TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL 350

L.Roots, E.Sakkov

KÕRGEM MATEMAATIKA

1982

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Teoreetilise mehaanika kateeder

L.Roots, E.Sakkov

KÕRGEM MATEMAATIKA

Õppevahend majandusteaduskonna üliõpilastele

TARTU 1982

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nõukogus 19.veebruaril 1982. aastal.

I FUNKTSIOONI TULETIS JA DIFERENTSIAAL

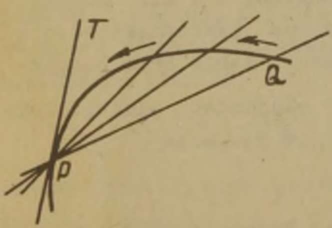
§1. TULETISE MÕISTE JUURDE VIIVAD ÜLESANDED

Diferentsiaalarvutuse loomiseks aitasid oluliselt kaasa kaks järgmist suure praktilise tähtsusega ülesannet: kõvera puutuja võrrandi koostamine ja mitteühtlase liikumise hetkelise kiiruse määramine. Vaatame neid ülesandeid lähemalt ja veendume, et nad on matemaatilisest küljest sarnased.

1. Ülesanne kõvera puutujast. Anname kõigepealt puutuja definitsiooni.

Olgu antud mingi kõver ja olgu P üks selle kõvera punkt (joon.1). Võtame punkti P naabruses teise punkti Q ja joonestame lõikaja PQ. Kujutleme, et punkt Q läheneb kõverat mööda liikudes punktile P. Seejuures pöördub lõikaja PQ ümber punkti P, üha enam lähenedes teatavale piirsirgele PT; see piirsirge ongi kõvera puutujaks punktis P. Tuginedes sellele tähelepanekule anname puutuja definitsiooni:

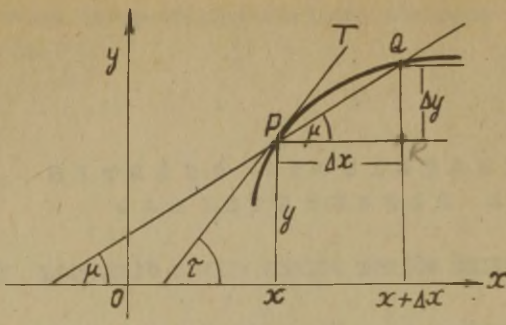
kõvera puutujaks punktis P on piirsirge, millele lõikaja PQ tõkestamatult läheneb, kui punkt Q läheneb tõkestamatult punktile P.



Joon. 1.

Selleks, et määrata kõvera puutuja asendit, on vaja leida ta tõus (üks punkt on meil teada).

Olgu meil antud mingi kõver oma võrrandiga $y = f(x)$ ja olgu $P(x,y)$ üks selle kõvera punkt (joon.2). Võtame selle punkti naabruses teise



Joon. 2.

punkti Q. Kasvagu kõvera punkti abstsiss ja ordinaat üleminekul punktilt P punktile Q vastavalt Δx ja Δy võrra. Siis punkti Q koordinaadid on $x+\Delta x$ ja $y+\Delta y$.

Nagu näeme kolmnurgast PQR, on lõikaja PQ tõus

$$\tan\mu = \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

Puutuja PT on lõikaja PQ piirsirge, kui $\Delta x \to 0$. Puutuja tõus on seega lõikaja tõusu piirväärtus, kui $\Delta x \to 0$, e.

$$\tan\tau = \lim_{Q\to P} \tan\mu = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} . \qquad (1.1)$$

Nagu näha, avaldub puutuja tõus funktsiooni ja argumendi muutude suhte piirväärtusena, kui argumendi muut läheneb nullile.

2. Mitteühtlase liikumise kiirus. Vaatleme mingi keha (näit. rongi) liikumist mööda sirgjoonelist teed. Asetsegu ta ajahetkel $t = t_1$ lähtepunktist kaugusel $s = s_1$, mingil teisel ajamomendil $t = t_2$ olgu ta kaugus lähtepunktist $s = s_2$. Ajavahemiku $\Delta t = t_2 - t_1$ jooksul läbis keha teepikkuse $\Delta s = s_2 - s_1$. Suhe $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ väljendab punkti liikumise keskmist kiirust ajavahemiku Δt jooksul:

$$v_k = \frac{\Delta s}{\Delta t} .$$

Kui liikumine on ebaühtlane, siis keskmine kiirus ei iseloomusta küllaldaselt tegelikult toimuvat liikumist. Selleks, et seda paremini teha, leiame kiiruse antud momendil(nn.hetkelise kiiruse). Selleks on piirväärtus

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} . \tag{1.2}$$

Paneme tähele, et ka siin avaldus tulemus funktsiooni ja argumendi muutude suhte piirväärtusena, kui argumendi muut läheneb nullile. Kiiruse mõiste ei pea tingimata olema seotud mehaanilise liikumisega. Nii võime rääkida temperatuuri muutumise kiirusest, tootmiskiirusest jne.

Kui mingit muutumise protsessi iseloomustab funktsioon $y = f(x)$, siis võib nähtuse konkreetse sisu kõrvale jätta ja rääkida ainult funktsiooni muutumise kiirusest. Viimaseks on piirväärtus

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} . \tag{1.3}$$

Ülaltoodud kaks ülesannet andsidki tõuke tuletise mõiste sissetoomiseks XVII sajandil Leibnizi ja Newtoni poolt.

§ 2. TULETISE DEFINITSIOON

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$. Anname argumendile muudu Δx, siis argumendi uueks väärtuseks on $x + \Delta x$. Uuele Argumendi väärtusele vastab funktsiooni väärtus $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$. Arvutame funktsiooni muudu

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Moodustame funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

Nagu ülal nägime, kujutab see funktsiooni $y = f(x)$ muutumise keskmist kiirust. Funktsiooni muutumise tõelise kiiruse saame, kui läheme piirile

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

Saadud piirväärtust nimetataksegi funktsiooni $y = f(x)$ tuletiseks. Seega:

funktsiooni <u>tuletis</u> on piirväärtus, millele läheneb funktsiooni ja argumendi muutude suhe argumendi muudu tõkestamatul lähenemisel nullile.

Funktsiooni tuletist tähistatakse sümboliga y' või f'(x), samuti $\frac{dy}{dx}$, seega

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} ,$$

$$\text{e.} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} . \tag{1.4}$$

Tuletise definitsioonist järeldub, et funktsioonil on argumendi väärtusel x siis tuletis, kui piirväärtus $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ on olemas. Et see piirväärtus eksisteeriks, peab $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, mis on aga funktsiooni pidevuse tunnus. Seega on funktsiooni tuletise olemasoluks tarvilik funktsiooni pidevus.

Funktsiooni tuletise leidmist nimetatakse diferentseerimiseks. Tuletise leidmiseks on vaja:

1. fikseerida argumendi mingi väärtus x ja arvutada sellele vastav funktsiooni väärtus;

2. anda argumendile muut Δx ja arvutada uuele argumendi väärtusele $x + \Delta x$ vastav funktsiooni väärtus;

3. arvutada funktsiooni muut Δy ;

4. moodustada suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

5. leida selle suhte piirväärtus eeldusel, et argumendi muut Δx läheneb nullile.

Pöördume veelkord tagasi eelmises paragrahvis vaadeldud ülesannete juurde. Nagu valemitest (1.1) - (1.3) näha, on ka siin tegemist tuletistega. Võrreldes valemeid (1.1) ja (1.4) näeme, et

$$\tan \tau = y' .$$

See tähendab, et funktsiooni tuletise geomeetriliseks vasteks on funktsiooni graafiku puutuja tõus punktis, mille abstsiss on x. Kuna graafiku puutuja tõus on igas punktis reeglina erinev (x funktsioon), siis järeldub siit, et ka funktsiooni tuletis on muutuja x funktsioon.

Tuletise füüsikaliseks vasteks, nagu see järeldub valemitest (1.2) - (1.4), on mingi protsessi toimumise kiirus.

N ä i d e 1. Leida funktsiooni $y = x^2$ tuletis.

Tuletise leidmisel kasutame ülalkirjeldatud 5-sammulist skeemi:

1. x $\qquad y = x^2$,
2. $x + \Delta x$ $\qquad y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$,
3. Δx $\qquad \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = (2x + \Delta x)\Delta x$,
4. $\qquad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$,
5. $\qquad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

Seega $y' = 2x$.

N ä i d e 2. Leida funktsiooni $y = \sqrt{x}$ tuletis.

1. x $\qquad y = \sqrt{x}$,
2. $x + \Delta x$ $\qquad y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$
3. Δx $\qquad \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$
4. $\qquad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$,
5. $\qquad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} ,$$

s.o. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

§ 3. TEOREEME TULETISE KOHTA

Oletame siin ja edaspidi, et kõik funktsioonid, millega me töötame, on diferentseeruvad, seega ka pidevad.

<u>Teoreem</u> 1. Konstandi tuletis on null.

T õ e s t u s. Olgu meil antud funktsioon $y = C$. Selle funktsiooni tuletise leidmiseks kasutatakse diferentseerimise skeemi (§ 2):

1. x $\qquad y = C$,

2. $x + \Delta x$ $\qquad y + \Delta y = C$,

3. Δx $\qquad \Delta y = 0$,

4. $\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$,

5. $\qquad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$,

s.o. $C' = 0$, m.o.t.t. (1.5)

<u>Teoreem</u> 2. Argumendi tuletis on 1.

T õ e s t u s. Analoogiliselt eelmise teoreemi tõestusele:

1. x $\qquad y = x$,

2. $x + \Delta x$ $\qquad y + \Delta y = x + \Delta x$,

3. Δx $\qquad \Delta y = \Delta x$,

4. $\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$,

5. $\qquad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$,

s.o. $x' = 1$, m.o.t.t. (1.6)

<u>Teoreem</u> 3. Funktsioonide algebralise summa tuletis võrdub liidetavate tuletiste algebralise summaga.

T õ e s t u s. Olgu meil tegemist funktsiooniga

$$y = u(x) + v(x).$$

Kui argumendile x anda muut Δx, siis ka funktsioonid u ja v saavad vastavalt muudud Δu ja Δv ning sellepärast ka y saab muudu Δy. Kasutame jälle tuletise leidmise skeemi.

1. x $\qquad y = u + v$,

2. $x + \Delta x$ $\qquad y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$,

3. Δx $\qquad \Delta y = \Delta u + \Delta v$,

4. $\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$,

5. $\qquad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$,

kust $y' = u' + v'$,

s.o. $(u + v)' = u' + v'$, m.o.t.t. (1.7)

On selge, et teoreem kehtib ka siis, kui meil on tegemist funktsioonide vahega või enam kui kahe liidetavaga.

N ä i d e. $(x^2 + x + 1)' = (x^2)' + x' + (1)' = 2x + 1.$

<u>Teoreem</u> 4. <u>Kahe</u> funktsiooni korrutise tuletis võrdub esimese funktsiooni tuletise ja teise funktsiooni korrutisega, millele on liidetud teise funktsiooni tuletise ja esimese funktsiooni korrutis.

T õ e s t u s. Olgu $y = u(x)v(x)$. Anname argumendile x muudu Δx, siis vastavalt tuletise leidmise üldeeskirjale saame:

1. x $\qquad y = uv$,
2. $x + \Delta x$ $\qquad y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$,
3. Δx $\qquad \Delta y = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$,
4. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} ,$$
5. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} v\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0}\left(\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) .$$

Kuna u ja v ei sõltu argumendi muudust Δx, siis

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} v\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v = u'v ,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = uv' .$$

Kuna u on eelduse põhjal diferentseeruv funktsioon, siis on ta ka pidev ja $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$. Seega

$$y' = u'v + uv' , \text{ m.o.t.t.} \qquad (1.8)$$

<u>Järeldus</u>. Konstantse teguri võib võtta tuletise märgi ette.

Tõepoolest, olgu meil funktsioon $y = cv$. Eelmise teoreemi põhjal $y' = c'v + cv'$. Kuna konstandi tuletis on null, siis

$$(c\,v)' = c\,v' .$$

N ä i d e. Olgu $y = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$. Siis

$$y' = \frac{2}{3}(x\sqrt{x})' = \frac{2}{3}\left(1\cdot\sqrt{x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x} .$$

Teoreem 5. Jagatise tuletis on võrdne murruga, mille nimetajas on murru nimetaja ruut ja lugejas murru lugeja tuletis korrutatud nimetajaga miinus lugeja korrutis murru nimetaja tuletisega.

T õ e s t u s. Võtame funktsiooni $y = \frac{u(x)}{v(x)}$, kus u ja v on funktsioonid, millel on tuletised x järgi ja $v \neq 0$. Siis

1. $x \qquad y = \frac{u}{v}$,

2. $x + \Delta x \qquad y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$,

3. $\Delta x \qquad \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$,

4. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)},$$

5. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v} =$$

$$= \frac{v u' - u v'}{v^2 + 0}.$$

Järelikult $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ m.o.t.t. (1.9)

Seda teoreemi võib tõestada ka teisiti. Kirjutame avaldise $y = \frac{u}{v}$ kujul $u = vy$ ja kasutame korrutise diferentseerimise valemit (seejuures peame ilmselt eeldama, et y' eksisteerib).

$u' = v'y + vy' \qquad vy' = u' - v'y = u' - v'\frac{u}{v}$,

$$y' = \frac{u'}{v} - v'\frac{u}{v^2} = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

N ä i d e. Olgu $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Siis

$$y' = \frac{(x^2 - 1)'(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)\,2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

<u>Teoreem</u> 6. Funktsiooni pöördfunktsiooni tuletis on võrdne antud funktsiooni tuletise pöördväärtusega.

T õ e s t u s. Olgu antud mingi funktsioon $y = f(x)$, mille tuletist argumendi x järgi tähistame sümboliga y'_x. Kui funktsioon $y = f(x)$ on pidev, siis on teatavasti pidev ka tema pöördfunktsioon $x = g(y)$. Viimase funktsiooni korral on sõltumatuks muutujaks y ja sõltuvaks x (argumendi ja funktsiooni osad on võrreldes esialgse funktsiooniga ära vahetatud). Vastavalt definitsioonile on funktsiooni $x = g(y)$ tuletis muutuja y järgi

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} .$$

Teostame piirväärtuse märgi all lihtsa teisenduse $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ ning asendame tingimuse $\Delta y \to 0$ tingimusega $\Delta x \to 0$ (mõlemad tingimused on funktsioonide $y = f(x)$ ja $x = g(y)$ pidevuse tõttu samaväärsed). Saame

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} .$$

Viimase murru nimetajas tunneme ära y tuletise x järgi. Seega oleme näidanud, et

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad \text{m.o.t.t.} \qquad (1.10)$$

N ä i d e. Olgu tarvis leida funktsiooni $y = \sqrt{x}$ tuletis. Selle funktsiooni pöördfunktsiooniks on $x = y^2$. Kasutame äsja tõestatud teoreemi, mille kohaselt

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

Jõudsime samale tulemusele nagu varem.

§ 4. LIITFUNKTSIOONI TULETIS

<u>Liitfunktsiooniks</u> e. funktsiooni funktsiooniks nimetatakse funktsiooni, mille analüütilises avaldises funktsioon y sõltub oma argumendist x kas ühe või mitme vahendaja funktsiooni kaudu.

Olgu $y = f(z)$, kus z on mingi x funktsioon $z = \varphi(x)$, seega

$$y = f\left[\varphi(x)\right] .$$

Muutuja y on x funktsioon, kuid ta ei sõltu temast vahetult, vaid ühe teise funktsiooni kaudu.

N ä i d e 1. Funktsioon $y = \sin^2 x$ on suuruse x liitfunktsioon, sest me võime selle funktsiooni kirjutada kujul $y = z^2$, kus $z = \sin x$.

N ä i d e 2. Olgu $y = \sin x^2$. Selle liitfunktsiooni võime esitada kujul $y = \sin z$, kus $z = x^2$.

Näitame järgnevalt, et liitfunktsiooni tuletis arvutatakse järgmise valemi järgi:

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x \,.$$

Selleks anname x-le muudu Δx, siis ka z ja y saavad muudud Δz ja Δy. Tuletise definitsiooni põhjal

$$y'_z = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \,.$$

Piirväärtuste teooriast teame, et see võrdus on samaväärne järgmisega:

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = y'_z + \alpha \,,$$

kus α on mingi lõpmata väike suurus. Edasi saame

$$\Delta y = (y'_z + \alpha) \Delta z \,.$$

Jagame selle võrduse mõlemad pooled läbi muuduga Δx ja läheme piirile

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (y'_z + \alpha) \frac{\Delta z}{\Delta x} \,,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (y'_z + \alpha) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \,,$$

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x \,. \qquad (1.11)$$

<u>Märkus</u> 1. Valemit (1.11) saab kergesti üldistada juhule, kus suurus y sõltub suurusest x kahe või enama vahendava funktsiooni kaudu. Kui näiteks $y = f(z)$, kus $z = g(u)$ ja $u = h(x)$, siis võtab valem (1.11) järgmise kuju:

$$y'_x = y'_z \cdot z'_u \cdot u'_x \,.$$

Saadud valemit, mida vahel nimetatakse ka "ahelreegliks", on võimalik vajaduse korral veelgi üldistada.

<u>Märkus</u> 2. Valemit (1.11) on võimalik tuletada ka lähtudes tuletise leidmise skeemist ja kasutades võimalust kir-

jutada murdu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kujul $\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$. Sel juhul tekib aga raskus siis, kui argumendi mõnedel väärtustel $\Delta u = 0$. Niisugusel juhul pole lubatud muuduga Δu jagada.

Näide. Leida funktsiooni $y = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ tuletis. Siin $y = \sqrt{z}$ ja $z = x^2 + 4x + 3$, seega

$$y'_z = \frac{1}{2\sqrt{z}},\ z'_x = 2x + 4 \text{ ja } y'_x = y'_z \cdot z'_x = \frac{2x+4}{2\sqrt{z}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}} .$$

§5. LOGARITMFUNKTSIOONI TULETIS

Tuletame meelde valemid, mis võimaldavad üle minna logaritmilt alusel a logaritmile alusel e (s.o. naturaallogaritmile). Olgu meil antud funktsioon $y = \log_a x$. Logaritmi definitsiooni kohaselt $a^y = x$. Võtame selle võrduse mõlemast poolest naturaallogaritmi:

$$y \ln a = \ln x ,$$

siit

$$y = \frac{1}{\ln a} \ln x .$$

Et aga $y = \log_a x$, siis

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x . \qquad (1.12)$$

Valem (1.12) kehtib suvalise x korral, seega ka siis kui $x=e$:

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a} . \qquad (1.13)$$

Valemit (1.13) läheb meil vaja hiljem. Leiame nüüd logaritmfunktsiooni tuletise.

Olgu antud funktsioon $y = \log_a x$. Rakendame jälle tuletise leidmise skeemi (anname argumendile muudu Δx, leiame vastava muudu Δy jne.).

1. x $\qquad y = \log_a x$,

2. $x + \Delta x$ $\qquad y = \log_a(x + \Delta x)$,

3. Δx $\qquad \Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} =$

$$= \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) ,$$

4. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) .$$

Tähistame $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$. Kui $\Delta x \to 0$, siis ka $\alpha \to 0$, $\Delta x = x\alpha$.

Asendame: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\alpha} \log_a(1 + \alpha) = \frac{1}{x} \log_a(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Leiame piirväärtuse:

5.
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\alpha \to 0} \log_a (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} =$$
$$= \frac{1}{x} \log_a \left[\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right] = \frac{1}{x} \log_a e \ .$$

Kasutades valemit (1.13), saame lõplikult
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \ . \qquad (1.14)$$

Erijuhul kui $a = e$, siis $\ln e = 1$ ja
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \ . \qquad (1.15)$$

N ä i d e 1. Leida funktsiooni $y = \log(\sqrt{x} + 1)$ tuletis.

$$y = \log z \ , \qquad z = \sqrt{x} + 1 \ ,$$
$$y'_z = \frac{1}{z \ln 10} \ , \qquad z'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ ,$$
$$y'_x = y'_z \cdot z'_x = \frac{1}{z \ln 10} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)\ln 10} \ .$$

N ä i d e 2. Leida funktsiooni $y = \ln(x^2 - 2)$ tuletis.

$$y = \ln z \ , \qquad z = x^2 - 2 \ ,$$
$$y'_z = \frac{1}{z} \ , \qquad z'_x = 2x \ ,$$
$$y'_x = y'_z \cdot z'_x = \frac{2x}{z} = \frac{2x}{x^2 - 2} \ .$$

§ 6. EKSPONENTFUNKTSIOONI TULETIS

Olgu antud funktsioon $y = a^x$, siis tema pöördfunktsioon on $x = \log_a y$. Ülal nägime, et
$$x'_y = \frac{1}{y \ln a} \ .$$

Kasutades valemit (1.10), võime kirjutada
$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a \ .$$

Et $y = a^x$, siis
$$(a^x)' = a^x \ln a \ . \qquad (1.16)$$

Erijuhul kui $a = e$, siis
$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x \ . \qquad (1.17)$$

Märgime, et eksponentfunktsioon $y = e^x$ on ainuke funktsioon, mille tuletis võrdub tema endaga.

Valemi (1.16) võib tuletada ka teisiti, kasutades nn. logaritmilise diferentseerimise võtet. Teeme seda.

Olgu antud funktsioon $y = a^x$. Võtame selle võrduse vasakust ja paremast poolest naturaallogaritmi

$$\ln y = x \ln a$$

ning arvutame saadud võrduse mõlemast poolest tuletise x järgi. Siinjuures peame silmas pidama, et y kujutab endast x funktsiooni ning ülaltoodud võrduse vasakust poolest tuleb arvutada tuletis liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirjade kohaselt. Nii tehes saame:

$$\frac{1}{y} y' = \ln a .$$

Siit $y' = y \ln a$, ehk

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Jõudsime samale tulemusele.

N ä i d e. Leida funktsiooni $y = e^{2-3x}$ tuletis.

$$y = e^z , \qquad z = 2 - 3x ,$$

$$y'_z = e^z, \qquad z'_x = -3 ,$$

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x = -3\, e^z = -3e^{2-3x} .$$

§ 7. ASTMEFUNKTSIOONI TULETIS

Olgu antud funktsioon $y = x^n$. Kasutame jälle logaritmilise diferentseerimise meetodit.

$$y = x^n, \quad \ln y = n \ln x, \quad \frac{y'}{y} = n \cdot \frac{1}{x} \text{, millest}$$

$$y' = n \cdot \frac{y}{x} = n \cdot \frac{x^n}{x} .$$

Seega

$$(x^n)' = n\, x^{n-1} . \qquad (1.18)$$

N ä i d e 1.

$$(x^5)' = 5\, x^4.$$

N ä i d e 2.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\, x^{-2} = -\frac{1}{x^2} .$$

N ä i d e 3.

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

ehk

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} .$$

§ 8. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE TULETISED

A. Funktsiooni $y = \sin x$ tuletis.

Diferentseerimise üldeeskirja järgi:

1. x $\qquad y = \sin x ,$

2. $x + \Delta x$ $\qquad y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) ,$

3. Δx $\qquad \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$

$$= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2} ,$$

4. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} ,$$

5. $$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \cos x \cdot 1 .$$

Seega

$$(\sin x)' = \cos x . \qquad (1.19)$$

B. Funktsiooni $y = \cos x$ tuletis.

Põhimõtteliselt võiksime me toimida analoogiliselt siinusfunktsiooni tuletise leidmisele. Läheme lühiduse mõttes teist teed, esitades funktsiooni $y = \cos x$ kujul

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{ ehk}$$

$$y = \sin z , \text{ kus } z = \frac{\pi}{2} - x .$$

Rakendame liitfunktsiooni tuletise arvutamise valemit. Selleks peame leidma

$y'_z = \cos z$, $z'_x = -1$, $y'_x = y'_z \cdot z'_x = -\cos z = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$ $= -\sin x$. Oleme seega näidanud, et

$$(\cos x)' = -\sin x . \qquad (1.20)$$

C. Funktsioonide $y = \tan x$ ja $y = \cot x$ tuletised.

Tangens- ja kootangensfunktsiooni tuletise leidmiseks kasutame jagatise tuletise valemit (1.9):

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} . \qquad (1.21)$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= - \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = - \frac{1}{\sin^2 x} .$$

$$(\cot x)' = - \frac{1}{\sin^2 x} . \qquad (1.22)$$

N ä i d e 1. Leida funktsiooni $y = \cos 5x$ tuletis. Tegemist on liitfunktsiooniga

$$y = \cos z , \qquad z = 5x ,$$
$$y'_z = - \sin z , \quad z'_x = 5 ,$$
$$y'_x = y'_z \cdot z'_x = - 5 \sin z = -5 \sin 5x .$$

N ä i d e 2. Leida funktsiooni $y = \sin^2 x$ tuletis.

$$y = z^2 , \qquad z = \sin x ,$$
$$y'_z = 2z , \qquad z'_x = \cos x ,$$
$$y'_x = y'_z \cdot z'_x = 2z \cos x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x .$$

N ä i d e 3. Leida funktsiooni $y = \tan^2 3x$ tuletis.

$$y = z^2 , \quad z = \tan u , \quad u = 3x ,$$
$$y'_z = 2z, \quad z'_u = \frac{1}{\cos^2 u} , \quad u'_x = 3 ,$$
$$y'_x = y'_z \cdot z'_u \cdot u'_x = \frac{6z}{\cos^2 u} = \frac{6 \tan 3x}{\cos^2 3x} .$$

N ä i d e 4. Leida funktsiooni $y = \cot\sqrt{2x}$ tuletis.

$$y = \cot z , \quad z = \sqrt{u} , \quad u = 2x ,$$

$$y'_z = -\frac{1}{\sin^2 z}, \quad z'_u = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad u'_x = 2,$$

$$y'_x = y'_z \cdot z'_u \cdot u'_x = -\frac{1}{\sqrt{u}\,\sin^2 z} = -\frac{1}{\sqrt{2x}(\sin\sqrt{2x})^2}.$$

§ 9. ARKUSFUNKTSIOONIDE TULETISED.

Arkusfunktsioonid kujutavad endast vastavate trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioone ja seetõttu saab nende tuletiste arvutamisel kasutada valemit (1.10).

Olgu $y = \arcsin x$, tema pöördfunktsioon on $x = \sin y$. Valemi (1.10) põhjal

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y}.$$

Kuid $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, mistõttu

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (1.23)$$

Analoogiliselt saab näidata, et

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (1.24)$$

Leiame nüüd arkustangensi tuletise. Olgu $y = \arctan x$, tema pöördfunktsioon on $x = \tan y$.

Seega

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Järelikult

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}. \qquad (1.25)$$

Toimides analoogiliselt, leiame, et

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}. \qquad (1.26)$$

N ä i d e 1. Leida funktsiooni $y = \arcsin \frac{x}{a}$ tuletis.

$$y = \arcsin z, \quad z = \frac{x}{a},$$

$$y'_z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad z'_x = \frac{1}{a},$$

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

N ä i d e 2. Leida funktsiooni $y = \arctan \frac{x}{a}$ tuletis.

$$y = \arctan z \quad , \quad z = \frac{x}{a} ,$$

$$y'_z = \frac{1}{1+z^2} , \qquad z'_x = \frac{1}{a} ,$$

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x = \frac{1}{a} \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{a}{a^2+x^2} .$$

§ 10. ELEMENTAARFUNKTSIOONIDE TULETISTE TABEL.

Eelmistes paragrahvides leidsime põhiliste funktsioonide tuletised. Koondame saadud valemid ühtsesse tabelisse.

1. $y = c$, $y' = 0$;
2. $y = x$, $y' = 1$;
3. $y = x^n$, $y' = nx^{n-1}$;
4. $y = \frac{1}{x}$, $y' = -\frac{1}{x^2}$;
5. $y = \frac{1}{x^m}$, $y' = -\frac{m}{x^{m+1}}$;
6. $y = \sqrt{x}$, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
7. $y = \sqrt[n]{x}$, $y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$;
8. $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$;
9. $y = e^x$, $y' = e^x$;
10. $y = \log_a x$, $y' = \frac{1}{x \ln a}$;
11. $y = \ln x$, $y' = \frac{1}{x}$;
12. $y = \sin x$, $y' = \cos x$;
13. $y = \cos x$, $y' = -\sin x$;
14. $y = \tan x$, $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
15. $y = \cot x$, $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
16. $y = \arcsin x$, $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
17. $y = \arccos x$, $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
18. $y = \arctan x$, $y' = \frac{1}{1+x^2}$;
19. $y = \operatorname{arccot} x$, $y' = -\frac{1}{1+x^2}$,

§ 11. KÕRGEMAT JÄRKU TULETISED.

Olgu antud mingi funktsioon $y = f(x)$. Ka selle funktsiooni tuletis $y' = f'(x)$ kujutab endast reeglina x funktsiooni. Diferentseerides seda funktsiooni, saame funktsiooni $y=f(x)$ teist järku tuletise, mida tähistatakse sümboliga y'', $f''(x)$

või $\frac{d^2y}{dx^2}$, seega

$$y'' = (y')' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} .$$

Funktsiooni teist järku tuletis näitab funktsiooni muutumise kiirendust argumendi muutumisel. Sama teed edasi minnes saame funktsiooni kolmandat järku tuletise $y''' = (y'')'$ jne. Funktsiooni n-ndat järku tuletiseks nimetatakse (n-1)-järku tuletise tuletist, s.o.

$$y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]' = f^{(n)}(x) . \qquad (1.27)$$

Neile kõrgemat järku tuletistele ei ole võimalik anda niisugust füüsikalist tõlgendust, nagu me andsime esimest ja teist järku tuletistele. Sellest hoolimata etendavad nad tähtsat osa funktsiooni omaduste uurimisel.

N ä i d e 1. Leida funktsiooni $y = x^5$ kõik tuletised.

$$y' = 5x^4, \quad y'' = (5x^4)' = 20x^3, \quad y''' = 60x^2 , \quad y^{IV} = 120x ,$$

$$y^{V} = 120, \quad y^{VI} = 0.$$

Seega on antud funktsiooni kõik tuletised alates 6-ndat järku tuletisest nullid.

N ä i d e 2. Leida funktsiooni $y = \ln x$ teist järku tuletise väärtus punktis $x = 1$.

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y'' = -\frac{1}{x^2}, \quad y''(1) = -1.$$

§12. DIFERENTSIAALI MÕISTE

Lähtume funktsiooni $y=f(x)$ tuletise definitsioonist

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

See tähendab, et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha ,$$

kus α on lõpmata väike suurus. Avaldame siit funktsiooni muudu:

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x \qquad (1.28)$$

Kui $\Delta x \to 0$, siis kõik kolm liiget valemis (1.28) on lõpmata väikesed suurused. Kursuse eelnevast osast teame, et lõpmata väikesed suurused võivad läheneda nullile erineva kiirusega. Tuletame meelde, et kahe lõpmata väikese suuruse β ja γ võrdlemiseks tuleb arvutada piirväärtus $\lim \frac{\beta}{\gamma}$. Kui see piirväärtus võrdub nulliga, siis on β kõrgemat järku lõpmata väike kui γ ning läheneb nullile kiiremini.

Näitame nüüd, et teine liidetav valemis (1.28) on kõrgemat järku lõpmata väike suurus võrreldes esimese liidetavaga. Tõepoolest,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{y' \Delta x} = \frac{1}{y'} \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0 .$$

Seega moodustab funktsiooni muudu olulisema osa esimene liidetav $y'\Delta x$. Seda funktsiooni muudu peaosa nimetataksegi funktsiooni <u>diferentsiaaliks</u> ja tähistatakse dy, s.t.

$$dy = y'\Delta x.$$

Kui $y = x$, siis $y' = x' = 1$ ja $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Seega

$$dx \equiv \Delta x \qquad (1.29)$$

ja

$$dy = y'dx. \qquad (1.30)$$

Need kaks võrdust defineerivad argumendi ja funktsiooni diferentsiaali:

argumendi diferentsiaaliks nimetatakse argumendi suvalist muutu;

funktsiooni diferentsiaaliks nimetatakse funktsiooni tuletise ja argumendi diferentsiaali korrutist.

Võrduse (1.30) võib kirjutada kujul $y' = \frac{dy}{dx}$. Siit nähtub, et funktsiooni tuletis on funktsiooni ja argumendi diferentsiaalide jagatis.

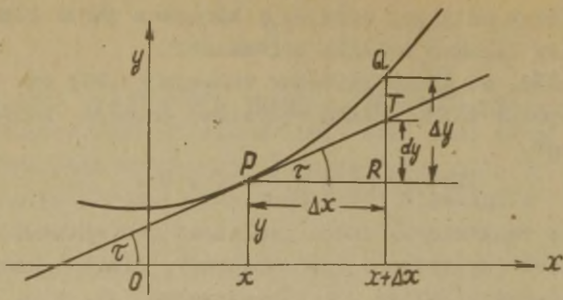
Et me defineerisime funktsiooni diferentsiaali tuletise kaudu, siis on sellel tulemusel ainult formaalne tähendus ja ta ei anna midagi uut.

N ä i d e. Leida funktsiooni $y = e^{-x^2}$ diferentsiaal.

$$y' = -2xe^{-x^2}, \text{ järelikult } dy = -2xe^{-x^2}dx.$$

§ 13. DIFERENTSIAALI GEOMEETRILINE TÕLGENDUS

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$, mis xy-tasandil esitab ühe kõvera (joon.3). $P(x,y)$ ja $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ olgu selle kõvera kaks naaberpunkti. Punktis P tõmbame kõverale puutuja PT. Selle puutuja tõus on y', nii et $RT = y'\Delta x = y'dx = dy$. Nagu näha, kujutab lõik RT funktsiooni diferentsiaali dy.



Joon. 3.

Seega geomeetriliselt vastab funktsiooni diferentsiaalile kõvera puutuja ordinaadi muut üleminekul punktist abstsissiga x punkti abstsissiga $x + \Delta x$.

Funktsiooni muudu Δy ja diferentsiaali dy vahe $\Delta y - dy$ esitub lõiguna TQ. Lõik TQ kujutab seega kõrgemat järku lõpmata väikest suurust $\alpha \Delta x$.

§ 14. DIFERENTSIAALI KASUTAMINE LIGIKAUDSETES ARVUTUSTES

Me defineerisime diferentsiaali kui funktsiooni muudu (1.28) peaosa. See võimaldab kasutada diferentsiaali kui funktsiooni muudu ligikaudset väärtust:

$$dy \approx \Delta y . \qquad (1.31)$$

Valem (1.31) on seda täpsem, mida väiksem on muut Δx. Valemit (1.31) kasutatakse siis, kui funktsiooni diferentsiaali on kergem arvutada kui tema muutu (näide 1).

Anname valemile (1.31) teise kuju:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x .$$

Siit saame ligikaudse väärtuse funktsiooni uuele väärtusele:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x . \qquad (1.32)$$

Seda valemit on sobiv kasutada siis, kui me teame funktsiooni väärtust mingis punktis x (näide 2).

N ä i d e 1. Kuubi serva pikkus on 30 cm. Pärast kuumutamist suurenes iga serva pikkus 0,1 cm võrra. Kuidas muutus selle tulemusena kuubi ruumala?

Tähistame kuubi serva pikkuse sümboliga x, siis ruumala $V = x^3$. Kui tähistada Δx-ga serva pikkuse muutu, siis kuubi ruumala muudu ΔV võime arvutada valemist (1.31):

$$\Delta V \approx V'(x)\,\Delta x\,,$$

kus $x = 30$ cm, $\Delta x = 0{,}1$ cm. Kuna $V'(x) = 3x^2$, siis

$$\Delta V \approx 3x^2\,\Delta x\,, \text{ ehk arvuliselt } \Delta V \approx 3\cdot 30^2\cdot 0{,}1 = 270 \text{ cm}^3.$$

Arvutame ka ruumala muudu täpse väärtuse:

$$\Delta V = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = 270{,}901 \text{ cm}^3.$$

Võrreldes seda tulemust ligikaudse väärtusega, näeme, et ligikaudse tulemuse absoluutne viga on 0,901 cm^3 ja relatiivne viga $0{,}901 : 270{,}901 = 0{,}0033 = 0{,}33\ \%$. Seega on valemi (1.31) kasutamine antud ülesande korral õigustatud.

N ä i d e 2. Arvutada ligikaudselt $\sqrt[3]{24}$. Siin kasutame valemit (1.32). Lähtefunktsiooniks on $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$. Kuna $\sqrt[3]{27} = 3$, siis on otstarbekas valida $x = 27$ ja $\Delta x = -3$. Leiame veel funktsiooni tuletise:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

Valem (1.32) annab:

$$\sqrt[3]{24} \approx 3 + \frac{-3}{3\sqrt[3]{27^2}} = 3 - \frac{1}{9} \approx 2{,}8889.$$

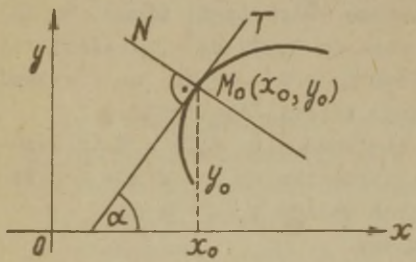
Tabelitest leiame, et $\sqrt[3]{24} = 2{,}8845$. Ligikaudse tulemuse absoluutne viga on seega 0,0044 ja relatiivne viga on $0{,}0044 : 2{,}8845 = 0{,}0015 = 0{,}15\ \%$.

(4)

II TULETISE RAKENDUSI

§ 1. PUUTUJA JA NORMAALI VÕRRANDID

Olgu antud kõver oma võrrandiga $y = f(x)$ ja puutepunkt M_0, mille abstsiss olgu x_0. Leiame punkti M_0 läbiva puutuja T ja normaali N võrrandid (joon.4).



Joon. 4.

Puutepunkti ordinaadi leiame avaldisest $y_0 = f(x_0)$. Puutuja tõus $k = \tan\alpha$ on võrdne funktsiooni y tuletisega argumendi väärtusel x_0:

$$k = y'\big|_{x=x_0} = f'(x_0) \ .$$

Teades puutepunkti koordinaate ja puutuja tõusu, leiame puutuja võrrandi, kasutades selleks sirge võrrandit läbi antud punkti antud tõusuga:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \ .$$

Asendades siia $y_1 = y_0$, $x_1 = x_0$ ja $k = f'(x_0)$, saame:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \ . \qquad (2.1)$$

<u>Normaaliks</u> punktis M_0 nimetatakse sirget, mis läbib punkti M_0 ja on risti puutujaga. Leiame normaali tõusu. Et joone normaal on puutujaga risti, siis sirgete ristseisu tunnuse põhjal on tema tõus $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{f'(x_0)}$ ja normaali võrrand on seega

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \ . \qquad (2.2)$$

N ä i d e. Leida puutuja ja normaali võrrandid paraboolile $y = 2x^2$ punktis $A(0,5;0,5)$.

$y' = 4x$, $y'(0,5) = 2$. Seega puutuja võrrand on

$y - 0,5 = 2(x - 0,5)$ ehk lihtsustatult $4x - 2y - 1 = 0$.

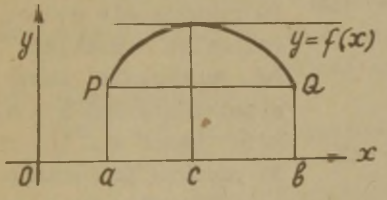
Normaali võrrand on

$y - 0,5 = -0,5(x - 0,5)$ ehk lihtsustatult $2x + 4y - 3 = 0$.

§ 2. ROLLE'i JA LAGRANGE'i TEOREEMID

1. Rolle'i teoreem. Kui lõigus $[a,b]$ pideva ja vahemikus (a,b) diferentseeruva funktsiooni $f(x)$ väärtused otspunktides a ja b on võrdsed, siis vahemikus (a,b) leidub vähemalt üks punkt $x = c$, milles tuletis $f'(x)$ on null, s.o. $f'(c)=0$.

Jättes kõrvale teoreemi range matemaatilise tõestuse, piirdume selle geomeetrilise tõlgendusega. Kuna eelduse põhjal on funktsioon $y = f(x)$ pidev, siis on tema graafikuks pidev joon (joon.5).



Joon. 5.

Tõmbame lõikaja PQ, mille otspunktideks on $P[a,f(a)]$ ja $Q[b,f(b)]$. Eelduse põhjal $f(a) = f(b)$, seega on lõikaja PQ paralleelne x-teljega ja tema tõus võrdne nulliga. Nihutame lõikajat PQ paralleelselt iseendaga. Ilmselt peab vahemikus (a,b) leiduma niisugune punkt c, kus nihutatav sirge osutub puutujaks antud kõverale. Kuna puutuja punktis $x = c$ on paralleelne x-teljega, siis $f'(c)=0$, m.o.t.t.

2. Lagrange'i teoreem. Kui funktsioon $y = f(x)$ omab iga x puhul vahemikust $a<x<b$ tuletist, siis leidub selles vahemikus vähemalt üks niisugune argumendi väärtus c, et

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) . \qquad (2.3)$$

T õ e s t u s. Tähistame arvu $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ tähega k ja vaatleme abifunktsiooni $F(x) = f(x) - f(a) - k(x - a)$.

See abifunktsioon rahuldab Rolle'i teoreemi eeldusi, s.o. $F(a)= = F(b) = 0$ ja vastavalt teoreemile leidub vahemikus (a,b) punkt $x = c$, milles $F'(c) = 0$.

Kuid $F'(x) = f'(x) - k$. Tähendab $f'(c) - k = 0$, millest

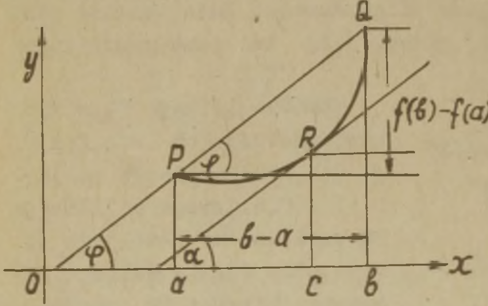
$$k = f'(c).$$

Asendades k tema esialgse väärtusega, saame

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) , \quad \text{m.o.t.t.}$$

Lagrange'i teoreemi geomeetriline tõlgendus seisab järgnevas:

Kui pideval joonel PQ on igas punktis P ja Q vahel olemas puutuja, mis ei ole risti x-teljega, siis leidub joonel PQ vähemalt üks punkt R, kus puutuja on paralleelne lõikajaga PQ (joon.6).



Joon. 6.

Tõepoolest, lõikaja PQ tõus
$\tan\varphi = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Joonestame kõverale PQ puutuja, mis on paralleelne lõikajaga PQ. Puutepunkti abstsissi tähistame $x = c$, siis $\tan\alpha = f'(c)$. Et puutuja ja lõikaja on rööbikud, siis nende tõusunurgad on võrdsed : $\alpha = \varphi$ ja $\tan\alpha = \tan\varphi$. Asendades $\tan\varphi = f'(c)$, saame

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Lagrange'i teoreemi tuntakse ka keskväärtusteoreemi nime all. Keskväärtusteoreem on matemaatilise analüüsi tähtsamaid tõestusvahendeid, matemaatika rakendustes aga tähtsamaid funktsioonide väärtuste hindamisabinõusid.

Lagrange'i keskväärtusteoreemist võib teha kaks tähtsat järeldust.

Järeldus 1. Kui funktsioon $f(x)$ omab vahemiku $a < x < b$ igas punktis tuletist ja see tuletis on kõikjal null, siis see funktsioon on konstantne.

T õ e s t u s. Eelduse kohaselt funktsioon $f(x)$ omab vahemiku (a,b) igas punktis tuletist, s.t. kehtib keskväärtusvalem (2.3). Vabastame valemi (2.3) nimetajast:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \quad \text{kus} \quad a < c < b .$$

Kirjutades b asemele x, saame:

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(c), \quad \text{kus} \quad a < c < x .$$

Et vahemiku igas punktis on tuletis null, siis ka $f'(c)=0$ ja

$$f(x) = f(a) \; , \quad \text{m.o.t.t.}$$

Tõestatud järeldust tuntakse ka nulltuletisteoreemi nime all.

<u>Järeldus 2.</u> Kui kahe funktsiooni tuletised on mingis vahemikus võrdsed, siis need funktsioonid on selles vahemikus kas võrdsed või erinevad konstandi võrra.

T õ e s t u s. Eelduse põhjal $f_1'(x) = f_2'(x)$, kus $a<x<b$. Olgu $\varphi(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Leiame selle funktsiooni tuletise:

$$\varphi'(x) = \left[f_1(x) - f_2(x)\right]' = f_1'(x) - f_2'(x) = 0 \; .$$

Järelduse 1 põhjal on $\varphi(x)$ konstantne funktsioon. Seega

$$f_1(x) - f_2(x) = c$$

kogu vahemikus, m.o.t.t.

Kui $c = 0$, siis funktsioonid on võrdsed.

§ 3. L'HOSPITALI REEGEL

Juhul, kui põhiteoreemid piirväärtustest ei olnud rakendatavad, kasutasime funktsiooni piirväärtuse leidmiseks mitmesuguseid kunstlikke võtteid. Prantsuse matemaatik L'Hospital andis XVII sajandil lihtsa meetodi teatud piirväärtuste leidmiseks. L'Hospitali reegel on vahetult rakendatav $\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$ tüüpi määramatuste puhul.

<u>Teoreem.</u> Kui $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ või $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$ ja eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, ,$$

siis on sama piirväärtus ka funktsioonide suhtel:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, . \qquad (2.4)$$

Selle teoreemi jätame meie kursuses tõestamata. Märgime veel, et kui $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \lim\limits_{x\to a} g'(x) = 0$ või $\lim\limits_{x\to a} |f'(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g'(x)| = \infty$, siis võib L'Hospitali reeglit rakendada ka $f'(x)$ ja $g'(x)$ suhtele:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} \qquad \text{jne.}$$

N ä i d e 1. Leida $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^3 - 125}$.

Kuna $x = 5$ korral nii lugeja kui ka nimetaja võrduvad nulliga, siis võime kasutada L'Hospitali reeglit:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^3 - 125} = \lim_{x\to 5} \frac{2x - 3}{3x^2} = \frac{7}{75}.$$

N ä i d e 2. Leida $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

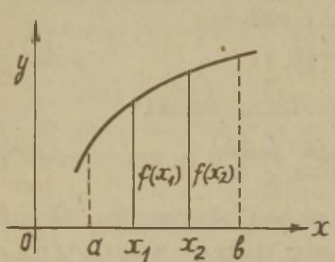
N ä i d e 3. Leida $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \ln x}{x}$.

Kui $x \to \infty$, siis ka $\ln x \to \infty$ ja seetõttu on meil tegemist määramatusega tüüpi $\frac{\infty}{\infty}$. Kasutades L'Hospitali reeglit, saame:

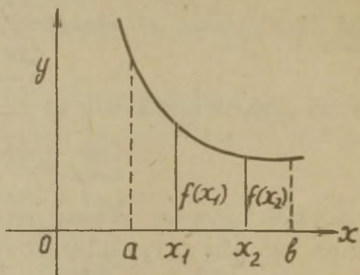
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1} = 1.$$

§ 4. FUNKTSIOONI KASVAMINE JA KAHANEMINE

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse mingis x väärtuste vahemikus <u>kasvavaks</u>, kui argumendi x kasvamisel selles vahemikus kasvavad ka vastavad y väärtused ja <u>kahanevaks</u>, kui x väärtuste kasvamisel y väärtused kahanevad (joon. 7).



Kui $x_1 < x_2$, siis $f(x_1) < f(x_2)$.



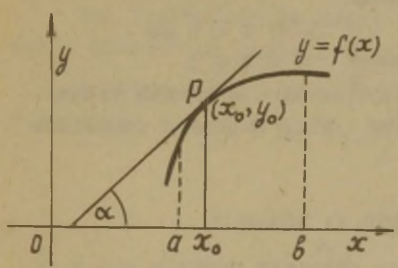
Kui $x_1 < x_2$, siis $f(x_1) > f(x_2)$.

Joon. 7.

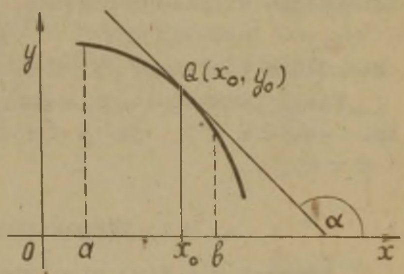
Vasakpoolsel joonisel on toodud kasvava funktsiooni ja parempoolsel kahaneva funktsiooni graafik. Anname järgnevas tunnuse, mille järgi saab otsustada, kas argumendi läbiminekul mõnest x väärtusest funktsioon f(x) kasvab või kahaneb.

<u>Teoreem</u>. Kui funktsiooni $y = f(x)$ tuletis mingis x väärtuste vahemikus on positiivne, siis funktsioon kasvab selles vahemikus, kui aga tuletis on negatiivne, siis funktsioon kahaneb.

T õ e s t u s. Olgu antud kasvav funktsioon $y = f(x)$ (joon.8). Mistahes punktis $P(x_0, y_0)$ joonestatud puutuja moodustab x-teljega teravnurga. Tangens teravnurgast on aga



Joon. 8.



Joon. 9.

alati positiivne: $\tan\alpha > 0$. Tuletise geomeetrilisest tähendusest on teada, et $\tan\alpha = y'\big|_{x=x_0}$. Seega kasvava funktsiooni korral tõepoolest

$$y'(x_0) > 0. \qquad (2.5)$$

Siit saame ka eeskirja funktsiooni kasvamispiirkonna leidmiseks. Kui on antud $y = f(x)$, siis:

1) leiame y',

2) lahendame võrratuse $y' < 0$. Siit saame piirkonna, kus y on kasvav.

Olgu nüüd $y = f(x)$ kahanev funktsioon (joon.9). Puutuja moodustab suvalises punktis $Q(x_0, y_0)$ x-teljega nürinurga: $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha < 0$. Seega

$$y'(x_0) < 0 \qquad (2.6)$$

Funktsiooni kahanemispiirkonna leidmiseks tuleb

1) leida y',

2) lahendada võrratus $y' < 0$.

N ä i d e 1. Olgu antud funktsioon $y = x^2 + 4x + 5$. Leida, kas punktides $x = 1$ ja $x = -3$ funktsioon kasvab või kahaneb.

$y' = 2x + 4$, $y'\Big|_{x=1} = 2 + 4 = 6 > 0$, $y'\Big|_{x=-3} = -6 + 4 = -2 < 0$.

Järelikult punktis $x = 1$ funktsioon kasvab, punktis $x = -3$ aga kahaneb.

N ä i d e 2. Leida funktsiooni $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

$y' = x^2 - 4x + 3 \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Longrightarrow (x - 3)(x - 1) > 0$.

Lahendades viimase võrratuse, saame

$$-\infty < x < 1 \quad \text{ja} \quad 3 < x < +\infty .$$

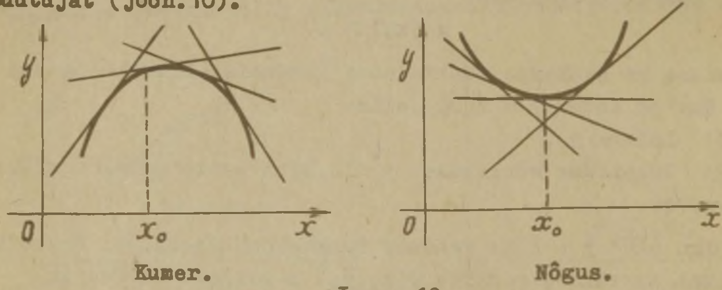
Lahendades võrratuse $y' < 0$, saame $1 < x < 3$.

Seega funktsioon $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ kasvab vahemikes $-\infty < x < 1$ ja $3 < x < \infty$ ning kahaneb vahemikus $1 < x < 3$.

§ 5. KÕVERA KUMERUS JA NÕGUSUS

Kõverat $y = f(x)$ nimetatakse <u>kumeraks</u> punktis $x = x_0$, kui selle punkti kuitahes väikeses ümbruses kõver kulgeb allpool oma puutujat (joon.10).

Kõverat $y = f(x)$ nimetatakse <u>nõgusaks</u> punktis $x = x_0$, kui selle punkti vahetus ümbruses kõver kulgeb ülalpool oma puutujat (joon.10).



Joon. 10.

Olgu antud mingi funktsioon $y = f(x)$, mille graafik olgu nõgus. Eeldame veel, et funktsioon on kasvav, s.t. $y' > 0$ (joon. 11). Tuletame nõgususe tunnuse. Joonestame kõverale punktides M_1, M_2, M_3 puutujad. Tõusunurgad $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, seejuures on nad kõik teravnurgad. Siis võrratustest $\mu_1<\mu_2<\mu_3$ järelduvad võrratused $\tan\mu_1 < \tan\mu_2 < \tan\mu_3$ ehk

$$y'\Big|_{x=x_1} < y'\Big|_{x=x_2} < y'\Big|_{x=x_3}.$$

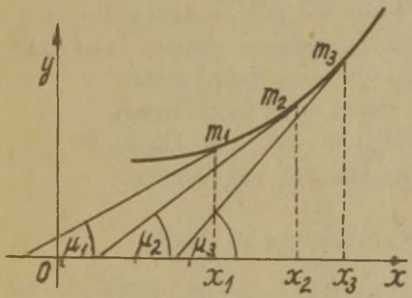
Tähistame $y'=\varphi(x)$. Kuna $\varphi(x_1) < \varphi(x_2) < \varphi(x_3)$, kus $x_1<x_2<$ $<x_3$, siis φ on kasvav funktsioon. See aga tähendab, et $\varphi'(x) > 0$ ehk

$$y'' > 0 \qquad (2.7)$$

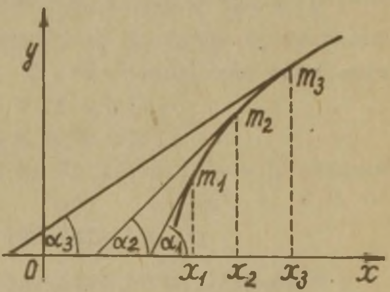
Analoogilisele tulemusele jõuame, kui $y = f(x)$ on kahanev nõgus funktsioon. Seega saime järgmise nõgususe tunnuse:

kui funktsioon on nõgus mingis vahemikus, siis tema teist järku tuletis on positiivne selle vahemiku igas punktis.

Tuletame nüüd kumeruse tunnuse. Olgu antud kumer kasvav funktsioon $y = f(x)$ (joon. 12).



Joon. 11.



Joon. 12.

Tõmmanud kõverale punktides M_1, M_2 ja M_3 puutujad, näeme et $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$. Kuna on tegemist teravnurkadega, siis $\tan\alpha_1 > \tan\alpha_2 > \tan\alpha_3$ ehk

$$y'\Big|_{x=x_1} > y'\Big|_{x=x_2} > y'\Big|_{x=x_3}.$$

Tähistades $y' = \varphi(x)$, näeme, et $\varphi(x_1) > \varphi(x_2) > \varphi(x_3)$, kus $x_1 < x_2 < x_3$. Seega $y' = \varphi(x)$ on kahanev funktsioon. Vastavalt kahanemise tunnusele $\varphi'(x) < 0$ ehk

$$y'' < 0 \qquad (2.8)$$

Märkus: Kui on tegemist kahaneva kumera funktsiooniga, siis jõuame täpselt samasugusele tulemusele. Sõnastame järgnevalt kumeruse tunnuse:

kui funktsioon on kumer mingis vahemikus, siis tema teist järku tuletis on negatiivne selle vahemiku igas punktis.

On võimalik näidata, et tingimused (2.7) ja (2.8) on ka piisavad vastavalt funktsiooni graafiku nõgususeks ja kumeruseks.

N ä i d e 1. Selgitada funktsiooni $y = x^2 - 4x - 5$ kumeruse ja nõgususe küsimus punktis $x = 1$.

Leiame funktsiooni teist järku tuletise ja uurime selle märki punktis $x = 1$.

$$y' = 2x - 4, \quad y'' = 2 > 0.$$

Seega on antud funktsioon kõikjal (ka punktis $x = 1$) nõgus.

N ä i d e 2. Leida funktsiooni $y = x^3 + 9x^2 - 21x + 13$ kumeruse ja nõgususe piirkonnad.

$$y' = 3x^2 + 18x - 21, \qquad y'' = 6x + 18 = 6(x + 3).$$

Kumeruse ja nõgususe piirkondade leidmiseks peame lahendama vastavalt võrratused $y'' < 0$ ja $y'' > 0$. Teeme seda:

$$6(x + 3) < 0 \Longrightarrow x < -3 \Longrightarrow \text{kumer},$$
$$6(x + 3) > 0 \Longrightarrow x > -3 \Longrightarrow \text{nõgus}.$$

Punktis $x = -3$ ilmselt läheb kumerus üle nõgususeks.

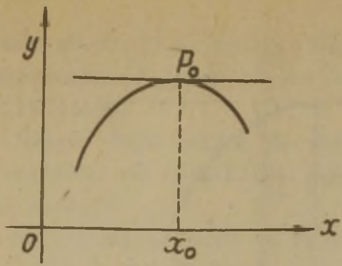
§ 6. FUNKTSIOONI MAKSIMUM JA MIINIMUM

Olgu meil antud funktsioon $y = f(x)$, mille graafik on teada.

Kui funktsiooni $y = f(x)$ väärtus argumendi väärtusel x_0 on suurem kõigist tema naabruses asetsevaist funktsiooni väärtustest, siis nimetatakse seda väärtust funktsiooni maksimumiks ja tähistatakse $y_{max} = f(x_0)$ (joon. 13).

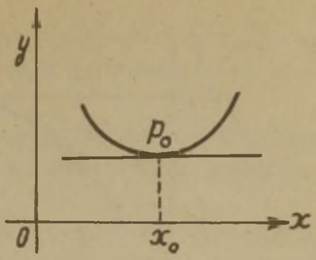
Kui funktsiooni $y = f(x)$ väärtus argumendi väärtusel x_0 on väiksem kõigist tema naabruses asetsevaist funktsiooni väärtustest, siis nimetatakse seda väärtust funktsiooni miinimumiks ja tähistatakse $y_{min} = f(x_0)$ (joon. 14).

Funktsiooni maksimumi ja miinimumi nimetatakse ühiselt funktsiooni ekstreemumiteks.



$y_{max} = f(x_0)$

Joon. 13.

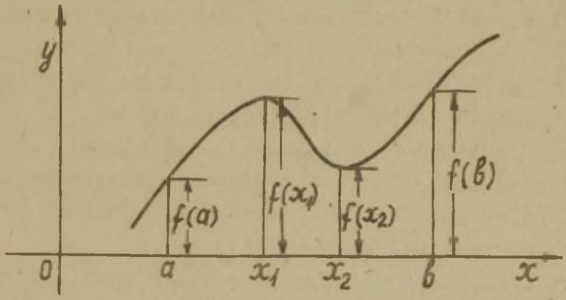


$y_{min} = f(x_0)$

Joon. 14.

Ei tule arvata, et funktsiooni maksimum ja miinimum on vaadeldaval lõigul vastavalt tema suurimaks ja vähimaks väärtuseks.

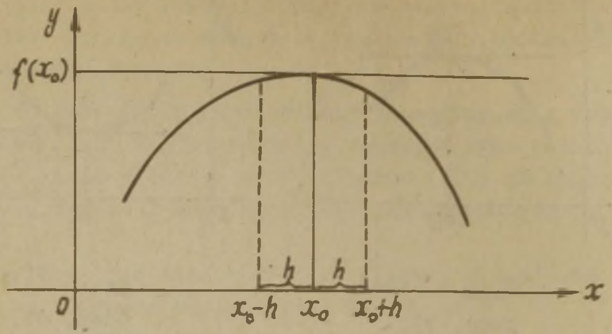
Näiteks joon. 15 kujutatud funktsioonil on maksimum punktis x_1 ja miinimum punktis x_2, suurim väärtus f(b) aga lõigu lõpp-punktis x = b ja vähim väärtus f(a) alguspunktis x = a.



Joon. 15.

Olgu funktsioonil y = f(x) maksimum argumendi väärtusel x_0(joon. 16). Valime x_0 naabruses väärtused $x_0 - h$ ja $x_0 + h$, kus $h > 0$ ja küllalt väike arv. Väärtusel $x_0 - h$ on tuletis positiivne, väärtusel $x_0 + h$ negatiivne. Kui tuletis y' muutub pidevalt, siis ta saab üle minna positiivsetelt väärtustelt negatiivsetele väärtustele ainult vahepeal nulliks saades (kohal x_0). Seega

kui väärtusel x_0 funktsioon omab maksimumi, siis $f'(x_0)=0$, kusjuures $f'(x_0-h) > 0$ ja $f'(x_0+h) < 0$.



Joon. 16.

Ülesannete lahendamisel kasutatakse ümberpööratud mõttekäiku:

kui $f'(x_0) = 0$ ja $f'(x_0 - h) > 0$ ja $f'(x_0 + h) < 0$, siis funktsioonil on punktis x_0 <u>maksimum</u>.

Samal viisil tuletatakse ka funktsiooni miinimumi tunnus:

kui $f'(x_0) = 0$ ja $f'(x_0 - h) < 0$ ja $f'(x_0 + h) > 0$, siis funktsioonil on punktis x_0 <u>miinimum</u>.

Leitud funktsiooni maksimumi ja miinimumi tunnustes on oluline funktsiooni tuletise märgimuut. Tingimusest $f'(x_0)=0$ (üksi) ei piisa selleks, et funktsioonil oleks ekstreemum. Illustreerime seda väidet ühe näitega.

N ä i d e. Olgu antud funktsioon $y = x^3$. Leiame selle funktsiooni esimest järku tuletise ja võrrutame ta nulliga:

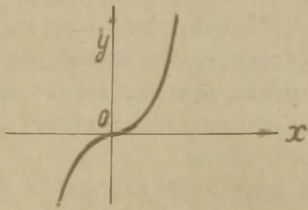
$$y' = 3x^2, \quad 3x^2 = 0, \quad \text{siit} \quad x = 0.$$

Selles punktis aga ei oma funktsioon $y = x^3$ ei maksimumi ega miinimumi. Tõepoolest, kontrollime tuletise märgimuutu üleminekul väärtusest $x = 0$:

$f'(0-h)=3(0-h)^2=3h^2 > 0$,

$f'(0+h)=3(0+h)^2=3h^2 > 0$.

Nagu näeme, funktsiooni tuletise märgimuutu üleminekul



Joon. 17.

väärtusest $x = 0$ ei esine. Järeldus: punktis $x = 0$ ei ole ekstreemumit. Viimast väidet kinnitab ka funktsiooni $y = x^3$ graafik (joon. 17).

Seega võime öelda, et tingimus $f'(x) = 0$ on küll tarvilik selleks, et funktsioon omaks punktis x ekstreemumit, aga mitte piisav.

Kasutades esimest ja teist järku tuletist on funktsiooni maksimumi ja miinimumi tunnuseid võimalik formuleerida eriti lihtsal kujul.

Jooniselt 13 võib näha, et maksimumpunktis on funktsiooni graafikul rõhtne puutuja ja graafik on selles punktis kumer. Kasutades funktsiooni kumeruse tunnust (2.8), formuleerime järgnevalt funktsiooni maksimumi tarviliku ja piisava tingimuse:

funktsioonil $y = f(x)$ on punktis $x = x_0$ maksimum parajasti siis, kui

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{ja} \quad f''(x_0) < 0 . \tag{2.9}$$

Jooniselt 14 näeme, et miinimumpunktis on funktsiooni graafikul rõhtne puutuja ja ta ise on nõgus. Miinimumi tarvilik ja piisav tingimus on seega:

funktsioonil $y = f(x)$ on punktis $x = x_0$ miinimum siis ja ainult siis, kui

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{ja} \quad f''(x_0) > 0 . \tag{2.10}$$

Siit saame ka eeskirja funktsiooni maksimumi ja miinimumi leidmiseks. Selleks tuleb:

1) leida y' ja y'',

2) lahendada võrrand $y' = 0$, s.t. leida need x väärtused, mille korral funktsioonil <u>võivad</u> olla ekstreemumid,

3) uurida y'' märki nendes nn. kriitilistes punktides:
kui $y''\big|_{x=x_i} < 0$, siis punktis $x = x_i$ on maksimum,
kui $y''\big|_{x=x_i} > 0$, siis punktis $x = x_i$ on miinimum, $i=1,2,3...$

4) kui $y''\big|_{x=x_i} = 0$, siis tuleb küsimuse lahendamiseks uurida y' märgimuutu läbiminekul punktist $x = x_i$.

N ä i d e 1. Uurida maksimumi ja miinimumi suhtes funktsiooni

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 2,$$

$$y' = x^2 - 4x + 3, \qquad y'' = 2x - 4 = 2(x - 2),$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ ehk } (x - 1)(x - 3) = 0, \text{ millest } x_1=1, x_2=3.$$

Asetame teise tuletisse x asemele järgimööda väärtused 1 ja 3 ning määrame tuletise märgi:

$$y''\Big|_{x=1} = 2(1 - 2) = -2 < 0,$$

$$y''\Big|_{x=3} = 2(3 - 2) = 2 > 0.$$

Seega on funktsioonil maksimum, kui $x = 1$ ja miinimum, kui $x = 3$. Leiame lõpuks ka funktsiooni väärtused maksimum- ja miinimumpunktides:

$$y_{max} = y\Big|_{x=1} = -\frac{2}{3}, \qquad y_{min} = y\Big|_{x=3} = -2.$$

N ä i d e 2. Uurida maksimumi ja miinimumi suhtes funktsiooni $y = x^4$.

$$y' = 4x^3, \qquad y'' = 12x^2,$$

$$4x^3 = 0, \text{ millest } x = 0,$$

$$y''\Big|_{x=0} = 12 \cdot 0^2 = 0.$$

Et teine tuletis on null, siis peame maksimumi ja miinimumi leidmiseks uurima y' märgimuutu läbiminekul punktist $x = 0$:

$$y'(0 - h) = 4(0 - h)^3 = -4h^3 < 0,$$

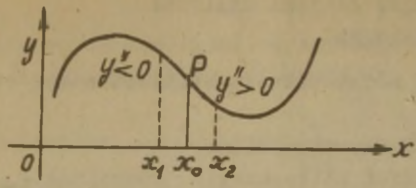
$$y'(0 + h) = 4(0 + h)^3 = 4h^3 > 0.$$

Nagu näeme, on funktsioonil $y = x^4$ punktis $x = 0$ miinimum.

§ 7. KÕVERA KÄÄNUPUNKT

Punkti, millest läbiminekul kõver muutub nõgusast kumeraks või vastupidi (kumerast nõgusaks), nimetatakse käänupunktiks (joon. 18).

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$, mis on pidev ja omab pidevat teist järku tuletist. Oletame, et punkt $P[x_0, f(x_0)]$ on käänupunkt ja vaatame, millised tingimused sellest tulenevad (joon. 18). Võtame x_0-st vasakul pool punkti $x_1 < x_0$. Nagu näha, selles punktis on funktsioon kumer ja seega $y''\Big|_{x=x_1} < 0$.



Joon. 18.

Olgu $x_2 > x_0$, siis $y''\Big|_{x=x_2} > 0$. Tuletis y'' kujutab endast samuti x funktsiooni, mille tähistame $y'' = \psi(x)$. See funktsioon on eelduse põhjal pidev ja punktist x_0 ühel pool negatiivne, teisel pool aga positiivne. Seega peab pidevuse tõttu olema $\psi(x_0) = 0$.

Tarvilikuks tingimuseks käänupunkti olemasoluks on järelikult

$$y''\Big|_{x=x_0} = 0. \qquad (2.11)$$

Funktsiooni käänupunkti leidmine toimub järgmise skeemi kohaselt:

1) leiame y' ja y'' ;

2) lahendame võrrandi $y'' = 0$. Saame teatud hulga abstsissi väärtusi x_i $(i = 1,2,3...)$, kus käänupunkt <u>võib</u> olla;

3) selgitame välja, kas y'' muudab märki ülemineku punktist x_i.

N ä i d e. Leida funktsiooni $y = 3x^4 - 8x^3 + 2$ käänupunktid.

$$y' = 12x^3 - 24x^2, \quad y'' = 36x^2 - 48x = 12x(3x - 4),$$
$$y'' = 0 \Longrightarrow x(3x - 4) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{4}{3}.$$

Vaatleme kõigepealt punkti $x_1 = 0$. Valime ühe punkti temast vasakul $x = 0 - h$ ja teise paremal pool $x = 0 + h$ (h on küllalt väike positiivne arv). Leiame

$$y''(0 - h) = -12h(-3h - 4) > 0, \quad y''(0 + h) = 12h(3h - 4) < 0.$$

Kuna y'' muudab punktist $x = 0$ läbiminekul märki, siis järelikult punkt $A(0;2)$ on käänupunktiks.

Analoogiliselt toimime punkti $x_2 = \frac{4}{3}$ korral:

$$y''\left(\frac{4}{3} - h\right) = 12\left(\frac{4}{3} - h\right)(-3h) < 0,$$

$$y''\left(\frac{4}{3} + h\right) = 12\left(\frac{4}{3} + h\right)(3h) > 0,$$

seega ka punkt, mille abstsiss on $\frac{4}{3}$, on antud funktsioonile käänupunktiks.

§ 8. FUNKTSIOONI UURIMINE JA TEMA GRAAFIKU KONSTRUEERIMINE

Funktsiooni uurimise all mõistetakse harilikult seda, et tuleb leida funktsiooni

1) määramispiirkond ja katkevuspunktid;

2) nullkohad, s.o. graafiku lõikepunktid koordinaattelgedega;

3) graafiku sümmeetrilisus koordinaattelgede ja nullpunkti suhtes;

4) kasvamis- ja kahanemispiirkonnad;

5) maksimum- ja miinimumpunktid, samuti funktsiooni väärtused nendes punktides;

6) graafiku kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid;

7) graafiku asümptoodid.

Uurimise tulemuste põhjal konstrueeritakse funktsiooni graafik (vahel on otstarbekas skitseerida graafiku elemente paralleelselt uurimisega).

N ä i d e. Uurida funktsiooni $y = e^{-x^2}$ ja joonestada tema graafik.

1) Antud funktsiooni määramispiirkonnaks on kogu reaaltelg, katkevuspunkte ei ole.

2) Funktsiooni graafik ei lõika x-telge, kuna võrrandil $e^{-x^2} = 0$ puudub lahend. Ordinaattelge lõikab graafik punktis (0, 1).

3) Funktsioon on paaris, sest $e^{-(-x)^2} = e^{-x^2}$, järelikult on tema graafik sümmeetriline y-telje suhtes.

4) Leidnud tuletise $y' = -2xe^{-x^2}$ ja lahendades võrratused $y' > 0$ ja $y' < 0$, näeme, et funktsioon kasvab kui $x < 0$ ja kahaneb kui $x > 0$.

5) Võrrandil $y' = -2xe^{-x^2} = 0$ on ainult üks lahend: $x = 0$. Kuna eelmises punktis selgitasime, et punktis $x=0$ läheb kasvamine üle kahanemiseks, siis järelikult on funktsioonil punktis $x = 0$ maksimum ja $y_{max} = e^0 = 1$.

6) Leiame teist järku tuletise $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. Graa-

fiku nõgususpiirkonna leidmiseks lahendame võrratuse

$$(4x^2 - 2)e^{-x^2} > 0,$$

mis on ekvivalentne võrratusega $4x^2 - 2 > 0$. Selle ruutvõrratuse lahendeiks on $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$.

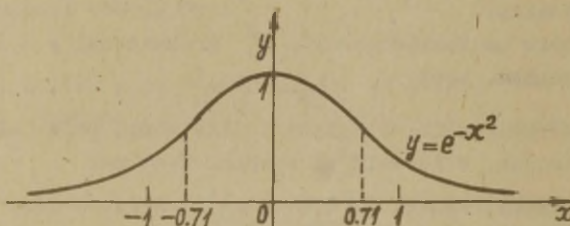
Vahemikus $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ on funktsiooni graafik kumer. Argumendi väärtustel $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0{,}71$ ja $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$ on tegemist käänupunktiga.

7) Leiame graafiku asümptoodid. Selleks uurime, kuidas käitub funktsiooni graafik argumendi tõkestamatul kasvamisel:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Seega on funktsiooni graafiku asümptoodiks x-telg $y = 0$.

Uuritava funktsiooni graafik on kujutatud joonisel 19.



Joon. 19.

Funktsiooni $y = e^{-x^2}$ graafikut nimetatakse ka <u>Gaussi kõveraks</u> ja ta leiab laialdast kasutamist tõenäosusteoorias.

III MÄÄRAMATA INTEGRAAL

§1. ALGFUNKTSIOONI JA MÄÄRAMATA INTEGRAALI MÕISTE

Diferentsiaalarvutuses seisnes põhiline ülesanne järgnevas: oli antud mingi funktsioon $y = f(x)$; leida selle funktsiooni tuletis.

Matemaatikas esineb sageli ka vastupidine ülesanne, nimelt: on antud funktsioon $y = f(x)$; leida niisugune funktsioon $y = F(x)$, mille tuletis võrdub antud funktsiooniga, s.t. mis täidab tingimust

$$F'(x) = f(x).$$

Defineerime:

niisugust funktsiooni $y = F(x)$, mille tuletis võrdub funktsiooniga $y = f(x)$, nimetatakse funktsiooni $y=f(x)$ algfunktsiooniks.

Näiteks on funktsioon $y = x^2$ funktsiooni $y = 2x$ algfunktsiooniks, sest

$$(x^2)' = 2x .$$

Me märkame kohe, et antud funktsioonil pole mitte üks algfunktsioon, vaid neid on rohkem. Sest kui

$$F'(x) = f(x), \quad \text{on ka} \quad \left[F(x) + C\right]' = F'(x) = f(x) ,$$

kus C võib olla suvalise väärtusega konstant. Niisiis, kui funktsioon $y = F(x)$ on funktsiooni $y = f(x)$ algfunktsioon, siis on seda ka kõik funktsioonid $y = F(x) + C$. Seega on antud funktsioonil lõpmata palju algfunktsioone, mis erinevad üksteisest konstantse liidetava poolest.

Kas antud funktsiooni algfunktsioonid võivad üksteisest ka rohkem erineda? Sellele küsimusele annab vastuse järgmine

<u>teoreem</u>: Antud funktsiooni mistahes kaks algfunktsiooni võivad teineteisest erineda ülimalt konstantse liidetava poolest.

T õ e s t u s. Olgu funktsioonid $y = F_1(x)$ ja $y = F_2(x)$ suvalised kaks algfunktsiooni funktsioonile $y = f(x)$. Siis

$$F_1'(x) = f(x), \quad F_2'(x) = f(x) \quad \text{ja} \quad F_2'(x) - F_1'(x) = 0$$

ehk

$$\left[F_2(x) - F_1(x)\right]' = 0 .$$

Nulltuletisteoreemi (vt. ptk.II §2) kohaselt on järelikult

$$F_2(x) - F_1(x) = \text{const} ,$$

seega erinevus võib olla ainult konstantses liidetavas, m.o.t.t.

Niisiis: kui antud funktsioonile $y = f(x)$ on leitud üks algfunktsioon $y = F(x)$, siis kõik selle funktsiooni algfunktsioonid esitab valem

$$y = F(x) + C,$$

kui selles C-d mõista suvalise väärtusega konstandina.

Defineerime:

antud funktsiooni $y = f(x)$ kõigi algfunktsioonide hulka nimetatakse <u>määramata integraaliks</u> sellest funktsioonist ja tähistatakse sümboliga

$$\int f(x)dx .$$

Vastavalt eelnevale

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (3.1)$$

kus $F'(x) = f(x)$ ning C on suvalise väärtusega konstant, mida siinkohal nimetame integreerimiskonstandiks. Nii on näiteks

$$\int 2x\, dx = x^2 + C .$$

Peatume veel lühidalt mõningatel terminitel. Muutujat x nimetatakse integreerimismuutujaks. Integraali märgi all seisvat funktsiooni nimetatakse integreeritavaks funktsiooniks; $f(x)dx$ on integraalialune avaldis.

§ 2. MÄÄRAMATA INTEGRAALI OMADUSED

I Tuletis määramata integraalist võrdub integreeritava funktsiooniga:

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) .$$

T õ e s t u s. Definitsiooni põhjal

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{kus} \quad F'(x) = f(x);$$

seega

$$\left[\int f(x)dx\right]' = \left[F(x) + C\right]' = F'(x) = f(x),$$

m.o.t.t.

II Diferentsiaal määramata integraalist võrdub integraalialuse avaldisega:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx .$$

T õ e s t u s.

$$d\int f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]'dx = \underset{\text{(omaduse I põhjal)}}{\dots} = f(x)dx, \qquad \text{m.o.t.t.}$$

III Määramata integraal mingi funktsiooni tuletisest võrdub selle funktsiooniga pluss suvaline integreerimiskonstant:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C .$$

T õ e s t u s. Et

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{kus} \quad F'(x) = f(x), \text{ siis}$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + C, \quad \text{m.o.t.t.}$$

IV Konstantse teguri võib tuua integraali märgi ette:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \tag{3.2}$$

kui $k = \text{const.}$

T õ e s t u s. Diferentseerime valemi (3.2) paremat poolt:

$$\left[k\int f(x)dx\right]' = k\left[\int f(x)dx\right]' = kf(x) .$$

Saime tulemuseks integreeritava funktsiooni valemi (3.2) vasakul poolel seisvast integraalist; järelikult valem(3.2) on õige, m.o.t.t.

V Summat võib integreerida liikmeti:

$$\int\left[f(x) + g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx. \tag{3.3}$$

T õ e s t u s. Et valemi (3.3) parema poole diferentseerimine annab vasakul poolel seisva integreeritava funktsiooni,

$$\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right]' = \left[\int f(x)dx\right]' + \left[\int g(x)dx\right]' =$$

$$= f(x) + g(x),$$

on see valem õige, m.o.t.t. Samasugune valem kehtib ka vahe korral:

$$\int\left[f(x) - g(x)\right]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx .$$

§ 3. INTEGREERIMISE PÕHIVALEMID

Integreerimise põhivalemite tabeli saame tuletiste põhivalemite tabeli "tagurpidi" rakendamisel; see on järgmine:

I $\int dx = x + C$;

II $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; kui $n \neq -1$;

III $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

IV $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

V $\int e^x dx = e^x + C$;

VI $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

VII $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

VIII $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$;

IX $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

X $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$.

Nende valemite tõestamine põhineb määramata integraali definitsioonvalemil (3.1):

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{kus} \quad F'(x) = f(x).$$ Seega

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

sest

$$(\sin x)' = \cos x ;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x, \text{ sest } (\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{jne.}$$

Eraldi peatume valemil III:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kui } x > 0; \\ -x, & \text{kui } x < 0, \end{cases}$$

seega kui $x > 0$, on $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$;

kui $x < 0$, siis $(\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

ning järelikult valem III $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ on õige.

N ä i d e 1. $\int \frac{1+x^2}{x}dx = \int (\frac{1}{x} + x)dx = \int \frac{dx}{x} + \int x\,dx =$
$= \ln|x| + \frac{x^2}{2} + C.$

N ä i d e 2. $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$

N ä i d e 3.

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C .$$

§4. MUUTUJA VAHETUSE VÕTE MÄÄRAMATA INTEGRAALI LEIDMISEL

Eelmise paragrahvi valemid võimaldavad kergesti leida integraali

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C ;$$

kuidas leida aga sellele väga lähedase kujuga integraali $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$, sellele tabelist vastust ei leia.

Niisugustel juhtudel kasutatakse integraali leidmiseks nn. muutuja vahetuse võtet, mis seisneb järgnevas.

Integreerimismuutujaks võetakse x asemele mingi uus muutuja, näiteks t, mille sõltuvus x-st püütakse valida selliselt, et integraal teiseneks kujule, mille saame võtta põhivalemite tabeli abiga. Selle juures tuleb peale integreeritava funktsiooni avaldada uue muutuja kaudu ka integreerimismuutuja diferentsiaal dx.

Meie näites näib olevat otstarbekas valida uueks muutujaks $t = 2x - 1$, siis $dt = 2\,dx$; $dx = \frac{1}{2}dt$;

integraal teiseneb pärast seda kujule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \ldots$$

mis võrdub (kuna matemaatilise valemi kehtivus ei sõltu tähtedest, mille abil ta üles kirjutame)

$$\ldots = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = \sqrt{t} + C = \ldots$$

asendades t, mis oli sisse toodud ainult integreerimise hõlbustamiseks, uuesti x kaudu

$$\ldots = \sqrt{2x - 1} + C .$$

Muutuja vahetuse valemi üldine kuju on järgmine:

kui $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$,

siis

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad (3.4)$$

Toome veel ühe näite: olgu vaja leida

$$\int \cos 3x \, dx .$$

Võtame $t = 3x$, siis $dt = 3dx$, $dx = \frac{1}{3}dt$,

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3}\int \cos t \, dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

§ 5. MÕNED SPETSIAALSED MUUTUJA VAHETUSED

Põhiliseks raskuseks muutuja vahetuse võtte kasutamisel osutub asjaolu, et ei saa anda reeglit, mis kõikide juhtude jaoks näitaks sobiva muutuja vahetuse ja viiks integraali leidmise integreerimise põhivalemite tabelile või mõnele mujalt varem tuntud integraalile. Küll saab näidata eesmärgile viiva muutuja vahetuse mõnel juhul, kui integreeritav funktsioon omab teatud erikuju. Vaatleme järgnevalt kaht sellist juhtu.

I Olgu teada $\int f(x)dx = F(x) + C.$

Millega võrdub $\int f(ax + b)dx$, kus a ja b on konstandid? Siin osutub tagajärjekaks muutuja vahetus

$$t = ax + b, \quad dt = adx, \quad dx = \frac{1}{a}dt ,$$

pärast mida saame

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}\int f(t)dt .$$

Et $\int f(t)dt = F(t) + C,$

siis $$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax + b) + C. \qquad (3.5)$$

Nii saab sellise juhu jaoks anda reegli:

kui $\int f(x)dx = F(x) + C$, siis $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$

N ä i d e 1. Kuna $\int e^x dx = e^x + C$,

siis $\int e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{-1} + C = -e^{-x} + C$.

N ä i d e 2. Kuna $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

siis $\int \frac{dx}{1+4x} = \frac{1}{4} \ln|1 + 4x| + C$.

II Kui oskame leida integraali $\int f(x)dx$, siis integraali $\int f[g(x)] g'(x)dx$ leidmisel viib sihile muutuja vahetus

$$t = g(x), \quad dt = g'(x)dx,$$

sest siis saab see integraal kuju

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(t)dt.$$

N ä i d e. Integraali $\int \sin^2 x \cos x \, dx$ puhul paneme tähele, et $(\sin x)' = \cos x$ ning võtame uueks muutujaks $t = \sin x$; siis $dt = \cos x \, dx$ ja järelikult

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

§ 6. OSITI INTEGREERIMINE

Lähtume korrutise tuletise valemist (1.8)

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Sellest

$$uv' = (uv)' - u'v;$$

$$uv'dx = (uv)'dx - vu'dx$$

ning

$$\int uv'dx = \int (uv)'dx - \int vu'dx.$$

Et $u'dx = du$, $v'dx = dv$, saame, rakendades veel omadust III paragrahvist 2

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \qquad (3.6)$$

(siin on parema poole esimese liikme juurde integreerimiskonstant jäetud kirjutamata - me ühendame ta $\int v\,du$ omaga). Valem (3.6) kannab ositi integreerimise põhivalemi nime. Ta ei lahenda integraali leidmise ülesannet lõpuni, vaid taandab ühe integraali ($\int u\,dv$) leidmise teise integraali ($\int v\,du$) leidmisele. Võtet on muidugi mõtet kasutada vaid sel juhul, kui viimane integraal on lihtsam.

N ä i d e 1. Olgu vaja leida $\int x \cos x\,dx$.

Valime
$$u = x, \quad du = dx,$$
$$dv = \cos x\,dx; \quad v = \sin x.$$
$$\int x \cos x\,dx = x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x + C.$$

N ä i d e 2. Leiame $\int xe^x dx$.
$$u = x, \quad du = dx,$$
$$dv = e^x dx; \quad v = e^x.$$
$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Millal on seda võtet kasutades edu loota? Tavaliselt siis, kui integraali all seisab kahe funktsiooni korrutis, millest ühe (u) tuletis on lihtsam kui ta ise, teise (v') algfunktsioon aga mitte keerulisem kui ta ise - näiteks astmefunktsiooni või polünoomi korrutis transtsendentse funktsiooniga (eksponentfunktsioon, trigonomeetriline funktsioon).

Mõnikord tuleb võtet kasutada korduvalt:
$$\int x^2 e^x dx = \ldots$$
$$u = x^2, \quad du = 2x\,dx,$$
$$dv = e^x dx; \quad v = e^x;$$
$$\ldots = x^2 e^x - 2\int xe^x dx = \ldots$$
integraal lihtsustus, kuid ei leidu veel põhivalemite tabelis; tuleb uuesti võtet kasutada. Me oleme seda juba eespool teinud (näide 2)
$$\ldots = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

§ 7. RATSIONAALMURDUDE LAHUTAMINE OSAMURDUDEKS

Ratsionaalmurruks nimetatakse kahe polünoomi jagatist:
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}.$$

Vaatleme esialgu juhtu, kus lugejas asuva polünoomi aste on madalam, kui nimetajas asuva oma, s.t. $n < m$. Siis saab niisuguse murru alati lahutada teatud arvu lihtsamate, nn. osamurdude summaks. Nende osamurdude juures on oluline, milliste tegurite korrutisena saab esitada nimetajas asuva polünoomi $Q(x)$; seega alati tuleb kôigepealt see polünoom teguriteks lahutada. Vaatleme esineda vôivaid erijuhte eraldi.

I Nimetaja tegurid on lineaarsed ja esimeses astmes, näiteks $\frac{2x - 1}{(x - 1)(x - 2)}$.

See murd lahutub kaheks osamurruks järgmiselt:

$$\frac{2x - 1}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2},$$

kus A ja B on konstandid. Kui nimetajas oleks tegureid rohkem, saaksime osamurde rohkem - vastavalt igale tegurile ühe.

II Nimetajas on lineaarseid tegureid nii esimeses kui ka kôrgemas astmes, näiteks $\frac{x^2}{(x + 1)(x - 1)^2}$.

Seda murdu saab lahutada järgmiste osamurdude summaks:

$$\frac{x^2}{(x + 1)(x - 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2},$$

kus A, B ja C on konstandid. Esimeseastmelisele tegurile vastab üks osamurd, kôrgemaastmelisele niimitu, kui suur on ta aste (praegu 2), kusjuures nimetajad on viimastel selle teguri kasvavad astmed ühest kuni kordse teguri astmeni.

III Nimetajas vôib esineda ka reaalarvude vallas tegureiks mittelahutuv ruuttegur, näiteks

$$\frac{8(x + 3)}{x(x^2 - 4x + 8)}.$$

Sel juhul saame järgmised osamurrud:

$$\frac{8(x + 3)}{x(x^2 - 4x + 8)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 4x + 8},$$

s.t. ruuttegurile vastava osamurru lugeja on x suhtes lineaarne (A, B ja C on ikka konstandid). Muidugi vôib selliseid ruuttegureid esineda ka ühest kôrgemas astmes, kuid seda juhtu me ei käsitle.

Kuidas leida osamurdude lugejates leiduvate konstantide väärtusi? Näitame seda näitel

$$\frac{2x - 1}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} .$$

Korrutades selle võrduse läbi teguriga $(x - 1)(x - 2)$ saame

$$2x - 1 = A(x - 2) + B(x - 1) .$$

See võrdus peab olema samasus, s.t. kehtima iga x väärtuse korral. Andes x-le väärtuse 1, s.t. $x=1$, saame

$$1 = -A ,$$

kui võtta aga $x=2$, siis

$$3 = B ,$$

millest

$$A = -1, \quad B = 3.$$

Seega

$$\frac{2x - 1}{(x - 1)(x - 2)} = -\frac{1}{x - 1} + \frac{3}{x - 2} .$$

__Märkus.__ On kasulik anda x-le niisuguseid väärtusi, mis muudaksid mõne tundmatu kordaja nulliks! Kui see aga pole võimalik (mõnes teises näites), siis anda võimalikult lihtsaid väärtusi (näiteks null).

Analoogiliselt saab leida osamurdude kordajad ka meie teistes näidetes; veenduge, et tulemused on

$$\frac{x^2}{(x + 1)(x - 1)^2} = \frac{1}{4(x + 1)} + \frac{3}{4(x - 1)} + \frac{1}{2(x - 1)^2}$$

ja

$$\frac{8(x + 3)}{x(x^2 - 4x + 8)} = \frac{3}{x} + \frac{-3x + 20}{x^2 - 4x + 8} .$$

§ 8. OSAMURDUDE INTEGREERIMINE

Nagu eelmises paragrahvis nägime, esineb ratsionaalmurru osamurdude hulgas 3 tüüpi murde:

I $\frac{A}{x - a}$; II $\frac{A}{(x - a)^m}$; III $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$

(nimetaja tegureiks mittelahutuv).

Vaatleme järgnevas nende integreerimist.

I See osamurd on integreeritav § 5 I toodud reegli abil:

$$\int \frac{A}{x - a}\,dx = A\int \frac{dx}{x - a} = A\ln|x - a| + C .$$

II Sama reegli abil on leitav integraal teist tüüpi osamurrust:

$$\int \frac{A}{(x - a)^m}\,dx = A\int (x - a)^{-m}dx =$$

$$= A\,\frac{(x - a)^{-m+1}}{-m + 1} + C = -\,\frac{A}{(m - 1)(x - a)^{m-1}} + C .$$

III Kõige tülikam on kolmanda osamurdude tüübi integreerimine. Näitame seda konkreetsel näitel. Olgu

$$J = \int \frac{-\,3x + 20}{x^2 - 4x + 8}\,dx .$$

Kõigepealt tuleb lugejast välja eraldada liidetav, mis on võrdeline nimetaja tuletisega, nii et see sisaldaks tervenisti x-ga liikme (üle võib jääda ainult konstant). Nimetaja tuletis on praegu $2x - 4$, seega

$$J = \int \frac{-\,\frac{3}{2}\,(2x - 4) + 14}{x^2 - 4x + 8}\,dx .$$

Edasi jagame kummagi liikme lugejas eraldi nimetajaga ning saame

$$J = -\,\frac{3}{2}\int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 8}\,dx + 14\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8} = -\,\frac{3}{2}J_1 + 14J_2$$

(J_1 ja J_2 tähistavad vastavaid integraale). Integraalis

$J_1 = \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 8}\,dx$ seisab murru lugejas nimetaja tuletis. Siin teeme muutuja vahetuse

$$t = x^2 - 4x + 8 , \quad dt = (2x - 4)dx$$

ja saame

$$J_1 = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C_1 = \ln(x^2 - 4x + 8) + C_1 .$$

Integraali J_2 all eraldame kõigepealt nimetajas täisruudu, nii et see hõlmaks mõlemad x-i sisaldavad liikmed:

$$J_2 = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8} = \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 4} ;$$

edasi viime sealt vabaliikme integraali märgi ette:

$$J_2 = \int \frac{dx}{4\left[\frac{(x-2)^2}{4} + 1\right]} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 1} .$$

Paistab juba silma selle integraali sarnasus integraaliga § 2 valemist X. Teeme veel muutuja vahetuse

$$z = \frac{x-2}{2}, \qquad dz = \frac{1}{2}dx , \qquad dx = 2\,dz$$

ja saame

$$J_2 = \frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\arctan z + C_2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{x-2}{2} + C_2.$$

Seega

$$J = -\frac{3}{2}J_1 + 14 J_2 = -\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + 7\arctan\frac{x-2}{2} + C.$$

Analoogiliselt saab integreerida kõiki vaadeldavat tüüpi osamurde. Nagu näeme, avaldub niisugune integraal üldjuhul logaritmfunktsiooni ja arkustangensi summana.

Leiame nüüd saadud valemite abil integraalid kõigist eelmises paragrahvis näidetena vaadeldud ratsionaalmurdudest:

1) $$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx = -\int\frac{dx}{x-1} + 3\int\frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right| + C .$$

2) $$\int \frac{x^2dx}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C .$$

3) $$\int \frac{8(x+3)}{x(x^2-4x+8)}dx = 3\int\frac{dx}{x} - \int\frac{3x-20}{x^2-4x+8}dx =$$

$$= 3\ln|x| - \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + 7\arctan\frac{x-2}{2} + C .$$

§ 9. RATSIONAALMURD, MILLE LUGEJA ASTE POLE MADALAM NIMETAJA ASTMEST

Kui ratsionaalmurru $\frac{P(x)}{Q(x)}$ lugeja aste pole madalam nimetaja astmest, siis teda eespool kirjeldatud viisil osamurdudeks lahutada ei saa. Sel juhul tuleb kõigepealt lugeja jagamise teel eraldada täisratsionaalne osa.

Näiteks
$$\frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2};$$

jagame lugeja nimetajaga:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^4 - x^3 & + 2x^2 & & -1 & x^2 - 3x + 2 \\
\underline{x^4 - 3x^3} & \underline{+ 2x^2} & & & \overline{x^2 + 2x + 6} \\
2x^3 & & & & \\
\underline{2x^3} & \underline{- 6x^2} & \underline{+ 4x} & & \\
 & 6x^2 & - 4x & + 1 & \\
 & \underline{6x^2} & \underline{-18x} & \underline{+12} & \\
 & & 14x & -11 \text{ (jääk)}; &
\end{array}$$

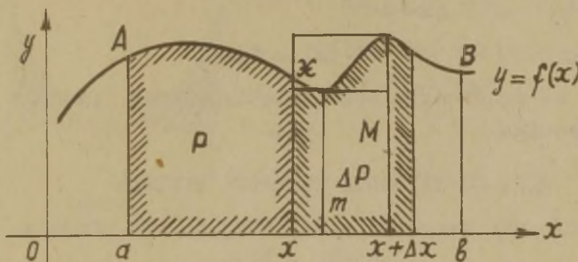
seega
$$\frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = x^2 + 2x + 6 + \frac{14x - 11}{x^2 - 3x + 2}.$$

Täisratsionaalse osa integreerimine on lihtne, murd
$$\frac{14x - 11}{x^2 - 3x + 2} = \frac{14x - 11}{(x - 1)(x - 2)}$$

aga tuleb lahutada osamurdudeks ning integreerida nagu eespool. Selle murru nimetaja on juba kõrgema astmega kui lugeja, nii et see tee on täiesti võimalik.

§ 1. PINDFUNKTSIOON JA TEMA TULETIS

Olgu antud kujund, mida piiravad x-telje lõik [a,b], funktsiooni y = f(x) graafik ning selle graafiku ordinaadid lõigu otspunktides x = a ja x = b (joon. 20).



Joon. 20.

Niisugust kujundit nimetatakse kõverjoonseks trapetsiks - teatud sarnasuse tõttu trapetsiga, millel on ka kaks vastaskülge paralleelsed, kaks ülejäänut aga mitte.

Märgime x-teljel punkti x ja vaatleme kõverjoonset trapetsit axXA. Tähistame selle pindala tähega P. On selge, et pindala P sõltub x-st; igale kindlale x väärtusele vastab pindala P kindel väärtus. Seega pindala P on x funktsioon:

$$P = P(x).$$

Seda funktsiooni nimetatakse pindfunktsiooniks. Niisiis:

pindfunktsioon on fikseeritud alguse ja muutuva lõpuga kõverjoonse trapetsi pindala funktsiooni y = f(x) graafiku all.

Leiame pindfunktsiooni tuletise. Anname x-le muudu Δx; sellele vastab pindfunktsiooni muut ΔP (kõverjoonse trapetsi pindala lõigu $[x, x+\Delta x]$ kohal). Olgu funktsiooni y=f(x) vähim ja suurim väärtus lõigul $[x, x+\Delta x]$ vastavalt m ja M. Joonestame sellele lõigule ristkülikud kõrgustega m ja M. Pindala ΔP väärtus asub nende ristkülikute pindalade vahel:

$$m\Delta x \leqslant \Delta P \leqslant M\Delta x$$

(võrdus esineb vaid siis, kui $f(x) = \text{const}$). Seega

$$m \leqslant \frac{\Delta P}{\Delta x} \leqslant M .$$

Kui $\Delta x \to 0$, lähenevad nii m kui ka M funktsiooni väärtusele kohal x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} m = \lim_{\Delta x \to 0} M = f(x).$$

Järelikult on ka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x)$$

ehk

$$P'(x) = f(x). \qquad (4.1)$$

Leidsime, et pindfunktsiooni tuletis võrdub pindala piirava lõppordinaadiga.

§ 2. KÕVERJOONSE TRAPETSI PINDALA

Kõverjoonse trapetsi abBA (vt. joon 20) pindala

$$S_{abBA} = P(b)$$

(s.t. ta võrdub pindfunktsiooni väärtusega kohal $x = b$). Kuidas aga leida funktsioonile $y = f(x)$ vastavat pindfunktsiooni?

Valem (4.1) näitab, et pindfunktsioon on üks funktsiooni $y = f(x)$ algfunktsioonidest. Olgu $y = F(x)$ mingi algfunktsioon funktsioonile $y = f(x)$. Siis pindfunktsioon võib temast erineda ülimalt konstantse liidetava poolest:

$$P(x) = F(x) + C .$$

Pindfunktsiooni kohta aga teame, et tema väärtus x väärtusel a on null, $P(a) = 0$, sest kui $x = a$, siis $S_{axXA} = 0$.

$$P(a) = F(a) + C,$$

seega $F(a) + C = 0$, millest $C = -F(a)$.

Nii on C väärtus leitud ja seega pindfunktsioon käes:

$$P(x) = F(x) - F(a) . \qquad (4.2)$$

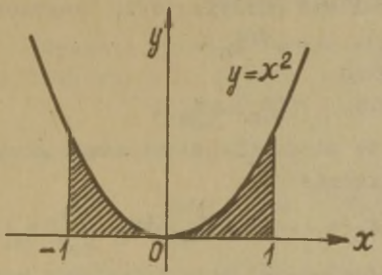
Selleks piisab ühe algfunktsiooni teadmisest funktsioonile $y = f(x)$.

Kõverjoonse trapetsi abBA pindala jaoks saame nüüd valemi

$$S_{abBA} = P(b) = F(b) - F(a) . \qquad (4.3)$$

Kõverjoonse trapetsi pindala võrdub funktsiooni $y=f(x)$ suvalise algfunktsiooni väärtuste vahega kohtadel $x=b$ ja $x=a$.

N ä i d e. Leida kõverjoonse trapetsi pindala funktsiooni $y = x^2$ graafiku ja x-telje vahel lõigu $[-1, 1]$ ulatuses.



Joon. 21.

Üks algfunktsioon funktsioonile $y = x^2$ on

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3.$$

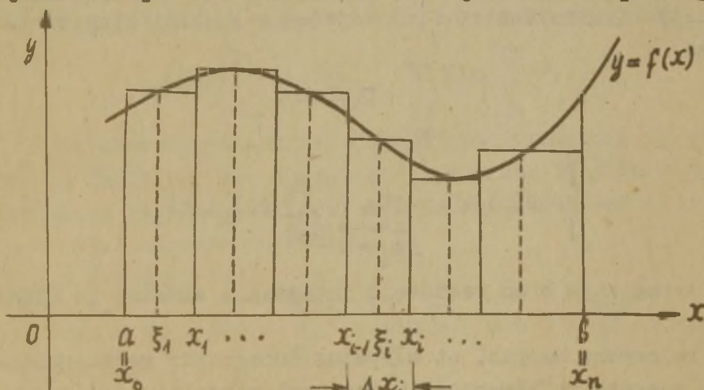
Valemi (4.3) kohaselt on siis arvutatav pindala

$$S = F(1) - F(-1) =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}(-1)^3 = \frac{2}{3}.$$

§ 3. MÄÄRATUD INTEGRAALI MÕISTE

Vaatleme jälle kõverjoonse trapetsi pindala arvutamise ülesannet. Arvutame seekord trapetsi abBA (joon.20) pindala teisel teel.

Jaotame kõigepealt lõigu $[a,b]$ n osaks. Osade pikkused tähistame $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ (need võivad üldiselt erinevad olla). Jaotuspunktides joonestame ordinaadid; need jaotavad kõverjoonse trapetsi n väiksemaks kõverjoonseks trapetsiks.



Joon. 22.

Valime igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ vabalt ühe punkti ξ_i. Saame

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n .$$

Edasi kujundame igale osalõigule ristküliku, mille kõrguseks on graafiku ordinaat valitud punktis, s.t. vastavalt

$$f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n).$$

Nende ristkülikute pindalad on

$$f(\xi_1)\Delta x_1, \quad f(\xi_2)\Delta x_2, \dots, f(\xi_n)\Delta x_n .$$

Kõigi niisuguste ristkülikute pindalade summa annab arvutatava pindala ligikaudse väärtuse:

$$S_{abBA} \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

See ligikaudne väärtus on seda parem, mida suuremaks arvuks osadeks on jaotatud lõik $[a,b]$ (mida suurem on n)ning mida väiksemad on osalõigud (Δx_i). Pindala täpse väärtuse saame piirväärtusena $n \to \infty$ ja kõigi osalõikude pikkuste $\Delta x_i \to 0$.

$$S_{abBA} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (4.4)$$

Seega

kui valemi (4.4) paremal poolel seisev piirväärtus eksisteerib ning ei sõltu osalõikudeks jaotamise viisist ja punktide ξ_i valikust, siis nimetatakse teda **määratud integraaliks** funktsioonist f(x) rajades a-st b-ni ning tähistatakse

$$\int_a^b f(x)dx .$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (4.5)$$

Arvud a ja b on vastavalt integraali alumine ja ülemine raja.

Eelnevast selgub, et määratud integraali geomeetriliseks vasteks on kõverjoonse trapetsi pindala:

$$\int_a^b f(x)dx = S_{abBA} . \qquad (4.6)$$

Märkus. Kui kõverjoonne trapets asub allpool x-telge, annab määratud integraal tema pindala märgiga "miinus"- sest sel juhul on kõik $f(\xi_i) < 0$. Sel juhul annab ka valem (4.3) pindala märgiga "miinus".

§ 4. NEWTON-LEIBNIZ'I VALEM

Eespool saime kõverjoonse trapetsi pindala arvutamiseks kaks valemit; valemi (4.3) järgi

$$S_{abBA} = F(b) - F(a), \text{ kus } F'(x) = f(x),$$

ning valemi (4.6) järgi

$$S_{abBA} = \int_a^b f(x)dx .$$

Loomulikult peavad mõlemad valemid andma sama pindala; seega

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{4.7}$$

kus $F'(x) = f(x)$.

Valem (4.7) kannab matemaatilises analüüsis Newton-Leibniz'i valemi nime. See valem näitab, et määratud integraali arvutamiseks on vaja:

1) leida integreeritavale funktsioonile üks algfunktsioon ja

2) leida selle algfunktsiooni väärtuste vahe ülemisel ja alumisel rajal.

Valemi paremat poolt $F(b) - F(a)$ võib kirjutada ka kujul

$$F(x)\Big|_a^b \quad \text{või} \quad \Big[F(x)\Big]_a^b .$$

Esimest kirjutusviisi kasutatakse peamiselt siis, kui $F(x)$ on üksliige; kui ta aga koosneb mitme liidetava summast, siis teist (et oleks täiesti selge, missugustesse liidetavatesse rajad asetada tulevad).

N ä i d e 1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

N ä i d e 2. $\int_{-2}^{3}(x^2-2x+3)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right]_{-2}^{3} =$

$= (\frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 9) - (-\frac{1}{3}\cdot 8 - 4 - 6) = 9 - (-12\frac{2}{3}) = 21\frac{2}{3}.$

§ 5. MÄÄRATUD INTEGRAALI OMADUSI

I Rajade vahetamisel muutub määratud integraali märk:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx . \qquad (4.8)$$

T õ e s t u s. Newton-Leibniz'i valemi järgi

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -\left[F(b) - F(a)\right] = -\int_a^b f(x)dx,$$

m.o.t.t.

II Ühtelangevate rajadega määratud integraal on null:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad (4.9)$$

See järeldub samuti otseselt Newton-Leibniz'i valemist.

III Integreerimispiirkonda võib jaotada osadeks; s.t. kui $a < c < b$, siis

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx . \qquad (4.10)$$

T õ e s t u s. Newton-Leibniz'i valemi põhjal

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \left[F(c) - F(a)\right] + \left[F(b) - F(c)\right] =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx, \quad \text{m.o.t.t.}$$

IV Konstantse teguri võib tuua määratud integraali märgi ette:

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx . \qquad (4.11)$$

T õ e s t u s. Määratud integraali definitsiooni põhjal

$$\int_a^b k\, f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} k\, f(\xi_i)\, \Delta x_i = \ldots$$

et summa liikmete ühise teguri võib võtta summa märgi ette

$$\ldots = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} k \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i = \ldots$$

ja et piirväärtuse märgi alt võib konstantse teguri tuua ette

$$\ldots = k \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i = k \int_a^b f(x)dx,$$

m.o.t.t.

V Summat võib integreerida liikmeti:

$$\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,. \quad (4.12)$$

Selle omaduse võib tõestada samal viisil, nagu eelneva. Ta kehtib ka vahe korral.

VI Määratud integraal ei sõltu integreerimismuutuja tähistusest:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots$$

See omadus järeldub otseselt Newton-Leibniz'i valemist, mille põhjal

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\ ;$$

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\ ;$$

$$\int_a^b f(u)du = F(u)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ jne.- kõik

tulemused on võrdsed.

§ 6. MUUTUJA VAHETUS JA OSITI INTEGREERIMINE MÄÄRATUD INTEGRAALI KORRAL

1. Muutuja vahetus. Muutuja vahetuse eesmärgiks on siin, nagu määramata integraali korralgi, algfunktsiooni leidmise hõlbustamine. Erinevus seisneb aga selles, et määratud integraali korral tulevad uuele muutujale teisendada ka rajad.

Tutvume sellega näidetel.

N ä i d e 1. Leida
$$J = \int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} .$$

Teeme muutuja vahetuse $t = 2x + 1$, $dt = 2dx$, $dx = \frac{1}{2}dt$; teisendame ka rajad: kui $x = 1$, siis $t = 3$; kui $x = 2$, siis $t = 5$. Saame
$$J = \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \cdot \left[- \frac{1}{t} \right]_3^5 = - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{15} .$$

Märgime, et siin pole vaja pärast algfunktsiooni leidmist tagasi minna esialgsele muutujale x, vaid võib kohe kasutada Newton-Leibniz'i valemit.

N ä i d e 2. Leida
$$J = \int_0^1 \frac{dx}{1 + 9x^2} .$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + 9x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + (3x)^2} = \ldots \quad t=3x, \quad dt=3dx, \quad dx= \frac{1}{3}dt ;$$

kui $x = 0$, siis $t = 0$,
kui $x = 1$, siis $t = 3$

$$\ldots = \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3} \arctan t \Big|_0^3 = \frac{1}{3}(\arctan 3 - \arctan 0) =$$
$$= \frac{1}{3} \arctan 3 .$$

2. Ositi integreerimine. Ositi integreerimise põhivalem määramata integraali puhul oli (3.6):
$$\int u\, dv = uv - \int v\, du .$$

Määratud integraali korral kehtib ta samasugusel kujul:
$$\int_a^b u\, dv = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b v\, du \qquad (4.13)$$

(rajad tuleb asetada ka väljaintegreeritud osasse).

N ä i d e. Leida

$$\int_1^2 x \ln x \, dx .$$

$$u = \ln x, \quad \Big| \quad du = \frac{dx}{x},$$
$$dv = x\,dx \quad \Big| \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_1^2 x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2} dx = 2 \ln 2 - \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 =$$

$$= 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2 \ln 2 - \frac{3}{4} .$$

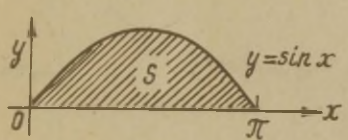
§ 7. PINDALA ARVUTAMINE MÄÄRATUD INTEGRAALI ABIL

Nagu selgus paragrahvis 3, annab määratud integraal

$$\int_a^b f(x)dx$$

kõverjoonse trapetsi pindala funktsiooni $y = f(x)$ graafiku ja x-telje vahel lõigu $[a,b]$ ulatuses. Tuleb vaid meeles pidada, et kui see kõverjoonne trapets asub allpool x-telge(s.t. funktsiooni $y = f(x)$ graafik on allpool x-telge), siis saame tema pindala märgiga "miinus".

N ä i d e 1. Leida kõverjoonse trapetsi pindala funktsiooni $y = \sin x$ graafiku ja x-telje vahel lõigu $[0,\pi]$ ulatuses (joon.23).



Joon. 23.

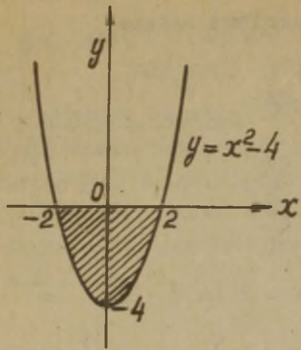
$$S = \int_0^{\pi} \sin x \, dx =$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi -$$

$$- \cos 0) = -(-1-1) = 2.$$

N ä i d e 2. Leida kujundi pindala, mida piirab funktsiooni $y = x^2 - 4$ graafik ja x-telg.

Leiame kõigepealt funktsiooni $y = x^2 - 4$ graafiku lõikepunktid x-teljega (joon.24):



Joon. 24.

$$x^2 - 4 = 0,$$
$$x^2 = 4,$$
$$x = \pm 2 .$$

Niisiis, see kujund asub lõigu $[-2,2]$ ulatuses allpool x-telge, siis tema pindala

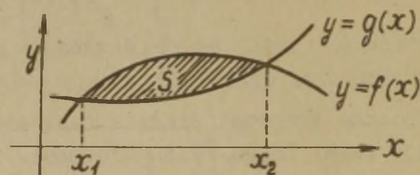
$$S = -\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 10\frac{2}{3} .$$

Kui kujund on piiratud kahe kõveraga, nagu joonisel 25, siis leiame tema pindala kahe kõverjoonse trapetsi pindalade vahena

$$S = S_{ü} - S_a ,$$

kus $S_{ü}$ on ülemise kõvera, S_a aga alumise kõvera alla jääva kõverjoonse trapetsi pindala; seega



Joon. 25.

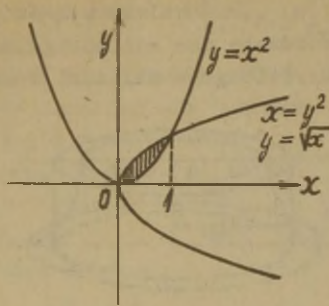
$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$$

ehk

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - g(x)\right] dx . \qquad (4.14)$$

Rajad x_1 ja x_2 võrduvad kõverate lõikepunktide abstsissidega.

N ä i d e 3. Leida kõveratega $y = x^2$ ja $x = y^2$ piiratud kujundi pindala (joon.26).



Joon.26.

Kõverate lõikepunktide abstsissid leiame mõlema kõvera võrrandeist koosnevast võrrandisüsteemist:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2; \end{cases}$$

asendades y teises võrrandis x kaudu, saame

$$x = x^4,$$
$$x - x^4 = 0,$$
$$x(1 - x^3) = 0,$$

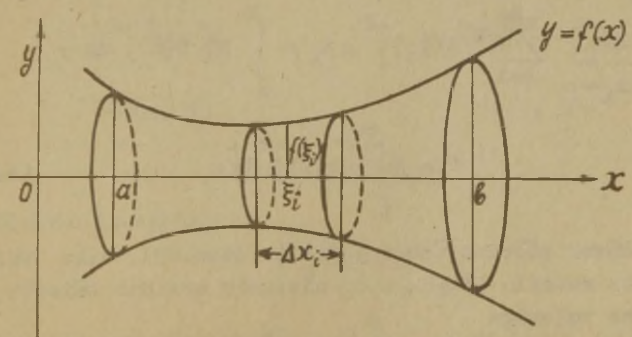
millest $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Seega

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

§ 8. PÖÖRDKEHA RUUMALA

Pöörelgu funktsiooni $y = f(x)$ graafik ümber x-telje. Tekib pöördkeha (joon.27). Kuidas leida selle pöördkeha ruumala x-telje lõigu $[a,b]$ ulatuses?

Jaotame lõigu $[a,b]$ n osaks Δx_i $(i = 1,2,\ldots,n)$. Joonisel on kujutatud neist üks. Jaotuspunktidest paneme läbi x-



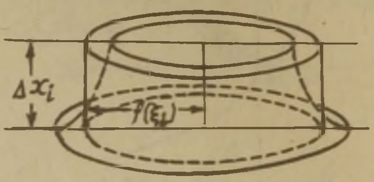
Joon. 27.

-teljega ristuvad tasandid. Need jaotavad pöördkeha kettataolisteks osadeks. Igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ valime vabalt punkti ξ_i ning asendame vastava pöördkeha osa silindriga, mille põhja raadius on $f(\xi_i)$ (joon. 28). Niisuguse silindri ruumala on

$$\pi\left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i ,$$

kus

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} .$$



Joon. 28.

Kõigile osalõikudele $[x_{i-1}, x_i]$ niiviisi konstrueeritud silindrite ruumalade summa

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i$$

annab pöördkeha ruumala ligikaudse väärtuse:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi\left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i .$$

See ligikaudne väärtus on seda täpsem, mida väiksemad on osalõigud $[x_{i-1}, x_i]$ ja mida rohkem neid on. Ruumala täpse väärtuse annab piirväärtus

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi\left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i$$

Vastavalt paragrahvile 3 on selline piirväärtus määratud integraal

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi\left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx ;$$

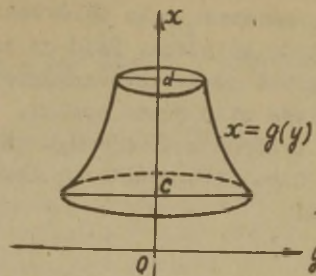
seega

$$V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx . \qquad (4.15)$$

Kui kõver pöörleb ümber y-telje (joon. 29), siis tekkiva pöördkeha ruumala lõigu $[c, d]$ ulatuses avaldub täiesti analoogilise valemiga

$$V = \pi\int_c^d \left[g(y)\right]^2 dy \qquad (4.16)$$

(sel juhul peab kõvera võrrand olema antud kujul $x = g(y)$).



Joon. 29.

N ä i d e. Leida pöördkehade ruumalad, mis tekivad parabooli $y = x^2$ kaare pöörlemisel ümber x- ja y-telje (joon. 30 ja 31), kui $x \in [0,1]$.

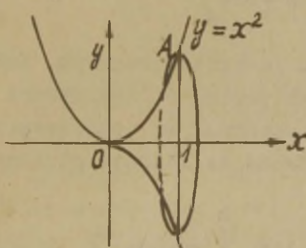
1) Ümber x-telje:

$$V = \pi\int_0^1 (x^2)^2 dx = $$

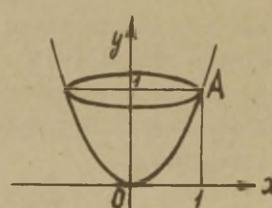
$$= \pi\int_0^1 x^4 dx = \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

2) Ümber y-telje:

$$V = \pi\int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy = \pi\int_0^1 y\, dy = \pi\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$



Joon. 30.



Joon. 31.

§ 9. PÄRATUD INTEGRAALID

Määratud integraali

$$\int_a^b f(x)dx$$

olemasoluks peab funktsioon $y = f(x)$ olema pidev ning rajad a ja b lõplikud. Mõnikord esineb vajadus laiendada integraali mõistet ka nendele juhtudele, kus üks või mõlemad nimetatud eeldustest pole täidetud. Nii jõuame nn. päratute integraalide mõisteni. Neid on kaks liiki: lõpmatute rajadega integraal ja katkeva integreeritava funktsiooniga integraal. Vaatleme neid juhte eraldi.

I Lõpmatute rajadega päratud integraalid.

Olgu integreerimispiirkonnaks $[a, +\infty)$. Vaatleme integraali

$$J = \int_a^b f(x)dx ,$$

mis on tavaline määratud integraal, ning leiame piirväärtuse

$$\lim_{b\to+\infty} J = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Kui see piirväärtus on olemas ning lõplik, öeldakse, et on olemas päratu integraal funktsioonist f(x) rajades a-st $+\infty$-ni

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx . \qquad (4.17)$$

Öeldakse ka, et nimetatud päratu integraal koondub. Kui aga piirväärtus valemi (4.17) paremal poolel ei eksisteeri või on lõpmatu, siis vastav päratu integraal ei eksisteeri ehk hajub. Analoogiliselt defineeritakse ka lõpmatu alumise rajaga integraal

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx \qquad (4.18)$$

ning päratu integraal, mille mõlemad rajad on lõpmatud

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx. \qquad (4.19)$$

N ä i d e 1.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \arctan x \Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} .$$

Järelikult antud integraal koondub (on olemas) ja ta väärtus on $\frac{\pi}{2}$.

N ä i d e 2.

$$\int_{-\infty}^{0} \cos x\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \cos x\,dx = \lim_{a \to -\infty} \sin x \Big|_{a}^{0} = \lim_{a \to -\infty}(-\sin a).$$

Seda piirväärtust pole olemas, seega päratut integraali pole olemas ehk - ta hajub.

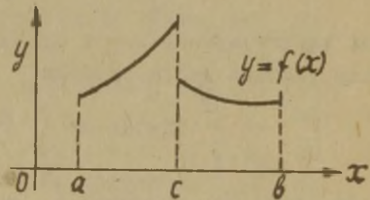
II Päratud integraalid katkevast funktsioonist.

Märgime kõigepealt, et kui integreeritaval funktsioonil on esimest liiki katkevuspunkt (joon.32) kohal $x = c$, siis eksisteerib tavaline määratud integraal

$$\int_{a}^{b} f(x)dx\ ;$$

nimelt võib sel juhul leida integraalid

$$\int_{a}^{c} f(x)dx \quad \text{ja} \quad \int_{c}^{b} f(x)dx$$



Joon. 32.

ning

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx .$$

Seega vaatleme edasi ainult katkevuspunkte, millele lähenedes $f(x) \to +\infty$ (või $-\infty$).

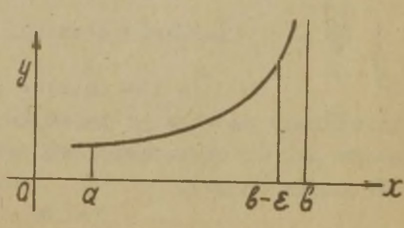
Olgu kõigepealt niisugune katkevuspunkt integraali ülemisel rajal $x = b$ (joon.33).

Moodustame integraali

$$J = \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

ning leiame piirväärtuse

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$



Joon. 33.

Kui see piirväärtus on olemas ning lõplik, siis ütleme, et eksisteerib päratu integraal

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (4.20)$$

ehk, et see päratu integraal koondub; kui aga valemi (4.20) paremal poolel asuvat piirväärtust pole olemas või ta on lõpmatu, siis vastav päratu integraal ei eksisteeri ehk ta hajub. Analoogiliselt defineeritakse ka päratu integraal funktsioonist, millel on katkevus alumisel rajal:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \ ; \qquad (4.21)$$

kui katkevuspunkt $x = c$ on integreerimispiirkonnas($a < c < b$), siis jaotame selle osadeks

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ning saame ühe integraali katkevusega ülemisel, teise alumisel rajal.

Näide 3.

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \ldots \text{(siin on katkevus ülemisel rajal)}$$

$$\ldots = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big[-2\sqrt{2-x}\Big]_1^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0}(2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

See integraal koondub, tema väärtus on 2.

Näide 4.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ldots \text{(katkevus alumisel rajal)} \ldots = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \ln|x| \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0}(-\ln\varepsilon) \ ;$$

Piirväärtus on ∞, seega tuleb öelda, et vaadeldavat päratut integraali ei eksisteeri (või et ta hajub, mitte aga, et ta väärtuseks on ∞).

S I S U K O R D

Лембит Роотс, Элмар Сакков.
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
Учебное пособие для студентов
экономического факультета.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Vastutav toimetaja K. Soonets.
Korrektor H. Kull.
Paljundamisele antud 17.03.1982.
Formaat 60x84/16.
Kirjutuspaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 4,19.
Arvestuspoognaid 3,76. Trükipoognaid 4,5.
Trükiarv 600.
Tell. nr. 326.
Hind 10 kop.
TRÜ trükikoda. ENSV, 202400 Tartu, Pälsoni t. 14.

10 kop.