TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

P.Kard

ERIRELATIIVSUSTEOORIA
II

TARTU 1972

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Teoreetilise füüsika kateeder

P. Kard

ERIRELATIIVSUSTEOORIA
II

TARTU 1972

III p e a t ü k k .

RELATIVISTLIK MEHHAANIKA.

Relativistliku mehhaanika ülesehitamisel on vaja eelkõige silmas pidada relatiivsusprintsiipi. Mehhaanikaseadused ja vastavad võrrandid peavad olema niisugused, et ükski inertsiaalsüsteem ei oleks teistega võrreldes eelistatud. Selleks peavad mehhaanika üldised võrrandid olema mistahes inertsiaalsüsteemis ühesuguse kujuga. Seda omadust - olla ühesuguse kujuga mistahes inertsiaalsüsteemis - nimetatakse i n v a r i a n t s u s e k s . Võrrandites sisalduvad suurused võivad küll muutuda üleminekul teise inertsiaalsüsteemi, kuid nendevahelised seosed jäävad muutumatuks. Võrrandite invariantsuse tõestamise üldiseks meetodiks on nende viimine i l m s e l t i n v a r i a n t s e s s e ehk k o v a r i a n t s e s s e kujju. Võrrandite kovariantsus on relatiivsusteoorias väga tähtis. Selleks vajalik matemaatiline aparatuur on t e n s o r a r v u t u s . Tensorid on suurused, mis teisenevad üleminekul ühest inertsiaalsüsteemist teise kindlate eeskirjade järgi. Järelikult, kui võrrandi mõlemal poolel seisavad sama liiki tensorid, siis teisenevad mõlemad pooled ühesugusel viisil ja võrrand säilitab oma kuju. Seega ongi niisugune võrrand kovariantne.

Alustame käesolevat peatükki ülevaatega tensorarvutusest.

§ 13. Tensorarvutus neljamõõtmelises ruumis.

Me nägime §-s 8, et imaginaarse ajakoordinaadi kasutamisel saab aegruumi geomeetria formaalselt eukleidiliseks. Lorentzi teisendused on aegruumi ortogonaalsed koordinaatteisendused, kusjuures iga inertsiaalsüsteem etendab ortogonaalse (Cartesiuse) koordinaatsüsteemi osa. Seetõttu on ka tensorarvutus neljamõõtmelises ruumis väga sarnane tensorarvutusega kolmemõõtmelises ruumis.

Suurust, mille väärtus on sõltumatu inertsiaalsüsteemi valikust, nimetatakse *invariandiks* ehk *skalariks*. Neljakomponendilist suurust, mille komponendid teisenevad Lorentzi teisenduste puhul nagu aegruumi koordinaadid, nimetatakse neljamõõtmeliseks *vektoriks* ehk nelivektoriks ehk lihtsalt vektoriks (kui ei ole karta segiminekut kolmemõõtmelise vektoriga). Vektori komponente tähistatakse ühe indeksiga, näit. A_μ. Siin ja edaspidi (nagu juba varemgi, alates §-st 7) muutuvad kreeka indeksid 1-st 4-ni, kuna ladina indeksid 1-st 3-ni. Niisiis on vektori teisendusvalem järgmine:

$$A'_\mu = \mathcal{L}_{\mu\nu} A_\nu \, . \qquad (3.1)$$

T e i s t j ä r k u t e n s o r i k s nimetatakse 16-komponendilist suurust, $T_{\mu\nu}$, mille komponendid teisenevad Lorentzi teisenduste puhul järgmise valemi järgi:

$$T'_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\mu\alpha}\mathcal{L}_{\nu\beta}T_{\alpha\beta} \, . \tag{3.2}$$

Teist järku tensorit esitatakse sageli tema komponentidest moodustatud maatriksi kujul, näiteks

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix} \, . \tag{3.3}$$

Analoogiliselt teist järku tensorile saab defineerida ka kõrgemat järku tensorid. n-ndat järku tensor on 4^n - komponendiline suurus, mille komponendid teisenevad Lorentzi teisenduste puhul järgmise valemi järgi:

$$\Theta'_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \mathcal{L}_{\mu_1\nu_1}\mathcal{L}_{\mu_2\nu_2}\cdots\mathcal{L}_{\mu_n\nu_n}\Theta_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \, . \tag{3.4}$$

Vektor on seega 1. järku tensor ja invarianti võib nimetada 0-ndat järku tensoriks.

Peale tensorite on olemas pseudotensorid. Mingit järku pseudotensor erineb sama järku tensorist ainult selle poolest, et kui $\|\mathcal{L}\| = -1$, siis muutuvad pseudotensori komponentide märgid vastupidiseks (peale valemiga (3.4) määratud teisenduse). Näiteks, pseudovektori teisendusvalem on

$$S'_\mu = \|\mathcal{L}\|\mathcal{L}_{\mu\nu}S_\nu \tag{3.5}$$

Üldse, mistahes järku pseudotensori teisendusvalem erineb sama järku tensori teisendusvalemist ainult lisateguri $\|\mathcal{L}\|$ poolest. See tähendab, et teisenduste puhul, kus $\|\mathcal{L}\| = 1$, ei erine pseudotensor tensorist; erinevus ilmneb ainult ruumilise peegelduse või aja inversiooniga seotud teisenduste puhul.

Vaatleme nüüd algebralisi tehteid tensoritega.

Triviaalsel kombel on ilmne, et kahest (või mitmest) sama järku tensorist (või pseudotensorist) võib moodustada summa, liites samade indeksitega komponendid; see summa on sama järku tensor (või pseudotensor) nagu kõik liidetavadki. Näiteks kahe vektori, A_μ ja B_μ summa on vektor $A_\mu + B_\mu$, sest kui $A'_\mu = \mathcal{L}_{\mu\nu} A_\nu$ ja $B'_\mu = \mathcal{L}_{\mu\nu} B_\nu$, siis ka $A'_\mu + B'_\mu = \mathcal{L}_{\mu\nu}(A_\nu + B_\nu)$.

Edasi vaatleme (pseudo)tensori k o o n d a m i s t. Koondamine on algebraline operatsioon, mis seisneb (pseudo)tensori komponentide summeerimises ühe indeksite paari järgi. Koondamine on seega võimalik alates teisest järgust. Koondamise tulemuseks ehk k o o n d i s e k s on (pseudo)tensor, mille järk on koondatava (pseudo)tensori järgust kahe võrra väiksem. Selle tõestuseks olgu näiteks 3. järku tensori $K_{\lambda\mu\nu}$ koondiseks $K_{\mu\mu\nu}$. Näitame, et see on 1. järku tensor (s. o. vektor). 3. järku tensori teisendusvalem on

$$K'_{\lambda\mu\nu} = \mathcal{L}_{\lambda\alpha} \mathcal{L}_{\mu\beta} \mathcal{L}_{\nu\gamma} K_{\alpha\beta\gamma} .$$

Koondades, saame

$$K'_{\mu\mu\nu} = \mathcal{L}_{\mu\alpha} \mathcal{L}_{\mu\beta} \mathcal{L}_{\nu\gamma} K_{\alpha\beta\gamma} .$$

Lorentzi maatriksi ortogonaalsuse tõttu (vt. valem (2.22)) on

$$\mathcal{L}_{\mu\alpha}\mathcal{L}_{\mu\beta}=\delta_{\alpha\beta} \quad ;$$

asetades eelmisesse valemisse ja summeerides β järgi saame

$$K'_{\mu\mu\nu}=\mathcal{L}_{\nu\gamma}K_{\alpha\alpha\gamma} \quad .$$

See valem näitabki, et $K_{\mu\mu\nu}$ on vektor. Täpselt samasugune on see tõestus ka mistahes tensori koondamise puhul.

Nii on 2. järku tensori koondis invariant, 2. järku pseudotensori koondis pseudoinvariant. 3. järku tensorist võib saada koondamise teel kolm vektorit, mis on üldjuhul kõik üksteisest erinevad. 4. järku tensor on koondatav kuuel eri viisil. Teistkordse koondamise järel saadakse aga ainult kolm erinevat invarianti. Need on tensori $N_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ koondamisel $N_{\lambda\lambda\mu\mu}$, $N_{\lambda\mu\lambda\mu}$ ja $N_{\lambda\mu\mu\lambda}$. Alates 6. järgust saab tensorit koondada järjest kolm korda jne.

Edasi vaatleme tensorite ja pseudotensorite korrutamist. Tensoreid on võimalik üldiselt mitmel eri viisil korrutada, kuid põhiliseks korrutiseks on o t s e k o r r u t i s . Kõik teised saadakse otsekorrutisest koondamise teel. Kahe tensori otsekorrutiseks nimetatakse suurust, mille komponentideks on esimese tensori kõikide komponentide korrutised teise tensori kõikide komponentidega. Näiteks vektori A_λ ja 2. järku tensori $T_{\mu\nu}$ otsekorrutis on $A_\lambda T_{\mu\nu}$. Otsekorrutise komponentide arv on seega võrdne mõlema teguri komponentide arvude korrutisega. Otsekorrutis on ise ka tensor, mille järk võrdub mõlema teguri järkude summaga. Selle väite tõestus on triviaalne: selleks tuleb vaid mõlema korrutatava tensori teisendusvalemid kirja panna ja seejärel teineteisega korrutada. Näiteks:

$$A'_\lambda = \mathcal{L}_{\lambda\alpha} A_\alpha ,$$
$$T'_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\mu\beta}\mathcal{L}_{\nu\gamma} T_{\beta\gamma} ;$$

siit

$$A'_\lambda T'_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\lambda\alpha}\mathcal{L}_{\mu\beta}\mathcal{L}_{\nu\gamma} A_\alpha T_{\beta\gamma} ,$$

mis ongi 3.järku tensori teisendusvalem.

Samal viisil korrutatakse ka pseudotensoreid. Kui korrutises on mõlemad tegurid pseudotensorid, siis on korrutis tensor, kui aga üks tegur on tensor ja teine pseudotensor, siis on korrutis pseudotensor.

Kahe tensori või pseudotensori otsekorrutist saab samal viisil korrutada kolmandaga, jne. Kui mitme tensori või pseudotensori otsekorrutises on paarisarv pseudotensoreid, siis on see korrutis tensor, kui paaritu arv, siis pseudotensor. Otsekorrutise järk võrdub kõikide tegurite järkude summaga. Otsekorrutamine ei ole üldiselt kommutatiivne; näiteks korrutised $A_\lambda T_{\mu\nu}$ ja $T_{\lambda\mu} A_\nu$ on erinevad.

Otsekorrutisest saab koondamise teel tuletada kõiksugu teisi korrutisi. Näiteks kahe vektori s k a l a a r n e k o r r u t i s $A_\mu B_\mu$ on nende otsekorrutise koondis. Vektori ja 2. järku tensori otsekorrutise koondis on vektor $A_\mu T_{\mu\nu}$ või $T_{\nu\mu} A_\mu$. Vektori skalaarset korrutist iseendaga $A_\mu A_\mu$ nimetatakse tema r u u d u k s ja ruutjuurt sellest korrutisest vektori a b s o l u u t - v ä ä r t u s e k s . Kaht vektorit nimetatakse teineteisega o r t o g o n a a l s e k s , kui nende skalaarne korrutis on võrdne nulliga. Vektorit, mille ruut on positiivne, nimetatakse r u u m i s a r n a s e k s , kuna negatiivse ruuduga vektorit nimetatakse a j a s a r n a -

s e k s . Vektorit, mille ruut on võrdne nulliga, s. o. iseendaga ortogonaalset vektorit nimetatakse i s o t r o o p s e k s .

Seoses vektorite ruumi- ja ajasarnasusega tuleb peatuda tensorite komponentide reaalsuse ja imaginaarsuse küsimusel.

Eeldades, et tensor kujutab reaalset füüsikalist suurust, veendume, et mõned tema komponendid peavad olema imaginaarsed (imaginaarse ajakoordinaadi kasutamise korral). Olgu meil näiteks vektor A_μ . Selle komponendid teisenevad valemite järgi:

$$A'_k = \mathcal{L}_{kl} A_l + \mathcal{L}_{k4} A_4 ,$$
$$A'_4 = \mathcal{L}_{4l} A_l + \mathcal{L}_{44} A_4 .$$

Kui A_1 , A_2 , A_3 on reaalsed, siis, kuna Lorentzi maatriksi elemendid $\mathcal{L}_{k4}$ on imaginaarsed, peab A_4 olema samuti imaginaarne selleks, et A'_1 , A'_2 , A'_3 oleksid reaalsed. Siis on ühtlasi A'_4 imaginaarne. Samal viisil, rakendades teisendusvalemit mistahes n-ndat järku tensori komponentidele, võib veenduda, et reaalsed on kõik need komponendid, mille indeksite hulgas on paarisarv neljasid, ja imaginaarsed kõik need, mille indeksite hulgas on paaritu arv neljasid. Näiteks 2. järku tensori $T_{\mu\nu}$ komponendid T_{kl} ja T_{44} on reaalsed, ülejäänud imaginaarsed. Sama kehtib pseudotensorite komponentide jaoks.

Tensorit (või pseudotensorit) nimetatakse mingi indeksite paari osas s ü m m e e t r i l i s e k s , kui komponendi väärtus nende indeksite ümberpaigutamisel ei muutu.

Kui aga komponent indeksite ümberpaigutamisel muudab märgi, siis nimetatakse tensorit selle indeksite paari osas **antisümmeetriliseks**. Tensori sümmeetria ja antisümmeetria on invariantsed omadused (vt. ülesanne 4). Teist järku sümmeetrilisel tensoril on 10 sõltumatut komponenti ja antisümmeetrilisel tensoril 6. Iga teist järku tensor on esitatav sümmeetrilise ja antisümmeetrilise tensori summana:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) . \tag{3.6}$$

Vaatleme nüüd kaht erilist tensorit. Need on ühiktensor $\delta_{\mu\nu}$ ja täielikult antisümmeetriline pseudotensor $e_{\mu\nu\rho\sigma}$. Nad on erilised selles mõttes, et nende komponendid on kõigis inertsiaalsüsteemides ühesugused, olgugi et nad alluvad üldistele teisendusvalemitele.

Ühiktensori $\delta_{\mu\nu}$ komponendid on defineeritud järgmiselt:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{\mu\nu} &= 1, \quad \text{kui} \quad \mu = \nu \\ \delta_{\mu\nu} &= 0, \quad \text{kui} \quad \mu \neq \nu \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Maatriksina on

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{3.8}$$

Need komponendid on ühiktensoril mistahes inertsiaalsüsteemis, sest valemi (3.2) põhjal

$$\delta'_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\mu\alpha} \mathcal{L}_{\nu\beta} \delta_{\alpha\beta} = \mathcal{L}_{\mu\alpha} \mathcal{L}_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu} .$$

Ühiktensoril on see omadus, et tema korrutis mistahes tensoriga (mille järk on vähemalt 1) on pärast ühekordset koondamist võrdne selle tensoriga (siit ka ühiktensori nimetus). Näiteks

$$\delta_{\alpha\beta} T_{\beta\gamma} = T_{\alpha\gamma} .$$

Pseudotensori $e_{\mu\nu\rho\sigma}$ komponentide definitsioon on järgmine: $e_{\mu\nu\rho\sigma} = 1$, kui kõik indeksid on erinevate väärtustega ja moodustavad paarispermutatsiooni (s. o. 1234 ja sellest paarisarvu transpositsioonide abil saadud permutatsioonid); $e_{\mu\nu\rho\sigma} = -1$, kui kõik indeksid on erinevate väärtustega ja moodustavad paaritu permutatsiooni; $e_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$, kui kõik indeksid ei ole erinevate väärtustega. Seega on selle pseudotensori 256 komponendist ainult 24 nullist erinevad. Tõestame, et rakendades niiviisi defineeritud komponentidele pseudotensori teisendusvalemi, saame jälle needsamad väärtused. Esiteks,

$$e'_{1234} = \|\mathcal{L}\| \mathcal{L}_{1\varkappa} \mathcal{L}_{2\lambda} \mathcal{L}_{3\mu} \mathcal{L}_{4\nu} e_{\varkappa\lambda\mu\nu} = \|\mathcal{L}\|^2 = 1 .$$

Kui teeme indeksite 1234 seas ühe transpositsiooni, saame komponendi väärtuseks -1, sest determinandi väärtus tema kahe rea transponeerimisel muudab märgi. Kui aga asendame ühe indeksi väärtuse mõne teisega, nii et enam ei ole kõik indeksid erinevad, siis saame komponendi väärtuseks 0, sest determinant kahe ühesuguse reaga on võrdne nulliga. Seega on väide tõestatud.

Pseudotensori $e_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ abil võib mistahes 4. järku tensorist moodustada pseudoinvariandi:

$$\underline{I} = e_{\varkappa\lambda\mu\nu} N_{\varkappa\lambda\mu\nu} . \qquad (3.9)$$

Niisamuti, kui $N_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ on pseudotensor, siis I on invariant.

Samuti võib igast 3. järku tensorist moodustada pseudovektori (või pseudotensorist vektori):

$$P_{\varkappa} = e_{\varkappa\lambda\mu\nu} K_{\lambda\mu\nu} \quad . \tag{3.10}$$

Edasi, kui $T_{\mu\nu}$ on 2. järku tensor või pseudotensor, siis

$$U_{\varkappa\lambda} = e_{\varkappa\lambda\mu\nu} T_{\mu\nu} \tag{3.11}$$

on 2. järku pseudotensor või tensor. Paneme tähele, et $U_{\varkappa\lambda}$ on antisümmeetriline.

Lõpuks, kui A_{ν} on vektor või pseudovektor, siis

$$M_{\varkappa\lambda\mu} = e_{\varkappa\lambda\mu\nu} A_{\nu} \tag{3.12}$$

on 3. järku pseudotensor või tensor. Ta on täielikult antisümmeetriline.

Märgime veel, et kui valemites (3.9) - (3.11) $N_{\varkappa\lambda\mu\nu}$, $K_{\lambda\mu\nu}$ või $T_{\mu\nu}$ on sümmeetriline mistahes indeksite paari järgi, siis on vastavalt I, $P_{\varkappa}$ või $U_{\varkappa\lambda}$ võrdne nulliga. See järeldub pseudotensori $e_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ antisümmeetriast.

Nüüd asume tensorite diferentseerimise juurde koordinaatide järgi. Sellega on tegemist alati siis, kui tensorid tähendavad väljasuurusi, mis olenevad ajast ja ruumist.

Osatuletise operaator $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ on vektorilise iseloomuga, sest

$$\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} = \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \, .$$

Et aga

$$x_\beta = \mathcal{L}_{\alpha\beta} x'_\alpha \, ,$$

siis

$$\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} = \mathcal{L}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \, , \tag{3.13}$$

mis näitabki, et see operaator teiseneb nagu vektor.

Tensori g r a d i e n d i k s nimetatakse suurust, mille komponentideks on selle tensori kõikide komponentide osatuletised kõigi nelja koordinaadi järgi. Valemist (3.13) järgneb, et gradient on ühe võrra kõrgema järguga tensor (niisamuti on pseudotensori gradient ühe võrra kõrgema järguga pseudotensor). Nii on invariandi gradient vektor:

$$grad\, U = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \equiv U_{,\alpha} \quad , \tag{3.14}$$

vektori gradient 2. järku tensor:

$$grad\, A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \equiv A_{\alpha,\beta} \tag{3.15}$$

jne. Operaatori $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ indeksit loetakse tavaliselt gradiendi viimaseks indeksiks ja eraldatakse teistest indeksitest komaga.

Viimase kahe indeksi järgi koondatud gradienti nimetatakse d i v e r g e n t s i k s . Näiteks vektori divergents on invariant:

$$div\, A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} \equiv A_{\alpha,\alpha} \quad , \tag{3.16}$$

2. järku tensori divergents vektor:

$$div\, T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \equiv T_{\mu\nu,\nu} \tag{3.17}$$

jne. Üldse, mistahes tensori divergents on ühe võrra madalama järguga tensor.

Defineerime veel vektori r o o t o r i . See on järgmine antisümmeetriline tensor:

$$rot\, A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \; . \tag{3.18}$$

Vaatleme edasi üht teist järku tuletise operaatorit. See on operaatori $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ ruut $\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}$, mida nimetatakse neljamôôtmeliseks Laplace'i operaatoriks ehk d' Alembert'i operaatoriks ja tähistatakse märgiga $\square$:

$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial x_\kappa \partial x_\kappa} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = $$
$$= \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad (3.19)$$

kus Δ on kolmemôôtmeline Laplace'i operaator. Operaator $\square$ on invariantne; selle rakendamisel mistahes tensorile saame sama järku tensori.

Viimase küsimusena vaatleme käesolevas paragrahvis integreerimist neljamôôtmelises ruumis.

Ruumala elemendi määravad neljamôôtmelises ruumis neli lôpmata väikest nihkevektorit $dx_\mu^{(1)}$, $dx_\nu^{(2)}$, $dx_\sigma^{(3)}$, $dx_\tau^{(4)}$, mis on selle elemendi kui lôpmata väikese rööptahuka servadeks. Elemendi ruumala vôrdub (märgi täpsusega) pseudoinvariandiga

$$d\Omega = e_{\mu\nu\sigma\tau}\, dx_\mu^{(1)} dx_\nu^{(2)} dx_\sigma^{(3)} dx_\tau^{(4)}, \qquad (3.20)$$

kusjuures sel viisil defineeritud ruumala on imaginaarne (dx_4 imaginaarsuse tôttu). Teisiti vôib $d\Omega$ avaldada determinandina:

$$d\Omega = \begin{vmatrix} dx_1^{(1)} & dx_2^{(1)} & dx_3^{(1)} & dx_4^{(1)} \\ dx_1^{(2)} & dx_2^{(2)} & dx_3^{(2)} & dx_4^{(2)} \\ dx_1^{(3)} & dx_2^{(3)} & dx_3^{(3)} & dx_4^{(3)} \\ dx_1^{(4)} & dx_2^{(4)} & dx_3^{(4)} & dx_4^{(4)} \end{vmatrix} . \qquad (3.21)$$

Juhul kui ruumielemendi servadeks on koordinaattelgede suunalised nihkevektorid, siis on determinant diagonaalne ning $d\Omega$ avaldub lihtsamalt:

$$d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = ic\,dV dt\,, \qquad (3.22)$$

kus $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ on kolmemõõtmelise ruumi element.

Kolmemõõtmelise hüperpinna elemendi määrab neljamõõtmelises ruumis lõpmata väikeste vektorite kolmik $dx_\mu^{(1)}$, $dx_\nu^{(2)}$, $dx_\sigma^{(3)}$. Pseudovektor

$$d\Sigma_\mu = e_{\mu\nu\sigma\tau}\, dx_\nu^{(1)} dx_\sigma^{(2)} dx_\tau^{(3)} \qquad (3.23)$$

on ilmselt ortogonaalne mistahes vektoriga sellest kolmikust. Seega on ta risti selle hüperpinna elemendiga. Absoluutväärtuselt aga võrdub see pseudovektor hüperpinna elemendi "pindalaga", kusjuures see pindala võib olla ka imaginaarne. Kui näiteks $d\Sigma_\mu$ on ruumisarnane pseudovektor, siis võime ühe ruumilise telje võtta $d\Sigma_\mu$ suunas ja valemist (3.23) saame:

$$d\Sigma_1 = \sqrt{d\Sigma_\mu d\Sigma_\mu} = \begin{vmatrix} dx_2^{(1)} & dx_3^{(1)} & dx_4^{(1)} \\ dx_2^{(2)} & dx_3^{(2)} & dx_4^{(2)} \\ dx_2^{(3)} & dx_3^{(3)} & dx_4^{(3)} \end{vmatrix} . \qquad (3.24)$$

Determinant selle valemi paremal poolel ongi võrdne hüperpinna elemendi imaginaarse pindalaga. Kui aga $d\Sigma_\mu$ on ajasarnane pseudovektor, siis võtame selle vektori suunas ajatelje ja valem (3.23) annab

$$d\Sigma_4 = \sqrt{d\Sigma_\mu d\Sigma_\mu} = \begin{vmatrix} dx_1^{(1)} & dx_2^{(1)} & dx_3^{(1)} \\ dx_1^{(2)} & dx_2^{(2)} & dx_3^{(2)} \\ dx_1^{(3)} & dx_2^{(3)} & dx_3^{(3)} \end{vmatrix} , \tag{3.25}$$

kus determinant on nüüd võrdne reaalse "pindalaga". Siit näeme veel, et $d\Sigma_\mu$ on ise imaginaarne pseudovektor selles mõttes, et tema ruumilised komponendid on imaginaarsed, kuna ajaline (neljas) komponent on reaalne.

Kahemõõtmelise pinnaelemendi määrab neljamõõtmelises ruumis lõpmata väikeste vektorite paar $dx_\mu^{(1)}$, $dx_\nu^{(2)}$. Niisugust elementi võib kirjeldada kas tensoriga

$$dF_{\mu\nu} = dx_\mu^{(1)} dx_\nu^{(2)} \tag{3.26}$$

või pseudotensoriga

$$dS_{\mu\nu} = e_{\mu\nu\sigma\tau} \, dx_\sigma^{(1)} dx_\tau^{(2)} . \tag{3.27}$$

Ilmselt

$$dS_{\mu\nu} dF_{\mu\nu} = 0 . \tag{3.28}$$

Kui võtame kaks koordinaattelge tasandis, mis on määratud vektoritega $dx_\mu^{(1)}$ ja $dx_\nu^{(2)}$, siis on nendel vektoritel nullist erinevad ainult need komponendid, mis vastavad nendele telgedele. Olgu need näiteks 1. ja 2. telg. Siis valemist (3.27) leiame, et

$$dS_{34} = -dS_{43} = \begin{vmatrix} dx_1^{(1)} & dx_2^{(1)} \\ dx_1^{(2)} & dx_2^{(2)} \end{vmatrix} , \tag{3.29}$$

s. o. pseudotensori $S_{\mu\nu}$ ainsad nullist erinevad komponendid on absoluutväärtuselt võrdsed vaadeldava pinnaelemendi pindalaga. Analoogilise tulemuse saame ka siis, kui vektorite $dx_\mu^{(1)}$ ja $dx_\nu^{(2)}$ tasandil on üks telg ruumiline ja teine ajaline. Siis on pinnaelemendi pindala imaginaarne.

Neljamõõtmelises ruumis võib integreerida neljal viisil: üle ruumi, üle kolmemõõtmelise hüperpinna, üle kahemõõtmelise pinna ja üle joone. Mitut liiki integraalide vahel on olemas seosed, mis on analoogilised integraalseostega kolmemõõtmelises ruumis.

Tuletame esmalt Gauss-Ostrogradski valemi. Ruumielement, mille servadeks on vektorid $dx_\mu^{(1)}$, $dx_\nu^{(2)}$, $dx_\sigma^{(3)}$, $dx_\tau^{(4)}$, on piiratud kaheksa hüperpinna elemendiga (hüpertahuga). Näiteks vektorid $dx_\nu^{(2)}$, $dx_\sigma^{(3)}$, $dx_\tau^{(4)}$ on kahe teineteise vastas asetseva hüpertahu servadeks, kusjuures üks neist on nihutatud teise suhtes vektori $dx_\mu^{(1)}$ võrra. Igale hüpertahule seame vastavusse ortogonaalse pseudovektori $d\Sigma_\lambda$ kas valemi (3.23) järgi või sellest ainult märgi poolest erineva valemi järgi. Märk tuleb valida igakord nii, et hüpertahuga ortogonaalse pseudovektori skalaarne korrutis vektoriga, mis viib selle hüpertahu juurest vastastahule, oleks võrdne miinusega võetud ruumielemendi ruumalaga

$$-d\Omega = -e_{\mu\nu\sigma\tau}\, dx_\mu^{(1)} dx_\nu^{(2)} dx_\sigma^{(3)} dx_\tau^{(4)}$$

(vt. (3.20)). See valik tähendab seda, et $d\Sigma_\mu$ on suunatud kõigil hüpertahkudel väljapoole ruumielementi.

Olgu nüüd A_λ mingi väljavektor. Moodustame summa

$$\sum_{i=1}^{8} A_\lambda d\Sigma_\lambda^{(i)}$$

üle kõigi kaheksa hüpertahu. Arvestades eespool seletatud viisil $d\Sigma_\lambda^{(i)}$ suuna, leiame:

$$\sum_{i=1}^{8} A_\lambda d\Sigma_\lambda^{(i)} = -A_\lambda e_{\lambda\nu\sigma\tau} dx_\nu^{(2)} dx_\sigma^{(3)} dx_\tau^{(4)} +$$

$$+\left(A_\lambda + \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} dx_\mu^{(1)}\right) e_{\lambda\nu\sigma\tau} dx_\nu^{(2)} dx_\sigma^{(3)} dx_\tau^{(4)} +$$

$$+A_\lambda e_{\lambda\mu\sigma\tau} dx_\mu^{(1)} dx_\sigma^{(3)} dx_\tau^{(4)} -$$

$$-\left(A_\lambda + \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu} dx_\nu^{(2)}\right) e_{\lambda\mu\sigma\tau} dx_\mu^{(1)} dx_\sigma^{(3)} dx_\tau^{(4)} -$$

$$-A_\lambda e_{\lambda\mu\nu\tau} dx_\mu^{(1)} dx_\nu^{(2)} dx_\tau^{(4)} +$$

$$+\left(A_\lambda + \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\sigma} dx_\sigma^{(3)}\right) e_{\lambda\mu\nu\tau} dx_\mu^{(1)} dx_\nu^{(2)} dx_\tau^{(4)} +$$

$$+A_\lambda e_{\lambda\mu\nu\sigma} dx_\mu^{(1)} dx_\nu^{(2)} dx_\sigma^{(3)} -$$

$$-\left(A_\lambda + \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\tau} dx_\tau^{(4)}\right) e_{\lambda\mu\nu\sigma} dx_\mu^{(1)} dx_\nu^{(2)} dx_\sigma^{(3)} .$$

Avades sulud ja koondades liikmeid saame

$$\sum_{i=1}^{8} A_\lambda d\Sigma_\lambda^{(i)} = \left(e_{\lambda\nu\sigma\tau} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} + e_{\mu\lambda\sigma\tau} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu} + \right. \tag{3.30}$$

$$\left. + e_{\mu\nu\lambda\tau} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\sigma} + e_{\mu\nu\sigma\lambda} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\tau}\right) dx_\mu^{(1)} dx_\nu^{(2)} dx_\sigma^{(3)} dx_\tau^{(4)} .$$

Sulgudes olevat avaldist saab lihtsustada:

$$e_{\lambda\nu\sigma\tau} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} + e_{\mu\lambda\sigma\tau} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu} + e_{\mu\nu\lambda\tau} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\sigma} +$$

$$+ e_{\mu\nu\sigma\lambda} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\tau} = e_{\mu\nu\sigma\tau} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\lambda} . \tag{3.31}$$

Selle võrduse kehtivuses veendume järgmiselt. Vahetult näeme, et vasak pool on indeksite μ, ν, σ, τ suhtes täielikult antisümmeetriline. Valides aga $\mu = 1$, $\nu = 2$, $\sigma = 3$, $\tau = 4$, leiame, et vasaku poole igas liikmes on summeerimisel λ järgi nullist erinev ainult üks liige. Need liikmed on $\frac{\partial A_1}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_2}, \frac{\partial A_3}{\partial x_3}, \frac{\partial A_4}{\partial x_4}$ ja nende summa ongi $\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\lambda}$.

Nüüd saab valem (3.30) kuju:

$$\sum_{i=1}^{8} A_\lambda d\Sigma_\lambda^{(i)} = \operatorname{div} A_\lambda d\Omega . \tag{3.32}$$

Võtame edasi aegruumis meelevaldse piirkonna, mis on piiratud kinnise hüperpinnaga. Jaotades selle piirkonna ruumielementideks ja summeerides valemis (3.32) avaldatud summat üle kõigi elementide, saame

$$\oint A_\lambda d\Sigma_\lambda = \int \operatorname{div} A_\lambda d\Omega . \tag{3.33}$$

See valem ongi neljamõõtmeline Gauss-Ostrogradski valem. Ta kehtib mitte ainult vektori jaoks, vaid mistahes järku tensori (või pseudotensori) jaoks. Kui selle järk on suurem kui null, saab valem kuju:

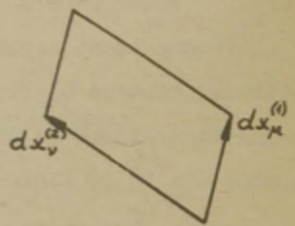
$$\oint Q_{\dots\mu\dots} d\Sigma_\mu = \int \frac{\partial Q_{\dots\mu\dots}}{\partial x_\mu} d\Omega ; \tag{3.34}$$

selle tuletuskäik ei erine sellest, mis on toodud eespool vektori jaoks. Kui aga tensori järk on null, s. t. tegemist on invariandiga I, siis saame Gauss-Ostrogradski valemi kujul:

$$\oint I d\Sigma_\lambda = \int \frac{\partial I}{\partial x_\lambda} d\Omega . \tag{3.35}$$

Ka selle valemi tuletuskäik on sama, selle vahega, et valemis (3.31) λ ei ole summeerimise indeks, sest A_λ asemel seisab I. Siiski kehtib see valem ka sel juhul, sest võttes $\mu = 1, \nu = 2, \sigma = 3, \tau = 4$, veendume kergesti, et mistahes λ väärtuse puhul on kôik liikmed vasakul poolel vôrdsed nulliga, peale ühe, mis vôrdubki paremal poolel seisva liikmega.

Vaatleme nüüd Stokes'i lause neljamôôtmelist analoogi. Vôtame aegruumis pinnaelemendi, mis on määratud vektoritega $dx_\mu^{(1)}$ ja $dx_\nu^{(2)}$ (vt. joonis 43, kus need vektorid on piltlikult näidatud nooltena). Olgu A_λ mingi väljavektor. Selle tsirkulatsioon üle pinnaelementi piirava neljast lôpmata väikesest vektorist koosneva joone avaldub järgmiselt:



Joonis 43.

$$\sum_{i=1}^{4} A_\lambda dx_\lambda^{(i)} = A_\lambda dx_\lambda^{(1)} - \left(A_\lambda + \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu} dx_\nu^{(2)}\right) dx_\lambda^{(1)} - A_\lambda dx_\lambda^{(2)} + \left(A_\lambda + \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} dx_\mu^{(1)}\right) dx_\lambda^{(2)}$$

ehk

$$\sum_{i=1}^{4} A_\lambda dx_\lambda^{(i)} = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}\right) dx_\lambda^{(1)} dx_\mu^{(2)}$$

ehk, arvestades valemeid (3.18) ja (3.26),

$$\sum_{i=1}^{4} A_\lambda dx_\lambda^{(i)} = \operatorname{rot} A_\lambda \, dF_{\lambda\mu} \,. \qquad (3.36)$$

Vôtame nüüd aegruumis mingi pinnatüki, mis on piiratud kinnise joonega. Jaotades selle pinna elementideks ja summeerides (3.36) üle kôigi elementide, saame

$$\oint A_\lambda dx_\lambda = \int \operatorname{rot} A_\lambda \, dF_{\lambda\mu} = \int \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}\right) dF_{\lambda\mu} \,. \qquad (3.37)$$

See valem ongi neljamõõtmeline Stokes'i valem.

Kolmandaks on neljamõõtmelises ruumis võimalik veel üks integraalteisendus, millel puudub kolmemõõtmeline analoog. Võtame kolmemõõtmelise hüperpinna elemendi, mis on piiratud kuue kahemõõtmelise pinnaelemendiga. Olgu A_μ väljavektor. Arvutame summa $\sum_{i=1}^{6} A_\mu dS_{\mu\lambda}^{(i)}$, kus $dS_{\mu\lambda}^{(i)}$ on määratud valemiga (3.27) või sellest ainult märgi poolest erineva valemiga. Märgi määrab nõue, et korrutis $dS_{\mu\lambda}dx_\lambda$, kus dx_λ on selle pinnaelemendi kui hüperelemendi tahu juurest vastastahule viiv vektor, peab võrduma vastasmärgiga võetud hüperpinna pseudovektoriga

$$-d\Sigma_\mu = -e_{\mu\nu\sigma\tau}\, dx_\nu^{(1)} dx_\sigma^{(2)} dx_\tau^{(3)}$$

(vt. (3.23)). Sel eeldusel saame

$$\sum_{i=1}^{6} A_\mu dS_{\mu\lambda}^{(i)} = -e_{\mu\lambda\sigma\tau} A_\mu dx_\sigma^{(2)} dx_\tau^{(3)} +$$
$$+e_{\mu\lambda\sigma\tau}\left(A_\mu + \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} dx_\nu^{(1)}\right) dx_\sigma^{(2)} dx_\tau^{(3)} +$$
$$+e_{\mu\lambda\nu\tau} A_\mu dx_\nu^{(1)} dx_\tau^{(3)} - e_{\mu\lambda\nu\tau}\left(A_\mu + \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} dx_\sigma^{(2)}\right) dx_\nu^{(1)} dx_\tau^{(3)} -$$
$$-e_{\mu\lambda\nu\sigma} A_\mu dx_\nu^{(1)} dx_\sigma^{(2)} + e_{\mu\lambda\nu\sigma}\left(A_\mu + \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\tau} dx_\tau^{(3)}\right) dx_\nu^{(1)} dx_\sigma^{(2)} =$$

$$= \left(e_{\mu\lambda\sigma\tau}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + e_{\mu\lambda\tau\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} +\right.$$
$$\left. + e_{\mu\lambda\nu\sigma}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\tau}\right) dx_\nu^{(1)} dx_\sigma^{(2)} dx_\tau^{(3)} =$$
$$= \left(e_{\mu\nu\sigma\tau}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} - e_{\lambda\nu\sigma\tau}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right) dx_\nu^{(1)} dx_\sigma^{(2)} dx_\tau^{(3)}.$$

Viimane üleminek põhjeneb siin seosel

$$e_{\mu\lambda\sigma\tau}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}+e_{\mu\lambda\tau\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma}+e_{\mu\lambda\nu\sigma}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\tau}= \qquad (3.38)$$
$$=e_{\mu\nu\sigma\tau}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}-e_{\lambda\nu\sigma\tau}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu},$$

mille õigsuses võib kergesti veenduda, pannes tähele, et mõlemad pooled on indeksite ν, σ, τ suhtes täielikult antisümmeetrilised; kui λ võrdub ühega neist, näiteks $\lambda=\nu$, siis saame mõlemal poolel suuruse

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu},$$

kus $\mu\neq\nu$, $\mu\neq\sigma$, $\mu\neq\tau$. Kui aga $\lambda\neq\nu$, $\lambda\neq\sigma$, $\lambda\neq\tau$, siis saame samuti mõlemal poolel ühe ja sama avaldise; näiteks, $\lambda=1$, $\nu=2$, $\sigma=3$, $\tau=4$ korral

$$-\frac{\partial A_2}{\partial x_2}-\frac{\partial A_3}{\partial x_3}-\frac{\partial A_4}{\partial x_4}$$

ja analoogiliselt mistahes permutatsiooni korral. Seega

$$\sum_{i=1}^{6}A_\mu dS_{\mu\lambda}^{(i)}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}d\Sigma_\mu-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}d\Sigma_\lambda. \qquad (3.39)$$

Kui võtame aegruumis kolmemõõtmelise hüperpinna, siis kehtib see seos mistahes selle hüperpinna elemendil. Summeerides üle kõikide elementide, saame

$$\oint A_\mu dS_{\mu\lambda}=\int\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda}d\Sigma_\mu-\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}d\Sigma_\lambda\right), \qquad (3.40)$$

kus vasakpoolne integraal on võetud üle kinnise kahemõõtmelise pinna, mis piirab seda hüperpinda. See valem ongi kolmas integraalteisendus.

Ülesanded.

1. Näidata, et kui $A_\mu B_\mu$ on invariant ja A_μ on vektor, siis ka B_μ on vektor.

L a h e n d u s . Kuna eelduse järgi $A_\mu B_\mu = A'_\mu B'_\mu$ ja $A'_\mu = \mathcal{L}_{\mu\nu} A_\nu$, siis $A_\nu B_\nu = \mathcal{L}_{\mu\nu} A_\nu B'_\mu$. Siit $A_\nu(\mathcal{L}_{\mu\nu} B'_\mu - B_\nu) = 0$. Et see võrdus peab kehtima identselt sõltumatult Lorentzi teisendusmaatriksist $\mathcal{L}_{\mu\nu}$, siis peab olema

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} B'_\mu = B_\nu .$$

Siit

$$B'_\mu = \mathcal{L}_{\mu\nu} B_\nu ,$$

mida oligi vaja näidata.

2. Näidata, et neljamõõtmelise vektori komponendid käituvad ruumiliste ortogonaalteisenduste puhul järgmiselt: kolm esimest komponenti kui kolmemõõtmelise vektori komponendid ja neljas komponent kui kolmemõõtmeline invariant.

L a h e n d u s . Lorentzi maatriks, mis kujutab ruumilist teisendust, on kvasidiagonaalne (vt. valem (2.21)), s. o. $\mathcal{L}_{ik} = \alpha_{ik}$, $\mathcal{L}_{44} = 1$ ja ülejäänud elemendid on võrdsed nulliga; α on ruumilise teisenduse maatriks. Rakendades niisuguse kvasidiagonaalse kujuga maatriksit vektorile A_μ, leiame:

$$A'_k = \alpha_{kl} A_l ,$$
$$A'_4 = A_4 ,$$

mida oligi vaja näidata.

3. Näidata, et neljamõõtmelise 2. järku tensori $T_{\mu\nu}$ komponendid käituvad ruumiliste ortogonaalteisenduste pu-

hul järgmiselt: T_{ik} kui kolmemõõtmeline 2. järku tensor, T_{i4} ja T_{4k} kui vektorid ja T_{44} kui invariant.

L a h e n d u s . Rakendades maatriksit (2.21), leiame:

$$T'_{ik} = \mathcal{L}_{i\mu}\mathcal{L}_{k\nu}T_{\mu\nu} = \alpha_{il}\alpha_{km}T_{lm} ,$$

$$T'_{i4} = \mathcal{L}_{i\mu}\mathcal{L}_{4\nu}T_{\mu\nu} = \alpha_{ik}T_{k4} ,$$

$$T'_{4k} = \mathcal{L}_{4\mu}\mathcal{L}_{k\nu}T_{\mu\nu} = \alpha_{ki}T_{4i} ,$$

$$T'_{44} = \mathcal{L}_{4\mu}\mathcal{L}_{4\nu}T_{\mu\nu} = T_{44} ,$$

mida oligi vaja näidata.

4. Näidata, et tensori sümmeetria või antisümmeetria mistahes indeksite paari suhtes on tensori invariantne omadus.

L a h e n d u s . Tõestuses võib piirduda teist järku tensoriga, sest kõrgemat järku tensori puhul on tõestus täpselt samasugune. Olgu $T_{\sigma\tau} = \pm T_{\tau\sigma}$. Teises süsteemis on

$$T'_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\mu\sigma}\mathcal{L}_{\nu\sigma}T_{\sigma\tau} ,$$

$$T'_{\nu\mu} = \mathcal{L}_{\nu\tau}\mathcal{L}_{\mu\sigma}T_{\tau\sigma} .$$

Siit vahetult näemegi, et ka teises süsteemis

$$T'_{\mu\nu} = \pm T_{\nu\mu} .$$

5. Näidata, et kui $T_{\mu\nu}$ on antisümmeetriline tensor, siis koosneb pseudotensor

$$S_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{2} e_{\varkappa\lambda\mu\nu} T_{\mu\nu} \tag{3.41}$$

samadest komponentidest nagu $T_{\mu\nu}$.

L a h e n d u s . Selles veendume vahetu arvutuse teel. Kui

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & -T_{31} & T_{14} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & -T_{23} & 0 & T_{34} \\ -T_{14} & -T_{24} & -T_{34} & 0 \end{pmatrix},$$

siis

$$S_{\varkappa\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & T_{34} & -T_{24} & T_{23} \\ -T_{34} & 0 & T_{14} & T_{31} \\ T_{24} & -T_{14} & 0 & T_{12} \\ -T_{23} & -T_{31} & -T_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Antisümmeetrilist pseudotensorit $S_{\varkappa\lambda}$ nimetatakse antisümmeetrilise tensori $T_{\mu\nu}$ suhtes d u a a l s e k s . Ka vastupidi, $T_{\mu\nu}$ on duaalne $S_{\varkappa\lambda}$ suhtes, sest ilmselt

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} e_{\mu\nu\varkappa\lambda} S_{\varkappa\lambda} . \tag{3.42}$$

6. Näidata, et mistahes 2. järku tensori $T_{\mu\nu}$ puhul kehtib võrdus:

$$\frac{1}{4} e_{\sigma\tau\varkappa\lambda} e_{\varkappa\lambda\mu\nu} T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\sigma\tau} - T_{\tau\sigma}). \tag{3.43}$$

L a h e n d u s . Valemitest (3.41) ja (3.42) järgneb antisümmeetrilise tensori $\frac{1}{2}(T_{\sigma\tau} - T_{\tau\sigma})$ jaoks, et

$$\frac{1}{2}(T_{\sigma\tau} - T_{\tau\sigma}) = \frac{1}{8} e_{\sigma\tau\varkappa\lambda} e_{\varkappa\lambda\mu\nu} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) .$$

Vahetades paremal poolel teises liikmes summeerimisindeksid $\mu \leftrightarrows \nu$, saamegi siit valemi (3.43).

7. Tõestada järgmised seosed:

$$e_{\alpha\beta\gamma\varkappa} e_{\lambda\mu\nu\rho} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\rho} \\ \delta_{\varkappa\lambda} & \delta_{\varkappa\mu} & \delta_{\varkappa\nu} & \delta_{\varkappa\rho} \end{vmatrix} , \qquad (3.44)$$

$$e_{\alpha\beta\gamma\lambda} e_{\lambda\mu\nu\rho} = - \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\rho} \end{vmatrix} , \qquad (3.45)$$

$$e_{\alpha\beta\mu\nu} e_{\mu\nu\rho\sigma} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\rho} & \delta_{\alpha\sigma} \\ \delta_{\beta\rho} & \delta_{\beta\sigma} \end{vmatrix} = 2(\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}) , \qquad (3.46)$$

$$e_{\alpha\mu\nu\sigma} e_{\mu\nu\sigma\rho} = -6\,\delta_{\alpha\rho} , \qquad (3.47)$$

$$e_{\mu\nu\rho\sigma} e_{\mu\nu\rho\sigma} = 24 . \qquad (3.48)$$

L a h e n d u s . Valemi (3.44) kehtivus juhul kui

$$\alpha = \lambda = 1 , \quad \beta = \mu = 2 , \quad \gamma = \nu = 3 , \quad \varkappa = \rho = 4$$

järgneb sellest, et sel juhul seisab paremal poolel ühikmaatriksi determinant; kehtivus jääb rikkumata ka mistahes $\alpha, \beta, \gamma, \varkappa$ või λ, μ, ν, ρ eespool antud väärtuste permutatsiooni puhul, sest iga transpositsioon muudab märgi mõlemal poolel. Kui aga indeksite $\alpha, \beta, \gamma, \varkappa$ või λ, μ, ν, ρ hulgas on võrdseid, siis on mõlemad pooled ilmselt võrdsed nulliga.

Samasugune on ka valemi (3.45) tõestus. Kui $\alpha=\mu$, $\beta=\nu$, $\gamma=\rho$ ja nende kolme indeksi seas on võrdseid, siis on mõlemad pooled võrdsed nulliga. Kui aga $\alpha=\mu$, $\beta=\nu$, $\gamma=\rho$ kõrval kehtivad võrratused $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$, siis seisab mõlemal poolel - 1. Lõpuks, kui teeme indeksite α,β,γ või μ,ν,ρ mistahes permutatsiooni, jääb valem ilmselt kehtivaks. Selle valemi kehtivuses võib veenduda vahetult ka valemi (3.44) koondamise teel.

Ülejäänud valemid (3.46) - (3.48) järelduvad samuti kõige lihtsamalt valemi (3.45) otsese koondamise teel.

8. Näidata, et kui vektor on ruumisarnane, siis leidub niisugune inertsiaalsüsteem, milles tema 4. komponent on võrdne nulliga.

L a h e n d u s . Teisendades vektori A_μ neljanda komponendi, saame

$$A_4' = \mathcal{L}_{4k}A_k + \mathcal{L}_{44}A_4 .$$

Tuleb näidata, et kui A_μ on ruumisarnane, siis saab A_4' teha nulliks. Valemi (2.30) põhjal see tähendab tingimust

$$-i\vec{\beta}\vec{A} + A_4 = 0,$$

kus $\vec{A}$ on kolmemõõtmeline vektor komponentidega A_k. Kui tähistame $A_4 = iA_0$, siis peab olema $A_0 = \vec{\beta}\vec{A}$. Ruumisarnasuse tõttu on $|\vec{A}| > |A_0|$, seega leidub tõesti niisugune kiirus $\vec{\beta}$, et võrdus $A_0 = \vec{\beta}\vec{A}$ kehtib.

9. Näidata, et kui vektor on ajasarnane, siis leidub niisugune inertsiaalsüsteem, milles kolm esimest komponenti on võrdsed nulliga.

L a h e n d u s . Esmalt pöörame ruumilist koordinaadistikku nii, et kolmemõõtmeline vektor $\vec{A}$, mille komponentideks on neljamõõtmelise vektori A_μ kolm esimest komponenti, oleks x_1-telje suunaline. Siis on $A_2=A_3=0$. Edasi rakendame erikujulist Lorentzi teisendust (2.17). Siis on $A_2' = A_3' = 0$, ja et oleks ka $A_1' = 0$, tuleb teha $A_1+i\beta A_4=0$ ehk, asendades $A_4=iA_0$, $\beta=\frac{A_1}{A_0}$. Ajasarnasuse tõttu $\left|\frac{A_1}{A_0}\right| < 1$, seega on niisugune teisendus tõesti võimalik.

10. Näidata, et vektor, mis on ortogonaalne ajasarnase vektoriga, on ruumisarnane.

L a h e n d u s . Olgu $A_\mu B_\mu=0$, kus A_μ on ajasarnane. Valime süsteemi, kus $A_k=0$. Siis $A_\mu B_\mu=A_4 B_4=0$. Et $A_4\neq 0$, siis $B_4=0$. See tähendabki B_μ ruumisarnasust.

11. Näidata, et kui kahe erineva, kuid võrdsete absoluutväärtustega ajasarnase vektori neljandad komponendid on samamärgilised, siis on nende vektorite vahe ruumisarnane vektor, aga nende summa ajasarnane vektor.

L a h e n d u s . Kasutame inertsiaalsüsteemi, milles ühel antud vektoritest on ainult neljas komponent nullist erinev. Olgu see $A_4=iA_0$. Teise vektori komponendid samas süsteemis olgu B_k ja iB_0, kusjuures eelduse järgi $A_0B_0>0$ ja $A_0^2=B_0^2-\vec{B}^2$. Viimasest võrdusest järgneb, et $|B_0|>|A_0|$. Mõlema vektori vahe absoluutväärtuse ruut on

$$\vec{B}^2-(B_0-A_0)^2=\vec{B}^2-B_0^2-A_0^2+2A_0B_0=$$
$$=2A_0(B_0-A_0)>0,$$

sest $A_0 < 0$ korral on $B_0 < A_0$ ja $A_0 > 0$ korral $B_0 > A_0$. Seega on vahe tõesti ruumisarnane vektor. Vektorite summa absoluutväärtuse ruut on aga võrdne

$$\vec{B}^2 - (B_0 + A_0)^2 = \vec{B}^2 - B_0^2 - A_0^2 - 2A_0 B_0 =$$
$$= -2A_0(A_0 + B_0) < 0,$$

s. o. summa on tõesti ajasarnane vektor.

12. Näidata, et kui kahel ajasarnasel vektoril on absoluutväärtused võrdsed ja neljandad komponendid samamärgilised, on nende summa absoluutväärtus absoluutväärtuselt suurem kui ühe liidetava kahekordne absoluutväärtus.

L a h e n d u s . Olgu vektorid A_μ ja B_μ. Vaatleme neid süsteemis, kus $\vec{A} = 0$. Siis on (vt. eelmine ülesanne) nende summa absoluutväärtus võrdne

$$i\sqrt{2A_0(A_0 + B_0)}.$$

Tuleb näidata, et

$$\sqrt{2A_0(A_0 + B_0)} > 2|A_0|.$$

See võrratus on samaväärne võrratusega

$$A_0(B_0 - A_0) > 0,$$

ja see kehtib tõesti, nagu eelmises ülesandes nägime.

Samal viisil saab näidata, et summa absoluutväärtus on absoluutväärtuselt suurem ka teise vektori, B_μ, kahekordsest absoluutväärtusest. Selleks tuleb üle minna süsteemi, kus $\vec{B} = 0$, ja siis arutleda nagu eespool.

§ 14. Relativistlik mass ja impulss.

Klassikaline mehhaanika ei ole kooskõlas relatiivsusteooriaga, sest kiirus on klassikalises mehhaanikas tõkestamatu suurus. Kui näiteks kehasse mõjub konstantne jõud, siis on kiirendus konstantne ja kui jõud mõjub küllalt kaua, siis kasvab kiirus kuitahes suureks.

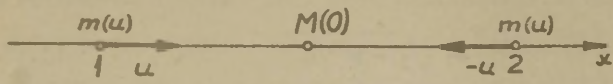
Niisiis, relativistlik mehhaanika peab erinema klassikalisest. Relativistliku mehhaanika ülesehitamise lähtealuseks võtame j ä ä v u s e s e a d u s e d. Käesolevas paragrahvis defineerime relativistliku massi ja relativistliku impulsi, lähtudes nende suuruste jäävuse postulaadist ja pidades silmas relatiivsusteooria nõudeid.

Impulsiks nimetatakse relativistlikus mehhaanikas, samuti nagu klassikalises, suurust, mille mooduks on massi ja kiiruse korrutis. Kui kehasse mõjub jõud, siis impulss kasvab ja võib saada kuitahes suureks. Et aga kiirus valguse kiirust ületada ei saa, peab kiirusega kasvama ka mass, kusjuures see kasv peab olema tõkestamatu. Kiiruse lähenedes valguse kiirusele peab mass kasvama kuitahes suureks.

Ruumi isotroopsuse nõudel võib mass sõltuda ainult kiiruse absoluutväärtusest, mitte aga suunast. Sõltuvuse kuju saab aga tuletada nõudest, et massi ja impulsi jäävus peab kehtima igas inertsiaalsüsteemis, s. o. nõudest, et need seadused on kooskõlas relatiivsusprintsiibiga.

Selleks vaatleme kahe ühesuguse osakese täielikult mitteelastset kokkupõrget. Osakesena võib mõelda mistahes keha, mille sisemist struktuuri ei arvestata. Osakeste algkiirused olgu võrdvastupidised: u ja $-u$ piki üht sirgjoont, mille võtame x-teljeks (vt. joon. 44). Kummagi osakese mass paigalolekus olgu $m(0)$, kiiruse u puhul aga $m(u)$.

Põrke tulemusena tekib üks liitosake, mille kiirus impulsi jäävuse põhjal peab olema null. Seega on kokkupõrge täielikult mitteelastne. Liitosakese mass paigalolekus olgu $M(0)$.



Joonis 44.

Massi jäävust väljendab võrdus:

$$2m(u) = M(0). \tag{3.49}$$

Nüüd vaatame sama protsessi teises inertsiaalsüsteemis. Liikugu see esimese suhtes x-telje positiivses suunas sellesama kiirusega u. Kiiruste liitmise valemi (2.125) järgi on teise osakese kiirus uues süsteemis $-\frac{2u}{1+u^2/c^2}$, liitosakese kiirus $-u$, kuna esimene osake on muidugi liikumatu. Seega massi jäävuse põhjal

$$m(0) + m\left(\frac{2u}{1+u^2/c^2}\right) = M(u) \tag{3.50}$$

ja impulsi jäävuse põhjal

$$m\left(\frac{2u}{1+u^2/c^2}\right)\cdot\frac{2u}{1+u^2/c^2} = M(u)u. \tag{3.51}$$

Elimineerides $M(u)$, saame

$$m(0) = \frac{1-u^2/c^2}{1+u^2/c^2}\cdot m\left(\frac{2u}{1+u^2/c^2}\right). \tag{3.52}$$

Tähistame

$$\frac{2u}{1+u^2/c^2} = v\,. \tag{3.53}$$

Siis

$$\frac{u}{c} = \frac{\sqrt{1+v/c} - \sqrt{1-v/c}}{\sqrt{1+v/c} + \sqrt{1-v/c}} \tag{3.54}$$

ja

$$\frac{1-u^2/c^2}{1+u^2/c^2} = \sqrt{1-v^2/c^2}\,. \tag{3.55}$$

Järelikult saab valem (3.52) kuju:

$$m(v) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{3.56}$$

See ongi valem, mille me pidime tuletama. Samakujulise valemi saame ka liitosakese jaoks. Selleks kirjutame (3.56) põhjal valemi (3.49) ümber kujul:

$$M(0) = \frac{2m(0)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

ja valemi (3.51) kujul:

$$M(u) = \frac{2m(0)}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

(sest (3.53) ja (3.55) põhjal on

$$m\left(\frac{2u}{1+u^2/c^2}\right) = m(v) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m(0)(1+u^2/c^2)}{1-u^2/c^2}).$$

Seega

$$M(u) = \frac{M(0)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,.$$

Niisiis, me tõestasime, et massi ja impulsi jäävuse kehtivus kahes inertsiaalsüsteemis nõuab massi olenevust kiirusest kujul (3.56). Nüüd tuleb tõestada, et niisugune olenevus kindlustab massi ja impulsi jäävuse seaduste kehtivuse täieliku sõltumatuse inertsiaalsüsteemi valikust. See tähendab, et kui mass ja impulss on mingis protsessis jäävad ühes inertsiaalsüsteemis, siis nad on jäävad ka mistahes teises inertsiaalsüsteemis.

Selleks vaatleme mingit meelevaldset üksikutest osakestest koosnevat mehhaanilist süsteemi. Osakeste vahel võivad toimuda elastsed või mitteelastsed kokkupõrked, mille tulemusena võivad muutuda nende massid ja impulsid ja ka nende arv. Väljaspool neid elementaarprotsesse on aga osakesed vabad. See eeldus on vajalik selleks, et poleks vaja arvestada väljade mõju osakestesse. Muidu ei oleks meie süsteem enam puhtmehhaaniline. Väljade olemasolu korral tuleks arvestada ka nende massi ja impulssi; kuid see viib juba mehhaanika raamidest väljapoole.

Osakeste seisumassid olgu $m_i(0)$ ja kiirused $\vec{u}_i$. Siis on süsteemi kogumass võrdne

$$M = \sum_i \frac{m_i(0)}{\sqrt{1-u_i^2/c^2}} \tag{3.57}$$

ja koguimpulss

$$\vec{P} = \sum_i \frac{m_i(0)\,\vec{u}_i}{\sqrt{1-u_i^2/c^2}}\,. \tag{3.58}$$

Samakujulised avaldised kehtivad kogumassi ja koguimpulsi jaoks ka mingis teises inertsiaalsüsteemis:

$$M' = \sum_i \frac{m_i(0)}{\sqrt{1-u_i'^2/c^2}} \tag{3.59}$$

ja

$$\vec{P}' = \sum_i \frac{m_i(0)\,\vec{u}_i'}{\sqrt{1-u_i'^2/c^2}}\,. \tag{3.60}$$

Eeldame nüüd, et M ja $\vec{P}$ on jäävad:

$$\begin{aligned} M &= const. \\ \vec{P} &= const. \end{aligned} \tag{3.61}$$

ja näitame, et siis kehtib jäävus ka teises inertsiaalsüsteemis:

$$\begin{aligned} M' &= const. \\ \vec{P}' &= const. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Et ruumikoordinaadistiku pööre jäävust ilmselt ei mõjuta, siis piisab, kui vaatleme teist süsteemi liikuvana x-telje suunas. Olgu tema kiirus v . Avaldades kiiruste komponendid kiiruste liitmise valemite (2.123) järgi ning arvestades ka valemit (2.128), pärast asetamist valemitesse (3.59) ja (3.60) leiame:

$$M' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \sum_i \frac{m_i(0)\left(1-u_{ix}v/c^2\right)}{\sqrt{1-u_i^2/c^2}}, \tag{3.63}$$

$$\left.\begin{aligned} P_x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \sum_i \frac{m_i(0)(u_{ix}-v)}{\sqrt{1-u_i^2/c^2}}, \\ P_y' &= \sum_i \frac{m_i(0)u_{iy}}{\sqrt{1-u_i^2/c^2}}, \\ P_z' &= \sum_i \frac{m_i(0)u_{iz}}{\sqrt{1-u_i^2/c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

Võrreldes saadud avaldisi valemitega (3.57) ja (3.58), leiame, et kogumass ja koguimpulsi komponendid avalduvad teises inertsiaalsüsteemis lineaarsete homogeensete funktsioonidena samadest suurustest esimeses inertsiaalsüsteemis:

$$M' = \frac{M - \frac{v P_x}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.65}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} P_x' &= \frac{P_x - vM}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \\ P_y' &= P_y\,, \\ P_z' &= P_z\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.66}$$

Nendest valemitest näib vahetult järelduvat M' ja $\vec{P}'$ jäävus, kui on jäävad M ja $\vec{P}$. See järeldus on tõepoolest õige, kuid ei ole siiski nii lihtne. Asi seisneb selles, et mõlema inertsiaalsüsteemi ajad on erinevad. M ja $\vec{P}$ jäävus tähendab seda, et kahel hetkel, t_1 ja t_2, on nende suuruste väärtused samad:

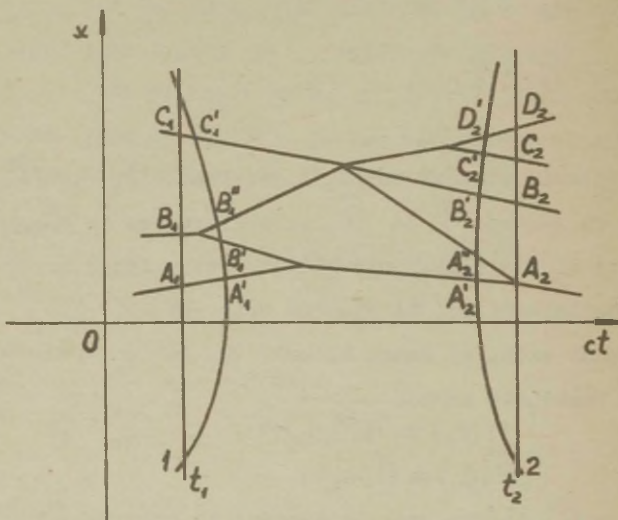
$$M(t_1) = M(t_2),$$
$$\vec{P}(t_1) = \vec{P}(t_2).$$

Aga M' ja $\vec{P}'$ jäävus peab tähendama, et need suurused säilitavad oma väärtused teise süsteemi ajas:

$$M'(t_1') = M'(t_2'),$$
$$\vec{P}'(t_1') = \vec{P}'(t_2').$$

Need võrdused aga ei järgne vahetult eelmistest vaatamata seostele (3.65) ja (3.66).

Siiski on järeldus õige: kui M ja $\vec{P}$ on jäävad, siis on jäävad ka M' ja $\vec{P}'$. Asi seisneb selles, et jäävust võib mõista invariantsel kombel, sõltumatult ühe või teise süsteemi ajast (kuigi jäävad suurused ise on defineeritud ühes või teises inertsiaalsüsteemis). Kahe hetke t_1, t_2 asemel tuleb selleks vaadelda kaht invariantset ruumisarnast hüperpinda. Joonisel 45 kujutavad x-teljega paralleelsed jooned kaht hüpertasandit, kus $t=t_1$ ja $t=t_2$. Joonte võrk, mis lõikavad esimest hüpertasandit punktides



Joonis 45.

A_1, B_1, C_1 ja teist punktides A_2, B_2, C_2, D_2, kujutab osakeste maailmajooni. Osakeste arv ei ole jääv; nad põrkuvad üksteisega, liituvad ning jagunevad, nagu näitavad selle võrgu sõlmpunktid. Selle osakeste süsteemi massi ja impulsi jäävus ajas t tähendab seda, et masside summa punktides A_1, B_1, C_1 on võrdne masside summaga punktides A_2, B_2, C_2, D_2 ja impulsside summad nimetatud punktides on samuti võrdsed. Kuid me võime hüpertasandid asendada kahe meelevaldse ruumisarnase hüperpinnaga (joonisel märgitud numbritega 1 ja 2). Hüperpinna ruumisarnasus tähendab seda, et mistahes selles pinnas asetsev joonelement on ruumisarnane. Osakeste maailmajooned lõikavad 1. hüperpinda punktides A_1', B_1', B_1'', C_1' ja 2. hüperpinda punktides A_2', A_2'', B_2', C_2', D_2'. Eelduse kohaselt on osakesed väljaspool nendevahelisi elementaarprotsesse vabad ja jäävuse seadused on kehtivad igas elementaarprotsessis. Järelikult on mass punktis B_1 võrdne masside summaga punktides B_1' ja B_1''; impulss punktis B_1 on võrdne impulsside summaga punktides B_1' ja B_1''; sama kehtib punktis A_2 oleva massi ja impulsi ja punktides A_2' ja A_2'' olevate masside ja impulsside summa kohta. See tähendab, et kui kogumass ja koguimpulss hüpertasandil t_1 on võrdsed kogumassi ja koguimpulsiga hüpertasandil t_2, siis samasugune võrdus kehtib kogumassi ja koguimpulsi vahel hüperpindadel 1 ja 2. See ongi jäävuse invariantne esitus. Massi ja impulssi, mis on defineeritud küll teatavas inertsiaalsüsteemis, me ei vaatle siin mitte selle süsteemi aja funktsioonina, vaid invariantsete ruumisarnaste hüperpindade funktsioonina.

Pöördudes nüüd tagasi valemite (3.65) ja (3.66) juurde, on meil õigus väita, et M ja $\vec{P}$ jäävusest (eespool seletatud invariantses mõttes) järgneb vahetult ka M' ja $\vec{P}'$ jäävus.

Niisiis oleme jõudnud tähtsale tulemusele, et massi olenevus kiirusest (3.56), relatiivsusprintsiip ja massi ja impulsi jäävuse seadused moodustavad kooskõlalise terviku.

Edasi defineerime neljamõõtmelise kiiruse ja neljamõõtmelise impulsi. Need on mõlemad neljamõõtmelised vektorid. Liikuva osakese neljamõõtmeliseks kiiruseks u_μ nimetatakse tema neljamõõtmelise kohavektori x_μ tuletist omaaja järgi:

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} . \tag{3.67}$$

Et $d\tau$ on invariant, siis on u_μ vektor. Neljamõõtmeliseks impulsiks p_μ nimetatakse seisumassi m_0 ja kiiruse u_μ korrutist

$$p_\mu = m_0 u_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{d\tau} . \tag{3.68}$$

Et seisumass on invariant, siis on ka p_μ vektor.

Leiame seosed neljamõõtmeliste vektorite u_μ ja p_μ komponentide ja vastavate kolmemõõtmeliste vektorite - kiiruse $\vec{u}$ ja impulsi $\vec{p}$ komponentide vahel.

Et

$$d\tau = dt\sqrt{1-u^2/c^2}$$

(vt. (2.76)), siis

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{dt\sqrt{1-u^2/c^2}} ;$$

et aga x_k on kolmemõõtmelise kohavektori $\vec{r}$ komponendid ja $x_4 = ict$, siis

$$\left.\begin{aligned} u_k &= \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} , \\ u_4 &= \frac{ic}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{aligned}\right\} \tag{3.69}$$

Korrutades need valemid seisumassiga, saame

$$\left.\begin{aligned} p_k &= \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\ p_4 &= \frac{i m_0 c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{3.70}$$

ehk, kuna

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{3.71}$$

on kiirusest olenev mass ja

$$\vec{p} = m\vec{u} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{3.72}$$

on kolmemõõtmeline impulss, siis

$$\left.\begin{aligned} p_k &= \vec{p}, \\ p_4 &= imc . \end{aligned}\right\} \tag{3.73}$$

Seega on neljamõõtmelise impulsi kolm esimest komponenti identsed kolmemõõtmelise impulsi komponentidega ja neljas komponent on võrdeline massiga. Märgime, et kiiruse puhul (vt. (3.69)) on seos kolme- ja neljamõõtmelise suuruse komponentide vahel veidi keerulisem.

Leiame veel mõlema vektori, u_μ ja p_μ absoluutväärtuste ruudud. Kiiruse jaoks valem (3.69) annab:

$$u_\mu u_\mu = -c^2 \tag{3.74}$$

ja impulsi jaoks valemist (3.68) järgneb:

$$p_\mu p_\mu = -m_0^2 c^2 . \tag{3.75}$$

Mõlemad vektorid on seega ajasarnased. Valemitest (3.73) ja (3.75) järeldame veel:

$$\vec{p}^2 - m^2c^2 = -m_0^2c^2;$$

siit

$$m = m_0\sqrt{1+\vec{p}^2/m_0^2c^2} \tag{3.76}$$

ja

$$p_4 = i\sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2c^2}\,. \tag{3.77}$$

Massi valemid (3.71) ja (3.76) erinevad teineteisest selle poolest, et esimeses on mass avaldatud kiiruse ja teises impulsi funktsioonina. Ühel juhul kaotab valem (3.71) mõtte. On olemas osakesi (footon, neutriino), mis liiguvad valguse kiirusega. Nendel on nullist erinev lõplik impulss ja mass. Seega on nende seisumass võrdne nulliga (muidu annaks valem (3.71) lõpmatu massi). Valem (3.71) annab seega massi jaoks määramatu avaldise $\frac{0}{0}$. Sellevastu jääb valem (3.76) täiel määral kehtivaks ning annab

$$\vec{p} = m\vec{c}\,, \tag{3.78}$$

nagu peabki olema vastavalt valemile (3.72). Neljamõõtmelise impulsi komponendid on niisugustel osakestel

$$\left.\begin{aligned} p_k &= \vec{p}\,, \\ p_4 &= ip \end{aligned}\right\} \tag{3.79}$$

ja absoluutväärtus võrdne nulliga. Impulss pole seega sel erijuhul ajasarnane, vaid on isotroopne vektor. Neljamõõtmelist kiirusvektorit aga sellistel osakestel olemas ei ole. Ei ole nendel ka omaaega.

Vaatame lõpuks, kuidas teisenevad kiiruse ja impulsi komponendid üleminekul ühest inertsiaalsüsteemist teise.

Piirdume juhuga, kus teine süsteem liigub esimese suhtes x-telje suunas. Olgu tema kiirus v. Rakendades neljamõõtmelisele kiirusele vektori teisendusvalemit ja arvestades valemit (3.69), leiame:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{u'_x}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} &= \frac{u_x - v}{\sqrt{1-u^2/c^2}\sqrt{1-\beta^2}}, \\
\frac{u'_y}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} &= \frac{u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\
\frac{u'_z}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} &= \frac{u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\
\frac{1}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} &= \frac{1-u_x\beta/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}\sqrt{1-\beta^2}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.80)$$

Siit saame kergesti juba varem teisel teel tuletatud kiiruste liitmise valemid (2.125) ja ühtlasi ka valemi (2.128).

Impulsi jaoks saame valemite (3.73) abil analoogiliselt:

$$\left.\begin{aligned}
p'_x &= \frac{p_x - mv}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\
p'_y &= p_y, \\
p'_z &= p_z,
\end{aligned}\right\} \qquad (3.81)$$

$$m' = \frac{m - vp_x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (3.82)$$

Need valemid on kujult samasugused nagu eespool tuletatud valemid (3.65) ja (3.66). Vahe on ainult selles, et seal vaatlesime osakeste süsteemi massi ja impulssi, siin aga üksiku osakese massi ja impulssi.

Ü l e s a n d e d.

1. Kaks osakest seisumassidega m_1^0 ja m_2^0 liiguvad ühel sirgjoonel teineteisele vastu, kusjuures nende massid on vastavalt m_1 ja m_2. Kui suur on teise osakese mass m selles inertsiaalsüsteemis, milles esimene osakene on liikumatu?

L a h e n d u s . Võtame 1. osakese liikumissuuna x-telje positiivseks suunaks. Siis liigub süsteem, milles see osake on liikumatu, algsüsteemi suhtes x-telje positiivses suunas kiirusega

$$u = c\sqrt{1-(m_1^0/m_1)^2}$$

(vt. (3.71)). Teise osakese impulsi x-komponent on algsüsteemis (3.76) põhjal võrdne

$$-m_2^0 c\sqrt{(m_2/m_2^0)^2-1} \; .$$

Teisendades 2. osakese massi valemi (3.82) järgi algsüsteemi suhtes kiirusega u liikuvasse süsteemi, leiame:

$$m = m_2^0\left\{\frac{m_1 m_2}{m_1^0 m_2^0} + \sqrt{\left[\left(\frac{m_1}{m_1^0}\right)^2-1\right]\left[\left(\frac{m_2}{m_2^0}\right)^2-1\right]}\right\}. \tag{3.83}$$

Et seda avaldist lihtsustada, tähistame:

$$\frac{m_1}{m_1^0} = ch\psi_1 \; , \quad \frac{m_2}{m_2^0} = ch\psi_2 \; .$$

Siis

$$m = m_2^\circ \, ch(\psi_1 + \psi_2).$$

2. Osake seisumassiga M_0 laguneb paigalolekus kaheks osakeseks seisumassidega m_1° ja m_2°. Impulsi jäävuse põhjal on nende impulsid p ja $-p$ võrdvastupidised. Avaldada p M_0, m_1° ja m_2° kaudu. Avaldada samuti mõlema sekundaarse osakese massid m_1 ja m_2.

L a h e n d u s . Massi jäävus annab valemi (3.76) põhjal:

$$M_0 = \sqrt{m_1^{\circ 2} + p^2/c^2} + \sqrt{m_2^{\circ 2} + p^2/c^2}.$$

Lahendades selle võrrandi p suhtes, leiame:

$$p = \frac{c}{2M_0}\sqrt{(M_0+m_1^\circ+m_2^\circ)(M_0-m_1^\circ-m_2^\circ)(M_0+m_1^\circ-m_2^\circ)(M_0-m_1^\circ+m_2^\circ)}. \tag{3.84}$$

Sekundaarsete osakeste massid saame valemitest:

$$m_1 = \sqrt{m_1^{\circ 2} + p^2/c^2},$$

$$m_2 = \sqrt{m_2^{\circ 2} + p^2/c^2},$$

milles p tuleb asendada valemist (3.84). Niiviisi leiame:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{M_0^2 + m_1^{\circ 2} - m_2^{\circ 2}}{2M_0}, \\ m_2 &= \frac{M_0^2 - m_1^{\circ 2} + m_2^{\circ 2}}{2M_0}, \end{aligned}\right\} \tag{3.85}$$

kusjuures $m_1 + m_2 = M_0$, nagu peabki olema. Anname valemitele (3.84) ja (3.85) geomeetrilise interpretatsiooni. Olgu

$$\operatorname{ch}\psi = \frac{M_0^2 - m_1^{\circ 2} - m_2^{\circ 2}}{2m_1^\circ m_2^\circ}. \qquad (3.86)$$

Siis

$$p = \frac{m_1^\circ m_2^\circ c \operatorname{sh}\psi}{M_0}. \qquad (3.87)$$

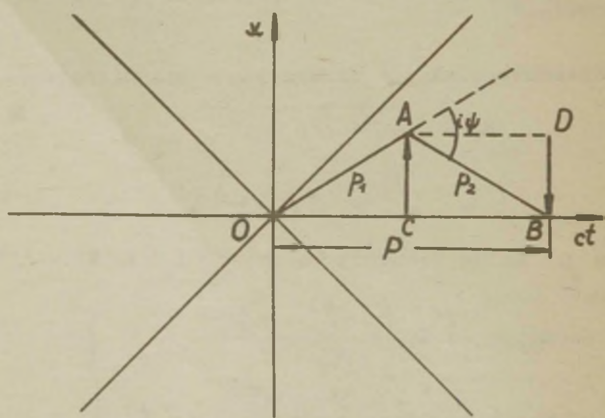
Kirjutades valemi (3.86) ümber kujul:

$$M_0^2 = m_1^{\circ 2} + m_2^{\circ 2} + 2m_1^\circ m_2^\circ \cos(i\psi),$$

näeme, et imaginaarseid suurusi $im_1^\circ c$, $im_2^\circ c$, $iM_0 c$ võib vaadelda kolmnurga külgedena, kusjuures külje iM_0c vastasnurk on $\pi - i\psi$. Siis on

$$-\frac{im_1^\circ m_2^\circ c^2 \operatorname{sh}\psi}{2}$$

selle kolmnurga pindala ja $-p$ selle kõrgus. Graafikul (vt. joon. 46) on kolmnurga külgedeks kolme osakese nel-



Joonis 46.

jamõõtmelised impulssvektorid P , P_1 ja P_2 , mille absoluutväärtused ongi iM_0c , $im_1^\circ c$ ja $im_2^\circ c$. Impulsi jäävus väljendub graafiliselt selles, et need vektorid moodustavad kinnise joone. Et primaarne osake on liikumatu, on tema impulssvektor OB paralleelne ajateljega. Sekundaarsete osakeste impulsid on OA ja AB , nende kolmemõõtmelised impulsid on aga neljamõõtmeliste impulsside ruumilised komponendid $\vec{p} = \vec{CA}$ ja $-\vec{p} = \vec{\mathcal{D}B}$. Sekundaarsete osakeste impulsside ajalised komponendid on OC ja CB , mis kujutavad seega nende osakeste masse kooskõlas valemiga (3.85).

Vrd. ka ülesanne 5 §-s 11.

3. π-meson laguneb paigalolekus müüoniks ja neutriinoks. Leida müüoni mass μ , kui tema seisumass on μ_0 , π-mesoni seisumass on m_0 ja neutriino seisumass on võrdne nulliga. Leida ka müüoni ja neutriino impulsi absoluutväärtus p .

L a h e n d u s . Valemite (3.84) ja (3.85) järgi leiame:

$$\mu = \frac{m_0^2 + \mu_0^2}{2m_0},$$

$$p = \frac{c(m_0^2 - \mu_0^2)}{2m_0}.$$

Neutriino mass võrdub muidugi p/c , s. o.

$$\frac{m_0^2 - \mu_0^2}{2m_0},$$

mis järgneb ka valemitest (3.85).

4. Müüon laguneb paigalolekus elektroniks ja kaheks neutriinoks. Müüoni seisumass on μ_0 , elektroni oma m_0 , neutriino oma null. Leida suurim võimalik elektroni massi väärtus m_{max} ja sellele vastav maksimaalne impulsi väärtus p_{max} .

L a h e n d u s . Olgu elektroni impulss $\vec{p}$ ja neutriinode impulsid $\vec{p}_1$ ja $\vec{p}_2$. Impulsi jäävuse põhjal on

$$\vec{p}+\vec{p}_1+\vec{p}_2=0\,;$$

siit

$$p^2=p_1^2+p_2^2+2p_1p_2\cos\varphi\,,$$

kus φ on $\vec{p}_1$ ja $\vec{p}_2$ vaheline nurk. Järelikult

$$m^2=m_0^2+\frac{p_1^2+p_2^2+2p_1p_2\cos\varphi}{c^2}.$$

Teisest küljest, massi jäävuse põhjal on $\mu_0-m=\frac{p_1+p_2}{c}$.

Võttes selle võrduse ruutu ja lahutades eelmisest, leiame:

$$2\mu_0 m=m_0^2+\mu_0^2-\frac{4p_1p_2\sin^2(\varphi/2)}{c^2}.$$

Siit järgneb, et m on maksimaalne siis, kui $\varphi=0$, s.o. kui mõlema neutriino impulsid on samasuunalised. Seega

$$m_{max}=\frac{m_0^2+\mu_0^2}{2\mu_0}\,,$$

ja sellele vastab maksimaalne impulss

$$p_{max}=\frac{(\mu_0^2-m_0^2)c}{2\mu_0}.$$

5. K-meson laguneb paigalolekus kolmeks π -mesoniks, mille impulsid on absoluutväärtuselt võrdsed. Kui suur on iga π -mesoni impulss p , kui K-mesoni seisumass on M_0 ja π -mesoni oma m_0 ?

L a h e n d u s . Impulsile p vastab mass

$$m_0\sqrt{1+p^2/m_0^2c^2}.$$

Seega on massi jäävuse põhjal

$$M_0=3m_0\sqrt{1+p^2/m_0^2c^2}.$$

Siit

$$p = \frac{c}{3}\sqrt{M_0^2 - 9m_0^2}\ .$$

6. K-mesoni lagunemisel paigalolekus tekivad kolm π -mesonit, mille massid suhtuvad nagu $\alpha:\beta:\gamma$, kusjuures $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ ja $\alpha+\beta+\gamma=1$. K-mesoni seisumass on M_0, π -mesoni oma m_0. Missugust võrratust rahuldavad arvud α, β, γ massi ja impulsi jäävuse seaduste tõttu? Kui suur on π -mesoni suurim võimalik impulss p_{max}?

L a h e n d u s . Massi jäävuse põhjal on π-mesonite massid võrdsed $\alpha M_0, \beta M_0, \gamma M_0$. Nende impulsside absoluutväärtused avalduvad siit nii:

$$p_1 = c\sqrt{\alpha^2 M_0^2 - m_0^2}\ ,$$

$$p_2 = c\sqrt{\beta^2 M_0^2 - m_0^2}\ ,$$

$$p_3 = c\sqrt{\gamma^2 M_0^2 - m_0^2}\ .$$

Et algimpulss on null, siis $\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3=0$, kust

$$p_1 \leqslant p_2 + p_3\ ,$$

s. o.

$$\sqrt{\alpha^2 M_0^2 - m_0^2} \leqslant \sqrt{\beta^2 M_0^2 - m_0^2} + \sqrt{\gamma^2 M_0^2 - m_0^2}\ . \tag{3.88}$$

See ongi otsitav võrratus, mida peavad rahuldama arvud α, β, γ jäävuse seaduste tõttu. Peale selle muidugi peavad kehtima võrratused:

$$\frac{m_0}{M_0} < \alpha < 1 - \frac{2m_0}{M_0}\ ,$$

$$\frac{m_0}{M_0} < \beta < 1 - \frac{2m_0}{M_0},$$
$$\frac{m_0}{M_0} \leq \gamma < 1 - \frac{2m_0}{M_0}.$$

Suurima impulsi p_{max} leidmiseks olgu impulsside $\vec{p}_2$ ja $\vec{p}_3$ vaheline nurk φ . Siis

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + 2p_2 p_3 \cos\varphi.$$

p_1 on suurim siis, kui $\varphi = 0$. Sel juhul $p_1 = p_2 + p_3$ ja võrratus (3.88) saab võrduseks:

$$\sqrt{\alpha^2 M_0^2 - m_0^2} = \sqrt{\beta^2 M_0^2 - m_0^2} + \sqrt{\gamma^2 M_0^2 - m_0^2}. \quad (3.89)$$

Edasi tuleb leida maksimaalne võimalik α väärtus. Diferentseerides (3.89) saame

$$\frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 M_0^2 - m_0^2}} = \frac{\beta d\beta}{\sqrt{\beta^2 M_0^2 - m_0^2}} + \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 M_0^2 - m_0^2}};$$

teiseks $\alpha + \beta + \gamma = 1$ tõttu

$$d\alpha + d\beta + d\gamma = 0.$$

Siit järgneb, et $d\alpha = 0$ puhul on

$$\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 M_0^2 - m_0^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 M_0^2 - m_0^2}},$$

s. o. $\beta = \gamma = \frac{1-\alpha}{2}$. Valem (3.89) annab sel juhul

$$\alpha^2 M_0^2 - m_0^2 = (1-\alpha)^2 M_0^2 - 4m_0^2.$$

Siit

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{3m_0^2}{2M_0^2},$$

$$\beta = \gamma = \frac{1}{4} + \frac{3m_0^2}{4M_0^2}.$$

Lõpuks $p_{max} = c\sqrt{\alpha^2 M_0^2 - m_0^2}$ ehk

$$p_{max} = (c/2M_0)\sqrt{(M_0^2 - m_0^2)(M_0^2 - 9m_0^2)}.$$

7. Liikuv osake, mille seisumass on M_0, laguneb kaheks osakeseks seisumassidega m_1^0 ja m_2^0. Nende impulsid on absoluutväärtuselt võrdsed ja on teineteisega risti. Leida primaarse osakese mass M.

L a h e n d u s. Primaarse osakese impulss P avaldub kui

$$P = c\sqrt{M^2 - M_0^2}.$$

Impulsi jäävuse põhjal on kummagi sekundaarse osakese impulss p võrdne

$$p = c\sqrt{\frac{M^2 - M_0^2}{2}}.$$

Siit avaldame sekundaarsete osakeste massid

$$m_1 = m_1^0\sqrt{1 + \frac{M^2 - M_0^2}{2m_1^{02}}},$$

$$m_2 = m_2^0\sqrt{1 + \frac{M^2 - M_0^2}{2m_2^{02}}}.$$

Seega kehtib massi jäävuse põhjal võrdus

$$m_1^0\sqrt{1 + \frac{M^2 - M_0^2}{2m_1^{02}}} + m_2^0\sqrt{1 + \frac{M^2 - M_0^2}{2m_2^{02}}} = M.$$

Lahendades selle võrrandi M suhtes, leiame:

$$M = \sqrt{M_0^2 - m_1^{02} - m_2^{02} + \sqrt{M_0^4 - 2(m_1^{02} + m_2^{02})M_0^2 + 2(m_1^{04} + m_2^{04})}}.$$

8. π^0-meson, liikudes kiirusega v, laguneb kaheks footoniks. Missuguses vahemikus võib olla väärtusi footonite impulsside vahelisel nurgal θ ? Kui suur on see nurk juhul, kui impulsid on absoluutväärtuselt võrdsed? Leida ka

footonite impulsside absoluutväärtuste suhte üldine olenevus nurgast θ ja selle suhte suurim ja väikseim väärtus.

L a h e n d u s . Vaatleme π^0-mesoni lagunemisprotsessi esmalt tema paigaloleku süsteemis. Impulsi jäävus nõuab, et footonite impulsid on selles süsteemis vôrdvastupidised, $\vec{p}$ ja $-\vec{p}$. Võtame mesoni kiiruse suuna x-teljeks ja $\vec{p}$ moodustagu selle teljega nurga φ. Selle nurga tasandi võtame xy-tasandiks. Siis on 1. footoni neljamõõtmelise impulsi komponendid

$$p\cos\varphi,\ p\sin\varphi,\ ip$$

ja 2. footoni omad

$$-p\cos\varphi,\ -p\sin\varphi,\ ip.$$

Teisendame need komponendid nüüd algsüsteemi, milles meson liigub kiirusega v. Tulemus on niisugune. Esimesel footonil on

$$\left.\begin{aligned} p_x' &= \frac{p\cos\varphi+\beta p}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ p_y' &= p\sin\varphi, \\ p' &= \frac{p(1+\beta\cos\varphi)}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}\right\} \tag{3.90}$$

ja teisel footonil

$$\left.\begin{aligned} p_x'' &= \frac{-p\cos\varphi+\beta p}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ p_y'' &= -p\sin\varphi, \\ p'' &= \frac{p(1-\beta\cos\varphi)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.91}$$

Siit saame nurgad θ_1 ja θ_2, mille need impulsid moodustavad x-teljega, s. o. mesoni kiirusega:

$$\cos\theta_1 = \frac{\cos\varphi + \beta}{1+\beta\cos\varphi},$$

$$\sin\theta_1 = \frac{\sin\varphi\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\varphi}$$

ja

$$\cos\theta_2 = \frac{-\cos\varphi + \beta}{1-\beta\cos\varphi},$$

$$\sin\theta_2 = -\frac{\sin\varphi\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\varphi}.$$

Siit avaldub mõlema impulsi vaheline nurk $\theta = \theta_1 - \theta_2$ järgmiselt:

$$\cos\theta = 1 - \frac{2(1-\beta^2)}{1-\beta^2\cos^2\varphi} \tag{3.92}$$

ehk

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\beta\sin\varphi}{\sqrt{1-\beta^2\cos^2\varphi}}. \tag{3.93}$$

See valem näitab, et $\cos\frac{\theta}{2}$ minimaalne väärtus on 0 (kui $\varphi = 0$) ja maksimaalne väärtus β (kui $\varphi = \frac{\pi}{2}$). Niisiis,

$$2\arccos\beta \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{3.94}$$

Kui footonite impulsid on absoluutväärtuselt võrdsed, $p' = p''$, siis, nagu järgneb valemitest (3.90) ja (3.91), on $\cos\varphi = 0$; seega on sel juhul

$$\theta = \theta_{min} = 2\arccos\beta.$$

Footonite impulsside absoluutväärtuste suhe avaldub üldiselt nii:

$$\frac{p'}{p''}=\frac{1+\beta\cos\varphi}{1-\beta\cos\varphi}. \tag{3.95}$$

Elimineerides siit ja valemist (3.93) φ , leiame:

$$\frac{p'}{p''}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\sqrt{\beta^2-\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\sin\frac{\theta}{2}-\sqrt{\beta^2-\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

ehk (3.94) põhjal,

$$\frac{p'}{p''}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\sqrt{\sin\frac{\theta+\theta_{min}}{2}\sin\frac{\theta-\theta_{min}}{2}}}{\sin\frac{\theta}{2}-\sqrt{\sin\frac{\theta+\theta_{min}}{2}\sin\frac{\theta-\theta_{min}}{2}}} \tag{3.96}$$

Suhte $\frac{p'}{p''}$ suurima ja väikseima väärtuse saame vahetult valemist (3.95). Suurim väärtus on $\frac{1+\beta}{1-\beta}$ ja väikseim $\frac{1-\beta}{1+\beta}$. Neil juhtudel on $\theta = 180°$.

Tuletame täienduseks veel mõned lihtsad seosed. Defineerime suurused ψ_1, ψ_2, α ja γ :

$$th\psi_1 = \cos\theta_1 = \frac{\beta+\cos\varphi}{1+\beta\cos\varphi},$$

$$th\psi_2 = \cos\theta_2 = \frac{\beta-\cos\varphi}{1-\beta\cos\varphi},$$

$$th\alpha = \beta,$$

$$th\gamma = \cos\varphi.$$

Siis

$$\psi_1 = \alpha+\gamma,$$

$$\psi_2 = \alpha-\gamma,$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{ch\gamma}{sh\alpha},$$

$$\frac{p'}{p''} = \frac{ch\psi_1}{ch\psi_2}.$$

9. Osake, mille seisumass on M_0, laguneb kaheks ühesuguseks osakeseks seisumassiga m_0 ja massidega m_1 ja m_2. Leida nurk θ nende osakeste impulsside vahel. Millise kiirusega v liikus primaarne osake?

L a h e n d u s . Kui primaarse osakese impulss on $\vec{P}$ ja sekundaarsete osakeste impulsid $\vec{p}_1$ ja $\vec{p}_2$, siis

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

ning

$$P^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta,$$

ehk, avaldades impulsid masside kaudu,

$$M^2 - M_0^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2m_0^2 + 2\sqrt{m_1^2 - m_0^2}\sqrt{m_2^2 - m_0^2}\cos\theta,$$

kus M on primaarse osakese mass. Massi jäävuse põhjal

$$M = m_1 + m_2.$$

Asendades eelmises võrrandis M selle summaga, leiame:

$$\cos\theta = \frac{2(m_1m_2 + m_0^2) - M_0^2}{2\sqrt{(m_1^2 - m_0^2)(m_2^2 - m_0^2)}}. \qquad (3.97)$$

Primaarse osakese kiiruse saame seosest

$$m_1 + m_2 = M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

mis annab

$$v = c\cdot\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - M_0^2}}{m_1 + m_2}.$$

10. Kiirusega v liikuv osake laguneb kaheks ühesuguseks osakeseks, mille massid on m_1 ja m_2 ja seisumass m_0. Missugused nurgad θ_1 ja θ_2 moodustavad nende kiirused kiirusega v ? Kui suur on nurk θ nende

kiiruste eneste vahel? Kui suur on primaarse osakese seisumass M_0 ?

L a h e n d u s . Inertsiaalsüsteemis, milles primaarne osake on liikumatu, on sekundaarsete osakeste impulsid võrdvastupidised ja massid võrdsed. Võtame kiiruse v suuna x-teljeks ja sekundaarsete osakeste impulsside tasandi xy-tasandiks. Moodustagu 1. sekundaarse osakese impulss (primaarse osakese paigaloleku süsteemis) x-teljega nurga φ . Siis on sekundaarsete osakeste neljamõõtmeliste impulsside komponendid selles süsteemis järgmised:

$$p\cos\varphi,\ p\sin\varphi,\ i\sqrt{p^2+m_0^2c^2};$$
$$-p\cos\varphi,\ -p\sin\varphi,\ i\sqrt{p^2+m_0^2c^2},$$

kus p on nende (kolmemõõtmeliste) impulsside absoluutväärtus. Arvutades need komponendid ümber süsteemi, milles primaarne osake liigub kiirusega v , saame 1. osakese jaoks:

$$\left.\begin{aligned} p_x' &= \frac{p\cos\varphi+\beta\sqrt{p^2+m_0^2c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ p_y' &= p\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{3.98}$$

ning

$$m_1 = \frac{\beta p\cos\varphi+\sqrt{p^2+m_0^2c^2}}{c\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.99}$$

ja 2. osakese jaoks:

$$\left.\begin{aligned} p_x'' &= \frac{-p\cos\varphi+\beta\sqrt{p^2+m_0^2c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ p_y'' &= -p\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{3.100}$$

ning

$$m_2 = \frac{-\beta p\cos\varphi + \sqrt{p^2+m_0^2c^2}}{c\sqrt{1-\beta^2}} . \qquad (3.101)$$

Lahendades võrrandid (3.99) ja (3.101) φ ja p suhtes, leiame:

$$p = \frac{c\sqrt{(m_1+m_2)^2(1-\beta^2)-4m_0^2}}{2} \qquad (3.102)$$

ja

$$\cos\varphi = \frac{(m_1-m_2)\sqrt{1-\beta^2}}{\beta\sqrt{(m_1+m_2)^2(1-\beta^2)-4m_0^2}} . \qquad (3.103)$$

Asetades need avaldised valemitesse (3.98) ja (3.100), saame

$$p_x' = \frac{(m_1-m_2)c+\beta^2(m_1+m_2)c}{2\beta} ,$$

$$p_y' = \frac{c\sqrt{[(m_1+m_2)^2\beta^2-(m_1-m_2)^2](1-\beta^2)-4\beta^2m_0^2}}{2\beta}$$

ja

$$p_x'' = \frac{-(m_1-m_2)c+\beta^2(m_1+m_2)c}{2\beta} ,$$

$$p_y'' = \frac{-c\sqrt{[(m_1+m_2)^2\beta^2-(m_1-m_2)^2](1-\beta^2)-4\beta^2m_0^2}}{2\beta} .$$

Siit leiame nõutud nurkade

$$\theta_1 = \arccos\frac{p_x'}{\sqrt{p_x'^2+p_y'^2}} ,$$

$$\theta_2 = \arccos\frac{p_x''}{\sqrt{p_x''^2+p_y''^2}} ,$$

kus $\sqrt{p_x'^2+p_y'^2}=c\sqrt{m_1^2-m_0^2}$ ja $\sqrt{p_x''^2+p_y''^2}=c\sqrt{m_2^2-m_0^2}$, jaoks valemid:

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{(1+\beta^2)m_1-(1-\beta^2)m_2}{2\beta\sqrt{m_1^2-m_0^2}}, \\ \cos\theta_2 &= \frac{(1+\beta^2)m_2-(1-\beta^2)m_1}{2\beta\sqrt{m_2^2-m_0^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (3.104)$$

ja

$$\sin\theta_1 = \frac{\sqrt{[(m_1+m_2)^2\beta^2-(m_1-m_2)^2](1-\beta^2)-4\beta^2m_0^2}}{2\beta\sqrt{m_1^2-m_0^2}},$$

$$\sin\theta_2 = -\frac{\sqrt{[(m_1+m_2)^2\beta^2-(m_1-m_2)^2]\beta^2-4\beta^2m_0^2}}{2\beta\sqrt{m_2^2-m_0^2}}. \qquad (3.105)$$

Môlema sekundaarse osakese vaheline nurk on $\theta=\theta_1-\theta_2$; valemite (3.104) ja (3.105) abil leiame:

$$\cos\theta = \frac{2(m_1m_2+m_0^2)-(m_1+m_2)^2(1-\beta^2)}{2\sqrt{m_1^2-m_0^2}\sqrt{m_2^2-m_0^2}}. \qquad (3.106)$$

Primaarse osakese seisumassi leiame otseselt massi jäävuse seadusest:

$$M_0 = (m_1+m_2)\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (3.107)$$

Selle valemi abil saab eelmine lihtsama kuju:

$$\cos\theta = \frac{2(m_1m_2+m_0^2)-M_0^2}{2\sqrt{m_1^2-m_0^2}\sqrt{m_2^2-m_0^2}}, \qquad (3.108)$$

mis langeb ühte varem tuletatud valemiga (3.97).

Erijuhul, kui $m_0 = 0$, saame

$$\cos\theta = 1 - \frac{M_0^2}{2m_1m_2} . \tag{3.109}$$

See valem langeb sisuliselt ühte valemiga (3.92) 8. ülesandest, kus meil oligi tegemist mesoni lagunemisega kaheks footoniks. Tõepoolest, kui mesoni seisumassi tähistame M_0 , siis massi jäävuse põhjal

$$p' + p'' = \frac{M_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Aga valemist (3.95) järgneb

$$\frac{p' - p''}{p' + p''} = \beta\cos\varphi ;$$

seega (3.92) saab kuju:

$$\cos\theta = 1 - \frac{(1-\beta^2)(p'+p'')^2}{2p'p''}$$

ehk

$$\cos\theta = 1 - \frac{M_0^2 c^2}{2p'p''} .$$

See ongi identne valemiga (3.109), sest footonite massid on

$$m_1 = p'/c ,$$

$$m_2 = p''/c .$$

11. Osake seisumassiga M_0 liigub kiirusega $\vec{v}$ ja laguneb kaheks ühesuguseks osakeseks, mille seisumass on m_0 . Millises vahemikus võib olla väärtusi nende osakeste massidel m_1 ja m_2 ? Millisel juhul on võimalik, et ühel neist on mass võrdne seisumassiga? Millise kiirusega $\vec{u}$ liigub sel juhul teine neist?

L a h e n d u s . Kasutame eelmise ülesande lahendamisel saadud valemeid (3.99), (3.101), (3.102) ja (3.107). Viimasest kahest järgneb:

$$p = \frac{c\sqrt{M_0^2 - 4m_0^2}}{2} ;$$

asetades selle avaldise valemitesse (3.99) ja (3.101), leiame:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{M_0 + \beta\cos\varphi\sqrt{M_0^2 - 4m_0^2}}{2\sqrt{1-\beta^2}} , \\ m_2 &= \frac{M_0 - \beta\cos\varphi\sqrt{M_0^2 - 4m_0^2}}{2\sqrt{1-\beta^2}} . \end{aligned}\right\} \tag{3.110}$$

φ tähendab siin teravat nurka kiiruse $\vec{v}$ ja ühe sekundaarse osakese kiiruse vahel süsteemis, milles primaarne osake on liikumatu. Et $\cos\varphi$ maksimaalne väärtus on 1, siis

$$\frac{M_0 - \beta\sqrt{M_0^2 - 4m_0^2}}{2\sqrt{1-\beta^2}} \leqslant m_{1,2} \leqslant \frac{M_0 + \beta\sqrt{M_0^2 - 4m_0^2}}{2\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.111}$$

lisatingimusega

$$m_1 + m_2 = \frac{M_0}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Selleks, et ühe osakese mass võiks olla võrdne seisumassiga, on vajalik, et seda võimaldaks masside alumine tõke valemis (3.111), s. o. peab olema

$$\frac{M_0 - \beta\sqrt{M_0^2 - 4m_0^2}}{2\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 .$$

Siit

$$\beta = \frac{\sqrt{M_0^2 - 4m_0^2}}{M_0} \tag{3.112}$$

ja sellele vastav primaarse osakese mass on

$$M = \frac{M_0^2}{2m_0} . \tag{3.113}$$

Niisiis, ainult juhul, kui primaarse osakese mass on $M_0^2/2m_0$, on võimalik, et üks sekundaarne osake tekib liikumatuna (kuigi see ei tarvitse tingimata juhtuda). Teise sekundaarse osakese mass on siis võrdne

$$M - m_0 = \frac{M_0^2 - 2m_0^2}{2m_0} ,$$

tema kiirus on aga samasuunaline primaarse osakese kiirusega:

$$\vec{u} = \frac{2\vec{v}}{1+\beta^2} , \tag{3.114}$$

ehk, absoluutväärtuselt,

$$\frac{u}{c} = \frac{\sqrt{1-4m_0^2/M_0^2}}{1-2m_0^2/M_0^2} \tag{3.115}$$

Peatume veel lähemalt valemi (3.111) juures ja tuletame lisaks mõned täiendavad seosed. Selle valemi võime teisiti tuletada eelmises ülesandes saadud valemist (3.108). Tähistame

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{m_{1,2}}{m_1+m_2} = \frac{m_{1,2}\sqrt{1-\beta^2}}{M_0} , \\ 1-\xi &= \frac{m_{2,1}}{m_1+m_2} = \frac{m_{2,1}\sqrt{1-\beta^2}}{M_0} \end{aligned}\right\} \tag{3.116}$$

Siis saab see valem kuju:

$$\cos\theta = \frac{2m_0^2(1-\beta^2) + M_0^2[2\xi(1-\xi) - (1-\beta^2)]}{2\sqrt{[\xi^2 M_0^2 - m_0^2(1-\beta^2)][(1-\xi)^2 M_0^2 - m_0^2(1-\beta^2)]}} \tag{3.117}$$

Siit järgneb, kuna igal juhul on $\cos^2\theta \leqslant 1$, et

$$\xi(1-\xi) \geqslant \frac{M_0^2-\beta^2(M_0^2-4m_0^2)}{4M_0^2} \qquad (3.118)$$

ehk

$$\frac{M_0-\beta\sqrt{M_0^2-4m_0^2}}{2M_0} \leqslant \xi \leqslant \frac{M_0+\beta\sqrt{M_0^2-4m_0^2}}{2M_0}. \qquad (3.119)$$

See võrratus, arvestades ξ definitsiooni (3.116), ongi samaväärne võrratusega (3.111). Teeme siit mõned edasised järeldused.

Esiteks on selge, et

$$\frac{M_0-\beta\sqrt{M_0^2-4m_0^2}}{2M_0} \geqslant \frac{m_0\sqrt{1-\beta^2}}{M_0},$$

sest sellega on samaväärne võrratus

$$(M_0\sqrt{1-\beta^2}-2m_0)^2 \geqslant 0.$$

Et aga $\frac{m_0\sqrt{1-\beta^2}}{M_0}$ tähendab väikseimat võimalikku ξ väärtust, siis on ξ äärmised väärtused võrratuses (3.119), millele vastab $\cos^2\theta = 1$, alati võimalikud. Vaatame lähemalt, milliseid väärtusi võib üldse omada $\cos\theta$. Siin tuleb eraldi vaadelda kolme juhtu.

1) Kui primaarse osakese kiirus on küllalt väike,

$$\beta < \frac{\sqrt{M_0^2-4m_0^2}}{M_0}, \qquad (3.120)$$

siis

$$\xi = \frac{M_0 \pm \beta\sqrt{M_0^2-4m_0^2}}{2M_0}$$

juures on $\cos\theta = -1$. Seega on sel juhul võimalik θ maksimaalse väärtusena 180°. Minimaalse väärtuse saame, arvutades tuletise:

$$\frac{d\cos\theta}{d\xi}=\frac{M_0^4(1-\beta^2)(1-2\xi)[\xi(1-\xi)M_0^2-(1+\beta^2)m_0^2]}{2[\xi^2M_0^2-(1-\beta^2)m_0^2]^{3/2}[(1-\xi)^2M_0^2-(1-\beta^2)m_0^2]^{3/2}} . \tag{3.121}$$

Et vaadeldaval juhul (3.118) ja (3.120) põhjal

$$\xi(1-\xi)M_0^2-(1+\beta^2)m_0^2 \geqslant \frac{M_0^2(1-\beta^2)}{4}-m_0^2>0,$$

siis on $\cos\theta$ ekstreemum olemas ainult $\xi=\frac{1}{2}$ juures. Arvutades valemist (3.117), leiame:

$$\theta_{min} = 2\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\cdot\frac{\sqrt{M_0^2-4m_0^2}}{M_0}\right) . \tag{3.122}$$

Erijuhul $m_0=0$ (vt. ülesanne 8) kehtib (3.120) alati ja valem (3.122) taandub valemiks (3.94).

2) Kui primaarse osakese kiirus on küllalt suur,

$$\beta > \frac{\sqrt{M_0^2-4m_0^2}}{M_0} , \tag{3.123}$$

siis

$$\xi = \frac{M_0 \pm\beta\sqrt{M_0^2-4m_0^2}}{2M_0}$$

juures on $\cos\theta=1$. Seega $\theta_{min}=0$. Maksimaalne väärtus on aga kahel alajuhul erinev. Kui

$$\beta > \frac{\sqrt{M_0^2-4m_0^2}}{2m_0} , \tag{3.124}$$

siis on $\frac{d\cos\theta}{d\xi}=0$ ainult $\xi=\frac{1}{2}$ juures, ja me saame

$$\theta_{max}=2\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\cdot\frac{\sqrt{M_0^2-4m_0^2}}{M_0}\right) < \frac{\pi}{2} . \tag{3.125}$$

Kui aga

$$\frac{\sqrt{M_0^2-4m_0^2}}{M_0} < \beta < \frac{\sqrt{M_0^2-4m_0^2}}{2m_0} , \tag{3.126}$$

siis on

$$\frac{d\cos\theta}{d\xi} = 0$$

ka

$$\xi = \frac{M_0 \pm \sqrt{M_0^2 - 4(1+\beta^2)m_0^2}}{2M_0} \tag{3.127}$$

juures. Sellele väärtusele vastab

$$\theta_{max} = \arcsin\frac{M_0\sqrt{1-\beta^2}}{2m_0} < \frac{\pi}{2}, \tag{3.128}$$

kuna eelmine ekstremaalväärtus (3.125) osutub sel juhul θ minimaalseks väärtuseks. Mõlemad sulavad ühte, kui

$$\beta = \frac{\sqrt{M_0^2 - 4m_0^2}}{2m_0}$$

3) Kui

$$\beta = \frac{\sqrt{M_0^2 - 4m_0^2}}{M_0}$$

(vt. (3.112)), siis (3.107) põhjal

$$M_0^2 = 2m_0(m_1 + m_2),$$

ning valem (3.108) saab kuju:

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{(m_1-m_0)(m_2-m_0)}{(m_1+m_0)(m_2+m_0)}}, \tag{3.129}$$

kust nähtub, et

$$\arccos\frac{M_0^2 - 4m_0^2}{M_0^2 + 4m_0^2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}; \tag{3.130}$$

maksimaalne väärtus $\frac{\pi}{2}$ vastab juhule, kui üks sekundaarne osake tekib liikumatuna, mis, nagu algul nägime, ongi võimalik ainult

$$\beta = \frac{\sqrt{M_0^2 - 4m_0^2}}{M_0}$$

korral. Sel juhul aga ei ole nurka olemaski, sest ta saab määramatuks.

12. π-meson laguneb müüoniks ja neutriinoks, liikudes massiga m. Müüon lendab välja suunas, mis on risti π-mesoni liikumise suunaga. Leida müüoni mass μ, neutriino impulss p ja nurk α neutriino ja π-mesoni impulsside vahel. π-mesoni seisumass on m_0, müüoni oma μ_0, neutriino oma null.

L a h e n d u s . Massi jäävus annab seose

$$mc = \mu c + p$$

ja impulsi jäävus seosed

$$c\sqrt{m^2 - m_0^2} = p\cos\alpha$$

ja

$$c\sqrt{\mu^2 - \mu_0^2} = p\sin\alpha .$$

Need kolm võrrandit määravadki otsitavad suurused μ, p, α. Lahendades võrrandisüsteemi, leiame:

$$\mu = \frac{m_0^2 + \mu_0^2}{2m},$$

$$p = \frac{(2m^2 - m_0^2 - \mu_0^2)c}{2m},$$

$$\cos\alpha = \frac{2m\sqrt{m^2 - m_0^2}}{2m^2 - m_0^2 - \mu_0^2}.$$

13. Kui suur peab vähemalt olema π-mesoni mass m selleks, et tema põrkel liikumatu nukleoniga saaks tekkida nukleoni-antinukleonipaar (kusjuures meson neeldub, esimene

nukleon aga jääb alles)? Nukleoni (ka antinukleoni) seisumass on M_0, mesoni oma m_0.

L a h e n d u s . Minimaalne vajalik mass on see, mille puhul kaks nukleoni ja antinukleon, mis on protsessi lõppsaaduseks, on kõik liikumatud süsteemis, milles koguimpulss on võrdne nulliga (massikeskme süsteemis). Selles süsteemis on mesoni ja primaarse nukleoni impulsid võrdvastupidised; olgu need p ja $-p$. Siis on massi jäävuse põhjal

$$\sqrt{M_0^2+\frac{p^2}{c^2}}+\sqrt{m_0^2+\frac{p^2}{c^2}}=3M_0, \tag{3.131}$$

kust

$$p=\frac{c\sqrt{(4M_0^2-m_0^2)(16M_0^2-m_0^2)}}{6M_0}. \tag{3.132}$$

Sellele impulsile vastav nukleoni mass on

$$M=\sqrt{M_0^2+\frac{p^2}{c^2}}=\frac{10M_0^2-m_0^2}{6M_0}. \tag{3.133}$$

Siit on nukleoni kiirus

$$v=\frac{p}{M}$$

ja

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{M_0}{M}.$$

Mesoni mass on aga massikeskme süsteemis võrdne

$$\sqrt{m_0^2+\frac{p^2}{c^2}}=\frac{8M_0^2+m_0^2}{6M_0}.$$

Teisendades mesoni massi valemi (3.82) abil primaarse nukleoni paigalolekų süsteemi, leiame:

$$m = \frac{\sqrt{m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}} + \frac{pv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ehk

$$m = \frac{8M_0^2 - m_0^2}{2M_0} . \qquad (3.134)$$

Saadud tulemus kehtib ka siis, kui π-mesoni asemel tekitab nukleoni-antinukleonipaari mõni teine osake, mis seejuure ise neeldub. Valemis (3.134) tähendab sel juhul m_0 selle osakese seisumassi. Näiteks footoni korral $m_0=0$ ja

$$m = 4M_0 . \qquad (3.135)$$

14. Kui suur peab vähemalt olema nukleoni mass M selleks, et ta,põrkudes liikumatu nukleoniga, võiks tekitada nukleoni-antinukleonipaari, jäädes ise alles? Nukleon, mis oli algul liikumata, jääb ka alles. Nukleoni kui ka antinukleoni seisumass on M_0 .

L a h e n d u s . Lahenduskäik on sama mis eelmises ülesandes, kus tuleb asendada $m_0 \to M_0$ ja arvestada pealelangeva nukleoni allesjäämist. Nii saame (3.131) asemele võrrandi

$$2\sqrt{M_0^2 + \frac{p^2}{c^2}} = 4M_0 ,$$

kust

$$p = M_0 c\sqrt{3} ,$$

$$v = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

ja

$$M = 7M_0 \qquad (3.136)$$

15. Footon massiga m põrkub liikumatu elektroniga, mille seisumass on M_0. Pärast põrget liigub footon suunas, mis moodustab algsuunaga nurga γ (Comptoni efekt). Leida elektroni ja footoni massid M ja m' pärast põrget ja elektroni liikumise suund.

L a h e n d u s . Massi ja impulsi jäävust väljendavad seosed:

$$m + M_0 = m' + M,$$

$$m'\cos\gamma + \sqrt{M^2 - M_0^2}\cos\varepsilon = m$$

$$m'\sin\gamma - \sqrt{M^2 - M_0^2}\sin\varepsilon = 0,$$

kus ε on nurk footoni algsuuna ja elektroni liikumise suuna vahel. Lahendades võrrandisüsteemi, leiame:

$$m' = \frac{m}{1 + \frac{2m}{M_0}\sin^2\frac{\gamma}{2}},$$

$$M = M_0\left(1 + \frac{\frac{2m^2}{M_0^2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{2m}{M_0}\sin^2\frac{\gamma}{2}}\right),$$

$$\tan\varepsilon = \frac{M_0 \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{M_0 + m}.$$

§ 15. Dünaamika põhivõrrand.

Eelmises paragrahvis leidsime, et massi ja impulsi jäävuse seadused on kooskõlas relatiivsusprintsiibiga ainult siis, kui mass oleneb kiirusest valemi

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{3.137}$$

järgi. Sealsamas defineerisime neljamõõtmelise kiirusvektori

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \tag{3.138}$$

ja neljamõõtmelise impulssvektori

$$p_\mu = m_0 u_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{d\tau}, \tag{3.139}$$

mille komponentideks on kolmemõõtmelise impulsi komponendid ja mass:

$$p_\mu = (\vec{p}, imc). \tag{3.140}$$

Kui keha on vaba (kõikidest mõjudest isoleeritud), siis on tema mass ja impulss jäävad, seega ka neljamõõtmeline impulss:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0, \tag{3.141}$$

kus τ on selle keha omaaeg. Et

$$\left.\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \\ m &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \end{aligned}\right\} \tag{3.142}$$

siis tähendab $\vec{p}$ ja m jäävus ka m_0 ja $\vec{u}$ jäävust. Keha liigub seega ühtlaselt ja sirgjooneliselt.

Kui aga

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} \neq 0,$$

siis ei ole keha isoleeritud: temasse mõjub jõud. Mitterelativistlikus dünaamikas kehtib põhivõrrand (Newtoni II seadus):

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{u}}{dt}, \tag{3.143}$$

kus $\vec{\mathcal{F}}$ on kehasse mõjuv jõud. Analoogiliselt kehtib relatiivsusteoorias dünaamika põhivõrrand kujul:

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau} = m_0\frac{du_\mu}{d\tau}, \tag{3.144}$$

kus $\mathcal{F}_\mu$ on neljamõõtmeline jõuvektor. Siin eeldame, et keha sisemine olek ei muutu, seega ei muutu ka seisumass. Aga keha mass ega impulss jäävad ei ole, kui on olemas jõud. Arusaadavalt ei tähenda see jäävuse seaduste tühistamist. Jõu korral peab eksisteerima teine keha või kehade süsteem või väli, mille massi ja impulssi tuleb arvestada koos antud keha massi ja impulsiga. Jäävad on ainult isoleeritud süsteemi kogumass ja koguimpulss. Seekord huvitab meid aga üksik keha, mis ei ole isoleeritud ja mille mass ja impulss seetõttu muutuvad.

Võttes valemis (3.144) $\mu = 1,2,3$, leiame:

$$\mathcal{F}_{1,2,3} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Siin arvestasime valemit (3.140) ja omaaja diferentsiaali avaldist

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}.$$

Kui defineerime kolmemõõtmelise jõuvektorina $\vec{\mathcal{F}}$ sama suuruse, mis selle nimetuse all esineb Newtoni mehhaanikas:

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{3.145}$$

siis saame eelmisest seosest

$$\mathcal{F}_\kappa = \frac{\vec{\mathcal{F}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \tag{3.146}$$

kus $\kappa = 1,2,3$. See valem seob kolme- ja neljamõõtmelise jõuvektori komponente omavahel. Tuleb vaid märkida, et kolmemõõtmeline jõuvektor ei võrdu keha massi ja kiirenduse korrutisega, nagu massi konstantsuse eeldusel on klassikalises mehhaanikas. Me võime küll jõuvektori defineerida impulsi tuletisena aja järgi, kuid impulss ei ole relatiivsusteoorias lihtsalt võrdeline kiirusega. Kehtib valem

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

mitte aga valem

$$\vec{\mathcal{F}} = m\frac{d\vec{u}}{dt}.$$

Vaatame veel neljamõõtmelise jõu neljanda komponendi avaldist. Esiteks, valemitest (3.140) ja (3.144) saame

$$\mathcal{F}_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,\frac{dm}{dt}. \tag{3.147}$$

Teiseks, valemist (3.144) järgneb:

$$\mathcal{F}_\mu u_\mu = m_0 u_\mu \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{m_0}{2}\frac{d}{d\tau}(u_\mu u_\mu)$$

ja siit

$$\mathcal{F}_\mu u_\mu = 0, \tag{3.148}$$

sest

$$u_\mu u_\mu = -c^2 = const.$$

Valemist (3.148) aga võime avaldada $\mathcal{F}_4$ veel teisel viisil, sest kui

$$\mathcal{F}_\mu u_\mu = \mathcal{F}_k u_k + \mathcal{F}_4 u_4 = 0,$$

siis

$$\mathcal{F}_4 = -\frac{\mathcal{F}_k u_k}{u_4}$$

ehk

$$\mathcal{F}_4 = \frac{i\vec{\mathcal{F}}\vec{u}}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{3.149}$$

Võrreldes seda avaldist valemiga (3.147), leiame:

$$\vec{\mathcal{F}}\vec{u} = c^2\frac{dm}{dt}. \tag{3.150}$$

Selle tulemuse tähendust vaatleme lähemalt järgmises paragrahvis. Tema tähtsuse tõttu anname siinkohal veel teistsuguse tuletuskäigu, kus neljamõõtmelisi vektoreid vaja ei ole. Lähtume ainult massi ja impulsi valemitest (3.142), millest järgneb:

$$\vec{p}^{\,2} = m^2c^2 - m_0^2c^2.$$

Võttes tuletise aja järgi, saame

$$\vec{p}\,\frac{d\vec{p}}{dt} = c^2m\frac{dm}{dt}.$$

Jagades massiga m ja asendades

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\mathcal{F}}$$

ja

$$\frac{\vec{p}}{m}=\vec{u}\,,$$

saamegi (3.150).

Vaatame nüüd, kuidas teisenevad jõu komponendid Lorentzi teisenduste puhul. Piirdudes siin ainult lihtsama juhuga, kui teine inertsiaalsüsteem liigub x-telje suunas (teisendusmaatriks (2.17)) ja tähistades

$$\mathcal{F}_4 = i\,\mathcal{F}_0\,, \tag{3.151}$$

leiame

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{F}_1' &= \frac{\mathcal{F}_1-\beta\mathcal{F}_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,\\
\mathcal{F}_2' &= \mathcal{F}_2\,,\\
\mathcal{F}_3' &= \mathcal{F}_3\,,\\
\mathcal{F}_0' &= \frac{\mathcal{F}_0-\beta\mathcal{F}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{3.152}$$

Siit võime tuletada teisendusvalemid ka kolmemõõtmelise jõu komponentide jaoks. Esiteks, valemite (3.146) ja (3.149) abil leiame

$$\frac{\mathcal{F}_x'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}=\frac{\mathcal{F}_x-\frac{\beta\vec{\mathcal{F}}\vec{u}}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,,$$

$$\frac{\mathcal{F}_y'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}=\frac{\mathcal{F}_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,,$$

$$\frac{\mathcal{F}_z'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{\mathcal{F}_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

$$\frac{\vec{\mathcal{F}}'\vec{u}'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{\vec{\mathcal{F}}\vec{u} - v\mathcal{F}_x}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Siit, arvestades kiiruse teisendusvalemeid (3.80), leiame

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{F}_x' &= \frac{\mathcal{F}_x - \frac{\beta\vec{\mathcal{F}}\vec{u}}{c}}{1-\frac{u_x\beta}{c}}, \\
\mathcal{F}_y' &= \frac{\mathcal{F}_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{u_x\beta}{c}}, \\
\mathcal{F}_z' &= \frac{\mathcal{F}_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{u_x\beta}{c}}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.153)$$

ja lisaks veel

$$\vec{\mathcal{F}}'\vec{u}' = \frac{\vec{\mathcal{F}}\vec{u} - v\mathcal{F}_x}{1-\frac{u_x\beta}{c}}. \qquad (3.154)$$

Kontrolliks võib vahetult veenduda selle viimase valemi kehtivuses, arvutades $\vec{\mathcal{F}}'\vec{u}'$ valemite (3.80) ja (3.153) alusel.

Ülesanded.

1. Keha neljamõõtmeline kiirendus on vektor

$$a_\mu = \frac{du_\mu}{d\tau}, \qquad (3.155)$$

kus u_μ on kiirus ja τ selle keha omaaeg. Leida a_μ komponentide avaldised kolmemõõtmelise kiiruse $\vec{u}$ ja kiirenduse $\vec{a}$ kaudu.

L a h e n d u s . Et

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)$$

ja

$$a_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right),$$

siis pärast vastavaid arvutusi saame

$$a_k = \frac{\vec{a} + \frac{\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{a})}{c^2}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2} \tag{3.156}$$

ja

$$a_4 = \frac{i\vec{a}\vec{u}/c}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2}. \tag{3.157}$$

2. Näidata, et neljamõõtmeline jõud on ruumisarnane vektor.

L a h e n d u s . See järgneb valemist (3.148). Kui $\mathcal{F}_\mu$ oleks ajasarnane, siis leiduks niisugune inertsiaalsüsteem, milles nullist erinev on ainult $\mathcal{F}_4$ (vt. ülesanne 9 §-s 13). Siis oleks

$$\mathcal{F}_\mu u_\mu = \mathcal{F}_4 u_4 = \frac{ic\mathcal{F}_4}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \neq 0.$$

Teisiti: kui $\mathcal{F}_k = 0$, siis oleks valemite (3.146) ja (3.149) põhjal ka $\mathcal{F}_4 = 0$, seega tervelt $\mathcal{F}_\mu = 0$. Eelduseks on aga nullist erinev jõuvektor.

Veel teisiti. Arvutades $\mathcal{F}_\mu \mathcal{F}_\mu$, leiame:

$$\mathcal{F}_\mu \mathcal{F}_\mu = \frac{\vec{\mathcal{F}}^2 - \frac{(\vec{\mathcal{F}}\vec{u})^2}{c^2}}{1 - u^2/c^2} > 0,$$

seega on $\mathcal{F}_\mu$ ruumisarnane.

3. Tuletada seos kolmemõõtmelise jõu $\vec{\mathcal{F}}$ ja kiirusega $\vec{u}$ liikuva keha kiirenduse $\vec{a}$ vahel, mida see jõud tekitab.

L a h e n d u s . Valemi (3.144) järgi

$$\mathcal{F}_k = m_0 a_k \ ;$$

asetades siia $\mathcal{F}_k$ ja a_k avaldised valemitest (3.146) ja (3.156), leiame:

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{m_0\left(\vec{a} + \frac{\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{a})}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} . \tag{3.158}$$

Siit võime avaldada ka $\vec{a}$. Selleks korrutame valemit (3.158) skalaarselt kiirusega:

$$\vec{\mathcal{F}}\vec{u} = \frac{m_0 \vec{u}\vec{a}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} . \tag{3.159}$$

Siit

$$\vec{\mathcal{F}} - \frac{\vec{\mathcal{F}}\vec{u}\cdot\vec{u}}{c^2} = \frac{m_0 \vec{a}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

ning

$$\vec{a} = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}\left(\vec{\mathcal{F}} - \frac{\vec{\mathcal{F}}\vec{u}\cdot\vec{u}}{c^2}\right)}{m_0} . \tag{3.160}$$

Vaatleme erijuhte. Kui jõud on paralleelne kiirusega, siis on ka kiirendus paralleelne kiirusega ning avaldub järgmiselt:

$$a_{\parallel} = \frac{F_{\parallel}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}{m_0}; \tag{3.161}$$

kui aga jõud on risti kiirusega, siis on ka kiirendus risti kiirusega ning avaldub järgmiselt:

$$a_{\perp} = \frac{F_{\perp}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}{m_0}. \tag{3.162}$$

Nende seoste põhjal nimetatakse mõnikord massi

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

keha t r a n s v e r s a a l s e k s massiks ja suurust

$$\frac{m_0}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}$$

keha l o n g i t u d i n a a l s e k s massiks.

4. Tuletada teisendusvalemid kolmemõõtmelise kiirenduse $\vec{a}$ komponentide jaoks (eeldades, et kahe inertsiaalsüsteemi suhteline kiirus on x-telje sihiline).

L a h e n d u s . Lähtume kiiruse komponentide teisendusvalemitest (3.80) ja Lorentzi teisendusvalemist aja jaoks:

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

millest järgneb:

$$dt' = \frac{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)dt}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Diferentseerides $\vec{u}'$ komponendid t' järgi, saame

$$a_x' = \frac{du_x'}{dt}\frac{dt}{dt'}$$

jne. Lõpptulemus on järgmine:

$$\left.\begin{aligned}
a_x' &= \frac{a_x(1-\beta^2)^{3/2}}{\left(1-\frac{u_x\beta}{c}\right)^3}, \\
a_y' &= \frac{(1-\beta^2)[a_y+(\beta/c)(a_x u_y - a_y u_x)]}{\left(1-\frac{u_x\beta}{c}\right)^3}, \\
a_z' &= \frac{(1-\beta^2)[a_z+(\beta/c)(a_x u_z - a_z u_x)]}{\left(1-\frac{u_x\beta}{c}\right)^3}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.163)$$

5. Sama ülesanne üldise Lorentzi teisenduse puhul.

L a h e n d u s . Nüüd tuleb lähtuda valemist (2.126) või (2.127). Kõiges muus on arvutus samasugune. Tulemus on järgmine:

$$\vec{a}' = \frac{1-\beta^2}{\left(1-\frac{\vec{\beta}\vec{u}}{c}\right)^2}\left\{\vec{a} + \frac{\vec{\beta}\vec{a}\left[\frac{\vec{u}}{c} - \left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\frac{\vec{\beta}}{\beta^2}\right]}{1-\frac{\vec{\beta}\vec{u}}{c}}\right\}. \qquad (3.164)$$

6. Keha kiiruse $\vec{u}$ ja kiirenduse $\vec{a}$ vahel on nurk μ . Leida, kuidas teiseneb see nurk üleminekul teise inertsiaalsüsteemi, mis liigub esimese suhtes kiirusega $\vec{v}=\vec{\beta}c$ suunas, mis on risti vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{u}$.

L a h e n d u s . Valemid (2.126) ja (3.164) saavad tehtud eeldustel lihtsama kuju

$$\vec{u}' = \vec{u}\sqrt{1-\beta^2} - \vec{v},$$

$$\vec{a}' = \vec{a}(1-\beta^2).$$

Järelikult

$$u' = c\sqrt{1-(1-\beta^2)(1-u^2/c^2)},$$

$$a' = a(1-\beta^2).$$

Siit

$$\cos\mu' = \frac{\vec{a}'\vec{u}'}{a'u'} = \frac{\vec{a}\vec{u}\,(1-\beta^2)^{3/2}}{ac\,(1-\beta^2)\sqrt{1-(1-\beta^2)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}}$$

ehk

$$\cos\mu' = \cos\mu \cdot \frac{\frac{u}{c}\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-(1-\beta^2)(1-\frac{u^2}{c^2})}} \cdot \qquad (3.165)$$

7. Keha seisumass on m_0, tema kiiruse ja kiirenduse absoluutväärtused on vastavalt u ja a ja nurk kiiruse ja kiirenduse vahel μ. Kuidas avaldub nende suuruste kaudu kehasse mõjuva jõu absoluutväärtus $\mathcal{F}$?

L a h e n d u s . Arvutades $\mathcal{F}^2$ valemist (3.158), leiame

$$\mathcal{F}^2 = \frac{m_0^2\left[\vec{a}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)+\frac{ua\cos\mu}{c^2}\vec{u}\right]^2}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^3}$$

ja siit

$$\mathcal{F} = \frac{am_0\sqrt{\cos^2\mu+(1-u^2/c^2)^2\sin^2\mu}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \qquad (3.166)$$

8. Keha liigub kiirusega $\vec{u}$. Temasse mõjuv jõud $\vec{\mathcal{F}}$ moodustab kiirusega nurga φ. Leida nurk μ kiiruse ja kiirenduse vahel.

L a h e n d u s . Valemist (3.159) järgneb vahetult

$$\mathcal{F}\cos\varphi = \frac{m_0 a\cos\mu}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \qquad (3.167)$$

Asetades siia $\mathcal{F}$ avaldise valemist (3.166), lahendame saadud seose μ suhtes. Tulemus on järgmine:

$$\tan\mu = \frac{\tan\varphi}{1-\frac{u^2}{c^2}} \cdot \qquad (3.168)$$

See valem järeldub otseselt ka valemitest (3.161) ja (3.162), sest seal võib $\mathcal{F}_{\parallel}$ ja $\mathcal{F}_{\perp}$ all mõelda ühe jõu kaht komponenti, millest üks on kiirusega paralleelne ja teine sellega risti. $a_{\parallel}$ ja $a_{\perp}$ on siis vastavad kiirenduse komponendid.

9. Keha liigub kiirusega $\vec{u}$. Temasse mõjuva jõu ja kiiruse vaheline nurk on φ ning jõu ja kiirenduse vaheline nurk ψ. Avaldada ψ u ja φ kaudu.

L a h e n d u s . Valemist (3.160), korrutades teda skalaarselt jõuga $\vec{\mathcal{F}}$, saame:

$$\cos\psi = \frac{\mathcal{F}}{am_0}\left(1 - u^2/c^2\right)^{1/2}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\cos^2\varphi\right).$$

Siin tuleb $\mathcal{F}/am_0$ avaldada u ja φ kaudu. Selleks kasutame valemit (3.166), elimineerides sealt μ valemi (3.167) abil. Sel teel saame

$$\frac{\mathcal{F}}{am_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{\sin^2\varphi + \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2\cos^2\varphi}}. \tag{3.169}$$

Seega

$$\cos\psi = \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}\cos^2\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2\cos^2\varphi}}. \tag{3.170}$$

Elimineerides valemitest (3.168) ja (3.170) φ, saame veel seose ψ ja μ vahel:

$$\cos\psi = \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}\sin^2\mu}{\sqrt{\cos^2\mu + \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2\sin^2\mu}}. \tag{3.171}$$

Valemitest (3.168), (3.170) ja (3.171) järelduvad veel järgmised seosed:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi}{\cos\mu}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\sin^2\mu\right) \tag{3.172}$$

ja

$$\cos\psi = \frac{\cos\mu}{\cos\varphi} \cdot \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}\cos^2\varphi}{1 - \frac{u^2}{c^2}} . \qquad (3.173)$$

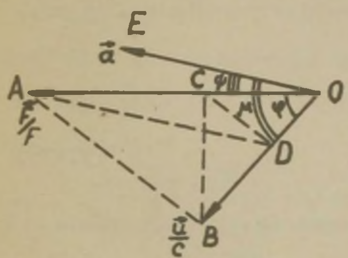
Nurk ψ on alati terav; kui μ ja φ on teravad, siis $\mu > \varphi$ ja $\psi = \mu - \varphi$. Kui aga μ ja φ on nürid, siis $\mu < \varphi$ ja $\psi = \varphi - \mu$. Seega üldiselt

$$\psi = |\mu - \varphi| . \qquad (3.174)$$

Lõpuks esitame graafilise konstruktsiooni kiirenduse suuna leidmiseks, kui on antud kiirus ja jõu suund. Joonisel 47 $\overrightarrow{OA}$ on jõusuunaline ühikvektor, $\overrightarrow{OB}$ on vektor $\frac{\vec{u}}{c}$. Tõmbame B-st ristjoone BC OA-le ja punktist C joone CD paralleelselt AB-ga. Siis on vektor $\overrightarrow{OE}$, mis on paralleelne AD-ga, kiirendusesuunaline. Nurgad:

$$A\hat{O}B = \varphi ,$$
$$A\hat{O}E = \psi ,$$
$$B\hat{O}E = \mu .$$

See konstruktsioon põhjeneb valemil (3.160).



Joonis 47.

10. Tuletada teisendusvalem kolmemõõtmelise jõuvektori $\vec{\mathcal{F}}$ jaoks juhul, kui inertsiaalsüsteemide suhteline kiirus $\vec{v}$ on meelevaldse suunaga.

L a h e n d u s . Valemid (3.153) ja (3.154) on tuletatud eeldusel, et kiirus $\vec{v}$ on x-telje suunaline. Nüüd loobume sellest eeldusest. Esmalt teisendame neljamõõtmelise jõuvektori komponendid Lorentzi maatriksi (2.30) järgi. Arvestades ühtlasi valemeid (3.146) ja

(3.149), saame

$$\frac{\vec{\mathcal{F}}'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}=\frac{\vec{\mathcal{F}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}\vec{\mathcal{F}}}{\beta^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-$$

$$-\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\mathcal{F}}\vec{u}}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\frac{\vec{\mathcal{F}}'\vec{u}'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}=\frac{\vec{\mathcal{F}}(\vec{u}-\vec{\beta}c)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Edasi, arvestades valemit (2.128), leiame:

$$\vec{\mathcal{F}}'=\frac{\vec{\mathcal{F}}\sqrt{1-\beta^2}+\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}\vec{\mathcal{F}}}{\beta^2}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)-\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\mathcal{F}}\vec{u}}{c}}{1-\frac{\vec{u}\vec{\beta}}{c}} \tag{3.175}$$

ja

$$\vec{\mathcal{F}}'\vec{u}'=\frac{\vec{\mathcal{F}}(\vec{u}-c\vec{\beta})}{1-\frac{\vec{u}\vec{\beta}}{c}}. \tag{3.176}$$

Kontrolliks võib, kasutades valemit (2.126), arvutada $\vec{\mathcal{F}}'\vec{u}'$ ja veenduda, et tulemus langeb ühte valemiga (3.176).

11. Leida teisendusvalem kolmemõõtmelise jõuvektori absoluutväärtuse jaoks.

L a h e n d u s . Seda võib leida kahel viisil: otseselt valemist (3.175) ja neljamõõtmelise jõuvektori absoluutväärtuse ruudu invariantsusest. Et

$$\mathcal{F}_\mu\mathcal{F}_\mu=\frac{\vec{\mathcal{F}}^2-\frac{(\vec{\mathcal{F}}\vec{u})^2}{c^2}}{1-\frac{u^2}{c^2}}=inv.,$$

siis

$$\mathcal{F}'^2 - \frac{(\vec{\mathcal{F}}'\vec{u}')^2}{c^2} = \frac{1-\frac{u'^2}{c^2}}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(\mathcal{F}^2 - \frac{(\vec{\mathcal{F}}\vec{u})^2}{c^2}\right).$$

Siit, arvestades valemeid (2.128) ja (3.176), võime avaldada $\mathcal{F}'$. Mõlemal viisil saame ühe ja sama valemi:

$$\mathcal{F}' = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)\left(\mathcal{F}^2 - \frac{(\vec{\mathcal{F}}\vec{u})^2}{c^2}\right) + \left[\vec{\mathcal{F}}\left(\frac{\vec{u}}{c} - \vec{\beta}\right)\right]^2}}{1 - \frac{\vec{u}\vec{\beta}}{c}}. \quad (3.177)$$

12. Keha, millesse mõjub jõud $\vec{\mathcal{F}}$, liigub kiirusega $\vec{u}$. Kuidas avalduvad jõud $\vec{\mathcal{F}}'$ ja tema absoluutväärtus kehaga kaasaliikuvas süsteemis, s. o. selles inertsiaalsüsteemis, milles keha on antud hetkel liikumatu?

L a h e n d u s . Kaasaliikuv süsteem on see, mis liigub sama kiirusega nagu antud hetkel keha ise. Seega tuleb valemites (3.175) ja (3.177) võtta $\vec{\beta} = \frac{\vec{u}}{c}$. Sel viisil leiame:

$$\vec{\mathcal{F}}' = \frac{\vec{\mathcal{F}} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}\vec{\mathcal{F}}}{u^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{(\vec{u}\times\vec{\mathcal{F}})\times\vec{u}}{u^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}\vec{\mathcal{F}}}{u^2}, \quad \vec{u}'=0 \quad (3.178)$$

ja

$$\mathcal{F}' = \sqrt{\frac{\mathcal{F}^2 - \frac{(\vec{\mathcal{F}}\vec{u})^2}{c^2}}{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \quad \vec{u}'=0. \quad (3.179)$$

Viimane valem järgneb muide otseselt ka neljamõõtmelise jõuvektori ruudu invariantsusest.

Täiendavalt saame valemist (3.178) järgmised seosed:

$$\vec{u}\times\vec{\mathcal{F}}' = \frac{\vec{u}\times\vec{\mathcal{F}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\ , \quad \vec{u}'=0\ , \tag{3.180}$$

ja

$$\vec{u}\vec{\mathcal{F}}' = \vec{u}\vec{\mathcal{F}}\ , \quad \vec{u}'=0\ . \tag{3.181}$$

Valem (181) võimaldab valemid (3.178) ja (3.179) ka ümber pöörata:

$$\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{F}}'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} + \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}\vec{\mathcal{F}}'}{u^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right),\quad \vec{u}'=0 \tag{3.182}$$

ja

$$\mathcal{F} = \sqrt{\mathcal{F}'^2 - \frac{(\vec{u}\times\vec{\mathcal{F}}')^2}{c^2}}\ , \quad \vec{u}'=0\ . \tag{3.183}$$

13. Kiirusega $\vec{u}$ liikuvasse kehasse mõjuvad jõud $\vec{\mathcal{F}}$ ja $\vec{f}$, moodustades omavahel nurga θ . Kui suur on nurk θ' jõudude vahel inertsiaalsüsteemis, milles keha on liikumatu (hetkeliselt)?

L a h e n d u s . Otsitav nurk avaldub valemiga

$$\cos\theta' = \frac{\vec{\mathcal{F}}'\vec{f}'}{\mathcal{F}'f'}\ ,$$

kus $\vec{\mathcal{F}}', \vec{f}'$ ja nende absoluutväärtused on määratud valemitega (3.178) ja (3.179). Arvutades leiame:

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{u^2}{c^2}\cos\phi\cos\varphi}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\cos^2\phi}\,\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\cos^2\varphi}}\,, \tag{3.184}$$

kus ϕ on $\vec{u}$ ja $\vec{\mathcal{F}}$ vaheline nurk ja φ on $\vec{u}$ ja $\vec{f}$ vaheline nurk.

14. Keha liigub kiirusega $\vec{u}$ ja kiirendusega $\vec{a}$, kusjuures nende vektorite vaheline nurk on μ. Näidata, et

$$\frac{a\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\mu}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} = inv. \tag{3.185}$$

L a h e n d u s . Arvutades valemitest (3.156) ja (3.157) neljamõõtmelise kiirenduse ruudu, leiame:

$$\sqrt{a_\mu a_\mu} = \frac{a\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\mu}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} = inv.$$

15. Kehasse mõjub jõud $\vec{\mathcal{F}}$, mis moodustab keha kiirusega $\vec{u}$ nurga φ. Näidata, et

$$\frac{\mathcal{F}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\cos^2\varphi}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = inv. \tag{3.186}$$

L a h e n d u s . Valemitest (3.146) ja (3.149) leiame:

$$\sqrt{\mathcal{F}_\mu \mathcal{F}_\mu} = \frac{\mathcal{F}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\cos^2\varphi}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = inv.$$

Invariantide (3.185) ja (3.186) vahel on olemas $\mathcal{F}_\mu = m_0 a_\mu$ tõttu seos, millest järgneb:

$$\frac{\mathcal{F}}{m_o a} = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\mu}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\cos^2\varphi}} ,$$

mis on kooskõlas valemiga (3.167) (kui arvestada ka (3.168)).

16. Näidata, et

$$\frac{\vec{\mathcal{F}}\vec{a}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} = inv. \qquad (3.187)$$

kus $\vec{\mathcal{F}}, \vec{a}, \vec{u}$ on vastavalt kehasse mõjuv jõud, keha kiirendus ja kiirus.

Lahendus.

$$\mathcal{F}_\mu a_\mu = \frac{\vec{\mathcal{F}}\vec{a}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} = inv.$$

Ka see invariant on kahe eelmisega seotud. Ta on võrdne nende korrutisega. Seega, tähistades $\vec{\mathcal{F}}$ ja $\vec{a}$ vahelise nurga ψ-ga, leiame siit seose

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\cos^2\varphi}\,\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\mu}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} , \qquad (3.188)$$

mis on kooskõlas varem tuletatud valemitega (3.168), (3.170) ja (3.171).

§ 16. Massi ja energia ekvivalentsuse seadus.

§-s 14 me leidsime massi ja impulsi jäävuse seaduste relativistlikult invariantse kuju. Me nägime, et selle eelduseks on massi olenevus kiirusest:

$$m(u) = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} . \qquad (3.189)$$

Energia mõistet aga seni relativistlikus mehhaanikas meil vaja ei olnud. Ei olnud kõnet ka energia jäävusest. Kõiki protsesse saab kirjeldada ka ilma energia mõisteteta. Vaatleme näiteks liikumatu osakese lagunemist kaheks osakeseks (vt. § 14 2. ülesanne). Impulsi jäävus nõuab, et sekundaarsete osakeste impulsid oleksid võrdvastupidised. Massi jäävus määrab siis ka osakeste massid, seega nende impulsside absoluutväärtuse. Määramatuks jääb ainult impulsside ühine siht. Kui primaarne osake on isotroopne, siis ruumi isotroopsuse tõttu peavadki kõik sihid esinema võrdsete tõenäosustega. Kui oleksime nõudnud selles protsessis peale massi ja impulsi jäävuse ka energia jäävust, siis ei oleks sellega mitte midagi peale hakata: sellest ei oleks võimalik olnud tuletada mitte mingisuguseid täiendavaid andmeid protsessi kulgemise kohta. Energia mõiste sissetoommseks puudub seega reaalne vajadus ja ka võimalus.

Energia mõiste tarbetus ilmneb veel teisel viisil. Lähtume eelmises paragrahvis tuletatud valemist (3.150)

$$\vec{\mathcal{F}}\vec{u} = c^2 \frac{dm}{dt} .$$

Mitterelativistlikus mehhaanikas võrdub keha kineetiline energia temasse mõjuva jõu tööga, arvates paigalolekust (jõu all on siin mõeldud kõikide jõudude resultanti). Vastav valem on

$$T = \int_0^t \vec{\mathcal{F}}\vec{u}\,dt , \tag{3.190}$$

kus T on kineetiline energia ja alghetkeks on võetud hetk, mil keha kiirus on null. Vaatame nüüd, kas ka relativistlikus mehhaanikas ei lähe vaja energiat kui töö mõõtu. Aga ei, valem (3.150) näitab, et ei lähe vaja. Arvutades töö selle valemi põhjal, leiame:

$$\int_0^t \vec{F}\vec{u}\,dt = c^2(m-m_0) \quad . \tag{3.191}$$

Me näeme, et keha kallal sooritatud töö mõõduks osutub selle keha kineetiline mass $m - m_0$, s.o. see osa massist, mille võrra mass ületab seisumassi. Muud mõõtu pole vaja; energia mõiste on siingi üleliigne.

Kõigele eespool öeldule vaatamata kasutatakse relatiivsusteoorias energia mõistet ikkagi. Selle põhjuseks on mitterelativistlikust füüsikast pärinev traditsioon, mille elujõud on tingitud mitterelativistliku piirjuhu praktilisest tähtsusest. Mitterelativistlikus füüsikas aga eksisteerib peale massi ja impulsi jäävuse seaduste nendest sõltumatu energia jäävuse seadus.

Vaatleme seda vahekorda lähemalt. Sealt saab meile selgeks ka see ainus võimalus, kuidas energiat saab relatiivsusteooriale "päästa".

Üleminek relativistlikust mehhaanikast mitterelativistlikku mehhaanikasse toimub formaalselt sel teel, et valguse kiirus tehakse lõpmatuks, $c \to \infty$. Tõepoolest, Lorentzi teisendus muutub siis Galilei teisenduseks, mass muutub kiirusest sõltumatuks ja impulss saab kiirusega võrdeliseks. Relativistlik töö peab samuti $c \to \infty$ juures muutuma mitterelativistlikuks, s. o.

$$c^2(m-m_0) \to T \, . \tag{3.192}$$

Nii see tõepoolest ongi, sest

$$c^2(m-m_0)=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)=$$

$$=\frac{m_0u^2}{2}+\frac{3m_0u^4}{8c^2}+\dots ,$$

seega

$$c^2(m-m_0)\longrightarrow\frac{m_0u^2}{2}=T .$$

See tähendab, et relativistlik kineetiline mass on mitterelativistlikul piirjuhul ekvivalentne kineetilise energiaga. Seda ekvivalentsust saabki kasutada energia mõiste toomiseks relatiivsusteooriasse: keha kineetiliseks energiaks nimetatakse relatiivsusteoorias suurust

$$(m-m_0)c^2,$$

s. o. c^2-ga korrutatud kineetilist massi. Et c^2 on universaalne konstant, siis on mõlemad suurused - kineetiline mass ja kineetiline energia - teineteisega täpselt ekvivalentsed. Mõlemad väljendavad ühte ja sedasama keha omadust. Nad võivad teineteisest erineda arvväärtuste ja dimensioonide poolest, kuid see erinevus pole oluline. Olenevalt mõõtühikute süsteemist võib ju erinevaid väärtusi ja dimensioone anda mistahes füüsikalisele suurusele.

Seega ei tähenda kineetilise energia mõiste kasutuselevõtt relatiivsusteoorias mitte mingisuguse uue suuruse sissetoomist, vaid sellega antakse ainult juba olemasolevale mõistele - kineetilise massi mõistele - koos uue dimensiooniga uus nimetus. Et aga kineetiline mass on vaid osa kogumassist, siis tuleb ka kogumassile vastavat suurust mc^2 nimetada energiaks.

Niisiis, ainus võimalus energia mõiste sissetoomiseks relativistlikku mehhaanikasse seisneb selles, et energiaks E nimetatakse massiga m ekvivalentne suurus

$$E = mc^2 . \tag{3.193}$$

Arusaadavalt on sel viisil defineeritud energia jääv suurus, sest jääv on mass; aga niisamuti on selge, et energia jäävus ei tähenda mitte mingisugust uut jäävuse seadust. Veel rohkem: energia ei ole massist põhimõtteliselt eristatav, sest nende kahe näol on meil tegemist ühe ja sellesama füüsikalise suuruse kahe erineva esitusega. Põhjus, miks neid esitusi siiski erinevalt nimetatakse ja miks just m nimetatakse massiks ja E energiaks, mitte aga vastupidi, seisneb, nagu eespool märgitud, mitterelativistlikust füüsikast pärinevas traditsioonis.

Vaatame nüüd lähemalt, kuidas muutuvad massi ja energia mõisted üleminekul mitterelativistlikule piirjuhule $c \to \infty$. Vaatleme kehade süsteemi, milles võivad toimuda mitmesugused protsessid, kusjuures süsteemi alg- ja lõppolekus kehade vahel mitte mingisugused jõud ei mõju. Selle eelduse mõte on see, et siis ei ole vaja arvestada potentsiaalset energiat, ehk, teisest seisukohast, jõudusid vahendava välja energiat ega massi. Seega on vaadeldav süsteem puhtmehhaaniline.

Süsteemi relativistlik mass on jääv. Esitame kogumassi seisumassi ja kineetilise massi summana:

$$m = \sum_i m_0^{(i)} + \sum_i (m^{(i)} - m_0^{(i)}) = const., \qquad (3.194)$$

kus summeerimine toimub üle kõikide kehade. Protsesse, milles ei muutu selle summa kumbki liige eraldi, nimetatakse e l a s t s e t e k s ; sellevastu protsesse, milles on jääv ainult kogumass, aga seisumass ega kineetiline mass jäävad ei ole, nimetatakse m i t t e e l a s t s e t e k s . Massi jäävusele vastab energia kui ekvivalentse suuruse jäävus. Vastava valemi saame, korrutades valemi (3.194) c^2-ga. Tähistades koguenergia E, seisuenergia E_0 ja kineetilise energia T, saame

$$E = \sum_i E_0^{(i)} + \sum_i T^{(i)} = const. \qquad (3.195)$$

Rõhutame veel kord, et selle valemi füüsikaline sisu on täpselt identne valemi (3.194) omaga.

Ent üleminekul mitterelativistlikule piirjuhule läheb see identsus kaotsi. Valemis (3.194) kaob teine liige ja massina on arvestatav ainult seisumass:

$$m = \sum_i m_0^{(i)} = const. \qquad (3.196)$$

Valemis (3.195) aga asendub esimene liige kehade siseenergiaga U:

$$E = \sum_i U^{(i)} + \sum_i T^{(i)} = const. \qquad (3.197)$$

Vahetegemine elastsete ja mitteelastsete protsesside vahel toimub nüüd ainult energia kahe liigi jäävuse või mittejäävuse alusel: protsess on elastne, kui on jäävad omaette siseenergia ja kineetiline energia, ning mitteelastne, kui nad jäävad ei ole, vaid ainult nende summa on jääv. Arvestades, et c^2-ga korrutatud kineetiline mass läheb piirjuhul üle kineetiliseks energiaks, vastab see mitterelativistlik elastsuse kriteerium täpselt relativistlikule kriteeriumile. Ühe relativistliku jäävuse seaduse asemele saame mitterelativistlikul piirjuhul kaks eraldi seadust - massi jäävuse seaduse (3.196) ja energia jäävuse seaduse (3.197). Kui aga siirdume tagasi relatiivsusteooriasse, siis sulavad need seadused ühte ja ka massi ja energia mõisted liituvad ühiseks massi-energia mõisteks.

Massi ja energia põhimõttelist identsust nimetatakse harilikult nende ekvivalentsuseks. Kõneldakse m a s s i j a e n e r g i a e k v i v a l e n t s u s e s e a d u s e s t , mida väljendab valem (3.193). Võib vahest paista, nagu ei sisaldaks tegelikult see valem mingit seadust, sest, nagu me algusest peale rõhutasime, on energia mõiste relativistlikus mehhaanikas üleliigne. Valemis (3.193) on energia defineeritud puhtformaalselt, ja mitte midagi ei oleks teoorias muutunud, kui see definitsioon oleks tegemata jäänud. Kuidas võib siis see valem väljendada objektiivset loodusseadust, kui teda nii kergesti olematuks saab teha?

Need kaalutlused on vaidlematult õiged, kuid tuleb ühtlasi silmas pidada, et mitterelativistlikus füüsikas on mass ja energia kaks täiesti erinevat suurust. Järelikult, kui relatiivsusteoorias selgub nende põhimõtteline identsus, siis on meil selle näol tegemist teatava uue tunnetusega, mida väljendabki valem (3.193). Selles mõttes võime siiski käsitleda massi ja energia ekvivalentsust objektiivse füüsikaseadusena.

Seoses massi ja energia ekvivalentsuse seaduse objektiivse sisu küsimusega kerkib esile ka küsimus selle seaduse otsese eksperimentaalse kontrolli kohta. Ka sellele küsimusele tuleb anda kahesugune vastus. Niikaua kui me püsime rangelt relatiivsusteooria pinnal, arvestamata mitterelativistlikku piirjuhtu ja vastavaid traditsioone, on kahe erineva, kuid teineteisega ekvivalentse suuruse - massi ja energia - kasutamine lihtsalt üleliigne. Valemi $E = mc^2$ eksperimentaalsest kontrollist ei saa olla loomulikult juttugi - mitte sellepärast, et ta oleks ebaõige, vaid sellepärast, et tal puudub objektiivne sisu. Kõik eksperimendid, mida tavaliselt peetakse ekvivalentsuse seaduse tõestuseks (massidefekt, annihilatsioon - vt. allpool), ei kinnita tegelikult mitte midagi muud kui massi ja impulsi jäävuse seaduste kehtivust. Energiast siin kõnelda ei saa, sest see on ainult teine nimetus massi jaoks.

Praktiliselt on olukord siiski teistsugune. Asi on selles, et sageli on kineetiline mass võrreldes seisumassiga väga väike, mistõttu tema mõõtmiseks tuleb paratamatult kasutada teistsuguseid meetodeid. Traditsiooniliselt nimetatakse selliseid mõõtmisi energia mõõtmiseks. Niisugust eksperimenti võib siis tõesti pidada massi ja energia ekvivalentsuse kontrolliks. Täpsemalt öeldes, eksperiment tõestab, et relativistlikku massi võib mõõta meetoditega, mida mitterelativistlikus füüsikas kasutatakse energia mõõtmiseks.

Vaatleme lähemalt üht tüüpilist näidet. Aatomituumadel on olemas massidefekt. Iga tuuma seisumass on väiksem kui nende prootonite ja neutronite, millest ta koosneb, seisumasside summa vabas olekus. Vahe ongi massidefekt:

$$\Delta M = \sum_i M_i - M, \qquad (3.198)$$

kus M on tuuma seisumass ja M_i - vabade nukleonide seisumassid. Massidefekt on suhteliselt üsna suur, umbes 0,008. Seetõttu on ta mõõdetav tavaliste massi mõõtmise meetoditega, näiteks kaalumise teel.

Tuumareaktsioonides toimub tuumade muundumine, mistõttu reaktsioonist osavõtvate tuumade summaarne seisumass muutub, olgugi et kõik nukleonid jäävad alles. Põhjuseks on massidefekti erinevus eri tuumadel. Eeldame konkreetselt, et tuumade summaarne seisumass väheneb. Siis peab massi jäävuse põhjal kuskil mujal mass suurenema. Kui näiteks tuumareaktsioon toimub tuumareaktoris, siis peab suurenema reaktori mass. Et aga reaktori mass on tavaliselt palju suurem kui reageerivate tuumade mass, siis on see suurenemine suhteliselt väga väike. Kaalumisega seda kindlaks teha ei saa. Sellevastu on mitterelativistliku siseenergia muutus energia mõõtmise meetoditega kergesti avastatav: reaktor soojeneb. Juurdetuleva massi mõõtmine toimub seega hoopis erineval viisil. Mõlema mõõtmisviisi vahel tehakse kindlaks kvantitatiivne kooskõla vastavalt valemile $E = mc^2$. Seega on meil õigus pidada niisuguseid mõõtmisi selle valemi eksperimentaalseks kontrolliks.

Teine nähtus, mida sageli käsitletakse valemi $E=mc^2$ eksperimentaalse tõestusena, on elementaarosakeste annihilatsioon. Tuntuim seda liiki protsess on elektroni ja positroni annihileerumine, kusjuures tekib kaks γ-kvanti:

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma \,. \tag{3.199}$$

Vastavad mõõtmised näitavad, et iga niisuguse elementaarprotsessi puhul kehtivad massi ja impulsi jäävuse seadused. Ühtlasi on sellele protsessile iseloomulik täielik seisumassi kadumine, sest elektronil ja positronil on olemas nullist erinev seisumass, kuna γ-kvantide seisumass võrdub nulliga. Siit ka nimetus "annihilatsioon". Et mitterelativistlikus füüsikas esineb massina ainult seisumass, siis mitterelativistlikult seisukohalt tähendab annihilatsioon massi muundumist energiaks. Järelikult, kasutades vastavalt traditsioonilisi massiühikuid elektroni ja positroni jaoks ja traditsioonilisi energiaühikuid γ-kvantide jaoks, võime jälle kindlaks teha mõlema mõõtmise kvantitatiivse kooskõla. Õigem oleks siiski antud juhul kõnelda mitte valemi $E = mc^2$ eksperimentaalsest kontrollist, vaid kahe erineva massiühiku - kilogrammi ja džauli suhte arvväärtuse mõõtmisest; teiste sõnadega, valguse kiiruse mõõtmisest.

Annihilatsiooniprotsesse võib iseloomustada kui maksimaalselt mitteelastseid protsesse, sest seisumass muutub seal suhteliselt väga palju ja võib muutuda koguni nulliks (nagu elektroni ja positroni annihileerumisel).

Nagu ka üldse mitteelastsete protsesside puhul, eriti just annihilatsiooniprotsesside juures, torkab seepärast silma seisumassi muundumine kineetiliseks massiks. Kõnelda siin massi muundumisest energiaks võib ainult mitterelativistlikult seisukohalt. Sageli siiski kasutatakse meie senisest terminoloogiast erinevat väljendusviisi, mille kohaselt terminit "mass" rakendatakse ainult seisumassile, kuna terminit "energia" kasutatakse üldises massi tähenduses. Sel juhul tuleb massi jäävuse seaduse asemele energia jäävuse seadus, kuna massi jäävust enam ei ole. Aga ka selle terminoloogia seisukohalt ei ole väljend "massi muundumine energiaks" korrektne, sest selle järgi tuleb välja, nagu ei oleks mass energia (ta ju alles muundub energiaks). Aga see ei ole nii isegi kõnesoleva terminoloogia järgi, kus seisumass esineb teatava energiavormina. Mingeid eeliseid sel terminoloogial ei ole, mistõttu me seda omaks ei võta, pidades endiselt massi ja energiat identseteks mõisteteks.

Ü l e s a n d e d .

1. Kehade süsteemi massikeskme inertsiaalsüsteemiks nimetatakse inertsiaalsüsteemi, milles kõikide kehade summaarne impulss on võrdne nulliga. Näidata, et kehade summaarne mass massikeskme inertsiaalsüsteemis teiseneb ülemineku mistahes teise inertsiaalsüsteemi nagu seisumass.

L a h e n d u s . Väide järgneb otseselt kehade süsteemi massi teisendusvalemist (3.65). Kui võtame seal $P_x = 0$, siis

$$M' = \frac{M}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

kus M on mass massikeskme süsteemis ja M' mingis teises süsteemis, milles massikese liigub kiirusega v.

2. Eelmise ülesande põhjal on võimalik kehade süsteemi seisumassi defineerida kui nende massi massikeskme inertsiaalsüsteemis. Näidata, et mingis teises inertsiaalsüsteemis, milles massikese liigub kiirusega v, avaldub kehade süsteemi summaarne impulss valemina

$$\vec{P} = \frac{M\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

kus M on selle süsteemi seisumass.

L a h e n d u s . Väide järgneb impulsi teisendusvalemist (3.66). Kui seal teha $P_x = 0$, siis M on seisumass. Võttes $v \to -v$, nii et v on massikeskme kiirus teises süsteemis, saamegi impulsi jaoks nõutud valemi.

3. Liikumatu keha seisumassiga m_0 kiirgab igas suunas isotroopselt energiat ε ajaühikus. Leida jõud $\vec{\mathcal{F}}$, mis mõjub temasse inertsiaalsüsteemis, milles ta liigub kiirusega $\vec{u}$.

L a h e n d u s . Kehasse mõjuv jõud avaldub valemi (3.145) järgi nii:

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right).$$

Antud juhul $\vec{u}$ on konstantne, m_0 aga muutub, vähenedes ε/c^2 võrra omaaja ühikus ehk

$$\frac{\varepsilon}{c^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

võrra vaadeldava inertsiaalsüsteemi aja ühikus. Seega

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{dm_0}{dt}$$

ehk

$$\vec{\mathcal{F}} = -\frac{\varepsilon\vec{u}}{c^2} . \tag{3.200}$$

Käesolevas ülesandes on meil tegemist juhuga, kus keha liigub ühtlaselt, kuigi temasse mõjub jõud. Põhjuseks on seisumassi muutumine, mistõttu impulss konstantne ei ole, ja impulsi tuletis aja järgi võrdubki jõuga. Eelmises paragrahvis tuletatud valem (3.148), mille eelduseks oli seisumassi jäävus, siin ei kehti. Veendume selles otseselt. Neljamõõtmeline jõud on

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{d}{d\tau}(m_0 u_\mu) = -\frac{\varepsilon u_\mu}{c^2} . \tag{3.201}$$

Siit

$$\mathcal{F}_\mu u_\mu = \varepsilon . \tag{3.202}$$

Sellevastu valemid (3.146) ja (3.147) kehtivad ka käesoleval juhul, sest nad ei eelda seisumassi jäävust. Nii on kooskõlas nende valemitega

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}_k &= -\frac{\varepsilon\vec{u}/c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} , \\ \mathcal{F}_4 &= -\frac{i\varepsilon/c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} . \end{aligned}\right\} \tag{3.203}$$

Valemid (3.149) ega (3.150) aga jälle ei kehti. Tõepoolest, valemist (3.200) järgneb:

$$\vec{\mathcal{F}}\vec{u} = -\frac{\varepsilon u^2}{c^2}\,; \tag{3.204}$$

teisest küljest,

$$\frac{dm}{dt} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \frac{dm_0}{d\tau}$$

ehk

$$c^2\frac{dm}{dt} = -\varepsilon\,; \tag{3.205}$$

seega (3.150) asemel kehtib seos

$$\vec{\mathcal{F}}\vec{u} = u^2\frac{dm}{dt}\,. \tag{3.206}$$

4. Näidata, et eelmises ülesandes leitud jõud võrdub keha poolt kiiratava massi reaktsiooniga.

L a h e n d u s . Et keha oma paigaloleku süsteemis kiirgab isotroopselt, siis on ruuminurgas $d\Omega$ omaaja ühikus kiiratav mass võrdne

$$\frac{\varepsilon d\Omega}{4\pi c^2}.$$

Olgu selle massi impulss võrdne (samas süsteemis) $p\,d\Omega$. Võttes kiiruse $\vec{u}$ suuna x-teljeks ning ühtlasi polaarteljeks ja tähistades polaarnurgad φ ja ϑ, leiame, et ruuminurga ühiku kohta ja omaaja ühiku kohta on kiirguse neljamõõtmelise impulsi p_μ komponendid järgmised:

$$p_1 = p\cos\vartheta,$$
$$p_2 = p\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$p_3 = p\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$p_4 = \frac{i\varepsilon}{4\pi c}\,.$$

Teisendades neid kiirusega $-\vec{u}$ liikuvasse süsteemi (s. o. süsteemi, milles keha ise liigub kiirusega $\vec{u}$), leiame:

$$p_1' = \frac{p\cos\vartheta + \frac{\varepsilon u}{4\pi c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

$$p_2' = p\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$p_3' = p\sin\vartheta\sin\varphi,$$

$$p_4' = \frac{i\left(\frac{\varepsilon}{4\pi c} + \frac{up\cos\vartheta}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Keha saab igas ruuminurga elemendis $d\Omega$ kiiratud massi poolt vastassuunalise impulsi. Summeerides need elementaarimpulsid üle kõigi suundade, saamegi kiirguse reaktsiooni. Et integraal φ järgi on võrdne nulliga, samuti

$$\int_0^\pi \cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta = 0,$$

siis on reaktsioon võrdne omaaja ühiku kohta

$$-\int \frac{\varepsilon\vec{u}\, d\Omega}{4\pi c^2\sqrt{1-u^2/c^2}} = -\frac{\varepsilon\vec{u}}{c^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

mis on tõepoolest võrdne eelmises ülesandes leitud jõuga (valem (3.200)).

5. Liikumatu aatom, mille seisumass on m_0, kiirgab footoni energiaga ε. Kui suur on aatomi seisumass pärast kiirgamist?

L a h e n d u s . Pärast kiirgamist ei ole aatom enam liikumatu, sest see oleks vastuolus impulsi jäävusega. Olgu aatomi kiirus pärast kiirgamist u. Siis on impulsi ja energia (massi) jäävuse põhjal

$$\frac{m_0' u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\varepsilon}{c},$$

$$m_0 c^2 = \frac{m_0' c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + \varepsilon .$$

Siit leiame:

$$m_0' = m_0 \sqrt{1-\frac{2\varepsilon}{m_0 c^2}} \qquad (3.207)$$

ja

$$\frac{u}{c} = \frac{\frac{\varepsilon}{m_0 c^2}}{1-\frac{\varepsilon}{m_0 c^2}} . \qquad (3.208)$$

6. Aatomi ergastatud seisundi ja põhiseisundi energiatasemete vahe on ΔE. Missuguse kiirusega u peab ergastatud aatom liikuma selleks, et ta võiks, siirdudes põhiseisundisse, kiirata oma liikumise suunas footoni, mille energia on ΔE? Missuguse kiirusega u' liigub ta pärast kiirgamist? Aatomi seisumass põhiseisundis on m_0.

L a h e n d u s . Impulsi ja energia (massi) jäävuse põhjal on

$$\frac{m_0 c^2 + \Delta E}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \Delta E + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}},$$

$$\frac{(m_0c^2+\Delta E)u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = c\Delta E + \frac{m_0c^2u'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} \, .$$

Siit leiame:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{c} &= \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1+\frac{3\alpha}{4}}{1+\frac{3\alpha}{2}+\frac{5\alpha^2}{8}} \, , \\ \frac{u'}{c} &= -\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1+\frac{\alpha}{4}}{1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{8}} \, , \end{aligned}\right\} \qquad (3.209)$$

kus

$$\alpha = \frac{\Delta E}{m_0c^2} \, . \qquad (3.210)$$

Kuna tegelikult on alati $\alpha \ll 1$, siis suure täpsusega kehtivad lihtsamad valemid:

$$\frac{u}{c} = \frac{\alpha}{2} \, ,$$

$$\frac{u'}{c} = -\frac{\alpha}{2} \, .$$

7. Vesiniku aatomi seisumass põhiseisundis on $M_0 + m_0 - \frac{I}{c^2}$, kus M_0 ja m_0 on prootoni ja elektroni seisumassid ja I on seoseenergia. Kui suur peab olema vähemalt footoni energia ε selleks, et ta võiks, neeldudes liikumatus vesiniku aatomis, esile kutsuda selle ioniseerimise? Millise kiirusega u liiguvad prooton ja elektron pärast aatomi ioniseerimist?

L a h e n d u s . Impulsi ja energia (massi) jäävuse põhjal on

$$M_0 + m_0 - \frac{I}{c^2} + \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{M_0 + m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \, ,$$

$$\frac{\varepsilon}{c}=\frac{(M_0+m_0)u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Siit leiame:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{I(1-\frac{\alpha}{2})}{1-\alpha}\approx I\left(1+\frac{\alpha}{2}\right),\\ \frac{u}{c} &= \frac{\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\alpha+\frac{\alpha^2}{2}}\approx\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{3.211}$$

kus

$$\alpha=\frac{I}{(M_0+m_0)c^2}. \tag{3.212}$$

§ 17. Liikumine välises jõuväljas.

Käesolevas paragrahvis vaatleme relativistliku mehhaanika mõningaid lihtsamaid ülesandeid, kus on nimelt tegemist keha liikumisega etteantud välises jõuväljas, eeldusel, et seisumass on konstantne. Et me siin piirdume ainult translatoorse liikumisega, ei ole keha sisemine seisund oluline, mistõttu edaspidi nimetame sageli keha osakeseks.

Kõige esmalt vaatleme niinimetatud hüperboolset liikumist. See on sirgjooneline liikumine konstantse liikumisesihilise jõu mõjul. Olgu osakese seisumass m_0, kiirus u ja jõud $\mathcal{F}$. Siis on liikumise diferentsiaalvõrrand teatavasti järgmise kujuga:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)=\mathcal{F}. \tag{3.213}$$

Selle võrrandi integreerimisel on otstarbekas võtta tarvitusele parameetrina suurus φ , mis on defineeritud valemiga

$$th\varphi = \frac{u}{c} \, . \tag{3.214}$$

Siis avaldub osakese omaaja diferentsiaal järgmiselt:

$$d\tau = \frac{dt}{ch\varphi} \tag{3.215}$$

ja võrrand (3.213) saab kuju

$$m_0 c \, \frac{d\varphi}{d\tau} = \mathcal{F} \, . \tag{3.216}$$

Lahendades selle võrrandi, leiame:

$$\tau = \frac{m_0 c}{\mathcal{F}} \varphi \, , \tag{3.217}$$

kus omaaja alghetkeks on võetud see hetk, mil osakese kiirus oli null. Seega on valemiga (3.214) defineeritud parameeter φ omaajaga võrdeline suurus, mistõttu teda võib vaadelda omaaja mõõduna. Nüüd saame valemitest (3.215) ja (3.216) võrrandi aja leidmiseks:

$$dt = \frac{m_0 c}{\mathcal{F}} ch\varphi \, d\varphi \tag{3.218}$$

kust

$$t = \frac{m_0 c}{\mathcal{F}} sh\varphi \, . \tag{3.219}$$

Aja alghetkena on siin võetud samuti hetk, mil osakese kiirus oli null. Lõpuks, valemist (3.214) leiame ärakäidud tee $x - x_0$. Et

$$u = \frac{dx}{dt} = c \cdot th\varphi \, ,$$

siis (3.218) põhjal

$$dx = \frac{m_0 c^2}{\mathcal{F}} \, sh\varphi \, d\varphi \tag{3.220}$$

ja siit

$$x = \frac{m_0 c^2}{\mathcal{F}} \, ch\varphi , \tag{3.221}$$

kusjuures algkoordinaadiks on võetud

$$x_0 = \frac{m_0 c^2}{\mathcal{F}} . \tag{3.222}$$

Elimineerides valemitest (3.219) ja (3.221) φ , leiame ka integraalse liikumisvõrrandi:

$$x^2 - c^2 t^2 = \left(\frac{m_0 c^2}{\mathcal{F}}\right)^2 \tag{3.223}$$

ehk

$$x = \frac{m_0 c^2}{\mathcal{F}} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{F} t}{m_0 c}\right)^2} . \tag{3.224}$$

Et see on hüperbooli võrrand, nimetataksegi seda liikumist hüperboolseks. Mitterelativistlikul piirjuhul $c \to \infty$ saame siit p a r a b o o l s e liikumise:

$$x = \frac{\mathcal{F} t^2}{2 m_0} . \tag{3.225}$$

Õieti on üleminek mitterelativistlikule piirjuhule õigustatud ainult siis, kui $\frac{\mathcal{F} t}{m_0 c} \ll 1$. Formaalselt kehtib see võrratus alati, niipea kui teeme $c \to \infty$, tegelikult aga on tema kehtivuseks vaja, et $t \ll \frac{m_0 c}{\mathcal{F}}$.

Kui aga see võrratus ei kehti, s. o. kui liikumine on kestnud juba küllalt kaua, siis ei saa enam rakendada mitterelativistlikku lähendust (3.225): hüperbool läheb siis juba paraboolist oluliselt lahku.

Leiame veel kiirenduse a. Et

$$a = \frac{du}{dt},$$

siis annavad valemid (3.214) ja (3.218)

$$a = \frac{\mathcal{F}}{m_0 ch^3\varphi} \tag{3.226}$$

ehk

$$a = \frac{\mathcal{F}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}{m_0} . \tag{3.227}$$

See avaldis on kooskõlas üldise valemiga (3.160). Osakesega kaasaliikuvas süsteemis on aga kiirendus a' konstantne:

$$a' = \frac{\mathcal{F}}{m_0} . \tag{3.228}$$

See järgneb niihästi üldisest teisendusvalemist (3.163) kui ka otseselt sellest, et osakese hetkelise paigaloleku süsteemis on valemi (3.178) või (3.179) järgi $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ ja liikumisvõrrand

$$\frac{d}{dt'}\left(\frac{m_0 u'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}\right) = \mathcal{F}',$$

arvestades, et $u' = 0$, annab tõesti

$$a' = \frac{du'}{dt'} = \frac{\mathcal{F}'}{m_0} = \frac{\mathcal{F}}{m_0} .$$

Teise tähtsama liikumise ülesandena vaatleme laetud osakese liikumist välises elektromagnetväljas. Kui osake on küllalt väike, võime lugeda teda punktikujuliseks. Et jõud avaldub sel juhul valemina

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{e}{\varepsilon_0}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{u}\times\vec{H})\right) \tag{3.229}$$

(vt. (1.8)), kus e on osakese laeng ja $\vec{u}$ tema kiirus, siis on liikumise diferentsiaalvõrrand järgmise kujuga:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)=\frac{e}{\varepsilon_0}\left(\vec{E}+\frac{1}{c}(\vec{u}\times\vec{H})\right). \tag{3.230}$$

Sellest võrrandist järgneb otsekohe (3.150) põhjal veel võrrand

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)=\frac{e\vec{E}\vec{u}}{\varepsilon_0 m_0 c^2}. \tag{3.231}$$

Üldjuhul on võrrandite (3.230) ja (3.231) lahendamine küllaltki raske. Seetõttu piirdume ainult lihtsamate erijuhtudega.

1) Homogeenne staatiline elektriväli. Sel juhul on osakesesse mõjuv jõud konstantne:

$$\vec{\mathcal{F}}=\frac{e\vec{E}}{\varepsilon_0}.$$

Eespool me juba vaatlesime liikumist, mis toimub konstantse jõu mõjul, kuid eeldasime, et liikumine on sirgjooneline. Nüüd lahendame analoogilise ülesande ilma selle eelduseta.

Niisiis, võttes $\vec{E}$ suuna x-teljeks ja valides y-telje nii, et algkiiruse z-komponent oleks null, saame liikumisvõrrandid kujul:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)=\frac{eE}{\varepsilon_0},\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)=0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)=\frac{eEu_x}{\varepsilon_0 m_0c^2},
\end{aligned}\right\} \tag{3.232}$$

kuna kiiruse z-komponent jääb ilmselt kogu liikumise vältel võrdseks nulliga. Liikumine toimub xy-tasandis. Integreerides võrrandid (3.232), saame

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} &= \frac{eEt}{m_o\varepsilon_o} + \frac{u_{ox}}{\sqrt{1-\frac{u_o^2}{c^2}}}, \\ \frac{u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} &= \frac{u_{oy}}{\sqrt{1-\frac{u_o^2}{c^2}}}, \\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} &= \frac{eEx}{\varepsilon_o m_o c^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_o^2}{c^2}}}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.233)$$

kus indeks o tähistab kiiruse ja tema komponentide algväärtusi, algkoordinaadid on aga võetud võrdseks nulliga.

Valemitest (3.233) võiksime elimineerida u, mis annaks otsekohe x aja funktsioonina. On kasulik siiski talitada teisiti. Arvestades, et omaaja diferentsiaal avaldub valemiga

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}},$$

kirjutame valemid (3.233) ümber kujul:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{eEt}{m_o\varepsilon_o} + \frac{u_{ox}}{\sqrt{1-\frac{u_o^2}{c^2}}}, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{u_{oy}}{\sqrt{1-\frac{u_o^2}{c^2}}}, \\ \frac{dt}{d\tau} &= \frac{eEx}{\varepsilon_o m_o c^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_o^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.234)$$

Edasi toome sisse omaaja asemele dimensioonitu parameetri φ:

$$d\varphi = \frac{eE}{\varepsilon_0 m_0 c} d\tau , \tag{3.235}$$

algväärtusega φ_0:

$$\tau = \frac{\varepsilon_0 m_0 c}{eE}(\varphi - \varphi_0). \tag{3.236}$$

Siis saavad võrrandid (3.234) kuju:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= ct + \frac{\varepsilon_0 m_0 c u_{0x}}{eE\sqrt{1-\frac{u_0^2}{c^2}}} , \\ \frac{dy}{d\varphi} &= \frac{\varepsilon_0 m_0 c u_{0y}}{eE\sqrt{1-\frac{u_0^2}{c^2}}} , \\ \frac{dt}{d\varphi} &= \frac{x}{c} + \frac{\varepsilon_0 m_0 c}{eE\sqrt{1-\frac{u_0^2}{c^2}}} . \end{aligned}\right\} \tag{3.237}$$

Saadud võrrandisüsteemi lahendamiseks asendame esmalt 1. ja 3. võrrandi ekvivalentse võrrandipaariga

$$\frac{d}{d\varphi}(x \pm ct) = \pm(x \pm ct) \pm \frac{\varepsilon_0 m_0 c^2}{eE\sqrt{1-\frac{u_0^2}{c^2}}}\left(1 \pm \frac{u_{0x}}{c}\right),$$

millest järgneb

$$x + ct = \frac{\varepsilon_0 m_0 c^2}{eE\sqrt{1-\frac{u_0^2}{c^2}}}\left(1 + \frac{u_{0x}}{c}\right)\left(e^{\varphi-\varphi_0} - 1\right),$$

$$x - ct = \frac{\varepsilon_0 m_0 c^2}{eE\sqrt{1-\frac{u_0^2}{c^2}}}\left(1 - \frac{u_{0x}}{c}\right)\left(e^{-(\varphi-\varphi_0)} - 1\right).$$

Et φ algväärtuse φ_0 võime veel määrata vabalt, teeme saadud valemite lihtsustamiseks

$$th\varphi_0 = \frac{u_{ox}}{c} \,. \tag{3.238}$$

Siis saame:

$$x + ct = \frac{\varepsilon_0 m_0 c^2 \sqrt{1 - u_{ox}^2/c^2}}{eE\sqrt{1 - u_0^2/c^2}} \left(e^{\varphi} - e^{\varphi_0}\right) ,$$

$$x - ct = \frac{\varepsilon_0 m_0 c^2 \sqrt{1 - u_{ox}^2/c^2}}{eE\sqrt{1 - u_0^2/c^2}} \left(e^{-\varphi} - e^{-\varphi_0}\right) .$$

Siit

$$x = \frac{\varepsilon_0 m_0 c^2 \sqrt{1 - u_{ox}^2/c^2}}{eE\sqrt{1 - u_0^2/c^2}} \left(ch\varphi - ch\varphi_0\right) , \tag{3.239}$$

$$t = \frac{\varepsilon_0 m_0 c \sqrt{1 - u_{ox}^2/c^2}}{eE\sqrt{1 - u_0^2/c^2}} \left(sh\varphi - sh\varphi_0\right) , \tag{3.240}$$

kuna 2. võrrand (3.237) annab:

$$y = \frac{\varepsilon_0 m_0 c u_{oy}}{eE\sqrt{1 - u_0^2/c^2}} \left(\varphi - \varphi_0\right) . \tag{3.241}$$

Seega on ülesanne lahendatud. Valemid (3.236) ja (2.238) - (3.241) määravad osakese koordinaadid ja vastavad aja ja omaaja väärtused parameetri φ kaudu. Elimineerides φ valemitest (3.239) ja (3.241), saame ka osakese trajektoori võrrandi. Ilmselt on trajektooriks aheljoon. Erijuhul $u_{0x} = 0$ on $\varphi_0 = 0$ ja kõik valemid saavad lihtsama kuju.

2) Homogeenne staatiline magnetväli. Kui $\vec{E} = 0$, siis saavad võrrandid (3.230) ja (3.231) kuju:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{e}{\varepsilon_0 c}(\vec{u}\times\vec{H}), \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (3.242)$$

Teisest võrrandist järgneb, et kiirus jääb absoluutväärtuselt muutumatuks:

$$u = u_0 = const.$$

ja mass samuti:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}} = const.$$

Seetõttu saab esimene võrrand (3.242) kuju:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{e}{\varepsilon_0 mc}(\vec{u}\times\vec{H}) . \qquad (3.243)$$

Võttes magnetvälja suuna y-teljeks, saame siit komponentide jaoks:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du_x}{dt} = -\frac{eHu_z}{\varepsilon_0 mc}, \\ &\frac{du_z}{dt} = \frac{eHu_x}{\varepsilon_0 mc} \end{aligned}\right\} \qquad (3.244)$$

ja

$$\frac{du_y}{dt} = 0. \tag{3.245}$$

Viimasest võrrandist järgneb:

$$y = u_{oy} t , \tag{3.246}$$

kusjuures algkoordinaat y_o on võetud võrdseks nulliga.

Lahendades võrrandisüsteemi (3.244), leiame:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u_{ox} \cos\omega t - u_{oz} \sin\omega t , \\ u_z &= u_{oz} \cos\omega t + u_{ox} \sin\omega t , \end{aligned}\right\} \tag{3.247}$$

kus

$$\omega = \frac{eH}{\varepsilon_o mc} . \tag{3.248}$$

Integreerides teist korda, saame:

$$\left.\begin{aligned} x - x_C &= \frac{u_{ox}}{\omega} \sin\omega t + \frac{u_{oz}}{\omega} \cos\omega t , \\ z - z_C &= \frac{u_{oz}}{\omega} \sin\omega t - \frac{u_{ox}}{\omega} \cos\omega t , \end{aligned}\right\} \tag{3.249}$$

kus integreerimise konstandid avalduvad kui

$$x_C = -\frac{u_{oz}}{\omega} ,$$

$$z_C = \frac{u_{ox}}{\omega}$$

(eeldusel, et koordinaatide algväärtused x_o , z_o on võrdsed nulliga).

Valemitest (3.246) ja (3.249) on näha, et osakese trajektooriks on kruvijoon, mille teljeks on y-teljega paralleelne punkti (x_C , z_C) läbiv sirgjoon, raadiuseks on

$$R = \frac{\varepsilon_0 mc\sqrt{u_{0x}^2 + u_{0z}^2}}{eH} \tag{3.250}$$

ja sammuks

$$h = \frac{2\pi\varepsilon_0 mc\, u_{0y}}{eH}. \tag{3.251}$$

Osake liigub seda joont mööda konstantse nurkkiirusega ω. Kui $u_{0y} = 0$, saab kruvijoone samm nulliks ja trajektoor muutub ringjooneks, mille raadius on

$$R_0 = \frac{\varepsilon_0 mc u_0}{eH} = \frac{\varepsilon_0 cp}{eH}, \tag{3.252}$$

kus p on osakese impulsi absoluutväärtus.

Osakese omaaeg on kiiruse konstantsuse tõttu võrdeline ajaga:

$$\tau = t\sqrt{1 - u_0^2/c^2}. \tag{3.253}$$

Mitterelativistlikul piirjuhul on trajektoor samuti kruvijoone (vst. ringjoone) kujuline, kuid osakese nurkkiirus on kiirusest sõltumatu:

$$\omega_0 = \frac{eH}{\varepsilon_0 m_0 c}. \tag{3.254}$$

See järgneb võrrandist (3.243), mille mitterelativistliku kuju saame, asendades massi seisumassiga.

3) Kolmanda erijuhuna vaatleme liikumist väljas, mis koosneb teineteisega ristiolevast staatilisest homogeensest elektriväljast ja staatilisest homogeensest magnetväljast. Võtame elektrivälja suuna x-teljeks ja magnetvälja suuna y-teljeks. Liikumise diferentsiaalvõrrandid (3.230) ja (3.231) saavad siis kuju:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{eE}{\varepsilon_0} - \frac{eHu_z}{\varepsilon_0 c}\,, \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = 0\,, \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{eHu_x}{\varepsilon_0 c}\,, \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{eEu_x}{\varepsilon_0}\,.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (3.255)
$$

Integreerides need võrrandid, saame

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{eEt}{\varepsilon_0 m_0} - \frac{eHz}{\varepsilon_0 m_0 c} + \frac{u_{0x}}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}\,, \\
&\frac{u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{u_{0y}}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}\,, \\
&\frac{u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{eHx}{\varepsilon_0 m_0 c} + \frac{u_{0z}}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}\,, \\
&\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{eEx}{\varepsilon_0 m_0 c^2} + \frac{1}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}\,.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (3.256)
$$

Edasi on kohane sisse tuua omaaeg τ . Teise võrrandi (3.256) võime kirjutada kujul:

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{u_{oy}}{\sqrt{1-u_o^2/c^2}}$$

ja siit:

$$y = \frac{u_{oy}\tau}{\sqrt{1-u_o^2/c^2}} \qquad (3.257)$$

(kôigi koordinaatide algväärtused vôtame vôrdseks nulliga). Ülejäänud kolm vôrrandit (3.256) saavad kuju:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= \frac{eEt}{\varepsilon_o m_o} - \frac{eHz}{\varepsilon_o m_o c} + \frac{u_{ox}}{\sqrt{1-u_o^2/c^2}} , \\
\frac{dz}{d\tau} &= \frac{eHx}{\varepsilon_o m_o c} + \frac{u_{oz}}{\sqrt{1-u_o^2/c^2}} , \\
\frac{dt}{d\tau} &= \frac{eEx}{\varepsilon_o m_o c^2} + \frac{1}{\sqrt{1-u_o^2/c^2}} .
\end{aligned}\right\} \qquad (3.258)$$

See on konstantsete kordajatega lineaarsete vôrrandite süsteem x, z, t kui omaaja τ funktsioonide jaoks. Elimineerides z ja t, saame x jaoks vôrrandi:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{e^2(E^2-H^2)}{\varepsilon_o^2 m_o^2 c^2}x = \frac{e\left(E-\frac{u_{oz}}{c}H\right)}{\varepsilon_o m_o \sqrt{1-u_o^2/c^2}} . \qquad (3.259)$$

Edasi tuleb vahet teha kolme juhu vahel.

a) Olgu $E=H$. Siis saab vôrrand (3.259) kuju:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{eA\left(1-\frac{u_{oz}}{c}\right)}{\varepsilon_o m_o \sqrt{1-u_o^2/c^2}} , \qquad (3.260)$$

kus

$$A \equiv E = H . \qquad (3.261)$$

Selle võrrandi lahend on

$$x = \frac{eA\left(1-\frac{u_{oz}}{c}\right)\tau^2}{2\varepsilon_o m_o \sqrt{1-u_o^2/c^2}} + \frac{u_{ox}\tau}{\sqrt{1-u_o^2/c^2}} . \tag{3.262}$$

Asetades saadud lahendi teise ja kolmandasse võrrandisse (3.258) ja integreerides, leiame:

$$z = \frac{e^2A^2\left(1-\frac{u_{oz}}{c}\right)\tau^3}{6\varepsilon_o^2 m_o^2 c\sqrt{1-u_o^2/c^2}} + \frac{eAu_{ox}\tau^2}{2\varepsilon_o m_o c\sqrt{1-u_o^2/c^2}} + \frac{u_{oz}\tau}{\sqrt{1-u_o^2/c^2}} \tag{3.263}$$

ja

$$t = \frac{e^2A^2\left(1-\frac{u_{oz}}{c}\right)\tau^3}{6\varepsilon_o^2 m_o^2 c^2\sqrt{1-u_o^2/c^2}} + \frac{eAu_{ox}\tau^2}{2\varepsilon_o m_o c^2\sqrt{1-u_o^2/c^2}} + \frac{\tau}{\sqrt{1-u_o^2/c^2}} . \tag{3.264}$$

Valemid (3.257) ja (3.262) - (3.264) määravadki osakese liikumise trajektoori vaadeldaval juhul. Nende lihtsustamiseks defineerime dimensioonitud muutujad:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{eAx}{\varepsilon_o m_o c^2} , \\ \eta &= \frac{eAy}{\varepsilon_o m_o c^2} , \\ \zeta &= \frac{eAz}{\varepsilon_o m_o c^2} , \\ \vartheta &= \frac{eAt}{\varepsilon_o m_o c} , \\ \theta &= \frac{eA\tau}{\varepsilon_o m_o c} . \end{aligned}\right\} \tag{3.265}$$

Siis on

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{u_{0z}}{c}\right)\theta^2 + \frac{u_{0x}}{c}\theta\right],$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}\cdot\frac{u_{0y}}{c}\cdot\theta, \tag{3.266}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}\left[\frac{1}{6}\left(1-\frac{u_{0z}}{c}\right)\theta^3 + \frac{u_{0x}}{2c}\theta^2 + \frac{u_{0z}}{c}\theta\right]$$

ja

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}\left[\frac{1}{6}\left(1-\frac{u_{0z}}{c}\right)\theta^3 + \frac{u_{0x}}{2c}\theta^2 + \theta\right]. \tag{3.267}$$

On kasulik tähele panna, et

$$t - \frac{z}{c} = \frac{\left(1-\frac{u_{0z}}{c}\right)\tau}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}. \tag{3.268}$$

Joonisel 48 on näitena toodud trajektoor juhul, kui $u_{0y} = 0$ ning $\frac{u_{0x}}{c} = \frac{4}{9}$ ja $\frac{u_{0z}}{c} = \frac{7}{9}$.

b) Olgu nüüd $E > H$. Siis saame võrrandist (3.259) järgmise algtingimusi rahuldava lahendi:

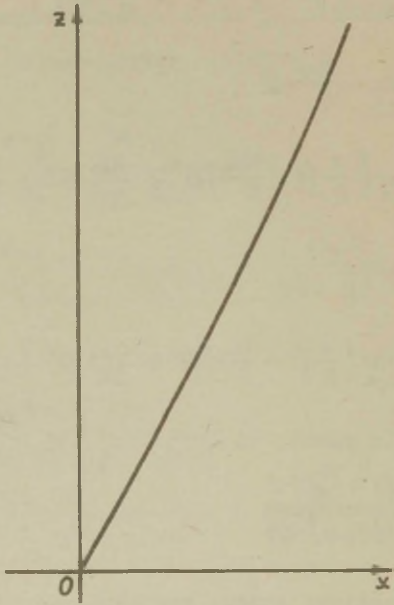
$$x = C_1(\operatorname{ch}\varphi - \operatorname{ch}\varphi_0), \tag{3.269}$$

kus

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 m_0 c^2\left[E^2\left(1-\frac{u_{0x}^2}{c^2}\right) - \frac{2u_{0z}}{c}EH + \frac{u_{0x}^2+u_{0z}^2}{c^2}H^2\right]^{1/2}}{e(E^2-H^2)\sqrt{1-u_0^2/c^2}}, \tag{3.270}$$

φ on omaajaga lineaarselt seotud dimensioonitu parameeter:

$$\tau = \frac{\varepsilon_0 m_0 c}{e\sqrt{E^2 - H^2}}(\varphi - \varphi_0) \qquad (3.271)$$



Joonis 48.

ja φ_0 on selle algväärtus, mille määrab valem

$$th\,\varphi_0 = \frac{\frac{u_{0x}}{c}\sqrt{E^2 - H^2}}{E - \frac{u_{0z}}{c}H}\,. \qquad (3.272)$$

Ülejäänud muutujate jaoks saame (3.257) ja (3.258) põhjal järgmised valemid:

$$y = C_2(\varphi - \varphi_0)\,, \qquad (3.273)$$

$$z = C_3(\varphi - \varphi_0) + \frac{C_1 H}{\sqrt{E^2 - H^2}} (sh\varphi - sh\varphi_0) \tag{3.274}$$

ja

$$t = \frac{C_3 H}{cE} (\varphi - \varphi_0) + \frac{C_1 E}{c\sqrt{E^2 - H^2}} (sh\varphi - sh\varphi_0) , \tag{3.275}$$

kus

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 m_0 c u_{oy}}{e\sqrt{E^2 - H^2} \sqrt{1 - u_0^2/c^2}} \tag{3.276}$$

ja

$$C_3 = \frac{\varepsilon_0 m_0 c^2 \left(\frac{u_{oz} E}{c} - H\right)}{e(E^2 - H^2)^{3/2} \sqrt{1 - u_0^2/c^2}} . \tag{3.277}$$

Joonisel 49 on kujutatud trajektoor juhul, kui $u_{oy} = 0$, $\frac{u_{ox}}{c} = \frac{4}{9}$, $\frac{u_{oz}}{c} = \frac{7}{9}$ ja $\frac{E}{H} = \frac{5}{3}$. Erijuhul $H = 0$ saavad valemid (3.269), (3.271) - (3.273) ja (3.275) identseks valemitega (3.236) ja (3.238) - (3.241), nagu peabki olema. Lisaks aga saab valem (3.274) kuju:

$$z = \frac{\varepsilon_0 m_0 c u_{oz}}{eE\sqrt{1 - u_0^2/c^2}} (\varphi - \varphi_0) ,$$

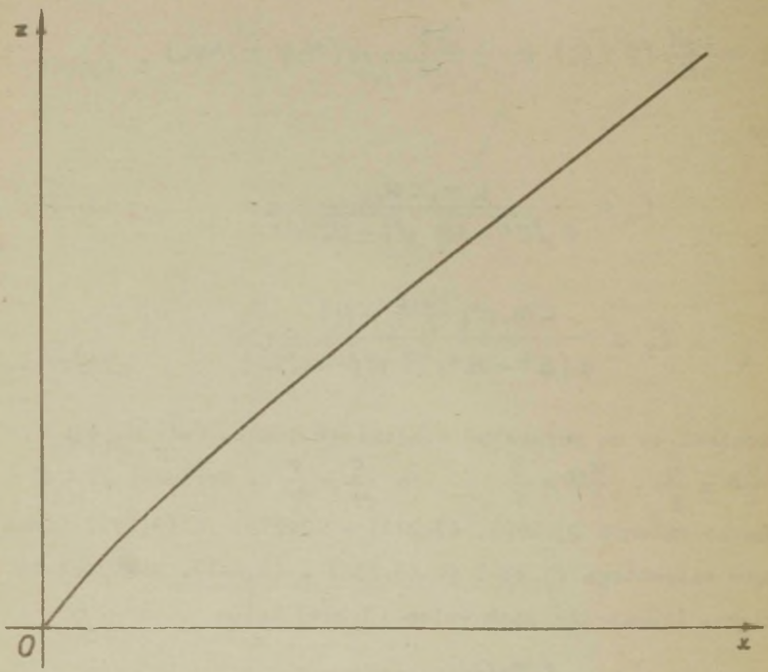
mis on täiesti analoogiline valemiga (3.241). Seal oli meil $u_{oz} = 0$ ja seetõttu ka $z = 0$. Siin aga on $u_{oz} \neq 0$ kuid yz-teljestiku sobiva pöörde abil saab muidugi teha $u_{oz} = 0$, kusjuures valem (2.41) jääb jõusse.

c) Vaatleme lõpuks kolmandat juhtu: $E < H$. Võrrandi (3.259) lahendiks on nüüd

$$x = C_1(\cos\varphi - \cos\varphi_0) , \tag{3.278}$$

kusjuures

$$\tau = \frac{\varepsilon_0 m_0 c}{e\sqrt{H^2-E^2}}(\varphi-\varphi_0), \tag{3.279}$$



Joonis 49.

$$\left.\begin{aligned} &\tan\varphi_0 = \frac{\frac{u_{0x}}{c}\sqrt{H^2-E^2}}{E-\frac{u_{0z}}{c}H}, \\ &\frac{u_{0x}}{c}\sin\varphi_0 < 0, \\ &\left(E-\frac{u_{0z}}{c}H\right)\cos\varphi_0 < 0 . \end{aligned}\right\} \tag{3.280}$$

ja

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 m_0 c^2 \left[\left(1 - \frac{u_{ox}^2}{c^2}\right) E^2 - \frac{2u_{oz}}{c} EH + \frac{u_{ox}^2 + u_{oz}^2}{c^2} H^2 \right]^{1/2}}{e(H^2 - E^2)\sqrt{1 - u_0^2/c^2}} . \tag{3.281}$$

Valemitest (3.257) ja (3.258) saame ka teiste muutujate jaoks vastavad avaldised:

$$y = C_2 (\varphi - \varphi_0) , \tag{3.282}$$

$$z = C_3 (\varphi - \varphi_0) + \frac{C_1 H}{\sqrt{H^2 - E^2}} (\sin\varphi - \sin\varphi_0) \tag{3.283}$$

ja

$$t = \frac{C_3 H}{cE} (\varphi - \varphi_0) + \frac{C_1 E}{c\sqrt{H^2 - E^2}} (\sin\varphi - \sin\varphi_0) , \tag{3.284}$$

kus

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 m_0 c u_{oy}}{e\sqrt{H^2 - E^2}\sqrt{1 - u_0^2/c^2}} \tag{3.285}$$

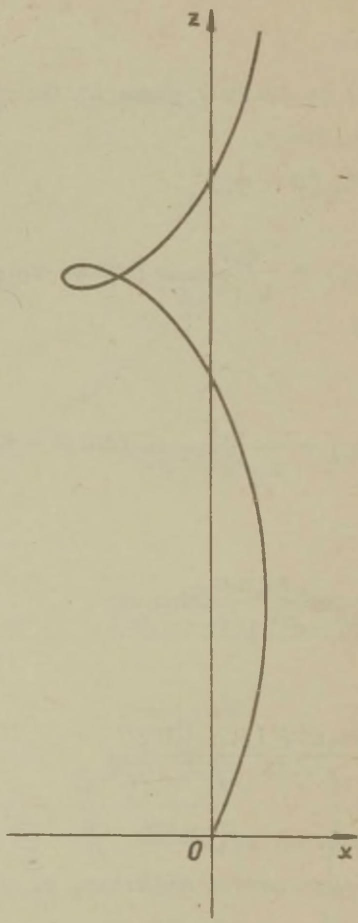
ja

$$C_3 = \frac{\varepsilon_0 m_0 c^2 E \left(H - \frac{u_{oz}}{c} E\right)}{e(H^2 - E^2)^{3/2}\sqrt{1 - u_0^2/c^2}} . \tag{3.286}$$

Joonisel 50 on näidatud trajektoor $\frac{E}{H} = \frac{3}{5}$ ning sama algkiiruse puhul nagu eelmistes näidetes, s. o. $u_{oy} = 0$, $\frac{u_{ox}}{c} = \frac{4}{9}$, $\frac{u_{oz}}{c} = \frac{7}{9}$.

Erijuhul $E = 0$ taanduvad valemid (3.278), (3.279) ja (3.382) - (3.384) valemiteks (3.246), (3.249) ja (3.253), kusjuures $\varphi - \varphi_0 = \omega t$.

Relativistliku liikumise viimase näitena vaatleme käesolevas paragrahvis laetud osakese liikumist teise laetud osakese tsentraalsümmeetrilises staatilises elektriväl-



Joonis 50.

jas (elektrostaatiline Kepleri probleem). Seejuures loeme teise osakese massi lõpmatuks, nii et teda võib pidada liikumatuks. Piirdume juhuga, kus osakeste laengud on vastasmärgilised.

Tähistades

$$A = \frac{|e_1 e_2|}{4\pi\varepsilon_0}, \tag{3.287}$$

kus e_1 ja e_2 on osakeste laengud, saame liikumise võrrandi kujul:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = -\frac{A\vec{r}}{r^3}, \tag{3.288}$$

kus m_0 on liikuva osakese seisumass, $\vec{r}$ tema kohavektor alguspunktiga välja tsentris ja

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3.289}$$

osakese kiirus.

Võrrandi (3.288) integreerimiseks korrutame ta esiti skalaarselt kiirusega $\vec{u}$, mis annab:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = A\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Integreerides saame:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{A}{r} + E, \tag{3.290}$$

kus E on osakese koguenergia, mis on seisu-, kineetilise ja potentsiaalse $-\frac{A}{r}$ energia summa.

Edasi, korrutades võrrandit (3.288) vektoriliselt kohavektoriga $\vec{r}$, leiame:

$$\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{u}}{dt}\right)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2}\cdot\vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot(\vec{r}\times\vec{u}) = 0$$

ehk

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{u}) = -\frac{\vec{u}\,\frac{d\vec{u}}{dt}}{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}\cdot(\vec{r}\times\vec{u}) . \qquad (3.291)$$

Võttes $(\vec{r},\vec{u})$ -tasandis polaarkoordinaadid r,φ, leiame:

$$\vec{r}\times\vec{u} = r^2\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_3 ,$$

kus $\vec{e}_3$ on selle tasandiga ristiolev ühikvektor. Seega saab võrrand (3.291) kuju:

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)}{r^2\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{d}{dt}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{1-\frac{u^2}{c^2}} .$$

Integreerides saame

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\frac{\mathcal{L}}{m_0}$$

ehk

$$m_0 r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = \mathcal{L} , \qquad (3.292)$$

kus τ on osakese omaaeg ja $\mathcal{L}$ tema jääva impulssmomendi

$$\vec{\mathcal{L}} = \vec{r}\times\vec{p}$$

absoluutväärtus.

Et

$$u^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 ,$$

siis

$$u^2 = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left[\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right] ,$$

kust

$$1-\frac{u^2}{c^2}=\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{r^2}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right]^{-1} . \qquad (3.293)$$

Siit ja valemist (3.290) saame

$$1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{r^2}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2=\frac{(A+Er)^2}{m_0^2c^4r^2} . \qquad (3.294)$$

Nüüd tuleb lahendada võrranditest (3.292) ja (3.294) koosnev süsteem. Elimineerides $\frac{d\varphi}{d\tau}$, saame

$$\frac{dr}{d\tau}=\frac{\pm\sqrt{(E^2-m_0^2c^4)r^2+2AEr-(\mathcal{L}^2c^2-A^2)}}{m_0cr} . \qquad (3.295)$$

Siit ja võrrandist (3.292) saame ka trajektoori diferentsiaalvõrrandi:

$$d\varphi=\pm\frac{\mathcal{L}c\,dr}{r\sqrt{(E^2-m_0^2c^4)r^2+2AEr-(\mathcal{L}^2c^2-A^2)}} . \qquad (3.296)$$

Enne kui asuda selle võrrandi lahendamisele, teeme kindlaks võimalikud energia E väärtused sõltuvalt suurusest A ja $\mathcal{L}$. Et ruutjuure all peab olema mittenegatiivne suurus, siis

$$\left(E+\frac{A}{r}+\sqrt{\frac{\mathcal{L}^2c^2}{r^2}+m_0^2c^4}\right)\left(E+\frac{A}{r}-\sqrt{\frac{\mathcal{L}^2c^2}{r^2}+m_0^2c^4}\right)\geqslant 0.$$

Arvestades, et (3.290) põhjal

$$E+\frac{A}{r}>0 ,$$

leiame siit:

$$E\geqslant-\frac{A}{r}+\sqrt{\frac{\mathcal{L}^2c^2}{r^2}+m_0^2c^4} . \qquad (3.297)$$

Selle võrratuse konkretiseerimine sõltub juba A ja $\mathcal{L}$ suurusvahekorrast, millest ka lahendi kuju oleneb.

Asume võrrandi (3.296) lahendamisele. Teeme esmalt asenduse

$$\ell = \frac{1}{r}, \tag{3.298}$$

mis annab

$$\frac{d\ell}{d\varphi} = \pm\frac{\sqrt{(E^2-m_0^2c^4)+2AE\ell-(\mathcal{L}^2c^2-A^2)\ell^2}}{\mathcal{L}c}. \tag{3.299}$$

Edasi on otstarbekas juure kaotamiseks üle minna teist järku võrrandile. Arvutades $\frac{d^2\ell}{d\varphi^2}$, leiame:

$$\frac{d^2\ell}{d\varphi^2}+\left(1-\frac{A^2}{\mathcal{L}^2c^2}\right)\ell = \frac{AE}{\mathcal{L}^2c^2}. \tag{3.300}$$

Edasi tuleb vaadelda eraldi kolme võimalikku juhtu.

1) Olgu esmalt

$$\mathcal{L}c > A \tag{3.301)}$$

Tähistame

$$1-\frac{A^2}{\mathcal{L}^2c^2} = \omega^2. \tag{3.302}$$

Siis on võrrandi (3.300) üldlahend järgmise kujuga:

$$\ell = C_1\cos\omega\varphi + C_2\sin\omega\varphi + \frac{E\sqrt{1-\omega^2}}{\mathcal{L}c\omega^2}.$$

Esimest järku võrrandi (3.299) tõttu on konstantide C_1 ja C_2 vahel olemas seos

$$C_1^2+C_2^2 = \frac{E^2-m_0^2c^4\omega^2}{\mathcal{L}^2c^2\omega^4}.$$

Tähistades

$$\frac{C_2}{C_1} = \tan\omega\varphi_0,$$

leiame:

$$b = \frac{\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4 \omega^2}}{\mathcal{L} c \omega^2} \cos\omega(\varphi - \varphi_0) + \frac{E\sqrt{1-\omega^2}}{\mathcal{L} c \omega^2} .$$

Integreerimiskonstandi φ_0 valik on meelevaldne, sõltudes polaartelje asukohast. Valime $\varphi_0 = \frac{\pi}{\omega}$. Siis saame lõplikult:

$$r = \frac{\mathcal{L} c \omega^2}{E\sqrt{1-\omega^2} - \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4 \omega^2} \cos\omega\varphi} . \quad (3.303)$$

Võrratuse (3.297) põhjal võib kergesti veenduda, et vaadeldaval juhul on

$$E \geqslant -\frac{\mathcal{L} c \sqrt{1-\omega^2}}{r} + \sqrt{\frac{\mathcal{L}^2 c^2}{r^2} + m_0^2 c^4} \geqslant m_0 c^2 \omega . \quad (3.304)$$

2) Olgu nüüd

$$\mathcal{L} c = A . \quad (3.305)$$

Siis võrranditest (3.299) ja (3.300) saame

$$r = \frac{2\mathcal{L} c}{E} \left(\varphi^2 - \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{E^2} \right)^{-1} . \quad (3.306)$$

Seesama valem tuleb välja ka eelmisest lahendist (3.303), kui teeme seal $\omega \to 0$. Võrratuse (3.297) põhjal on

$$E \geqslant -\frac{\mathcal{L} c}{r} + \sqrt{\frac{\mathcal{L}^2 c^2}{r^2} + m_0^2 c^4} > 0 . \quad (3.307)$$

3) Olgu lõpuks

$$\mathcal{L} c < A . \quad (3.308)$$

Sel juhul tähistame:

$$\frac{A^2}{\mathcal{L}^2 c^2} - 1 = w^2 \quad (3.309)$$

ning leiame:

$$\tau = \frac{\mathcal{L} c w^2}{\sqrt{E^2 + m_0^2 c^4 w^2}\, ch\, w\varphi - E\sqrt{1+w^2}} . \qquad (3.310)$$

Võrratus (3.297) annab nüüd:

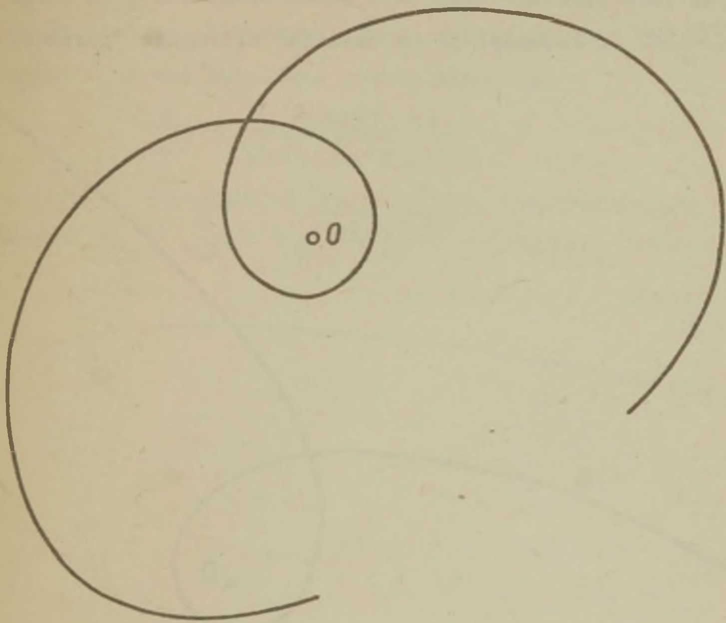
$$E \geqslant -\frac{\mathcal{L} c\sqrt{1+w^2}}{\tau} + \sqrt{\frac{\mathcal{L}^2 c^2}{\tau^2} + m_0^2 c^4} > -\infty . \qquad (3.311)$$

Niisiis on nüüd, erinevalt eelmistest juhtudest, võimalik ka negatiivne energia, $E < 0$. Ent sel juhul peab τ olema tõkestatud, nagu järgneb valemitest (3.290) või (3.311). Seetõttu võtsimegi valemis (3.310) nimetaja esimeses liikmes ruutjuure positiivsena, kuigi ka vastasmärgi korral rahuldaks see lahend võrrandeid (3.299) ja (3.300); kuid sel juhul oleks τ tõkestamatu.

Nüüd vaatleme lähemalt saadud lahenditega määratud trajektoori kuju olenevust energiast.

1) Kui $\mathcal{L} c > A$, siis on lahendiks valem (3.303). See on sarnane mitterelativistliku valemiga; erinevus on ainult selles, et φ asemel on koosinuse argumendiks $\omega\varphi$. Seetõttu me võime liigitada trajektoorid "elliptilisteks", "paraboolseteks" ja "hüpoboolseteks". Kui $m_0 c^2 \omega \leqslant E < m_0 c^2$, siis on orbiit "elliptiline". See tähendab eelkõige seda, et τ on tõkestatud alt ja ülalt. Ajavahemik, mis möödub tiirleva osakese kahe järjestikuse suurima eemaldumuse vahel, vastab polaarnurga φ muutusele $\frac{2\pi}{\omega}$. Seega erineb trajektoor tõelisest ellipsist selle poolest, et tema telg pöörleb nurkkiirusega $(1-\omega)\frac{d\varphi}{dt}$, nii et mainitud ajavahemiku jooksul osutub ta nihkunuks nurga $\frac{2\pi(1-\omega)}{\omega}$

võrra. Mida vähem erineb ω 1-st, seda aeglasem on see pöörlemine ja seda vähem erineb tegelik trajektoor ellipsist. Kuid kui ω on küllalt väike, on trajektoori kuju tegelikult ellipsist hoopis erinev. Joonisel 51 on näi-



Joonis 51.

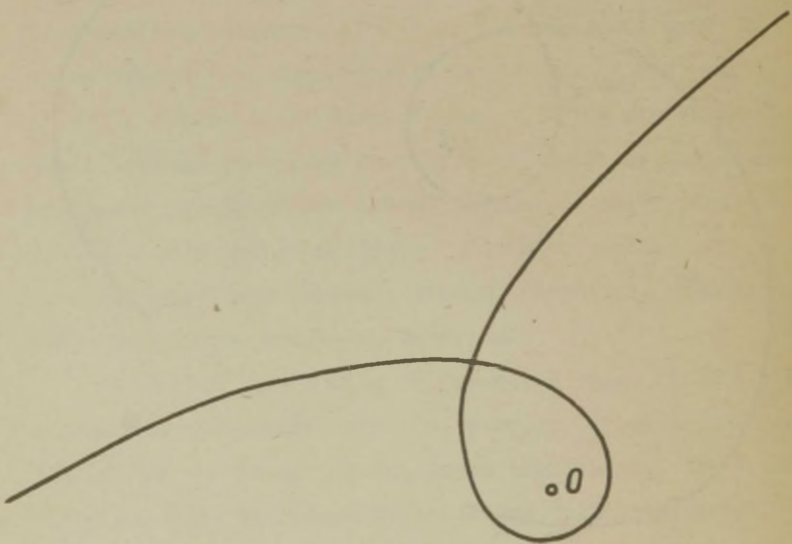
tena toodud trajektoor $\omega = 0{,}6$ ja $E = 0{,}75\, m_0 c^2$ korral. Trajektoori võrrand on sel juhul

$$r = \frac{\mathcal{L}}{m_0 c} \cdot \frac{0{,}6}{1 - 0{,}75 \cos 0{,}6\varphi}$$

Erijuhul $E = m_0 c^2 \omega$ on trajektooriks ringjoon raadiusega $\mathcal{L}\omega / m_0 c \sqrt{1-\omega^2}$. - Kui $E = m_0 c^2$, siis on trajektoor "paraboolne":

$$r = \frac{\mathcal{L}\omega^2}{m_0 c\sqrt{1-\omega^2}\,(1-\cos\omega\varphi)} .$$

Erinevalt tõelisest paraboolist ei ole trajektoori harud lõpmatuses paralleelsed, vaid moodustavad omavahel nurga $\frac{2\pi(1-\omega)}{\omega}$. Joonisel 52 on näidatud niisugune "parabool"



Joonis 52.

$\omega = 0{,}6$ korral. Tema võrrand on

$$r = \frac{9\mathcal{L}}{20 m_0 c}\cdot\frac{1}{1-\cos 0{,}6\varphi} .$$

Kui $E > m_0 c^2$, siis on trajektoor "hüperboolne". Aga ka siin võib tegelik trajektoor tunduvalt erineda hüperboolist. Osakese kaugus tsentrist on minimaalne siis, kui $\varphi = \frac{\pi}{\omega}$, kuna

$$\varphi = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\sqrt{1 - m_0^2 c^4 \omega^2 / E^2}}$$

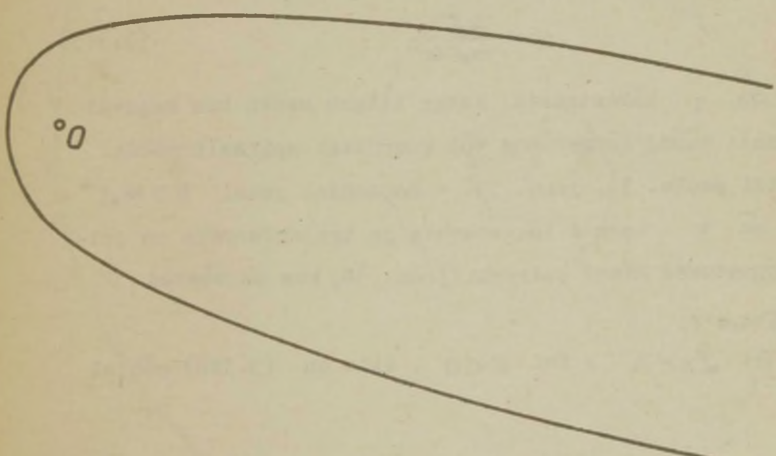
ja

$$\varphi = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{1}{\omega} \arccos \frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\sqrt{1 - m_0^2 c^4 \omega^2 / E^2}}$$

juures saab r lôpmatuks. Vôib juhtuda, et need môlemad suunad langevad ühte. See juhtub siis, kui

$$\frac{E}{m_0 c^2} = \frac{\omega \cos \pi (1-\omega)}{\sqrt{\omega^2 - \sin^2 \pi (1-\omega)}} .$$

Joonisel 53 on näidatud üks niisugune "hüperbool", kui $\omega = 0{,}8$ ja $\frac{E}{m_0 c^2} = 4\sqrt{\frac{29+18\sqrt{5}}{779}} = 1{,}1926 .$



Joonis 53.

Selle joone vôrrand on

$$r = \frac{0{,}8944 \, \mathcal{L}}{m_0 c} \left(1 - \frac{\cos 0{,}8\varphi}{\cos 36^\circ}\right)^{-1} .$$

2) $\mathcal{L}c = A$. Trajektoori võrrand on (3.306). Ka siin võime eristada kolm juhtu. Kui $0 < E < m_0 c^2$, siis on valemi nimetajas teine liige positiivne. Seega $\tau \leqslant \tau_{max}$, kus

$$\tau_{max} = \frac{2\mathcal{L}cE}{m_0^2 c^4 - E^2} . \tag{3.312}$$

Osake liigub koonduvat või hajuvat spiraali mööda; kui algul on spiraal hajuv, siis muutub ta peale $\tau = \tau_{max}$ saabumist koonduvaks. Seega jõuab osake igal juhul aja möödudes tsentrile kuitahes lähedale. Joonisel 54 on näidatud niisugune spiraal $E = 0{,}2\, m_0 c^2$ korral. - Kui $E = m_0 c^2$, siis on trajektoori võrrand järgmise kujuga:

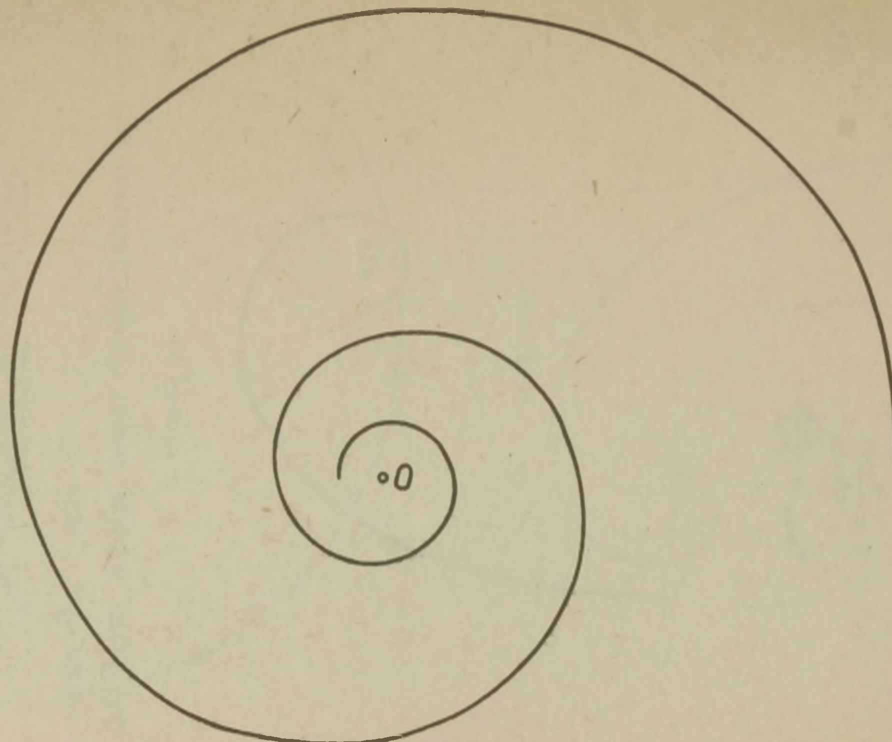
$$\tau = \frac{2\mathcal{L}}{m_0 c \varphi^2} . \tag{3.313}$$

Nüüd on τ tõkestamata. Seega liigub osake kas hajuvat spiraali mööda lõpmatusse või koonduvat spiraali mööda tsentri poole. Vt. joon. 55. - Kolmandal juhul $E > m_0 c^2$. Siin on τ samuti tõkestamata ja trajektooriks on jälle lõpmatusse minev spiraal (joon. 56, kus on võetud $E = 5 m_0 c^2$).

3) $\mathcal{L}c < A$. Kui $E < 0$, siis on (3.310) põhjal

$$\tau = \frac{\tau_{max}\left(\sqrt{E^2 + m_0^2 c^4 w^2} + \sqrt{E^2 + E^2 w^2}\right)}{\sqrt{E^2 + m_0^2 c^4 w^2}\, ch\, w\varphi + \sqrt{E^2 + E^2 w^2}} , \tag{3.314}$$

kus

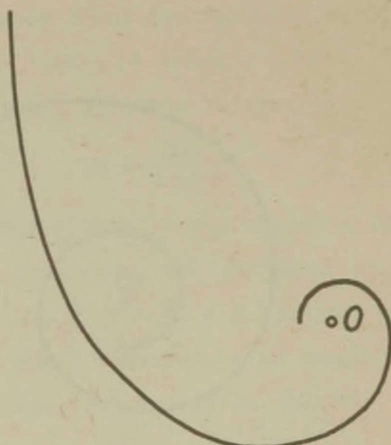


Joonis 54.

$$r_{max} = \frac{\mathcal{L} c w^2}{\sqrt{E^2 + m_0^2 c^4 w^2} + \sqrt{E^2 + E^2 w^2}} \cdot \tag{3.315}$$

Trajektoori kuju näitab sel juhul joonis 57, kus on võetud $E = -m_0 c^2$ ja $w = 0{,}75$. - Kui $E = 0$, siis

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{r_{max}}{ch\, w\varphi}, \\ r_{max} &= \frac{\mathcal{L} w}{m_0 c}. \end{aligned}\right\} \tag{3.316}$$

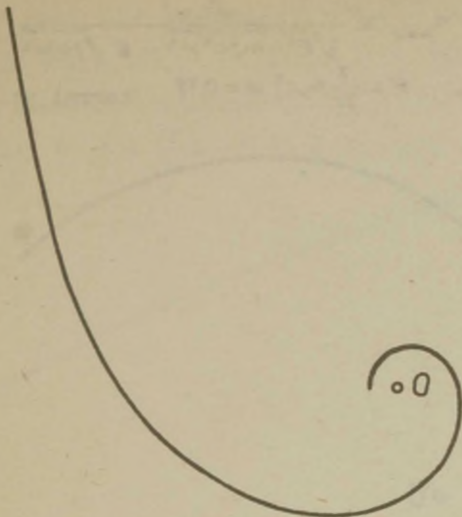


Joonis 55.

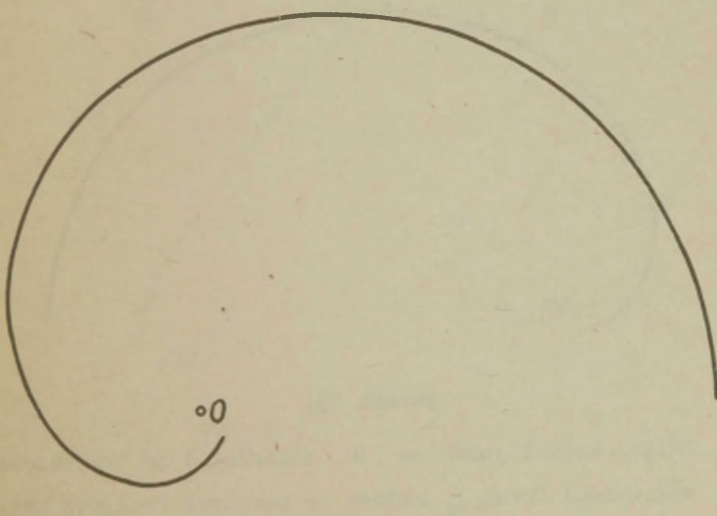
Trajektoor $w = 0{,}75$ korral on näha joonisel 58. - Kui $0 < E < m_0 c^2$, siis

$$r = \frac{r_{max} \left(\sqrt{E^2 + m_0^2 c^4 w^2} - E \sqrt{1 + w^2}\right)}{\sqrt{E^2 + m_0^2 c^4 w^2}\; ch\, w\varphi - E \sqrt{1 + w^2}}, \tag{3.317}$$

kus



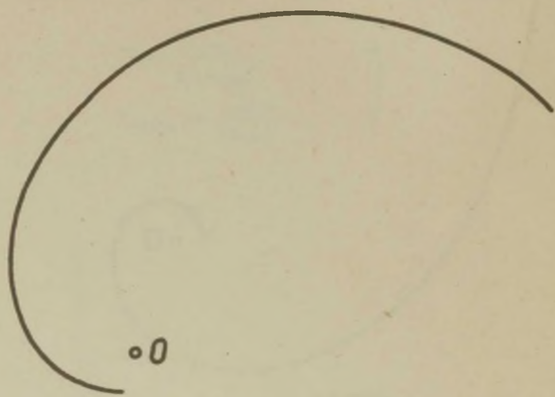
Joonis 56.



Joonis 57.

$$\tau_{max} = \frac{\mathcal{L} c w^2}{\sqrt{E^2 + m_0^2 c^4 w^2} - E\sqrt{1+w^2}} \, . \tag{3.318}$$

Trajektoor $E = \frac{7}{32} m_0 c^2, \; w = 0{,}75$ korral vt. joon. 59. -

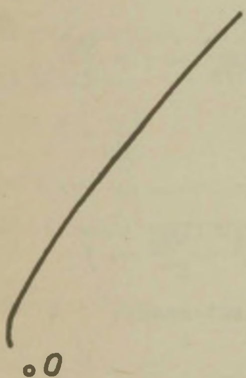


Joonis 58.

Joonis 59.

Kõigil kolmel juhul on τ tõkestatud ja trajektooril on väärtuseni $\tau = \tau_{max}$ hajuva ja seejärel koonduva spiraali kuju, sarnaselt nagu $\mathscr{L}c = A$ ning $E < m_0c^2$ juhul. - Kui aga $E = m_0c^2$ või $E > m_0c^2$, siis on τ tõkestamatu. Joonisel 60 on näidatud trajektoor $E = m_0c^2$ ning $w = 0{,}75$ juhul ja joonisel 61 $E = \frac{18}{7} m_0c^2$ ning $w = 0{,}75$ juhul.

Joonis 60.



Joonis 61.

Ü l e s a n d e d .

1. Näidata, et mitterelativistlikul piirjuhul taanduvad valemid (3.236), (3.239) - (3.241) vastavateks klassikalisteks valemiteks.

L a h e n d u s . Valemitest (3.239) - (3.241) järgneb:

$$\frac{u_x}{c} = th\varphi, \qquad \frac{u_y}{c} = \frac{u_{oy}}{c} \cdot \frac{ch\varphi_o}{ch\varphi}. \tag{3.319}$$

Et liikumine oleks mitterelativistlik, peab olema $\varphi_o \ll 1$ ja $\varphi \ll 1$. Siis võib valemites (3.236), (3.238) - (3.241) asendada

$$sh\varphi \rightarrow \varphi, \qquad sh\varphi_o \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \begin{matrix}\varphi_o \\ th\varphi_o\end{matrix},$$

$$ch\varphi \rightarrow 1 + \frac{\varphi^2}{2}, \qquad ch\varphi_o \rightarrow 1 + \frac{\varphi_o^2}{2}$$

ja ka

$$\sqrt{1-\frac{u_o^2}{c^2}} \rightarrow 1, \quad \sqrt{1-\frac{u_{ox}^2}{c^2}} \rightarrow 1.$$

Siis peale φ elimineerimist saame:

$$\tau = t,$$

$$x = u_{ox}t + \frac{eEt^2}{2\varepsilon_o m},$$

$$y = u_{oy}t,$$

mida oligi tarvis näidata.

2. Laetud osakese liikumist tsentraalsümmeetrilises elektrostaatilises väljas me vaatlesime eeldusel, et selle osakese seisumass on nullist erinev. Ainult sel eeldusel on liikumise diferentsiaalvõrrandi kuju (3.288). Näidata, et võrrandid (3.299) ja (3.300) kehtivad siiski ka $m_0=0$ korral.

L a h e n d u s . Laetud osakesi, mille seisumass on null, pole tegelikult olemas. Kaalukad teoreetilised seisukohad kõnelevad samuti selliste osakeste olemasolu võimaluse vastu. Seega on antud ülesandes tegemist puhtal kujul hüpoteetilise osakesega. Sellele vaatamata oleme õigustatud vaatama, kuidas peaks ta liikuma antud jõuväljas.

(3.288) asemel on liikumise diferentsiaalvõrrand järgmise kujuga:

$$\frac{d(m\vec{c})}{dt} = -\frac{A\vec{r}}{r^3}, \tag{3.320}$$

kus m on osakese tegelik (kineetiline) mass (ta muutub ajas) ja $\vec{c}$ on kiirus:

$$\vec{c} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{3.321}$$

mille absoluutväärtus on universaalne konstant c.

Korrutades võrrandi (3.320) skalaarselt kiirusega $\vec{c}$, leiame:

$$m\vec{c}d\vec{c} + c^2 dm = A\,d\left(\frac{1}{r}\right),$$

ehk, kuna $\vec{c}d\vec{c} = \frac{1}{2}d(c^2) = 0$, siis

$$c^2 dm = A\,d\left(\frac{1}{r}\right).$$

Siit

$$mc^2 = \frac{A}{r} + E \tag{3.322}$$

E on siin jälle koguenergia, mis võrdub kineetilise mc^2 ja potentsiaalse $-\frac{A}{r}$ energia summaga.

Korrutades võrrandi (3.320) vektoriliselt kohavektoriga $\vec{r}$ ja arvestades valemit (3.321), leiame:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{c}) = 0.$$

Integreerides polaarkoordinaatides, saame

$$m r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \mathcal{L}, \tag{3.323}$$

kus $\mathcal{L}$ on impulssmomendi

$$\vec{\mathcal{L}} = \vec{r} \times m\vec{c} \tag{3.324}$$

absoluutväärtus.

Elimineerides valemitest (3.322) ja (3.323) massi m, leiame:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\mathcal{L}c^2}{r(A+Er)}. \tag{3.325}$$

Avaldades polaarkoordinaatides kiiruse ruudu:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = c^2, \tag{3.326}$$

leiame siit ja eelmisest valemist:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{c\sqrt{E^2r^2 + 2AEr - (\mathcal{L}^2c^2 - A^2)}}{A+Er}. \tag{3.327}$$

Siit ja valemist (3.325) saame

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{r\sqrt{E^2r^2 + 2AEr - (\mathcal{L}^2c^2 - A^2)}}{\mathcal{L}c} \tag{3.328}$$

Lõpuks, asendades nagu varem $r = \frac{1}{\varrho}$, leiame:

$$\frac{d\ell}{d\varphi} = \mp \frac{\sqrt{E^2 + 2AE\ell - (\mathcal{L}^2c^2 - A^2)\ell^2}}{\mathcal{L}c} \tag{3.329}$$

ja siit

$$\frac{d^2\ell}{d\varphi^2} + \left(1 - \frac{A^2}{\mathcal{L}^2c^2}\right)\ell = \frac{AE}{\mathcal{L}^2c^2}. \tag{3.330}$$

Need kaks valemit ühtivadki tõesti valemitega (3.299) (kui seal teha $m_0 = 0$) ja (3.300).

3. Uurida võrrandite (3.329) ja (3.330) lahendeid.

L a h e n d u s . 1) Kui $\mathcal{L}c > A$, siis on lahendiks

$$r = \frac{\mathcal{L}c\omega^2}{E(\sqrt{1-\omega^2} - \cos\omega\varphi)} \tag{3.331}$$

kus ω on defineeritud endiselt valemiga (3.302). Siit on näha, et liikumine on sel juhul alati "hüperboolne". - 2) Kui $\mathcal{L}c = A$, siis $E > 0$ korral on

$$r = \frac{2\mathcal{L}c/E}{\varphi^2 - 1}, \tag{3.332}$$

mis kujutab lõpmatusse minevat spiraali. Kui aga $E = 0$, siis annab võrrand (3.329) vahetult

$$r = const., \tag{3.333}$$

s. o. osake liigub sel juhul ringjoont mööda. - 3) Kui $\mathcal{L}c < A$, siis $E \neq 0$ korral on

$$r = \frac{\mathcal{L}cw^2/|E|}{ch w\varphi \mp \sqrt{1+w^2}}, \tag{3.334}$$

kus w on defineeritud nagu varem valemiga (3.309) ja kaksikmärgis kehtib ülemine märk $E>0$ korral ja alumine $E<0$ korral. Kui aga $E=0$, siis valem (3.334) ei kehti, vaid siis saame võrrandist (3.329):

$$\frac{db}{d\varphi} = \mp wb \tag{3.335}$$

ja siit

$$r = r_0 e^{\pm w\varphi} \tag{3.336}$$

Seega on trajektooriks $E \geqslant 0$ korral lõpmatusse minev spiraal, kuna $E<0$ korral on

$$r \leqslant r_{max} = \frac{\mathcal{L}c(\sqrt{1+w^2}-1)}{|E|}.$$

4. Laetud osake liigub teise, liikumatu laetud osakese väljas "elliptiliselt". Leida tiirlemise periood T, s. o. ajavahemik kahe järjestikuse "periheeli" läbimise vahel.

L a h e n d u s . Valemitest (3.290), (3.292) ja (3.303) leiame:

$$dt = \frac{\mathcal{L}\omega^2}{m_0c^2}\cdot\frac{\gamma-\sqrt{1-\omega^2}\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\cos\omega\varphi}{(\gamma\sqrt{1-\omega^2}-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\cos\omega\varphi)^2}\,d\varphi, \tag{3.337}$$

kus $m_0c^2\omega \leqslant E < m_0c^2$ ja

$$\gamma = \frac{E}{m_0c^2}. \tag{3.338}$$

Integreerides selle võrrandi, saame

$$t = \frac{2\mathcal{L}}{m_0c^2(1-\gamma^2)^{3/2}}\left[\sqrt{1-\omega^2}\,\arctan x + \frac{\gamma\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\cdot x}{1+x^2}\right], \tag{3.339}$$

kus

$$x = \sqrt{\frac{\gamma\sqrt{1-\omega^2}+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}}{\gamma\sqrt{1-\omega^2}-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}}}\cdot \tan\frac{\omega\varphi}{2}. \qquad (3.340)$$

"Periheelis" on $\cos\omega\varphi=(2n+1)\pi$, kus n on täisarv. Võttes seega valemites (3.339) ja (3.340) rajadeks $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\omega\varphi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$ ja $-\infty< x<\infty$, leiame:

$$T=\frac{2\pi\mathcal{L}\sqrt{1-\omega^2}}{m_0c^2(1-\gamma^2)^{3/2}}. \qquad (3.341)$$

See valem kehtib ka ringikujulise orbiidi juhul, mil $\gamma=\omega$ ja

$$\tau=\frac{\mathcal{L}\omega}{m_0c\sqrt{1-\omega^2}},$$

olgugi et "periheeli" mõiste kaotab sel juhul mõtte. Siis tähendab T aega, mis kulub $\frac{2\pi}{\omega}$ pikkuse kaare läbimiseks. Nurkkiirus on sel juhul võrdne

$$\frac{2\pi}{\omega T}=\frac{m_0c^2(1-\omega^2)}{\mathcal{L}\omega}$$

ja joonkiirus

$$u=\frac{2\pi\tau}{\omega T}=c\sqrt{1-\omega^2}. \qquad (3.342)$$

See on kooskõlas energia valemiga (3.290), mis annab jaoks samasuguse avaldise, kui seal võtame

$$A=\mathcal{L}c\sqrt{1-\omega^2},\ E=m_0c^2\omega \text{ ja } \tau=\frac{\mathcal{L}\omega}{m_0c\sqrt{1-\omega^2}}.$$

Et üle minna valemis (3.341) mitterelativistlikule piirjuhule, tuleb asendada

$$E = m_0c^2 + \frac{m_0u^2}{2} - \frac{A}{r} = m_0c^2 + \mathcal{E} \; ,$$

kus

$$\mathcal{E} = \frac{m_0u^2}{2} - \frac{A}{r} \tag{3.343}$$

on mitterelativistlik energia ja

$$\sqrt{1-\omega^2} = \frac{A}{\mathcal{L}c} \, .$$

See annab:

$$T = \frac{\pi A \sqrt{m_0}}{\sqrt{2}\,(-\mathcal{E})^{3/2}} \, . \tag{3.344}$$

5. Sama ülesanne nagu eelmine, kuid periood tuleb avaldada osakese omaajas.

L a h e n d u s . Valemitest (3.292) ja (3.303) leiame:

$$d\tau = \frac{\mathcal{L}\omega^4 d\varphi}{m_0c^2\left(\gamma\sqrt{1-\omega^2} - \sqrt{\gamma^2-\omega^2}\cos\omega\varphi\right)^2} \, . \tag{3.345}$$

Integreerides saame

$$\tau = \frac{2\mathcal{L}\gamma}{m_0c^2(1-\gamma^2)^{3/2}}\left[\sqrt{1-\omega^2}\,\operatorname{arctan} x + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\gamma^2-\omega^2}}{\gamma}\cdot\frac{x}{1+x^2}\right], \tag{3.346}$$

kus x on määratud endiselt valemiga (3.340). Võttes rajad $-\infty < x < \infty$ leiame:

$$T = \frac{2\pi\mathcal{L}\gamma\sqrt{1-\omega^2}}{m_0c^2(1-\gamma^2)^{3/2}} \, . \tag{3.347}$$

Võrreldes seda tulemust valemiga (3.341), näeme, et omaaeg on $\frac{m_0c^2}{E} = \gamma^{-1}$ korda inertsiaalsüsteemi ajast väiksem. Ringikujulise orbiidi erijuhul on see suhe võrdne ω^{-1} , nagu valemi (3.342)) põhjal olema peabki.

6. Laetud osake liigub teise, liikumatu laetud osakese väljas nii, et $\mathcal{L}c = A$ (vt. valem (3.305)) ja $E < m_0c^2$. Võttes liikumise alguseks punkti, kus osake on maksimaalsel kaugusel tsentrist (vt. valem (3.312)), leida aeg t ja omaaeg τ polaarnurga φ funktsioonidena.

L a h e n d u s . Valemitest (3.290), (3.292) ja (3.306) leiame diferentsiaalvõrrandid:

$$dt = \frac{2\mathcal{L}\gamma}{m_0c^2}\cdot\frac{1+\gamma^2+\gamma^2\varphi^2}{(1-\gamma^2+\gamma^2\varphi^2)^2}d\varphi \qquad (3.348)$$

ja

$$d\tau = \frac{4\mathcal{L}\gamma^2}{m_0c^2}\cdot\frac{d\varphi}{(1-\gamma^2+\gamma^2\varphi^2)^2}, \qquad (3.349)$$

kus γ tähendab endiselt $\frac{E}{m_0c^2}$. Integreerides saame

$$t = \frac{2\mathcal{L}}{m_0c^2(1-\gamma^2)^{3/2}}\left[\arctan\frac{\gamma\varphi}{\sqrt{1-\gamma^2}} + \frac{\gamma^3\sqrt{1-\gamma^2}\,\varphi}{1-\gamma^2+\gamma^2\varphi^2}\right] \qquad (3.350)$$

ja

$$\tau = \frac{2\mathcal{L}\gamma}{m_0c^2(1-\gamma^2)^{3/2}}\left[\arctan\frac{\gamma\varphi}{\sqrt{1-\gamma^2}} + \frac{\gamma\sqrt{1-\gamma^2}\,\varphi}{1-\gamma^2+\gamma^2\varphi^2}\right]. \qquad (3.351)$$

Kui asetame siia rajad $0 \leqslant \varphi < \infty$, siis, tähistades vastavad t ja τ väärtused indeksiga 0, leiame:

$$t_0 = \frac{\pi \mathcal{L}}{m_0 c^2 (1-\gamma^2)^{3/2}} , \tag{3.352}$$

$$\tau_0 = \frac{\pi \mathcal{L} \gamma}{m_0 c^2 (1-\gamma^2)^{3/2}} . \tag{3.353}$$

Nende suuruste tähendus on ilmselt see, et $t < t_0$ või vastavalt $\tau < \tau_0$ puhul kestab liikumine koonduvat spiraali mööda edasi, kuid $t > t_0$ ja $\tau > \tau_0$ puhul enam liikumist ei ole. Mis toimub just hetkel $t = t_0$ või omaaja hetkel $\tau = \tau_0$, selle kohta mingit kindlat järeldust tuletada ei saa.

Märgime, et suhe

$$\frac{\tau_0}{t_0} = \gamma = \frac{E}{m_0 c^2} \tag{3.354}$$

on võrdne analoogilise suhtega tiirlemise perioodi jaoks "elliptilise" liikumise juhul (vt. eelmine ülesanne).

7. Laetud osake liigub teise, liikumatu laetud osakese väljas nii, et $\mathcal{L}c < A$ (vt. valem (3.308)) ja $E < m_0 c^2$, nii et osake jääb oma liikumises lõplikule kaugusele tsentrist. Arvutada nagu eelmises ülesandes t ja τ polaarnurga φ funktsioonidena ja leida ka osakese tsentrisse langemise aeg t_0 ja omaaeg τ_0.

L a h e n d u s . Vajalikud diferentsiaalvõrrandid saab tuletada valemitest (3.290), (3.292) ja (3.310). Nad on niisugused:

$$dt = \frac{\mathcal{L} w^2}{m_0 c^2} \cdot \frac{\sqrt{1+w^2}\sqrt{\gamma^2+w^2}\, \mathrm{ch}\, w\varphi - \gamma}{(\sqrt{\gamma^2+w^2}\, \mathrm{ch}\, w\varphi - \gamma\sqrt{1+w^2})^2}\, d\varphi \tag{3.355}$$

ja

$$d\tau = \frac{\mathcal{L} w^4 d\varphi}{m_0 c^2 (\sqrt{\gamma^2+w^2}\, ch\, w\varphi - \gamma\sqrt{1+w^2})^2}\,, \tag{3.356}$$

kus w ja γ on endise tähendusega (valemid (3.309) ja (3.338). Integreerimisel tuleb eristada kolm juhtu: $|\gamma| < 1$, $\gamma < -1$ ja $\gamma = -1$. Alghetkeks valime nagu eelmises ülesandes hetke, mil osake on maksimaalsel kaugusel tsentrist.

1) Esimesel juhul on $-m_0c^2 < E < m_0c^2$. Siis on integraalid järgmise kujuga:

$$t = \frac{2\mathcal{L}}{m_0c^2(1-\gamma^2)^{3/2}}\Big[\sqrt{1+w^2}\,\arctan x + \\ + \gamma\sqrt{\gamma^2+w^2}\cdot\frac{x}{1+x^2}\Big] \tag{3.357}$$

ja

$$\tau = \frac{2\mathcal{L}}{m_0c^2(1-\gamma^2)^{3/2}}\Big[\gamma\sqrt{1+w^2}\,\arctan x + \\ + \frac{\sqrt{\gamma^2+w^2}\cdot x}{1+x^2}\Big]\,, \tag{3.358}$$

kus

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma^2+w^2}+\gamma\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\gamma^2+w^2}-\gamma\sqrt{1+w^2}}}\cdot th\frac{w\varphi}{2}\,. \tag{3.359}$$

Asetades rajad $0 \leqslant \varphi < \infty$, leiame:

$$t_0 = \frac{\mathcal{L}}{m_0c^2(1-\gamma^2)}\Big[w\gamma + \frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1-\gamma^2}}\arccos\Big(-\frac{\gamma\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\gamma^2+w^2}}\Big)\Big] \tag{3.360}$$

ja

$$\tau_0 = \frac{\mathcal{L}}{m_0 c^2 (1-\gamma^2)} \left[w + \frac{\gamma\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{1-\gamma^2}} \arccos\left(-\frac{\gamma\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\gamma^2+w^2}}\right)\right]. \tag{3.361}$$

Erijuhul $E = 0$ saame

$$t_0 = \frac{\pi \mathcal{L}\sqrt{1+w^2}}{2 m_0 c^2}, \qquad \tau_0 = \frac{\mathcal{L} w}{m_0 c^2}. \tag{3.362}$$

2) Teisel juhul on $E < -m_0 c^2$. Siis saame järgmised integraalid:

$$t = \frac{2\mathcal{L}}{m_0 c^2 (\gamma^2 - 1)^{3/2}} \left[-\sqrt{1+w^2} \cdot \operatorname{Arth} x - \gamma\sqrt{\gamma^2+w^2} \cdot \frac{x}{1-x^2}\right] \tag{3.363}$$

ja

$$\tau = \frac{2\mathcal{L}}{m_0 c^2 (\gamma^2 - 1)^{3/2}} \left[-\gamma\sqrt{1+w^2} \cdot \operatorname{Arth} x - \sqrt{\gamma^2+w^2} \cdot \frac{x}{1-x^2}\right], \tag{3.364}$$

kus

$$x = \sqrt{\frac{-\gamma\sqrt{1+w^2} - \sqrt{\gamma^2+w^2}}{-\gamma\sqrt{1+w^2} + \sqrt{\gamma^2+w^2}}} \cdot \operatorname{th} \frac{w\varphi}{2}. \tag{3.365}$$

Asetades rajad, leiame:

$$t_0 = \frac{\mathcal{L}}{m_0 c^2(\gamma^2-1)}\left[-\gamma w - \frac{\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\gamma^2-1}}\,\mathrm{Arch}\left(-\frac{\gamma\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\gamma^2+w^2}}\right)\right] \tag{3.366}$$

ja

$$\tau_0 = \frac{\mathcal{L}}{m_0 c^2(\gamma^2-1)}\left[-w - \frac{\gamma\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\gamma^2-1}}\,\mathrm{Arch}\left(-\frac{\gamma\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\gamma^2+w^2}}\right)\right]. \tag{3.367}$$

3) Kolmandal juhul on $E = -m_0 c^2$. Siis leiame:

$$t = \frac{\mathcal{L} w}{2 m_0 c^2(1+w^2)}\left[(w^2+2)\,\mathrm{th}\frac{w\varphi}{2} + \frac{w^2}{3}\,\mathrm{th}^3\frac{w\varphi}{2}\right] \tag{3.368}$$

ja

$$\tau = \frac{\mathcal{L} w^3}{2 m_0 c^2(1+w^2)}\left[\mathrm{th}\frac{w\varphi}{2} - \frac{1}{3}\,\mathrm{th}^3\frac{w\varphi}{2}\right]. \tag{3.369}$$

Siit

$$t_0 = \frac{\mathcal{L} w(2w^2+3)}{3 m_0 c^2(1+w^2)} \tag{3.370}$$

ja

$$\tau_0 = \frac{\mathcal{L} w^3}{3 m_0 c^2(1+w^2)}. \tag{3.371}$$

Seega on kõik nõutud suurused arvutatud. Lisaks arvutame veel suhte $\frac{\tau_0}{t_0}$. Esimesel kahel juhul avaldub see kujul:

$$\frac{\tau_0}{t_0} = \mathrm{th}(\Delta + \Gamma), \tag{3.372}$$

kus esimesel juhul

$$th\,\Gamma = \gamma\,,$$

$$th\,\Delta = \frac{w\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{1+w^2}}\arccos^{-1}\left(-\frac{\gamma\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\gamma^2+w^2}}\right) \tag{3.373}$$

ja teisel juhul

$$th\,\Gamma = \frac{1}{\gamma}\,,$$

$$th\,\Delta = \frac{\sqrt{1+w^2}}{w\sqrt{\gamma^2-1}}\,\mathrm{Arch}\left(-\frac{\gamma\sqrt{1+w^2}}{\sqrt{\gamma^2+w^2}}\right). \tag{3.374}$$

Kolmandal juhul on

$$\frac{\tau_0}{t_0} = \frac{w^2}{2w^2+3}\,. \tag{3.375}$$

Olgu märgitud, et valemitega (3.373) ja (3.374) defineeritud suurused Δ on reaalsed, sest parematel poöltel seisavad 1-st väiksemad arvud. Selles veendume järgmiselt. Teise valemi (3.373) vôime ümber kirjutada kujul:

$$th\,\Delta = -\gamma\cdot\frac{-\dfrac{w\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma\sqrt{1+w^2}}}{\arctan\left(-\dfrac{w\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma\sqrt{1+w^2}}\right)}\,,\quad \gamma\leqslant 0$$

$$th\,\Delta = \gamma\cdot\frac{\dfrac{w\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma\sqrt{1+w^2}}}{\pi-\arctan\left(\dfrac{w\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma\sqrt{1+w^2}}\right)} \leqslant \gamma\cdot\frac{\dfrac{w\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma\sqrt{1+w^2}}}{\arctan\left(\dfrac{w\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma\sqrt{1+w^2}}\right)}\,,\quad \gamma\geqslant 0.$$

Seega igal juhul

$$th\Delta \leqslant |\gamma| \cdot \frac{\dfrac{w\sqrt{1-\gamma^2}}{|\gamma|\sqrt{1+w^2}}}{\arctan\left(\dfrac{w\sqrt{1-\gamma^2}}{|\gamma|\sqrt{1+w^2}}\right)} . \tag{3.376}$$

Parema poole teine tegur ilmselt kasvab argumendi $\frac{w\sqrt{1-\gamma^2}}{|\gamma|\sqrt{1+w^2}}$ kasvades, mis omakorda fikseeritud γ puhul kasvab w kasvades (või $\gamma=0$ korral jääb muutumatuks). Sellest järgneb, et kui asendame valemis (3.376) $w\to\infty$, saame veel tugevama võrratuse:

$$th\Delta < \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-\gamma^2}}{|\gamma|}\right)}$$

ehk

$$th\Delta < \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\arcsin\left(\sqrt{1-\gamma^2}\right)} < 1 ,$$

mida oligi tarvis näidata. Analoogiliselt on teine valem (3.374) esitatav kujul

$$th\Delta = \frac{1}{|\gamma|} \cdot \frac{Arth\left(\dfrac{w\sqrt{\gamma^2-1}}{|\gamma|\sqrt{1+w^2}}\right)}{\dfrac{w\sqrt{\gamma^2-1}}{|\gamma|\sqrt{1+w^2}}} . \tag{3.377}$$

Parema poole teine tegur kasvab argumendi $\frac{w\sqrt{\gamma^2-1}}{|\gamma|\sqrt{1+w^2}}$ kasvades, ja see omakorda kasvab fikseeritud γ juures, kui kasvab w. Siit järgneb, et

$$th\Delta < \frac{Arth\left(\dfrac{\sqrt{\gamma^2-1}}{|\gamma|}\right)}{\sqrt{\gamma^2-1}}$$

ehk

$$th\Delta < \frac{Arsh(\sqrt{\gamma^2-1})}{\sqrt{\gamma^2-1}} < 1,$$

mida oligi vaja näidata. Et Γ on ka reaalne, see on ilmne (sest esimesel juhul on $|\gamma|<1$ ja teisel juhul $|\gamma|>1$).

Lõpuks vaatame, millistel eeldustel on suhe $\frac{\tau_0}{t_0}$ võimalikult väike. Olgu γ väärtus fikseeritud. Siis on $\frac{\tau_0}{t_0}$ kõigil juhtudel seda väiksem, mida väiksem on w . See järgneb valemitest (3.375) - (3.377). Eeldades, et w on väga väike, arendame $\frac{\tau_0}{t_0}$ avaldised ritta, piirdudes kõige madalamat järku liikmetega w suhtes. Tulemused on niisugused:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0}{t_0} &= \gamma, \quad \gamma>0 \\ \frac{\tau_0}{t_0} &= \frac{2w}{\pi}, \quad \gamma=0 \\ \frac{\tau_0}{t_0} &= -\frac{w^2}{3\gamma}, \quad \gamma<0. \end{aligned} \tag{3.378}$$

Järelikult on $\frac{\tau_0}{t_0}$ seda väiksem, mida väiksem on energia. $\gamma>0$ juures kehtiv $\frac{\tau_0}{t_0}$ väärtus γ on kooskõlas eelmises ülesandes leitud vaartusega (vt. valem (3.354)), nagu peabki olema, sest seal oli $w=0$ ja siin on $w\to 0$.

8. Osake seisumassiga m_0 asetseb staatilises homogeenses väljas, mida kirjeldab ruumisarnane vektor S_μ . See väli mõjub osakesesse jõuga

$$\mathcal{F}_\mu = g\,(c^2 S_\mu + u_\mu u_\nu S_\nu), \tag{3.379}$$

kus g on invariantne konstant ja u_μ on osakese kiirus. Leida osakese integraalne liikumisvõrrand ja omaaeg.

L a h e n d u s . Liikumise diferentsiaalvõrrandid saame üldisest valemist

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \mathcal{F}_\mu$$

kujul:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{g[(c^2-u^2)\vec{S}+\vec{u}(\vec{u}\vec{S}-cS_0)]}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

ja

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{g(-u^2 S_0 + c\vec{u}\vec{S})}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

kus $(\vec{S}, iS_0)$ on S_μ komponendid. Et väljavektor on ruumisarnane, valime inertsiaalsüsteemi, kus $S_0 = 0$. Siis saavad eelmised võrrandid kuju:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{g[(c^2-u^2)\vec{S}+\vec{u}\cdot\vec{u}\vec{S}]}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{gc\vec{u}\vec{S}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Korrutades teise võrrandi $\frac{\vec{u}}{c}$ -ga ja lahutades esimesest, saame

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{gc^2}{m_0}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\vec{S}. \tag{3.380}$$

Et väli on homogeenne, valime $\vec{S}$ suuna x-teljeks. Siis

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{du_x}{dt} &= \frac{gc^2S}{m_0}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right), \\
\frac{du_y}{dt} &= 0, \\
\frac{du_z}{dt} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.381}
$$

Kahest viimasest võrrandist järgneb:

$$
\left.\begin{aligned}
u_y &= u_{oy} \\
u_z &= u_{oz}
\end{aligned}\right\} \tag{3.382}
$$

ehk, kui valime z-telje algkiirusega risti, siis $u_z=0$, s. o. liikumine toimub xy-tasandis.

Integreerides esimest võrrandit (3.388), leiame:

$$
u_x = c\sqrt{1-\frac{u_{oy}^2}{c^2}}\cdot th\left(\frac{cgS}{m_0}\sqrt{1-\frac{u_{oy}^2}{c^2}}(t+t_0)\right), \tag{3.383}
$$

kus t_0 on defineeritud valemiga

$$
th\left(\frac{cgS}{m_0}\sqrt{1-\frac{u_{oy}^2}{c^2}}\,t_0\right) = \frac{u_{ox}/c}{\sqrt{1-\frac{u_{oy}^2}{c^2}}}. \tag{3.384}
$$

Veelkordne integreerimine annab

$$
x = \frac{m_0}{gS}\left\{\ln ch\left[\frac{cgS}{m_0}\sqrt{1-\frac{u_{oy}^2}{c^2}}(t+t_0)\right] - \ln\frac{\sqrt{1-\frac{u_{oy}^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u_0^2}{c^2}}}\right\} \tag{3.385}
$$

ja

$$y = u_{oy} t \,. \tag{3.386}$$

Siin on koordinaatide x, y algväärtused võetud võrdseks nulliga.

Omaaja leidmiseks lähtume diferentsiaalvõrrandist

$$d\tau = dt\sqrt{1-u^2/c^2}\,,$$

ehk (3.382) ja (3.383) põhjal

$$d\tau = \frac{\sqrt{1-\frac{u_{oy}^2}{c^2}}\,dt}{ch\left[\frac{cgS}{m_o}\sqrt{1-\frac{u_{oy}^2}{c^2}}\,(t+t_o)\right]} \,. \tag{3.387}$$

Integreerides leiame:

$$\tau = \frac{m_o}{cgS}\left\{\arctan\left[sh\left(\frac{cgS}{m_o}\sqrt{1-\frac{u_{oy}^2}{c^2}}\,(t+t_o)\right)\right] - \arctan\left(\frac{\frac{u_{ox}}{c}\sqrt{1-\frac{u_{oy}^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u_o^2}{c^2}}}\right)\right\} . \tag{3.388}$$

§ 18. Relativistlik reaktiivne liikumine.

Reaktiivse liikumisega kõige laiemas tähenduses on tegemist juhul, kui keha seisumass konstantne ei ole. Dünaamika põhivõrrand

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{d}{d\tau}(m_o u_\mu)$$

saab sel juhul kuju:

$$\mathcal{F}_\mu = m_o\frac{du_\mu}{d\tau} + u_\mu\frac{dm_o}{d\tau} \,. \tag{3.389}$$

Korrutades kiirusega u_μ, saame

$$\mathcal{F}_\mu u_\mu = -c^2 \frac{dm_0}{d\tau} . \qquad (3.390)$$

Siit nähtub, et muutuva seisumassi juhul on alati olemas nullist erinev neljamõõtmeline jõud.

Alljärgnevalt tuletame mõned põhivalemid, mis seovad neljamõõtmelist jõudu reaktiivse liikumise juhul kolmemõõtmeliste suurustega.

Et kolmemõõtmeline jõuvektor on igal juhul defineeritud valemiga

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} ,$$

siis kehtivad ka reaktiivse liikumise puhul seosed

$$\mathcal{F}_k = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad (3.391)$$

ja

$$\mathcal{F}_4 = \frac{ic}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{dm}{dt} \qquad (3.392)$$

(vt. (3.146) ja (3.147)); sellevastu valemid (3.148) ja (3.149) ei kehti, sest nende tuletamisel eeldasime seisumassi muutumatust. See tähendab muuseas seda, et neljamõõtmeline jõud ei tarvitse reaktiivse liikumise korral olla ruumisarnane (vrd. § 15 2. ülesanne). Ta võib olla ka ajasarnane või ka isotroopne (allpool veendume selles lähemalt). Neljamõõtmelise jõu ajasarnasus tähendab niisuguse inertsiaalsüsteemi olemasolu, milles kolm esimest komponenti on võrdsed nulliga (vt. § 13 9. ülesanne). Valemi (3.391) järgi on siis ka kolmemõõtmeline jõuvektor võrdne nulliga, kuid siiski ei ole liikumine relativistlikus mõttes jõuvaba. Ühe sellise näitega oli meil juba tegemist § 16 3. ülesandes.

Valemi (3.148) asemel kehtib reaktiivse liikumise juhul valem (3.390), millest samal viisil nagu valemi (3.149) tuletamisel saame

$$\mathcal{F}_4 = \frac{i\vec{\mathcal{F}}\vec{u}/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + ic\frac{dm_0}{dt} . \tag{3.393}$$

See valem on valemi (3.149) üldistus. Siit ja valemist (3.392) leiame:

$$\vec{\mathcal{F}}\vec{u} = c^2\frac{dm}{dt} - c^2\sqrt{1-u^2/c^2}\,\frac{dm_0}{dt} . \tag{3.394}$$

Seesama seos, mis on valemi (3.150) üldistuseks, tuleb välja ka jõu $\vec{\mathcal{F}}$ avaldisest:

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{d}{dt}(m\vec{u}) ,$$

mis annab:

$$\vec{\mathcal{F}} = \vec{u}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{u}}{dt} ; \tag{3.395}$$

selle korrutamisel kiirusega $\vec{u}$ saame

$$\vec{\mathcal{F}}\vec{u} = u^2\frac{dm}{dt} + m\vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt} ; \tag{3.396}$$

et aga

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{dm_0}{dt} + \frac{m_0\vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt}}{c^2(1-u^2/c^2)^{3/2}} , \tag{3.397}$$

siis, elimineerides mõlemast viimasest valemist $\vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt}$, saamegi (3.394). Märgime, et valem (3.396) on ekvivalentne valemiga (3.394); kolmanda ekvivalentse kuju saame elimineerides mõlemast $\frac{dm}{dt}$:

$$\vec{\mathcal{F}}\vec{u} = \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{dm_0}{dt} + \frac{m_0\vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} . \qquad (3.398)$$

Valemi (3.394) võime tuletada veel ühel viisil (vrd. § 15).

Et

$$\vec{p}^2 = c^2(m^2 - m_0^2) ,$$

siis

$$\vec{p}\frac{d\vec{p}}{dt} = c^2\left(m\frac{dm}{dt} - m_0\frac{dm_0}{dt}\right).$$

Asendades vasakul poolel $\vec{p} = m\vec{u}$ ja $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\mathcal{F}}$ ning jagades läbi massiga m , saamegi (3.394).

Lõpuks tuletame valemi neljamõõtmelise jõu absoluutväärtuse ruudu jaoks. Valemitest (3.391) ja (3.393) järgneb:

$$\mathcal{F}_\mu \mathcal{F}_\mu = \frac{\vec{\mathcal{F}}^2 - (\vec{\mathcal{F}}\vec{u}/c)^2}{1-u^2/c^2} - \frac{2\vec{\mathcal{F}}\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\frac{dm_0}{dt} - c^2\left(\frac{dm_0}{dt}\right)^2 .$$

(3.399)

Et $\mathcal{F}_\mu \mathcal{F}_\mu$ on invariant, võime avaldada seda keha (hetkelise) paigaloleku inertsiaalsüsteemis. Kui kolmemõõtmelise jõu tähistame selles süsteemis $\vec{\mathcal{F}}'$, siis eelmisest valemist saame

$$\mathcal{F}_\mu \mathcal{F}_\mu = \vec{\mathcal{F}}'^2 - c^2\left(\frac{dm_0}{d\tau}\right)^2 . \qquad (3.400)$$

Oleme tuletanud hulga valemeid, mis järelduvad dünaamika põhivõrrandist. Alljärgnevalt uurime reaktiivset liikumist lähemalt, kusjuures vaatleme ainult puhast reaktiivset liikumist, s. o. niisugust, mille puhul kehasse ei mõju välisjõud, vaid mõjub ainult seisumassi muutumisest tingitud jõud. Sel juhul tuleb arvestada ilmsel kujul massi ja impulsi jäävuse seadusi. Need seadused kehtivad küll ka välisjõudude olemasolu korral, kuid ainult kaasa arvestades nende jõudude allikate massi ja impulssi; kui aga, vastavalt välisjõu mõistele, nimetatud allikad jäävad impulsi ja massi bilansis arvestamata, siis ei ole vaadeldava süsteemi mass ega impulss jäävad.

Kõige lihtsam on impulsi ja massi jäävust arvestada keha hetkelise paigaloleku inertsiaalsüsteemis. Siis on mass võrdne seisumassiga, impulss võrdne nulliga, aja diferentsiaal dt võrdne omaaja diferentsiaaliga $d\tau$; mass muutub omaaja ühikus $\frac{dm_o}{d\tau}$ võrra ja impulss

$$\frac{d}{d\tau}(m_o\vec{u}') = m_o\frac{d\vec{u}'}{d\tau} = m_o\vec{a}$$

võrra, kus $\vec{u}'$ on kiirus hetkelise paigaloleku süsteemis (s. o. $\vec{u}'=0$) ja

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}'}{d\tau} \tag{3.401}$$

on kiirendus samas süsteemis. Valemid (3.393) ja (3.395) saavad siis kuju:

$$\vec{\mathcal{F}}' = m_o\vec{a}, \tag{3.402}$$

$$\mathcal{F}_4' = ic\frac{dm_o}{d\tau}. \tag{3.403}$$

Impulsi ja massi jäävuse põhjal peab tekkima väljaspool vaadeldavat keha selle omaaja ühiku kohta impulss $-m_o\vec{a}$

ja mass $-\frac{dm_0}{d\tau}$. See tähendab, et keha peab endast eraldama massi koos impulsiga. Kui keha omaaja ühiku kohta eraldub temast kiirusega $\vec{v}$ mass $d\mu(\vec{v})$, siis

$$\frac{dm_0}{d\tau} = -\int d\mu(\vec{v}) \tag{3.404}$$

ja

$$m_0\vec{a} = -\int \vec{v}\,d\mu(\vec{v}) . \tag{3.405}$$

Siin tähendavad $\vec{v}$ ja $d\mu(\vec{v})$ kiirust ja massi vaadeldava keha hetkelise paigaloleku inertsiaalsüsteemis.

Kirjutame võrrandid (3.404) ja (3.405) sobivate tähistuste abil lihtsamal kujul ümber. Tähistame

$$\int d\mu(\vec{v}) = \mu , \tag{3.406}$$

s. o. μ on summaarne mass, mis eraldub kehast, omades mistahes kiirust, keha omaaja ühiku kohta. Edasi olgu

$$\frac{1}{\mu}\int \vec{v}\,d\mu(\vec{v}) = \vec{v}_k , \tag{3.407}$$

s. o. $\vec{v}_k$ on eralduva massi keskmine kiirus. Nüüd saavad võrrandid (3.404) ja (3.405) järgmise kuju:

$$\frac{dm_0}{d\tau} = -\mu \tag{3.408}$$

ja

$$m_0\vec{a} = -\mu\vec{v}_k . \tag{3.409}$$

Viimasest võrrandist saame seose ka vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{v}_k$ absoluutväärtuste vahel:

$$m_0 a = |\mu|\, v_k . \tag{3.410}$$

Siin me kirjutame $|\mu|$, sest μ võib olla ka negatiivne ja isegi võrdne nulliga. Juba $d\mu(\vec{v})$ võib olla negatiivne. Negatiivne $d\mu(\vec{v})$ või μ tähendab seda, et keha ei eralda mitte massi väljapoole, vaid, vastupidi, võtab väljastpoolt massi juurde. Juhul $\mu=0$ suurus $\vec{v}_\kappa$ on määramatu (kui $\int\vec{v}d\mu(\vec{v})=0$) või lõpmatu (kui $\int\vec{v}d\mu(\vec{v})\neq 0$). Esimesel juhul (3.409) põhjal $\vec{a}=0$, teisel juhul $\vec{a}\neq 0$; ent mõlemal juhul $\frac{a}{v_\kappa}=0$.

Siinkohal juhime tähelepanu ka sellele, et eralduva massi keskmine kiirus $\vec{v}_\kappa$ on absoluutväärtuselt valguse kiirusest kindlasti väiksem ainult sel juhul, kui kõik massid $d\mu(\vec{v})$ on ühe ja sama märgiga. Et $|\vec{v}|\leqslant c$, siis on (3.407) põhjal sel juhul ka $|\vec{v}_\kappa|\leqslant c$. Kui aga massid $d\mu(\vec{v})$ on erinevate märkidega, siis v_κ võib olla ka suurem kui c ja $\mu=0$ korral võib, nagu äsja nägime, olla isegi lõpmatu. Seega on nimetus "keskmine kiirus" sel juhul üsna tinglik.

Vaatame veel, kuidas sõltub neljamõõtmelise jõu absoluutväärtuse ruut sellest "keskmisest kiirusest". Asetades valemi (3.400) paremale poolele $\vec{\mathcal{F}}'$ asemele (3.402) ja (3.409) põhjal $-\mu\vec{v}_\kappa$ ja $\frac{dm_0}{d\tau}$ asemele (3.408) põhjal μ , leiame:

$$\mathcal{F}_\mu\mathcal{F}_\mu=-\mu^2(c^2-v_\kappa^2)\ . \qquad (3.411)$$

Siit nähtub, et kui kõik $d\mu(\vec{v})$ on samamärgilised, siis $\mathcal{F}_\mu\mathcal{F}_\mu\leqslant 0$, s. o. jõud on kindlasti ajasarnane, või $v_\kappa=0$ korral isotroopne vektor. Kui aga $d\mu(\vec{v})$ on erinevate märkidega, siis jõud võib olla ka ruumisarnane (kuid võib olla ka ajasarnane või isotroopne).

Pöördume nüüd tagasi võrrandite (3.408) - (3.410) juurde. Viimasele neist anname veel lihtsama kuju, defineerides suuruse

$$\gamma = \pm \frac{a}{v_k} , \qquad (3.412)$$

kus + kehtib $\mu > 0$ ja - $\mu < 0$ korral. Siis saame

$$\mu = \gamma m_0 . \qquad (3.413)$$

Seega sõltub seisumass ainult α ja V_k suhtest, mitte aga kummastki suurusest eraldi.

Võrrandisüsteem (3.408), (3.413) sisaldab kolm suurust, m_0, μ, γ , mis kõik on omaaja funktsioonid. Kui üks neist on ette antud, siis määravad need võrrandid ülejäänud kaks. Juhul kui m_0 on antud, saame μ ja γ nendest võrranditest vahetult. Vaatleme ülejäänud kaht juhtu.

1) Kui antud on γ , siis, elimineerides võrranditest μ , leiame:

$$\frac{dm_0}{m_0} = -\gamma d\tau . \qquad (3.414)$$

Integreerides saame

$$m_0 = m_{00} \exp\left(-\int_0^\tau \gamma d\tau\right) , \qquad (3.415)$$

kus m_{00} on seisumassi algväärtus. Edasi (3.413) annab

$$\mu = \gamma m_{00} \exp\left(-\int_0^\tau \gamma d\tau\right) . \qquad (3.416)$$

2) Kui on antud μ , siis võrrandist (3.409) saame

$$m_0 = m_{00} - \int_0^\tau \mu d\tau , \qquad (3.417)$$

kuna võrrand (3.413) annab

$$\gamma = \frac{\mu}{m_{oo} - \int_0^\tau \mu d\tau} . \qquad (3.418)$$

Nendest ülesannetest hoopis eraldi seisab keha liikumise integraalse võrrandi leidmise ülesanne. Selleks piisab täielikult kiirenduse $\vec{a}$ tundmisest (koos algtingimustega). Seega on just kiirendus see suurus, mis γ kaudu seob keha liikumise kinemaatilisi integraalseid karakteristikuid tema seisumassiga.

Reaktiivselt liikuva keha integraalse liikumisvõrrandi leidmise ülesanne on puhtkinemaatiline ega ole seetõttu iseloomulik just reaktiivsele liikumisele. Täpselt samalaadne oleks see ülesanne ka mistahes mittereaktiivse liikumise puhul, kui on vaid ette antud kiirendus hetkelise paigaloleku inertsiaalsüsteemis omaaja funktsioonina. Mis meid siin aga eriti huvitab, on liikumise integraalsete karakteristikute seos seisumassiga. Selleks on meil valemid (3.415) või (3.417) - (3.418) juba olemas.

Asume nüüd küsimuse juurde detailsemalt. Kõige esmalt paneme kirja diferentsiaalvõrrandi kiiruse $\vec{u}$ jaoks. Kiirenduse $\frac{d\vec{u}}{dt}$ avaldamiseks kasutame kiirenduse teisendusvalemit (3.164). Seal tuleb võtta $\vec{u} \to \vec{u}' = 0$, $\vec{\beta} = -\frac{\vec{u}}{c}$ ja $\vec{a}' = \frac{d\vec{u}}{dt}$. Siis saame

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left[\vec{a} - \frac{\vec{a}\vec{u} \cdot \vec{u}}{u^2} \left(1 - \sqrt{1 - u^2/c^2}\right)\right] . \qquad (3.419)$$

Et siin kiirendus $\vec{a}$ on hetkelise paigaloleku süsteemis antud omaaja funktsioonina, vaatleme ka $\vec{u}$ omaaja funktsioonina. Kuna

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}} ,$$

siis

$$\frac{d\vec{u}}{d\tau} = \sqrt{1-u^2/c^2}\left[\vec{a} - \frac{\vec{a}\vec{u}\cdot\vec{u}}{u^2}\left(1-\sqrt{1-u^2/c^2}\right)\right]. \tag{3.420}$$

See võrrand määrab $\vec{u}(\tau)$. Kui selle lahend on käes, tuleb lahendada diferentsiaalvõrrandid

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{3.421}$$

ja

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} , \tag{3.422}$$

mis annavad $\vec{r}(\tau)$ ja $t(\tau)$. Sel viisil saame kohavektori $\vec{r}$ ja kiiruse $\vec{u}$ ajalise olenevuse parameetrilises kujus, kus parameetriks on τ . Elimineerides τ , saame ka otsese ajalise olenevuse $\vec{r}(t)$ ja $\vec{u}(t)$.

Võrrandi (3.420) lahendamine on üldjuhul siiski üsna keerukas. Seetõttu piirdume alljärgnevalt vaid lihtsamate erijuhtudega.

Esimese juhuna vaatleme sirgjoonelist liikumist, eeldades, et kiirendus $\vec{a}$ on muutumatu sihiga ning sama on ka algkiiruse siht. Siis saame võrrandi (3.420) kujul

$$\frac{du}{d\tau} = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)a . \tag{3.423}$$

Siin on kasulik sisse tuua parameeter φ samal viisil nagu tegime §-s 17 hüperboolse liikumise puhul:

$$th\varphi = \frac{u}{c} . \tag{3.424}$$

Siis saab võrrand (3.423) kuju:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{a}{c} \, . \tag{3.425}$$

Tuues selle seose abil võrranditesse (3.431) ja (3.422) asemele φ , leiame:

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{c}{a} ch\varphi \tag{3.426}$$

ja

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{c^2}{a} sh\varphi \, , \tag{3.427}$$

kus x on liikuva keha koordinaat. Integreerides saame

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{c}\int_0^\tau a d\tau, \tag{3.428}$$

kus

$$th\varphi_0 = \frac{u_0}{c} \tag{3.429}$$

ja u_0 on algkiirus. Edasi,

$$t = \int_0^\tau ch\left(\varphi_0 + \frac{1}{c}\int_0^\tau a d\tau\right) d\tau \tag{3.430}$$

ja

$$x = c\int_0^\tau sh\left(\varphi_0 + \frac{1}{c}\int_0^\tau a d\tau\right) d\tau \, . \tag{3.431}$$

Valemid (3.430) ja (3.431) annavad reaktiivse liikumise probleemi täieliku lahenduse vaadeldaval juhul. Kui näiteks a = const., siis

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{c}{a}\left[sh\left(\frac{a\tau}{c} + \varphi_0\right) - sh\varphi_0\right], \\ x &= \frac{c^2}{a}\left[ch\left(\frac{a\tau}{c} + \varphi_0\right) - ch\varphi_0\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3.432}$$

Need on hüperboolse liikumise valemid, nagu peabki olema a konstantsuse tõttu.

Vaatleme teist juhtu.. Olgu nüüd $\vec{a}$ absoluutväärtuselt ja suunalt konstantne, kuid liikumine on kõverjooneline, sest algkiiruse siht erineb $\vec{a}$ omast. Võrrandi (3.420) integreerimiseks teeme temast esmalt kaks võrrandit, korrutades teda skalaarselt $\vec{u}$-ga ja $\vec{a}$-ga. Arvestades $\vec{a}$ konstantsust, saame:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(u^2) = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\vec{a}\vec{u}, \\ &\frac{d}{d\tau}(\vec{a}\vec{u}) = \sqrt{1-u^2/c^2}\left[a^2-\frac{(\vec{a}\vec{u})^2}{u^2}\left(1-\sqrt{1-u^2/c^2}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3.433}$$

Kasutades jälle asendust (3.424), leiame siit:

$$\left.\begin{aligned} &th\varphi\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\vec{a}\vec{u}}{c^2}, \\ &\frac{d}{d\tau}(\vec{a}\vec{u}) = \frac{a^2}{ch\varphi} - \frac{(\vec{a}\vec{u})^2}{2c^2ch^2\frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.434}$$

Neid võrrandeid võib veelgi lihtsustada, tuues sisse vektorite $\vec{u}$ ja $\vec{a}$ vahelise nurga α. Siis $\vec{a}\vec{u} = au\cos\alpha = ac\cos\alpha\, th\varphi$ ja võrrandid saavad kuju:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{a}{c}\cos\alpha, \\ &\frac{d\alpha}{d\tau} = -\frac{a}{c}\frac{\sin\alpha}{sh\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{3.435}$$

Selle võrrandisüsteemi lahendamiseks elimineerime α. Siis saame φ jaoks võrrandi:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + sh\varphi\,\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \frac{a^2}{c^2}. \tag{3.436}$$

Selle võrrandi lahendame järgmiselt. Et

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right) = \frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}\left[\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right],$$

siis

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \frac{sh\varphi}{2}\frac{d}{d\varphi}\left[\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right] = \frac{a^2}{c^2}.$$

Integreerides leiame:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = C\, cth^2\frac{\varphi}{2} - \frac{a^2}{c^2 sh^2\frac{\varphi}{2}}, \qquad (3.437)$$

kus C on integreerimiskonstant. Selle väärtuse leiame algtingimustest järgmiselt. Esimesest võrrandist (3.435) järgneb:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_0 = \frac{a}{c}\cos\alpha_0 ,$$

kus indeks 0 tähistab algväärtusi. Seega

$$\frac{a^2}{c^2}\cos^2\alpha_0 = C\, cth^2\frac{\varphi_0}{2} - \frac{a^2}{c^2 sh^2\frac{\varphi_0}{2}}.$$

Siit

$$C = \frac{a^2}{c^2}\left(1 - th^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\alpha_0\right). \qquad (3.438)$$

Nüüd saab võrrand (3.437) kuju:

$$d\tau = \frac{c}{a}\cdot\frac{sh\frac{\varphi}{2}\, d\varphi}{\pm\sqrt{\left(1 - th^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\alpha_0\right)ch^2\frac{\varphi}{2} - 1}}, \qquad (3.439)$$

kus juure märk on esimese võrrandi (3.435) põhjal sama mis $\cos\alpha$ oma. Integreerimise hõlbustamiseks toome sisse tähistused:

$$\eta = \sqrt{1 - th^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\alpha_0} \qquad (3.440)$$

ja

$$sh\theta = \eta\, ch\varphi_0 \cos\alpha_0 . \qquad (3.441)$$

Siis

$$d\tau = \frac{c}{a} \cdot \frac{sh\frac{\varphi}{2} d\varphi}{\pm\sqrt{\eta^2 ch^2\frac{\varphi}{2} - 1}} . \tag{3.442}$$

Integreerides leiame:

$$ch\frac{\varphi}{2} = \frac{ch\left(\frac{a\eta\tau}{2c} + \frac{\theta}{2}\right)}{\eta} . \tag{3.443}$$

Edasi tuleb leida $\alpha(\tau)$. Selleks kasutame võrrandeid (3.435), mis annavad:

$$\frac{d\varphi}{sh\varphi} + \frac{d\alpha}{tan\alpha} = 0 . \tag{3.444}$$

Integreerimine annab:

$$sin\alpha\, th\frac{\varphi}{2} = sin\alpha_0\, th\frac{\varphi_0}{2} . \tag{3.445}$$

Siit valemi (3.443) abil leiame:

$$tan\alpha = \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta} cth\left(\frac{a\eta\tau}{2c} + \frac{\theta}{2}\right) . \tag{3.446}$$

Lõpuks tuleb leida võrranditest (3.421) ja (3.422) ka t ja $\vec{r}$. Võttes $\vec{a}$ suuna x-teljeks ja $(\vec{a}, \vec{u}_0)$-tasandi xy-tasandiks, näeme, et liikumine toimubki selles tasandis. Võrrand (3.421) saab (3.443) põhjal kuju:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{ch\left(\frac{a\eta\tau}{c} + \theta\right)}{\eta^2} + \frac{1-\eta^2}{\eta^2} , \tag{3.447}$$

kuna (3.422) asemele saame võrrandid

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= c \cdot sh\varphi\, cos\alpha, \\ \frac{dy}{d\tau} &= c \cdot sh\varphi\, sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{3.448}$$

ehk (3.443) ja (3.446) põhjal

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{c}{\eta} sh\left(\frac{a\eta\tau}{c} + \theta\right), \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{c\sqrt{1-\eta^2}}{\eta^2}\left[ch\left(\frac{a\eta\tau}{c} + \theta\right) + 1\right] . \end{aligned}\right\} \tag{3.449}$$

Integreerides võrrandid (3.447) ja (3.449), leiame;

$$x = \frac{c^2}{a\eta^2}\left[ch\left(\frac{a\eta\tau}{c}+\theta\right) - ch\,\theta\right], \tag{3.450}$$

$$y = \frac{c^2\sqrt{1-\eta^2}}{a\eta^3}\left[sh\left(\frac{a\eta\tau}{c}+\theta\right) - sh\,\theta\right] + \frac{c(1-\eta^2)\tau}{\eta^2}, \tag{3.451}$$

$$t = \frac{c}{a\eta^3}\left[sh\left(\frac{a\eta\tau}{c}+\theta\right) - sh\,\theta\right] + \frac{(1-\eta^2)\tau}{\eta^2}. \tag{3.452}$$

Kiiruse absoluutväärtuse saame valemist (3.443) (silmas pidades seost (3.424)) kujul:

$$\frac{u}{c} = \frac{2\,ch\left(\frac{a\eta\tau}{2c}+\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{ch^2\left(\frac{a\eta\tau}{2c}+\frac{\theta}{2}\right)-\eta^2}}{ch\left(\frac{a\eta\tau}{c}+\theta\right)+1-\eta^2}, \tag{3.453}$$

kusjuures

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{\eta^2}{ch\left(\frac{a\eta\tau}{c}+\theta\right)+1-\eta^2}, \tag{3.454}$$

kuna kiiruse komponendid avalduvad valemitest (3.449) ja (3.454) järgmiselt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_x}{c} &= \frac{\eta\, sh\left(\frac{a\eta\tau}{c}+\theta\right)}{ch\left(\frac{a\eta\tau}{c}+\theta\right)+1-\eta^2}, \\ \frac{u_y}{c} &= \frac{\sqrt{1-\eta^2}\left[ch\left(\frac{a\eta\tau}{c}+\theta\right)+1\right]}{ch\left(\frac{a\eta\tau}{c}+\theta\right)+1-\eta^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.455}$$

Seega on meil lahendus vaadeldava juhu jaoks, s. o. konstantse kiirenduse $\vec{a}$ korral, täielikult käes. Eelmise erijuhu konstantse kiirenduse puhuks saame siit tehes $\alpha_0 = 0$. Siis on $\eta = 1$, $\theta = \varphi_0$, $y = 0$ ning valemid (3.450) ja (3.452) saavad identseks valemitega (3.432).

Väärib märkimist veel valemitest (3.451) ja (3.452) järelduv seos

$$y = c \cdot th\frac{\varphi_0}{2} \sin\alpha_0 \cdot (t + \tau) \ . \tag{3.456}$$

Esitatud kahe juhuga me piirdume. Kui peale kiirenduse on antud ka V_k või μ, siis määravad valemid (3.415) või (3.417) omaaja funktsioonina ka seisumassi, mida võib siis siduda ka liikumise teiste integraalsete karakteristikutega (nagu kiirus, aeg või läbitud tee pikkus). Alljärgnevalt vaatleme teiste ülesannete seas ka mõningaid sellesse liiki kuuluvaid.

Ü l e s a n d e d .

1. Näidata, et etteantud $\vec{a}(\tau)$ korral on suhe $\frac{m_0}{m_{00}}$ $d\mu(\vec{v}) > 0$ juhul $V_k = c$ juures suurim ning $d\mu(\vec{v}) < 0$ juhul väikseim.

L a h e n d u s . Valemitest (3.411) ja (3.415) järgneb:

$$\ln\frac{m_0}{m_{00}} = \mp\int_0^\tau \frac{a\,d\tau}{V_k} \ , \tag{3.457}$$

kus kaksikmärk vastab kaksikmärgile võrratuses $\mu \gtrless 0$. Kui $a(\tau)$ on ette antud, siis on integraal väikseima väärtusega $V_k = c$ puhul, seega tõesti $\ln\frac{m_0}{m_{00}}$ on $\mu > 0$ juhul suurima ja $\mu < 0$ juhul väikseima väärtusega.

2. Eeldades sirgjoonelise reaktiivse liikumise juhul $a=$ const. ja $V_k=$ const. ja võttes algkiiruse võrdseks nulliga, leida läbitud tee pikkuse, aja ja kiiruse sõltuvus seisumassist.

L a h e n d u s . Kirjutame valemi (3.457) ümber kujul:

$$\tau = \pm \frac{V_k}{a} \ln \frac{m_{oo}}{m_o} . \tag{3.458}$$

Asetades selle avaldise valemitesse (3.432), kus tuleb võtta $\varphi_o = 0$, leiame:

$$x = \frac{c^2}{2a}\left[\left(\frac{m_{oo}}{m_o}\right)^{\frac{V_k}{2c}} - \left(\frac{m_{oo}}{m_o}\right)^{-\frac{V_k}{2c}}\right]^2, \tag{3.459}$$

$$t = \pm \frac{c}{2a}\left[\left(\frac{m_{oo}}{m_o}\right)^{\frac{V_k}{c}} - \left(\frac{m_{oo}}{m_o}\right)^{-\frac{V_k}{c}}\right]. \tag{3.460}$$

Et samadest valemitest (3.432) järgneb

$$\frac{u}{c} = th\left(\frac{a\tau}{c}\right), \tag{3.461}$$

siis

$$\frac{u}{c} = \pm \frac{\left(\frac{m_{oo}}{m_o}\right)^{\frac{2V_k}{c}} - 1}{\left(\frac{m_{oo}}{m_o}\right)^{\frac{2V_k}{c}} + 1} . \tag{3.462}$$

Kaksikmärk vastab siin jälle kaksikmärgile võrratuses $\mu \gtrless 0$. Et $\mu > 0$ korral on $\frac{m_{oo}}{m_o} > 1$ ja $\mu < 0$ korral $\frac{m_{oo}}{m_o} < 1$, siis on ka t ja $\frac{u}{c}$ valemites (3.460) ja (3.462), vaatamata seal seisvale kaksikmärgile, alati positiivsed.

Kui $V_k = c$, siis lihtsustuvad valemid x, t ja $\frac{u}{c}$ jaoks:

$$x = \frac{c^2}{2a} \cdot \frac{\left(\frac{m_{oo}}{m_o} - 1\right)^2}{\frac{m_{oo}}{m_o}} , \tag{3,463}$$

$$t = \pm \frac{c}{2a} \cdot \frac{\left(\frac{m_{oo}}{m_o}\right)^2 - 1}{\frac{m_{oo}}{m_o}} , \tag{3.464}$$

$$\frac{u}{c} = \pm \frac{\left(\frac{m_{oo}}{m_o}\right)^2 - 1}{\left(\frac{m_{oo}}{m_o}\right)^2 + 1} . \tag{3.465}$$

3. Liikumatust kiirgusallikast lähtub paralleelne kiirtekimp, mis langeb kehale, neeldub selles täielikult ja paneb ta reaktiivselt liikuma. Keha seisumassi algväärtus on m_{oo} . Ta asetseb alghetkel kiirgusallika juures ja tema algkiirus on null, nii et liikumine on sirgjooneline. Eeldades, et keha kiirendus a hetkelise paigaloleku süsteemis on konstantne, leida kaugus x , millele liigub keha ajaga t , samuti omaaeg τ , keha kiirus u hetkel t , seisumassi väärtus m_o sel hetkel ja kiirgusallika töötamise kestus T , mis on vajalik liikumiseks kuni hetkeni t , allika hetkeline võimsus P ja keskmine võimsus $\bar{P}$.

L a h e n d u s . Et liikumine on hüperboolne, võime kasutada juba varem tuletatud valemeid (3.432), mis annavad:

$$x = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right) \tag{3.466}$$

ja

$$\tau = \frac{c}{a} \ln\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} + \frac{at}{c}\right). \qquad (3.467)$$

Lôppkiirus on $u = \frac{dx}{dt}$ s. o.

$$u = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}. \qquad (3.468)$$

Seisumassi väärtuse hetkel t leiame valemist (3.415), kus tuleb võtta

$$\gamma = -\frac{a}{c}$$

Seega

$$m_0 = m_{00} \exp\left(\frac{a\tau}{c}\right) \qquad (3.469)$$

ehk

$$m_0 = m_{00}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} + \frac{at}{c}\right). \qquad (3.470)$$

Et leida kiirgusallika töötamise kestus, mis vastab hetkele t, tuleb arvestada, et töötamise lôpphetkel T väljasaadetud kiirgus peab jôudma keha juurde hetkel t; seega

$$c(t-T) = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right)$$

Siit leiame

$$T = t - \frac{c}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right) \qquad (3.471)$$

ehk, ümberpöördult,

$$t = \frac{T(1-aT/2c)}{1-aT/c}. \qquad (3.472)$$

Keskmise vôimsuse saame jagades töötamise ajaga T kogu massi, mis lähtub selle aja vältel allikast. Et keha lôppmass on

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

ehk (3.468) ja (3.470) põhjal

$$m = m_{00}\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}+\frac{at}{c}\right), \tag{3.473}$$

ja et kogu kiirguse mass neeldub kehas, siis

$$\bar{P} = \frac{m-m_{00}}{T} \tag{3.474}$$

ehk

$$\bar{P} = \frac{am_{00}}{2c}\left(\frac{at}{c}+\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}\right)\left(1+\frac{at}{c}+\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}\right). \tag{3.475}$$

Lihtsama avaldise saame $\bar{P}$ jaoks T või u funktsioonina. Valemite (3.468) ja (3.472) abil leiame:

$$\bar{P} = \frac{am_{00}}{c}\cdot\frac{1-aT/2c}{(1-aT/c)^2} \tag{3.476}$$

ja

$$\bar{P} = \frac{am_{00}}{2c}\left(\frac{1+u/c}{1-u/c}+\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}\right). \tag{3.477}$$

Lõpuks tuleb leida hetkeline võimsus aja T funktsioonina. Omaaja ühikus kehale kiirusega c langev mass võrdub hetkelise paigaloleku süsteemis valemi (3.410) põhjal $\frac{am_0}{c}$. Sama mass kiirgusallika paigaloleku süsteemis on võrdne seega

$$\frac{am_0}{c}\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}$$

(siin tuleb kasutada neljamõõtmelise impulsi teisendusvalemit). Siit järgneb, et

$$P = \frac{am_0}{c}\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}\cdot\frac{d\tau}{dT}. \tag{3.478}$$

Arvestades valemeid (3.467), (3.468), (3.470) ja (3.471), leiame:

$$P = \frac{am_{oo}}{c} \cdot \frac{1}{(1-aT/c)^3} \, . \tag{3.479}$$

Sellest valemist võime uuesti arvutada keskmise võimsuse:

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(T)\,dT = \frac{am_{oo}}{c} \cdot \frac{1-aT/2c}{(1-aT/c)^2} \, ,$$

kooskõlas teisel teel leitud avaldisega (3.476).

4. Sama ülesanne, selle vahega, et kiired peegelduvad kehalt tagasi paralleelse kimbuna täielikult.

L a h e n d u s . Valemid (3.466) - (3.468) jäävad muutumata, sest liikumine on endiselt hüperboolne. Nüüd on aga $V_k = \infty$ ja $\gamma = 0$. Seetõttu (3.469) ja (3.470) asemele saame

$$m_0 = m_{oo} \, , \tag{3.480}$$

s. o. seisumass on konstantne. Endiseks jäävad ilmselt ka valemid (3.471) ja (3.472). Keskmise võimsuse valem (3.474) aga siin jälle ei kehti. Mass, mida kiirgusallikas välja saadab, liigub keha hetkelise paigaloleku süsteemis enne peegeldumist kiirusega c ja pärast peegeldumist liigub seesama mass kiirusega $-c$. Korrutades seda massi teguriga $\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}$, saame langeva massi väärtuse kiirgusallika süsteemis, ning korrutades teguriga $\sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}}$, saame peegeldunud massi väärtuse kiirgusallika süsteemis. Seda võib järeldada impulsi teisendusvalemist. Järelikult muundub langevast massist ainult murdosa

$$1-\frac{1-u/c}{1+u/c}=\frac{2u/c}{1+u/c}$$

liikuva keha massiks. Siit järgneb, et kiirgusallikast väljasaadetav mass, mis on vajalik kehale kiiruse u andmiseks, võrdub

$$\int_0^u \frac{1+u/c}{2u/c}\,dm=\frac{m_{oo}}{2}\int_0^u \frac{(1+u/c)\,du}{c(1-u^2/c^2)^{3/2}}=\frac{m_{oo}}{2}\left(\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}-1\right), \tag{3.481}$$

sest

$$m=\frac{m_{oo}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\,.$$

Keskmine võimsus võrdub selle massi ja aja T jagatisega:

$$\overline{P}=\frac{m_{oo}}{2T}\left(\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}-1\right)$$

ehk, valemite (3.468) ja (3.471) põhjal,

$$\overline{P}=\frac{am_{oo}}{2c}\left(\frac{at}{c}+\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}\right) \tag{3.482}$$

Avaldades $\overline{P}$ T kaudu, saame

$$\overline{P}=\frac{am_{oo}}{2c}\cdot\frac{1}{1-aT/c} \tag{3.483}$$

ning u kaudu:

$$\overline{P}=\frac{am_{oo}}{2c}\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}\,. \tag{3.484}$$

Hetkelise võimsuse arvutamiseks tuleb arvestada, et omaaja ühikus kehale kiirusega c langev mass ei ole võrdne (hetkelise paigaloleku süsteemis) mitte $\frac{am_o}{c}$, vaid, nagu järgneb valemist (3.405), ainult $\frac{am_o}{2c}$. Seetõttu tuleb ka valemisse (3.478) juurde tegur $\frac{1}{2}$. Peale selle on seal

$m_0 = m_{oo}$. Niiviisi saame

$$P = \frac{a m_{oo}}{2c} \cdot \frac{1}{(1 - aT/c)^2}, \tag{3.485}$$

mis on kooskõlas ka keskmise võimsuse avaldisega (3.483).

5. Sama ülesanne, kuid kehale langev kiirgus peegeldub osaliselt, konstantse peegeldumiskoefitsiendiga τ.

L a h e n d u s . Valemid (3.466) - (3.468) ja (3.471) - (3.472) on endiselt jõus. Valemist (3.407) leiame:

$$V_\tau = \frac{c(1+\tau)}{1-\tau} \tag{3.486}$$

ja valemist (3.412):

$$\gamma_0 = -\frac{a}{c} \cdot \frac{1-\tau}{1+\tau}. \tag{3.487}$$

Seega on seisumass (3.415) põhjal võrdne

$$m_o = m_{oo} \exp\left(\frac{a\tau}{c} \cdot \frac{1-\tau}{1+\tau}\right) \tag{3.488}$$

ehk

$$m_o = m_{oo} \left(\frac{at}{c} + \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}\right)^{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \tag{3.489}$$

ehk

$$m_o = m_{oo} \left(\frac{1 + u/c}{1 - u/c}\right)^{\frac{1-\tau}{2(1+\tau)}} \tag{3.490}$$

Keskmise võimsuse arvutame analoogiliselt nagu eelmises ülesandes. Samal viisil nagu seal leiame, et kiirgusallika inertsiaalsüsteemis neeldub kehas temale langevast kiirguse massist murdosa:

$$1 - \tau \cdot \frac{1 - u/c}{1 + u/c}.$$

Et keha mass on (3.490) põhjal võrdne

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{m_{00}}{(1+u/c)^{\frac{\tau}{1+\tau}}(1-u/c)^{\frac{1}{1+\tau}}}, \qquad (3.491)$$

siis tuleb kehale kiiruse u andmiseks kiirgusallikast välja saata mass

$$\int_0^u \frac{dm}{1-\tau\cdot\frac{1-u/c}{1+u/c}} = \frac{m_{00}}{c(1+\tau)}\int_0^u \frac{du}{(1+u/c)^{\frac{\tau}{1+\tau}}(1-u/c)^{\frac{1}{1+\tau}+1}} =$$

$$= \frac{m_{00}}{2}\left[\left(\frac{1+u/c}{1-u/c}\right)^{\frac{1}{1+\tau}} - 1\right]. \qquad (3.492)$$

Siit

$$\bar{P} = \frac{m_{00}}{2T}\left[\left(\frac{1+u/c}{1-u/c}\right)^{\frac{1}{1+\tau}} - 1\right]$$

ehk

$$\bar{P} = \frac{a m_{00}}{2c}\cdot\frac{\left(\frac{at}{c}+\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}\right)^{\frac{2}{1+\tau}}-1}{1+\frac{at}{c}-\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}} \qquad (3.493)$$

ehk

$$\bar{P} = \frac{m_{00}}{2T}\left[\frac{1}{(1-aT/c)^{\frac{2}{1+\tau}}} - 1\right]. \qquad (3.494)$$

Lõpuks arvutame hetkelise võimsuse. Analoogiliselt eelmisele ülesandele tuleb võtta selleks valem (3.478), lisades juurde teguri $\frac{1}{1+\tau}$ ja võttes m_0 jaoks valemi (3.489). Seega

$$P = \frac{a m_{00}}{(1+\tau)c}\cdot\frac{1}{(1-aT/c)^{\frac{3+\tau}{1+\tau}}}. \qquad (3.495)$$

See valem on kooskõlas valemiga (3.494). Võime samuti kergesti veenduda selles, et eelmises kahes ülesandes leitud valemid on viimati tuletatud valemite erikujudeks, mis kehtivad $\tau = 0$ ja $\tau = 1$ korral.

IV peatükk.

RELATIVISTLIK ELEKTRODÜNAAMIKA.

Relativistlik elektrodünaamika vaakuumis on sisult identne Maxwell-Lorentzi elektrodünaamikaga. Erinevus on vaid esitusviisis. Maxwell-Lorentzi võrrandite süsteem on invariantne Lorentzi teisenduste suhtes, seega on ta kooskõlas relatiivsusprintsiibiga. Järelikult lähevad need võrrandid üle muutumatult klassikalisest füüsikast relatiivsusteooriasse. Selle poolest erinevad nad mehhaanika põhivõrranditest. Klassikalise Newtoni mehhaanika põhivõrrandid ei ole invariantsed Lorentzi teisenduste suhtes, mistõttu relativistlik mehhaanika läheb klassikalisest sisuliselt lahku.

Kuigi Maxwell-Lorentzi võrrandid on relativistlikult invariantsed, ei paista see omadus nende tavalises (kolmemõõtmelises) kujus vahetult silma. Nad ei ole selles kujus i l m s e l t invariantsed. Neile saab aga anda neljamõõtmelise, ilmselt invariantse ehk kovariantse kuju. Relativistlikuks elektrodünaamikaks nimetataksegi elektrodünaamika niisugust kovariantset esitust.

§ 19. Maxwell-Lorentzi võrrandite süsteemi neljamõõtmeline kuju.

Kovariantses formuleeringus kirjeldavad elektromagnetilist välja kaks teineteisega seostatud suurust. Üks on neljamõõtmeline vektor U_μ, mida nimetatakse *neljamõõtmeliseks potentsiaaliks* ehk lihtsalt *potentsiaaliks*, ja teine on antisümmeetriline teist järku tensor $\Phi_{\mu\nu}$, mida nimetatakse *elektromagnetilise välja tensoriks* ehk lühidalt *väljatensoriks*. Neljamõõtmelise potentsiaali komponentideks on skalaarne potentsiaal ja kolmemõõtmelise vektorpotentsiaali komponendid. Väljatensori komponentideks on elektri- ja magnetvektori komponendid.

Nende suuruste defineerimisel lähtume Maxwell-Lorentzi võrrandite süsteemist, mis koosneb teatavasti kahest võrrandite paarist:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\rho\vec{u}}{c}, \\ \operatorname{div}\vec{E} &= \rho \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

ja

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\vec{H} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

Teise paari võrrandid rahulduvad identselt, kui $\vec{E}$ ja $\vec{H}$ avaldada potentsiaalide $\vec{A}$ ja φ kaudu:

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi, \\ \vec{H} &= \mathrm{rot}\,\vec{A}.\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Kui potentsiaalid allutada n o r m e e r i m i s t i n g i m u s e l e

$$\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \tag{4.4}$$

saavad 1. paari võrrandid (4.1) lainevõrrandite kuju:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{\rho\vec{u}}{c}, \\ \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\rho.\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Potentsiaalid on valemitega (4.3) defineeritud g r a d i e n t t e i s e n d u s e

$$\left.\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} + \mathrm{grad}\,\psi, \\ \varphi' &= \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

täpsusega, kusjuures skalaarne funktsioon ψ on muidu meelevaldne, kuid peab rahuldama homogeenset lainevõrrandit

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \tag{4.7}$$

selleks et gradientteisendusel säiliks normeerimistingimus.

Nüüd tuleb kõigile neile võrrandeile anda neljamõõtmeline kovariantne kuju. Selleks paneme tähele, et kui normeerimistingimus (4.4) kehtib kõigis inertsiaalsüsteemides, siis on suurus

$$\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial A_k}{\partial x_k} + \frac{\partial(i\varphi)}{\partial(ict)}$$

invariant. Et aga operaator $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, mille komponentideks on $\frac{\partial}{\partial x_k}$ ja $\frac{\partial}{\partial(ict)}$, on vektoriline (vt. (3.13)), siis moodustavad suurused A_k , $i\varphi$ samuti neljamõõtmelise vektori (vt. 1. ülesanne §-s 13). See neljamõõtmeline vektor ongi neljamõõtmeline potentsiaal:

$$U_\mu = (\vec{A}, i\varphi) . \tag{4.8}$$

Seega saab normeerimistingimus järgmise kovariantse kuju:

$$\operatorname{div} U_\mu = 0 \tag{4.9}$$

ehk

$$\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\mu} = 0 . \tag{4.10}$$

Nüüd nähtub gradientteisendusest (4.6), et ψ on invariant, sest need valemid saab esitada kujul:

$$U'_\mu = U_\mu + \operatorname{grad}\psi \tag{4.11}$$

ehk

$$U'_\mu = U_\mu + \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} . \tag{4.12}$$

Lainevõrrandi (4.7) neljamõõtmeline kuju on

$$\Box \psi = 0 \tag{4.13}$$

ehk

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\mu \partial x_\mu} = 0 , \tag{4.14}$$

sest teatavasti on d'Alembert'i operaator

$$\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

identne neljamõõtmelise Laplace'i operaatoriga (vt. (3.19)).

Lainevõrrandite (4.5) vasakutel pooltel seisab samuti d'Alembert'i operaator. Need võib seega mõlemad üles kirjutada $\Box U_\mu$. Sellest järgneb, et voolavektor $\rho\vec{u}$ koos suurusega $ic\rho$ moodustab neljamõõtmelise vektori. Seda vektorit nimetatakse *neljamõõtmeliseks voolutiheduseks* ehk *neljamõõtmeliseks vooluvektoriks* ehk ka lühidalt *voolutiheduseks* või *vooluvektoriks*. Tähistame vooluvektori j_μ, nii et

$$j_\mu = (\rho\vec{u}, ic\rho) . \qquad (4.15)$$

Siis saame lainevõrranditele (4.5) järgmise kovariantse kuju:

$$\Box U_\mu = -\frac{1}{c} j_\mu \qquad (4.16)$$

ehk

$$\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\nu} = -\frac{1}{c} j_\mu \qquad (4.17)$$

Vaatame nüüd, kuidas saab defineerida väljatensorit. Selleks kombineerime võrrandid (4.10) ja (4.17). Asendades esimeses $\mu \to \nu$ ja võttes tuletise x_μ järgi, saame:

$$\frac{\partial^2 U_\nu}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = 0 .$$

Lahutades sellest võrrandi (4.17), leiame:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu}\right) = \frac{1}{c} j_\mu .$$

Tähistades

$$\operatorname{rot} U_\mu = \Phi_{\mu\nu} \qquad (4.18)$$

ehk

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu} = \Phi_{\mu\nu} , \qquad (4.19)$$

kirjutame selle tulemuse ümber kujju:

$$div\,\Phi_{\mu\nu} = \frac{1}{c} j_\mu \qquad (4.20)$$

ehk

$$\frac{\partial \Phi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c} j_\mu \,. \qquad (4.21)$$

Antisümmeetriline tensor $\Phi_{\mu\nu}$ ongi väljatensor. Veendume, et tema komponentideks on tõesti elektri- ja magnetvektori komponendid. Selleks kirjutame ümber valemid (4.3) järgmiselt (arvestades (4.8)):

$$iE_k = \frac{\partial U_k}{\partial x_4} - \frac{\partial U_4}{\partial x_k}\,,$$

$$H_1 = \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3}\,,$$

$$H_2 = \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1}\,,$$

$$H_3 = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\,.$$

Siit on näha, et H_k ja iE_k on $rot\,U_\mu$ komponendid, ja nimelt, arvestades tähistust (4.18),

$$\Phi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} . \qquad (4.22)$$

Ühtlasi veendume kergesti, et võrrand (4.20) või (4.21) on Maxwell-Lorentzi võrrandite 1. paari (4.1) neljamõõtmeline kovariantne kuju. Tõepoolest, $div\,\phi_{\mu\nu}$ komponendid avalduvad (4.22) põhjal kui

$$rot\vec{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

ja

$$i\,div\vec{E}.$$

Teisest küljest, vektori $\frac{1}{c}j_\mu$ komponendid ongi just $\frac{\rho\vec{u}}{c}$ ja $i\rho$; seega võrrand (4.21) on tõesti sisult identne võrrandite paariga (4.1).

Viimasena jäi üle võrrandite paar (4.2). Sellele kovariantse kuju andmiseks kirjutame ümber need võrrandid, asendades (4.22) järgi väljavektorite $\vec{E}$, $\vec{H}$ komponendid tensori $\phi_{\mu\nu}$ komponentidega:

$$\frac{\partial\phi_{43}}{\partial x_2}+\frac{\partial\phi_{24}}{\partial x_3}+\frac{\partial\phi_{32}}{\partial x_4}=0,$$

$$\frac{\partial\phi_{41}}{\partial x_3}+\frac{\partial\phi_{34}}{\partial x_1}+\frac{\partial\phi_{31}}{\partial x_4}=0,$$

$$\frac{\partial\phi_{42}}{\partial x_1}+\frac{\partial\phi_{14}}{\partial x_2}+\frac{\partial\phi_{21}}{\partial x_4}=0,$$

$$\frac{\partial\phi_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial\phi_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial\phi_{12}}{\partial x_3}=0.$$

Nüüd võib kõigi nende nelja võrrandi vasakuid pooli vaadelda neljamõõtmelise 3. järku tensori

$$\frac{\partial\phi_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial\phi_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\phi_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}$$

komponentidena. Järelikult sisaldab konvariantne võrrand

$$\frac{\partial\phi_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial\phi_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial\phi_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}=0 \qquad (4.23)$$

endas mõlemad võrrandid (4.2). Kuid lisaks sisaldab ta triviaalseid samasusi, arvult 40, nimelt kui vähemalt kaks indeksit μ, ν, σ hulgast on ühesugused. Nende indeksite erinevate väärtuste kombinatsioonide arv on aga 24, ja et võrrand (4.23) ei muutu indeksite permuteerimisel, on erinevate indeksitega sõltumatute võrrandite arv 4. Need 4 võrrandit ongi sisult identsed võrranditega (4.2). Et vabaneda triviaalsetest samasustest, kirjutame (4.23) asemele pseudovektorilise võrrandi

$$e_{\mu\nu\sigma\tau} \frac{\partial \Phi_{\nu\sigma}}{\partial x_\tau} = 0 \,, \tag{4.24}$$

millel triviaalseid komponente ei ole, vaid indeksi μ väärtused 1,2,3 annavad esimese ja väärtus 4 teise võrrandi (4.2).

Sellega on Maxwell-Lorentzi võrrandite üleviimine kovariantsesse kujju jõudnud lõpule. Teeme kokkuvõtte.

Maxwell-Lorentzi võrrandite süsteem on

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} &= \frac{1}{c} j_\mu \,, \\ e_{\mu\nu\sigma\tau} \frac{\partial \Phi_{\nu\sigma}}{\partial x_\tau} &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

Väljatensor $\Phi_{\mu\nu}$ avaldub potentsiaali U_μ kaudu järgmiselt:

$$\Phi_{\mu\nu} = \frac{\partial U_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu} \,, \tag{4.26}$$

mille läbi teine võrrand (4.25) rahuldub identselt, sest avaldises

$$e_{\mu\nu\sigma\tau}\frac{\partial^2 U_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\tau} - e_{\mu\nu\sigma\tau}\frac{\partial^2 U_\nu}{\partial x_\sigma \partial x_\tau}$$

on kumbki liige võrdne nulliga; esimene võrrand aga saab kuju:

$$\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\nu} = -\frac{1}{c} j_\mu \,, \tag{4.27}$$

eeldusel, et potentsiaal rahuldab normeerimistingimust

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \,. \tag{4.28}$$

Gradientteisendus

$$U'_\mu = U_\mu + \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \,, \tag{4.29}$$

eeldades, et ψ rahuldab võrrandit

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\nu \partial x_\nu} = 0 \,, \tag{4.30}$$

jätab väljatensori muutumatuks (liikmed, mis sisaldavad ψ, U'_μ asetamisel U_μ asemele valemisse (4.26) koonduvad). Samuti jäävad muutumatuks gradientteisendusel normeerimistingimus ja lainevõrrand.

Teatavasti on Maxwell-Lorentzi võrrandite 1. paari järelduseks pidevuse võrrand

$$div(\rho\vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{4.31}$$

Neljamõõtmelise kuju saame sellele, võttes divergentsi esimesest võrrandist (4.25):

$$\frac{\partial^2 \Phi_{\mu\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{1}{c}\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} \,.$$

Vasak pool on siin võrdne nulliga, sest $\Phi_{\mu\nu}$ on antisümmeetriline, kuna operaator $\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$ on sümmeetriline μ ja ν suhtes. Seega

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \tag{4.32}$$

ehk

$$\operatorname{div} j_\mu = 0 \; . \tag{4.33}$$

See ongi pidevuse võrrandi kovariantne kuju, mille sisuline identsus võrrandiga (4.31) nähtub ka j_μ komponentide tähendusest (4.15) järgi.

Ü l e s a n d e d .

1. Tuletada teisendusvalemid elektri- ja magnetvektori komponentide jaoks.

L a h e n d u s . Vaatleme esmalt lihtsamat erijuhtu, kus teine inertsiaalsüsteem liigub esimese suhtes paralleelsete telgedega x-telje suunas. Sel juhul kehtib Lorentzi teisendusmaatriks (2.17). Rakendame tensori teisendusvalemit (3.2) kujul

$$\Phi'_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\mu\alpha}\Phi_{\alpha\beta}\mathcal{L}^T_{\beta\nu} \; , \tag{4.34}$$

millega arvutus taandub kolme maatriksi läbikorrutamisele:

$$\begin{pmatrix} 0 & H'_z & -H'_y & -iE'_x \\ -H'_z & 0 & H'_x & -iE'_y \\ H'_y & -H'_x & 0 & -iE'_z \\ iE'_x & iE'_y & iE'_z & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

Sel viisil leiame:

$$\left.\begin{aligned} E_x' &= E_x \,, \\ E_y' &= \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \,, \\ E_z' &= \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \,, \\ H_x' &= H_x \,, \\ H_y' &= \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \,, \\ H_z' &= \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \,. \end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

Analoogiliselt arvutame ka üldise Lorentzi teisenduse puhul. Eeldame ikkagi, et mõlema inertsiaalsüsteemi ruumilised teljed on vastavalt paralleelsed (maatriks (2.30)). Tegelikult ei sõltu tulemus sellest eeldusest, kui kirjutame valemid vektorkujus. Mõnevõrra komplitseeritum arvutus annab järgmise tulemuse:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}' &= \frac{\vec{E} - \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}\vec{\beta}\,\vec{E}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\times\vec{H}}{\sqrt{1-\beta^2}} \,, \\ \vec{H}' &= \frac{\vec{H} - \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}\vec{\beta}\,\vec{H}\cdot\vec{\beta} - \vec{\beta}\times\vec{E}}{\sqrt{1-\beta^2}} \,. \end{aligned}\right\} \tag{4.36}$$

mida võib teisiti kirjutada ka nii:

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}'&=\vec{E}-\frac{1}{\beta^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\Big)\big(\vec{\beta}\times(\vec{\beta}\times\vec{E})\big)+\frac{\vec{\beta}\times\vec{H}}{\sqrt{1-\beta^2}},\\ \vec{H}'&=\vec{H}-\frac{1}{\beta^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\Big)\big(\vec{\beta}\times(\vec{\beta}\times\vec{H})\big)-\frac{\vec{\beta}\times\vec{E}}{\sqrt{1-\beta^2}}.\end{aligned}\right\}\qquad(4.37)$$

Võrdlus Galilei teisenduse alusel tuletatud valemitega (1.14) näitab, et $\beta \ll 1$ korral, arvestades valemites (4.37) ainult esimest järku liikmeid β suhtes, taanduvadki nad valemiteks (1.14).

2. Veenduda otseselt valemite (4.34) või (4.37) järgi, et $\vec{E}'$ ja $\vec{H}'$ teisendamine samade valemite järgi, kuid vastassuunalise kiirusega $\vec{\beta}\to-\vec{\beta}$, annab tagasi $\vec{E}$ ja $\vec{H}$.

3. Tuletada teisendusvalemid potentsiaalide $\vec{A}$ ja φ jaoks.

L a h e n d u s . Juhul kui Lorentzi teisenduse maatriks on (2.17), saame teisendusvalemi

$$U'_\mu=\mathcal{L}_{\mu\nu}U_\nu$$

alusel järgmised teisendusvalemid $\vec{A}$ ja φ jaoks:

$$\left.\begin{aligned}A'_x&=\frac{A_x-\beta\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}},\\ A'_y&=A_y,\\ A'_z&=A_z,\\ \varphi'&=\frac{\varphi-\beta A_x}{\sqrt{1-\beta^2}}.\end{aligned}\right\}\qquad(4.38)$$

Üldjuhulise teisenduse (2.30) puhul aga leiame:

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\vec{\beta}\vec{A}\cdot\vec{\beta} - \frac{\vec{\beta}\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \varphi' &= \frac{\varphi - \vec{\beta}\vec{A}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (4.39)$$

4. Veenduda otseselt valemite (4.39) järgi, et $\vec{A}'$ ja φ' teisendamine samade valemite järgi, kuid vastassuunalise kiirusega, annab tagasi $\vec{A}$ ja φ.

5. Tuletada väljavektorite $\vec{E}$ ja $\vec{H}$ teisendusvalemid (4.37), lähtudes potentsiaalide teisendusvalemitest (4.39) ning rakendades valemeid (4.3).

L a h e n d u s . Elektrivektori $\vec{E}'$ avaldis, millest tuleb lähtuda, on

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t'} - \mathrm{grad}'\varphi' \quad (4.40)$$

ja magnetvektori $\vec{H}'$ oma

$$\vec{H}' = \mathrm{rot}'\vec{A}'. \quad (4.41)$$

Siin tuleb $\vec{A}'$ ja φ' asendada valemitest (4.39), tuletiste operaatorid uues süsteemis aga avaldada tuletiste operaatorite kaudu vanas süsteemis. Kõigepealt, arvestades, et operaatorid grad, $\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}$ moodustavad neljamõõtmelise vektoroperaatori, ning rakendades sellele teisendusmaatriksit (2.30), leiame:

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\vec{v}\,\mathrm{grad} + \frac{\partial}{\partial t}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4.42)$$

ja

$$\mathrm{grad}' = \mathrm{grad} + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}\,\mathrm{grad} + \frac{\vec{\beta}}{c\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial t} \quad (4.43)$$

Rootori operaatori teisendamiseks paneme tähele, et

$$\mathrm{rot}_i \vec{V} = e_{ikl} \frac{\partial V_l}{\partial x_k} = e_{ikl}\, \mathrm{grad}_k V_l \;,$$

kus $\vec{V}$ on meelevaldne kolmemõõtmeline vektor ja e_{ikl} on täielikult antisümmeetriline kolmemõõtmeline pseudotensor. Seega saame rootori teisendusvalemi gradiendi teisendusvalemist (4.41) kujul:

$$\mathrm{rot}' = \mathrm{rot} + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \vec{\beta} \times (\vec{\beta}\,\mathrm{grad}) + \frac{\vec{\beta} \times \frac{\partial}{\partial t}}{c\sqrt{1-\beta^2}} \;. \tag{4.44}$$

Nüüd jääb asetada valemitesse (4.40) ja (4.41) $\vec{A}'$ ja φ' avaldised valemitest (4.39) ja $\frac{\partial}{\partial t'}$, grad' ja rot' avaldised valemitest (4.42) - (4.44). Saame esmalt järgmised valemid:

$$\vec{E}' = -\frac{\vec{\beta}\,\mathrm{grad} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[\vec{A} + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\vec{\beta}\vec{A}\cdot\vec{\beta} - \frac{\vec{\beta}\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] -$$

$$-\left[\mathrm{grad} + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}\,\mathrm{grad} + \frac{\vec{\beta}}{c\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\partial}{\partial t}\right] \frac{\varphi - \vec{\beta}\vec{A}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ja

$$\vec{H}' = \mathrm{rot}\left[\vec{A} + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\vec{\beta}\vec{A}\cdot\vec{\beta} - \frac{\vec{\beta}\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\vec{\beta} \times \left\{\vec{\beta}\,\mathrm{grad}\left[\vec{A} + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\vec{\beta}\vec{A}\cdot\vec{\beta} - \frac{\vec{\beta}\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\vec{\beta}}{c\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{A} + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\vec{\beta}\vec{A}\cdot\vec{\beta} - \frac{\vec{\beta}\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] .$$

Peale vastavaid teisendusi ja lihtsustusi saamegi siit valemid (4.37).

Juhul kui tegemist on erikujulise Lorentzi teisendusega (2.17), on arvutus tunduvalt lihtsam, mistõttu me seda juhtu siin lähemalt ei vaatle.

6. Näidata, et kui väljavektorid $\vec{E}, \vec{H}$ on mingis inertsiaalsüsteemis absoluutväärtuselt võrdsed, siis on nad ka kõikides inertsiaalsüsteemides absoluutväärtuselt võrdsed.

L a h e n d u s . Et ruumiline pööre (või ka peegeldus) vektorite absoluutväärtusi ei mõjuta, piisab, kui näitame absoluutväärtuste võrdsuse invariantsust Lorentzi erikujulise teisenduse (2.17) puhul. Kasutades valemeid (4.35), saame

$$E'^2 = \frac{E^2 + \beta^2 H^2 - \beta^2 (E_x^2 + H_x^2) - 2\beta (E_y H_z - E_z H_y)}{1-\beta^2}$$

ja

$$H'^2 = \frac{H^2 + \beta^2 E^2 - \beta^2 (E_x^2 + H_x^2) - 2\beta (E_y H_z - E_z H_y)}{1-\beta^2}$$

Siit järgneb:

$$E'^2 - H'^2 = E^2 - H^2 ,$$

s. o. kui $E = H$, siis ka $E' = H'$.

7. Näidata, et kui väljavektorid $\vec{E}, \vec{H}$ on mingis inertsiaalsüsteemis teineteisega risti, siis on nad ka mistahes teises inertsiaalsüsteemis teineteisega risti.

L a h e n d u s . Sama põhjendusega nagu eelmises ülesandes võime piirduda lihtsama Lorentzi teisendusega (2.17). Valemid (4.35) annavad

$$\vec{E}'\vec{H}' = E_x H_x + \frac{(E_y-\beta H_z)(H_y+\beta E_z)+(E_z+\beta H_y)(H_z-\beta E_y)}{1-\beta^2} = \vec{E}\vec{H}.$$

Siit järgneb, et kui $\vec{E}$ ja $\vec{H}$ on risti, s. o. $\vec{E}\vec{H} = 0$, siis ka $\vec{E}'\vec{H}' = 0$. Viimane võrdus tähendab üldiselt seda, et $\vec{E}'$ ja $\vec{H}'$ on risti. Erandiks on juht, kus $\vec{E}'=0$ või $\vec{H}'=0$. Kuid ka sel juhul võib $\vec{E}'$ ja $\vec{H}'$ lugeda teineteisega ristiolevaks, sest nullvektori suund on meelevaldne.

8. Näidata, et suurus $\vec{H}^2-\vec{E}^2$ on invariant ja suurus $\vec{E}\vec{H}$ on pseudoinvariant.

L a h e n d u s . $\vec{H}^2-\vec{E}^2$ invariantsus järgneb valemist

$$\Phi_{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu} = 2(\vec{H}^2-\vec{E}^2), \tag{4.45}$$

mis on kergesti arvutatav (4.22) põhjal. Teise väite tõestamiseks arvutame $\Phi_{\mu\nu}$ suhtes duaalse pseudotensori $\Psi_{\mu\nu}$ (vt. ülesanne 5 §-st 13):

$$\Psi_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} e_{\mu\nu\sigma\tau}\Phi_{\sigma\tau} = \begin{pmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & H_x \\ iE_z & 0 & -iE_x & H_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & H_z \\ -H_x & -H_y & -H_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.46}$$

Korrutades tensori $\Phi_{\mu\nu}$ pseudotensoriga $\Psi_{\mu\nu}$, saame pseudoinvariandi:

$$i\Phi_{\mu\nu}\Psi_{\mu\nu} = \frac{i}{2} e_{\mu\nu\sigma\tau}\Phi_{\mu\nu}\Phi_{\sigma\tau} = 4\vec{E}\vec{H}, \tag{4.47}$$

mida oligi vaja näidata.

Tõestatud lausest järelduvad ka kahe eelmise ülesande väited.

9. Tuletada valem

$$\frac{1}{2}\Phi_{\mu\sigma}\Phi_{\mu\tau}\Phi_{\nu\sigma}\Phi_{\nu\tau} = (\vec{E}^2)^2 + (\vec{H}^2)^2 - 2(\vec{E}\times\vec{H})^2 = inv. \quad (4.48)$$

L a h e n d u s . Invariandi $\frac{1}{2}\Phi_{\mu\sigma}\Phi_{\mu\tau}\Phi_{\nu\sigma}\Phi_{\nu\tau}$ avaldamiseks väljavektorite kaudu kirjutame (4.47) põhjal võrduse:

$$e_{\alpha\beta\varkappa\lambda}\, e_{\mu\nu\rho\sigma}\, \Phi_{\alpha\beta}\, \Phi_{\varkappa\lambda}\Phi_{\mu\nu}\Phi_{\rho\sigma} = -64(\vec{E}\vec{H})^2.$$

Esitades tensori $e_{\alpha\beta\varkappa\lambda}\, e_{\mu\nu\rho\sigma}$ determinandi kujul valemi (3.44) järgi ja summeerides nelja indeksi järgi, saame:

$$8\Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu} - 16\Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\mu}\Phi_{\nu\beta}\Phi_{\nu\mu} = -64(\vec{E}\vec{H})^2.$$

Siit (4.45) põhjal

$$\frac{1}{2}\Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\alpha\mu}\Phi_{\nu\beta}\Phi_{\nu\mu} = 2(\vec{E}\vec{H})^2 + (\vec{H}^2-\vec{E}^2)^2.$$

Et aga

$$(\vec{E}\vec{H})^2 = \vec{E}^2\vec{H}^2 - (\vec{E}\times\vec{H})^2,$$

saamegi pärast seda asendust valemi (4.48).

10. Näidata, et komponendid

$$\vec{A}\,\mathrm{grad}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\varphi\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad i\left(\vec{A}\,\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{1}{c}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

moodustavad neljamootmelise vektori.

L a h e n d u s . Need komponendid on vektori $U_\nu\frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu}$ omad.

11. Näidata, et komponendid

$$\vec{A}\times\vec{H} + \vec{A}\,\mathrm{grad}\,\vec{A} - \varphi\,\mathrm{grad}\,\varphi, \quad i(\vec{A}\vec{E} + \vec{A}\,\mathrm{grad}\,\varphi - \varphi\,\mathrm{div}\vec{A})$$

moodustavad neljamõõtmelise vektori.

L a h e n d u s . Need komponendid kuuluvad vektorile $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}(U_\nu U_\nu)$.

12. Näidata, et kui väljavektorid $\vec{E},\vec{H}$ ei ole absoluutväärtuselt võrdsed ning ühtlasi teineteisega risti, siis leidub lõpmata palju inertsiaalsüsteeme, milles $\vec{E}$ ja $\vec{H}$ on paralleelsed.

L a h e n d u s . Tõestatava lause eelduseks on see, et invariant $\vec{H}^2-\vec{E}^2$ ja pseudoinvariant $\vec{E}\vec{H}$ ei ole mõlemad võrdsed nulliga. Juhul kui väljavektorid antud inertsiaalsüsteemis ei ole juba teineteisega paralleelsed, võtame nende ühise tasandi yz-tasandiks ja ristkorrutise $\vec{E}\times\vec{H}$ suuna x-telje suunaks; kui aga $\vec{E}=0$ või $\vec{H}=0$, siis võib väljavektoreid vaadelda juba paralleelsetena (mõlemad korraga ei saa nulliga võrdsed olla eelduse põhjal). Seega $E_x=H_x=0$. Läheme üle süsteemi, mis liigub x-telje suunas. Valemite (4.35) põhjal on ka seal $E_x'=H_x'=0$. Selleks et väljavektorid uues süsteemis oleksid paralleelsed, peab olema

$$\frac{E_y'}{E_z'}=\frac{H_y'}{H_z'}$$

ehk, (4.35) põhjal

$$(E_yH_z-E_zH_y)(1+\beta^2)=\beta(\vec{E}^2+\vec{H}^2)\,.$$

Et ristkorrutis $\vec{E}\times\vec{H}$ on kiiruse $\vec{\beta}$ suunaline, siis võime selle võrrandi kirjutada ka kujul

$$(1+\beta^2)(\vec{E}\times\vec{H})=(\vec{E}^2+\vec{H}^2)\vec{\beta}$$

ja siit leiame:

$$\frac{1+\beta^2}{\beta}=\frac{E^2+H^2}{EH\sin\psi},$$

kus ψ on $\vec{E}$ ja $\vec{H}$ vaheline nurk. Edasi

$$\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^2 = \frac{E^2+H^2+2EH\sin\psi}{E^2+H^2-2EH\sin\psi}.$$

See võrdus määrab β väärtuse, mille puhul uues süsteemis on väljavektorid paralleelsed. Siit saame:

$$\beta = \frac{\sqrt{E^2+H^2+2EH\sin\psi}-\sqrt{E^2+H^2-2EH\sin\psi}}{\sqrt{E^2+H^2+2EH\sin\psi}+\sqrt{E^2+H^2-2EH\sin\psi}}, \quad (4.49)$$

kust nähtub, et $\beta<1$ kõigil juhtudel peale ainsa juhu, kus $\beta=1$. Selleks juhuks on $E=H$ ning ψ = 90°. Aga just see juht on eeldusega elimineeritud. Seega leidub tõesti inertsiaalsüsteem, milles väljavektorid on paralleelsed.

Võttes nüüd selles inertsiaalsüsteemis väljavektorite ühise suuna x-telje suunaks ja minnes üle mistahes kolmandasse süsteemi, mis liigub eelmise suhtes x-telje suunas, leiame valemite (4.35) järgi, et ka seal on väljavektorid mõlemad paralleelsed, sest neil on ainult x-komponendid nullist erinevad. Seega on niisuguseid süsteeme lõpmata palju.

13. Väljavektorid $\vec{E}, \vec{H}$ on absoluutväärtuselt võrdsed ja moodustavad teineteisega mingis inertsiaalsüsteemis nurga ψ. Kui suur on nurk ψ' väljavektorite vahel teises inertsiaalsüsteemis, mis liigub esimese suhtes kiirusega

$$\vec{v} = \vec{\beta}c = \frac{v(\vec{E}\times\vec{H})}{EH\sin\psi} \quad ?$$

L a h e n d u s . Võttes kiiruse $\vec{v}$ suuna x-telje suunaks ja rakendades teisendusvalemeid (4.35), leiame:

$$|\vec{E}'\times\vec{H}'| = \frac{|\vec{E}\times\vec{H}|(1+\beta^2) - \beta(E^2+H^2)}{1-\beta^2}$$

ja

$$E' = \frac{\sqrt{E^2+\beta^2H^2-2\beta|\vec{E}\times\vec{H}|}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$H' = \frac{\sqrt{H^2+\beta^2E^2-2\beta|\vec{E}\times\vec{H}|}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Siit, arvestades ka, et $E=H$ ja $E'=H'$, leiame:

$$\sin\psi' = \frac{(1+\beta^2)\sin\psi - 2\beta}{1+\beta^2-2\beta\sin\psi}, \qquad (4.50)$$

ehk, tähistades

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{th}\theta &= \sin\psi, \\ \operatorname{th}\theta' &= \sin\psi', \\ \operatorname{th}\alpha &= \beta, \end{aligned}\right\} \qquad (4.51)$$

$$\theta' = \theta - 2\alpha. \qquad (4.52)$$

§ 20. Lorentzi jõud.

Lorentzi jõuks nimetatakse jõudu, mis mõjub elektromagnetilises väljas liikuvasse laengusse. Kui laeng on ruumtihedusega ρ, siis avaldub temasse mõjuva jõu tihedus $\vec{f}$ järgmiselt:

$$\vec{f} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{u}\times\vec{H})\right) \qquad (4.53)$$

kus $\vec{u}$ on laengu kiirus. Kui aga on tegemist diskreetse punktlaenguga e, siis avaldub temasse mõjuv jõud valemina

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{e}{\varepsilon_0}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{u}\times\vec{H})\right). \tag{4.54}$$

Me peame nüüd esitama need valemid kovariantses kujus. Et valemi (4.53) paremal poolel seisavad väljatugevuste korrutised laengu- ja voolutihedusega, siis peab seal kovariantses esituses seisma väljatensori ja vooluvektori korrutis. Et see korrutis peab olema vektor, võib see olla ainult $\Phi_{\mu\nu} j_\nu$, s. o. ühe indeksite paari järgi koondatud korrutis. Arvestades valemeid (4.15) ja (4.22), leiame, et $\Phi_{\mu\nu} j_\nu$ kolm esimest komponenti moodustavad kolmemõõtmelise vektori

$$\rho(\vec{u}\times\vec{H}) + c\rho\vec{E}$$

ja neljas komponent on $i\rho\vec{u}\vec{E}$. Et

$$\rho\vec{u}\vec{E} = \varepsilon_0 \vec{f}\vec{u},$$

siis

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c}\Phi_{\mu\nu} j_\nu = \left(\vec{f},\ \frac{i\vec{f}\vec{u}}{c}\right). \tag{4.55}$$

Punktlaengu korral tuleb vooluvektori asemele võtta laengu neljamõõtmeline kiirusvektor u_μ. Arvestades valemit (3.69), leiame:

$$\frac{e}{\varepsilon_0 c}\Phi_{\mu\nu} u_\nu = \left(\frac{\vec{\mathcal{F}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\ \frac{i\vec{\mathcal{F}}\vec{u}/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right). \tag{4.56}$$

Viimases valemis paremal seisab valemite (3.146) ja (3.149) põhjal neljamõõtmeline jõud $\mathcal{F}_\mu$. Seega ongi meil käes valemi (4.54) kovariantne kuju:

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{e}{\varepsilon_0 c}\Phi_{\mu\nu} u_\nu. \tag{4.57}$$

Siit nähtub ühtlasi, et laeng e on invariant. Valemis

(4.55) sellevastu seisab paremal poolel neljamõõtmeline vektor, mis vastab kolmemõõtmelisele jõutihedusele ja mida nimetame vastavalt neljamõõtmeliseks jõutiheduseks f_μ

$$f_\mu = \left(\vec{f}, \frac{i\vec{f}\vec{u}}{c}\right) . \tag{4.58}$$

Seega omandab valem (4.53) järgmise kovariantse kuju:

$$f_\mu = \frac{1}{\varepsilon_0 c} \Phi_{\mu\nu} j_\nu . \tag{4.59}$$

Vaatleme lõpuks seost jõu ja jõutiheduse vahel. Kolmemõõtmelised vektorid $d\vec{\mathcal{F}}$ ja $\vec{f}$ on seotud ruumielemendi kaudu nii:

$$d\vec{\mathcal{F}} = \vec{f} dV , \tag{4.60}$$

kus $d\vec{\mathcal{F}}$ on ruumielemendis dV olevasse laengusse mõjuv jõud. Neljamõõtmelised vektorid $d\mathcal{F}_\mu$ ja f_μ peavad olema seotud invariantse ruumielemendi kaudu. Kuidas seda defineerida? Neljamõõtmelises aegruumis oleme varem defineerinud neljamõõtmelise ruumielemendi, mis on pseudoinvariant ja mida võib avaldada kujul

$$d\Omega = ic\,dV dt$$

(vt. valem (3.22)). Avaldades

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}} ,$$

kus $d\tau$ on omaaja diferentsiaal, saame:

$$d\Omega = \frac{ic\,dV d\tau}{\sqrt{1-u^2/c^2}} . \tag{4.61}$$

Et $d\tau$ on invariant, siis

$$dV_0 = \frac{dV}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{4.62}$$

on pseudoinvariant. Et $u=0$ korral $dV_0 = dV$, siis tähendab dV_0 laenguelemendi ruumala inertsiaalsüsteemis, milles see element on liikumatu, kas või hetkeliselt. dV on sama elemendi ruumala mingis teises inertsiaalsüsteemis, milles ta liigub kiirusega $\vec{u}$. Tuleb rõhutada, et dV on see ruumielement, mille täidavad antud laenguelemendi kõik punktid ühel ja samal hetkel. On selge, et valem (4.62) väljendab ruumala olenevust kiirusest, mida võib siduda pikkuste lühenemisega (vt. valem (2.93)).

Niisiis, dV_0 on pseudoinvariant. Seega on $|dV_0|$ invariantne ruumielement, mida meil oligi vaja. Korrutades sellega jõutihedust f_μ, saame jõu $d\mathcal{F}_\mu$, sest

$$f_\mu |dV_0| = \left(\frac{\vec{f}\,|dV|}{\sqrt{1-u^2/c^2}} , \frac{i\vec{f}\vec{u}\,|dV|}{c\sqrt{1-u^2/c^2}} \right)$$

ja siit (4.60) põhjal

$$f_\mu |dV_0| = d\mathcal{F}_\mu . \qquad (4.63)$$

Sellele seosele vastab ka seos valemite (4.59) ja (4.57) vahel. Korrutades (4.59) invariantse ruumielemendiga $|dV_0|$ ja arvestades, et

$$j_\nu |dV_0| = \rho u_\nu |dV| , \qquad (4.64)$$

leiame:

$$d\mathcal{F}_\mu = \frac{\rho |dV|}{\varepsilon_0 c} \phi_{\mu\nu} u_\nu .$$

Minnes piirile $dV \to 0$, kusjuures $\rho\,|dV| \to e$, ja asendades $d\mathcal{F}_\mu \to \mathcal{F}_\mu$, saamegi punktlaengusse mõjuva jõu valemi (4.57).

Valemist (4.64) nähtub veel, et laengutihedus ei ole invariant. Invariant on $\rho|dV|$. Et

$$\rho|dV| = \rho\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,|dV_0|,$$

siis on ka

$$\rho_0 = \rho\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{4.65}$$

invariant. See suurus on ilmselt laengutihedus (hetkelise) paigaloleku süsteemis. Suuruse ρ_0 invariantsus nähtub ka voolu- ja kiirusvektori vahelisest seosest, sest (4.15) ja (3.69) järgi on

$$j_\mu = \rho\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,u_\mu$$

ehk

$$j_\mu = \rho_0 u_\mu\,. \tag{4.66}$$

Ü l e s a n d e d .

1. Osake laenguga e ja seisumassiga m_0 liigub kiirusega $\vec{u}$ väljas $\vec{E}, \vec{H}$. Leida tema kiirendus $\vec{a}$.

L a h e n d u s . Jõu ja kiirenduse vahelise seose (3.160) põhjal leiame:

$$\vec{a} = \frac{e}{\varepsilon_0 m_0}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left[\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{u}\times\vec{H}) - \frac{1}{c^2}\vec{u}\,\vec{E}\cdot\vec{u}\right] \tag{4.67}$$

2. Kaks osakest laengutega $+e$ ja $-e$ hakkavad liikuma võrdsete kiirustega $\vec{u}$ kaugusel a teineteisest. Seejuures on $\vec{u}$ neid ühendava sirgjoonega risti. Kui suur peab olema seal lisaks laengute väljale väline homo-

geenne magnetväli H, mille suund on kiiruste tasandiga risti, et osakesed liiguksid kiirenduseta?

L a h e n d u s . Võtame osakeste liikumise suuna x-teljeks ja suuname y-telje negatiivse laengu juurest positiivse laengu poole. Siis eksisteerib laengutega kaasaliikuvas süsteemis Coulombi seaduse põhjal elektriväli

$$E'_y = -\frac{e}{4\pi a^2}$$

(positiivse laengu asukohas). Süsteemis, milles laengud liiguvad kiirusega $\vec{u}$, vastab sellele valemite (4.35) järgi elektriväli

$$E_y = -\frac{e/4\pi a^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \tag{4.68}$$

ja magnetväli

$$H_z = -\frac{eu/4\pi c a^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Võtame lisaks välise homogeense z-telje suunalise magnetvälja H. Siis

$$H_z = H - \frac{eu/4\pi c a^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{4.69}$$

Teisendades E_y ja H_z tagasi paigaloleku süsteemi, peame saama $E'_y=0$ (sest liikumatutesse laengutesse mõjub ainult elektriväli). Niisiis,

$$-\frac{e/4\pi a^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{uH}{c} + \frac{eu^2/4\pi c^2 a^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = 0$$

Siit leiame:

$$H = -\frac{ec\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{4\pi a^2 u}. \tag{4.70}$$

See tulemus on kooskõlas ka valemiga (4.67). Et oleks $\vec{a}=0$, peab olema (arvestades, et $\vec{u}\vec{E}=0$)

$$E_y - \frac{u}{c} H_z = 0 .$$

Asetades siia E_y ja H_z asemele avaldised valemitest (4.68) ja (4.69), saamegi uuesti valemi (4.70).

§ 21. Doppleri efekt ja aberratsioon.

Doppleri efekt ja aberratsioon on nähtused, milles avaldub elektromagnetilise laine sageduse ja levimissuuna olenevus inertsiaalsüsteemist. Vaatleme vaakuumis levivat monokromaatilist tasalainet, mida võime avaldada valemiga

$$U = U_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}, \tag{4.71}$$

kus $\vec{r}$ on kohavektor, t aeg, $\vec{k}$ lainevektor, ω sagedus, U välja kirjeldav suurus (potentsiaal või väljatensor), U_0 selle amplituud. Lainevektori absoluutväärtuse (lainearvu) k ja sageduse vahel kehtib tuntud seos:

$$\omega = ck . \tag{4.72}$$

Üleminekul teise inertsiaalsüsteemi teisenevad U ja U_0 ühesugusel viisil (sest mõlemad on sama liiki suurused). Sellest järgneb, et eksponentsiaaltegur peab olema invariant, s. o.

$$\vec{k}\vec{r} - \omega t = inv. \tag{4.73}$$

Arvestades, et $(\vec{r}, ict)$ on neljamõõtmelise kohavektori komponendid, järeldame, et $\vec{k}$ koos suurusega $\frac{i\omega}{c} = i\kappa$ moodustab samuti neljamõõtmelise vektori (vt. 1. ülesanne §-s 13). Vektorit $(\vec{\kappa}, i\kappa)$ nimetatakse neljamõõtmeliseks lainevektoriks κ_μ :

$$\kappa_\mu = (\vec{\kappa}, i\kappa) = (\vec{\kappa}, \frac{i\omega}{c}) \,. \tag{4.74}$$

Ilmselt on κ_μ isotroopne vektor. Tasalaine valemi (4.71) võime nüüd kirjutada kujul

$$u = u_0 e^{i\kappa_\mu x_\mu} \,. \tag{4.75}$$

Üleminekul antud inertsiaalsüsteemist teise inertsiaalsüsteemi teisenevad vektori κ_μ komponendid üldise valemi järgi

$$\kappa'_\mu = \mathcal{L}_{\mu\nu} \kappa_\nu \,,$$

kus $\mathcal{L}$ on Lorentzi teisenduse maatriks. Eeldades, et teine süsteem liigub esimese suhtes x-telje suunas, s. o. võttes $\mathcal{L}$ valemi (2.17) kujul, leiame:

$$\left.\begin{aligned} \kappa'_x &= \frac{\kappa_x - \beta\omega/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \,, \\ \kappa'_y &= \kappa_y \,, \\ \kappa'_z &= \kappa_z \end{aligned}\right\} \tag{4.76}$$

ja

$$\omega' = \frac{\omega - v\kappa_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \,. \tag{4.77}$$

Need ongi aberratsiooni ja Doppleri efekti valemid. Alljärgnevalt teisendame neid ja teeme vajalikud järeldused.

Tähistame lainevektori suunakoosinused $\cos\mu_1, \cos\mu_2, \cos\mu_3$, nii et

$$\left.\begin{aligned} k_x &= \frac{\omega}{c}\cos\mu_1 , \\ k_y &= \frac{\omega}{c}\cos\mu_2 , \\ k_z &= \frac{\omega}{c}\cos\mu_3 \end{aligned}\right\} \tag{4.78}$$

ja analoogiliselt teises süsteemis: $k_x' = \frac{\omega'}{c}\cos\mu_1'$ jne. Jagades valemid (4.76) läbi valemiga (4.77), saame suunakoosinuste teisendusvalemid:

$$\left.\begin{aligned} \cos\mu_1' &= \frac{\cos\mu_1 - \beta}{1-\beta\cos\mu_1} , \\ \cos\mu_2' &= \frac{\cos\mu_2\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\mu_1} , \\ \cos\mu_3' &= \frac{\cos\mu_3\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\mu_1} . \end{aligned}\right\} \tag{4.79}$$

Valemi (4.77) võib aga ümber kirjutada kujju

$$\omega' = \frac{\omega(1-\beta\cos\mu_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} . \tag{4.80}$$

Peatume selle viimase valemi juures lähemalt.

ω ja ω' tähendavad seal kaht sagedust, mis kuuluvad mõlemad ühele ja samale elektromagnetilisele lainele, kuid erinevates inertsiaalsüsteemides. Mõlemad süsteemid on täiesti meelevaldsed. Valem (4.80) ei sisalda ühtki suurust, mis iseloomustaks laineallikat, s. o. keha, mis seda lainet kiirgab. On aga selge, et kiirgava keha seisukohalt ei ole kõik inertsiaalsüsteemid samaväärsed, vaid eelis kuulub süsteemile, milles kiirgav keha on liikumatu (siin me esialgu eeldame, et kiirgav keha on inertsiaalne). Seetõttu on otstarbekohane esitada Doppleri efekti valem kujul, kus üheks inertsiaalsüsteemiks oleks kiirgava keha paigaloleku süsteem.

Sagedust, mis on vaadeldav kiirgava keha paigaloleku süsteemis, nimetatakse o m a s a g e d u s e k s. Tähistame seda ω_0. See suurus on invariant, sest relatiivsusprintsiibi põhjal peab ta olema ühesugune sõltumatult sellest, millises nimelt inertsiaalsüsteemis on kiirgusallikas liikumatu. On samuti selge, et omasagedus ei sõltu suunast. Mistahes teises inertsiaalsüsteemis, milles kiirgusallikas liigub, erineb vaadeldav sagedus üldiselt omasagedusest ja sõltub ka suunast.

Olgu nüüd valemis (4.80) $\omega' = \omega_0$. See tähendab, et kiirus β on kiirgava keha kiirus süsteemis, milles vaadeldav sagedus on ω. Nurk μ_1 tähendas valemis (4.80) lainevektori ja x-telje vahelist nurka, x-telg oli aga võetud kiiruse β suunas. Et see on kiirgava keha kiirus, siis on ka nurk μ_1 nüüd lainevektori ja kiirgava keha kiiruse vaheliseks nurgaks. x-telje suuna valik ei ole enam oluline. Seetõttu asendame $\mu_1 \to \mu$ ja kirjutame valemi (4.80) ümber kujul

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\mu} . \qquad (4.81)$$

See ongi lõplik valem Doppleri efekti jaoks.

See valem on kehtiv mitte ainult inertsiaalse kiirgusallika puhul, nagu me esialgu eeldasime. Asi seisneb selles, et ka mitteinertsiaalselt liikuv allikas on alati mingis inertsiaalsüsteemis hetkeliselt liikumatu. Kiirgus, mida ta sel hetkel kiirgab, on ilmselt selles hetkelise paigaloleku süsteemis võrdne omasagedusega. Seetõttu kehtib ka valem (4.81); tuleb ainult silmas pidada, et β ei tähenda mitte kiirgusallika kiirust vaatlemise hetkel, vaid kiirgamise hetkel.

Niisamuti ei tarvitse vaatleja olla inertsiaalne. Kui vaatleja liigub nagu allikaski mitteinertsiaalselt, siis tähendab β valemis (4.81) kiirust, millega liikus kiirgav keha kiirgamise hetkel süsteemis, milles vaatleja on vaatlemise hetkel liikumatu. Et kiirguse levimine allikast vaatlejani nõuab aega, tulebki mitteinertsiaalse liikumise puhul eristada kiirgamise ja vaatlemise hetke. μ on niisamuti nurk, mille moodustab kiirgava keha kiirus kiirgamise hetkel süsteemis, milles vaatleja on vaatlemise hetkel liikumatu, selles süsteemis samal hetkel vaadeldava lainevektoriga.

Nüüd uurime vaadeldava sageduse olenevust kiire suunast kiirgusallika kiiruse suhtes, s. o. nurgast μ. Kui $\mu = 0°$ või $\mu = 180°$, siis annab valem (4.81)

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}, \qquad (4.82)$$

kus ülemine märk vastab juhule $\mu = 0°$ ja alumine juhule $\mu = 180°$. Seda efekti nimetatakse Doppleri p i k i - e f e k t i k s (ehk l o n g i t u d i n a a l s e k s efektiks). μ = 0° korral läheneb kiirgav keha otsejoones vaatlejale, μ = 180° korral aga eemaldub. Ligikaudu, $\beta \ll 1$ korral,

$$\omega = \omega_0 (1 \pm \beta) . \tag{4.83}$$

See valem on identne Doppleri efekti mitterelativistliku valemiga (sama täpsuse puhul).

Teise erijuhuna vaatleme μ = 90°. Siis annab valem (4.81)

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2} . \tag{4.84}$$

Seda efekti nimetatakse Doppleri r i s t e f e k t i k s (ehk t r a n s v e r s a a l s e k s efektiks). $\beta \ll 1$ korral on see efekt väga väike (2. järku β suhtes, erinevalt 1. järku pikiefektist), kuid suuremate β väärtuste korral võib ta olla ka küllalt suur. Mitterelativistlik teooria ristefekti üldse ei anna. Huvitav on, et ristefekti võib tõlgendada aja aeglustumise efektina liikuvas kehas. Kui keha kiirgab teatava sagedusega elektromagnetilist lainet, siis toimub selles kehas sama sagedusega perioodiline protsess. Kui keha on liikumatu, siis sagedus on ω_0 , aga kui keha liigub kiirusega v , siis on protsess aeglustunud. Omasagedusele ω_0 vastab omaperiood $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, mis on ühe täisvõnke kestus omaajas. Aga teises inertsiaalsüsteemis, milles keha liigub, kestab täisvõnge

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} ,$$

millele vastabki sagedus

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2}\,.$$

Pikiefekt võib olla kas positiivne $(\omega > \omega_0)$ või negatiivne $(\omega < \omega_0)$, ristefekt on aga alati negatiivne. Üldjuhul võib Doppleri efekti vaadelda piki- ja ristefekti kombinatsioonina. Kui $\mu > 90°$, s. o. kui kiirgusallikas eemaldub vaatlejast, siis on efekt alati negatiivne, sest negatiivsele pikiefektile liitub sama märgiga ristefekt. See järgneb ka otseselt valemist (4.81). Kui aga $\mu < 90°$, siis väiksemate kiiruste juures on efekt positiivne, kuid kui kiirus on küllalt suur, siis muutub ta negatiivseks (ristefekt kaalub üle). See on nii isegi kuitahes väikese μ korral, kui ainult $\mu < 0°$. Positiivne efekt sõltumatult kiiruse väärtusest esineb ainult $\mu = 0°$ juures. Tõepoolest, võttes valemis (4.81) $\omega < \omega_0$, leiame selle tingimusena võrratuse

$$1 - \beta\cos\mu > \sqrt{1-\beta^2}\,. \qquad (4.85)$$

Fikseerides μ, saame siit

$$\beta > \frac{2\cos\mu}{1+\cos^2\mu}\,. \qquad (4.86)$$

Et selle võrratuse parem pool on $\mu > 0°$ korral 1-st väiksem, saab alati valida niisuguse β, et $\omega < \omega_0$. Kui, sellevastu, fikseerime valemis (4.85) β, siis leiame:

$$\mu > \arccos\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$$

ehk

$$\mu > 2\arctan\sqrt[4]{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,. \qquad (4.87)$$

Selle võrratuse vasak pool kahaneb monotoonselt β kasvades 0-st 1-ni. See tähendab, et mida suurem on kiirgusallika kiirus, seda väiksema μ juures toimub üleminek positiivselt Doppleri efektilt negatiivsele. Asendades võrratuses (4.87) võrratusmärgi võrdusmärgiga, leiame, et

$$\tan\frac{\mu}{2}=\sqrt[4]{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{4.88}$$

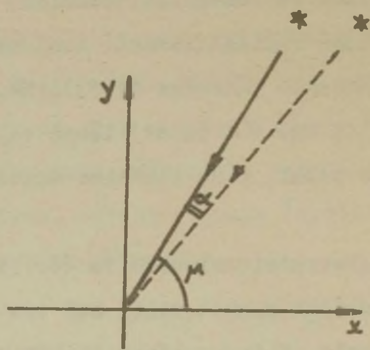
korral on $\omega=\omega_0$.

Doppleri efektil on palju rakendusi füüsikas, kuid siin me neid ei vaatle. Astronoomias võimaldab Doppleri efekt mõõta taevakehade radiaalkiirusi, kusjuures enamasti on küllaldane lineaarne lähendus (4.83). Täpset relativistlikku valemit (4.82) või (4.81) läheb vaja ainult väga suurte kiiruste puhul, mida leitakse ekstragalaktilistel objektidel.

Siirdume nüüd aberratsioonivalemite (4.79) juurde. Aberratsioon on vaadeldav ainult siis, kui vaatleja liigub mitteinertsiaalselt. Kiirgusallika liikumine vaatleja suhtes ei etenda siin mingit osa, vaid oluline on vaatleja üleminek ühest inertsiaalsüsteemist teise. Tähtede aastane aberratsioon ongi tingitud Maakera tiirlemisest Päikese ümber. Kui $\cos\mu_1, \cos\mu_2, \cos\mu_3$ on tähelt tuleva kiirguse suunakoosinused Päikesega seotud inertsiaalsüsteemis, siis näeb Maakeral olev vaatleja kiirgust tulevat suunas, mille määravad valemites (4.79) suunakoosinused $\cos\mu_1', \cos\mu_2', \cos\mu_3'$, kusjuures β tähendab Maakera kiirust Päikese suhtes. Aberratsiooninurgaks α nimetatakse tähe näiv nihe taevavõlvil, mis on põhjustatud aberratsioonist. Kui võtame Maakera kiiruse suuna x-telje suunaks ja xy-tasandi võtame läbi tähe, siis $\mu_3 = \mu_3' = 90°$ ning $\alpha = \mu_1' - \mu_1 = \mu_2 - \mu_2'$. Piirdudes lineaarse lähendusega β suhtes (sest $\beta = 10^{-4}$), leiame:

$$\sin\alpha \approx \alpha = \beta \sin\mu \,, \tag{4.89}$$

kus $\mu = 180° - \mu_1$ on nurk Maakera orbitaalkiiruse ja tähe poole mineva sirgjoone vahel. Täht näib nihkununa α võrra Maakera liikumise suunas (joon. 62). Aasta vältel



Joonis 62.

joonistab täht taevavõlvile ellipsi, mille suure pooltelje pikkus on β ehk 20,5".

Ü l e s a n d e d .

1. Tuletada aberratsioonivalemid, kasutamata tasalaine faasi $\vec{k}\vec{r} - \omega t$ invariantsuse eeldust, vaid nõudes ainult, et faasi väärtused, mis on teineteisega mingis inertsiaalsüsteemis võrdsed, on ka mistahes teises inertsiaalsüsteemis võrdsed.

L a h e n d u s . Olgu mingis inertsiaalsüsteemis faas hetkel t_1 punktis $\vec{r}_1$ võrdne faasiga hetkel t_2 punktis $\vec{r}_2$, s. o.

$$\vec{k}\vec{r}_1 - \omega t_1 = \vec{k}\vec{r}_2 - \omega t_2$$

ehk

$$\vec{k}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \omega(t_2 - t_1).$$

Eelduse järgi kehtib see võrdus ka mistahes teises inertsiaalsüsteemis. Võtame süsteemi, mis liigub x-telje suunas kiirusega v . Avaldades $\vec{r}$ ja t eelmises võrduses Lorentzi teisenduste põhjal $\vec{r}'$ ja t' kaudu, saame:

$$\frac{(k_x - \frac{v\omega}{c^2})(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-\beta^2}} + k_y(y_2' - y_1') + k_z(z_2' - z_1') =$$
$$= \frac{(\omega - k_x v)(t_2' - t_1')}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Võttes $t_2' = t_1'$, saame võrrandi

$$\frac{(k_x - \frac{v\omega}{c^2})(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-\beta^2}} + k_y(y_2' - y_1') + k_z(z_2' - z_1') = 0 .$$

See on tasandi võrrand, mille mistahes kahe punkti kohavektorid on $\vec{r}_1'$ ja $\vec{r}_2'$ ja mille normaali komponendid on

$$\frac{k_x - \frac{v\omega}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} , \ k_y , \ k_z .$$

Et selle tasandi kõikides punktides on faasi väärtus üheaegselt sama, siis on ta laine frondiks teises inertsiaalsüsteemis. Tähistades lainefrondil ühiknormaali komponendid $\cos\mu_1', \cos\mu_2', \cos\mu_3'$, leiame (arvestades, et $\omega = kc$):

$$\cos\mu_1' = \frac{k_x - \beta k}{k - \beta k_x},$$

$$\cos\mu_2' = \frac{k_y\sqrt{1-\beta^2}}{k - \beta k_x},$$

$$\cos\mu_3' = \frac{k_z\sqrt{1-\beta^2}}{k - \beta k_x}.$$

Asendades siin $\frac{k_x}{k} = \cos\mu_1$, $\frac{k_y}{k} = \cos\mu_2$ ja $\frac{k_z}{k} = \cos\mu_3$, saamegi aberratsioonivalemid (4.79).

Märgime, et see meetod ei võimalda tuletada sageduse ega lainevektori komponentide teisendusvalemeid. Selleks on juba vaja faasi invariantsuse eeldust.

2. Vaatleja suhtes liikumatu valgusallika valgus, mille omasagedus on ω_0, langeb nurga ϑ_0 all peeglile, mis liigub kiirusega $v = \beta c$ enda normaali suunas. Leida peegeldumisnurk ϑ ja peegeldunud valguse sagedus ω.

L a h e n d u s . Võtame peegli normaali x-teljeks (joon. 63). Langev kiir moodustab siis x-teljega nurga $\pi - \vartheta_0$ ja peegeldunud kiir nurga ϑ. Teisendame need nurgad esimese valemi (4.79) abil peegli paigaloleku süsteemi. Et selles süsteemis peegeldumisnurk võrdub langemisnurgaga, siis, tähistades nad ϑ', leiame:

$$\cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta_0 + \beta}{1 + \beta\cos\vartheta_0} = \frac{\cos\vartheta - \beta}{1 - \beta\cos\vartheta}. \qquad (4.90)$$

See võrdus määrabki otsitava peegeldumisnurga ϑ:

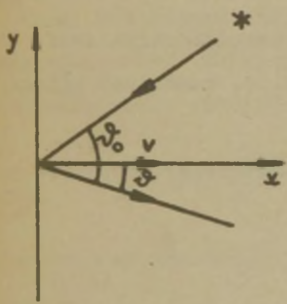
$$\sin\vartheta = \frac{(1-\beta^2)\sin\vartheta_0}{1+2\beta\cos\vartheta_0+\beta^2}\,. \tag{4.91}$$

Teisiti, tähistades

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \operatorname{th}\alpha, \\ \cos\vartheta_0 &= \operatorname{th}\psi_0, \\ \cos\vartheta &= \operatorname{th}\psi, \end{aligned}\right\} \tag{4.92}$$

saame

$$\psi = \psi_0 + 2\alpha. \tag{4.93}$$



Joonis 63.

Peegeldunud valguse sageduse leidmiseks arvestame, et peegli paigaloleku süsteemis liigub valgusallikas x-telje negatiivses suunas kiirusega v, mis moodustab langeva kiirega nurga ϑ'; järelikult on langeva kiire sagedus selles süsteemis (4.81) põhjal võrdne

$$\omega' = \frac{\omega_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\vartheta'}\,.$$

Et peegel on liikumatu, siis on peegeldunud kiire sagedus sama. Teisendame selle tagasi valgusallika paigaloleku süsteemi. Nüüd tuleb rakendada valemit (4.80). ω asemele tuleb sinna panna ω', ω' asemele otsitav ω, β asendada $-\beta$-ga ja μ_1 asemele võtta ϑ'. Niiviisi leiame:

$$\omega = \frac{\omega_0 (1+\beta \cos\vartheta')}{1-\beta\cos\vartheta'} .$$

Asendades siin $\cos\vartheta'$ avaldisega $\cos\vartheta_0$ kaudu valemist (4.90), leiame lõplikult:

$$\omega = \frac{\omega(1+2\beta\cos\vartheta_0+\beta^2)}{1-\beta^2} . \tag{4.94}$$

Need tulemused kehtivad muidugi ka siis, kui peegel liigub vastupidises suunas, s. o. ei lähene valgusallikale, vaid eemaldub sellest. Siis tuleb ainult β lugeda negatiivseks.

3. Tuletada Doppleri efekti ja aberratsioonivalemid korpuskulaarsest aspektist lähtudes, s. o. vaadeldes kiirgust footonite voona.

L a h e n d u s . Footoni neljamõõtmelise impulsi komponendid on

$$p_\mu = (\hbar\vec{k}, i\hbar\omega/c), \tag{4.95}$$

kus $\hbar$ on Plancki konstant

$$\hbar = 1{,}054\cdot 10^{-34}\ J\cdot s. \tag{4.96}$$

Teisendades need komponendid Lorentzi maatriksi abil, saamegi samad valemid (4.76) ja (4.77), sest footoni impulss on võrdeline neljamõõtmelise lainevektoriga (vt. (4.74)):

$$p_\mu = \hbar k_\mu . \tag{4.97}$$

Aberratsioonivalemid võib tuletada veelgi teisiti, kasutamata lainevektori või footoni impulsi mõistet, vaid rakendades valguse kiirusele kiiruste liitmise valemit. Sel teel saame

$$c'_x = \frac{c_x - v}{1 - \frac{c_x v}{c^2}},$$

$$c'_y = \frac{c_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{c_x v}{c^2}},$$

$$c'_z = \frac{c_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{c_x v}{c^2}}.$$

Jagades need valemid läbi kiiruse absoluutväärtusega $c' = c$, saamegi aberratsioonivalemid (4.79).

4. Tasalaines lainevektoriga $\vec{k}$ on elektri- ja magnetvektor risti teineteisega ja lainevektoriga ja on absoluutväärtuselt võrdsed:

$$E = H, \quad \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\vec{E}\times\vec{H}}{EH}.$$

Tuletada aberratsioonivalemid väljavektorite teisendamise teel.

L a h e n d u s. Rakendame väljavektorite komponentide teisendusvalemid (4.35). Et

$$E'H' = E'^2 = \frac{E^2(1+\beta^2) - \beta^2(E_x^2 + H_x^2) - 2\beta(\vec{E}\times\vec{H})_x}{1-\beta^2}$$

ja

$$(\vec{E}'\times\vec{H}')_x = \frac{-2\beta E^2 + \beta(E_x^2 + H_x^2) + (1+\beta^2)(\vec{E}\times\vec{H})_x}{1-\beta^2},$$

$$(\vec{E}'\times\vec{H}')_y = \frac{\beta(E_x E_y + H_x H_y) + (\vec{E}\times\vec{H})_y}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$(\vec{E}'\times\vec{H}')_z = \frac{\beta(E_xE_z+H_xH_z)+(\vec{E}\times\vec{H})_z}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

siis

$$\cos\mu_1' = \frac{(1+\beta^2)\cos\mu_1 - 2\beta + \dfrac{\beta(E_x^2+H_x^2)}{E^2}}{1-2\beta\cos\mu_1+\beta^2-\dfrac{\beta^2(E_x^2+H_x^2)}{E^2}},$$

$$\cos\mu_2' = \sqrt{1-\beta^2}\cdot\frac{\cos\mu_2+\dfrac{\beta(E_xE_y+H_xH_y)}{E^2}}{1-2\beta\cos\mu_1+\beta^2-\dfrac{\beta^2(E_x^2+H_x^2)}{E^2}},$$

$$\cos\mu_3' = \sqrt{1-\beta^2}\cdot\frac{\cos\mu_3+\dfrac{\beta(E_xE_z+H_xH_z)}{E^2}}{1-2\beta\cos\mu_1+\beta^2-\dfrac{\beta^2(E_x^2+H_x^2)}{E^2}}.$$

Nende valemite lihtsustamiseks paneme tähele, et ühikvektorid $\frac{\vec{E}}{E}$, $\frac{\vec{H}}{H}$ ja $\frac{\vec{E}\times\vec{H}}{E^2}$ on kõik üksteisega risti. Järelikult võiksid nad olla Cartesiuse koordinaadistiku telgedesuunalisteks ühikvektoriteks. Teisendusmaatriks, mis määrab ülemineku senisest koordinaadistikust sellesse süsteemi, on

$$\begin{pmatrix} \dfrac{E_x}{E} & \dfrac{E_y}{E} & \dfrac{E_z}{E} \\ \dfrac{H_x}{E} & \dfrac{H_y}{E} & \dfrac{H_z}{E} \\ \cos\mu_1 & \cos\mu_2 & \cos\mu_3 \end{pmatrix}$$

Maatriksi ortogonaalsuse tõttu kehtivad seosed

$$\frac{E_x^2+H_x^2}{E^2}+\cos^2\mu_1=1,$$

$$\frac{E_xE_y+H_xH_y}{E^2}+\cos\mu_1\cos\mu_2=0,$$

$$\frac{E_xE_z+H_xH_z}{E^2}+\cos\mu_1\cos\mu_3=0.$$

Elimineerides nende seoste abil eelmistest valemitest suurused

$$\frac{E_x^2+H_x^2}{E^2},\quad \frac{E_xE_y+H_xH_y}{E^2},\quad \frac{E_xE_z+H_xH_z}{E^2}$$

ja taandades seejärel nende paremad pooled teguriga $1-\beta\cos\mu_1$, saamegi aberratsioonivalemid (4.79).

5. Tuletada aberratsioonivalemid ja Doppleri efekti valemid üldkujulise Lorentzi teisenduse (2.30) juhul, s.o. inertsiaalsüsteemide liikumise juhul meelevaldselt suunatud kiirusega, kuid samasuunaliste ruumiliste telgedega.

L a h e n d u s . Teisendades lainevektori maatriksi (2.30) abil, leiame:

$$\vec{k}'=\vec{k}+\frac{\vec{\beta}\vec{k}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}-\frac{k\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{4.98}$$

$$k'=\frac{k-\vec{\beta}\vec{k}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{4.99}$$

Tähistades $\vec{k}$ ja $\vec{\beta}$ vahelise nurga μ ja jagades läbi $\vec{k}'$ absoluutväärtusega k', saamegi nõutud aberratsioonivalemid:

$$\cos\mu_1' = \frac{\cos\mu_1\sqrt{1-\beta^2} + \beta_x\left(\cos\mu\cdot\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} - 1\right)}{1-\beta\cos\mu},$$

$$\cos\mu_2' = \frac{\cos\mu_2\sqrt{1-\beta^2} + \beta_y\left(\cos\mu\cdot\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} - 1\right)}{1-\beta\cos\mu}, \qquad (4.100)$$

$$\cos\mu_3' = \frac{\cos\mu_3\sqrt{1-\beta^2} + \beta_z\left(\cos\mu\cdot\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} - 1\right)}{1-\beta\cos\mu}.$$

Doppleri efekti valemi saame vahetult valemist (4.99)

$$\omega' = \frac{\omega(1-\beta\cos\mu)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (4.101)$$

kust $\omega' = \omega_0$ korral tuleb välja (4.81).

Täienduseks märgime, et valem (4.98) kehtib sõltumatult mõlema inertsiaalsüsteemi telgede paralleelsuse eeldusest, sest see valem on vektorkujus. Nimetatud eeldus on oluline ainult valemite (4.100) puhul. Aga ka need võime üles kirjutada vektorkujus. Selleks tuleb suunakoosinused asendada vektoriga

$$\vec{k}_0 \equiv \frac{\vec{k}}{k}, \qquad (4.102)$$

s.o. laine levimise suunalise ühikvektoriga. Siis saame:

$$\vec{k}_0' = \frac{\vec{k}_0\sqrt{1-\beta^2} + \vec{\beta}\left(\cos\mu\cdot\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} - 1\right)}{1-\beta\cos\mu}. \qquad (4.103)$$

See valem, nagu ka (4.98), ei nõua, et mõlema inertsiaalsüsteemi ruumilised teljed oleksid paralleelsed.

Tuletame veel teisendusvalemi nurga μ jaoks. Selleks korrutame (4.103) skalaarselt kiirusesuunalise ühikvektoriga $\vec{\beta}/\beta$. Siis saame:

$$\cos\mu' = \frac{\cos\mu - \beta}{1-\beta\cos\mu}. \tag{4.104}$$

Sama valemi saame teisiti, pöörates valemi (4.102). Ühelt poolt otseselt

$$\omega = \frac{\omega'\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\mu};$$

teiselt poolt, vaadeldes üleminekut teisest inertsiaalsüsteemist tagasi esimesse, saame:

$$\omega = \frac{\omega'(1+\beta\cos\mu')}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Järelikult

$$\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\mu} = \frac{1+\beta\cos\mu'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

ja siit saame jälle (4.104). See tulemus on muidugi samakujuline esimese valemiga (4.79), sest ka seal tähendab μ_1 nurka kiire suuna ja kiiruse $\vec{\beta}$ suuna vahel. Ainus erinevus on see, et seal me võtsime $\vec{\beta}$ suuna x-teljeks, siin aga telgede valik oluline ei ole.

6. Tuletada aberratsioonivalemid üldkujulise Lorentzi teisenduse (2.30) juhul väljavektorite teisendamise teel.

L a h e n d u s . Nagu 4. ülesandes, on ka siin väljavektorid teineteisega ja lainevektoriga risti ja absoluutväärtuselt võrdsed. See omadus on muide invariantne (vt. 8. ülesanne §-s 19). Niisiis, $\vec{E}\times\vec{H} = E^2\vec{\kappa}_0$. Kui μ on jälle nurk $\vec{\beta}$ ja $\vec{\kappa}_0$ vahel, siis

$$\vec{\beta} = \beta\cos\mu\cdot\vec{\kappa}_0 + \frac{\vec{E}\vec{\beta}\cdot\vec{E}+\vec{H}\vec{\beta}\cdot\vec{H}}{E^2}$$

ehk

$$\vec{E}\vec{\beta}\cdot\vec{E}+\vec{H}\vec{\beta}\cdot\vec{H} = E^2(\vec{\beta}-\beta\cos\mu\cdot\vec{\kappa}_0). \tag{4.105}$$

Korrutades seda võrdust skalaarselt kiirusega $\vec{\beta}$, saame:

$$(\vec{E}\vec{\beta})^2+(\vec{H}\vec{\beta})^2 = E^2\beta^2(1-\cos^2\mu). \tag{4.106}$$

Nüüd rakendame teisendusvalemeid (4.36). Arvutades E'^2 leiame:

$$E'^2 = \frac{E^2(1+\beta^2)-(\vec{E}\vec{\beta})^2-(\vec{H}\vec{\beta})^2-2E^2\beta\cos\mu}{1-\beta^2}$$

ehk (4.106) põhjal

$$E'^2 = \frac{E^2(1-\beta\cos\mu)^2}{1-\beta^2}. \tag{4.107}$$

Edasi arvutame $\vec{E}'\times\vec{H}'$. Valemitest (4.36) leiame pärast mõningaid lihtsaid teisendusi:

$$\vec{E}'\times\vec{H}' = \frac{1}{1-\beta^2}\Big\{\sqrt{1-\beta^2}(\vec{E}\times\vec{H})+\frac{1+\beta^2-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}(\vec{E}\times\vec{H})\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}-$$

$$-(\vec{E}^2+\vec{H}^2)\vec{\beta}+\sqrt{1-\beta^2}(\vec{\beta}\vec{E}\cdot\vec{E}+\vec{\beta}\vec{H}\cdot\vec{H})+\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}[(\vec{\beta}\vec{E})^2+(\vec{\beta}\vec{H})^2]\vec{\beta}\Big\}. \tag{4.108}$$

Asendades siin $\vec{E}\times\vec{H} = E^2\vec{\kappa}_0$, $\vec{H}^2=\vec{E}^2$ ja kasutades viimase kahe liikme jaoks valemeid (4.105) ja (4.106), leiame:

$$\vec{E}'\times\vec{H}' = \frac{E^2(1-\beta\cos\mu)\left[\sqrt{1-\beta^2}\,\vec{k}_0 + \left(\cos\mu\cdot\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}-1\right)\vec{\beta}\right]}{1-\beta^2}. \tag{4.109}$$

Jagades viimase valemi valemiga (4.107), leiame:

$$\vec{k}_0' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\,\vec{k}_0 + \left(\cos\mu\cdot\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}-1\right)\vec{\beta}}{1-\beta\cos\mu},$$

mis langeb ühte valemiga (4.103).

7. Näidata, et jagatis $\frac{E}{\omega}$, kus E on monokromaatilise tasalaine elektrivektori absoluutväärtus ja ω laine sagedus, on invariantne Lorentzi teisenduste suhtes.

L a h e n d u s . See järeldub otseselt valemitest (4.101) ja (4.107).

8. Korpuskulaarses aspektis kujutab elektromagnetiline tasalaine footonite voogu. Laine intensiivsus on võrdeline footonite voo tihedusega N, s. o. footonite arvuga, mis läbivad ajaühikus nende liikumise suunaga ristioleva pinnaühiku. Näidata, et suurus N/ω on invariant.

L a h e n d u s . Tasalaine intensiivsus avaldub teatavasti valemiga

$$I = \frac{cE^2}{2\varepsilon_0} \tag{4.110}$$

kus E on elektrivektori amplituud. Et ühe footoni energia on $\hbar\omega$, siis $I = N\hbar\omega$ ja siit

$$N = \frac{cE^2}{2\varepsilon_0\hbar\omega}. \tag{4.111}$$

Eelmises ülesandes leidsime, et $\frac{E^2}{\omega^2}$ on invariant. Järelikult $\frac{N}{\omega}$ on samuti invariant, mida oligi tarvis näidata. Arvestades sageduse teisendusvalemit (4.101), võime selle põhjal footonite voo tiheduse jaoks üles kirjutada järgmise teisendusvalemi:

$$N' = \frac{1-\beta\cos\mu}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot N, \qquad (4.112)$$

kus μ on nurk (esimeses inertsiaalsüsteemis) kiiruse $\vec{\beta}$ ja lainevektori (s. o. footonite liikumise suuna) vahel. Arusaadavalt on see valem pööratav, sest kui μ' on nurk kiiruse $-\vec{\beta}$ ja footonite liikumise suuna vahel teises inertsiaalsüsteemis, siis on valemite (4.98) ja (4.99) põhjal

$$\cos\mu' = \frac{\beta-\cos\mu}{1-\beta\cos\mu} . \qquad (4.113)$$

Elimineerides siit ja valemist (4.112) $\cos\mu$, saame:

$$N = \frac{1-\beta\cos\mu'}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot N',$$

mis tähendabki seda, et valemis (4.112) on mõlemad inertsiaalsüsteemid samaväärsed.

Kui aga võtame ühe inertsiaalsüsteemina kahest selle, milles kiirgusallikas on liikumatu, siis saab valem (4.112) kuju:

$$N = \frac{N_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\mu}, \qquad (4.114)$$

kus N_0 on footonite voo tihedus kiirgusallika paigaloleku süsteemis, N aga footonite voo tihedus süsteemis, kus kiirgusallikas liigub kiirusega β suunas, mis moodustab footonite liikumissuunaga nurga μ .

9. Näidata, et paralleelselt liikuvate footonite kimbu ristlõige on invariantne Lorentzi teisenduste suhtes. Ühtlasi näidata, et valemis (4.112) esinev tegur $\frac{1-\beta\cos\mu}{\sqrt{1-\beta^2}}$ on tingitud ainult footonite arvu muutumisest ajas, s. o. kui ajavahemik kahe teatavat pinda läbiva footoni vahel esimeses inertsiaalsüsteemis on Δt ja teises inertsiaalsüsteemis $\Delta t'$, siis

$$\Delta t' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\mu}\Delta t .$$

L a h e n d u s . Liikugu footonid 1. inertsiaalsüsteemis vastavalt võrrandile

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{c}(t-t_0), \tag{4.115}$$

kus $\vec{r}_0$ on punkt, mida kiirusega $\vec{c}$ liikuv footon läbib hetkel t_0. Kiirus $\vec{c}$ olgu kõikidel footonitel üks ja sama, kuna t_0 ja $\vec{r}_0$ on parameetrid, mille väärtused iseloomustavad üksikuid footoneid. Eeldame, et

$$\vec{c}\vec{r}_0 = 0, \tag{4.116}$$

s. o. et punktid $\vec{r}_0$ moodustavad footonite liikumissuunaga ristioleva pinna.

Läheme üle nüüd teise inertsiaalsüsteemi, mis liigub esimese suhtes kiirusega $\vec{\beta}$. Nurk $\vec{\beta}$ ja $\vec{c}$ vahel olgu μ :

$$\vec{\beta}\vec{c} = \beta c\cos\mu . \tag{4.117}$$

Lorentzi teisenduste põhjal (vt. 2.30)) on

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}\,' &= \vec{r} + \frac{\vec{\beta}\vec{r}\cdot\vec{\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)}{\beta^2} - \frac{\vec{\beta}ct}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \\ t' &= \frac{t-\frac{\vec{\beta}\vec{r}}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.118}$$

Asetades siia $\vec{r}$ asemele avaldise (4.115), saame

$$\begin{aligned} \vec{r}\,' &= \vec{r}_0 + \frac{\vec{\beta}\vec{r}_0\cdot\vec{\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)}{\beta^2} - \frac{\vec{\beta}ct}{\sqrt{1-\beta^2}} + \\ &+ (t-t_0)\left[\vec{c} + \frac{c\cos\mu\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\vec{\beta}}{\beta}\right], \\ t' &= \frac{t-\frac{\vec{\beta}\vec{r}_0}{c}-\beta\cos\mu\,(t-t_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \end{aligned} \tag{4.119}$$

Elimineerides nendest valemitest t, leiame:

$$\begin{aligned} \vec{r}\,' &= \vec{r}_0 - \frac{\vec{\beta}\vec{r}_0\cdot\vec{\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)}{\beta^2} + \frac{\vec{\beta}\vec{r}_0\cdot\vec{c}}{c(1-\beta\cos\mu)} - \\ &- t_0\cdot\frac{\vec{c}-\frac{c\cos\mu(1-\sqrt{1-\beta^2})\vec{\beta}}{\beta}}{1-\beta\cos\mu} + \vec{c}\,'t'\,, \end{aligned} \tag{4.120}$$

kus

$$\vec{c}\,' = \frac{\vec{c}\sqrt{1-\beta^2}+\left[\frac{(1-\sqrt{1-\beta^2})\cos\mu}{\beta}-1\right]c\vec{\beta}}{1-\beta\cos\mu} \tag{4.121}$$

on footonite kiirus 2. inertsiaalsüsteemis (vt. ka kiiruste liitmise valem (2.126)).

Võrrand (4.120) on footonite liikumise võrrand teises inertsiaalsüsteemis. Anname sellele võrrandile järgmise kuju:

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_0\,' + \vec{c}\,'(t' - t_0') \tag{4.122}$$

sarnaselt võrrandiga (4.115). $\vec{r}_0\,'$ ja t_0' on siin footonite kimbu parameetrid 2. inertsiaalsüsteemis, kusjuures nõuame, et

$$\vec{c}\,'\vec{r}_0\,' = 0. \tag{4.123}$$

Et leida $\vec{r}_0\,'$ ja t_0', võrrutame $\vec{r}\,'$ avaldised (4.120) ja (4.122):

$$\vec{r}_0 - \frac{\vec{\beta}\vec{r}_0 \cdot \vec{\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)}{\beta^2} + \frac{\vec{\beta}\vec{r}_0 \cdot \vec{c}}{c(1-\beta\cos\mu)} -$$

$$- t_0 \cdot \frac{\vec{c} - \frac{c\cos\mu(1-\sqrt{1-\beta^2})\cdot\vec{\beta}}{\beta}}{1-\beta\cos\mu} = \vec{r}_0\,' - \vec{c}\,' t_0' . \tag{4.124}$$

Korrutades seda võrdust skalaarselt vektoriga $\vec{c}\,'$ ja arvestades tingimusi (4.116) ja (4.123), leiame, et kõik $\vec{r}_0$ ja $\vec{r}_0\,'$ sisaldavad liikmed kaovad, ja tulemuseks on seos:

$$t_0' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\mu} \cdot t_0 . \tag{4.125}$$

Elimineerides siit ja valemist (4.124) t_0, leiame avaldise ka $\vec{r}_0\,'$ jaoks:

$$\vec{r}_0\,' = \vec{r}_{00}\,' + \vec{u}\, t_0' , \tag{4.126}$$

kus

$$\vec{r}_{00}\,' = \vec{r}_0 - \frac{\vec{\beta}\vec{r}_0 \cdot \vec{\beta}(1-\sqrt{1-\beta^2})}{\beta^2(1-\beta\cos\mu)} + \frac{\vec{\beta}\vec{r}_0 \cdot \vec{c}}{c(1-\beta\cos\mu)} \tag{4.127}$$

ja

$$\vec{u} = \frac{(\cos\mu - \beta)(\beta\vec{c} - \vec{\beta}c\cos\mu) - \vec{\beta}c\sin^2\mu\sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta\cos\mu)\sqrt{1-\beta^2}} . \quad (4.128)$$

Võib kergesti otsese arvutuse teel veenduda, et

$$\vec{c}'\vec{\tau}'_{oo} = \vec{c}'\vec{u} = 0, \quad (4.129)$$

nii et kehtib ka (4.123), nagu olema peabki. Peale selle leiame:

$$\vec{\tau}'^2_{oo} = \vec{\tau}^2_o \quad (4.130)$$

ja

$$u = \frac{c\beta\sin\mu}{\sqrt{1-\beta^2}} . \quad (4.131)$$

Valemist (4.130) järgneb, et footonite kimbu ristlõige mõlemas süsteemis on ühesugune. Tõepoolest, kui t_o on fikseeritud ja $\vec{\tau}_o$ omab teatava hulga väärtusi vastavalt risti footonite liikumissuunaga valitud pinnaelemendile, mida footonid läbivad hetkel t_o , siis teises inertsiaalsüsteemis läbivad needsamad footonid hetkel t'_o pinnaelemendi, mille punktid on määratud vektori $\vec{\tau}'_{oo}$ väärtustega. See pinnaelement on samuti risti footonite liikumissuunaga (vt. (4.129)), ta on seega footonite kimbu ristlõige, ja see on (4.130) põhjal võrdne (arvestades ka, et $\vec{u}$ valemis (4.126) ei sõltu $\vec{\tau}_o$ -st) kimbu ristlõikega esimeses süsteemis. Seda oligi vaja näidata. Teiseks, kui kimbu fikseeritud ristlõike läbivad footonid 1. süsteemis ajavahemike Δt_o tagant, siis 2. süsteemis valemi (4.125) põhjal läbivad nad kimbu ristlõike ajavahemike $\Delta t'_o$ tagant, kusjuures

$$\Delta t_0' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\mu}\cdot\Delta t_0 . \qquad (4.132)$$

See ongi teine väide, mida oli vaja tõestada. Mõlemad tõestatud väited annavad koos jälle valemi (4.112).

Lisaks näeme, et footonite kimp, mille eeldasime 1. inertsiaalsüsteemis liikumatuna, ei jää 2. inertsiaalsüsteemis paigale, vaid liigub iseendaga ristiolevas suunas kiirusega $\vec{u}$. Valemi (4.131) kohaselt võib see kiirus ületada valguse kiirust c . See näitab, et seda kiirust signaali kiirusena kasutada ei saa. Tõepoolest: see ei ole mitte mingi keha kiirus ega footonite kiirus (sest footonid liiguvad kiirusega $\vec{c}'$); vaid see on selle koha nihkumise kiirus, mida footonid läbivad liikudes üksteise järel.

10. Vaatleme nüüd tasalaine või paralleelse footonite kimbu asemel meelevaldset kiirgusvälja. Olgu dN footonite arv, mis liiguvad ajaühikus läbi liikumissuunaga ristioleva pinnaühiku ruuminurgaelemendis $d\Omega$. Leida valem dN teisendamiseks teise inertsiaalsüsteemi, mis liigub esimese suhtes kiirusega $\vec{\beta}$.

L a h e n d u s . Olgu jälle μ nurk $\vec{\beta}$ ja footonite liikumissuuna vahel. Et dN on võrdeline $d\Omega$ -ga, tuleb leida esmalt teisendusvalem viimase jaoks. Võtame polaarteljeks $\vec{\beta}$. Siis on μ teine polaarnurk. Esimese aberratsioonivalemi (4.79) põhjal on

$$\cos\mu' = \frac{\cos\mu-\beta}{1-\beta\cos\mu} .$$

Siit

$$\sin\mu' d\mu' = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\mu)^2}\cdot \sin\mu\, d\mu . \tag{4.133}$$

Esimene polaarnurk üleminekul teise süsteemi ei muutu, sest kui suuname polaarteljega ristiolevas tasandis teljed nii, et see nurk oleks 90°, siis jääb ta 90°-seks ka teises süsteemis (see järgneb ülejäänud aberratsioonivalemitest (4.79)). Niisiis, valemist (4.133) saame:

$$d\Omega' = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\mu)^2}\cdot d\Omega . \tag{4.134}$$

Korrutades nüüd selle valemi valemiga (4.112), leiame:

$$dN' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\mu}\cdot dN . \tag{4.135}$$

Siit võime teha veel ühe järelduse. Korrutades valemi (4.134) Doppleri efekti valemiga (4.80) (kus tuleb asendada $\mu_1 \to \mu$), saame

$$\hbar\omega' dN' = \hbar\omega\, dN,$$

s.o. kiirguse intensiivsus ruuminurgaelemendis on invariantne suurus. See tulemus ei sõltu sagedusest ja seepärast kirjutame üldisemalt nii:

$$dI' = dI , \tag{4.136}$$

kus I on mistahes sagedusega kiirguse intensiivsus ruuminurgaelemendis.

Vaatleme nüüd kiirgavat keha, mis seda kiirgusvälja tekitab. Integreerides (4.136) üle kõikide suundade, saame:

$$I' = I ,$$

ehk, kuna keha kiirgab energiat oma massi arvel,

$$\frac{dm}{dt} = inv. \tag{4.137}$$

See tulemus on kooskõlas massi ja aja teisendusvalemitega. Keha paigaloleku süsteemis on ajaks selle keha omaaeg ja massiks on seisumass m_0. Mingis teises süsteemis

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ja

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} ;$$

järelikult

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_0}{d\tau} = inv.$$

§ 22. Elektromagnetilise välja energia ja impulss.

Vastastikuse mõju olemasolust laengute ja elektromagnetilise välja vahel võib järeldada, et energia (mass) ja impulss on olemas mitte ainult laengutel, vaid ka väljal. Ilma selleta kaotaksid kehtivuse energia ja impulsi jäävuse seadused. Välja energiat ja impulssi ja nende liikumist kirjeldab e n e r g i a - i m p u l s s t e n s o r $T_{\mu\nu}$, mis avaldub väljatensori $\Phi_{\mu\nu}$ kaudu järgmiselt:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\Phi_{\mu\sigma}\Phi_{\nu\sigma} - \frac{1}{4}\Phi_{\sigma\tau}\Phi_{\sigma\tau}\delta_{\mu\nu}\right) . \tag{4.138}$$

Sellest avaldisest on näha, et $T_{\mu\nu}$ on sümmeetriline tensor. Seega on tal 10 sõltumatut komponenti. Tensori $T_{\mu\nu}$ tähendus energia-impulsstensorina järeldub valemist

$$div\, T_{\mu\nu} = -f_\mu \,, \tag{4.139}$$

kus f_μ on laengusse mõjuva jõu tihedus. Selle valemi tuletamiseks arvutame $div\, T_{\mu\nu}$:

$$div\, T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial \phi_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}\phi_{\nu\sigma} + \frac{\partial \phi_{\nu\sigma}}{\partial x_\nu}\phi_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial \phi_{\sigma\tau}}{\partial x_\mu}\phi_{\sigma\tau}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial \phi_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu}\phi_{\mu\sigma} + \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\partial \phi_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}\phi_{\nu\sigma} + \frac{\partial \phi_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}\phi_{\nu\sigma} + \frac{\partial \phi_{\sigma\tau}}{\partial x_\mu}\phi_{\tau\sigma}\right).$$

Valemite (4.21) ja (4.59) põhjal võrdub parema poole esimene liige $-f_\mu$. Seega jääb näidata, et teine liige on võrdne nulliga. Selleks kirjutame seal seisva sulgavaldise ümber järgmiselt:

$$\frac{\partial \phi_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}\phi_{\nu\sigma} + \frac{\partial \phi_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}\phi_{\nu\sigma} + \frac{\partial \phi_{\sigma\tau}}{\partial x_\mu}\phi_{\tau\sigma} =$$

$$= \left(\frac{\partial \phi_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \phi_{\nu\mu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial \phi_{\sigma\nu}}{\partial x_\mu}\right)\phi_{\nu\sigma} .$$

Valem (4.23) näitab, et see avaldis tõesti võrdub nulliga. Niisiis, valem (4.139) on tõestatud.

Sellele diferentsiaalsele seosele vastab ka integraalne seos. Võtame aegruumis piirkonna Ω , mis on piiratud kinnise hüperpinnaga Σ . Integreerides (4.139) üle Ω ja teisendades vasakpoolse integraali valemi (3.34) järgi pindintegraaliks, saame:

$$\oint_\Sigma T_{\mu\nu}\, d\Sigma_\nu = \int_\Omega f_\mu\, d\Omega \,. \tag{4.140}$$

Selle seose tõlgendamiseks valime mingi inertsiaalsüsteemi ja võtame aegruumielemendi

$$d\Omega = e_{\mu\nu\sigma\tau}\, dx_{\mu}^{(1)} dx_{\nu}^{(2)} dx_{\sigma}^{(3)} dx_{\tau}^{(4)}$$

nii, et vektorid $dx_{\mu}^{(1)}$, $dx_{\nu}^{(2)}$, $dx_{\sigma}^{(3)}$, $dx_{\tau}^{(4)}$ oleksid paralleelsed koordinaattelgedega. Siis

$$d\Omega = ic\, dV dt$$

(vt. (3.22)). Piirkonna Ω valime silindri kujul, mille telg on selles inertsiaalsüsteemis paralleelne ajateljega ja põhjadeks on kolmemõõtmelise ruumi piirkond V kahel hetkel, $t = t_1$ ja $t = t_2$. Eeldame samuti, et ajavahemiku $t_2 - t_1$ vältel piirkonnas V olevad laengud sealt ei lahku ega uusi laenguid sinna väljastpoolt juurde ei tule.

Neil eeldustel, võttes integraalis $\int f_{\mu} d\Omega$ μ = 1,2,3 ning arvestades valemit (4.58), leiame:

$$\int \vec{f} d\Omega = ic \int \vec{f} dV dt = ic \int \vec{\mathcal{F}} dt = ic [\vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1)] ; \tag{4.141}$$

analoogiliselt, μ = 4 korral,

$$\int f_4 d\Omega = -\int \vec{f}\vec{u}\, dV dt = -[E(t_2) - E(t_1)] . \tag{4.142}$$

Siin $\vec{P}$ ja E on vaadeldavas piirkonnas V olevate laengute summaarne impulss ja energia. Valemi (4.140) vasakul poolel olev integraal saab samadel eeldustel $\mu = \kappa$ = = 1, 2, 3 korral kuju:

$$\oint T_{\kappa\nu} d\Sigma_\nu = \left(\int T_{\kappa 4} dV\right)_2 - \left(\int T_{\kappa 4} dV\right)_1 + ic\int_{t_1}^{t_2} \oint T_{\kappa l}\, dS_l\, dt\ , \tag{4.143}$$

kus dS_l on kahemõõtmelise V ümbritseva pinna element. Esimesed kaks liiget on saadud integreerides üle silindri Ω põhjade ja viimane on saadud integreerides üle silindri külgpinna. Põhjadel on $d\Sigma$ ajatelje suunaline ning absoluutväärtuselt võrdne põhja hüperpinnaelemendiga (ruumielemendiga) dV , kuna külgpinnal on $d\Sigma_\nu$ ajateljega risti ning absoluutväärtuselt võrdne $icdS_l dt$. Analoogiliselt, μ = 4 korral saame:

$$\oint T_{4\nu} d\Sigma_\nu = \left(\int T_{44} dV\right)_2 - \left(\int T_{44} dV\right)_1 + ic\int_{t_1}^{t_2} \oint T_{4l}\, dS_l\, dt. \tag{4.144}$$

Nüüd võime (4.141) - (4.144) põhjal ümber kirjutada valemi (4.140) järgmiste seoste kujul:

$$\begin{aligned}\left[P_\kappa + \int \frac{T_{\kappa 4}}{ic} dV\right]_{t=t_2} - \left[P_\kappa + \int \frac{T_{\kappa 4}}{ic} dV\right]_{t=t_1} &= \\ = -\int_{t_1}^{t_2} \left[\oint T_{\kappa l}\, dS_l\right] dt\end{aligned} \tag{4.145}$$

ja

$$\begin{aligned}\left[E + \int (-T_{44}) dV\right]_{t=t_2} - \left[E + \int (-T_{44}) dV\right]_{t=t_1} &= \\ = -\int_{t_1}^{t_2} \left[\oint \frac{cT_{4l}}{i} dS_l\right] dt.\end{aligned} \tag{4.146}$$

Et P_k ja E on laengute impulss ja energia, siis tuleb ka suurusi $\int \frac{T_{k4}}{ic} dV$ ja $\int (-T_{44}) dV$ tõlgendada kui impulssi ja energiat. Nimelt on suurus

$$G_k = \int \frac{T_{k4}}{ic} dV \tag{4.147}$$

välja impulss ja

$$g_k = \frac{T_{k4}}{ic} \tag{4.148}$$

välja impulsi tihedus; suurus

$$W = -\int T_{44} dV \tag{4.149}$$

on välja energia ja

$$w = -T_{44} \tag{4.150}$$

on välja energia tihedus. Nüüd tähendavad seoste (4.145) ja (4.146) vasakud pooled välja ja laengute summaarse impulsi ja energia juurdekasvu ajas $t_2 - t_1$. Impulsi ja energia jäävuseks on vaja, et paremad pooled tähendaksid impulsi ja energia juurdevoolu vaadeldavasse ruumiossa väljastpoolt läbi välispinna. Järelikult on kolmemõõtmeline tensor $T_{k\ell}$ impulsivoo tensor ja kolmemõõtmeline vektor

$$S_\ell = \frac{c T_{4\ell}}{i} \tag{4.151}$$

energiavoo vektor (Poynting-Umovi vektor). Kasutades neid tähistusi ja võttes $t_2 - t_1$ asemele diferentsiaali dt, võime valemid (4.145) ja (4.156) ümber kirjutada kujul:

$$\frac{d}{dt}(P_k + G_k) = -\oint T_{k\ell}\, dS_\ell \tag{4.152}$$

ja

$$\frac{d}{dt}(E+W) = -\oint \vec{S}\, d\vec{S}\,. \tag{4.153}$$

Lõpuks arvutame suurused w, $\vec{g}$, $\vec{S}$ ja $T_{\varkappa\ell}$ väljatensori komponentide, s. o. elektri- ja magnetvektori komponentide kaudu. Arvestades valemeid (4.22) ja (4.138), leiame:

$$w = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2), \tag{4.154}$$

$$\vec{S} = c^2\vec{g} = \frac{c}{\varepsilon_0}(\vec{E}\times\vec{H}) \tag{4.155}$$

ja

$$T_{\varkappa\ell} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)\,\delta_{\varkappa\ell} - E_\varkappa E_\ell - H_\varkappa H_\ell\right], \tag{4.156}$$

kus $\delta_{\varkappa\ell}$ on kolmemõõtmeline ühiktensor.

Ü l e s a n d e d .

1. Lähtudes neljamõõtmelise tensori teisendusvalemist, tuletame teisendusvalemid impulsivoo tensori $T_{\varkappa\ell}$, Poynting-Umovi vektori $\vec{S}$ ja välja energia tiheduse w jaoks.

L a h e n d u s . Rakendades üldist teisendusvalemit

$$T'_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\mu\sigma}\mathcal{L}_{\nu\tau}T_{\sigma\tau}$$

ehk maatrikskujus

$$T' = \mathcal{L}\,T\,\mathcal{L}^T$$

ja võttes Lorentzi maatriksi üldkujus (2.30), leiame pärast vastavaid arvutusi:

$$T'_{im} = T_{im} + \frac{\beta_i \beta_m}{\beta^2}\Big[-\Big(\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big)\beta_k\Big(\frac{S_k}{c} + c g_k\Big) +$$

$$+ \Big(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\Big)^2 \frac{\beta_k T_{kl} \beta_l}{\beta^2} + \frac{\beta^2 w}{1-\beta^2}\Big] +$$

$$+ \frac{\beta_i \beta_k T_{km} + T_{ik}\beta_k \beta_m}{\beta^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\Big) - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big(\frac{\beta_i S_m}{c} + c\beta_m g_i\Big),$$

(4.157)

$$S'_i = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big[S_i + \frac{\beta_k S_k \beta_i}{\beta^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\Big) + \frac{v_k g_k v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{w v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} -$$

$$- T_{ik} v_k - \frac{v_k T_{kl} v_l v_i}{v^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\Big)\Big] ,$$

(4.158)

$$g'_i = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Big[g_i + \frac{\beta_k g_k \beta_i}{\beta^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\Big) + \frac{\beta_k S_k \beta_i}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} -$$

$$- \frac{w\beta_i}{c\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{T_{ik}\beta_k}{c} - \frac{\beta_k T_{kl}\beta_l \beta_i}{c\beta^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\Big)\Big] ,$$

(4.159)

$$w' = \frac{w + \beta_i T_{ik}\beta_k - \beta_i\left(\frac{S_i}{c} + c g_i\right)}{1-\beta^2} . \tag{4.160}$$

Vaatleme saadud valemite mitterelativistlikke piirkujusid. Kui $\beta \ll 1$, siis, piirdudes 1. järku liikmetega β suhtes ja arvestades ka valemeid (4.154) - (4.156), leiame:

$$T_{im}' = T_{im} - \left(\frac{\beta_i S_m}{c} + c\beta_m g_i\right) , \tag{4.161}$$

$$S_i' = S_i - w v_i - T_{ik} v_k , \tag{4.162}$$

$$g_i' = g_i - \frac{w\beta_i}{c} - \frac{T_{ik}\beta_k}{c} , \tag{4.163}$$

$$w' = w - \frac{\beta_i S_i}{c} - c\beta_i g_i . \tag{4.164}$$

Võrdleme valemeid (4.162) ja (4.164) §-s 2 saadud mitterelativistlike valemitega (1.34) ja (1.37). Valemid (4.162) ja (1.37) on antud täpsuse juures teineteisega kooskõlas, sest valemis (1.37) esinev liige $\vec{v}\vec{g}\cdot\vec{v}$, mida valemis (4.162) ei ole, on β suhtes 2. järku (siin tuleb tähele panna, et $\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2}$). Valemid (4.164) ja (1.34) lähevad aga lahku; esimese võime kirjutada kujul

$$w' = w - \frac{2\vec{v}\vec{S}}{c^2} , \tag{4.165}$$

kuna teises puudub viimases liikmes tegur 2 . Siit võime teha järelduse, et mitterelativistliku teooria valemid ei ole mitte alati 1. järku lähenduses β suhtes vastavate relativistlike valemite piirkujuks. Antud juhul saaksime kooskõlas relativistlike ja mitterelativistlike valemite vahel ainult 0-ndat järku lähenduses β suhtes. Siis oleks $w = w'$ ja $\vec{S}' = \vec{S}$ niihästi relativistlike kui ka mitterelativistlike seoste kohaselt. Kuid see lähendus on triviaalne, sest inertsiaalsüsteemide suhteline kiirus siin üldse ei esine, seega ei saa teisendamisest õieti juttugi olla.

2. Eelmises ülesandes tuletatud teisendusvalemite abil näidata, et tasalaine väljas kehtiv seos

$$\vec{S} = \vec{c}\,w \tag{4.166}$$

on invariantne Lorentzi teisenduste suhtes.

L a h e n d u s . Tähistades nagu eelmises paragrahvis kiiruste $\vec{c}$ ja $\vec{v}$ vahelise nurga μ ja silmas pidades valemeid (4.105), (4.106), (4.155), (4.156) ja (4.166), leiame tasalaine korral valemitele (4.158) ja (4.160) järgmise kuju:

$$\vec{S}' = \frac{1-\beta\cos\mu}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\vec{S} + \frac{\left(\cos\mu\cdot\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} - 1\right)S\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] \tag{4.167}$$

ja

$$w' = \frac{w(1-\beta\cos\mu)^2}{1-\beta^2}. \tag{4.168}$$

Märgime, et need valemid on kooskõlas valemitega (4.107) ja (4.109).

Edasi võtame valguse kiiruse teisendusvalemi. Selle saame üldisest valemist (2.126), võttes seal $\vec{u}$ asemele $\vec{c}$. Seega

$$\vec{c}\,' = \frac{\vec{c}\sqrt{1-\beta^2} + \left(\cos\mu \cdot \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} - 1\right)c\vec{\beta}}{1-\beta\cos\mu} \tag{4.169}$$

(see valem on identne teisel viisil saadud valemiga (4.121)). Valemitest (4.167) - (4.169) järgnebki, et

$$\vec{S}\,' = \vec{c}\,'w' , \tag{4.170}$$

mida oligi tarvis näidata.

Siin tekib nüüd üks näiline vastuolu. Mitterelativistlikul piirjuhul (1.järku täpsusega β suhtes) peab invariantsus ilmselt säilima, sest kui kolme suuruse, $\vec{S}, w, \vec{c}$ teisendusvalemid võtame 1. järku täpsusega, siis kehtib sama täpsusega ka nende suuruste vaheline seos. Arvestades aga, et algusest peale mitterelativistlikus teoorias, mille arendasime § -s 2, ei ole energiatiheduse w teisendusvalem identne relativistliku teisendusvalemi piirkujuga, ei saa seal ka seos $\vec{S} = \vec{c}w$ olla enam invariantne. Ometi leidsime, et ta on invariantne (vt. valem (1.41)). Milles on asi?

Et küsimusse selgust tuua, vaatame relativistlike teisendusvalemite piirkujusid $\beta \ll 1$ korral. Valemitest (4.167) ja (4.168) 1. järku täpsusega β suhtes saame:

$$\vec{S}\,' = (1-\beta\cos\mu)\vec{S} - S\vec{\beta} \tag{4.171}$$

$$w' = w(1-2\beta\cos\mu) , \tag{4.172}$$

$$\vec{c}\,' = \vec{c}(1+\beta\cos\mu) - \vec{v} . \tag{4.173}$$

Siit järgneb muidugi jälle, et $\vec{S}\,' = \vec{c}\,'w'$. Aga § -s 2 oli meil sama täpsusega (vt. 1.39), (1.40) ja (1.42)):

$$\vec{S}' = (1-\beta\cos\mu)\vec{S} - S\vec{\beta}, \tag{4.174}$$

$$w' = w(1-\beta\cos\mu), \tag{4.175}$$

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}. \tag{4.176}$$

Ka siit järgneb, et $\vec{S}' = \vec{c}'w'$; ühtlasi näeme, miks see nii on. Energiatiheduse teisendusvalemid (4.172) ja (4.175) lähevad teineteisest lahku, kuid seda lahkuminekut kompenseerib erinevus valemite (4.173) ja (4.176) vahel.

Siit võime teha veel ühe järelduse. Relativistliku kiiruste liitmise valemi mitterelativistlikuks piirkujuks ei ole mitte alati mitterelativistlik kiiruste liitmise valem. Kui üheks liidetavaks kiiruseks on valguse kiirus, siis ei ole see nii. Teoorias, mis algusest peale ehitatakse üles mitterelativistlikuna, kehtib muidugi ka mitterelativistlik kiiruste liitmise valem kujul (4.176). Kui aga minnakse mitterelativistlikule piirjuhule üle relatiivsusteooriast, siis see valem enam ei kehti, vaid kehtib valem (4.173).

Märgime veel, et relativistliku aberratsioonivalemi

$$\cos\mu' = \frac{\cos\mu - \beta}{1-\beta\cos\mu} \tag{4.177}$$

mitterelativistlik piirkuju

$$\cos\mu' = \cos\mu - \beta\sin^2\mu \tag{4.178}$$

on niisugusel kujul tuletatav kiiruste liitmise valemist sõltumatult sellest, kas võetakse selleks valem (4.173) või (4.176). Tõepoolest, korrutades need valemid skalaarselt kiirusega $\vec{\beta}$, leiame esimesel juhul

$$\cos\mu' = \frac{c}{c'}\left(\cos\mu - \beta\sin^2\mu\right)$$

ja teisel juhul

$$\cos\mu' = \frac{c}{c'}\left(\cos\mu - \beta\right).$$

Ent esimesel juhul kehtib 1. järku täpsusega võrdus $c' = c$; teisel juhul aga

$$\frac{c}{c'} = 1 + \beta\cos\mu .$$

Järelikult ongi mõlemal juhul lõpptulemuseks valem (4.178).

3. Kiirguse rõhk pinnale, millele kiirgus langeb risti, võrdub

$$\vec{f} = (1+R)c\vec{g}\,, \tag{4.179}$$

kus R on peegeldumiskoefitsient ja $\vec{g}$ langeva kiirguse impulsi tihedus. Tõepoolest, ajaühikus peegeldub kiirgus, mis täidab silindri ühikulise põhjaga ja kõrgusega c. Selle kiirguse impulss on $c\vec{g}$. Peale peegeldumist tekib vastassuunalise impulsiga kiirgus, mis täidab sama suure silindri ja milles impulsi tihedus on $-R\vec{g}$. Seega on kiirguse impulsi muutus ajaühikus võrdne $(1+R)c\vec{g}$. Selle impulsi saab impulsi jäävuse seaduse põhjal peegeldav pind.

Kui suur on kiirguse rõhk juhul, kui pind liigub oma normaali suunas kiirusega $\vec{v}$?

L a h e n d u s . Võtame pinna normaali x-telje positiivseks suunaks. Langev laine levib siis x-telje negatiivses suunas ja peegeldunud laine positiivses suunas. Kui elektrivektori suuna võtame y-teljeks (eeldades, et laine on lineaarselt polariseeritud), siis on magnetvektori suunaks langevas laines z-telje negatiivne ja peegeldunud laines positiivne suund. Olgu väljavektorite amplituudiks langevas laines E .

Teisendades langeva laine väljavektorid valemite (4.35) järgi pinna paigaloleku süsteemi, leiame:

$$E_y' = E\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,, \quad H_z' = -E\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,.$$

Et amplituudne peegeldumiskoefitsient on $\sqrt{R}$, leiame peegeldunud laine väljavektorite jaoks avaldised (samas süsteemis, kus peegeldav pind on liikumatu):

$$\tilde{E}_y' = E\sqrt{R}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,, \quad \tilde{H}_z' = E\sqrt{R}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,.$$

Teisendame need tagasi algsüsteemi. Valemite (4.35) põhjal, võttes nendes nüüd β asemele $-\beta$, leiame:

$$\tilde{E}_y = E\sqrt{R}\cdot\frac{1+\beta}{1-\beta}\,,$$

$$\tilde{H}_z = E\sqrt{R}\cdot\frac{1+\beta}{1-\beta}\,.$$

Siit järgneb, et peegeldunud laines on impulsi tiheduse x-komponent võrdne

$$\tilde{g}_x = \frac{E^2 R}{\varepsilon_0 c}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^2$$

(teised komponendid on muidugi võrdsed nulliga), kuna langevas laines

$$g_x = -\frac{E^2}{\varepsilon_0 c}\,.$$

Et ajaühikus langeb pinnale kiirgus silindrist kõrgusega $c(1+\beta)$, peegeldub aga silindrisse kõrgusega $c(1-\beta)$, siis

$$\vec{f} = (1+\beta)\left(1 + R\cdot\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)c\vec{g}\,, \qquad (4.180)$$

kus $\vec{g}$ tähendab jälle langeva laine impulsi tihedust.

§ 23. Elektromagnetilise välja kiirgamine laengute poolt.

Käesolevas paragrahvis vaatleme kiirendusega liikuva punktlaengu välja. Teatavasti määravad punktlaengu e välja Lienard-Wiecherti potentsiaalid järgmiselt:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{e}{4\pi}\cdot\frac{\vec{u}}{c\left(R+\frac{\vec{R}\vec{u}}{c}\right)}\Bigg|_{t-\frac{R}{c}}, \qquad (4.181)$$

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{e}{4\pi}\cdot\frac{1}{R+\frac{\vec{R}\vec{u}}{c}}\Bigg|_{t-\frac{R}{c}}, \qquad (4.182)$$

kus

$$\vec{R}=\vec{r}_0-\vec{r}, \qquad (4.183)$$

$\vec{r}$ on väljapunkti kohavektor, $\vec{r}_0$ laengu kohavektor, $\vec{u}$ laengu kiirus. Suurused $\vec{R}$ ja $\vec{u}$ võetakse potentsiaalide avaldistes (4.181) ja (4.182) hetkel $t-\frac{R}{c}$.

Väljatugevuste $\vec{E}$, $\vec{H}$ avaldised võib tuletada potentsiaalide valemitest tuntud seoste (4.3) põhjal. See arvutus on võrdlemisi komplitseeritud, tingituna ajalise sõltuvuse keerukusest: ajaline argument ei ole avaldisega $t-\frac{R}{c}$ antud mitte ilmutatud kujul, sest R sõltub siin ka sellestsamast argumendist.

Toome sisse esmalt sobivad tähistused. Olgu

$$t-\frac{R}{c}=t_0 \qquad (4.184)$$

ja

$$R+\frac{\vec{R}\vec{u}}{c}=s. \qquad (4.185)$$

Siis saavad Lienard-Wiecherti potentsiaalid kuju:

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{e}{4\pi}\cdot\frac{\vec{u}}{cs}\Big|_{t_0}, \\ \varphi(\vec{r},t) &= \frac{e}{4\pi}\cdot\frac{1}{s}\Big|_{t_0} \end{aligned}\right\} \tag{4.186}$$

ja väljavektorid avalduvad järgmiselt:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{e}{4\pi}\left(\frac{\operatorname{grad} s}{s^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{u}}{s}\right)\right)\Big|_{t_0}, \\ \vec{H} &= \frac{e}{4\pi c}\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{u}}{s}\right)\Big|_{t_0} \end{aligned}\right\} \tag{4.187}$$

Arvutuse läbiviimiseks on vaja seega avaldada tuletised $\operatorname{grad} s$, $\frac{\partial s}{\partial t}$, $\operatorname{rot}\vec{u}$ ja $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$. Seejuures tuleb arvestada, et s ja $\vec{u}$ olenevad väljapunkti kohavektorist $\vec{r}$ ja välja ajast t eelkõige kaudselt, aja t_0 kaudu; peale selle oleneb s $\vec{r}$ -st ka otseselt. Seetõttu avalduvad otsitavad tuletised järgmiselt:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad} s &= \operatorname{grad}_{t_0} s + \frac{\partial s}{\partial t_0}\operatorname{grad} t_0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{\partial s}{\partial t_0}\cdot\frac{\partial t_0}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\vec{u} &= \operatorname{grad} t_0 \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial t_0}, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t_0}\cdot\frac{\partial t_0}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{4.188}$$

kus $\operatorname{grad}_{t_0} s$ tähendab $\operatorname{grad} s$ konstantse t_0 juures. Seega tuleb arvutada nüüd tuletised $\frac{\partial s}{\partial t_0}$, $\frac{\partial t_0}{\partial t}$,

$grad\,t_0$ ja $grad_{t_0} s$. Mis puutub tuletisesse $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t_0}$, siis ei ole seda vaja arvutada, vaid see on lihtsalt laengu kiirendus, mida edaspidi tähistame $\dot{\vec{u}}$:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t_0} \equiv \dot{\vec{u}} . \tag{4.189}$$

Valemist (4.184) leiame:

$$dt - \frac{1}{c} dR = dt_0 . \tag{4.190}$$

Et

$$R = \sqrt{(\vec{r}_0 - \vec{r})^2} ,$$

siis

$$dR = \frac{\vec{R} d\vec{r}_0 - \vec{R} d\vec{r}}{R}$$

ehk

$$d\vec{r}_0 = \vec{u}\, dt_0$$

tõttu

$$dR = \frac{\vec{R}\vec{u}\, dt_0 - \vec{R} d\vec{r}}{R} .$$

Asetades valemisse (4.190), saame:

$$dt_0 = \frac{dt + \frac{\vec{R} d\vec{r}}{cR}}{1 + \frac{\vec{R}\vec{u}}{cR}} . \tag{4.190}$$

Siit, arvestades ka (4.185), leiame:

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{R}{s} , \tag{4.191}$$

$$grad\, t_0 = \frac{\vec{R}}{cs} . \tag{4.192}$$

Edasi arvutame tuletised $\frac{\partial s}{\partial t_0}$ ja $grad_{t_0} s$. Valem (4.185) annab:

$$\frac{\partial s}{\partial t_0} = \frac{\vec{R}\vec{u}}{R} + \frac{u^2}{c} + \frac{\vec{R}\dot{\vec{u}}}{c} \tag{4.193}$$

ja

$$grad_{t_0} s = -\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{u}}{c} . \tag{4.194}$$

Asetades saadud avaldised (4.191) - (4.194) valemitesse (4.188), saame:

$$\left.\begin{aligned} grad s &= -\frac{\vec{R}}{R} - \frac{\vec{u}}{c} + \left(\frac{\vec{R}\vec{u}}{R} + \frac{u^2}{c} + \frac{\vec{R}\dot{\vec{u}}}{c}\right)\cdot\frac{\vec{R}}{cs}, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \left(\frac{\vec{R}\vec{u}}{R} + \frac{u^2}{c} + \frac{\vec{R}\dot{\vec{u}}}{c}\right)\frac{R}{s}, \\ rot\,\vec{u} &= \frac{\vec{R}\times\dot{\vec{u}}}{cs}, \\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} &= \frac{R\dot{\vec{u}}}{s} . \end{aligned}\right\} \tag{4.195}$$

Nüüd jääb asetada need valemid $\vec{E}$ ja $\vec{H}$ avaldistesse (4.187). Peale kôiki lihtsustusi leiame:

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\left(R + \frac{\vec{R}\vec{u}}{c}\right)^3}\left\{-\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}+\frac{R\vec{u}}{c}\right) + \frac{1}{c^2}\left[\vec{R}\times\left(\left(\vec{R}+\frac{R\vec{u}}{c}\right)\times\dot{\vec{u}}\right)\right]\right\} \tag{4.196}$$

ja

$$\vec{H} = \frac{\vec{E}\times\vec{R}}{R} . \tag{4.197}$$

Nendes valemites nagu ka potentsiaalide valemites on kõikide suuruste ($\vec{R}$, $\vec{u}$ ja $\dot{\vec{u}}$) ajaliseks argumendiks $t-\frac{R}{c}$.

Vaatleme saadud tulemusi lähemalt. Valemist (4.196) nähtub, et väli koosneb kahest osast. Üks osa on kiirendusest sõltumatu ja on pöördvõrdeline kauguse ruuduga. Teine osa sõltub kiirendusest ja on pöördvõrdeline kauguse esimese astmega. Esimene osa on ühtlaselt liikuva osakese korral identne sellega kaasaliikuvas süsteemis osakese elektrostaatilise väljaga. Mitteühtlaselt liikuva osakese korral kujutab see osa teatavat staatilise välja üldistust. Teine osa aga moodustab osakese poolt kiiratava välja. Sellele vastab energia voog, mis on suunatud osakesest eemale. Kui R on küllalt suur, muutub esimene ("staatiline") osa teise osa kõrval kaduvväikeseks. Seda piirkonda nimetatakse laengu välja kiirgus- ehk lainetsooniks. Väljatugevuste valemid saavad selles tsoonis lihtsama kuju. Võttes alguspunktiks laengu asukoha (s. o. tehes $\vec{r}_0=0$), nii et $\vec{R}=-\vec{r}$, leiame:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \left.\frac{e\{\vec{r}\times[(\vec{r}-\frac{r\vec{u}}{c})\times\dot{\vec{u}}]\}}{4\pi c^2(r-\frac{\vec{r}\vec{u}}{c})^3}\right|_{t-\frac{r}{c}} , \\ \vec{H} &= \left.\frac{\vec{r}\times\vec{E}}{r}\right|_{t-\frac{r}{c}} . \end{aligned}\right\} \qquad (4.198)$$

Nüüd arvutame energiavoo kiirgustsoonis. Asendades Poynting-Umovi vektori valemis $\vec{H}=\frac{\vec{r}\times\vec{E}}{r}$, leiame:

$$\vec{S} = \frac{c}{\varepsilon_0 r}(\vec{E}^2\vec{r} - \vec{E}\vec{r}\cdot\vec{E})$$

ehk $\vec{E}\vec{r} = 0$ tõttu

$$\vec{S} = \frac{c\vec{E}^2\vec{r}}{\varepsilon_0 r} . \qquad (4.199)$$

Asetades siia $\vec{E}$ avaldise valemist (4.198), leiame:

$$\vec{S} = \frac{e^2 r\vec{r}}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{[r\dot{\vec{u}} + \frac{\vec{r}\times(\vec{u}\times\dot{\vec{u}})}{c}]^2 - (\vec{r}\dot{\vec{u}})^2}{(r - \frac{\vec{r}\vec{u}}{c})^6} .$$

(4.200)

Integraalse kiirguse arvutamisel tuleb silmas pidada, et Poynting-Umovi vektori argumendiks on aeg t, millest valemi (4.200) paremal poolel esinevad suurused $\vec{r}$, $\vec{u}$ ja $\dot{\vec{u}}$ sõltuvad aja

$$t_0 = t - \frac{r}{c}$$

kaudu (vt. valem (4.184)), kusjuures valemite (4.185) ja (4.191) järgi

$$dt = (1 - \frac{\vec{r}\vec{u}}{cr})dt_0 . \qquad (4.201)$$

Seega avaldub aja dt vältel pinnaelementi $d\vec{S}$ läbiv energia dt_0 kaudu järgmiselt:

$$\vec{S}d\vec{S}dt = (1 - \frac{\vec{r}\vec{u}}{cr})\vec{S}d\vec{S}dt_0 . \qquad (4.202)$$

Siit järgneb, et laeng kiirgab ajaühiku kohta energiat

$$I = \oint(1 - \frac{\vec{r}\vec{u}}{cr})\vec{S}d\vec{S} , \qquad (4.203)$$

kus integraal on võetud üle kerapinna raadiusega r. Asetades siia $\vec{S}$ avaldise valemist (4.200), saame:

$$I = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left[\dot{\vec{u}} + \frac{\vec{r}\times(\vec{u}\times\dot{\vec{u}})}{cr}\right]^2 - \left(\frac{\vec{r}\dot{\vec{u}}}{r}\right)^2}{\left(1-\frac{\vec{r}\vec{u}}{cr}\right)^5}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi ,$$

(4.204)

kus ϑ ja ψ on polaarnurgad.

Selle integraali arvutamiseks võtame kiiruse $\vec{u}$ suuna polaarteljeks ja $(\vec{u}, \dot{\vec{u}})$ - tasandi algasimuudiks $(\psi = 0)$. Kui θ on $\vec{u}$ ja $\dot{\vec{u}}$ vaheline nurk, siis avaldub integraal järgmiselt:

$$I = \frac{e^2|\dot{\vec{u}}|^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{u}{c}\cos\vartheta\right)^{-5}\left[-\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\sin^2\vartheta\cos^2\psi + \right.$$

$$+ 2\cos\theta\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{u}{c}-\cos\vartheta\right)\cos\psi + \sin^2\theta\left(1-\frac{u}{c}\cos\vartheta\right)^2 +$$

$$\left. + \cos^2\theta\sin^2\vartheta\right]\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi .$$

Integreerides leiame:

$$I = \frac{e^2|\dot{\vec{u}}|^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\cdot\frac{1-\frac{u^2}{c^2}\sin^2\theta}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^3} \qquad (4.205)$$

ehk

$$I = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\cdot\frac{|\dot{\vec{u}}|^2 - \frac{(\vec{u}\times\dot{\vec{u}})^2}{c^2}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^3} . \qquad (4.206)$$

Selle valemi võime tuletada ka teisiti, lähtudes valemist (4.137), s. o. arvestades, et ajaühikus kiiratav energia I

on invariantne suurus. Kiirgava laengu hetkelise paigalsoleku süsteemis saab valem (4.200) kuju

$$\vec{S} = \frac{e^2 \vec{r} (\vec{r} \times \dot{\vec{u}}')^2}{16\pi \varepsilon_0 c^3 r^5}, \tag{4.207}$$

kus $\dot{\vec{u}}'$ tähendab kiirendust selles süsteemis. Võttes $\dot{\vec{u}}'$ suuna polaarteljeks, leiame siit kergesti ka integraalse kiirguse:

$$I = \frac{e^2 |\dot{\vec{u}}'|^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3}. \tag{4.208}$$

I invariantsuse tõttu määrab see valem integraalse kiirguse ka mistahes teises inertsiaalsüsteemis, kus $\vec{u} \neq 0$. Kiirendus $\dot{\vec{u}}'$ tuleb nüüd ainult avaldada kiirenduse $\dot{\vec{u}}$ kaudu selles teises süsteemis. Selleks kasutame valemit (3.164). Võttes seal $\vec{a} \to \dot{\vec{u}}$, $\vec{a}' \to \dot{\vec{u}}'$ ja $\vec{\beta} \to \frac{\vec{u}}{c}$, leiame:

$$\dot{\vec{u}}' = \frac{\dot{\vec{u}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} + \frac{\vec{u}\,\dot{\vec{u}} \cdot \vec{u}}{u^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right)}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \tag{4.209}$$

Siit

$$|\dot{\vec{u}}'|^2 = \frac{|\dot{\vec{u}}|^2 - \frac{(\vec{u} \times \dot{\vec{u}})^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^3}. \tag{4.210}$$

Asetades selle avaldise valemisse (4.208), saamegi uuesti (4.206).

Kui $u \ll c$, kehtib valem (4.206) praktiliselt küllaldase täpsusega kujul

$$I = \frac{e^2 |\dot{\vec{u}}|^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3}, \tag{4.211}$$

mis langeb ühte valemiga (4.208).

Ülesanded.

1. Anda Lienard-Wiecherti potentsiaalide avaldistele (4.181) ja (4.182) relativistlikult kovariantne kuju.

Lahendus. $\vec{A}$ ja φ sõltuvad kahest maailmapunktist: $(\vec{r}, t)$ (väljapunkt) ja $(\vec{r}_0, t_0)$ (laengu maailmapunkt). Et $\vec{R} = \vec{r}_0 - \vec{r}$ ja $R = c(t - t_0)$, siis moodustavad komponendid $(\vec{R}, -iR)$ neljamõõtmelise vektori. Tähistame

$$\mathfrak{X}_\mu = (\vec{R}, -iR) \,. \tag{4.212}$$

Selle vektori skalaarne korrutis laengu neljamõõtmelise kiirusega

$$u_\mu = \left(\frac{\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \tag{4.213}$$

on

$$\mathfrak{X}_\mu u_\mu = \frac{c\left(R + \frac{\vec{R}\vec{u}}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \,. \tag{4.214}$$

Järelikult avaldub hilinev neljamõõtmeline potentsiaal $U_\nu = (\vec{A}, i\varphi)$ järgmiselt:

$$U_\nu = \frac{e}{4\pi} \cdot \frac{u_\nu}{\mathfrak{X}_\mu u_\mu} \,. \tag{4.215}$$

Täiendavalt märgime, et suuruse

$$\frac{R + \frac{\vec{R}\vec{u}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

invariantsuses võib veenduda ka otseselt, rakendades vastavaid teisendusvalemeid suurustele $\vec{R}$ ja $\vec{u}$. Valemid (2.33) annavad:

$$\vec{R}' = \vec{R} + \frac{\vec{\beta}\vec{R}\cdot\vec{\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)}{\beta^2} + \frac{\vec{\beta}R}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$R' = \frac{R+\vec{\beta}\vec{R}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Siit ja kiiruse teisendusvalemitest (2.126) ja (2.128) saamegi:

$$\frac{R' + \frac{\vec{R}'\vec{u}'}{c}}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{R + \frac{\vec{R}\vec{u}}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

2. Veenduda, et punktlaengu hilinevad potentsiaalid rahuldavad normeerimistingimust.

L a h e n d u s . Asetades normeerimistingimusesse

$$div\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

$\vec{A}$ ja φ avaldised (4.186), saame

$$div\vec{u} - \frac{\vec{u}\,grad\,s}{s} - \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial t} = 0.$$

Siin

$$div\vec{u} = \dot{\vec{u}}\,grad\,t_0.$$

Seega peab olema

$$\dot{\vec{u}}\,grad\,t_0 - \frac{\vec{u}\,grad\,s}{s} - \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial t} = 0.$$

Asetades siia $grad\,t_0$, $grad\,s$ ja $\frac{\partial s}{\partial t}$ avaldised valemitest (4.192) ja (4.195), veendume, et see võrdus tõesti kehtib identselt.

3. Vaba laetud osake laenguga e ja seisumassiga m_0 asetseb monokromaatilise lineaarselt polariseeritud elektromagnetilise tasalaine väljas, mille elektri- ja magnetvek-

tori amplituud on A. Leida osakese liikumise võrrandid ja osakese poolt kiiratava kiirguse intensiivsus I.

L a h e n d u s . Suuname x-telje elektrivektori ja y-telje magnetvektori järgi. Laine levimise suunaks on siis z-telg. Osake asetsegu alghetkel alguspunktis ja tema algkiirus olgu null. Liikumise diferentsiaalvõrrandid on

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{e}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{u_z}{c}\right) A\cos(\omega t-\kappa z), \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{e u_x}{\varepsilon_0 c} A\cos(\omega t-\kappa z), \end{aligned}\right\} \qquad (4.216)$$

kus $\vec{u}$ on osakese kiirus, ω laine sagedus ja $\kappa = \frac{\omega}{c}$ lainearv. Nendest võrranditest saame tuntud viisil veel ühe võrrandi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \frac{e u_x}{\varepsilon_0 m_0 c^2} A\cos(\omega t-\kappa z). \qquad (4.217)$$

Integreerime esmalt teise võrrandi (4.216):

$$\left.\begin{aligned} &u_y = 0, \\ &y = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.218)$$

Liikumine toimub seega xz-tasandis. Kolmandast võrrandist (4.216) ja võrrandist (4.217) järgneb:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1-\frac{u_z}{c}}{\sqrt{1-\frac{u_x^2+u_z^2}{c^2}}}\right) = 0, \qquad (4.219)$$

mille integreerimine annab seose:

$$1-\frac{u_z}{c}=\sqrt{1-\frac{u_x^2+u_z^2}{c^2}} \qquad (4.220)$$

ehk

$$\frac{u_x^2}{c^2}=\frac{2u_z}{c}\left(1-\frac{u_z}{c}\right). \qquad (4.221)$$

Elimineerides selle seose abil võrrandist (4.217) u_x, saame:

$$\frac{d\left(\frac{u_z}{c}\right)}{\sqrt{\frac{u_z}{c}}\left(1-\frac{u_z}{c}\right)^{5/2}}=\frac{eA\sqrt{2}}{\varepsilon_0 m_0 c}\cos(\omega t-\kappa z)\,dt \qquad (4.222)$$

ehk

$$\omega\left(1-\frac{u_z}{c}\right)dt=\omega dt-\kappa dz \qquad (4.223)$$

tõttu

$$\frac{d\left(\frac{u_z}{c}\right)}{\sqrt{\frac{u_z}{c}}\left(1-\frac{u_z}{c}\right)^{3/2}}=\frac{eA\sqrt{2}}{\varepsilon_0\omega m_0 c}\cos(\omega t-\kappa z)\,d(\omega t-\kappa z). \qquad (4.224)$$

Integreerides leiame:

$$\frac{\sqrt{\frac{u_z}{c}}}{\sqrt{1-\frac{u_z}{c}}}=\alpha\sin(\omega t-\kappa z), \qquad (4.225)$$

kus

$$\alpha=\frac{eA}{\sqrt{2}\,\varepsilon_0\omega m_0 c}. \qquad (4.226)$$

Avaldades valemist (4.225) $\frac{u_z}{c}$, saame:

$$\frac{u_z}{c}=\frac{\alpha^2\sin^2(\omega t-\kappa z)}{1+\alpha^2\sin^2(\omega t-\kappa z)}. \qquad (4.227)$$

Siit valemite (4.220) ja (4.221) põhjal

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{1}{1+\alpha^2\sin^2(\omega t-\kappa z)} \qquad (4.228)$$

ja

$$\frac{u_x}{c} = \frac{\alpha\sqrt{2}\sin(\omega t - kz)}{1+\alpha^2\sin^2(\omega t - kz)} . \tag{4.229}$$

Omaaja diferentsiaal $d\tau$ avaldub valemite (4.223) ja (4.228) põhjal järgmiselt:

$$d\tau = \frac{1}{\omega} d(\omega t - kz) ,$$

kust

$$\tau = t - \frac{z}{c} . \tag{4.230}$$

Lõpuks leiame osakese koordinaadid x ja z. Selleks tuleb integreerida võrrandid (4.227) ja (4.229). Arvestades uuesti (4.223), leiame:

$$dz = \frac{\alpha^2}{k}\sin^2(\omega t - kz)\, d(\omega t - kz) ,$$

$$dx = \frac{\alpha\sqrt{2}}{k}\sin(\omega t - kz)\, d(\omega t - kz) ,$$

ja siit

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{\alpha^2}{2k}(\omega t - kz) - \frac{\alpha^2}{4k}\sin 2(\omega t - kz) , \\ x &= \frac{\alpha\sqrt{2}}{k}\left[1 - \cos(\omega t - kz)\right] . \end{aligned}\right\} \tag{4.231}$$

Arvestades (4.230) võime need avaldised kirjutada ka kujul:

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{\alpha^2}{2k}(\omega\tau - \sin\omega\tau\cos\omega\tau) , \\ x &= \frac{\alpha\sqrt{2}}{k}(1 - \cos\omega\tau) . \end{aligned}\right\} \tag{4.232}$$

Seega on meil integraalsed liikumisvõrrandid käes, olgugi et x ja z ei ole valemites (4.232) lõpuni ilmutatud.

Praktiliselt kehtib alati võrratus $\alpha \ll 1$. Seetõttu võime küllaldase täpsusega võtta $z=0$ ja $\tau = t$. Teine valem (4.232) saab aga kuju:

$$x = \frac{2\alpha\sqrt{2}}{k} \sin^2 \frac{\omega t}{2} \qquad (4.233)$$

ning (4.229) põhjal $\frac{u}{c} \ll 1$. Osake võngub seega lineaarselt langeva laine elektrivektori sihis. Kiirguse intensiivsuse leidmiseks rakendame valemit (4.211). Et

$$\ddot{x} = \alpha \omega c \sqrt{2} \cos\omega t$$

siis, keskmistades ajas, saame:

$$I = \frac{e^2 \alpha^2 \omega^2}{6\pi \varepsilon_0 c} .$$

Arvestades α definitsiooni (4.226) ja seda, et langeva laine intensiivsus on

$$I_0 = \frac{cA^2}{2\varepsilon_0} , \qquad (4.234)$$

saame:

$$I = \frac{e^4 I_0}{6\pi \varepsilon_0^2 m_0^2 c^4} . \qquad (4.235)$$

Defineerides osakese (näiteks elektroni) niinimetatud klassikalise raadiuse

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 m_0 c^2} , \qquad (4.236)$$

leiame lõplikult:

$$I = \frac{8\pi r_0^2}{3} \cdot I_0 . \qquad (4.237)$$

See on Thomsoni klassikaline valem vaba laetud osakese poolt hajutatud valguse intensiivsuse jaoks.

4. Laetud osake laenguga e ja seisumassiga m_0 tiirleb ringjoont mööda homogeenses magnetväljas H. Osakese impulss on p. Kui palju energiat kiirgab see osake ajaühikus?

L a h e n d u s . Selles ülesandes on kiirus ja kiirendus teineteisega risti, kusjuures $|\dot{\vec{u}}| = u\omega$, kus ω on tiirlemise nurkkiirus. Seega, võttes valemis (4.205) θ = = 90°, leiame:

$$I = \frac{e^2\omega^2u^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3(1-\frac{u^2}{c^2})^2}.$$

Et aga orbiidi raadius on võrdne

$$R = \frac{\varepsilon_0 cp}{eH}$$

ja nurkkiirus on $\omega = \frac{u}{R}$, siis

$$I = \frac{e^4u^4H^2}{6\pi\varepsilon_0^3p^2c^5(1-\frac{u^2}{c^2})^2}.$$

Lõpuks, kuna

$$p = \frac{m_0u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

siis

$$I = \frac{e^4H^2p^2}{6\pi\varepsilon_0^3m_0^4c^5}. \qquad (4.238)$$

§ 24. Variatsiooniprintsiip elektrodünaamikas.

Väljavõrrandite tuletamiseks variatsiooniprintsiibi alusel mõjuintegraalist tuleb eelkõige arvestada, et mõjuintegraal peab olema invariantne suurus. Muidu ei oleks võrrandite kuju igas inertsiaalsüsteemis ühesugune. Mõjuintegraal on integraal lagranžiaani tihedusest üle invariantse aegruumilise piirkonna:

$$S = \int \Lambda \, d\Omega = ic\int \Lambda \, dV dt \,, \qquad (4.239)$$

kus lagranžiaani tihedus Λ sõltub väljasuurustest kui üldistatud koordinaatidest ja nende esimestest tuletistest aegruumi koordinaatide järgi kui üldistatud kiirustest. Peale selle sõltub Λ ka laengute koordinaatidest ja kiirustest.

Et S on invariant, peab ka Λ olema invariant. Lagrange'-Euleri võrrandite üldine kuju, mis saadakse mõjuintegraali varieerimisel,

$$\delta S = 0 \,,$$

on

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial q}{\partial x_\mu}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 \,, \qquad (4.240)$$

kus q on koordinaat, s. o. väljafunktsioon. Need võrrandid ongi väljavõrranditeks. Et väljavõrrandid on lineaarsed, siis on ilmne, et lagranžiaani tihedus peab olema ruutfunktsioon väljasuurustest ja nende tuletistest. On aga olemas üksainus välja invariant, mis seda nõuet rahuldab. See on

$$I = \Phi_{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu} = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2) \qquad (4.241)$$

(vt. ülesanne 8 §-s 13). Seega peab Λ olema selle invariandiga võrdeline.

Kui väli on laenguvaba, siis ei ole võrdeteguri väärtus oluline, sest väljavõrrandid on homogeensed.

33

Kui aga väli on vastastikuses mõjustuses laengutega, tuleb õigete väljavõrrandite saamiseks võtta võrdeteguriks $-\frac{1}{4\varepsilon_0}$. Seega on välja lagranžiaani tiheduseks

$$\Lambda_{väli} = -\frac{1}{4\varepsilon_0}\phi_{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} . \tag{4.242}$$

On otstarbekohane vaadelda põhilise väljafunktsioonina väljatensori $\phi_{\mu\nu}$ asemel potentsiaali U_μ. Siis saame eelmise valemi kujul:

$$\Lambda_{väli} = -\frac{1}{4\varepsilon_0}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu}\right) . \tag{4.243}$$

Üldjuhul koosneb lagranžiaani tihedus kolmest liikmest:

$$\Lambda = \Lambda_{väli} + \Lambda_i + \Lambda_{laengud} , \tag{4.244}$$

kus Λ_i on interaktsiooni lagranžiaani tihedus, mis peab olema välja ja laengute koordinaatidest lineaarselt sõltuv invariant. Ainsa sellise invariandina tuleb kõne alla vooluvektori ja potentsiaali skalaarne korrutis $j_\sigma U_\sigma$, millega Λ_i peab ilmselt olema võrdeline. Võrdeteguriks on $\frac{1}{\varepsilon_0 c}$. Seega on lagranžiaani summaarne tihedus võrdne

$$\Lambda = -\frac{1}{4\varepsilon_0}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0 c} j_\sigma U_\sigma + \Lambda_{laengud} , \tag{4.245}$$

kus esialgu puudub veel konkreetne avaldis viimase liikme jaoks. Ent seda ei ole väljavõrrandite tuletamiseks ka vaja, sest see liige ei sõltu väljasuurusest U_ν.

Väljavõrrandi tuletamiseks lagranžiaani tihedusest arvutame tuletised:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathcal{U}_\sigma} = \frac{1}{\varepsilon_0 c} j_\sigma$$

ja

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \frac{\partial \mathcal{U}_\sigma}{\partial x_\tau}} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial \mathcal{U}_\sigma}{\partial x_\tau} - \frac{\partial \mathcal{U}_\tau}{\partial x_\sigma}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\Phi_{\sigma\tau} .$$

Asetades need avaldised võrrandisse (4.240), kus tuleb teha $q \to \mathcal{U}_\sigma$, leiame:

$$\frac{\partial \Phi_{\sigma\tau}}{\partial x_\tau} = \frac{1}{c} j_\sigma , \qquad (4.246)$$

mis ühtibki võrrandiga (4.21).

Vaatleme veel laengute liikumist variatsiooniprintsiibi alusel. On otstarbekohane vaadelda selleks laenguid diskreetsete osakestena. Sel juhul tuleb mõjuintegraali vastavates liikmetes,

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c}\int j_\sigma \mathcal{U}_\sigma \, d\Omega$$

ja

$$\int \Lambda_{laengud} \, d\Omega ,$$

asendada integreerimine üle kolmemõõtmelise ruumi piirkonna summeerimisega üle osakeste. Et

$$j_\sigma = \rho u_\sigma \sqrt{1-u^2/c^2} ,$$

kus ρ on laengutihedus ja u_σ laengu kiirus, siis

$$\int j_\sigma \mathcal{U}_\sigma \, d\Omega = ic\int \rho u_\sigma \mathcal{U}_\sigma \sqrt{1-u^2/c^2}\, dV dt .$$

Minnes üle diskreetsetele osakestele tuleb asendada

$$\int \rho \, dV \to \sum_k e^{(k)} ,$$

kus $e^{(k)}$ on k-nda osakese laeng. Seega

$$\int j_0 U_0 \, d\Omega \to ic \int \sum_k e^{(k)} u_0^{(k)} U_0^{(k)} \sqrt{1-u^{(k)2}/c^2} \, dt$$

ehk

$$\int j_0 U_0 \, d\Omega \to ic \int \sum_k e^{(k)} (\vec{u}^{(k)} \vec{A}^{(k)} - c\varphi^{(k)}) \, dt \; . \tag{4.247}$$

Indeks k potentsiaali juures tähendab tema väärtust k-nda osakese asukohas. Analoogiliselt

$$\int \Lambda_{laengud} \, d\Omega \to ic \int \sum_k \mathcal{L}^{(k)} dt \; , \tag{4.248}$$

kus $\mathcal{L}^{(k)}$ on k-nda osakese lagranžiaan:

$$\int \Lambda_{laengud} \, dV \to \sum_k \mathcal{L}^{(k)} .$$

Õige liikumisvõrrandi saamiseks tuleb võtta

$$\mathcal{L}^{(k)} = - m_0^{(k)} c^2 \sqrt{1 - u^{(k)2}/c^2} \; . \tag{4.249}$$

Seega on diskreetsete osakeste korral kogu mõjuintegraal järgmise kujuga:

$$S = -\frac{1}{4\varepsilon_0} \int \Phi_{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu} \, d\Omega + ic \int \sum_k \Big[\frac{e^{(k)}}{\varepsilon_0 c} (\vec{u}^{(k)} \vec{A}^{(k)} - c\varphi^{(k)}) - $$
$$- m_0^{(k)} c^2 \sqrt{1-u^{(k)2}/c^2} \Big] dt \; , \tag{4.250}$$

kusjuures integrand teises liikmes on osakestest sõltuv lagranžiaani osa:

$$\mathcal{L}=\sum_{k}\left[\frac{e^{(k)}}{\varepsilon_0 c}\left(\vec{u}^{(k)}\vec{A}^{(k)}-c\varphi^{(k)}\right)-m_0^{(k)}c^2\sqrt{1-u^{(k)2}/c^2}\right]. \qquad (4.251)$$

k-nda osakese liikumisvõrrandiks on sellele osale vastav Lagrange'-Euleri võrrand:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{u}^{(k)}}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}^{(k)}}=0,$$

kus $\vec{r}^{(k)}$ on k-nda osakese kohavektor, ehk

$$\frac{d}{dt}\,grad_u^{(k)}\mathcal{L}-grad^{(k)}\mathcal{L}=0, \qquad (4.252)$$

kus $grad_u$ tähendab gradienti kiiruste ruumis. Arvutades leiame:

$$grad_u\mathcal{L}=\frac{e\vec{A}}{\varepsilon_0 c}+\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{e\vec{A}}{\varepsilon_0 c}+\vec{p}$$

(indeksi k jätame ära) ja

$$grad\,\mathcal{L}=\frac{e}{\varepsilon_0 c}\left(\vec{u}\,grad\vec{A}+\vec{u}\times rot\vec{A}-c\,grad\varphi\right)$$

Seega

$$\frac{e}{\varepsilon_0 c}\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{p}}{dt}-\frac{e}{\varepsilon_0 c}\left(\vec{u}\,grad\vec{A}+\vec{u}\times rot\vec{A}-c\,grad\varphi\right)=0$$

ja

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\vec{u}\,grad\vec{A}$$

tõttu

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{e}{\varepsilon_0 c}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-c\,grad\varphi+\vec{u}\times rot\vec{A}\right).$$

Asendades siin

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi ,$$
$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} ,$$
saamegi osakese tuntud liikumisvôrrandi:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{\varepsilon_0}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{u}\times\vec{H})\right) . \qquad (4.253)$$

Lôpuks vaatame, millise kuju saab môjuintegraal laengute pideva jaotuse korral. Ilmselt saab interaktsiooni kirjeldav liige tagasi oma algkuju

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c}\int j_0 U_0 \, d\Omega ,$$

kuna viimases liikmes tuleb seisumass $m_0^{(k)}$ asendada seisumassi tiheduse μ_0 ja ruumielemendi dV korrutisega $\mu_0 dV$ ning summeerimiselt üle minna integreerimisele. Seisumassi tihedus aga invariant ei ole, sest dV ei ole invariant. Sellevastu on korrutis $\mu_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ invariant, mis tähendab nimelt seisumassi tihedust selles inertsiaalsüsteemis, milles vaadeldav massielement on liikumatu - teiste sônadega, seisumassi seisutihedust. Tähistame seda μ_{00}:

$$\mu_{00} = \mu_0\sqrt{1-u^2/c^2} . \qquad (4.254)$$

Tôepoolest, et

$$m_0 = \mu_0 dV$$

on invariant, siis ka

$$\mu_0 dV = \frac{\mu_{00}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot dV_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \mu_{00}\, dV_0$$

on invariant, kusjuures

$$dV_0 = \frac{dV}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

on ruumielement paigaloleku süsteemis. Siit näemegi, et μ_{oo} on tõesti seisumassi seisutihedus.

Nüüd saab mõjuintegraal järgmise kuju:

$$S = \int \left[-\frac{1}{4\varepsilon_0} \Phi_{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu} + \frac{1}{\varepsilon_0 c} j_\sigma U_\sigma - \mu_{oo} c^2 \right] d\Omega \qquad (4.255)$$

ja lagranžiaani tihedus on

$$\Lambda = -\frac{1}{4\varepsilon_0} \Phi_{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu} + \frac{1}{\varepsilon_0 c} j_\sigma U_\sigma - \mu_{oo} c^2 , \qquad (4.256)$$

kus kolm liiget vastavad kolmele liikmele valemis (4.244).

K i r j a n d u s .

Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. Изд. 2-е. "Наука", 1970.

Бергман П. Введение в теорию относительности. ГИИЛ, 1947.

Бом Д. Специальная теория относительности. "Мир", 1967.

Борн М. Эйнштейновская теория относительности. "Мир", 1964.

Джексон Дж. Классическая электродинамика. "Мир", 1965.

Джеммер М. Понятие массы в классической и современной физике. "Прогресс", 1967.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Изд. 5-е. "Наука", 1967.

Новаку В. Введение в электродинамику. ИИЛ, 1963.

Паули В. Теория относительности. ГИТТЛ, 1947.

Румер Ю.Б., Рывкин М.С. Теория относительности. Учпедгиз, 1960.

Скобельцын Д.В. Парадокс близнецов в теории относительности. "Наука", 1966.

Тейлор Э., Уилер Дж. Физика пространства-времени. Изд. 2-е. "Мир", 1971.

Тоннела М.-А. Основы электромагнетизма и теории относительности. ИИЛ, 1962.

Угаров В.А. Специальная теория относительности. "Наука", 1969.

Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, 1955.

Эйнштейн А. Сущность теории относительности. ИИЛ, 1955.

S i s u k o r d .

П. Кард
СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
II
На эстонском языке
Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Vastutav toimetaja R. Lias
Korrektor E. Oja

TRÜ rotaprint 1972. Paljundamisele antud 26. I 1972. Trükipoognaid 16,63. Tingtrükipoognaid 15,47. Arvestuspoognaid 12,09. Trükiarv 400. Paber 30 x 42. 1/4. MB 01378. Tell. nr. 117.

Hind 85 kop.

Hind 85 kop.