

75
J. Kangro
1913
1975

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
КОНФЕРЕНЦИИ
"МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА"

ТАРТУ 1988

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
КОНФЕРЕНЦИИ
"МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА"

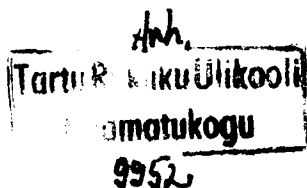
21 - 23 сентября 1988

ТАРТУ 1988

Настоящая конференция посвящается 75-летию со дня рождения профессора Г. Кангро.

Гуннар Кангро (1913-1975) окончил Тартуский университет, работал ассистентом в Таллинском политехническом институте в 1936-1941, во время Великой Отечественной войны работал стипендиатом Совнаркома ЭССР в Челябинском институте механизации сельского хозяйства и в Московском госуниверситете. С ноября 1944 года до конца жизни он работал в Тартуском госуниверситете, доцент (1946), доктор физико-математических наук (1948), профессор (1951), заведующий кафедрой математического анализа (1959-1975), член-корреспондент АН ЭССР (1961), заслуженный деятель науки ЭССР (1965).

Г. Кангро был научным руководителем более 20 аспирантов, которые защитили диссертации по алгебре, теории суммируемости, методам вычисления, рядам Фурье, теории приближения функций и др. Им написаны учебники по алгебре и математическому анализу.



KUSTUTATUD

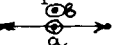
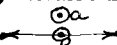
АБСТРАКТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ГРУППОИДОВ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОМПОЗИЦИЯМИ

Д. А. Бредихин

Множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности операций над ними, образует алгебру, называемую алгеброй отношений. При этом обычно предполагается, что операции задаются с помощью формул языка 1-го порядка [1]. Среди таких операций над отношениями важную для приложений роль играют так называемые обобщенные композиции [2], задаваемые с помощью формул, содержащих лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. Каждая обобщенная композиция может быть описана с помощью ориентированного графа с упорядоченной парой выделенных вершин, ребра которого помечены отношениями, являющимися аргументами соответствующей обобщенной композиции [3]. Например, граф $\alpha \longrightarrow \beta$ с парой выделенных вершин (α, β) определяет произведение бинарных отношений $B \circ \rho = \{(\alpha, \beta) \mid (\exists c)(\alpha, c) \in \rho \text{ и } (c, \beta) \in B\}$. Далее нами рассматриваются бинарные обобщенные композиции, то есть композиции, задаваемые графами, содержащими два ребра.

Существует 71 (с точностью до двойственных) обобщенная бинарная композиция, не сводящаяся к нольарной и унарной. Классификацию бинарных композиций удобно проводить по виду задающего их графа и способу выбора выделенных вершин. Для каждого неориентированного графа и двух его вершин α и β можно определить серию обобщенных бинарных композиций, получаемых посредством ориентации ребер графа и упорядочением вершин α и β . Все операции из этой серии могут быть выражены друг через друга с помощью унарной операции обращения бинарных отношений $\rho^{-1} = \{(\alpha, \beta) \mid (\beta, \alpha) \in \rho\}$. Ниже приводится описание указанных серий обобщенных композиций для графов, выделенные вершины которых не являются изолированными. Слева приводится неориентированный граф с выделенными вершинами (отмечены кружками), задающий данную серию, далее перечисляются ориентированные графы с упорядоченной парой выделенных вершин (α, β) , определяющие все бинарные композиции из этой серии (для петель ориентация ребер не играет роли). Для серий 1-6 $\alpha = \beta$ и соответствующая вершина обведена кружком.

- I.  (I)
2.  :  (I),  (2),  (3)
3.  :  (I),  (2)
4.  :  (I),  (2)
5.  :  (I),  (2),  (3),  (4)
6.  :  (I),  (2),  (3)
7.  :  (I),  (2),  (3),  (4)
8.  :  (I),  (2),  (3),  (4)
9.  (I)
10.  :  (I),  (2),  (3)
11.  :  (I),  (2),  (3),  (4)
12.  :  (I),  (2),  (3),  (4)
13.  :  (I),  (2),  (3),  (4),  (5),  (6)

В том случае, если одна из выделенных вершин является изолированной, то такая композиция может быть получена из соответствующей композиции серии I-6 посредством добавления этой изолированной вершины и заданием порядка на выделенных вершинах. Таким образом, каждая композиция из серии I-6 индуцирует две композиции типа A и типа B с изолированной вершиной. Например, композиция 6.I индуцирует композиции 6.IA  и 6.IB . Случай двух изолированных вершин приводит к нулевой операции.

Пусть Φ - множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой обобщенной бинарной композиции $*$, тогда $(\Phi, *)$ - группоид бинарных отношений. Возникает естественная задача отыскания абстрактной характеристики указанных группоидов.

Ассоциативными являются следующие бинарные композиции: I.I, I.IA, I.IB, 6.I, 6.IA, 6.IB, 6.2, 6.2A, 6.2B, 7.I, 8.I, 8.2, 9.I, 10.I, 11.I, 11.2, 12.I, 13.I, 13.2. Среди них ранее рассматривались композиции: 12.I - умножение бинарных отношений, характеризуемое тождеством ассоциативности; 10.I - пере-

сечение отношений, характеризуемое тождествами полурешетки и I3.1 (I3.2) - операция рестриктивного умножения I-го (2-го) рода характеризуемая тождествами $x^2 = x$; $xyx = yxz$ ($x^2 = x$; $xyx = xzy$) [I].

Операции I.1, I.1A, I.1B, 6.1, 6.1A, 6.1B, 6.2, 6.2A, 6.2B характеризуются тождествами $xy = yx$; $x^2y = xy$; операция II.1 (II.2) - тождествами $x^2y = xy$; $xyx = yxz$ ($xy^2 = xy$; $xyx = xzy$). а операции 7.1, 8.1, 8.2, 9.1 - следующим условием $y \neq 0 \Rightarrow xyx = xz$, где 0 - ноль полугруппы.

Охарактеризован ряд неассоциативных бинарных композиций. Ниже приводятся некоторые из полученных характеристик.

$$6.3: (xy^2)z = x(y^2z); x^2y^2 = y^2x^2; (xy)^2 = xy; (xy)z = (xz)y;$$

$$x(yz) = y(xz); x(xy) = xy; (xy)y = xy$$

$$5.1, 5.2: (xy)x = xy; (xy)^2 = xy; x^2y^2 = y^2x^2; x^2(y^2z) = (x^2y^2)z; (x(y^2z))(xz) = x(y^2z)$$

$$2.1, 2.2: xy = yx; (xy^2)z = x(y^2z); (xy)^2 = xy; x^2(xy) = xy; (xy^2)x^3 = xy^2; (xy)(x^3y^3) = x^3y^3$$

$$10.2: (xy)z = (xz)y; x(yz) = z(yx); x(yx) = xy; (xy)y = xy; (xy)(zt) = (tz)(yx)$$

Описаны все подмногообразия многообразия, характеризующего операцией 10.2. Они образуют пятиэлементную немодулярную решетку.

Литература

1. Schein B.M. Relation algebra and function semigroups// Semigroup Forum, 1970, V. 1, P. 1-62.
2. Poschel R. A general Galois theory for operations and relations and concrete characterization of related algebraic structures// Berlin, 1980.
3. Werner H. Which partition lattices are congruence lattices// Col. Math. Soc. J. Bolyai, V. 14, P. 433-453, Szeged, 1974.

Саратовский политехнический институт
Кафедра высшей математики

О ХАРАКТЕРАХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Е. Гутман

1. Алгебра инцидентности. Пусть P — локально конечное частично упорядоченное множество, K — поле. Функция $f: P^2 \rightarrow K$ для которой из того, что $x \not\leq y$ вытекает $f(x, y) = 0$ называется функцией инцидентности. Относительно операций, определённых правилами

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x, y) &= \begin{cases} \sum_{x \leq u \leq y} f(x, u) g(u, y), & \text{при } x \leq y, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ (f+g)(x, y) &= f(x, y) + g(x, y), \\ (\alpha f)(x, y) &= \alpha f(x, y), \quad \alpha \in K.\end{aligned}$$

множество функций инцидентности $I(P)$ образует ассоциативную алгебру с нейтральным относительно умножения элементом $\delta(x, y) = \delta_{xy}$, где δ_{xy} — функция Кроннекера, [1].

2. Арифметические функции. Под арифметической функцией мы будем понимать произвольное отображение φ подмножества ω множества $\mathbb{N}$ неотрицательных целых чисел в K . Линейные операции на множестве арифметических функций определяются "поточечно", а для их умножения рассмотрим следующие пять возможных способов его определения:

$$\text{Умножение Коши: } (\varphi \psi)(n) = \sum_{k=0}^n \varphi(k) \psi(n-k),$$

$$\text{Умножение Дирихле: } (\varphi \psi)(n) = \sum_{k|n} \varphi(k) \psi(n/k), \quad [4],$$

$$\text{Унитарное умножение: } (\varphi \psi)(n) = \sum_{k|n, (k, n/k)=1} \varphi(k) \psi(n/k),$$

$$\text{Умножение Люка: } (\varphi \psi)(n) = \sum_{\substack{R \leq n \\ p \nmid \binom{n}{R}}} \varphi(R) \psi(n-R),$$

где p — фиксированное простое число, а $\binom{n}{k}$ — биномиальный коэффициент.

Конволютивное умножение по базисной последовательности:

$$(\varphi \psi)(n) = \sum_{\substack{k|n \\ (k, n/k) \in B}} \varphi(k) \psi(n/k), \quad \text{где } B \text{ — базисная по-}$$

следовательность, т.е., бинарное отношение на множестве $\mathbb{N}$ удовлетворяющее трём условиям:

$$a) (m, n) \in B \Rightarrow (n, m) \in B,$$

$$b) (n, mk) \in B \Rightarrow ((n, k) \in B \ \& \ (n, m) \in B),$$

$$в) \forall n \in \mathbb{N}: (1, n) \in B, \quad [5].$$

В случае умножений Коши и Люка $\omega = \mathbb{N}$, в остальных слу-

чаях $W = \mathbb{N}$. Легко проверить, что все пять способов определения умножения превращают множество арифметических функций в ассоциативно-коммутативную алгебру.

На множестве W зададим отношение $\triangleleft$, где для умножения Коши $\triangleleft$ - естественный порядок; для умножения Дирихле $\triangleleft$ - отношение делимости; для унитарного умножения $m \triangleleft n \Leftrightarrow m \mid n$; для умножения Люка $m \triangleleft n \Leftrightarrow (m \leq n \ \& \ p \nmid (n/m))$; для конволютивного умножения по базисной последовательности $m \triangleleft n \Leftrightarrow (m \mid n \ \& \ (m, n/m) \in B)$. Во всех пяти случаях отношение $\triangleleft$ превращает W в локально конечное частично упорядоченное множество. Определим функцию инцидентности $\tau: W^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ для умножений Коши и Люка $\tau(m, n) = n - m$, в остальных случаях $\tau(m, n) = n/m$.

Т е о р е м а I. Функции инцидентности f (при любом определении W и $\triangleleft$), для которых из $\tau(m_1, n_1) = \tau(m_2, n_2)$ следует $f(m_1, n_1) = f(m_2, n_2)$ образуют коммутативную подалгебру $I_\tau(W)$ в алгебре инцидентности $I(W)$, изоморфную соответствующей алгебре арифметических функций. При этом, изоморфизм устанавливается следующим образом: каждой $f \in I_\tau(W)$ ставится в соответствие арифметическая функция d_f , для которой $d_f(k) = f(m, n)$, где $\tau(m, n) = k$.

Вводимое ниже понятие характера обобщает изложенную в теореме I конструкцию.

3. Определение характера. Пусть P - частично упорядоченное множество, $\tau: P^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ - функция инцидентности, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $\tau(x, x) = \tau(y, y)$ при всех $x, y \in P$;
- 2) если $x \leq v \leq y$, то $\tau(x, v) \leq \tau(x, y)$;
- 3) если $v_1, v_2 \in [x, y]$ и $\tau(x, v_1) = \tau(x, v_2)$, то $v_1 = v_2$;
- 4) для каждого $v_1 \in [x, y]$ найдётся такой $v_2 \in [x, y]$, что $\tau(x, v_1) = \tau(v_2, y)$, $\tau(x, v_2) = \tau(v_1, y)$;

5) если $\tau(x_1, y_1) = \tau(x_2, y_2)$, то между отрезками $[x_1, y_1]$ и $[x_2, y_2]$ можно установить такое взаимно однозначное соответствие σ , что $\tau(x_1, v) = \tau(x_2, \sigma(v))$ при всех $v \in [x_1, y_1]$;

6) если для некоторых $x_1 \leq v_1 \leq y_1$, $x_2 \leq v_2 \leq y_2$ имеет место равенство $\tau(x_1, v_1) = \tau(x_2, v_2)$, то $\tau(v_1, y_1) = \tau(v_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда $\tau(x_1, y_1) = \tau(x_2, y_2)$.

Функцию τ , удовлетворяющую условиям 1)-6), будем назы-

вать характером множества P .

Характер τ будет называться полным, если для любых k и m , принадлежащих множеству его значений, найдутся такие x, y , что $\tau(x, y) = k$, $\tau(y, x) = m$.

4. Существование характера. Частично упорядоченное локально конечное множество называется локально самодвойственным, если каждый его отрезок является самодвойственным, [2].

Т е о р е м а 2. Частично упорядоченное множество, обладающее характером, локально конечно и локально самодвойственно.

Т е о р е м а 3. Локально конечная локально самодвойственная дистрибутивная решётка с наименьшим элементом обладает характером.

Открытым остаётся вопрос о достаточности условий, сформулированных в теореме 2.

5. Изоморфизм характеров. Характеры τ_1 и τ_2 называются изоморфными, если существует автоморфизм π множества P такой, что при любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in P$ равенства $\tau_1(x_1, y_1) = \tau_1(x_2, y_2)$ и $\tau_2(\pi(x_1), \pi(y_1)) = \tau_2(\pi(x_2), \pi(y_2))$ равносильны. Множество P называется однохарактерным, если оно обладает единственным, с точностью до изоморфизма характером. Примерами таких множеств могут служить цепь и решётка "пентагон", [3]. Было бы любопытно в терминах частично упорядоченных множеств выразить критерий однохарактерности, конечнохарактерности, k -характерности.

6. Арифметические функции (общий подход). Рассмотрим в $I(P)$ подмножество $I_\tau(P)$ функций инцидентности f , для которых из $\tau(x_1, y_1) = \tau(x_2, y_2)$ следует $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$.

Т е о р е м а 4. Подмножество $I_\tau(P)$ — коммутативная подалгебра в $I(P)$.

Пусть W — множество значений характера τ и $\varphi: W \rightarrow K$ — арифметическая функция. Определим функцию инцидентности f_φ по правилу: для всякого x, y из $\tau(x, y) = n$ следует $f_\varphi(x, y) = \varphi(n)$. Легко видеть, что отображение $\varphi \rightarrow f_\varphi$ есть биекция между множеством арифметических функций и алгеброй $I_\tau(P)$. Полагая $f_{\varphi\psi} = f_\varphi f_\psi$, мы поставим в соответствие алгебре $I_\tau(P)$ некоторую алгебру арифметических функций. Заметим, что эта конструкция обобщает конструкцию теоремы 1.

Пусть $A_{\tau}(P)$ — алгебра арифметических функций, изоморфная алгебре $I_{\tau}(P)$.

Т е о р е м а 5. Если характеры τ_1 и τ_2 изоморфны, то изоморфны алгебры $A_{\tau_1}(P)$ и $A_{\tau_2}(P)$.

Определим на W бинарную операцию по правилу: $k * m = n$, если найдутся $x \in U \leq y$, для которых $\tau(x, y) = k$, $\tau(y, y) = m$, $\tau(x, y) = n$.

Л е м м а. Операция $*$ превращает W в коммутативную полугруппу.

Полный характер τ назовём целостным, если из $k \geq n$ следует $m * k \geq n * k$.

Т е о р е м а 6. Алгебра $A_{\tau}(P)$ является областью целостности тогда и только тогда, когда характер τ — целостный.

Т е о р е м а 7. Алгебра $A_{\tau}(P)$ является областью с однозначным разложением на неприводимые множители тогда и только тогда, когда таким же свойством обладает полугруппа $(W, *)$.

Литература

1. Айгнер М., Комбинаторная теория // М.: Мир, 1982.
2. Биркгоф Г., Теория решёток // М.: Наука, 1984.
3. Гретцгер Г., Основы теории решёток // М.: Мир, 1982.
4. Cashwell E.D., Everett C.J., The ring of number-theoretic functions // Pacif. J. Math. 1959, V. 9. P. 975-985.
5. Goldsmith D., A generalized convolution for arithmetic functions // Duke Math. J. 1971, V. 38. P. 279-283.
6. Vaidyanathaswamy R., The theory of multiplicative arithmetic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1931, V. 33. P. 579-662.

Министерство финансов ЭССР
Информационно-вычислительный центр

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЫ ФОСТЕРА

К. Каарли

В своей статье [1] А.Ф.Пиксли сформулировал проблему, которая по его словам принадлежит А.Фостеру. Она гласит так: является ли категоричной каждая функционально полная алгебра, которая не имеет нетривиальных подалгебр? Отметим, что конечная (универсальная) алгебра $A = (A; F)$ называется функционально полной, если все функции $A^n \rightarrow A$ полиномиальны, и категоричной, если $\text{Var} A$ состоит только из подпрямых степеней алгебры A .

В настоящей работе эта проблема решается отрицательно. Для этого на множестве $A = \{a, b, c\}$ определяются операции f, g, h следующим образом:

$$f(x, y, x, u) = \begin{cases} d(x, y, z), & \text{если } u = b \\ a, & \text{если } u \neq b. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} c, & \text{если } x = b \\ a, & \text{если } x \neq b, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} b, & \text{если } x = c \\ a, & \text{если } x \neq c. \end{cases}$$

Здесь $d(x, y, z)$ - дискриминатор, т.е. тернарная функция, принимающая значение z при $x = y$ и x при $x \neq y$.

Получаемая алгебра A является функционально полной, поскольку дискриминатор на ней полиномиален. Легко проверить, что $\{a\}$ - единственная собственная подалгебра в A , а $\{(b, c), (a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (c, a)\}$ является подалгеброй в A^2 . Однако, последняя подалгебра отображается гомоморфно на двухэлементную алгебру, которая не может быть подпрямой степенью алгебры A . Отметим, что если γ - ядро этого гомоморфизма, то одним из γ -классов будет $\{(b, c)\}$.

Кроме того доказывается, что функционально полная алгебра, вообще не имеющая собственных подалгебр, является категоричной. На самом деле такая алгебра даже квазипримальна, т.е. дискриминатор является на ней термальной функцией.

Литература

1. Pixley A.F. Functionally complete algebras generating permutable and distributive classes// Math. Z. 1970, v. 119, 361-372.

Тартуский государственный университет
Кафедра алгебры и геометрии

О ЧИСЛАХ СТИРЛИНГА И ЛАХА

У. Кальцлайд

Для конечного множества S , $|S|=n$, рассматривается множество всевозможных функций $f: S \rightarrow X$, $|X|=x$. Всякая такая функция f задает на S некоторую эквивалентность $\text{Ker } f$ - ядро функции f . Обратно, всякая эквивалентность на π служит ядром некоторой функции $f: S \rightarrow X$, причем число функций с данным ядром π равно убывающему субфакториалу $(x)_{n(\pi)}$, где через $n(\pi)$ обозначено число клеток разбиения, соответствующего на S эквивалентности π . Пусть Π_n - решетка всех эквивалентностей на S . Имеем равенство

$$\sum_{\pi \in \Pi_n} (x)_{n(\pi)} = x^n. \quad (I)$$

Так как (I) верно для бесконечно многих натуральных x , оно является равенством двух многочленов из $\mathbb{Q}[x]$. Основываясь на (I) и пользуясь методами линейной алгебры, К. Рота в 1964 г. вывел ряд свойств чисел $B_n \doteq |\Pi_n|$, показывающих, в частности, что B_n - это n -ое число Белла; подробнее об этом см. в [4].

В докладе автора на У Всесоюзном семинаре по комбинаторному анализу (МГУ, январь 1980) было предложено использовать тот же подход и для чисел Стирлинга; см. также [1]. Частично это было реализовано (для вывода основных свойств чисел Стирлинга второго рода) в [2], а более полно в [4], где с такой точки зрения (но фактически уже с привлечением подходящего отношения порядка к клеткам разбиения S) рассматривались также числа Стирлинга первого рода. С тех пор автору стали известны работы [5] и [3], показывающие, что указанная линия мысли заслуживает большего внимания. Здесь приводится новое комбинаторное обоснование некоторых тождеств для чисел Стирлинга и Лаха, иллюстрирующее указанный выше синтез идей Пойа и Рота.

Многочлены $p_u(x) \doteq (x)_u$, $u = 0, 1, 2, \dots$ образуют базис векторного пространства многочленов $\mathbb{Q}[x]$ и поэтому формулы $L_k(p_u(x)) = \delta_{u,k}$, $u = 0, 1, 2, \dots$ однозначно определяют серию линейных функционалов $L_k: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Теперь, из (I) для чисел

$$S(n, k) \doteq |\{\pi \in \Pi_n \mid n(\pi) = k\}| \quad (2)$$

имеем следующее "странное" определение:

$$S(n, k) = \sum_{\{\pi \in \Pi_n \mid n(\pi) = k\}} 1 = L_k(x^n). \quad (3)$$

Основываясь на (3), в [4] выводятся все основные соотношения для чисел $S(n, k)$ Стирлинга второго рода. Там же показано, что этот подход неплохо работает и при комбинаторном обосновании более сложных тождеств, связанных с числами $S(n, k)$ как напр.

$$\binom{L+j}{i} \cdot S(n, i+j) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} S(k, i) \cdot S(n-k, j).$$

Пусть Π'_n - множество всех разбиений множества Π , на клетках которых предполагается заданная структура цикла. С одной стороны, на функцию $f: \Pi \rightarrow X$, $|X| = x$, можно смотреть как на размещение $|\Pi| = n$ различных и упорядоченных объектов по x различным и неупорядоченным ячейкам; их число известно и равно $x^{(n)} \doteq x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)$. С другой стороны, на функцию $\Pi \rightarrow X$ можно смотреть как на композицию $\Pi \xrightarrow{f'} \Pi \xrightarrow{f''} X$ где f' - биекция, f'' - произвольная функция из Π в X . Рассматривая $\pi = \text{Ker } f''$ вместе с той структурой на π , которая возникает из циклового строения биекции $f': \Pi \rightarrow \Pi$, приходим к соотношению

$$x^{(n)} = \sum_{\pi \in \Pi'_n} x^{n(\pi)}. \quad (4)$$

Введение чисел $c(n, k) \doteq |\{\pi \in \Pi'_n \mid n(\pi) = k\}|$ позволяет (4) записать в привычной форме $x^{(n)} = \sum_k c(n, k) x^k$. Последнее является x -полиномиальным тождеством, а поэтому остается верным при замене $x \rightarrow -x$, что приводит к $(x)_n = \sum_k s(n, k) x^k$, где $s(n, k) \doteq (-1)^{n-k} c(n, k)$. Применение к последнему соотношению линейных функционалов $L'_k: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}$, $L'_k(x^u) = \delta_{k,u}$, $u = 0, 1, 2, \dots$, дает соотношения $L'_k((x)_n) = s(n, k)$. Это "странное" определение чисел $s(n, k)$ может служить основой для вывода свойств этих чисел $s(n, k)$, в частности, рекуррентного соотношения $s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k)$. Оно вместе с $s(n, 0) = 0$, $s(1, 1) = 1$ показывает, что имеем здесь дело с числами Стирлинга первого рода. Заметим, что подобным же образом определение $c(n, k) = L'_k(x^{(n)})$ может служить основой для вывода свойств чисел $c(n, k)$; см. также [4].

Используя линейные функционалы L'_k , можно доказуемому рекуррентному соотношению для чисел $s(n, k)$ придать вид

$$L'_k((x-n) \cdot (x)_n) = L'_{k-1}((x)_n) - n L'_k((x)_n).$$

Оказывается, аналогичное соотношение верно для любого $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$:

$$L'_k((x-n)p(x)) = L'_{k-1}(p(x)) - n L'_k(p(x)).$$

Последнее соотношение достаточно проверить для базисной последовательности $\{x^u \mid u=0, 1, 2, \dots\}$ пространства $\mathbb{Q}[x]$, что делается непосредственно и дает положительный результат.

Пусть Π_n'' — множество всех разбиений n , на клетках которых предполагается заданная структура цепи. На каждую функцию $f: n \rightarrow X$, $|X|=x$, можно смотреть тогда, как на отображение из n в X , на всех прообразах $f^{-1}(y)$, $y \in X$, которого задана структура цепи; общее число таких функций равно $x^{(n)}$. С другой стороны, функцию $n \rightarrow X$ можно мыслить как пару $(\bar{\tau}, f'')$, состоящую из некоторого $\bar{\tau} \in \Pi_n''$ и инъекции $f'': \Pi_{\bar{\tau}} \rightarrow X$; число таких пар равно $\sum_{\bar{\tau} \in \Pi_n''} (x)_{n(\bar{\tau})}$.

Приходим к соотношению

$$x^{(n)} = \sum_{\bar{\tau} \in \Pi_n''} (x)_{n(\bar{\tau})}. \quad (5)$$

Применение к этому соотношению линейных функционалов

$L'_k: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}$, $L'_k((x)_u) = \delta_{u,k}$, $u=0, 1, 2, \dots$, дает

$$L''_k(x^{(n)}) = \sum_{\{\bar{\tau} \in \Pi_n'' \mid n(\bar{\tau})=k\}} 1 = L(n, k). \quad (6)$$

Обычно числа $L(n, k)$ возникают как коэффициенты разложения базисных полиномов $\ell_n(x) \doteq x e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x} x^{n-1}) = \sum_{k=1}^n L(n, k) (-x)^k$

оператора Лагерра $L: p(x) \mapsto - \int_0^\infty e^{-t} \frac{dp}{dx}(k+t) dt$; см. [2], стр.

111. "Странное" их определение (6) позволяет вывести все их свойства, в частности, рекуррентное соотношение

$$L(n+1, k) = L(n, k-1) + (n+k) L(n, k), \quad (7)$$

которое вместе с $L(0, 0) = 1$ и $L(n, 0) = 0$ при $n > 0$ показывает, что $L(n, k)$ — это числа Лаха, для которых верно $L(n, k) = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}$; см. [2].

Как пример, укажем вывод для (7). С помощью (6) соотношению (7) можно придать вид

$$L''_{\kappa}((x+n)x^{(n)}) = L''_{\kappa-1}(x^{(n)}) + (n+\kappa)L''_{\kappa}(x^{(n)}). \quad (8)$$

Оказывается, (8) верно для любого $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$:

$$L''_{\kappa}((x+n)p(x)) = L''_{\kappa-1}(p(x)) + (n+\kappa)L''_{\kappa}(p(x)). \quad (9)$$

Достаточно (9) проверить для базисной последовательности

$\{(x)_u \mid u=0, 1, 2, \dots\}$ пространства $\mathbb{Q}[x]$:

$$L''_{\kappa}((x+n)(x)_u) = L''_{\kappa-1}((x)_u) + (n+\kappa)L''_{\kappa}((x)_u),$$

что с помощью представления $x+n = (x-u) + (n+u)$ приводит к (непосредственной) проверке (при $u=\kappa$; $u=\kappa-1$; или $u \neq \kappa$, $\kappa-1$) соотношения

$$\delta_{\kappa, u+1} + (n+u)\delta_{u, \kappa} = \delta_{\kappa-1, u} + (n+\kappa)\delta_{\kappa, u}. \quad (10)$$

Оказывается, (10) верно, что доказывает и (8), а вместе с тем и (7).

Было бы интересно этот подход распространить и на случай, когда на $\mathcal{U}$ рассматриваются разбиения, на клетках которых предполагается заданная структура произвольного дерева.

Литература

1. Калькулайд У.Э. Замечание о числах Стирлинга // Сб. "Комб. анализ" // МГУ, 1983, вып. 6. С. 98.
2. Aigner M. Combinatorial theory // Berlin, Springer, 1979.
3. Joni S., Rota G.-C., Sagan B. From sets to functions: three examples. Discrete Math. 1981, v. 37, P. 193-202.
4. Kaljulaid U. Diskreetse matemaatika elemendid. Tartu, TRU Rotaprint, 1983.
5. Polya G. Partitions of a finite set into structured subsets. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1975, v. 77, P. 453-458.

Тартуский государственный университет
Кафедра алгебры и геометрии

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ ВНЕШНЕПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ

У.Кальблайд, Т.Пикмаа

Рассмотрим простой граф $G = G(V, E)$ с множеством вершин V и ребер E . Согласно [3] число Фибоначчи графа G определяется как число $f(G)$ всех таких подмножеств $S \subseteq V$, что никакие две вершины из S не соединены ребром из E . Такие подмножества назовем допустимыми. Например, индукцией по n легко убедиться, что для любой n -вершинной цепи P_n имеем $f(P_n) = F_{n+1}$ и $f(C_n) = L_n$ для элементарного цикла C_n ; здесь F_n и L_n — n -ое число Фибоначчи и Люка соответственно. В вводной части доклада уточняются и дополняются результаты работы [3].

Далее, рассматривается класс максимальных внешнепланарных графов; см. [1], стр. 131. Планарный граф называется внешнепланарным, если его можно уложить на плоскости так, что все его вершины принадлежали бы одной грани. Внешнепланарный граф называется максимальным, если к нему нельзя добавить ни одного ребра, не нарушив свойства внешнепланарности. Согласно основной теореме работы [2], число Фибоначчи n -вершинного ($n \geq 3$) максимального внешнепланарного графа не превышает $F_n + 1$ и эта оценка наилучшая. Однако, в доказательстве этой теоремы автор допускает неточность, утверждая, что $f(P_{n-3} \cup \{v\}) = f(P_{n-3})$. Например, при $n = 7$ имеем $f(P_4) = F_5 = 8$, но $f(P_4 \cup \{v\}) = 16$. Укажем путь преодоления этого дефекта.

Второе утверждение отмеченной теоремы доказывается следующим образом. Пусть имеется граф $G(V, E)$ и набор "новых" вершин $y_1, \dots, y_t \notin V$. Обозначим через $G^* = G(V_1, E_1)$ граф, где $V_1 = V \cup \{y_1, \dots, y_t\}$ и $E_1 = E \cup \{(y_j, v_i) \mid 1 \leq j \leq t, v_i \in V\}$. Легко понять, что $f(G^*) = f(G) + 2^t - 1$. Это наблюдение позволяет найти число Фибоначчи "веера" W_n (см. рис. 1): $f(W_n) = f(P_{n-1}) + 2^1 - 1 = F_n + 1$. Так как веер W_n является максимальным внешнепланарным графом, то формула $f(W_n) = F_n + 1$ доказывает требуемое.

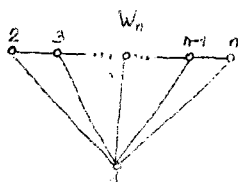


Рис. 1.

Доказательство первого утверждения проведем индукцией по n . Пусть G - максимальный внешнепланарный граф с n вершинами. В таком графе существует вершина с локальной степенью 2; см. [1], стр. 132. Выделим два класса допустимых подмножеств множества

вершин $V(G)$:

I) те допустимые подмножества $V(G)$, которые содержат v и

II) допустимые подмножества $V(G)$, не содержащие v . Пусть u и w - соседние к v вершины графа G . Удаляя из G вершины u и w , которые не содержатся в допустимых подмножествах I класса, получим $(n-2)$ -вершинный внешнепланарный граф $G_{u,w}$, который имеет изолированную вершину w и содержит цепь P_{n-3} . Рассмотрим в множестве вершин

$V(P_{n-3} \cup \{v\})$ только те допустимые подмножества, которые содержат v ; их число обозначим $\hat{f}(P_{n-3} \cup \{v\})$. Имеем

$$\hat{f}(P_{n-3} \cup \{v\}) = \hat{f}(P_{n-3}) = F_{n-2}.$$

Ввиду того, что графы $G_{u,w}$ и $P_{n-3} \cup \{v\}$ имеют одинаковые множества вершин и $E(G_{u,w}) \supseteq E(P_{n-3} \cup \{v\})$, то

$$\hat{f}(G_{u,w}) \leq \hat{f}(P_{n-3} \cup \{v\}) = F_{n-2}.$$

Далее, рассмотрим допустимые подмножества из $V(G)$ класса II. Удалим из G вершину v , полученный граф обозначим G_v . Так как v имеет локальную степень 2, то G_v является максимальным внешнепланарным графом и, согласно предположению индукции $\hat{f}(G_v) \leq F_{n-1} + 1$. Резюмируя полученное, имеем

$$\hat{f}(G) \leq \hat{f}(G_{u,w}) + \hat{f}(G_v) \leq F_{n-2} + (F_{n-1} + 1) = F_n + 1,$$

что и требовалось.

Далее, доказана

Теорема. Для данного n -вершинного максимального внешнепланарного графа G обозначим через G^+ $(n+1)$ -вершинный максимальный внешнепланарный граф, полученный из G присоединением к G новой вершины, а через G^- $(n-2)$ -вершинный внешнепланарный граф, полученный из G при отбрасывании

двух его вершин. Тогда имеет место соотношение

$$f(G) = f(G^+) - f(G^-).$$

Из этой теоремы вытекает

Следствие. Число Фибоначчи n -вершинного максимального внешнепланарного графа M_n (см. рис. 2) является мини-

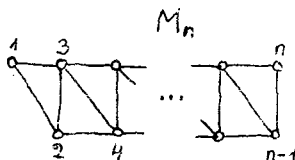


Рис. 2.

мальным среди чисел Фибоначчи для n -вершинных максимальных внешнепланарных графов.

Этим решается задача, поставленная в [2]. При доказательстве этих результатов используется рекурсивная конструкция максимальных

внешнепланарных графов, описанная в [4], стр. 76.

В заключительной части доклада первым из авторов обсуждается поведение Фибоначчи плоских графов и связь рассматриваемой темы с вопросом о числе антицепей частично упорядоченного множества.

Литература

1. Харари Ф. Теория графов // М.: Мир. 1973.
2. Alemeddine A. An upper bound of the Fibonacci number of a maximal outerplanar graph. Arabian J. Sci. and Engin., 1983, v. 8, No. 2, P. 129-131.
3. Prodinger H., Tichy R. Fibonacci numbers of graphs. Fibonacci Quarterly, 1982, v. 20, No. 1, P. 16-21.
4. Proskurowski A. Centers of maximal outerplanar graphs. J. of Graph Theory, 1980, v. 4, P. 75-79.

Тартуский государственный университет
Кафедра алгебры и геометрии

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КВАНТОВОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ТОКОВ НА ОКРУЖНОСТИ

И.В.Микитюк, А.К.Прикарпатский

Настоящая работа посвящена изучению унитарных представлений алгебры Ли токов на окружности, имеющей важные приложения в статистической физике [1], [2] и теории вполне интегрируемых динамических систем [3]. Центральное расширение $\mathcal{G}$ алгебры Ли токов на окружности описывается следующим образом. Базис в пространстве $\mathcal{G}$ состоит из векторов L_i, G_i ($i \in \mathbb{Z}$), C и S , для которых выполнены следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= (i-j) L_{i+j} + \frac{1}{12} (i^2-1) i \delta_{i+j,0} C, \\ [L_i, G_j] &= -j G_{i+j}, \\ [G_i, G_j] &= i \delta_{i+j,0} S, \end{aligned} \quad (1)$$

т.е. $\mathcal{G}$ является полупрямой суммой алгебры Вирасоро и коммутативной алгебры, порожденной $G_i, i \in \mathbb{Z}, S$. Элементы

C и S принадлежат центру алгебры Ли $\mathcal{G}$. Очевидно, $\mathcal{G} = \bar{n} \oplus \mathfrak{g} \oplus n$, где $\mathfrak{g}$ порождается L_0, G_0, C и S , а $\bar{n}$ и n порождаются L_i, G_i с $i < 0$ и L_i, G_i с $i > 0$ соответственно. Алгебра Ли $\mathcal{G}$ обладает естественной градуировкой $\deg L_i = \deg G_i = i, \deg C = \deg S = 0$.

Модуль Верма $V(\lambda)$, где $\lambda = (c, h, g, s) \in \mathbb{C}^4$, по определению индуцирован одномерным представлением алгебры $\mathfrak{g} \oplus n \subset \mathcal{G}$ в пространстве $\mathbb{C}\tau: L_i \mapsto 0, G_i \mapsto 0, i > 0, L_0 \mapsto h, G_0 \mapsto g, C \mapsto c, S \mapsto s$. Это градуированный модуль с

$$\dim V_n(\lambda) = \phi(n) := \sum_{i=0}^n p(i) p(n-i), \text{ где } p(i) - \text{число раз-}$$

биений числа $i, n \in \mathbb{N}, p(0) = 1$. Как легко понять, модуль Верма устроен следующим образом. Базис в $V(\lambda)$ составляют векторы

$$L G \tau := L_{-i_1} L_{-i_2} \dots L_{-i_k} G_{-j_1} G_{-j_2} \dots G_{-j_f} \tau, \quad (2)$$

где $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_k > 0, j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_f > 0$. Действие $\mathcal{G}$ в $V(\lambda)$ устроено так: C, G_0, S действуют умножением на

c, g, s соответственно, действие L_i, G_i вычисляется из соотношений (I). Отметим, что оператор L_0 ограничен снизу: $V_n(\lambda)$ - собственное подпространство L_0 с собственным значением $(h+n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Нас будут интересовать представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со старшим вектором, для которых пространство представления $W(\lambda)$ порождается старшим вектором ω , причем $L_i \omega = G_i \omega = 0$, $i > 0$, $L_0 \omega = h\omega$, $G_0 \omega = g\omega$, $C\omega = c\omega$, $S\omega = s\omega$. Существует единственный $\mathfrak{g}$ -гомоморфизм $V(\lambda) \rightarrow W(\lambda)$ переводящий τ в ω . Фактор-модуль модуля $V(\lambda)$ по максимальному собственному подмодулю обозначается $L(\lambda)$. Не нулевой однородный элемент $\omega \in V(\lambda)$ называется особым вектором, если $L_i \omega = G_i \omega = 0$, $i > 0$.

Рассмотрим однородную компоненту степени $-n$ модуля $V(\lambda)$. Векторы $LG\tau$ вида (2) с $i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_l = n$ - ее базис. Применив к $LG\tau$ оператор $G_{j_l} \dots G_{j_1} L_{i_k} \dots L_{i_1}$, где $j_1 \geq \dots \geq j_l > 0$, $i_1 \geq \dots \geq i_k > 0$, $i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_l = n$ получим элемент пространства $C\tau$, т.е. число. Проведя такую процедуру со всеми элементами базиса (2) в $V_n(\lambda)$, получим матрицу $M_n(\lambda)$. Справедлив аналог предложения 3.14 в [4]:

Предложение I. Матрица $M_n(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$ является симметрической (определяемая этой матрицей квадратичная форма называется формой Шаповалова). Максимальный собственный подмодуль $\mathfrak{g}$ -модуля $V(\lambda)$ является объединением $\bigcup \text{Ker } M_n(\lambda)$ и порождается особыми векторами модуля $V(\lambda)$. $n \in \mathbb{N}$

Замечание. Как следует из соотношений (I), элементы матрицы $M_n(\lambda)$ - это полиномы переменных c, h, g, s .

Для приложений важно изучение унитарных представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (со c старшим вектором) в гильбертовом пространстве, т.е. таких представлений, для которых выполнены условия эрмитовости:

$$L_i^* = L_{-i}, \quad G_i^* = G_{-i}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Нетрудно видеть, что необходимым и достаточным условием унитарности простого $\mathfrak{g}$ -модуля $L(\lambda)$ есть положительная полуопределенность матрицы $M_n(\lambda)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, необходимым условием - неотрицательность чисел c, h, s и

вещественность g . Из соотношений (I) следует, что h -степень элемента (полинома) a_{ii} матрицы $M_n(\lambda)$ строго больше, чем h -степень элементов a_{ij} и a_{ji} для любых $i, j \leq \phi(n)$, $j \neq i$. Матрица $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots)$ при $s > 0$ и достаточно больших h положительно определена, поэтому такова и матрица $M_n(\lambda)$ при $h \rightarrow \infty$, $s > 0$. Таким образом, значения $\lambda = (c, h, g, s)$, для которых представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ унитарно, могут быть получены изучением нулей определителя матрицы $M_n(\lambda) = M_n(c, h, g, s)$.

Теорема I. $\det M_n(c, h, g, s) = K \prod_{p, q \in n, p, q \in \mathbb{N}} [s(h - H_{p,q})]^{\phi(n-pq)}$

где $H_{p,q} = H_{p,q}(c, g, s) = \frac{1}{48} [12(p-q)^2 + (2-c)(p^2 + q^2 - 2) + (p^2 - q^2)(2-c)(26-c) + 24g^2/s]$, $K = K(n) > 0$.

Наше доказательство формулы определителя $\det M_n(\lambda)$ следует общей линии доказательств подобных формул для алгебры Вирасоро [5] и ее суперсимметрических расширений - супералгебр Рамона и Неве-Шварца [4]. Оно основано на конструкции семейства конкретных фоковских представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Следуя методу работы [6], из теоремы I получим

Предложение 2. Для унитарности $\mathfrak{g}$ -модуля $L(c, h, g, s)$ необходимо выполнение одного из условий: 1) $s > 0$, $g \in \mathbb{R}$, $c = c(m) = 2 - 6/m(m+1)$, $h = H_{p,q}(c, g, s)$, где $p, q, m \in \mathbb{N}$ и $m > p \geq q$; 2) $c \geq 2$, $s > 0$, $g \in \mathbb{R}$, $h \geq g^2/2s$; 3) $s = 0$, $g = 0$, $c \geq 1$, $h \geq 0$; 4) $s = 0$, $g = 0$, $c = c(m) - 1 = 1 - 6/m(m+1)$, $h = H_{p,q}(c+1, 0, 0)$, где $p, q, m \in \mathbb{N}$, $m > p \geq q$. Условия 2), 3), 4) являются также и достаточными.

Из теоремы I и общих результатов работы [7], нетрудно получить формулу характеров модулей $L(c, h, g, s)$ со значениями c, h, g, s из пункта 1) предложения 2:

$$\text{ch } L(c, h, g, s) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \dim L_n(c, h, g, s) z^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^i)^{-2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (z A_{p,q}^{m,-}(\ell) - z A_{p,q}^{m,+}(\ell) + pq),$$

где

$$A_{p,q}^{m,\pm}(\ell) = \ell^2 m(m+1) + \ell(p(m+1) \pm qm)$$

Для этого достаточно заметить, что многочлены $\det \bar{M}_n(c, h)$ и $\det M_n(c+1, h, 0, 1)$, где $\bar{M}_n(c, h)$ - матрица формы Шап-валова для алгебры Вирасоро, имеют одинаковые наборы неприводимых делителей в кольце $\mathbb{R}[c, h]$.

Отметим, что при фиксированных $s > 0$, $g \in \mathbb{R}$ точки $(c(m), h, g(c(m), g, s))$ есть так называемые "first intersections" на кривых $(c, h, g(c, g, s)) \in \mathbb{R}^2$ [6]. Можно показать, что матрица $M_n(c, h, 0, 0)$ положительно полуопределена тогда и только тогда, когда такова и матрица $\bar{M}_n(c, h)$. Тогда достаточность условий 3) и 4) предложения 2 следует из результатов работы [8].

Литература

1. Menicoff R., Sharp D.H. Approximate representation of a local current algebra // J. Math. Phys., 1975. V. 16. N. 12. P. 2353-2360.
2. Боголюбов Н.Н./мл./, Прикарпатский А.К. Квантовый метод производящих функционалов Боголюбова в статистической физике: алгебра Ли токов, ее представления и функциональные уравнения // Физика СЧАЯ, 1986. Т. 17. № 4. С. 789-827.
3. Митропольский Д.А., Боголюбов Н.Н./мл./, Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты // Киев.: Наукова думка, 1987.
4. Mourman A., Rocha-Caridi A. Highest Weight Representations of the Neveu-Schwarz and Ramond Algebras // Commun. Math. Phys., 1986. V. 107. P. 263-294.
5. Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б. Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро // Функц. анализ, 1982. Т. 16. Вып. 2. С. 47-63.
6. Friedan D., Qiu Z., Shenker S. Conformal invariance unitarity and critical exponents in two dimensions // Phys. Rev. Lett., 1984. V. 52. P. 1575-1578.
7. Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б. Модули Верма над алгеброй Вирасоро // Функц. анализ, 1983. Т. 17. Вып. 3. С. 91-92.
8. Goddard P., Kent A., Olive D. Unitary Representation of the Virasoro and Super-Virasoro Algebras // Commun. Math. Phys., 1986. V. 103. P. 105-119.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР, г. Львов
Отдел нелинейного математического анализа

КОНЕЧНО ИНЪЕКТИВНЫЕ ПОЛИГОНЫ

П. Нормак

Пусть S — моноид. Левый S -полигон ${}_S A$ называется **конечно инъективным**, если для любых конечно порожденного S -полигона ${}_S X$, мономорфизма $\mu: {}_S X \rightarrow {}_S Y$ и гомоморфизма $\alpha: {}_S X \rightarrow {}_S A$ существует гомоморфизм $\beta: {}_S Y \rightarrow {}_S A$ такой, что $\beta\mu = \alpha$. Последнее понятие введено J. Ahsan ul. Полигон ${}_S A$ называется **квазиинъективным**, если для любого мономорфизма $\mu: {}_S X \rightarrow {}_S A$ и гомоморфизма $\alpha: {}_S X \rightarrow {}_S A$ существует эндоморфизм $\varepsilon: {}_S A \rightarrow {}_S A$ такой, что $\varepsilon\mu = \alpha$. Полигон называется **слабо инъективным**, если он инъективен относительно вложений левых идеалов моноида S в моноид S . Полигон является **абсолютно чистым**, если он инъективен относительно вложений конечно порожденных S -полигонов в конечно связанные S -полигоны ([1]). Из последнего следует, что абсолютно чистые полигоны являются обобщением конечно инъективных полигонов. Называем моноид S **нётеровым**, если он обладает условием максимальности для левых идеалов. Инъективную оболочку полигона ${}_S A$ обозначим через $E(A)$.

Теорема I. Следующие свойства левого S -полигона ${}_S A$ эквивалентны:

1) Для любого полигона ${}_S B \supseteq {}_S A$ и конечного множества $\{a_1; \dots; a_n\} \subseteq {}_S A$ существует гомоморфизм $\alpha: {}_S B \rightarrow {}_S A$ такой, что $\alpha(a_i) = a_i$, $i = 1, \dots, n$.

2) Для любого конечного множества $\{a_1; \dots; a_n\} \subseteq {}_S A$ существует гомоморфизм $\alpha: E(A) \rightarrow {}_S A$ такой, что $\alpha(a_i) = a_i$, $i = 1, \dots, n$.

3) ${}_S A$ — конечно инъективен.

Следствие 1. Любой конечно порожденный конечно инъективный S -полигон является инъективным.

Следствие 2. Все S -полигоны являются конечно инъективными тогда и только тогда, когда все конечно порожденные S -полигоны инъективны.

Из результатов работы [2] следует, что если все S -по-

лигоны конечно инъективны, то моноид S регулярен, самоинъективен и все его левые идеалы линейно упорядочены по отношению включения.

Теорема 2. Следующие свойства моноида S эквивалентны:

- 1) Любой конечно инъективный S -полигон инъективен;
- 2) Любой конечно инъективный S -полигон слабо инъективен;
- 3) Любой конечно инъективный S -полигон квазиинъективен;
- 4) Любой абсолютно чистый S -полигон слабо инъективен;
- 5) S - нётеров моноид.

Следствие. Все абсолютно чистые S -полигоны являются инъективными тогда и только тогда, когда они конечно инъективны и моноид S нётеров.

Примечание. Вопрос о том, когда все абсолютно чистые, слабо инъективные или квазиинъективные S -полигоны являются конечно инъективными, наиболее сложный. Известно только, что если все квазиинъективные S -полигоны конечно инъективны (абсолютно чисты), то моноид S не является группой и любые его два левых идеала имеют непустое пересечение.

Литература

1. Нормак П. К абсолютно чистым полигонам // 350 лет математики в Тартуском университете (тезисы докладов), Тарту, 1982. с. 95.
2. Normak, P. Purity in the category of M -sets // Semi-group Forum 1980, v. 20. P. 157-170.

Таллинский педагогический институт им. Э.Вильде
Кафедра математики

О СУММИРУЕМОСТИ ЭНДОМОРФИЗМОВ ГРУППЫ

II. Нулевые

Пусть G — некоторая группа и x, y — ее эндоморфизмы. Эндоморфизмы x и y называются ортогональными, если $xy = yx = 0$. Эндоморфизмы x и y называются суммируемыми, если отображение $x+y$, определяемое равенством $g(x+y) = (gx)(gy)$, $g \in G$, также является эндоморфизмом группы G . В работе [1] показано, что если x, y — идемпотентные и ортогональные элементы полугруппы $\text{End } G$ всех эндоморфизмов группы G , то вопрос о том, являются ли x и y суммируемыми, решается полностью умножением в полугруппе $\text{End } G$. При этом значение суммы $x+y$ определено однозначно свойствами полугруппы $\text{End } G$. В настоящей заметке укажем еще один случай, при котором сумма $x+y$ двух элементов полугруппы $\text{End } G$ определяется умножением в полугруппе $\text{End } G$.

Приведем сначала некоторые обозначения и вспомогательные результаты. Если x — идемпотент полугруппы $\text{End } G$, то $G = \text{Ker } x \lambda \text{Im } x$ и x действует тождественно на элементах подгруппы $\text{Im } x$. Для $x, y \in \text{End } G$ обозначим

$$Q_G(x, y) = \{z \in \text{End } G \mid xz = zy = z\}; \quad Q_G(x, x) = K_G(x).$$

Если при этом x, y — идемпотенты, то

$$Q_G(x, y) = \{z \in \text{End } G \mid \text{Ker } x \subset \text{Ker } z, (\text{Im } x)z \subset \text{Im } y\}.$$

В таком случае x из $Q_G(x, y)$ полностью определен своим действием на $\text{Im } x$.

В теоремах I и 2, а также в следствиях I и 2, предполагается, что x, y — некоторые суммируемые и ортогональные идемпотенты полугруппы $\text{End } G$. Тогда

$$G = (\text{Ker } x \cap \text{Ker } y) \lambda (\text{Im } x \times \text{Im } y),$$

$$\mathcal{I}m(x+y) = \mathcal{I}mx \times \mathcal{I}my, \quad \text{Ker}x \cap \text{Ker}y = \text{Ker}(x+y)$$

(см. [I], стр. 79, 83). через $\mathcal{Z}(A)$ обозначим центр подгруппы A группы G . Если $x \in \text{End}G$, то через x^* обозначим образ эндоморфизма x при изоморфизме полугрупп $\text{End}G$ и $\text{End}G^*$.

Теорема I. Пусть $u \in Q_G(x, y)$. Тогда для справедливости включения $\mathcal{I}mu \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}my)$ необходимо и достаточно существование такого $w_u \in K_G(x+y)$, что

$$xw_u x = x, \quad xw_u y = u, \quad yw_u = y. \quad (I)$$

Если такое w_u существует, то оно определено однозначно.

Доказательство. Предположим, что $u \in Q_G(x, y)$ и $\mathcal{I}mu \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}my)$. Укажем эндоморфизм $w_u \in K_G(x+y)$, удовлетворяющий равенствам (I). Как отмечено, достаточно указать действие эндоморфизма w_u на элементах подгруппы $\mathcal{I}m(x+y) = \mathcal{I}mx \times \mathcal{I}my$:

$$aw_u = a \cdot (au), \quad a \in \mathcal{I}mx,$$

$$bw_u = b, \quad b \in \mathcal{I}my.$$

В силу $\mathcal{I}mu \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}my)$ отображение w_u определяет эндоморфизм группы G , принадлежащий в $K_G(x+y)$. Справедливость равенств (I) очевидна.

Наоборот, предположим для $u \in Q_G(x, y)$ существование эндоморфизма $w_u \in K_G(x+y)$, удовлетворяющего равенствам (I). Покажем включение $\mathcal{I}mu \subset \mathcal{Z}(\mathcal{I}my)$.

Пусть $a \in \mathcal{I}mx$ и $b \in \mathcal{I}my$. Так как x и y действуют соответственно на элементах подгрупп $\mathcal{I}mx$ и $\mathcal{I}my$ тождественно, то в силу равенств (I) имеем

$$bw_u = b(yw_u) = by = b, \quad (2)$$

$$a(w_u y) = a(xw_u y) = au,$$

$$ax = a(xw_u x) = a(w_u x),$$

$$a^{-1}(a\omega_a) \in K \text{ и } a \in \text{Int}(x+y) = \text{Int } y,$$

$$a^{-1}(a\omega_a) = (a^{-1}(a\omega_a))y = a(\omega_a y) = ay.$$

$$a\omega_a = a \cdot (ay). \quad (3)$$

Из равенства $ab = ba$ вытекает равенство $(a\omega_a)(b\omega_a) = (b\omega_a)(a\omega_a)$, откуда в силу равенств (2) и (3) имеем:

$$a \cdot (ay) \cdot b = b \cdot a \cdot (ay) = a \cdot b \cdot (ay),$$

т.е. $b \cdot (ay) = (ay) \cdot b$. Ввиду $ay \in \text{Int } y$ и указанного выбора элементов a и b это означает, что справедливо включение $\text{Int } y \subset \mathbb{Z}(\text{Int } y)$. Однозначность эндоморфизма ω_a следует теперь из равенств (2) и (3). Теорема доказана.

Теорема 2. Если $u, v \in Q_a(x, y)$ и $\text{Int } u, \text{Int } v \subset \mathbb{Z}(\text{Int } y)$, то

$$u + v = x\omega_u\omega_v y, \quad (4)$$

где ω_u, ω_v — эндоморфизмы группы G , указанные в формулировке теоремы 1.

Доказательство. Предположим, что выполнены посылки теоремы 2 и покажем равенство (4). Для этого достаточно доказать, что эндоморфизмы $u+v$ и $x\omega_u\omega_v y$ группы G действуют одинаково на элементах подгруппы $\text{Int } x$ группы G . Отметим, что при $a \in \text{Int } x$ и $b \in \text{Int } y$ для ω_a справедливы равенства (2) и (3) (аналогичные равенства имеют место и для ω_b). Поэтому при $a \in \text{Int } x$ в силу $ay, av \in \text{Int } y$ имеем

$$\begin{aligned} a(x\omega_u\omega_v y) &= a(\omega_u\omega_v y) = (a \cdot (ay))(\omega_v y) = \\ &= ((a\omega_v) \cdot ((ay)\omega_v))y = ((a \cdot (av)) \cdot (ay))y = \\ &= (av) \cdot (ay) = (ay) \cdot (av) = a(u+v), \end{aligned}$$

т.е. $u+v = x\omega_u\omega_v y$. Теорема доказана.

Следствие I. Пусть полугруппы всех эндоморфизмов групп G и G^* изоморфны и $u \in Q_a(x, y)$. Тогда из включения $\text{Int } u \subset \mathbb{Z}(\text{Int } y)$ следует включение $\text{Int } u^* \subset \mathbb{Z}(\text{Int } y^*)$ и наоборот.

Доказательство. Предположим, что полугруппы всех эндоморфизмов групп G и G^* изоморфны:

$$\text{End } G \cong \text{End } G^*. \quad (5)$$

Ввиду изоморфизма (5) и следствия I.12 из [1], идемпотенты x^* и y^* полугруппы $\text{End } G^*$ также ортогональны и суммируемы, причем $(x+y)^* = x^* + y^*$. Теперь утверждение следствия вытекает сразу из теоремы I. Следствие доказано.

Из теоремы 2 и следствия I вытекает:

Следствие 2. Если полугруппы всех эндоморфизмов групп G и G^* изоморфны и $u, v \in Q_G(x, y)$; $\exists mu, \exists mv \in Z(My)$, то $(u+v)^* = u^* + v^*$.

Доказание выше утверждения дает возможность перенести некоторые результаты из теории колец эндоморфизмов абелевых групп на полугруппы эндоморфизмов абелевых групп. Например, можно доказать, что из изоморфизма полугрупп всех эндоморфизмов двух периодических абелевых групп следует изоморфизм самих этих групп (для колец эндоморфизмов периодических абелевых групп аналогичный результат доказан ранее Баром и Капланским [2], стр. 265-267).

Литература

1. Пуусепи П. Идемпотенты полугрупп эндоморфизмов групп // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975. № 366, с. 76-104.
2. Фуке Л. Бесконечные абелевы группы, том 2 // М.: Мир, 1977.

Таллинский политехнический институт
Кафедра экономической математики

ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ $\mathcal{K}$ -РАДИКАЛА ПОЛИКОЛЬЦОИДОВ

Э.Реди

Рассматриваются поликольцоиды, введенные автором в [3]. Гомоморфизмы и идеалы поликольцоидов определены там же, а конгруэнции поликольцоидов и факторполикольцоиды определены в [4]. В дальнейшем предполагаем, что основной полиграф и сигнатура Ω фиксированы. Поликольцоиды обозначаем через $A, B, \dots$, а запись $A \trianglelefteq B$ означает, что поликольцоид A является левым идеалом поликольцоида B .

Пусть $\mathcal{K}$ обозначает класс поликольцоидов, замкнутый относительно гомоморфных образов. Поэтому класс $\mathcal{K}$ содержит и поликольцоид 0 , состоящий из одноэлементных Ω -алгебр. Кроме того требуется, что $0 \trianglelefteq A$ для каждого $A \in \mathcal{K}$.

Определение 1. Назовем $\mathcal{K}$ -радикалом поликольцоидов функцию f , сопоставляющую каждому поликольцоиду A некоторый его идеал $f(A)$, если удовлетворяются следующие требования:

P1. Если $\varphi: A \rightarrow B$ является эпиморфизмом, то
$$\varphi(f(A)) \subseteq f(B);$$

P2. $f(A / f(A)) = 0$;

P3. Если $A \in \mathcal{K}$, то $C \trianglelefteq A \wedge f(C) = C \implies C \subseteq f(A)$;

P4. Если $A \in \mathcal{K}$, то $f(f(A)) = f(A)$.

Поликольцоиды, удовлетворяющие условию $f(A) = A$, называются f -радикальными, а те поликольцоиды A , для которых $f(A) = 0$, называются f -полупростыми.

Если $\mathcal{K}$ есть класс всех поликольцоидов (над заданными полиграфом и сигнатурой), то $\mathcal{K}$ -радикал является радикалом в смысле Куроша [1].

Предложение 1. Если функция f , сопоставляющая каждому поликольцоиду некоторый его идеал, удовлетворяет P1 и P2, то для любого поликольцоида f образ $f(A)$ является наименьшим среди идеалов в A , фактор-поликольцоиды по которым f -полупросты.

Поскольку почти-кольца — частный вид поликольцоидов, то лемма 2.1 из [2] является частным случаем предложения 1.

Будем теперь считать, что класс $\mathcal{K}$ поликольцоидов обра-

зует категорию, в которой морфизмами являются гомоморфизмы поликольцоидов (может быть не все) и выполнены два условия:

1° для гомоморфизмов $\alpha: A \rightarrow B$, $\beta: A \rightarrow C$, удовлетворяющих условию $\text{Ker } \alpha \subseteq \text{Ker } \beta$, существует некоторый гомоморфизм $\gamma: B \rightarrow C$ такой, что $\gamma\alpha = \beta$;

2° для каждого A полную решетку образуют конгруенции

$$\{\text{Ker } \alpha \mid \alpha: A \rightarrow B \ (B \in \mathcal{K})\}.$$

Определение 2. Назовем $\mathcal{K}$ -радикалом поликольцоидов функцию φ , сопоставляющую каждому поликольцоиду A некоторую его конгруенцию $\varphi(A)$, если выполнены следующие требования: 1. Если $\varphi: A \rightarrow B$ является эпиморфизмом, то

$$\varphi(\varphi(A)) \subseteq \varphi(B);$$

2. $\varphi(A/\varphi(A)) = 0$ (т.е. является нулевой конгруенцией). Поликольцоиды A с условием $\varphi(A) = 0$ называются φ -полупростыми, а те A , для которых $\varphi(A) = 1$ (т.е. является единичной конгруенцией), называются φ -радикальными.

Предложение 2. Класс $\mathcal{P}_\varphi$ всех φ -полупростых поликольцоидов является замкнутым относительно подпрямых произведений. Всякий подпрямо замкнутый класс поликольцоидов является классом всех φ -полупростых поликольцоидов для определенной функции φ .

Обратим внимание на то, что предложение 2 является аналогом предложения I Штреккера [5] для универсальных алгебр.

Литература

1. Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. Радикалы алгебр и структурная теория // М.: Наука, 1979.
2. Каарли К. Радикалы почти-колец // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1976, Вып. 390. С. 134-171.
3. Реди Э. О симметрических поликольцоидах // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, Вып. 336. С. 62-99.
4. Реди Э. О представлении поликольцоидов // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1976, Вып. 390. С. 43-55.
5. Strecker, R. $\mathcal{M}$ -Radikale von universellen Algebren // Publ. math. Debrecen, 1979, T 26. F 3-4. S. 245-254.

Таллинский педагогический институт им. Э.Вильде
Кафедра математики

ОБ ЭКСТРЕМУМАХ ПЕРМАНЕНТЫ

А.Рябко

Перманенты являются объектом математического исследования как в линейной алгебре так и в комбинаторике. За последние 30 лет был накоплен большой материал по самым разным вопросам о перманентах. В первую очередь, это относится к оценкам сверху и снизу перманентов матриц разнообразных классов (в частности, для $(0,1)$ -матриц, для неотрицательных матриц, для дважды стохастических матриц, а также матриц из ряда подклассов названных классов).

Пусть $X = (x_{ij})$ - $n \times n$ -матрица с вещественными элементами. Перманент матрицы X определяется по формуле

$$\text{per } X = \sum_{\sigma \in S_n} x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \dots x_{n\sigma(n)},$$

где сумма берется по всем перестановкам символов $1, 2, \dots, n$. Если указанную сумму брать только по всем четным перестановкам, получим четный перманент

$$\text{per}^+ X = \sum_{\sigma \in S_n^+} x_{1\sigma(1)} x_{2\sigma(2)} \dots x_{n\sigma(n)},$$

если же суммировать по всем нечетным перестановкам, получим нечетный перманент. Из этих определений следует, что имеют место формулы

$$\text{per } X = \text{per}^+ X + \text{per}^- X \quad \text{и} \quad \det X = \text{per}^+ X - \text{per}^- X,$$

Доказаны следующие свойства четного перманента.

Свойство 1. Если P и G - матрицы перестановки с одинаковой четностью, то $\text{per}^+ X = \text{per}^+ P X G$.

Пусть $Q_{2k,n}$ множество всех возрастающих последовательностей натуральных чисел: $Q_{2k,n} = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) \mid 1 \leq \omega_1 < \dots < \omega_k \leq n\}$.

Свойство 2. Если $\beta \in Q_{2k,n}$, то

$$\text{per}^+ X = \sum_{\substack{\alpha \in Q_{2k,n} \\ \alpha + \beta = 2\alpha}} (\text{per}^+ X[\alpha|\beta] \cdot \text{per}^+ X[\alpha|\beta] + \text{per}^- X[\alpha|\beta] \cdot \text{per}^- X[\alpha|\beta]) + \sum_{\substack{\alpha \in Q_{2k,n} \\ \alpha + \beta = 2\alpha + 1}} (\text{per}^+ X[\alpha|\beta] \cdot \text{per}^- X[\alpha|\beta] + \text{per}^- X[\alpha|\beta] \cdot \text{per}^+ X[\alpha|\beta])$$

где $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$, $\beta = \beta_1 + \dots + \beta_k$, а k - любое натуральное число.

Если X и Y $n \times n$ матрицы, то для вычисления четного перманента матрицы $X + Y$ имеем следующую формулу.

Свойство 3. Верна формула

$$\begin{aligned} \text{per}^+(X+Y) = & \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{\alpha, \beta \in Q_{2i, n} \\ \alpha + \beta = 2k}} (\text{per}^+ X(\alpha/\beta) \text{per}^+ Y[\alpha/\beta] + \text{per}^+ X(\alpha/\beta) \text{per}^+ Y[\alpha/\beta]) \\ & + \sum_{\substack{\alpha, \beta \in Q_{2i, n} \\ \alpha + \beta = 2k+1}} (\text{per}^+ X(\alpha/\beta) \text{per}^+ Y[\alpha/\beta] + \text{per}^+ X(\alpha/\beta) \text{per}^+ Y[\alpha/\beta]). \end{aligned}$$

Матрица с неотрицательными вещественными элементами называется дважды стохастической, если $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 = \sum_{i=1}^n x_{ij}$ для всех $i, j \in n$. По известной теореме Г. Биркгофа ([1], стр. 47) каждая дважды стохастическая матрица является выпуклой комбинацией матриц перестановок. Матрица называется чётно дважды стохастической, если она представима в виде выпуклой комбинации чётных матриц перестановок. Множество всех таких матриц обозначим Ω_{A_n} . Матрицу $A \in \Omega_{A_n}$ назовем минимизирующей, если $\text{per}^+ A = \min\{\text{per}^+ X \mid X \in \Omega_{A_n}\}$. Поиск минимизирующей матрицы можно начинать при $n=3$, ибо если $n=1$ или $n=2$, то единственной чётной дважды стохастической матрицей будет единичная матрица. Используя ниже следующую теорему 2, показывается, что в случае $n=3$ имеем $A = J_3$. Здесь J_3 — 3×3 матрица, все элементы которой равны $1/3$.

Доказаны некоторые теоремы о минимизирующей матрице в классе чётно бистохастических матриц.

Теорема 1. Минимизирующая чётно бистохастическая матрица вполне неразложима.

Теорема 2. Если в чётно бистохастической минимизирующей матрице имеем $a_{ij} > 0$, то

в случае $i+j=2k$ имеет место $\text{per}^+ A(i/j) = \text{per}^+ A$, а
в случае $i+j=2k+1$ верно $\text{per}^- A(i/j) = \text{per}^+ A$.

Литература

1. Минк Х. Перманенты // М.: Мир, 1982.
2. Егорьев Г.П. Доказательство гипотезы ван дер Вардена для перманентов // Сиб. матем. ж., 1981, № 6, 65-71.

Тартуский государственный университет
Кафедра алгебры и геометрии

О РАЗЛОЖЕНИИ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОЛУПРОСТЫМИ ГРУППАМИ

А. Фляйшер

Изучаются односвязные однородные пространства G/H с полупростыми группами Ли G и H . На всяком таком пространстве естественно возникает редуктивная структура ([3]), т.е. для соответствующих алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ имеет место прямое разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, для которого $(\text{Ad } H)m \subset m$. Следуя [4], фиксированное редуктивное оснащение $\mathfrak{m}$ можно превратить в неассоциативную антикоммутативную алгебру, полагая для $x, y \in m$ произведение $xy = [x, y]_m$, где $[x, y]_m$ — проекция $[x, y]$ на подпространство m .

Известно ([1]), что на полупростой $\mathfrak{g}$ можно определить невырожденную форму Киллинга K , ограничение которой на $\mathfrak{h}$, в силу полупростоты $\mathfrak{h}$, также невырождено. Введем в рассмотрение отображения

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(u) : m &\rightarrow m, & u &\mapsto [u, y], \\ L(x) : m &\rightarrow m, & y &\mapsto xy,\end{aligned}$$

для $x, y \in m, u \in \mathfrak{h}$. Взяв в качестве m ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ относительно формы Киллинга, получаем редуктивное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + m$ ([2]), причем форма $B = K_m$ (ограничение K на m) невырождена на m и отображения $\mathfrak{D}(u)$ и $L(x)$ являются B -кососимметрическими. Из тождеств алгебры Ли $\mathfrak{g}$ следует, что подпространство

$$m_0 = \{x \in m \mid \mathfrak{D}(u)x = 0 \quad \forall u \in \mathfrak{h}\}$$

является подалгеброй Ли алгебры m и потому $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} + m_0$ будет подалгеброй Ли в $\mathfrak{g}$. Невырожденность формы B на m_0 позволяет осуществить разложение $m = m_0 + n$, где n ортогонально m_0 относительно B . Дальнейшее разложение связано с подпространством

$$m_1 = \{y \in n \mid L(V)y = 0 \quad \forall V \in m_0\},$$

которое, как нетрудно показать, будет не только подалгеброй в m , но и $\text{ad } \mathfrak{h}$ -инвариантным подпространством с невырожденным ограничением B . Его ортогональное дополнение m_2 инвариантно относительно $L(m_1)$ и $\text{ad}(\mathfrak{h} + m_0 + m_1)$, что дает возможность сделать следующее заключение.

Теорема I. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ — ее по-

дупростая подалгебра. Тогда

1) пара $(g, \hbar)$ является редуктивной с разложением $g = \hbar + m$, где m — ортогональное дополнение к $\hbar$ относительно формы Киллинга K алгебры g ;

2) алгебра m разложима в прямую сумму $\text{ad } \hbar$ -инвариантных подпространств $m = m_0 + m_1 + m_2$, удовлетворяющих соотношениям

$$m_0 m_0 \subset m_0, \quad m_0 m_1 = 0, \quad m_0 m_2 \subset m_2,$$

$$m_1 m_1 \subset m_1, \quad m_1 m_2 \subset m_2.$$

3) подпространства $\hbar_0 = \hbar + m_0$ и $\hbar_1 = \hbar + m_0 + m_1$ являются подалгебрами Ли в g и пары $(g, \hbar_0)$ и $(g, \hbar_1)$ редуктивны.

Если (G, H) — глобализация пары $(g, \hbar)$, где G, H — связанные группы Ли с соответствующими алгебрами g и $\hbar$, то имеет место разложение

$$G/H = G/H_0 \times G/H_1,$$

сомножители которого, по теореме I, также редуктивны. Заметим, что в силу коммутационных соотношений теоремы I, это разложение отлично от традиционного разложения де Рама римановых естественно редуктивных однородных пространств ($[I]$).

В случае простоты g и полупростоты $\hbar$ указанное разложение становится невозможным ввиду следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть g — простая алгебра Ли и $\hbar$ — ее полупростая подалгебра. Тогда пара $(g, \hbar)$ редуктивна, причем для фиксированного редуктивного оснащения m имеем либо $m^2 = 0$ либо алгебра m проста.

Литература

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.
2. Фляйнер А. Об одном классе редуктивных пространств // Тр. Геом. семинара. 1974. Т.6. С. 267-276.
3. Sagle A. On anticommutative algebras and homogeneous spaces // J. Math. and Mech., 1967. N16. P. 1381-1393.
4. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. Math. J., 1954. V.76. N. 33-65.

Тартуский государственный университет
Лаборатория прикладной математики

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ СПЛЕТЕНИЙ МОНОИДОВ С КАТЕГОРИЯМИ

В. Фляйшер

Конструкция сплетения моноидов с категориями была введена автором в [1] с целью рассмотрения с единой точки зрения как обычного сплетения моноидов [4], так и полугрупп эндоморфизмов полигонов, разложимых в копроизведение подполигонов [2].

Пусть $\mathcal{K}$ — произвольная малая категория с множеством объектов $\mathcal{X} = \text{Ob } \mathcal{K}$ и множеством морфизмов $\mathcal{M} = \text{Mor } \mathcal{K}$. Для произвольных $x, y \in \mathcal{X}$ через $\mathcal{M}(x, y)$ будем обозначать множество морфизмов из объекта x в объект y . В дальнейшем, обозначая произведение морфизмов $\alpha \beta$ считаем, что вначале применяется морфизм β . Для произвольного $x \in \mathcal{X}$ положим $\mathcal{M}(x) = \bigcup_{y \in \mathcal{X}} \mathcal{M}(x, y)$. Пусть S — произвольный моноид и $x = \text{Ob } \mathcal{K}$ есть левый S -полигон. Через $F(x, \mathcal{M})$ будем обозначать совокупность всех таких отображений $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$, что для любого $x \in \mathcal{X}$ $f(x) \in \mathcal{M}(x)$. В множестве $S \times F(x, \mathcal{M})$ рассмотрим подмножество

$$\mathcal{O} = \{ (s, f) \mid s \in S, f \in F(x, \mathcal{M}), \forall x \in \mathcal{X} f(x) \in \mathcal{M}(x, sx) \}.$$

На множестве $\mathcal{O}$ определим умножение следующим образом: для любых $(s, f), (t, g) \in \mathcal{O}$

$$(s, f)(t, g) = (st, f_t g)$$

где $(f_t g)(x) = f(tx) \cdot g(x)$ для любого $x \in \mathcal{X}$. Множество $\mathcal{O}$ относительно введенной операции умножения является полугруппой, называемой сплетением моноида S с категорией $\mathcal{K}$ и обозначаемой $(S \ltimes \mathcal{K})$.

В работе [1] рассматривались условия изоморфизма двух сплетений моноидов с категориями. В частности, там была доказана (теорема 2) теорема об определяемости категории в классе сплетений категорий с моноидами, т.е. изоморфизм сплетений $(S \ltimes \mathcal{K}) \cong (T \ltimes \mathcal{L})$ влечет изоморфизм категорий $\mathcal{K} \cong \mathcal{L}$. При этом предполагалось, что множества объектов рассматриваемых категорий, как полигоны, удовлетворяют определенным условиям допустимости. Категория $\mathcal{K}$ называется до-

пустимой для моноида S , если $\mathfrak{X} = \text{Ob } \mathfrak{X}$ является допустимым S -полигоном [4], т.е.

1) $|\mathfrak{X}| \geq 2$;

2) если $\lambda x = x$ для любого $x \in \mathfrak{X}$, то $\lambda = 1$;

3) для каждого $x \in \mathfrak{X}$ существует единственный элемент $\lambda \in S$ такой, что $\lambda y = x$ для любого $y \in \mathfrak{X}$;

4) для любых $x, y, a, b \in \mathfrak{X}$ ($x \neq y$) найдется $\gamma \in S$ такой, что $\gamma x = a$, $\gamma y = b$.

В настоящем сообщении мы рассматриваем изоморфизм сплетений моноидов с категориями, значительно ослабляя требование допустимости исходных категорий. Именно, в дальнейшем мы будем предполагать, что множества объектов рассматриваемых категорий, как полигоны над соответствующими моноидами, удовлетворяют лишь условию 3) из определения допустимости. Ясно, что в этом случае теорема об определяемости категорий уже неверна, о чем свидетельствует аналогичная ситуация для сплетений моноидов [3].

Для того, чтобы сформулировать полученный результат, опишем конструкцию сплетения двух малых категорий, одна из которых является категорией множеств. Эта конструкция является частным случаем сплетения двух произвольных малых категорий, введенного Ч.Уэлшем в работе [5].

Пусть $\mathcal{E}$ — некоторая малая категория множеств и $\mathfrak{X}$ — произвольная малая категория. Пусть для каждого $A \in \text{Ob } \mathcal{E}$ задано отображение $\varphi_A: A \rightarrow \text{Ob } \mathfrak{X}$. Определим новую категорию называемую сплетением категорий $\mathcal{E}$ и $\mathfrak{X}$ и обозначаемую нами $(\mathcal{E} \ltimes \mathfrak{X})$. Объектами категории $(\mathcal{E} \ltimes \mathfrak{X})$ являются элементы вида (A, φ_A) , где $A \in \text{Ob } \mathcal{E}$, а морфизмами из $\mathcal{M}((A, \varphi_A), (B, \varphi_B))$ элементы вида (α, f) , где $\alpha \in \mathcal{M}(A, B)$, а $f: A \rightarrow \text{Mor } \mathfrak{X}$ такое отображение, что $f(a) \in \mathcal{M}(\varphi_A(a), \varphi_B(\alpha(a)))$ для любого $a \in A$. Композиция морфизмов категории $\mathcal{E} \ltimes \mathfrak{X}$ определяется следующим образом: для любых $(\alpha, f) \in \mathcal{M}((A, \varphi_A), (B, \varphi_B))$, $(\beta, g) \in \mathcal{M}((B, \varphi_B), (C, \varphi_C))$

$$(\beta, g)(\alpha, f) = (\beta\alpha, g_\alpha f)$$

где $(g_\alpha f)(a) = g(\alpha a) f(a)$ для любого $a \in A$

Теорема 1. Для произвольных моноидов S и T и малых

категорий $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ из изоморфизма сплетений

$$(\mathcal{S} \wr \mathcal{K}) \cong (\mathcal{T} \wr \mathcal{L})$$

вытекает существование малой категории множеств $\mathcal{E}$ такой, что, с точностью до симметрии, категории $\mathcal{K}$ и $(\mathcal{E} \wr \mathcal{L})$ изоморфны, причем $\varphi(A) \cap \varphi(B) = \emptyset$, $\bigcup_{A \in \text{Ob } \mathcal{E}} \varphi(A) = \text{Ob } \mathcal{L}$, φ_A — инъективно для любых $A, B \in \text{Ob } \mathcal{E}$.

Литература

1. Фляйшер В.Г. О сплетениях моноидов с категориями// Изв. АН ЭССР, 1986. Т. 35. № 3. С. 237–243.
2. Fleischer V., Knauer U. Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories//Lecture Notes. В печати.
3. Fleischer V. Isomorphism of wreath products, II// Semi-group Forum, 1988, V. 37. № 2. P. 215–224.
4. Skornjakov L.A. On the wreath product of monoids// Universal Algebra and Applications, Banach Center. 1982, Publ. 9. P. 181–185.
5. Wells C. A Krohn-Rhodes Theorem for Categories// I.Algebra. 1980. V. 64. N 1. P. 37–45.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

LOOGIKA PROGRAMMI MINIMAALNE SEMANTIKA

J. Henno

Mõned kasutamistingimused (näit. töö reaalarajas [4]) esitavad loogilise tuletamise süsteemidele erinõuded:

- programmist P valemi B tuletatavuse $P \vdash B$ kindlakstegemine peab toimuma võimalikult kiiresti;

- süsteem peab oskama sooritada ka metaarutlusi: "mis järeldub valemist B ?", "millest järeldub B ?", s. t. suutma leida minimaalsed valemid A, C sellised, et $P \vdash B \rightarrow A$, $P \vdash C \rightarrow B$ (ja jälle võimalikult kiiresti).

On selge, et sellistes süsteemides ei rahulda tõestuse (tuletuskäigu) otsimise algoritmid "teoreemist aksioomide suunas" (tagurpidi laine), mida kasutatakse näiteks Prologis. Et ülaltoodud küsimustele võimalikult kiiresti vastata, peab süsteem eelnevalt välja arvutama mingi kõigi tuletatavate valemite hulga karakteristik, mis võimaldab nendele küsimustele kiiresti vastata (eeltöötlus on sellistes süsteemides tavaliselt lubatud). Selliseks kõigi tuletatavate lausete hulga (st. programmi poolt määratud teooria) minimaalseks karakteristikuks võib olla programmi minimaalne semantika.

Olgu programm P esimest järku predikaatloogika kvantifitseeritud lausete (literaalide disjunktsioonide) lõplik hulk. Programmi P minimaalne deklaratiivne semantika on selline minimaalne lausete hulk $\text{sem}(P) = \{B, P \vdash B\}$, et

- 1) ükski lause $B \in \text{sem}(P)$ ei ole tautoloogia;
- 2) iga $B, P \vdash B$ jaoks leidub $A \in \text{sem}(P)$ ja selline substitutsioon θ et $B\theta \geq A$.

Kui programm P koosneb ainult lausearvutuse lausetest, on $\text{sem}(P)$ programmi lausete konjunktsiooniga määratud funktsiooni lühendatud (konjunktiivne) normaalkuju.

Lihtne on näha, et $\text{sem}(P)$ on programmi P täpne karakteristik, s.t. ta on programmiga üheselt määratud ja programmide P_1, P_2 jaoks

$$(\exists B) (P_1 \vdash B \ \& \ P_2 \nvdash B) \Leftrightarrow \text{sem}(P_1) \neq \text{sem}(P_2).$$

Peale selle

$$1. \text{sem}(\text{sem}(P)) = \text{sem}(P);$$

2. $P_1 \leq P_2$ (s.t. $(\forall B)(P_1 \vdash B \Rightarrow P_2 \vdash B)$) siis ja ainult siis, kui $\text{sem}(P_1) \subseteq \text{sem}(P_2)$.

Teoreem. Kui programm P koosneb lausearvutuse lausetest, on hulk $\text{sem}(P)$ lõplik ja selis võib arvutada ajaga $O(n^3)$.

Kiire algoritmi hulga $\text{sem}(P)$ arvutamiseks lausearvutuse juhul on realiseeritud süsteemis INTELLA [4] (analoogilised algoritmid on esitatud töödes [1], [3]). Algoritmi põhineb hulkade $P_0, P_1, \dots, P_n$ (n - muutujate arv) järjestatusele arvutamisel, kus

- P_0 saadakse hulgast P tautoloogiate ärajätmisega;
- $P(i+1)$ saadakse hulgast P_i selliste muutuja x_i abil sooritatud resolutsioonide tulemuste lisamisel, mis ei ole tautoloogiad (seda on võimalik kontrollida enne resolutsiooni sooritamist) koos saadud hulga minimeerimisega (s.t. eemaldatakse kõik laused B , mille jaoks leidub juba tuletatud lause A nii, et $B \Rightarrow A$).

Kirjandus

1. Itai A., Makowsky A. Unification as a complexity measure for logic programming // The Journal of logic programming, 1987, v. 4. p. 105-117.
2. Lloyd J.W. Foundations of Logic Programming // Springer 1984.
3. Диковский А.Я. Решение в линейное время алгоритмических проблем, связанных с синтезом ациклических программ // Программирование, 1985, № 3, с. 38-49.
4. Рюне Р., Хенно Я. Экспертная система с быстрой реакцией. Автоматизация производства систем программирования // Таллин 1986, с. 129-130.

Tallinna Polütehniline Instituut
Informatsioonitootluse kateeder

О РАСШИРЕНИИ ЗАМКНУТЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ ЦЕНТРА ЛОКАЛЬНО ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ АЛГЕБР

М. Абель

1. Пусть A — топологическая алгебра (т.е. линейное топологическое пространство над K или над C , которое является ассоциативной алгеброй с раздельно непрерывным умножением элементов), $m_c(A)$ ($m_r(A)$ и $m(A)$) — множество всех замкнутых максимальных регулярных (соответственно правых и двусторонних) идеалов алгебры A и $\text{rad } A = \bigcap \{M : M \in m(A)\}$.

Топологическая алгебра A называется

а) локально псевдовыпуклой алгеброй, если ее топология определена системой $\{p_\alpha : \alpha \in \mathcal{O}\}$ непрерывных K_α -однородных полуномов при $0 < K_\alpha \leq 1$ для всех $\alpha \in \mathcal{O}$ (например, локально выпуклые алгебры, локально ограниченные алгебры и многие другие (см. [5], с. 157)). В частности, когда $K_\alpha = \rho$ для каждого $\alpha \in \mathcal{O}$, то A называется локально ρ -псевдовыпуклой алгеброй, а когда $p_\alpha(aa') \leq p_\alpha(a)p_\alpha(a')$ для каждого $\alpha \in \mathcal{O}$ и $a, a' \in A$, то — локально m -псевдовыпуклой алгеброй;

б) поглощено псевдовыпуклой алгеброй, если она локально псевдовыпукла и для каждого $\alpha \in \mathcal{O}$ и $a \in A$ найдутся такие положительные числа $M(\alpha, a)$ и $N(\alpha, a)$, что $p_\alpha(aa') \leq M(\alpha, a)p_\alpha(a')$ и $p_\alpha(a'a) \leq N(\alpha, a)p_\alpha(a')$ для всех $\alpha \in \mathcal{O}$ (например, поглощено выпуклые алгебры (см. [5], с. 141), локально m -выпуклые алгебры, локально m -псевдовыпуклые (в частности локально ограниченные) алгебры и другие);

в) алгеброй Фреше, если она полна и метризуема;

г) алгеброй с непрерывным обратным (квазиобратным), если множество обратимых (соответственно, квазиобратных) элементов алгебры A открыто и обращение (соответственно, квазиобращение) элементов непрерывно в топологии алгебры A ;

д) нормальной алгеброй, если каждый замкнутый регулярный двусторонний идеал алгебры A содержится в некотором замкнутом максимальном регулярном двустороннем идеале этой алгебры (например, $\mathcal{Q}$ -алгебры, коммутативные отделимые локально m -(ρ -псевдовыпуклые) алгебры (в частности коммутативные ρ -банаховы алгебры и коммутативные отделимые локально m -выпуклые алгебры (см. [4], с. 231-232));

е) вполне регулярные алгебры, если в ядерно-оболочной топологии $m(A)$ является отделимым пространством и каждый идеал $M \in m(A)$ имеет окрестность, ядро которой есть регулярный идеал алгебры A ;

ё) топологически сильно полупростой алгеброй, если $\text{rad } A = \{ \theta_A \}$, где θ_A - нулевой элемент алгебры A .

Элемент a топологической $\mathbb{C}$ -алгебры A называется ограниченным, если найдется такое число $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, что множество $\{(a/\lambda)^n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено в алгебре A .

В книге [7], с. 85, приведены условия для того, чтобы каждый максимальный регулярный идеал центра банаховой $\mathbb{C}$ -алгебры A содержался в некотором максимальном (следовательно и замкнутом) идеале алгебры A . Целью данной заметки является описание тех классов локально псевдовыпуклых алгебр, в которых справедлив аналогичный результат.

2. Используя теорему 3.3 из статьи [1] имеем

Теорема I. Пусть A - топологическая $\mathbb{C}$ -алгебра с единицей и P - ее замкнутый примитивный идеал. Если выполнено одно из следующих условий:

(а) A является локально псевдовыпуклой алгеброй, все элементы которой ограничены,

(б) A является локально псевдовыпуклой алгеброй с непрерывным обратным,

(в) A является поглотенно псевдовыпуклой алгеброй или

(г) A является локально псевдовыпуклой алгеброй Фреше, то центр факторалгебры A/P топологически изоморфен полю $\mathbb{C}$.

Следствие. Пусть A - топологическая $\mathbb{C}$ -алгебра с единицей, $\bar{Z}$ - подалгебра центра алгебры A , содержащая единицу алгебры A , и пусть $M \in m_c(A) \cup m_z(A) \cup m(A)$. Если выполнено одно из условий (а) - (г), то $M \cap \bar{Z} \in m(\bar{Z})$.

В случае банаховых алгебр теорема I доказана в [6], с. 1021, и следствие доказано в [3], с. 195-196 (см. также [2], с. 467).

По следствию отображение $M \rightarrow M \cap \bar{Z}$ отображает $m(A)$ в $m(\bar{Z})$. Следующая теорема характеризует те классы локально псевдовыпуклых алгебр, для которых рассматриваемое отображение является сюръективным.

Теорема 2. Пусть $\hat{A}$ – топологически сильно полупростая нормальная отделимая $\mathbb{C}$ -алгебра и $\hat{Z}$ – вполне регулярная под-алгебра центра алгебры $\hat{A}$. Если выполнено одно из следующих условий:

(а') $\hat{A}$ является локально псевдовыпуклой алгеброй с единицей, все элементы которой ограничены, и $\hat{Z}$ содержит единицу алгебры $\hat{A}$,

(б') $\hat{A}$ является локально псевдовыпуклой алгеброй с непрерывным квазиобратным,

(в) или (г), то каждый идеал $M \in m(\hat{Z})$ содержится в таком идеале $\mathcal{M} \in m(\hat{A})$, что $M = \mathcal{M} \cap \hat{Z}$.

Литература

1. Абель М., Кохк А. Локально псевдовыпуклые алгебры Гельфанда-Мазура // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем. 1988 (в печати).
2. Allan G.R. On one-sided inverses in Banach algebras of holomorphic vector-valued functions // J. London Math. Soc. 1967. V. 42. P. 463-470.
3. Allan G.R. Ideals of vector-valued functions // Proc. London Math. Soc. 1968. V. 18, N. 2. P. 193-216.
4. Bessenstein E., Narici L., Suffel Ch. Topological algebras // North-Holland Math. Studies V. 24. Amsterdam: North-Holland Publ. Company, 1977.
5. Khaleelulla S.M. Counterexamples in Topological Vector Spaces // Lect. Notes Math. V. 936. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1982.
6. Lebow A. Maximal ideals in tensor products of Banach algebras // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V. 74. P. 1020-1022.
7. Rickart Ch. E. General Theory of Banach Algebras. New York: Van Nostrand, 1960.

Тартуский государственный университет
Лаборатория прикладной математики

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Э.И. Богачев

Пусть $\langle X, \mu \rangle$ — сепарабельное банахово пространство, μ — мера на X , бесконечно дифференцируемая в смысле С.В. Фомина по подпространству D , плотному в X , причем сама мера μ и все ее частные производные по направлениям из D обладают моментами всех порядков. Полиномом на X будем называть функцию P вида $P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x_1, \dots, x_k)$, где P_k — непрерывные k -линейные функции.

Теорема 1. Пусть для всякого n пространство X представимо в виде прямой суммы замкнутых подпространств $X_1, \dots, X_n$, причем для каждого $k \leq n$ множество $D \cap X_k$ плотно в X_k , $P(x) = P(\pi_1 x) + \dots + P(\pi_n x)$, где π_k — естественная проекция на X_k . P не постоянен на X_k . Тогда функция распределения случайной величины P на (X, μ) бесконечно дифференцируема, а плотность распределения этой случайной величины принадлежит пространству $S(R^1)$.

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 1, то функция $t \mapsto \int \exp(it P(x)) \mu(dx)$ принадлежит пространству $S(R^1)$. В частности, она убывает на бесконечности быстрее любой степени.

Следствие 2. Заключение теоремы 1 справедливо, если $X = C[0, 1]$, $P(x) = \int_0^1 q(x(t)) dt$, где q — многочлен на R^1 , отличный от константы, μ — гауссовская мера на $C[0, 1]$, причем для каждого n в $C[0, 1]$ существуют n функций с непересекающимися носителями, лежащих в множестве допустимых сдвигов меры μ , то есть в образе корреляционного оператора меры μ . Указанному условию удовлетворяют меры, соответствующие процессам дробного броуновского движения, в частности, мера Бинера.

Теорема 2. Пусть P — однородный полином, обращающийся в нуль лишь в нуле. Тогда справедливо заключение теоремы 1.

Будем говорить, что множество нулей Z полиномиального отображения из X в банахово пространство Y имеет бесконечную коразмерность, если для каждого n найдется такое n -мерное линейное подпространство $L_n \subset X$, что множество $Z \cap (L_n + x)$ конечно или пусто при всех $x \in X$.

Теорема 3. Пусть мера m имеет компактный носитель K , множество нулей производной полинома P имеет бесконечную коразмерность, причем подпространства L_n могут быть выбраны в D , а критические точки P на $K \cap (L_n + x)$ невырождены. Тогда справедливо заключение теоремы 1 и следствия 1.

Московский государственный университет
Кафедра теории функций и функционального анализа

WCG-ПРОСТРАНСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

И. Боос, Т. Лейгер

1. Локально выпуклое пространство называется WCG-пространством, если оно содержит абсолютно выпуклое слабо компактное подмножество, линейная оболочка которого всюду плотна. WCG-пространствами являются, например, сепарабельные пространства Фреше, а также рефлексивные банаховые пространства. К сожалению, WCG-свойство не наследуется замкнутыми подпространствами. Этим обстоятельством обусловлено определение в [4] следующего понятия: локально выпуклое пространство, топологически изоморфное подпространству некоторого WCG-пространства, называется $subWCG$ -пространством. Оказывается, что многие утверждения о сепарабельных пространствах сохраняют силу и в случае $subWCG$ -пространств. Например, следующая теорема о замкнутом графике обобщает теорему, доказанную Кальтоном [5] в случае сепарабельного B_r -полного локально выпуклого пространства F .

Теорема 1. Пусть E — пространство Макки. Сопряженное пространство E' является $\sigma(E', E)$ -секвенциально полным тогда и только тогда, когда каждый замкнутый линейный оператор $T: E \rightarrow F$ непрерывен при произвольном B_r -полном $subWCG$ -пространстве F .

В случае банахова WCG-пространства F это утверждение доказал Марквина [6].

2. Пусть X — пространство Фреше, топология τ_X которого задана последовательностью полунорм $p_m, m \in \mathbb{N}$. Через $\omega(X)$ обозначим множество всех последовательностей $x = (x_k)$ с $x_k \in X, k \in \mathbb{N}$, а через $\varphi(X)$ подмножество всех элементов $x \in \omega(X)$ с $x_k \neq 0$ только для конечного числа индексов $k \in \mathbb{N}$. Пространство Фреше $E := E(X)$, где $E \subset \omega(X)$, называется FK-пространством, если операторы $\pi_k: E \rightarrow X$ с $\pi_k(x) := x_k, k \in \mathbb{N}$ непрерывны. В частности, в векторном пространстве $s(X)$ всех сходящихся в X последовательностей полунормы $x \mapsto \sup_k p_m(x_k), m \in \mathbb{N}$ определяют FK-топологию.

Пусть, далее, Y — пространство Фреше, а $A = (A_{nk})$ —

матрица непрерывных линейных операторов из X в Y , т.е. $A_{nk} \in L(X, Y)$, $n, k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим преобразование $y = A(x)$ с

$$y_n := \sum_k A_{nk}(x_k), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (I)$$

Если для каждого $x \in E(X)$ $A(x)$ существует и принадлежит $F(Y)$, где E и F — некоторые FK -пространства, то преобразованием (I) определяется непрерывный линейный оператор $A: E \rightarrow F$.

Поле суммируемости

$$C_A := C_A(X) := \{x \in \omega(X) : \exists \lim_n y_n\}$$

матрицы A является FK -пространством (II). Отметим следующее важное для нас свойство поля суммируемости.

Теорема 2. Если X — $sub\ WCG$ -пространство Фреше, а Y — замкнутое подпространство некоторого WCG -пространства Фреше, то C_A является $sub\ WCG$ -пространством Фреше.

Для FK -пространства E с $E \supset \varphi(X)$ обозначим через W_E подмножество таких элементов $x \in E$, при которых

$$(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \rightarrow x \quad (\delta(E, E'), n \rightarrow \infty).$$

Вместо W_{C_A} будем писать W_A .

Векторное пространство $Z := Z(X)$, где $Z \subset \omega(X)$, будем называть солидным, если $(\varepsilon_k x_k) \in Z$ для всех $x \in Z$ и ограниченных числовых последовательностей (ε_k) .

Теорема 3. Пусть E — FK -пространство, а Z — солидное пространство последовательностей, содержащие $\varphi(X)$. Если $C_A(X) \supset \varphi(X)$, то

$$G \subset C_A \Rightarrow G \subset W_A, \quad (2)$$

где $G := G(X) := Z \cap W_E$.

В случае $X=Y=\mathbb{K}$ теорема 3 остается верной, если в ней заменить C_A произвольным сепарабельным FK -пространством (см. [3]). Ниже показывается (см. теорема 5), что если X и Y те же, что и в теореме 2, то в теореме 3 C_A можно заменить произвольным $sub\ WCG$ - FK -пространством $F := F(X)$.

Отметим еще, что теорема 3 справедлива при более широком классе пространств Z (ср. [3]).

3. Пусть E — некоторое FK -пространство с $E \supset \varphi(X)$.
Обозначим

$$E^F := E^F(X') := \{ \Phi := (\varphi_k) \in \omega(X') : \sum_k \varphi_k(x_k) \text{ сходитс} \}$$

сходится для всех $x \in E \}$.

Тогда E и E^F составляют дуальную пару с билинейной формой

$$\langle \Phi, x \rangle := \sum_k \varphi_k(x_k)$$

При помощи теоремы 1 доказывается

Теорема 4. Следующие утверждения равносильны:

- 1) E^F является $\mathcal{G}(E^F, E)$ -секвенциально полным;
- 2) если $F := F(Y)$ — некоторое $sub WCG$ -пространство, а $A: E \rightarrow F$ — оператор, определенный преобразованием (1), замкнутый в топологиях $\tau(E, E^F)$ и τ_F , то A непрерывен в этих топологиях;
- 3) если $sub WCG$ - FK -пространство $F := F(X)$ включает E , то вложение непрерывно в топологиях $\tau(E, E^F)$ и τ_F ;
- 4) если $sub WCG$ - FK -пространство $F := F(X)$ включает E , то $E \subset W_F$.

В случае $X=Y=\mathbb{K}$ и сепарабельного FK -пространства F эта теорема доказана Беннетом и Кальтоном [2].

Из теорем 2, 3 и 4 вытекает наша основная

Теорема 5. Пусть X — $sub WCG$ -пространство Фреше, а $E, \bar{E}$ и G те же, что и в теореме 3. Тогда верны следующие равносильные утверждения.

- 1) G^F является $\mathcal{G}(G^F, G)$ -секвенциально полным;
- 2) для каждого $sub WCG$ - FK -пространства $F := F(X)$ верна импликация $G \subset F \Rightarrow G \subset W_F$;
- 3) если Y — замкнутое подпространство некоторого WCG -пространства Фреше и $A_{nk} \in L(X, Y)$, $n, k \in \mathbb{N}$, то верна импликация (2);
- 4) для каждой матрицы $A = (\varphi_{nk})$ с $\varphi_{nk} \in X'$, $n, k \in \mathbb{N}$ верна импликация (2).

Литература

1. Baric L.W. The eni function in generalized summability// Studia Math. 1971, V.39. P. 155-180.
2. Bennett G., Kalton N.J. Inclusion theorems for K-spaces // Can. J. Math. 1973, V. 25. P. 511-524.
3. Boos J., Leiger T., General theorems of Mazur-Orlicz-type, to appear in Studia Math.
4. Hunter R.J., Lloyd J. Weakly compactly generated locally convex spaces. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. // 1977, V. 82. P. 35-98.
5. Kalton N.J. Some form of the closed graph theorem//Proc. Cambridge Phil. Soc. 1971, V. 70. P. 401-408.
6. Marquina A. A note on the closed graph theorem// Arch. Math. (Basel) 1977, V. 28. S. 82-85.

Fernuniversität-Gesamthochschule (Hagen, BRD)
Fachbereich Mathematik und Informatik

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

ВЛОЖЕНИЕ РЕШЕТОЧНЫХ КОНУСОВ В УПОРЯДОЧЕННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

А.И. Векслер

Под конусом понимается коммутативная полугруппа X (с сокращением) с нулем 0 , в которой определено умножение на неотрицательные числа, причем 1) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$; 2) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$; 3) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$; 4) $0 \cdot x = 0$; 5) $1 \cdot x = x$. Конус называется решеточным, если он одновременно является решеткой с наименьшим элементом 0 , причем 6) $x > y \Rightarrow x+a > y+a$ и 7) $x > y, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x > \lambda y$. Заметим, что в отличие, например, от [1] и [2] мы не требуем от решеточного конуса свойства трансляции супремума: $a + (x \vee y) = (a+x) \vee (a+y)$.

Пусть $\tilde{X}$ — линейная оболочка X , т.е. совокупность всех пар (x, y) с естественными линейными операциями и отождествлением, причем $(x, y) \geq 0$ означает $x \geq y$. Тогда $\tilde{X}$ является упорядоченным векторным пространством (УВП), в которое X естественным образом вкладывается в виде воспроизводящего конуса, причем $X \subset \tilde{X}_+$.

Приводятся примеры, когда $\tilde{X}$ не является векторной решеткой (ВР).

Теорема I. Для того, чтобы $\tilde{X}$ была ВР, в которую X вкладывается в виде подрешетки, необходимо и достаточно, чтобы в X выполнялось свойство трансляции супремума и соответствующее свойство трансляции инфимума (кстати, эти свойства никак не связаны друг с другом).

Близкий результат имеется в [2]. В общем случае оказывается, что $\tilde{X}$ может быть ВР, хотя X и не вкладывается в $\tilde{X}$ в качестве подрешетки.

Будем говорить, что в X выполнено свойство финальной трансляции супремума (СФТС), если

$$\forall x \forall y \exists b \forall a (a + (b+x) \vee (b+y) = (a+b+x) \vee (a+b+y)).$$

Аналогично определяется свойство финальной трансляции инфимума (СФИ).

Теорема 2. Пусть в X выполнено СФТС или СФИ. Тогда $\tilde{X}$ — ВР.

Следствие 1. Пусть X - УВП, одновременно являющееся нормированным пространством с нормой, полумонотонной на конусе X_+ . Если существует телесный (т.е. с внутренней точкой) воспроизводящий решеточный конус $X \subset X_+$, то X является БГ.

X называется сильно архимедовым, если $(nx + a \leq ny + b : n \in \mathbb{N}) \Rightarrow x \leq y$.

X архимедово тогда и только тогда, когда X сильно архимедово.

Следствие 2. Если X сильно архимедовый конечномерный решеточный конус, то X - БР.

Литература

1. Fuchssteiner B., Lusky W. Convex cones// Notas mat. V.82. Amsterdam e.a.: N.-Holl., 1981.
2. Schmidt K.D. Embedding theorems for cones and applications to classes of convex sets occuring in interval mathematics// Lecture Notes in Comp. Sci. 1986, V. 212. P. 159-173.

Ленинградский институт текстильной и легкой промышленности им. С.М.Кирова
Кафедра высшей математики

О СУММИРОВАНИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ КЛАССИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

В.Ф. Гапошкин

Пусть $(\varphi_k(x))$ — произвольная ОНС в $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Рассматриваются ряды $\sum c_k \varphi_k(x)$, $(c_k) \in \ell_2$ /коротко, ряды из L^2 /, $S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$. Средние Чезаро (C, α) , Эйлера (E, q) и Бореля обозначаются соответственно $\sigma_n^\alpha(x)$, $E_n^q(x)$, $B_n(x)$.

Известны следующие классические результаты С. Качмажа и А. Зигмунда [1]. Для любого ряда из L^2 справедливы соотношения:

1/ Если $\alpha > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{2^n \leq k < 2^{n+1}} \sigma_k^\alpha(x) - S_{2^n}(x) \right] = 0 \quad \text{п.в.,}$$

2/ Если $\alpha \geq 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sigma_n^\alpha(x) - \sigma_n^1(x) \right] = 0 \quad \text{п.в.}$$

3/ Если $0 < \alpha < 1$, то из суммируемости ряда п.в. на множестве $E \subset X$ методом $(C, 1)$ вытекает его суммируемость методом (C, α) в той же сумме, и обратно.

Последнее утверждение может быть усилено.

Теорема 1. Для любого $\alpha > 0$ и любого ряда из справедливости соотношения 1/ и 2/.

Доказательство теоремы 1 опирается на одно новое "максимальное" неравенство.

Следствие 1. Для любого ряда из L^2 существуют множество $G \subset X$ нулевой меры и измеримые функции $F(x)$ и $H(x)$ / со значениями в $\bar{\mathbb{R}}$ /, такие, что для любого $\alpha > 0$ и $x \in X \setminus G$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^\alpha(x) = F(x), \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^\alpha(x) = H(x).$$

Аналогичные результаты получены для методов суммирования Эйлера и Бореля. Как показала О.А. Зиза [2], справедливы такие утверждения.

Для любого ряда из L^2 :

$$4/ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{n^2 \leq k < (n+1)^2} E_k^4(x) - S_{n^2}(x) \right] = 0 \quad \text{п.в.}$$

5/ Если ряд суммируем п.в. на множестве $E \subset X$ методом Бореля, то он суммируем п.в. на этом множестве и любым методом (E, q) , и обратно.

Получены следующие утверждения, дополняющие свойства 4/ и 5/.

Теорема 2. Для любого ряда из L^2 :

6/ при любом $q > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [E_n^q(x) - E_n^1(x)] = 0 \quad \text{п.в.}$$

$$7/ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{n^2 \leq \lambda < (n+1)^2} B_\lambda(x) - S_{n^2}(x) \right] = 0 \quad \text{п.в.}$$

Метод доказательства теоремы 2 отличается от метода работы [2] .

Следствие 2. Для любого ряда из L^2 существуют множество G нулевой меры и измеримые функции $F(x)$ и $H(x)$ / со значениями в $\mathbb{R}$ / такие, что для любого $q > 0$ и $x \in X \setminus G$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n^q(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda(x) = F(x),$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} E_n^q(x) = \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda(x) = H(x).$$

Литература

1. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов // М.: ИЛ, 1963.

2. Зиза О.А. О суммировании ортогональных рядов методами Эйлера // Мат. сборник, 1965. Т. 66, №3, С. 354-378.

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта
Кафедра прикладной математики

ФУНКЦИИ И КРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ, СОПРЯЖЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНУСА

В.И. Годубов

Пусть Γ -конус в R^N с вершиной в начале координат, т.е. из $x \in \Gamma$ следует, что $\lambda x \in \Gamma$ для всех $\lambda > 0$. Обозначим через $\overline{\text{ch}}\Gamma$ замыкание выпуклой оболочки $\text{ch}\Gamma$ конуса Γ . Конус Γ называется острым, если существует такая опорная плоскость к $\overline{\text{ch}}\Gamma$, которая имеет с $\overline{\text{ch}}\Gamma$ единственную общую точку O . Множество всех точек $x \in R^N$, каждая из которых удовлетворяет неравенству $(x, y) \geq 0$ при всех $y \in \Gamma$, называется сопряженным конусом к конусу Γ и обозначается через Γ^* . Очевидно, что сопряженный конус Γ^* является замкнутым и выпуклым множеством, причем $(\Gamma^*)^* = \overline{\text{ch}}\Gamma$.

Рассмотрим функцию $f(x) \in L(T^N)$, где $T^N = [-\pi, \pi]^N$, и будем считать ее 2π -периодической по каждому аргументу $x_1, \dots, x_N$. Разложим эту функцию в ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n \in Z^N} \hat{f}(n) e^{inx} \quad (nx = \sum_{k=1}^N n_k x_k) / 1/$$

где Z^N -целочисленная решетка в R^N , а $\hat{f}(n)$ коэффициенты Фурье функции f . Считая конус Γ острым, составим ряды

$$\sum_{n \in \Gamma^* \cup (-\Gamma^*)} \hat{f}(n) e^{inx} \quad / 2/$$

и

$$-\sum_{n \in \Gamma^* \cup (-\Gamma^*)} i [\chi_{\Gamma^*}(n) - \chi_{\Gamma^*}(-n)] \hat{f}(n) e^{inx}, \quad / 3/$$

где $\chi_Q(x)$ -характеристическая функция множества Q , т.е. $\chi_Q(x) = 1$ при $x \in Q$ и $\chi_Q(x) = 0$ при $x \notin Q$. Ряд /3/ назовем сопряженным к ряду /2/ относительно конуса Γ .

В R^1 существуют лишь два непустых открытых конуса: $R_+^1 = (0, +\infty)$ и $R_-^1 = (-\infty, 0)$, причем $(R_+^1)^* = R_+^1$.

В одномерном случае при $\Gamma = \mathbb{R}_1^+$ ряд /2/ совпадает с рядом Фурье /1/, а ряд /3/ превращается в обычный сопряженный ряд к ряду Фурье /1/.

В случае $N \geq 2$ ряды /1/ и /2/ могут не совпадать друг с другом. Тогда возникают следующие вопросы.

1. Является ли ряд /2/ рядом Фурье-Лебега, т.е. существует ли функция $f_\Gamma \in L(T^N)$, для которой ряд /2/ является рядом Фурье?

2. Если ответ на вопрос 1 отрицателен, то нельзя ли все-таки единственным образом сопоставить ряду /2/ некоторую измеримую функцию? Например, не является ли ряд /2/ суммируемым почти всюду /п.в./ на T^N методом Абеля-Пуассона, связанным с конусом Γ , точнее существует ли п.в. на T^N конечный предел

$$f_\Gamma(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \in \Gamma}} \sum_{\substack{n \in \Gamma^* \cup (-\Gamma^*)}} \hat{f}(n) e^{inx - |n, y|} \quad /4/$$

или хотя бы предел

$$f_\Gamma(x) = \lim_{\substack{y \in \Gamma' \subseteq \Gamma \\ y \rightarrow 0}} \sum_{n \in \Gamma^* \cup (-\Gamma^*)} \hat{f}(n) e^{inx - |n, y|} \quad ? /5/$$

При этом запись $\Gamma' \subseteq \Gamma$ означает, что конус Γ' компактен в открытом конусе Γ , т.е. $pc \Gamma' \subset pc \Gamma$, где $pc \Gamma = \{x \in \Gamma, |x| = 1\}$, а $\overline{\Gamma'}$ - замыкание конуса Γ' .

3. Если предел /4/ или /5/ существует п.в. на T^N , то возникает оператор $A_\Gamma: L(T^N) \rightarrow S(T^N)$, переводящий функции из пространства $L(T^N)$ в функции пространства $S(T^N)$ /пространство измеримых конечных п.в. на T^N и 2π -периодических функций/. Является ли этот оператор оператором слабого типа $(1, 1)$, т.е. справедливо ли неравенство

$$me \{x: x \in T^N, |f_\Gamma(x)| > \lambda\} \leq C \lambda^{-1} \|f\|_{L(T^N)}$$

для всех функций $f \in L(T^N)$, чисел $\lambda > 0$ и некоторой постоянной $C = C(N, \Gamma)$?

4. Если $f \in L^p(T^N)$ при некотором $1 < p < \infty$, то будет ли ряд /2/ рядом Фурье некоторой функции $f_\Gamma \in L^p(T^N)$? /В силу равенства Парсеваля ответ на этот вопрос положителен для $p = 2$ /.

5. Если ответ на вопрос 4 положителен /а это так, по крайней мере, для $p = 2$ /, то будет ли оператор $A_\Gamma: f \rightarrow f_\Gamma$ оператором сильного типа (p, p) , т.е. справедливо ли неравенство

$$\|f_\Gamma\|_{L^p(T^N)} \leq C \|f\|_{L^p(T^N)} \quad (1 < p < \infty) \quad /6/$$

с некоторой постоянной $C = C(p, N, \Gamma)$? /Для $p = 2$ неравенство /6/ справедливо с постоянной $C = 1$, что следует из равенства Парсеваля/.

6. Обозначим через $L_\Gamma^p(T^N)$ ($1 \leq p < \infty$) подпространство функций из $L^p(T^N)$, имеющих ряды Фурье вида /2/. Верно ли, что из условия $f \in L_\Gamma^p(T^N)$ / $1 < p < \infty$ / вытекает, что ряд /3/ является рядом Фурье некоторой функции $\tilde{f}_\Gamma \in L_\Gamma^p(T^N)$? /В случае $N = 1$ и $\Gamma = R_+^1$ ответ положителен и дается теоремой М.Рисса [1], с.564/. Кроме того, ответ положителен и при $N \geq 2$, $p = 2$, что легко следует из равенства Парсеваля.

7. Если ответ на вопрос 6 при $N \geq 2$ положителен, то возникает оператор $\tilde{A}_\Gamma: L_\Gamma^p(T^N) \rightarrow L_\Gamma^p(T^N)$ ($1 < p < \infty$). Имеет ли этот оператор сильный тип (p, p) , т.е. выполняется ли неравенств

$$\|\tilde{f}_\Gamma\|_{L_\Gamma^p(T^N)} \leq \tilde{C} \|f\|_{L_\Gamma^p(T^N)} \quad /7/$$

для функций $f \in L_\Gamma^p(T^N)$ и постоянной $\tilde{C} = C(p, N, \Gamma)$?

Неравенство /7/ в одномерном случае при $\Gamma = R_+^1$ и $1 < p < \infty$ имеет место согласно упомянутой выше теореме М.Рисса, а при $N \geq 2$ и $p = 2$ оно вытекает из равенства Парсеваля.

8. Пусть $f \in L^p(T^N)$, $1 < p < \infty$. Будет ли ряд /3/ рядом Фурье некоторой функции $\tilde{f}_r \in L^p(T^N)$? В одномерном случае при $\Gamma = \mathbb{R}^1$, а также при $N \geq 2$, $p = 2$ ответ положителен/. Если ответ положителен, то справедливо ли неравенство /7/ для всех функций $f \in L^p(T^N)$, $1 < p < \infty$ /.

Известно, что ответы на вопросы 6, 7 и 8 положительны в случае $N \geq 2$, если $\Gamma = \{x: x \in \mathbb{R}^N, x = \lambda \alpha, \lambda > 0\}$ - луч, порожденный ненулевым вектором $\alpha \in \mathbb{R}^N$ /см. [2], с. 104/.

9. Если $f \in L^1(T^N)$, то существует ли п.в. на T^N конечный предел

$$\tilde{f}_r(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \in \Gamma}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} -i [\chi_{r*}(n) - \chi_{r*}(-n)] \hat{f}(n) e^{inx(n,y)} \quad ?$$

/Можно этот предел рассматривать при условии $y \in \Gamma' \subseteq \Gamma$ или для функций $f \in L^p(T^N)$, $1 < p \leq \infty$ /. Отметим, что в одномерном случае ответ положителен /см. [3], с. 402/.

10. Если ответ на вопрос 9 положителен, то возникает оператор $\tilde{A}_r: L(T^N) \rightarrow S(T^N)$. Имеет ли он слабый тип $(1, 1)$? В случае $N = 1$ ответ положителен /см. [1], с. 573/.

11. Если ответ на вопрос 9 положителен и $\tilde{f}_r \in L(T^N)$, то будет ли ряд /3/ рядом Фурье функции $\tilde{f}_r$? Для $N = 1$ положительный ответ на этот вопрос дается теоремой В.И. Смирнова /см. [1], с. 583/.

Литература

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды // М.: Физматгиз, 1961.
2. Igari S. Lectures on Fourier' series of several variables // Wisconsin, 1968.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды // М.: Мир, 1965.

Московский физико-технический институт
Кафедра высшей математики

ПЕРЕСТАНОВКИ РЯДОВ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА. ПОСЛЕДНИЕ ДОСТИЖЕНИЯ

В.М.Каден, М.И.Кадец

В начале 1968 года в издательстве Тартусского университета вышла наша книга "Перестановки рядов в пространствах Банаха". Последний ее параграф был посвящен обзору нерешенных задач. Эти задачи, в значительной степени связанные друг с другом, были известны в течение многих лет, и нам казалось, что их решения появятся очень не скоро. Однако, в самое последнее время появились новые, еще не опубликованные результаты, закрывающие существенную часть проблематики из упомянутого обзора (терминология та же, что и в книге):

А. (М.И.Кадец, К.Возняковски). Существует ряд в гильбертовом пространстве с областью сумм, состоящей из двух точек. Этим решаются задачи 6.4.1, 6.4.2, 6.4.3, 6.4.6, 6.4.7.

Б. (В.М.Кадец). Существует ряд в гильбертовом пространстве с нелинейной слабой областью сумм. Этим решена задача 6.4.5.

Несмотря на эти продвижения, в теории перестановок рядов осталось еще немало открытых вопросов. Наиболее важными на наш взгляд являются следующие.

Вопрос 1. Любое ли сепарабельное подмножество банахова пространства может служить областью сумм ряда в этом пространстве? Частные случаи: конечные и счетные множества. Особенно интересен парадоксальный случай: все пространство без одной точки.

Вопрос 2. (Задача 6.4.4). Должна ли область сумм ряда в ядерном пространстве Фреше быть замкнутым линейным множеством? Частный случай: пространство аналитических в открытой области функций с топологией сходимости на компактах.

Вопрос 3. (см. стр.32) Каково значение константы Штейнца евклидова пространства?

Харьковский инженерно-строительный институт

Харьковский институт инженеров коммунального строительства

А. Кивинуки

Шарль де Ла Валле Пуссен (1866–1962) – бельгийский математик [29] известен прежде всего доказательствами того, что число простых чисел, меньших x , асимптотически равно $x/\ln x$.

В теории приближений он рассматривал метод суммирования рядов Фурье $\sigma_{n,m}f = (S_{n-m}f + S_{n-m+1}f + \dots + S_n f) / (m+1)$, которые теперь называются суммами Валле Пуссена (короче VP-суммы). Эти суммы замечательны тем, что они регуляризуют частные суммы Фурье, они ограничены в совокупности как операторы при $\lim m_n/n > 0$, полиномы степени $\leq n-m$ для них являются неподвижными точками и они имеют порядок приближения порядка наилучшего [27, 28, 38, 40]. Эти свойства гарантируют их широкое применение: 1) в оценке констант Лебега [23 (гл. 8), 18]; 2) в изучении свойств лакунарных рядов [4]; 3) в теории абсолютной суммируемости [37]; 4) в сильной суммируемости [33, 34]; 5) в теории мультипликаторов [35]; 6) в задачах совместного приближения функций и их производных [9], 7) в изучении пространств Бесова [15]; 8) в аппроксимации в комплексной области [26', 33']. В некоторых задачах VP-суммы являются экстремальными [2, 3, 17, 22, 31, 40]; изучены их специальные свойства [7, 13, 14, 15, 21, 43]. Имеются различные модификации VP-сумм – для функций многих переменных [1, 16, 20, 26, 27, 39], в рациональной аппроксимации [19], в приближении в банаховом пространстве [9, 32, 36], в разложении по ортогональным полиномам [5, 8, 11, 12, 16, 24, 30, 41], в приближении на сфере [6], в пространстве Харди [42]. VP-суммы имеют много обобщений [10, 25, 27, 28, 32, 35, 36, 41]. Библиография из-за нехватки места не полна, приведены только основополагающие журнальные статьи и самые поздние результаты, откуда можно и найти дальнейшие ссылки.

Литература

1. Байбороцов С.П. Приближение функций многих переменных суммами Фейера // Мат. заметки, 1984. Т. 36, №1, С. 123-136
2. Баскаков В.А. О наилучшем приближении классов $S(\epsilon)$ линейными полиномиальными операторами // Докл. Респ. заседаний Семинара ИМ им. И.Н. Веква, 23-27 апр. 1985. Т. I, №2 Тбилиси, 1985.
3. Берман Д.Л. Об одном экстремальном полиномиальном операторе // Изв. вузов. Матем. 1978, №5. С. 3-8.
4. Вилмес Г., Мицке Г., Нессель Р. О поведении частичных сумм лакунарных рядов Фурье // Мат. заметки, 1982. Т. 31, №1, С. 113-115.
5. Глухов В.А. Сравнение (S, α) средних и признаков суммируемости типа Никольского рядов Фурье по мультипликативным системам // Тр. 2-й Саратовской зимней школы. 24 янв.-5 февр. 1984 г. Ч. 2. Саратов, 1986. С. 78-84.
6. Джафаров А.С. Приближение функций на сфере аналогами сумм Фейера и Вальде-Гуссена // Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-тех. и мат. н. 1965. № 3. С. 15-20.
7. Ефимов А.В. О приближении периодических функций суммами Вальде-Гуссена // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. № 3. С. 431-436.
8. Кальней С.Р. Суммы Вальде-Гуссена и достаточные условия сходимости линейных средних рядов Фурье-Джоби // Тез. докл. Всесоюзной школы по теории функций, посвящ. 100-летию со дня рожд. Н.Н. Лузина. Кемерово, 1983, С. 53.
9. Кивиниук А. Совместное приближение элемента банахова пространства и его отображений замкнутым оператором // Тез. конф. "Теор. и прикл. вопросы матем.". Тарту, 1980. С. 126-130.
10. Кивиниук А. Добавление к оценке констант Лебега // Изв. АН СССР, физ. мат. 1987. Т. 36, №1. С. 58-61.
11. Кудин А.Н. Об остаточном члене уклонения сумм Вальде-Гуссена на классах дифференцируемых функций // Некоторые вопросы теории априор. функций, Киев, 1985. С. 57-62.
12. Лабунец Л.Н. К вопросу о приближении непрерывных на отрезке функций усеченными суммами Вальде-Гуссена // Изв. вузов. матем. 1983. № 8, С. 32-33.
13. Натансон Г.И. Членение Гиббса для сумм Вальде-Гуссена // Иссл. по совр. проблемам констр. теории функций. М. 1971. С. 101-113, 124-125.
14. Натансон Г.И. Об оценке констант Лебега сумм Вальде-Гуссена // Геом. вопрос. теории функций и геометрия. Калинин. 1981. С. 102-108.
15. Никольский С.Н. О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1949. Т. 4, № 7. 529-533.
16. Никольский С.Н. Приближение функций почти периодических

и теоремы вложения// М.: Наука, 1977 г.

16. Осипенко Б.Н. О линейных процессах приближения функций многих переменных// Иссл. по теории функц. многих веществ. переменных. Ярославль. Изд. Ярославль. IV, 1978. С.173-195.
17. Осолков.К.И. О норме одного полиномиального оператора //Сиб.мат.ж. 1971. Т.12. №5, С.1151-1157.
18. Подкорытов А.Н. Константы Лебега линейных методов суммирования кратных рядов Фурье (канд.диссерт.).Л.1978.
19. Русак В.Н. Рациональная аппроксимация периодических функций, имеющих кусочно-выпуклую производную// Докл.Раш. заседаний Семинара ИИМ им.И.Н.Веква.23-27 апр. 1985. Т.1, № 2. Тбилиси,1985.С.118-121.
20. Скопина М.А. Об асимптотическом поведении констант Лебега некоторых линейных методов суммирования кратных рядов Фурье//Изв.вузов.мат. 1985. №3. С.70-71.
21. Теляковский С.А. Приближение функций, дифференцируемых в смысле Вейля, суммами Валле Пуссена//Докл.АН СССР, 1960 Т.131, №2, С.259-262.
22. Темляков В.М. О линейных ограниченных методах приближения функций//Докл. Раш. заседаний Семинара ИИМ им.И.Н.Веква 23-27 апр.,1985.Т.1. №2, Тбилиси, 1985.С.144-147.
23. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.1960, Физматгиз.
24. Трофимов В.Н. Приближение усечёнными средними арифметическими частных сумм ряда Фурье на некоторых классах, определяемых полигармоническим оператором//Иссл.по совр. проблемам констр. теории функций.М.1971.С.251-253.
25. Угулава Д.К. Об одном обобщении метода суммирования Валле Пуссена//Тр.ЭИ АН Груз.ССР.1977.Т.17. № 1. С.159-172.
26. Угулава Д.К. О приближении функций многих переменных полиными функциями экспоненциального типа// Докл.Раш.заседаний Семинара ИИМ им. И.Н.Веква.23-27 апр. 1985.Т.1, № 2, Тбилиси,1985. С.155-158.
27. Еввай А.И. О приближении аналитических функций многозначности Валле Пуссена// Укр.мат.ж. 1973. Т.25. С.849-853.
28. Рудин В.А. Приближение функций многих переменных тригонометрическими полиномами (канд.диссерт.).Л.1974
29. G.Bleimann, Stark, E.L., Wilmes, G.A construction of processes of best approximation//Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1979. Т.33, N 1-2, P.7-17.
30. Burkill, J.C. Charles-Joseph de la Vallée Poussin//J.London Math. Soc. 1964. V.39, N 153. P.165-175.
31. Butzer, P.L., Stens, R.L., Wehrens, M. Approximation by algebraic convolution integrals//Proc. Intern. Symp. on Approx. Theory. Brazil, August 1-5, 1977. North-Holland, 1979. P.71-120.

31. Dahmen, W. Trigonometric approximation with exponential error orders. I. Construction of asymptotically optimal processes; Generalized de la Vallée Poussin sums//Math. Ann. 1977. V. 230, N 1. P. 57-74
 II. Properties of asymptotically optimal processes. Impossibility of arbitrary good error estimates//J. Math. Anal. Appl. 1979. V. 68, N 1. P. 118-129.
 III. Criteria for asymptotically optimal processes. Appr. and Function Spaces-Proc. Intern. Conf. Gdansk, August 27-31, 1979. North-Holland, 1981. P. 239-258.
32. Dickmeis, W., Nessel, R.J., van Wickeren, E. Steckin type estimates for locally divisible multipliers in Banach spaces//Acta Sci. Math. (Szeged) 1984. T. 47, N.1-2 P. 169-188.
33. Gajewski, R., Łenski, W. On the approximation by the generalized de la Vallée Poussin means of Fourier series in the spaces W^1H //Math. Nachr. 1985. B.120. S. 63-71.
34. Leindler, L. On the strong approximation of Fourier series//Acta Sci. Math. 1976. V. 38, N.3-4. P. 317-324.
35. Mertens, H.J., Nessel, R.J. Quasikonvexe Multiplikatoren starker Konvergenz//Anal. Math. 1981. T. 7, N 1. P. 49-67.
36. Nessel, R.J., Wilmes, G. Nikolskii-type inequalities in connection with regular spectral measures//Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. 1979. T. 33, N 1-2. P. 169-182.
37. Okuyama, Y. Absolute Summability of Fourier series and orthogonal series. Lect. Notes in Math. 1984. N 1067.
38. Prestin, J. On the approximation by de la Vallée Poussin sums and interpolatory polynomials in Lipschitz norms//Anal. math. 1987. T. 13, N 3, P. 251-259.
39. Ruizhen, L. On the approximation of continuous functions by de la Vallée-Poussin sums of T-F series//Kexue Tongbao (Science Bull.). 1986. T. 31, N 20. P. 1436.
40. Stećkin, S.B. On the approximation of periodic functions by de la Vallée Poussin sums//Anal. Math. 1978. V. 4, n 1. P. 61-74.
41. Stein, E.M. Interpolation in polynomial classes and Markoff's inequality//Duke Math. J. 1957. V. 24, N 3, P. 467-476.
42. Storozhenko, F.A. On sums of the Bernstein-Rogosinski and de la Vallée-Poussin type in H^p , $0 < p < 1$ //Proc. Intern. Conf. Gdansk, August 27-31, 1979. North-Holland, 1981. P. 712-730.
43. Tanović-Miller, N. On the order of approximation of continuous functions by triangular means//Boll. Unione mat. ital. 1985. B 4, P. 725-741.
44. de la Vallée Poussin, C. Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris.: Gauthier-Villars, 1919.

Таллинский политехнический институт
 Кафедра математики

О ПОЧТИ КОММУТАТИВНОСТИ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

А. Кокк

Пусть A — комплексная банахова алгебра с единицей e_A , $\text{Hom} A$ — множество всех нетривиальных гомоморфизмов (линейных мультипликативных функционалов) на A , $\text{Rad} A$ — радикал Джекобсона алгебры A и

$$\text{rad} A = \{ \bigcap \ker \Lambda : \Lambda \in \text{Hom} A \}$$

(если множество $\text{Hom} A$ пусто, то считаем, что $\text{rad} A = A$). Пусть A^n — прямое произведение n экземпляров A ($n \in \mathbb{N}$), $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ и $\langle \bar{a} \rangle$ — замкнутая подалгебра алгебры A , порожденная подмножеством $\{e_A, a_1, \dots, a_n\}$. Через $\sigma^A(\bar{a})$ будем обозначать совместный спектр набора элементов $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, т.е. множество таких $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, для которых при всех $b_1, b_2, \dots, b_n \in A$ справедливо

$$\sum_{i=1}^n (a_i - \alpha_i e_A) b_i \neq e_A \text{ или } \sum_{i=1}^n b_i (a_i - \alpha_i e_A) \neq e_A.$$

Говорят, что совместный спектр σ^A обладает свойством проекции, если для всех $m \leq n$ ($m, n \in \mathbb{N}$), элементов $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in A$ и $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \sigma^A((a_1, a_2, \dots, a_m))$ существуют $\beta_1, \dots, \beta_{n-m} \in \mathbb{C}$ такие, что

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_{n-m}) \in \sigma^A((a_1, \dots, a_m, \dots, a_n)).$$

Если алгебра A коммутативна, то, согласно теореме Гельфанда-Мазура, для всех $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$ ($n \in \mathbb{N}$) справедливо равенство

$$\sigma^A(\bar{a}) = \{ (\Lambda(a_1), \Lambda(a_2), \dots, \Lambda(a_n)) : \Lambda \in \text{Hom} A \}. \quad (1)$$

Значит, гомоморфизм $\lambda \in \text{Hom} \langle \bar{a} \rangle$ продолжается до гомоморфизма $\bar{\lambda} \in \text{Hom} A$ тогда и только тогда, когда

$$(\lambda(a_1), \lambda(a_2), \dots, \lambda(a_n)) \in \sigma^A(\bar{a}). \quad (2)$$

Нетрудно проверить, что это утверждение справедливо и в случае, когда алгебра A почти коммутативна (т.е. в случае, когда факторалгебра $A/\text{Rad} A$ коммутативна). В общем случае каждый гомоморфизм $\lambda \in \text{Hom} \langle \bar{a} \rangle$, удовлетворяющий условию (2), продолжается до такого функционала $\bar{\lambda} \in A$, что для всех $\alpha \in A$ и $\ell \in \langle \bar{a} \rangle$ либо $\bar{\lambda}(\alpha \ell) = \bar{\lambda}(\alpha) \bar{\lambda}(\ell)$, либо

$\bar{\lambda}(ba) = \bar{\lambda}(b)\bar{\lambda}(a)$ (см. [5]). Возникает вопрос: при каких условиях любой гомоморфизм $\lambda \in \text{hom} \langle \bar{a} \rangle$ ($\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$), удовлетворяющий условию (2), продолжается до $\bar{\lambda} \in \text{hom } A$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) для всех $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) справедливо (1);
 2) совместный спектр σA обладает свойством проекции;
 3) если B – замкнутая подалгебра алгебры A , $e_A \in B$ и $\lambda \in \text{hom } B$ такой, что для всех $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in B^n$ ($n \in \mathbb{N}$) справедливо (2), то λ продолжается до $\bar{\lambda} \in \text{hom } A$;

4) если B – замкнутая коммутативная подалгебра алгебры A такая, что $e_A \in B$, то каждый гомоморфизм λ из границы Шилова $\Gamma(B)$ алгебры B продолжается до $\bar{\lambda} \in \text{hom } A$;

5) $\text{Rad } A = \text{rad } A$;

6) алгебра A почти коммутативна.

Эквивалентность условий 2) и 6) показана ранее в [2, 3], а условий 4) и 6) в [4]. Известны и иные условия, равносильные условию 6) (см., например, [1, 6]).

Литература

1. Крупник Н.Н. Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы // Кишинев: Штиинца, 1964.
2. Туровский Ю.В. Свойство отображения спектра Харта полиномами для α -коммутативных семейств элементов банаховой алгебры // Спектральная теория операторов и ее приложения. 1964. Т. 5. С. 152–177.
3. Fong C.-K., Soltysiak A. Existence of a multiplicative functional and joint spectra // Stud. math. 1985. V.81. P. 213–220.
4. Kajetanowicz P. Extreme spectral states and multiplicative extensions in Banach algebras // Colloq. math. 1984. V.48. P. 111–116.
5. Mocanu Gh. Fonctionelles relativement multiplicatives et le spectre // Ann. Fac. Sci. Kinshasa, Zaire. Sec. Math.-Phys. 1979. V.5. P. 1–27.
6. Ptak V. Survey of some results in spectral theory obtained in Prague // Banach Cent. Publ. 1982. V.8. P. 367–371.

Тартуский государственный университет
 Лаборатория прикладной математики

СТАТИСТИЧЕСКИ СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Э. Кольк

Понятие статистически сходящейся числовой последовательности было введено в 1951 году Фастом [3] и затем исследовано в работах [5,6,7].

Пусть X — нормированное пространство, $s(X)$ — множество всех последовательностей из X , а $m(X)$ и $c(X)$ — множества, соответственно, всех ограниченных и сходящихся последовательностей из $s(X)$. Для бесконечной числовой матрицы $A=(a_{nk})$ и последовательности $x=(x_k) \in s(X)$ введем обозначения

$$A_n x := \sum_k a_{nk} x_k, \quad c_A(X) := \{x \in s(X) : \exists \lim_n A_n x =: \lim_A x\}.$$

Матричное преобразование $Ax=(A_n x)$ называется регулярным, если $c(X) \subset c_A(X)$ и $\lim_A x = \lim_k x_k$ для всех $x=(x_k) \in c(X)$. Известно, что преобразование (или матрица) A является регулярным в банаховом пространстве X тогда и только тогда, когда ([2], стр. 129)

$$1^0 \quad \lim_n a_{nk} = 0 \quad (k \in \mathbb{N});$$

$$2^0 \quad \lim_n \sum_k a_{nk} = 1;$$

$$3^0 \quad \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty.$$

Простейшим примером регулярного матричного преобразования является метод суммирования арифметических средних, определенный матрицей $C^1=(c_{nk})$, где $c_{nk}=1/n$ при $k \leq n$ и $c_{nk}=0$ при $k > n$.

Рассмотрим подмножества K множества $\mathbb{N}=\{1, 2, \dots\}$, упорядоченные по возрастанию. Пусть $\chi_K=(\chi_{k,i})$, где $\chi_{k,i}=1$ при $i \in K$ и $\chi_{k,i}=0$ при $i \notin K$. Если существует $\lim_{C^1} \chi_K =: \delta(K)$, то число $\delta(K)$ называется асимптотической плотностью множества K . Числовая последовательность (ξ_k) называется статистически сходящейся к ξ_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\delta(K_\varepsilon)=0$, где

$$K_\varepsilon := \{k: |\xi_k - \xi_0| \geq \varepsilon\}.$$

Следуя [4], введем обобщение асимптотической плотности, заменив матрицу C^1 произвольной регулярной матрицей $A = (a_{nk})$ с неотрицательными элементами a_{nk} . Если для $K \subset \mathbb{N}$ существует $\lim_A \chi_K =: \delta_A(K)$, то число $\delta_A(K)$ будем называть A -плотностью множества K . Обозначим через Δ_A совокупность всех множеств $K \subset \mathbb{N}$, имеющих A -плотность. В силу регулярности A имеем $0 \leq \delta_A(K) \leq 1$ для всех $K \in \Delta_A$, причем все конечные множества имеют нулевую A -плотность. Выполнены также следующие утверждения:

- 1) $K_1, K_2 \in \Delta_A \ \& \ K_1 \cap K_2 = \emptyset \Rightarrow K_1 \cup K_2 \in \Delta_A \ \& \ \delta_A(K_1 \cup K_2) = \delta_A(K_1) + \delta_A(K_2);$
- 2) $K_1 \in \Delta_A \ \& \ K_2 \in \Delta_A \ \& \ K_1 \supset K_2 \Rightarrow K_1 \setminus K_2 \in \Delta_A \ \& \ \delta_A(K_1 \setminus K_2) = \delta_A(K_1) - \delta_A(K_2);$
- 3) $\delta_A(K_1) = \delta_A(K_2) = 0 \Rightarrow \delta_A(K_1 \cup K_2) = 0;$
- 4) $\delta_A(K_1) = \delta_A(K_2) = 1 \Rightarrow \delta_A(K_1 \cap K_2) = 1.$

Пусть $m := m(\mathbb{R})$ и $c_A := c_A(\mathbb{R})$. В теории суммируемости известна следующая теорема Брудно [1]: для любой регулярной матрицы A найдется регулярная треугольная матрица $B = (b_{nk})$ (т.е. $b_{nk} = 0$ при $k > n$) со свойством $c_A \Pi m = c_B \Pi m$, причем $\lim_B x = \lim_A x$ для всех $x \in c_A \Pi m$. Так как $\chi_K \in m$, то любая A -плотность может быть определена с помощью треугольной регулярной матрицы.

Понятие A -плотности позволяет дать следующие обобщения статистической сходимости и статистической последовательности Коши ([5], стр. 303) в нормированном пространстве X . Последовательность $(x_k) \in s(X)$ называется A -статистически сходящейся к элементу $x_0 \in X$, коротко $\text{statlim}_A x_k = x_0$, если $\delta_A(L_\varepsilon) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$, где

$$L_\varepsilon := \{k: \|x_k - x_0\| \geq \varepsilon\}.$$

Последовательность $(x_k) \in s(X)$ называется A -статистической последовательностью Коши, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $\delta_A(L_{\varepsilon, N}) = 0$, где

$$L_{\varepsilon, N} := \{k: \|x_k - x_N\| \geq \varepsilon\}.$$

Лемма. Для бесконечной матрицы $(y_{k,i})$ элементов нормированного пространства X следующие утверждения равносильны:

а) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что

$$\delta_A(\{k: \|y_{k,N}\| < \varepsilon\}) = 1;$$

б) найдется $K = \{k_i\} \subset \mathbb{N}$ такое, что $\delta_A(K) = 1$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют $N = N(\varepsilon)$ и $i_0 = i_0(\varepsilon)$ со свойством $\|y_{k_i,N}\| < \varepsilon$ ($i > i_0$).

В частном случае $y_{k,i} = x_k - x_i$ условие а) означает, что (x_k) является A -статистической последовательностью Коши. Поэтому из леммы выводим, что (x_k) является A -статистической последовательностью Коши в нормированном пространстве X тогда и только тогда, когда она содержит такую подпоследовательность Коши (x_{k_i}) , что $\delta_A(\{k_i\}) = 1$. Далее, так как в случае $y_{k,i} = x_k - x_0$ утверждение а) эквивалентно условию $\text{statlim}_A x_k = x_0$, то из леммы вытекает также, что последовательность (x_k) сходится A -статистически к элементу x_0 в точности тогда, когда найдется сходящаяся к x_0 подпоследовательность (x_{k_i}) такая, что $\delta_A(\{k_i\}) = 1$. На основе сказанного верна

Теорема I. В банаховом пространстве X множества всех A -статистически сходящихся последовательностей и A -статистических последовательностей Коши совпадают. При этом $\text{statlim}_A x_k = x_0$ тогда и только тогда, когда найдется подпоследовательность (x_{k_i}) такая, что $\lim_i x_{k_i} = x_0$ в X и $\delta_A(\{k_i\}) = 1$.

Для числовых последовательностей теорема I доказана ранее в [6,5] при $A = C^1$.

Теорема 2. Пусть X — банахово пространство и $B = (b_{nk})$ — комплексная матрица. Матричное преобразование B отображает все ограниченные A -статистически сходящиеся в X последовательности в сходящиеся в X последовательности тогда и только тогда, когда для $B = (b_{nk})$ выполнено условие 3^0

$$4^0 \quad \exists \lim_n b_{nk} =: b_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\delta^0 \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in K} b_{nk} =: b \quad (\delta_A(K)=1);$$

$$\delta^0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in K} |b_{nk} - b_k| = 0 \quad (\delta_A(K)=0).$$

Так как в частном случае $B=A$ условия теоремы 2 выполнены, то верно

Следствие. В банаховом пространстве все ограниченные A -статистически сходящиеся последовательности суммируемы методом A .

Для числовых последовательностей при $A=C^1$ следствие было доказано в [7].

Литература

1. Брудно А.Л. Суммирование ограниченных последовательностей матрицами// Матем. сб., 1945. Т. 16. С. 191-247.
2. Кольк Э. Теорема Бака в локально выпуклых пространствах// Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975. № 374. С. 128-140.
3. Frest H. Sur la convergence statistique// Colloq. Math., 1951. V. 2. P. 241-244.
4. Freedman A.R., Sember J.J. Densities and summability // Pacific J. Math., 1981. V. 95. P. 293-305.
5. Fridy J.A. On statistical convergence// Analysis, 1985. V. 5. P. 307-313.
6. Šalát T. On statistically convergent sequences of real numbers// Math. Slovaca, 1980. V. 30. P. 139-150.
7. Schoenberg I.J. The integrability of certain functions and related summability methods// Amer. Math. Monthly, 1959. V. 66. P. 361-375.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ВАКУУМНОГО НАНЕСЕНИЯ ПЛЕНКИ НА ВРАЩАЮЩИЙСЯ ЦИЛИНДР

Ю. Лемберг, У. Канькельдотт

Задача вакуумного нанесения тонкой пленки на вращающиеся поверхности представляет существенный интерес. Напр. в работе [1] приводятся данные об оценке толщины пленки, но не описан характер источника, форма подложки, отсутствует теоретическое обоснование метода. Здесь рассматриваются некоторые математические вопросы, связанные с покрытием цилиндра тонкой пленкой из косинусного источника в форме узкой ленты.

1. В случае симметрично расположенного источника нахождение поверхностной плотности массы $\bar{b}_r$ в указанной выше задаче приводит к вычислению интеграла вида

$$\bar{b}_r = \frac{\gamma c}{2\pi^2} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \gamma d\alpha, \text{ где } \gamma = G \cdot K, G = \ell^2 \cos \alpha - 4s(s+h) \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (1)$$

$$K = \int_a^L \frac{d\ell}{[\ell^2 + 4s(s+h) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (L-\ell)^2]^{\frac{3}{2}}}; K \text{ вычисляется элементарно.}$$

Заменами переменных (1) сводится к вычислению

$$\int_A^B \frac{(\sigma(\sigma+1)-1)v^2-1}{\sqrt{1-v^2} \cdot \sqrt{4\sigma(\sigma+1)v^2-1}} (\operatorname{arctg} mv - \operatorname{arctg} nv) dv, \quad (2)$$

где $m = \frac{L-a}{\kappa}$, $n = \frac{L+a}{\kappa}$, $\sigma = \frac{s}{\kappa}$, причем L, a, h, s — некоторые положительные параметры (длины отрезков). Нам неизвестно, допускает ли (2) сведение к конечному табличному интегрированию. В случае длинной ленты-источника ($a \rightarrow \infty$) получаем

$$\bar{b}_r = \frac{\gamma c}{2\pi} \int_0^{\alpha_0} \frac{\ell^2 \cos \alpha - 4s(s+h) \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{[\ell^2 + 4s(s+h) \sin^2 \frac{\alpha}{2}]^{\frac{3}{2}}} d\alpha. \quad (3)$$

Полагая здесь $\ell^2 = 4\sigma(\sigma+1)$, $\kappa^2 = \ell^2(\ell^2+1)^{-1}$, $\kappa'^2 + \kappa^2 = 1$, $v = \cos \frac{\alpha}{2}$, интеграл в (3) принимает вид

$$2\kappa' \int_{\cos \frac{\alpha_0}{2}}^1 \frac{1-2(1-v^2)-\ell^2(1-v^2)^2}{1+\ell^2(1-v^2)} \cdot \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\ell^2 v^2)}}. \quad (4)$$

Оказывается, (4) допускает конечное интегрирование (с привлечением эллиптических интегралов Лежандра второго и третьего

О ТЕТЛИЦЕВОМ БАЗИСЕ В ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ ДВОЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ТЕОРИИ РЯДОВ ФУРЬЕ

И. Лепассон

Мы обобщаем результаты, полученные Бунтинасом [1,2], на двойные последовательности и на двойные ряды Фурье.

Пусть E — локально выпуклое пространство двойных последовательностей с хаусдорфовой топологией;

ω — пространство всех двойных последовательностей $x = (x_{kl})$,

$T = (t_{mnkl})$ — регулярная матрица, где $k \leq m, l \leq n$,

$$t^{mn} = (t_{mnkl}), \quad xy = (x_{kl}y_{kl}),$$

$$xE = \{xy : y \in E\}, \quad \Delta(x, y) = \sum_{k, l=0}^{\infty} x_{kl}y_{kl},$$

$$C_T = \{x \in \omega : \exists \lim_{m, n} \Delta(t^{mn}x)\},$$

$$M_T = \{x \in \omega : \sup_{m, n} |\Delta(t^{mn}x)| < \infty\},$$

$$E_{TB} = \{x \in \omega : (t^{mn}x) \text{ ограничена в } E\},$$

$$E_{TK} = \{x \in E : \lim_{m, n} t^{mn}x = x \text{ в } E\},$$

$$q = \{x \in \omega : x C_T \subset C_T\}, \quad q_0 = \{x \in \omega : x M_T \subset C_T\},$$

$$qE = \{xy : x \in q, y \in E\}.$$

Имеет место следующая

Теорема I. Если $C_T = (C_T)_{TK}$ и E является FK -пространством, то

$$E \subset E_{TB} \Leftrightarrow q \cdot E = E \Leftrightarrow q_0 \cdot E = E_{TK}.$$

Итак, имеет место

Следствие. Если $C_T = (C_T)_{TK}$ и E является FK -пространством, то

$$E = E_{TK} \Leftrightarrow E = q_0 \cdot E; E \subset E_{TB} \Leftrightarrow E = q \cdot E.$$

Пусть C^∞ — пространство 2π -периодических функции двух переменных, имеющих частные производные всех порядков, с полунормами

$$p_{nk}(z) = \sup_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq k \leq K}} \|z^{(i,k)}\|_{C[-\hat{\pi}, \hat{\pi}; -\hat{\pi}, \hat{\pi}]}$$

а D — пространство всех таких распределений на C^∞ , что $D \supset L^1[-\pi, \pi; -\pi, \pi]$. Если $E \subset D$ является F -пространством, то пространство $\hat{E}$ всех последовательностей $\hat{f}$ коэффициентов Фурье распределении f из E является F -пространством при $p_{nk}(\hat{f}) = p_{nk}(f)$. Для свертки двух распределений f и g имеем $(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

Введем обозначения

$$\sigma_f = \{f \in D : \hat{f} = (\lambda_{k,l}) : \lambda_{1k,1k} = \lambda_{k,l}, \hat{f} \in q\};$$

$$\sigma_{f_0} = \{f \in D : \hat{f} = (\lambda_{k,l}) : \lambda_{1k,1k} = \lambda_{k,l}, \hat{f} \in q_0\};$$

$$E_{TK} = \{f \in E : \hat{f} \in \hat{E}_{TK}\};$$

$$E_{T\bar{K}} = \{f \in D : \hat{f} \in \hat{E}_{T\bar{K}}\}.$$

В силу этого, из теоремы I следует

Теорема 2. Если $C_T = (C_T)_{TK}$ и E является FK -пространством, то

$$\begin{aligned} \hat{E} = \hat{E}_{TK} &\Leftrightarrow \hat{E} = \hat{\sigma}_{f_0} \cdot \hat{E} \text{ или } E = E_{TK} \Leftrightarrow E = \sigma_f * E; \\ \hat{E} \subset \hat{E}_{T\bar{K}} &\Leftrightarrow \hat{E} = \hat{\sigma}_f \cdot \hat{E} \text{ или } E \subset E_{T\bar{K}} \Leftrightarrow E = \sigma_f * E. \end{aligned}$$

Литература

1. Butinas M. Convergent and Bounded Cesàro Sections in FK -Spaces// Math. Z. 1971, V. 121. P. 191-200.
2. Butinas M. On Toeplitz sections in sequence spaces// Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1975, V. 78. P. 451-460.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

ОПЕРАТОРЫ ЗАМКНАНИЯ, МЕРЫ НЕКОМПАКТНОСТИ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Липиньш

Следуя [1], оператором замыкания на непустом множестве X назовём отображение $\mathcal{S}: PX \rightarrow PX$ (PX - множество всех подмножеств множества X), если для любых $A, B \in PX$ выполнено: 1) $A \subset B \Rightarrow \mathcal{S}(A) \subset \mathcal{S}(B)$; 2) $A \subset \mathcal{S}(A)$; 3) $\mathcal{S}(\mathcal{S}(A)) = \mathcal{S}(A)$. Скажем, что

1) оператор замыкания $\mathcal{S}$ алгебраичен, если для любого $A \in PX$ и для любого $x \in \mathcal{S}(A)$ существует такое конечное $F \subset A$, что $x \in \mathcal{S}(F)$;

2) $A \in PX$ $\mathcal{S}$ -замкнуто, если $A = \mathcal{S}(A)$;

3) X $\mathcal{S}$ -компактно, если пересечение любого семейства непустых $\mathcal{S}$ -замкнутых подмножеств множества X непусто. *центрированного

Отметим, что оператор замкнутой выпуклой оболочки подмножества линейного топологического пространства, который не является оператором топологического замыкания, в то же время - оператор замыкания в смысле вышеприведённого определения.

Пусть Y - непустое множество с определённым на нем частичным порядком $\leq$.

Следуя [2], мерой некомпактности на множестве X с оператором замыкания $\mathcal{S}$ назовём отображение $\mu: PX \rightarrow Y$, если $\mu(\mathcal{S}(A)) = \mu(A)$ для любого $A \in PX$. Скажем, что мера некомпактности μ $\exists$ -полуаддитивна, если для любой последовательности $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ подмножеств множества X и для любого $y \in Y$ при условии, что $\mu(A_n) \leq y$ для любого $n \in \mathbb{N}$: $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq y$.

Теорема. Пусть X - топологическое пространство и T - алгебраический оператор замыкания на X , причем топологическое замыкание любого T -замкнутого подмножества пространства X T -замкнуто.

Пусть $\mathcal{S}(A) := \overline{T(A)}$ для любого $A \in PX$, μ - $\exists$ -полуаддитивная мера некомпактности относительно оператора замыкания $\mathcal{S}$ на X и отображение $f: X \rightarrow X$

непрерывно.

Предположим, что:

- 1) X $\mathcal{S}$ -компактно;
 - 2) для любого $\mathcal{S}$ -замкнутого, инвариантного относительно f , содержащего более одной точки подмножества A пространства X существует такое непустое $A_0 \subset A$, что $\mu(A_0) < \mu(A)$;
 - 3) $\mu(f(A)) \leq \mu(A)$ для любого $A \in \mathcal{P}X$.
- Тогда f имеет неподвижную точку.

Доказательство. Пользуясь $\mathcal{S}$ -компактностью пространства X (условие 1), построим согласно аксиоме Цорна минимальное непустое, $\mathcal{S}$ -замкнутое, инвариантное относительно f множество M в X . Допустим, что M содержит более одной точки. Тогда в силу условия 2 существует такое непустое $A_0 \subset M$, что $\mu(A_0) =: \gamma < \mu(M)$. Пусть $A_n := \mathcal{S}(A_{n-1} \cup f(A_{n-1}))$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $A := A_0 \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$, $M_0 = \overline{A}$. Множество M_0 в силу построения непусто. Так как для любого $n \in \mathbb{N}$ множества A_n $\mathcal{T}$ -замкнуты и $A_n \subset A_{n+1}$, то вследствие алгебраичности оператора замыкания $\mathcal{T}$ множество A $\mathcal{T}$ -замкнуто. Следовательно, M_0 $\mathcal{S}$ -замкнуто. Кроме того, M_0 инвариантно относительно f . Это вытекает из непрерывности отображения f , так как множество A инвариантно относительно f в силу построения. Таким образом, $M_0 = M$, ибо M минимально. Одновременно, $\mu(M_0) \leq \gamma$ в силу условия 3 и $\mathcal{S}$ -полуаддитивности меры некомпактности μ . Заключаем, что M состоит из одной точки, которая является неподвижной точкой отображения f .

Литература

1. Кон П. Универсальная алгебра // М.: Мир, 1968.
2. Садовский Б.Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы // УМН, 1972. Т.27. № 1. С. 81-146.

Латвийский государственный университет
Кафедра математического анализа

О СОХРАНЕНИИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

В. Липшус

Пусть λ и γ — два класса 2π -периодических интегрируемых функций. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_n\}$ является множителем из класса λ в класс γ , и писать $\lambda \in (\lambda, \gamma)$, если для каждой f из λ с рядом Фурье

$$\sum c_k e^{ikx},$$

ряд

$$\sum \lambda_k c_k e^{ikx}$$

является рядом Фурье некоторой функции f_λ из γ .

Пусть $\omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности. Через C_ω будем обозначать класс тех 2π -периодических непрерывных функций, для модуля непрерывности которых справедлива оценка

$$\omega(f, \delta)_C = O(\omega(\delta)) \quad (\delta \rightarrow 0+).$$

Хорошо известно [1], стр. 176/, что для того, чтобы $\lambda \in (C, C)$ или $\lambda \in (C_\omega, C_\omega)$ при $\omega(\delta) = \delta$ необходимо и достаточно, чтобы ядро множителя

$$\Lambda(x) \sim \sum \lambda_k e^{ikx} \quad (I)$$

являлось рядом Фурье–Стилтьеса или, что то же самое, чтобы для средних Валле Пуссена порядка $n, 2n$ ряда /I/

$$\sigma_n \Lambda(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} s_k \Lambda(x)$$

где

$$s_n \Lambda(x) = \sum_{k=-n}^n \lambda_k e^{ikx}$$

выполнялось условие

$$\|s_n \Lambda\|_L = O(1)$$

В 1959 А. Зигмунд [12] доказал, что при $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) $\lambda \in (C_\omega, C_\omega)$ в том и только в том случае, когда формально проинтегрированное ядро множителя

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{ik} e^{ikx}$$

принадлежит классу Зигмунда в интегральной метрике L_+ , т.е. $\sup_{|h| < \delta} \|\mathcal{L}(\cdot + h) + \mathcal{L}(\cdot - h) - 2\mathcal{L}(\cdot)\|_L = O(\delta)$

В настоящей работе находим необходимые и достаточные условия для принадлежности λ к (C_ω, C_ω) для более широкого набора модулей непрерывности.

Теорема 1. Пусть модуль непрерывности $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt + \delta \int_\delta^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} dt = O(\omega(\delta)) \quad (\delta \rightarrow 0+) \quad (2)$$

Тогда $\lambda \in (C_\omega, C_\omega)$ в том и только в том случае, когда $\lambda \in L_+$.

Теорема 2. Пусть последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}$ такова, что $\lambda \in L_+$, но Λ не является рядом Фурье-Стилтьеса. Тогда существует модуль непрерывности $\omega(\delta)$ не удовлетворяющая условию (2), и функция $f \in C_\omega$ такая, что $f_\lambda \notin C_\omega$.

Пусть модуль непрерывности $\omega(\delta)$ такой, что $\omega(\delta)/\delta \rightarrow \infty$ ($\delta \rightarrow 0+$). Определим последовательность чисел $\Delta(\omega) = \{\Delta_n\}$ по индукции

$$\delta_0 = 2\pi, \quad \delta_{n+1} = \min \left\{ \delta : \max \left\{ \frac{\omega(\delta_{n+1})}{\omega(\delta_n)}, \frac{\delta_{n+1} \cdot \omega(\delta_n)}{\delta_n \cdot \omega(\delta_{n+1})} \right\} = \frac{1}{2} \right\}.$$

Рассмотрим последовательность индексов $N(\omega) = \{n_k\}$ где $n_k = [1/\delta_k]$

Теорема 3. Пусть $\omega(\delta)$ медленно убывает, т.е. $\omega(\delta)/\sqrt{\delta}$ монотонно возрастает при $\delta \rightarrow 0+$ Тогда $\lambda \in (C_\omega, C_\omega)$ в том и только в том случае, когда

$$\|\sigma_{n_{k+1}} \Lambda - \sigma_{n_k} \Lambda\|_L = O(1) \quad (k \rightarrow \infty)$$

Учитывая, что $\delta_k/\delta_{k+1} = O(1)$, тогда и только тогда, когда выполняется условие /2/, и что $\lambda \in L_+$ в том и только в том случае, когда $\|\sigma_{n_k} \Lambda - \sigma_{n_{k+1}} \Lambda\|_L = O(1)$ при $n/m = O(1)$, $n, m \rightarrow \infty$ увидим, что из теоремы 3 отчасти следует теорема I.

Литература

1. Zygmund A. Trigonometric series. Vol. 1// Cambridge: Cambridge University Press, 1959.
2. Zygmund A. On the preservation of classes of functions // J. Math. Mech., 1959, 8, No. 6, 889-895.

Институт кибернетики АН ЭССР
Сектор вычислительной математики

ЯДРО ПОЛУНЕПРЕРЫВНОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНОГО МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ

Л. Лооне

Пусть m — пространство ограниченных последовательностей с обычной нормой. Пусть $\tau_0 \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{U}_-(\tau_0)$ — некоторая левая окрестность точки τ_0 . Пусть для любой $\tau \in \mathcal{U}_-(\tau_0)$ определена матрица $A(\tau) = (a_{nk}(\tau))$, причем

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}(\tau)| < \infty \quad \forall \tau \in \mathcal{U}_-(\tau_0).$$

Значит, для любого $\tau \in \mathcal{U}_-(\tau_0)$ матрица $A(\tau)$ является оператором из m в m .

Определение 1. Говорят, что последовательность $x = (\xi_k)$ суммируема полунепрерывным последовательностным методом суммирования $(A(\tau))$ (короче — $\alpha(\tau)$ -суммируема) к числу a , если равномерно относительно n существует предел

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \sum_k a_{nk}(\tau) \xi_k = a.$$

Множество всех $\alpha(\tau)$ -суммируемых последовательностей обозначается через $\mathcal{S}_{\alpha(\tau)}$.

Если $a_{nk}(\tau) = a_{nk} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ то $\alpha(\tau)$ -суммируемость является суммируемостью полунепрерывным методом суммирования.

Пусть W — множество всевозможных последовательностей точек из $\mathcal{U}_-(\tau_0)$ которые сходятся к τ_0 т.е.

$$W = \{w = (\tau_m) : \tau_m \rightarrow \tau_0, \tau_m \in \mathcal{U}_-(\tau_0) \quad \forall m \in \mathbb{N}\}.$$

Каждый элемент $w = (\tau_m)$ из множества W определяет последовательностный метод суммирования (A_m) с $A_m = A(\tau_m)$. Пусть $K_{w, \alpha}$ — множество, определяющее ядро для этого α -метода $(A(\tau_m))$ (см. [1]).

Определение 2. Ядром полунепрерывного последовательностного метода $(A(\tau))$ (короче — $\alpha(\tau)$ -метода) называется ядро, определяемое множеством

$$K = \text{clco} \cup \{K_w : w \in W\}.$$

Тут символ "clco" обозначает выпуклую замкнутую оболочку.

Пусть K^0 — множество, определяющее ядро Кюппа (см. [1]).
Теорема 1. Включение

$$K(x) \subset K^0(x) \quad \forall x \in m \quad (I)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$1^0 \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_0-} \sup_n |a_{nk}(\tau)| = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots,$$

$$2^0 \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_0-} \sum_k a_{nk}(\tau) = 1 \text{ равномерно относительно } n,$$

$$3^0 \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_0-} \sup_n \sum_k |a_{nk}(\tau)| = 1.$$

Полунепрерывный $\alpha(\tau)$ -метод, для которого имеет место (I) называется ядерно-регулярным.

Теорема 2. Множеством сходящихся элементов по ядру $\alpha(\tau)$ -метода является множество $C_{\alpha(\tau)}$.

Теорема 3. Ядром полунепрерывного метода суммирования $(a_k(\tau))$ является ядро, определяемое множеством

$$K = \text{clco} \{ {}^t B_w(K^0) : w \in W \},$$

где $B_w = (b_{mk})$ с $b_{mk} = a_k(\tau_m)$.

Следствие 3.1. Полунепрерывный метод суммирования

$(a_k(\tau))$ является ядерно-регулярным тогда и только тогда когда

$$1^0 \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_0-} a_k(\tau) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots,$$

$$2^0 \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_0-} \sum_k a_k(\tau) = 1,$$

$$3^0 \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_0-} \sum_k |a_k(\tau)| = 1.$$

Определение 3. Говорят, что последовательность $x = (\xi_k)$ сильно суммируема к числу a полунепрерывным последовательностным методом $(A(\tau))$ (короче — сильно $\{a(\tau)\}$ -суммируема), если равномерно относительно n существует предел

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0-} \sum_k |a_{nk}(\tau)(\xi_k - a)| = 0.$$

Определение 4. Говорят, что множество A натуральных чисел является $\alpha(\tau)$ -нулевым если

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0-} \sup_n \sum_{k \in A} |a_{nk}(\tau)| = 0.$$

Если $\alpha(\tau)$ -метод $(A(\tau))$ является ядро-регулярным, то система $\mathcal{A}$ всех $\alpha(\tau)$ -нулевых множеств есть нуль-класс (ср. [2]).

Теорема 4. Пусть $\alpha(\tau)$ -метод $(A(\tau))$ — регулярный. Тогда ядро, определяемое множеством

$$K_{|\alpha(\tau)|} = \{f \in K^0: \text{Ker } f \supset \text{Ker } P_A, \forall A \in \mathcal{A}\},$$

является ядром, которое определяет в m сильную $\alpha(\tau)$ -суммируемость.

Здесь $\text{Ker } f = \{x \in m: f(x) = 0\}$ и $\text{Ker } P_A = \{x \in m: P_A x = 0\}$, где P_A — оператор выделения подпоследовательности, который "отбрасывает" все элементы последовательности, индексы которых входят в A (ср. [2]).

Теорема 5. Пусть $(A(\tau))$ и $(B(\tau))$ с $B(\tau) = (b_{nk}(\tau))$ — ядро-регулярные $\alpha(\tau)$ -методы. Каждая $|\alpha(\tau)|$ -суммируемая последовательность является $|\beta(\tau)|$ -суммируемой тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \sup_n \sum_{k \in A} |b_{nk}(\tau)| = 0$$

для любого $\alpha(\tau)$ -нулевого множества A .

Литература

1. Лооне Л. Ядро α -суммируемости Питерсена // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978. № 448. С. 46-51.
2. Лооне Л. Последовательный α -метод и система α -нулевых множеств // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987. № 770. С. 133-139.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

УНИВЕРСАЛЬНО РЕГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ

Б.М.Мамрон

Все рассматриваемые ниже операторы предполагается линейными и непрерывными. Оператор $T: L^p \rightarrow L^q$ называется 2-абсолютно суммируемым, если существует такое число C , что

$$\sum_{i=1}^n \|Tx_i\|^q \leq C \sup \left\{ \sum_{i=1}^n | \langle x_i, x' \rangle |^2 \mid x' \in (L^p)^*, \|x'\| \leq 1 \right\}$$

при любых n и любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in L^p$. Множество всех таких операторов обозначается символом $\Pi_2(L^p, L^q)$. Оператор $T: L^p \rightarrow L^q$ называется регулярым, если T - образ каждого порядково ограниченного в L^p множества порядково ограничен в L^q . Следуя аналогии с терминологией, принятой в [1], будем называть оператор $T: L^p \rightarrow L^p$ универсально регулярым, если оператор $\Pi T \Pi^{-1}$ регулярен, каков бы ни был изоморфизм $\Pi: L^p \rightarrow L^p$. Множество таких операторов Π будем обозначать символом $GL(L^p)$.

Теорема. I. Пусть $1 < p \leq 2$, $T: L^p \rightarrow L^p$ - компактный оператор. Следующие утверждения равносильны:

- 1) оператор T универсально регулярен;
- 2) оператор $\Pi T - T \Pi$ регулярен для любого $\Pi \in GL(L^p)$;
- 3) оператор $\Pi T + T \Pi$ регулярен для любого $\Pi \in GL(L^p)$;
- 4) $T \in \Pi_2(L^p, L^p)$.

Замечание. При $2 < p < \infty$ теорема I остается справедливой, если заменить п.4 утверждением $(q = \frac{p}{p-1})$:

$$*) T^* \in \Pi_2(L^q, L^q).$$

Следствие. Пусть $1 < p \leq 2$, $T: L^p \rightarrow L^p$ - компактный оператор. Если орбита оператора T "мала" в том смысле, что найдется оператор $S: L^p \rightarrow L^p$, удовлетворяющий условию:

$$S - \Pi T \Pi^{-1} \in \Pi_2(L^p, L^p) \quad \text{для любого } \Pi \in GL(L^p),$$

то $T \in \Pi_2(L^p, L^p)$.

При $p=2$ теорема 1 может быть уточнена следующим образом.

Теорема 2. Пусть T - оператор в комплексном пространстве L^2 , U - множество унитарных операторов в L^2 . Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) оператор UTU^{-1} регулярен при любом $U \in U$;
- 2) оператор $UT-TU$ регулярен при любом $U \in U$;
- 3) оператор $UT+TU$ регулярен при любом $U \in U$;
- 4) $T = \alpha E + C$ где α - скаляр, E - тождественный оператор, C - оператор Гильберта-Шмидта.

Замечание. Импликация 1) $\Rightarrow$ 4) остается справедливой в пространстве L^2 , построенном с помощью не чисто атомической меры, если условие 1) заменить условием:

$$1') \sup_{\substack{|y| \leq |x| \\ \text{любого } U \in U}} |UTU^{-1}y| < \infty \text{ п.в. для любого } x \in L^2 \text{ и}$$

Близкий к этому результат содержится в работе [2].

Литература

1. Халмош П., Сандер В. Ограниченные интегральные операторы в пространствах // М.: Наука, 1985.
2. Sourour A.R. Pseudo-integral operators // Trans. Amer. Math. Soc., 1979. V.253. P.339-363.

Ленинградский университет
Кафедра математического анализа

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АБЕЛЯ-ПУАССОНА К ЕЕ РЕШЕНИЮ

Е.В. Мартыненко, Е.В. Рабец

Пусть Srf - ряд Фурье функции f , $f(r, t)$ - абелевы средние для Srf ($0 \leq r < 1$), $P(r, t)$ - ядро Пуассона. Очевидно, что

$$f(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) P(r, t-x) dx,$$

т.е. абелевы средние ряда Srf совпадают с интегралом Пуассона от функции f .

Позволяя рассматривать пределы функций $f(r, t)$ при произвольном стремлении (r, t) к $(1, t_0)$, метод Абеля-Пуассона являясь эффективным при решении различных краевых задач.

Известно, что если $f(t)$ непрерывна на единичной окружности K , то существует гармоническая внутри K функция $u(r, t)$, равномерно стремящаяся к $f(t)$ при $r \rightarrow 1$: $u(r, t)$ - решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (I)$$

Оно имеет вид

$$u(r, t) = f(r, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) r^{|k|} e^{ikt} = f * P(r, t).$$

Конкретные задачи математической физики, и в частности, краевые задачи, приведшие к изучению тригонометрических рядов, показали практическую недостаточность решения этих задач в рамках классического анализа, оперирующего лишь рядами, коэффициенты которых стремятся к нулю. Рассмотрение произвольных тригонометрических рядов стало возможным лишь после работ В.И. Горбачук и М.Л. Горбачука [2] - [3], позволивших отождествить их с классом обобщенных периодических функций, причем все изучаемые в математической физике классы обобщенных функций (распределений, ультрараспределений, гиперфункций и т.д.) вкладываются в пространство формальных тригонометрических рядов и полностью описываются поведением коэффициентов или частных сумм своих рядов Фурье. Таким образом, классические задачи математической физики, и в частности, задача Дирихле приобретает естественную постановку именно в рамках формальных тригонометрических рядов.

Так как $P(r, t)$, $r < 1$, — аналитическая по x на K функция, то свертка $f * P(r, t-x)$ имеет смысл и в том случае, когда f — произвольная гиперфункция, и является гармонической внутри K .

Поскольку $P(r, t-x) \xrightarrow{r \rightarrow 1} \delta(t-x)$ (Π' — пространстве 2π -периодических распределений Шварца), то в силу непрерывности свертки в пространстве гиперфункций $\mathcal{U}'$ $f * P(r, t-x) \xrightarrow{r \rightarrow 1} f$. Таким образом, задача Дирихле разрешима в класса гиперфункций, т.е. для $\forall f \in \mathcal{U}'$ существует гармоническая внутри K функция $u(r, t)$ такая, что

$$u(r, t) \xrightarrow{r \rightarrow 1} f \quad (2)$$

В силу отмеченных выше результатов [2]–[3] всякий тригонометрический ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx}$ изображает некоторую гиперфункцию f , при этом $u(r, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx} = f * P(r, t-x)$.

Итак, $\mathcal{U}'$ — максимальный класс, в котором задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге однозначна разрешима. Ее решение дается формулой $u(r, t) = f * P(r, t-x)$, которая при f , пробегавшем $\mathcal{U}'$, описывает все гармонические внутри K функции.

Следующий естественно возникающий вопрос — о разрешимости задачи Дирихле для единичного круга в произвольном банаховом пространстве B : $\mathcal{U} \subset B \subset \mathcal{U}'$; в произвольном топологическом пространстве T : $\mathcal{U} \subset T \subset \mathcal{U}'$. Вопросы эти не лишены интереса, поскольку, как известно, она является разрешимой в гильбертовых пространствах L^p ($1 \leq p < \infty$). Известны также условия, при которых для любой функции f из пространства Орлича L_Φ^* $\|f(r, t)\|_\Phi \xrightarrow{r \rightarrow 1} \|f(t)\|_\Phi$ (см. [1]). Однако нетрудно показать, что в пространстве L^∞ задача Дирихле не разрешима, т.к. сходимость $f(r, t)$ к $f(t)$ ($r \rightarrow 1$) в L^∞ может выполняться лишь в смысле ω^* -сходимости.

Литература

1. Зигмунд А., Тригонометрические ряды // М.: Мир, 1965, т. I.
2. Горбачук В. А., Горбачук М. Л., Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений // К.: Наукова думка, 1984.
3. Горбачук В. А., Горбачук М. Л., Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции // ДАН СССР, 1981, Т. 257, № 4, С. 799–803.

Сумской педагогический институт
Кафедра высшей математики

МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ И КРИТЕРИЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

А.А.Маленцов, В.Г.Панов

Теория суммирования расходящихся рядов и последовательностей регуляризирующими матрицами была главной в трудах профессора Кангро Г.Ф. Естественной областью приложений этой теории является улучшение сходимости последовательностей и рядов в банаховых или локально выпуклых пространствах, построение сходящихся итерационных процедур. Одному неожиданному использованию регуляризирующих матриц посвящено наше сообщение.

Пусть $\mathcal{H}$ — строго направленное множество. Обозначим через $\Omega(\mathcal{H})$ класс бесконечных матриц, определенных следующим образом: матрица $(C_{m,\alpha})$, $\alpha \in \mathcal{H}$, $m \in \mathbb{N}$, принадлежит $\Omega(\mathcal{H})$, если для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется конечное число попарно различных индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ из $\mathcal{H}$, таких, что

$$C_{m,\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{если } \alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_m \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Определим в классе $\Omega(\mathcal{H})$ отношение частичного порядка. Будем писать $A \leq B$, если $A = B$ или, если для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдется элемент $\gamma(m) \in \mathcal{H}$ такой, что $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m < \gamma(m) < \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, где α_i , β_i — индексы строк с номером m в матрицах A и B , которым соответствуют элементы отличные от нуля.

Пусть X — произвольное топологическое пространство, Y — ТВП, $C(X, Y)$ — пространство всех непрерывных отображений из X в Y .

Определение 1. Будем говорить, что направленность

$\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{H}}$ из $C(X, Y)$ сходится равномерно в среднем к некоторой функции f на X , если $\{f_\alpha\}$ сходится к f по-точечно и выполняется условие: для любой окрестности V в Y и для любого $x \in X$ найдется матрица $A \in \Omega(\mathcal{H})$ такая, что для каждой матрицы $(C_{m,\alpha}) \in \Omega(\mathcal{H})$, $(C_{m,\alpha}) > A$ и любого натурального m найдется такая окрестность O_x в X , что для всех $x' \in O_x$ $\sum_{\alpha} C_{m,\alpha} \{f_\alpha(x') - f(x')\} \in V$

Теорема 1. Пусть направленность $\{f_\alpha\}$ из $C(X, Y)$ сходится поточечно к некоторой функции f . Тогда для непрерывности предельной функции необходимо и достаточно, чтобы сходимость $\{f_\alpha\}$ к f была равномерной в среднем.

Эта теорема была доказана для случая $Y = \mathbb{C}$ в работе [2]. Наиболее известным условием непрерывности предельной функции является квазиравномерная сходимость [1]. Немного изменяя это условие можно значительно усилить теорему Арцеля.

Пусть X — произвольное топологическое пространство, Y — равномерное пространство, $C(X, Y)$ — пространство непрерывных отображений из X в Y .

Определение 2. Направленность $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ из $C(X, Y)$ локально квазиравномерно сходится к отображению f , если она сходится к f поточечно и выполняется условие: для любого окружения V в Y , любого $\alpha_0 \in A$ и каждого $x \in X$ существует конечный набор индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > \alpha_0$ и окрестность O_x в X такие, что для любого $x' \in O_x$

$$\{ \alpha_i : (f_{\alpha_i}(x'), f(x')) \in V \} \cap \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \} \neq \emptyset.$$

Это определение переходит в обычное определение квазиравномерной сходимости, если X — компактно, а $Y = \mathbb{C}$.

Теорема 2. Пусть направленность $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ из $C(X, Y)$ сходится поточечно к отображению f . Тогда f непрерывно в том и только в том случае, когда $\{f_\alpha\}$ сходится к f локально квазиравномерно.

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория // М.: ИЛ, 1962.
2. Меленцов А.А., Панов В.Г. Эргодическое свойство пространства непрерывных функций // Некоторые вопросы теории операторов: Сб. науч. трудов. Свердловск: УрГУ, 1987. С. 60–63.

Уральский государственный университет
Кафедра математического анализа и теории функций

ОБ УМНОЖЕНИИ СХОДЯЩИХСЯ ПО МЕРЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Т. Метсмяги

Как известно, произведение Коши сходящихся числовых рядов сходится, если один ряд-сумматор сходится абсолютно.

В настоящей работе мы покажем, что для сходимости по мере это не так. Заодно мы найдем необходимые и достаточные условия для сходимости произведения Коши и прямоугольного произведения сходящихся по мере рядов.

Рассмотрим последовательность измеримых и почти всюду на $E = [a, b]$ конечных функций $(u_k(t))$, которая сходится по мере на E . Справедлива

Теорема А. Для того, чтобы преобразование

$$A_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} u_k(t)$$

переводило каждую сходящуюся по мере последовательность $(u_k(t))$ в последовательность измеримых и почти всюду конечных функций $(A_k(t))$, сходящуюся по мере, необходимо и достаточно выполнение условий

$$1^{\circ} \text{ существует } \lim_n a_{nk} = a_k,$$

$$2^{\circ} \text{ существует } \lim_n \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = a,$$

$$3^{\circ} \sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$$

4^o существует натуральное число L такое, что число отличных от нуля элементов любой строки матрицы меньше, чем L .

Пусть

$$\sum u_k \tag{1}$$

сходящийся числовой ряд и

$$\sum v_k(t) \tag{2}$$

произвольный сходящийся по мере ряд.

Рассмотрим произведение Коши

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k(t) \tag{3}$$

этих рядов. Произведение (3) является матричным преобразованием с

$$\bar{a}_{nk} = \begin{cases} u_{n-k}, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n \end{cases}$$

или

$$a_{nk} = \begin{cases} u_{n-k}, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

(см. [1], формула 8.II).

Справедлива следующая

Теорема 1. Произведение Коши рядов (1) и (2) сходится по мере тогда и только тогда, когда число ненулевых элементов в ряду (1) ограничено константой L .

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы А.

Рассмотрим прямоугольное произведение рядов (1) и (2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(u_n \sum_{i=0}^n v_i(t) + v_n(t) \sum_{i=0}^{n-1} u_i \right). \quad (4)$$

Преобразование (4) является матричным преобразованием с

$$a_{nk} = \begin{cases} u_n, & k < n, \\ \sum_{i=0}^n u_i, & k = n \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Справедлива следующая

Теорема 2. Прямоугольное произведение рядов (1) и (2) сходится по мере тогда и только тогда, когда ряд (1) сходится.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы А.

Если же ряд

$$\sum u_k(t) \quad (5)$$

сходится по мере, то справедливы аналогичные утверждения.

Теорема 3. Для того, чтобы произведение Коши рядов (5) и (2) сходилось по мере для любого ряда (2), сходящегося по мере, необходимо и достаточно, чтобы число ненулевых членов в ряде (5) было ограничено константой L .

Доказательство. Достаточность. Пусть в ряде (5) члены $u_{k_1}(t), \dots, u_{k_l}(t)$ отличны от нуля. Рассмотрим частичные суммы

$$\begin{aligned} W_n(t) &= \sum_{k=0}^n u_{n-k} V_k(t) = \\ &= u_{n-k_L}(t) V_{k_L}(t) + \dots + u_{n-k_L}(t) V_{k_L}(t), \end{aligned}$$

где $n > k_L$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \text{mes}\{t: |W_n(t)| > \alpha_1 + \dots + \alpha_L\} &\leq \text{mes}\{t: |u_{n-k_L}(t) V_{k_L}(t)| > \alpha_1\} + \\ &+ \dots + \text{mes}\{t: |u_{n-k_L}(t) V_{k_L}(t)| > \alpha_L\} = \delta_n, \end{aligned}$$

где $\lim \delta_n = 0$.

Необходимость следует из теоремы 1.

Теорема 4. Для того, чтобы прямоугольное произведение рядов (5) и (2) сходилось по мере для любого ряда (2), необходима и достаточна сходимость по мере ряда (5).

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы $W_n(t) = U_n(t) \cdot V_n(t)$ прямоугольного произведения (ср. (4)). Мы получим, что $\text{mes}\{t: |W_n(t)| > \alpha \cdot \beta\} \leq \text{mes}\{t: |U_n(t)| > \alpha\} + \text{mes}\{t: |V_n(t)| > \beta\} + \text{mes}\{t: |U_n(t)| > \alpha\} \text{mes}\{t: |V_n(t)| > \beta\} = \varepsilon_n$.

Так как $\varepsilon_n \rightarrow 0$, то достаточность доказана.

Необходимость вытекает из теоремы 2.

Литература

1. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов // Таллин. 1977.
2. Вихманн, Ф. О консервативности матриц относительно сходимости по мере // Изв. АН ЭстССР, Физ. матем. 1971. Т. 20. № 3. С. 275-278.

Таллинский политехнический институт
Кафедра высшей математики

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛИФТИНГОВ И СТРОГО ЛОКАЛИЗУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВ С МЕРОЙ

А. Монаков-Рогозкин

1. Пусть $\mathcal{T} = (T, \Sigma, \mu)$ — пространство со счетно-аддитивной мерой, определенной на σ -алгебре Σ подмножеств T . Положим $\mathcal{U}(\mu) = \{E \in \Sigma : \mu E = 0\}$ и пусть $\mathcal{B}(\mu)$ есть булева алгебра Σ/μ с мерой. Обозначим через $\pi: \Sigma \rightarrow \mathcal{B}(\mu)$ сохраняющий меру канонический гомоморфизм; мы полагаем также $\tilde{E} = \pi(E)$, $E \in \Sigma$. Пространство $\mathcal{T} = (T, \Sigma, \mu)$ называется пространством Магарам, если выполнены следующие условия:

1) мера μ локально конечна, т.е. для любого $E \in \Sigma$ с $\mu E > 0$ существует $B \in \Sigma$ такое, что $B \subseteq E$ и $0 < \mu B < \infty$;

2) $\mathcal{B}(\mu)$ — полная булева алгебра.

Отметим, что полноты меры, в общем, не предполагается. Пространство $\mathcal{T}$ с локально конечной мерой называется локализуемым, если из условий $E \in T$ и $E \cap F \in \Sigma$ для всех $F \in \Sigma$ с $\mu F < \infty$ следует, что $E \in \Sigma$. Говорят, что $\mathcal{T}$ — строго локализуемое пространство (с.л. пространство), если существует такое разбиение $\{T_i\}_{i \in I}$ множества T на подмножества T_i с $\mu T_i < \infty$, что $\Sigma = \{E : E \subseteq T, E \cap T_i \in \Sigma \text{ при всех } i \in I\}$, $\mu E = \sum_{i \in I} \mu(E \cap T_i)$ для любого $E \in \Sigma$.

Всякое с.л. пространство является локализуемым пространством Магарам. Для локализуемого пространства с полной мерой строгая локализуемость равносильна существованию лифтинга этого пространства ([1], [3]), т.е. такого булевского гомоморфизма $\rho: \mathcal{B}(\mu) \rightarrow \Sigma$, что $\rho(\tilde{T}) = T$, $\rho(\tilde{\emptyset}) = \emptyset$ и $\pi \circ \rho = id_{\mathcal{B}(\mu)}$.

Со всяким пространством $\mathcal{T} = (T, \Sigma, \mu)$ мы свяжем его пополнение по мере $\bar{\mathcal{T}} = (T, \bar{\Sigma}, \bar{\mu})$, а также его полную по мере локализуемую модификацию (п.л. модификация, [4]) $\mathcal{T}' = (T, \Sigma', \mu')$, т.е. наименьшее расширение $\mathcal{T}$ до полного по мере локализуемого пространства. Если $Z \subseteq T$, то через $\mathcal{Z} = (Z, \Sigma_Z, \mu_Z)$ обозначается соответствующее подпространство $\mathcal{T}$ (см. [4]).

Пусть Y — непустое множество и $\alpha: Y \rightarrow T$ есть отображение Y в пространство $\mathcal{T} = (T, \Sigma, \mu)$. Положим $X = \alpha(Y)$, $\Xi = \alpha^{-1}(\Sigma_X)$ и $\eta(\alpha^{-1}(E)) = \mu_X E$, $E \in \Sigma_X$. Пространство $\mathcal{Y} = (Y, \Xi, \eta)$ будем называть прообразом пространства $\mathcal{T}$ относительно отображения α .

2. Пусть $\mathcal{T} = (T, \Sigma, \mu)$ — пространство Магарам и $\mathcal{Q}$ — про-

пространство Стоуна булевой алгебры $\mathcal{B}(\mu)$, т.е. хаусдорфово экстремально несвязное пространство с компактной топологией $\mathcal{K}$, алгебра $\mathcal{A}$ открыто-замкнутых подмножеств которого изоморфна $\mathcal{B}(\mu)$. Изоморфизм $\lambda: \mathcal{B}(\mu) \rightarrow \mathcal{A}$ переносит меру μ на алгебру $\mathcal{A}$, а затем и на σ -алгебру Ω подмножеств $\mathcal{Q}$, порожденную $\mathcal{A}$ и совокупностью $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ всех множеств первой категории в $\mathcal{Q}$. Таким образом, на полной булевой алгебре $\mathcal{A}$ существует существенно положительная локально конечная мера $\nu = \lambda(\mu)$, т.е. пространство $\mathcal{Q}$ является гиперстоуновым, в частности, всякое множество из $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ нигде не плотно в $\mathcal{Q}$. Топологическое пространство с мерой $(\mathcal{Q}, \Omega, \nu, \mathcal{K})$ мы будем называть пространством Стоуна пространства $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, \Sigma, \mu)$. Изоморфизм $\omega: \mathcal{B}(\mu) \rightarrow \mathcal{B}(\nu)$ сохраняет меру.

3. Рассмотрим класс $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{Q})$ всех метрически изоморфных между собой, т.е. имеющих одно и то же фиксированное пространство Стоуна $(\mathcal{Q}, \Omega, \nu, \mathcal{K})$, пространств Магарам. Если $\mathcal{T} \in \mathcal{M}$, то будем писать $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{T})$. В классе $\mathcal{M}$ всегда имеются полные по мере с.л. пространства, таково, в частности, само пространство $(\mathcal{Q}, \Omega, \nu)$ с естественным лифтингом $\rho: \mathcal{B}(\nu) \rightarrow \mathcal{A}$. В работе [4] Д.Фремлин построил пример полного по мере локализуемого пространства Магарам, которое не является строго локализуемым, т.е. не имеет лифтинга. Поэтому возникает задача дать описание всех с.л. пространств данного класса $\mathcal{M}$ и тесно связанная с ней задача о построении всех пар $(\mathcal{T}, \rho)$, где $\mathcal{T} \in \mathcal{M}$ и ρ -лифтинг пространства $\mathcal{T}$. Заметим, что операции пополнения по мере или образования п.л. модификации не выводят пространство $\mathcal{T} \in \mathcal{M}$ из класса $\mathcal{M}$. Если Z - массивное подмножество пространства $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, \Sigma, \mu)$ из класса $\mathcal{M}$, то пространство $\mathcal{Z} = (Z, \Sigma_Z, \mu_Z)$ принадлежит тому же классу $\mathcal{M}$.

Предложение 1. Пусть $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}, \Omega, \nu)$ есть прообраз пространства $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, \Sigma, \mu)$ относительно отображения $\alpha: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{T}$. Если $\alpha(\mathcal{Q})$ - массивное множество в $\mathcal{T}$, то $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}(\mathcal{T})$.

4. Приведем некоторые утверждения о строго локализуемых пространствах и лифтингах.

Предложение 2. Пусть $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}, \Omega, \nu)$ есть прообраз строго локализуемого пространства $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, \Sigma, \mu)$ с рассеянной мерой относительно сюръективного отображения $\alpha: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{T}$. Тогда $\mathcal{Q}$ полно по мере тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ полно по мере, а отображение α инъективно.

Предложение 3. Всякий лифтинг пространства Магарам может быть, и притом, единственным способом, распространен на п.л. модификацию этого пространства.

Теорема 1. Локализуемое пространство Магарам, в котором существует лифтинг, является строго локализуемым.

Следствие. Если в пространстве Магарам существует лифтинг, то п.л. модификация этого пространства является с.л. пространством.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{T}=(T, \Sigma, \mu)$ - с.л.пространство. Тогда его пополнение $\bar{\mathcal{T}}$, а также прообраз $\mathcal{Y}=(Y, \bar{\Sigma}, \eta)$ относительно такого отображения $\alpha: Y \rightarrow T$, что $\alpha(Y)$ массивно в $\mathcal{T}$, являются с.л.пространствами, причем $\bar{\mathcal{T}}, \mathcal{Y} \in \mathcal{M}(\mathcal{T})$.

5. Пусть $\mathcal{T}=(T, \Sigma, \mu)$ - с.л.пространство из класса $\mathcal{M}$ и ρ - лифтинг этого пространства. Тогда ([2],[3]) существует отображение $\varphi_\rho: T \rightarrow \mathcal{Q}$ со следующими свойствами: 1) φ_ρ измеримо; 2) $\varphi_\rho(T)$ всюду плотно в $\mathcal{Q}$; 3) $\rho(\tilde{E}) = \varphi_\rho^{-1}(\lambda(\tilde{E}))$ для любого $E \in \Sigma$; 4) для $M \in \Omega$ имеем $\nu M = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(\varphi_\rho^{-1}(M)) = 0$.

Много полных по мере с.л.пространств с лифтингом можно получить, беря в качестве их всевозможные плотные в $\mathcal{Q}$ подпространства $\mathcal{X}=(X, \Omega_X, \nu_X)$. Действительно, для всякого $G \in \Omega_X$ существует единственное $A \in \mathcal{U}$ такое, что $\nu_X((A \cap X) \Delta G) = 0$. Полагая $\rho(\tilde{G}) = A \cap X$, мы получаем лифтинг пространства $\mathcal{X}$. Далее, рассматривая прообразы этих пространств относительно сюръективных отображений $\alpha: T \rightarrow X$, а также пополнения этих прообразов по мере, получаем еще более обширный класс с.л. пространств.

6. Существуют с.л. пространства, которые не описываются указанными в предыдущем разделе способами. Рассмотрим более общую конструкцию.

Будем говорить, что пространство $\mathcal{T}=(T, \Sigma, \mu)$ является слабым расширением пространства $\mathcal{T}_0=(T, \Sigma_0, \mu_0)$, если $\Sigma_0 \subset \Sigma$, $\mu|_{\Sigma_0} = \mu_0$ и для любого $E \in \Sigma$ существует такое $E_0 \in \Sigma_0$, что $\mu(E \Delta E_0) = 0$. Частными случаями слабых расширений пространства Магарам $\mathcal{T}_0$ являются его пополнение $\bar{\mathcal{T}}_0$ и п.л.модификация $\mathcal{T}_0'$.

Предложение 4. Всякое слабое расширение пространства с мерой метрически изоморфно этому пространству.

Для слабых расширений выполнен и аналог предложения 3.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{T}=(T, \Sigma, \mu)$ - полное по мере локализуе-

мое пространство Магарам и (Q, Ω, ν, κ) -его пространство Стоуна. Пространство $\mathcal{T}$ строго локализуемо тогда и только тогда, когда оно является слабым расширением прообраза некоторого вскду плотного в Q подпространства $X=(X, \Omega_X, \nu_X)$ относительно некоторого сюръективного отображения $\alpha: T \rightarrow X$. При этом формула

$$\rho(\tilde{E}) = \alpha^{-1}(\lambda(\tilde{E})), E \in \Sigma, \quad (1)$$

определяет лифтинг ρ пространства $\mathcal{T}$.

Из теоремы 3 и предложения 3 мы получаем отрицательный ответ на вопрос В.Л.Левина [1], всегда ли существует разделяющий лифтинг, т.е. такой, что отображение $\varphi_\rho: T \rightarrow Q$ инъективно (хотя бы для пространств с полной мерой).

7. Опишем, в заключение, как построить все полные по мере слабые расширения произвольного пространства (T, Σ_0, μ_0) .

Теорема 4. Пусть $\mathcal{T}_0 = (T, \Sigma_0, \mu_0)$ - пространство с мерой и $\mathcal{U}$ -некоторый σ -идеал подмножеств T , такой, что $\mathcal{U} \cap \Sigma_0 \subset \mathcal{U}(\mu_0)$. Тогда система $\Sigma = \Sigma(\Sigma_0, \mathcal{U})$ всех симметрических разностей $A \Delta N$, где $A \in \Sigma_0, N \in \mathcal{U}$, есть σ -алгебра, порожденная Σ_0 и $\mathcal{U}$, а формула

$$\mu(A \Delta N) = \mu_0 A, A \in \Sigma_0, N \in \mathcal{U}, \quad (2)$$

определяет на Σ такую меру, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mu)$. При этом пространство $\mathcal{T} = (T, \Sigma, \mu)$ является полным по мере слабым расширением пространства $\mathcal{T}_0$. Обратно, если $\mathcal{T} = (T, \Sigma, \mu)$ - полное по мере слабое расширение пространства $\mathcal{T}_0 = (T, \Sigma_0, \mu_0)$ и $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mu)$, то $\Sigma = \Sigma(\Sigma_0, \mathcal{U})$ и выполнено соотношение (2).

Можно построить пример не локализуемого пространства Магарам, в котором существует лифтинг.

Литература

1. Левин В.Л. Выпуклые интегральные функционалы и теория лифтинга // Успехи матем. наук, 1975. Т.30. Вып.2. С. 115-178.
2. Монаков-Рогозкин А.К. Об одном способе сравнения лифтингов // В сб.: Работы по мат. и физ., Таллин, 1974. С.15-34.
3. Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C. Topics in the theory of lifting // Berlin - Heidelberg - New York, 1969.
4. Fremlin D.H. Decomposable measure spaces // Z.wahr. verw. Gebiete, 1978, V. 45. P. 159-167.

Таллинский педагогический институт
Кафедра математики

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СВОЙСТВ БАНАХА - САКСА В ТЕРМИНАХ РАСТЯГИВАЮЩИХ МОДЕЛЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

М.И.Островский

В анализе важную роль играют теоремы о выделении из последовательностей данного класса сходящихся в том или ином смысле подпоследовательностей. Ряд теорем такого типа возник в связи со следующей теоремой С.Банаха и С.Сакса.

Теорема I [1]. Из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_p(0,1)$ ($1 < p < \infty$) можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, средние Чезаро $\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_{n_i}$, которой сходятся в сильной топологии.

При доказательстве этой теоремы в [1] была использована специфика пространств L_p ($1 < p < \infty$), позволяющая ограничиться рассмотрением слабо сходящихся последовательностей.

В связи с теоремой Банаха - Сакса были введены и исследованы следующие классы банаховых пространств (см., например, [2, глава II]):

Говорят, что банахово пространство X обладает (слабым) свойством Банаха - Сакса, если из любой ограниченной (слабо сходящейся) последовательности в X можно выделить подпоследовательность, средние Чезаро которой сходятся в сильной топологии. Будем записывать: $X \in BS$ ($X \in WBS$).

Оказалось удобным параллельно с этими свойствами рассматривать следующее (введенное Брнелем и Сачестоном, см. [2, с. 39]):

Говорят, что банахово пространство X обладает знакопеременным свойством Банаха - Сакса, если из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в X можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, знакопеременные средние Чезаро $\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (-1)^i x_{n_i}$, которой сходятся в сильной топологии. Будем записывать: $X \in ABS$.

При исследовании этих свойств оказалось полезным следующее утверждение, доказанное Брнелем и Сачестоном. Через R_0^N будем обозначать линейное пространство, состоящее из финитных последовательностей вещественных чисел.

Предложение [2, с. 5]. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность в банаховом пространстве X , не содержащая фундаментальных подпоследовательностей. В пространстве R_0^N можно ввести такую норму $L(\cdot)$, что для некоторой подпоследовательности $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и любого $a = \{a_1, \dots, a_k, 0, \dots\} \in R_0^N$ имеет место

$$\lim \|a_1 x'_{n_1} + \dots + a_k x'_{n_k}\| = L(a),$$

где предел берется по всем возрастающим наборам $n_1 < \dots < n_k$, когда $n_1 \rightarrow \infty$.

Полупространство R_0^N по норме L называется растягивающей моделью (РМ) пространства X , построенной по ограниченной последовательности $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Слабое и знакопеременное свойства Банаха — Сакса допускают следующее описание в терминах РМ.

Теорема 2 [2]. Следующие утверждения эквивалентны:

1) $X \notin ABS$ ($X \notin WBS$);

2) Для некоторого $\delta > 0$ найдется РМ пространства X , построенная по ограниченной (слабо сходящейся к нулю) последовательности, для которой $L(a) > \delta \sum_i |a_i|$.

3) Для любого $0 < \varepsilon < 1$ найдется РМ пространства X , построенная по ограниченной (слабо сходящейся к нулю) последовательности, для которой

$$(1 - \varepsilon) \sum_i |a_i| \leq L(a) \leq (1 + \varepsilon) \sum_i |a_i|.$$

Теорема 3 [2, с. 50]. 1) $[X \in ABS] \Leftrightarrow [X \in WBS] \wedge [X \text{ не содержит подпространств, изоморфных } l_1]$;

2) $[X \in BS] \Leftrightarrow [X \in ABS] \wedge [X - \text{рефлексивно}] \Leftrightarrow [X \in WBS] \wedge [X - \text{рефлексивно}]$.

Теоремы 2 и 3 оказались существенными в исследованиях по свойствам Банаха — Сакса, проведенных автором. Опишем основные результаты этих исследований [3 — 5].

I. Аналоги свойств Банаха — Сакса для общих регулярных матричных методов суммирования.

Пусть A — регулярный матричный метод суммирования, задаваемый матрицей $\{a_{ij}\}_{i=1}^{\infty}_{j=1}^{\infty}$ [6]. Будем записывать $X \in BSA$ ($X \in WBSA$), если в X из любой ограниченной (слабо сходящейся) последовательности можно выделить A —

суммируемую подпоследовательность. Будем говорить, что X обладает свойством Шура (и записывать: $X \in SCH$), если в X слабо сходящиеся последовательности сходятся сильно.

Теорема 4 [3] (см., также, [7]). Если $\lim_{i \rightarrow \infty} \sup |a_{ij}| = 0$, то $[X \in BSA] \Leftrightarrow [X \in BS]$ и $[X \in WBSA] \Leftrightarrow [X \in WBS]$. Если же $\lim_{i \rightarrow \infty} \sup |a_{ij}| > 0$, то $[X \in BSA] \Leftrightarrow [dim X < \infty]$ и $[X \in WBSA] \Leftrightarrow [X \in SCH]$.

Таким образом, замена метода Чезаро другими методами суммирования не приводит к выделению новых классов банаховых пространств.

II. Задача трех пространств.

Пусть X — банахово пространство, Y — замкнутое подпространство в X , X/Y — соответствующее фактор-пространство; $\mathcal{P}$ — некоторый подкласс банаховых пространств. Будем говорить, что для класса $\mathcal{P}$ задача трех пространств решается утвердительно (отрицательно), если справедлива (несправедлива) импликация:

$$[Y \in \mathcal{P}] \wedge [X/Y \in \mathcal{P}] \Rightarrow [X \in \mathcal{P}].$$

Теорема 5 [3]. Для ABS задача трех пространств решается утвердительно.

Из теорем 3 и 5 непосредственно вытекает, что для BS задача трех пространств решается утвердительно. Этот результат другим способом был получен в [8].

Теорема 6 [4]. Для WBS задача трех пространств решается отрицательно.

В работе [9] исследовалась более общая задача трех пространств, в которой Y , X/Y и X принадлежат не обязательно одному и тому же классу банаховых пространств.

III. Сравнение слабого свойства Банаха — Сакса со свойством Мазура.

Говорят [10], что банахово пространство X обладает свойством Мазура порядка p ($p > 1$) (записывается: $X \in Maz(p)$), если для любой слабо сходящейся к нулю последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в X найдется такой набор

$\{\alpha_{ij}\}_{j=1}^{\infty} \quad i=1$ положительных чисел, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} = 1 ; \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x_j \right\| = 0.$$

Это свойство оказалось полезным [10] для изоморфной классификации функциональных пространств Лоренца.

Теорема 7 [5]. Если $X \in \text{Maz}(\rho)$ при каком-нибудь $\rho > 1$, то $X \in \text{WBS}$.

Литература

1. Banach S., Saks S. Sur la convergence forte dans les champs L^p // Stud. math., 1930. V. 2. P. 51-57.
2. Beauzamy B., Lapreste J.T. Modèles étalés des espaces de Banach // Paris: Hermann, 1983.
3. Островский М.И. Свойства Банаха - Сакса, инъективность и растворы подпространств банахова пространства // Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1985. Вып. 44. С. 69-78.
4. Островский М.И. Задача трех пространств для слабого свойства Банаха - Сакса // Мат. заметки, 1985. Т. 38. № 5. С. 721-725.
5. Островский М.И. Свойства Банаха - Сакса и Мазура в банаховых пространствах // Мат. заметки, 1987. Т. 42. № 6. С. 786-789.
6. Кангро Г.Ф. Теория суммируемости последовательностей и рядов // Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 12 // М.: ВИНИТИ, 1974. С. 5-70.
7. Okada N., Ito T. Applications of spreading models to an equivalence of summabilities and the growth rate of Cesàro means // Proc. Japan Acad. Math. Sci., 1987. V. 63. N 3. P. 54-57.
8. Годун Б.В., Раков С.А. Свойство Банаха - Сакса и задача трех пространств // Мат. заметки, 1982. Т. 31. № 1. С. 61-74.
9. Островский М.И., Пличко А.Н. Свойства Банаха - Сакса и задача трех пространств // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций // Киев: Наукова думка, 1987. С. 96-105.
10. Новиков С.Я., Семенов Е.М., Токарев Е.В. О структуре подпространств пространств $\Lambda_p(\mu)$ // Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1984. Вып. 42. С. 91-97.

Физико-технический институт низких температур АН УССР
Отдел математической физики

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ Э. И П. СААБОВ

Э. Оя

Пусть X и Y — бесконечномерные банаховы пространства. Обозначим через $X \otimes_\alpha Y$ их тензорное произведение, т.е. пополнение алгебраического тензорного произведения $X \otimes Y$ по кросс-норме α . Через ε обозначается инъективная кросс-норма, определяемая равенством

$$\varepsilon(u) = \sup \{ |(x^* \otimes y^*)(u)| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1, y^* \in Y^*, \|y^*\| \leq 1 \}.$$

Э. и П. Саабами [1] установлено следующее достаточное условие для того, чтобы $X \otimes_\varepsilon Y$ содержало дополняемое подпространство, изоморфное c_0 .

Теорема 1 (см. [1]). Если одно из пространств X или Y содержит подпространство, изоморфное c_0 , то $X \otimes_\varepsilon Y$ содержит дополняемое подпространство, изоморфное c_0 .

Если X или Y содержит подпространство, изоморфное c_0 , то $X \otimes_\varepsilon Y$ также содержит подпространство, изоморфное c_0 . В то же время, например, $\ell_2 \otimes_\varepsilon \ell_2$ имеет подпространство, изоморфное c_0 , несмотря на то, что ℓ_2 не имеет подпространств, изоморфных c_0 .

В случае, когда одно из пространств X или Y обладает безусловным базисом, установлено следующее усиление теоремы 1.

Теорема 2. Пусть одно из пространств X или Y обладает безусловным базисом. Если $X \otimes_\varepsilon Y$ содержит подпространство, изоморфное c_0 , то $X \otimes_\varepsilon Y$ содержит дополняемое подпространство, изоморфное c_0 .

В [2] и [3] были изучены кросс-нормы ε_r , $1 \leq r \leq \infty$ (в [2] ε_r обозначена через g_r), из которых ε_∞ совпадает с ε . Отметим, что теоремы 1 и 2 являются точными в том смысле, что они с кросс-нормы $\varepsilon = \varepsilon_\infty$ не распространяются на остальные кросс-нормы ε_r , $1 \leq r < \infty$. В самом деле, тензорные произведения $\ell_r \otimes_{\varepsilon_r} \ell_\infty$, $1 \leq r, r < \infty$, не содержат до-

полняемых подпространств, изоморфных c_0 , несмотря на то, что l_∞ и поэтому также $l_{r \oplus \varepsilon_r} l_\infty$ содержат подпространство, изометрически изоморфное c_0 . Последнее утверждение вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. Если X обладает ограниченно полным базисом, то $X \oplus_{\varepsilon_r} Y$, $1 \leq r < \infty$, содержит дополняемое подпространство, изоморфное c_0 , тогда и только тогда, когда Y содержит дополняемое подпространство, изоморфное c_0 .

Литература

1. Saab E., Saab P. On complemented copies of c_0 in injective tensor products// Contemp. Math. 1986. V. 52. P. 131-135.
2. Saphar P. Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires// Studia Math. 1970. V. 38. N° 1-5. P. 71-100.
3. Saphar P. Hypothèse d'approximation à l'ordre r dans les espaces de Banach et approximation d'applications r absolument sommantes// Israel J. Math. 1972. V. 13. P. 379-399.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

О НЕЭФФЕКТИВНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.В. Ревенко

Пусть S - направленное множество; X - банахово пространство; σ - σ -алгебра подмножеств множества S , содержащая все одноэлементные подмножества и все подмножества $U_s = \{t: t \geq s\}$ ($s \in S$); $B_1(S, \sigma)$ - комплексное банахово пространство, состоящее из всех равномерных на S пределов последовательностей функций вида $x(s) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \chi_{E_i}(s)$ ($s \in S$; $u_i \in X$, $\|u_i\| \leq C$ ($i \in \mathbb{N}$); $E_i \in \sigma$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ ($i \neq j$)). Норма в пространстве $B_1(S, \sigma)$ определяется равенством $\|x\| = \sup_{s \in S} \|x(s)\|$.

Рассматривается линейный регулярный оператор A , определенный на пространстве $B_1(S, \sigma)$ равенством: $(Ax)(t) = \int x(s) d\mu_t$ ($t \in S$), где μ_t - действительные меры ограниченной вариации $v(\mu_t, S)$, определенные на σ . Интеграл понимается в смысле Бохнера.

Теорема. Линейный регулярный оператор A неэффективен на пространстве $B_1(S, \sigma)$, если для любого $t \in S$ $v(\mu_t, U_t) = 0$, $\inf_s \inf_{t \geq s} (\mu_s\{t\} - \mu_t\{t\}) > 0$ и для любого $s \in S$ функции $\mu_t\{t\}$ монотонно убывают на множестве U_s .

Следствие 1. Действительная треугольная матрица $A = (a_{nk})$ неэффективна на множестве всех ограниченных банаховозначных последовательностей, если $\inf_n (a_{nn} - a_{n+1,n}) > 0$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{a_{nk}\}_{n=k}^{\infty}$ монотонно убывает.

Следствие 2. Действительная матрица $A = (a_{ikmn})$ ($a_{ikmn} = 0$ ($m > i$, $n > k$)) неэффективна на множестве всех ограниченных банаховозначных последовательностей, если $\inf_{m,n} (a_{mnmn} - a_{m+1,n-1,mn}) > 0$ и для любого (m, n) последовательность $\{a_{ikmn}\}_{i \geq m, k \geq n}$ монотонно убывает.

Воронежский государственный педагогический институт
Кафедра алгебры

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ И АНАЛИЗ ФУРЬЕ

Я. Сикк

Первые результаты в теории тригонометрических рядов, которые связывают коэффициенты Фурье, а также (L^p, L^p) мультипликаторы (при $p \in [1; \infty]$) с множителями суммируемости, были получены немецким математиком Г.Гёсом [7]. Его результаты были обобщены Тартуским математиком М.Тынновым на более широкий класс множителей суммируемости [6].

В конце 60-тых годов в работах Г.Кангро (см. [1,2]) были определены понятия пространств C^λ и m^λ , а также множители суммируемости со скоростью классов (A^λ, B^μ) , (A^λ, B^μ_0) и другие. Образовалась теория суммируемости со скоростью, которая влияла и на дальнейшее развитие анализа Фурье. В 70-тых годах Я.Сикк [3,4] выработал методику которая позволяет связывать множители суммируемости со скоростью с мультипликаторами. Например, найдены были необходимые и достаточные условия для того, чтобы $E \in (L, X)$, где X один из пространств $W^r L_\Phi$, $W^r C$, $W^r L$, $Lip(\alpha, p)$ при $r \in (1, \infty)$ или $W^r Lip(\alpha, p)$. При этом решающим являлось понятие T^λ -конструктивного пространства X_{T^λ} как пространства всех тех тригонометрических рядов $f(x) = \sum_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, для которых

$$\lim_n \|E_n f - f\|_X = 0$$

и

$$\lambda_n \|E_n f - f\|_X = O(1),$$

где $0 < \lambda_n \uparrow$ и $E_n f = \sum_{|k| \leq \lambda_n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.

Было доказано следующая основная лемма: если числа E_k являются множителями суммируемости со скоростью класса (T^λ_0, T^μ_0) то $E = (E_k)$ является мультипликатором класса $(X_{T^\lambda}, X_{T^\mu})$. Недавно эти результаты автора были обобщены С.Бароном на двойные ряды [8].

В настоящее время нами найден новый подход изучения коэффициентов Фурье и мультипликаторов. Этот подход основывается на понятиях рейт-пространств и K -мультипликаторов, определенных автором. K -мультипликатор (мультипликатор

Кангро) является обобщением понятия множителей суммируемости со скоростью. Приведем здесь определение одного типа K -мультипликаторов.

Определение. Пусть $m(\lambda)$ и $m(\mu)$ рейт-пространства (см. [5], определение), $A = (a_{nk})$ и $B = (b_{nk})$ - методы суммирования. Последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ является K -мультипликатором класса $(Am(\lambda), Bm(\mu))$, если при каждом $(\sum_{k=1}^n a_{nk} u_k) \in m(\lambda)$ вытекает, что последовательность частичных сумм $(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k b_{nk} u_k) \in m(\mu)$.

Нами выработанная методика в том числе дает следующие результаты:

Теорема. Пусть J - метод сходимости, $(c_k) \in \hat{L}^p$, $p \in (1, \infty)$, $\lambda = (n^{\frac{1}{p}})$, $\mu = (n^{\frac{1}{q}-1})$.

а) Если ε является K -мультипликатором класса $(Jm(\lambda), Jc)$ то $\varepsilon \in L^q$ (при $p^{-1} + q^{-1} = 1$.)

б) Если ε является K -мультипликатором класса $(Jm(\mu), Jc)$ то $\varepsilon \in (L^p, L^q)$.

Литература

1. Кангро Г., О множителях суммируемости типа Бора-Харди для заданной скорости, Изв. АН ЭстССР Физ., Матем., 1969, 18, №2, 137-146.
2. Кангро Г., Множители суммируемости для рядов λ -ограниченных методами Риса и Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 130-154.
3. Сикк Я., О дополнительных пространствах коэффициентов Фурье со скоростью. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 222-235.
4. Сикк Я., О некоторых T^λ -конструктивных пространствах и мультипликаторах класса $(X_\lambda, X_{\lambda\mu})$. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 163-179.
5. Сикк Я., Рейт-пространства в теории суммируемости. Насходящий сборник тезисов.
6. Тыннов М., Множители суммируемости, коэффициенты Фурье и мультипликаторы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, 192, 82-97.
7. Goes G., Charakterisierung von Fourierreiheffizienten mit einem Summierbarkeitsfaktorentheorie und Multiplikatoren. Studia math., 1960, 19, 133-148.
8. Baron S., Certain constructive spaces and multipliers of double Fourier series. Analysis 7, 153-173, 1987.

Эстонская сельскохозяйственная академия
Кафедра математики

Я.Сикк

Пусть $\lambda = (\lambda_n)$, $0 < \lambda_n \uparrow$, $n = 1, 2, \dots$. Кангро [1] назвал сходящуюся последовательность $x = (x_n)$ с $\lim x_n = x$ λ -сходящейся, если существует конечный предел $\beta = \lim \beta_n$, где $\beta_n = \lambda_n(x_n - x)$. Аналогично, сходящуюся последовательность x он назвал λ -ограниченной, если $\beta_n = O(1)$. Множество всех λ -сходящихся последовательностей он обозначал через C^λ , а множество всех λ -ограниченных последовательностей через m^λ . Исходя из пространств C^λ и m^λ нами рассматриваются наиболее широкие классы последовательностей, которые мы называем рейт-пространствами.

Определение 1. Пусть $\lambda = (\lambda_n)$, $\lambda_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, а X - линейное пространство последовательностей. Пространство всех тех последовательностей $x \in C^\lambda$, для которых $\beta \in X$ (при $\beta_n = \lambda_n(x_n - x)$) называется X_c^λ -рейт-пространством и обозначается через $X_c(\lambda)$.

Подпространствами пространства $X_c(\lambda)$ являются пространства $X_{c_0}(\lambda)$, $X_{\ell^p}(\lambda)$ и другие.

Определение 2. Пространство всех тех последовательностей x , для которых $(\lambda_n x_n) \in X$, называется X^λ -рейт-пространством и обозначается через $X(\lambda)$.

Приведем некоторые примеры рейт-пространств.

1. Если $0 < \lambda_n \uparrow$ и $X = C$, то $X_c(\lambda) = C^\lambda$, а при $X = m$ имеем $X_c(\lambda) = m^\lambda$.

2. Пусть $\lambda = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$. Если $X = C$, то $X(\lambda)$ является пространством всех таких последовательностей для которых $((-1)^n x_n) \in C$.

3. Пусть $\lambda = (n^{-1})$, тогда $\ell^p(\lambda)$ является пространством всех таких последовательностей, для которых $(n^{-1} x_n) \in \ell^p$.

Для рейт-пространств мы определяем следующий матричный оператор: пусть $\mu = (\mu_n)$ где $\mu_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$ и пусть A - некоторый метод суммирования последовательностей, переводящий x в последовательность Ax . Если при

каждом $x \in X_c(\lambda)$ оказывается, что $Ax \in Y_c(\mu)$, то метод A определяет оператор $A \in (X_c(\lambda); Y_c(\mu))$. Аналогичным образом определены нами матричные операторы классов $(X(\lambda); Y(\mu))$, $(X_c(\lambda); Y(\mu))$ и $(X(\lambda); Y_c(\mu))$.

Оказывается, что изучение матричных операторов для ре-
йт-пространств основывается на соответствующих операторах
 $(X; Y)$ и $(X; \mathbb{C})$. Нами получены следующие резуль-
таты.

Теорема. Пусть $\lambda = (\lambda_n)$, где $\lambda_n \neq 0$ и $\mu = (\mu_n)$, где $\mu_n \neq 0$ при $n = 1, 2, \dots$. Пусть $A = (a_{nk})$ - метод суммирования $A(\lambda^{-1}, \mu) = (a_{nk} \lambda_k \mu_n^{-1})$, $A(\lambda, 1) = (a_{nk} \lambda_k^{-1})$ и $A(1; \mu) = (a_{nk} \mu_n)$, тогда

1. $A \in (X(\lambda); Y(\mu))$ тогда и только тогда, когда $A(\lambda^{-1}, \mu) \in (X; Y)$.

2. $A \in (X; Y(\mu))$ тогда и только тогда, когда $A(1, \mu) \in (X; Y)$,

3. $A \in (X(\lambda); Y)$ тогда и только тогда, когда $A(\lambda^{-1}, 1) \in (X; Y)$,

4. $A \in (X_c(\lambda); Y(\mu))$ тогда и только тогда, когда $A(\lambda^{-1}, \mu) \in (X; Y)$

Следствие. Метод $A \in (l^p(\lambda); m(\mu))$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_n |\mu_n|^p \sum_k |a_{nk} \lambda_k^{-1}|^p < \infty.$$

Литература

1. Кангро Г. Множители суммируемости для рядов λ -ограниченных методами Риса и Чезаро // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971. № 277. С. 130-154.

Эстонская сельскохозяйственная академия
Кафедра математики

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В СУПЕРПРОСТРАНСТВАХ

О.Г. Смолянов

1. Суперанализ. Используется подход, развитый в работах В.С.Владимирова и И.В.Воловича (см.[1]). Всюду далее $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ — вещественная коммутативная банахова супералгебра (КСА); если $T = T_0 \oplus T_1$ и $S = S_0 \oplus S_1$ — топологические супермодули (СМ) над КСА Λ , то (вещественным) суперпространством над парой СМ (T, S) называется топологическое векторное пространство $T_0 \oplus S_1$; аналогично определяется комплексное суперпространство; при этом роль Λ играет ее комплексификация $\Lambda^{\mathbb{C}}$. Если E и G — два вещественных суперпространства над парами (T^0, S^0) и (T^1, S^1) СМ, то отображение $q: E \rightarrow G$ называется (Λ) -линейным, если оно является сужением на E некоторого Λ -линейного отображения модуля $T^0 \oplus S^0$ в модуль $T^1 \oplus S^1$; при этом множество всех линейных отображений из E в G наделенное естественной структурой суперпространства и подходящей топологией, обозначается символом $\lambda(E, G)$. Если τ — некоторый метод дифференцирования отображений топологических векторных пространств, то отображение q суперпространства E в суперпространство G называется τS -дифференцируемым в точке $x \in E$, если, рассматриваемое как отображение топологического векторного пространства (ТВП) E в ТВП G , оно обладает в этой точке τ -производной $g'(x)$ и $g'(x) \in \lambda(E, G)$. Далее предполагается, что все встречающиеся производные отображений суперпространств — это производные по системе компактных множеств [2]. Пример. Пусть $A = A_0 \oplus A_1$ — $\mathbb{Z}_2$ -градуированное локально выпуклое пространство, $T = \Lambda \otimes A_0$, $S = \Lambda \otimes A_1$; тогда $T_0 \oplus S_1 = (\Lambda_0 \otimes A_0) \oplus (\Lambda_1 \otimes A_1)$ (символ $\otimes$ обозначает тензорное произведение, наделенное подходящей топологией и пополненное по ней).

2. Гамильтоновы системы. Суперпространство называется свободным, если оно может быть получено так, как описано в последнем примере. Далее предполагается, что все суперпространства являются свободными. Гамильтонова система —

это набор $(E, \bar{b}, \mathcal{H})$, где E — суперпространство, называемое фазовым пространством системы, $\mathcal{H}: E \rightarrow \Lambda$ — функция Гамильтона, $\bar{b}$ — симплектическая структура, т.е. сужение на $E' \times E'$ Λ -билинейного отображения $\bar{b}: E'_\Lambda \times E'_\Lambda \rightarrow \Lambda$ ($E'_\Lambda = \Lambda \oplus A$, $E' = \lambda(E, \Lambda)$), обладающего следующими свойствами: (1) сужение $\bar{b}$ на $A'_0 \times A'_0$ представляет собой невырожденную антисимметричную вещественную билинейную форму; (2) сужение $\bar{b}$ на $A'_1 \times A'_1$ является обычным скалярным произведением; (3) сужения $\bar{b}$ на $A'_0 \times A'_1$ и на $A'_1 \times A'_0$ равны нулю. Уравнение Гамильтона, соответствующее этой гамильтоновой системе, — это уравнение $\dot{f}'(t) = I_b(\mathcal{H}'(\dot{f}(t)))$ относительно функции $\dot{f}: R^1 \rightarrow E$; здесь I_b — линейное отображение суперпространства E' в E , порожденное функцией $\bar{b}$. Пример. Пусть H — комплексное гильбертово пространство, $H_\mathbb{R}$ — вещественное пространство, получаемое из H сужением поля скаляров до R^1 , $\bar{b}(x, \bar{x}) = b(ix, \bar{x})$, $x \mapsto \bar{x}$ — стандартная инволюция в H , B — самосопряженный оператор в H , коммутирующий с инволюцией, $\mathcal{H}(x, \bar{x}) = i(Bx, \bar{x})$. Тогда для гамильтоновой системы $(H_\mathbb{R}, \bar{b}, \mathcal{H})$ уравнением Гамильтона является обычное уравнение Шредингера.

3. Псевдодифференциальные операторы (ПДО). Вспомогательно далее Q, P — суперпространства, причем $Q' = P$, $P' = Q$, $E = Q \times P$, $\bar{b}$ — каноническая симплектическая структура (на E). Символом Φ_E обозначается "супермера Фейнмана" на E ; так называется "суперраспределение" на E , определяемое как Λ^C -значный функционал на суперпространстве Λ^C -значных функций на E , являющийся преобразованиями Фурье супермер на E' , задаваемый с помощью равенства Парсеваля своим преобразованием Фурье $(q, p) = \exp i \langle p, q \rangle$ (определение супермеры введено в [3]; там же определена и супермера Фейнмана). ПДО $\hat{\mathcal{H}}_\tau$ в пространстве $\mathcal{M}$ супермер на Q , обладающий τ -символом ($\tau \in [0, 1]$) $\mathcal{H}$, определяется — в естественных обозначениях — так:

$$(\hat{\mathcal{H}}_\tau v)(dq_1) = \iint \mathcal{H}(\tau q_1 + (1-\tau)q_1, p) e^{i \langle p, q \rangle} v(dq) \Phi_E(dq, dp).$$

ПДО в пространстве (некоторых) Λ -значных функций на E , обладающий τ -символом $\mathcal{H}$, определяется так:

$$(\hat{\mathcal{H}}_\tau \varphi)(q_1) = \iint \mathcal{H}(\tau q + (1-\tau)q_1, p) \varphi(q) e^{-i \langle q_1, p \rangle} \Phi_E(dq, dp).$$

Наконец, если $Q = Q_1 \times Q_2$, где Q_1 и Q_2 — два экземпляра

одного и того же суперпространства, то пусть χ — тензорное произведение (пополненное по подходящей топологии) пространства Λ^c -значных функций на Q_1 и пространства супермер на Q_2 ; его элементы можно отождествить с (принимая значения в подходящем пространстве) функциями двух аргументов: точки из Q_1 и множества из $\mathcal{B}$ -алгебры борелевских подмножеств вещественного подпространства четной части суперпространства Q_2 ; это вещественное подпространство является каноническим образом четной составляющей Z_2 -градуированного локально выпуклого пространства, порождающего — как описано в п. I — суперпространство χ . При подходящих ограничениях суперпространство χ можно считать двойственным самому себе (относительно естественной Λ^c -значной Λ -билинейной функции на $\chi \times \chi$). ПДО с τ -символом $\mathcal{H}$ в χ определяется так: $\langle \hat{\mathcal{H}}_\tau^* w_1, w_2 \rangle = \langle \hat{\mathcal{H}}_\tau(v_1 \otimes v_2), v_1 \otimes v_2 \rangle$, $w_k = v_k \otimes v_k$.

4. Квантование. τ -квантование (по Шредингеру) гамильтоновой системы $G = (E, \mathfrak{b}, \mathcal{H})$ — это гамильтонова система $(S_Q \times \Sigma_Q, \mathfrak{b}_Q, P_\tau)$; здесь Σ_Q — некоторое (супер)пространство Λ^c -значных функций на Q , S_Q — некоторое (супер)пространство Λ -линейных отображений Σ_Q в Λ^c ; последнее пространство естественно назвать пространством обобщенных супермер (=распределений) на Q ; $\mathfrak{b}_Q$ — каноническая симплектическая структура на $S_Q \times \Sigma_Q$, $P_\tau(v, \varphi) = -i \langle \hat{\mathcal{H}}_\tau v, \varphi \rangle$ ($\tau \in [0, 1]$), $\hat{\mathcal{H}}_\tau$ — ПДО в $\mathcal{M}$ с τ -символом $\mathcal{H}$. Соответствующее описанной гамильтоновой системе "уравнение Гамильтона" линейно и фактически состоит из двух (линейных) уравнений Шредингера — одного относительно функций со значениями в S_Q , и другого — относительно функций со значениями в Σ_Q . Можно было бы также определить квантование гамильтоновой системы G как гамильтонову систему с фазовым пространством χ .

5. Нелинейное и вторичное квантование. Мы сохраняем обозначения и предположения предыдущих пунктов. Пусть n — натуральное число и $\mathcal{E} = E \times \dots \times E$ (n сомножителей), $h: \mathcal{E} \rightarrow \Lambda$. Набор $(\mathcal{E}, \mathfrak{b}, \mathcal{H}, h)$ естественно назвать гамильтоновой системой, состоящей из n одинаковых подсистем (каждая из них описывается функцией Гамильтона $\mathcal{H}$) с взаимодействием, ко-

торое описывается функцией $\hat{h}$. Нелинейное квантование такой системы — это гамильтонова система $(S_Q \times \bar{S}_Q, \hat{\theta}_Q, P_\tau^n)$, где P_τ^n определяется так:

$$P_\tau^n(\nu, \varphi) = -i \langle \hat{\mathcal{H}}_\tau \nu, \varphi \rangle - i/n \langle \hat{h}_\tau(\nu \otimes \dots \otimes \nu), \varphi \otimes \dots \otimes \varphi \rangle.$$

"Уравнение Гамильтона" для нее — это нелинейная система уравнений Шредингера

$$i \dot{\nu}(\cdot, t) = \hat{\mathcal{H}}_\tau \nu + \langle \hat{h}_\tau(\nu \otimes \dots \otimes \nu), (\varphi \otimes \dots \otimes \cdot) \rangle$$

$$i \dot{\varphi}(\cdot, t) = \hat{\mathcal{H}}_{1-\tau} \varphi + \langle (\nu \otimes \dots \otimes \cdot), \hat{h}_{1-\tau}(\varphi \otimes \dots \otimes \varphi) \rangle.$$

Таким образом, описанное квантование приводит к гамильтониану с полиномиальной нелинейностью четной степени; отметим в этой связи замечание в [4] о том, что полевые модели с полиномиальной нелинейностью нечетной степени в гамильтониане не имеют физического смысла. Если теперь $Q = Q_1 \times Q_2$, $k: Q_1 \times Q_1 \times Q_1 \rightarrow \Lambda$, то нелинейное τ -квантование системы $(E \times E \times E, \hat{\theta}, \mathcal{H}, k)$ — это гамильтонова система $(\chi, \hat{\theta}_\chi, P_\tau^\chi)$, где $\hat{\theta}_\chi$ — аналог $\hat{\theta}$ из примера п.2, а P_τ^χ определяется с помощью равенства $P_\tau^\chi(w_1, w_2) = -i \langle \hat{\mathcal{H}}_\tau w_1, w_2 \rangle - i/6 \langle \hat{k}_\tau(v_1 \otimes v_1 \otimes v_1), (\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2 \otimes \bar{v}_2) \rangle - i/6 \langle \hat{k}_\tau(v_1 \otimes v_2 \otimes v_2), (\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2) \rangle$ (χ можно считать (супер)гильбертовым пространством [3]). Таким образом, получен гамильтониан с полиномиальной нелинейностью нечетной степени $(2n/\tau; n=3, \tau=2)$. Вторичное квантование — это τ -квантование гамильтоновой системы, полученной в результате соответствующего нелинейного квантования.

Литература

1. Хренников А.Ю. Функциональный суперанализ// УМН, 1968, Т. 43. В. 2. С. 87-114.
2. Смолянов О.Г. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения// М.: МГУ, 1979.
3. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Псевдодифференциальные операторы и преобразование Фурье на суперпространстве// ДАН СССР, 1966. Т. 299. № 4. С. 816-820.
4. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля// М.: Наука, 1960.

Московский государственный университет
Кафедра теории функций и функционального анализа

ВКЛЮЧЕНИЕ ПОЛЯ СИЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТИ В FK -ПРОСТРАНСТВЕ

В. Соомер

Пусть метод суммирования A определен бесконечной матрицей $A=(a_{nk})$, где $a_{nk} > 0$. Последовательность $x=(x_k)$ называется A -суммируемой, если существует конечный предел $\lim_n \sum_k a_{nk} x_k$, и сильно A -суммируемой (со степенью p , где $p=(p_k)$, $p_k > 0$) к числу ℓ , если

$$\lim_n \sum_k a_{nk} |x_k - \ell|^{p_k} = 0.$$

Через C_A обозначим поле суммируемости метода A (т.е. C_A - множество всех A -суммируемых последовательностей), а через $[C_A]^p$ обозначим поле сильной суммируемости метода A .

В статье [1] доказана

Теорема 1. Пусть $1 \leq p_k \leq H < \infty$ и $\lim_n \sum_k a_{nk} \neq 0$. Тогда $[C_A]^p \subset C_A$.

Оказывается, что при $0 < p_k < 1$ соотношение $[C_A]^p \subset C_A$ в общем не имеет места.

Пусть $p=(p_k)$ и

$$\mathcal{M}(p) = \{ x=(x_k) \mid \exists \ell, \lim_n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |x_k - \ell|^{p_k} = 0, \}$$

т.е. $\mathcal{M}(p)=[C_A]^p$, где A - метод арифметических средних. Через $\mathcal{M}$ обозначим пространство ограниченных последовательностей. В статье [3] доказана следующая

Теорема 2. Пусть X - FK -пространство и $0 < p_k = \tilde{p} < 1$, $k=0, 1, \dots$, тогда из $\mathcal{M}(p) \subset X$ следует, что $X \supset \mathcal{M}$.

Если $X = C_A$, где A - метод арифметических средних, то из теоремы 2 вытекает, что при $0 < p_k = \tilde{p} < 1$ включение $[C_A]^p \subset C_A$ не имеет места (напомним, что никакой регулярный метод не суммирует всех ограниченных последовательностей).

Известно (см. [2]), что если A - регулярный матричный метод, то при $0 < p_k < q_k$ и $q_k/p_k = O(1)$ имеет место включение $[C_A]^{q_k} \subset [C_A]^{p_k}$. На основе этого факта и теоремы 2 получается следующая

Теорема 3. Пусть X - FK -пространство и $p=(p_k)$, где

$0 < \varepsilon \leq p_k \leq 1$. Тогда из $\pi(p) \subset X$ следует, что $X \supset m$.

Рассмотрим теперь случай, где $\lim_k p_k = \infty$. Имеет место

Теорема 4. Пусть X - корегулярное FK -пространство и A - матричный метод типа $c_0 \rightarrow c_0$. Тогда существует ограниченная последовательность x , что $x \in [c_1]^p$, но $x \notin X$.

Замечание. Отметим, что аналог теоремы 4 имеет место и тогда, когда вместо матричного метода A будем рассматривать последовательностный метод суммирования α , заданный последовательностью матриц $\alpha = (A_i)$. (Такие методы изложены например в статье [1]).

Литература

1. Соомер В. Последовательностные методы сильного суммирования // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984. № 66I. С. 42-48.
2. Maddox, I.J. Spaces of strongly summable sequences // Quart. J. Math., Oxford ser. (2). 1967, V. 18. P. 345-355.
3. Thorpe, B. An extension of Kuttner's theorem // Bull. London Math. Soc., 1981. V. 13. № 4. P. 301-332.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

ВЫПУКЛОСТЬ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ НЕЙРЛУНДА

А. Тали

1. Пусть $\mathcal{G}$ – отделимое локально выпуклое пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), топология которого определена семейством полунорм $\mathcal{P} = \{p_i\}$. Пусть, далее, A_α – методы суммирования последовательностей $X = (\xi_n)$, где $\xi_n \in \mathcal{G}$ и α – непрерывный параметр со значениями $\alpha \in]\alpha_0, \infty[$. Предположим, что методы A_α заданы в виде преобразований последовательностей X в последовательности $A_\alpha X = (\eta_n^\alpha)$, где $\eta_n^\alpha \in \mathcal{G}$. Обозначим поле суммирования метода A_α символом SA_α , поле суммирования к нулю $\theta \in \mathcal{G}$ – символом $S_0 A_\alpha$ и поле ограниченности – символом mA_α . Приведем понятие выпуклого семейства методов суммирования (см. [3], определение 3).

Определение А. Мы говорим, что семейство методов A_α является выпуклым, если при любых $\alpha < \beta$ выполняются условия

$$mA_\alpha \subset mA_\beta, SA_\alpha \subset SA_\beta \quad (1)$$

и справедлива импликация

$$x \in mA_\alpha, x \in SA_\beta, \alpha < \beta \implies x \in SA_\beta. \quad (2)$$

Если условия (1) и (2) имеют место с заменой в них символа S на S_0 , то говорим, что семейство A_α нуль-выпукло.

2. Предположим, далее, что методы A_α и $A_{\alpha+\delta}$ при любых $x \in X_\alpha$, α и $\delta > 0$ связаны соотношением (см., например, [2])

$$\eta_n^{\alpha+\delta} = \frac{1}{b_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=0}^n d_{n,k}^{\alpha,\delta} b_k^\alpha \eta_k^\alpha, \quad (3)$$

где $(d_{n,k}^{\alpha,\delta})$ – нижняя треугольная числовая матрица с $d_{n,k}^{\alpha,\delta} = 1/M_k$, причем число M_α не зависит от k и n , а (b_n^α) – некоторая числовая последовательность с $b_n^\alpha \neq 0$.

¹ Индекс n принимает значения $0, 1, 2, \dots$.

² Мы говорим, что X суммируема методом A_α к сумме $\eta \in \mathcal{G}$, если $\lim_n \eta_n^\alpha = \eta$.

³ В дальнейшем мы говорим и короче: семейство A_α .

⁴ Символ X_α обозначает здесь поле применения метода A_α .

Приведем теорему о нуль-выпуклости семейства A_α , которая доказывается аналогично теореме 4 работы [2].

Теорема I. Если методы семейства A_α связаны соотношением (3), которое удовлетворяет при любых $\alpha \in]0, \infty[$ и $\delta \in]0, 1[$ условиям:⁵

$$1^\circ |\theta_n^\alpha / \theta_{n+k}^\alpha| \leq N_\alpha \quad \text{при каждом } n \text{ и } k > 0,$$

$$2^\circ K_{\alpha, \delta} n^\delta \leq |\theta_n^{\alpha+\delta} / \theta_n^\alpha| \leq L_{\alpha, \delta} n^\delta \quad (n > 0),$$

$$3^\circ d_{n,k}^{\alpha, \delta} = Q_{\alpha, \delta} \{(n-k+1)^{\delta-1}\} \quad (0 \leq k \leq n),$$

$$4^\circ d_{n,k}^{\alpha, \delta} - d_{n,k+1}^{\alpha, \delta} = Q_{\alpha, \delta} \{(n-k+1)^{\delta-2}\} \quad (0 \leq k < n),$$

то семейство A_α является нуль-выпуклым.

Сформулируем, далее, теорему о выпуклости (см. [3], теорема 2).

Теорема А. Пусть линейные преобразования A_α переводят каждую последовательность $x' = (\xi'_n)$ с постоянными членами $\xi'_n = \xi$ в последовательности $A_\alpha x' = (\eta_n^\alpha)$, причем $\lim_n \eta_n^\alpha = a_\alpha \xi$, где $a_\alpha \neq 0$ — некоторые числа. Если семейство A_α нуль-выпукло, то оно и выпукло.

Пусть, далее, $\kappa \geq 1$ — некоторое фиксированное число. Приведем понятие сильной суммируемости (см. [4], с. 77).

Определение Б. Пусть методы семейства A_α связаны соотношением (3). Последовательность x называется сильно $A_{\alpha+1}$ -суммируемой в степени κ (коротко $[A_{\alpha+1}]_\kappa$ -суммируемой) к сумме $\eta \in \mathcal{S}$, если

$$\sum_{k=0}^n |\theta_k^\alpha / \theta_n^{\alpha+1}| [\rho(\eta_k^\alpha - \eta)]^\kappa = o_\rho(1)$$

при каждой полуноorme $\rho \in \mathcal{P}$, и сильно $A_{\alpha+1}$ -ограниченной в степени κ (коротко $[A_{\alpha+1}]_\kappa$ -ограниченной), если

$$\sum_{k=0}^n |\theta_k^\alpha / \theta_n^{\alpha+1}| [\rho(\eta_k^\alpha)]^\kappa = O_\rho(1)$$

при каждой полуноorme $\rho \in \mathcal{P}$.

Таким образом, мы имеем семейство методов сильного суммирования $B_\alpha = [A_{\alpha+1}]_\kappa$.

Понятия выпуклости и нуль-выпуклости семейства B_α дает

⁵ Символами $N_\alpha, K_{\alpha, \delta}, L_{\alpha, \delta}$ обозначены положительные числа, зависящие от α или α и δ соответственно.

нам определение A , если в нем заменить символ A_α на B_α , A_β на B_β и A_γ на B_γ (см. [5], определение 3).

Сформулируем теоремы о выпуклости (см. [5], теорема I) и нуль-выпуклости для семейства B_α .

Теорема Б. Пусть линейные преобразования A_α переводят любую последовательность $X' = (\xi'_n)$ с постоянными членами $\xi'_n = \xi$ в последовательности $A_\alpha X' = (\eta_n^\alpha)$ с $\eta_n^\alpha = a_\alpha \xi$ и $a_\alpha \neq 0$. Если семейство B_α нуль-выпукло, то оно и выпукло.

Теорема 2. Если методы семейства A_α связаны соотношением (3) и при любых $\alpha \in]\alpha_0, \infty[$ и $\beta \in]0, 1[$ выполнены условия 1^0-4^0 теоремы I, то семейство $B_\alpha = [A_{\alpha+1}]_n$ является нуль-выпуклым.

3. Рассмотрим числовую последовательность $(A_n^{\alpha, \beta})$, которая формально определена степенным рядом (см. [1])

$$f_{\alpha, \beta}(z) = (1-z)^{-(\alpha+1)} \left(\log \frac{e}{1-z} \right)^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha, \beta} z^n, \quad (4)$$

где $z \in \mathbb{R}$ и e — основание натурального логарифма.

Введем семейство обобщенных методов Нёрдунда $A_\alpha = (N, r_n, q_n)$ с $\alpha > \alpha_0$ при помощи соотношения

$$\eta_n^\alpha = \frac{1}{R_n^{\alpha, \beta_0}} \sum_{k=0}^n r_{n-k}^{\alpha, \beta_0} q_k \xi_k, \quad (5)$$

где $R_n^{\alpha, \beta_0} = \sum_{k=0}^n r_{n-k}^{\alpha, \beta_0} q_k$, $r_n^{\alpha, \beta_0} = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1, \beta_0} r_k$,

α_0, η_0 — фиксированные вещественные числа и r_n, q_n — некоторые числа, при которых $R_n^{\alpha, \beta_0} \neq 0$.

Заметим, что, в частности, когда $\beta_0 = 0$, методы $(N, r_n^{\alpha, \beta_0}, q_n)$ превращаются в обобщенные методы Нёрдунда (N, r_n, q_n) (см. [4], с. 76). В частности, когда $q_n = A_n^{\gamma_0, \eta_0}$ и $r_n = A_n^{-\gamma_0}$, где γ_0, η_0 — фиксированные вещественные числа, то методы $(N, r_n^{\alpha, \beta_0}, q_n)$ являются методами $(C, \alpha, \beta_0, \gamma_0, \eta_0)$, которые введены в работе [1]. Если $\beta_0 = \eta_0 = 0$, то методы $(C, \alpha, \beta_0, \gamma_0, \eta_0)$ превращаются в обобщенные методы Чезаро (C, α, γ_0) , если же еще и $\gamma_0 = 0$, то мы получаем методы Чезаро (C, α) .

Нетрудно убедиться, что методы $A_\alpha = (N, r_n^{\alpha, \beta_0}, q_n)$ и $A_{\alpha+\beta} = (N, r_n^{\alpha+\beta, \beta_0}, q_n)$ при любых α и $\beta > 0$ связаны соотношением (3) с $A_{n, k}^{\alpha, \beta} = A_{n-k}^{\beta-1}$, $\beta_n^\alpha = R_n^{\alpha, \beta_0}$, где $A_{n-k}^{\beta-1}$ — числа Чезаро.

Непосредственно из теорем I и A следует

Теорема 3. Если при любых $\alpha \in]\alpha_0, \infty[$ и $\beta \in]0, 1[$ выполнены условия:

$$\begin{aligned} 1^0 \quad |R_n^{\alpha, \beta_0} / R_{n+k}^{\alpha, \beta_0}| &\leq N_\alpha \quad \text{при каждом } n \text{ и } k > 0, \\ 2^0 \quad |R_n^{\alpha+\delta, \beta_0} / R_n^{\alpha, \beta_0}| &\geq K_{\alpha, \delta} n^\delta \quad (n > 0), \end{aligned}$$

то семейство $A_\alpha = (N, r_n^{\alpha, \beta_0}, q_n)$ выпукло.

Следствие I. Семейство $A_\alpha = (C, \alpha, \beta_0, \gamma_0, \eta_0)$ выпукло при $\alpha > -\gamma_0$.

При помощи теоремы A и теоремы I работы [3] доказывается более общий результат.

Теорема 4. Семейство $A_\alpha = (C, \alpha, \beta_0, \gamma_0, \eta_0)$ выпукло при $\alpha > -\gamma_0 - 1$.

Непосредственно из теорем 2 и Б следует теорема о выпуклости семейства $B_\alpha = [A_{\alpha+1}]_n = [N, r_n^{\alpha+1, \beta_0}, q_n]_n$.

Теорема 5. Если методы $A_\alpha = (N, r_n^{\alpha, \beta_0}, q_n)$ при любых $\alpha > \alpha_0$ и $\beta \in]0, 1[$ удовлетворяют условиям 1^0 и 2^0 теоремы 3, то семейство $B_\alpha = [N, r_n^{\alpha+1, \beta_0}, q_n]_n$ выпукло.

Следствие 2. Семейство методов $B_\alpha = [A_{\alpha+1}]_n = [C, \alpha+1, \beta_0, \gamma_0, \eta_0]_n$ выпукло при $\alpha > -\gamma_0$.

Литература

1. Das G., Panda K., Sahoo S. On two new methods of summability // J. Pure Appl. Math. 1984, V. 15, N. 12, P. 1340-1351.
2. Тали А. О нуль-выпуклых семействах методов суммирования // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, № 504. С. 48-57.
3. Тали А. Выпуклые семейства методов суммирования обобщенных последовательностей в локально выпуклых пространствах // Тез. докл. конференции "Методы алгебры и анализа", Тарту, 1983, С. 61-63.
4. Тали А. Взаимоотношения между сильной и обыкновенной суммируемостями со скоростью в локально выпуклых пространствах // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, № 770. С. 69-79.
5. Тали А. Выпуклые семейства методов сильного суммирования в локально выпуклых пространствах // Труды 3-й Саратовской зимней школы 27 января - 7 февраля 1986 (в печати).

Таллинский педагогический институт
Кафедра математики

О ТАУБЕРОВЫХ ТЕОРЕМАХ Г.КАНГРО

И. Таммерайд

Большую роль в развитии тауберовых теорем с остаточным членом сыграли теоремы Г.Кангро о A^λ - суммируемости и A^λ - ограниченности (см. [3-4]). Эти теоремы позволяли рассматривать такие скорости λ , при которых метод A является C^λ -консервативным или m^λ -консервативным, т.е. налагали на λ условия, зависящие лишь от метода суммирования A . Первыми тауберовыми теоремами с остаточным членом такого типа являются теоремы Г.Кангро (см. [3]) для метода Рисса $R=(R, p_n)$. В статьях [5] и [6] И.Таммерайд применял идеи Г.Кангро для вывода тауберовых теорем с остатком для методов суммирования Чезаро C^α , Гельдера H^α и Эйлера-Кнопфа E_p . Г. Кангро [4] выработал и метод вариации тауберовых условий для R^λ -ограниченности в случае двухстороннего, а также для одностороннего тауберова условия. В случае двухстороннего тауберова условия он получил соответствующие результаты для R^λ -суммируемости. Г.Кангро [1] исследовал и вопрос ослабления тауберовых условий. Среди неопубликованных материалов профессора Г.Кангро есть одна лакунарная тауберова теорема с остатком (см. [7]).

Остались и некоторые гипотезы, т.е. пока не доказанные теоремы.

Теорема I. Если метод Эйлера-Кнопфа E_p ($0 < p \leq 1$) сохраняет λ -сходимость и E_p^λ -суммируемость последовательности $x=\{x_n\}$ удовлетворяет тауберову условию

$$\lambda_n \bar{\Delta} x_n \sqrt{n} = O(1),$$

то последовательность x является λ -сходящейся.

Теорема II. Если метод Чезаро C^α ($\alpha > 0$) сохраняет λ -ограниченность (λ -сходимость) и суммируемость λ, τ и μ для последовательности x типа

$$1 \leq \lambda_n \leq \tau_n \uparrow, \quad \lambda_n \tau_n \uparrow, \quad \mu_n = \sqrt{\lambda_n \tau_n}, \quad (1)$$

то для λ -ограниченности (λ -сходимости) и суммируемости x достаточно C^α -тауберова теорема

$$n \tau_n \Delta x_n = O(1)$$

или для μ -суммируемости (μ -сходимости) тауберова теоремы x .

Теорема 3. Если метод Эйлера-Кнопша E_p ($0 < p \leq 1$) сохраняет λ -ограниченность (λ -сходимость) и последовательности λ, τ и μ удовлетворяют условию (I), то из λ -ограниченности (λ -сходимости) последовательности x методом E_p и из тауберова условия

$$\tau_n \bar{\Delta} \xi_n \sqrt{n} = O(1)$$

следует μ -ограниченность (μ -сходимость) последовательности x .

Литература

1. Кангро Г. Об ослаблении тауберовых условий // Изв. АН Эст. ССР Физ.матем., 1970, Т. 19, I. С. 24-33
2. Кангро Г. Множители суммируемости для рядов, λ -ограниченных методами Риса и Чезаро // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, Т. 277 С. 136-154
3. Кангро Г. Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, Т. 277, С. 155-160.
4. Кангро Г. Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, Т. 305, С. 156-166.
5. Таммерайд И. Тауберовы теоремы с остаточным членом для методов суммирования Чезаро и Гельдера // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, Т. 277, С. 161-170.
6. Таммерайд И. Тауберовы теоремы с остаточным членом для метода суммирования Эйлера-Кнопша // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, С. 171-182.
7. Таммерайд И. О теореме Г. Кангро для лакунарных рядов // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1988, в печати.

Таллинский политехнический институт

Кафедра математики

О КЛАССАХ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ

М. ТЫННОВ

Пусть $\mathcal{D}$ — пространство всех распределений на $C^\infty[-\pi, \pi]$, тогда $\mathcal{D} \supset L[-\pi, \pi]$. Если $\mathcal{X} \subset \mathcal{D}$ и $\mathcal{X}$ является F -пространством, тогда и

$$\mathcal{X}^\circ = \{f^\circ = (\lambda_k) : \lambda_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, f \in \mathcal{X}\}$$

является F -пространством определяя полунормы равенством $p(f^\circ) = p(f)$. Пространство $\mathcal{X}$ называется FK -пространством, если $\mathcal{X}^\circ$ является FK -пространством. Через $T = (\tau_{nk})$ обозначим треугольный регулярный метод суммирования рядов, для которой $\tau_{nn} \neq 0$ (см. [1]).

Введем обозначения:

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) dt;$$

$$(\mathcal{K}_n * f)(x) = \sum_{|k| \leq n} \tau_{nk} \lambda_k e^{ikx}, f^\circ \in \mathcal{X}^\circ;$$

$$f * \mathcal{X} = \{f * g \in \mathcal{D} : g \in \mathcal{X}\};$$

$$(\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}) = \{f \in \mathcal{D} : f * \mathcal{X} \subset \mathcal{Y}\};$$

$$\mathcal{X}_{TK} = \{f \in \mathcal{X} : (\mathcal{K}_n * f)(x) \text{ сходится в } \mathcal{X}\};$$

$$\mathcal{X}_{TB} = \{f \in \mathcal{D} : (\mathcal{K}_n * f)(x) \text{ ограничена в } \mathcal{X}\};$$

$$c_T = \{f \in \mathcal{D} : (\mathcal{K}_n * f)(0) \text{ сходится}\};$$

$$m_T = \{f \in \mathcal{D} : (\mathcal{K}_n * f)(0) \text{ ограничена}\};$$

Имеет место (см. [2, 3])

Теорема 1. Пусть $\mathcal{X}$ является FK -пространством и $(c_T)_{TK} = c_T$. Тогда

$$(a) \mathcal{X} = \mathcal{X}_{TK} \Leftrightarrow (m_T \rightarrow c_T) * \mathcal{X} = \mathcal{X};$$

$$(b) \mathcal{X} \subset \mathcal{X}_{T_0} \Leftrightarrow (c_T \rightarrow c_T) * \mathcal{X} = \mathcal{X} \Leftrightarrow (m_T \rightarrow c_T) * \mathcal{X} = \mathcal{X}_{TK}.$$

Используя теорему 1 докажем следующие соотношения между классами мультипликаторов.

Теорема 2. Если $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ являются FK -пространствами,

$\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_{TB}, \mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_{TB}, (C_T)_{TK} = C_T$, тогда
 $(\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}) \subset (\mathcal{X}_{TK} \rightarrow \mathcal{Y}_{TK})$.

Доказательство. Если $f * \mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, тогда в силу теоремы 1 имеем

$$f * \mathcal{X}_{TK} = f * (m_T \rightarrow C_T) * \mathcal{X} \subset (m_T \rightarrow C_T) * \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{TK}.$$

Следовательно, и $f * \mathcal{X}_{TK} \subset \mathcal{Y}_{TK}$.

Теорема 3. Если $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ являются FK-пространствами, $(C_{TK})^* = C_T$ и $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{TK}, \mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_{TB}$, тогда

$$(\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}) = (\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}_{TK}) = (\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}_{TB}).$$

Доказательство. В силу теоремы 2 имеем

$$(\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}) \subset (\mathcal{X}_{TK} \rightarrow \mathcal{Y}_{TK}) = (\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}_{TK}) \subset (\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}_{TB}) \subset (\mathcal{X}_{TK} \rightarrow (\mathcal{Y}_{TB})_{TK}).$$

Поскольку $(\mathcal{Y}_{TB})_{TK} = \mathcal{Y}_{TK}$, тогда утверждение доказано.

Если $T = C^\alpha$ - метод Чезаро порядка $\alpha \geq 0$,

$$T_{nk} = \binom{n+\alpha-k}{n-k} / \binom{n+\alpha}{n},$$

тогда $(C_T)_{TK} = C_T$ и теоремы 1-3 верны для $T = C^\alpha$.

Аналогичные свойства мультипликаторов изучены в [3, 4] при методах C^0 и C^1 .

Литература

1. Тыннов М. Применение множителей суммируемости для изучения рядов Фурье // Теоретические и прикладные вопросы математики. Тарту, 1965.
2. Buntinas, M. On Toeplitz sections in sequence spaces // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1975, V. 78. P. 451-460.
3. Buntinas, M. Convergent and Bounded Cesàro Sections in FK-Spaces // Math. Z. 1971. V. 121. P. 191-200.
4. Goes, G. Summen von FK-Räumen. Funktionale Abschnittskonvergenz und Umkehrsätze // Tôhoku Math. J. 1974, V. 26. P. 487-504.

Тартуский государственный университет
 Кафедра математического анализа

ВКЛЮЧЕНИЕ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ В КЛАССЕ РЯДОВ ФУРЬЕ

Х. Тюрнпу

Рассмотрим ряды Фурье функции $f \in L^p_e$ по ортонормированной на $e = [a, b]$ системе $\varphi = \{\varphi_k\}$ функций $\varphi_k \in L^p_e$ с $1/p + 1/q = 1$, т.е. ряды вида

$$\sum \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(t), \quad (I)$$

где

$$\langle f, \varphi_k \rangle = \int_e f(t) \varphi_k(t) dt.$$

Пусть $A = (\alpha_{nk})$ и $B = (\beta_{nk})$ треугольные регулярные методы суммирования, определенные матрицами преобразования ряда в последовательность.

Говорят, что ряд (I) для $f \in L^p_e$ является почти всюду (п.в.) на e A -суммируемым, если п.в. на e существует предел

$$\lim_n \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(t).$$

Говорят, что метод суммирования B включает метод суммирования A в классе рядов Фурье функций $f \in L^p_e$ ($A \subseteq B$), если из A -суммируемости ряда (I) для $f \in L^p_e$ п.в. на e следует его B -суммируемость п.в. на e .

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ то говорят, что метода A и B равносильны в классе рядов Фурье функции $f \in L^p_e$ и обозначают $A \approx B$.

В случае $p=2$ (а, следовательно, также для $p > 2$) включение $A \subseteq B$ хорошо исследовано во многих работах. Хороший обзор этих работ приведен в работе [1]. Случай $p < 2$ мало исследован. Мы покажем, как исследование включения $A \subseteq B$ можно свести к теории типа Шура в теории суммируемости в банаховых пространствах. Приведем нужные понятия.

Пусть X и Y банаховы пространства. Обозначаем через $\ell^\infty(X)$ банахово пространство всех ограниченных в X последовательностей (x_k) . Пусть $C = (C_{nk})$ треугольная матрица непрерывных линейных операторов C_{nk} из X в Y . Пусть

$$F_m = \left| \int_{T_\varepsilon} \sum_{n=0}^m \gamma_{m,n}(t) T_n(A, B, f, \varphi, t) dt \right| \leq M_{f, \varepsilon}.$$

Но

$$F_m \leq C_m(A, B, f, \varphi),$$

где

$$C_m(A, B, f, \varphi) = \sum_{k=0}^m b_k \left| \int_{T_\varepsilon} \sum_{v=0}^k A_{kv} \langle f, \varphi_v \rangle \varphi_k(t) |^p dt \right|$$

и $b_k = \sup_{n \geq k} |b_{nk}|$. В силу теоремы о достаточном числе функционалов в пространстве $L^p_{T_\varepsilon}$ имеем, что найдутся такие $g_k \in L^q_{T_\varepsilon}$ с $1/p + 1/q = 1$ и $\|g_k\| \equiv 1$, чтобы

$$C_m(A, B, f, \varphi) = \sum_{k=0}^m b_k \left| \sum_{v=0}^k A_{kv} \langle f, \varphi_v \rangle \langle g_k, \varphi_v \rangle \right|^p.$$

Применяя еще раз теорему о достаточном числе функционалов в пространстве ℓ^p , получаем, что найдется $\theta = (\theta_k) \in \ell^q$ с $\|\theta\| = 1$ такая, что

$$C_m(A, B, f, \varphi) = \left| \sum_{k=0}^m b_k \theta_k \sum_{v=0}^k A_{kv} \langle f, \varphi_v \rangle \langle g_k, \varphi_v \rangle \right|^p.$$

Итак, если

$$C_m(A, B, f, \varphi) \leq M_{f, \varepsilon}, \quad (4)$$

то $[A, B]_p, p \in [E, B]_p$ и, следовательно, $A \in B$.

Обозначим через $F(\varphi, p)$ банаховое пространство всех последовательностей коэффициентов Фурье по системе φ с нормой $\|(\langle f, \varphi_v \rangle)\| = \|f\|$. Пусть для каждого натурального k $z_k = (\langle g_k, \varphi_v \rangle)$, где $g_k \in L^q_{T_\varepsilon}$ с $\|g_k\| \equiv 1$. Тогда $(z_k) \in \ell^\infty(F(\varphi, q))$. Рассмотрим β -дуальное пространство $F^\beta(\varphi, p)$ к пространству $F(\varphi, p)$ (см. [5] стр. 12). Определим для каждых m и k из $\mathbb{N}$ линейные непрерывные операторы C_{mk} из $F(\varphi, q)$ в $F^\beta(\varphi, p)$ равенством

$$C_{mk} z_k = \begin{cases} (\theta_k b_k^{1/p} A_{kv} \langle g_k, \varphi_v \rangle)_{v \in \mathbb{N}} & \text{при } v \leq k \leq m, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (5)$$

Тогда, если преобразование C

$$y_m = \sum_{k=0}^m C_{mk} z_k, \quad (6)$$

задаваемое равенством

$$y_m = \left(\sum_{k=v}^m \theta_k b_k^{1/p} A_{kv} \langle g_k, \varphi_v \rangle \right)_{v \in \mathbb{N}},$$

принадлежит классу $(\ell^\infty(F(\varphi, q)), \ell^\infty(F^\beta(\varphi, p)))$, то

$$y_m = \sum_{k=0}^m C_m k x_k. \quad (2)$$

Если $(y_m) \in \ell^\infty(Y)$ для каждого $(x_k) \in \ell^\infty(X)$, то говорят, что преобразование (2) принадлежит классу $(\ell^\infty(X), \ell^\infty(Y))$. Точные условия для этого (теорема типа Шура) были найдены в работе Кангро [2] (см. также [5]).

Говорят, что ряд (I) для $f \in L^p_e$ является п.в. на e $[A, B]_p$ -суммируемым, если п.в. на e

$$\lim_n \delta_n(A, B, f, \varphi, t) = 0,$$

где

$$\delta_n(A, B, f, \varphi, t) = \sum_{k=0}^n |b_{nk}| \left| \sum_{v=0}^k \alpha_{kv} \langle f, \varphi_v \rangle \varphi(t) - f(t) \right|^p$$

и

$$b_{nk} = \beta_{nk} - \beta_{n, k+1}.$$

Обозначая через E метод сходимости, имеем, очевидно, что $[E, B]_p \subseteq B$. Кроме того, если методы суммирования A и B регулярны, то $A \in [A, B]_p$. Если мы покажем, что

$$[A, B]_p \not\subseteq [E, B]_p, \quad (3)$$

то из цепочки соотношений

$$A \in [A, B]_p \not\subseteq [E, B]_p \subseteq B$$

вытекает включение $A \in B$. Так как

$$\begin{aligned} \delta_n^{1/p}(E, B, f, \varphi, t) - \tau_n^{1/p}(A, B, f, \varphi, t) &\leq \delta_n^{1/p}(A, B, f, \varphi, t) \leq \\ &\leq \delta_n^{1/p}(E, B, f, \varphi, t) + \tau_n^{1/p}(A, B, f, \varphi, t), \end{aligned}$$

где

$$\tau_n(A, B, f, \varphi, t) = \sum_{k=0}^n |b_{nk}| \left| \sum_{v=0}^k A_{kv} \langle f, \varphi_v \rangle \varphi(t) \right|^p$$

и $A_{kv} = \alpha_{kv} - 1$, то для соотношения (3) достаточно, чтобы п.в. на e

$$\lim_n \tau_n(A, B, f, \varphi, t) = 0.$$

В силу леммы 3 из [4] и леммы 3 из [3] для последнего равенства достаточно, чтобы для каждого $f \in L^p_e$ и $\varepsilon > 0$ нашлись постоянная $M_{f\varepsilon} > 0$ и измеримое подмножество $T_\varepsilon \subseteq e$ с $\text{me} T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ такие, что равномерно относительно всех разбиении $\{m_{mn}\}$ отрезка e на $m+1$ непересекающихся и измеримых подмножеств m_{mn} с $\bigcup_{n=0}^m m_{mn} = e$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{v=0}^m \sum_{k=v}^m \theta_k b_k^{1/p} A_{kv} \langle g_k, \varphi_v \rangle \langle f, \varphi_v \rangle \right| \leq M_{ef}$$

для каждого $f \in L^p$ и $g_k \in L^q_{T_k}$ с $\|g_k\| \equiv 1$. Итак, имеет место неравенство (4) и, следовательно, $A \in B$. В итоге доказана

Теорема. $A \in B$, если преобразование C , определенное равенствами (5) и (6), принадлежит классу $(\ell^\infty(F(\varphi, q)), \ell^\infty(FP(\varphi, p)))$ с $1/p + 1/q = 1$.

В случае $p=2$ имеем, что $F(\varphi, q_k) = FP(\varphi, 2) = \ell^2$. Кроме того, так как тогда

$$\begin{aligned} C_m(A, B f, \varphi) &\leq \sum_{k=0}^m \theta_k b_k^{1/2} \left(\sum_{v=0}^k A_{kv}^2 \langle f, \varphi_v \rangle^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \| \theta \| \left(\sum_{k=0}^m b_k \sum_{v=0}^k A_{kv}^2 \langle f, \varphi_v \rangle^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{v=0}^m \langle f, \varphi_v \rangle^2 \sum_{k=v}^m b_k A_{kv}^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\sup_v \sum_{k=v}^m A_{kv}^2 b_k \right)^{1/2} \|f\|, \end{aligned}$$

то из условия

$$\sum_{k=v}^m A_{kv}^2 b_k = O(1)$$

вытекает, что преобразование C принадлежит классу $(\ell^\infty(\ell^2), \ell^\infty(\ell^2))$ и, следовательно, $A \in B$.

Литература

1. Зиза О.А. О суммировании ортогональных рядов методами (φ, λ) // Матем. заметки, 1979. Т. 25. № 2. С. 117-197.
2. Кангро Г. О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах // Изв. АН ЭССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1956. Т. 5. С. 106-128.
3. Тюрнпу Х. О суммируемости функциональных рядов почти всюду // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972. № 305. С. 199-212.
4. Тюрнпу Х. О сходимости функциональных рядов почти всюду // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971. № 281. С. 140-151.
5. Maddox I.J. Infinite Matrices of Operators // Berlin-Heidelberg-New York 1980.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМ СТОУНА-ВЕЙЕРШТРАССА И РИССА-МАРКОВА

В.П.Фёдорова

Классическая теорема Стоуна-Вейерштрасса в решёточной форме, называемая также теоремой Крейнов-Какутани, утверждает, что если X - бикompактное хаусдорфово пространство, $C(X)$ - векторная решётка всех вещественных непрерывных функций на X , наделённая равномерной нормой, то всякая замкнутая векторная подрешётка $C(X)$, содержащая константы и разделяющая точки из X , совпадает с $C(X)$.

Хорошо известна также теорема Рисса-Маркова: если X - бикompактное хаусдорфово пространство, то сопряжённое к пространству $C(X)$, наделённому равномерной нормой, линейно изоморфно пространству всех ограниченных регулярных борелевских мер на X при этом $F \in C'(X)$ и мера μ связаны соотношением $F(f) = \int_X f d\mu$

Утверждение последней теоремы равносильно следующему: для всякого $F \in C'(X)$ и всякой направленности (f_α) из $C(X)$, убывающей поточечно сходящейся к нулю, выполнено $F(f_\alpha) \rightarrow 0$ [1].

Если X - вполне регулярное некомпактное пространство, $C_b(X)$ - векторная решётка всех ограниченных непрерывных вещественных функций на X , наделённая равномерной нормой, то утверждения обеих теорем не верны. Были предложены различные ослабления естественной нормированной топологии в $C_b(X)$, позволившие получить аналоги и обобщения теорем Стоуна-Вейерштрасса и Рисса-Маркова. Отметим работы [4], [5], [7].

В нашем докладе рассматриваются обобщения теорем Стоуна-Вейерштрасса и Рисса-Маркова на локально выпуклые векторные решётки, обладающие особым свойством отделимости множеств посредством решёточных гомоморфизмов (свойством Хана-Банаха). Для ЛВР со свойством Хана-Банаха эти обобщения эквивалентны друг-другу.

Терминология, касающаяся векторных решёток, в основном заимствована из книги Шефера [3]. Под решёточным гомоморфизмом на векторной решётке $\mathcal{L}$ понимается решёточный гомоморфизм $\mathcal{L}$ в вещественную прямую. Идеал векторной решётки называется также $\mathcal{L}$ -идеалом. Векторной решёткой функций на множестве X будем называть всякую векторную подрешётку $\mathcal{L}(X)$ векторной решётки всех вещественных функций на X с поточечными векторными операциями и поточечным упорядочением. Линейный функционал F на $\mathcal{L}(X)$

называется τ -аддитивным, если для всякой направленности (f_α) из $\mathcal{L}(X)$, убывающая поточечно сходящаяся к нулю, $F(f_\alpha) \rightarrow 0$.

Определение 1. Будем говорить, что ЛВР $(\mathcal{L}, t)$ обладает свойством Хана-Банаха, если для всякой её замкнутой телесной подрешётки $\mathcal{Q}$ и точки $a \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{Q}$ существует непрерывный решёточный гомоморфизм φ на $\mathcal{L}$ такой, что $|\varphi(x)| < 1$ для всех $x \in \mathcal{Q}$ и $|\varphi(a)| > 1$.

Множество Φ решёточных гомоморфизмов на векторной решётке $\mathcal{L}$ будем называть достаточным, если для любого $a \neq 0$ из $\mathcal{L}$ существует $\varphi \in \Phi$ такой, что $\varphi(a) \neq 0$. Необходимым условием свойства Хана-Банаха $(\mathcal{L}, t)$ является существование на $(\mathcal{L}, t)$ достаточного множества непрерывных решёточных гомоморфизмов. Обозначим через $\mathcal{V}$ топологию поточечной сходимости в $\mathcal{L}(X)$.

Определение 2. Пусть $(\mathcal{L}(X), t)$ — ЛВР функций на множестве X и $t \geq \mathcal{V}$. Условимся говорить, что в $(\mathcal{L}(X), t)$ выполнена теорема Стоуна-Вейерштрасса, если всякая замкнутая векторная подрешётка в $(\mathcal{L}(X), t)$, $\mathcal{V}$ -плотная в $\mathcal{L}(X)$, совпадает с $\mathcal{L}(X)$. Будем говорить, что в $(\mathcal{L}(X), t)$ выполнена теорема Рисса-Маркова, если всякий функционал $F \in (\mathcal{L}(X), t)'$ является τ -аддитивным.

Определение 3. ЛВР $(\mathcal{L}(X), t)$ будем называть ℓ -замкнутой, если в $(\mathcal{L}(X), t)$ всякий замкнутый максимальный ℓ -идеал $\mathcal{V}$ -замкнут, или, что то же, всякий t -непрерывный решёточный гомоморфизм на $\mathcal{L}(X)$ является $\mathcal{V}$ -непрерывным.

Теорема 1. Для ЛВР $(\mathcal{L}(X), t)$, обладающей свойством Хана-Банаха, следующие утверждения равносильны:

1. в $(\mathcal{L}(X), t)$ выполнена теорема Стоуна-Вейерштрасса;
2. в $(\mathcal{L}(X), t)$ выполнена теорема Рисса-Маркова;
3. $(\mathcal{L}(X), t)$ — ℓ -замкнута.

Для функциональных ЛВР, фигурирующих в работах [4], [5], [7], легко доказать свойство Хана-Банаха и ℓ -замкнутость. Для ЛВР $(\mathcal{L}, t)$ условимся обозначать через $\mathcal{S}$ топологию в $\mathcal{L}$ сходимости на каждом непрерывном решёточном гомоморфизме.

Теорема 2. Следующие утверждения для ЛВР $(\mathcal{L}, t)$ с достаточным множеством непрерывных решёточных гомоморфизмов равносильны:

- 1°. $(\mathcal{L}, t)$ обладает свойством Хана-Банаха;

2°. всякая векторная подрешётка в $\mathcal{L}$, плотная в $(\mathcal{L}, S)$, плотна в $(\mathcal{L}, t)$ (теорема Стоуна-Вейерштрасса);

3°. всякая убывающая направленность (f_α) из $\mathcal{L}$, сходящаяся к нулю в топологии S , стремится к нулю в топологии t ;

4°. для всякой направленности (f_α) , убывающей сходящейся к нулю в топологии S и всякого $F \in (\mathcal{L}, t)'$ выполнено $F(f_\alpha) \rightarrow 0$ (теорема Рисса-Маркова).

Для отделимого топологического M -пространства в смысле Лейбсона [6] свойство Хана-Банаха доказано И.И. Перепечаем [2]. Каждое из следующих свойств ЛВР $(\mathcal{L}, t)$, обладающей достаточным множеством непрерывных решёточных гомоморфизмов, влечёт за собой свойство Хана-Банаха: а) борнотопичность, б) полурефлексивность, в) $(\mathcal{L}, t)$ - индуктивный предел относительно решёточных гомоморфизмов последовательности ЛВР со свойством Хана-Банаха, г) $(\mathcal{L}, t)$ - проективный предел относительно решёточных гомоморфизмов, семейства ЛВР со свойством Хана-Банаха.

Приведем пример ЛВР, обладающей достаточным множеством непрерывных решёточных гомоморфизмов, но не обладающей свойством Хана-Банаха. Пусть $\mathcal{L}(X)$ - векторная решётка ограниченных измеримых по Лебегу функций на $X = [a, b]$, μ - мера Лебега в X , $p(f) = \int_X |f| d\mu$ ($f \in \mathcal{L}(X)$), $\mathcal{C}$ - ядро преднормы p . Пусть, далее, t - слабейшая из локально выпуклых топологий в $\mathcal{L}(X)$, относительно которых непрерывна преднорма p и все гомоморфизмы на $\mathcal{L}(X)$, порожденные точками из λ . Тогда $(\mathcal{L}(X), t)$ - ЛВР и $\mathcal{C}$ - замкнутый $\mathcal{L}$ -идеал в нем. Множество непрерывных решёточных гомоморфизмов на $(\mathcal{L}(X), t)$ является объединением множества точечных гомоморфизмов с множеством гомоморфизмов, непрерывных по преднорме p . Но непрерывных по преднорме p гомоморфизмов $\varphi \neq 0$ не существует. Действительно, если φ - такой гомоморфизм, то его сужение на $\mathcal{C}[a, b]$ должно быть непрерывным по преднорме p . Известно, что каждый ненулевой решёточный гомоморфизм на $\mathcal{C}[a, b]$ - точечный, и как нетрудно убедиться, не является непрерывным относительно p . Таким образом, непрерывные решёточные гомоморфизмы на $\mathcal{L}(X)$ не что иное, как $\mathcal{V}$ -непрерывные. Если бы $(\mathcal{L}(X), t)$ обладала свойством Хана-Банаха, то $\mathcal{C}$ было бы пересечением $\mathcal{V}$ -замкнутых

максимальных ℓ -идеалов, и следовательно, было бы замкнуто в топологии поточечной сходимости. Однако, функция $e(x) \equiv 1$ не принадлежащая $\mathcal{Q}$, является поточечным пределом направленности функций из $\mathcal{Q}$, например, направленности характеристических функций конечных множеств. Итак, $(\mathcal{L}(X), t)$ не обладает свойством Хаана-Банаха, но поскольку σ -непрерывные решёточные гомоморфизмы разделяют точки из $\mathcal{L}(X)$, обладает достаточным множеством непрерывных решёточных гомоморфизмов.

Литература

1. Александров А.Д. Аддитивные функции множества в абстрактных пространствах // Матем. сб., 1940. Т. 8 (50). С. 307-348.
2. Перепечай И.И. Теорема Хаана-Банаха для решёточных многообразий в топологических M -пространствах // Вестник Харьковского гос. ун-та, 1972. Т. 83. № 37. С. 48-62.
3. Шефер Х. Топологические векторные пространства // М.: Мир, 1971.
4. Buck R.C. Bounded continuous functions on a locally compact space// Michigan Math. J. 1958, V. 5. P. 95-104.
5. Giles R. A generalization of the strict topology//Trans. Amer. Math. Soc. 1971, V. 161. P. 467-474.
6. Jameson G.J.O. Topological M-spaces// Math. Z. 1968, Bd. 103. S. 139-150.
7. Santilles E.D. Bounded continuous functions on a completely regular space// Trans. Amer. Math. Soc. 1972, V. 168. P. 311-336.

Московский государственный педагогический институт
Кафедра математического анализа

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Е.Т. Шавгулидзе

В работе получено представление решения задачи Коши для уравнения Шредингера с произвольными полиномиальными потенциалами в виде континуального интеграла. Отметим, что такие представления решения уравнения Шредингера для потенциалов специального вида были получены во многих других работах.

Рассматривается задача Коши для уравнения Шредингера

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u(x,t) - i v(x) u(x,t) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

где $v(x+y) = \sum_{k=1}^N \alpha_k P_{k,y}(x)$ ($x, y \in \mathbb{R}^n$), $\alpha_k = \pm 1$, $P_{k,y}$ — однородные неотрицательные функции на $\mathbb{R}^n$ порядка однородности $\ell_k > 0$. Решение ищется в виде предела

$$u(x,t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \dots \int \exp \left\{ -\frac{it}{2\varepsilon} \sum_{p=1}^k \|x_p - x_{p-1}\|^2 - \frac{it}{k} \sum_{p=1}^k v(x_p) \right\} u_0(x_0) dx_0 \dots dx_{p-1} \quad (x_k = x).$$

Доказывается, что если функция u_0 — аналитическая и ее аналитическое продолжение на $\mathbb{C}^n$ имеет рост на бесконечности медленнее, чем $\exp \{ \|x\|^{2-\varepsilon} \}$ ($0 < \varepsilon \leq 2$), то предел существует и представим в виде

$$u(x,t) = 1/(2\pi)^{2N} \int u_0(x+x(0)/\sqrt{t}) \exp \left\{ \sum_{k=1}^N [(\ln P_{k,x}(x(t)))/\ell_k]^2 \right\} \times \\ \times \left(\prod_{k=1}^N f_k(t_k) / (((\ln P_{k,x}(x(t)))/\ell_k - \pi i/4 - t_k)^2 + \|z_k\|^2) \right) \times \\ \times [\varphi_1(z_1) \dots \varphi_N(z_N) (1 - 1/(2\pi + N) \sum_{k=1}^N f'_k(t_k)/f_k(t_k)) - \\ - \sum_{k=1}^N \varphi_1(z_1) \dots \Delta \varphi_k(z_k) \dots \varphi_N(z_N) / (2\pi + N)] dt_1 \dots dt_N dz_1 \dots dz_N \mu(dx),$$

где μ — мера Винера на отрезке $[0, t]$, $f_k(t) = \exp(i\alpha_k e^{\ell_k t} - t^2)$, φ — произвольная финитная бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющая условию $\varphi(z) = 0$ при $\|z\| \leq \pi$ ($z \in \mathbb{R}^3$).

Московский государственный университет
Кафедра теории функций и функционального анализа

ОБ ОДНОЙ КАТЕГОРИИ ДЛЯ НЕЧЕТНОЙ ТОПОЛОГИИ

А.Шостах

В 1965 году Заде ввел понятие нечеткого множества, а уже спустя два года была сделана первая попытка "привить" это понятие к "дереву" общей топологии. Эта попытка принадлежит Чангу, предложившему первое определение нечеткого топологического пространства. Согласно Чангу [2], нечеткое (топологическое) пространство - это пара (X, T) , где X - множество, а T - семейство его нечетких подмножеств (т.е. $T \subseteq I^X$, $I = [0, 1]$), удовлетворяющее следующим аксиомам: (1с) $0, 1 \in T$; (2с) если $U, V \in T$, то $U \cup V \in T$ и (3с) если $U_i \in T \forall i$, то $\bigcap U_i \in T$. Отображение $f: X \rightarrow Y$, где (X, T_X) и (Y, T_Y) - нечеткие пространства, называется непрерывным, если $f^{-1}V \in T_X$ для каждого $V \in T_Y$. Категорию чанговских нечетких пространств и непрерывных отображений обозначим $CF T(I)$.

Вскоре Гоген [3] обратил внимание на то, что многие конкретные свойства отрезка I зачастую оказываются несущественными (а иногда и излишне обременительными) в теории нечетких множеств и ее приложениях, и предложил более общее понятие L -нечеткого множества, а на его основе - понятие L -нечеткого топологического пространства, где L - полная дистрибутивная решетка с минимальным (0) и максимальным (1) элементами. (В дальнейшем, говоря о решетках, мы всегда будем иметь в виду именно такие решетки). L -нечеткое (топологическое) пространство - это, согласно [3], пара (X, T) , где X - множество, а T - семейство его L -нечетких подмножеств (т.е. $T \subseteq L^X$), удовлетворяющее аксиомам, совершенно аналогичным аксиомам (1с)-(3с) определения Чанга. Такие пространства будем называть чанговскими L -нечеткими пространствами и обозначать соответствующую категорию $CF T(L)$.

Теории чанговских L -нечетких пространств посвящена обширная литература. При этом в подавляющем большинстве работ авторы ограничиваются случаем, когда решетка L фиксирована. Исключением являются работы Родабауха [5] и Хаттона [2], в которых рассматривается категория $CF T$ чанговских L -нечетких пространств с различными L (см. также п. 5).

В [6], [7] и др. нами было предложено иное определение нечеткого (топологического) пространства. Согласно [6], нечеткое

пространство - это пара $(X, \mathcal{T})$, где X - множество, а $\mathcal{T}: I^X \rightarrow I$ - отображение удовлетворяющее аксиомам (1) $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(1) = 1$; (2) $\mathcal{T}(U \cup V) \geq \mathcal{T}(U) \wedge \mathcal{T}(V)$ для любых $U, V \in I^X$ и (3) $\mathcal{T}(\bigvee_i U_i) \geq \bigwedge_i \mathcal{T}(U_i)$ для каждого семейства $\{U_i : i \in J\} \subset I^X$. Отображение $f: X \rightarrow Y$, где $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ - нечеткие пространства, называется непрерывным, если $\mathcal{T}_X(f^{-1}V) \geq \mathcal{T}_Y(V)$ для каждого $V \in I^Y$. Соответствующую категорию нечетких пространств обозначаем $FT(I)$. Заменяя в духе Гогена отрезок I на произвольную решетку L , можем по аналогии определить категорию $FT(L)$ L -нечетких пространств.

В данной работе мы опишем новую категорию $GF T$ (общая категория нечетких топологических пространств), и установим, каким образом вышеупомянутые и некоторые другие известные категории нечеткой топологии могут быть идентифицированы с соответствующими подкатегориями категории $GF T$.

1. Категория $GF T$. Объектами категории $GF T$ служат тройки $(X, L, \mathcal{T})$, где X - множество, L - решетка и $\mathcal{T}: L^X \rightarrow L$ - отображение удовлетворяющее аксиомам (1) $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(1) = 1$; (2) $\mathcal{T}(U \cup V) \geq \mathcal{T}(U) \wedge \mathcal{T}(V)$ для любых $U, V \in L^X$ и (3) $\mathcal{T}(\bigvee_i U_i) \geq \bigwedge_i \mathcal{T}(U_i)$ для каждого семейства $\{U_i : i \in J\} \subset L^X$. Морфизмами из $(X_1, L_1, \mathcal{T}_1)$ в $(X_2, L_2, \mathcal{T}_2)$ объявляются пары (f, φ) , где $f: X_1 \rightarrow X_2$, $\varphi: L_2 \rightarrow L_1$, причем φ возрастает (т.е. $s \leq t \Rightarrow \varphi(s) \leq \varphi(t)$ для любых $s, t \in L_2$), φ сохраняет супремум, инфимум, 0 и 1, и $\mathcal{T}_1(f^{-1}(\varphi N)) \geq \mathcal{T}_2(N)$ для каждого $N \in L^Y$. Композиция морфизмов $(f, \varphi): (X_1, L_1, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X_2, L_2, \mathcal{T}_2)$ и $(g, \psi): (X_2, L_2, \mathcal{T}_2) \rightarrow (X_3, L_3, \mathcal{T}_3)$ определяется равенством $(g \circ f, \psi \circ \varphi): (X_1, L_1, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X_3, L_3, \mathcal{T}_3)$, а в качестве тождественного берется морфизм $(id_X, id_L): (X, L, \mathcal{T}) \rightarrow (X, L, \mathcal{T})$.

Категория $GF T$ имеет конечный объект $(X, 2, \tau_1)$, где $|X| = 1$, $2 = \{0, 1\}$ и $\tau_1: 2^X \rightarrow \{1\} \subset 2$. Начальным объектом категории $GF T$ является $(\emptyset, \mathbb{1}, \tau_0)$, где $\mathbb{1} = \{1\}$ и $\tau_0: \mathbb{1}^\emptyset \rightarrow \mathbb{1}$.

2. Инициальные структуры в $GF T$. Пусть X, Y - множества, L, K - решетки, $\mathcal{T}: K^Y \rightarrow K$ - нечеткая топология на Y , $f: X \rightarrow Y$, и $\varphi: K \rightarrow L$ - возрастающее отображение, сохраняющее $\sup$, $\inf$, 0 и 1. Слабейшую нечеткую топологию $\tau: L^X \rightarrow L$, для которой $(f, \varphi): (X, L, \tau) \rightarrow (Y, K, \mathcal{T})$ непрерывно, т.е. является морфизмом, естественно назвать инициальной для (f, φ) . Единственность инициальной нечеткой топологии очевидна; ее существование обеспечивается следующим конструктивным описанием. Для каждого $\alpha \in K^+ (= K \setminus \{0\})$ положим $\mathcal{T}_\alpha = \{V: V \in K^Y, \mathcal{T}(V) \geq \alpha\}$ и пусть $\tau^{(\varphi)} = \{f^{-1}(\varphi U): U \in \mathcal{T}_\alpha\}$. Тогда формулой $\tau(U) = \bigvee \{\tau^{(\varphi)}(U) \wedge \varphi(\alpha): \alpha \in K^+\}$, где $U \in L^X$, определяется не-

четкая топология τ на (X, L) [7]. Нетрудно заметить, что τ является искомой инициальной нечеткой топологией.

Пусть теперь $\{(Y_\gamma, L_\gamma, \tau_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ - семейство объектов $\mathbf{GF}T$. Слабейшая нечеткая топология τ на (X, L) , для которой все $(f_\gamma, \varphi_\gamma) : (X, L, \tau) \rightarrow (Y_\gamma, L_\gamma, \tau_\gamma)$ (где $f_\gamma : X \rightarrow Y_\gamma$; $\varphi_\gamma : L_\gamma \rightarrow L$) являются морфизмами в $\mathbf{GF}T$, называется инициальной для семейства $\{(f_\gamma, \varphi_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$. Воспользовавшись результатами из [7] нетрудно заметить, что $\tau = \sup \tau_\gamma$, где τ_γ - инициальная нечеткая топология для $(f_\gamma, \varphi_\gamma)$.

3. Произведение в $\mathbf{GF}T$. Напомним сначала определенную Хаттоном [2] операцию $\otimes_\gamma$ произведения решеток. Пусть $\{L_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ - семейство решеток. В качестве элементов решетки $L = \otimes_\gamma L_\gamma$ берутся подмножества $a \subset \prod L_\gamma : \gamma \in \Gamma$ такие, что 1) если $t \in a$ и $s \leq t$, то $s \in a$ (для элементов $s, t \in \prod L_\gamma$ полагаем $s \leq t$ тогда и только тогда, когда $s_\gamma \leq t_\gamma$ в L_γ для каждого $\gamma \in \Gamma$) и 2) если $b_\gamma \subset L_\gamma^+$ и $b = \prod b_\gamma \subset a$, то и $b \in a$, где $b_\gamma = \sup b_\gamma$ для каждого $\gamma \in \Gamma$. Порядок на L определяется отношением включения. Определим отображение $\tau_\gamma : L_\gamma \rightarrow L$ равенством $\tau_\gamma(t_\gamma) = \{s \in \prod L_\gamma : s_\gamma \leq t_\gamma\} (\in L)$.

Пусть теперь $\{(X_\gamma, L_\gamma, \tau_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ - семейство нечетких пространств (т.е. объектов $\mathbf{GF}T$); положим $X = \prod X_\gamma$, $L = \otimes_\gamma L_\gamma$ и пусть τ - инициальная нечеткая топология на (X, L) для семейства $((p_\gamma, \tau_\gamma) : (X, L) \rightarrow (X_\gamma, L_\gamma, \tau_\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ где $p_\gamma : X \rightarrow X_\gamma$ - отображения проектирования, а $\tau_\gamma : L_\gamma \rightarrow L$ определены как и выше. С помощью [2. предложение 2] нетрудно показать, что (X, L, τ) и является произведением семейства $\{(X_\gamma, L_\gamma, \tau_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ в $\mathbf{GF}T$.

Перейдем теперь к рассмотрению важнейших подкатегорий категории $\mathbf{GF}T$.

4. Категории $\mathbf{GF}T(L)$ и $\mathbf{FT}(L)$. Пусть L - некоторая фиксированная решетка и $\mathbf{GF}T(L)$ - полная подкатегория категории $\mathbf{GF}T$, объекты которой имеют вид (X, L, τ) , где L - данная решетка. Заметим, что $\mathbf{GF}T(L)$ не изоморфна категории $\mathbf{FT}(L)$ (за исключением случая $L = 2$ - обе категории $\mathbf{GF}T(2)$ и $\mathbf{FT}(2)$ изоморфны категории $\mathbf{Top}$ топологических пространств). Более того, в $\mathbf{GF}T(L)$ (в отличие от $\mathbf{FT}(L)$) отсутствует произведение.

Пусть отображение $\psi : L \rightarrow L$ фиксировано. Обозначим через $\mathbf{GF}T(L, \psi)$ подкатегорию категории $\mathbf{GF}T(L)$ морфизмы которой

имеют вид (ξ, φ) для данного φ . Нетрудно заметить, что $\mathcal{GFT}(\mathcal{L}, \mathcal{U}_{\mathcal{L}})$ изоморфна категории $\mathcal{FT}(\mathcal{L})$.

5. Категория $\mathcal{GCF T}$. Пусть $\mathcal{GCF T}$ - полная подкатегория категории $\mathcal{GFT}$, объектами которой являются чанговские $\mathcal{L}$ -нечеткие пространства (для всевозможных $\mathcal{L}$). Легко заметить, что $\mathcal{GCF T}$ естественным образом изоморфна категории $\mathcal{Fuz}_{\mathcal{L}}$, описанной Родабаухом [5]. Подкатегория $\mathcal{GCF T}(\mathcal{L}, \mathcal{U}_{\mathcal{L}})$ изоморфна категории $\mathcal{CFT}(\mathcal{L})$.

6. Категория $\mathcal{GLFT}$. Пусть $\mathcal{GLFT}$ - полная подкатегория категории $\mathcal{GFT}$, объектами которой являются ламинированные $\mathcal{L}$ -нечеткие пространства (т.е. такие нечеткие пространства $(X, \mathcal{L}, \mathcal{S})$, в которых $\mathcal{U}(e) = 1$ для каждой константы $e \in \mathcal{L}$). Характерная особенность подкатегории $\mathcal{GLFT}$ состоит в том, что в ней все пары вида (c, φ) , где $c : X \rightarrow X$ - постоянное отображение, являются морфизмами (и, следовательно, множество морфизмов между любыми двумя объектами непусто). Заметим, что подкатегория $\mathcal{GLCF T} = \mathcal{GLFT} \cap \mathcal{GCF T}$, очевидно, изоморфна категории $\mathcal{E}_k$, рассмотренной в [5], а подкатегория $\mathcal{GLCF T}(\mathcal{L}, \mathcal{U}_{\mathcal{L}})$ изоморфна категории всех ловеновских [4] нечетких пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chang C. Fuzzy topological spaces // J. Math. Anal. Appl., 1968, V. 24. P. 182-190.
2. Hutton B. Products of fuzzy topological spaces // Topol. Appl. 1980, V. 11. P. 59-67.
3. Goguen J.A. The fuzzy Tychonoff theorem // J. Math. Anal. Appl. 1973, V. 43. P. 734-742.
4. Lowen R. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness // J. Math. Anal. Appl., 1976, V. 56. P. 621-633.
5. Rodabaugh S. A categorical accomodation of various notions of fuzzy topology // Fuzzy Sets Syst., 1983, V. 9. P. 241-265.
6. Šostak A. On a fuzzy topological structure // Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser II, 1985, N. 11. P. 89-103.
7. Šostak A. On some modifications of fuzzy topologies, // Mat. Vestnik, 1988.

Латвийский государственный университет
Кафедра математического анализа

ПРОБЛЕМА ЗАМЕНИМОСТИ ДЛЯ МЕТОДОВ

СУММИРОВАНИЯ СО СКОРОСТЬЮ

3. Примея

Рассматриваются матричные методы суммирования $A = (a_{nk})$, для которых поле обозначено через $\mathcal{C}_A$ и A -сумма последовательности $x = (\xi_k)$ через $\lim_A x$, т.е.

$$\lim_A x = \lim_n \sum_k a_{nk} \xi_k$$

для всех $x \in \mathcal{C}_A$. Если $\mathcal{C}_A \supset \mathcal{C}$, то метод A называется консервативным. Консервативный метод A называется регулярным, если

$$\lim_A x = \lim x = \lim_k \xi_k \text{ при всех } x = (\xi_k) \in \mathcal{C}.$$

Проблема заменимости в теории матричных методов суммирования берет начало из работы немецкого математика К.Целлера [5], в которой он рассмотрел условия, при которых данный консервативный метод A имеет равносильный регулярный метод B , т.е. $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}_A$. На основе топологической структуры поля $\mathcal{C}_A$ стало известным, что существование такого регулярного метода B зависит от того, как расположена последовательность $e = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ в пространстве $\mathcal{C}_A$. Из этого было получено, что заменимыми могут быть только коррегулярные методы. Чтобы расширить проблему, вместо регулярного B начали рассматривать мультипликативный метод B (см. [3]), т.е.

$$\lim_B x = q \lim x \text{ при всех } x \in \mathcal{C},$$

В настоящее время заменимость определяется через множество φ , которое содержит все последовательности x с конечным числом ненулевых элементов (конечные последовательности). Метод A называется заменимым (см. [2]), если $\mathcal{C}_A \supset \varphi$ и существует такой метод B , для которого $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}_A$ и $\lim_B x = 0$ при всех $x \in \varphi$. Из этого определения следует, что метод A является заменимым тогда и только тогда, когда существует такой метод $B = (b_{nk})$, что $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}_A$ и $\lim_B e^k = \lim_n b_{nk} = b_k = 0$ для всех k , где $e^k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$.

Исследования заменимости (см. [2-4]) основывались на одной теореме Целлера (см. [5], теорема 5.3), позволявшей рассматривать каждый линейный непрерывный функционал $f(x)$ в C_A как некоторую B -сумму, т.е. $f(x) = \lim_B x$ для всех $x \in C_A$, где $C_B \supset C_A$ (в определенном случае $C_B = C_A$).

В последние годы своей жизни проф. Г. Кангро изучал методы суммирования со скоростью. Он и поставил задачу рассматривать заменимость в этом случае.

Пусть $\lambda = (\lambda_n)$, где $0 < \lambda_n \uparrow \infty$. Через C^λ обозначим множество всех последовательностей $x = (\xi_k)$, для которых существует предел $\lim_k \beta_k(x) = \beta(x)$, где $\beta_k(x) = \lambda_k(\xi_k - \lim x)$, и через n^λ подмножество $n^\lambda = \{x \in C^\lambda : \lim x = \beta(x) = 0\}$.

Последовательность x называется A^λ -суммируемой (суммируемой со скоростью λ), если существует предел

$$\lim_n \delta_n^A(x) = \delta^A(x),$$

где $\delta_n^A(x) = \lambda_n(\sum_k a_{nk} \xi_k - \lim_A x)$. Множество всех A^λ -суммируемых последовательностей обозначается через C_A^λ . Оно является FK -пространством, в котором каждый линейный непрерывный функционал f выражается формулой

$$f(x) = \mu \delta^A(x) + \sum_n \tau_n \delta_n^A(x) + t \lim_A x + \sum_k t_k \xi_k, \quad (1)$$

где $\sum |\tau_n| < \infty$ и ряд $\sum t_k \xi_k$ сходится при всех $x \in C_A^\lambda$ (см. [1]).

Автору удалось доказать аналог упомянутой теоремы Целлера для A^λ -суммируемости. Следующая теорема будет опубликована в ближайшем номере Ученых записок Тартуского государственного университета.

Теорема. 1) Для каждого функционала (1) найдется метод B , для которого $C_B^\lambda \supset C_A^\lambda$ и $\delta^B(x) = f(x)$ при всех $x \in C_A^\lambda$.

2) Если для f найдется такое представление (1), где $\mu \neq 0$, то метод B можно выбрать таким образом, что $C_B^\lambda = C_A^\lambda$.

На основе этой теоремы можно исследовать заменимость для методов суммирования для методов A^λ (λ -заменимость).

Учитывая определения заменимости (см. выше) и существование A^λ -суммируемости, мы можем дать разные определения λ -заменимости, которые являются аналогами вышеприведенных опре-

делений.

Определение 1. Метод A , для которого $c_A^\lambda \supset c^\lambda$, называем λ -заменимым, если существует метод B , для которого $c_B = c_A$ и $\lim_{\beta} x = f^B(x) = 0$ при всех $x \in n^\lambda$.

Определение 2. Метод A , для которого $c_A^\lambda \supset c^\lambda$, называем λ -заменимым, если существует метод B , для которого $c_B^\lambda = c_A^\lambda$ и $f^B(x) = 0$ при всех $x \in c_0^\lambda = \{x \in c^\lambda : \beta(x) = 0\}$.

Определение 3. Метод A , для которого $c_A^\lambda \supset \varphi$ называем λ -заменимым, если существует метод B , для которого $c_B^\lambda = c_A^\lambda$ и $f^B(x) = 0$ при всех $x = \varphi$.

В докладе приводятся несколько фактов в связи с λ -заменимостью. Сформулируем здесь два из них.

I. Если ряд $\sum a_k \xi_k$ ($a_k = \lim_n a_{nk}$) сходится при всех $x = (\xi_k) \in c_A^\lambda$, то метод $B = ((a_{nk} - a_k)/\lambda_n)$ λ -заменяет метод $A = (a_{nk})$ в смысле определений 1 и 3.

II. Метод $A = (a_{nk})$ является λ -заменимым в смысле определения 3, если существует фактор-последовательность (t_k) (ряд $\sum t_k \xi_k$ сходится при всех $x \in c_A^\lambda$) и число t такие, что система

$$\sum_n f_n^A(e^k) \tau_n = f^A(e^k) + t a_k + t_k, \quad k=1,2,\dots,$$

имеет решение $(\tau_n) \in \ell$.

Литература

1. Кангро Г. О λ -совершенности методов суммирования и ее применениях. I Изв. АН ЭстССР, Физ., Матем. Т. 20 № 2. С. 111-120.
2. Beekmann W., Chang S.C. On the structure of summability fields // Results in Mathematics, 1984, V. 7. P. 119-129.
3. Wilansky A. Distinguished subsets and summability invariants // J. d'analyse Math. 1964, V. 12. P. 327-350.
4. Wilansky A. Summability through Functional Analysis // North-Holland - Amsterdam, 1984.
5. Zeller K. Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren // Math. Z. 1951, B. 53. S. 463-487.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

UMKEHRSÄTZE FÜR RIESZ-VERFAHREN
ZUR SUMMIERUNG VON DOPPELREIHEN

S. Baron und H. Tietz

Ist $\{x_n\}$ eine Folge komplexer Zahlen, so sei $\bar{\Delta}x_n := x_n - x_{n-1}$ für alle n . Ist $\{y_n\}$ eine weitere Folge komplexer Zahlen mit $y_n \neq 0$ für alle n , so bedeute $x_n = \Omega(y_n)$ so viel wie $\sum |\bar{\Delta}(x_n/y_n)| < \infty$. Ist $\{x_{mn}\}$ eine Doppelfolge komplexer Zahlen, so sei

$\bar{\Delta}_m x_{mn} := x_{mn} - x_{m-1,n}$, $\bar{\Delta}_n x_{mn} := x_{mn} - x_{m,n-1}$ und $\bar{\Delta}_{mn} x_{mn} := \bar{\Delta}_m (\bar{\Delta}_n x_{mn}) = \bar{\Delta}_n (\bar{\Delta}_m x_{mn})$. Ist $\{y_{mn}\}$ eine weitere Doppelfolge komplexer Zahlen mit $y_{mn} \neq 0$ für alle m, n , so bedeute $x_{mn} = o(y_{mn})$, $x_{mn} = O(y_{mn})$, $x_{mn} = o_b(y_{mn})$ und $x_{mn} = \Omega(y_{mn})$ beziehentlich $x_{mn}/y_{mn} \rightarrow 0$ für $m, n \rightarrow \infty$ (im Pringsheimschen Sinne), $\sup |x_{mn}/y_{mn}| < \infty$, $x_{mn} = o(y_{mn}) \wedge x_{mn} = O(y_{mn})$ und $\sum |\bar{\Delta}_{mn}(x_{mn}/y_{mn})| < \infty$. Ist

$$(1) \quad \sum_{k,l=0}^{\infty} u_{kl}$$

eine Doppelreihe mit komplexen Gliedern und der Teilsummenfolge $\{s_{mn}\}$ mit

$$s_{mn} := \sum_{k,l=0}^{m,n} u_{kl},$$

so bedeute $b\text{-}\sum u_{kl} = \sigma$ so viel wie $s_{mn} = O(1) \wedge s_{mn} \rightarrow \sigma$ und bedeute $a\text{-}\sum u_{kl} = \sigma$ dasselbe wie $s_{mn} = \Omega(1) \wedge s_{mn} \rightarrow \sigma$. - Auch für jede auf $(0, \infty) \times (0, \infty)$ definierte Funktion f ist $f(x, y) \rightarrow \sigma$ für $x, y \rightarrow \infty$ im üblichen ("Pringsheimschen") Sinne gemeint, bedeutet $f(x, y) = O(1)$ dasselbe wie $\sup |f(x, y)| < \infty$ und $f(x, y) = \Omega(1)$, daß für jede Wahl der Indexfolgen $\{x_m\}$, $\{y_n\}$ und mit $t_{mn} := f(x_m, y_n)$ gilt $t_{mn} = \Omega(1)$.

Es seien p und q zwei nichtnegative reelle Zahlen, $\lambda = \{\lambda_k\}$ und $\mu = \{\mu_l\}$ zwei streng monoton gegen ∞ strebende Folgen nicht-

negativer Zahlen. Bei vorgegebener Doppelreihe (1) sei für alle $x, y > 0$

$$R(x, y) := \frac{1}{x^p y^q} \sum_{\lambda_k, \mu_1 < x, y} (x - \lambda_k)^p (y - \mu_1)^q u_{k1}$$

und für alle $m, n = 0, 1, \dots$

$$R_{mn} := \frac{1}{\lambda_{m+1}^p \mu_{n+1}^q} \sum_{k, l=0}^{m, n} (\lambda_{m+1} - \lambda_k)^p (\mu_{n+1} - \mu_l)^q u_{kl}.$$

Die Reihe (1) heißt beschränkt R-summierbar zum Wert σ , kurz $bR\text{-}\sum_{k1} = \sigma$, wenn gilt $R(x, y) = O(1) \wedge R(x, y) \rightarrow \sigma$ für $x, y \rightarrow \infty$; sie heißt beschränkt R^* -summierbar zum Wert σ , kurz $bR^*\text{-}\sum_{k1} = \sigma$, wenn gilt $R_{mn} = O(1) \wedge R_{mn} \rightarrow \sigma$ für $m, n \rightarrow \infty$. Die Reihe (1) heißt absolut R-summierbar zum Wert σ , kurz $aR\text{-}\sum_{k1} = \sigma$, wenn gilt $R(x, y) = O(1) \wedge R(x, y) \rightarrow \sigma$ für $x, y \rightarrow \infty$; sie heißt absolut R^* -summierbar zum Wert σ , kurz $aR^*\text{-}\sum_{k1} = \sigma$, wenn gilt $R_{mn} = O(1) \wedge R_{mn} \rightarrow \sigma$ für $m, n \rightarrow \infty$.

Satz 1. a) Aus $bR^*\text{-}\sum_{k1} = \sigma$ folgt $b\text{-}\sum_{k1} = \sigma$, wenn für jedes $r \in \{1, \dots, p\}$ und jedes $s \in \{1, \dots, q\}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\sum_{k=0}^m \lambda_k^r \sum_{l=0}^n u_{kl} = O_b(\lambda_{m+1}^r), \quad \sum_{l=0}^n \mu_l^s \sum_{k=0}^m u_{kl} = O_b(\mu_{n+1}^s).$$

b) Aus $aR^*\text{-}\sum_{k1} = \sigma$ folgt $a\text{-}\sum_{k1} = \sigma$, wenn für jedes $r \in \{1, \dots, p\}$ und jedes $s \in \{1, \dots, q\}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\sum_{k=0}^m \lambda_k^r \sum_{l=0}^n u_{kl} = O(\lambda_{m+1}^r), \quad \sum_{l=0}^n \mu_l^s \sum_{k=0}^m u_{kl} = O(\mu_{n+1}^s).$$

Spezialfälle von Satz 1 finden sich bei Knopp [1], S. 575 - 576 und Obrechhoff [2], Satz 4.

Satz 2. a) Aus $bR^*\text{-}\sum_{k1} = \sigma$ folgt $b\text{-}\sum_{k1} = \sigma$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\lambda_k \sum_{l=0}^n u_{kl} = O_b(\bar{\Delta} \lambda_k), \quad \mu_l \sum_{k=0}^m u_{kl} = O_b(\bar{\Delta} \mu_l).$$

b) Aus $aR^*\text{-}\sum_{k1} = \sigma$ folgt $a\text{-}\sum_{k1} = \sigma$, wenn die folgenden

Bedingungen erfüllt sind: $\lambda_k = \Omega(\lambda_{k+1})$, $\mu_1 = \Omega(\mu_{1+1})$,

$$\lambda_k \sum_{l=0}^n u_{kl} = \Omega(\bar{\Delta}\lambda_k), \quad \mu_1 \sum_{k=0}^m u_{k1} = \Omega(\bar{\Delta}\mu_1).$$

Spezialfälle von Satz 2 finden sich bei Young [3], Nr. 17 und Obrechhoff [2], Satz 5.- Da aus $bR-\Sigma u_{k1} = \sigma$ immer $bR^*-\Sigma u_{k1} = \sigma$ und aus $aR-\Sigma u_{k1} = \sigma$ immer $aR^*-\Sigma u_{k1} = \sigma$ folgt, darf in Satz 1 und Satz 2 jeweils R^* durch R ersetzt werden.

Satz 3. Sind die Bedingungen $\liminf \lambda_{m+1}/\lambda_m > 1$ und $\liminf \mu_{n+1}/\mu_n > 1$ erfüllt, so gilt:

- a) Aus $bR-\Sigma u_{k1} = \sigma$ folgt $b-\Sigma u_{k1} = \sigma$.
- b) Aus $aR-\Sigma u_{k1} = \sigma$ folgt $a-\Sigma u_{k1} = \sigma$.

Literaturverzeichnis

1. Knopp, K., Limitierungsumkehrsätze für Doppelfolgen.
Math. Z., 1939, 45, 573 - 589.
2. Obrechhoff, N., On double series which are absolutely summable by arithmetic means, (Bulgarian, Russian and French summaries). Bŭlgar. Akad. Nauk. Izv. Mat. Inst., 1962, 6, 61 - 82.
3. Young, W.H., On multiple Fourier series. Proc. London Math. Soc. (2), 1913, 11, 133 - 184.

Universität Stuttgart
Mathematisches Institut A

SCHMIDTSCHES UMKEHRBEDINGUNGEN FÜR
POTENZREIHENVERFAHREN

H. TIETZ

Es sei $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen mit $p_0 > 0$, für welche die Reihe

$$p(x) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

den Konvergenzradius 1 hat und $P_n := p_0 + \dots + p_n \rightarrow \infty$ gilt. Die Folge $s = \{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ komplexer Zahlen heißt J_p -limitierbar zum Wert σ ($J_p\text{-}\lim s_n = \sigma$), wenn die Reihe

$$p_s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n$$

für $0 < x < 1$ konvergiert und $\lim_{x \rightarrow 1-} p_s(x)/p(x) = \sigma$ gilt. Die Folge s

heißt M_p -limitierbar zum Wert σ ($M_p\text{-}\lim s_n = \sigma$), wenn

$$t_n := \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_k s_k \rightarrow \sigma$$

gilt. Bekanntlich sind die Verfahren J_p und M_p permanent, d.h., sie limitieren jedes $s \in c$, dem Raum der konvergenten Folgen, zum Wert $\lim s_n$, und aus $M_p\text{-}\lim s_n = \sigma$ folgt stets $J_p\text{-}\lim s_n = \sigma$, aber nicht umgekehrt. Unter geeigneten zusätzlichen Bedingungen für die Folge s kann man jedoch von $M_p\text{-}\lim s_n = \sigma$ auf $\lim s_n = \sigma$, von $J_p\text{-}\lim s_n = \sigma$ auf $M_p\text{-}\lim s_n = \sigma$ oder sogar von $J_p\text{-}\lim s_n = \sigma$ auf $\lim s_n = \sigma$ zurückschließen. Eine solche Bedingung nennen wir, falls einer der eben genannten Fälle vorliegt, eine Tauber-Bedingung (TB) vom $M_p + c$ -Typ, vom $J_p + M_p$ -Typ bzw. vom $J_p + c$ -Typ.

Satz 1. Gilt $P_{n+1}/P_n \rightarrow 1$ und für ein $r \in [0, \infty)$

(1(r)) $\liminf (s_n - s_m) \geq -r$ für $P_n/P_m \rightarrow 1$ ($n > m \rightarrow \infty$)
bzw. (falls die s_n komplex sind)

(2(r)) $\limsup |s_n - s_m| \leq r/\sqrt{2}$ für $P_n/P_m \rightarrow 1$ ($n > m \rightarrow \infty$),

so folgt aus $M_p\text{-}\lim s_n = \sigma$ stets $\limsup |s_n - \sigma| \leq r$.

Korollar 2. Gilt $P_{n+1}/P_n \rightarrow 1$, so ist (1(0)) bzw. (2(0)) eine TB vom M_p^{+c} -Typ.

Satz 3. Gilt

(3) $1 \leq P_n/P_m + 1$ für $1 < n/m + 1$ ($m \rightarrow \infty$)

und für ein $r \in [0, \infty)$

(4(r)) $\liminf (s_n - s_m) \geq -r$ für $n/m \rightarrow 1$

bzw. (falls die s_n komplex sind)

(5(r)) $\limsup |s_n - s_m| \leq r/\sqrt{2}$ für $n/m \rightarrow 1$,

so folgt aus M_p - $\lim s_n = \sigma$ stets $\limsup |s_n - \sigma| \leq r$.

Korollar 4. Gilt (3), so ist (4(0)) bzw. (5(0)) eine TB vom M_p^{+c} -Typ.

Satz 5. Gilt $P_{n+1}/P_n \rightarrow 1$, $P_{2n} = O(P_n)$ und (1(r)) bzw. (2(r)). so folgt aus $p_n(x)/p(x) = O(1)$ für $x \rightarrow 1^-$ auch $s_n = O(1)$.

Satz 6. Gilt (3), so ist (1(r)) bzw. (2(r)) eine TB vom J_p^{+M} -Typ.

Korollar 7. Gilt (3) und (1(r)) bzw. (2(r)), so folgt aus J_p - $\lim s_n = \sigma$ stets $\limsup |s_n - \sigma| \leq r$.

Satz 8. Gilt (3), so ist (1(0)) bzw. (2(0)) eine TB vom J_p^{+c} -Typ.

Satz 9. Gilt $p_n > 0$ für alle n und (3), so ist

$P_n(s_n - s_{n-1}) = O_L(p_n)$ bzw. $P_n(s_n - s_{n-1}) = O(p_n)$ eine TB vom J_p^{+c} -Typ.

Spezialfälle zu Korollar 2 und 4 finden sich in [10], Lemma 3, [11], Theorem 4, [15], Lemma 3 und [6], Theorem 6.1; zu Satz 5 in [1], Sätze 6 und 7, [7], Theorem 1 und [14], Satz 2; zu Satz 6 in [8], Satz 5 und [20], Satz 4; zu Korollar 7 in [1], Sätze 6 und 7, [8], Satz 6, [20], Satz 5 und [14], Satz 2; zu Satz 8 in [17], Spezialfälle von Theorem X und Theorem XI, [13], § 3, [10], Theorem A, [11], Theorem 8, [12], Theorem A, [7], Theorem 4, [15], [18], Theorem 2 und [6], Theorem 6.3; zu Satz 9 in [2], Theorem 11, [3], [4], [5], [16], Theorems I(A) und I(L), [19], [15], [8], Korollar 1,

[6], Theorems 5.2 bis 5.4, 5.2* und 5.4*, [21], Satz 4.4 und [9], Theorem 2.

Literaturverzeichnis

1. Davydov, N.A., The (c) -property of the Cesàro and Abel-Poisson methods and theorems of Tauberian type. Mat. Sb., 1963, 60, 185 - 206.
2. Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. Proc. London Math. Soc. (2), 1914, 13, 174 - 191.
3. Ishiguro, K., Tauberian theorems concerning the summability methods of logarithmic type. Proc. Japan Acad., 1963, 39, 156 - 159.
4. Ishiguro, K., A Tauberian theorem for (J, p_n) summability. Proc. Japan Acad., 1964, 40, 807 - 812.
5. Ishiguro, K., Two Tauberian theorems for (J, p_n) summability. Proc. Japan Acad., 1965, 41, 40 - 45.
6. Jakimovski, A., Tietz, H., Regularly varying functions and power series methods. J. Math. Anal. Appl., 1980, 73, 65 - 84. Errata 1983, 95, 597 - 598.
7. Jeyarajan, P.A., A Tauberian theorem for the generalised Abel method of summability, I. J. Indian Math. Soc., 1972, 36, 279 - 289.
8. Kokhanovskii, A.P., Tauberian theorems for semicontinuous logarithmic methods of summation of series. Ukrain. Mat. Zh., 1974, 26, 740 - 748. English translation: Ukrain. Math. J., 1974, 26, 607 - 613.
9. Kratz, W., Stadtmüller, U., Tauberian theorems for J_p -summability. Erscheint in J. Math. Anal. Appl. p -summa-
10. Kwee, B., A Tauberian theorem for the logarithmic method of summation. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1967, 63, 401 - 405.
11. Kwee, B., On generalized logarithmic methods of summation. J. Math. Anal. Appl., 1971, 35, 83 - 89.
12. Kwee, B., A Tauberian theorem for the (J, p_n) method of summation. J. London Math. Soc. (2), 1972, 5, 139 - 142.
13. Landau, E., Über einen Satz des Herrn Littlewood. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1913, 35, 265 - 276.
14. Mikhalin, G.A., Theorems of Tauberian type for (J, p_n) summation methods. Ukrain. Mat. Zh., 1977, 29, 763 - 770. English translation: Ukrain. Math. J., 1977, 29, 564 - 569.
15. Phillips, R., A Tauberian theorem for a scale of logarithmic methods of summation. Canad. J. Math., 1973, 25, 897 - 902.
16. Rangachari, M.S., Sitaraman, Y., Tauberian theorems for logarithmic summability (L). Tôhoku Math. J. (2), 1964, 16, 257 - 269. Correction 1965, 17, 443.

17. Schmidt, R., Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen. Math. Z., 1925, 22, 89 - 152.
18. Soni, K., Slowly varying functions and generalized logarithmic summability. J. Math. Anal. Appl. 1976, 53, 692 - 703.
19. Štěpánek, F., A Tauber's theorem for (J, p_n) summability. Monatsh. Math., 1966, 70, 256 - 260.
20. Teslenko, L.S., Theorems of Tauberian type for a generalized semicontinuous logarithmic method of summability of series. Approximation methods of mathematical analysis, Kiev. Gos. Ped. Inst., Kiev 1976, 108 - 119.
21. Tietz, H., Trautner, R., Tauber-Sätze für Potenzreihenverfahren. Arch. Math. (Basel), 1988, 50, 164 - 174.

Universität Stuttgart

Mathematisches Institut A

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ I РОДА ТИПА ВОЛЬТЕРРА

А.С. Аларцин

I. При построении интегральных моделей развивающихся систем [1] приходится иметь дело с уравнениями вида

$$\int_{\alpha(t)}^t K(t,s) \varphi(s) ds = f(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

$$\alpha'(t) \quad \varphi(t) = \varphi^0(t), \quad t \in [\alpha(t_0), t_0], \quad (2)$$

где $\varphi^0(t)$ - известная "предыстория".

По сравнению со стандартным уравнением Вольтерра I рода

$$\int_{t_0}^t K(t,s) \varphi(s) ds = f(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (3)$$

наличие переменного нижнего предела в (1) требует специального исследования вопросов корректности (1), сходимости тех численных методов, которые разработаны для (3), их устойчивости и т.д.

Специфика (1) обуславливается свойствами функции $\alpha(t)$. Так, в предположении, что

$$t - \alpha(t) \geq d > 0 \quad \forall t \in [t_0, T] \quad (4)$$

$$\text{и } f(t_0) = \int_{\alpha(t_0)}^{t_0} K(t_0, s) \varphi^0(s) ds; \quad \alpha'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, T],$$

справедлива оценка ([2], см. также [3])

$$\|\varphi(t)\|_{C_{[t_0, T]}} \leq \max \{ \varphi_0, \|f(t)\|_{C_{[t_0, T]}}^{(w)} \} \left(\lambda \frac{\mu^p - 1}{\mu - 1} + \mu^p \right), \quad (5)$$

где

$$\varphi_0 = \max_{t \in [\alpha(t_0), t_0]} |\varphi^0(t)|; \quad \lambda = k' e^{dK, k'}; \quad \mu = (K + dK, k') e^{dK, k'}$$

$$k = \min_{t \in [t_0, T]} |K(t, t)| > 0; \quad K = \max_{t \in [t_0, T]} |K(t, \alpha(t))|;$$

$$K_1 = \max_{a(t_0) \leq s \leq T} |K'_t(t, s)|; \quad p = [(T - t_0)d^{-1}] + 1,$$

обеспечивающая корректность (I) на паре $(C, \dot{C}^{(1)})$.

Условие (4) является довольно обременительным.

Так, равенство

$$a(t_0) = t_0, \quad (6)$$

позволяющее рассматривать (I) как естественное обобщение (3) (для (3) $a(t) \equiv t_0$), противоречит (4).

Именно случай (6) и изучается в настоящей работе.

2. Пусть

$$a'(t_0) < 1. \quad (7)$$

Тогда найдется такое t^* , $t_0 < t^* \leq T$, что

$$\max_{t \in [t_0, t^*]} \max_{k=1, 2, \dots} \left\{ \frac{|K(t, a(t))|}{|K(t, t)|} a'(t) + \frac{|K'_t(t, s)|_{s=t}}{|K(t, t)|} (z_k - z_{k+1}) \right\} \leq 1, \quad (8)$$

где числа z_k удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$z_{k+1} = a(z_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad z_0 = t^*. \quad (9)$$

Обозначим

$$\varphi_0^* = \max_{t \in [t_0, t^*]} |\varphi(t)|.$$

Справедлива следующая

Теорема. Пусть выполнены условия (6)–(9).

Тогда

$$\varphi_0^* \leq \frac{\|f(t)\|_{\dot{C}_{t_0, t^*}^{(1)}} k^{-1}}{1 - L} e^{K_1 k^{-1} (t^* - t_0)} \quad (10)$$

Допустим, что

$$t - a(t) \geq d_1 > 0 \quad \forall t \in [t^*, T].$$

Тогда на $[t^*, T]$ для решения (I) справедливо неравенство типа (5) с заменой Φ_0 на оценку Φ_0^* из (10), а на $d^* = \min(t^* - t_0, d_1)$.

Замечание. Если $a(t) \equiv t_0$, то $L=0$ и при $t^*=T$ из (10) вытекает стандартная оценка решения уравнения (3) (см., например, [4]).

3. Применение квадратурных методов для численного решения (I) имеет свою специфику. Так, в случае (4) порядок сходимости по сравнению с (3) уменьшается на единицу за счет аппроксимации интеграла на предистории $[a(t_0), t_0]$ [3]. Оказывается, тот же эффект имеет место и в случае (6). Для его устранения возможны различные подходы. Наконец, установление регуляризующего эффекта процедуры дискретизации для уравнения (I) проводится по обычной схеме [4] с использованием установленного факта корректности (I) на паре $(C, C^{(q)})$.

Литература

1. Глущков В.М., Иванов В.В., Яценко В.М. Моделирование развивающихся систем // М.: Наука, 1983, - 350 с.
2. Наубетова Ш.А., Яценко В.П. Регуляризующие алгоритмы решения интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменным нижним пределом // Приближенные методы анализа и их приложения. - Иркутск, СЭИ СО АН СССР, 1988 (в печати).
3. Анциферов Е.Г., Апарцин А.С., Ашенков Л.Т., Булагов В.П. Математические задачи энергетики (модели, методы, решения). Отчет о НИР / Иркутск, СЭИ СО АН СССР, 1987.
4. Апарцин А.С. Численное решение интегральных уравнений I рода типа Вольтерра: Препринт № 1 / АН СССР, Сиб. отд.-ние. Сиб. энерг. ин-т. - Иркутск, 1981, - 26 с.

Сибирский энергетический институт
Лаборатория математических методов

О ВРАЩЕНИИ ЭКВИВАРИАНТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

З.И.Баланов

Хорошо известна роль различных геометрических инвариантов (степень, вращение, число Лефшеца, индекс Дольда и др.) в таких важных задачах функционального анализа, как существование решений нелинейных уравнений, оценка их числа, исследование их устойчивости и т.д. Давно замечено, что те или иные условия симметрии отображений позволяют эффективно вычислять или оценивать такие геометрические инварианты. Одним из первых результатов в этом направлении была знаменитая теорема Борсука, утверждающая нечетность степени нечетного отображения. Ниже приводится ряд утверждений, являющихся бесконечномерными аналогами этой теоремы в случаях более сложных (чем нечетность) условий симметрии.

Теорема 1. Пусть E - гильбертово пространство, $\Omega \subset E$ - открытое подмножество и пересечения $\partial\Omega$ с достаточно большими конечномерными подпространствами являются связными многообразиями. Пусть, далее, $G^{(n)}$ и $G^{(n)}$ - пара изометричных действий конечной группы G на E и $\partial\Omega$ инвариантна относительно $G^{(n)}$. Пусть, наконец, $N \subset \partial\Omega$ - замкнутое G -подпространство и $\partial\Omega \setminus N$ свободно. Тогда для любых эквивариантных вполне непрерывных векторных полей

$\phi, \psi: \partial\Omega \rightarrow \{E \setminus 0\}$, эквивариантно гомотопных на N , справедлива формула: $\chi(\phi, \partial\Omega) \equiv \chi(\psi, \partial\Omega) \pmod{|G|}$.

Предположив, что $\langle G^{(n)} \cdot G^{(n)} \rangle$ конечна, можно ослабить условие гильбертовости E до банаховости. Частный случай приведенной теоремы для циклических групп был доказан в [1], где, между прочим, усиливался (для гильбертовых пространств) соответствующий результат Э.М.Мухамадиева [2] (устранение перестановочности образующих действий); ср. также [3].

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 1 G изоморфна компактной не вполне несвязной группе. Тогда $\chi(\phi, \partial\Omega) = \chi(\psi, \partial\Omega)$

Теорема 2. Пусть E - банахово пространство, $\Omega \subset E$ - открытое подмножество, причем $\partial\Omega$ - то же, что и в те-

ореме I. Пусть G - конечная группа, линейно действующая на E , причем $\partial\Omega$ инвариантна относительно G . Пусть, далее, $N \subset \partial\Omega$ - замкнутое G -подпространство, $(H_1), \dots, (H_m)$ - орбитные типы на $\partial\Omega \setminus N$. Пусть, наконец, $f, h: \partial\Omega \rightarrow \{E \setminus 0\}$ - пара многозначных уплотняющих отображений с выпуклыми образами, коммутирующих с G , причем векторные поля $I-f$ и $I-h$ эквивариантно гомотопны на N . Тогда существуют такие целые числа $a_1, a_2, \dots, a_m$, что

$$\chi(I-f, \partial\Omega) - \chi(I-h, \partial\Omega) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot |G/H_i|$$

Случай: $\partial\Omega$ - банахова сфера, G действует на $\partial\Omega \setminus N$ свободно, - рассматривался в [4], где, между прочим, усиливался результат работы [5].

Следующий результат получен автором совместно с А.Х.Кушкулеем.

Теорема 3. Пусть $E, \Omega, \partial\Omega, G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ - как и в теореме I, причем действие $G^{(1)}$ полусвободно и $E G^{(1)} \subset E G^{(2)}$. Тогда для любого эквивариантного вполне непрерывного векторного поля $\phi: \partial\Omega \rightarrow \{E \setminus 0\}$ справедлива формула $\chi(\phi, \partial\Omega) = \chi(\phi, \partial\Omega / E G^{(1)}) \cdot \alpha + K \cdot |G|$, где K - некоторое целое число, а α обладает следующими свойствами: (1) по модулю $|G|$ определен однозначно; (2) α взаимно просто с $|G|$; (3) если $G^{(1)} = G^{(2)}$, то $\alpha = 1$.

Следствие 2. Пусть в условиях теоремы 3 G изоморфна компактной не вполне несвязной группе. Тогда $\chi(\phi, \partial\Omega)$ и $\chi(\phi, \partial\Omega / E G^{(1)})$ одновременно отличны от нуля.

Частный случай теоремы 3 и следствия 2 ($G^{(1)} = G^{(2)}$) приведен в [6].

Литература

1. Баланов З.И., Винниченко С.В. К задаче о вычислении вращения эквивариантного поля // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. - Ярославль, 1985. С. 89-98.
2. Мухамадиев Э.М. К теории периодических вполне непрерывных полей // УМН. 1967. Т.32, Вып. 4. С. 127-128.

3. Борисович К.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера // УМН. 1977. Т. 32, Вып. 4. С. 3-54.
4. Баланов З.И. О принципе сравнения Красносельского в бесконечномерных пространствах для компактных групп // Латв. мат. ежегодн.- Рига, 1988. Вып. 31. С. 207-215.
5. Израилевич Я.А., Обуховский В.В. О некоторых топологических характеристиках эквивариантных многозначных отображений // Труды матем. ф-та ВГУ.- Воронеж, 1973. Вып. 10. С. 52-61.
6. Wei-Yue Ding. Generalizations of the Borsuk Theorem// Journal of Mathematical Analysis and applications. 1985, V.110. P.553-567.

Рижский политехнический институт
Кафедра прикладной математики

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ А-МЕТОДА РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В.И. Биленко

В работе [1] предложен и глубоко исследован аппроксимационный метод (А-метод) приближения алгебраическим многочленами решения задачи Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с многочленными коэффициентами.

В дальнейшем этот метод был применен и хорошо зарекомендовал себя при решении систем линейных ОДУ, краевых задач для линейных ОДУ, линейных дифференциальных уравнений в частных производных и др. (см. [2] и библиографию к ней).

В данном сообщении на основании работ [1-4] рассмотрены вопросы построения и исследования на точность вычислительных схем А-метода решения интегральных уравнений с полиномиальными нелинейностями вида

$$\alpha(x)y(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t, y(t)) dt, \quad x \in [-h, h] \quad (1)$$

где

$$K(x, t, y(t)) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l \sum_{k=0}^l A_{ijk} x^i t^j y^k(t),$$

A_{ijk} — постоянные коэффициенты, $\alpha(x)$ и $f(x)$ — алгебраические многочлены степеней не выше соответственно n_a и n_f .

Целесообразность разработки алгоритмов решения уравнений вида (1)–(2) на основе А-метода при наличии многочисленных алгоритмов решения более общих интегральных уравнений объясняется, во-первых, обоснованностью и хорошими вычислительными характеристиками А-метода, ориентацией его на такие типы уравнений, а, во-вторых, спецификой и важностью этих уравнений. К ним, например, легко сводятся дифференциальные уравнения с полиномиальной правой частью вида

$$\sum_{s=0}^r \alpha_s(x) y^{(s)}(x) = \sum_{l=0}^L \beta_l(x) y^l(x), \quad (2)$$

где $\alpha_s(x)$ и $\beta_l(x)$ — алгебраические многочлены.

Общая схема построения приближенных полиномиальных реше-

ний уравнений вида (I)–(2) согласно А-методу состоит в переходе к следующему приближенному уравнению вида

$$\alpha(x)y_n(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t, y_n(t)) dt + \varepsilon_N(x), \quad (3)$$

где $y_n(x)$ – решение этого уравнения, представляющее собой алгебраический многочлен одного из следующих видов

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k \text{ или} \quad (4)$$

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k T_k(x/h), \quad T_k(\cdot) = \cos k \arccos(\cdot),$$

с неизвестными коэффициентами α_k (или β_k), $\varepsilon_N(x)$ – невязка-многочлен степени N вида

$$\varepsilon_N(x) = \sum_{k=n+1}^N \tau_k T_k(x/h), \quad (5)$$

$$N = \max(n_\alpha + n, n_f, I + J + n_L + 1),$$

τ_k – неизвестные вспомогательные параметры.

Приравнивая теперь в (3) коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем для определения неизвестных коэффициентов α_k (или β_k), $k = 0, n$ и параметров τ_k , $k = n+1, N$ некоторую систему из $N+1$ нелинейного алгебраического уравнения.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Пусть число $h > 0$ и, для уравнения (3) число n такие, что в шаре $S(\rho) = \{ \varphi : \varphi \in Y; \varphi \in C[-h, h] \cap L_p^2[-h, h], \|\varphi\|_Y \leq \rho \}$ существуют единственное решение задачи (I)–(2) и единственное решение уравнения (3) и пусть

$$x \in [-h, h], \quad \alpha(x) > 0.$$

Тогда при $x \in [-h, h]$ выполняются неравенства

$$\|y(x) - y_n(x)\|_C \leq (1 + A_1(h, \rho)/\sqrt{n}) \|\varepsilon_N(x)/\alpha(x)\|_C,$$

$$\|y(x) - y_n(x)\|_{L_p} \leq (1 + A_2(h, \rho)/\sqrt{n}) \|\varepsilon_N(x)/\alpha(x)\|_{L_p},$$

где $A_1(h, \rho)$ и $A_2(h, \rho)$ – постоянные, не зависящие от n , через $C[-h, h]$ и $L_p^2[-h, h]$ обозначены, как обычно, пространства непрерывных и суммируемых с квадратом при чебышевском весе

$p(x) = \sqrt{1 - (x/h)^2}$ на $[-h, h]$ функций с нормами

$$\| \cdot \|_C = \max_{x \in [-h, h]} | \cdot |, \quad \| \varphi \|_{L_p} := \left\{ \frac{2}{\pi h} \int_{-h}^h \frac{\varphi^2(x) dx}{\sqrt{1 - (x/h)^2}} \right\}^{1/2}.$$

При некоторых дополнительных ограничениях (аналогичных условиям теоремы 2 из [4]) доказаны следующие неравенства:

$$\| y(x) - y_n(x) \|_C \leq \mu_1(h, \rho) \sqrt{N} E_n(y)_C, \quad \mu_1(h, \rho) = \text{const} \\ \| y(x) - y_n(x) \|_{L_p} \leq \mu_2(h, \rho) E_n(y)_{L_p}, \quad \mu_2(h, \rho) = \text{const},$$

где $E_n(y)_C$ и $E_n(y)_{L_p}$ — величины наилучшего приближения алгебраическими многочленами функций соответственно из $C[-h, h]$ и $L_p[-h, h]$.

Изучены следующие три итерационные схемы численной реализации А-метода решения уравнения (1)–(2):

$$\alpha(x) y_{n,v}(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t, y_{n,v-1}(t)) dt + \varepsilon_{n,v}(x),$$

$$\alpha(x) y_{n,v}(x) =$$

$$= f(x) + \sum_{i=0}^j x^i \int_0^x \sum_{j=0}^j \sum_{l=0}^L A_{i,j,l} t^j y_{n,v-1}^{l-1}(t) y_{n,v}(t) dt + \varepsilon_{n,v}(x),$$

$$\alpha(x) y_{n,v}(x) =$$

$$= f(x) + \sum_{i=0}^j x^i \int_0^x \sum_{j=0}^j \sum_{l=0}^L A_{i,j,l} t^j [l y_{n,v-1}^{l-1}(t) y_{n,v}(t) - (l-1) y_{n,v-1}^l(t)] dt + \varepsilon_{n,v}(x),$$

где через $y_{n,v}(x)$ и $\varepsilon_{n,v}(x)$ обозначены соответственно многочлены вида (4) и невязка вида (5) на v -м шаге итераций.

Для первых двух из этих схем получены оценки вида

$$\| y_n(x) - y_{n,v}(x) \|_C \leq$$

$$\leq \frac{Q_i^v(h, \rho)}{v!} [\| y_n(x) - y_{n,0}(x) \|_C + \| y(x) - y_{n,0}(x) \|_C], \quad i=1, 2,$$

а для третьей вида

$$\|y_n(x) - y_{n,\nu}(x)\|_C \leq$$

$$\leq \left\{ Q_3(h, \rho) [\|y_n(x) - y_{n,0}(x)\|_C + \|y(x) - y_{n,0}(x)\|_C] \right\}^{\nu} x^{\nu}$$

где $Q_i(h, \rho)$, $i = \overline{1, 3}$ — постоянные, зависящие только от h и ρ .

Литература

1. Дзядык В.К. Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. 38, № 4. С. 937-967.
2. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и их применение // Киев: Наук. думка, 1988.
3. Ortiz E.L., Pham Ngoc Dinh A. On the convergence of the tau method for nonlinear differential equations of Riccati's type // Nonlinear Analysis, 1985. 9, № 1. P. 53-60.
4. Биленко В.И. А-метод решения дифференциальных уравнений Риккати // Исследования по теории аппроксимации функций. Киев: Ин-т матем. АН УССР. 1987. С. 5-13.

Институт проблем моделирования
в энергетике АН УССР, г. Киев

О НЕКОТОРЫХ ГИБРИДНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

О. Ваарманн

Выбор подходящего (оптимального) алгоритма для решения систем нелинейных уравнений не является тривиальной задачей. Может случиться, что выбранный алгоритм эффективен на одном этапе решения (при одном начальном приближении), но может уступить другому на другом этапе (при другом начальном приближении). Поэтому в последнее время предпочитают гибкий многометодный подход к решению задач. При таком подходе требуется высокая эффективность отдельного метода лишь на каком-то этапе расчетов или на каком-либо классе задач. В данном сообщении рассматривается многометодный подход, который заключается в построении гибридных методов, т.е. методов, содержащих числовые параметры, при фиксировании нужным образом значений которых эти методы превращаются в известные негибридные методы.

Пусть требуется решить уравнение

$$F(x) = 0$$

или найти минимум функционала

$$\varphi(x) = 1/2 \|F(x)\|^2, \quad (1)$$

где дифференцируемый оператор $F(x): DCR^n \rightarrow R^m$.

Для решения уравнения (1) рассмотрим следующие алгоритмы:

1° Вычисляем $y_{k+1} = x_k - B_k g(x_k)$ или $y_{k+1} = x_k - \alpha_k F'(x_k)^T F(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$

$$\text{где } A_k = B_k [F'(x_k)]^T = 2\alpha_k [F'(x_k)]^T -$$

$$- \alpha_k^2 [F'(x_k)]^T F'(x_k) [F'(x_k)]^T$$

и $g(x_k) = [F'(x_k)]^T F(x_k)$. При этом A_k (или B_k) не вычисляется в явном виде, а вектор $B_k F(x_k)$ получается в результате произведения матриц $[F'(x_k)]^T$ и $F'(x_k)$ последовательно на вектор $F(x_k)$.

2° Если $\varphi(y_{k+1}) < \varphi(x_k)$, то $x_{k+1} := y_{k+1}$, $\alpha = 0$

В противном случае $\Rightarrow 7^0$

3⁰ Вычисляем A_{k+1} в явном виде и $y_{k+2} = x_{k+1} - A_{k+1}F(x_{k+1})$

4⁰ Если $\varphi(y_{k+2}) \leq \varphi(x_{k+1})$, то $x_{k+2} := y_{k+2}$, $\Rightarrow 10^0$

В противном случае $\Rightarrow 1^0$.

5⁰ Вычисляем

$$A_{k+2} = 2A_{k+1} - A_{k+1}F'(x_{k+2})A_{k+2},$$

$$y_{k+3} = x_{k+2} - A_{k+2}F(x_{k+2}).$$

6⁰ Если $\varphi(y_{k+3}) \leq \varphi(x_{k+2})$, то $x_{k+3} := y_{k+3}$, $\Rightarrow 10^0$

7⁰ Вычисляем.

$$x_{i+1} = x_i - \tau_i g(x_i) - \eta_i B_i g(x_i),$$

где $i=k$ или $i=k+2$, а τ_i и η_i определяются из условия минимума

$$\phi(\tau_i, \eta_i, x_i) = \min_{\tau, \eta} \phi(\tau, \eta, x_i), \quad \phi(\tau, \eta, x_i) = \phi(x_i - \tau g(x_i) - \eta B_i g(x_i))$$

8⁰ Если $\phi(x_{i+1}) \leq \phi(x_i)$, то $\Rightarrow 11^0$

В противном случае $\Rightarrow \text{stop}$.

9⁰ Если условия окончания выполнены $\Rightarrow \text{stop}$.

В противном случае $k := k+1 \Rightarrow 3^0$

10⁰ Если условия окончания выполнены $\Rightarrow \text{stop}$.

В противном случае $k := k+1 \Rightarrow 5^0$

11⁰ Если условия окончания выполнены $\Rightarrow \text{stop}$.

В противном случае $k := k+1 \Rightarrow 3^0$

Замечание 1. При необратимости $F'(x)$ или в случае его плохой обусловленности A_k можно заменить на $D_k[F'(x_k)]^T$, где

$$D_{k+1} = \text{diag}(D_k, M_{k+1} D_k), \quad M_k = E_k + A_k^{-1}, \quad A_k^{(0)}.$$

Замечание 2. Если вычисление значений $F(x)$ связано с

большими вычислительными затратами. то вместо процедуры 7° для определения τ и η целесообразно использовать процедуру из [3], где эти параметры определяются из условия минимальной ошибки и задача определения параметров сводится к решению системы линейных уравнений второго порядка.

Пусть теперь

$$x_{K+1} = x_K - \tau_K g(x_K) - \eta_K p_K, \quad (3)$$

где $p_K = -A_K F(x_K)$ и A_K - некоторая аппроксимация для $[F'(x_K)]^{-1}$, а параметры τ и η определяются из условия минимума.

В качестве p_K (или A_K) можно использовать различные выражения:

а) $A_K = [F'(x_K)]^{-1}$, т.е. решается точно уравнение $F'(x_K)p_K = -F(x_K)$

б) $A_K = [F'(\theta_K)]^{-1}$ где

$$\theta_K = \begin{cases} x_0, & \text{если } K=0 \\ x_K - 1/2 A_{K-1} F(x_K), & K \geq 1. \end{cases} \quad (4)$$

в) На каждой итерации для уравнения $F'(x_K)p_K = -F(x_K)$ вычисляется приближенное уравнение, при котором выполняется условие

$$\|y_{K+1} - x_K\| \leq c \|F(x_K)\|,$$

где c некоторое постоянное. Например, положим $x_{K,0} = x_K$ и вычисляем по рекуррентной формуле [2]

$$x_{K,1+1} = x_{K,1} - 2\alpha_K g(x_{K,1}) - \alpha_K^2 B_K g(x_{K,1}) \quad (5)$$

пока не выполняется условие

$$\|x_{K,1+1} - x_K\| \leq c \|F(x_K)\|.$$

В качестве c можно положить $2l_{\max}/N(1-\mu_0)$, где $l_{\max}$ - максимальное (допустимое) число внутренних итераций.

$$\|F'(x)\| \leq N, \quad \mu_K = \|I - [F'(x_K)]^{-1} F'(x_K)\|.$$

При практическом применении этого гибридного алгоритма следует сперва вычислять P_K , и если $\varphi(x_K + P_K) > \varphi(x_K)$, то прибегать к формуле (3).

Для решения задачи (2) применим метод

$$x_{K+1} = x_K - A_K F(x_K), \quad (6)$$

где $A_K = M_K^{-1} [F'(\theta_K)]^T$, $M_K = [F'(\theta_K)]^T F'(\theta_K) + \lambda_K I$ и $\lambda_K \geq 0$, а θ_K определяется по формуле (4) (см. также [1]).

Если проектор ортогонального проектирования пространства R^m на область значений якобиана не зависит от x , то можно доказать, что метод (6) сходится со скоростью сходимости $1+\sqrt{2}$ к решению нормального уравнения.

Литература

1. Бартин М. Я. Об одном итерационном методе решения функциональных уравнений (на укр.) // ДАН УРСР, 1968, сер. А, No. 5. С. 387-391.
2. Ваарманн О. О применении обобщенных обратных операторов и их приближений для решения нелинейных уравнений // Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 1970, Т. 9, No. 3. С. 265-274.
3. Mărușter, Șt. On the two-step gradient method for nonlinear equations. Seminarul de Informatică și Analiză Numerică. Timisoara, Universitatea Din Timisoara, 1985, №20.
4. Shacham Mordechai. Numerical solution of constrained nonlinear algebraic equations // Int. J. Numer. Meth. Eng., 1986, V. 23. P. 1455-1481.

Институт кибернетики АН ЭССР
Отдел математики

О ПРОЕКЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ЗАДАЧ

Г. Вайнник

I. Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \quad (1)$$

где A - линейный непрерывный оператор из гильбертова пространства H в гильбертово пространство F , являющийся замкнутой областью значений $\mathcal{R}(A) \subseteq F$. Нулевое подпространство (ядро) $\mathcal{N}(A)$ оператора A считается конечномерным. Более того, его размерность $\ell = \dim \mathcal{N}(A)$ считается известным. Само $\mathcal{N}(A)$ может быть неизвестным или известным лишь приближенно. Далее, пусть $\mathcal{L} \subset H$ - такое ℓ -мерное подпространство в H , что

$$\theta(\mathcal{L}, \mathcal{N}(A)) \equiv \|P_{\mathcal{L}} - P_{\mathcal{N}(A)}\| < 1, \quad (2)$$

где $P_{\mathcal{L}}$ и $P_{\mathcal{N}(A)}$ - ортопроекторы в H , проектирующие на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{N}(A)$ соответственно. Выбор подпространства $\mathcal{L}$ можно провести наугад в надежде, что (2) будет выполнено, либо использовать в качестве $\mathcal{L}$ некоторое, быть может, довольно грубое приближение к $\mathcal{N}(A)$.

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell$ - некоторый базис подпространства $\mathcal{L}$. Введем ℓ -мерный оператор

$$Bu = \sum_{k=1}^{\ell} (u, \varphi_k) \varphi_k, \quad u \in H. \quad (3)$$

Предложение. Пусть выполнено условие (2). Тогда при каждом $z \in \mathcal{L}$ уравнение

$$A^*Au + Bu = A^*f + z \quad (4)$$

однозначно разрешимо, и его решение удовлетворяет уравнению

$$A^*Au = A^*f \quad (5)$$

и

$$Bu = z. \quad (6)$$

Доказательство. Обозначим через $v_1, \dots, v_\ell$ базис $\mathcal{N}(A)$. Уравнение (5) разрешимо, его общее решение дается формулой

$$u = A^+f + \sum_{k=1}^{\ell} c_k v_k, \quad (7)$$

где A^+f - решение минимальной нормы задачи $\|Au - f\| \rightarrow \min, u \in H$.

Произвольные постоянные $c_1, \dots, c_\ell$ определим так, чтобы выполнялось условие (6):

$$B \sum_{k=1}^{\ell} c_k v_k = z - BA^* \varphi;$$

из (2) следует, что оператор $B = BP_{\mathcal{L}}$ действует между $\mathcal{N}(A)$ и $\mathcal{L}$ взаимно однозначно. Итак, существует и единствен элемент $u \in H$, удовлетворяющий (5) и (6). Сложив (5) и (6), убеждаемся, что этот же элемент u удовлетворяет и уравнению (4). Если для некоторого $v \in H$ имеем $A^*Av + Bv = 0$, то

$$\|Av\|^2 + \sum_{k=1}^{\ell} |(v, \varphi_k)|^2 = 0,$$

т.е. $v \in \mathcal{N}(A)$ и $P_{\mathcal{L}}v = 0$. Отсюда в силу (2) следует, что $v = 0$. Поэтому построенное решение u уравнения (4) единственно. Предложение доказано.

Заметим, что само уравнение (1) разрешимо лишь в обобщенном смысле, если $f \notin \mathcal{R}(A)$; обобщенные решения (или квазирешения) задаются формулой (7). Переход от уравнения (1) к регуляризованному уравнению (4) позволяет выделить то квазирешение, для которого выполнено (6).

2. Оператор $A^*A + B$ самосопряжен и положительно определен в H , поэтому для решения уравнения (4) можно применить метод Галеркина (метод Рунца). Пусть $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — полная система элементов в H , причем первые ℓ элементов этой системы порождают подпространство $\mathcal{L}$, для которого выполнено условие (2). Приближенное решение уравнения (4) разыскиваем в виде

$$u_n = \sum_{j=1}^n \xi_j \varphi_j \quad (n > \ell); \quad (8)$$

коэффициенты $\xi_1, \dots, \xi_n$ определим по методу Галеркина из условий

$$(A^*Au_n + Bu_n - A^*f - z, \varphi_i) = 0 \quad (i=1, \dots, n).$$

Это приводит к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^n \{(A\varphi_j, A\varphi_i) + \sum_{k=1}^{\ell} (\varphi_j, \varphi_k)(\varphi_k, \varphi_i)\} \xi_j = (f, A\varphi_i) + (z, \varphi_i) \quad (i=1, \dots, n). \quad (9)$$

Система (9) однозначно разрешима при всех $n > \ell$. Быстрота сходимости метода Галеркина (8), (9) характеризуется неравенствами (см. [3])

$$\|u - P_n u\|_H \leq \|u_n - u\|_H \leq c \|u - P_n u\|_H, \quad (10)$$

где u - решение уравнения (4), P_n - ортопроектор в H , проектирующий на линейную оболочку H_n элементов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Константа c существенно зависит от $\theta = \theta(\mathcal{L}, \mathcal{N}(A))$.

В случае, когда элементы $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell$ ортонормированы,

$$c = \max \{1, \|A\|\} / \min \{\sqrt{1-\theta^2}, \mu\},$$

где $\mu = \inf \{\|Au\| : u \in H, u \perp \mathcal{N}(A), \|u\|=1\}$; из замкнутости $\mathcal{R}(A)$ следует, что $\mu > 0$ (см. например, [1]).

3. Укажем еще один вариант метода Галеркина для уравнения (4) в случае $z=0$; предполагается, что $(\varphi_k, \varphi_i) = 0$ для $k=1, \dots, \ell$, $i=\ell+1, \ell+2, \dots$. Приближенное решение уравнения (4) разыскиваем в виде

$$u_n = \sum_{j=\ell+1}^n \xi_j \varphi_j \quad (n > \ell); \quad (8^*)$$

коэффициенты $\xi_{\ell+1}, \dots, \xi_n$ определим из системы

$$\sum_{j=\ell+1}^n (A\varphi_j, A\varphi_i) \xi_j = (f, A\varphi_i) \quad (i=\ell+1, \dots, n). \quad (9^*)$$

И для такого метода справедлива оценка (10).

4. Малые возмущения f и A в уравнении (1) приводят к возмущениям того же порядка малости в решении задачи (4) и его галеркинских приближениях. Это обстоятельство позволяет рекомендовать описанные алгоритмы для решения интегральных уравнений $u = \lambda Tu + f$ не только при характеристических значениях λ , но и при λ , близких к характеристическим значениям.

5. Метод (8), (9) является галеркинским для уравнения (4). Для исходного уравнения (1) методы (8), (9) и (8*), (9*) можно трактовать как некоторые модификации метода наименьших квадратов. Аналогично можно ввести и изучить метод наименьшей ошибки (об этом методе см. [2], [4]), основывающийся на дуальной симметризации $AA^*x = f$ уравнения (1). Некоторые другие схемы регуляризации нормально разрешимых задач без предположения о конечномерности $\mathcal{N}(A)$ и без знания $\ell = \dim \mathcal{N}(A)$ изучались в [1, 4].

Литература

1. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах // М.: Наука, 1986.
2. Вайникко Г.М., Хямарик У.А. Проекционные методы и саморегуляризация в некорректных задачах // Изв. высш. учебн. завед. Математика, 1985, № 10, с. 3-17.
3. Красносельский М.А., Вайникко Г.М. и др. // Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
4. Хямарик У. О решении нормально разрешенных задач регуляризованными проекционными методами // В кн.: Методы решения интегральных, дифференциальных и операторных уравнений. Тарту: ТГУ, 1987, с. 70-71.

Тартуский государственный университет
Кафедра вычислительной математики

НЕЯВНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ СМЕШАННОГО ТИПА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛЕСТНЫХ ЗАДАЧ

М.М. Глушик, О.В. Глушик

В работе приводится построение, исследование свойств и численная реализация нового класса неявных численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых сочетаются свойства одношаговых и многошаговых методов.

Для исследования задачи

$$y' = f(y), \quad y(x=x_0) = y_0, \quad / 1 /$$

где $f: [x_0, x_k] \times R^n \longrightarrow R^n$,

предлагаются численные методы вида

$$y_{n+1} = y_n + hf \left[\sum_{m=0}^{K-2} \beta_m y_{n-m} + \gamma_1 y_{n+1} \right], \quad / 2 /$$

которые являются точными на многочленах до степени K включительно при выполнении условий

$$\sum_{m=0}^{K-2} \beta_m + \gamma_1 = 1, \quad / 3 /$$

$$(-1)^i \sum_{m=1}^{K-2} \beta_m S_m^i + \gamma_1 = B_{0i}, \quad i = \overline{1, K-1},$$

где

$$B_{0i} = \frac{1}{1+i}, \quad h = x_{n+1} - x_n, \quad h_m = x_{n-m+1} - x_{n-m},$$

$$h_m = h \cdot K_m, \quad m = \overline{1, K-2}, \quad S_i = K_1 + K_2 + \dots + K_i.$$

Если использовать рекуррентное соотношение

$$B_{mn} = B_{m-1,n} \cdot S_m + B_{m-1,n+1} \quad / 4 /$$

то решение системы уравнений / 3 / представится в виде:

$$\gamma_1 = \frac{B_{K-2,1}}{\prod_{m=1}^{K-2} (S_m + 1)},$$

$$\beta_{K-2} = (-1)^{K-2} \frac{B_{K-3,1} - \gamma_1 \prod_{m=1}^{K-3} (S_m + 1)}{S_{K-2} \prod_{m=1}^{K-3} (S_{K-2} - S_m)},$$

$$\beta_{K-i} = (-1)^{K-i} \frac{B_{K-i-1,1} - \gamma_1 \prod_{m=1}^{K-i-1} (S_m + 1) - (-1)^{K-i} \sum_{m=2}^{K-2} \beta_m S_m \prod_{p=1}^{K-i-1} (S_m - S_p)}{S_{K-i} \prod_{m=1}^{K-i-1} (S_{K-i} - S_m)},$$

$$(i \geq 2)$$

$$\beta_1 = - \frac{B_{0,1} - \gamma_1 + \sum_{m=2}^{K-2} \beta_m S_m}{S_1},$$

$$\beta_0 = 1 - \gamma_1 - \sum_{m=1}^{K-2} \beta_m$$

Предложенные методы исследовались на модельных уравнениях /в том числе жестких/. Вычислительный эксперимент подтверждает эффективность данного подхода к построению методов.

Львовский торгово-экономический институт
Кафедра высшей математики

МНОГОШАГОВЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О.В. Глушик

Для решения задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений / в том числе жестких / предлагается способ построения итерационных многошаговых численных методов произвольного порядка согласованности разностной и дифференциальной задач с переменным шагом интегрирования, точных на системе базисных функций тригонометрического вида.

Предложенную методику проиллюстрируем на примере построения метода первого порядка точности вида

$$y_{n+1} = \alpha_{10} y_n + \alpha_{11} y_{n-1} + \beta_1 h y_{n+1}' \quad / 1 /$$

где α_{10} , α_{11} , β_1 - коэффициенты, подлежащие определению. В качестве базисных используем следующие функции

$$y = C \quad (C = \text{const}), \quad y = \sin x, \quad y = \cos x. \quad / 2 /$$

Исходя из требований точности метода на системе функций / 2 /, получим:

$$a/ \quad y = C, \quad y' = 0, \quad y_n = y_{n-1} = y_{n+1} = C,$$

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} = 1, \quad / 3 /$$

$$б/ \quad y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y_n = \sin x_n,$$

$$y_{n+1} = \sin(x_n + h), \quad y_{n+1}' = \cos(x_n + h),$$

$$y_{n-1} = \sin(x_n - h_1), \quad h_1 = x_n - x_{n-1}.$$

Тогда, подставив найденные значения в / 1 /, получим

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \sin(x_{n+1}) = \sin x_n \cos h + \cos x_n \sin h = \\ &= \alpha_{10} \sin x_n + \alpha_{11} (\sin x_n \cos h_1 - \cos x_n \sin h_1) + \\ &+ \beta_1 h (\cos x_n \cos h - \sin x_n \sin h). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin X_n$ и $\cos X_n$, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_{10} + \alpha_{11} \cosh h_1 - \beta_1 h \sinh h &= \cosh h, \\ -\alpha_{11} \sinh h_1 + \beta_1 h \cosh h &= \sinh h \end{aligned} \quad | 4 |$$

в/ $y = \cos X$, $y' = -\sin X$, $y_n = \cos X_n$, $y_{n+1} = \cos(X_n + h)$,
 $y'_{n+1} = -\sin(X_n + h)$, $y_{n-1} = \cos(X_n - h)$.

Подставив найденные значения в / I /, получим

$$\begin{aligned} y_{n+1} = \cos(X_n + h) &= \cos X_n \cosh h - \sin X_n \sinh h = \\ &= \alpha_{10} \cos X_n + \alpha_{11} (\cos X_n \cosh h_1 + \sin X_n \sinh h_1) - \\ &- \beta_1 h (\sin X_n \cosh h + \cos X_n \sinh h). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin X_n$, $\cos X_n$, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} -\alpha_{11} \sinh h_1 + \beta_1 h \cosh h &= \sinh h, \\ \alpha_{10} + \alpha_{11} \cosh h_1 - \beta_1 h \sinh h &= \cosh h \end{aligned} \quad | 5 |$$

Исходя из условий / 3 /, / 4 /, / 5 /, получаем условия точности метода / I / на системе базисных функций / 2 / в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{10} + \alpha_{11} &= 1, \\ \alpha_{10} + \alpha_{11} \cosh h_1 - \beta_1 h \sinh h &= \cosh h, \\ -\alpha_{11} \sinh h_1 + \beta_1 h \cosh h &= \sinh h. \end{aligned} \quad | 6 |$$

Решая систему уравнений / 6 /, получаем значения коэффициентов α_{10} , α_{11} , β_1 , входящих в формулу метода / I /.

Используя предложенную методику, можно строить численные методы высших порядков точности.

Научно-исследовательский институт информатики и управления Центрального Львовского производственного объединения "Электрон"
 Отдел № 130

ВОЛНООБРАЗНОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫСНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Р. Кангро

В работе [1] рассматривают эволюционное уравнение для нелинейных волн в активной среде:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial x} + f(v) \frac{\partial v}{\partial \xi} + g(v) = 0. \quad (I)$$

Если искать волновые решения постоянной формы (т.е. решения $v = v(t) = v(x + \Theta t)$), то уравнение (I) принимает вид

$$v'' + f(v)v' + g(v) = 0.$$

Пусть

$$f(v) \equiv 0, \quad g \in C^1[0, a] \quad (a > 0).$$

Функцию $v \in C^1(R)$ называем волнообразной, если

$$v(t) = v(-t),$$

$$\operatorname{sgn} [v'(t)] = -\operatorname{sgn} t,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0.$$

Теорема. Решение задачи Коши

$$v'' + g(v) = 0,$$

$$v(0) = \alpha \quad (\alpha > 0), \quad v'(0) = 0$$

волнообразно тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$g(0) = 0, \quad g(a) > 0, \quad \int_0^a g(v) dv = 0,$$

$$\int_x^a g(v) dv > 0 \quad \forall x \in (0, a).$$

Литература

- I. Engelbrecht J. New evolution equations for nonlinear waves in active media // J.Theor. Appl. Mech., 1986, Vol. 5, № 4, p. 1-16.

Тартуский государственный университет
Кафедра вычислительной математики

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ИТЕРИРОВАННОГО ВАРИАНТА МЕТОДА ЛАВРЕНТЬЕВА

Т. Кихо

В гильбертовом пространстве H рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f \quad (I)$$

с линейным непрерывным самосопряженным неотрицательным оператором $A \in \mathcal{L}(H, H)$, имеющим незамкнутую область значений $\mathcal{R}(A) \subset H$. Пусть свободный член $f \in \mathcal{R}(A)$ известен приближенно, вместо него имеем $f_\delta \in H$, $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, $\delta > 0$. Пусть точное решение уравнения (I) истокообразно представимо так, что

$$u \in M_{m, u_0} = \{v \in H : v - u_0 = A^m w, \|w\| \leq \rho\}, \quad \rho > 0, m \in N = \{1, 2, \dots\}.$$

Приближенное решение $u_\alpha \in H$ этой некорректно поставленной задачи найдем m -шаговым итерированным вариантом метода Лаврентьева (см. [1])

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_{m, \alpha}, \\ u_{j, \alpha} &= (\alpha I + A)^{-1} (\alpha u_{j-1, \alpha} + f_\delta), \quad j = 1, \dots, m, \\ u_{0, \alpha} &= u_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha = \alpha(\delta) = \alpha(\delta, M_{m, u_0})$ — малый положительный параметр, а u_0 — некоторое априори известное приближение к решению уравнения (I).

Справедлива оценка погрешности метода (2)

$$\inf_{\alpha > 0} \sup_{u \in M_{m, u_0}, f_\delta \in H : \|A u - f_\delta\| \leq \delta} \|u - u_\alpha\| \leq c_m \rho^{\frac{1}{m+1}} \delta^{\frac{m}{m+1}}, \quad c_m \geq 1 \quad (3)$$

и вопрос об оптимальной оценке погрешности и об оптимальном выборе параметра α m -шагового итерированного варианта метода Лаврентьева сводится к минимизации константы c_m . Ответ на данный вопрос заключается в следующем.

Теорема. Оптимальным на классе M_{m, u_0} выбором параметра $\alpha = \alpha(\delta) = \alpha(\delta, M_{m, u_0})$ является

$$\alpha = \left[\sqrt{m} \frac{\delta}{\rho} \right]^{\frac{1}{m+1}}$$

и соответствующая ему неулучшаемая погрешность

$$\sup_{u \in M_{p, \rho}, f \in H: \|Au - f\| \leq \delta} \|u - u_\alpha\| \leq \sqrt{m^{\frac{m}{m+1}} (m+1)} \rho^{\frac{1}{m+1}} \delta^{\frac{m}{m+1}}. \quad (4)$$

Если $\partial(A) \supset [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ ($\partial(A)$ - спектр оператора A), то в (4) при достаточно малых $\delta > 0$ достигается знак равенства.

Доказательство. Константа c_m представима в виде

$$c_m = \inf_{d>0} \inf_{0 < t < 1} \sup_{\lambda>0} \varphi_m(d, t, \lambda), \quad (5)$$

где функция

$$\varphi_m(d, t, \lambda) = \frac{1}{(1+\lambda)^m} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{d} \right)^{2m} \frac{1}{t} + \frac{d^2}{1-t} \left[\sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \lambda^{j-1} \right]^2}$$

(см. [1]). Если миниминимум (5) достигается в точке

(d_*, t_*, λ_*) , то оптимальным выбором параметра α является

$$\alpha = \frac{1}{d_*} \left(\delta / \rho \right)^{\frac{1}{m+1}} \quad (\text{см. [1]}). \text{ Из выпуклости функции}$$

$\varphi_m(\lambda) \equiv \varphi_m(d, t, \lambda)$ получаем

$$c_m = \inf_{d>0} \inf_{0 < t < 1} \max \{ \varphi_m(d, t, 0), \varphi_m(d, t, \infty) \}.$$

Учитывая выражения $\varphi_m(d, t, 0) = \frac{dm}{\sqrt{1-t}}$, $\varphi_m(d, t, \infty) = \frac{1}{d^m \sqrt{t}}$,

станет ясным, что инфимум по t достигается при $\frac{dm}{\sqrt{1-t}} = \frac{1}{d^m \sqrt{t}}$, т.е. при $t_* = \frac{1}{1+m^2 d^{2m+2}}$. Итак

$$c_m = \inf_{d>0} \frac{1}{d^m \sqrt{t_*}} = \sqrt{m^{\frac{m}{m+1}} (m+1)},$$

где инфимум по d достигается при $d_* = (1/m)^{\frac{1}{2m+2}}$. Теорема доказана.

Замечание I. Если точное решение уравнения (1) принадлежит классу $u \in M_{p, \rho}$, где ρ - произвольное вещественное число из полуотрезка $(0, m]$ (m - число шагов метода (2)), то существует такой выбор параметра $\alpha = \alpha(\delta) = \alpha(\delta, M_{p, \rho})$ в методе (2), что

$$\sup_{u \in M_{p, \rho}, f \in H: \|Au - f\| \leq \delta} \|u - u_\alpha\| \leq \sqrt{m^{\frac{m}{m+1}} (m+1)} \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}, \quad (6)$$

причем для $\rho < m$ знак неравенства будет строгим.

Замечание 2. Для каждого $m=1,2,\dots$ (число шагов метода (2)) существует число ρ_m ($\rho_m \in (0,6; 1,1)$) при котором для каждого $\rho < \rho_m$ справедлива оценка

$$\sup_{u \in M_{\rho, u_0}, f_0 \in N: \|u - f_0\| \leq \delta} \|u - u_n\| \leq \rho^{\frac{1}{m+1}} \delta^{\frac{p}{m+1}}, \quad (7)$$

если параметр $\alpha = \alpha(\delta) = \alpha(\delta, M_{\rho, u_0})$ выбрать по формуле

$\alpha = \frac{1}{\sqrt[p+1]{p+1}} \left(\frac{\delta}{\rho} \right)^{\frac{1}{p+1}}$. Таким образом, для малых $\rho \in (0, \rho_m]$ имеет место оценка (7), более точная чем (6). Тем самым оценка (6) целесообразна только при $\rho > \rho_m$.

Замечание 3. Приведем некоторые значения константы

$$c_m = \sqrt[m]{m^{m+1}} (m+1): \quad c_1 = \sqrt{2} \approx 1,41, \quad c_2 \approx 2,18, \quad c_3 \approx 3,02,$$

$$c_4 \approx 3,89, \quad c_5 \approx 4,79, \quad c_{10} \approx 9,45, \quad c_{100} \approx 98,23, \quad c_{1000} \approx 997,05$$

и заметим, что при $m \geq 4$ $c_m < m$.

Замечание 4. Для обыкновенного метода Лаврентьева $u_n = (I+A)^{-1} f_0$ (т.е. для метода (2) при $u_0=0, m=1$) этот результат уже известен: в [3] получен оценка (3) с $c_1 = \sqrt{2}$ и соответствующий оптимальный выбор параметра $\alpha = \sqrt{\delta/2}$. Ранее в литературе встречалась оценка (3) с $c_1 = 2$ (см. [2]).

Литература

1. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах // М.: Наука, 1986.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения // М.: Наука, 1978.
3. Кихо Т. Оптимальный выбор параметра в методе Лаврентьева на классе истокообразно представимых решений // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, № 762, с. 31-39.

Тартуский государственный университет
Кафедра вычислительной математики

О ВЫЧИСЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ РАЗБИЕНИЙ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

И. Кукк

Рассматривается следующая задача:

$$\sum_{i=1}^k \int_{Y_i(x^1, \dots, x^k)} \|y - x^i\|^2 \mathcal{N}(y, \sigma) dy \longrightarrow \min_{x^1, \dots, x^k \in R^n}, \quad (I)$$

где

$$\mathcal{N}(y, \sigma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma_1 \dots \sigma_n)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}\right)$$

и

$$Y_i(x^1, \dots, x^k) = \{y \in R^n \mid \|y - x^i\| < \|y - x^j\|, j \neq i, i = \overline{1, k}\}.$$

Известно, что при решении этой задачи можно пользоваться т.н. алгоритмом Ллойда [1]:

а) При $X_n = \{x_n^1, \dots, x_n^k\}$ построим

$$Y_{i0} = Y_i(x_n^1, \dots, x_n^k), i = \overline{1, k}.$$

б) Вычисляем

$$x_{n+1}^i = \left(\frac{I_{i0}^1}{I_{i0}^1}, \dots, \frac{I_{i0}^n}{I_{i0}^n} \right), \quad (2)$$

где

$$I_{i0}^i = \int_{Y_{i0}} \mathcal{N}(y, \sigma) dy, \quad (3)$$

и

$$I_{i0}^j = \int_{Y_{i0}} y_j \mathcal{N}(y, \sigma) dy, \quad j = \overline{1, n}, i = \overline{1, k}. \quad (4)$$

В докладе разработан способ вычисления интегралов (3-4) и сообщается о результатах решения задачи (I) в случае $n=2$. В литературе описаны решения задачи (I) при $n=2$ лишь для $\sigma_1 = \sigma_2$ и $k=4$ [2].

Пусть задан многогранник $P^n = \sigma^{-1} \tilde{P}^n = \{y \in R^n \mid v_i^1 y \leq d_i^1; \|v_i^1\| = 1; 1 \leq i_1 \leq \ell_1\}$, множество граней которого $\{P_{i_1}^{n-1}, \dots, P_{\ell_1}^{n-1}\}$. Каждая грань $P_{i_1}^{n-1}$ является в свою очередь многогранником в R^{n-1} с репером $(O_{i_1}^{n-1}, B_{i_1}^{n-1})$, где $O_{i_1}^{n-1} = d_{i_1}^1 v_{i_1}^1$ и $B_{i_1}^{n-1}$ база, векторы которой перпендикулярны вектору $v_{i_1}^1$. Аналогично, каждая грань $P_{i_2}^{n-2}$ многогранника $P_{i_1}^{n-1} = \{y \in R^{n-1} \mid v_{i_2}^2 y \leq d_{i_2}^2; \|v_{i_2}^2\| = 1; 1 \leq i_2 \leq \ell_2\}$ является многогранником в некотором R^{n-2} и т.д.

Лемма 1.

$$\int_{P^n} y_j \mathcal{N}(y, t) dy = -\frac{d_j}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^k u_i^j \exp(-\frac{1}{2} d_i^2) \int_{P_{d_i}^n} \mathcal{N}(y, t) dy, j = \overline{1, n}.$$

Лемма 2.

$$\int_{P^n} \mathcal{N}(y, t) dy = \int_{P^n} \mathcal{N}(y, 1) dy.$$

Из лемм 1 и 2 следует, что для нахождения интегралов (3-4) достаточно найти интегралы типа $\int_{P^n} \mathcal{N}(y, t) dy$.

Обозначим:

$$S_0^n = P^n,$$

$$S_t^n(d_{i_1}^t, \dots, d_{i_n}^t) = \{z \in R^n \mid 1 \leq \frac{z_1}{d_{i_1}^t} \leq \dots \leq \frac{z_n}{d_{i_n}^t} \wedge (z_1, \dots, z_n) \in \frac{z_t}{d_{i_t}^t} P_{d_{i_t}^t}^{n-t}\}, t = \overline{1, n-1},$$

$$S_t^n(d_{i_1}^t, \dots, d_{i_n}^t) = \{z \in R^n \mid 1 \leq \frac{z_1}{d_{i_1}^t} \leq \dots \leq \frac{z_n}{d_{i_n}^t}\}.$$

Лемма 3.

$$\begin{aligned} \int_{S_{t-1}^n(d_{i_1}^{t-1}, \dots, d_{i_n}^{t-1})} \mathcal{N}(y, t) dy &= -\sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} d_{i_t}^t \int_{S_t^n(d_{i_1}^t, \dots, d_{i_n}^t)} \mathcal{N}(y, t) dy + \\ &+ \frac{1}{2} (1 + \operatorname{sgn} \min_{1 \leq i_1 \leq k} d_{i_1}^t) \int_{S_{t-1}^n(d_{i_1}^{t-1}, \dots, d_{i_n}^{t-1})} \mathcal{N}(y, t) dy, t = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Лемма 4.

$$\operatorname{sgn} a_1 \dots \operatorname{sgn} a_t \int_{S_t^n(a_1, \dots, a_t)} \mathcal{N}(y, t) dy = \frac{1}{2^t} g_t(a_1, \dots, a_t),$$

где

$$g_1(a_1) = \operatorname{sgn} a_1 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|a_1|}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

$$g_2(a_1, a_2) = \operatorname{sgn} a_2 \cdot \frac{2}{\pi} \int_{|a_2|}^{\infty} \frac{a_1}{a_1^2 + x^2} e^{-\frac{1}{2}(a_1^2 + x^2)} dx,$$

...

$$g_t(a_1, \dots, a_t) = \operatorname{sgn} a_t \cdot \frac{2}{\pi} \int_{|a_t|}^{\infty} \frac{a_{t-2} a_{t-1}}{a_{t-1}^2 + x^2} \cdot \frac{g_{t-2}(a_1, \dots, a_{t-3}, \sqrt{a_{t-2}^2 + a_{t-1}^2 + x^2})}{\sqrt{a_{t-2}^2 + a_{t-1}^2 + x^2}} dx.$$

Следствие.

$$\begin{aligned} \int_{P^n} \mathcal{N}(y, t) dy &= (-1)^n \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{k_1} \dots \sum_{i=k_t}^{k_t} g_n(d_{i_1}^t, \dots, d_{i_n}^t) + \\ &+ \frac{1}{2} (1 + \operatorname{sgn} \min_{1 \leq i_1 \leq k_1} d_{i_1}^t) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \frac{1}{2^j} \sum_{i=1}^{k_1} \dots \sum_{i=k_j}^{k_j} (1 + \operatorname{sgn} \min_{1 \leq i_{j+1} \leq k_{j+1}} d_{i_{j+1}}^j) g_j(d_{i_1}^j, \dots, d_{i_j}^j). \end{aligned}$$

На основе этого алгоритма составлена программа на языке ФОРТРАН для определения локальных решений задачи (I) по задаваемым конфигурациям начальных точек. При $n=2$ и $k=1,10$ в зависимости от отношения дисперсий σ_1/σ_2 исследовано поведение локальных минимумов. Установлены конфигурации точек глобальных минимумов и соответствующие значения целевой функции.

Литература

1. Lloyd S.P. Least-squares quantization in pulse count modulations // IEEE Trans. Inform. Theory, 1982, V. IT-28. №2. P. 129-136.
2. Gray R.M., Karnin E.D. Multiple local optima in vector quantizers // IEEE Trans. Inform. Theory, 1982, V. IT-28. №2. P. 256-261.

Институт кибернетики АН ЭССР
Отдел математики

АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Р. Лепш

Рассматривается аппроксимация экстремальной задачи в функциональном пространстве с нелинейным целевым функционалом f и нелинейным операторным ограничением F :

$$\min_x \{ f(x) \mid F(x) \leq 0 \} = f^* \quad (I)$$

Здесь $f: X \rightarrow R$, $F: X \rightarrow Y$, X, Y - банаховы пространства, $y \leq z$ означает, что $z - y \in K$ и K - выпуклый замкнутый конус в пространстве Y с вершиной в нуле.

Задачи типа (I) встречаются в стохастическом программировании с рекурсией [1], в непрерывном программировании и в оптимальном управлении с нелинейными ограничениями на управление и состояние.

При приближенном решении задачи (I) она заменяется последовательностью задач в других, более простых пространствах:

$$\min_{x_n} \{ f_n(x_n) \mid F_n(x_n) \leq 0 \} = f_n^*, \quad (2)$$

где $f_n: X_n \rightarrow R$, $F_n: X_n \rightarrow Y_n$, X_n, Y_n - банаховы пространства, $y_n \leq z_n$ означает, что $z_n - y_n \in K_n$ и K_n - выпуклый замкнутый конус в пространстве Y_n , $n \in N$, с вершиной в нуле.

Пусть в пространствах X и Y наряду со сильной сходимостью введено и другая, w -сходимость. Пусть W и Z банаховы пространства такие, что либо $W^{**} = X^*$ и $Z^{**} = Y^*$, либо $W = X^*$ и $Z = Y^*$ (напр., если $X = L^\infty$, то $W = L^1$). Пусть имеются последовательности пространств $\{W_n\}$ и $\{Z_n\}$, а также связывающие линейные операторы $p_n: X \rightarrow X_n$, $q_n: Y \rightarrow Y_n$, $p_n^*: W \rightarrow W_n$, $q_n^*: Z \rightarrow Z_n$

со свойствами: $\|p_n x\| \rightarrow \|x\|$, $\|q_n y\| \rightarrow \|y\|$, $\|p_n^* w\| \rightarrow \|w\|$, $\|q_n^* z\| \rightarrow \|z\|$, $\langle p_n^* w, p_n x \rangle \rightarrow \langle w, x \rangle$, $\langle q_n^* z, q_n y \rangle \rightarrow \langle z, y \rangle$.

Пусть выполнены следующие условия:

1) последовательности пространств $\{X_n\}, \{Y_n\}, \{W_n\}, \{Z_n\}$ дискретно аппроксимируют пространства X, Y, W и Z , соответственно, и выполнены условия согласованности аппроксимации;

2) конусы K, K_n - выпуклы, W, W_n - замкнуты с вершиной в нуле, $\text{int } K \neq \emptyset, \text{int } K_n \neq \emptyset, q_n^* K^* \subset K_n^*, q_n(\text{int } K) \subset \text{int } K_n, n \in N$, где K^*, K_n^* - сопряжённый конус конусу K, K_n , соответственно;

3) операторы F, F_n дифференцируемы по Фреше с W, W_n - непрерывной производной $F'(x), F'_n(x_n)$ и выпуклы относительно конуса K и K_n , соответственно;

4) $\|q_n F(x) - F_n(p_n x)\| \rightarrow 0, n \in N, \forall x \in X, \|F'_n\| \leq \text{const}, \|F'_n p_n x - q_n F'x\| \rightarrow 0, n \in N, \forall x \in X$;

5) пара функционалов $\{f, (f_n)\}$ $\mathcal{P}$ -полунепрерывна сверху и $W\mathcal{P}^*$ -полунепрерывна снизу, f, f_n выпуклы и дифференцируемы по Фреше, причем $f'(x) \in W, f'_n(p_n x) \in W_n, n \in N$;

6) существует $W\mathcal{P}^*$ -компактная последовательность решений задач (2).

Теорема. Пусть выполнены условия 1) - 6). Пусть задачи (1) и (2) разрешимы при всех $n \in N$. Пусть $\bar{X}, \bar{X}_n$ - множества решений задач (1) и (2), соответственно. Тогда

$$p_n^* \rightarrow p^*, n \in N,$$

и

$$W\mathcal{P}^* - \text{Lim sup } \bar{X}_n \subset \bar{X},$$

где Lim sup означает дискретный *limit supremum* последовательности множеств в смысле Куратовского.

Литература

1. Rockafellar R.T., Wets R. The optimal recourse problem in discrete time: L_1 - multipliers for inequality constraints // SIAM J. Control Optimiz., 1978. V.16. P.16-36.

Институт кибернетики АН ЭССР
Отдел математики

**К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КУСОЧНО-
-ГЛАДКОЙ ЛИНИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

А.Ф.Матвеев

I. Будем придерживаться определений и обозначений монографии [1]. Рассмотрим общий случай сингулярного интегрального уравнения (СИУ) с ядром Коши

$$(K, w_1 u)(t_0) + (k, M(t_0, \cdot) w_1 u) = f(t_0), \quad (1)$$

$$(K, \varphi)(t_0) \equiv \alpha(t_0) \varphi(t_0) + \frac{\beta(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0},$$

$$(k, g) \equiv \int_L g(t) \cdot t^\nu dt, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(k, g) \equiv (k_0, g), \quad w_1 = \frac{Z(t)}{\alpha^2(t) - \beta^2(t)},$$

$Z(t)$ - каноническая функция СИУ (I), L - произвольная кусочно-гладкая линия, $\alpha(t_0)$, $\beta(t_0)$, $M(t_0, t)$, $f(t_0)$ - известные функции, определенные на L , $u(t)$ - искомая функция. Будем предполагать, что $\alpha(t_0)$ и $\beta(t_0)$ могут иметь разрывы, но должны принадлежать классу H_0 на L , $M(t_0, t)$ - функция класса H_0 , $f(t_0)$ - класса H^* , всюду на L $\alpha^2(t_0) - \beta^2(t_0) \neq 0$.

Любую функцию $\beta(t_0)$ класса H_0 на L можно представить в виде

$$\beta(t_0) = \beta_{\kappa_1}(t_0) \cdot \beta_1(t_0), \quad (2)$$

где $\varphi_{r_1}(t_0)$ — многочлен степени $r_1 \geq 0$, а $\varphi_1(t_0)$ — ограниченная на L функция, которая в конечном числе точек линии L может обращаться в ноль. Если $\varphi_1(t_0)$ не обращается в ноль на L , то приближенное решение СИУ (1) может быть построено по схеме предложенной в нашей заметке [2]. Ниже мы будем рассматривать случай, когда $\varphi_1(t_0)$ равняется нулю в конечном числе точек линии L . Обозначим через

$$P_{m_0; m}(t) = \sum_{k=0}^{m_0} \mu_k^{(0)} \cdot t^k + \sum_{\nu=1}^S \sum_{k=-m_\nu}^{-1} \mu_k^{(\nu)} (t - c_\nu)^k, \quad (2A)$$

$$c_\nu \notin L, \quad \nu = \overline{1, S},$$

рациональную функцию, определенную на L , которую будем называть обобщенным полиномом порядка $n = m_0 + m, m = \sum_{j=1}^S m_j$.

2. По заданному индексу СИУ (I) α , фиксированным числам $c_\nu \notin L, \nu = \overline{1, S}$, целым числам $n = m_0 + m, m = \sum_{j=1}^S m_j, m_0 > r_1 + |\alpha|$ построим на L две сетки $\overline{\omega}_n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ и $\overline{\omega}_{0n-\alpha} = \{t_{01}, t_{02}, \dots, t_{0n-\alpha}\}$ с попарно различными узлами отличными от нулей функции $\varphi(t_0)$.

Пусть

$$P_{m_0; m}(t) = \frac{\prod_{k=1}^n (t - t_k)}{\prod_{\nu=1}^S (t - c_\nu)^{m_\nu}}, \quad t_k \in \overline{\omega}_n,$$

обобщенный полином порядка $n = m_0 + m$. Приближенное решение $u_n(t)$ СИУ (1) будем искать в виде обобщенного интерполяционного полинома Лагранжа

$$u_n(t) = (L_{n-1}, u)(t) \equiv \sum_{k=1}^n \ell_k(t) u(t_k), \quad (3)$$

$$\ell_k(t) = \frac{p_{m_0; m}(t)}{(t-t_k) p'_{m_0; m}(t_k)}.$$

В нашей заметке [3] установлено, что $(K, w_1, b_1, p_{m_0; m})(t_0) = b_1(t_0) q_{m_0-\alpha; m}(t_0)$, где $q_{m_0-\alpha; m}(t_0)$ — обобщенный полином степени $n-\alpha$, который выписывается в явном виде через $b(t_0)$ и моменты $w_1(t_0)$. Для $k=1, n$ введем в рассмотрение функции

$$B_k(t_0) = \frac{1}{p'_{m_0; m}(t_k)} \left\{ b_1(t_0) q_{m_0-\alpha; m}(t_0) - \frac{b(t_0)}{b(t_k)} b_1(t_k) q_{m_0-\alpha; m}(t_k) \right\},$$

$$\tilde{B}_k(t_0) = \int_L w_1(t) b_1(t) M(t_0, t) \ell_k(t) dt,$$

$$\tau_{|\alpha|-1}(t_0) = \sum_{\nu=0}^{|\alpha|-1} \alpha_\nu \cdot t_0^\nu, \quad \eta(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha \leq 0 \end{cases}$$

и числа

$$\lambda_{k; n} = \frac{\pi i}{p'_{m_0; m}(t_k)} b_1(t_k) q_{m_0-\alpha; m}(t_k),$$

$$t_k \in \overline{\omega_n}.$$

3. Метод коллокаций. Неизвестные значения $u_n(t_k)$ в

(3) будем находить из системы

$$\eta(x) \tilde{b}(t_{0j}) \tilde{c}_{|x|-1}(t_{0j}) + \sum_{k=1}^n u_n(t_k) \left[\frac{B_k(t_{0j})}{t_{0j} - t_k} + \tilde{B}_k(t_{0j}) \right] = f(t_{0j}), \quad j = \overline{1, n-x}, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n \eta(x) t_k^v u_n(t_k) \lambda_{k;n} = \eta(x) \tilde{c}_v, \quad v = \overline{0, |x|-1},$$

$$t_{0j} \in \overline{\omega_{0n-x}}, \quad t_k \in \overline{\omega_n}, \quad \tilde{c}_v - \text{const}$$

Если $\eta(x) = 0$, то последние $|x|$ уравнений в системе (4), являющиеся тождеством, рассматривать не надо. В (4) при $x < 0$ введены регуляризующие факторы Лифанова α_k , $k = \overline{0, |x|-1}$

4. Метод механических квадратур. Если вычисления $\tilde{B}_k(t_0)$ вызывают затруднения, то их можно вычислять с помощью квадратурных формул. Применим, например, квадратурную формулу интерполяционного вида, построенную по узлам $\overline{\omega_n}$. Тогда заменяя в (4) $\tilde{B}_k(t_{0j})$ на $M(t_{0j}, t_k) \cdot \lambda_{k;n}$, приходим к системе метода квадратур.

Предложенные вычислительные схемы имеют интерполяционную степень точности, их обоснование сводится к хорошо изученной задаче обоснования этих схем для уравнения Фредгольма [45].

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. СИУ.//М.:Наука, 1968.
2. Апендикова Н.Г., Лифанов И.К., Матвеев А.Ф.//Дифференц. уравнения, 1987, т.23, № 8, с. 1392-1402.
3. Матвеев А.Ф.//Препринт ИТЭФ, 1988, № 35, с. I-II.
4. Вайникко Г.М. Анализ дискретизационных методов.//Тарту: Тартуск.ун-т, 1976.
5. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.//Казань: Казан.ун-т, 1980.

Институт теоретической и экспериментальной физики
Математическая лаборатория

МОДЕЛЬ ЭКСИМЕРНОГО ЭЛЕКТРОРАЗРЯДНОГО ЛАЗЕРА, УЧИТЫВАЮЩАЯ ПРОФИЛЬ ЭЛЕКТРОДОВ

П. Мийдла, Р. Соркина, Э. Тамме

Физические процессы, которые лежат в основе математической модели, описывают электроразрядный XeCl -лазер серии ЭЛИ (подробнее см. [1]). Целью математического моделирования является прогнозирование выходных параметров эксимерных лазеров и оптимизация их рабочих характеристик путем оптимального выбора входных параметров. Решение таких проблем чисто экспериментально крайне трудно из-за большого числа параметров, влияющих на импульс генерации. Поэтому высок интерес к математическому моделированию процесса и к проведению соответствующих численных расчетов с помощью ЭВМ.

Математической моделью кинетических процессов газового разряда является система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x_i' = \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j + \sum_{j,m=1}^n k_{jm} x_j x_m + \sum_{j,m,s=1}^n k_{jms} x_j x_m x_s, \quad i=1, \dots, n, \quad (1)$$

где искомые функции x_i — концентрации компонентов плазмы, а коэффициенты k_{ij} , k_{jm} и k_{jms} — константы скоростей соответствующих реакций. В конкретной модели было учтено 14 компонентов смеси, с учетом 3-х законов сохранения $n = 11$. Константы скоростей реакций с участием электронов определялись свертыванием сечений реакций с функцией распределения электронов по энергиям f [2], другие константы скоростей реакций считались постоянными. Функция распределения электронов по энергиям вычислялась в каждый момент времени как решение квазистационарного уравнения Больцмана [2, 3, 4].

В проведенных ранее исследованиях [1, 2, 3, 5] предполагалась пространственная однородность разряда. Поскольку электроды представляют собой цилиндрические поверхности, то напряженность электрического поля внутри межэлектродного промежутка изменяется как в направлении от анода к катоду (продольное распределение), так и в перпендикулярном ему се-

чении в центре межэлектродного промежутка (поперечное распределение). При заданном составе газовой смеси из уравнения Больцмана следует, что функция распределения электронов по энергиям f , а следовательно и соответствующие коэффициенты системы (I) определяются напряженностью электрического поля.

Учет продольного распределения напряженности электрического поля требует одновременного решения уравнения Пуассона, что очень усложнит модель. Поэтому мы рассматривали распределение напряженности электрического поля, а следовательно и решений системы (I) в поперечном направлении.

Для этого разрядный промежуток был разбит на 30 каналов перпендикулярных к электродам. Напряженность поля определялась в каждом канале (точнее - в центре каждого канала), вследствие чего разряд моделировался в каждом канале отдельно. При этом учитывалась симметрия процесса относительно центра электродов.

В итоге мы получили как бы 15 разных задач исследования разряда, связанных между собой лишь цепью накачки. Отметим, что совокупность моделей каналов имеет и обратную связь на эту цепь через изменяющееся сопротивление разрядного промежутка.

С математической точки зрения система кинетических уравнений (I), а также система уравнений описывающая электрическую цепь питания лазера являются жесткими, причем система (I) ещё и существенно нелинейна. На требуемом отрезке интегрирования (от нуля до 200 наносекунд) все компоненты решений, которые определяются начальными значениями нужного порядка (в основном нуля), достигают своих экстремумов, причем в разные моменты времени. Найденные максимальные значения достигают порядка 10^{14} - 10^{15} , а значения производных 10^{22} - 10^{25} .

Все это затрудняет интегрирование систем модели, хотя методы для жестких систем давно известны и продолжают развиваться. Мы использовали метод Гира [7], реализованный в стандартной программе DIFSUB [6].

Расчеты были проведены для рабочей смеси $He/Xe/HCl$ = 920/10/1 (общее давление 2,2 атм, зарядное напряжение 23 кВ). Некоторые из полученных в расчете пространственно-временных распределений компонентов плазмы сравниваются

с экспериментальными, тем самым проверяется адекватность модели.

Литература

1. Мийдла П.Х., Михкельсоо В.Т., Пест В.Э., Соркина Р.А., Тамме Э.Э., Трешалов А.Б., Шерман А.В. Моделирование физических процессов в эксимерном электроразрядном Xe/Cl -лазере // Тр. Ин-та физики АН ЭССР, т. 60, 15-38, 1987.
2. Мийдла П., Тамме Э., Шерман А. Моделирование разряда в смеси He/Xe/HCl // Изв. АН Эст. ССР, Физ.-мат., 1985, т. 34.
3. Мийдла П., Тамме Э., Шерман А. Численное моделирование разряда в газовой смеси He/Xe/HCl // Теоретические и прикладные проблемы математики II. Тезисы докладов конференции 26-27 сент. 1985, Тарту, 1985, с. 93-94.
4. Тамме Э., Шерман А. Численное решение уравнения Больцмана для функции распределения электронов по энергиям в газовом разряде // Изв. АН Эст. ССР, Физ.-мат., 1986, т. 35.
5. Мийдла П.Х., Пест В.Э., Соркина Р.А., Тамме Э.Э., Трешалов А.Б., Шерман А.В. Теоретическое и экспериментальное исследование плазмы электроразрядного Xe/Cl -лазера // Квантовая электроника, 1986, 13, № II, с. 2176-2182.
6. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. Минск, 1980, вып. 22, 124-134.
7. Gear C.W. The automatic integration of ordinary differential equation // Comm. ACM, 1971, 14, № 3, 171-179.

Тартуский государственный университет
Институт физики АН ЭССР

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИЗГИБА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ МЕТОДОМ ШТРАФА

Г.М. Оленев

В данном докладе рассматривается задача упругопластического изгиба статически нагруженной тонкой пологой оболочки при применении закона пластичности Ганки. Подход, используемый для исследования этой задачи, является обобщением на случай пологой оболочки метода, применённого в [2] к решению задачи изгиба упругопластической пластинки.

Рассмотрим упругопластическую пологую оболочку постоянной толщины h , срединная поверхность которой задаётся уравнением $f(x) = 0$, где $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{R} = [0, a] \times [0, b]$, $(a, b > 0)$ - проекция на $\mathbb{R}^2$ срединной поверхности оболочки, а $f_{,11}(x) = f_{,22}(x) = \text{const}$ (здесь и далее через $\varphi_{, \alpha}$ обозначается частная производная функции φ по x_α). Ограничимся случаем оболочки с жёсткой заделкой краёв по всему контуру.

Аналогично [1] (стр. 245-246) показывается, что нахождение действительного поля напряжений оболочки сводится к решению задачи

$$\text{найти } \sigma_0 \in \text{КПМ} : J(\sigma_0) = \min_{\sigma \in \text{КПМ}} J(\sigma). \quad (I)$$

Здесь $K = \{ \sigma \in H : F(\sigma) \leq 0 \text{ почти всюду на } \mathcal{R}_h \}$ - выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве

$$H = \{ \sigma = \{ \sigma_{ij} \} : \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \sigma_{33} = 0, \sigma_{ij} \in L_2(\mathcal{R}_h) \}$$

со скалярным произведением

$$(\sigma, \tau)_H = \int_{\mathcal{R}_h} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx dx_3,$$

причём $F(\sigma)$ - функция текучести Мизеса или Треска, $\mathcal{R}_h$ - множество точек (x, x_3) , принадлежащих оболочке;

$$M = \{ \sigma \in H : \int_{\mathcal{R}_h} \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}(u) dx dx_3 = \int_{\mathcal{R}} p_i u_i dx, \forall u \in V \} -$$

множество статически допустимых напряжений, причём

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mu) = (1/2)(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) - \kappa_{\alpha\beta} u_3 - x_3 u_{,\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 -$$

компоненты деформации с учётом гипотез Кирхгофа-Лява ($\kappa_{11} = \rho_{,11}$; $\kappa_{22} = \rho_{,22}$; $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$), где вектор перемещений $\mu = (u_1, u_2, u_3)$ принадлежит гильбертову пространству

$$V = \overset{\circ}{W}_2^{(1)} \times \overset{\circ}{W}_2^{(1)} \times \overset{\circ}{W}_2^{(2)} \quad \text{со скалярным произведением}$$

$$(\mu, \nu)_V = \int_{\mathcal{Q}} (\mu_{\alpha,\beta} \nu_{\alpha,\beta} + \mu_3 \nu_3 + u_{3,\alpha\beta} \nu_{3,\alpha\beta}) dx,$$

$\rho_i \in L_2(\mathcal{Q})$ - компоненты внешней нагрузки;

$$J(\sigma) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}_K} a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} dx dx_3 -$$

квадратичный функционал, где $a_{ijkl} \in L_\infty(\mathcal{Q}_K)$ - коэффициенты упругости, причём $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$ и $a_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} \geq c_0 \xi_{ij} \xi_{ij}$, $\forall \xi_{ij}$, $c_0 = \text{const} > 0$. Везде здесь и далее индексы α, β принимают значения 1, 2, индексы i, j, k, l - значения 1, 2, 3, а по повторяющимся индексам производится суммирование.

Отметим, что при $K \cap M \neq \emptyset$ задача (I) имеет единственное решение.

Наряду с задачей (I) рассмотрим задачу

$$\text{найти } \sigma_\mu \in M: \Phi_\mu(\sigma_\mu) = \min_{\sigma \in M} \Phi_\mu(\sigma), \quad (2)$$

где $\Phi_\mu(\sigma) = J(\sigma) + (1/2\mu) \|\sigma - P\sigma\|^2$, а P - оператор проектирования N на K .

Как показано в [2], задача (2) имеет единственное решение σ_μ при любом $\mu > 0$.

Опишем теперь способ построения σ_μ при $\mu > 0$. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\int_{\mathcal{Q}_K} \sigma_{ij}(\mu_\mu) \varepsilon_{ij}(\eta) dx dx_3 + \int_{\mathcal{Q}} \rho_i \eta_i dx = 0, \quad \forall \eta \in V; \quad \mu_\mu \in V, \quad (3)$$

где $\sigma_{ij}(\mu_\mu)$ определяется из соотношений

$$\varepsilon_{ij}(\mu_\mu) = a_{ijkl} \sigma_{kl}(\mu_\mu) + (1/\mu)(\sigma(\mu_\mu) - P\sigma(\mu_\mu))_{ij}. \quad (4)$$

для того, чтобы показать, что задача (3) - (4) имеет единственное решение μ_μ при любом $\mu > 0$, а σ_μ , опре-

деляемое по u_μ из (4), — решение задачи (2), достаточно, следуя [2], доказать, что форма $\int_{\Omega} \epsilon_{ij}(\eta) \delta u(u_\mu) dx_1 dx_2$ при любом $\mu > 0$ порождает непрерывный сильно монотонный оператор, действующий из V в V' . Доказательство этого факта опирается на справедливость неравенств

$$c \|u\|_V^2 \leq \int_{\Omega} \epsilon_{ij}(\eta) \epsilon_{ij}(u) dx_1 dx_2 \leq C \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V; c, C = \text{const} > 0. \quad (5)$$

В докладе показывается, что неравенства (5) имеют место, при этом используются неравенство Коши–Буняковского, формула интегрирования по частям, а также тот факт, что выражение

$(\int_{\Omega} u_{,\alpha} u_{,\alpha} dx + \int_{\Gamma} \kappa u^2 d\Gamma)^{1/2}$, где $u \in W_2^{(0)}(\Omega)$, а Γ — граница области Ω , эквивалентно норме пространства $W_2^{(0)}(\Omega)$, если $\kappa \in L_\infty(\Gamma)$, $\kappa(x) \geq 0$ и $\text{mes}\{x \in \Gamma: \kappa(x) > 0\} > 0$. Заметим, что при доказательстве (5) важную роль играет способ выбора скалярного произведения в V .

Отметим также, что согласно [2] $\delta_\mu \rightarrow \delta_0$, где δ_0 — решение (I), если $M \cap K \neq \emptyset$, и δ_μ при $\mu \rightarrow 0$ стремится к элементу, минимизирующему $J(\delta)$ на множестве элементов из M , ближайших к K (это множество непусто, выпукло и замкнуто), если $M \cap K = \emptyset$.

Литература

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике // М.: Наука, 1980.
2. Карчевский М.М. О методе штрафа решения задач упруго-пластического изгиба пластин // Сеточные методы решения задач математической физики. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1984. С.55–74.

Тартуский государственный университет
Лаборатория прикладной математики

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА

М.Ф.Павлова, М.Р.Тимербаев

В работе рассматривается следующая нелинейная нестационарная задача

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} k_i(x, u, \nabla u) = f, \quad x \in \Omega \times (0, T], \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad (2)$$

(здесь Ω - ограниченная область пространства R^n , Γ - ее граница).

Задача (1) - (2) возникает, например, при математическом описании процессов фильтрации газа, движении вод в открытых руслах и др. [1, 2].

Предполагается, что оператор

$$Au = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} k_i(x, u, \nabla u)$$

является непрерывным ограниченным монотонным коэрзивным оператором, действующим из $W_p^{(u)}(\Omega) \rightarrow W_{p'}^{(-1)}(\Omega)$ ($1/p + 1/p' = 1$).

Функция $\varphi: R^1 \rightarrow R^1$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(\xi)$ - монотонно возрастающая функция, $\varphi(0) = 0$,

$$2) \quad c_0 |\xi|^d - c_1 \leq \varphi(\xi) \xi \leq c_2 |\xi|^d + c_3, \\ c_0 |\xi|^d - c_1 \leq \int_0^\xi \varphi'(t) dt \leq c_2 |\xi|^d + c_3, \quad \forall \xi \in R_1.$$

здесь c_0, c_2 (c_1, c_3) - положительные (неотрицательные) постоянные.

3) существуют постоянные $\gamma_0 \geq 0$, $\gamma_1 \geq 0$, $c_4 > 0$, $c_5 \geq 0$ такие, что

$$|\varphi(\xi)|^{\gamma_0} \varphi'(\xi) \leq c_4 |\xi|^{\gamma_1} + c_5.$$

Определение. Функцию $u \in L_p(0, T; \dot{W}_p^{(\alpha)}(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; L_\alpha(\Omega))$ назовем обобщенным решением задачи (1) - (2), если $\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} \in L_{p'}(0, T; W_{p'}^{(-1)}(\Omega))$, $u(x, 0) = 0$ почти всюду и для любой функции $v \in L_p(0, T; \dot{W}_p^{(\alpha)}(\Omega))$ имеет место равенство

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \varphi(u)}{\partial t}, v \right\rangle dt + \int_0^T \langle Au, v \rangle dt = \int_0^T \langle f, v \rangle dt$$

Доказана следующая

Теорема. Пусть оператор A и функция f удовлетворяют указанным выше условиям, для параметров α , p , γ_0 и γ_1 справедливы соотношения

$$\alpha > \gamma_1 p / (p-1);$$

$$L_p(\Omega) \subset W_{p'}^{(-1)}(\Omega), \quad \beta = \alpha \cdot p (\gamma_0 + 1) / (\gamma_1 p + 1).$$

Тогда задача (1) - (2) имеет обобщенное решение из

$L_p(0, T; \dot{W}_p^{(\alpha)}(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; L_\alpha(\Omega))$
при любом $f \in L_{p'}(0, T; W_{p'}^{(-1)}(\Omega))$.

Доказательство этой теоремы проводилось с помощью метода полудискретизации аналогично [3], где было доказано существование решения задачи (1) - (2) из $L_p(0, T; \dot{W}_p^{(\alpha)}(\Omega)) \cap C(0, T; L_\alpha(\Omega))$ при более сильных ограничениях на f и φ : предполагалось, что $\frac{\partial f}{\partial t} \in L_1(0, T; W_{p'}^{(-1)}(\Omega))$, а φ , кроме условий 1) - 3), удовлетворяет неравенству

$$\varphi'(\xi) \geq c |\xi|^{\alpha-2}.$$

Некоторое усовершенствование техники предельного перехода позволило установить существование обобщенного решения задачи (1) - (2) при более естественных ограничениях на f и более слабых условиях на φ .

В заключение отметим, что вопрос существования решения задачи (1) - (2) в случае, когда

$$\psi(\xi) = |\xi|^{\alpha-2} \xi,$$

$$Au = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

рассматривался также в [4]. В этой работе как и в [3], предполагалось, что $\frac{\partial f}{\partial t} \in L_1(0, T; W_p^{(-1)}(\Omega))$.

Литература

1. Мухидинов Н. Газогидродинамическое исследование нелинейной фильтрации жидкости и газа // Ташкент: Фан, 1977.
2. Методы системного анализа в проблемах национального использования водных ресурсов: Тр. Международного института прикладного системного анализа // М., 1975. Т. 2.
3. Павлова М.Ф. Исследование уравнений нестационарной нелинейной фильтрации // Дифф. уравнения, 1987. Т. 23. С. 1436 - 1446.
4. Raviart R.A. Sur la resolution de certaines equations paraboliques non lineaires // J. Func. Anal., 1970, vol. 5, № 2, p. 299-328.

Казанский государственный университет
Кафедра вычислительной математики

**О РЕШЕНИИ СЛАБО ОСОБОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНОМ КОЭФФИЦИЕНТОМ**

А. Педас

I. Рассмотрим уравнение

$$u(t) = \int_0^b a(t,s) x(t-s) u(s) ds + f(t), \quad 0 \leq t \leq b. \quad (I)$$

Введём следующие условия:

(i) $a \in C^1([0, b] \times ([0, b] \setminus \{d\}))$, $0 < d < b$, причём $a(t, s)$ или $\partial a(t, s) / \partial s$ могут иметь при $s = d$ разрыв первого рода;

(ii) $x \in C^1([-b, b] \setminus \{0\})$, причём при $-b \leq t < 0$ и $0 < t \leq b$ справедлива оценка

$$|x'(t)| \leq \text{const} \cdot |t|^{-\beta}, \quad 0 < \beta < 2. \quad (2)$$

(iii) $f \in C[0, b] \cap C^2((0, b) \setminus \{d\})$, причём при $\beta \neq 1$ ($0 < \beta < 2$) справедливы оценки

$$|f^{(k)}(t)| \leq \text{const} [t^{-\beta+2-k} + |t-d|^{-\beta+2-k} + (b-t)^{-\beta+2-k}], \quad t \in (0, b) \setminus \{d\}, k=1, 2,$$

а при $\beta = 1$ справедливы оценки

$$|f'(t)| \leq \text{const} [|\ln t| + |\ln |t-d|| + |\ln (b-t)|], \quad t \in (0, b) \setminus \{d\},$$

$$|f''(t)| \leq \text{const} [t^{-1} + |t-d|^{-1} + (b-t)^{-1}], \quad t \in (0, b) \setminus \{d\}.$$

Заметим, что из (2) вытекают неравенства

$$|x(t)| \leq \text{const} \cdot (|t|^{-\beta+1} + 1) \quad (\beta \neq 1),$$

$$|x(t)| \leq \text{const} \cdot (|\ln |t|| + 1) \quad (\beta = 1).$$

Условие (iii) будет выполнено, например, для $f \in C^2[0, b]$.

Зададим сетку точек $t_j = t_{j,n}$ отрезка $[0, b]$ такую, что

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, \quad d \in \{t_1, \dots, t_{n-1}\}, \quad (3)$$

$$h_n \equiv \max_{1 \leq j \leq n} (t_j - t_{j-1}) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Обозначим

$$s_j = s_{j,n} = (t_{j-1} + t_j) / 2, \quad j=1, \dots, n. \quad (5)$$

Приближённое решение уравнения (I) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j(t),$$

где $\varphi_1(t) = 1$ при $t \in [t_0, t_1]$ и $\varphi_1(t) = 0$ при $t \notin [t_0, t_1]$;
 $\varphi_j(t) = 1$ при $t \in (t_{j-1}, t_j]$ и $\varphi_j(t) = 0$ при $t \notin (t_{j-1}, t_j]$,
 $j = 2, \dots, n$. Неизвестные коэффициенты u_j определим из системы уравнений

$$u_i = \sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s, s) x(s, s) ds \right) u_j + f(s_i), \quad i=1, \dots, n. \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (i)–(iii) и (3)–(5). Пусть уравнение (I) имеет единственное решение $u(t)$.

Тогда система уравнений (6) имеет при достаточно больших n единственное решение $(u_1, \dots, u_n)$. Справедлива оценка

$$\max_{1 \leq i \leq n} |u_i - u(s_i)| \leq \text{const} \cdot \varepsilon_n^2, \quad (7)$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} h_n & \text{при } 0 < \beta < 1, \\ h_n (|\ln h_n| + 1) & \text{при } \beta = 1, \\ h_n^{2-\beta} & \text{при } 1 < \beta < 2. \end{cases} \quad (8)$$

2. Перепишем уравнение (I) в виде

$$u(t) = \int_0^t a(t, s) x(t-s) [u(s) - u(t)] + \\ + u(t) \int_0^t a(t, s) x(t-s) ds + f(t) \quad (9)$$

и применим метод механических квадратур с формулой средних прямоугольников:

$$u_i = \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) a(s_i, s_j) x(s_i - s_j) [u_j - u_i] + \\ + u_i \int_0^t a(s_i, s) x(s_i - s) ds + f(s_i), \quad i=1, \dots, n. \quad (10)$$

Здесь

$$u_i \approx u(s_i), \quad i=1, \dots, n.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (i)–(iii) и (3)–(5). Пусть уравнение (I) имеет единственное решение $u(t)$.

Тогда система уравнений (10) имеет при достаточно больших n единственное решение $(u_1, \dots, u_n)$ и справедлива

оценка (7), (8).

3. Если $\alpha(t, s)$ или $\partial \alpha(t, s) / \partial s$ имеют несколько точек разрыва $s = d_k, 0 < d_k < b, k = 1, \dots, k_0$ (ср. (i), (iii)), то включая их в сетку (ср. (3)), теоремы 1 и 2 сохраняют силу.

4. Аналог теоремы 1 для многомерного слабо особого интегрального уравнения имеется в [1]. Утверждения теоремы 2 при более жестких условиях гладкости на $\alpha(t, s)$ и $\alpha(t)$ доказаны в [2], ср. также [3].

Литература

1. Вайникко Г.М. Метод кусочно-постоянной коллокации для многомерного слабосингулярного интегрального уравнения // В сб.: Численные методы решения уравнения переноса, Тарту, ТГУ, 1988, 31-34.
2. Вайникко Г., Педас А., Уба П. Методы решения слабо-сингулярных интегральных уравнений // Тарту, ТГУ, 1984.
3. Педас А. О решении слабо-сингулярных уравнений методом механических квадратур с формулой трапеций // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, вып. 762, с. 89-97.

Тартуский государственный университет
Кафедра вычислительной математики

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА
В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ОКЕАНЕ БЕЗ ПОГЛОЩЕНИЯ

С.И. Пискарёв

Рассмотрим в банаховом пространстве E задачу

$$u''(t) = Au(t), \quad u(0) = u^0, \quad \sup_{t \geq 0} \|u(t)\| < \infty, \quad (1)$$

с оператором $-A$, порождающим аналитическую полугруппу, имеющим компактную резольвенту и вещественный спектр $\sigma(A)$, который не пересекается с нулем и существуют $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda < 0$. Дискретизация задачи (1) приводит к задачам в конечномерных пространствах E_n

$$\bar{u}_n'(t) = \bar{A}_n \bar{u}_n(t), \quad \bar{u}_n(0) = P_n u_n^0, \quad \bar{u}_n'(0) = \sqrt{\bar{A}_n} P_n u_n^0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\bar{\bar{u}}_n''(t) = \bar{\bar{A}}_n \bar{\bar{u}}_n(t), \quad \bar{\bar{u}}_n(0) = (I_n - P_n) u_n^0, \quad \sup_{t \geq 0} \|\bar{\bar{u}}_n(t)\| < \infty, \quad (3)$$

где операторы $\bar{A}_n \oplus \bar{\bar{A}}_n = A_n$, а корень из оператора $\sqrt{\bar{A}_n}$ понимается как корень оператора с $\operatorname{Re} \sigma(\bar{A}_n) < 0$, т.е., например, $i\sqrt{\bar{A}_n}$ см. [1].

Задача (2) со специально подобранными $\bar{A}_n$ решается как начальная задача методом конечных разностей либо по неявной схеме, либо с известными условиями устойчивости на шаг дискретизации в случае явных методов. Погрешность решения в данном случае контролируема.

Задача (3) с $\operatorname{Re} \sigma(\bar{\bar{A}}_n) > 0$ также легко решается следующим образом: сначала методом конечных разностей решается начальная задача

$$w_n'(t) = -\bar{\bar{A}}_n w_n(t), \quad w_n(0) = (I_n - P_n) u_n^0,$$

а затем используется хорошо известная связь [4-5],

$$\bar{\bar{u}}_n(t) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-t^2/4\sigma) \sigma^{-3/2} w_n(\sigma) d\sigma,$$

которая реализуется некоторой квадратурной формулой. Погреш-

ность при такой методике решения задачи (3) также контролируется. Таким образом, задача (I) решается методами, для которых легко указать оценки скорости сходимости.

В данной работе приводится алгоритм нахождения операторов $\bar{A}_n$ и $\bar{\bar{A}}_n$ с указанными свойствами: $\text{Re} \sigma(\bar{A}_n) < 0$, $\text{Re} \sigma(\bar{\bar{A}}_n) > 0$.

А именно, организуется процедура близкая в идейном плане [2-3].

Во-первых, рекуррентно вычисляется $R_n = \sqrt{A_n^2}$.

$$X_{n,k+1} = \frac{A_n^2 - I_n}{X_{n,k} + I_n} + I_n, \quad X_{n,k} \rightarrow R_n, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Во-вторых, операторы $\bar{A}_n$ и $\bar{\bar{A}}_n$ находятся по формулам

$$P_n = \frac{1}{2}(R_n A_n^{-1} + I_n), \quad \bar{A}_n = (I_n - P_n) A_n (I_n - P_n), \quad \bar{\bar{A}}_n = P_n A_n P_n.$$

Итерационную процедуру (4) следует проводить для нормированной матрицы A_n^2 . Метод (4) имеет первый порядок.

Литература

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // М.: Наука, 1967. 464с.
2. Балеев К.Г. Расщепление спектра матриц // Киев.: Вища школа. 1986. 272с.
3. Абрамов А.А. О численном решении некоторых алгебраических задач, возникающих в теории устойчивости // ДВМ и МЭ, 1984, 24, № 3. с.339-347.
4. Balakrishnan A.V. Abstract Cauchy problem of the elliptic type // Bull.Amer.Math.Soc. 1958, 64, N5. p.290-291.
5. Dettman J.W. Related singular problems and the generalized Hilbert transform // Proc.Roy.Soc.Edinburgh, 1977, 479, № 1-2, pp. 172-182.

Акустический институт
им. акад. Н.Н.Андреева

О ПРИНЦИПЕ НЕВЯЗКИ В СЛУЧАЕ НЕТОЧНО ЗАДАННОГО ОПЕРАТОРА

Т. Раус

Рассматривается принцип невязки при решении некорректно поставленных задач в случае неточно заданного оператора. Известно (см. [1]), что итерационные методы с остановом по принципу невязки оптимальны по порядку на всех классах источно-представимых решений. Погрешность методов для индивидуального решения изучалась в [2]. Здесь мы представим некоторые новые оценки погрешности в духе работы [2].

Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \quad f \in R(A), \quad (I)$$

где $A \in \mathcal{L}(H, F)$ — линейный непрерывный оператор из гильбертова пространства H в гильбертово пространство F ; допускается незамкнутость области значений $R(A) \subseteq F$. Предполагается, что вместо f задано $f_\sigma \in F$ такое, что $\|f_\sigma - f\| \leq \delta$, а вместо A имеем оператор A_2 такой, что $\|A_2 - A\| \leq \eta$.

Рассмотрим следующие методы решения уравнения (I).

1. Явный итерационный метод. Зададим начальное приближение $u_0 \in H$, постоянную μ , $\mu \in (0, 1/\|A\|^2)$ и последовательно вычислим

$$u_n = u_{n-1} - \mu A_2^* (A_2 u_{n-1} - f_\sigma), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

2. Неявный итерационный метод. Зададим $u_0 \in H$ и постоянную $\alpha > 0$. Вычислим последовательно u_n из уравнений

$$\alpha u_n + A_2^* A_2 u_n = \alpha u_{n-1} + A_2^* f_\sigma, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Момент остановки итераций определим по принципу невязки. Под u_* понимаем ближайшее к u_0 решение уравнения (I).

Правило П I. Зададим число $\beta > 1$. Если

$$\|A_2 u_0 - f_\sigma\| \leq \beta(\delta + \eta \|u_*\|),$$

то положим $n = 0$. В противном случае выберем наименьшее число $n > 0$ при котором выполняется неравенство

$$\|A_2 u_n - f_\sigma\| \leq \beta(\delta + \eta \|u_*\|).$$

Выбор параметра по правилу П I в случае $\|f_\sigma - f\| \leq \delta$ и $\|A_\eta - A\| \leq \eta$ всегда гарантирован, но поскольку нужно знать оценку нормы решения u_* , то практическая реализация затруднена. Поэтому зададим ещё правило, где u_* заменяется через u_n .

Правило П 2. Такое же, как правило П I с заменой $\|u_*\|$ на $\|u_n\|$.

Дадим теперь оценки погрешности приближенного решения.

Теорема I. Пусть $\|f_\sigma - f\| \leq \delta$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$ и параметр $n = n(\delta, \eta)$ выбран по правилу П I. Тогда для методов I и 2 имеет место оценка

$$\|u_{n(\delta, \eta)} - u_*\| \leq c(\delta) \cdot M(\delta, \eta), \quad (4)$$

где

$$M(\delta, \eta) = \sup_{\substack{\tilde{f}, \|\tilde{f} - A_\eta u_*\| \leq \\ \leq \delta + \eta \|u_*\|}} \inf_{n \geq 0} \|\tilde{u}_n - u_*\| + \gamma_*(\delta + \eta \|u_*\|),$$

$$c(\delta) = \max \left\{ \delta + 2, \max_{\substack{0 \leq t \leq 1, \\ \gamma_-(\delta - t)\sqrt{1-t} \leq t^2}} \frac{\gamma_-(\delta - t)\sqrt{1-t} + 1}{\sqrt{\gamma_-^2(\delta - t)^2(1-t) + t^2}} \right\},$$

$\gamma_- = \sqrt{2\epsilon}$, $\gamma_* = \sqrt{\mu}$ для метода I, $\gamma_- = \sqrt{2/6\epsilon}$, $\gamma_* = \epsilon_0/\sqrt{a}$ для метода 2 (ϵ_0 — решение уравнения $\epsilon^* = 1 + 2\epsilon$, $\epsilon_0 \approx 0,6386$) и элемент $\tilde{u}_n$ определяется соответственно формулами (2) и (3), где вместо f_σ будет $\tilde{f}$.

Таким образом, погрешность приближенного решения оценивается через наименьшую по n погрешность метода при фиксированном решении u_* с данным уровнем погрешности начальных данных. В силу оценки (4) можно сказать, что выбор параметра по принципу невязки оптимальный по порядку (с порядком $c(\delta)$) для итерационных методов. Для метода I наименьшее значение коэффициента $c(\delta) \approx 3,20$ (если $\epsilon = 1,20$) и для метода 2 $c(\delta) \approx 3,25$ (если $\epsilon = 1,25$). Отметим, что в случае непрерывного спектра оператора A_η оценку (4) можно несколько улучшить (см. [2]).

Теорема 2. Пусть $\|f_\sigma - f\| \leq \delta$, $\|A_\eta - A\| = \eta$, $u_* = 0$ и параметр $n = n(\delta, \eta)$ выбран по правилу П 2. Тогда для методов I и 2 имеет место оценка

$$\|u_n(\delta, \eta) - u_*\| \leq \tilde{c}(\delta) \cdot M(\delta, \eta),$$

где

$$\tilde{c}(\delta) = \max_{\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq 1} \min \left\{ \max [c(\varepsilon\delta), c(\tilde{\delta})], \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right) c(\delta) \right\},$$

$$\varepsilon_0 = \max \{1/\delta, 1 - c(\delta) \mathcal{T}(\delta, \eta)\}$$

$$\tilde{\delta} = \delta(1 + c(\delta) \mathcal{T}(\delta, \eta)), \quad \mathcal{T}(\delta, \eta) = M(\delta, \eta) / \|u_*\| \leq 1,$$

$M(\delta, \eta)$ и $c(\delta)$ определены в теореме I.

Нетрудно заметить, что в случае $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$ имеем $\mathcal{T}(\delta, \eta) \rightarrow 0$ и, следовательно, $\tilde{c}(\delta) \rightarrow c(\delta)$. Если $\mathcal{T}(\delta, \eta) \approx 1$ то для метода I наименьшее значение $\tilde{c}(\delta) = 7,04$ ($\delta = 1,20$), а для метода 2 $\tilde{c}(\delta) = 7,07$ ($\delta = 1,25$).

Литература

1. Вайникко Г.М., Веретенников А.Д. Итерационные процедуры в некорректных задачах // М.: Наука, 1986.
2. Раус Т. О принципе невязки при решении некорректных задач с несамосопряженным оператором // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1985, вып. 715, с. 12-20.

Тартуский государственный университет
Лаборатория прикладной математики

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ф.З. Рафиков

Рассматривается класс систем

$$(A(s)u)' = B(s)u + f(s), \quad s = \sigma + iz, \quad (1)$$

удовлетворяющих условиям:

а) элементы матриц A, B размерности $n \times n$ являются мультипликаторами в пространстве Z (образ Фурье пространства $\mathcal{D}$ бесконечно-дифференцируемых финитных функций);

в) $\det A = \rho(s) q(s)$, где ρ — полином степени ℓ , функции q, q^{-1} есть мультипликаторы в пространстве Z ;

с) матрица $B \cdot A^+$ есть матричный полином степени не выше $\ell-1$, где матрица A^+ — произведение функции q^{-1} на присоединенную к A матрицу.

При построении интегрального представления обобщенных решений данного класса систем применяется умножение обобщенных функций [1]. Согласно результатам работы [2, с.248], в классах $L^\pm = F[\mathcal{D}'_\pm]$ определяются операторы

$$s^\lambda_\pm f_\pm = (\pm i)^\lambda F[F^{-1}[f_\pm] * g^\lambda_\pm], \quad (2)$$

$$\ln_\pm s f_\pm = -F[F^{-1}[f_\pm] * x^\pm_1]. \quad (3)$$

Здесь обобщенные функции $g^\lambda_\pm = \frac{x^\lambda_\pm}{\Gamma(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\lambda \neq 0, -1, \dots; \quad g^\lambda_\pm = (\pm 1)^k \delta^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Через $\mathcal{P}_r$ обозначается кольцо функций $\beta(s)$ вида

$$\beta(s) = \sum_{j=0}^m s^{\lambda_j} (\ln s)^{k_j} \rho_j(s),$$

где $m < \infty$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, k_j - целые неотрицательные числа, функции ρ_j аналитичны в кольце $r < |s| < \infty$

и в бесконечности имеют разве лишь полюсы. Функции $\beta \in \mathcal{P}_r$ ставятся в соответствие операторы $B_{\pm}(\beta): L^{\pm} \rightarrow L^{\pm}$,

$$B_{\pm}(\beta) = \sum_{j=0}^m s_{\pm}^{\lambda_j} (\ln_{\pm} s)^{k_j} \tilde{H}_{\pm}(\rho_j). \quad (4)$$

Здесь операторы $\tilde{H}_{\pm}(\rho_j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{jk} s_{\pm}^k$, где

a_{jk} - коэффициенты рядов Лорана функций ρ_j .

Лемма. Кольца $\mathcal{P}_r$, образованные операторами $B_{\pm}(\beta)$, $\beta \in \mathcal{P}_r$, изоморфны кольцу $\mathcal{P}_r$.

Известно, что элементы фундаментальной матрицы $\Phi = (\varphi_{ij})$ системы

$$w' = \frac{1}{p(s)} B(s) A^+(s) w$$

и матрицы $\Phi^{-1} = (\varphi_{ij}^{-1})$ принадлежат кольцу $\mathcal{P}_r$.

Этим матрицам ставятся в соответствие операторы

$$\Phi_{\pm} = (B_{\pm}(\varphi_{ij})) : (L^{\pm})^n \rightarrow (L^{\pm})^n,$$

$$\Phi_{\pm}^{-1} = (B_{\pm}(\varphi_{ij}^{-1})) : (L^{\pm})^n \rightarrow (L^{\pm})^n.$$

Аналогично матрице $Z(s)^{-E}$, где $Z(s)$ - полином, соответствуют операторы $Z(s)_{\pm}^{-E}$.

Пусть полином $p(s) = (s - \omega) p_{e-1}(s)$. Тогда справедливо представление

$$\frac{1}{s}(s) B(s) A'(s) = \frac{1}{s}(s) Q(s) + \frac{1}{s-\omega} C$$

где Q - матричный полином степени не выше $\ell-2$, C - постоянная матрица.

Теорема. Пусть выполнены условия а), в), с), вектор $f \in (Z')^n$. Тогда общее решение системы (I) в пространстве $(Z')^n$ выражается формулами

$$u = A'v, \quad v = p(s)_+^{-E} w_+ + p(s)_-^{-E} w_- + \\ + [p_{\ell-1}(s)_+^{-E} - p_{\ell-1}(s)_-^{-E}] \sum_{k=0}^{\ell-2} s^k c_k; \quad (5)$$

$$w_{\pm} = \Phi_{\pm} \left[\int \Phi_{\pm}^{-1} [\Phi_{\pm} \pm Q \cdot p_{\ell-1}(s)_{\pm}^{-E} \cdot \sum_{k=0}^{\ell-2} s^k c_k \pm \right. \\ \left. \pm \sum_{k=0}^{\infty} (s-\omega)^k d_k \right] + d_{\pm} \Big]. \quad (6)$$

$k+1 \in G(C)$

Здесь векторы $f_{\pm} \in (L^{\pm})^n$ такие, что $f_+ + f_- = f$, $G(C)$ - спектр матрицы C , векторы c_k , d_k , $d_{\pm}$ - произвольные постоянные.

Литература

1. Владимиров В.С. О построении оболочек голоморфности для областей специального вида и их применение // Тр. Матем ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР, 1961, т.60, с.101-144.
2. Бремерман Т. Распределения, комплексные переменные и преобразование Фурье // М.: Мир, 1968.

Институт математики и механики УрО АН СССР
Отдел оптимального управления
Сектор нелинейного анализа

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ С ОБОБЩЕННЫМ ОТНОШЕНИЕМ РЕЛЕЯ

Т. Саан

Рассмотрим проблему собственных значений и собственных векторов для произвольной комплексной матрицы T порядка n . Для отыскания собственного значения λ и соответствующих ему правого и левого собственных векторов используем следующий итерационный метод. Сначала выбираем единичные векторы v_0 и u_0 , $(v_0, u_0) \neq 0$. Затем для $k = 0, 1, 2, \dots$ повторим следующие шаги:

(I) вычислим $\varphi_k = \frac{(T v_k, u_k)}{(v_k, u_k)}$;

(II) решим уравнения

$$[\alpha_k + (T^* - \bar{\varphi}_k)(T - \varphi_k)] \tilde{v}_{k+1} = v_k,$$

$$[\alpha_k + (T - \varphi_k)(T^* - \bar{\varphi}_k)] \tilde{u}_{k+1} = u_k,$$

где $\alpha_k > 0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$;

(III) формируем $v_{k+1} = \frac{\tilde{v}_{k+1}}{\|\tilde{v}_{k+1}\|}$ и $u_{k+1} = \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\|\tilde{u}_{k+1}\|}$;

(IV) если $(v_{k+1}, u_{k+1}) = 0$, то выбираем другие начальные векторы v_0 и u_0 и начнём итерационный процесс с начала.

Отметим, что вероятность случая $(v_{k+1}, u_{k+1}) = 0$ равна нулю и в практической реализации нет необходимости для проведения шага (IV).

Обозначим $r_k = (T - \varphi_k)v_k$ и $p_k = (T^* - \bar{\varphi}_k)u_k$. Они являются хорошими вычислимыми мерами точности для собственных пар $\{\lambda, x\}$ и $\{\lambda, y\}$, где λ собственное значение матрицы T , а x и y соответствующие ему собственные векторы (соответственно правый и левый).

Теорема I. Пусть последовательности $\{v_k\}$ и $\{u_k\}$ такие, что $v_k \rightarrow x$ и $u_k \rightarrow y$ при $k \rightarrow \infty$, где $\|x\| = \|y\| = 1$, $Tx = \lambda x$, $T^*y = \bar{\lambda}y$. Выбираем такую последовательность $\{\alpha_k\}$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k}{\|r_k\| \|p_k\|} = 0$ (для случая 3 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k}{\|r_k\|^2 \|p_k\|^2} = 0$).

1. Если $T^*x = \bar{\lambda}x$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda - q_{k+1}|}{|\lambda - q_k|^2} = \text{const}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u_{k+1}\|}{\|u_k\|^2 \|p_k\|^2} = \text{const}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|p_{k+1}\|}{\|u_k\|^2 \|p_k\|^2} = \text{const}.$$

2. Если корневое подпространство $\mathcal{K}(\lambda)$ состоит только из собственных векторов, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda - q_{k+1}|}{|\lambda - q_k|^2} = \text{const}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u_{k+1}\|}{\|u_k\| \|p_k\|} = \text{const}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|p_{k+1}\|}{\|u_k\| \|p_k\|} = \text{const}.$$

3. Если максимальная длина корневой цепочки подпространства $\mathcal{K}(\lambda)$ равняется m , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda - q_{k+1}|}{|\lambda - q_k|} \leq \frac{m-1}{m}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u_{k+1}\|}{\|u_k\|} \leq \frac{m-1}{m}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|p_{k+1}\|}{\|p_k\|} \leq \frac{m-1}{m}.$$

Из теоремы вытекает, что для нормальных матриц (т.е. $T^*T = TT^*$), в том числе и для эрмитовых матриц (т.е. $T^* = T$), сходимость будет пятого порядка, так как для них всегда матрицы T и T^* имеют одинаковые собственные векторы. Отметим ещё, что для нормальных матриц системы на шаге (II) совпадают. Итак при выборе $\psi_0 = u_0$ достаточно решить одну систему и так как $(\psi_{k+1}, u_{k+1}) = \|\psi_{k+1}\|^2 = \|u_{k+1}\|^2 = 1$, то отпадает шаг (IV) и в теоретическом плане. Подробнее этот метод для эрмитовых матриц исследован в работе [2].

Модифицируем итерационный метод (I)–(IV). Выбираем единичные векторы ψ_0 и u_0 , $(\psi_0, u_0) \neq 0$. Затем для $k=0, 1, 2, \dots$ повторим следующие шаги:

(i) = (I);

(ii) если k нечетный, то вычислим

$$q_k = q_k - \frac{q_k}{1 - q_k} (q_k - q_{k-1}), \quad \text{где} \quad q_k = \frac{\|u_k\|}{\|u_{k-1}\|};$$

(iii) = (II);

(iv) = (III);

(v) = (IV).

Если в этом методе пропускаем шаг (ii), то метод точно совпадает с методом (I)–(IV). При практической реализации метода

(i)-(v) на ЭМ число операций почти не увеличивается по сравнению с методом (I)-(IV), но повышается сходимость для случая, когда $\mathcal{K}(\lambda)$ содержит не только собственные векторы.

Теорема 2. Пусть последовательности $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ для метода (i)-(v) такие, что $u_k \rightarrow x$ и $v_k \rightarrow y$ при $k \rightarrow \infty$, где $\|x\| = \|y\| = 1$, $Tx = \lambda x$, $T^*y = \bar{\lambda}y$. Выбираем такую последовательность $\{\alpha_k\}$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k}{\|u_k\|^2 \|v_k\|^2} = 0$ (для случая 3 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha_k}{\|u_k\|^2 \|v_k\|^2} = 0$).

1. Если $T^*x = \bar{\lambda}x$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda - q_{k+1}|}{|\lambda - q_k|^2} = \text{const}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u_{k+1}\|}{\|u_k\| \|v_k\|} = \text{const}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|v_{k+1}\|}{\|u_k\| \|v_k\|} = \text{const}.$$

2. Если корневое подпространство $\mathcal{K}(\lambda)$ состоит только из собственных векторов, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda - q_{k+1}|}{|\lambda - q_k|^2} = \text{const}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u_{k+1}\|}{\|u_k\| \|v_k\|} = \text{const}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|v_{k+1}\|}{\|u_k\| \|v_k\|} = \text{const}.$$

3. Если $\mathcal{K}(\lambda)$ содержит и не собственные векторы, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\lambda - q_{k+1}|}{|\lambda - q_k|^2} = \text{const}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u_{k+1}\|}{\|u_k\| \|v_k\|} = \text{const}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|v_{k+1}\|}{\|u_k\| \|v_k\|} = \text{const}.$$

Методы обратной итерации с обобщенными отношениями Релея исследованы в работах [1], [3], [4].

Литература

1. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений // М.: Мир, 1983.
2. Саан Т. Регуляризованный итерационный метод для отыскания собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы // Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, вып. 762, с. 59-68.
3. Ostrowski A.M. On the convergence of the Rayleigh quotient iteration for the computation of characteristic roots and vectors I-VI // Arch. Rational Mech. Anal., 1958/59, v.1-4.
4. Parlett B.M. The Rayleigh quotient iteration and some generalizations for nonnormal matrices // Mathematics of Computation, 1974, v. 28, 679-693.

Тартуский государственный университет
Кафедра вычислительной математики

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р.В. Слоневский

Во многих прикладных технических задачах, связанных с обработкой информации и оптимальным управлением многомерными системами, их состояние характеризуется N -мерным вектором $x(t)$, где аргумент t - время.

При анализе и синтезе такого рода систем приходится одновременно интегрировать две задачи Коши для векторного нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(0) = x_0, \quad x \in R^N \quad /1/$$

и для матричного дифференциального уравнения относительно симметрической матрицы $Y(t)$ размерности $N \times N$

$$\frac{dY}{dt} = JY - RY + YJ^T - YR^T + B, \quad /2/$$

где $f(x, t)$ - известная вектор-функция размерности N , $J = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\}$ - матрица Якоби правой части системы /1/, $R(t)$ - известная матрица размерности $N \times N$, $B(t)$ - задаваемая симметрическая матрица размерности $N \times N$.

В тех случаях, когда система /1/ является жесткой, применение для решения указанных задач Коши известных классических численных методов является мало эффективным. Явные линейные численные методы /методы Рунге-Кутты, методы Адамса-Башфорта/ обладают ограниченной областью устойчивости и допускают только сравнительно небольшой шаг интегрирования. Неявные численные методы требуют значительных вычислительных затрат для их реализации с помощью итерационных процедур. Эти затраты особенно опутимы при интегрировании матричного уравнения /2/, которое в данном случае преобразуется в векторную систему $(N+1)N/2$.

В работе рассматриваются дробно-рациональные численные методы отдельно для решения векторного уравнения /1/ и специальные непосредственно применяемые к матричному уравнению /2/ без его преобразования. Эти методы являются явными по исполь-

зуемой информации и линейно-неявными по способу их реализации. Структура дробно-рациональных методов для решения векторного уравнения /1/ определяется соотношением

$$X_{n+1}^{[p]} = (E - \alpha_p h J_n)^{-p} (T_{p,n} + \sum_{i=1}^p \beta_{pi} h^i J_n^i T_{0-i,n}), \quad /3/$$

где $X_{n+1}^{[p]}$ - приближение p -го порядка вектор-функции решения в сеточном узле t_{n+1} , α_p и β_{pi} - численные параметры значения которых при соответственном их выборе обеспечивают A - или L -устойчивость метода фиксированного порядка p , h - шаг интегрирования в n -том сеточном узле; J_n - численное значение матрицы Якоби системы в сеточном узле t_n , $T_{s,n}$ -одношаговая или многошаговая аппроксимация s -той частной суммы ряда Тейлора относительно сеточного узла t_n . Приводятся новые методики построения одношаговых и многошаговых явных расчетных формул для определения значений $T_{k,n}$ ($k = \overline{1, p}$). Структура одношаговых и многошаговых формул является общей

$$T_{s,n} = X_n + \sum_{j=0}^{p-1} \delta_{sj} h^{s-1} K_{n-j} \quad /4/$$

$$\text{где } K_{n-j}^{[m]} = f(t_{n-j}, X_{n-j}^{[m]}) \quad /5/$$

$X_{n-j}^{[m]}$ - найденное ранее значение приближения m -го порядка точности решения в сеточном узле t_{n-j} . В одношаговых формулах кроме /4/, /5/ используются дополнительно формулы определения значений $X_{n-j}^{[m]}$ исходя из информации в сеточном узле t_n

$$X_{n-j}^{[m]} = X_n + \sum_{i=1}^m \eta_{mji} K_{mi}^{[m-i]} \quad /6/$$

Используя описанную методику, построены конкретные одношаговые и многошаговые численные методы 1 - 6 порядков точности. Рассматриваются вопросы практической достаточно экономной по количеству вычислений реализации этих методов.

Для решения матричного уравнения /2/ используется отдельная специальная структура дробно-рациональных приближений

$$(E - \alpha_p h A_n)^P \mathcal{Y}_{n+1}^{(P)} (E - \alpha_p h A_n)^T = \sum_{j=0}^P \sum_{i=0}^{P-j} \beta_i h^i A_n^i T_{p-j-i,n} \beta_j h^j A_n^j T_i, \quad /7/$$

где $\mathcal{Y}_{n+1}^{(P)}$ - треугольная матрица приближенного решения уравнения /2/ в сеточном узле t_{n+1} ; $A_n = \mathcal{J}_n - R_n$; $T_{k,n}$ - треугольная матрица аппроксимации тейлоровского приближения k -го порядка решения матричного уравнения /2/.

Для описания реализации вычислений учитывающей симметричность матрицы-решения введем обозначения

$$Q_n = E - \alpha_p h A_n, \quad (AT+) = AT + TA^T. \quad /8/$$

Тогда значение матрицы $\mathcal{Y}_{n+1}^{(P)}$ определяется из системы уравнений

$$Q_n^P (Q_n^P \mathcal{Y}_{n+1}^{(P)}) = W_p, \quad /9/$$

$$W_p = T_{p,n} - h(AT_{p-1,n}+) + \frac{h^2}{2}(A(AT_{p-2,n}+) + \dots + (-1)^{p-1} \frac{h^p}{p!} T(A(-(AT_0^+)+\dots)_+)) \quad /10/$$

С целью уменьшения количества вычислений проведем LU -факторизацию матрицы $Q_n = L_n U_n$ и последовательно решаем $2p$ систем линейных алгебраических матричных уравнений с треугольными матрицами L_n и U_n . Правая часть W_p системы /9/ согласно /10/ определяется последовательной реализацией вложенных однотипных операций $(AT+)$ из /8/. Для выполнения этой операции составлена специальная подпрограмма, которая использует свойство симметричности матрицы определяемой заданной операцией. Очевидно, что для систем вида /2/ большой размерности целесообразно применять методы невысоких порядков p .

Для совместного решения уравнений /1/ и /2/ необходимо на каждом шаге определения решений в очередном сеточном узле t_{n+1} использовать методы вида /3/ и типа /7/. Необходимость определения в методах /3/ значений матрицы Якоби системы /1/ в данном случае не приводит к дополнительным вычислениям.

Львовский политехнический институт
Кафедра прикладной математики

СТРУКТУРА ОДНОГО КЛАССА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ЗАДАЧ ХИМИКИНИКИ

О.Р.Слоневский

Рассматриваются три метода численного решения систем жестких нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= Y_1(N_{100}^1 + Y_1(N_{110}^1 + N_{111}^1 Y_1)) + Y_2(N_{200}^1 + Y_1(N_{210}^1 + N_{211}^1 Y_1)) + Y_2(N_{220}^1 + N_{221}^1 Y_1 + \\ &\quad + N_{222}^1 Y_2)) + \dots + Y_m(N_{m00}^1 + Y_1(N_{m10}^1 + N_{m11}^1 Y_1) + \dots + Y_m(N_{mm0}^1 + \dots + N_{mmmm}^1 Y_m)), \\ \dot{Y}_2 &= Y_1(N_{100}^2 + Y_1(N_{110}^2 + N_{111}^2 Y_1)) + Y_2(N_{200}^2 + Y_1(N_{210}^2 + N_{211}^2 Y_1)) + Y_2(N_{220}^2 + N_{221}^2 Y_1 + \\ &\quad + N_{222}^2 Y_2)) + \dots + Y_m(N_{m00}^2 + Y_1(N_{m10}^2 + N_{m11}^2 Y_1) + \dots + Y_m(N_{mm0}^2 + \dots + N_{mmmm}^2 Y_m)) \\ &\quad \dots \dots \dots \\ \dot{Y}_m &= Y_1(N_{100}^m + Y_1(N_{110}^m + N_{111}^m Y_1)) + Y_2(N_{200}^m + Y_1(N_{210}^m + N_{211}^m Y_1)) + Y_2(N_{220}^m + N_{221}^m Y_1 + \\ &\quad + N_{222}^m Y_2)) + \dots + Y_m(N_{m00}^m + Y_1(N_{m10}^m + N_{m11}^m Y_1) + \dots + Y_m(N_{mm0}^m + \dots + N_{mmmm}^m Y_m)) \end{aligned} \quad (1)$$

$$Y_1(0) = Y_{10}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Y_m(0) = Y_{m0}$$

на отрезке $[0; X_k]$ с помощью рациональных выражений

$$\bar{Y}_{n+1} = \frac{\bar{B}_0 + h\bar{B}_1 + h^2\bar{B}_2}{C_0 + hC_1 + h^2C_2} \quad (2)$$

и

$$\bar{Y}_{nm} = \frac{\bar{B}_0 + h\bar{B}_1 + h^2\bar{B}_2 + h^3\bar{B}_3}{C_0 + hC_1 + h^2C_2 + h^3C_3}, \quad (3)$$

где $\bar{Y}_{n+1}$ - значение приближающей функции в точке

$$X_{n+1} \in [0; X_k]$$

$\bar{B}_i$, $i = \overline{0,3}$ m - мерные векторы,

C_i , $i = \overline{0,3}$ $m \times m$ - мерные матрицы,

h - шаг интегрирования функции ($h = X_{n+1} - X_n$).

Рациональное приближение дает возможность решать задачу численного интегрирования явными устойчивыми методами, в то

время как полиномиальное устойчивое приближение (по теореме Даламбера) возможно только неявными методами порядка согласованности не выше второго.

Расчетные формулы для $\bar{B}_k$ получены из соображений порядка согласованности

$$\begin{aligned}\bar{B}_0 &= C_0 \bar{y}_n, \\ \bar{B}_1 &= C_0 \bar{y}_n' + C_1 \bar{y}_n, \\ \bar{B}_2 &= \frac{C_0 \bar{y}_n''}{2} + C_1 \bar{y}_n' + C_2 \bar{y}_n, \\ \bar{B}_3 &= \frac{C_0 \bar{y}_n'''}{6} + \frac{C_1 \bar{y}_n''}{2} + C_2 \bar{y}_n' + C_3 \bar{y}_n.\end{aligned}\quad (4)$$

Подставив эти выражения в (2) и (3) можно убедиться, что выражение (2) дает второй, а выражение (3) - третий порядок согласованности, т.е. погрешность между этими выражениями и разложением функции в ряд Тейлора составляет соответственно $O(h^3)$ и $O(h^4)$.

Матрица C_0 для простоты задается как единичная матрица, т.е. $C_0 = I_m$.

Рассмотрим отдельно выражение (2). Здесь расчетные формулы для C_1 и C_2 следующие:

$$C_1 = \frac{2}{3} D, \quad (5)$$

$$C_2 = \frac{1}{6} (D^2 + D'). \quad (6)$$

Выражение (5) выбрано из соображений L - устойчивости, а (6) - из соображений более точного приближения.

В одном методе матрица D удовлетворяет условию

$$\bar{y}' = -D \bar{y}, \quad (7)$$

во втором

$$\bar{y}'' = -D \bar{y}'. \quad (8)$$

Условие (8) требует более сложных вычислений, зато доводит порядок согласованности до 3.

Для выражения (3) расчетные формулы для C_1 , C_2 , C_3 следующие:

$$C_1 = \frac{3}{4} D, \quad (9)$$

$$C_2 = \frac{1}{4} (D^2 + D'), \quad (10)$$

$$C_3 = \frac{1}{24} (D^3 + 2DD' + D'D + D''), \quad (11)$$

где D - удовлетворяет условию (8).

Порядок согласованности равен 4, метод L - устойчив.

Метод третьего порядка согласованности испытан на конкретных задачах химкинеки. Полученные результаты оценены выше, нежели результаты работы программы *STIFF*, реализующей метод Гира.

Метод реализован в программе Бейсик в версиях для СМ-4 и ДВК-3 с автоматическим выбором шага по заданной относительной погрешности, что реализовано по схеме Рунге. Нахождение Y_{n+1} сводится к решению системы линейных уравнений. С этой целью используется модифицированный метод Гаусса - LR -факторизация.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слоневский О.Р. Один из принципов построения дробно-рациональных численных методов на примере метода третьего порядка согласованности // Вопросы алгебры и теории функций, Вестн. Львов. ун-та, 1986, вып. 25, с. 91-94.
2. Дубовичкий А.Я., Дубовичкий В.А. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений неизоотермической кинетики с использованием медленных комбинаций // Журнал вычислительной математики и математической физики, М., т.23, 1983, с. 1060-1071.

ИД Львовского Института прикладных проблем механики и математики АН УССР, отдел № 39.

О СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Р.В.Слоневский, Т.М.Яремко, В.Н.Вовк

Рассматривается задача Коши для автономной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Y' = F(Y), \quad Y(x_0) = Y_0, \quad Y \in R^S. \quad /1/$$

Для эффективного решения жестких задач вида /1/ необходимо, чтобы неявный численный метод обладал свойствами A - или жесткой устойчивости. Проведен анализ имеющихся результатов по этому вопросу, на основании которого предлагается для решения задачи /1/ использовать процесс квазилинеаризации, сводящий ее к последовательности систем линейных дифференциальных уравнений. Жесткость задачи при этом сохраняется и для решения линейных задач строятся дробно-рациональные методы, обладающие требуемыми типами устойчивости [1]. Таким образом, задача /1/ представляется в виде

$$Y' = J(Y_{n+1,m})Y + F(Y_{n+1,m}) - J(Y_{n+1,m})Y_{n+1,m}, \quad /2/$$

где J - матрица Якоби системы /1/.

Решение системы /2/ определяет $m+1$ приближение $Y_{n+1,m}$ на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ точного решения Y_{n+1}^* нелинейной системы /1/. Если точно решать /2/, то скорость сходимости итерационного процесса квазилинеаризации определяется в виде

$$\|Y_{n+1,m+1} - Y_{n+1}^*\| \leq q \|Y_{n+1,m} - Y_{n+1}^*\|^2, \quad /3/$$

где q - некоторая константа не зависящая от m . При решении /2/ необходимо оценить близость последовательности приближенных решений $Y_{n+1,m}$ к Y_{n+1}^* при $m \rightarrow \infty$.

Допустим, что можно достичь оценки

$$\|\tilde{Y}_{n+1,m} - Y_{n+1,m}\| \leq \alpha, \quad \forall m \geq 1 \quad /4/$$

с помощью выбора метода соответствующего порядка или шага.

При реализации на ЭВМ контролируем выполнение условия

$\|\tilde{Y}_{n+1,m+1} - \tilde{Y}_{n+1,m}\| \leq \delta$ и необходимо для Y_{n+1}^* определить оценку

$$\|\tilde{Y}_{n+1,m} - Y_{n+1}^*\| \leq \varepsilon. \quad /5/$$

Следовательно, если выполняются условия /3/, /4/, необходимо согласовать выбор величины δ с заданными значениями ε и α .

Исследование поставленной задачи привело к следующим результатам.

Теорема 1. Если выполняются условия /3/, /4/ и

$$0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} = 1/4q, \quad /6/$$

то для достаточно большого m справедливы оценки

$$\|\tilde{y}_{n+1,m} - y_{n+1}^*\| \leq 2\alpha, \quad /7/$$

$$\Delta_m = \|\tilde{y}_{n+1,m+1} - \tilde{y}_{n+1,m}\| \leq 4\alpha. \quad /8/$$

Теорема 2. Если выполнены условия /6/ и $\Delta_m > \alpha$, то для достаточно больших m асимптотически справедливы следующие двусторонние оценки

$$\alpha(\Delta_m - \alpha)/\Delta_m \leq \|\tilde{y}_{n+1,m} - y_{n+1}^*\| \leq 2(\Delta_m + \alpha). \quad /9/$$

Из /6/ и /9/ следует, что условие $\|\tilde{y}_{n+1,m} - y_{n+1}^*\| \leq \varepsilon$ достигается, если

$$\delta \leq \frac{1}{2}\varepsilon - \alpha.$$

Теоретические результаты подтверждены экспериментальными испытаниями с помощью созданного на этой основе программного модуля DRKLT A.

Литература

1. Слоневский Р.В., Яремко Т.М. Исследование нелинейных жестких систем дифференциальных уравнений с использованием дробно-рациональных численных методов решения линейных систем. - Львов, 1985. - 35 с. - Рукопись предст. Львовским политехн. ин-том. Деп. в УкрНИИТИ 25 февр. 1986, № 708 - Ук86.

Львовский политехнический институт
Кафедра прикладной математики

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛОГАРИФИЧЕСКИМ ЯДРОМ

У. Эммуc

Рассматривается линейное интегральное уравнение

$$u(x) = \int_{\Omega} \alpha(x, y) \ln|x-y| u(y) dy + f(x),$$

где Ω — двумерное открытое ограниченное множество с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$. Предполагается, что $f \in C^2(\bar{\Omega})$, $\alpha \in C^2(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$. Из общей теории многомерных слабо сингулярных интегральных уравнений вытекает, что решение этого уравнения $u(x)$ и его первые производные непрерывны на $\bar{\Omega}$. Вторые производные в общем случае могут иметь возле границы логарифмические особенности. В данной работе изучается наличие этих особенностей.

Пусть $x \in \Omega$ приближается к некоторой точке y_* на границе. Предполагаем, что в некоторой окрестности y_* граница гладкая и удовлетворяет условию

$$|\tau_y(\Theta(y') - \Theta(y''))| \leq M |y' - y''|^n,$$

где $M > 0$, $0 < n \leq 1$, y' и y'' принадлежат этой окрестности, а $\Theta(y)$ — угол между касательной в точке y и осью y_1 .

Тогда $\partial^2 u(x) / \partial x_i \partial x_j$ — непрерывная ограниченная функция на $\bar{\Omega}$.

Если x приближается к угловой точке y_* такой, что в обеих односторонних окрестностях y_* граница гладкая и удовлетворяет вышеупомянутому условию, то

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i} = \psi_i(x) + (-1)^i u(y_*) \alpha(y_*, y_*) (\omega'_i \omega'_i - \omega_i \omega_i) |\ln|x-y_*||, \quad i=1,2,$$

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = \psi(x) + u(y_*) \alpha(y_*, y_*) (\omega_1'^2 - \omega_1^2) |\ln|x-y_*||,$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ и $\omega' = (\omega'_1, \omega'_2)$ пределы единичных внутренних нормалей при приближении к y_* вдоль границы соответственно в положительном и отрицательном направлениях, а ψ_i и ψ — непрерывные ограниченные функции на $\bar{\Omega}$.

Тартуский государственный университет
Кафедра вычислительной математики

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ПОЛУЧЕСТИ В МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН СО СФЕРЫ

Я. Янно

Рассматривается обратная задача для определения функции ползучести в модели распространения радиальных волн со сферы в наследственной среде:

$$\left. \begin{aligned} u_{tt}(\gamma, t) + \int_0^t \omega(t-s) u_{tt}(\gamma, s) ds &= \frac{1}{\omega_0^2} (u_{rr}(\gamma, t) + \frac{2}{r} u_r(\gamma, t) - \frac{2}{r^2} u(\gamma, t)), \\ 0 \leq t < \infty, a \leq \gamma < \infty, \\ u(\gamma, 0) = u_t(\gamma, 0) &= 0, a \leq \gamma < \infty, u(a, t) = \varphi_a(t), 0 \leq t < \infty, \\ u(R, t + (R-a)\omega_0) &= \psi_R(t), 0 \leq t < \infty. \end{aligned} \right\} (1)$$

В постановке задачи заданы функции φ_a и ψ_R (перемещения на сфере и на расстоянии R от центра сферы) и требуется определить функцию ползучести ω .

Обратная задача (I) сведена последовательному решению следующих интегральных уравнений.

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[s \frac{d}{dt} \int_0^{t-s} \varphi_a(t-s-\tau) \psi_R(\tau) d\tau - \int_0^{t-s} \varphi_a(t-s-\tau) \psi_R(\tau) d\tau \right] \bar{\omega}_1(s) ds = \\ &= \frac{2}{(R-a)\omega_0} \int_0^t (t-2s) \varphi_a(t-s) \psi_R(s) ds, \quad 0 \leq t < \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\bar{\omega}_1(t) + \int_0^t A_{\bar{\omega}_1} \bar{\omega}_1(s) ds + \int_0^t s^2 A_{\bar{\omega}_1} \bar{\omega}_1(s) ds = \bar{\omega}_1(t), \quad 0 \leq t < \infty \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\bar{\omega}_1} \bar{\omega}_1(t) &= (t \bar{\omega}_1(t) - t \bar{\omega}_1(t) - \int_0^t (\bar{\omega}_1(s) - \bar{\omega}_1(s)) ds) * \left(\frac{1}{4} \bar{\omega}_1 * \bar{\omega}_1(t) + \right. \\ &+ \bar{\omega}_1(t) + \frac{R+a}{R a \omega_0} \left(\frac{1}{2} \int_0^t \bar{\omega}_1(s) ds + 1 \right) \left. \right) + \frac{1}{R a \omega_0^2} \int_0^t \left(\frac{1}{2} t^2 + \frac{3}{2} s^2 \right). \end{aligned}$$

$$\cdot \bar{\omega}_1(s) ds - \frac{t^2}{2\omega_0^2} \quad (3')$$

и $\omega(t) = \frac{1}{4} \omega_1 * \omega_1(t) + \omega_1(t)$, $0 \leq t < \infty$, * - свертка.

Для регуляризации линейного уравнения I рода (2) можно использовать предложенный в [1] метод.

Доказано, что при $\bar{\omega}_1 \in C[0, \infty)$ решение нелинейного уравнения II рода (3) существует и единственно в классе $C[0, \infty)$. Оно устойчиво относительно $\bar{\omega}_1$ в метрике $C[0, T]$, $T < \infty$.

После дискретизации уравнения (3) ($t \in [0, T]$) заменой интегралов квадратурными формулами получается нелинейная система уравнений:

$$f_i(\tilde{\omega}_1^1, \dots, \tilde{\omega}_1^i) = 0, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4)$$

где $\tilde{\omega}_1^i$ - дискретные приближения $\omega_1(t)$. Функции f_i линейны относительно аргумента с наивысшим индексом $\tilde{\omega}_1^i$ и поэтому последовательное вычисление $\tilde{\omega}_1^i$ из системы (4) просто.

Литература

1. Янно Я. Регуляризация одного уравнения Вольтерра I рода, равносильного уравнению III рода // Уч. зап. Тартуск.ун.-та, 1987, вып. 672, с. 16-30.

Институт кибернетики АН ЭССР
Сектор вычислительной математики

СОДЕРЖАНИЕ

Алгебра

Д.Бредихин. Абстрактная характеристика группоидов бинарных отношений с обобщенными композициями.	3
Е.Гутман. О характерах частично упорядоченных множеств .	6
К.Каарли. Решение одной проблемы Фостера.	10
У.Калькюльд. О числах Стирлинга и Лаха	11
У.Калькюльд, Т.Пиккмаа. Числа Фибоначчи внешнепланарных графов.	15
И.Микитюк, А.Прикарпатский. Унитарные представления квантовой алгебры Ли токов на окружности.	18
П.Нормак. Конечны инъективные полигоны	22
П.Пуусемп. О суммируемости эндоморфизмов группы.	24
Э.Реди. Два определения $\mathcal{K}$ -радикала поликольцоидов . .	28
А.Рямер. Об экстремумах перманенты.	30
А.Фляйшер. О разложении однородных пространств с полупростыми группами	32
В.Фляйшер. Об изоморфизме сплетений моноидов с категориями	34
J.Henno. Loogikaprogrammi minimaalne semantika.	37

Анализ

М.Абель. О расширении замкнутых максимальных идеалов центра локально псевдовыпуклых алгебр	39
В.Богачёв. Распределения полиномиальных функционалов и осциллирующие интегралы	42
И.Боос, Т.Лейгер. WCG -пространства последовательностей	44
А.Векслер. Вложение решеточных конусов в упорядоченные векторные пространства.	48
В.Галошкин. О суммировании ортогональных рядов классическими методами.	50
В.Голубов. Функции и кратные тригонометрические ряды, сопряженные относительно конуса	52
В.Кадец, М.Кадец. Перестановки рядов в пространствах Банаха. Последние достижения.	56
А.Кивинукк. Краткий обзор о суммах Валле Пуссена	57
А.Кокк. О почти коммутативности банаховых алгебр	61

Э.Кольк. Статистически сходящиеся последовательности в нормированных пространствах.	63
Ю.Лембра, У.Кальклайд. Математические вопросы теории вакуумного нанесения пленки на вращающийся цилиндр.	67
И.Лепассон. О теплицевом базисе в теории пространств двойных последовательностей и теории рядов Фурье.	69
А.Лиепиньш. Операторы замыкания, меры некомпактности и неподвижные точки отображений.	71
Ю.Липпус. О сохранении классов функций.	73
Л.Лооне. Ядро полунепрерывного последовательностного метода суммирования.	76
Б.Макаров. Универсально регулярные операторы в пространствах.	79
Б.Мартыненко, Е.Рабец. Задача Дирихле. Применение метода Абеля-Пуассона к ее решению.	81
А.Меленцов, Е.Панов. Методы суммирования и критерий непрерывности.	83
Т.Метсмаги. Об умножении сходящихся по мере функциональных рядов.	85
А.Монаков-Рогозкин. Некоторые методы построения листингов и строго локализуемых пространств с мерой.	88
М.Островский. Характеризация свойства Банаха - Сакса в терминах растягивающих моделей и ее применения.	90
Э.Ол. Об одной теореме Э. и П.Сабоза.	96
А.Ревенко. О неэффективности интегральных регулярных операторов.	98
Б.Сики. Множители суммируемости и анализ Фурье.	99
Б.Сики. Рейт-пространства в теории суммируемости.	101
Э.Смелянов. Нелинейные псевдодифференциальные операторы в суперпространствах.	103
Б.Сэрмер. Включение поля сильной суммируемости в FK -пространстве.	107
А.Тали. Выпуклость одного семейства обобщенных методов суммирования Нёрлунда.	109
И.Таммерайд. О тауберовых теоремах Г.Кангро.	113
М.Тыннов. О классах мультипликаторов.	115
Х.Тюрнпу. Включение методов суммирования в классе рядов Фурье.	117

В.Фёдорова. Об одном обобщении теорем Стоуна-Вейерштрасса и Рисса-Маркова.	121
Е.Шавгулидзе. О существовании решений уравнений Шредингера с полиномиальными потенциалами	125
А.Шостах. Об одной категории для нечеткой топологии.	126
Э.Юрмяз. Проблема заменимости для методов суммирования со скоростью.	130
S. Baron, H. Tietz. Umkehrsätze für Riesz-Verfahren zur Summierung von Doppelreihen	135
H. Tietz. Schmidtsche Umkehrbedingungen für Potenzreihenverfahren.	136
<u>Методы вычислений</u>	
А.Апарцин. Об одном классе уравнений Ланге типа Вольтерра	140
В.Баланов. О вращении эквивариантных векторных полей в бесконечномерных пространствах.	143
В.Виленко. Вычислительные схемы А-метода решения интегральных уравнений с полиномиальными нелинейностями	146
Г.Ваарманн. О некоторых гибридных методах решения нелинейных уравнений.	150
Г.Вайникко. О троекционной регуляризации нормально разрешимых задач	154
М.Глушик, О.Глушик. Неявные численные методы смешанного типа для исследования жестких задач.	158
О.Глушик. Многошаговые численные методы тригонометрического порядка для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений	160
Р.Кангро. Волнообразное решение обыкновенного дифференциального уравнения	162
Т.Кихо. Оценка погрешности итерированного варианта метода Лаврентьева.	163
И.Куки. О вычислении оптимальных разбиений нормального распределения	166
Р.Лепп. Аппроксимация экстремальных задач.	169
А.Матвеев. К численному решению сингулярных интегральных уравнений на кусочно-гладкой линии интегрирования	171

П.Мийдла, Р.Соркина, Э.Тамме. Модель эксимерного электроразрядного лазера, учитывающая профиль электродов	175
Г.Оленев. О решении задачи изгиба упругопластической пологой оболочки методом штрафа.	178
М.Павлова, М.Тимербаев. Теорема существования для уравнения нестационарной нелинейной фильтрации	181
А.Педас. О решении слабо особого интегрального уравнения с разрывным коэффициентом.	184
С.Пискарёв. О методе решения уравнения Гельмгольца в стратифицированном океане без поглощения	187
Т.Раус. О принципе невязки в случае неточно заданного оператора.	189
Ф.Рафиков. Интегральное представление обобщенных решений одного класса сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений	192
Т.Саан. Регуляризованные итерационные методы с обобщенным отношением релая	195
Р.Слоневский. Методы решения векторно-матричных дифференциальных уравнений.	198
О.Слоневский. Структура одного класса численных методов исследования жестких систем задач химкинетики. . .	201
Р.Слоневский, Т.Яремко, В.Вовк. О сходимости процесса квазилинеаризации при приближенном решении линейных систем	204
У.Эмус. О гладкости решения двумерного интегрального уравнения с логарифмическим ядром	206
Я.Янно. Об определении функции ползучести в модели распространения волн со сферы	207

МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА.
Тезисы докладов конференции. 21-23 сентября 1988.
На русском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Пийкооли, 16.
Ответственный редактор К. Казарли.
Подписано к печати 11.07.1988.
МВ 05240.
Формат 60х84/16.
Бумага ротаторная.
Машинопись. Ротапринт.
Условно-печатных листов 12,32.
Учетно-издательских листов 11,66. Печатных листов 13,25.
Тираж 290.
Заказ № 624.
Цена 80 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.