quantum placet Piccolo („est infiniment probable").

p. 66, 24 πωλητήρια] πολιτηρίας traditum retinens adnotat Orelli: „πολιτηρία, *cura urbis gerendae.* Hac voce augenda Lexica".

p. 67, 1 „Pin(ellianus codex) τοὺς δὲ ῥεφερενδαρίους" Alemannus (in mg. V), unde Dindorf, quem Isambert secutus est, τοὺς δὲ ῥαιφερενδαρίους καλουμένους scripsit.

p. 67, 2 sq. ἐς δὲ τὰς ἀρχὰς] οὐδὲ τὴν ἀρχὴν male Alemannus (in mg. V).

p. 67, 3 αὐτῷ] „fortasse αὐτοῖς s. Referendariis" Alemannus (in mg. V) locum parum recte intellegens.

p. 67, 4 ἱκέτῃ] „sic et Pin(ellianus codex)" Alemannus (in mg. V).

p. 67, 12 αὐτῶν] αὑτῶν Dindorf, quem Isambert sequitur.

p. 67, 24 οὗτος <ὁ> ἀνὴρ Dindorf sine necessitate.

p. 68, 1 ἀπεμπολεῖν] ἀπεμπολᾶν Dindorf sine iusta causa.

p. 68, 18 αὐτῷ delet Reiske perperam.

p. 68, 26 ὅτι] ὅ, τι male Alemannus (Barb.).

p. 68, 29 sq. εἶδεν καὶ ἐξ ἀνθρώπων Maltretus.

p. 69, 2 τριγένειαν] τριγονίας quidem habet p. 78, 5 Procopius, vix tamen est, quod hoc loco illud τριγονίαν Suidianum cum Dindorfio Isambertioque praeferamus: potuit enim Procopius vel propter variandi studium tam sibi proprium illam alteram formam usurpare (cf. praeterea Strab. 2, 1, 14 εἰς τριγένειαν παραμένειν).

p. 70, 5 αὐτὸς delent vulgo inde a Maltreto; αὐτὸν coniecit Alemannus (in mg. V), sed ipse postea hanc coniecturam delevit.

p. 70, 18 τοῖς] τοῖσδε Alemannus (in mg. V).

p. 70, 25 πέρι (ZG)] περὶ legebatur ante Dindorfium.

p. 70, 25 sq. „Quid si legamus: καὶ καταλύσεως περὶ τῶν κατηκόων εἰς τὸ ληΐζεσθαι δικαστήριον ἦν, hoc sensu: *tribunal quo subditorum lites dirimebantur erat compositum ad illos expilandos, das Gericht, das die Processe der Unterthanen schlichten sollte, war nur zu ihrer Ausplünderung da*" Orelli.

p. 70, 26 τῶν ὑπηκόων αὐτῇ ἱζόμενον δικαστήριον Reiske.

p. 70, 26 τῶν κατηκόων — ἦν] τῶν μὴ κατηκόων ὥστε ληΐζεσθαι δικαστηρίων φήμη Piccolos (hoc scil. sensu: „*le bruit courait de la dissolution des tribunaux, qui n'étaient pas assez dociles pour dépouiller les accusés*", ut refert Isambert p. 932) — parum feliciter.

p. 70, 26 ληΐζεσθαι cum Alemanno delerunt Maltretus atque Orelli (de hoc tamen cf. supra, ad p. 70, 25 sq.).

p. 70, 29 γνῶσιν] γύμνωσιν Piccolos, qui praeterea τῆς βασιλίδος pro τῇ βασιλίδι legendum proponit („la construction est ἀρέσκειν τὸ βούλημα τῆς βασιλίδος τῇ ἐς τὴν γύμνωσιν ἀπανθρωπίᾳ").

p. 71, 1 οὕτω] τούτου Alemannus (Barb.).

p. 71, 7 ὁρμὴν] ὀργὴν Reiske sine necessitate.

p. 71, 10 sq. πεποίηται] „Malim πεποίοιτο" Orelli.

p. 71, 17 sq. tradita illa ᾧπερ — προμαχοῦσα retinuit Alemannus (cui Dindorf emendationem Maltretianam ὅπερ — προμαθοῦσα attribuit) sic vertens: „*pro familiari propugnatura suo*".

p. 71, 26 <μὴ> ἀποκεκρίσθαι male Orelli („imo legendum videtur, τῷ ἀξιώματι μὴ ἀποκεκρίσθαι, *dignitati suae non satisfecisse, wenn er nicht mehr anständig, seinem Range gemäss, leben kann*").

p. 72, 18 τε omittunt editores praeter Isambertium, Alemanni repetentes errorem.

p. 72, 20 δὴ (ἂν ZGv)] οὐ Piccolos, quae coniectura mihi quidem non arridet.

p. 72, 24 ἀπ' αὐτοῦ] addi potest Maltretum quoque sic pro vulgato illo αὐτοῦ legendum proposuisse („forsan") codicis Mediolaniensis lectionem ἀπ' αὐτῶν commemorantem.

p. 73, 2 „ὅσον delendum aut post τρυφᾶν inserendum ὅσον ἤθελον" Reiske parum feliciter neque melius Piccolos: <οὐδ'> ὅσον <εἰπεῖν>, ἥν γε κτλ.

p. 73, 6 ἡ 'Αμαλασοῦνθα] ἡ μαλασοῦνθα potius quam ἡμαλασοῦνθα praebent VWG.

p. 73, 9 ἡ Θεοδώρα] haud scio an illud ἡ cum A sit delendum: potest enim in archetypo haec fere fuisse: ἐρρέθη (η), λογισαμένη θεοδώρα.

p. 73, 17 ἐπέστελλεν] ἐπέτελλεν Alemannus perperam.

p. 73, 19 τῆς] de τῷ cogitavi.

p. 73, 25 ἐλπίδι] ἐλπίσι frustra Isambert ex 𝔓 recepit. Ceterum illud ἐλπίδι ita in VW scriptum esse, ut oculis minus intentis legenti facillime ἐλπίσι videri possit, data occasione moneo, quod tam Alemanno, quam Auero, qui 𝔓 ex V descripsit, accidit.

p. 74, 2 καὶ μάλιστα πάντων] κατὰ πάντων καὶ μάλιστα τῶν Reiske, quae mihi quidem nequaquam probantur, neque magis crediderim fuisse fere καὶ <ταῦτα ὄντων οἱ ἐς τὰ> μάλιστα πάντων ἐχθρῶν, quae fere exprimunt interpretes.

p. 74, 3 ἐχθρῶν] ἐχθροποιόν Piccolos parum feliciter.

p. 74, 6 πρέπων] σπεύδων Reiske sine necessitate (cf. Piccolos p. 539).

p. 74, 9 sq. lectionem tuens traditam adnotat Orelli: „τάχιστα γέγονε] scil. κύριος, quod sensu repetendum ex: χρημάτων μεγάλων ὧν κύριος ὑπῆρχεν".

p. 74, 16 fuisse fere in archetypo διερευνᾶτο (η), ὅπου crediderim, quam ob rem illud ὅπου, quod G exhibet, praetuli.

p. 74, 18 ὀλίγων] <πλὴν> ὀλίγων Reiske, quae coniectura valde Piccolo probatur; <καίπερ ξυγγενῶν οὐκ> ὀλίγων Haury (*Procopiana* II p. 35).

p. 74, 19 συμπεσούσης] ἐμπεσούσης legendum proposuit Alemannus (nisi forte Maltreti haec est coniectura, qui adnotavit: „rectius ἐμπεσούσης") omnino sine necessitate, quod tamen Dindorf atque Isambert receperunt. — „Malui cum Maltreto retinere vulgatam [συμπεσούσης], ut sensus sit: *incidebat in Theodoram suspicio in famulum Areobindum non minus quam in ipsum Priscum*" Orelli ingeniosius quam verius.

p. 74, 22 ἀπολύσασθαι] „fort. ἀπολούσασθαι" Alemannus sine necessitate (cf. ex. gr. Thucyd. 8, 87, 1 βουλόμενος, ὡς ἐδόκει δή, ἀπολύεσθαι πρὸς αὐτοὺς τὰς διαβολάς).

p. 75, 7 sq. „τι τὸν προσκεκρουκότα] Videtur legendum τι τῶν προσκεκρουκότων, *aliquid eorum quae ipsum offenderent*" Orelli perverse locum intellegens.

p. 75, 17 sq. λαθραιότερον τῷ] de λαθραιότατα ἑτέρῳ τῳ cogitavi.

p. 75, 22 ἀπηλλάσσετο delevit Maltretus loco non intellecto.

p. 75, 27 μέντοι λοιδορίας] de μέντοι τῆς λοιδορίας cogitavi.

p. 76, 15 sq. „ἐν σΠΟΥΔΗΙ ΕΠΟΙΕΙΤο συκοφαντεῖν. Δύο γοῦν... Le mot ἔχουσα (que l'on a changé en εἶχε) est venu sans doute de la ligne précédente" Piccolos.

p. 76, 18 „καὶ λαθραίως ὥσπερ εἰώθει] Sic legendum vel, quod magis placet, καὶ λαθραιότατα ὥσπερ εἰώθει, pro καὶ λαθραιότητι ἅπερ εἰώθει" Orelli. — ὥσπερ (pro ἅπερ) Alemannus legendum proposuit.

p. 76, 18 λαθραιότητι, quam esse codicum (VW) lectionem ab Alemanno deceptus credit, defendere perperam conatur Struve („cur Alemannus λαθραίως, ὥσπερ scribi jubeat, causam nullam video. Dativus saepius sic adverbii vices explet, ut δίκῃ, σπουδῇ, ἐπιμελείᾳ etc."). — Fuisse fere in archetypo scriptum puto λαθραιότατα ἅπερ (η supra), quae pro λαθραιότατα ἅπερ (η supra) codicum Z communis fontis librarius habuit fecitque inde λαθραιοτάτη (non λαθραιότητι, ut Alemannus opinatur) ἅπερ.

p. 76, 18 sq. οὐ ... λαθραίῳ τινί, ἅπερ εἰώθει, ἀλλ' ἐν δημοσίῳ, δικαστῶν <δικαστηρίῳ> Reiske parum feliciter.

p. 77, 1 τῶν (ZG)] τὸν editio Alemanniana, quem errorem Eichel, Maltretus, editio Veneta, Orelli repetunt; τῶ (*sic*) Alemannus (Barb.), cui perperam videlicet τῶν Dindorf in adnotatione critica tribuit.

p. 77, 1 Διογένει] Διογένους sine necessitate Maltretus (in mg. editionis suae).

p. 77, 8 διὸ δὴ <Διογένους> Haury (*Procopiana* II p. 38).

p. 77, 13 αὐτῇ] αὐτὴ Reiske, quem Dindorf atque Isambert secuti sunt.

p. 79, 4 ἔμπροσθεν traditum retinens adnotat Orelli: „Paulo post futuro utitur noster aliquoties pro Praeterito passivo. Sic infra Cap. XVIII. ὥς μοι ἐν τοῖς ἔμπροσθεν λόγοις γεγράψεται [*p. 88, 13 ed. meae*]", quae commemorasse satis habeo.

p. 79, 11 γένος] σκῆνος Reiske, τέκος Piccolos — uterque sine necessitate.

p. 80, 1 sq. δὲ ἡ γυνὴ] pro vulgato illo δὲ γυνὴ Piccolos δ' ἐκείνη legendum proposuit.

p. 80, 4 „ἐπιστέλλειν] Sic Alemannus pro ἐπέχειν, quod fortassis tolerari possit, ut significet *in se recipere*. Sed exempla desidero" Orelli. — Mihi quidem talia quoque in mentem veniunt: ὅσπερ ἀεὶ τὰ τοιαῦτα ἐπιτελεῖν εἰώθει, et, quod tamen minus probatur, ὅνπερ ἀεὶ <ἐς> τὰ τοιαῦτα ἐπέχειν εἰώθει.

p. 80, 23 αὕτη] „ταύτῃ Reiske, nisi aliquid exciderit" Dindorf.

p. 80, 28 καὶ τοῖς γάμοις ἅπαντα <τὰ ἐπι>τήδεια ἐξουσίᾳ τινὶ διῳκεῖτο Piccolos parum feliciter.

p. 80, 28 pro illis τῇ θείᾳ ἐξουσίᾳ τινὶ traditis τῇ οἰκείᾳ ἐξουσίᾳ εἰ (teste Dindorfio) legendum proposuit Alemannus, a quo illud οἰκείᾳ Orelli recepit, — αὐτὴ ὀθνείᾳ τινὶ ἐξουσίᾳ Reiske.

p. 81, 1 τοῦ τε γαμεῖν τότε πρῶτον] τότε πρὸ τοῦ γαμεῖν Alemannus, quod Maltreto atque Orellio placuit; τό τε γαμεῖν πρῶτον Isambert.

p. 81, 8 ξὺν ἀκροχολίᾳ (ἀκροχειλία Z)] de ἄκροις χείλεσιν cogitavi.

p. 81, 11 τὸν delendum proposuit Alemannus, quem perperam Orelli, Dindorf, Isambert secuti sunt.

p. 81, 11 γεγονότος] ἀπογεγονότος male coniecit Alemannus, quem Orelli, Dindorf, Isambert sunt temere secuti.

p. 81, 21 τῇδε] pro τῇ, quod VWG praebent (atque Alemanni editio), τῇ <Θεοδώρᾳ> coniecit Reiske, quod si verum est, τῇ <Θεοδώρᾳ ξυν>διῳκοῦντο equidem scripserim.

p. 82, 5 ἀπεῖπεν] ἐπεῖπεν Alemannus sine necessitate.

p. 82, 10 sq. „τοιοῦτο pro τοῦτο [*vs. 11*], restituit Alemannus, legens τοῖς γὰρ ὕστερον δεινότερα ἐργασαμένοις οὐδὲν τοῦτο [*sic*] πεποίηται, vel τοὺς γὰρ ὕστερον etc." (Orelli p. 284, 19).

p. 82, 12 τῇ] pro τά τε tradito τῇ τε coniecit Alemannus.

p. 82, 22 λόγοις] „post λόγοις supplendum videtur αἱμυλίοις vel simile quid“ Orelli sine necessitate.

p. 82, 22 sqq. „post ἀπειλαῖς excidisse videntur verba aliquot, quibus significare voluit auctor, hos homines cum adulationibus, tum minis ad suas partes traducere voluisse Theodora. Sequentia ita lego: καὶ ὁ μὲν ἢ κατοῤῥωδήσας ἢ ταῖς ἐλπίσιν ἐπαρθεὶς τὸ μίασμα τοῦ φόνου εἰς τὸν Ἰωάννην ἀνήνεγκεν“ Orelli.

p. 82, 30 ἔτεμε] „an ἀπέτεμε?“ Herwerden.

p. 83, 3 ἐποιεῖτο] <σπουδὴν> ἐποιεῖτο Alemannus, ἀπείρητο Piccolos — uterque parum feliciter, cf. supra p. 157 (ad p. 50, 20).

p. 83, 3 ξυνεῖναι traditum non est quod in ξυνιέναι mutemus.

p. 83, 4 δὲ] δὴ editores ante Dindorfium — per Alemanni videlicet errorem.

p. 83, 10 ἢ] εἰ μὴ Reiske sine ulla necessitate.

p. 83, 13 μυριάδων perperam seclusit Isambert („Nous avons mis entre crochets comme suspect d' interpolation de la part des copistes, le chiffre, trois fois répété, de μυρίας, qui donne un nombre fabuleux“ *Notes philologiques* p. 394).

p. 83, 18 ἀναιρομένων] ἀργυριουμένων traditum retinens sic defendere conatur Isambert: „Les Grecs avaient une telle facilité à créer des mots, que Procope a pu prendre celui-ci pour dire que les Bandèles (Vandales) soldés, avaient pris les armes au nombre de 80, 000, non par suite d' une levée en masse, mais d'une convention de subside“ (*Notes philologiques* p. 395). — „ἀργυριουμένων] Quid hoc est? Dicere Procopius consuevit ὅπλα αἰρομένων, vel ἀναιρομένων“ Alemannus. — ἄρτι αἰρομένων Piccolos.

p. 83, 19 τίς ἂν] pro τίσιν tradito τίς legendum proposuit Alemannus, quem Maltretus atque Orelli sequuntur.

p. 84, 4 αὖ] „αὐτοῦ Maltretus e correctione Alemanni verissima pro αὐτῇ [*sic*]; locum enim denotare vult Procopius, nisi legere malimus ἐν αὐτῇ scil. Λιβύῃ“ Orelli.

p. 84, 10 εὐνοίᾳ] <τῆς> εὐνοίας male Alemannus (cf. praeterea quae adnotavit Orelli: „non opus habemus correctionibus Alemanni: ἐν τῇ ἀσφαλεῖ εὐνοίᾳ, vel ἐν τῷ ἀσφαλεῖ τῆς εὐνοίας“).

p. 84, 25 ὥστε] „ὅθεν?“ Dindorf sine necessitate.

p. 84, 25 sq. ἡ δήλωσις ἔσται] τίς δήλωσις ἔσται; Reiske.

p. 84, 26 ἢ γάρ] ᾗ τε Alemannus (ἦ τε γάρ secundum Dindorfium), quod Maltretus atque Orelli receperunt, hic tamen adnotat: „pro ᾗ τε tamen malim ἢ γάρ". — * * * γὰρ Dindorf, qui hoc loco maiorem quandam suspicari lacunam videtur.

p. 85, 2 προσεπιπέμψας] παρασεπιπέμψας exhibet editio Alemanniana, qua decepti ἢ μᾶλλον σπαρακτὰς ἐπιπέμψας Reiske, εἴ τι παράσημον, ἐπιπέμψας Piccolos coniecere.

p. 85, 12 sq. Χερρονησιωτῶν] χερρόνησος * * τῶν cum Maltreto Orelli („Deest hic aliquid, quod cum Maltreto asteriscis notavi").

p. 85, 18 ὥστε] de ὡς cogitavi.

p. 85, 27 ἐμβάλλοντες] ἐμβαλόντες Piccolos sine necessitate.

p. 86, 15 sq. δολερός, ὥς] de οἷός quoque cogitari posse videtur.

p. 87, 16 οὐδὲ θάτεροι] οὐδέτεροι Piccolos.

p. 88, 6 ἄλλα] ἀλλόκοτα Reiske sine necessitate.

p. 88, 14 sq. de τοῖς καθήκουσι τίνα τοῖς ᾠκημένοις (vel τοὺς ᾠκημένους) εἰργάσατο ἔργα cogitavi (τίνας τῶν ᾠκημένων minus probatur).

p. 88, 15 ἔργα] illud ἔρημα Reiskianum, quod Dindorf atque Isambert receperunt, Piccolo quoque mirum quantum arridet („est vraiment admirable"), parum tamen iis, quae a Procopio *De bellis* VII, 29 (p. 398, 10 sqq. ed. Bonn.) narrantur, congruere videtur.

p. 88, 23 Ἴβωρα] Ἴβηρα male Alemannus (Barb.).

p. 89, 12 Ἰουστινιανοῦ] Ἰουστίνου Haury (*Procopiana* II p. 39), quod num sit verum, equidem propter illud τοῦτον (vs. 15) valde dubito.

p. 89, 17 ἠπείρου] Ἠπείρου Dindorf — per operarum fortasse errorem.

p. 90, 4 sq. καίτοι ἀηθ<ῶς χρήμασι λογίζει [*sic*]> ἄν τις αὐτὸ βασιλείοις ἄγαν ἀσώτῳ ἐσομένῳ κτλ. sat mire Isambert adnotans: „Nous avons cru, pour innover le moins possible dans le texte, devoir l'écrire de manière à ce qu'il signifie: quoiqu'on pût penser que ce trésor (αὐτὸ) suffirait pendant 100 ans à celui qui se servirait, même d'une manière inusitée (ἀηθῶς) et excessive, ἄγαν ἀσώτῳ ἐσομένῳ, de ces richesses royales, χρήμασι βασιλείοις. On a objecté que notre texte restauré était peu conforme à la grammaire. On pourrait dire plutôt qu'il y a répétition dans la deuxième ligne qui suit" (*Notes philologiques* p. 396).

p. 90, 5 αὐτοὺς] αὐτὸ Alemannus (Maltreto tribuere hanc coniecturam videtur Orelli p. 287, 3).

p. 90, 5 ἀσώτῳ τε <καὶ μακροβίῳ vel καὶ φιλοδαπάνῳ> Reiske.

p. 90, 7 ἄλλοις ἅπασι τοῖς] τοῖς ἄλλοις ἅπασι sine necessitate coniecit Alemannus, quem Orelli secutus est.

p. 90, 12 sq. ἐς τὴν βασιλείαν] de ἐς τὸ βασίλειον cogitavi G lectionis ἐν τοῖς βασιλείοις ratione habita, quae ex $\overset{\text{ἐς}}{\text{ἐν}}$ τὸ $\overset{\lambda}{\text{βασί}}$ orta esse potest, — sed cf. p. 92, 19.

p. 90, 13 νόμῳ] πόνῳ sine ulla necessitate coniecit Alemannus, quem Orelli („sic Alemannus verissime . . . Nam imperatoris diligentiam laudat auctor, non vituperat") atque Dindorf sequuntur.

p. 90, 18 ἢ μέτρον uncis includens ἡμέτερον traditum defendere Isambert conatur: „Cependant le texte primitif pourrait se défendre; car il s'agit de l'impuissance où se reconnaît l'auteur de tout expliquer. Nous avons donc mis ἢ μέτρον entre crochets" (*Notes philologiques* p. 397).

p. 90, 18 φανῆναι] φάναι aut φῆναι Reiske.

p. 90, 21 sq. „πλοῦτον οὕτω] Nulla ante haec verba lacuna est, quam statuit Alemannus. Lege modo: πλοῦτον δὲ οὕτω etc. et omnia optime cohaerent" Orelli.

p. 91, 1 de πλοῦτον <οὖν> οὕτω cogitavi; de Orellio cf. supra.

p. 91, 9 ὑβρίζειν] ὕβριν vel ὕβρισιν Reiske sine necessitate.

p. 91, 12 αὐτῷ vix est quod in αὐτοῦ mutemus.

p. 91, 16 οὐκ delendum aut οὐ πολλῷ scribendum perperam proposuit Alemannus: cf. Haury *Procopiana* II p. 39.

p. 91, 21 sq. τῆς οἰκουμένης τὰ ἔθνη, ἅπερ, οὐδὲ ὅσον ἀκοῇ, πρότερον εἴδομεν Reiske perperam.

p. 91, 26 καί τι] Alemanni eiusve operarum errorem καίτοι, a Maltreto repetitum, correxit Reiske.

p. 92, 6 ἀπεμπολοῦντες] ἀπεμπολῶντες Dindorf perperam.

p. 92, 14 πόρου Z quoque (potius quam πόρον) praebent idque Maltretus coniecit; πόρον Alemannus in VW legit et in editionem suam recepit.

p. 92, 14 ἕνου] ἐνοῦ Alemanni editio, quam Isambert sequitur (cf. huius *Notes philologiques* p. 398); ἐνιαύσιον Reiske (πόρον cum Alemanno legens), quem Dindorf est secutus.

p. 92, 25 ὅσον, ὡς] ὡς (vel ὃ) πάλαι Reiske parum feliciter, neque melius ὅσον δηλαδὴ Piccolos, cum traditum illud πολλὰ (πολλαί, πολλοί) per meram esse dittographiam ortum appareat.

p. 92, 29 σωτηρίαν] „Quare σωτηρίαν? Magis placet: ἐλευθερίαν. Nisi forte de Iustiniano illud quoque credere non dubites" Alemannus.

p. 93, 11 τε οἱ] τέ οἱ Isambertii editio.

p. 93, 18 sq. Κοιαίστωρα et infra vs. 23 Κοιαίστωρ, quae in Isambertii editione leguntur, typothetae sunt errores.

p. 94, 1 λαθραιότατοι οἱ παρατυχόντες Orellii editio per typothetae, ut videtur, errorem.

p. 94, 6 διαφθείρειν] „Ita ex emendatione Alemanni legendum pro διαφέρειν, quod tamen fortassis tolerari possit, ut sit *dissociare*" Orelli.

p. 94, 23 ἐπεὶ ἐπεγένετο] ὧν ἐπεγένετο Reiske, quem Dindorf sequitur; „il serait plus simple de lire: ὅτ' ἐγένετο, ou bien ὅτ' ἐπεγένετο" Piccolos.

p. 94, 25 νόμους μὲν οὐδὲ ἐς ἀκοὴν ἔχοντα Alemannus teste Orellio (p. 288), qui illum sequitur; νόμου μὲν οὐδενὸς οὐδὲ ἐς ἀκοὴν ἐλθόντα Reiske, quem Dindorf est secutus.

p. 95, 6 ὅς γε] ὅς δὲ Alemanni errorem repetunt editores usque ad Dindorfium, qui ὅς δὴ scripsit.

p. 95, 9 τοῦτον] „Num τούτου (ἡ πολιτεία), scil. Ἰουνίλου?" Orelli, quem Isambert sequitur.

p. 95, 9 sq. „La leçon tronquée de P [= 𝔓], του τη, me fait croire qu'il y avait τοῦτον δὴ ἡ πολιτεία τὸν γέλωτα. . . Si l'on veut lire τούτου, il faudra supprimer l'article τὸν devant γέλωτα" Piccolos.

p. 96, 13 sq. „ὅσοι τὴν τιμὴν περὶ τὸν χρόνον τοῦτον ἐλάμβανον] Sic edidi partim ex Alemanni partim e Maltreti correctione. Edd. τῆς τιμῆς, quod tolerari possit ut sit: *qui dignitatis aliquid adepti sunt.* Sed praestat τὴν τιμὴν, scil. *praefectorum praetorii*" Orelli. — ὅσοι τι τιμῆς . . . ἐλάμβανον Piccolos parum feliciter (cf. Isambert p. 932: „la correction proposée, p. 541, de τὶ τιμῆς, idiotisme, pour τινὰ τιμὴν, . . . signifie selon la nouvelle explication de M. Piccolos: *ceux qui obtenaient un poste important*").

p. 96, 13 ὑπό] περὶ coniecit Alemannus.

p. 96, 20 iam haud scio an tradita lectio ἀλλ' ἀχρεῖοί τε καὶ τοῦ καιροῦ τὸ παράπαν ἀλλόκοτοι praeferenda sit, scil. ut ὄντες subintellegatur; cf. ex. gr. Philostrati *Vit. Apoll.* 6, 12 τρυφῆς οὐδαμοῦ μᾶλλον ἅπτονται σκωπτόλαι τε καὶ ὑβρισταὶ πάντες (scil. ὄντες), *ib.* 28, 25 τὰ ποικίλματα τῶν πέπλων ἐκ τῶν Ἑλλήνων σφίσιν ἥκει λόγων, Ἀνδρομέδαι καὶ Ἀμυμῶναι καὶ Ὀρφεὺς πολλαχοῦ (cf. Schmid *Der Atticismus* IV p. 109).

p. 96, 23 ταῦτα] ταὐτὰ <μὲν> Reiske.

p. 97, 1 „ante διεφθάρθαι videtur aliquid excidisse" Reiske.

p. 97, 25 ὠνομασμέναι] νενομισμέναι Struve.

p. 97, 29 οὐκ in editione Bonnensi per ipsius Dindorfii vel operarum errorem omissum de coniectura supplerunt Herwerden et Braun.

p. 98, 5 ἀπεμπολεῖν] ἀπεμπολᾶν Dindorf.

p. 98, 23 praeter ἐπιγενομένων Alemannus ἐπιγενησαμένων quoque coniecit, hoc sane parum feliciter, quamquam et Maltreto placuit et Orellio.

p. 99, 1 τῇ τῆς παρρησίας ἐξουσίᾳ] τῇ τῆς ἐξουσίας παρρησίᾳ vel περιουσίᾳ Alemannus, τῇ τῆς παρανομίας (vel ἀρχῆς) ἐξουσίᾳ Reiske, χήτει τιμωρούσης ἐξουσίας omnium infelicissime Piccolos. — Cf. Orelli p. 289 sq.: „vulgatam (τῇ τῆς παρουσίας ἐξουσίᾳ), quam retinuit et Maltret., recte tuetur Abreschius Dilucidd. Thucydd. pag. 643. ut sit pro τῇ παρούσῃ ἐξουσίᾳ".

p. 99, 6 Οὔννων] Οὕννων Isambert, quem ubique sic scribere, tribus locis exceptis (p. 11, 21; 32, 13; 36, 16), hic moneo.

p. 99, 9 ἀνεπήδησαν] ἀπεπήδησαν Herwerden sine necessitate.

p. 99, 14 δὲ] τε Reiske, quem Dindorf est secutus.

p. 99, 18 γεγενημένοι] ἐπιθέμενοι Reiske, ἐγκείμενοι vel ἐπικείμενοι Piccolos, — uterque sine iusta causa.

p. 99, 18 ἀναχωροῦσι] „malim cum Alemanno ἀναχωροῦντας" Orelli.

p. 99, 23 δοῖεν] ἀποδοῖεν Herwerden.

p. 99, 25 ἀντικαθιστάναι μὲν] „adde ἄλλον vel tale quid" Alemannus sine iusta causa, quem tamen Orelli est secutus.

p. 99, 26 ἐπὶ κοινῆς] „διὰ κενῆς?" Reiske perperam.

p. 99, 26 sq. ἐποιοῦντο] ἠποροῦντο Piccolos lectionis G ἐν σπουδῇ nescius.

p. 100, 2 ἅπαν] ἅπαντας Alemannus, ἅπαντα Maltretus (in mg. editionis suae).

p. 100, 4 Βαρσυάμην cum codicibus legit Isambert, qui et infra ubique hanc scripturam, quamquam codicibus invitis, textui Procopiano intrudere non dubitat.

p. 100, 13 „pro soloeco ἐς τῶν ἀδίκων etc. restitui ἐκ τῶν ἀδίκων, ex eodem Suida" male Orelli.

p. 101, 10 sq. „il faut lire ὄνομα τῇ πράξει τιθεὶς, à moins que l'auteur n'ait voulu, avec sa κακοζηλία ordinaire, faire la construction κατὰ τὸ νοούμενον, en prenant ὄνομα τιθεὶς comme équivalent de ὀνομάζων" Piccolos, cuius vulgatae illius lectionis τὴν πρᾶξιν defensio haudquaquam potest probari.

p. 102, 7 ὑδροχόαν] ὑδροχόην Alemannus sine necessitate coniecit, quem Dindorf est secutus.

p. 102, 10 ἀπεμπολεῖν] ἀπεμπολᾶν Alemannus (Barb.) sine iusta coniecit causa eumque Dindorf secutus est.

p. 102, 13 ὁμοίως] ὁμοία Isambert male 𝔓 secutus.

p. 102, 13 ἐνδεεστέρως μὲν] καὶ ἐνδεεστέρως δὲ Orelli „e Suida v. Συνωνή".

p. 102, 16 πρίασθαι] συνωνεῖσθαι audacius quam probabilius Küster ad Suid.

p. 103, 2 συνωνὴν] ἀννώνην coniecit Alemannus.

p. 104, 9 τε] δὴ vel γε Piccolos.

p. 104, 17 οὗτος <ὁ> ἀνὴρ Dindorf sine necessitate.

p. 105, 8 illud εἰπεῖν, quod in Z post ἡμῖν exhibetur, in σιγῇ male mutat Piccolos („le sens exige absolument qu'on lise ΣΙΓΗΙ = σιγῇ").

p. 105, 12 εἰρήσεται] ἃ εἴρηται Alemannus, quem Dindorf atque Isambert sequuntur.

p. 106, 4 sq. ἐδεδίεσαν] ἐδεδίεισαν Alemannus (Barb.).

p. 106, 8 „γῆν recte delet Reiske" Dindorf.

p. 106, 28 συνωναῖς] ἀννώναις Alemannus.

p. 107, 1 ἔστι] ἐστί Dindorf (tac.).

p. 107, 4-6 τιμημάτων — ἐπιτήδεια] οὐ τιμημάτων καταβαλλομένων οὐδ' ᾗπερ ἔξεστι καὶ ἐφίησιν ὁ παρὼν τῇ χρείᾳ καιρός, ἀλλ' ᾗπερ διώρισται. οὐ διερευνῶσι γὰρ εἴπερ αὐτοῖς τὰ ἐπιτήδεια Reiske sine iusta causa.

p. 107, 5 ἔξεστι] ἐξετέθη Alemannus perperam (cf. Orelli p. 293).

p. 108, 2 sqq. „ἀπολωλέναι — κακοὺς] In his Procopii manum videtur Suidas servasse, modo τὴν ante γῆν tollatur. Procopius: τετύχηκεν ἢ παντάπασιν ἀπολωλέναι, ἢ γῆν π. ἀπολιποῦσι τοῖς ἐγκειμένοις σφίσι διὰ ταῦτα κακοῖς κρύπτεσθαι, quorum structura quam sit perplexa satis arguunt vel ambages interpretis. Intelligit autem τοὺς . . . κακοὺς sycophantas supra memoratos. Porro παντάπασι [*vs. 5*] honestius locum tuetur in fine sententiae" Bernhardy ad Suid. s. ἐπιβολή, — parum recte.

p. 108, 4 οὐκ ἀπαξιοῦσιν] „Recte hoc quidem de ministris, nisi malumus de Iustiniano οὐκ ἀπηξίου. Et sic habet Suidas" Alemannus. — Firmatur tamen codicum Procopianorum lectio plurali ἀναγκάζουσι p. 107, 2.

p. 108, 13 κατατιθέντες] olim de κατετίθεσαν vel de <ἔτυχον> κατατιθέντες cogitavi, sed nil omnino mutandum: habemus enim hic nominativum absolutum.

p. 108, 14 post φορᾶς lacunam Dindorf indicavit praeeuntibus tam Alemanno, qui ἔλυον addebat, quam Reiskio („fort. addendum ἀπεσείοντο. Sed videtur plus et aliud quid deesse"), — scil. structura non intellecta: cf. quae modo ad p. 108, 13 adnotavimus.

p. 108, 20 πραττόμενος] „Alemannus mavult εἰσπραττόμενος. Sed πράττω pro εἰσπράττω est recentioris Graecitatis. Vide Ducang. v. πράττω" Orelli.

p. 108, 21 sq. „προσῆν δὲ αὐτοῖς] Sic Maltret. auctore Alemanno pro πρὸς τήνδε αὐτοῖς. Sed quae sequuntur, corrupta sunt vel in iis aliquid desideratur" Orelli perperam.

p. 108, 23 ἐγκειμένων] huic voci Alemannus (Barb.) stellulam adpinxit et in margine * * * scripsit fortasse locum mutilum esse suspicatus.

p. 109, 12 (*adnot. crit.*) illud ὠνίσασθαι, quod A exhibet, ex ὠνίνασθαι correctum esse videtur (potius quam vice versa).

p. 109, 27 <ἐκ> τῶν οἰκείων Alemannus, quem Orelli sequitur. Equidem, si quid omnino intercidit, <χρημά>των οἰκείων scripserim.

p. 110, 6 „ἄλλως τε καὶ κατὰ τοὺς πολέμους συχνοὺς γινομένους] Ita Maltret. pro κατὰ τοὺς πολεμίους, ut referatur ad οὐκ εἴων ἀφαιρεῖσθαι. Sed tunc redundat τῶν πλείστων. Quare legendum videtur cum Alemanno, ἄλλως τε καὶ κατὰ τοὺς πολέμους συχνῶς ἀπογινομένων (malim ἀπογενομένων) τῶν πλείστων" Orelli. — Perperam hunc locum ab utroque viro doctissimo vexari manifestissimum est.

p. 110, 6 τῶν delet Herwerden illius ὁμοῦ vs. 5 ratione habita.

p. 110, 18 Γραικοὶ] Γραῖκοι Dindorf (tac.), quem Isambert sequitur.

p. 110, 19 „ἀπὸ τῆς] Deest hic aliquid, fortasse Γραικίας. Vide ne reponas Ἑλλάδος, cum praecedat Γραικὸς" Alemannus, cui Dindorf verba videlicet, quae modo laudavimus, parum recte intellegens „Γραικίας vel Ἑλλάδος" attribuit, unde Piccolos quoque: „il faut lire, *avec Alemanni*, τῶν ἀπὸ τῆς <Ἑλλάδος>".

p. 110, 27 <καὶ τοὺς> ὡς ἥκιστα Reiske perperam.

p. 111, 5 ἐπράττοντο] praeter hoc εἰσεπράττοντο quoque legendum proposuit Alemannus idque Orelli recepit nimirum illorum, quae ipse paulo supra (ad p. 108, 20) monuit, oblitus. — ἐπράττετο traditum male retinet Isambert ad Iustinianum referens (*Notes philologiques* p. 402). Mihi quidem videtur fuisse
ον
fere in archetypo ἐπράττετο ὥστε, quod librarius pro ἐπράττετο
ου
ὥστε habuit fecitque inde ἐπράττετο οὔτε.

p. 111, 5 ὥστε πάντων] οὕτω πάντως Alemannus, quem Orelli est secutus; ὧν ἐπιλιπόντων audacius quam felicius Reiske, quae tamen Dindorf recipere non dubitavit.

p. 112, 9 κατέστησαν] κατεστήσαντο editio Isambertiana — per ipsius editoris typothetaeve errorem.

p. 112, 20 δὲ τούτοις τοῖς] vulgatam illam lectionem δὲ τούτοις (om. τοῖς) in δ' ἐν τοῖς mutandam proposuit Piccolos.

p. 113, 17 <ὑπὲρ> τοῦ τῆς στρατείας ὀνόματος Reiske.

p. 113, 21 Γαλατίας] pro γαλάτας, quod ipse in editione sua dedit, γαλατῶν coniecit Alemannus (Barb.).

p. 114, 9 τινὰ] Τίνα editio Orelliana — per ipsius nimirum editoris typothetaeve errorem.

p. 114, 12 ἀρχὴν (*sic legendum pro* ἀρχῶν)] ἀρχῶν male Isambert („N'étant pas fonctionnaires en titre, ils ne pouvaient venir qu' *à la suite* sur les états. — ἀρχὴν ἔσχατοι ne peut s'expliquer qu'en sous-entendant κατά" *Notes philologiques* p. 402 sq.)

p. 114, 15 τόδε] τὸ πρόσω Reiske perperam.

p. 114, 20 μετέχειν] συμμετέχειν Piccolos.

p. 114, 21 τῆς ἔνθεν] τοῖς ἐνδεεστέροις πλουτεῖν Reiske audacius quam felicius.

p. 114, 23 sq. τι ἀπάντων] pro διὰ πάντων tradito δὴ ἀπάντων legendum proposuit Alemannus (Barb.).

p. 115, 1 ζημίαν] ἐρημίαν Maltretus (in mg. editionis suae).

p. 115, 8 ἅτερος] ἕτερος editores praeter Isambertium — per Alemanni errorem.

p. 115, 10 οὗ] ὃ Reiske perperam, cf. Haury *Procopiana* II p. 23.

p. 115, 14 ἐς Βυζάντιον] ἐκ Βυζαντίου male Alemannus, quem Orelli sequitur, adnotans: „Fortassis tamen toleranda vulgata lectio, ut intelligantur arma clanculum Byzantium invecta in usum seditiosorum et conspiratorum".

p. 115, 19 δὲ (II)] de δὴ cogitavi.

p. 116, 2 κεκομισμένος <τὴν ἀρχὴν> Reiske codicum ZG lectionis nescius.

p. 116, 5 ὥνπερ] ἣν γὰρ Reiske parum feliciter.

p. 116, 8 τελώνιόν] τελωνεῖόν Dindorf, qui et infra ubique hanc praetulit formam.

p. 117, 2 τοῖς βασιλεῦσιν] „Forte τούτοις τοῖς βασιλεῦσιν. Nam loquitur de Iustiniano et Theodora" Orelli sine iusta causa.

p. 117, 8 ἀπέτεμον] „Si placet ἀπέτεκον. Nam inde τόκος in re nummaria" male Alemannus.

p. 118, 28 μόνῳ] νόμῳ Maltretus perperam.

p. 119, 23. 24. 25 οἵπερ . . . ταῖς συνηγορίαις . . . εἰώθεισαν Reiske parum feliciter.

p. 119, 25 τοῖς διαφερομένοις] codicum Procopianorum lectionem τοὺς διαφερομένους in textu retinens adnotat Orelli (p. 297): „Suidas . . . legit τοῖς διαφερομένοις, quod praefero ut sensus sit: *Causidicos iuratos litigantium patrocinium suscipere iussit Iustinianus*; ῥήτορες scil. i. q. συνήγοροι, ut explicat idem Suidas".

p. 119, 26 ἀσημίᾳ] ἀθυμίᾳ in textum suum recipiens Dindorf hoc tamquam Alemanni profert coniecturam, sed in editionis principis exemplari Barberiniano ad illud ἀσημίᾳ haece Alemanni manu adnotata legimus: „ἀθυμία C. Vat." (scil. Codex Vaticanus).

p. 120, 24 ἐπισκήψασαι] „Maltret. in marg. ἐπισκήψασθαι. Sed praeferenda correctio Alemanni ἐπισκηψάντων" Orelli.

p. 121, 1 πολιτείαν] ὑπατείαν Reiske perperam.

p. 121, 18 sq. καὶ μέντοι στρατιώτας] ἐν μέντοι στρατηγοῖς (cf. adnot. crit.) Alemannus („ponendum censeo στρατηγοῖς. Bene hi cum caeteris ἄρχουσι numerantur, non illi").

p. 121, 26 προσαιτητὰς] προςαίτας dubitanter Struve.

p. 122, 7 τὸ αἰσχροκερδίας (om. τῆς) editio Dindorfiana per ipsius nimirum editoris typothetaeve errorem, quem repetiit Isambert.

p. 122, 8 ᾔει] εἴη traditum retinens adnotat Orelli (p. 297): „Optativo utitur, quia dum haec scribebat Procopius, adhuc in vivis erat Iustinianus".

p. 122, 15 <οὐκ> ὀλίγην Reiske perperam (cf. Braun *Byzant. Zeitschrift* II p. 109), quem tamen Dindorf atque Isambert sequuntur.

p. 124, 1 ἐν δημοσίᾳ οἰκοδομίᾳ * * * Alemannus, quem Orelli, uti solet, sequitur, non indicans tamen lacunam.

p. 124, 1 γίνεσθαι] γενέσθαι editores inde a Maltreto (tac.).

p. 124, 21 καὶ prius omittunt editores praeter Isambertium per Alemanni errorem.

p. 125, 16 καὶ prius delet Dindorf.

p. 125, 19 ἢ τοῦ] de ἥ του cogitavi.

p. 125, 19 ὅτου] ὅπου Reiske; equidem de ὅπως cogitavi.

p. 126, 14 ἀνήκεστα] „Desideratur, κακὰ, vel δεινά" Alemannus perperam.

p. 127, 3 ἔμπροσθεν] ὄπισθεν male Dindorf (tac.), quem Isambert sequitur. — ἔμπροσθεν legendum esse Braun vidit conl. p. 49, 18.

p. 127, 3 sq. illius ἐν ab Alemanno suppleti, quod iam in archetypo super versum fuisse additum puto, vestigium in codice cum Z lectione ἐγένοντο servari crediderim, quae ex ἐγένετο (superscr. εν) facillime corrumpi potuit.

p. 127, 5 αὐτῷ sine iusta causa delendum esse censuit Reiske, quem Dindorf est secutus.

p. 127, 15 Ἀλεξανδρέων] ἀλεξάνδρου traditum retinens adnotat Alemannus: „Rectius forte Ἀλεξανδρέων. Scio tamen scriptores eius saeculi frequenter τὴν Ἀλεξάνδρου, τὴν Ἀντιόχου, τὴν Σελεύκου absolute dicere pro Alexandria, Antiochia, Seleucia, aliaque similia." — Illam lectionem traditam Maltretus quoque et Dindorf retinuerunt.

p. 128, 17 τῷ] τὸ mavult Piccolos.

p. 129, 2 δεινὰ ποιεῖσθαι (cf. adnot. crit.)] „Alemanno placet δεινὰ παθεῖν. Sed nihil mutandum: δεινὰ ποιεῖν, *irasci, indignari*. Sic apud Thucyd. V. 42. λεγομένων δὲ τούτων, οἱ Ἀθηναῖοι δεινὰ ἐποίουν" Orelli. — „δεινὰ πάσχειν (ou bien παθεῖν avec Alemanni)" Piccolos parum feliciter.

p. 129, 16 κειμένων] προκειμένων Reiske.

p. 130, 2 ἀκμάζοντας] haud scio an illud περιακμάζοντας Suidianum ex archetypi ἀκμάζοντας (superscr. τε) ortum sit.

p. 131, 3 ἐκκρούων] „Scribendum ἐκκρούοντες vel ἐκκρούσοντες. Nam sequitur μηχανῶνται" male Orelli.

p. 131, 5 ὠφειληκότων] ὀφεληκότων (*sic*) Alemannus (Barb.).

p. 131, 27 ὅλως] de ὅλα cogitavi.

p. 132, 1 ὡμολόγει] ἐξωμολόγει Reiske.

p. 132, 16 δι'] δὴ Dindorf (tac.) eiusve typotheta.

p. 132, 31 ἀδελφιδῷ] pro ἀδελφῷ tradito ἀνεψιῷ coniecit Alemannus.

p. 133, 2 οὐδὲ] οὐδὲν mavult Piccolos perperam.

p. 133, 6 ἡγμένος] ἐνηγμένος Reiske perperam.

p. 133, 12 ἀπεψηφίσατο] ἀνεψηφίσατο editio Dindorfiana per typothetae nimirum errorem, quem Herwerden correxit.

p. 133, 13 ἐπελθόντος] <ἐς χεῖρας> ἐλθόντος Haury (*Procopiana* II p. 42), quem fugit videlicet Liberium, quamquam invitum, ἐλθεῖν tamen ἐς χεῖρας Ioanni (cf. supra vs. 8 sq.).

p. 133, 17 ἦν] „Rectius fortasse, εἶναι" Alemannus perperam, quem tamen Orelli est secutus.

p. 134, 26 τούτων] τούτου vulgo (praeter Orellium) inde a Maltreto per huius errorem.

p. 135, 3 καὶ per Alemanni errorem omittunt editores solo Isambertio excepto.

p. 136, 19 μώμου] „Scribere voluit νόμου. Intelligit Procopius Iustiniani mandatum de cognoscenda Malthanae causa" Alemannus parum feliciter neque felicius Reiske διωγμοῦ legendum proposuit, quod Dindorf recepit.

p. 136, 25 τῶν τινες διεκώλυσαν <τῶν παρόντων vel πρασίνων> Reiske perperam.

p. 137, 3 δὲ] δὴ vel γε mavult Piccolos sine ulla necessitate.

p. 137, 3 ὅπῃ] ὅτε coniecit Alemannus.

p. 137, 4 τεκμηριούσθω] praeter hoc etiam <δύναται> τεκμηριοῦσθαι proposuit Alemannus vel priorem isti coniecturae locum attribuens.

p. 137, 5 ποιεῖται] „Rectius ἐποιεῖτο" Alemannus, qui propius ad traditam lectionem accessisset, si πεποίηται coniecisset, — sed nil omnino mutandum.

p. 137, 9 διδῷτο] „Legendum videtur διδοῖντο" Orelli, qui διδότω in textu suo habet.

p. 137, 20 μέτρου] „expectabam equidem ἀριθμοῦ" Herwerden.

p. 137, 23 τε] μὲν Reiske perperam.

p. 137, 25 κἂν] καὶ Dindorf (tac.) eiusve typotheta, unde καὶ <εἰ> Piccolos et Herwerden, καὶ <ὅσοις> Haury coniecerunt.

p. 137, 26 ἐπ' αὐτοῖς] ἀπ' αὐτοῦ antea coniecit Alemannus (in *Notis Censoriis*), quod Maltretus recepit.

p. 138, 2 ἐγκειμένους] ἐπικειμένους Herwerden.

p. 138, 9 οἴαις] οἷαι traditum retinens adnotat Orelli (p. 301): „Magis placet coniectura Alemanni οἴαις. Ferri tamen potest vulgata lectio".

p. 138, 15 ὄντος] οὕτως coniecit Alemannus, quem editores praeter Dindorfium secuti sunt.

p. 138, 16 κατὰ σταθμὸν] κατάσταθμον male coniecit Alemannus, quem Dindorf atque Isambert sequuntur.

p. 138, 20 τυγχάνειν <ἦν> εἰκὸς Piccolos sine necessitate.

p. 138, 29 δὲ] δ' ὃ Piccolos. — Equidem de δ' ἃ cogitavi, sed vix est, ut traditam mutemus lectionem.

p. 138, 29 ἐφύλασσόν] ἐφυλάσσοντό Reiske sine necessitate, quem tamen Dindorf sequitur.

p. 139, 2 τὰς τῶν] vulgatam illam lectionem τὰς πρὸς τῶν in τὰς προτέρας τῶν mutandam proponit Piccolos.

p. 139, 4-6 οὐδὲν γὰρ αὐτὸν — αὐτὸ τὸ] pro vulgata illa lectione οὐδὲν γὰρ αὐτὸς legendum ὁ δὲ βασιλεὺς οὗτος audacius quam felicius Reiske proposuit; ὁ δὲ καὶ αὐτὸ <τὸ> Piccolos adnotans: „Il est évident que ὁ δὲ se rapporte à Justinien, et que γὰρ a été substitué à καί. Ainsi, il serait inutile d' essayer, sous prétexte de se rapprocher davantage du ms., une restitution telle que celle-ci, par exemple, ὁ δ' ἄρα Ἰουστινιανός, ou bien ὁ δὲ τύραννος".

p. 139, 18 τῇ πολιτείᾳ] „Legendum videtur ἐν τῇ πολιτείᾳ" Orelli. — Equidem de ἐπὶ τῇ πολιτείᾳ cogitavi tam insequentis illius ἐπεφέρετο (cf. adnot. crit.) ratione habita quam conl. p. 140, 7 sq.

p. 139, 18 ἐφέρετο] ἐπεφέρετο traditum retinens defendit Isambert („ἐπεφ. dispense d' ajouter ἐν τῇ π., proposés par Orelli").

p. 139, 19 οἷον] χεῖρον Reiske.

p. 140, 18 ἐξανίσταντο] ἐξίσταντο Alemannus perperam.

p. 140, 19 ἥ γε] ἥδε editio princeps — per Alemanni errorem, quem Maltretus quoque (sed ἥγε in editione Veneta legitur) et Orelli repetunt; ἡ δὲ Isambert eiusve typotheta (cf. *Notes philologiques* p. 407).

p. 140, 19 προΐεσθαι] προσίεσθαι Piccolos („i. e. ὑποδέχεσθαι").

p. 140, 25 περὶ τὰ παρόντα ἔχοι] pro vulgato illo περὶ τάδε ἔχει Reiske ξυνέβη ἔχειν coniecit audacius quam felicius.

p. 141, 17 vulgatum illud ἐκ τῆς ἐπιπλεῖστον defendere frustra conatur Orelli adnotans (p. 301): „scil. ἡμέρας. Similiter ἡ νῦν, ἡ αὔριον, ἡ σήμερον".

# APPENDICI CRITICAE ADDENDA.

p. 2, 30 Βελισαρίῳ] Βελισσαρίῳ (βελισσαρίῳ) Alemannus, Eichel, Orelli, qui et infra ubique sic scribunt.

p. 3, 12 „ἐγκαταδυομένη τοῖς οἰκείοις ἐπιτηδεύμασιν] Vert.: intenta (vel potius intentam se simulans) domesticis negotiis, *indem sie sich ganz vertieft stellte in die Geschäfte des Hauswesens.* Suidas: καταδύεται — καταβυθίζεται" Orelli. — „*Cumque in studia illa sese immergeret*" vertit Maltretus.

p. 3, 16 ἐσεσήρει] ἐμεμήνει cum codicibus Procopianis legens adnotat Orelli: „Suidas legit ἐσεσήρει i. e. ἐδυσχέραινεν, ὠργίζετο· ἡ μεταφορὰ ἀπὸ τῶν ὀργιζομένων κυνῶν (*die Zähne fletschen*), λίαν γὰρ εἰς αὐτὴν ἡ Θεοδώρα ἠγριαίνετο καὶ ἐσεσήρει. Sed metaphora haec aliena a consilio auctoris et praeferenda omnino Codicum lectio".

p. 18, 7 ἄπειπον] ἄπειπε editores inde a Maltreto de Alemanni coniectura („forte ἄπειπε").

p. 18, 19 „συμβήσεται] Futurum plane importunum et contextus flagitat ut legamus ξυνέβη" male Orelli.

p. 20, 6 τούτου] τοιούτου codicis 𝔓 librarii errorem (τοῦ quoque insequens omittentis) in margine editionis suae notavit Maltretus, quod pro huius videlicet coniectura habens praeferebat Orelli, recepit (tac.) Isambert, sed τούτου scribendum vidit Piccolos.

p. 32, 8 ἀδρὸν] „sensus potius requirit ut scribatur ἁβρὸν" Küster (ad Suid.).

p. 36, 9. — *In adnotationis nostrae ad hunc locum vs. 3 (p. 153) post illa* „in Notis Censoriis" *adde*: cui Dindorf (in adnot. crit.) emendationem Maltretianam αὐτόπτῃ parum recte attribuit. — *Ibidem pro* <πάντων> *legendum* <πάντων vel ἁπάντων>.

p. 36, 11 νωθεῖ] illud νωθὴς Suidianum „magis placet" Orellio.

p. 41, 4 αὐτοῖς] „Videtur legendum αὐταῖς filiabus his, non αὐτοῖς scil. Βενέτοις" male Orelli.

p. 42, 25 τριῶν] τῶν τριῶν cum codice „Med(iolanensi)" Dindorf, quem sequitur Isambert.

p. 62, 5 φόνος] φόνον (*sic*) Alemannus (Barb.).

p. 62, 11 οὗ δὲ] οὐδὲ male Alemannus (Barb.).

p. 64, 18-22 (*testimon.*) Suidae locus s. ἀπόσιτος sic mihi legendus videtur: „ὁ δὲ ἀπόσιτος ἡμέρας τε καὶ νύκτας δύο πολλάκις ἔμενε" καὶ „ταῖς τοῦ Πάσχα ἡμέραις ἀπόσιτος ἦν ὕδατι βραχεῖ ἀποζῶν".

p. 82, 21 „καὶ αὐτοὺς] deest hic aliquid" Maltretus.

p. 99, 6 „ἀνδραποδίσασι [*sic*], D(indorf), au lieu de ἀνδραποδήσασι de V et P [=𝔓], à la place duquel A (l e m a n n i) proposait ἀνδραποδήσαντι καὶ λῃιζ." [*sic*], — si qua fides Isambertio, cuius sunt verba modo prolata (*Notes philologiques* p. 399) quemque frustra tam illud ἀνδραποδίσασι Dindorfio quam ἀνδραποδήσασι codici V tribuere obiter monemus.

p. 99, 10 ἀπεροῦντα σφίσι] pro tradito illo ἅπερ οὖν τὰ σφίσι „A l e m a n n u s legendum censet ἀπαιτοῦντα σφᾶς" teste Orellio (p. 290, 16). — Illud ἀπεροῦντα Maltretianum Alemanno parum recte attribuit Dindorf (in adnot. crit.).

# AVCTORVM INDEX IN ADNOTATIONE CRITICA ET IN APPENDICE LAVDATORVM.

1. A l e m a n n u s (Barb.). — Sic eas Alemanni notas significamus, quae ipsius manu scriptae in margine exemplaris editionis principis leguntur, quod olim ab editore Iacobo Mercati donatum („Νικόλαος Ἀλαμάνος Ἰακώβῳ Μερκάτῳ τῷ Σιλβεστρινῷ τὰ ἑλληνικὰ σοφῷ, τῆς τε τυπογραφίας ἐπανορθωτῇ καὶ ἐν τοῖς μάλιστα φίλῳ μνείας χάριν") nunc Romae in bibliotheca Barberiniana (sub nota *I. V. 44*) adservatur, ubi id contulimus.
2. A l e m a n n i *Notas Censorias* in calce editionis principis additas partim ex hac ipsa editione exscripsimus partim ex Orelliana et Dindorfiana, quia illam Alemannianam Iurievi non habemus.
3. A l e m a n n u s praeterea notas haud paucas *in codicis V margine* adscripsit, quem contulimus.
4. A l e m a n n i denique coniecturas aliquot, quae neque in exemplari illo Barberiniano neque in codicis V margine neque in *Notis Censoriis* inveniuntur, e Dindorfii adnotatione critica exscripsimus, qui eas ex editionis principis exemplari Holsteniano sumpsisse videtur [1]).

1) Cf. Dindorfii verba in edit. Bonn. praef. p. XXXIII: „Alemannus . . . novam, ut videtur, editionem meditatus, veteris exemplar correctionibus suis, partim ex codice Mediolanensi ductis, et additamentis auctum reliquit, quod in bibliotheca Barberiniana asservatur. Ea omnia aliud in exemplar eiusdem editionis ab se transscripta cum L. Elzevirio olim communicavit Lucas Holstenius (conf. Holstenii epist. ad Elzevir. p. 263 ed. Boisson.): cuius libri usum nos Gaudoeveri, Academiae Rheno-Traiectinae doctoris clarissimi, benevolentiae debemus".

5. H. Braun *Zum Texte des Prokop* in *Byzant. Zeitschrift* vol. II (1893) p. 109.
6. Gabrielis Destunis coniecturam (ad p. 12, 4) ex eius exemplaris editionis Isambertianae margine exscripsi, quod mihi Victor Iernstedt magister dilectissimus dono dedit.
7. H. Eckardt *De Anecdotis Procopii Caesariensis,* Regimonti Pr. 1861.
8. J. Haury *Procopiana* (I). Augsburg 1891.
9. J. Haury *Procopiana.* (II. Teil). München 1893.
10. H. van Herwerden *Procopiana* in *Mnemosynes* N. S. vol. IX (1881) p. 154—157.
11. F. A. Isambert *Notes philologiques* in ipsius editione, p. 365—407. (Eiusdem *Notes de l'auteur* ibid. p. 543—548, ut par est, sprevimus).
12. Cl. Maltreti *Lectiones variae et emendationes Arcanae Historiae* (ipsius edit. p. 213—216) ad fidem editionis Venetae (p. 384 sq.) laudavimus, quia illam Iurievi non habuimus.
13. I. C. Orelli *Notae criticae et grammaticae in Procopii Historiam Arcanam* in ipsius editione, p. 257—301.
14. N. Piccolos *Quelques remarques sur le texte* (des Anecdota) in editione Isambertiana, p. 535—542.
15. Iac. Reiskii coniecturas e Dindorfii adnotatione critica exscripsimus [1]).
16. I. Scheftlein *De praepositionum usu Procopiano*, Ratisbonae 1893.
17. C. L. Struve in eius *Opusculorum selectorum* vol. I (Lipsiae 1854) p. 243—245.

1) Cf. Dindorf l. c. p. XXXIV: „Reiskii in Historiam arcanam emendationes, mense Februario a. 1751. perscriptas, . . . de margine exemplaris Alemanni, quod post mortem Reiskii in bibliothecam regiam Havniensem est illatum, meos in usus descripsit O. D. Blochius".

# INDEX
# NOMINVM ET RERVM

# INDEX.

# ADDENDA ET CORRIGENDA.

## *a*) IN ANECDOTON TEXTV:

p. 16, 11 *scribe* θεοῦ.
p. 29, 17 *dele uncos, quibus* ἐξ *inclusum est.*
p. 45, 17 *lege* ἐνεχείρει, ἐπεὶ οὐκ *deleto* <δὲ>.
p. 45, 19 *lege* <καὶ> τῶν.
p. 59, 23 sq. *scribe* ἀμωσγέπως.
p. 80, 4 *pro* ἐπιστέλλειν *repone* ἐπέχειν.
p. 84, 16 *dele virgulam.*
p. 89, 14 *lege* Καλχηδόνος.
p. 94, 23 *dele virgulam et illud* <ἐπεὶ> *insequens.*
p. 114, 12 *scribe* ἀρχὴν.

## *b*) IN TESTIMONIIS:

p. 81 *adde* 17-19 Χρυσομαλλώ. ὄνομα ὀρχηστρίδος, εἶτα ἑταίρας. ἤκμαζεν ἐπὶ Ἰουστινιανοῦ καὶ Θεοδώρας Suid. s. v.

## *c*) IN ADNOTATIONE CRITICA:

p. 1, 1 *adde* Operis inscriptionem Suidas suppeditat (cf. append. p. 145), unde τὰ καλούμενα * addidi : om. AV
p. 1, 6 *dele* δ' οὖν] γοῦν?
p. 8, 9 *post* WG *adde* Struve.
p. 9 *adde* 24 ὧνπερ * ZG : τῶνπερ v (per Alemanni errorem).
p. 17, 4 *dele* cf. append.; *idem fac* p. 34,6. 102,6. 110,10. 137,8. 11.
p. 18, 3 sq. *dele* ἀπεῖπον — Alemanno.
p. 21, 9 *dele* Alemannus, Dindorf.
p. 22, 3 *stellulam dele et post* Alemanno *adde* (praeter Orellium).
p. 22 *adde* 17 τοῦ Ῥωμαίων στρατοῦ?
p. 23, 2 *stellulam dele*; *idem fac* p. 54, 2. 3. 102, 15.
p. 23, 3 *pro* Alemanno *lege* Maltreto; *similiter corrige* p. 36, 5. 56, 3. 71, 9. 99, 2. 113, 12.
p. 28, 2 *adde stellulam post* εἰθισμένον.
p. 29, 4 *pro* delevit *lege* delet.
p. 31 *adde* 1 ἔδοξαν] ἔδειξαν (ει ex ο) A (sic).
p. 36, 7-8 *lege* γινο$^{μν'}$ W.
p. 42 *adde* 1 διατραπεῖσάν G (puncto sscr. et in mg. repetito ibidemque σημείωσαι adscr.) *atque* 23 sq. σημείωσαι W mg.
p. 42 *dele adnot. ad vs. 25*; *idem fac ad* p. 80,4. 88,8 sq. 112,20.
p. 45 *adde* 15 ὁ δὲ <Ἰουστινιανὸς> Haury *et infra lege* 17 ἐπεὶ * ZG : ἐπεὶ δὲ v cum Alemanno (tac.), *addeque* 19 καὶ * supplevi : om. ZGv; τῶν <τέ> οἱ quoque possis.
p. 46, 6 *lege* om. ZG(mg. σημείωσαι) v.
p. 47, 1 sq. *dele stellulam et* ex Z recepi.
p. 47, 3 *dele* : *et lege deinceps* om. G v (inde a Maltreto).
p. 48, 15 *adde* ἀλλὰ G.
p. 49, 3 *pro* Dindorf *lege* Maltretus.
p. 54, 2 *et* 3 sq. *pro* cum Alemanno *lege* inde a Maltreto de Alemanni coniectura.

p. 59, 4 *post* ζήτει *adde* (τὸ ἐκείνη g).
p. 59, 5 *pro* Zv *lege* Z.
p. 59 *lege* 23 sq. ἀμωσγέπως Z : ἀμηγέπη G (fin. vs.).
p. 60, 4 *adde* διοικουμένῳ Haury.
p. 62, 2 *pro* ZG *lege* Z (εις sine spir. signo W mg., nisi quidem hoc ειρ est ad εἰργάζετο referendum) G.
p. 63, 8 *post* Zv *adde* (praeter Dindorfium, cf. append.).
p. 65, 5 sq. *dele* μὴ * ZG — Alemanno.
p. 67, 1 *pro* * scripsi *lege* MN, Maltretus (cf. append.).
p. 72, 6 *dele* οὐ minus placet.
p. 80, 12 *lege* τινὶ ἐξουσίᾳ Reiske (cf. append.).
p. 89, 14 *adde* Καλχηδόνος * scripsi : χαλκηδόνος ZGv.
p. 94, 12 *pro* 23 ἐπεὶ — ZGv *repone* 23 sq. versui, qui verba ἐπεγένετο — τιμῆς continet, punctum adscr. in mg. G.
p. 95, 4 *ante* Piccolos *insere* Toupius.
p. 98, 6 *adde stellulam post* ἐπιγενομένων.
p. 102, 10 *lege* μὲν * ZG(duobus punctis sscr. alio atramento).
p. 102, 17 *et* 111, 5 *dele* ceterum cf. append.
p. 103, 3 *et* 107, 5 *pro* v cum Alemanno *lege* Dindorf (tac.).
p. 104, 7 *pro* v inde a Maltreto *lege* Alemannus.
p. 107 *adde* 24 [περὶ ἐπιβ]ολῆς G mg.
p. 108, 15 *pro* κτῆσαν *lege* κτῆσιν.
p. 112 *adde* 22 ἔσχε * Z : ἔσχεν v.
p. 115, 5 *dele* οὗ] ὃ Reiske.
p. 116, 4 *lege* τι ZG : τις v praeter Orellium (τι „edidi e lectione marginali Maltreti . . . Vidit et Alemannus vertens *si quid mercium*").
p. 120 *adde* 17 sq. ἱππόδρομοι (prius ι ex υ, ut vid.) δὲ καὶ κυνηγέσια, ἐκ τοῦ ἐπιπλεῖστον ἅπαντα ἤργει G in fol. 155r margine superiore, hoc solum loci omissi frustulum exhibens.
p. 138, 2 *lege* 7. 8 ἄχρις ἐς G; *adde* 8 *ante* ἐλε|νούπολιν.
p. 138, 9 *lege* ἐσαγγελλόμενα * WG : ἐπαγγελλόμενα A; εἰσαγγελλόμενα v (per Alemanni errorem).
p. 140 *adde* 16 δὲ G, Reiske : om. W.
p. 141, 13 *post* WG *adde* Piccolos.

d) IN APPENDICE CRITICA:

p. 149 *dele quae ad p. 20, 6 adnotata sunt (cf. p. 178).*
p. 165 *pro illis* Mihi — ἐπέχειν εἰώθει, *quae ad p. 80, 4 adnotavi, repone* Cf. *De bellis* III, 8 p. 347, 22 ed. Bonn. ὅσα δὴ ἐπέχειν τῶν οἰκετῶν τοῖς ἀτιμοτάτοις εἰώθεσαν.
p. 169 *iis, quae ad p. 94, 23 adnotavi, subiunge* <ἐπεὶ> ἐπεγένετο Haury (*Procopiana* II p. 40).
p. 177 *adde* p. 139, 13 ἀγγαροφορεῖν] ἀγροφορεῖν ex Alemanni editione repetens adnotat in mg. Maltretus: „ἀγγαροφορεῖν, ἴσ(ως) ἀχθοφορεῖν" (hoc ἀχθοφορεῖν Alemanni esse coniecturam ait Orelli p. 301).

e) IN INDICE:

*adde* δεξαμενή 15, 20. — διαγραφαί 106, 29. 108, 8. — *s. v.* δέσποινα 48, 11. — *s. v.* δορυφόροι 13, 11.— *s. v.* θέατρον 71, 10. 81, 21.

# CONSPECTVS.

# УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ
## ИМПЕРАТОРСКАГО
## ЮРЬЕВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА

выходятъ съ 1893 г. въ неопредѣленные сроки, не менѣе 4 разъ въ теченіе года.

**Ученыя Записки** распадаются на два отдѣла: оффиціальный и научный.

Въ оффиціальномъ отдѣлѣ помѣщается годовой отчетъ Университета, актовыя рѣчи, отзывы о диссертаціяхъ, обозрѣніе лекцій и т. п.

Въ научномъ отдѣлѣ помѣщаются работы преподавателей Университета; изъ студенческихъ же работъ печатаются (по возможности въ извлеченіи) лишь сочиненія, удостоенныя золотой медали.

Научныя статьи **Ученыхъ Записокъ** печатаются какъ на русскомъ языкѣ, такъ и на одномъ изъ болѣе распространенныхъ западно-европейскихъ языковъ, а также на латинскомъ, по выбору автора.

Подписка принимается Правленіемъ Императорскаго Юрьевскаго Университета.

Подписная цѣна 6 руб. въ годъ.

Редакторъ **Е. Шмурло.**