

TARTU ÜLIKOOL
Matemaatika-informaatika teaduskond
Rakendusmatemaatika instituut
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite õppetool

Kerli Orav-Puurand

**Nõrgalt singulaarse tuumaga Fredholmi
integraalvõrrandi lahendamine muutujate
vahetuse abil**

Magistritöö

Juhendaja: prof Arvet Pedas

TARTU 2005

Sisukord

Sissejuhatus.....	3
1. Põhimõisted ja abitulemused	5
1.1 Mõisteid ja tulemusi funktsionaalanalüüsist.....	5
1.2 Polünomiaalsete splainide ruum	7
2. Tingimused põhivõrrandile ja lahendi siledus	8
3. Splain-kollokatsioonimeetod	9
3.1 Kollokatsioonimeetodi jaoks kasutatav võrk.....	9
3.2 Kollokatsioonimeetodi kirjeldus.....	9
3.3 Kollokatsioonimeetodi koondumine.....	10
4. Modifitseeritud kollokatsioonimeetod	12
4.1 Iseärasust nõrgendav teisendus	12
4.2 Modifitseeritud kollokatsioonimeetodi kirjeldus.....	16
5. Modifitseeritud kollokatsioonimeetodi koonduvus	22
5.1 Tükiti polünomiaalne interpolatsioon.....	22
5.2 Modifitseeritud kollokatsioonimeetodi koonduvus	26
6. Arvulised tulemused	30
6.1 Testülesanne.....	30
6.2 Arvuliste tulemuste analüüs.....	31
Summary.....	38
Kirjandus.....	39
Lisad.....	40
Programmide kirjeldused	40
Mathcadi programmid	41

Sissejuhatus

Käesolevas töös vaatleme nõrgalt singulaarse tuumaga Fredholmi integraalvõrrandit

$$u(x) = \int_0^1 L(x, y)|x - y|^{-\alpha} u(y) dy + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

kus funktsioonid L ja f on antud ning u on otsitav.

Eeldame, et $L : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ja $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ on m korda pidevalt diferentseeruvad ning vastaval homogeenisel võrrandil

$$u(x) = \int_0^1 L(x, y)|x - y|^{-\alpha} u(y) dy, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

on olemas vaid triviaalne lahend $u = 0$.

Sellisel juhul on võrrand (1) üheselt lahenduv, tema lahend $u(x)$ on pidev lõigus $[0,1]$ ning m korda pidevalt diferentseeruv vahemikus $(0,1)$, kuid $u(x)$ tuletised $u'(x)$, ..., $u^{(m)}(x)$ võivad olla tõkestamata, kui $x \rightarrow 0$ või $x \rightarrow 1$.

Töodes [1], [8], [9] on uuritud splineidega kollokatsioonimeetodi koonduvust ja koonduvuskiirust võrrandi (1) lahendamiseks mitmesuguste võrkude korral. Osutub, et kasutades erikujulisi, lõigu $[0,1]$ otspunktide 0 ja 1 juures järjest tihedama sõlmede kontsentratsiooniga võrke, saab konstrueerida kuitahes kõrget järku täpsusega tükiti polünomiaalseid lähendeid võrrandi (1) lahendile $u(x)$ (vt teoreem 3.1). Võrgupunktide liiga suur tihedus integreerimislõigu $[0,1]$ otspunktide juures võib kaasa tuua aga raskused meetodi praktilisel realiseerimisel arvutil, sest punktide 0 ja 1 juures olevate osalõikude pikkused on liiga väiksed võrreldes teiste osalõikudega.

Seetõttu on käesolevas töös kasutatud võrrandi (1) lahendamiseks modifitseeritud kollokatsioonimeetodit, mis võimaldab leida integraalvõrrandi kõrget järku täpsusega lähilahendeid ühtlase või peaaegu ühtlase võrgu korral. Me tuginame töodes [3], [5], [6] algselt Volterra integraalvõrrandite lahendamiseks väljatöötatud metoodikale ja lähenemisviisile kõrgemat järku algoritmide konstrueerimiseks.

Nimetatud metoodika kohaselt teisendame lähtevõrrandi kõigepealt sobiva muutujate vahetuse abil kujule, mille lahend on lähtevõrrandi lahendist tunduvalt siledam.

Seejärel lahendame siledama lahendiga võrrandi kollokatsioonimeetodiga ühtlase või peaaegu ühtlase võrgu korral (vt peatükk 4).

Magistritöö põhitulemused on esitatud teoreemides 5.1. ja 5.2. Teoreemis 5.1. on saadud tulemused lähislahendi koondumise kohta võrrandi täpseks lahendiks ning teoreemis 5.2. hinnatud viga. Saadud koondumishinnangud näitavad, et töös kirjeldatud modifitseeritud kollokatsioonimeetod lubab võrrandi (1) lahendamiseks kasutada tunduvalt vähem ebaühtlast võrku kui peatükis 3 kirjeldatud klassikaline kollokatsioonimeetod.

Magistritöö koosneb kuuest peatükist. Esimene neist sisaldab abitulemusi, teises on esitatud tingimused põhivõrrandile. Kolmandas peatükis on kirjeldatud kollokatsioonimeetodit. Neljas ja viies peatükk on vastavalt pühendatud modifitseeritud kollokatsioonimeetodi kirjeldamisele ja hinnangute saamisele. Viimases peatükis on toodud konkreetse testülesande lahendamisel saadud arvulised tulemused ning nende analüüs. Lisades on juurde lisatud testülesande lahendamiseks vajaminevad *Mathcad* programmide tekstid.

1. Põhimõisted ja abitulemused

Selles peatükis toome sisse põhimõisted ning esitame lühidalt väited, mida järgnevas kasutame.

1.1 Mõisteid ja tulemusi funktsionaalanalüüsist

Kirjutisega $\mathbb{N}$ tähistame kõigi naturaalarvude hulka: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Kirjutisega $\mathbb{R}$ tähistame kõigi reaalarvude hulka: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Olgu X ja Y Banachi ruumid. Sümboliga $L(X, Y)$ tähistame pidevate lineaarsete operaatorite hulka ruumist X ruumi Y . Hulk $L(X, Y)$ on Banachi ruum normiga

$$\|A\|_{L(X, Y)} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|Ax\|, \quad A \in L(X, Y).$$

Kirjutisega $C[a, b]$ tähistame kõigi lõigul $[a, b]$ pidevate funktsioonide hulka. Hulk $C[a, b]$ on Banachi ruum normiga

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|, \quad x \in C[a, b].$$

Kirjutisega $C^m(X)$ tähistame kõigi hulgal $X \subset \mathbb{R}^n$ määratud m korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulka, $C^0(X) = C(X)$.

Kirjutisega $L^\infty(a, b)$ tähistame kõigi lõigul $[a, b]$ mõõtuvate funktsioonide x hulka.

Hulk $L^\infty(a, b)$ on Banachi ruum normiga

$$\|x\| = \inf_{\mu(E)=0} \sup_{t \in [a, b] \setminus E} |x(t)| < \infty, \quad x \in L^\infty(a, b).$$

Definitsioon 1.1. Hulka K meetrilises ruumis nimetatakse suhteliselt kompaktseks, kui igast hulga K elementidest moodustatud jadast saab eraldada koonduva osajada.

Definitsioon 1.2. Olgu X, Y normeeritud ruumid ja $K \subset X$ mittetühi hulk. Operaatorit $A: K \rightarrow Y$ nimetatakse kompaktseks, kui ta hulga K iga tõkestatud osahulga teisendab suhteliselt kompaktseks hulgaks ruumis Y .

Definitsioon 1.3. Hulka $E \subset X$ nimetatakse põhihulgaks normeeritud ruumis X , kui $\overline{L(E)} = X$ (st hulga E lineaarne kate on kõikjal tihe).

Definitsioon 1.4. Öeldakse, et operaatorite jada $A_n: X \rightarrow Y$ koondub punktiviisi ehk kõikjal ruumis X , kui iga $x \in X$ korral jada $A_n x$ koondub ruumis Y .

Teoreem 1.1. (vt [4], lk 135) Olgu X ja Y Banachi ruumid ning E põhihulk ruumis X . Jada $A_n \in L(X, Y)$ koondub kõikjal ruumis X parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:

- 1) $\exists M \in \mathbb{R}, \|A_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$,
- 2) $\exists \lim_n A_n x \quad \forall x \in E$.

Teoreem 1.2. (vt [4], lk 141-142) Olgu X Banachi ruum ja operaator $A \in L(X, X)$ selline, et $\|A\| < 1$. Siis operaatoril $I - A$ on olemas pöördoperaator $(I - A)^{-1} \in L(X, X)$ ja kehtib hinnang

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Teoreem 1.3. (vt [4], lk 223) Olgu X Banachi ruum ja operaator $A \in L(X, X)$ kompaktne. Võrrand $x = Ax + y$ on iga $y \in X$ korral lahenduv parajasti siis, kui homogeensel võrrandil $x = Ax$ on ainult triviaalne lahend. Sel juhul on võrrand $x = Ax + y$ iga $y \in X$ korral üheselt lahenduv.

Teoreem 1.4. (vt [3], lk 23) Olgu E_0 ja E_1 mingid Banachi ruumid, mille korral $E_0 \subset E_1$ ja leidub konstant $C > 0$ nii, et $\|x\|_{E_1} \leq C\|x\|_{E_0}$ iga $x \in E_0$ puhul. Olgu $T \in L(E_1, E_0)$ kompaktne ja $P_N \in L(E_0, E_1)$ ($N \in \mathbb{N}$) sellised, et

$$\|P_N x - x\|_{E_1} \rightarrow 0, \text{ kui } N \rightarrow \infty, \forall x \in E_0.$$

Siis

$$\|T - P_N T\|_{L(E_1, E_1)} \rightarrow 0, \text{ kui } N \rightarrow \infty.$$

1.2 Polünomiaalsete splineide ruum

Olgu lõigul $[0,1]$ antud võrk

$$\Delta_N = \{x_0, x_1, \dots, x_{2N} : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2N} = 1\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Olgu $m \geq 0$ mingi täisarv ja tähistagu π_m kõigi polünoomide hulka, mille järk on väiksem või võrdne arvuga m . Defiineerime võrguga Δ_N seotud m järku polünomiaalsete splineide ruumid $S_m^{(-1)}(\Delta_N)$ ja $S_m^{(0)}(\Delta_N)$ järgmiselt:

$$S_m^{(-1)}(\Delta_N) = \left\{ v : v|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \pi_m, i = 1, \dots, 2N \right\},$$

$$S_m^{(0)}(\Delta_N) = \left\{ v \in C[0,1] : v|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \pi_m, i = 1, \dots, 2N \right\}.$$

Siin $v|_{[x_{i-1}, x_i]}$ on funktsiooni $v : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ kitsend lõigule $[x_{i-1}, x_i] \subset [0,1]$, $i = 1, \dots, 2N$.

Märgime, et funktsioon $v \in S_m^{(-1)}(\Delta_N)$ võib olla katkev võrgu Δ_N sisepunktides $x_1, \dots, x_{2N-1}$.

2. Tingimused põhivõrrandile ja lahendi siledus

Vaatleme lineaarset teist liiki integraalvõrrandit kujul

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.1)$$

kus $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on mingi pidev funktsioon. Tuuma K kohta eeldame, et

$$K(x, y) = L(x, y)|x - y|^{-\alpha}, \quad x \neq y, \quad (2.2)$$

kus $0 < \alpha < 1$ ja L on pidev funktsioon piirkonnas $[0, 1] \times [0, 1]$.

Olgu $C^{m, \nu}[0, 1]$ ($m \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu < 1$) kõigi selliste funktsioonide $u \in C[0, 1] \cap C^m(0, 1)$ hulk, mis iga $x \in (0, 1)$ korral rahuldavad tingimust

$$\left| u^{(j)}(x) \right| \leq c \begin{cases} 1, & j < 1 - \nu \\ 1 + |\ln \rho(x)|, & j = 1 - \nu \\ \rho(x)^{1 - \nu - j}, & j > 1 - \nu \end{cases}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

kus c on mingi positiivne konstant ja

$$\rho(x) = \min\{x, 1 - x\}, \quad 0 < x < 1. \quad (2.4)$$

Võrrandi (2.1) lahendi sileduse kohta kehtib järgmine tulemus, vt [8], [9].

Teoreem 2.1. Olgu täidetud järgmised eeldused:

- 1) tuum K omab kuju (2.2), kus $0 < \alpha < 1$ ja kordaja $L(x, y)$ on m ($m \geq 1$) korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas $[0, 1] \times [0, 1]$;
- 2) $f \in C^{m, \nu}[0, 1]$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \leq \alpha$;

- 3) võrrandile (2.1) vastaval homogeenisel võrrandil $u(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y)dy$ leidub

vaid triviaalne lahend $u = 0$.

Siis $u \in C^{m, \alpha}[0, 1]$, st $u \in C[0, 1] \cap C^m(0, 1)$ ning iga $x \in (0, 1)$ korral kehtib hinnang (2.3), kus $\nu = \alpha$.

3. Spline-kollokatsioonimeetod

3.1 Kollokatsioonimeetodi jaoks kasutatav võrk

Võrrandi (2.1) ligikaudseks lahendamiseks kasutame spline-kollokatsioonimeetodit.

Olgu lõigul $[0,1]$ antud võrk

$$\Delta_N^r = \{x_0, x_1, \dots, x_{2N} : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2N} = 1\}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad r \geq 1, \quad (3.1)$$

sõlmedega

$$x_i = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{N} \right)^r, \quad i = 0, \dots, N; \quad (3.2)$$

$$x_{N+i} = 1 - x_{N-i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Paneme tähele, et kui $r = 1$, siis võrk (3.1) on ühtlane; kui $r > 1$, siis võrgu (3.1) sõlmed (3.2) paiknevad tihedamalt lõigu $[0,1]$ otspunktide 0 ja 1 ümbruses.

Valime lõigus $[0,1]$ m parameetrit $\eta_1, \dots, \eta_m$ nii, et

$$0 \leq \eta_1 < \dots < \eta_m \leq 1 \quad (3.3)$$

ja defineerime kollokatsioonipunktid

$$t_{ip} = x_i + \eta_p (x_{i+1} - x_i), \quad p = 1, \dots, m; \quad i = 1, \dots, 2N, \quad (3.4)$$

kus x_i ($i = 1, \dots, 2N$) on võrgu (3.1) punktid (3.2). Parameetreid (3.3) nimetatakse kollokatsiooniparameetriteks.

3.2 Kollokatsioonimeetodi kirjeldus

Kirjutame uuesti välja võrrandi (2.1):

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Selle võrrandi lahendi u lähislahendit v otsime splineina ruumist $S_{m-1}^{(-1)}(\Delta_N^r)$, $m \geq 1$, $r \geq 1$, $N \in \mathbb{N}$, kus võrk Δ_N^r on kujul (3.1). Funktsiooni $v \in S_{m-1}^{(-1)}(\Delta_N^r)$ leidmiseks

asetame ta algvõrrandisse (2.1) otsitava funktsiooni u kohale ja nõuame, et võrrand oleks rahuldatud kollokatsioonipunktides (3.4):

$$v(t_{ip}) = \int_0^1 K(t_{ip}, y)v(y)dy + f(t_{ip}), \quad p = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, 2N. \quad (3.5)$$

Sellist meetodit võrrandi (2.1) ligikaudseks lahendamiseks nimetatakse spline-kollokatsioonimeetodiks (sageli ka tükiti polünomiaalseks kollokatsioonimeetodiks).

3.3 Kollokatsioonimeetodi koondumine

Töodes [1], [8], [9] on uuritud, millal tingimused (3.5) määravad üheselt suuruse $v \in S_{m-1}^{(-1)}(\Delta_N^r)$ ning kui suure vea me sellise ligikaudse lahendamisega teeme.

Esitame tulemuse kollokatsioonimeetodi koondumise kohta järgmise teoreemina (vt [8], [9]).

Teoreem 3.1. Olgu täidetud teoreemi 2.1. eeldused ning olgu kasutusel seosega (3.4) määratud kollokatsioonipunktid $\{t_{ip}\}$.

Siis leidub selline naturaalarv N_0 , et $N \geq N_0$ korral määravad tingimused (3.5) üheselt otsitava funktsiooni $v \in S_{m-1}^{(-1)}(\Delta_N^r)$ ning kehtib hinnang

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x) - v(x)| \leq c \begin{cases} N^{-r(1-\alpha)}, & 1 \leq r < \frac{m}{1-\alpha} \\ N^{-m}, & r \geq \frac{m}{1-\alpha} \end{cases}, \quad N \geq N_0, \quad (3.6)$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest N .

Märkus 3.1. Kui $\eta_1 = 0$ ja $\eta_m = 1$ (vt tingimusi (3.3)), siis meetodi (3.5) abil leitud suurus v kuulub tegelikult siledamate splineide ruumi $S_{m-1}^{(0)}(\Delta_N^r)$.

Märkus 3.2. Teoreemist 3.1. järeldub, et ühtlase võrgu korral ($r = 1$) ei sõltu meetodi (3.5) täpsusaste suurusest m ja on vaid järku $O(N^{-(1-\alpha)})$:

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x) - v(x)| \leq cN^{-(1-\alpha)}, \quad N \geq N_0.$$

Kui aga võrgu Δ_N^r parameeter r on küllalt suur, $r \geq \frac{m}{1-\alpha}$, saame splainide järgu $m - 1$ suurendamise teel konstrueerida kuitahes kõrget järku täpsusega võrrandi (2.1) lahendi u lähislahendi v :

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x) - v(x)| \leq cN^{-m}, \quad N \geq N_0.$$

Suurte r väärtuste kasutamine toob aga kaasa võrgu Δ_N^r sõlmede (3.2) järjest suurema kontsentratsiooni lõigu $[0,1]$ otspunktide juures ning raskused meetodi (3.5) praktilisel realiseerimisel. Seetõttu pakub huvi välja töötada selliseid kollokatsioonimeetodi modifitseeritud algoritme, mis võimaldavad leida integraalvõrrandi kõrget järku täpsusega lähislahendeid ühtlase või peaaegu ühtlase võrgu korral.

Töodes [3], [5], [6] on sellist ülesannet käsitletud Volterra tüüpi võrrandite korral. Järgnevas tuginemegi nendes töodes väljatöötatud metoodikale teisendades lähtevõrrandi kõigepealt sobiva muutujate vahetuse abil kujule, mille lahend on lähtevõrrandi lahendist tunduvalt siledam. Seejärel lahendame siledama lahendiga võrrandi kollokatsioonimeetodiga ühtlase või peaaegu ühtlase võrgu korral.

4. Modifitseeritud kollokatsioonimeetod

Selles peatükis vaatleme modifitseeritud kollokatsioonimeetodit võrrandi (2.1) lahendamiseks.

4.1 Iseärasust nõrgendav teisendus

Modifitseeritud kollokatsioonimeetod tugineb idee teiseks teisendamiseks võrrandi (2.1) kujule, mille lahendi tuletistel ei ole enam integreerimisloigu $[0,1]$ otspunktide 0 ja 1 lähedal iseärasusi või on need lähevõrrandi lahendi tuletiste iseärasustest tunduvalt nõrgemad. Selleks kasutame teisendust φ , mis on defineeritud järgmiselt:

$$\varphi(t) = b_n \int_0^t [\tau(1-\tau)]^{n-1} d\tau, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4.1)$$

Siin n on mingi fikseeritud naturaalarv ja konstant b_n on selline, et $\varphi(1) = 1$:

$$b_n = \frac{1}{\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^{n-1} d\tau}.$$

Osutub, et

$$b_n = \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}.$$

Tõepoolest, ositi integreerides saame:

$$\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^{n-1} d\tau = -\frac{n-1}{n} \int_0^1 \tau^n (1-\tau)^{n-2} d\tau,$$

integreerides võrduse paremal pool olevat integraali taas ositi, saame:

$$\int_0^1 \tau^n (1-\tau)^{n-2} d\tau = \frac{n-2}{n+1} \int_0^1 \tau^{n+1} (1-\tau)^{n-3} d\tau,$$

jätkates ositi integreerimist $n-1$ korda, saame, et

$$\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^{n-1} d\tau = \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1}{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (2n-2)} \int_0^1 \tau^{2n-2} d\tau =$$

$$= \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1}{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n-1)} = \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}.$$

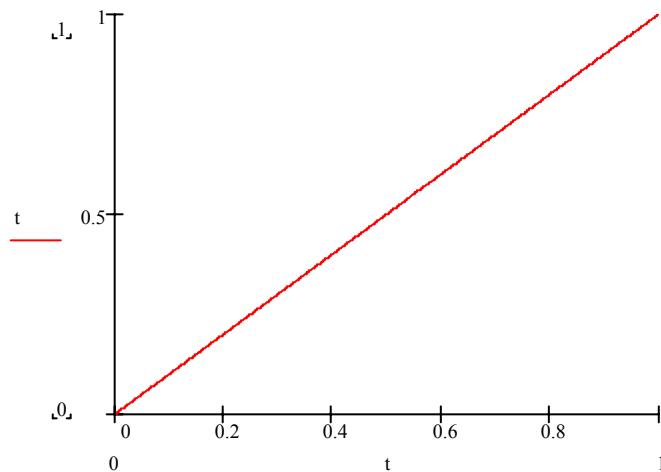
Niisiis, erinevate n väärtuste korral saame erinevad teisendused φ . Näiteks

$$\varphi(t) = t, \text{ kui } n = 1;$$

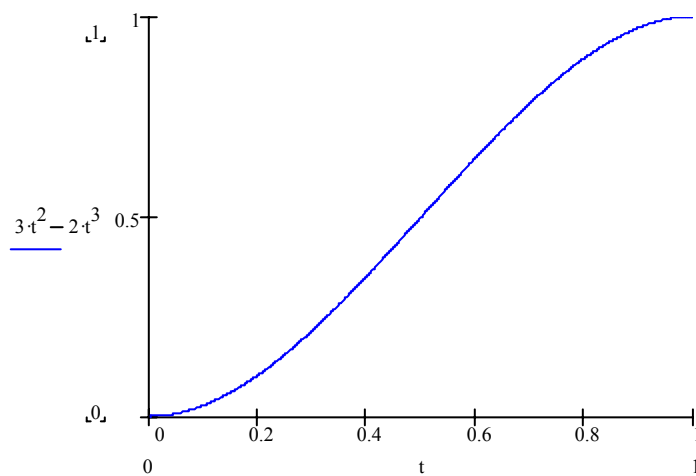
$$\varphi(t) = 3t^2 - 2t^3, \text{ kui } n = 2;$$

$$\varphi(t) = 6t^5 - 15t^4 + 10t^3, \text{ kui } n = 3.$$

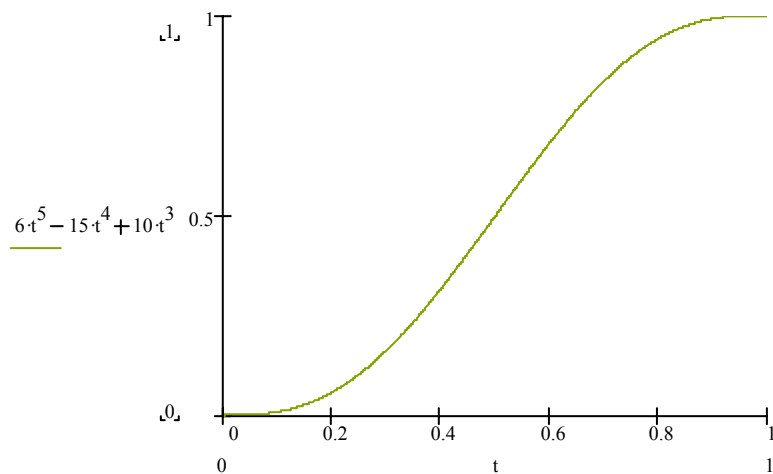
Järgnevad joonised illustreerivad, kuidas käitub teisendus $\varphi(t)$ lõigul $[0,1]$ erinevate n väärtuste korral.



Joonis1 ($n = 1$)



Joonis2 ($n = 2$)



Joonis3 ($n = 3$)

Võrdusest (4.1) järeldub, et φ on pidev funktsioon lõigul $[0,1]$,

$$\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1 \text{ ning } 0 < \varphi(t) < 1, \text{ kui } 0 < t < 1.$$

Kuna

$$\varphi'(t) = b_n [t(1-t)]^{n-1}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

siis

$$\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$$

ja

$$\varphi'(t) > 0, \quad 0 < t < 1.$$

Seega φ on kasvav pidev funktsioon lõigul $[0,1]$, mis teisendab lõigu $[0,1]$ lõiguks $[0,1]$. Siit järeldub omakorda, et ka φ pöördfunktsioon $\varphi^{-1} : [0,1] \rightarrow [0,1]$ on pidev ning rahuldab tingimusi

$$\varphi^{-1}(0) = 0, \quad \varphi^{-1}(1) = 1. \quad (4.2)$$

Lemma 4.1. Olgu antud funktsioon $u \in C^{m,\alpha} [0, 1]$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$ ning olgu $u_\varphi(t) = u(\varphi(t))$, $0 \leq t \leq 1$, kus φ on teisendus (4.1).

Siis $u_\varphi \in C[0,1] \cap C^m(0,1)$ ja iga $0 < t < 1$ ning $j \in \{1, \dots, m\}$ korral kehtib hinnang

$$\left| u_\varphi^{(j)}(t) \right| \leq c \begin{cases} 1, & j \leq n(1-\alpha) \\ \rho(t)^{n(1-\alpha)-j}, & j > n(1-\alpha) \end{cases}, \quad (4.3)$$

kus $\rho(t) = \min\{t, 1-t\}$ ja c on mingi positiivne konstant.

Tõestus. Lemma eeldustest saame, et $u_\varphi \in C[0,1]$ ja $u_\varphi \in C^m(0,1)$. Järjestikuse diferentseerimise teel leiame j järku ($1 \leq j \leq m$) tuletise funktsioonist $u_\varphi(t) = u(\varphi(t))$ (vt, näiteks, [6]):

$$u_\varphi^{(j)}(t) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_j \in \mathbb{N}_0 \\ k_1 + 2k_2 + \dots + jk_j = j}} \frac{j!}{k_1! \dots k_j!} u^{(\kappa)}(\varphi(t)) \left[\frac{\varphi'(t)}{1!} \right]^{k_1} \dots \left[\frac{\varphi^{(j)}(t)}{j!} \right]^{k_j}, \quad (4.4)$$

kus $0 < t < 1$, $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\kappa = k_1 + \dots + k_j$. Teisendame valemi (4.4) paremal poolel olevas summas iga liiget eraldi. Kuna $\varphi^{(j)}(t) = 0$, kui $j > n$, siis piisab vaadelda vaid juhtu, kus $1 \leq j \leq \min\{m, n\}$.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $0 < t \leq \frac{1}{2}$. Sel korral $\rho(t) = t$ ning võrduse (4.1) alusel saame hinnangud

$$\varphi(t) \geq c_0 t^n, \quad 0 < t \leq \frac{1}{2}, \quad (4.5)$$

$$\left| \varphi^{(i)}(t) \right| \leq \tilde{c}_0 t^{n-i}, \quad 0 < t \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq i \leq \min\{m, n\}, \quad (4.6)$$

kus c_0 ja $\tilde{c}_0$ on mingid positiivsed konstandid.

Võrratuste (2.3), (4.5), (4.6) ja võrduste

$$\kappa = k_1 + \dots + k_j, \quad k_1 + 2k_2 + \dots + jk_j = j$$

tõttu saame hinnangu

$$\begin{aligned} \left| u^{(k)}(\varphi(t)) [\varphi'(t)]^{k_1} \dots [\varphi^{(j)}(t)]^{k_j} \right| &\leq c t^{n(1-\alpha-\kappa) + (n-1)k_1 + \dots + (n-j)k_j} \leq \\ &\leq c_1 \begin{cases} 1, & j \leq n(1-\alpha) \\ t^{n(1-\alpha)-j}, & j > n(1-\alpha) \end{cases}, \end{aligned}$$

kus $0 < t \leq \frac{1}{2}$. Seega iga $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ ja $1 \leq j \leq \min\{m, n\}$ korral

$$\left|u_{\varphi}^{(j)}(t)\right| \leq c \begin{cases} 1, & j \leq n(1-\alpha) \\ \rho(t)^{n(1-\alpha)-j}, & j > n(1-\alpha) \end{cases}. \quad (4.7)$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus $\frac{1}{2} \leq t < 1$. Sel korral $\rho(t) = 1 - t$ ning seosest (4.1) järelduvad võrratused

$$\varphi(t) \geq c_1(1-t)^n, \quad \frac{1}{2} \leq t < 1, \quad (4.8)$$

$$\left|\varphi^{(i)}(t)\right| \leq \tilde{c}_1(1-t)^{n-i}, \quad \frac{1}{2} \leq t < 1, \quad 0 \leq i \leq \min\{m, n\}, \quad (4.9)$$

kus c_1 ja $\tilde{c}_1$ on mingid positiivsed konstandid. Analoogiliselt juhuga $0 < t \leq \frac{1}{2}$

saame seoste (2.3), (4.4), (4.8) ja (4.9) baasil tuletada hinnangu

$$\left|u_{\varphi}^{(j)}(t)\right| \leq c \begin{cases} 1, & j \leq n(1-\alpha) \\ (1-t)^{n(1-\alpha)-j}, & j > n(1-\alpha) \end{cases}, \quad (4.10)$$

kus $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ ja $1 \leq j \leq \min\{m, n\}$. Võrratus (4.3) on nüüd vahetu järelalus võrratustest (4.7) ja (4.10).

□

4.2 Modifitseeritud kollokatsioonimeetodi kirjeldus

Teeme lähtevõrrandis

$$u(x) = \int_0^1 |x-y|^{-\alpha} L(x,y)u(y)dy + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.11)$$

muutujate vahetuse

$$x = \varphi(t), \quad y = \varphi(s), \quad 0 \leq t, s \leq 1, \quad (4.12)$$

kus φ on teisendus (4.1). Kuna $dy = \varphi'(s)ds$ ja kehtivad seosed (4.2), siis saame võrrandi (4.11) teisendada kujule

$$u_{\varphi}(t) = \int_0^1 K_{\varphi}(t, s) u_{\varphi}(s) ds + f_{\varphi}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (4.13)$$

kus

$$K_{\varphi}(t, s) = |\varphi(t) - \varphi(s)|^{-\alpha} L(\varphi(t), \varphi(s)) \varphi'(s), \quad 0 \leq t, s \leq 1, \quad t \neq s \quad (4.14)$$

ja

$$f_{\varphi}(t) = f(\varphi(t)), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (4.15)$$

on antud suurused ning u_{φ} on otsitav:

$$u_{\varphi}(t) = u(\varphi(t)), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4.16)$$

Võrrandi (4.13) lähislahendit v otsime polünomiaalsete splineide ruumist $S_{m-1}^{(-1)}(\Delta_N^r)$,

kus Δ_N^r on võrk $\{(3.1), (3.2)\}$. Funktsiooni v leiame kollokatsioonimeetodil järgmistest tingimustest:

$$v \in S_{m-1}^{(-1)}(\Delta_N^r), \quad m, N \in \mathbb{N}, \quad (4.17)$$

$$v(t_{ip}) = \int_0^1 K_{\varphi}(t_{ip}, s) v(s) ds + f_{\varphi}(t_{ip}), \quad i = 1, \dots, 2N, p = 1, \dots, m, \quad (4.18)$$

kus $\{t_{ip}\}$ on määratud valemiga (3.4). Olles leidnud tingimusi $\{(4.17), (4.18)\}$ rahuldava funktsiooni v ($v = v(t, \varphi, N, m, r, \eta_1, \dots, \eta_m)$, $0 \leq t \leq 1$), defineerime võrrandi (4.11) lahendi u lähislahendi u_N järgmiselt:

$$u_N(x) = v(\varphi^{-1}(x)), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad v \in S_{m-1}^{(-1)}(\Delta_N^r). \quad (4.19)$$

Märgime, et funktsiooni v praktiliseks leidmiseks tingimustest (4.17) ja (4.18) võime v esitada kujul

$$v(t) = \sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=1}^m c_{jq} \psi_{jq}(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

kus $\{c_{jq}\}$ on otsitavad kordajad ja

$$\psi_{jq}(t) = \begin{cases} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^m \frac{t - t_{jk}}{t_{jq} - t_{jk}}, & t \in [x_{j-1}, x_j] \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}, \quad q = 1, \dots, m; j = 1, \dots, 2N.$$

Tingimused (4.18) kujutavad nüüd lineaarset algebralist võrrandisüsteemi kordajate $\{c_{jq} = v(t_{jq})\}$ leidmiseks:

$$c_{ip} = \sum_{j=1}^{2N} \sum_{q=1}^m a_{ipjq} c_{jq} + f_{\varphi}(t_{ip}), \quad p = 1, \dots, m; i = 1, \dots, 2N, \quad (4.20)$$

kus

$$a_{ipjq} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} K_{\varphi}(t_{ip}, s) \psi_{jq}(s) ds, \quad (4.21)$$

$$i = 1, \dots, 2N; p = 1, \dots, m; j = 1, \dots, 2N; q = 1, \dots, m;$$

Järgnevas huvitab meid meetodi (4.13) – (4.19) koonduvus ja vea $u - u_N$ hinnangud. Selleks uurime kõigepealt võrrandi (4.13) lahenduvust. Kirjutame võrrandi (4.13) üles operaatorkujul

$$u_{\varphi} = T_{\varphi} u_{\varphi} + f_{\varphi}, \quad (4.22)$$

kus T_{φ} on tuuma (4.14) abil määratud integraaloperaator:

$$(T_{\varphi} z)(t) = \int_0^1 K_{\varphi}(t, s) z(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Lemma 4.2. Olgu K_{φ} tuum (4.14), kus $L \in C([0,1] \times [0,1])$, $0 < \alpha < 1$ ja φ on teisendus (4.1). Siis T_{φ} on lineaarne kompaktne operaator ruumist $L^{\infty}(0,1)$ ruumi $C[0,1]$ (järelilikult T_{φ} on kompaktne ka ruumist $L^{\infty}(0,1)$ ruumi $L^{\infty}(0,1)$ ja ruumist $C[0,1]$ ruumi $C[0,1]$).

Tõestus. Operaatori T_{φ} lineaarsus on ilmne. Näitame, et T_{φ} on kompaktne kui operaator ruumist $L^{\infty}(0,1)$ ruumi $C[0,1]$. Siis on tõesed ka lemma ülejäänud väited,

sest $C[0,1] \subset L^\infty(0,1)$. Lemma eeldustest järeldub, et tuum $K_\varphi(t,s)$ on pidev, kui $0 \leq t, s \leq 1, t \neq s$.

Näitame, et

$$|K_\varphi(t,s)| \leq c|t-s|^{-\alpha}, \quad 0 \leq t, s \leq 1, t \neq s. \quad (4.23)$$

Kuna $0 < \alpha < 1$, siis tuum $K_\varphi(t,s)$ on nõrgalt singulaarne ning lemma väited kehtivad (vt, näiteks, [2]), lk 910).

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $0 < t, s \leq \frac{1}{2}$. Siis

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \geq c_0 |t-s| \left(t^{n-1} + s^{n-1} \right), \quad 0 < t, s \leq \frac{1}{2}, \quad (4.24)$$

kus $c_0 > 0$ on mingi konstant.

Tõepoolest, olgu $s < t$, $0 < t, s \leq \frac{1}{2}$ ($t < s$ korral on tõestus täiesti analoogiline). Siis definitsiooni (4.1) põhjal võime kirjutada

$$\varphi(t) - \varphi(s) = b_n \int_s^t \tau^{n-1} (1-\tau)^{n-1} d\tau \geq \frac{b_n}{n} (t^n - s^n).$$

Järelikult

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{(t-s)(t^{n-1} + s^{n-1})} \geq \frac{b_n \left[1 - \left(\frac{s}{t} \right)^n \right]}{n \left(1 - \frac{s}{t} \right) \left[1 + \left(\frac{s}{t} \right)^{n-1} \right]} = \frac{b_n (1 - \Theta^n)}{n(1 - \Theta)(1 + \Theta^{n-1})},$$

kus

$$\Theta = \frac{s}{t} \in [0,1).$$

Olgu

$$h(\Theta) = \frac{b_n (1 - \Theta^n)}{n(1 - \Theta)(1 + \Theta^{n-1})}, \quad 0 \leq \Theta < 1.$$

Ilmselt $h(\Theta) > 0$, kui $0 \leq \Theta < 1$.

Kuna

$$\lim_{\Theta \rightarrow 1} h(\Theta) = \frac{b_n}{2} > 0,$$

siis defineerides $h(1) = \frac{b_n}{2}$, saame et $h(\Theta) > 0$, kui $0 \leq \Theta \leq 1$. Järelikult ka

$$\inf_{\Theta \in [0,1]} h(\Theta) > 0$$

ning võrratus (4.23) kehtib. Seostest (4.8), (4.14) ja (4.24) järeldeb võrratus (4.23),

kui $0 < t, s \leq \frac{1}{2}$, $t \neq s$:

$$|K_\varphi(t, s)| \leq c|t-s|^{-\alpha} \left(t^{n-1} + s^{n-1} \right)^{-\alpha} s^{n-1} \leq c|t-s|^{-\alpha} s^{(n-1)(1-\alpha)} \leq c_1|t-s|^{-\alpha}.$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus $\frac{1}{2} \leq t, s < 1$. Sel korral saab analoogiliselt võrratuse (4.24)

tõestusega näidata, et

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \geq c_1|t-s| \left[(1-t)^{n-1} + (1-s)^{n-1} \right], \quad \frac{1}{2} \leq t, s < 1, \quad (4.25)$$

kus $c_1 > 0$ on mingi konstant. Seostest (4.9) ja (4.25) järeldeb hinnang (4.23), kui

$\frac{1}{2} \leq t, s < 1$, $t \neq s$. Vaatleme lõpuks juhtu, kus $0 \leq t < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < s \leq 1$ või $0 \leq s < \frac{1}{2}$,

$\frac{1}{2} < t \leq 1$. Siis leiduvad konstandid $c_2 > c_1 > 0$, et

$$c_1|t-s| \leq |\varphi(t) - \varphi(s)| \leq c_2|t-s|$$

ning hinnang (4.23) kehtib ka sel korral.

□

Teoreemist 1.4. ja lemmast 4.2. järeldeb, et võrrand (4.22) (võrrand (4.13)) on

üheselt lahenduv iga vabaliikme $f_\varphi \in L^\infty(0,1)$ korral parajasti siis, kui vastaval

homogeensel võrrandil $u_\varphi = T_\varphi u_\varphi$ on olemas vaid triviaalne lahend $u_\varphi = 0$.

Seejuures $u_\varphi \in C[0,1]$, kui $f \in C[0,1]$.

Osutub, et kui võrrandil

$$u(x) = \int_0^1 |x - y|^{-\alpha} L(x, y) u(y) dy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.26)$$

on olemas ruumis $C[0,1]$ vaid triviaalne lahend $u = 0$, siis ka võrrandil $u_\varphi = T_\varphi u_\varphi$ on olemas vaid triviaalne lahend $u_\varphi = 0$. See jäeldub seosest (4.16) ning asjaolust, et teisendus φ on ühene ja pidevalt pööratav lõigul $[0,1]$. Formuleerime tulemuse järgmise lemmmana.

Lemma 4.3. Olgu täidetud lemma 4.2. eeldused. Eeldame lisaks et $f \in C[0,1]$ ja võrrandil (4.26) on olemas vaid triviaalne lahend $u = 0$. Siis võrrand (4.13) on üheselt lahenduv ja tema lahend $u_\varphi \in C[0,1]$.

5. Modifitseeritud kollokatsioonimeetodi koonduvus

Järgnevas peatükis uurime modifitseeritud kollokatsioonimeetodi koonduvust.

5.1 Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Olgu antud võrk Δ_N^r (vt (3.1) ja (3.2)) ja interpolatsioonipunktid $\{t_{ip}\}$ (vt (3.4)). Toome sisse operaatori P_N , mis igale funktsioonile $u \in C[0,1]$ seab vastavusse splaini $P_N u \in S_{m-1}^{(-1)}(\Delta_N^r)$ nii, et $P_N u$ interpoleerib funktsiooni u sõlmedes $\{t_{ip}\}$:

$$(P_N u)(t_{ip}) = u(t_{ip}), \quad i = 1, \dots, 2N, \quad p = 1, \dots, m. \quad (5.1)$$

Igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, 2N$) saame $P_N u$ esitada kujul

$$(P_N u)(t) = \sum_{p=1}^m u(t_{ip}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^m \frac{t - t_{ik}}{t_{ip} - t_{ik}}, \quad t \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, 2N. \quad (5.2)$$

Lemma 5.1. (vt [8]) Olgu Δ_N^r ja $\{t_{ip}\}$ vastavalt võrk $\{(3.1), (3.2)\}$ ja interpolatsioonipunktide hulk (3.4). Olgu $P_N : C[0,1] \rightarrow S_{m-1}^{(-1)}(\Delta_N^r)$ defineeritud seosega (5.2).

Siis $P_N \in \mathcal{L}(C[x_{i-1}, x_i], C[x_{i-1}, x_i])$ ($i = 1, \dots, 2N$) ja $P_N \in \mathcal{L}(C[0,1], L^\infty(0,1))$ ning

$$\|P_N\|_{\mathcal{L}(C[x_{i-1}, x_i], C[x_{i-1}, x_i])} \leq c, \quad i = 1, \dots, 2N; \quad N \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

$$\|P_N\|_{\mathcal{L}(C[0,1], L^\infty(0,1))} \leq c, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (5.4)$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest N .

Lemma 5.2. Olgu $u_\varphi(t) = u(\varphi(t))$, kus $u \in C^{m,\alpha}[0,1]$, $t \in [0,1]$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$ ning φ on teisendus (4.1) mingi $n \in \mathbb{N}$ korral. Olgu P_N eespool defineeritud operaator, mis on seotud võrguga Δ_N^r sõlmede $\{t_{ip}\}$ valikul seostes (5.1).

Siis kehtib hinnang

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |u_\varphi(t) - (P_N u_\varphi)(t)| \leq c \varepsilon_N^{(m, \alpha, n, r)}, \quad (5.5)$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest N ning

$$\varepsilon_N^{(m, \alpha, n, r)} = \left\{ \begin{array}{ll} N^{-rn(1-\alpha)}, & m > n(1-\alpha), \quad 1 \leq r < \frac{m}{n(1-\alpha)} \\ N^{-m}, & m > n(1-\alpha), \quad r \geq \frac{m}{n(1-\alpha)} \\ N^{-m}, & m \leq n(1-\alpha), \quad r \geq 1 \end{array} \right\}. \quad (5.6)$$

Tõestus. Olgu $u \in C^{m, \alpha}[0, 1]$, siis lemma 4.1 põhjal $u_\varphi \in C[0, 1] \cap C^m(0, 1)$.

Hindame vahet $u_\varphi - P_N u_\varphi$:

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |u_\varphi(t) - (P_N u_\varphi)(t)| = \max_{i=1, \dots, 2N} \max_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} |u_\varphi(t) - (P_N u_\varphi)(t)|. \quad (5.7)$$

Võtame suvalise splaini $w \in S_{m-1}^{(-1)}(\Delta_N^r)$. Siis igas osalõiguses $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, 2N$) on w ülimalt $(m-1)$ -astme polünoom.

Kuna tingimused (5.1) määravad üheselt ära $(m-1)$ -astme polünoomi (vt [7]), siis $(P_N w)(t) = w(t)$, kui $t \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, 2N$). Sel juhul võime iga $t \in [x_{i-1}, x_i]$ korral kirjutada

$$\begin{aligned} u_\varphi(t) - (P_N u_\varphi)(t) &= u_\varphi(t) - w(t) + w(t) - (P_N u_\varphi)(t) = \\ &= u_\varphi(t) - w(t) + (P_N w)(t) - (P_N u_\varphi)(t) = \\ &= u_\varphi(t) - w(t) + (P_N(w - u_\varphi))(t). \end{aligned}$$

Võrduse (5.7) ja lemma 5.1. põhjal järeldub siit, et

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq 1} |u_\varphi(t) - (P_N u_\varphi)(t)| &\leq \max_{i=1, \dots, 2N} \left(1 + \|P_N\|_{L(C[x_{i-1}, x_i], C[x_{i-1}, x_i])} \right) \max_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} |u_\varphi(t) - w(t)| \leq \\ &\leq c \max_{i=1, \dots, 2N} \max_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} |u_\varphi(t) - w(t)|, \end{aligned} \quad (5.8)$$

kus konstant c ei sõltu suurusest N . Fikseerime edaspidi $w \in S_{m-1}^{(-1)}(\Delta_N^r)$ järgmiselt:

$$w(t) = u_\varphi(x_i) + \frac{u'_\varphi(x_i)}{1!}(t - x_i) + \dots + \frac{u_\varphi^{(m-1)}(x_i)}{(m-1)!}(t - x_i)^{m-1}, \quad (5.9)$$

$$x_{i-1} \leq t \leq x_i, i = 1, \dots, N;$$

$$w(t) = u_\varphi(x_{i-1}) + \frac{u'_\varphi(x_{i-1})}{1!}(t - x_{i-1}) + \dots + \frac{u_\varphi^{(m-1)}(x_{i-1})}{(m-1)!}(t - x_{i-1})^{m-1}, \quad (5.10)$$

$$x_{i-1} \leq t \leq x_i, i = N+1, \dots, 2N.$$

Seejuures polünoomi (5.9) korral

$$u_\varphi(t) - w(t) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_i}^t (t - \tau)^{m-1} u_\varphi^{(m)}(\tau) d\tau, \quad x_{i-1} \leq t \leq x_i, \quad (5.11)$$

$$i = 1, \dots, N;$$

ning polünoomi (5.10) korral

$$u_\varphi(t) - w(t) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_{i-1}}^t (t - \tau)^{m-1} u_\varphi^{(m)}(\tau) d\tau, \quad x_{i-1} \leq t \leq x_i, \quad (5.12)$$

$$i = N, \dots, 2N.$$

Tuginedes lemmale 4.1, saame hinnata viga $u_\varphi - w$.

Seostest (4.3), (5.8), (5.11), (5.12) ning $x_i - x_{i-1} \leq cN^{-1}$ ($i = 1, \dots, 2N$) järeldub, et juhul $m \leq n(1 - \alpha)$ seos (5.5) kehtib:

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |u_\varphi(t) - (P_N u_\varphi)(t)| \leq c \max_{i=1, \dots, 2N} (x_i - x_{i-1})^m \leq c_1 N^{-m}.$$

Järgnevas oletame, et $m > n(1 - \alpha)$. Hindame suurust (5.11). Olgu kõigepealt $i = 1$.

Et $0 \leq t \leq \tau \leq x_1$ korral $0 \leq \tau - t \leq \tau$, siis

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq x_1} |u_\varphi(t) - w(t)| &\leq c \max_{0 \leq t \leq x_1} \int_t^{x_1} (\tau - t)^{m-1} \tau^{n(1-\alpha)-m} d\tau \leq \\ &\leq c \max_{0 \leq t \leq x_1} \int_t^{x_1} (\tau - t)^{m-1} (\tau - t)^{n(1-\alpha)-m} d\tau \leq c_1 x_1^{n(1-\alpha)} \leq \end{aligned}$$

$$\leq c_3 \left\{ \begin{array}{ll} N^{-rn(1-\alpha)} , & 1 \leq r < \frac{m}{n(1-\alpha)} \\ N^{-m} , & r \geq \frac{m}{n(1-\alpha)} \end{array} \right\}.$$

Olgu nüüd $i = 2, \dots, N$. Siis

$$\begin{aligned} \max_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} |u_\varphi(t) - w(t)| &\leq c \max_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} \int_t^{x_i} (\tau - t)^{m-1} \tau^{n(1-\alpha)-m} d\tau \leq \\ &\leq c \max_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} t^{n(1-\alpha)-m} \int_t^{x_i} (\tau - t)^{m-1} d\tau \leq \\ &\leq c_1 x_{i-1}^{n(1-\alpha)-m} (x_i - x_{i-1})^m \leq c_2 \left(\frac{i-1}{N} \right)^{r[n(1-\alpha)-m]} \left(\frac{i^r - (i-1)^r}{N^r} \right)^m \leq \\ &\leq c_3 N^{-rn(1-\alpha)} (i-1)^{r[n(1-\alpha)-m]} i^{(r-1)m} \leq c_4 N^{-rn(1-\alpha)} i^{rn(1-\alpha)-m} \leq \\ &\leq c_5 \left\{ \begin{array}{ll} N^{-rn(1-\alpha)} , & 1 \leq r < \frac{m}{n(1-\alpha)} \\ N^{-m} , & r \geq \frac{m}{n(1-\alpha)} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Kuna samasuguse hinnangu saime ka $i = 1$ korral, siis vea (5.11) hinnanguks $m > n(1-\alpha)$ korral kujuneb

$$\max_{i=1,\dots,N} \max_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} |u_\varphi(t) - w(t)| \leq c \left\{ \begin{array}{ll} N^{-rn(1-\alpha)} , & 1 \leq r < \frac{m}{n(1-\alpha)} \\ N^{-m} , & r \geq \frac{m}{n(1-\alpha)} \end{array} \right\}. \quad (5.13)$$

Sümmeetria tõttu saame $m > n(1-\alpha)$ korral täiesti analoogilise hinnangu ka vea (5.12) jaoks:

$$\max_{i=N+1,\dots,2N} \max_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} |u_\varphi(t) - w(t)| \leq c \left\{ \begin{array}{ll} N^{-rn(1-\alpha)} , & 1 \leq r < \frac{m}{n(1-\alpha)} \\ N^{-m} , & r \geq \frac{m}{n(1-\alpha)} \end{array} \right\}. \quad (5.14)$$

Võrratustest (5.8), (5.13) ja (5.14) järeldub, et hinnang (5.5) kehtib ka $m > n(1-\alpha)$ korral. □

5.2 Modifitseeritud kollokatsioonimeetodi koonduvus

Selles punktis uurime meetodi (4.12) – (4.19) abil leitud võrrandi (4.11) lahendi lähislahendite koonduvust ja koonduvuse kiirust.

Teoreem 5.1. Olgu täidetud järgmised tingimused:

- 1) $K(x, y) = |x - y|^{-\alpha} L(x, y)$, $0 < \alpha < 1$, $L \in C([0,1] \times [0,1])$;
- 2) $f \in C[0,1]$;
- 3) võrrandil $u(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y)dy$ on olemas vaid triviaalne lahend $u = 0$;
- 4) $\varphi(t) = b_n \int_0^t [\tau(1 - \tau)]^{n-1} d\tau$, $n \in \mathbb{N}$, ning b_n on konstant kujul (4.2);
- 5) kasutusel on interpolatsioonipunktid $t_{ip} = x_{i-1} + \eta_p(x_i - x_{i-1})$, $p = 1, \dots, m$;
 $i = 1, \dots, N$, kus $\{x_i\}$ on võrgu Δ_N^r punktid (3.2) ning parameetrid $\{\eta_p\}$ rahuldavad tingimusi (3.3).

Siis võrrand (2.1) on üheselt lahenduv ja tema lahend $u \in C[0,1]$. Leidub selline naturaalarv N_0 , et tingimused (4.12) – (4.19) määravad iga $N \geq N_0$ korral üheselt lahendi u lähendi u_N ning leiab aset koondumine

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u_N(x) - u(x)| \rightarrow 0, \text{ kui } N \rightarrow \infty. \quad (5.15)$$

Tõestus. Võrrandit (4.13) vaatleme operaatorvõrrandina (4.22) ruumis $L^\infty(0,1)$.

Lemma 4.2. põhjal on T_φ lineaarne kompaktne operaator ruumist $L^\infty(0,1)$ ruumi $L^\infty(0,1)$. Eeldusest 3 järeldub, et homogeensel võrrandil $u_\varphi = T_\varphi u_\varphi$ on olemas vaid triviaalne lahend $u_\varphi = 0$. Teoreemi (1.3) põhjal on võrrand (4.22) üheselt lahenduv ja tema lahend $u_\varphi = (I - T_\varphi)^{-1} f_\varphi$ kuulub ruumi $L^\infty(0,1)$. Siin I on ühikoperaator ja

$(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(L^\infty(0,1), L^\infty(0,1))$. Kuna $f_\varphi \in C[0,1]$, $T_\varphi \in \mathcal{L}(L^\infty(0,1), C[0,1])$ ja $u_\varphi = T_\varphi u_\varphi + f_\varphi$, siis $u_\varphi \in C[0,1]$.

Kollokatsioonitingimused (4.18) on samaväärsed operaatorvõrrandiga

$$v = P_N T_\varphi v + P_N f_\varphi, \quad (5.16)$$

kus P_N on seosega (5.1) defineeritud operaator.

Järgnevas näitame, et küllalt suurte N väärtuste korral on võrrand (5.16) üheselt lahenduv.

Valime mingi funktsiooni $u \in C^m[0,1]$. Siis (vt [7])

$$\begin{aligned} \max_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} |u(t) - (P_N u)(t)| &\leq \frac{1}{m!} \max_{0 \leq t \leq 1} |u^{(m)}(t)| \max_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} |t - t_{i1}| \dots |t - t_{im}| \leq \\ &\leq c(x_i - x_{i-1})^m \leq c_1 N^{-m}, i = 1, \dots, 2N, \end{aligned}$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest N . Siit järeldub, et iga $u \in C^m[0,1]$ korral leiab aset koondumine $\|u - P_N u\|_{L^\infty} \rightarrow 0$, kui $N \rightarrow \infty$. Et $C^m[0,1]$ on tihe ruumis $C[0,1]$ ja operaatorite P_N normide jada $\|P_N\|_{\mathcal{L}(C[0,1], L^\infty(0,1))}$ on ühtlaselt tõkestatud suuruse N suhtes (vt (5.4)), siis teoreemi 1.1. põhjal saame, et

$$\|u - P_N u\|_{L^\infty(0,1)} \rightarrow 0, \text{ kui } N \rightarrow \infty \quad \forall u \in C[0,1]. \quad (5.17)$$

Võttes $E_0 = C[0,1]$ ja $E_1 = L^\infty(0,1)$, saame teoreemi 1.4. tõttu koonduvuse

$$\|T_\varphi - P_N T_\varphi\|_{\mathcal{L}(L^\infty(0,1), L^\infty(0,1))} \rightarrow 0, \text{ kui } N \rightarrow \infty.$$

Valime nüüd nii suure N_0 , et $N \geq N_0$ korral kehtib võrratus

$$\|P_N T_\varphi - T_\varphi\|_{\mathcal{L}(L^\infty(0,1), L^\infty(0,1))} \|(I - T_\varphi)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^\infty(0,1), L^\infty(0,1))} < 1.$$

Esitame operaatori $I - P_N T_\varphi$ kujul

$$I - P_N T_\varphi = \left[I - (P_N T_\varphi - T_\varphi)(I - T_\varphi)^{-1} \right] (I - T_\varphi).$$

Kui $N \geq N_0$, siis teoreemi 1.2. põhjal leidub pöördoperaator

$$\left(I - (P_N T_\varphi - T_\varphi)(I - T_\varphi)^{-1} \right)^{-1} \in \mathcal{L}(L^\infty(0,1), L^\infty(0,1))$$

ja kehtib hinnang

$$\begin{aligned} & \left\| \left(I - (P_N T_\varphi - T_\varphi) (I - T_\varphi)^{-1} \right)^{-1} \right\|_{L^\infty(0,1), L^\infty(0,1)} \leq \\ & \leq \frac{1}{1 - \|P_N T_\varphi - T_\varphi\|_{L^\infty(0,1), L^\infty(0,1)} \| (I - T_\varphi)^{-1} \|_{L^\infty(0,1), L^\infty(0,1)}}. \end{aligned}$$

Seega, kui $N \geq N_0$, siis on ka operaator $I - P_N T_\varphi$ pidevalt pööratav ruumis $L^\infty(0,1)$ ja pöördeoperaatorite $(I - P_N T_\varphi)^{-1}$ normid on ühtlaselt tõkestatud protsessis $N \rightarrow \infty$:

$$\left\| (I - P_N T_\varphi)^{-1} \right\|_{L^\infty(0,1), L^\infty(0,1)} \leq c, \quad N \geq N_0, \quad (5.18)$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis sõltu suurusest N .

Niisiis, $N \geq N_0$ korral on võrrandil (5.16) olemas ühene lahend $v = (I - P_N T_\varphi)^{-1} P_N f_\varphi \in L^\infty(0,1)$. Võrrandi (5.16) abil on lihtne näha, et $v \in S_{m-1}^{(-1)}(\Delta_N^r)$. Veelgi enam, kui u_φ on võrrandi (4.22) lahend ja v on võrrandi (5.16) lahend, siis

$$\begin{aligned} (I - P_N T_\varphi)(u_\varphi - v) &= u_\varphi - P_N T_\varphi u_\varphi - v + P_N T_\varphi v = \\ &= u_\varphi - P_N(u_\varphi - f_\varphi) - (P_N T_\varphi v + P_N f_\varphi) + P_N T_\varphi v = u_\varphi - P_N u_\varphi, \end{aligned}$$

millest järeldub, et

$$u_\varphi - v = (I - P_N T_\varphi)^{-1} (u_\varphi - P_N u_\varphi), \quad N \geq N_0.$$

Võrratuse (5.18) tõttu saame siit hinnangu

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |u_\varphi(t) - v(t)| \leq c \sup_{0 \leq t \leq 1} |u_\varphi(t) - (P_N u_\varphi)(t)|, \quad N \geq N_0, \quad (5.19)$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest N . Koondumine (5.15) on nüüd vahetuks järelduseks lemmast 4.3. ning seostest (5.17), (5.19) ja (5.20):

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x) - u_N(x)| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |u_\varphi(t) - v(t)|. \quad (5.20)$$

□

Teoreem 5.2. Olgu täidetud teoreemi 5.1. eeldused. Täiendavalt eeldame, et $L \in C^m([0,1] \times [0,1])$, $f \in C^{m,\nu}[0,1]$, $m \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \leq \alpha$.

Siis leidub naturaalarv N_0 nii, et iga $N \geq N_0$ korral kehtib hinnang

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x) - u_N(x)| \leq c \varepsilon_N^{(m,\alpha,n,r)}, \quad N \geq N_0, \quad (5.21)$$

kus u on võrrandi (2.1) lahend, u_N on meetodi (4.12) – (4.19) abil leitud lahendi u lähislahend, $\varepsilon_N^{(m,\alpha,n,r)}$ on defineeritud võrdusega (5.6) ja c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest N .

Tõestus. Teoreemi 2.1. põhjal $u \in C^{m,\alpha}[0,1]$. Hinnang (5.21) järeldeb nüüd lemmast 5.2. ja seostest (5.19) ning (5.20).

□

6. Arvulised tulemused

Antud peatükis toome ära arvulised tulemused teoreemide 3.1 ja 5.2. teoreetiliste hinnangute kontrollimiseks. Järgnevalt vaatleme integraalvõrrandi (2.1)

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

lahendamist lineaarsplain – kollokatsioonimeetodil (kirjeldatud punktis 3.2) ja modifitseeritud kollokatsioonimeetodil (kirjeldatud punktis 4.2).

6.1 Testülesanne

Vaatleme integraalvõrrandit (2.1), kus

$$K(x, y) = \frac{1}{\sqrt{|x - y|}}, \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad (6.1)$$

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{x\pi}{2} - \sqrt{1-x} - x \ln(1 + \sqrt{1-x}) + \frac{x \ln x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Ülesandel (6.1) olemas täpne lahend $u(x) = \sqrt{x}$.

Antud ülesande lahendamise kasutades nii klassikalist lineaarsplain-kollokatsioonimeetodit kui ka muutujate vahetust (4.1)

$$\varphi(t) = b_n \int_0^t [\tau(1-\tau)]^{n-1} d\tau, \quad 0 \leq t \leq 1,$$
$$b_n = \frac{1}{\int_0^1 [\tau(1-\tau)]^{n-1} d\tau} = \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}$$

juhtudel $n = 2$ ja $n = 3$. Juhul $n = 1$ reaalsel muutujate vahetust ei toimu. Tulemused on esitatud vastavalt tabelites 1, 2, 3, 4 ning 5, 6, 7, 8.

Ülesande lahendamiseks on koostatud programmid (vt peatükki Lisad) paketi *Mathcad* abil.

6.2 Arvuliste tulemuste analüüs

Ülesande (6.1) lahendamiseks koostatud programmides leitakse lähislahend programmi **lahislahend** abil. Teoreetiline hinnang (3.6)

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x) - v(x)| \leq c \begin{cases} N^{-r(1-\alpha)}, & 1 \leq r < \frac{m}{1-\alpha} \\ N^{-m}, & r \geq \frac{m}{1-\alpha} \end{cases}, \quad N \geq N_0$$

on programmis **maxviga** realiseeritud järgmiselt:

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x) - v(x)| \approx \\ & \approx \max_{i=0, \dots, 2N-1} \max_{j=0, \dots, 9} \left| u\left(x_i + \frac{j}{10}(x_{i+1} - x_i)\right) - v\left(x_i + \frac{j}{10}(x_{i+1} - x_i)\right) \right|, \end{aligned}$$

kus x_i ($i = 0, \dots, 2N-1$) on võrgu (3.1) punktid (3.2).

Järgnevates tabelites esitame erinevate kollokatsiooniparameetrite korral leitud

hinnangud veerus **maxviga**, veerus **suhe** on toodud jagatis: $\frac{\text{maxviga}_{N/2}}{\text{maxviga}_N}$, veerus N

on toodud osalõikude arv.

Saavutamaks võrrandi lahendamisel maksimaalset täpsust, muudame võrgu ebaühtlusparameetrit r (vt (3.2)).

N	$r = 1$		$r = 2$	
	maxviga	suhe	maxviga	suhe
4	0.148865		0.105898	
8	0.101623	1.46	0.050694	2.09
16	0.071014	1.43	0.024999	2.03
32	0.05001	1.42	0.012457	2.01
64	0.035316	1.42	0.006226	2
128	0.024961	1.41	0.003115	2

Tabel 1 ($\eta_1 = 0.17$ ja $\eta_2 = 0.8$)

N	$r = 3$		$r = 4$	
	maxviga	suhe	maxviga	suhe
4	0.081755		0.101335	
8	0.026355	3.1	0.021094	4.8
16	0.009037	2.92	0.00508	4.15
32	0.003166	2.85	0.001276	3.98
64	0.001116	2.84	0.000326	3.92
128	0.000394	2.83	0.000083	3.91

Tabel 2 ($\eta_1 = 0.17$ ja $\eta_2 = 0.8$)

N	$r = 1$		$r = 2$	
	maxviga	suhe	maxviga	suhe
4	0.167249		0.116527	
8	0.113063	1.48	0.055024	2.12
16	0.078264	1.44	0.027036	2.04
32	0.054677	1.43	0.013468	2.01
64	0.03838	1.42	0.006718	2
128	0.027014	1.42	0.003357	2

Tabel 3 ($\eta_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$ ja $\eta_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$)

N	$r = 3$		$r = 4$	
	maxviga	suhe	maxviga	suhe
4	0.093032		0.141484	
8	0.028182	3.3	0.023694	5.97
16	0.009562	2.95	0.005367	4.42
32	0.003371	2.84	0.001279	4.2
64	0.001196	2.82	0.000343	3.73
128	0.000427	2.8	0.000093	3.68

Tabel 4 ($\eta_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$ ja $\eta_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$)

Praegusel juhul, kui $\alpha = 0.5$ ja $m = 2$, saab hinnang (3.6) kuju

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x) - v(x)| \leq c \begin{cases} N^{-\frac{r}{2}}, & 1 \leq r < 4 \\ N^{-2}, & r \geq 4 \end{cases}, \quad N \geq N_0. \quad (6.2)$$

Seega:

* kui $r = 1$, siis hinnangu (6.2) põhjal peaks **maxviga** tabelite 1 ja 3 teises veerus vähenema ligikaudu $\sqrt{2} \approx 1.414$ korda, st vastav **suhe** tabelite 1 ja 3 kolmandas veerus peaks olema ligikaudu 1.41;

* kui $r = 2$, siis hinnangu (6.2) põhjal peaks **maxviga** tabelite 1 ja 3 neljandas veerus vähenema ligikaudu 2 korda, st vastav **suhe** tabelite 1 ja 3 viimases veerus peaks olema ligikaudu 2;

* kui $r = 3$, siis hinnangu (6.2) põhjal peaks **maxviga** tabelite 2 ja 4 teises veerus vähenema ligikaudu $2^{\frac{3}{2}} \approx 2.828$ korda, st vastav **suhe** tabelite 2 ja 4 kolmandas veerus peaks olema ligikaudu 2.82;

* kui $r = 4$, siis hinnangu (6.2) põhjal peaks **maxviga** tabelite 2 ja 4 neljandas veerus vähenema ligikaudu $2^2 = 4$ korda, st vastav **suhe** tabeli 2 ja 4 viimases veerus peaks olema ligikaudu 4.

Tabelitest 1, 2, 3, ja 4 näeme, et arvulised tulemused on küllaltki heas kooskõlas teoreetilise hinnanguga (6.2).

Järgnevas kasutame ülesande (6.1) lahendamiseks muutujavahetust (4.1) juhtudel $n = 2$ ja $n = 3$, väljaarvutatult on teisendus φ :

$$\varphi(t) = 3t^2 - 2t^3, \text{ kui } n = 2;$$

$$\varphi(t) = 6t^5 - 15t^4 + 10t^3, \text{ kui } n = 3.$$

Saadud tulemuste kontrollimiseks kasutame hinnanguid (5.20) ja (5.21):

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x) - u_N(x)| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |u_\varphi(t) - v(t)|,$$

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x) - u_N(x)| \leq c \varepsilon_N^{(m, \alpha, n, r)}, \quad N \geq N_0,$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest N ning $\varepsilon_N^{(m,\alpha,n,r)}$ on defineeritud võrdusega (5.6).

Ülesande lahendamiseks on paketi *Mathcad* koostatud programmides muudetud tuuma K , vabaliikme f ja täpse lahendi u avaldisi. Vastav lähislahend leitakse programmi **lahislahend** abil. Teoreetiline hinnang (5.21) on realiseeritud järgmiselt:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x) - u_N(x)| &= \sup_{0 \leq t \leq 1} |u_\varphi(t) - v(t)| \approx \\ &\approx \max_{i=0, \dots, 2N-1} \max_{j=0, \dots, 9} \left| u_\varphi \left(x_i + \frac{j}{10} (x_{i+1} - x_i) \right) - v \left(x_i + \frac{j}{10} (x_{i+1} - x_i) \right) \right|, \end{aligned}$$

kus x_i ($i = 0, \dots, 2N-1$) on võrgu (3.1) punktid (3.2).

Sarnaselt eespool toodud tabelitele, esitame ka järgnevates tabelites leitud hinnangu

veerus **maxviga**, veerus **suhe** on toodud jagatis: $\frac{\text{maxviga}_{N/2}}{\text{maxviga}_N}$.

Saavutamaks võrrandi lahendamisel maksimaalset täpsust, muudame ka nüüd võrgu ebaühtlusparameetrit r (vt (3.2)).

N	$\varphi(t) = 3t^2 - 2t^3$					
	$r = 1$		$r = 2$		$r = 3$	
	maxviga	suhe	maxviga	suhe	maxviga	suhe
4	0.0126122		0.0305249		0.0472396	
8	0.0026314	4.71	0.0059102	5.12	0.0140461	3.36
16	0.0006662	3.66	0.0014104	4.03	0.0031054	4.52
32	0.0001681	3.8	0.0003716	4.02	0.0008072	3.85
64	0.0000435	3.96	0.0001012	3.97	0.0002002	4.03
128	0.0000112	3.93	0.0000266	3.8	0.0000511	3.92

Tabel 5 ($\eta_1 = 0.17$ ja $\eta_2 = 0.8$)

N	$\varphi(t) = 3t^2 - 2t^3$					
	$r = 1$		$r = 2$		$r = 3$	
	maxviga	suhe	maxviga	suhe	maxviga	suhe
4	0.0113451		0.036157		0.0490648	
8	0.0033024	3.44	0.0072485	4.99	0.0158299	3.1
16	0.0008734	3.78	0.0019991	3.63	0.003935	4.02
32	0.0002571	3.4	0.0005647	3.54	0.0011735	3.55
64	0.0000783	3.28	0.000116	4.87	0.0002586	4.54
128	0.0000289	2.71	0.0000428	2.71	0.0000644	4.01

Tabel 6 ($\eta_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$ ja $\eta_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$)

N	$\varphi(t) = 6t^5 - 15t^4 + 10t^3$					
	$r = 1$		$r = \frac{4}{3}$		$r = 2$	
	maxviga	suhe	maxviga	suhe	maxviga	suhe
4	0.0288827		0.0317259		0.0575495	
8	0.0121648	2.37	0.006371	4.98	0.011647	4.94
16	0.0047236	2.58	0.0016625	3.83	0.0029145	4
32	0.0017355	2.72	0.0004373	3.8	0.0007717	3.78
64	0.0006266	2.77	0.0001136	3.85	0.0002054	3.76
128	0.0002248	2.79	0.0000272	4.17	0.0000519	3.95

Tabel 7 ($\eta_1 = 0.17$ ja $\eta_2 = 0.8$)

N	$\varphi(t) = 6t^5 - 15t^4 + 10t^3$					
	$r = 1$		$r = \frac{4}{3}$		$r = 2$	
	maxviga	suhe	maxviga	suhe	maxviga	suhe
4	0.0349487		0.0384072		0.0591779	
8	0.0146648	2.38	0.007905	4.86	0.0148791	3.98
16	0.0056539	2.59	0.002083	3.8	0.003233	4.6
32	0.0020767	2.72	0.0005249	3.97	0.000825	3.92
64	0.0007448	2.79	0.0001272	4.13	0.0002052	4.02
128	0.0002653	2.81	0.0000411	3.1	0.0000624	3.29

Tabel 8 ($\eta_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$ ja $\eta_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$)

Praegusel juhul, kui $\alpha = 0.5$, $m = 2$ ning $n = 2$ või $n = 3$, saab hinnang (5.21) kuju

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x) - u_N(x)| \leq c \begin{cases} N^{\frac{-rn}{2}}, & n < 4, \quad 1 \leq r < \frac{4}{n} \\ N^{-2}, & n < 4, \quad r \geq \frac{4}{n} \end{cases}, \quad N \geq N_0. \quad (6.3)$$

Seega:

- * kui $n = 2$ ja $r = 1$, siis hinnangu (6.3) põhjal peaks **maxviga** tabelite 5 ja 6 teises veerus vähenema ligikaudu 2 korda, st vastav **suhe** tabelite 5 ja 6 kolmandas veerus peaks olema ligikaudu 2;
- * kui $n = 2$ ja $r = 2$, siis hinnangu (6.3) põhjal peaks **maxviga** tabelite 5 ja 6 neljandas veerus vähenema ligikaudu 4 korda, st vastav **suhe** tabelite 5 ja 6 viiendas veerus peaks olema ligikaudu 4;
- * kui $n = 2$ ja $r = 3$, siis hinnangu (6.3) põhjal peaks **maxviga** tabelite 5 ja 6 kuuendas veerus vähenema ligikaudu 4 korda, st vastav **suhe** tabelite 5 ja 6 viimases veerus peaks olema ligikaudu 4;

- * kui $n = 3$ ja $r = 1$, siis hinnangu (6.3) põhjal peaks **maxviga** tabelite 7 ja 8 teises veerus vähenema ligikaudu $2^{\frac{3}{2}} \approx 2.828$ korda, st vastav **suhe** tabelite 7 ja 8 kolmandas veerus peaks olema ligikaudu 2.83;
 - * kui $n = 3$ ja $r = \frac{4}{3}$, siis hinnangu (6.3) põhjal peaks **maxviga** tabelite 7 ja 8 neljandas veerus vähenema ligikaudu 4 korda, st vastav **suhe** tabelite 7 ja 8 viiendas veerus peaks olema ligikaudu 4;
 - * kui $n = 3$ ja $r = 2$, siis hinnangu (6.3) põhjal peaks **maxviga** tabelite 7 ja 8 kuuendas veerus vähenema ligikaudu 4 korda, st vastav **suhe** tabelite 7 ja 8 viimases veerus peaks olema ligikaudu 4.
- Tabelitest 5, 6, 7 ja 8 näeme, et arvulised tulemused on enam-vähem heas kooskõlas teoreetilise hinnanguga (6.3).

Summary

In this work we consider a Fredholm integral equation of the second kind in the form

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.1)$$

Functions K and f are given and u is unknown.

For K we assume, that

$$K(x, y) = L(x, y)|x - y|^{-\alpha}, \quad x \neq y, \quad (2.2)$$

where $0 < \alpha < 1$ and $L \in C([0,1] \times [0,1])$. We also assume that $f \in C^{m,\nu}[0,1]$, ($m \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu < 1$). Then equation (2.1) is uniquely solvable and its solution $u \in C[0,1] \cap C^m(0,1)$ (see chapter 2).

In (2.1) we change the variables

$$x = \varphi(t), \quad y = \varphi(s), \quad 0 \leq t, s \leq 1,$$

where φ is given by (4.1), and reach to a modified equation in the form

$$u_\varphi(t) = \int_0^1 K_\varphi(t, s)u_\varphi(s)ds + f_\varphi(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (4.13)$$

where K_φ and f_φ are given by (4.14) and (4.15). The singularities of the derivatives of the solution u_φ are milder or disappear at all.

To find an approximation of the equation (2.1) we solve equation (4.13). We use piecewise polynomial collocation method (see chapter 4) to find an approximate solution $v \in S_{m-1}^{(-1)}(\Delta_N^r)$ (space of polynomial splines of degree $m-1$), $m, N \in \mathbb{N}$, of the equation (4.13). Approximate solution of the equation (2.1) we define as

$$u_N(x) = v(\varphi^{-1}(x)), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Basic results are given in theorems 5.1 and 5.2. It follows from these, that using equation (4.13) we may use much more regular mesh in collocation method to obtain optimal convergence results. It's very useful in practical computing. In chapter 6 we carry out some numerical examples using the general theory.

Kirjandus

- [1] K. E. Atkinson. The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind. Cambridge University Press, 1997.
- [2] Р. Эдвардс. Функциональный анализ. Издательство “Мир“, Москва 1969.
- [3] M. Kolk. Modifitseeritud spline-kollokatsioonimeetod teist liiki Volterra integraalvõrrandi lahendamiseks. Magistritöö. Tartu Ülikool, matemaatika-informaatikateaduskond, rakendusmatemaatika instituut, diferentsiaal- ja integraalvõrrandite õppetool. Tartu 2004.
- [4] E. Oja, P. Oja. Funktsionaalanalüüs. Tartu Ülikool, 1991.
- [5] A. Pedas, G. Vainikko. Numerical Solution of Weakly Singular Volterra Integral Equations with Change of Variables. Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math V. 53 (2004), No. 2, 99 – 106.
- [6] A. Pedas, G. Vainikko. Smoothing Transformation and Piecewise Polynomial Collocation for Weakly Singular Volterra Integral Equations. Computing V. 73 (200), 271 – 293.
- [7] E. Tamme, L. Võhandu, L. Luht. Arvutusmeetodid I. Tallinn ”Valgus”, 1986.
- [8] G. Vainikko. Multi-dimensional Weakly Singular Integral Equations. Springer, Berlin, 1993.
- [9] Г. Вайникко, А. Педас, П. Уба. Методы решения слабосингулярных интегральных уравнений. Тарту 1984.

Lisad

Programmide kirjeldused

Järgmises punktis on toodud paketis *Mathcad* kirjutatud programmid, mida kasutatakse integraalvõrrandi lahendamiseks lineaarsplain – kollokatsioonimeetodil nii muutujate vahetuse korral kui ka ilma.

Kõigepealt arvutatakse programmiga **v6rk** võrgu punktid, mis lisaks suurusele N sõltuvad ka suurusest r , mis viib võrgu punktid lõigu otspunktide juures tihedamalt kokku. Seejärel sõltuvalt võrgust kollokatsioonipunktid, mis sõltuvad suurustest η_1 ja η_2 , seda teeb programm **kollokatsioon**. Tuum K , vabaliige f ja täpne lahend u tuleks iga ülesande jaoks eraldi fikseerida. Avaldis B määrab lineaarbaassplaini esituse. Programm **cij_kordajad** arvutab võrrandisüsteemi (4.20) kordajate a_{ipjq} maatriksi, kasutades seoses (4.21) toodud valemit, programm **vabaliige** arvutab sama süsteemi vabaliikmete veeru. Kasutades *Mathcadi* funktsiooni *lsolve*, saame võrrandisüsteemi (4.20) lahendid **cij**. Lähislahend ja täpne lahend arvutatakse vastavalt programmide **lahislahend** ja **tapne** abil. Täpse lahendi ja lähislahendi maksimaalset erinevust uurib lisaõlmedes m programm **maxviga**. Kasutaja saab kõikides programmide valida osalõikude arvu, kollokatsiooniparameetreid ning võrgu ebaühtlusparameetrit r .

Mathcadi programmid

$$\text{v6rk}(N,r) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..N \\ \quad x_j \leftarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{j}{N} \right)^r \\ \text{for } j \in 1..N \\ \quad x_{N+j} \leftarrow 1 - x_{N-j} \\ x \end{array} \right.$$

$$\text{kollokatsioon}(N,r,\eta 1,\eta 2) := \left| \begin{array}{l} x \leftarrow \text{v6rk}(N,r) \\ \text{for } j \in 0..2 \cdot N - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} t_{j,0} \leftarrow x_j + \eta 1 \cdot (x_{j+1} - x_j) \\ t_{j,1} \leftarrow x_j + \eta 2 \cdot (x_{j+1} - x_j) \end{array} \right. \\ t \end{array} \right.$$

$$B0(i,s,t) := \frac{t_{i,1} - s}{t_{i,1} - t_{i,0}} \qquad B1(i,s,t) := \frac{s - t_{i,0}}{t_{i,1} - t_{i,0}}$$

$$\text{cij_kordajad}(N, r, \eta 1, \eta 2) := \left| \begin{array}{l} x \leftarrow \text{v6rk}(N, r) \\ t \leftarrow \text{kollokatsioon}(N, r, \eta 1, \eta 2) \\ \text{for } k \in 0 \dots 2 \cdot N - 1 \\ \quad \text{for } l \in 0 \dots 1 \\ \quad \quad \text{for } i \in 0 \dots 2 \cdot N - 1 \\ \quad \quad \quad \text{for } j \in 0 \dots 1 \\ \quad \quad \quad \quad m \leftarrow 2 \cdot k + 1 \\ \quad \quad \quad \quad n \leftarrow 2 \cdot i + j \\ \quad \quad \quad \quad \text{int}(i, j, s, t) \leftarrow \int_{x_l}^{x_{l+1}} K(t_{k,1}, s) \cdot B(i, j, s, t) \, ds \\ \quad \quad \quad \quad A_{m,n} \leftarrow \text{if}(m = n, 1 - \text{int}(i, j, s, t), -\text{int}(i, j, s, t)) \end{array} \right| A$$

$$\text{vabaliige}(N, r, \eta 1, \eta 2) := \left| \begin{array}{l} t \leftarrow \text{kollokatsioon}(N, r, \eta 1, \eta 2) \\ \text{for } i \in 0 \dots 2 \cdot N - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} F_{2 \cdot i} \leftarrow f(t_{i,0}) \\ F_{2 \cdot i + 1} \leftarrow f(t_{i,1}) \end{array} \right. \end{array} \right| F$$

$$\text{cij}(N, r, \eta 1, \eta 2) := \left| \begin{array}{l} F \leftarrow \text{vabaliige}(N, r, \eta 1, \eta 2) \\ A \leftarrow \text{cij_kordajad}(N, r, \eta 1, \eta 2) \\ \text{lsolve}(A, F) \end{array} \right|$$

```

lahislahend(m,N,r,η1,η2) :=
| x ← v6rk(N,r)
| C ← cij(N,r,η1,η2)
| t ← kollokatsioon(N,r,η1,η2)
| for i ∈ 0..2·N-1
|   for k ∈ 0..m-1
|     |
|     | zm·i+k ← xi + k ·  $\frac{x_{i+1} - x_i}{m}$ 
|     | vm·i+k ← C2·i·B0(i,zm·i+k,t) + C2·i+1·B1(i,zm·i+k,t)
|   v

```

```

tapne(m,N,r) :=
| x ← v6rk(N,r)
| for i ∈ 0..2·N-1
|   for k ∈ 0..m-1
|     gm·i+k ← u  $\left( x_i + k \cdot \frac{x_{i+1} - x_i}{m} \right)$ 
|   g

```

```

maxviga(m,r,η1,η2) :=
| for k ∈ 0..5
|   |
|   | N ← 2k+1
|   | un ← lahislahend(m,N,r,η1,η2)
|   | u ← tapne(m,N,r)
|   | yk ← max( $\overrightarrow{|un - u|}$ )
|   | sk ← 2k+1
|   M<0> ← 2·s
|   M<1> ← y
|   M

```

$$\text{suhted}(m,r,\eta\,1,\eta\,2) := \left| \begin{array}{l} mv \leftarrow \text{maxviga}(m,r,\eta\,1,\eta\,2)^{\langle 1 \rangle} \\ \text{for } i \in 0..4 \\ \quad s_i \leftarrow \frac{mv_i}{mv_{i+1}} \\ s \end{array} \right|$$