П. Боль.

О нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ общаго характера, примѣнимыхъ въ механикѣ.

Юрьевъ.
Типографія Шнакенбурга.
1900.

Печатано съ одобренія Учебнаго Комитета Рижскаго Политехническаго Института.

№ 2194.

Директоръ: **Ѳ. Гренбергъ.**

Оглавленіе.

Итакъ, мое сочиненіе содержитъ изслѣдованіе нѣкоторой весьма общей системы дифференціальныхъ уравненій и въ особенности разсмотрѣніе того случая, когда эта система допускаетъ тригонометрическія рѣшенія. Вышеупомянутыя дополненія къ теоремамъ моего сочиненія о тригонометрическихъ рядахъ я пропустилъ, такъ какъ эти изслѣдованія теперь не находятся въ тѣсной связи съ главнымъ содержаніемъ настоящаго разсужденія. Четвертая глава содержитъ нѣкоторыя приложенія.

Чтобы ознакомить читателя до извѣстной степени съ содержаніемъ предлагаемаго сочиненія, я сообщу нѣкоторые результаты, къ которымъ я пришелъ [1]).

Пусть дана слѣдующая система дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \cdot\cdot + a_{in}\, x_n + X_i \qquad (i = 1 \cdot\cdot n) \cdot\cdot\cdot 1$$

При этомъ величины a суть постоянныя, относительно которыхъ мы сдѣлаемъ только предположеніе, что „характеристичное" уравненіе, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \omega & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} = o \qquad \ldots\ldots 2$$

не имѣетъ корней, вещественная часть которыхъ равняется нулю. X_i обозначаютъ функціи отъ $t\ x_1 \ldots x_n$, которыя даны для значеній x, удовлетворяющихъ условіямъ (A), т. е. условіямъ вида $a_i < x_i < b_i$ (или $a_i < x_i$ или $x_i < b_i$ или „x_i произвольная величина") и для значеній t, удовлетворяющихъ условіямъ $t > t$ (случай α), или $t < t$ (случай β), или „t произвольная величина" (случай γ). Мы предположимъ, что X_i имѣютъ производныя перваго порядка по $x_1 \ldots x_n$, которыя, равно какъ и X_i, суть непрерывныя функціи отъ $t\ x_1 \ldots x_n$.

Наконецъ, мы сдѣлаемъ слѣдующее важное предположеніе: Можно выбрать такое число $\gamma > o$, что x, абсолютныя величины которыхъ не больше, чѣмъ γ, удовлетворяютъ условіямъ (A) и что, если $-\gamma < x_i < +\gamma$, то выполняются неравенства

$$\left| \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right| < \triangle_1\, , \ | X_i |_0 < \triangle_2 \cdot \gamma$$

При этомъ $| X_i |_0$ обозначаютъ $| X_i |$ для $x_1 = \ldots = x_n = o$ и $\triangle_1\ \triangle_2$ — нѣкоторыя положительныя числа, которыя можно опредѣлить, когда дана таблица коэффиціентовъ a. Какъ находятся подходящія величины $\triangle$, видно изъ слѣдующаго.

Прежде чѣмъ изложить слѣдствія, которыя вытекаютъ изъ этихъ предположеній, замѣтимъ, что послѣднія выполнены, напримѣръ, для системы

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i + \eta_i \qquad (i = 1\ .\ .\ n) \quad \ldots 3$$

если относительно этихъ уравненій извѣстно слѣдующее: Y_i для значеній y, удовлетворяющихъ условіямъ (B), т. е. условіямъ $\alpha_i < y_i < \beta_i$ ($\alpha_i < o \quad \beta_i > o$), суть функціи y, которыя обращаются въ нуль для $y_1 = \ldots = y_n = o$. $\frac{\partial Y_i}{\partial y_k}$ существуютъ для

---

1) Въ настоящемъ сочиненіи мы всегда — за исключеніемъ нѣкоторыхъ случаевъ, не требующихъ особенныхъ указаній — будемъ предполагать разсматриваемыя величины конечными и вещественными, функціи однозначными.

значеній y, удовлетворяющихъ условіямъ (B), и непрерывны для этихъ значеній. Уравненіе 2) не имѣетъ корней, вещественныя части которыхъ равняются нулю, если a_{ik} обозначаетъ $\frac{\partial Y_i}{\partial y_k}$ для $y_1 = \ldots = y_n = o$. η_i суть функціи отъ $y_1 \ldots y_n$ и t, данныя для значеній y удовлетворяющихъ условіямъ (B) и для всѣхъ t. Эти функціи имѣютъ производныя $\frac{\partial \eta_i}{\partial y_k}$, которыя, равно какъ и η_i, непрерывны для разсматриваемыхъ значеній y и t. Кромѣ того, мы имѣемъ право приписать величинамъ $|\eta|$ и $\left|\frac{\partial \eta}{\partial y}\right|$ нѣкоторую степень малости, причемъ эту степень можно опредѣлить смотря по характеру функцій Y_i.

Вернемся теперь къ уравненіямъ 1). Въ моемъ изслѣдованіи вводятся n линейныхъ относительно x формы y при помощи — впрочемъ хорошо извѣстной — линейной подстановки съ постоянными коэффиціентами и съ опредѣлителемъ, отличающимся отъ нуля. Величины y распадаются на двѣ группы $p_1 \ldots p_k$ и $q_1 \ldots q_l$, причемъ элементы группы p соотвѣтствуютъ корнямъ уравненія 2) съ положительною вещественною частью, а элементы группы q — корнямъ съ отрицательною вещественною частью. Можетъ случиться, что имѣемъ только одну группу[1]).

Затѣмъ характеризуемъ системы p и системы q при помощи условій

$$\text{I.} \quad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \, p_\mu^2 \leqq \delta . \gamma^2 \qquad\qquad \text{II.} \quad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \, . \, q_\nu^2 \geqq -\delta . \gamma^2 \quad \ldots 4$$

При этомъ величины $d > o$, $f < o$ равно какъ и $\delta > o$ суть нѣкоторыя постоянныя, которыя зависятъ только отъ таблицы коэффиціентовъ a. Каждой системѣ p, q, удовлетворяющей условіямъ 4), соотвѣтствуетъ система x, удовлетворяющая условіямъ $-\gamma < x_i < \gamma$ $(i = 1, \ldots n)$. Введемъ для системъ p и q, характеризованныхъ условіями 4 I и 4 II, обозначенія P и Q.

Мы имѣемъ тогда слѣдующія теоремы:

I Случай α. Пусть t_0 обозначаетъ какое-нибудь изъ разсматриваемыхъ значеній t и [q] какую нибудь изъ системъ Q. Системѣ [q] соотвѣтствуетъ тогда одна, вполнѣ опредѣленная, система P, введемъ для нея обозначеніе [p], такого рода, что рѣшеніе уравненій 1), соотвѣтствующее начальнымъ значеніямъ [p] [q] для $t = t_0$, удовлетворяетъ условіямъ 4) для всѣхъ $t > t_0$. Два произвольно выбранныя рѣшенія такого рода асимптотически приближаются другъ къ другу для $t \to \infty$.

II Случай β. Пусть t_0 обозначаетъ какое-нибудь изъ разсматриваемыхъ значеній t и [p] — какую-нибудь изъ системъ P. Системѣ [p] соотвѣтствуетъ тогда одна, вполнѣ опредѣленная, система Q, введемъ для нея обозначеніе [q], такого рода, что рѣшеніе уравненій 1), соотвѣтствующее начальнымъ значеніямъ [p] [q] для $t = t_0$, удовлетворяетъ условіямъ 4) для всѣхъ $t < t_0$. Два произвольно выбранныя рѣшенія такого рода асимптотически приближаются другъ къ другу для $t \to -\infty$.

III Случай γ. Одновременно справедливы вышеупомянутыя теоремы для случаевъ α и β. Кромѣ того, мы имѣемъ слѣдующее: Существуетъ одно опредѣленное рѣшеніе урав-

1) Какъ измѣняются въ этомъ случаѣ приведенныя здѣсь теоремы, видно изъ слѣдующаго.

ненiй 1), удовлетворяющее для всѣхъ t условiямъ 4). Рѣшенiе, удовлетворяющее для достаточно большихъ t условiямъ 4), асимптотически приближается къ этому рѣшенiю для $t \to \infty$. Рѣшенiе, удовлетворяющее для достаточно малыхъ t условiямъ 4), асимптотически приближается къ этому рѣшенiю для $t \to -\infty$.

Остановимся на случаѣ, когда допускаются всѣ значенiя t, и введемъ новое предположенiе, что t заключается въ X_i въ тригонометрическомъ видѣ. Подъ послѣднимъ выраженiемъ здѣсь разумѣемъ слѣдующее: X_i — по крайней мѣрѣ для значенiй x, удовлетворяющихъ условiямъ $-\gamma < x_i < \gamma$, и для всѣхъ t — получаются изъ нѣкоторыхъ функцiй ρ_i $(x_1 \,.\,.\, x_n\ u_1 \,.\,.\, u_m)$ при помощи подстановки $u_1 = \frac{t}{\alpha_1} \ldots u_m = \frac{t}{\alpha_m}$. При этомъ ρ для значенiй x, удовлетворяющихъ условiямъ $-\gamma < x_i < \gamma$, и для всѣхъ u суть функцiи непрерывныя относительно x и u и перiодическiя относительно u съ перiодами 1. α обозначаютъ величины, отличающiяся отъ нуля, такого рода, что между величинами $\frac{1}{\alpha}$ не существуютъ линейныя однородныя уравненiя, коэффицiенты которыхъ суть цѣлыя числа и по крайней мѣрѣ не всѣ равняются нулю.

Изъ сдѣланныхъ предположенiй тогда слѣдуетъ, что элементы вышеупомянутаго рѣшенiя, удовлетворяющаго для всѣхъ t условiямъ 4), разложимы въ тригонометрическiе ряды

$$u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.} \ldots\ldots 5$$

для всѣхъ t равномѣрно сходящiеся. Каждый членъ u_ν при этомъ цѣлое рацiональное выраженiе относительно $\cos\left(2\pi \frac{t}{\alpha_\mu}\right)$ $\sin\left(2\pi \frac{t}{\alpha_\mu}\right)$ $(\mu = 1 \,.\,.\, m)$ съ постоянными коэффицiентами.

Если ρ имѣютъ непрерывныя производныя по x и u до порядка s включительно и если $s > 2m$, то элементы вышеупомянутаго рѣшенiя разложимы въ тригонометрическiе ряды для всѣхъ t абсолютно и равномѣрно сходящiеся, видъ которыхъ соотвѣтствуетъ обыкновеннымъ рядамъ Fourier. Это значитъ, что каждый членъ рядовъ, представляющихъ рѣшенiе, содержитъ кромѣ постояннаго коэффицiента произведенiе величинъ, которыя имѣютъ видъ косинусовъ или синусовъ цѣлыхъ кратностей величинъ $2\pi \frac{t}{\alpha_\mu}$.

Что касается остального содержанiя этого сочиненiя, то я ограничиваюсь здѣсь указанiемъ на оглавленiе.

Приведенные мною примѣры имѣютъ механическiй характеръ. За исключенiемъ ихъ читатель найдетъ въ этомъ сочиненiи только строго аналитическiя изслѣдованiя. Доказательства геометрическаго или даже механическаго характера въ немъ не допускаются, что однако не исключаетъ употребленiя терминологiи, взятой изъ геометрiи [1]). Выбирая примѣры, я впрочемъ не стремился къ тому, чтобы изслѣдовать по возможности общiе случаи. Я только хотѣлъ указать на нѣкоторыя направленiя, въ которыхъ можно найти сколько угодно механическихъ задачъ, соотвѣтствующихъ нашимъ изслѣдованiямъ.

1) Въ настоящемъ сочиненiи выраженiя точка (мѣсто), область, окрестность точки (мѣста), точка (мѣсто) накопленiя употребляются въ томъ же смыслѣ, какъ у нѣмецкихъ авторовъ выраженiя Stelle, Gebiet, Umgebung einer Stelle, Häufungsstelle.

Глава I.

§ 1.

Настоящая глава содержитъ нѣкоторыя вспомогательныя предложенія. Въ § 1 доказывается теорема, при помощи которой часто можно назначить предѣлы для разностей элементовъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій.

Пусть $2n$ функцій $x_i\ y_i$ ($i = 1,2 \ldots n$) удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t) + \xi_i(t)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(t) + \rho_i(t)$$

$$(i = 1,2 \ldots n)$$

для значеній перемѣнной t изъ нѣкотораго промежутка. При этомъ f, F, ξ, ρ имѣютъ опредѣленныя значенія для каждаго значенія t изъ вышеупомянутаго промежутка. Послѣдній содержитъ всѣ значенія t между A и B, причемъ предѣлы могутъ принадлежать къ промежутку[1]).

Предположимъ, что выполнены слѣдующія условія

$$|f_i(t) - F_i(t)| < \sum_{\mu=1}^{\mu=n} A_\mu |x_\mu - y_\mu| \qquad |\xi_i(t) - \rho_i(t)| < d$$

причемъ A_μ и d обозначаютъ постоянныя, которыя больше нуля.

Выберемъ какое нибудь значеніе τ изъ промежутка перемѣнной t и введемъ кромѣ того слѣдующія обозначенія

$$x_i - y_i = \eta_i \qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=n} A_\mu |\eta_\mu(\tau)| = h \qquad \Sigma A_\mu = k$$

Имѣемъ тогда для всѣхъ $t \gtrless \tau$ нашего промежутка

$$x_i(t) - y_i(t) = x_i(\tau) - y_i(\tau) + \varepsilon_i (d + h) \frac{e^{w(t-\tau)} - 1}{w}$$

1) x и y по предыдущему имѣютъ опредѣленныя конечныя производныя для значеній t разсматриваемаго промежутка.

Въ этой формулѣ w обознаетъ $\pm$ k, смотря потому, имѣемъ ли мы $t \gtrless \tau$. ε_i величина, для которой имѣетъ мѣсто неравенство $| \varepsilon_i | < 1$.

Въ самомъ дѣлѣ. Пусть обозначаетъ s выраженіе

$$\frac{e^{w(t-\tau)} - 1}{w} (d + h)$$

а для $t = \tau$ величину 0. Для $t \gtrless \tau$ имѣемъ тогда $\frac{ds}{dt} = e^{w(t-\tau)} (d + h)$ и для $t = \tau$ $\frac{ds}{dt} = d + h$. s слѣдовательно имѣетъ опредѣленную конечную производную для каждаго значенія t нашего промежутка.

Обозначимъ дальше $p_i = \eta_i - \eta_i(\tau) + s$ $q_i = \eta_i - \eta_i(\tau) - s$. Тогда имѣютъ мѣсто слѣдующія уравненія

$$\frac{dp_i}{dt} = f_i(t) - F_i(t) + \xi_i(t) - \rho_i(t) + e^{w(t-\tau)} (d + h)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = f_i(t) - F_i(t) + \xi_i(t) - \rho_i(t) - e^{w(t-\tau)} (d + h)$$

причемъ въ случаѣ $t = \tau$ слѣдуетъ замѣнить $e^{w(t-\tau)}$ единицею.

Замѣтимъ, что $p_i(\tau) = q_i(\tau) = o$ и что

$$\left(\frac{dp_i}{dt}\right)_{t=\tau} = f_i(\tau) - F_i(\tau) + \xi_i(\tau) - \rho_i(\tau) + d + h$$

$$\left(\frac{dq_i}{dt}\right)_{t=\tau} = f_i(\tau) - F_i(\tau) + \xi_i(\tau) - \rho_i(\tau) - (d + h)$$

Такъ какъ $| f_i(\tau) - F_i(\tau) | \leqq \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu | \eta_\mu(\tau) |$ т. е. $| f_i(\tau) - F_i(\tau) | \leqq h$

и $| \xi_i(\tau) - \rho_i(\tau) | < d$ то имѣемъ $\left(\frac{dp_i}{dt}\right)_{t=\tau} > o$ $\left(\frac{dq_i}{dt}\right)_{t=\tau} < o$

Слѣдовательно, $p_i(t) > o$ и $q_i(t) < o$ для, можетъ быть, существующихъ значеній $t > \tau$, и $p_i(t) < o$ и $q_i(t) > o$ для, можетъ быть, существующихъ значеній $t < \tau$, если только $| t - \tau |$ достаточно малая величина, и это имѣетъ мѣсто одновременно для всѣхъ i.

Если p_i и q_i отличаются отъ нуля и имѣютъ противоположные знаки, то $p_i \cdot q_i = [\eta_i - \eta_i(\tau)]^2 - s^2 < o$ и слѣдовательно $| \eta_i - \eta_i(\tau) | < | s |$.

Можно доказать, что вышеупомянутое правило для знаковъ величинъ p и q и, слѣдовательно, также послѣднія неравенства справедливы для всѣхъ значеній t нашего промежутка. И дѣйствительно, если допустимъ противное, то должно существовать въ нашемъ промежуткѣ значеніе θ, отличающееся отъ τ, такого рода, что выполнены слѣдующія условія.

1) Между τ и θ справедливы правила для знаковъ величинъ p и q (т. е. $p > o$ $q < o$ или $p < o$ $q > o$, смотря потому, имѣемъ ли мы $\theta > \tau$ или $\theta < \tau$). Поэтому имѣютъ мѣсто также неравенства $| \eta(t) - \eta(\tau) | < | s |$.

2) Для значенія $t = \theta$ по крайней мѣрѣ одна изъ величинъ p и q имѣетъ значеніе нуль, между тѣмъ какъ (можетъ быть существующія) величины p и q, отличающіяся отъ нуля, подчинены вышеупомянутому правилу для знаковъ. Поэтому мы имѣемъ

$$| \eta (\theta) - \eta (\tau) | \lesseqgtr | s (\theta) |$$

Положимъ, что по крайней мѣрѣ одна изъ двухъ величинъ $p (\theta)$ $q (\theta)$ равняется нулю. Образуемъ теперь $\left(\frac{dp_i}{dt}\right)_{t = \theta}$ и $\left(\frac{dq_i}{dt}\right)_{t = \theta}$. Мы получимъ

$$\left(\frac{dp_i}{dt}\right)_{t = \theta} = f_i (\theta) - F_i (\theta) + \xi_i (\theta) - \rho_i (\theta) + e^{w (\theta - \tau)} (d + h)$$

$$\left(\frac{dq_i}{dt}\right)_{t = \theta} = f_i (\theta) - F_i (\theta) + \xi_i (\theta) - \rho_i (\theta) - e^{w (\theta - \tau)} (d + h)$$

Дальше имѣемъ:

$$f_i (\theta) - F_i (\theta) = \alpha \sum_{\mu = 1}^{n} A_\mu | \eta_\mu (\theta) | = \beta \sum_{\mu = 1}^{n} A_\mu | \eta_\mu (\theta) - \eta_\mu (\tau) | + \beta \sum_{\mu = 1}^{n} A_\mu | \eta_\mu (\tau) |$$

причемъ $| \beta | \lesseqgtr 1$ и $| \alpha | \lesseqgtr 1$. Такъ какъ $| \eta_\mu (\theta) - \eta_\mu (\tau) | \lesseqgtr | s (\theta) |$

то $f_i (\theta) - F_i (\theta) = \gamma \cdot w \cdot s (\theta) + \beta \cdot h$ причемъ $| \gamma | \lesseqgtr 1$.

Замѣтивъ, что $\xi_i (\theta) - \rho_i (\theta) = u \cdot d$ причемъ $|u| < 1$, и

что $e^{w (\theta - \tau)} (d + h) = w\, s (\theta) + (d + h)$ получимъ

$$\left(\frac{dp_i}{dt}\right)_{t = \theta} = w \cdot s (\theta) (1 + \gamma) + h (1 + \beta) + d (1 + u)$$

$$\left(\frac{dq_i}{dt}\right)_{t = \theta} = - w\, s (\theta) (1 - \gamma) - h (1 - \beta) - d (1 - u)$$

$w \cdot s (\theta)$ по опредѣленію s больше нуля, такъ какъ $\theta \gtrless \tau$. Слѣдовательно

$$\left(\frac{dp_i}{dt}\right)_{t = \theta} > o \qquad \left(\frac{dq_i}{dt}\right)_{t = \theta} < o$$

По предыдущему въ случаѣ $p_i (\theta) = o$ $\theta > \tau$ существовали бы отрицательныя значенія $p_i (t)$ для значеній t между τ и θ, въ случаѣ $p_i (\theta) = o$ $\theta < \tau$ существовали бы положительныя значенія $p_i (t)$ для значеній t между θ и τ, въ случаѣ $q_i (\theta) = o$ $\theta > \tau$ существовали бы положительныя значенія $q_i (t)$ для значеній t между τ и θ, въ случаѣ $q_i (\theta) = o$ $\theta < \tau$ существовали бы отрицательныя значенія $q_i (t)$ для значеній t между θ и τ. Всѣ эти результаты противны нашимъ предположеніямъ. Слѣдовательно мы имѣемъ по предыдущему для всѣхъ значеній t нашего промежутка, отличныхъ отъ τ,

$$| \eta_i (t) - \eta_i (\tau) | < | s (t) |$$

Итакъ согласно утвержденію мы имѣемъ для всѣхъ $t \gtrless \tau$ нашего промежутка

$$x_i (t) - y_i (t) = x_i (\tau) - y_i (\tau) + \varepsilon_i (d + h) \frac{e^{w (t - \tau)} - 1}{w}, \quad \text{причемъ} \quad | \varepsilon_i | < 1.$$

§ 2[1]).

Приведемъ сначала нѣкоторыя извѣстныя теоремы изъ теоріи дифференціальныхъ уравненій. Положимъ, что дана система:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\ (x_1 \ldots x_n\ t) \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \qquad \ldots\ldots 1$$

Пусть f_i при этомъ обозначаютъ непрерывныя функціи для области (G)

$$a_1 < x_1 < b_1 \qquad a_2 < x_2 < b_2 \qquad \ldots a_n < x_n < b_n \qquad a < t < b$$

Введемъ предположеніе, что — по крайней мѣрѣ для каждой отдѣльной области (G′), которая опредѣляется подобнымъ образомъ какъ (G) и лежитъ внутри (G) —

$$|\ f_i\ (x'_1 \ldots x'_n\ t) - f_i\ (x_1'' \ldots x_n''\ t)\ | < \Sigma\, A_\mu\ |\ x'_\mu - x''_\mu\ |$$

если x', x'', t лежатъ въ области (G′). A_μ при этомъ обозначаютъ постоянныя, которыя существуютъ для каждой отдѣльной области (G′).

Пусть $\gamma_1\ \gamma_2 \ldots \gamma_n\ \tau$ представляютъ систему значеній $x_1 \ldots x_n$ t изъ области G. Тогда существуетъ рѣшеніе системы 1) $x_1\ (t) \ldots x_n\ (t)$, удовлетворяющее условіямъ

$$x_1\ (\tau) = \gamma_1 \quad \ldots x_n\ (\tau) = \gamma_n,$$

которое дано для значеній t нѣкотораго промежутка, заключающаго τ. Рѣшеніе въ этомъ промежуткѣ имѣетъ вполнѣ опредѣленный характеръ, т. е. оно представляетъ единственное рѣшеніе, которое дано для вышеупомянутаго или меньшаго промежутка, заключающаго τ, и удовлетворяетъ вышеупомянутымъ условіямъ.

Если существуетъ рѣшеніе въ промежуткѣ $\tau < t < r$ (или $s < t < \tau$), то оно имѣетъ опредѣленный характеръ вслѣдствіе условій для $t = \tau$.

Должно существовать наибольшее значеніе T такого рода, что $x_1\ (t) \ldots x_n\ (t)$ представляютъ рѣшеніе вышеупомянутаго рода для $t > \tau$, $t < T$ и должно существовать наименьшее значеніе θ такого рода, что $x_1\ (t) \ldots x_n\ (t)$ представляютъ рѣшеніе вышеупомянутаго рода для $t < \tau$, $t > \theta$. Если T (θ) не равняется b (a), то $x_1\ (t) \ldots x_n\ (t)$ для значеній t, сколь угодно мало отличающихся отъ T (θ), между прочимъ принимаютъ значенія, которыя лежатъ сколь угодно близко къ границѣ нашей области. (Это значитъ, что по крайней мѣрѣ одна изъ величинъ

$$|\ b_1 - x_1\ |\quad |\ a_1 - x_1\ |\quad \ldots\quad |\ b_n - x_n\ |\quad |\ a_n \quad x_n\ |$$

принимаетъ сколь угодно малыя значенія).

---

1) Между теоремами, которыя доказываются въ § 2. 3. 4, находятся, можетъ быть, уже извѣстныя. Я однако долженъ былъ ихъ доказать, такъ какъ не могъ сказать, гдѣ онѣ разсматриваются въ математической литературѣ. Относительно части содержанія § 4 слѣдуетъ указать на статью Niccoletti (Sugli integrali delle equazioni etc. 1895. Atti della Reale Accademia dei Lincei), которую я не могъ достать. Сколько можно судить по реферату изъ „Jahrbuch der Mathematik" предположенія въ вышеупомянутомъ изслѣдованіи не тождественны съ соотвѣтствующими § 4. Кромѣ того слѣдуетъ указать на: G. v. Escherich, Die zweite Variation der einfachen Integrale I. Mittheilung. Sitzungsber. d. Ak. in Wien Bd. CVII 1898. Такъ какъ это сочиненіе вышло въ самое недавнее время, то я не могъ воспользоваться имъ. Впрочемъ оно не дѣлаетъ лишними наши изслѣдованія. [Совершенно окончивъ настоящее сочиненіе, я замѣтилъ въ „Jahrbuch d. Mathematik" рефератъ работы Peano, очевидно относящейся сюда. См. „Jahrbuch der Mathematik" Bd. 28, p. 267].

Сверхъ того г. профессоръ Кнезеръ былъ такъ любезенъ указать мнѣ на работу проф. Шуръ „Ueber den analytischen Charakter der eine endliche continuirliche Tranformationsgruppe darstellenden Functionen" Mathematische Annalen XLI p. 509.

Мы докажемъ эту теорему, хотя она, можетъ быть, уже извѣстна.

Допустимъ, что наша теорема не справедлива. Пусть $t_1, t_2 \ldots$ суть значенія t изъ промежутка $\tau \leqq t < T$ $(\tau \geqq t > \theta)$, которыя стремятся къ T (θ). Системы $x_1\ x_2 \ldots x_n$, получаемыя при этомъ для нашего рѣшенія, тогда — при предположеніи, допущенномъ нами въ видѣ опыта — имѣютъ по крайней мѣрѣ одно мѣсто накопленія внутри области

$$a_1 < x_1 < b_1 \ldots a_n < x_n < b_n.$$

Пусть координаты этого мѣста суть $\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_n$. Можно доказать, что

$$\lim_{\substack{t \to T \\ (t \to \theta)}} x_1(t) = \xi_1 \quad \ldots \quad \lim_{\substack{t \to T \\ (t \to \theta)}} x_n(t) = \xi_n$$

Въ противномъ случаѣ $x_1(t) \ldots x_n(t)$ принимали бы также значенія сколь угодно близкія къ координатамъ второго мѣста $\xi_1' \ldots \xi_n'$ внутри нашей области для значеній t, сколь угодно мало отличающихся отъ T (θ). Изъ этого слѣдовало бы, что по крайней мѣрѣ одна изъ величинъ $\left|\frac{dx_1}{dt}\right| \ldots \left|\frac{dx_n}{dt}\right|$ между прочимъ принимаетъ сколь угодно большія значенія. Но такъ какъ $x_1(t) \ldots x_n(t)$ не принимаютъ значеній, лежащихъ сколь угодно близко къ границѣ нашей области, то можно опредѣлить область внутри данной области такого рода, что эти величины остаются внутри второй области. Внутри второй области по предположеніямъ f_i лежатъ между конечными опредѣленными предѣлами для разсматриваемаго здѣсь промежутка значеній t. Тоже самое поэтому имѣетъ мѣсто также для $\frac{dx_1}{dt} \ldots \frac{dx_n}{dt}$. Такъ какъ это противно предыдущему, то мы дѣйствительно имѣемъ вышеупомянутые предѣлы для $x_1 \ldots x_n$.

Существуетъ рѣшеніе нашихъ уравненій, которое для $t = T$ (θ) принимаетъ значенія $\xi_1 \ldots \xi_n$ и имѣетъ опредѣленный характеръ для нѣкотораго промежутка значеній t, заключающаго T (θ). Дополнимъ теперь рѣшеніе $x_1 \ldots x_n$ вышеупомянутымъ рѣшеніемъ для тѣхъ значеній $t \geqq T$ $(t \leqq \theta)$, для которыхъ дано новое рѣшеніе. Послѣднее по предыдущему представляетъ непрерывное продолженіе прежняго рѣшенія. Такимъ образомъ полученное рѣшеніе удовлетворяетъ дифференціальнымъ уравненіямъ 1) также для $t = T$ $(t = \theta)$. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ

$$\frac{\xi_i - X_i}{T - t} = \left(\frac{dX_i}{dt}\right)_{t_1}$$

причемъ t_1 лежитъ между T и t и X_i указываетъ на наконецъ полученное рѣшеніе. (Соотвѣтствующее имѣетъ мѣсто для θ). Слѣдовательно существуетъ $\frac{dX_i}{dt}_{(t=T)}$ $\left(\frac{dX_i}{dt}_{(t=\theta)}\right)$ и равняется $f_i(\xi_1 \ldots \xi_n\ T)$ $(f_i(\xi_1 \ldots \xi_n\ \theta))$. Итакъ T (θ) не представляетъ наибольшаго (наименьшаго) значенія съ извѣстнымъ намъ свойствомъ.

Наша теорема, слѣдовательно, доказана.

§ 3.

Предположимъ, что дана слѣдующая система

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1 \ldots x_n\ t\ \alpha_1 \ldots \alpha_k) \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

При этомъ f_i суть непрерывныя функціи величинъ, находящихся въ скобкахъ, въ области (I_a) $a_1 < x_1 < b_1 \ldots a_n < x_n < b_n$ $a < t < b$ (I_b) $r_1 < \alpha_1 < s_1 \ldots r_k < \alpha_k < s_k$ (I) Дальше предположимъ, что для каждой отдѣльной системы $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ (въ нашей области) и каждой отдѣльной области величинъ $x_1 \ldots x_n\, t$, которая опредѣляется аналогично какъ I_a и x_n'' меньше чѣмъ I_a, можно найти числа $A_\mu > o$ такого рода, что

$$| f_i (x_1' \ldots x_n'\, t\, \alpha_1 \ldots \alpha_k) - f_i (x_1'' \ldots x_n''\, t\, \alpha_1 \ldots \alpha_k) | < \Sigma A_\mu | x_\mu' - x_\mu'' |$$

если $x_1' \ldots x_n'\, x_1'' \ldots x_n''\, t$ принадлежатъ въ вышеупомянутой меньшей области. α играютъ роль параметровъ.

Пусть теперь $x_1^{(o)} \ldots x_n^{(o)}\, \tau\, \alpha_1^{(o)} \ldots \alpha_k^{(o)}$ представляютъ систему области I. Тогда въ нѣкоторомъ промежуткѣ значеній t, заключающемъ τ, существуетъ рѣшеніе $x_1 (t) \ldots x_n (t)$, для котораго $x_1 (\tau) = x_1^{(o)} \ldots x_n (\tau) = x_n^{(o)}$. Пусть этотъ промежутокъ значеній t содержитъ между прочимъ значенія отъ $t = \tau$ до $t = T$ включительно. Можно найти число $\delta > o$ такого рода, что

$$| x_1 (t) - a_1 | > \delta \qquad | x_1 (t) - b_1 | > \delta \ldots | x_n (t) - b_n | > \delta$$

такъ какъ x суть непрерывныя функціи. Можно, слѣдовательно, найти область II для $x_1 \ldots x_n\, t$ меньшую чѣмъ (I_a) такого рода, что $x_1 \ldots x_n\, t$ въ разсматриваемомъ промежуткѣ значеній t остаются внутри области II. При этомъ можно выбрать эту область такимъ образомъ, что $x_1 \ldots x_n$ всегда отличаются отъ ея предѣловъ больше чѣмъ на нѣкоторое число $\delta_1 > o$.

Обратимъ теперь наше вниманіе на рѣшеніе $y_1 \ldots y_n$, которое соотвѣтствуетъ системѣ $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ и для котораго $y_1 (\tau) = x_1^{(o)} \ldots y_n (\tau) = x_n^{(o)}$. Въ нѣкоторомъ промежуткѣ значеній t, заключающемъ τ, существуетъ такое рѣшеніе, вполнѣ опредѣленное вслѣдствіе вышеупомянутыхъ условій. Если система $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ лежитъ достаточно близко къ системѣ $\alpha_1^{(o)} \ldots \alpha_k^{(o)}$, то значенія t отъ $t = \tau$ до $t = T$ также принадлежатъ къ этому промежутку.

Въ самомъ дѣлѣ. Пусть обозначаетъ T_1 предѣлъ (см. § 2) промежутка по направленію отъ τ до T такъ, что T_1 представляетъ наибольшее (или наименьшее) число, для котораго $y_1 \ldots y_n$ распространяется на промежутокъ $T_1 > t \geq \tau$ (или $T_1 < t < \tau$) — причемъ, однако, сказанное относится къ области II. Если $T_1 > T$ (или $< T$ въ случаѣ $T < \tau$), справедливость нашего замѣчанія очевидна. Остановимся, слѣдовательно, на случаѣ, въ которомъ $T_1 = T$ или T_1 лежитъ между τ и T. Тогда однако по предыдущему § система $y_1 \ldots y_n$ между τ и T_1 должна принимать положенія, которыя лежатъ сколь угодно близко къ границѣ области II. Слѣдовательно между величинами $| x_1 (t) - y_1 (t) | \ldots | x_n (t) - y_n (t) |$ въ промежуткѣ $t \geq \tau$ $t < T_1$ (или $t < \tau$ $t > T_1$) встрѣчаются значенія, которыя больше чѣмъ $\frac{\delta_1}{2}$.

Мы имѣемъ

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i (y_1 \ldots y_n\, t\, \alpha_1^{(o)} \ldots \alpha_k^{(o)}) + W_i$$

причемъ $W_i = f_i (y_1 \ldots y_n\, t\, \alpha_1 \ldots \alpha_k) - f_i (y_1 \ldots y_n\, t\, \alpha_1^{(o)} \ldots \alpha_k^{(o)})$. Если $| \alpha_1 - \alpha_1^{(o)} | \ldots | \alpha_k - \alpha_k^{(o)} |$ достаточно малы, $| W_i | < \Delta$, причемъ Δ больше нуля, а во всемъ остальномъ произвольно выбранная величина. Это непосредственно слѣдуетъ изъ нашихъ предположеній.

Дальше имѣемъ

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\ (x_1\ \ldots\ x_n\ t\ \alpha_1^{(o)}\ \ldots\ \alpha_k^{(o)})$$

$$\left| f_i\ (y_1\ \ldots\ y_n\ t\ \alpha_1^{(o)}\ \ldots\ \alpha_k^{(o)}) - f_i\ (x_1\ \ldots\ x_n\ t\ \alpha_1^{(o)}\ \ldots\ \alpha_k^{(o)}) \right| < \sum_{\mu=1}^{\mu=n} A_\mu \left| y_\mu - x_\mu \right|$$

Все это имѣетъ мѣсто въ промежуткѣ $t > \tau$ $t < T_1$ (или $t < \tau$ $t > T_1$). A суть опредѣленныя положительныя числа, которыя соотвѣтствуютъ системѣ $\alpha_1^{(o)}\ \ldots\ \alpha_k^{(o)}$ и области H. Имѣемъ, слѣдовательно, по нашей вспомогательной теоремѣ

$$x_i - y_i = \varepsilon_i\ \Delta \frac{e^{w\,(t-\tau)} - 1}{w}$$

причемъ w представляетъ опредѣленное число, которое зависитъ отъ величинъ A_μ. $|\varepsilon_i|$ меньше чѣмъ 1. t при этомъ не лежитъ внѣ промежутка отъ $t = \tau$ до $t = T$.

Изъ этого слѣдуетъ, что можно выбрать Δ такой малою величиною, что величины $|x_1\ (t) - y_1\ (t)|\ \ldots\ |x_n\ (t) - y_n\ (t)|$ всегда $< \frac{\delta_1}{2}$. Это противно предыдущему, такъ что, слѣдовательно, въ самомъ дѣлѣ $T_1 > T$ (или $T_1 < T$), если только $|\alpha_1^{(o)} - \alpha_1|$ etc. имѣютъ достаточную степень малости.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ также, что $|x_1\ (t) - y_1\ (t)|\ \ldots\ |x_n\ (t) - y_n\ (t)|$ можемъ сдѣлать сколь угодно малыми величинами для промежутка отъ $t = \tau$ до $t = T$, если только подчинимъ $|\alpha_1 - \alpha_1^{(o)}|$ etc. условію, что они достаточно малы. Для этого достаточно распространить послѣднія соображенія на промежутокъ отъ $t = \tau$ до $t = T$

Вмѣсто системы $\alpha_1^{(o)}\ \ldots\ \alpha_k^{(o)}$ можно выбрать другую. Если послѣдняя лежитъ достаточно близко къ системѣ $\alpha_1^{(o)}\ \ldots\ \alpha_k^{(o)}$, то по предыдущему можно воспользоваться тѣмъ же самымъ промежуткомъ значеній t отъ $t = \tau$ до $t = T$ и вывести соотвѣтствующія теоремы. Тогда мы имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Пусть $x_1\ (t)\ \ldots\ x_n\ (t)$ представляютъ рѣшеніе въ промежуткѣ отъ $t = \tau$ до $t = T$, которое соотвѣтствуетъ системѣ параметровъ $\alpha_1^{(o)}\ \ldots\ \alpha_k^{(o)}$ и условіямъ $x_1\ (\tau) = x_1^{(o)}\ \ldots\ x_n\ (\tau) = x_n^{(o)}$. Существуетъ тогда нѣкоторая окрестность системы $\alpha_1^{(o)}\ \ldots\ \alpha_k^{(o)}$ съ слѣдующими свойствами. Каждая система величинъ α изъ этой окрестности при условіяхъ $x_1\ (\tau) = x_1^{(o)}\ \ldots$ даетъ рѣшеніе въ промежуткѣ отъ $t = \tau$ до $t = T$, которое вполнѣ опредѣлено этими условіями. Если элементы этого рѣшенія обозначаемъ черезъ $x_1\ (t, \alpha_1\ \ldots\ \alpha_k)\ \ldots\ x_n\ (t, \alpha_1\ \ldots\ \alpha_k)$ то имѣемъ непрерывныя функціи относительно $t, \alpha_1\ \ldots\ \alpha_k$.

Ибо, если образуемъ:

$$x_i\ (t + \Delta t,\ \alpha_1 + \Delta\alpha_1,\ \ldots\ \alpha_k + \Delta\alpha_k) - x_i\ (t,\ \alpha_1\ \ldots\ \alpha_k)$$

то это равняется

$$x_i(t + \Delta t\ \alpha_1 + \Delta\alpha_1\ \ldots\ \alpha_k + \Delta\alpha_k) - x_i(t + \Delta t\ \alpha_1\ \ldots\ \alpha_k) + x_i(t + \Delta t,\ \alpha_1\ \ldots\ \alpha_k) - x_i(t,\ \alpha_1\ \ldots\ \alpha_k)$$

Можно сдѣлать разность двухъ первыхъ членовъ численно сколь угодно малою (при данныхъ $\alpha_1\ \ldots\ \alpha_k$), если подчинить $\Delta\alpha$ условію, что они численно достаточно малы. Разность послѣднихъ членовъ равняется производной отъ $x_i\ (t, \alpha_1\ \ldots\ \alpha_k)$ по t для значенія между

$t + \Delta t$ и t умноженной на Δt. Такъ какъ f_i для области II и выбранной системы $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ лежитъ между конечными предѣлами, то можно сдѣлать также эту разность численно сколь угодно малою, если подчинить величину Δt условію, что она численно достаточно мала.

§ 4.

Пусть дана опять система:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\,(x_1 \ldots x_n\; t\; \alpha_1 \ldots \alpha_k) \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \qquad \ldots . 1$$

f_i суть однозначныя и непрерывныя функціи для всѣхъ x, t, α въ области

$$a_1 < x_1 < b_1 \quad \ldots a_n < x_n < b_n \quad a < t < b \quad r_1 < \alpha_1 < s_1 \quad \ldots r_k < \alpha_k < s_k \quad \text{(I)}$$

Внутри этой области f_i пусть имѣютъ конечныя и непрерывныя первыя производныя по $x_1 \ldots x_n$ $\alpha_1 \ldots \alpha_k$. Тогда очевидно также выполнены условія предыдущаго §.

Обратимъ теперь наше вниманіе на систему изъ области I $x_1^0 \ldots x_n^0\; \tau\; \alpha_1^0 \ldots \alpha_k^0$ и на рѣшеніе, которое соотвѣтствуетъ начальнымъ значеніямъ $x_1^0 \ldots x_n^0\; \tau$ и значеніямъ параметровъ $\alpha_1^0 \ldots \alpha_k^0$. Пусть промежутокъ значеній t отъ $t = 0$ до $t = T$ (со включеніемъ предѣловъ) содержитъ τ и пусть вышеупомянутое рѣшеніе распространяется между прочимъ на этотъ промежутокъ.

Тогда мы опредѣляемъ условіями аналогичными (I) область (II), которая имѣетъ болѣе узкіе предѣлы, чѣмъ I. Можно выбрать ее такимъ образомъ, что разсматриваемое рѣшеніе въ промежуткѣ (0 T) остается внутри этой области.

Тогда по предыдущему § можно найти область (A) величинъ α, заключающую $\alpha_1^0 \ldots \alpha_k^0$, такого рода, что $x_i\,(t, \alpha_1 \ldots \alpha_k)$ $(i = 1 \ldots n)$ въ промежуткѣ отъ $t = 0$ до $t = T$ и для всѣхъ α области (A) суть непрерывныя функціи величинъ t, α. При этомъ $x_i\,(t, \alpha_1 \ldots \alpha_k)$ $(i = 1, \ldots n)$ обозначаетъ рѣшеніе, которое соотвѣтствуетъ начальнымъ значеніямъ $x_1^0 \ldots x_n^0\; \tau$ и системѣ параметровъ $\alpha_1 \ldots \alpha_k$; оно лежитъ въ области (II).

Изъ сдѣланныхъ предположеній теперь вытекаетъ, что для каждой отдѣльной области съ предѣлами болѣе узкими, чѣмъ предѣлы области I, можно опредѣлить такимъ образомъ числа A_μ и B_ν, большія нуля, что

$$|\, f_i\,(x_1 + \Delta x_1 \ldots x_n + \Delta x_n\; t\; \alpha_1 + \Delta \alpha_1 \ldots \alpha_k + \Delta \alpha_k) - f_i\,(x_1 \ldots x_n\; t\; \alpha_1 \ldots \alpha_k)\,|$$

$$< \sum_{\mu=1}^{\mu=n} A_\mu\,|\,\Delta x_\mu\,| + \sum_{\nu=1}^{\nu=k} B_\nu\,|\,\Delta \alpha_\nu\,|$$

если $x_1 + \Delta x_1 \ldots x_n + \Delta x_n\;\; t\;\; \alpha_1 + \Delta \alpha_1 \ldots \alpha_k + \Delta \alpha_k\;\; x_1 \ldots x_n\;\; \alpha_1 \ldots \alpha_k$ лежатъ въ новой области.

Пусть теперь $\alpha_1 + \Delta \alpha_1,\; \alpha_2 \ldots \alpha_k$ также представляетъ систему области (A). Обозначимъ: $x_i\,(t, \alpha_1 + \Delta\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k) - x_i\,(t, \alpha_1 \ldots \alpha_k) = \xi_i$ и $y_i = x_i\,(t, \alpha_1 + \Delta \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k)$. Имѣемъ

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i\,(y_1 \ldots y_n\; t\; \alpha_1 \ldots \alpha_k) + V_i$$

$$V_i = f_i\,(y_1 \ldots y_n\; t\; \alpha_1 + \Delta \alpha_1\; \alpha_2 \ldots \alpha_k) - f_i\,(y_1 \ldots y_n\; t\; \alpha_1 \ldots \alpha_k) \quad (i = 1, \ldots n)$$

Замѣтивъ, что x, y, t, α равно какъ и $\alpha_1 + \Delta \alpha_1$ лежатъ въ области (II), имѣемъ

$$|f_i(y_1 \ldots y_n\, t\, \alpha_1 \ldots \alpha_k) - f_i(x_1 \ldots x_n\, t\, \alpha_1 \ldots \alpha_k)| \leqq \sum_{\mu=1}^{\mu=n} C_\mu\, |\xi_\mu| \qquad (i = 1, \ldots n)$$

причемъ величины $C > 0$ представляютъ постоянныя, выбранныя для области (II). Дальше

$$|V_i| = |f_i(y_1 \ldots y_n\, t\, \alpha_1 + \Delta\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_k) - f_i(y_1 \ldots y_n\, t\, \alpha_1 \ldots \alpha_k)| \leqq D\,|\Delta\alpha_1| \qquad (i = 1, \ldots n)$$

причемъ $D > 0$ есть величина, выбранная для области (II), и знакъ равенства имѣетъ мѣсто только для $\triangle\,\alpha_1 = 0$. Слѣдовательно имѣемъ по § 1

$$|\xi_i| < D\,|\Delta\alpha_1|\,\left|\frac{e^{w(t-\tau)} - 1}{w}\right| \qquad (i = 1 \ldots n)$$

причемъ $|w|$ только зависитъ отъ величинъ C. Изъ этого слѣдуетъ $|\xi_i| < E\,|\Delta\alpha_1|$ причемъ величина $E > 0$ представляетъ постоянную, выбранную для области II.

Введемъ теперь нѣкоторую вспомогательную систему $\eta_1 \ldots \eta_n$ при помощи дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu}\,\eta_\mu + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

$(i = 1, \ldots n)$ и условій $\eta_i(\tau) = 0$ $(i = 1, \ldots n)$.

Если $\frac{\partial f_i}{\partial x_\mu}$, $\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_1}$ разсматриваемъ какъ функціи величинъ x, t, α, то эти функціи непрерывны въ области (I). Если разсматриваемъ $x_1 \ldots x_n$ по предыдущему какъ функціи величинъ $t\,\alpha_1 \ldots \alpha_k$, то эти функціи непрерывны въ промежуткѣ отъ $t = \theta$ до $t = T$ и для вышеупомянутой области величинъ α. Тоже самое при этой точкѣ зрѣнія тогда имѣетъ мѣсто и для $\frac{\partial f_i}{\partial x_\mu}$, $\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_1}$.

Уравненія 2) представляютъ, слѣдовательно, систему линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Пусть θ обозначаетъ меньшее изъ чиселъ θ и T, между которыми лежитъ τ. Если въ промежуткѣ $t_1 < t < t_2$ (t_1 и t_2 не меньше чѣмъ θ, не больше чѣмъ T), заключающемъ τ, существуетъ рѣшеніе, то оно имѣетъ опредѣленный характеръ вслѣдствіе данныхъ начальныхъ значеній.

Получаемъ однако рѣшеніе въ промежуткѣ $\theta < t < T$. Въ самомъ дѣлѣ. Пусть обозначаетъ T_1 (θ_1) наибольшее (наименьшее) число, лежащее между θ и T (включая и эти величины) и имѣющее то свойство, что въ промежуткѣ $\tau \leqq t < T_1$ ($\tau \geqq t > \theta_1$) существуетъ рѣшеніе. (Очевидно существуютъ $T_1 > \tau$, $\theta_1 < \tau$).

Если T_1 (θ_1) отличается отъ T (θ), то между $|\eta_1| \ldots |\eta_n|$ встрѣчаются сколь угодно большія значенія для значеній t, сколь угодно мало отличающихся отъ T_1 (θ_1). Доказывается это слѣдующимъ образомъ. Если бы приведенное замѣчаніе не было справедливымъ, то всѣ $\eta_1\,\eta_2 \ldots \eta_n$ въ промежуткѣ $\tau \leqq t < T_1$ ($\tau \geqq t > \theta_1$) лежали бы между конечными предѣлами. Назначимъ тогда для величинъ η конечную область, которая распространяется дальше вышеупомянутыхъ предѣловъ. Тогда для значеній t, сколь угодно мало отличающихся отъ T_1 (θ_1), встрѣчаются значенія η, которыя лежатъ сколь угодно близко къ границѣ новой области (какъ мы доказали раньше), что противно предыдущему.

Но также нельзя допустить, что встрѣчаются сколь угодно большія величины $|\eta|$ для значеній t, сколь угодно мало отличающихся отъ T_1 (θ_1). Въ самомъ дѣлѣ. Составимъ систему

$$\frac{d\zeta_i}{dt} = o \qquad (i = 1, 2 \, . \, . \, n) \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3$$

при условіяхъ $\zeta_i(\tau) = o$, которая удовлетворяется если $\zeta_i = o$. Имѣемъ, слѣдовательно, въ промежуткѣ $\theta_1 < t < T_1$

$$\left| \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} \eta_\mu \right| < \sum_{\mu=1}^{\mu=n} G_\mu \left| \eta_\mu - \zeta_\mu \right|$$

причемъ $G_\mu > o$ обозначаютъ постоянныя. Ибо $\frac{\partial f_i}{\partial x_\mu}$ остаются между конечными предѣлами для вышеупомянутаго промежутка значеній t. Дальше имѣемъ $\left|\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_1}\right| < d$, причемъ d обозначаетъ положительную постоянную, такъ какъ и $\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_1}$ въ вышеупомянутомъ промежуткѣ значеній t остаются между конечными предѣлами. Изъ этого слѣдуетъ по § 1

$$|\eta_i| < d \left| \frac{e^{w(t-\tau)} - 1}{w} \right|$$

причемъ $|w|$ только зависитъ отъ величинъ G. Слѣдовательно величины η въ промежуткѣ $\theta_1 < t < T_1$ лежатъ между конечными предѣлами.

Итакъ заключаемъ, что

$$T_1 = T \qquad\qquad \theta_1 = \theta$$

Обозначая $\frac{\xi_i}{\Delta\alpha_1} = H_i$ $\quad (\Delta\alpha_1 \gtrless o)$, получаемъ

$$\frac{dH_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} H_\mu + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_1} + U_i \qquad (i = 1, 2 \, . \, . \, n) \quad . \; . \; . \; . \; 4$$

причемъ $U_i = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} P_{\mu i} H_\mu + Q_i$ и величины $|P_{\mu i}|$ и $|Q_i|$ можно сдѣлать сколь угодно малыми для всего промежутка $\theta < t < T$, если выбрать $|\triangle\alpha_1|$ достаточно малымъ. Это слѣдуетъ изъ того, что $\frac{\partial f_i}{\partial x_\mu}$ и $\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_1}$ равномѣрно непрерывны въ области (II), и изъ $|\xi_i| < E \, . \, |\triangle\alpha_1| \, . \, \alpha_1 \, . \, . \, . \, \alpha_k$ разсматриваются при этомъ какъ опредѣленныя числа. Такъ какъ $|H_i| < E$, то величины $|U_i|$ можно сдѣлать сколь угодно малыми для промежутка $\theta < t < T$ только тѣмъ, что $|\triangle\alpha_1|$ выбирается достаточно малымъ.

Сравнивая теперь системы 2) и 4) и замѣчая, что величины H_i исчезаютъ для $t = \tau$, равно какъ и величины η_i, что кромѣ того величины $\frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}$ лежатъ между конечными предѣлами для области (II), видимъ, по вспомогательной теоремѣ перваго § этой главы, что

$$|H_i - \eta_i| < \sigma \, . \left| \frac{e^{w(t-\tau)} - 1}{w} \right|$$

причемъ $|w|$ обозначаетъ постоянную, которую можно выбрать для области (II), и причемъ $\sigma > o$ можно сдѣлать сколь угодно малымъ, если только подчинить величину $|\triangle\alpha_1|$ условію, что она достаточно мала. Слѣдовательно $H_i - \eta_i$ стремится къ нулю, если $\triangle\alpha_1$ стремится къ нулю. Изъ этого слѣдуетъ: $\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_1}$ существуетъ для каждаго значенія t промежутка $\theta < t < T$ и равняется η_i. Конечно аналогичное имѣетъ мѣсто для $\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_2} \cdot \cdot \cdot \frac{\partial x_i}{\partial\alpha_k}$.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ также, что величины $|\eta|$ (т. е. величины $\left|\frac{\partial x}{\partial\alpha_1}\right|$) $< E$. Такіе предѣлы можно найти также для уравненій, аналогичныхъ 2), опредѣляющихъ $\frac{\partial x}{\partial\alpha_2}$ etc. Если поэтому желаемъ изслѣдовать производныя величинъ x въ промежуткѣ $\theta < t < T$ при помощи уравненій 2) и аналогичныхъ, то можно ввести предположеніе, что они только имѣютъ силу для величинъ η (и аналогичныхъ величинъ) между извѣстными предѣлами.

Для промежутка отъ $t = \theta$ до $t = T$, нѣкоторой вышеупомянутой окрестности системы $\alpha_1{}^0 \, . \, . \, \alpha_k{}^0$ и вышеупомянутой конечной области величинъ η правыя части уравненій 2) представляютъ непрерывныя функціи величинъ t, α, η. Если уравненія 2) для краткости напишемъ въ видѣ

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \varphi_i \,(t\; \eta_1\; \eta_2 \, . \, . \, \eta_n\; \alpha_1 \, . \, . \, \alpha_k) \qquad (i = 1, 2 \, . \, . \, n)$$

то имѣемъ:

$$|\varphi_i\,(t\;\eta_1 + \triangle\eta_1 \, . \, . \, \eta_n + \triangle\eta_n\;\;\alpha_1 \, . \, . \, \alpha_k) - \varphi_i\,(t\;\eta_1 \, . \, . \, \eta_n\;\alpha_1 \, . \, . \, \alpha_k)| < \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \mathfrak{H}_\mu\,|\triangle\eta_\mu|$$

причемъ величины $\mathfrak{H}_\mu > o$ представляютъ постоянныя, которыя можно выбрать для области II. Итакъ выполнены условія § 3.

Обратимъ наше вниманіе на рѣшеніе уравненій 2), которое соотвѣтствуетъ системѣ параметровъ $\alpha_1 \, . \, . \, \alpha_k$ и распространяется на промежутокъ отъ $t = \theta_2$ до $t = T_2$, заключающій τ, причемъ $\theta_2 > \theta$ $T_2 < T$ (во всемъ остальномъ можно выбрать θ_2 T_2 произвольно). Для нѣкоторой окрестности системы $\alpha_1 \, . \, . \, \alpha_k$ тогда по предыдущему существуютъ опредѣленныя рѣшенія въ томъ же самомъ промежуткѣ, которыя также остаются въ области величинъ η и представляются при помощи непрерывныхъ функцій отъ t и α. Слѣдовательно $\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_1} \cdot \cdot \cdot \frac{\partial x_i}{\partial\alpha_k}$ для промежутка отъ $t = \theta_2$ до $t = T_2$ и окрестности системы $\alpha_1{}^0 \, . \, . \, \alpha_k{}^0$ суть непрерывныя функціи отъ $t, \alpha_1 \, . \, . \, \alpha_k$.

Теперь дальше предположимъ, что въ области I существуютъ также конечныя частныя производныя второго порядка функцій f_i по величинамъ x и α и что эти производныя суть непрерывныя функціи отъ t, x, α.

Тогда функціи $\frac{\partial f_i}{\partial x}$, $\frac{\partial f_i}{\partial\alpha}$, разсматриваемыя какъ функціи отъ t и α, въ промежуткѣ отъ $t = \theta_2$ до $t = T_2$ и для окрестности системы $\alpha_1{}^0 \, . \, . \, \alpha_k{}^0$ имѣютъ конечныя и непрерывныя первыя производныя по величинамъ α, причемъ эти производныя можно образовать по обыкновеннымъ правиламъ дифференціальнаго исчисленія. Можно тогда повторить соображенія этого §, основываясь на системѣ 2) (Чтобы притти точно къ предположеніямъ нашего §, можно при этомъ назначить для величинъ γ_l, какъ выше, нѣкоторую конечную область, дальше предположить $\theta_2 < t < T_2$ и назначить для величинъ α окрестность системы $\alpha_1^0 \; . \; . \; \alpha_k^0$).

Вспомнимъ сначала то обстоятельство, что для каждой допущенной системы величинъ α существуетъ рѣшеніе уравненій 2), которое распространяется отъ $t = \theta_0$ до $t = T_0$, причемъ $\theta_0 > \theta_2$ $T_0 < T_2$, а во всемъ остальномъ суть произвольныя величины. Если слѣдовательно выбрать опредѣленную систему величинъ α, то можно найти такую окрестность этой системы, что для нея и помежутка $\theta_3 < t < T_3$ ($\theta_3 > \theta_0$ $T_3 < T_0$, а въ остальномъ произвольныя величины) $\frac{\partial \gamma_l}{\partial \alpha}$ существуютъ и представляютъ непрерывныя функціи величинъ t и α. При этомъ они получаются изъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, которыя происходятъ изъ 2) такимъ же образомъ, какъ 2) изъ 1). (θ_0 и T_0 при этомъ играютъ роль θ и T) Эти соображенія имѣютъ силу для всѣхъ α допущенной области. Также линейныя дифференціальныя уравненія для всѣхъ α имѣютъ тотъ же самый видъ, такъ что можно распространить этотъ результатъ на всю область величинъ α. Если уменьшить произвольнымъ образомъ область величинъ α относительно всѣхъ α, то слѣдуетъ безъ дальнѣйшихъ соображеній, что $\frac{\partial \gamma_l}{\partial \alpha}$ лежатъ между опредѣленными предѣлами. Если поэтому желаемъ изслѣдовать величины $\frac{\partial \gamma_l}{\partial \alpha}$ въ промежуткѣ $\theta_3 < t < T_3$ и для меньшей области величинъ α, то можно подчинить новыя линейныя дифференціальныя уравненія еще условію, что зависимыя перемѣнныя лежатъ между извѣстными конечными предѣлами. Подобныя соображенія имѣютъ силу для уравненій аналогичныхъ 2). Итакъ имѣемъ слѣдующую теорему:

Для произвольнаго промежутка отъ $t = \theta_3$ до $t = T_3$ ($\theta_2 < \theta_3 < \tau, \tau < T_3 < T_2$) и нѣкоторой окрестности системы $\alpha_1^0 \; . \; . \; \alpha_k^0$ (эта окрестность меньше чѣмъ вышеупомянутая окрестность, въ остальномъ же ее можно выбрать произвольно) существуютъ вторыя производныя величинъ x по величинамъ α; эти производныя суть непрерывныя функціи отъ t и α и лежатъ между конечными предѣлами. Онѣ получаются изъ дифференціальныхъ уравненій, которыя происходятъ изъ уравненій 2) (и аналогичныхъ) подобнымъ образомъ какъ 2) изъ 1).

Если f_i имѣютъ также еще конечныя непрерывныя производныя третьяго порядка, то аналогично предыдущему можно доказать также существованіе величинъ $\frac{\partial^3 x_i}{\partial \alpha^3}$ etc. для произвольнаго промежутка отъ $t = \theta_4$ до $t = T_4$ ($\theta_3 < \theta_4 < \tau$, $\tau < T_4 < T_3$) и нѣкоторой окрестности системы $\alpha_1^0 \; . \; . \; \alpha_k^0$, причемъ эти производныя суть конечныя и непрерывныя функціи отъ t и α. При этомъ имѣемъ въ виду то обстоятельство, что уже доказано существованіе конечныхъ и непрерывныхъ производныхъ второго порядка и т. д. Очевидно мы поэтому получаемъ слѣдующую теорему:

Пусть даны дифференціальныя уравненія

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\,(t,\ x_1\ .\ .\ x_n,\ \alpha_1\ .\ .\ \alpha_k) \qquad (i = 1,2\ .\ .\ n)$$

При этомъ правыя части въ области

$$a < t < b \quad a_1 < x_1 < b_1\ .\ .\ .\ .\ a_n < x_n < b_n \quad r_1 < \alpha_1 < s_1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ r_k < \alpha_k < s_k$$

даны какъ конечныя и непрерывныя функціи и имѣютъ въ этой области производныя по величинамъ x и α до порядка m включительно, причемъ эти производныя суть конечныя и непрерывныя функціи величинъ t, α, x. $\tau\ x_1^0\ .\ .\ x_n^0\ \alpha_1^0\ .\ .\ \alpha_k^0$ пусть представляетъ систему нашей области. Положимъ, что для нѣкотораго промежутка отъ $t = 0$ до $t = T$, заключающаго τ, существуетъ рѣшеніе, которое соотвѣтствуетъ начальнымъ значеніямъ $\tau\ x_1^0\ .\ .\ x_n^0\ \alpha_1^0\ .\ .\ \alpha_k^0$. Для того же самаго промежутка значеній t и для нѣкоторой окрестности системы $\alpha_1^0\ .\ .\ .\ \alpha_k^0$ существуютъ рѣшенія (характеризованныя вполнѣ опредѣленно начальными значеніями τ $x_1^0\ .\ .\ x_n^0\ \alpha_1\ .\ .\ \alpha_k$), элементы которыхъ можно разсматривать какъ функціи величинъ t и α. Для вышеупомянутаго промежутка значеній t и нѣкоторой окрестности системы $\alpha_1^0\ .\ .\ \alpha_k^0$ эти функціи имѣютъ производныя по величинамъ α до порядка m включительно и эти производныя суть конечныя и непрерывныя функціи величинъ t и α.

Что можно формулировать эту теорему, употребляя одинъ и тотъ же промежутокъ значеній t отъ $t = 0$ до $t = T$, слѣдуетъ изъ того обстоятельства, что, если рѣшеніе дано отъ $t = 0$ до $t = T$, то можно продолжать его дальше чѣмъ до 0 и T. Мы можемъ основываться на дополненномъ рѣшеніи и получаемъ тогда нашу теорему, замѣчая, что въ предыдущемъ можно выбрать $0_2\ T_2\ 0_3\ T_3\ .\ .\ .$ сколь угодно близко къ $0\ T$.

Пусть теперь $f_i\ (x_1\ .\ .\ x_n\ t)$ $(i = 1,2\ .\ .\ .\ n)$ суть n функцій, которыя даны какъ конечныя и непрерывныя функціи въ области

$$a < t < b \quad a_1 < x_1 < b_1 \quad .\ .\ .\ a_n < x_n < b_n \quad (I)$$

Предположимъ, что въ этой области существуютъ также производныя по $x_1\ .\ .\ x^n$ до порядка m включительно и что онѣ конечны и непрерывны $(m > 1)$.

Образуемъ теперь n функцій $f_i\ (x_1 + \alpha_1\ .\ .\ x_n + \alpha_n\ t)$. Если мы имѣемъ право назначить для величинъ α сколь угодно малую окрестность системы $o o\ .\ .\ o$, то эти функціи даны въ области (II), предѣлы которой относительно величинъ x лежатъ внутри предѣловъ (I), но могутъ быть выбираемы сколь угодно близко къ послѣднимъ. Предѣлы для t остаются тѣми же самыми. Въ этой области для величинъ t, x, α $f_i\ (x_1 + \alpha_1\ .\ .\ .\ x_n + \alpha_n\ t)$ имѣютъ производныя по величинамъ x и α до порядка m включительно. Эти производныя суть конечныя и непрерывныя функціи величинъ x, α, t.

Образуемъ теперь систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\,(x_1 + \alpha_1\ .\ .\ .\ x_n + \alpha_n\ t) \quad (i = 1,2\ .\ .\ n)\ \ .\ \ .\ \ 4$$

Для $\alpha_1 = \alpha_2 = .\ . = \alpha_n = o$ она обращается въ

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\,(x_1\ x_2\ .\ .\ x_n\ t)\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ 5$$

Обратимъ наше вниманіе на рѣшеніе системы 5), которое соотвѣтствуетъ начальнымъ значеніямъ $\tau\ x_1^0\ .\ .\ x_n^0$, лежащимъ произвольнымъ образомъ въ области I. Пусть оно дано въ промежуткѣ значеній t отъ $t = 0$ до $t = T$. Можно тогда такимъ образомъ ввести область, аналогичную I, но съ болѣе узкими предѣлами для величинъ x, что вышеупомянутое рѣшеніе всегда остается внутри ея. Если тогда назначить для величинъ α достаточно малую окрестность системы $o o\ .\ .\ o$, то можно принять эту область, насколько рѣчь идетъ о величинахъ x, за область (II) и основываться на ней въ случаѣ уравненій 4). Если теперь также подчинить рѣшенія уравненій 4) условіямъ $t = \tau\ x_1 = x_1^0\ .\ .\ .\ x_n = x_n^0$ и назначить для величинъ α нѣкоторую окрестность системы $o o\ .\ .\ o$, то по предыдущему для величинъ α этой окрестности и для промежутка отъ $t = 0$ до $t = T$ существуютъ рѣшенія системы 4), которыя имѣютъ вполнѣ опредѣленный характеръ и представляются при помощи непрерывныхъ функцій отъ t и α, имѣющихъ со своей стороны всѣ производныя по величинамъ α до порядка m включительно; эти производныя суть конечныя и непрерывныя функціи величинъ t и α.

Можно однако получить эти рѣшенія уравненій 4) еще другимъ образомъ. Очевидно $x_1 + \alpha_1\ .\ .\ .\ x_n + \alpha_n$ суть рѣшенія уравненій 5), соотвѣтствующія начальнымъ значеніямъ $\tau\ x_1^0 + \alpha_1\ .\ .\ .\ x_n^0 + \alpha_n$. Эти рѣшенія, очевидно, вполнѣ опредѣлены въ промежуткѣ отъ $t = 0$ до $t = T$. Получаемъ, слѣдовательно, слѣдующую теорему:

Пусть дана система $\frac{dx_i}{dt} = f_i\ (x_1\ .\ .\ x_n\ t)\ (i = 1,2\ .\ .\ n)$, причемъ f_i даны какъ непрерывныя функціи въ области $a < t < b\quad a_1 < x_1 < b_1\ .\ .\ .\ a_n < x_n < b_n$. Пусть онѣ имѣютъ въ этой области производныя по величинамъ x до порядка m включительно. Эти производныя также суть конечныя непрерывныя функціи величинъ x и t. Обратимъ теперь наше вниманіе на рѣшеніе, которое соотвѣтствуетъ начальнымъ значеніямъ $\tau\ x_1^0\ .\ .\ x_n^0$ и дано въ промежуткѣ отъ $t = 0$ до $t = T$. Если тогда $u_1\ .\ .\ u_n$ лежатъ въ достаточно малой окрестности системы $x_1^0\ .\ .\ x_n^0$, то въ промежуткѣ отъ $t = 0$ до $t = T$ существуютъ опредѣленныя рѣшенія, которыя соотвѣтствуютъ начальнымъ значеніямъ $\tau\ u_1\ .\ .\ u_n$. Эти рѣшенія представляются при помощи функцій отъ t и u, которыя непрерывны относительно t и u и имѣютъ производныя по величинамъ u до порядка m включительно; эти производныя также суть непрерывныя функціи величинъ t и u.

§ 5 [1]).

Для каждой системы значеній $x_1\ .\ .\ x_n$ области $x_1^2 + x_2^2 + \ .\ .\ .\ + x_n^2 < r^2$ пусть даны значенія величины φ. Мы предполагаемъ, что можно найти два числа $d > o\ \delta > o$ такого рода, что выполнено слѣдующее условіе: Если φ_1 представляетъ одно значеніе φ для мѣста $x_1'\ .\ .\ x_n'$, то для каждаго мѣста $x_1''\ .\ .\ x_n''$ существуетъ значеніе $\varphi\ \varphi_2$, для котораго $|\varphi_2 - \varphi_1| < \delta$, если только $|x_1'' - x_1'|\ .\ .\ |x_n'' - x_n'| < d$; это значеніе φ_2 представляетъ единственное значеніе φ точки $x_1''\ .\ .\ x_n''$, для котораго $|\varphi - \varphi_1| < 2\ \delta$.

---

1) Послѣдніе §§ этой главы не необходимы для слѣдующаго, какъ это видно изъ замѣчанія, поставленнаго въ концѣ главы.

Пусть теперь φ_0 обозначаетъ значеніе φ для мѣста $x_1^0 \dots x_n^0$. Образуемъ тогда функцію ψ для данной области слѣдующимъ образомъ. Чтобы опредѣлить значеніе ψ для какого нибудь мѣста $x_1 \dots x_n$, между мѣстами $x_1^0 \dots x_n^0$ и $x_1 \dots x_n$ въ данной области примемъ мѣста $x_1' \, x_2' \dots x_n' \dots \dots x_1^m \, x_2^m \dots x_n^m$ такимъ образомъ, что

$$|x_1' - x_1^0| < d \qquad |x_1'' - x_1'| < d \qquad \dots |x_1 - x_1^m| < d$$

$$— \quad — \quad — \quad — \quad — \quad —$$

$$|x_n^1 - x_n^0| < d \qquad |x_n'' - x_n'| < d \qquad \dots |x_n - x_n^m| < d$$

Исходя изъ φ_0 мы теперь такимъ образомъ опредѣляемъ для среднихъ системъ и, наконецъ, для $x_1 \dots x_n$ значенія величины φ $\varphi_1 \, \varphi_2 \dots \varphi_m \, \varphi$, что $|\varphi_1 - \varphi_0| < \delta$ $|\varphi_2 - \varphi_1| < \delta \dots$ $|\varphi - \varphi_m| < \delta$ причемъ получается опредѣленное значеніе φ. Положимъ тогда для мѣста $x_1 \dots x_n$ $\psi = \varphi$. Можно теперь доказать, что значеніе φ не зависитъ отъ выбора среднихъ системъ и что, слѣдовательно, получается однозначная функція.

Для этой цѣли замѣтимъ сначала слѣдующее: Пусть $x_1 \dots x_n$ $\xi_1 \dots \xi_n$ $\eta_1 \dots \eta_n$ суть три мѣста такого рода, что $|\xi_1 - x_1| < \frac{d}{2} \dots |\xi_n - x_n| < \frac{d}{2}$ $|\eta_1 - x_1| < \frac{d}{2} \dots$ $|\eta_n - x_n| < \frac{d}{2}$, откуда слѣдуетъ $|\eta_1 - \xi_1| < d \dots |\eta_n - \xi_n| < d$. Выберемъ одно значеніе φ соотвѣтствующее $x_1 \dots x_n$ — φ_1. Исходя изъ него, опредѣлимъ по предыдущему φ_2 для $\xi_1 \dots \xi_n$ и, также исходя изъ него, φ_3 для $\eta_1 \dots \eta_n$. Имѣемъ $|\varphi_1 - \varphi_2| < \delta$ $|\varphi_3 - \varphi_1| < \delta$ и, слѣдовательно, $|\varphi_3 - \varphi_2| < 2\,\delta$. Но φ_3 по предположенію представляетъ единственное значеніе φ для $\eta_1 \dots \eta_n$, для котораго имѣетъ мѣсто $|\varphi - \varphi_2| < 2\,\delta$; имѣемъ также $|\varphi_3 - \varphi_2| < \delta$. Слѣдовательно можно также получить φ_3 при помощи перехода отъ $\xi_1 \dots \xi_n$ къ $\eta_1 \dots \eta_n$, выбирая φ_3 по условію $|\varphi_3 - \varphi_2| < \delta$.

Изъ этого слѣдуетъ дальше: Если переходимъ отъ мѣста I съ избраннымъ значеніемъ φ къ другимъ мѣстамъ II, III ... и наконецъ вернемся къ I, то вышеупомянутое послѣдовательное опредѣленіе величинъ φ_{II} φ_{III} .... наконецъ опять дастъ начальное значеніе φ — при условіи, что координаты мѣстъ II, III ... отличаются отъ координатъ мѣста I менѣе чѣмъ на $\frac{d}{2}$. Справедливость этого замѣчанія вытекаетъ изъ предыдущаго. Ибо можно, вмѣсто того, чтобы перейти отъ I къ III черезъ II, прямо перейти отъ I къ III. Вмѣсто того, чтобы перейти къ IV черезъ III, можно прямо перейти отъ I къ IV etc. Наконецъ слѣдовательно все сводится къ переходу отъ I къ нѣкоторому мѣсту и отъ этого мѣста къ I. Итакъ мы вернемся къ начальному значенію.

Теперь обратимъ наше вниманіе на рядъ мѣстъ $x_1' \dots x_n'$ $x_1'' \dots x_n'' \dots x_1^{\mu} \dots x_n^{\mu}$ $x_1' \dots x_n'$, которыя удовлетворяютъ условіямъ $|x_1' - x_1''| < \frac{d}{4} \dots |x_n' - x_n''| < \frac{d}{4} \dots$ $\dots |x_1^{\mu-1} - x_1^{\mu}| < \frac{d}{4} \dots |x_n^{\mu-1} - x_n^{\mu}| < \frac{d}{4}$ $|x_1^{\mu} - x_1'| < \frac{d}{4} \dots |x_n^{\mu} - x_n'| < \frac{d}{4}$.

Положимъ, что для мѣста $x_1' \dots x_n'$ мы выбрали начальное значеніе φ. Какъ легко доказать, при переходѣ отъ (I) къ (II) ... къ (μ) къ (I) соблюдая вышеупомянутое правило, мы опять вернемся къ начальному значенію φ.

Въ самомъ дѣлѣ. Замѣнимъ среднія мѣста $x_1^\nu \ldots x_n^\nu$ ($\nu = 2, 3 \ldots \mu$) послѣдовательно мѣстами

$$x_1' + \frac{N - \rho}{N}(x_1^\nu - x_1'),\ x_2' + \frac{N - \rho}{N}(x_2^\nu - x_2') \ldots x_n' + \frac{N - \rho}{N}(x_n^\nu - x_n')$$

очевидно лежащими въ нашей области, причемъ N обозначаетъ опредѣленное цѣлое число > 1 и ρ послѣдовательно принимаемъ значенія $1, 2 \ldots N - 1$. При этомъ очевидно условія, выражающія, что координаты сосѣднихъ мѣстъ отличаются менѣе чѣмъ на $\frac{d}{4}$, остаются въ силѣ. Выбирая N достаточно большимъ, можно сдѣлать измѣненія, которыя происходятъ въ вышеупомянутыхъ выраженіяхъ вслѣдствіе измѣненія ρ на единицу, численно меньше чѣмъ $\frac{d}{4}$.

Пусть

$$\begin{array}{cccc} (II)' & (III)' & \ldots & (\mu)' \\ (II)'' & (III)'' & \ldots & (\mu)'' \\ - & - & - & - \\ (II)^{N-1} & (III)^{N-1} & \ldots & (\mu)^{N-1} \end{array}$$

суть новыя системы среднихъ мѣстъ. Теперь переходимъ по предыдущему отъ I къ II′ III′ . . . . . . μ' I. Вмѣсто того, чтобы перейти отъ I къ II′, можно выбрать путь I, II, II′, такъ какъ II и II′ лежатъ достаточно близко къ I. Ибо координаты мѣстъ I и II отличаются между собою меньше чѣмъ на $\frac{d}{4}$, координаты мѣстъ I и II′ также меньше чѣмъ на $\frac{d}{4}$. Вмѣсто того, чтобы перейти отъ II′ къ III′, можно выбрать путь II′ II III III′. Ибо координаты мѣстъ II′ и II отличаются менѣе чѣмъ на $\frac{d}{4}$ и то же самое имѣетъ мѣсто для координатъ мѣстъ II и III и II′ и III′. Слѣдовательно координаты мѣстъ II′ и III отличаются менѣе чѣмъ на $\frac{d}{2}$. Итакъ, чтобы дойти до III′, можно выбрать путь I II III III′, соблюдая при этомъ вышеупомянутыя правила. Такимъ же образомъ заключаемъ, что путь III IV′ равносиленъ пути III′ III IV IV′, такъ что можно замѣнить путь I II′ III′ IV′ черезъ I II III IV IV′. Наконецъ можно замѣнить I II′ III′ . . . $(\mu)'$ черезъ I II III . . . μ μ', дальше путь μ' I черезъ μ' μ I, т. е. путь I II′ III′ . . . μ' I черезъ I II III . . . μ I. Итакъ по пути I II′ III′ . . . μ' I мы приходимъ къ тому же самому результату, какъ по пути I II III . . μ I. Разсуждая такимъ же образомъ и дальше, находимъ, что путь I II′ III′ . . . μ' I и путь I II″ III″ . . . μ'' I равносильны, и слѣдовательно также, что I II″ III″ . . . μ'' I и I II III . . . μ I равносильны. Наконецъ слѣдуетъ, что равносильны I II^{N-1} III^{N-1} . . . μ^{N-1} I и I II . . . μ I. Но, такъ какъ всѣ координаты мѣстъ II^{N-1} . . . μ^{N-1} отличаются отъ координатъ мѣста I менѣе чѣмъ на $\frac{d}{4}$, то по пути I II^{N-1} III^{N-1} . . . μ^{N-1} I мы вернемся къ начальному значенію φ. Тоже самое, слѣдовательно, имѣетъ мѣсто для пути I II III . . . μ I.

Мы предположили, что координаты двухъ послѣдовательныхъ мѣстъ изъ I II III . . . μ I отличаются менѣе чѣмъ на $\frac{d}{4}$. Но можно, очевидно, вмѣсто этого ввести условіе, что онѣ отличаются менѣе чѣмъ на $\frac{d}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ. Пусть A B будутъ два изъ этихъ мѣстъ при послѣднемъ условіи. Можно тогда между A и B вставить мѣсто C, координаты котораго отличаются отъ координатъ мѣстъ A и B менѣе чѣмъ на $\frac{d}{4}$. Переходъ отъ A къ B — причемъ всегда соблюдается нѣсколько разъ упомянутое правило для измѣненія φ — очевидно равносиленъ пути A C B. Ибо $|\varphi_C - \varphi_A| < \delta$ $|\varphi_B - \varphi_C| < \delta$, слѣдовательно, $|\varphi_A - \varphi_B| < 2\delta$ и, слѣдовательно, по предположенію $|\varphi_A - \varphi_B| < \delta$. Если примѣнимъ сказанное ко всѣмъ парамъ послѣдовательныхъ мѣстъ, то справедливость нашего замѣчанія очевидна.

Наконецъ видимъ, что мы вернемся по пути I II III . . . μ I къ начальному значенію и тогда, если координаты двухъ послѣдовательныхъ мѣстъ отличаются менѣе чѣмъ на d. Можно доказать это аналогично предыдущему, вставляя между двумя послѣдовательными мѣстами A B мѣсто C, координаты котораго отличаются отъ координатъ мѣстъ A и B менѣе чѣмъ на $\frac{d}{2}$. Тогда путь ACB равносиленъ пути AB и т. д. какъ прежде.

Этимъ и доказано, что φ однозначная функція. Въ самомъ дѣлѣ. Предположимъ въ видѣ опыта, что, исходя изъ одного и того же значенія φ, мы по пути (I) (II) (III) . . . (μ) (ν) и по пути I (II') (III)' . . (μ') (ν) приходимъ къ различнымъ значеніямъ φ_ν и φ'_ν. Исходя изъ φ_ν, мы тогда по пути (ν) (μ) . . . (III) (II) (I) (II') . . . (μ') (ν) пришли бы отъ φ_ν къ φ'_ν, между тѣмъ какъ по предыдущему мы вернемся по этому пути къ начальному значенію.

Очевидно функція ψ, которая вполнѣ опредѣлена значеніемъ φ, выбраннымъ для какого нибудь мѣста, имѣетъ слѣдующее свойство: $|\psi_I - \psi_{II}| < \delta$, если координаты мѣстъ I и II, которымъ соотвѣтствуютъ ψ_I и ψ_{II}, отличаются менѣе чѣмъ на d. Это непосредственно слѣдуетъ изъ опредѣленія ψ, такъ какъ можно получить ψ_{II} посредствомъ мѣстъ, изъ которыхъ послѣднія суть I и II.

Этимъ свойствомъ впрочемъ вполнѣ опредѣляется однозначная функція, составленная изъ значеній φ, если извѣстно одно значеніе функціи для одного мѣста. Въ самомъ дѣлѣ. Допустимъ, что существуютъ двѣ такія функціи для нашей области ψ' и ψ''. Тогда приходимъ къ значеніямъ ψ' и ψ'' для одного и того же мѣста также посредствомъ общихъ среднихъ мѣстъ, которыя можно выбрать такъ, что координаты двухъ послѣдовательныхъ мѣстъ отличаются менѣе чѣмъ на d. Слѣдовательно по предыдущему $\psi' = \psi''$.

Теперь предположимъ еще, что значенія φ удовлетворяютъ слѣдующему условію. Если φ_0 обозначаетъ одно значеніе φ для одного мѣста, то къ каждому числу $\triangle > 0$ можно подобрать число $\varepsilon > 0$ ($<$ d) такого рода, что $|\varphi_0 - \varphi| < \triangle$, если φ соотвѣтствуетъ мѣсту, координаты котораго отличаются отъ координатъ вышеупомянутаго мѣста менѣе чѣмъ на ε, и если кромѣ того соблюдено условіе $|\varphi_0 - \varphi| < \delta$.

Тогда очевидно функція φ непрерывна. Кромѣ того ψ единственная однозначная и непрерывная функція, которая дана въ нашей области, составлена изъ значеній φ и для даннаго мѣста принимаетъ данное значеніе φ.

Въ самомъ дѣлѣ. Допустимъ, что кромѣ ψ существуетъ еще функція χ съ этими свойствами. χ тогда обладаетъ также равномѣрною непрерывностью. Слѣдовательно существуетъ число $D > o$ такого рода, что $| \chi_I - \chi_{II} | < \delta$, если координаты мѣстъ I и II отличаются менѣе чѣмъ на D. Можно предположить $D < d$ и тогда, очевидно, при опредѣленіи ψ можно вмѣсто d употребить D. Слѣдовательно по предыдущему χ и φ совпадаютъ.

§ 6.

Изъ только что доказанной теоремы мы теперь выведемъ нѣкоторыя слѣдствія.

Пусть будутъ ξ и η двѣ функціи отъ x и y, которыя даны въ области $x^2 + y^2 < r^2$ какъ однозначныя и непрерывныя функціи и удовлетворяютъ въ ней условію $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Тогда мы опредѣляемъ для каждаго мѣста x y нашей области значенія φ при помощи уравненій $\cos\varphi = \xi$ $\sin\varphi = \eta$. Два значенія φ для данныхъ x y поэтому отличаются на кратное 2π

Пусть $\delta > o$ $\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ обозначаетъ произвольно выбранное число. Можно тогда найти число $d > o$ такого рода, что удовлетворяется слѣдующее условіе: Если φ_0 обозначаетъ значеніе φ для $x = x_0$ $y = y_0$, то для x, y, если $| x - x_0 | < d$ $| y - y_0 | < d$, существуетъ значеніе φ, для котораго $| \varphi - \varphi_0 | < \delta$ и это единственное значеніе φ, для котораго удовлетворяется условіе $| \varphi - \varphi_0 | < 2\delta$. Въ самомъ дѣлѣ. Если x, y и $x + \triangle x$ $y + \triangle y$ суть два мѣста нашей области, ξ. η и $\xi + \triangle \xi$, $\eta + \triangle \eta$ соотвѣтствующія значенія величинъ ξ, η, наконецъ φ значеніе φ соотвѣтствующее x y, то можно обозначить каждое значеніе φ, соотвѣтствующее $x + \triangle x$ $y + \triangle y$, черезъ $\varphi + \triangle \varphi$, причемъ, какъ легко видѣть, $\triangle \varphi$ опредѣляется изъ

$$\sin \triangle \varphi = \xi \triangle \eta - \eta \triangle \xi \qquad \cos \triangle \varphi - 1 = \xi \triangle \xi + \eta \triangle \eta$$

Изъ этого вытекаетъ справедливость нашего замѣчанія.

Если, слѣдовательно, даны уравненія $\cos\varphi = \xi$ $\sin\varphi = \eta$, ξ η удовлетворяютъ вышеупомянутымъ условіямъ и для одного мѣста x_0 y_0 выбрано значеніе φ φ_0, то по предыдущему § существуетъ одна и только одна функція, составленная изъ значеній φ, непрерывная въ нашей области и принимающая для $x = x_0$ $y = y_0$ значеніе φ_0.

Пусть теперь X Y суть функціи отъ x и y, однозначныя и непрерывныя въ области $x^2 + y^2 < r^2$. Если въ этой области никогда не имѣетъ мѣста уравненіе $X = Y = 0$, то также $\xi = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$, $\eta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$ суть непрерывныя функціи въ этой области и, очевидно, удовлетворяютъ вышеупомянутымъ условіямъ для ξ и η. Слѣдовательно уравненія $\cos\varphi = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$ $\sin\varphi = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$, если выбрано одно значеніе φ для даннаго мѣста, опредѣляютъ нѣкоторую функцію φ (x, y), непрерывную во всей области. Если какимъ нибудь образомъ можно доказать, что φ такого рода не можетъ существовать, то поэтому слѣдуетъ, что уравненіе $X = Y = 0$ удовлетворено по крайней мѣрѣ для одного мѣста нашей области.

Приведемъ слѣдующій примѣръ. Положимъ, извѣстно, что для $x = r\cos u$ $y = r\sin u$ $(o < u < 2\pi)$ $\cos(pu + q) X + \sin(pu + q) Y > o$, причемъ p и q обозначаютъ данныя постоянныя и $p > 1/_2$. Изъ этого слѣдуетъ, какъ мы докажемъ, что X и Y одновременно исчезаютъ для нѣкотораго мѣста нашей области.

Въ самомъ дѣлѣ. Допустимъ въ видѣ опыта противоположное предположеніе. Тогда по предыдущему можно опредѣлить однозначную и непрерывную функцію φ, которая для $x = r$ $y = o$ принимаетъ нѣкоторое значеніе φ_0. Имѣемъ тогда для $x = r\cos u$ $y = r\sin u$ $(o < u < 2\pi)$ $\cos(pu - \varphi + q) > o$. Слѣдовательно для каждаго отдѣльнаго значенія u въ разсматриваемой области величинъ u существуетъ цѣлое число ν такого рода, что $2\nu\pi - \frac{\pi}{2} < pu - \varphi + q < \frac{\pi}{2} + 2\nu\pi$.

Выберемъ теперь рядъ значеній u $o, u_1\ u_2\ u_3 \ldots u_m$. Введя условіе, что два послѣдовательныя значенія u отличаются другъ отъ друга менѣе чѣмъ на постоянную величину $e > o$, можно при помощи выбора достаточно малаго e достигнуть, что послѣдовательныя значенія $pu - \varphi + q$, соотвѣтствующія выбраннымъ значеніямъ u, отличаются менѣе чѣмъ на $E > o$, причемъ E выбрано произвольно. Если $E < \pi$, то ν имѣетъ одно и то-же значеніе для всѣхъ значеній u ряда $o, u_1\ u_2 \ldots u_m$. Можно выбрать рядъ $o, u_1 \ldots u_m$ такимъ образомъ, что u_m лежитъ сколь угодно близко къ значенію 2π, можно, слѣдовательно, выбрать u_m такъ, что $pu_m - \varphi_m + q$ лежитъ сколь угодно близко къ значенію $2p\pi - \varphi_0 + q$ (φ_m соотвѣтствуетъ значенію u_m). Такъ какъ и $pu_m - \varphi_m + q$ и $-\varphi_0 + q$ лежатъ между $2\nu\pi - \frac{\pi}{2}$ и $2\nu\pi + \frac{\pi}{2}$, то они отличаются другъ отъ друга менѣе чѣмъ на π. Слѣдовательно $2p\pi - \varphi_0 + q$ и $-\varphi_0 + q$ не могутъ отличаться другъ отъ друга болѣе чѣмъ на π. Слѣдовательно $p < 1/_2$, что противно условію.

Изъ этого примѣра вытекаетъ доказательство алгебраической теоремы, что уравненіе $z^n + az^{n-1} + bz^{n-2} \ldots + c = o$ (если допускаемъ мнимыя величины) имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень. Ибо, если положить $z = \rho(\cos u + i\sin u) = x + iy$ $o < u < 2\pi$ то, если $\rho > o$, для вещественной части лѣвой части имѣемъ $\rho^n [\cos nu + R] = X$, для мнимой части $\rho^n [\sin nu + S] = Y$, причемъ R и S можно сдѣлать численно сколь угодно малыми при помощи выбора достаточно большого ρ. Для достаточно большаго ρ слѣдовательно $|R \cos nu + S \sin nu| < 1$. Тогда имѣемъ $\cos nu\ X + \sin nu\ Y = \rho^n [1 + P]$, причемъ $|P| < 1$. Итакъ условія нашего примѣра выполнены и существуетъ мѣсто, для котораго $X = Y = o$, такъ что наша теорема доказана.

Можно было бы формулировать теорему, на которой мы основываемся, также при помощи выраженія $\lg(X + iY)$, причемъ она представляетъ аналогію съ извѣстною теоремою изъ теоріи функцій.

Большій интересъ для насъ имѣетъ частный случай нашего примѣра, т. е. тотъ случай, когда $q = o$ $p = 1$, или другими словами случай, когда $xX + yY$ для значеній области $x^2 + y^2 = r^2$

больше нуля. Изъ этого опять слѣдуетъ существованіе мѣста области $x^2 + y^2 < r^2$, для котораго $X = Y = o$. Получаемъ, слѣдовательно, слѣдующую теорему:

Не могутъ существовать двѣ функціи ξ, η отъ x и y, непрерывныя въ области $x^2 + y^2 < r^2$, удовлетворяющія условію $\xi^2 + \eta^2 = r^2$ и удовлетворяющія для x, y области $x^2 + y^2 = r^2$ уравненіямъ $\xi = x$ $\eta = y$.

Въ самомъ дѣлѣ. Въ противномъ случаѣ для области $x^2 + y^2 = r^2$ $x\xi + y\eta$ равнялось бы r^2 и, слѣдовательно, было бы положительною величиною. Слѣдовательно существовало бы мѣсто въ области $x^2 + y^2 < r^2$, гдѣ $\xi = \eta = 0$, что противно условію $\xi^2 + \eta^2 = r^2$.

§ 7.

Примѣнимъ теперь послѣднюю теорему къ теоріи дифференціальныхъ уравненій. Пусть даны уравненія

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$$

При этомъ f_i суть непрерывныя функціи величинъ x, t въ области, которая опредѣлена при помощи условій вида

$$\left.\begin{array}{l} t > c \qquad a_\nu < x_\nu < b_\nu \quad \text{или} \quad x_\nu > a_\nu \quad \text{или} \quad x_\nu < b_\nu \\ \qquad\qquad \text{или} \quad x_\nu \ \text{произвольная величина} \end{array}\right\} \ldots \text{I.}$$

Кромѣ того для каждой области $c_1 < t < c_2$ $\alpha_i < x_i < \beta_i$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ пусть существуютъ положительныя числа A такого рода, что

$$|\, f_i\,(x_1' \ldots x_n'\ t) - f_i\,(x_1'' \ldots x_n''\ t)\,| < \Sigma A_\mu\, |\, x_\mu'' - x_\mu'\,|$$

При этомъ c_1 c_2 α_i β_i суть величины, лежащія въ области I.

Если теперь τ $x_i^{(0)}$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ обозначаютъ значенія изъ области I, то они — если ихъ принять за начальныя значенія — опредѣляютъ рѣшеніе, которое или распространяется на всю область $\tau < t$, или на нѣкоторую область $\tau < t < T$ и не дальше. Въ послѣднемъ случаѣ рѣшеніе для значеній t, сколь угодно близкихъ къ T, должно принимать между прочимъ положенія, сколь угодно близкія къ границѣ нашей области, или нѣкоторые x должны принимать между прочимъ численно сколь угодно большія значенія. Это непосредственно вытекаетъ изъ первыхъ §§ нашей главы.

Теперь наше вниманіе мы преимущественно обратимъ на двѣ перемѣнныя и поэтому введемъ новое обозначеніе. Представимъ систему нашихъ дифференціальныхъ уравненій въ видѣ

$$\frac{dx}{dt} = f \qquad \frac{dy}{dt} = \varphi \qquad \frac{dx_i}{dt} = f_i \qquad (i = 1, 2 \ldots m).$$

Предположимъ теперь, что τ $x_1^0 \ldots x_m^0$ суть начальныя значенія для t $x_1 \ldots x_m$, причемъ τ $x_1^0 \ldots x_m^0$ обозначаютъ опредѣленныя числа. Кромѣ того предположимъ, что область $x^2 + y^2 < r^2$ $(r > o)$, на сколько рѣчь идетъ о величинахъ x y, лежитъ въ области I и что дифференціальныя уравненія допускаютъ слѣдующіе выводы:

1) Если дополнимъ начальныя значенія при помощи условій $x = x^0$ $y = y^0$ для $t = \tau$, причемъ x^0 y^0 принадлежатъ къ области $x^2 + y^2 < r^2$, если соотвѣтствующее

рѣшеніе распространяется между прочимъ на значенія t, удовлетворяющія условію вида $T \geqq t \geqq \tau$ и если для $t = T$ имѣемъ $x^2 + y^2 = r^2$, то для $t = T$ $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) > 0$.

2) Если рѣшеніе, соотвѣтствующее начальнымъ значеніямъ τ x^0 y^0 x_i^0, распространяется на промежутокъ $\tau < t < \theta$ и не дальше, то не всегда во всемъ промежуткѣ $x^2 + y^2 < r^2$*).

Докажемъ, что тогда къ даннымъ τ x_i^0 можно выбрать x^0 y^0 изъ области $x^2 + y^2 < r^2$ такимъ образомъ, что рѣшеніе распространяется на всю область $t \geqq \tau$ и что всегда $x^2 + y^2 < r^2$.

Чтобы это доказать, мы допустимъ въ видѣ опыта, что такой выборъ невозможенъ.

Пусть x^0 y^0 обозначаютъ какое нибудь мѣсто области $x^2 + y^2 < r^2$. Если рѣшеніе, соотвѣтствующее τ x^0 y^0 x_i^0, не распространяется на весь промежутокъ значеній t, но на промежутокъ $\tau \leqq t < \theta$ и не дальше, то по предположенію въ этомъ промежуткѣ не можетъ быть всегда $x^2 + y^2 < r^2$. Слѣдовательно въ промежуткѣ существуютъ значенія t, для которыхъ $x^2 + y^2 = r^2$. Между этими значеніями t, какъ легко видѣть, существуетъ наименьшее t_0. Мы приходимъ къ тому же самому результату, если рѣшеніе распространяется на весь промежутокъ $t \geqq \tau$, но не всегда $x^2 + y^2 < r^2$. Тогда имѣемъ по предположенію для $t = t_0$ $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) > 0$.

Значенія x y для $t = t_0$ обозначимъ черезъ ξ η, они удовлетворяютъ уравненію $\xi^2 + \eta^2 = r^2$. Каждому мѣсту x_0 y_0 области $x^2 + y^2 < r^2$ такимъ образомъ соотвѣтствуетъ опредѣленная пара значеній ξ η, удовлетворяющая условію $\xi^2 + \eta^2 = r^2$. Значеніямъ области $x^2 + y^2 = r^2$ пусть соотвѣтствуютъ ξ η по уравненіямъ $\xi = x$ $\eta = y$. Тогда ξ и η суть функціи отъ x и y для всѣхъ x y области $x^2 + y^2 < r^2$ и удовлетворяютъ уравненію $\xi^2 + \eta^2 = r^2$. Докажемъ теперь непрерывность этихъ функцій.

Пусть x_0 y_0 представляютъ опредѣленную пару значеній области $x^2 + y^2 < r^2$ и пусть ξ_0 η_0 обозначаютъ соотвѣтствующія ξ η. Обратимъ тогда наше вниманіе на рѣшеніе, соотвѣтствующее x_0 y_0. Сначала займемся случаемъ $x_0^2 + y_0^2 < r^2$, причемъ t_0 пусть обозначаетъ выше характеризованное значеніе t для x_0 y_0. Такъ какъ для $t = t_0$ $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) > 0$ и $x^2 + y^2 = r^2$, то можно опредѣлить $T_1 > t_0$ такимъ образомъ, что рѣшеніе распространяется также отъ $t = \tau$ до $t = T_1$ и $x^2 + y^2 > r^2$ для $t = T_1$. T_1 можно при этомъ выбрать сколь угодно близко къ t_0. Для какого нибудь t_1, удовлетворяю-

*) Условіе 2) выполнено, напримѣръ, для всѣхъ x_i^0 области $\sum_{i=1}^{i=m} x_i^2 \leqq R^2$ $R > 0$, если она лежитъ внутри I, на сколько рѣчь идетъ о величинахъ x_i, и если дифференціальныя уравненія допускаютъ слѣдующее заключеніе: Рѣшеніе, соотвѣтствующее начальнымъ значеніямъ t' x' y' x_i', причемъ $x'^2 + y'^2 < r^2$ $\sum_{i=1}^{i=m} x_i'^2 = R^2$, имѣетъ то свойство, что для $t = t'$ $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=m} x_i'^2 < 0$.

щаго условію $\tau < t_1 < t_0$, имѣемъ $x^2 + y^2 < r^2$. Если выбрать T_1 и t_1 достаточно близко къ t_0, то $x\ y$ въ промежуткѣ $t_1 < t < T_1$ отличаются отъ $\xi_0\ \eta_0$ сколь угодно мало.

Изъ § 1 этой главы теперь слѣдуетъ, что можно найти для $x_0\ y_0$ въ области $x^2 + y^2 < r^2$ окрестность такого рода, что рѣшенія, соотвѣтствующія ея мѣстамъ, распространяются также на промежутокъ $\tau < t < T_1$ и лежатъ въ немъ сколь угодно близко къ разсматриваемому опредѣленному рѣшенію, такъ близко въ особенности, что въ промежуткѣ $\tau < t < t_1$ для всѣхъ этихъ рѣшеній имѣетъ мѣсто $x^2 + y^2 < r^2$ и для $t = T_1$ $x^2 + y^2 > r^2$. Тогда для этихъ рѣшеній величина, соотвѣтствующая t_0, лежитъ между t_1 и T_1. Но такъ какъ можно достигнуть, что въ промежуткѣ $t_1 < t < T_1$ вышеупомянутыя рѣшенія отличаются сколь угодно мало отъ разсматриваемаго опредѣленнаго рѣшенія, и съ другой стороны въ этомъ промежуткѣ по предыдущему можно предполагать координаты опредѣленнаго рѣшенія сколь угодно близкими къ $\xi_0\ \eta_0$, то $\xi\ \eta$, соотвѣтствующія вышеупомянутымъ рѣшеніямъ, лежатъ сколь угодно близко къ $\xi_0\ \eta_0$, если только мы выбрали разсматриваемую окрестность для $x_0\ y_0$ достаточно малою.

Если мы во вторыхъ имѣемъ $x_0^2 + y_0^2 = r^2$, то $\xi_0 = x_0\ \eta_0 = y_0$. Какъ прежде можно тогда опредѣлить $T_1 > \tau$ такимъ образомъ, что опредѣленное рѣшеніе распространяется также на $\tau < t < T_1$, причемъ для $t = T_1$ $x^2 + y^2 > r^2$. При этомъ можно выбрать T_1 сколь угодно близко къ τ и этимъ достигнуть, что $x\ y$ въ вышеупомянутомъ промежуткѣ лежатъ сколь угодно близко къ $\xi_0\ \eta_0$. Если теперь выберемъ достаточно малую окрестность для $x_0\ y_0$, то для ея мѣстъ, лежащихъ въ области $x^2 + y^2 \leqq r^2$, (только эти разсматриваются здѣсь), будемъ имѣть слѣдующее: Можно достигнуть того, что $\xi\ \eta$, соотвѣтствующія мѣстамъ, для которыхъ $x^2 + y^2 = r^2$, лежатъ сколь угодно близко къ $\xi_0\ \eta_0$. Тоже самое имѣетъ мѣсто относительно тѣхъ $\xi\ \eta$, которыя соотвѣтствуютъ мѣстамъ, гдѣ $x^2 + y^2 < r^2$ (ибо можно достигнуть, что соотвѣтствующія рѣшенія въ промежуткѣ $\tau < t < T_1$ лежатъ сколь угодно близко къ опредѣленному рѣшенію).

Итакъ доказана непрерывность функцій ξ и η.

Но мы доказали въ предыдущемъ §, что не существуетъ никакихъ функцій $\xi\ \eta$ выше упомянутаго характера. Слѣдовательно нельзя допустить предположенія, сдѣланнаго нами въ видѣ опыта, и наша теорема доказана.

Въ выше изложенномъ двѣ перемѣнныя играли особенную роль. Но соотвѣтствующее безъ сомнѣнія имѣетъ мѣсто также для произвольнаго числа перемѣнныхъ. Остается при этомъ только доказать теорему, аналогичную теоремѣ предыдущаго § для двухъ перемѣнныхъ, для большаго числа перемѣнныхъ, т. е. напримѣръ теорему:

Если ξ_i ($i = 1 \ldots n$) обозначаютъ n непрерывныхъ функцій отъ $x_1 \ldots x_n$ въ области $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqq r^2$ и удовлетворяютъ уравненію $\sum\limits_{i=1}^{i=n} \xi^2_i = r^2$, то не для всѣхъ x области $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2$ имѣютъ мѣсто уравненія $\xi_i = x_i$ ($i = 1,2 \ldots n$).

Мы могли бы очень просто доказать эту теорему для трехъ перемѣнныхъ, еслибы допускали при доказательствѣ соображенія геометрическаго характера. Въ такомъ случаѣ для нашей цѣли было бы достаточно напримѣръ слѣдующее замѣчаніе: Представимъ себѣ шаръ, покрытый сѣтью, лежащею на шарѣ безъ складокъ. Петли пусть будутъ перемѣнными, причемъ ихъ можно предполагать сколь угодно малыми. Тогда нельзя удалить шаръ изъ сѣти только при помощи сдвиганія и складыванія сѣти на шарѣ. Но доказательство, дѣйствительно полное, строгое и чисто аналитическое, можетъ быть, не имѣетъ простаго вида. Поэтому я въ своей работѣ не воспользовался соображеніями послѣднихъ §§, но выбралъ другой путь, по которому также можно достигнуть нашей цѣли.

Глава II.

§ 8.

Мы основываемся на слѣдующей системѣ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n + \xi_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

$$(i = 1,2 \ldots n)$$

При этомъ ξ_i пусть даны какъ функціи отъ t и x для x области $\alpha_i < x_i < \beta_i$, заключающей мѣсто o . . o, и для t области $t > \tau$ (или $t < \tau$ или „t произвольная величина“), причемъ τ обозначаетъ постоянную. Для вышеупомянутыхъ значеній x t пусть существуютъ $\frac{\partial \xi_i}{\partial x}$ и, какъ и ξ_i, пусть будутъ непрерывными функціями отъ x и t. Кромѣ того предположимъ: Можно опредѣлить область $-\gamma < x_i < \gamma$ $(\gamma > o)$ [$x_i = \pm \gamma$ лежатъ въ первой области] такого рода, что $\left| \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \right|$ для значеній этой новой области и для всѣхъ допущенныхъ значеній t, $\left| \frac{\xi_i}{\gamma} \right|$ для $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = o$ и для всѣхъ допущенныхъ t имѣютъ нѣкоторую степень малости, которую мы можемъ выбрать какъ намъ угодно, но только такъ, что она зависитъ только отъ величинъ a*). Послѣднія пусть будутъ постоянныя, удовлетворяющія только условію, что уравненіе

$$\begin{vmatrix} a_{11} - u & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - u & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - u \end{vmatrix} = o$$

не имѣетъ корней, вещественныя части которыхъ равняются нулю.

---

*) Въ послѣдствіи встрѣчается рядъ величинъ, относительно которыхъ мы говоримъ, что онѣ зависятъ только отъ величинъ a. Это значитъ, что къ каждой таблицѣ величинъ a можно подобрать соотвѣтствующую систему выше упомянутыхъ величинъ.

По нашимъ предположеніямъ мы имѣемъ право ввести впослѣдствіи конечное количество неравенствъ вида $\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| < \Delta_1$ $\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| < \Delta_2$ etc. и $\left| \frac{\xi}{\gamma} \right|$ (для $x_1 = \ldots = x_n = o$) менѣе чѣмъ D_1, D_2 etc, причемъ Δ_1 Δ_2 etc. D_1 D_2 etc. суть положительныя числа, зависящія только отъ величинъ a.

Воспользуемся теперь теоремою[1]) изъ теоріи линейныхъ подстановокъ. Пусть имѣемъ

$$x_i' = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} a_{i\mu}\, x_\mu \qquad (i = 1\,.\,.\,n)$$

причемъ x_μ считаются вполнѣ произвольными. Введемъ

$$y_i' = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \beta_{i\mu}\, x_i' \qquad\qquad y_i = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \beta_{i\mu}\, x_i$$

причемъ опредѣлитель $\left|\beta_{i\mu}\right| \lessgtr o$. Тогда слѣдуютъ уравненія вида $y_i' =$ линейной функціи отъ y. Можно выбрать β вещественными величинами такимъ образомъ, что эти послѣднія уравненія распадаются на системы вида

I.

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda z_1 \\ z_2' &= z_1 + \lambda z_2 \\ z_3' &= z_2 + \lambda z_3 \\ &\text{— — — —} \\ z_\nu' &= z_{\nu-1} + \lambda z_\nu \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} u_1' &= gu_1 - hv_1 & \qquad v_1' &= gv_1 + hu_1 \\ u_2' &= u_1 + gu_2 - hv_2 & v_2' &= v_1 + gv_2 + hu_2 \\ u_3' &= u_2 + gu_3 - hv_3 & v_3' &= v_2 + gv_3 + hu_3 \\ &\text{— — — —} & &\text{— — — —} \\ u_\rho' &= u_{\rho-1} + gu_\rho - hv_\rho & v_\rho' &= v_{\rho-1} + gv_\rho + hu_\rho \end{aligned}$$

При этомъ λ есть — можетъ быть существующій — вещественный корень уравненія

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - u & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - u & \dots & a_{2n} \\ — & — & — & — \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - u \end{vmatrix} = 0$$

$g \pm hi$ представляетъ — можетъ быть существующую — пару сопряженныхъ корней уравненія $D = o$. Число уравненій, соотвѣтствующихъ λ и распадающихся слѣдовательно на системы вида I, равняется кратности корня λ. Число уравненій, соотвѣтствующихъ $g \pm hi$ и распадающихся слѣдовательно на системы II, равняется кратности корня $g + hi$ (или что тоже самое $g - hi$), умноженной на два. z' u' v' суть величины y', z u v величины y.

Если примѣнимъ эту теорему къ нашему случаю, то мы найдемъ слѣдующее:

Введемъ обозначеніе $y_i = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \beta_{i\mu}\, x_i$. Можно тогда выбрать вещественныя величины

1) Эта теорема примѣняется въ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. См. Jordan C. R. 1871 II Sur la résolution des équations etc., Weierstrass Werke Bd. II Bemerkungen zur Integration etc., Ляпуновъ. Объ устойчивости движенія, Харьковъ 1892 стр. 61.

$\beta_{i\mu}$ такимъ образомъ, что опредѣлитель $\beta_{i\mu} \gtrless o$ и что изъ уравненій 1) вытекаютъ уравненія, распадающіяся на слѣдующія системы:

I.

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda z_1 + \zeta_1$$

$$\frac{dz_2}{dt} = z_1 + \lambda z_2 + \zeta_2$$

— — — — —

$$\frac{dz_\nu}{dt} = z_{\nu-1} + \lambda z_\nu + \zeta_\nu$$

II.

$$\frac{du_1}{dt} = gu_1 - hv_1 + \eta_1 \qquad \frac{dv_1}{dt} = gv_1 + hu_1 + \vartheta_1$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_1 + gu_2 - hv_2 + \eta_2 \qquad \frac{dv_2}{dt} = v_1 + gv_2 + hu_2 + \vartheta_2$$

— — — — — — — — — — —

$$\frac{du_\rho}{dt} = u_{\rho-1} + gu_\rho - hv_\rho + \eta_\rho \qquad \frac{dv_\rho}{dt} = v_{\rho-1} + gv_\rho + hu_\rho + \vartheta_\rho$$

При этомъ относительно λ g h и числа уравненій имѣютъ мѣсто замѣчанія аналогичныя прежнимъ. ζ η ϑ суть линейныя однородныя выраженія относительно ξ съ коэффиціентами, которыя только зависятъ отъ величинъ a.

Образуемъ теперь для каждой системы I величину $G = \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} \lambda^{2\alpha-1} z^2_\alpha$. Получаемъ

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} \lambda^{2\alpha-1} z_\alpha^2 = 2\lambda^2 z_1^2 + \sum_{\alpha=2}^{\alpha=\nu} 2\lambda^{2\alpha-1} z_\alpha \left[z_{\alpha-1} + \lambda z_\alpha\right] + Z$$

гдѣ Z обозначаетъ билинейную форму величинъ z и ζ, причемъ коэффиціенты зависятъ только отъ величинъ a. Слѣдовательно

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} \lambda^{2\alpha-1} z_\alpha^2 = \lambda^2 z_1^2 + \lambda^{2\nu} z_\nu^2 + \sum_{\alpha=2}^{\alpha=\nu} (\lambda^\alpha z_\alpha + \lambda^{\alpha-1} z_{\alpha-1})^2 + Z \quad \ldots\ldots\ldots 2$$

Для каждой системы II мы образуемъ величину

$$H = \sum_{\beta=1}^{\beta=\rho} g^{2\beta-1} \left(u_\beta^2 + v_\beta^2\right).$$

Получаемъ

$$\frac{d}{dt}\sum_{\beta=1}^{\beta=\rho} g^{2\beta-1} (u_\beta^2 + v_\beta^2) = 2g\left[u_1 (g u_1 - h v_1) + v_1 (g v_1 + h u_1)\right] +$$

$$+ \sum_{\beta=2}^{\beta=\rho} 2 g^{2\beta-1} \left[u_\beta (u_{\beta-1} + g u_\beta - h v_\beta) + v_\beta (v_{\beta-1} + g v_\beta + h u_\beta)\right] + \mathbf{H}$$

гдѣ **H** обозначаетъ билинейную форму величинъ u, v съ одной стороны и величинъ η, ϑ съ другой стороны, причемъ коэффиціенты зависятъ только отъ величинъ a. Слѣдовательно

$$\frac{d}{dt}\sum_{\beta=1}^{\beta=\rho} g^{2\beta-1}(u_\beta^2 + v_\beta^2) = g^2(u_1^2 + v_1^2) + g^{2\rho}(u_\rho^2 + v_\rho^2) +$$

$$+ \sum_{\beta=2}^{\beta=\rho}[(g^\beta u_\beta + g^{\beta-1} u_{\beta-1})^2 + (g^\beta v_\beta + g^{\beta-1} v_{\beta-1})^2] + \mathbf{H} \ldots\ldots 3$$

Раздѣлимъ теперь величины y на двѣ группы: $p_1\, p_2 \ldots p_k$ пусть будутъ тѣ изъ величинъ y, которыя соотвѣтствуютъ корнямъ уравненія $D = o$ съ положительною вещественною частью, а $q_1\, q_2 \ldots q_l$ пусть соотвѣтствуютъ корнямъ съ отрицательною вещественною частью. [Конечно, можетъ случиться, что мы не имѣемъ величинъ одной изъ двухъ группъ]. Суммы G и H, образованныя для нашихъ системъ, сложимъ для каждой изъ двухъ группъ. Получаемъ

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=k} d_\mu p_\mu^2 \qquad\qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=l} f_\nu q_\nu^2$$

причемъ величины $d > o$, величины $f < o$ и зависятъ только отъ величинъ a. Очевидно тогда слѣдуетъ изъ предыдущаго:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{\mu=k} d_\mu p_\mu^2 &> P_1 \sum_{\mu=1}^{\mu=k} p_\mu^2 \quad P_2 \sqrt{\sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2}\,.\ \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} \xi_i^2} \\ \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{\nu=l} f_\nu q_\nu^2 &> Q_1 \sum_{\nu=1}^{\nu=l} q_\nu^2 - Q_2 \sqrt{\sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2}\,.\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} \end{aligned}\right\} \ldots 4$$

причемъ P и Q суть числа, зависящія только отъ величинъ a, и кромѣ того имѣетъ мѣсто $P_1 > o$ $Q_1 > o$. Мы находимъ соотношенія 4) изъ уравненій 2) и 3), замѣтивъ, что правая часть уравненій 2) или 3), если не обратить вниманія на Z или **H**, представляетъ опредѣленно — положительную квадратичную форму относительно $z_1 \ldots z_\nu$ или $u_1 \ldots u_\rho\, v_1 \ldots v_\rho$.

§ 9.

Между обѣими системами дифференціальныхъ уравненій для величинъ x и y, очевидно, существуетъ простая зависимость. Если область величинъ x опредѣлена при помощи неравенствъ вида $\alpha_i < x_i < \beta_i$, то область величинъ y опредѣляется при помощи тѣхъ же самыхъ неравенствъ, если вмѣсто x подставить соотвѣтствующія линейныя функціи отъ y. Изъ рѣшенія системы для x получается рѣшеніе системы для y для того же самаго промежутка величины t и наоборотъ. Между начальными значеніями существуютъ тѣ же самыя зависимости, что между x и y.

Къ системѣ для x относится рядъ теоремъ въ предыдущей главѣ, при помощи которыхъ мы можемъ доказать соотвѣтствующія теоремы относительно системы для y. Послѣднія мы могли бы доказать также прямо аналогично предыдущему. Если напримѣръ рѣшеніе системы для y распространяется на значенія отъ $t = t_0$ до $t = T$ (исключая T) и не дальше, причемъ T принадлежитъ къ допущеннымъ значеніямъ t, то рѣшеніе для значеній t сколь угодно близкихъ къ T должно принимать между прочимъ положенія сколь угодно близкія къ границѣ.

Если ξ имѣютъ производныя по x до порядка M и если послѣднія непрерывны относительно t и x для всѣхъ допущенныхъ значеній, то x имѣютъ производныя до порядка M по начальнымъ значеніямъ. Онѣ непрерывны относительно начальныхъ значеній (въ нѣкоторой области, заключающей частную систему начальныхъ значеній) и относительно t и удовлетворяютъ извѣстнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, которыя получаются, если образуемъ производныя обѣихъ частей данныхъ дифференціальныхъ уравненій по начальнымъ значеніямъ. Отсюда слѣдуетъ, что вышеупомянутыя производныя отъ x можно кромѣ того еще дифференцировать по t, причемъ получаются непрерывныя функціи отъ начальныхъ значеній и t. Слѣдовательно, очевидно, также y имѣютъ производныя по начальнымъ значеніямъ до порядка M. Онѣ непрерывны относительно начальныхъ значеній (въ области, заключающей систему начальныхъ значеній) и t. Можно ихъ еще разъ дифференцировать по t, причемъ получаются непрерывныя функціи. Отсюда также слѣдуетъ, что производныя величинъ y по начальнымъ значеніямъ удовлетворяютъ также извѣстнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, которыя получаются при помощи данныхъ дифференціальныхъ уравненій. Ибо порядокъ дифференцированія величинъ y по начальнымъ значеніямъ и t можно измѣнить вслѣдствіе непрерывности соотвѣтствующихъ функцій.

Введемъ теперь [1]) слѣдующую область величинъ y

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=k} d_\mu\, p_\mu^2 < \delta \,.\, \gamma^2 \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=l} f_\nu \,.\, q_\nu^2 > -\delta \,.\, \gamma^2 \qquad (\delta > 0) \;.\;.\;.\;.\;.\; 1$$

При этомъ выберемъ δ такимъ образомъ, что это число зависитъ только отъ величинъ a и имѣетъ такое малое значеніе, что p, q области 1) лежатъ внутри той области, которая опредѣлена косвеннымъ образомъ для величинъ y при помощи неравенствъ $-\gamma < x_i < \gamma$.

Пусть теперь $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 > 0$ обозначаютъ два числа[2]), зависящія только отъ величинъ a и удовлетворяющія условіямъ

$$|P_2| \,.\, n\,(\triangle_2 + \triangle_1 \,.\, n) < \sqrt{\frac{\delta}{d_0}} \,.\, P_1 \qquad |Q_2|\, n\,(\triangle_2 + \triangle_1\, n) < \sqrt{\frac{\delta}{|f_0|}} \,.\, Q_1 \;.\;.\;.\; 2$$

Какое значеніе имѣютъ при этомъ $P_1\, P_2\, Q_1\, Q_2$, видно изъ § 8 ур. 4. d_0 и $|f_0|$ суть наибольшія значенія величинъ d_μ и $|f_\nu|$.

Согласно съ нашими предположеніями мы предполагаемъ, что въ области $-\gamma < x_i < \gamma$ имѣютъ мѣсто неравенства $\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right| < \triangle_1$ $\left|\frac{\xi_0}{\gamma}\right| < \triangle_2$ при чемъ ξ_0 указываетъ на величину ξ для $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Имѣемъ тогда для x области $-\gamma \angle x_i \angle \gamma$

$$\xi_i = \xi_{i0} + \sum_{\mu=1}^{n} \left\{\frac{\partial\xi_i}{\partial x_\mu}\right\} x_\mu \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

---

1) Предположимъ сначала, что обѣ группы p, q существуютъ. Болѣе простой случай, когда имѣемъ только одну группу, разсматривается впослѣдствіи.

2) Здѣсь употребляемыя обозначенія независимы отъ тѣхъ, которыми мы воспользовались въ введеніи, и также отъ тѣхъ, которыя встрѣчаются впослѣдствіи.

Въ этой формулѣ $\left\{\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\mu}\right\}$ обозначаетъ значеніе $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\mu}$ для нѣкоторой системы величинъ x изъ области $-\gamma < x_i < \gamma$. Отсюда слѣдуетъ

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} < \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| < n \triangle_2 \cdot \gamma + n^2 \cdot \triangle_1 \gamma$$

и при помощи 2)

$$P_2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} < \sqrt{\frac{\delta}{d_0}} \cdot P_1 \cdot \gamma \qquad |Q_2| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2} < \sqrt{\frac{\delta}{|f_0|}} \cdot Q_1 \cdot \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

Обратимъ теперь во первыхъ наше вниманіе на случай, когда координаты p, q рѣшенія удовлетворяютъ для нѣкотораго значенія t условіямъ

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu^2 = \delta \cdot \gamma^2 \qquad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, q_\nu^2 > -\delta \cdot \gamma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4$$

Первая изъ зависимостей 4) § 8 тогда при помощи 3) и неравенства $\sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2 > \frac{\delta}{d_0} \cdot \gamma^2$, вытекающаго изъ 4), даетъ

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu^2 > \sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2 \left[P_1 - \frac{|P_2| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2}} \right] > \sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2 \left[P_1 - \frac{\sqrt{\frac{\delta}{d_0}} \cdot P_1 \cdot \gamma}{\sqrt{\frac{\delta}{d_0}} \cdot \gamma} \right]$$

Слѣдовательно мы имѣемъ въ случаѣ 4)

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \cdot p_\mu^2 > o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5$$

Во вторыхъ мы обратимъ наше вниманіе на случай, когда для нѣкотораго значенія t имѣютъ мѣсто зависимости

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu^2 < \delta \cdot \gamma^2 \qquad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \cdot q_\nu^2 = -\delta \cdot \gamma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6$$

Имѣемъ тогда вслѣдствіе втораго неравенства 4) § 8 при помощи 3) и неравенства $\sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2 > \frac{\delta}{|f_0|} \cdot \gamma^2$, вытекающаго изъ 6,

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \cdot q_\nu^2 > \sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2 \left[Q_1 - \frac{|Q_2| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}}{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2}} \right] > \sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2 \left[Q_1 - \frac{\sqrt{\frac{\delta}{|f_0|}} \cdot Q_1 \cdot \gamma}{\sqrt{\frac{\delta}{|f_0|}} \cdot \gamma} \right]$$

Итакъ въ случаѣ 6)

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \cdot q_\nu^2 > o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7$$

§ 10.

Предположимъ, что данный промежутокъ значеній t или содержитъ всѣ вещественныя значенія t или опредѣляется при помощи неравенства $t > \tau$, и обратимъ наше вниманіе на область

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=k} d_\mu p_\mu^2 < \delta\gamma^2 \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{1} f_\nu q_\nu^2 > -\delta\gamma^2 \quad . \; . \; . \; . \; 1)$$

характеризованную въ предыдущемъ §. Изъ предложеній предыдущаго §, которыя выражаются при помощи 4) 5) 6) 7), вытекаетъ тогда слѣдующее: Если координаты p, q рѣшенія для нѣкотораго значенія t, напримѣръ $t = \tau_1$, лежатъ въ области 1), то можно найти промежутокъ значеній t, начинающійся значеніемъ τ_1 и простирающійся дальше чѣмъ до $t = \tau_1$, для котораго p, q остаются въ области 1) — за исключеніемъ того случая, когда для $t = \tau_1 \quad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 = \delta . \gamma^2$. Если имѣетъ мѣсто послѣднее, то не существуетъ промежутка значеній t, начинающагося значеніемъ τ_1 и простирающагося дальше чѣмъ до $t = \tau_1$, для котораго p, q остаются въ области 1).

Выберемъ теперь согласно второму условію 1) произвольную систему значеній q, которая пусть представляетъ часть системы начальныхъ значеній рѣшенія для произвольно выбраннаго значенія $t = T_0$. Тогда имѣемъ одинъ изъ слѣдующихъ двухъ случаевъ. Или можно къ начальной системѣ величинъ q подобрать такую начальную систему величинъ p изъ области 1), что соотвѣтствующее рѣшеніе для всѣхъ $t > T_0$ остается въ области 1), или нельзя выбрать величины p такимъ образомъ.

Допустимъ въ видѣ опыта, что въ нѣкоторомъ частномъ случаѣ имѣетъ мѣсто послѣднее. Какимъ бы образомъ мы тогда ни дополняли выбранную систему величинъ q системою величинъ p изъ нашей области, всегда соотвѣтствующее рѣшеніе не для всѣхъ $t > T_0$ остается въ нашей области.

Если дополнительная система величинъ p соотвѣтствуетъ уравненію $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 = \delta . \gamma^2$, то по предыдущему нельзя найти промежутка (начинающагося значеніемъ T_0 и простирающагося дальше чѣмъ до T_0), для котораго рѣшеніе остается въ области 1). Но въ каждомъ другомъ случаѣ существуетъ промежутокъ выше упомянутаго рода, для котораго рѣшеніе остается въ области 1). Но такъ какъ рѣшеніе при этомъ не всегда остается въ нашей области, то очевидно существуетъ такое опредѣленное число $> o$, что въ промежуткѣ $T_0 < t < T_0 + T$ рѣшеніе остается въ нашей области, между тѣмъ какъ это не имѣетъ мѣста для промежутка $T_0 < t < T_0 + T + \varepsilon$ ($\varepsilon > o$ въ остальномъ же произвольная величина). Очевидно тогда имѣемъ для $t = T_0 + T \quad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p^2_\mu = \delta . \gamma^2$. Каждой системѣ величинъ p изъ области $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p^2_\mu < \delta . \gamma^2$ такимъ образомъ соотвѣтствуетъ опредѣленная величина T. Величинамъ p, удовлетворяющимъ условію $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p^2_\mu = \delta \cdot \gamma^2$, пусть соотвѣтствуетъ T = o. Тогда, какъ мы докажемъ, T есть непрерывная функція величинъ p въ области $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 \leqq \delta \cdot \gamma^2$.

Выберемъ сначала систему величинъ p, которая соотвѣтствуетъ неравенству

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta \cdot \gamma^2.$$

Характеризуемъ ее при помощи $|p_0|$. Опредѣляемъ соотвѣтствующее рѣшеніе отъ T_0 до $T_0 + T$, которое можемъ продолжать еще дальше. Очевидно для

$$T_0 < t < T_0 + T \qquad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta \cdot \gamma^2.$$

На основаніи выше упомянутыхъ предложеній изъ предыдущаго § видимъ кромѣ того, что для $t > T_0 + T$ $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \delta \cdot \gamma^2$, если $t - T_0 - T$ имѣетъ достаточно малое значеніе.

Выберемъ теперь положительное сколь угодно малое число $\triangle > o$ и примемъ промежутокъ значеній t, который опредѣляется при помощи $t_0 < t - T_0 < t_1$, причемъ $t_0 < T < t_1$ и $T - t_0$, $t_1 - T$ меньше чѣмъ $\triangle$. t_0 пусть будетъ при этомъ $> o$ и $t_1 - T$ пусть имѣетъ такъ малое значеніе, что для $T < t - T_0 < t_1$ $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \delta \cdot \gamma^2$. Слѣдовательно имѣемъ для $t - T_0 = t_0$ $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta \gamma^2$, для $t - T_0 = t_1$ $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \delta \gamma^2$.

Можно теперь на основаніи предыдущей главы опредѣлить въ области $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta \cdot \gamma^2$ такую окрестность для $|p_0|$, что всѣ соотвѣтствующія рѣшенія также опредѣлены въ промежуткѣ $o < t - T_0 < t_1$ и отличаются въ этомъ промежуткѣ сколь угодно мало отъ рѣшенія соотвѣтствующаго $|p_0|$. Такъ какъ $\delta \cdot \gamma^2 - \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2$ въ промежуткѣ $o \leqq t - T_0 \leqq t_0$ для рѣшенія, на которомъ мы основываемся, больше нѣкотораго положительнаго числа, то можно, слѣдовательно, выбрать выше упомянутую окрестность по столько малою, что эта разность въ выше упомянутомъ промежуткѣ имѣетъ положительное значеніе также для всѣхъ рѣшеній, соотвѣтствующихъ величинамъ p изъ окрестности, между тѣмъ какъ для $t - T_0 = t_1$ имѣетъ мѣсто $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \delta \cdot \gamma^2$. Слѣдовательно T для значеній окрестности лежитъ между t_0 и t_1 и отличается отъ значенія T для $|p_0|$ меньше чѣмъ на $\triangle$. Итакъ T обладаетъ непрерывностью для мѣста $|p_0|$.

Пусть теперь во вторыхъ $|p_0|$ соотвѣтствуетъ уравненію $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 = \delta \gamma^2$. T тогда для $|p_0|$ равняется нулю. Опредѣлимъ теперь къ $\triangle > o$ $\triangle > t_1 > o$ такимъ образомъ, что для $o < t - T_0 < t_1$ рѣшеніе имѣетъ опредѣленное значеніе и при этомъ всегда $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \delta\gamma^2$. Тогда имѣемъ $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \delta\gamma^2$ для $t - T_0 = t_1$. Можно тогда такимъ образомъ опредѣлить окрестность для мѣста $|p_0|$, что рѣшенія, соотвѣтствующія разсматриваемымъ мѣстамъ ея, имѣютъ опредѣленное значеніе въ промежуткѣ $o < t - T_0 < t_1$ и отличаются для него сколь угодно мало отъ первоначальнаго рѣшенія, слѣдовательно и такимъ образомъ, что $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \delta\gamma^2$ для $t - T_0 = t_1$. Для $t - T_0 = o$ имѣемъ $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta \,.\, \gamma^2$. Слѣдовательно для величинъ T этой окрестности $o < T < t_1$. Итакъ $T < \triangle$.

Этимъ доказана непрерывность величины T въ области $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta \,.\, \gamma^2$. Слѣдовательно T въ этой области принимаетъ по крайней мѣрѣ для одного мѣста наибольшее значеніе.

Пусть обозначаетъ $|p_0|$ мѣсто изъ области $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta \,.\, \gamma^2$, гдѣ T принимаетъ наибольшее значеніе, которое обозначимъ черезъ θ. Очевидно для этого мѣста $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta \,.\, \gamma^2$. Можно выбрать для этого мѣста такую окрестность, лежащую въ области $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta \,.\, \gamma^2$, что всѣ рѣшенія, соотвѣтствующія этой окрестности, имѣютъ опредѣленное значеніе въ промежуткѣ, простирающемся дальше чѣмъ до $T_0 + \theta$. Можно выбрать окрестность на столько малою, что всѣ эти рѣшенія въ промежуткѣ до $t = T_0 + \theta$ лежатъ сколь угодно близко къ рѣшенію, соотвѣтствующему $|p_0|$, и также такъ, что значенія T для окрестности отличаются отъ θ сколь угодно мало. При помощи надлежащаго выбора окрестности можно, слѣдовательно, достигнуть, что выше упомянутыя рѣшенія въ промежуткѣ отъ $t = T_0 + T$ до $t = T_0 + \theta$ лежатъ сколь угодно близко къ значеніямъ рѣшенія, соотвѣтствующаго $|p_0|$, для $t = T_0 + \theta$. Можно достигнуть что величины T лежатъ сколь угодно близко къ θ; онѣ $< \theta$.

Для $t = T_0 + \theta$, какъ мы знаемъ, для рѣшенія, на которомъ мы основываемся, имѣетъ мѣсто $\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > o$. Значенія величинъ p, q, соотвѣтствующія $t = T_0 + \theta$, пусть будутъ при этомъ $p_1^0\, p_2^0 \ldots p_k^0\, q_1^0 \ldots q_l^0$. Можно тогда такимъ образомъ опредѣлить два числа $d > o$, $e > o$, что для какого нибудь рѣшенія имѣемъ $\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > o$, если p, q отличаются отъ $p_1^0 \ldots p_k^0\, q_1^0 \ldots q_l^0$ менѣе чѣмъ на d, между тѣмъ какъ разность между t и $T_0 + \theta$ меньше чѣмъ e. Это вытекаетъ изъ того, что $\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2$ характеризуется дифференціальными уравненіями какъ непрерывная функція величинъ p, q, t въ нѣкоторой области.

Слѣдовательно можно по предыдущему выбрать окрестность для $[p_0]$ на столько малою, что для всѣхъ ея рѣшеній въ промежуткѣ ... $T_0 + T$ до $t = T_0 + \theta$

$$\frac{d}{dt} \sum_{\mu = 1}^{k} d_\mu \, p_\mu^2 > o.$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ этомъ промежуткѣ $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \, p_\mu^2 > \delta \, . \, \gamma^2$. Слѣдовательно имѣемъ для $t = T_0 + \theta$ для рѣшенія, соотвѣтствующаго $[p_0]$, $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \, p_\mu^2 = \delta \, . \, \gamma^2$, для рѣшеній, соотвѣтствующихъ другимъ мѣстамъ окрестности, $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \, p_\mu^2 > \delta \, . \, \gamma^2$. Слѣдовательно эта сумма, образованная для $t = T_0 + \theta$, въ нѣкоторой окрестности мѣста $[p_0]$ принимаетъ наименьшее значеніе для $[p_0]$.

$\alpha_1 \ldots \alpha_k$ пусть представляютъ мѣсто $[p_0]$, между тѣмъ какъ $\alpha_1' \ldots \alpha_k'$ характеризуютъ мѣста окрестности мѣста $[p_0]$, ... разсматриваемыя какъ начальныя значенія для $t = T_0$. Если образуемъ функціи p для вели... окрестности и для $t = T_0 + \theta$, то эти функціи, какъ намъ извѣстно, имѣютъ конечн... производныя перваго порядка по величинамъ α' для нѣкоторой окрестности мѣста ... самое слѣдовательно имѣетъ мѣсто также для $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \, p_\mu^2$. Но производныя ... величины, образованная для $[p_0]$, равняются нулю, такъ какъ она принимаетъ ... наименьшее значеніе для нѣкоторой окрестности мѣста $[p_0]$. Вслѣдствіе этого обстоятельства получаются k однородныхъ линейныхъ уравненій относительно величинъ $d_\mu \, . \, p_\mu$, причемъ величины p слѣдуетъ образовать для $t = T_0 + \theta$ и $[p_0]$. Такъ какъ поэтому одновременно имѣетъ мѣсто зависимость $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \, p_\mu^2 = \delta \, . \, \gamma^2$, то не всѣ $d_\mu \, p_\mu$ одновременно исчезаютъ. Слѣдовательно имѣемъ, если $\left[\frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_\rho}\right]$ обозначаетъ величину $\frac{\partial p_\mu}{\partial \alpha_\rho'}$ для $\alpha_1' \ldots \alpha_k' = \alpha_1 \ldots \alpha_k$, $t = T_0 + \theta$

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1}\right] & \left[\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1}\right] & \cdots & \left[\frac{\partial p_k}{\partial \alpha_1}\right] \\ - & - & - & - \\ \left[\frac{\partial p_1}{\partial \alpha_k}\right] & \left[\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_k}\right] & \cdots & \left[\frac{\partial p_k}{\partial \alpha_k}\right] \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

Начальное мѣсто величинъ q для $t = T_0$, которое до сихъ поръ имѣло опредѣленное положеніе, характеризуемъ при помощи $[q_0]$. Можно найти для $[p_0]$, $[q_0]$ такую окрестность, что каждому ея мѣсту, какъ начальному мѣсту для $t = T_0$, соотвѣтствуетъ рѣшеніе p, q, которое дано въ промежуткѣ $T_0 < t < T_0 + \theta$. При этомъ можно выбрать окрестность такимъ образомъ, что p, q, разсматриваемыя какъ функціи начальныхъ значеній и t въ вышеупомянутомъ промежуткѣ значеній t, имѣютъ конечныя и непрерывныя производныя перваго порядка по начальнымъ значеніямъ. Это слѣдуетъ изъ того, что мы сказали въ § 9, основываясь на вспомогательныхъ теоремахъ предыдущей главы. Вышеупомянутыя производныя удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ, которыя получаются изъ дифференціальныхъ уравненій для p и q, т. е. уравненій I, II § 8, если образовать производныя обѣихъ частей каждаго уравненія по начальнымъ значеніямъ. Для большей ясности представимъ уравненія I, II § 8 въ другомъ видѣ, раздѣляя ихъ на двѣ группы, смотря потому, относится ли лѣвая часть къ величинѣ p или q. Тогда имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_\mu}{dt} &= L_\mu(p) + H_\mu \qquad (\mu = 1, 2 \ldots k) \\ \frac{dq_\nu}{dt} &= l_\nu(q) + K_\nu \qquad (\nu = 1, 2 \ldots l) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 3$$

При этомъ L и l суть линейныя однородныя выраженія относительно величинъ p или q; H и K суть суммы членовъ вида $c\,.\,\xi$ ($c = \text{const.}$), причемъ можно составить формально эти суммы съ извѣстными c, если дана таблица величинъ a. Если образуемъ $\frac{d}{dt}\sum\limits_{\mu=1}^{k} d_\mu\; p_\mu^{\,2}$ при помощи дифференціальныхъ уравненій 3), то L (p) при этомъ даютъ опредѣленно положительную квадратичную форму величинъ p, какъ мы показали это въ § 8; если образуемъ $\frac{d}{dt}\sum\limits_{\nu=1}^{l} f_\nu\; q_\nu^{\,2}$, то $l_\nu(q)$ даютъ опредѣленно положительную квадратичную форму величинъ q.

Если теперь β обозначаетъ какое нибудь изъ начальныхъ значеній величинъ p или q, то имѣютъ мѣсто уравненія

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p_\mu}{\partial\beta}\right) &= L_\mu\left(\frac{\partial p}{\partial\beta}\right) + \sum_{\rho=1}^{k}\frac{\partial H_\mu}{\partial p_\rho}\cdot\frac{\partial p_\rho}{\partial\beta} + \sum_{\sigma=1}^{l}\frac{\partial H_\mu}{\partial q_\sigma}\cdot\frac{\partial q_\sigma}{\partial\beta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_\nu}{\partial\beta}\right) &= l_\nu\left(\frac{\partial q}{\partial\beta}\right) + \sum_{\rho=1}^{k}\frac{\partial K_\nu}{\partial p_\rho}\cdot\frac{\partial p_\rho}{\partial\beta} + \sum_{\sigma=1}^{l}\frac{\partial K_\nu}{\partial q_\sigma}\cdot\frac{\partial q_\sigma}{\partial\beta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 4$$

$$(\mu = 1, 2 \ldots k \qquad \nu = 1, 2 \ldots l)$$

Коэффиціенты у $\frac{\partial p}{\partial\beta}, \frac{\partial q}{\partial\beta}$ въ правой части подъ знаками Σ можно при этомъ разсматривать какъ функціи начальныхъ значеній и t. Для нашей цѣли достаточно, образовать эти уравненія для производныхъ по начальнымъ значеніямъ величинъ p. Кромѣ того мы разсмотримъ только частный случай, когда начальныя значенія суть координаты мѣста $[p_0]$, $[q_0]$. Тогда по предыдущему $\frac{\partial p}{\partial\beta}, \frac{\partial q}{\partial\beta}$ удовлетворяютъ системѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій независимо отъ особеннаго значенія β.

При этомъ важно слѣдующее замѣчаніе: Коэффиціенты у $\frac{\partial p}{\partial\beta}, \frac{\partial q}{\partial\beta}$ въ правыхъ частяхъ подъ знаками Σ очевидно по предыдущему имѣютъ видъ $\Sigma\, e\,.\,\frac{\partial \xi}{\partial x}$, причемъ можно образовать формально эти линейныя однородныя формы величинъ $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ съ опредѣленными e, если дана таблица величинъ a. $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ получаемъ какъ функціи t, выражая p, q какъ функціи t, разсматривая затѣмъ x какъ функціи p, q и опредѣляя наконецъ $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ для найденныхъ x и t. Но такъ какъ p, q, соотвѣтствующія начальному мѣсту $|p_0|$ $|q_0|$ для $t = T_0$, остаются въ промежуткѣ $T_0 < t < T_0 + \theta$ въ области $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu^{\,2} < \delta\,.\,\gamma^2 \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, q_\nu^{\,2} > -\,\delta\,.\,\gamma^2$, то соотвѣтствующіе x по § 9 лежатъ въ области $-\gamma < x < \gamma$. Но мы предоставили себѣ право, ввести для этой области неравенства вида $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| < \triangle > o$, причемъ $\triangle$ зависитъ только отъ таблицы величинъ a. Вслѣдствіе этого мы можемъ ввести предположеніе, что коэффиціенты у $\frac{\partial p}{\partial \beta}$, $\frac{\partial q}{\partial \beta}$ въ правыхъ частяхъ подъ знаками Σ для промежутка $T_0 < t < T_0 + \theta$ по абсолютной величинѣ меньше чѣмъ $D > o$, если D нѣкоторое число, зависящее только отъ таблицы величинъ a. Мы воспользуемся этимъ правомъ впослѣдствіи.

Сначала же замѣтимъ, что выраженія

$$\left.\begin{aligned}
r_1 &= c_1 \frac{\partial p_1}{\partial \beta_1} + c_2 \frac{\partial p_1}{\partial \beta_2} + \ldots + c_k \frac{\partial p_1}{\partial \beta_k} \\
&- - - - - - - \\
r_k &= c_1 \frac{\partial p_k}{\partial \beta_1} + c_2 \frac{\partial p_k}{\partial \beta_2} + \ldots + c_k \frac{\partial p_k}{\partial \beta_k} \\
s_1 &= c_1 \frac{\partial q_1}{\partial \beta_1} + c_2 \frac{\partial q_1}{\partial \beta_2} + \ldots + c_k \frac{\partial q_1}{\partial \beta_k} \\
&- - - - - - - \\
s_l &= c_1 \frac{\partial q_l}{\partial \beta_1} + c_2 \frac{\partial q_l}{\partial \beta_2} + \ldots + c_k \frac{\partial q_l}{\partial \beta_k}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5$$

причемъ $c_1 \ldots c_k$ суть произвольныя постоянныя, удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt} r_\mu &= L_\mu(r) + \sum_{\rho=1}^{k} \frac{\partial H_\mu}{\partial p_\rho} r_\rho + \sum_{\sigma=1}^{l} \frac{\partial H_\mu}{\partial q_\sigma} s_\sigma \\
\frac{d}{dt} s_\nu &= l_\nu(s) + \sum_{\rho=1}^{k} \frac{\partial K_\nu}{\partial p_\rho} r_\rho + \sum_{\sigma=1}^{l} \frac{\partial K_\nu}{\partial q_\sigma} s_\sigma
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 6$$

Коэффиціенты у r, s въ правыхъ частяхъ подъ знаками Σ при этомъ суть нами уже характеризованныя функціи t, которыя, какъ мы уже сказали, можно подчинить условію, что онѣ имѣютъ нѣкоторую степень малости, зависящую отъ таблицы величинъ a. Образуемъ теперь $\frac{d}{dt}\left[\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, r_\mu^{\,2} + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, s_\nu^{\,2}\right]$ при помощи уравненій 6. L и l при этомъ даютъ по предъидущему опредѣленно положительную квадратичную форму величинъ r, s. Остальные члены правыхъ частей уравненій 6) даютъ квадратичную форму величинъ r, s съ коэффиціентами, которымъ — какъ слѣдуетъ изъ предыдущаго — можно приписать каждую степень малости, зависящую отъ таблицы величинъ a. Слѣдовательно имѣемъ зависимость

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, r_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, s_\nu^2\right] > P\left(\sum_{\mu=1}^{k} r_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} s_\nu^2\right) - Q\left(\sum_{\mu=1}^{k} r_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} s_\nu^2\right)$$

причемъ P больше нуля и зависитъ только отъ таблицы величинъ a, между тѣмъ какъ $Q > o$ можно приписать каждую степень малости, зависящую отъ таблицы величинъ a.

Теперь мы выбираемъ степень малости, которою мы можемъ располагать, такимъ образомъ, что $Q < P$. Тогда имѣемъ

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, r_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, s_\nu^2\right) > o \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7$$

причемъ знакъ = имѣетъ мѣсто только тогда, если $r_1 = \ldots = r_k = s_1 = \ldots = s_l = o$.

Можно теперь величины c въ выраженіяхъ 5) выбрать такимъ образомъ, что онѣ не всѣ равняются нулю и обращаютъ въ нуль $r_1 \ldots r_k$ для $t = T_0 + \theta$. Это слѣдуетъ изъ того, что имѣетъ мѣсто уравненіе 2). Замѣтимъ кромѣ того, что для

$$t = T_0 \qquad \frac{\partial p_1}{\partial \beta_1} = \frac{\partial p_2}{\partial \beta_2} = \ldots\ldots = \frac{\partial p_k}{\partial \beta_k} = 1,$$

между тѣмъ какъ всѣ остальныя $\frac{\partial p}{\partial \beta'}\ \frac{\partial q}{\partial \beta}$ исчезаютъ. Слѣдовательно, если выбрать величины c выше упомянутымъ образомъ, r, s для $t = T_0$ удовлетворяютъ условію

$$r_1 = c_1 \;\ldots\; r_k = c_k \qquad s_1 = \;\ldots\; = s_l = o$$

и для $t = T_0 + \theta$ условію $r_1 = \ldots = r_k = o$. И такъ для $t = T_0$ сумма

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, r_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, s_\nu^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8$$

больше нуля, для $t = T_0 + \theta$ не больше нуля. Это очевидно, если обратить вниманіе на знаки величинъ d и f. Слѣдовательно существуетъ значеніе t между T_0 и $T_0 + \theta$, для котораго $\frac{d}{dt}\left(\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, r_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, s_\nu^2\right) < o$ что противно условію 7).

Итакъ мы пришли къ противорѣчію и поэтому должны отказаться отъ предположенія, сдѣланнаго нами въ началѣ этого § въ видѣ опыта. Мы, слѣдовательно, доказали слѣдующую теорему:

Если выше упомянутая степень малости выбирается надлежащимъ образомъ, то къ каждой системѣ величинъ q области $\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, q_\nu^2 > -\delta\gamma^2$ и каждому допущенному значенію t должна принадлежать по крайней мѣрѣ одна такая система величинъ p области $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu^2 < \delta\,.\,\gamma^2$, что эта система p q какъ начальная система для выше упомянутаго значенія t опредѣляетъ рѣшеніе, которое для всѣхъ большихъ значеній t остается въ области

$$\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, q_\nu^2 > -\delta\,.\,\gamma^2 \qquad\qquad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu^2 < \delta\,.\,\gamma^2.$$

Мы докажемъ въ послѣдствіи, что, если выше упомянутая степень малости выбирается надлежащимъ образомъ, къ системѣ величинъ q и значенію t принадлежитъ только одна соотвѣтствующая система величинъ p.

Аналогичная теорема имѣетъ мѣсто, если мы основываемся на области величинъ t „$t < \tau$ или t произвольная величина"; въ этомъ случаѣ p и q мѣняютъ роли.

До сихъ поръ мы предполагали, что ни одна изъ группъ p и q не исчезаетъ. Въ другомъ случаѣ можно воспользоваться подобными соображеніями какъ въ предыдущемъ. Введя въ случаѣ, когда группа q исчезаетъ, область

$$\sum_{\mu=1}^{n} d_{\mu} \, p^2_{\mu} < \delta \, . \, \gamma^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 9$$

въ случаѣ, когда группа p исчезаетъ, область

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu} \, q_{\nu}^2 > - \delta \, . \, \gamma^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10$$

мы имѣемъ слѣдующія предварительныя теоремы:

1) Группа q исчезаетъ. Если

$$\sum_{\mu=1}^{n} d_{\mu} \, p_{\mu}^2 = \delta \, . \, \gamma^2, \qquad \text{то} \qquad \frac{d}{dt} \sum_{\mu=1}^{n} d_{\mu} \, p^2_{\mu} > o.$$

Если область допущенныхъ значеній t опредѣляется при помощи условій $t > \tau$ или t произвольная величина, то для каждаго допущеннаго значенія t $t = t_0$ существуетъ рѣшеніе, которое остается въ области 9) для $t > t_0$. Если область допущенныхъ значеній t опредѣляется при помощи условій $t < \tau$ или t произвольная величина, то каждое рѣшеніе, лежащее когда нибудь въ области 9), для меньшихъ значеній t остается въ этой области.

2) Группа p исчезаетъ. Если $\sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu} \, q_{\nu} = - \delta \, . \, \gamma^2$, то имѣетъ мѣсто

$$\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu} \, q_{\nu}^2 > o.$$

Если область допущенныхъ значеній t опредѣляется при помощи условій $t > \tau$ или t произвольная величина, то каждое рѣшеніе, лежащее когда нибудь въ области 10), для большихъ t остается въ этой области. Если область допущенныхъ значеній t опредѣляется при помощи условій $t < \tau$ или t произвольная величина, то для допущеннаго значенія t t_0 существуетъ рѣшеніе, которое остается для меньшихъ t въ области 10).

При этомъ $\delta > o$ обозначаетъ число, которое зависитъ только отъ величинъ a и выбрано такимъ образомъ, что величины p (или q) области 9 (или 10) даютъ значенія x, для которыхъ имѣетъ мѣсто $| x | < \gamma$. Кромѣ того предполагается, что степень малости, выбрать которую мы имѣемъ право по предположенію, опредѣляется надлежащимъ образомъ.

Впрочемъ въ выше упомянутыхъ случаяхъ мы могли бы упростить изслѣдованіе, но мы здѣсь не изложимъ этого.

§ 11.

Докажемъ сначала вспомогательную теорему, которая часто употребляется впослѣдствіи.

Для всѣхъ значеній $t > \tau$ ($t < \tau$, t произвольная величина)* пусть даны n функцій $x_1\ x_2 \ldots x_n$, которыя удовлетворяютъ слѣдующей системѣ уравненій

$$\frac{dx_i}{dt} = L_i(x) + \xi_{i0} + \xi_i \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \ldots \quad 1$$

При этомъ L обозначаютъ тѣ же самыя линейныя выраженія относительно x, которыя встрѣчаются въ уравненіяхъ 1) въ началѣ нашей главы. ξ_0, ξ суть функціи отъ t, которыя удовлетворяютъ неравенствамъ $|\xi_{i0}| < d$ $\quad |\xi_i| < \varkappa \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. Въ нихъ $d > o$ обозначаетъ какую нибудь постоянную, $\varkappa > o$ постоянную, относительно которой мы предоставляемъ себѣ право, выбрать ее поизвольно, соблюдая при этомъ только то условіе, что $\varkappa$ зависитъ только отъ таблицы величинъ a. y, p, q пусть будутъ тѣ же самыя линейныя выраженія относительно x какъ и до сихъ поръ. Также d_μ, f_ν имѣютъ то же самое значеніе.

Кромѣ того мы введемъ еще нѣкоторое предположеніе, которое однако формулируемъ только впослѣдствіи. Пока скажемъ только то, что оно удовлетворяется въ особенности тогда, когда всѣ x въ разсматриваемой области t лежатъ между конечными предѣлами.

Мы обозначаемъ $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$ $\qquad s = \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2$**) и образуемъ при помощи 1) $\frac{ds}{dt}$. Члены L тогда, какъ мы въ предыдущемъ уже не разъ замѣчали, даютъ опредѣленно положительную квадратичную форму относительно y, которая поэтому $> \varkappa_1 . \sigma^2$, причемъ $\varkappa_1 > o$ зависитъ только отъ таблицы величинъ a. Члены ξ_{i0} даютъ выраженіе, абсолютная величина котораго $< \varkappa_3 . d . \sigma$, причемъ $\varkappa_3 > o$ можно разсматривать какъ величину, зависящую только отъ таблицы величинъ a. Наконецъ ξ_i даютъ членъ, который численно $< \varkappa_2 . \varkappa . \sigma^2$, причемъ $\varkappa_2 > o$ зависитъ только отъ величинъ a Итакъ имѣемъ

$$\frac{ds}{dt} > \varkappa_1 . \sigma^2 - \varkappa . \varkappa_2 . \sigma^2 - \varkappa_3 . d . \sigma$$

Теперь мы воспользуемся правомъ, которое имѣемъ по предположенію, и выбираемъ какимъ нибудь образомъ $\varkappa > o$ какъ число, зависящее только отъ таблицы величинъ a, такъ, что $r = \varkappa_1 - \varkappa . \varkappa_2 > o$. Тогда имѣемъ

*) Чтобы отличать другъ отъ друга три выше упомянутые вида предположенія, мы при помощи I характеризуемъ случай, когда наши соображенія относятся къ $t > \tau$, при помощи II случай, когда $t < \tau$ опредѣляетъ допущенныя значенія t, наконецъ при помощи III случай, когда разсматриваемая область значеній t характеризуется при помощи „t произвольная величина".

**) Если группа q или p исчезаетъ, то положимъ $s = \sum_{\mu=1}^{n} d_\mu p_\mu^2$ или $s = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu q_\nu^2$.

$$\frac{ds}{dt} > r \, . \, \sigma^2 - \varkappa_3 \, . \, d \, . \, \sigma \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 2$$

причемъ $r > o$ и $\varkappa_3 > o$ зависятъ только отъ величинъ a.

Кромѣ того, какъ легко видѣть, имѣетъ мѣсто зависимость

$$\left|\frac{d\sigma^2}{dt}\right| < r_0 \, \sigma^2 + r_1 \, d \, . \, \sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3$$

причемъ $r_0 > o$ и $r_1 > o$ можно разсматривать как величины, которыя опредѣляются при помощи таблицы величинъ a.

Введемъ теперь величину

$$\sigma_0 = \frac{\varkappa_3 + \varepsilon_0}{r} \, . \, d$$

Въ выраженіи въ правой части ε_0 пусть обозначаетъ величину больше нуля и зависящую только отъ величинъ a, но въ остальномъ выбранную произвольно.

Если теперь для нѣкотораго значенія t случайно $\sigma > \sigma_0$, то

$$\frac{ds}{dt} > \sigma \, (r\sigma - \varkappa_3 \, d) > \sigma_0 \, . \, \varepsilon_0 \, . \, d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4$$

Прибавимъ теперь дополнительное предположеніе, упомянутое уже въ началѣ этого §. Это предположеніе имѣетъ цѣлью, исключить случай, когда имѣетъ мѣсто $\sigma \gtrless \sigma_0$ для всѣхъ t области $t > t'$ въ случахъ I, III [или $t < t'$ въ случаяхъ II, III]. t' при этомъ обозначаетъ произвольное допущенное значеніе t. Очевидно было бы достаточно, предположить, что x остаются между конечными предѣлами. Ибо, если имѣетъ мѣсто 4) для всѣхъ t промежутка $t > t'$ [или $t < t'$], то s не лежитъ между конечными предѣлами. На предположеніе этого вида мы особенно указали въ началѣ этого §. Большую общность имѣетъ слѣдующее предположеніе: (A) Существуетъ функція φ въ случаяхъ I, III [или ψ въ случаяхъ II, III], которая дана для достаточно большихъ [или малыхъ] значеній t и для нихъ имѣетъ конечныя производныя φ' [или ψ']. Кромѣ того она удовлетворяетъ условіямъ

$$\varphi > o \ [\text{или } \psi < o] \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} > -\frac{r}{c}\left[\text{или } \frac{\psi'}{\psi} < \frac{r}{c}\right] \qquad \lim_{t \to \infty} (\varphi \, . \, s) = o \ \left[\text{или } \lim_{t \to -\infty} (\psi \, . \, s) = o\right]$$

При помощи $c > o$ мы при этомъ обозначаемъ наибольшее значеніе, которое встрѣчается между существующими d_μ, $|\, f_\nu \,|$, такъ что, слѣдовательно всегда имѣетъ мѣсто зависимость

$$|\, s \,| < c \, . \, \sigma^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5$$

Пусть удовлетворяется это предположеніе. При этомъ часть его, находящаяся въ скобкахъ, относится къ случаямъ II, III, остальное къ случаямъ I, III. Введенныя предположенія въ самомъ дѣлѣ имѣютъ большую общность чѣмъ предположеніе, что x лежатъ между конечными предѣлами. Ибо если имѣетъ мѣсто послѣднее, то имѣемъ

$$\lim_{t \to \infty}\left[e^{-\frac{r}{2c} \, . \, t} \, . \, x\right] = o \ \left[\text{или } \lim_{t \to -\infty}\left[e^{\frac{r}{2c} \, . \, t} \, x\right] = o\right], \text{ такъ что } e^{-\frac{r}{c} t} \ \left[\text{или } -e^{\frac{r}{c} t}\right]$$

суть функціи φ [или ψ] выше упомянутаго рода.

Мы должны теперь доказать, что предположенія (A) въ самомъ дѣлѣ достаточны для выше упомянутой цѣли. Допустимъ въ видѣ опыта, что это не имѣетъ мѣста. Пусть будетъ слѣдовательно для всѣхъ $t > t'$ [или $t < t'$] $\sigma > \sigma_0$, вслѣдствіе чего имѣетъ силу 4). Для достаточно большихъ [или малыхъ] значеній t тогда $s > o$ [или $< o$] и, такъ какъ $r\sigma - \varkappa_3 d > o$ потому что $\sigma > \sigma_0$, имѣемъ

$$\frac{ds}{dt} > s \cdot \left(\frac{r}{c} - \frac{\varkappa_3 \cdot d}{\sqrt{|s|} \cdot c}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6$$

Пусть обозначаетъ теперь ε вспомогательную величину, удовлетворяющую условію $o < \varepsilon < \frac{r}{c}$. Такъ какъ для достаточно большихъ [или малыхъ] значеній t $|s|$ принимаетъ сколь угодно большія значенія, то для достаточно большихъ [или малыхъ] значеній t имѣемъ $\frac{ds}{dt} > |s| \cdot \varepsilon$. Слѣдовательно имѣемъ для достаточно большихъ [или малыхъ] значеній t $\frac{d}{dt}\left[\log\left(s \cdot e^{-\varepsilon t}\right)\right] > o$ $\left[\text{или } \frac{d}{dt}\log\left(-s\, e^{\varepsilon t}\right) < o\right]$. Итакъ существуетъ такое число K [или K_0], что для достаточно большихъ [или малыхъ] значеній t имѣетъ мѣсто зависимость $s > e^{K} \cdot e^{\varepsilon t}$ [или $-s > e^{K_0} \cdot e^{-\varepsilon t}$], откуда слѣдуетъ

$$\frac{1}{\sqrt{s}} < e^{-\frac{K}{2}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \quad \left[\text{или } \frac{1}{\sqrt{-s}} < e^{\frac{K_0}{2}} e^{\frac{\varepsilon}{2}t}\right] \quad \ldots\ldots \quad 7$$

Изъ 6) получаемъ

$$\frac{d}{dt}(\log s) - \frac{r}{c} + \frac{\varkappa_3 d}{\sqrt{s} \cdot c} > o \qquad \left[\text{или } \frac{d}{dt}(\log(-s)) + \frac{r}{c} - \frac{\varkappa_3 d}{\sqrt{-s} \cdot c} < o\right]$$

или обращая вниманіе на 7) и предположеніе A для достаточно большихъ [или малыхъ] t

$$\frac{d}{dt}\left[\log(\varphi \cdot s) - \frac{2\varkappa_3 d}{\varepsilon \cdot \sqrt{c}} \cdot e^{-\frac{K}{2}} \cdot e^{\frac{\varepsilon}{2}t}\right] > o \quad \left[\text{или } \frac{d}{dt}\left[\log(\psi \cdot s) - \frac{2\varkappa_3 d}{\varepsilon \cdot \sqrt{c}} e^{-\frac{K_0}{2}} e^{\frac{\varepsilon}{2}t}\right] < o\right]$$

Итакъ существуетъ такое число K_2 (или K_3), что для достаточно большихъ [или малыхъ] значеній t

$$\log(\varphi \cdot s) - \frac{2\varkappa_3 d}{\varepsilon \cdot \sqrt{c}} \cdot e^{-\frac{K}{2}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} > K_2 \quad \left[\text{или } \log(\psi \cdot s) - \frac{2\varkappa_3 d}{2\sqrt{c}} e^{-\frac{K_0}{2}} e^{\frac{\varepsilon}{2}t} > K_3\right] \ldots 8$$

Слѣдовательно не можетъ имѣть мѣсто зависимость $\lim\limits_{t \to \infty}(\varphi\, s) = o$ [или $\lim\limits_{t \to -\infty}(\psi \cdot s) = o$], такъ какъ въ такомъ случаѣ лѣвыя части 8) должны были бы принимать безпредѣльно малыя значенія при $t \to \infty$ [или $t \to -\infty$]. Итакъ мы пришли къ противорѣчію съ предположеніемъ A и должны отказаться отъ предположенія, допущеннаго нами въ видѣ опыта. Предположеніе A достигаетъ, слѣдовательно, своей цѣли.

Итакъ въ каждой области $t > t'$ [или $t < t'$] должны существовать значенія σ, которыя $< \sigma_0$. Но когда $\sigma > \sigma_0$, имѣемъ по 4) $\frac{ds}{dt} > o$.

Если $\sigma < \sigma_0$, то вслѣдствіе 5) $|s| < c\,\sigma_0^2$. Отсюда слѣдуетъ: Если основываемся на промежуткѣ $t > \tau$, то всегда $s < c\,\sigma_0^2$. Ибо если когда нибудь $\sigma > \sigma_0$, то для нѣкотораго большаго значенія t по предыдущему въ первый разъ $\sigma = \sigma_0$. Между разсматриваемыми значеніями t s возрастаетъ съ возрастаніемъ t, слѣдовательно въ самомъ дѣлѣ $s \leq c\,\sigma_0^2$. Если основываемся на $t < \tau$, то $s > -c\,\sigma_0^2$ по аналогичной причинѣ. Если основываемся на промежуткѣ значеній t, содержащемъ всѣ значенія t, то, слѣдовательно, всегда имѣетъ мѣсто $|s| < c\,\sigma_0^2$.

Пусть теперь для нѣкотораго значенія t $\sigma = \underline{\sigma}$, при чемъ $\underline{\sigma} > \sigma_0$. Если для θ, значенія t большаго чѣмъ предъидущее въ случаѣ I или III [или значенія t меньшаго чѣмъ предъидущее въ случаѣ II или III], $\sigma > \underline{\sigma}$, то можно это значеніе t θ такимъ образомъ заключить между двумя другими, что для послѣднихъ $\sigma = \underline{\sigma}$, между тѣмъ какъ между ними имѣетъ мѣсто $\sigma > \underline{\sigma}$. Это слѣдуетъ изъ того, что мы доказали выше. Внутри промежутка, опредѣленнаго обоими значеніями t, очевидно $\frac{ds}{dt} > 0$ и поэтому $|s| \leq c\,\underline{\sigma}^2$.

Теорема Коши дастъ теперь

$$\frac{\sigma^2 - \underline{\sigma}^2}{s - \underline{s}} = \left\{ \frac{\left(\frac{d\sigma^2}{dt}\right)}{\left(\frac{ds}{dt}\right)} \right\}$$

$\underline{s}$ въ этой формулѣ обозначаетъ s для меньшаго предѣла промежутка, s и σ слѣдуетъ образовать для $t = \theta$. Большія скобки въ правой части указываютъ на то, что частное слѣдуетъ образовать для нѣкотораго значенія t θ внутри промежутка. Слѣдовательно по 2) и 3)

$$\left|\frac{\sigma^2 - \underline{\sigma}^2}{s - \underline{s}}\right| < \frac{r_0 + r_1 \frac{d}{\sigma_1}}{r - \varkappa_3 \frac{d}{\sigma_1}} \qquad (\sigma_1 = \sigma(\theta))$$

или такъ какъ $\sigma_1 > \sigma_0$

$$\left|\frac{\sigma^2 - \underline{\sigma}^2}{s - \underline{s}}\right| < \frac{r_0 + \frac{r_1\, r}{\varkappa_3 + \varepsilon_0}}{r\left(1 - \frac{\varkappa_3}{\varkappa_3 + \varepsilon_0}\right)}$$

Кромѣ того $|s - \underline{s}| < 2c\,\underline{\sigma}^2$ и, слѣдовательно,

$$\left(\frac{\sigma}{\underline{\sigma}}\right)^2 < \frac{r_0 + \frac{r_1\, r}{\varkappa_3 + \varepsilon_0}}{r\left(1 - \frac{\varkappa_3}{\varkappa_3 + \varepsilon_0}\right)} \,.\, 2c + 1$$

Слѣдовательно можно найти такое число $g > 1$, зависящее только отъ величинъ a, что $\sigma < g\,.\,\underline{\sigma}$. Мы предполагаемъ, что g выбрано такимъ образомъ. Имѣетъ мѣсто поэтому слѣдующая теорема:

1) Случай I. Если для какого нибудь значенія t $\sigma = \underline{\sigma} > \sigma_0$, то для всѣхъ большихъ t имѣетъ мѣсто зависимость $\sigma < g\,.\,\underline{\sigma}$.

2) Случай II. Если для какого нибудь значенія t $\sigma = \underline{\sigma} > \sigma_0$, то для всѣхъ меньшихъ значеній t имѣетъ мѣсто $\sigma < g\,.\,\underline{\sigma}$.

3) Случай III. Если когда нибудь $\sigma = \underline{\sigma} > \sigma_0$, то для всѣхъ t имѣетъ мѣсто $\sigma < g\,.\,\underline{\sigma}$.

При этомъ $g > 1$ есть число, зависящее только отъ таблицы величинъ a.

Изъ предъидущаго мы дальше заключаемъ, что въ случаѣ III, т. е. когда мы основываемся на промежуткѣ, содержащемъ всѣ значенія t, всегда имѣетъ мѣсто $\sigma < g \,.\, \sigma_0$. Ибо если не всегда $\sigma < \sigma_0$ (въ этомъ случаѣ очевидно существуетъ неравенство $\sigma < g \,.\, \sigma_0$), то σ между прочимъ должно принимать также значеніе σ_0, откуда по предъидущему слѣдуетъ $\sigma < g \,.\, \sigma_0$ для всѣхъ t.

Если основываемся на промежуткѣ $t > \tau$ (или $t < \tau$), то имѣемъ $\sigma < g \,.\, \sigma_0$ для достаточно большихъ (или малыхъ) значеній t; это навѣрно имѣетъ мѣсто начиная съ значенія t, для котораго $\sigma < \sigma_0$.

Обратимъ наше вниманіе еще на то, что σ_0 равняется d, умноженному на величину, зависящую только отъ таблицы величинъ a.

Разсмотримъ, наконецъ, еще нѣкоторый частный случай, тотъ случай, когда всѣ $\xi_{i0} = o$. Всѣ предположенія, сдѣланныя въ предъидущемъ относительно L_i и ξ_i, пусть имѣютъ силу и теперь, равно какъ и предположенія, введенныя относительно $x_1 \ldots x_n$. Можемъ тогда воспользоваться выше полученными результатами, выбирая произвольно $d > o$.

Сначала изъ предъидущаго слѣдуетъ, что

$$\frac{ds}{dt} > r\,\sigma^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8$$

$$\left|\frac{d\sigma^2}{dt}\right| < r_0\,\sigma^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9$$

Это вытекаетъ изъ зависимостей 2) и 3), причемъ не надо обращать вниманія на методъ ихъ нахожденія. Ибо можно теперь выбрать произвольно $d > o$ и r, r_0, $\varkappa_3$, r_1 зависятъ только отъ величинъ a. Дальше видимъ, что въ случаѣ III σ всегда $= o$. Ибо тогда имѣемъ по предъидущему $\sigma < g \,.\, \sigma_0$ и $d > o$ можно выбрать произвольно. Слѣдовательно въ случаѣ III всѣ x всегда равняются нулю. Итакъ мы должны заняться только еще случаями I и II. Въ случаѣ I имѣетъ мѣсто $s \leq c \,.\, \sigma_0^2$, откуда при данныхъ обстоятельствахъ слѣдуетъ $s < o$. Такъ какъ для достаточно большихъ t $\sigma < g \,.\, \sigma_0$, то $\lim\limits_{t \to \infty} \sigma^2 = o$. Итакъ всѣ x, слѣдовательно также s, для безпредѣльно возрастающаго t стремятся къ нулю. Аналогичнымъ образомъ слѣдуетъ, что въ случаѣ II $s > o$ и для безпредѣльно убывающаго t всѣ x равно какъ и σ и s стремятся къ нулю.

Если когда нибудь, напримѣръ для $t = t_0$, $\sigma = o$ т. е. $x_1 = \ldots = x_n = o$, то эти уравненія имѣютъ мѣсто всегда. Это слѣдуетъ изъ вспомогательной теоремы § 1 предъидущей главы. Ибо эта вспомогательная теорема содержитъ, какъ частный случай, слѣдующее предложеніе: Пусть даны n функцій $x_1 \ldots x_n$ въ промежуткѣ, который ограничивается значеніями $t = \tau$ и $t = T$ (предѣлы принадлежатъ къ промежутку). Пусть онѣ имѣютъ въ немъ конечныя производныя $\frac{dx}{dt}$, удовлетворяющія уравненіямъ $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t)$ $(i = 1, \ldots n)$. Пусть имѣютъ силу кромѣ того зависимости $|f_i(t)| \leq \sum\limits_{\mu=1}^{n} A_\mu \left|x_\mu\right|$, причемъ A обозначаютъ положительныя постоянныя. Наконецъ x пусть принимаютъ для $t = \tau$ значеніе o. Тогда они также исчезаютъ для всѣхъ значеній t выше упомянутаго промежутка.

Чтобы убѣдиться въ томъ, что это предложеніе частный случай предложенія въ § 1 предъидущей главы, положимъ (употребляя обозначенія § 1): $\xi_i(t) = o$, $y_i = o$, $F_i(t) = \rho_i(t) = o$, $d > o$ произвольная величина. Тогда теорема § 1 даетъ для какого нибудь значенія t изъ даннаго промежутка $|x_i| < d \cdot \left|\frac{e^{w(t-\tau)} - 1}{w}\right|$. Но такъ какъ $d > o$ мы могли выбрать произвольно, то всѣ x равняются нулю.

Вмѣсто того, чтобы употребить предложеніе § 1, мы могли бы также съ успѣхомъ воспользоваться зависимостью 9).

Если для одного значенія t исчезаетъ величина s, то исчезаютъ также всѣ x для всѣхъ t. Ибо, если s исчезаетъ, то вслѣдствіе этого исчезаетъ также σ. Ибо, еслибы мы когда нибудь имѣли $s = o$ $\sigma > o$, то по 8) было бы $\frac{ds}{dt} > o$. Слѣдовательно s принимало бы положительныя и отрицательныя значенія, что противно предъидущему. Итакъ, изъ $s = o$ слѣдуетъ $\sigma = o$ для нѣкотораго значенія t, а поэтому и для всѣхъ значеній t.

Остается только изслѣдовать тотъ случай, когда s не исчезаетъ. Тогда $\frac{ds}{dt}$ всегда больше нуля. Имѣемъ, слѣдовательно, по теоремѣ Коши

$$\frac{\sigma(t)^2 - \sigma(\theta)^2}{s(t) - s(\theta)} = \left[\frac{\frac{d}{dt}\sigma^2}{\frac{d}{dt}s}\right]_{t=\theta}$$

причемъ θ лежитъ между t и θ. Отсюда дальше слѣдуетъ, если обратить вниманіе на 8) и 9)

$$\left|\frac{\sigma^2(t) - \sigma^2(\theta)}{s(t) - s(\theta)}\right| < \frac{r_0}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 10$$

Формулу 10) можемъ примѣнить къ двумъ произвольнымъ различнымъ допущеннымъ значеніямъ t θ, t. Пусть будетъ однако $t < \theta$ или $t > \theta$ смотря по тому, имѣемъ ли мы случай I или II. Представимъ себѣ теперь, что θ возрастаетъ безпредѣльно въ случаѣ I, убываетъ безпредѣльно въ случаѣ II, между тѣмъ какъ t не мѣняетъ своего значенія. Тогда $\sigma^2(\theta)$ и $s(\theta)$ стремятся къ нулю. Получаемъ, слѣдовательно

$$\left|\frac{\sigma^2(t)}{s(t)}\right| < \frac{r_0}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11$$

для всѣхъ допущенныхъ t.

Формула 8) даетъ теперь $\frac{ds}{dt} > \frac{r}{c} \cdot |s|$. Слѣдовательно въ случаѣ I, въ которомъ $s < o$, имѣемъ $\frac{d}{dt} \log\left(-s\, e^{\frac{r}{c}t}\right) < o$. Итакъ, для всѣхъ t каждой отдѣльной области $t \lesseqgtr t_0$ $(t_0 > \tau)$ имѣетъ мѣсто неравенство вида $\log\left(-s\, e^{\frac{r}{c}\cdot t}\right) < \mathfrak{k}$ $(\mathfrak{k} = \text{const})$ или

$|s| < e \,.\, e^{\mathfrak{f} - \frac{r}{c} t}$. Аналогичнымъ образомъ находимъ, что въ случаѣ II для области $t < t_1$ ($t_1 < \tau$) имѣетъ мѣсто неравенство $|s| < e \,.\, e^{\mathfrak{f}_1 \frac{r}{c} t}$, причемъ $\mathfrak{f}_1$ обозначаетъ постоянную. Если теперь обратить вниманіе на зависимость 11), то для σ^2 получаются подобныя неравенства. И такъ имѣемъ слѣдующую теорему:

Въ случаѣ I $x \,.\, e^{1/2 \,.\, \frac{r}{c} \,.\, t}$ для всѣхъ t области $t > t_0$ ($t_0 > \tau$) остаются между конечными предѣлами. Въ случаѣ II $x \,.\, e^{-1/2 \frac{r}{c} t}$ для всѣхъ t области $t < t_1$ ($t_1 < \tau$) остаются между конечными предѣлами.

Врочемъ легко видѣть, что σ^2 въ случаѣ I въ промежуткѣ $\tau < t < t_0$ лежитъ между конечными предѣлами, и въ случаѣ II въ промежуткѣ $t_1 < t < \tau$. Можно это легко заключить изъ вспомогательной теоремы § 1 или поступить слѣдующимъ образомъ: По 9) имѣемъ $\left|\frac{d}{dt} \log \sigma^2\right| < r_0$. Еслибы мы теперь могли найти въ одномъ изъ выше упомянутыхъ промежутковъ сколь угодно большія значенія σ^2, то должны были бы существовать сколь угодно большія значенія $\left|\frac{d}{dt} \log \sigma^2\right|$, что противно предъидущему. Итакъ, имѣемъ слѣдующую теорему:

Въ случаѣ I $x \,.\, e^{1/2 \,.\, \frac{r}{c} \,.\, t}$, въ случаѣ II $x \;\; e^{-1/2 \,\frac{r}{c} \,.\, t}$ для всѣхъ допущенныхъ t лежатъ между конечными предѣлами.

§ 12.

Предположимъ теперь, что даны два рѣшенія уравненій 1) (см. начало нашей главы), остающіяся въ области $-\gamma < x_i < +\gamma$ для $t > t_0$ ($t < t_0$ или для всѣхъ t). Если эти рѣшенія характеризуются при помощи $x + z$ и x, то имѣютъ мѣсто уравненія вида

$$\frac{dz}{dt} = L(z) + \xi(x + z, t) - \xi(x, t)$$

причемъ $L(z)$ обозначаютъ однородныя линейныя формы, образованныя изъ величинъ z такимъ же образомъ, какъ линейныя выраженія въ правой части уравненій 1) изъ x.

Если $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|$ приписываемъ надлежащую степень малости, зависящую отъ величинъ a, то можемъ считать выполненными предположенія предъидующаго § относительно z, причемъ въ данномъ случаѣ имѣемъ $\xi_{t_0} = 0$, такъ что можно воспользоваться соображеніями въ концѣ предъидущаго §.

Для краткости обозначимъ при помощи I случай, когда предположеніе относится къ $t > t_0$, между тѣмъ какъ II и III указываютъ на тѣ случаи, въ которыхъ мы основываемся на $t < t_0$ или „t произвольная величина". Результаты предъидущаго § покзывають тогда, что въ случаѣ III всѣ z равняются нулю, между тѣмъ какъ въ случаѣ I $\lim\limits_{t \to \infty} z = o$, въ случаѣ II $\lim\limits_{t \to -\infty} z = o$. Въ случаѣ I поэтому оба рѣшенія для безпредѣльно возрастающаго t асимптотически приближаются другъ къ другу, въ случаѣ II тоже самое имѣетъ мѣсто для безпредѣльно убывающаго t и въ случаѣ III оба рѣшенія совпадаютъ.

Пусть теперь $\pi_1 \ldots \pi_k \; \rho_1 \ldots \rho_l$ суть величины, образованныя изъ величинъ z такимъ же образомъ, какъ $p_1 \ldots p_k \; q_1 \ldots q_l$ изъ величинъ x. Кромѣ того введемъ обозначеніе $s = \sum\limits_{\mu=1}^{k} d_\mu \pi_\mu^2 + \sum\limits_{\nu=1}^{l} f_\nu \rho_\nu^2$ (или $s = \sum\limits_{\mu=1}^{n} d_\mu \pi_\mu^2$, $s = \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu \rho_\nu^2$ если исчезаетъ одна изъ групиъ ρ, π). Имѣемъ тогда по предъидущему § въ случаѣ I $s < o$, въ случаѣ II $s > o$.

Если слѣдовательно когда нибудь въ случаѣ I $\rho_1 = \ldots \rho_l = o$ или если исчезаетъ група ρ, то, если существуетъ група π, $s = \sum\limits_{\mu=1}^{k} d_\mu \pi_\mu^2 < o$ т. е. всѣ π равняются нулю. Такъ какъ, слѣдовательно, s, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ равняется нулю, то всѣ z исчезаютъ для всѣхъ допущенныхъ t и оба рѣшенія совпадаютъ. Итакъ, оба рѣшенія совпадаютъ, если оба рѣшенія когда-нибудь даютъ одинаковыя q или если исчезаетъ група q, ибо ρ суть ничто иное, какъ разности соотвѣтствующихъ q для обоихъ рѣшеній.

Если въ случаѣ II когда нибудь $\pi_1 = \ldots = \pi_k = o$ или исчезаетъ група π, то, если существуетъ група ρ, имѣемъ $s = \sum\limits_{\nu=1}^{l} f_\nu \rho_\nu^2 > o$, откуда слѣдуетъ $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_l = o$. Такъ какъ s поэтому исчезаетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ, то всѣ z исчезаютъ для всѣхъ допущенныхъ t и оба рѣшенія совпадаютъ. Итакъ, оба рѣшенія совпадаютъ, если они когда нибудь даютъ одинаковыя p или исчезаетъ група p.

Прежде чѣмъ формулировать важнѣйшіе результаты, полученные до сихъ поръ относительно уравненій 1) § 8, дополнимъ эти результаты теоремою, которая относится къ тому случаю, когда предположенія, сдѣланныя въ § 8, имѣютъ силу для всѣхъ вещественныхъ t.

Мы въ предъидущемъ ввели область

$$(1a) \quad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 < \delta \cdot \gamma^2 \qquad (1b) \quad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 > -\delta \cdot \gamma^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$

причемъ въ случаѣ, когда исчезаетъ група p или q, слѣдуетъ пропустить (1a) или (1b). Послѣ надлежащаго выбора степени малости, о которой мы говорили при введеніи предположеній, мы нашли, что для произвольнаго значенія t T_0 во всякомъ случаѣ существуетъ, по крайней мѣрѣ, одно рѣшеніе, остающееся для $t > T_0$ въ области 1).

Пусть обозначаетъ теперь τ опредѣленное произвольно выбранное значеніе t. Затѣмъ мы выбираемъ для T_0 послѣдовательно значенія $T_0^{(1)}$ $T_0^{(2)}$ $T_0^{(3)}$ etc., причемъ послѣднія (которыя предполагаются $< \tau$) образуютъ рядъ безпредѣльно убывающихъ величинъ, и сопоставляемъ каждому $T_0^{(\mu)}$ рѣшеніе, остающееся для $t > T_0^{(\mu)}$ въ области 1). $[y]_\mu$ пусть указываетъ на систему значеній величинъ y, которую принимаетъ μ — ое решеніе для $t = \tau$. Такъ какъ $[y]_\mu$ всѣ лежатъ въ области D, то они, очевидно, имѣютъ, по крайней мѣрѣ, одно мѣсто накопленія въ этой области. Пусть обозначаетъ $[Y]$ такое мѣсто.

Обратимъ теперь наше вниманіе на рѣшеніе, соотвѣтствующее для $t = \tau$ начальной системѣ $[Y]$. Это рѣшеніе всегда остается въ области D.

Для доказательства мы сначала предполагаемъ, что это имѣетъ мѣсто не для всѣхъ $t > \tau$. Тогда можно найти такой промежутокъ отъ $t = \tau$ до $t = \theta$ $(\theta > \tau)$, что рѣшеніе существуетъ въ этомъ промежуткѣ и для $t = \theta$ не лежитъ въ области D. Между рѣшеніями, соотвѣтсвующими $T_0^{(1)}$ etc., существуютъ теперь такія, которыя для $t = \tau$ лежатъ сколь угодно близко къ значеніямъ $[Y]$. Можно, слѣдовательно, между этими рѣшеніями найти такія, которыя для $t = \theta$ также лежатъ внѣ области D, что противно предположеніямъ.

Предположимъ во вторыхъ въ видѣ опыта, что утвержденіе справедливо не для всѣхъ $t < \tau$. Можно тогда найти такой промежутокъ отъ $t = \tau$ до $t = \theta_1$ $(\theta_1 < \tau)$, что рѣшеніе, соотвѣтствующее для $t = \tau$ $[Y]$, имѣетъ въ немъ опредѣленный смыслъ и лежитъ для $t = \theta_1$ внѣ области D. Между рѣшеніями, соотвѣтствующими $T_0^{(1)}$ etc., можно тогда найти такія, которыя для $t = \tau$ лежатъ сколь угодно близко къ системѣ $[Y]$ и одновременно соотвѣтствуютъ $T_0^{(m)}$, лежащему сколь угодно далеко отъ значенія τ, напримѣръ дальше чѣмъ θ_1. Между ними, слѣдовательно, существуютъ и такія, которыя для $t = \theta_1$ лежатъ внѣ области D, что противно предположенію.

Слѣдовательно, доказано существованіе, по крайней мѣрѣ, одного рѣшенія, остающагося всегда въ области D. Что можетъ существовать только одно такое рѣшеніе (если выбираемъ надлежащимъ образомъ степень малости, о которой мы говорили при введеніи предположеній), мы уже доказали въ началѣ этого §.

Мы нашли, слѣдовательно, слѣдующую теорему: Пусть даны n дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}\ x_1 + \ldots + a_{in}\ x_n + \xi_i \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

Величины a суть постоянныя, удовлетворяющія условію, что уравненіе

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - u & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - u & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - u \end{vmatrix} = 0$$

не имѣетъ корней, вещественная часть которыхъ равняется нулю. ξ_i даны какъ функціи x и t для всѣхъ x области $a_i < x_i < b_i$, и или для всѣхъ t или для тѣхъ t, которыя удовлетворяютъ одному изъ неравенствъ $t > \tau$ или $t < \tau$. Кромѣ того, $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ пусть существуютъ и, равно какъ и ξ_i, пусть суть непрерывныя функціи въ выше упомянутой области для x, t. Наконецъ, пусть существуетъ область $-\gamma < x < +\gamma$ $(\gamma > 0)$ (съ предѣлами, лежащими внутри предъидущей области для x), для которой величины $\left|\frac{\xi}{\gamma}\right|$ для $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и величины $\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|$ меньше чѣмъ нѣкоторыя числа*) $\Delta_1 > o$ или $\Delta_2 > o$, которыя можно опредѣлить, когда дана таблица величинъ a.

Теперь введемъ нѣкоторыя однородныя линейныя функціи величинъ x, функціи y. Коэффиціенты этихъ линейныхъ выраженій зависятъ только отъ таблицы величинъ a и имѣютъ опредѣлитель, отличающійся отъ нуля. Эти величины y раздѣлимъ на двѣ группы p и q, изъ которыхъ первая соотвѣтствуетъ корнямъ уравненія $D = o$ съ положительною вещественною частью, вторая корнямъ съ отрицательною вещественною частью. Къ каждой группѣ принадлежатъ столько величинъ, сколько существуетъ соотвѣтствующихъ корней (m кратный корень при этомъ замѣняетъ m корней). Можетъ встрѣчаться тотъ случай, что исчезаетъ одна изъ группъ.

Введемъ область

$$(G_a) \quad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \; p_\mu^2 < \delta \cdot \gamma^2 \qquad (G_b) \quad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \; q_\nu^2 > - \delta \cdot \gamma^2 \; . \; . \; . \; (G)$$

$\delta > o$ $d_\mu > o$ $f_\nu < o$ при этомъ обозначаютъ постоянныя, которыя можно опредѣлить, когда дана таблица величинъ a. Если исчезаетъ группа p или q, слѣдуетъ пропустить (G_a) или (G_b). Имѣемъ тогда слѣдующія теоремы:

1) Пусть допущенныя значенія t опредѣляются при помощи неравенства $t > \tau$.

Къ каждой системѣ величинъ q [q] изъ области (G_b) и каждому допущенному значенію $t = T_0$ принадлежитъ одна, и при томъ единственная, такая система величинъ p [p] изъ области (G_a), что рѣшеніе, соотвѣтствующее [p] [q], какъ начальной системѣ для $t = T_0$, для всѣхъ $t > T_0$ остается въ области (G).

Если не имѣемъ корней уравненія $D = o$ съ положительною вещественною частью, т. е. если не имѣемъ величинъ p, то для возрастающихъ t всѣ рѣшенія остаются въ области (G), которыя когда нибудь лежатъ въ ней.

Если не имѣемъ корней уравненія $D = o$ съ отрицательною вещественною частью, т. е. если не имѣемъ величинъ q, то существуетъ одно единственное рѣшеніе, остающееся въ области (G).

Каждыя два различныя рѣшенія, остающіяся наконецъ въ области (G), асимптотически приближаются для $t \to \infty$.

2) Пусть допущенныя значенія t опредѣляются при помощи неравенства $t < \tau$.

Имѣютъ мѣсто аналогичныя теоремы, какъ въ случаѣ 1). Только p и q мѣняютъ роли, вмѣсто $t \to \infty$ имѣемъ $t \to -\infty$, вмѣсто $t > T_0$ $t < T_0$ и вмѣсто возрастающихъ t убывающія t.

3) Предположенія относятся ко всѣмъ t. Въ этомъ случаѣ одновременно имѣютъ мѣсто теоремы 1) и 2). Кромѣ того имѣемъ слѣдующую теорему: Сущест-

*) Мы не обратили особеннаго вниманія на выгодное по возможности опредѣленіе этихъ чиселъ.

вуетъ одно, и при этомъ единственное, рѣшеніе, остающееся для всѣхъ t въ области (G). Каждое другое рѣшеніе, остающееся для $t \to \infty$ или $t \to -\infty$ наконецъ въ области (G), асимптотически приближается къ выше упомянутому рѣшенію.

§ 13.

Въ этомъ § мы предполагаемъ, что существуетъ и группа p и группа q. Случай, когда предположенія § 8 относятся къ „$t > \tau$ или t произвольная величина," обозначимъ при помощи I, между тѣмъ какъ II указываетъ на то, что „$t < \tau$ или t произвольная величина" представляетъ разсматриваемую область величины t. Наконецъ, предположимъ, что степень малости, о которой мы говорили при введеніи предположеній, выбрана по предъидущему такимъ образомъ, что имѣетъ силу теорема, формулированная въ концѣ предъидущаго §; въ особенности пусть имѣютъ силу предположенія относительно выше упомянутой степени малости, введенныя въ началѣ предъидущаго §.

Мы знаемъ, что въ случаѣ I каждому допущенному значенію t_0 и каждой системѣ величинъ q Q изъ области G_b (см. пред. §) соотвѣтствуетъ такая опредѣленная система величинъ p P изъ области G_a, что P, Q, взятыя какъ начальная система для t_0, даютъ рѣшеніе, остающееся для $t > t_0$ въ области G. P впрочемъ лежитъ въ области $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu^2 < \delta \cdot \gamma^2$, такъ какъ изъ $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu^2 = \delta \cdot \gamma^2$ для $t = t_0$ по предъидущему слѣдовало бы

$$\frac{d}{dt} \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu^2 > 0,$$

что невозможно, если рѣшеніе для $t > t_0$ остается въ области G. На это обстоятельство мы указали уже раньше. Координаты мѣста P пусть будутъ $|p_1| \ldots |p_k|$. Съ этой точки зрѣнія, слѣдовательно, $|p_1| \ldots |p_k|$ суть однозначныя функціи величинъ $q_1 \ldots q_l$ и параметра t (послѣдній указываетъ на значеніе t, для котораго мы сопоставили систему величинъ p системѣ величинъ q).

Въ случаѣ II системѣ величинъ p P_1 изъ области G_a и допущенному значенію t t_1 такимъ образомъ соотвѣтствуетъ опредѣленная система величинъ q Q_1 изъ области

$$\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \cdot q_\nu^2 > -\delta \cdot \gamma^2,$$

что P_1 Q_1, взятыя какъ начальная система для t_1, даютъ рѣшеніе, остающееся для $t < t_1$ въ области G. $[q_1] \ldots [q_l]$ пусть суть координаты мѣста Q_1. Послѣднія величины можно разсматривать какъ функціи величинъ $p_1 \ldots p_k$ и параметра t.

Функціи |p| для произвольно выбраннаго значенія параметра t суть непрерывныя функціи величинъ q въ области G_b. Функціи |q| для произвольно выбраннаго значенія параметра t суть непрерывныя функціи величинъ p въ области G_a

Прежде чѣмъ доказать это положеніе, объяснимъ выраженіе „рѣшеніе, соотвѣтствующее $q_1 \ldots q_l$ и t_0“ или „рѣшеніе, соотвѣтствующее $p_1 \ldots p_k$ и T_0“. Первое выраженіе употребляется въ случаѣ I и обозначаетъ рѣшеніе, принимающее для t_0 значенія $q_1 \ldots q_l\ [p_1] \ldots [p_k]$, причемъ величины $[p]$ принадлежатъ къ $t_0\ q_1 \ldots q_l$. Второе выраженіе употребляется въ случаѣ II и обозначаетъ рѣшеніе, принимающее для T_0 значенія $p_1 \ldots p_k\ [q_1] \ldots [q_l]$, причемъ величины $[q]$ принадлежатъ къ $T_0\ p_1 \ldots p_k$.

Пусть теперь $\{q\}_1\ \{q\}_2$ характеризуютъ двѣ произвольныя системы величинъ q изъ области G_b, $\{p\}_1\ \{p\}_2$ двѣ произвольныя системы величинъ p изъ области G_a. Кромѣ того t_0 или T_0 пусть обозначаютъ допущенныя значенія t для случая I или II. Обратимъ наше вниманіе на рѣшенія, соотвѣтствующія $\{q\}_1\ t_0$ и $\{q\}_2\ t_0$ или $\{p\}_1\ T_0$ и $\{p\}_2\ T_0$. Первая пара для $t > t_0$ остается въ области G и поэтому для нѣкоторой области $t > t_1$ $(t_1 < t_0)$ въ области $-\gamma < x < \gamma$. Вторая пара для $t < T_0$ остается въ области G и поэтому для нѣкоторой области $t < T_1$ $(T_1 > T_0)$ въ области $-\gamma < x < \gamma$. Къ этимъ парамъ рѣшеній мы поэтому можемъ примѣнить результаты, находящіеся въ началѣ предъидущаго § и въ концѣ § 11. π, ρ пусть обозначаютъ при этомъ разности величинъ p, q для одинаковыхъ t. Мы употребляемъ также обозначеніе $s = \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \pi_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \rho_\nu^2$. Кромѣ того положимъ $\sum_{\mu=1}^{k} \pi_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} \rho_\nu^2 = \sigma^2$ и $\pi_1^0 \ldots \pi_k^0\ \rho_1^0 \ldots \rho_l^0$ пусть обозначаютъ значенія π, ρ для $t = t_0$ (или $t = T_0$).

Если пары рѣшеній содержатъ различныя рѣшенія, то имѣемъ въ случаѣ I для $t > t_1$ $s < o$ $\frac{ds}{dt} > o$ $\left|\frac{\sigma^2}{s}\right| < \frac{r_0}{r}$ (см. ур. 11 § 11), въ случаѣ II для $t < T_1$ $s > o$ $\frac{ds}{dt} > o$ $\left|\frac{\sigma^2}{s}\right| < \frac{r_0}{r}$.

Обозначимъ теперь черезъ s_0 значеніе s для $t = t_0$ (или $t = T_0$). Имѣемъ тогда въ случаѣ I

$$|s_0| < |F| \cdot \sum_{\nu=1}^{l} (\rho_\nu^0)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

и въ случаѣ II

$$|s_0| < D \sum_{\mu=1}^{k} (\pi_\mu^0)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2$$

что непосредственно слѣдуетъ изъ характера знака величины s. $|F|$ и D при этомъ обозначаютъ наибольшія значенія величинъ $|f|$ или d. Такъ какъ для $t > t_0$ (или $t \lesseqgtr T_0$) $|s| < |s_0|$, то для $t \gtrless t_0$ (или $t < T_0$) имѣемъ $\frac{\sigma^2}{|s_0|} < \frac{r_0}{r}$ и, слѣдовательно, по 1) и 2) въ случаѣ I для $t > t_0$

$$\sigma^2 < \frac{r_0 \cdot |F|}{r} \sum_{\nu=1}^{l} (\rho_\nu^0)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3$$

и въ случаѣ II для $t \lessgtr T_0$

$$\sigma^2 < \frac{r_0}{r} D \sum_{\mu=1}^{k} (\pi_\mu^0)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4$$

Эти уравненія конечно имѣютъ мѣсто также тогда, если рѣшенія одной пары совпадаютъ. Если напишемъ 3, 4 для $t = t_0$ или $t = T_0$, то они доказываютъ непрерывность функцій $[p]$ или $[q]$ для $t = t_0$ или $t = T_0$.

Непрерывность мы, впрочемъ, могли бы доказать проще; уравненія 3, 4 выражаютъ однако болѣе общій результатъ, которымъ мы воспользуемся впослѣдствіи. Замѣтимъ еще, что $\frac{r_0}{r} \cdot |F|$ и $\frac{r_0}{r} \cdot D$ суть положительныя числа, зависящія только отъ таблицы величинъ a.

Прежде чѣмъ продолжать наши соображенія, объяснимъ нѣкоторыя обозначенія, которыя для краткости употребляются впослѣдствіи.

Пусть дана система дифференціальныхъ уравненій вида

$$\frac{du_i}{dt} = U_i(u_1 \ldots u_n\, t) \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \ldots 5$$

Кромѣ того, пусть выбрано одно рѣшеніе ихъ. Мы говоримъ

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial u_\mu} v_\mu \qquad (i = 1 \ldots n) \quad \ldots \ldots \ldots 6$$

суть варіаціонныя уравненія, соотвѣтствующія выше упомянутому рѣшенію, если въ $\frac{\partial U}{\partial u}$ въ правыхъ частяхъ уравненій 6) для $u_1 \ldots u_n$ подставляются элементы выбраннаго рѣшенія. Пусть, кромѣ того,

$$\frac{dw_i}{dt} = U_i(u_1 + w_1 \ldots u_n + w_n\, t) - U_i(u_1 \ldots u_n\, t) \quad \ldots . 7$$
$$(i = 1 \ldots n)$$

называются разностными уравненіями дифференціальныхъ уравненій 5) для выше упомянутаго рѣшенія, если вмѣсто $u_1 \ldots u_n$ какъ прежде подставляются координаты этого рѣшенія.

Конечно, вышеупомянутыя формальныя дѣйствія въ каждомъ данномъ случаѣ должны имѣть опредѣленный смыслъ.

Напишемъ теперь еще разъ дифференціальныя уравненія для p, q. Имѣемъ (см. § 10)

$$\frac{dp_\mu}{dt} = L_\mu(p) + H_\mu \qquad (\mu = 1, 2 \ldots k) \quad \ldots \ldots . 8$$

$$\frac{dq_\nu}{dt} = l_\nu(q) + K_\nu \qquad (\nu = 1, 2 \ldots l) \quad \ldots \ldots . 9$$

Изъ замѣчаній, сдѣланныхъ въ § 10 относительно образованія H, K, вытекаетъ, что по предположенію имѣемъ право, приписать $\left|\frac{\partial H}{\partial p}\right|$, $\left|\frac{\partial H}{\partial q}\right|$, $\left|\frac{\partial K}{\partial p}\right|$, $\left|\frac{\partial K}{\partial q}\right|$ степень малости, произвольно выбранную, зависящую, однако, только отъ таблицы величинъ a. При этомъ предполагается, что $\left|\frac{\partial H}{\partial p}\right|$ etc. образованы для допущеннаго t и системы p, q, лежащей въ области, которая при помощи $-\gamma < x < \gamma$ косвенно опредѣляется для p, q. Послѣднюю область обозначимъ для краткости черезъ У.

Выберемъ теперь въ случаѣ I произвольное допущенное значеніе t t_0 и произвольную систему величинъ q $\{q\}$ изъ области

$$\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \, q_\nu^2 > -\delta \, . \, \gamma^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 10$$

Подобнымъ образомъ въ случаѣ II T_0 пусть обозначаетъ допущенное значеніе t и $\{p\}$ систему области

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \, p_\mu^2 < \delta \, . \, \gamma^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 11$$

Обратимъ затѣмъ наше вниманіе на рѣшенія, соотвѣтствующія t_0, $\{q\}$ (или T_0 $\{p\}$). Они распространяются на $t > t_0$ или $t < T_0$, но можно ихъ также продолжать такимъ образомъ для $t_1 < t < t_0$ или $T_1 > T > T_0$, что они остаются въ области У, если t_1 и T_1 выбраны надлежащимъ образомъ.

Теперь образуемъ варіаціонныя уравненія уравненій 8, 9 для выше упомянутыхъ рѣшеній. Получаемъ линейныя дифференціальныя уравненія

$$\frac{dp_\mu}{dt} = L_\mu(p) + \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\partial H_\mu}{\partial p_\lambda} p_\lambda + \sum_{\sigma=1}^{l} \frac{\partial H_\mu}{\partial q_\sigma} q_\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 12$$

$$\frac{d}{dt} q_\nu = l_\nu(q) + \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\partial K_\nu}{\partial p_\lambda} p_\lambda + \sum_{\sigma=1}^{l} \frac{\partial K_\nu}{\partial q_\sigma} q_\sigma \quad . \; . \; . \; . \quad 13$$

$$\mu = 1, 2 \ldots k \qquad\qquad \nu = 1, 2 \ldots l$$

Коэффиціенты у p q въ правыхъ частяхъ подъ знаками Σ суть непрерывныя функціи t, данныя для $t > t_1$ или $t < T_1$. По предъидущему имѣемъ право, приписать абсолютнымъ величинамъ ихъ произвольно выбранную степень малости, зависящую только отъ таблицы величинъ a . p, q суть новыя зависимыя перемѣнныя.

Если выберемъ произвольное значеніе t области $t > t_1$ или $t < T_1$ и произвольную систему значеній для p q, то существуетъ рѣшеніе уравненій 12, 13 опредѣленнаго характера, соотвѣтствующее выше упомянутой системѣ значеній, какъ начальной системѣ для выбраннаго значенія t, и распространяющееся на $t > t_1$ или $t < T_1$. [Если это замѣчаніе можетъ быть не извѣстно изъ общей теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, то легко убѣдиться въ справедливости его при помощи соображеній первой главы.]

На основаніи уравненій 12, 13 слѣдуетъ

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \, p_\mu^2 + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \, q_\nu^2 \right) = Q_1 + Q_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14$$

при чемъ Q_1 и Q_2 суть квадратичныя формы относительно p q, изъ которыхъ первая получается при помощи $L_\mu(p)$ $l_\nu(q)$, вторая при помощи остальныхъ членовъ. Форма Q_1 имѣетъ коэффиціенты, зависящіе только отъ таблицы величинъ a, и есть опредѣленно — положительная форма (см. соотвѣтствующія изслѣдованія § 10). Абсолютнымъ значеніямъ коэффиціентовъ формы Q_2 мы можемъ приписать степень малости, зависящую только отъ таблицы величинъ a, но, впрочемъ, выбранную произвольно. Если воспользуемся надлежащимъ образомъ этимъ правомъ, то слѣдуетъ

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu^{\,2} + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, q_\nu^{\,2}\right) > R \cdot \left(\sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^{\,2} + \sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^{\,2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15$$

причемъ $R > o$ можно разсматривать какъ величину, зависящую только отъ таблицы величинъ а. Если теперь введемъ обозначеніе $S = \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu^{\,2} + \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, q_\nu^{\,2}$ и обратимъ наше вниманіе на зависимость

$$|S| < c\left(\sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^{\,2} + \sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^{\,2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16$$

причемъ $c > o$ представляетъ наибольшее значеніе величинъ d, f, то получается изъ 15)

$$\frac{dS}{dt} > \frac{R}{c} \cdot |S| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17$$

(Аналогичныя соображенія встрѣчаются, впрочемъ, уже въ предъидущемъ).

Зависимость 17 доказываетъ справедливость слѣдующаго замѣчанія. Два рѣшенія уравненій 12, 13, остающіяся въ случаѣ I для $t > t_0$, въ случаѣ II для $t < T_0$ между конечными предѣлами и имѣющія для $t = t_0$ (или $t = T_0$) одинаковыя q (или p), совпадаютъ.

Ибо, если образуемъ разности координатъ обоихъ рѣшеній, получаемъ опять рѣшеніе уравненій 12, 13. Это рѣшеніе для $t > t_0$ (или $t < T_0$) остается между конечными предѣлами и дастъ въ случаѣ I для $t = t_0$ $q_1 = \ldots = q_l = o$, въ случаѣ II для $t = T_0$ $p_1 = \ldots = p_k = o$. Если при этомъ рѣшенія не совпадаютъ, то имѣемъ въ случаѣ I для $t = t_0$ $S > o$, въ случаѣ II для $t = T_0$ $S < o$, причемъ S относится къ новому рѣшенію. Если t возрастаетъ безпредѣльно, то, слѣдовательно, въ случаѣ I по 17) также S безпредѣльно возрастаетъ, между тѣмъ какъ въ случаѣ II S безпредѣльно убываетъ, если t убываетъ безпредѣльно. И то и другое противно тому, что также координаты новаго рѣшенія для $t > t_0$ (или $t < T_0$) остаются между конечными предѣлами. Итакъ, справедливость замѣчанія доказана.

Введемъ теперь кромѣ мѣста $\{q\}$ или $\{p\}$ второе мѣсто области 10 или 11, которое обозначимъ черезъ (q) или (p). При этомъ пусть совпадаютъ координаты мѣстъ $\{q\}$ и (q) или $\{p\}$ и (p) за исключеніемъ одного элемента, соотвѣтствующаго, напримѣръ, индексу g или h. $\pi_1 \ldots \pi_k\ \rho_1 \ldots \rho_l$ пусть обозначаютъ разности, которыя получаемъ, вычитая изъ координатъ рѣшенія, соотвѣтствующаго (q) t_0 или (p) T_0, координаты рѣшенія, соотвѣтствующаго $\{q\}$ t_0 или $\{p\}$ T_0, образованныя для того же самаго t. По предъидущему въ случаѣ I исчезаютъ для $t = t_0$ всѣ ρ за исключеніемъ ρ_g и въ случаѣ II для $t = T_0$ всѣ π за исключеніемъ π_h. ρ_0 или π_0 пусть обозначаютъ значенія ρ_g для $t = t_0$ или π_h для $t = T_0$; при этомъ ρ_0 и π_0 пусть отличаются отъ нуля.

Изъ зависимостей 3, 4 слѣдуетъ, что въ случаѣ I для всѣхъ $t > t_0$ величины $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ остаются между конечными предѣлами, зависящими только отъ таблицы величинъ а; что кромѣ того въ случаѣ II величины $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\pi_0}$ для всѣхъ $t < T_0$ остаются между конечными предѣлами, зависящими только отъ таблицы величинъ a. Кромѣ того π, ρ для $t > t_0$ или $t < T_0$ удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\frac{d\pi_\mu}{dt} = L_\mu(\pi) + H_\mu(p + \pi, q + \rho, t) - H_\mu(p, q, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18$$

$$\frac{d\rho_\nu}{dt} = l_\nu(\rho) + K_\nu(p + \pi, q + \rho, t) - K_\nu(p, q, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19$$

$$\mu = 1, 2 \ . \ . \ . \ k \qquad\qquad \nu = 1 \ . \ . \ . \ l$$

т. е. разностнымъ уравненіямъ для рѣшенія, на которомъ мы основываемся.

То что мы сказали выше, относится къ произвольнымъ $\rho_0 \gtrless o$ или $\pi_0 \gtrless o$, только $|\rho_0|$ или $|\pi_0|$ должны быть достаточно малыми. Дадимъ $\rho_0 \gtrless o$ или $\pi_0 \gtrless o$ рядъ значеній численно достаточно малыхъ, стремящихся къ нулю. $\rho_0^{(1)}$ $\rho_0^{(2)}$ . . . или $\pi_0^{(1)}$ $\pi_0^{(2)}$ . . . пусть суть два такіе ряда, изъ которыхъ первый обозначимъ черезъ A, второй черезъ B. Въ случаѣ I образуемъ $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ для значеній ρ_0 ряда A и $t = t_0$. Всѣ $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ при этомъ всегда равняются нулю за исключеніемъ $\frac{\rho_\kappa}{\rho_0}$, которое равняется 1. $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$ остаются между конечными предѣлами, зависящими только отъ таблицы величинъ a, какъ доказано выше. Слѣдовательно, системы $\frac{\pi_1}{\rho_0} \ . \ . \ . \ \frac{\pi_k}{\rho_0} \ \frac{\rho_1}{\rho_0} \ . \ . \ \frac{\rho_l}{\rho_0}$, образованныя для $t = t_0$ и различныхъ значеній ρ_0, имѣютъ, по крайней мѣрѣ, одно мѣсто накопленія. $P_1 \ . \ . \ P_k \ R_1 \ . \ . \ R_l$ пусть суть координаты какого нибудь такого мѣста. Всѣ R при этомъ равняются нулю за исключеніемъ R_g, которое равняется 1. Въ случаѣ II образуемъ $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\pi_0}$ для значеній π_0 ряда B и $t = T_0$. Системы $\frac{\pi_1}{\pi_0} \ . \ . \ . \ \frac{\pi_k}{\pi_0} \ \frac{\rho_1}{\pi_0} \ . \ . \ \frac{\rho_l}{\pi_0}$ тогда имѣютъ, по крайней мѣрѣ, одно мѣсто накопленія. $P_1' \ . \ . \ P'_k$ $R_1' \ . \ . \ R_l$ пусть суть координаты такого мѣста. Всѣ P' равняются нулю за исключеніемъ P_h', которое равняется 1.

Теперь обратимъ наше вниманіе на то рѣшеніе (η) варіаціонныхъ уравненій 12, 13, которое даетъ для $t = t_0$ $p_1 = P_1 \ . \ . \ . \ p_k = P_k$ $q_1 = R_1 \ . \ . \ . \ q_l = R_l$ (случай I) или для $t = T_0$ $p_1 = P_1' \ . \ . \ . \ p_k = P_k'$ $q_1 = R_1' \ . \ . \ . \ q_l = R_l'$ (случай II). Мы убѣдимся въ томъ, что тогда координаты рѣшенія η $p_1 \ . \ . \ . \ p_k$ $q_1 \ . \ . \ . \ q_l$ для $t > t_0$ или $t < T_0$ никогда не лежатъ внѣ предѣловъ, которые по предыдущему существуютъ для $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ или $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\pi_0}$.

Чтобы доказать это, замѣтимъ сначала, что $\frac{\partial H_\mu}{\partial p}$, $\frac{\partial H_\mu}{\partial q}$, $\frac{\partial K_\nu}{\partial p}$, $\frac{\partial K_\nu}{\partial q}$ въ области Y для каждаго отдѣльнаго промежутка значеній t $t' < t \leq t''$ (t' и t'' обозначаютъ допущенныя значенія t) суть равномѣрно непрерывныя функціи t, p, q, что легко слѣдуетъ изъ предположеній. Кромѣ того обратимъ наше вниманіе на то, что величины, обозначенныя выше черезъ π_μ, ρ_ν, можемъ сдѣлать численно сколь угодно малыми для всѣхъ $t > t_0$ или $t < T_0$, ограничиваясь достаточно малыми $|\rho_0|$ или $|\pi_0|$.

Раздѣлимъ теперь уравненія 18, 19 въ случаѣ I на ρ_0, въ случаѣ II на π_0. Въ случаѣ I тогда въ правыхъ частяхъ встрѣчаются величины

$$\frac{1}{\rho_0}[H_\mu(p+\pi, q+\rho, t)-H_\mu(p, q, t)],\ \frac{1}{\rho_0}[K_\nu(p+\pi, q+\rho, t)-K_\nu(p, q, t)]$$

въ случаѣ II величины, отличающіяся отъ упомянутыхъ тѣмъ, что вмѣсто ρ_0 имѣемъ π_0.

Въ случаѣ I имѣемъ

$$\frac{1}{\rho_0}\left[H_\mu(p+\pi, q+\rho, t)-H_\mu(p, q, t)\right]=\sum_{\lambda=1}^{k}\left\{\frac{\partial H_\mu}{\partial p_\lambda}\right\}\frac{\pi_\lambda}{\rho_0}+\sum_{\sigma=1}^{l}\left\{\frac{\partial H_\mu}{\partial q_\sigma}\right\}\frac{\rho_\sigma}{\rho_0}$$

причемъ знакъ $\{\}$ указываетъ на то, что разсматриваемую величину слѣдуетъ образовать для $p_1+\theta_\mu\pi_1\ldots p_k+\theta_\mu\pi_k q_1+\theta_\mu\rho_1\ldots q_l+\theta_\mu\rho_l$ $(o<\theta_\mu<1$; послѣднія величины очевидно лежатъ въ области Y). $|\theta_\mu\pi_1|\ldots|\theta_\mu\pi_k|\ |\theta_\mu\cdot\rho_1|\ldots|\theta_\mu\cdot\rho_l|$ можемъ сдѣлать сколь угодно малыми для всѣхъ $t>t_0$, ограничиваясь достаточно малыми $|\rho_0|$. Если поэтому выберемъ промежутокъ $t_0<t<t_0'$ ($t_0'>t_0$, въ остальномъ же произвольная величина), то можемъ достигнуть, что въ промежуткѣ $t_0<t<t_0'$ отличаются сколь угодно мало величины $\left\{\frac{\partial H_\mu}{\partial p_\lambda}\right\}$ отъ величинъ $\frac{\partial H_\mu}{\partial p_\lambda}$ и величины $\left\{\frac{\partial H_\mu}{\partial q_\sigma}\right\}$ отъ величинъ $\frac{\partial H_\mu}{\partial q_\sigma}$, если только приписать $|\rho_0|$ достаточную степень малости. Обращая вниманіе на то обстоятельство, что $\frac{\pi_\lambda}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\sigma}{\rho_0}$ для $t>t_0$ остаются между конечными предѣлами, зависящими только отъ таблицы величинъ a, видимъ слѣдовательно, что разность между

$$\frac{1}{\rho_0}\left[H_\mu(p+\pi, q+\rho, t)-H_\mu(p, q, t)\right]\ \text{и}\ \sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\partial H_\mu}{\partial p_\lambda}\frac{\pi_\lambda}{\rho_0}+\sum_{\sigma=1}^{l}\frac{\partial H_\mu}{\partial q_\sigma}\frac{\rho_\sigma}{\rho_0}$$

въ промежуткѣ $t_0<t<t_0'$ можно сдѣлать сколь угодно малою при помощи надлежащаго выбора степени малости для $|\rho_0|$.

Соотвѣтствующее, конечно, имѣетъ мѣсто для выше характеризованныхъ величинъ аналогичныхъ $\frac{1}{\rho_0}[H_\mu(p+\pi, q+\rho, t)-H_\mu(p, q, t)]$. Приходимъ, слѣдовательно, къ слѣдующему результату: Вслѣдствіе уравненій 18, 19 имѣемъ въ случаѣ I

$$\frac{d}{dt}\frac{\pi_\mu}{\rho_0}=L_\mu\left(\frac{\pi}{\rho_0}\right)+\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\partial H_\mu}{\partial p_\lambda}\frac{\pi_\lambda}{\rho_0}+\sum_{\sigma=1}^{l}\frac{\partial H_\mu}{\partial q_\sigma}\frac{\rho_\sigma}{\rho_0}+A_\mu\ \ldots\ 20$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\rho_\nu}{\rho_0}=l_\nu\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)+\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\partial K_\nu}{\partial p_\lambda}\frac{\pi_\lambda}{\rho_0}+\sum_{\sigma=1}^{l}\frac{\partial K_\nu}{\partial q_\sigma}\frac{\rho_\sigma}{\rho_0}+B_\nu\ \ldots\ 21$$

въ случаѣ II

$$\frac{d}{dt}\frac{\pi_\mu}{\pi_0}=L_\mu\left(\frac{\pi}{\pi_0}\right)+\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\partial H_\mu}{\partial p_\lambda}\frac{\pi_\lambda}{\pi_0}+\sum_{\sigma=1}^{l}\frac{\partial H_\mu}{\partial q_\sigma}\frac{\rho_\sigma}{\pi_0}+C_\mu\ \ldots\ 22$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\rho_\nu}{\pi_0} = l_\nu\left(\frac{\rho}{\pi_0}\right) + \sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\partial K_\nu}{\partial p_\lambda}\frac{\pi_\lambda}{\pi_0} + \sum_{\sigma=1}^{l}\frac{\partial K_\nu}{\partial q_\sigma}\cdot\frac{\rho_\sigma}{\pi_0} + D_\nu \quad \ldots 23$$

$$\mu = 1, 2 \,.\,.\, k \qquad\qquad \nu = 1, 2 \,.\,.\,.\, l$$

причемъ относительно A_μ, B_ν, C_μ, D_ν имѣетъ мѣсто слѣдующее: Если выберемъ въ случаѣ I произвольный промежутокъ $t_0 < t < t_0'$, въ случаѣ II произвольный промежутокъ $T_0' < t < T_0$, то можно сдѣлать $|A_\mu|$, $|B_\nu|$ или $|C_\mu|$, $|D_\nu|$ сколь угодно малыми для этого промежутка, если приписать $|\rho_0|$ или $|\pi_0|$ достаточную степень малости.

Теперь сравниваемъ уравненія 20, 21 или 22, 23 съ варіаціонными уравненіями 12, 13, причемъ представимъ себѣ, что въ послѣднихъ вмѣсто p, q подставлены элементы выше характеризованнаго рѣшенія (η).

Въ ряду A или B по предъидущему можно найти значенія ρ_0 или π_0, которыя для $t = t_0$ или $t = T_0$ даютъ величины $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ или $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\pi_0}$, лежащія сколь угодно близко къ $P_1 \,.\,.\, P_k\ R_1 \,.\,.\, R_l$ или $P_1' \,.\,.\, P_k'\ R_1' \,.\,.\, R_l'$. Если кромѣ того промежутки $t_0 < t < t_0'$ или $T_0 > t > T_0'$ опредѣлены произвольнымъ образомъ, то этотъ выборъ величинъ ρ_0 или π_0 можетъ произойти такимъ образомъ, что $|A_\mu|$, $|B_\nu|$ или $|C_\mu|$, $|D_\nu|$ въ соотвѣтствующихъ промежуткахъ дѣлаются сколь угодно малыми. Основываясь на вспомогательной теоремѣ § 1 предъидущей главы, видимъ, слѣдовательно, что можно выбрать ρ_0 или π_0 такимъ образомъ, что въ промежуткѣ $t_0 < t < t_0'$ или $T_0 > t > T_0'$ элементы рѣшенія (η) съ одной стороны и $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ или $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ съ другой стороны отличаются другъ отъ друга сколь угодно мало. Но послѣднія величины остаются между конечными предѣлами, зависящими только отъ таблицы величинъ a. Еслибы теперь элементъ рѣшенія (η) когда нибудь въ промежуткѣ $t_0 \leq t < t_0'$ или $T_0 > t > T_0'$ лежалъ внѣ предѣловъ, существующихъ для соотвѣтствующей величины между $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ или $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\pi_0}$, то выборъ значеній ρ_0 или π_0 могъ бы произойти такимъ образомъ, что также эта соотвѣтствующая величина должна была бы принимать значенія внѣ предписанныхъ предѣловъ. Ибо можно достигнуть, что въ промежуткѣ $t_0 \leq t \leq t_0'$ или $T_0 > t > T_0'$ $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ или $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\pi_0}$ лежатъ сколь угодно близко къ соотвѣтствующимъ элементамъ рѣшенія η. Мы должны, слѣдовательно, исключить вышеупомянутый случай. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что элементы рѣшенія η для всѣхъ $t > t_0$ или $t < T_0$ лежатъ между конечными предѣлами, причемъ эти предѣлы зависятъ только отъ таблицы величинъ a.

Изъ элементовъ мѣста накопленія $P_1 \,.\,.\, P_k\ R_1 \,.\,.\, R_l$ или $P_1' \,.\,.\, P_k'\ R_1' \,.\,.\, R_l'$ $R_1 \,.\,.\,.\, R_l$ или $P_1' \,.\,.\, P_k'$ извѣстны съ самаго начала. Ибо всѣ R равняются нулю за исключеніемъ $R_g = 1$ и всѣ P' равняются нулю за исключеніемъ $P_h' = 1$. $P_1 \,.\,.\, P_k$ или $R_1' \,.\,.\, R_l'$, какъ мы доказали, имѣютъ то свойство, что они, взятые вмѣстѣ съ R или P' за начальное мѣсто для $t = t_0$ или $t = T_0$, даютъ рѣшеніе варіаціонныхъ уравненій 12, 13, элементы котораго для $t > t_0$ или $t < T$, остаются между конечными предѣлами. Выше, однако, было доказано, что къ даннымъ $R_1 \,.\,.\, R_l$ или $P_1' \,.\,.\, P_k'$ можетъ принадлежать не болѣе чѣмъ одна система $P_1 \,.\,.\, P_k$ или $R_1' \,.\,.\, R_l'$ выше упомянутаго рода. Отсюда слѣдуетъ, что данныя $R_1 \,.\,.\, R_l$ или $P_1' \,.\,.\, P_k'$ вполнѣ опредѣляютъ также остальные элементы мѣста накопленія. Итакъ, существуетъ одно и при этомъ единственное мѣсто накопленія разсматриваемаго рода и мы получаемъ также всегда только одно и тоже мѣсто накопленія, какъ бы мы ни выбирали рядъ A или B. Слѣдовательно, $\frac{\pi_\mu}{\rho_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\rho_0}$ или $\frac{\pi_\mu}{\pi_0}$, $\frac{\rho_\nu}{\pi_0}$, образованныя для $t = t_0$ или $t = T_0$, стремятся къ $P_1 \,.\,.\, P_k\; R_1 \,.\,.\, R_l$ или $P_1' \,.\,.\, P_k'\; R_1' \,.\,.\, R_l'$, если ρ_0 или π_0 стремится къ нулю. Итакъ, мы доказали слѣдующую теорему:

Функціи $[p_1] \,.\,.\,.\, [p_k]$ или $[q_1] \,.\,.\, [q_l]$ имѣютъ производныя перваго порядка по q или p въ области 10 или 11. Эти производныя лежатъ между нѣкоторыми конечными предѣлами, зависящими только отъ таблицы величинъ a. Чтобы получить $\frac{\partial [p]}{\partial q_\varkappa}$ или $\frac{\partial [q]}{\partial p_h}$ для $t = t_0$ или $t = T_0$ и $q_1^0 \,.\,.\, q_l^0$ или $p_1^0 \,.\,.\, p_k^0$, образуемъ варіаціонныя уравненія 12, 13 для рѣшенія, соотвѣтствующаго $q_1^0 \,.\,.\, q_l^0\; t_0$ или $p_1^0 \,.\,.\, p_k^0\; T_0$. Существуетъ тогда одно и при этомъ единственное рѣшеніе варіаціонныхъ уравненій, которое для $t = t_0$ или $t = T_0$ дастъ $q_\varkappa = 1$ $q_\nu = 0$ $\nu \gtrless g$ или $p_h = 1$ $p_\mu = 0$ $\mu \gtrless h$ и для $t > t_0$ или $t < T_0$ остается между конечными предѣлами*). $p_1 \,.\,.\,.\, p_k$ или $q_1 \,.\,.\, q_l$ этого рѣшенія, образованныя для $t = t_0$ или $t = T_0$, даютъ искомыя производныя $\frac{\partial [p_1]}{\partial q_\varkappa} \,.\,.\,.\, \frac{\partial [p_k]}{\partial q_\varkappa}$ или $\frac{\partial [q_1]}{\partial p_h} \,.\,.\, \frac{\partial [q_l]}{\partial p_h}$ для $q_1^0 \,.\,.\, q_l^0\; t_0$ или $p_1^0 \,.\,.\, p_k^0\; T_0$.

Докажемъ теперь еще непрерывность разсматриваемыхъ производныхъ.

Для этой цѣли выбираемъ въ случаѣ I мѣсто $\{q_0\}$ области 10 и допущенное значеніе $t\; t_0$, въ случаѣ II мѣсто $\{p_0\}$ области 11 и допущенное значеніе $t\; T_0$. Для рѣшеній (η_1), соотвѣтствующихъ этимъ мѣстамъ и значеніямъ t, составляемъ варіаціонныя уравненія 12, 13. Кромѣ $\{q_0\}$ или $\{p_0\}$ введемъ еще мѣста $\{q_0 + \rho_0\}$ или $\{p_0 + \pi_0\}$ изъ области 10 или 11, элементы которыхъ отличаются отъ элементовъ мѣстъ $\{q_0\}$ или $\{p_0\}$ на $\rho_1^0 \,.\,.\, \rho_l^0$ или $\pi_1^0 \,.\,.\, \pi_k^0$. Также для рѣшеній (η_2), соотвѣтствующихъ новымъ мѣстамъ и $t = t_0$ или $t = T_0$, составляемъ варіаціонныя уравненія. Наконецъ, разности координатъ рѣшеній (η_2) и (η_1) для одинаковыхъ t пусть обозначаются черезъ π_μ, ρ_ν.

*) Эти предѣлы можно разсматривать какъ зависящіе только отъ таблицы величинъ a.

$|\pi_\mu|$ и $|\rho_\nu|$, какъ намъ извѣстно, можно сдѣлать сколь угодно малыми для промежутка $t > t_0$ или $t < T_0$, если только выбрать $\rho_1{}^0 \ldots \rho_1{}^0$ или $\pi_1{}^0 \ldots \pi_k{}^0$ численно достаточно малыми. (см. ур. 3, 4). Изъ сказаннаго и изъ того, что намъ извѣстно относительно непрерывности $\frac{\partial \Pi_\mu}{\partial p}$, $\frac{\partial \Pi_\mu}{\partial q}$, $\frac{\partial K_\nu}{\partial p}$, $\frac{\partial K_\nu}{\partial q}$, дальше слѣдуетъ, что можно достигнуть того, что для произвольно выбраннаго промежутка значеній $t\, t_0' > t > t_0$ или $T_0' < t < T_0$ коэффиціенты варіаціонныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ (η_2), лежатъ сколь угодно близко къ соотвѣтствующимъ коэффиціентамъ варіаціонныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ (η_1), если только предписать $|\rho_1{}^0| \ldots |\rho_l{}^0|$ или $|\pi_1{}^0| \ldots |\pi_k{}^0|$ достаточную степень малости.

Пусть разсматриваются теперь напримѣръ производныя $\frac{\partial [p]}{\partial q_x}$ или $\frac{\partial [q]}{\partial p_h}$. Чтобы получить ихъ для мѣста $\{q_0 + \rho_0\}$ или $\{p_0 + \pi_0\}$ и $t = t_0$ или $t = T_0$, слѣдуетъ отыскать то рѣшеніе варіаціонныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ $(\eta$, которое для $t = t_0$ или $t = T_0$ даетъ q_x 1 $q_\nu = 0$ $\nu \gtrless g$ или $p_h = 1$ $p_\mu = 0$ $\mu \gtrless h$ и для $t > t_0$ или $t < T_0$ остается между конечными предѣлами. Для большей ясности въ томъ случаѣ, когда рѣчь идетъ о такихъ рѣшеніяхъ варіаціонныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ (η_2), вмѣсто $p\, q$ употребляемъ знаки $\underline{p}$ $\underline{q}$. Тогда $\underline{p}_1 \ldots \underline{p}_k$ для $t = t_0$ или $\underline{q}_1 \ldots \underline{q}_l$ для $t = T_0$ даютъ искомыя производныя.

Изъ предъидущаго мы знаемъ, что рѣшеніе $\underline{p}$ $\underline{q}$ выше упомянутаго рода для $t > t_0$ или $t < T_0$ остается между конечными предѣлами, зависящими только отъ таблицы величинъ a. Обратимъ теперь наше вниманіе на рядъ системъ $(\rho_1{}^0 \ldots \rho_l{}^0)$ или $(\pi_1{}^0 \ldots \pi_k{}^0)$, элементы которыхъ стремятся къ нулю; тогда соотвѣтствующія $\underline{p}_1 \ldots \underline{p}_k$, образованныя для t t_0, или $\underline{q}_1 \ldots \underline{q}_l$, образованныя для $t = T_0$, должны имѣть, по крайней мѣрѣ, одно мѣсто накопленія $P_1 \ldots P_k$ или $Q_1' \ldots Q_l'$. Опредѣляемъ тогда то рѣшеніе v варіаціонныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ $(\eta_1$, которое для t t_0 или $t = T_0$ имѣетъ начальную систему $P_1 \ldots P_k$ $Q_1 \ldots Q_l$ или $P_1' \ldots P_k'$ $Q_1' \ldots Q'$. При этомъ $Q_x = 1$ $Q_\nu = 0$ $\nu \gtrless g$ или $P_h' = 1$ $P_\mu' = 0$ $\mu \gtrless h$.

Если выберемъ теперь какой нибудь промежутокъ $t_0' > t > t_0$ или $T_0' < t < T_0$, то между рѣшеніями $\underline{p}$ $\underline{q}$, разсмотрѣнными въ предъидущемъ, существуютъ такія, которыя для $t = t_0$ или t T отличаются сколь угодно мало отъ значеній $P_1 \ldots P_k$ $Q_1 \ldots Q_l$ или $P' \ldots P_k$ $Q_1 \ldots Q$ и удовлетворяютъ варіаціоннымъ уравненіямъ, коэффиціенты которыхъ въ промежуткѣ $t_0' > t > t_0$ или $T_0 < t < T_0$ лежатъ сколь угодно близко къ коэффиціентамъ варіаціонныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ (η_1). Если обратимъ наше вниманіе еще на то, что выше разсмотрѣнныя $\underline{p}$ $\underline{q}$ для $t > t_0$ или $t < T_0$ лежатъ между конечными предѣлами, зависящими только отъ таблицы величинъ a, то вспомогательная теорема, выведенная въ § 1 предъидущей главы, показываетъ, что между рѣшеніями $\underline{p}$ $\underline{q}$ можно найти такія, которыя въ промежуткѣ $t_0' > t > t_0$ или $T_0' < t < t_0$ лежатъ сколь угодно близко рѣшенію (v. Поэтому и это рѣшеніе (v) въ выбранномъ промежуткѣ не можетъ лежать внѣ упомянутыхъ предѣловъ. Но, такъ какъ $t_0' > t_0$ и $T_0' \angle T_0$ можно выбрать произвольно, то послѣднее замѣчаніе имѣетъ силу для всѣхъ $t > t_0$ или $t < T_0$.

Слѣдовательно, (v) именно есть то рѣшеніе варіаціонныхъ уравненій для (η_1), которое даетъ производныя $\frac{\partial [p]}{\partial q_g}$ или $\frac{\partial [q]}{\partial p_h}$ для $t = t_0$ и мѣста $\{q_0\}$ или $t = T_0$ и мѣста $\{p_0\}$. Поэтому $P_1 \ldots P_k$ или $Q_1' \ldots Q'$ опредѣляются величинами $Q_1 \ldots Q_1$ или $P_1' \ldots P_k'$ т. е. индексами g или h, если $\{q_0\}$ t_0 или $\{p_0\}$ T_0 разсматриваются какъ данныя величины. Отсюда слѣдуетъ, что $P_1 \ldots P_k$ или $Q_1' \ldots Q_l'$ представляетъ единственное мѣсто накопленія системъ $\underline{p}_1 \ldots p_k$, образованныхъ для $t = t_0$ и ряда системъ $(\rho_1^0 \ldots \rho_l^0)$ (или системъ $q_1 \ldots q_l$, образованныхъ для $t = T_0$ и ряда системъ $(\pi_1^0 \ldots \pi_k^0)$). Получается также всегда одно и то же мѣсто накопленія, независимо отъ того, какъ выбирается упомянутый рядъ. Слѣдовательно, $p_1 \ldots \underline{p}_k$, образованныя для $t = t_0$, или $q_1 \ldots q_l$, образованныя для $t = T_0$, стремятся къ $P_1 \ldots P_k$ или $Q_1' \ldots Q_l'$, если элементы мѣстъ $\{q_0 + \rho_0\}$ или $\{p_0 + \pi_0\}$ стремятся къ элементамъ мѣстъ $\{q_0\}$ или $\{p_0\}$. Другими словами: Производныя $\frac{\partial [p_1]}{\partial q_g} \ldots \frac{\partial [p_k]}{\partial q_g}$, образованныя для $t = t_0$ и мѣста $\{q_0 + \rho_0\}$, или производныя $\frac{\partial [q_1]}{\partial p_h} \ldots \frac{\partial [q_l]}{\partial p_h}$, образованныя для $t = T_0$ и мѣста $\{p_0 + \pi_0\}$, стремятся къ тѣмъ же самымъ производнымъ для $t = t_0$ $\{q_0\}$ или $t = T_0$ $\{p_0\}$, если элементы мѣста $\{q_0 + \rho_0\}$ или $\{p_0 + \pi_0\}$ стремятся къ элементамъ мѣстъ $\{q_0\}$ или $\{p_0\}$. Этимъ доказана непрерывность разсматриваемыхъ производныхъ въ области 10 или 11 для произвольно выбраннаго t.

Наконецъ, еще докажемъ, что величинамъ $\left|\frac{\partial [p]}{\partial q}\right|$ или $\left|\frac{\partial [q]}{\partial p}\right|$ можемъ дать всякую степень малости, зависящую отъ таблицы величинъ a, если предпишемъ для $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|$ въ области $-\gamma \angle x \angle \gamma$ соотвѣтствующую степень малости, зависящую отъ таблицы величинъ a.

Производныя $\frac{\partial [p]}{\partial q}$ или $\frac{\partial [q]}{\partial p}$ для $t = t_0$ или $t = T_0$ (t_0 или T_0 обозначаютъ произвольныя допущенныя значенія t) даются при помощи нѣкоторыхъ рѣшеній (варіаціонныхъ уравненій вида 12, 13), лежащихъ для $t > t_0$ или $t < T_0$ между опредѣленными предѣлами, зависящими только отъ таблицы величинъ a. Кромѣ того, вспомнимъ, что абсолютнымъ величинамъ тѣхъ коэффиціентовъ у p, q въ варіаціонныхъ уравненіяхъ 12, 13, которые встрѣчаются въ правыхъ частяхъ подъ знаками Σ, для всѣхъ $t > t_0$ или $t < T_0$ можемъ приписать произвольную степень малости, зависящую только отъ таблицы величинъ a, если только выберемъ для величинъ $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|$ въ области $-\gamma \angle x \angle \gamma$ соотвѣтствующую степень малости, зависящую только отъ таблицы величинъ a.

Теперь при помощи уравненій 12, 13 образуемъ $\frac{d}{dt} \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2$ или $\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2$. Тогда L_μ или l_ν даютъ опредѣленно положительную квадратичную форму P или Q относительно p или q, коэффиціенты которой зависятъ только отъ таблицы величинъ a. Имѣемъ, слѣдовательно, $\underline{P} > G \sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2$ или $Q > H \cdot \sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2$ причемъ $G > o$ и $H > o$ зависятъ только отъ таблицы величинъ a. Остальные члены даютъ квадратичную форму P или Q относительно p q съ коэффиціентами, абсолютнымъ величинамъ которыхъ можемъ приписать произвольную степень малости, зависящую только отъ таблицы величинъ a, если выберемъ надлежащимъ образомъ упомянутую нѣсколько разъ степень малости величинъ $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|$ въ области $-\gamma < x < \gamma$; при этомъ сказанное имѣетъ силу для всѣхъ $t > t_0$ или $t \overline{\overline{<}} T_0$.

Если теперь p, q суть рѣшенія, служащія къ опредѣленію нѣкоторыхъ производныхъ $\frac{\partial [p]}{\partial q}$ или $\frac{\partial [q]}{\partial p}$ для $t = t_0$ или $t = T_0$, то p, q для $t > t_0$ или $t \overline{\overline{<}} T_0$ остаются между выше упомянутыми предѣлами, зависящими только отъ таблицы величинъ a. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ $|P|$ или $|Q|$ можемъ дать произвольно выбранную степень малости, зависящую только отъ таблицы величинъ a, опредѣляя надлежащимъ образомъ степень малости величинъ $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|$ въ области $-\gamma < x < \gamma$. При надлежащемъ выборѣ послѣдней степени малости имѣемъ, слѣдовательно

$$\frac{d}{dt} \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \, p_\mu^2 > G \sum_{\mu=1}^{k} p_\mu^2 - P' \text{ или } \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \, q_\nu^2 > H \sum_{\nu=1}^{l} q_\nu^2 - Q'$$

причемъ $P' > o$ или $Q' > o$ можно разсматривать какъ величины, зависящія какъ намъ угодно отъ таблицы величинъ a. Если введемъ еще обозначеніе $S = \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \, p_\mu^2$ или $T = \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2$, то

$$\frac{dS}{dt} > \frac{G}{D} S - P' \text{ или } \frac{dT}{dt} > \frac{H}{|F|} |T| - Q'$$

причемъ D или $|F|$ обозначаютъ наибольшія значенія величинъ d_μ или $|f_\nu|$. Отсюда дальше слѣдуетъ

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{G}{D}t} \cdot \left[S - \frac{D}{G} \cdot P'\right]\right) > o \text{ или } \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{H}{|F|} \cdot t} \left[T + \frac{|F|}{H} Q'\right]\right) > o$$

Если, слѣдовательно, когда нибудь $S > \frac{D}{G} \cdot P'$ или $|T| > \frac{|F|}{H} Q'$, то въ случаѣ I S возрастаетъ безпредѣльно съ безпредѣльно возрастающимъ t, между тѣмъ какъ въ случаѣ II T безпредѣльно убываетъ съ безпредѣльно убывающимъ t. И то и другое противно характеру рѣшеній p или q. Итакъ, для $t > t_0$ или $t < T_0$ всегда имѣетъ мѣсто $S < \frac{D}{G} P'$ или $|T| < \frac{|F|}{H} Q'$. Отсюда слѣдуетъ $p_\mu^2 < \frac{D}{d \cdot G} \cdot P'$ или $q_\nu^2 < \frac{|F|}{|f| \cdot H} \cdot Q'$ для всѣхъ упомянутыхъ t, слѣдовательно, также для $t = t_0$ или $t = T_0$. При этомъ d и $|f|$ суть наименьшія значенія величинъ d_μ или $|f_\nu|$.

Такъ какъ $\frac{D}{d\,.\,G}$ и $\frac{|F|}{|f|\,.\,H}$ зависятъ только отъ таблицы величинъ a и не находятся подъ вліяніемъ величинъ P' или Q', то величины $\frac{D}{d\,.\,G}\,.\,P'$ или $\frac{|F|}{|f|\,.\,H}\,.\,Q'$ при помощи надлежащаго выбора P' или Q' могутъ получить произвольное положительное значеніе, зависящее только отъ величинъ a. Если теперь вспомнимъ о томъ, что p или q, образованныя для $t = t_0$ или $t = T_0$, даютъ именно разсматриваемыя производныя для $t = t_0$ или $t = T_0$, то видимъ, что наше утвержденіе справедливо.

§ 14.

Допустимъ, что область значеній t, на которой мы основываемся, дана при помощи „$t > \tau$“ или „$t < \tau$“ или „t произвольная величина.“ Въ области (G) т. е.

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu{}^2 < \delta\,.\,\gamma^2 \qquad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, q_\nu{}^2 > -\,\delta\,.\,\gamma^2 \text{ имѣемъ (см. § 8)}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu{}^2 < D_1 \sum_{\mu=1}^{k} p_\mu{}^2 - \Delta\,.\,\gamma^2 \qquad \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, q_\nu{}^2 > F_1 \sum_{\nu=1}^{l} q_\nu{}^2 - \Delta\,.\,\gamma^2$$

При этомъ D_1 и F_1 больше нуля и зависятъ только отъ таблицы величинъ a. $\Delta > o$ можетъ получить каждое положительное значеніе, зависящее отъ величинъ a, если степень малости, о которой мы говорили при введеніи предположеній, опредѣляется надлежащимъ образомъ. Очевидно имѣемъ также

$$\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu{}^2 < D_0 \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu{}^2 - \Delta\,.\,\gamma^2 \qquad \frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, q_\nu{}^2 > -F_0 \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, q_\nu{}^2 - \Delta\,.\,\gamma^2$$

причемъ D_0 и $F_0 > o$ и зависятъ только отъ величинъ a.

Опредѣлимъ теперь двѣ области величинъ p и q

$$\text{I} \quad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu{}^2 < \varepsilon\,.\,\gamma^2 \qquad\qquad \text{II} \quad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, q_\nu{}^2 > -\,\eta\,.\,\gamma^2$$

При этомъ $\varepsilon > o$ $\eta > o$ пусть выбраны произвольно, какъ величины, зависящія только отъ таблицы величинъ a. Если степень малости, о которой мы говорили при введеніи предположеній, опредѣляется надлежащимъ образомъ, то можно положить $\frac{\Delta}{D_0} < \varepsilon\ \frac{\Delta}{F_0} < \eta$. Въ этомъ случаѣ имѣемъ слѣдующее:

1) Если рѣшеніе для всѣхъ $t > T_0$*) лежитъ въ области (G), то p должны лежать въ области I.

---

*) T_0 обозначаетъ допущенное значеніе t. Упомянутый случай можетъ встрѣчаться, конечно, только тогда, если область значеній t, введенная въ началѣ этого §, опредѣляется при помощи „$t > \tau$“ или „t произвольная величина.“

Въ самомъ дѣлѣ. Допустимъ, что когда нибудь $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \varepsilon . \gamma^2$ и слѣдовательно

$$\frac{d}{dt} \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2 > \gamma^2 [D_0 \varepsilon - \Delta] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{III}$$

Выраженіе въ скобкахъ больше нуля. Слѣдовательно, $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2$ для разсматриваемаго значенія t возрастаетъ съ возрастающимъ t. Отсюда, очевидно, слѣдуетъ, что III также для большихъ t имѣетъ мѣсто всегда. Итакъ, $\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu p_\mu^2$ возрастало бы беспредѣльно, что не можетъ быть.

Замѣтимъ еще: Если при этомъ q когда нибудь лежатъ въ области II, то тоже самое имѣетъ мѣсто для большихъ t. Ибо въ иномъ случаѣ мы имѣли бы для нѣкотораго t $\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 = -\eta \gamma^2$, между тѣмъ какъ для меньшихъ достаточно близкихъ t было бы $\sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 > -\eta . \gamma^2$. Но тогда мы имѣли бы также для упомянутаго значенія t $\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu q_\nu^2 > F_0 . \eta . \gamma^2 - \Delta . \gamma^2 > 0$, что противно тому, что мы сказали раньше.

2) Если рѣшеніе для всѣхъ $t \leq T_0$ лежитъ въ области (G), то q должны лежать въ области II. Если при этомъ p когда нибудь лежатъ въ I, то для всѣхъ меньшихъ t имѣетъ мѣсто тоже самое. Доказывается это аналогично 1).

При предъидущихъ соображеніяхъ предполагается, что группы p и q обѣ существуютъ. Въ противномъ случаѣ въ предъидущемъ слѣдуетъ пропустить все, что относится къ не существующей группѣ.

§ 15.

Въ этомъ § сдѣлаемъ нѣкоторыя замѣчанія относительно представленія рѣшеній, разсмотрѣнныхъ въ предъидущемъ. Можно при этомъ ограничиться тѣмъ случаемъ, когда мы основываемся на области значеній t „$t > \tau$“ или „t произвольная величина“, такъ какъ изслѣдованіе для области „$t < \tau$“ въ сущности не дало бы ничего новаго. Кромѣ того для краткости мы не разсматриваемъ случаевъ, въ которыхъ исчезаетъ одна изъ группъ p или q.

Чтобы не прервать хода дальнѣйшаго изслѣдованія, укажемъ сначала на нѣкоторыя простыя предложенія, которыя употребляются впослѣдствіи.

Пусть дана система линейныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx_i}{dt} = L_i (x) + \xi_i; \qquad (i = 1,2 \,.\,.\, n) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1$$

При этомъ L_i обозначаютъ однородныя линейныя выраженія относительно x того же самаго рода какъ линейные члены, встрѣчающіеся въ уравненіяхъ 1) § 8. ξ_i суть непрерывныя функціи t, которыя даны для „$t \gtrless t_0$“ или „t произвольная величина“ и остаются для этихъ значеній между конечными предѣлами.

Можно разсматривать уравненія 1) какъ частный случай уравненій 1) § 8, причемъ только слѣдуетъ выбрать γ достаточно большимъ. Если поэтому выберемъ произвольное допущенное значеніе t t_1 и произвольную систему $q_1{}^0\ q_2{}^0 \ldots q_l{}^0$, то, очевидно, существуетъ рѣшеніе уравненій 1), которое для $t > t_1$ остается между конечными предѣлами и для $t = t_1$ даетъ $q_1 = q_1{}^0 \ldots q_l = q_l{}^0$. [$q_1 \ldots q_l$ при этомъ суть намъ извѣстныя линейныя выраженія относительно x]. Это и есть единственное такое рѣшеніе уравненій 1). Если мы основываемся на области „t произвольная величина“, то существуетъ рѣшеніе уравненій $1)_1$ остающееся для всѣхъ t между конечными предѣлами. Это единственное рѣшеніе такого рода.

Чтобы представить характеризованныя рѣшенія, образуемъ уравненія для p и q. Они распадаются на системы вида

$$\frac{dz_1}{dt} = \lambda z_1 + \zeta_1$$

$$\frac{dz_2}{dt} = z_1 + \lambda z_2 + \zeta_2$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$\frac{dz_\nu}{dt} = z_{\nu-1} + \lambda z_\nu + \zeta_\nu$$

или

$$\frac{du_1}{dt} = gu_1 - hv_1 - \psi_1 \qquad \frac{dv_1}{dt} = gv_1 + hu_1 + \varphi_1$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_1 + gu_2 - hv_2 + \psi_2 \qquad \frac{dv_2}{dt} = v_1 + gv_2 + hu_2 + \varphi_2$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \qquad\qquad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$\frac{du_\rho}{dt} = u_{\rho-1} + gu_\rho - hv_\rho + \psi_\rho \qquad \frac{dv_\rho}{dt} = v_{\rho-1} + gv_\rho + hu_\rho + \varphi_\rho$$

При этомъ p соотвѣтствуютъ положительнымъ λ и g. q отрицательнымъ. ζ, ψ, φ суть функціи t, которыя для „$t \gtrless t_0$“ или „t произвольная величина“ остаются между конечными предѣлами.

Если рѣчь идетъ о представленіи рѣшенія уравненій 1), которое для $t > t_1$ остается между конечными предѣлами и для $t = t_1$ удовлетворяетъ условіямъ $q_1 = q_1{}^0 \ldots q^l = q_{l0}$, то q опредѣлены вслѣдствіе данныхъ начальныхъ значеній $q_1{}^0 \ldots q_l{}^0$. На сколько дѣло идетъ о величинахъ p, задача очевидно сводится къ разсматриванію уравненій вида

$$\text{I}\ \frac{dz}{dt} = \lambda z + \zeta \ \text{или II}\ \frac{du}{dt} = gu - hv + \psi \quad \frac{dv}{dt} = gv + hu + \varphi$$

λ и g при этомъ больше нуля, ζ или ψ, φ обозначаютъ для $t > t_1$ непрерывныя функціи t, остающіяся для этихъ значеній между конечными предѣлами, и слѣдуетъ отыскать рѣшеніе, которое для $t > t_1$ остается между конечными предѣлами.

Для I получается въ этомъ случаѣ

$$z = -e^{\lambda t}\int_t^\infty e^{-\lambda t} \cdot \zeta \cdot dt$$

Для II имѣемъ

$$u = -\int_t^{\infty} e^{-g(y-t)} \left[\cos h(y-t) \,.\, \psi(y) + \sin h(y-t) \;\varphi(y)\right] dy$$

$$v = \int_t^{\infty} e^{-g(y-t)} \left[\psi(y) \sin h(y-t) - \varphi(y) \cos h(y-t)\right] dy$$

Если съ другой стороны рѣчь идетъ о рѣшеніи уравненій 1), остающемся для всѣхъ t между конечными предѣлами, то задача также сводится къ разсматриванію уравненій вида I и II. Но при этомъ величины λ или g могутъ быть также меньше нуля. Непрерывныя функціи ζ, ψ, φ для всѣхъ t остаются между конечными предѣлами и слѣдуетъ отыскать рѣшеніе, остающееся для всѣхъ t между конечными предѣлами.

Искомыя рѣшенія въ случаѣ положительнаго λ или g имѣютъ точно вышеупомянутый видъ, въ случаѣ же отрицательнаго λ или g знакъ $\int_t^{\infty}$ слѣдуетъ замѣнить черезъ $\int_t^{-\infty}$.

Дальнѣйшее замѣчаніе относится къ дополненію результатовъ, найденныхъ въ первой половинѣ § 11. Встрѣчающіяся тамъ обозначенія и предположенія употребляемъ и теперь*) и выведемъ нѣкоторыя слѣдствія, которыя основываются на предположеніи, что для нѣкотораго $t = T_0$ имѣемъ $q_1 = q_2 = \ldots = q_l = o$.

Въ упомянутомъ случаѣ получается для $t = T_0$ $s = \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \, p_\mu^{\,2} < c \,.\, \sigma_0^2$. [О значеніи c см. § 11]. Отсюда дальше слѣдуетъ для $t = T_0$ $\sigma^2 < \frac{c}{d_0} \,.\, \sigma_0^2$, причемъ d_0 обозначаетъ наименьшее значеніе величинъ d_μ. Вспомнивъ теперь теоремы § 11 и значеніе величины σ_0, обративъ кромѣ того наше вниманіе на то, что $\frac{c}{d_0} > o$ зависитъ только отъ таблицы величинъ a, получаемъ для $t > T_0$ $\sigma \angle h_0 \, d$, причемъ $h_0 > o$ зависитъ только отъ таблицы величинъ a. [О значеніи величины d въ этой формулѣ см. § 11]. Отсюда дальше слѣдуетъ для $t > T_0$ $|x_i| < e \,.\, d$ $(i = 1, 2 \ldots n)$, причемъ $e \mathrel{7} o$ также зависитъ только отъ таблицы величинъ a.

Область $-\gamma \angle x_i \angle \gamma$ $(i = 1, \ldots n)$, которая не разъ встрѣчается впослѣдствіи, обозначимъ при помощи (X).

Обратимъ теперь наше вниманіе на рѣшеніе дифференціальныхъ уравненій 1) § 8, которое для $t \mathrel{7} \tau_0$ (τ_0 обозначаетъ допущенное значеніе t) остается въ области (X). Кромѣ того пусть дано „приближенное рѣшеніе" дифференціальныхъ уравненій 1) § 8, координаты котораго относятся къ области $t \mathrel{7} \tau_0$, имѣютъ въ ней конечныя и непрерывныя производныя, лежатъ въ области (X) и удовлетворяютъ уравненіямъ 1) § 8 съ погрѣшностью, численно меньшей нѣкотораго числа $d \mathrel{7} o$. Кромѣ того приближенное рѣшеніе для нѣкотораго значенія $t = T_0$ пусть даетъ тѣ же самыя значенія q, какъ выше упомянутое точное рѣшеніе.

*) Наши соображенія при этомъ относятся къ области значеній t „$t > \tau$" или „t произвольная величина". Мы предполагаемъ, что группа p и группа q существуютъ. (см. замѣчаніе въ началѣ этого §).

Если теперь указываемъ на элементы приближеннаго рѣшенія при помощи x_0, на элементы точнаго рѣшенія при помощи $x_0 + z$, то уравненія 1) § 8 даютъ

$$\frac{dz_i}{dt} = L_i(z) + \xi_i(x_0 + z) - \xi_i(x_0) + r_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

$$(i = 1, 2 \ . \ . \ n)$$

причемъ L_i суть тѣ же самыя линейныя выраженія, которыя встрѣчаются въ уравненіяхъ 1) § 8, и $|r_i| \angle d$.

Если $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|$ согласно съ предположеніями дается достаточная степень малости (см. § 8), то имѣютъ силу утвержденія вспомогательной теоремы въ § 11 относительно функцій z. Если, слѣдовательно, обозначимъ черезъ $p\ q$ величины, зависящія такимъ же образомъ отъ z какъ p, q отъ x, если кромѣ того обратимъ наше вниманіе на то, что для $t = T_0$ $\sum\limits_{\nu=1}^{l} q_\nu^2 = o$, то находимъ для $t > T_0$ $|z| \angle e.d$, причемъ $e \mathrel{\overline{>}} o$ зависитъ только отъ таблицы величинъ a.

При помощи этого предложенія можно судить о достигнутомъ приближеніи.

Если введемъ область

$$\text{III} \quad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu\, p_\mu^{\,2} \angle \delta_1\, \gamma^2 \qquad\qquad \text{IV} \quad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu\, q_\nu^{\,2} \mathrel{\overline{>}} -\delta_2\, \gamma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

причемъ δ_1 и δ_2 суть произвольно выбранныя величины, зависящія, однако, только отъ таблицы величинъ a и удовлетворяющія условіямъ $\delta > \delta_1 \mathrel{\overline{>}} o$ $\delta > \delta_2 > o$, то можно (см. § 14) выбрать степень малости, о которой мы говорили при введеніи предположеній, такимъ образомъ, что имѣетъ силу слѣдующее предложеніе: Каждой системѣ величинъ q изъ области IV и каждому допущенному значенію $t\ T_0$ соотвѣтствуетъ одна, и при томъ единственная, система величинъ p изъ области III, дающая (если возьмемъ ее вмѣстѣ съ упомянутою системою q за начальное мѣсто для $t = T_0$) рѣшеніе, которое для $t > T_0$ остается въ области 3).

Выберемъ δ_1 и δ_2 согласно съ упомянутыми условіями опредѣленнымъ образомъ, и при этомъ такъ, что всѣ $|x|$, соотвѣтствующія системѣ p, q области 3), меньше чѣмъ $\frac{\gamma}{2}$. Затѣмъ часто помянутая степень малости пусть выбирается на основаніи данныхъ δ_1 и δ_2 такимъ образомъ, что имѣетъ силу упомянутое предложеніе. Это опредѣленіе однако пусть относится только къ этому §.

Пусть даны теперь система величинъ q $(q)_0$ изъ области IV и допущенное значеніе $t\ T_0$. Обратимъ наше вниманіе на рѣшеніе, которое для $t > T_0$ остается въ области 3) и координаты q котораго для $t = T_0$ даютъ $(q)_0$. Это рѣшеніе можемъ продолжать для $t \angle T_0$ такимъ образомъ, что оно остается въ области (X), если ограничиваемся значеніями t достаточно близкими къ T_0. Кромѣ того пусть дано для $t \mathrel{\overline{>}} \tau_0$ „приближенное рѣшеніе“ (въ томъ же самомъ смыслѣ, какъ и прежде), причемъ τ_0 пусть лежитъ такъ близко къ значенію T_0, что также только что характеризованное „точное рѣшеніе“ съ продолженіемъ имѣетъ опредѣленный смыслъ для $t \mathrel{\overline{>}} \tau_0$. Пусть кромѣ того d при этомъ имѣетъ такъ малое значеніе, что

e. d $\angle \frac{\gamma}{4}$ или d $\angle \frac{\gamma}{4}$. Для $t > T_0$ имѣемъ по предъидущему $|x_0 + z| \angle \frac{\gamma}{2}$, $|z| \angle e \cdot d \angle \frac{\gamma}{4}$, слѣдовательно $|x_0| \angle \frac{3}{4}\gamma$.

Теперь образуемъ

$$\frac{d\bar{z}_i}{dt} = L_i(\bar{z}) + r_i \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \quad 4$$

и опредѣляемъ рѣшеніе уравненій 4), которое для $t = T_0$ даетъ $\underline{q}_1 = \ldots = \underline{q}_l = o$ ($\underline{q}$ образованы изъ z, какъ q изъ x) и для $t \gtreqless T_0$ остается между конечными предѣлами. Такъ какъ для $t \gt \tau_0$ $|r_i| \angle d$, то по вспомогательной теоремѣ, доказанной въ началѣ этого §, имѣемъ для $t > T_0$ $|\bar{z}| \angle ed$, слѣдовательно также $|\bar{z}| \angle \frac{\gamma}{4}$ и $|x_0 + \bar{z}| \angle \gamma$. Послѣднее неравенство и $|\bar{z}| \angle ed$ очевидно имѣютъ мѣсто также еще для нѣкотораго промежутка $\tau_0 \angle \tau_1 \angle t \angle T_0$.

Возьмемъ теперь $x_0 + \bar{z}$ за „приближенное рѣшеніе" для $t \gt \tau_1$. Можно это сдѣлать, такъ какъ $x_0 + \bar{z}$ для $t \gt \tau_1$ лежатъ внутри области (X) и такъ какъ величины, образованныя изъ нихъ, какъ q изъ x, для $t = T_0$ даютъ элементы мѣста $(q)_0$. Имѣемъ тогда уравненія вида

$$\frac{d(x_{0i} + \bar{z}_i)}{dt} = L_i(x_0) - r_i + \xi_i(x_0) + L_i(\bar{z}) + r_i =$$
$$= L_i(x_0 + \bar{z}) + \xi_i(x_0 + \bar{z}) - [\xi_i(x_0 + \bar{z}) - \xi_i(x_0)] \quad \ldots \ldots \quad 5$$
$$(i = 1, 2 \ \ldots \ n)$$

причемъ $x_{01} \ldots x_{0n}$ суть элементы „приближеннаго рѣшенія", характеризованнаго до сихъ поръ при помощи x_0.

Предположимъ теперь, что для области (X) и всѣхъ допущенныхъ t $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| < \Delta$, причемъ $\Delta > o$ зависитъ только отъ таблицы величинъ a. Если обозначимъ тогда $\xi_i(x_0 + \bar{z}) - \xi_i(x_0)$ при помощи $\bar{r}_i$, то получается для $t \gt \tau_1$ $|\bar{r}_i| \angle n.\ e.\ \Delta.\ d.$ Но можно $\Delta \gt o$ опредѣлить произвольно какъ число, зависящее отъ таблицы величинъ a, такъ какъ имѣемъ право, выбрать упомянутую нѣсколько разъ степень малости, соблюдая при этомъ извѣстныя условія, а впрочемъ произвольно. Выберемъ $\Delta \gt o$ такимъ образомъ, что $\omega = n \cdot e \cdot \Delta \angle {}^1/_2$. Получаемъ тогда слѣдующее:

Если мы нашли „приближенное рѣшеніе" x_0 вышеупомянутаго рода, то приближеніе для $t > T_0$ характеризуется при помощи $|x_i - x_{0i}| < ed$, причемъ e есть число, зависящее только отъ таблицы величинъ a. Можно тогда при помощи упомянутаго рѣшенія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій 4) найти второе приближенное рѣшеніе того же самаго рода, которое, однако, удовлетворяетъ дифференціальнымъ уравненіямъ съ погрѣшностью, численно меньшею чѣмъ $\omega \cdot d$, причемъ $\omega \gt o$ меньше чѣмъ 1 и зависитъ только отъ таблицы величинъ a. Вслѣдствіе этого приближеніе для $t > T_0$ теперь характеризуется при помощи $e \cdot \omega \cdot d$. При помощи изложенныхъ дѣйствій находимъ тогда дальше приближенное рѣшеніе того же самаго рода; уклоненіе этого рѣшенія для $t > T_0$ характеризуется при помощи $e \cdot \omega^2 \cdot d$ и т. д. Такъ какъ $\omega \angle 1$ и $\gt o$, то поэтому достигается **какое угодно** приближеніе для области $t \gtreqless T_0$.

Займемся теперь нахожденіемъ перваго „приближеннаго рѣшенія“. Для этой цѣли составимъ уравненія

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = L_i\,(\bar{x}) + \xi_{i0} \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6$$

причемъ ξ_{i0} представляетъ значеніе ξ_i (см. ур. 11 § 8) для $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = o$, и интегрируемъ ихъ при помощи рѣшенія, остающагося для $t > T_0$ между конечными предѣлами. При этомъ величины, образованныя изъ $\bar{x}$, какъ q изъ x, для $t = T_0$ пусть равняются элементамъ мѣста $(q)_0$.

Впрочемъ ясно, что $\bar{p}$ $\bar{q}$, т. е. величины, образованныя изъ $\bar{x}$, какъ p и q изъ x, для $t > T_0$ [и слѣдовательно также для нѣкоторой области $t > T_1 < T_0$] остаются въ области 3). Ибо уравненія 6) представляютъ частный случай уравненій 1) § 8 и удовлетворяютъ предположеніямъ, сдѣланнымъ до сихъ поръ относительно степени малости, введенной въ § 8. При этомъ γ также есть тоже самое число, какъ въ случаѣ первоначальныхъ уравненій.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что для $t > T_1$ $|\bar{x}| < \frac{\gamma}{2}$. Если теперь подставимъ $\bar{x}$ въ данныя уравненія, то послѣднія удовлетворяются, если пропустить выраженія $\xi_i\,(\bar{x}) - \xi_{i0}$. Но имѣемъ $|\xi_i\,(\bar{x}) - \xi_{i0}| < n\,.\,\Delta\,.\,\frac{\gamma}{2} = \omega\,.\,\frac{\gamma}{2e} < \frac{\gamma}{4e}$. Итакъ, приближенное рѣшеніе $\bar{x}$ удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ.

Предполагая теперь, что наше изслѣдованіе относится къ области „t произвольная величина“, разсмотримъ представленіе того рѣшенія, которое всегда остается въ области $-\gamma < x_i < \gamma$.

Если выберемъ часто упомянутую степень малости надлежащимъ образомъ, то по § 14 можно достигнуть, что для разсматриваемаго рѣшенія всегда имѣемъ $|x| < \frac{\gamma}{2}$.

Представимъ себѣ теперь „приближенное рѣшеніе“ x_0*), остающееся въ области (X) и удовлетворяющее дифференціальнымъ уравненіямъ, если пропустить величины r_i, численно меньшія чѣмъ $d > o$. Отсюда слѣдуетъ, что разности между x разсматриваемаго точнаго рѣшенія и x_0 численно $< e_1\,.\,d$, причемъ $e_1 > o$ зависитъ только отъ таблицы величинъ **a**. Это слѣдуетъ изъ вспомогательной теоремы § 11, если часто упомянутая степень малости опредѣляется надлежащимъ образомъ.

Предположимъ $d < \frac{\gamma}{4e_1}$. Тогда всегда $|x_0| < {}^3/_4\,\gamma$. Дальше составимъ дифференціальныя уравненія 4) для $\bar{z}$ и опредѣлимъ то рѣшеніе ихъ, которое всегда остается между конечными предѣлами. Элементы упомянутаго рѣшенія по предъидущему численно $< e_1\,.\,d$. Слѣдовательно, имѣемъ также $|\bar{z}| < \frac{\gamma}{4}$. $x_0 + \bar{z}$, слѣдовательно, остаются въ области (X) для всѣхъ t. Если возьмемъ $x_0 + \bar{z}$ за „приближенное рѣшеніе“, то оно удовлетворяетъ дифференціальнымъ уравненіямъ съ погрѣшностью численно меньшею чѣмъ $n\,.\,e_1\,.\,d\,.\,\Delta_1$, если $\Delta_1 > o$

---

*) x_0 пусть даны для всѣхъ t и пусть имѣютъ для этихъ значеній конечныя непрерывныя производныя.

обозначаетъ число, зависящее только отъ таблицы величинъ a, и для области (X) и всѣхъ вводится условіе $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| \angle \Delta_1$. Выберемъ $\Delta_1 \nearrow o$ такимъ образомъ, что имѣемъ $\omega_0 = n \;\; e_1 . \Delta_1 < 1/2$ Тогда новое приближенное рѣшеніе удовлетворяетъ дифференціальнымъ уравненіямъ съ погрѣшностью численно меньшею чѣмъ $\omega_0 . d$, причемъ $\omega_0 \angle 1$. Уклоненіе новаго приближеннаго рѣшенія отъ разсматриваемаго точнаго рѣшенія характеризуется, слѣдовательно, при помощи $e_1 . \omega_0 . d$.

Продолжая такимъ же образомъ наши соображенія, получаемъ рѣшеніе, уклоненіе котораго характеризуется при помощи $e_1 . \omega_0^2 . d$ и т. д. Можно, слѣдовательно, достигнуть какого угодно приближенія.

Остается, слѣдовательно, еще, отыскать первое приближенное рѣшеніе, для котораго $d \angle \frac{\gamma}{4e_1}$.

Для этой цѣли образуемъ уравненія вида 6), причемъ ξ_{i0} обозначаетъ значеніе ξ_i для $x_1 = . . = x_n = o$. Эти уравненія интегрируемъ при помощи рѣшенія, остающагося для всѣхъ t между конечными предѣлами. Аналогичнымъ образомъ, какъ въ случаѣ предъидущаго разсматриванія уравненій 6), слѣдуетъ тогда, что для введеннаго рѣшенія всегда имѣемъ $|\overline{x}| \angle \frac{\gamma}{2}$ и что оно удовлетворяетъ дифференціальныя уравненія 1) § 8, если пропустить выраженія вида $\xi_i(\overline{x}) - \xi_{i0}$. Но теперь имѣемъ $|\xi_i(\overline{x}) - \xi_{i0}| \angle n . \Delta_1 . \frac{\gamma}{2} = \omega_0 . \frac{\gamma}{2e_1} \angle \frac{\gamma}{4e_1}$. Итакъ, выбранное рѣшеніе уравненій 6) удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ, относящимся къ выше характеризованному первому приближенному рѣшенію.

§ 16.

Теорема, которая доказывается въ этомъ §, служитъ основаніемъ для изслѣдованій слѣдующаго §. Впрочемъ, изъ нея, какъ легко видѣть, слѣдуетъ фундаментальная теорема*) изъ теоріи неявныхъ функцій, относящаяся къ существованію этихъ функцій.

Въ области

$$\text{I.} \quad \Sigma\, a_{ij}\, y_i\, y_j < p \qquad\qquad \text{II.} \quad -\alpha_1 \leqq x_1 \leqq \alpha_1$$

пусть даны m функцій $f_\mu\,(y_1 . . y_m\; x_1 . . x_n)$ $m + n$ перемѣнныхъ $y_1 . . y_m\; x_1 . . x_n$. $p, \alpha_1 . . . \alpha_n$ при этомъ суть положительныя числа, $\Sigma\, a_{ij}\, y_i\, y_j$ опредѣленно положительная квадратичная форма. Для каждой отдѣльной системы величинъ x изъ области II f пусть суть непрерывныя функціи y и имѣютъ въ области $\Sigma\, a_{ij}\, y_i\, y_j \angle p$ частныя производныя перваго порядка по y, которыя также суть непрерывныя функціи y. Функціональный опредѣлитель D функцій f по y пусть отличается отъ нуля и пусть $\left|\frac{\triangle}{D}\right| \angle \delta$, причемъ $\triangle$ обозначаетъ какой нибудь миноръ высшаго порядка опредѣлителя D, между тѣмъ какъ δ есть

*) Доказали ее: Dini, Peano, Kneser (при другихъ предположеніяхъ), Schwartz. Если имѣемъ въ виду только эту теорему, то можемъ упростить наши соображенія.

положительное число, которое относится ко всѣмъ y и x нашей области. Кромѣ того каждая производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ для двухъ мѣстъ $y_1' \ldots y_m'\ x_1 \ldots x_n$ $y_1'' \ldots y_m''\ x_1 \ldots x_n$ пусть принимаетъ значенія, отличающіяся менѣе чѣмъ на $\varepsilon = \frac{1}{3\,m^2\,\delta}$. Наконецъ пусть

$$\sum_{\mu=1}^{m} \left[f_\mu\ (o \ldots o\ x_1 \ldots x_n)\right]^2 < \frac{m \cdot \varepsilon^2 \cdot p}{Q},$$

причемъ Q есть такое положительное число, что $\Sigma\, a_{ij}\, y_i\, y_j < Q \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu^2$. [Такое число, какъ извѣстно, можно получить напримѣръ при помощи нѣкотораго уравненія m-ой степени]

Тогда для каждой системы величинъ x изъ области II существуетъ такая система величинъ y изъ области $\Sigma\, a_{ij}\, y_i\, y_j \angle\, p$, что удовлетворяются уравненія

$$f_\mu\ (y_1 \ldots y_m\ x_1 \ldots x_n) = o \qquad (\mu = 1, 2 \ldots m)$$

Эта система величинъ y есть также единственная изъ области I, удовлетворяющая упомянутымъ уравненіямъ.

Чтобы доказать нашу теорему, воспользуемся сначала уравненіями

$$f_i\ (y_1' \ldots y_m'\ x_1 \ldots x_n) - f_i\ (y_1'' \ldots y_m''\ x_1 \ldots x_n) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_\mu''}\,(y_\mu' - y_\mu'') + \sum_{\mu=1}^{m} p_{i\mu}\,(y_\mu' - y_\mu'')$$

[(i = 1, 2 .. m. Мѣсто $y_1'' \ldots y_m''$ лежитъ въ области $\Sigma\, a_{ij}\, y_i\, y_j \angle\, p$)

вытекающими изъ формулы Тэйлора*), причемъ $|p_{i\mu}| \angle\, \varepsilon$. Умножимъ эти уравненія на $\triangle_{i\nu}$, причемъ $\triangle_{i\nu}$ есть тотъ миноръ опредѣлителя

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1''} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2''} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m''} \\ - & - & - & - \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1''} & \frac{\partial f_m}{\partial y_2''} & \ldots & \frac{d f_m}{\partial y_m''} \end{vmatrix}$$

который принадлежитъ къ i-ой строкѣ и ν-ому столбцу. Тогда, если образуемъ сумму по i и раздѣлимъ на D

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\triangle_{i\nu}}{D}\Big(f_i\ (y_1' \ldots y_m'\ x_1 \ldots x_n) - f_i\ (y_1'' \ldots y_m''\ x_1 \ldots x_n)\Big) = y_\nu' - y_\nu'' + \sum_i \sum_\mu \frac{\triangle_{i\nu}}{D}\, p_{i\mu}\,(y_\mu' - y_\mu'')$$

Отсюда слѣдуетъ, такъ какъ $\left|\frac{\triangle}{D}\right| \angle\, \delta$,

$$\delta \cdot \sum_{i=1}^{m} |\, f_i\ (y', x) - f_i\ (y'', x)| \geqq |\, y_\nu' - y_\nu''\,| - \delta \cdot \varepsilon \cdot m \sum_{\mu=1}^{m} |\, y_\mu' - y_\mu''\,|$$

---

*) Что теорема Тэйлора примѣнима въ нашемъ случаѣ, слѣдуетъ изъ слѣдующаго замѣчанія. Если $[y_\mu']$, $[y_\mu'']$ суть два различныя мѣста области $\Sigma\, a_{ij}\, y_i\, y_j < p$, то $[y_\mu'' + t\,(y_\mu' - y_\mu'')]$ для $o < t < 1$ представляетъ мѣсто въ области $\Sigma\, a_{ij}\, y_i\, y_j < p$. Что это дѣйствительно такъ, легко заключаемъ изъ того обстоятельства, что $\Sigma\, a_{ij}\, y_i\, y_j$ по предположенію есть опредѣленно положительная форма.

При этомъ имѣемъ знакъ $=$ только тогда, если всѣ $y_\mu' - y_\mu''$ равняются нулю. Если образуемъ теперь сумму по ν и обозначимъ $\sum_{\mu=1}^{m} | y_\mu' - y_\mu'' | = S$, то получимъ

$$m \,.\, \delta \,.\, \sum_i | f_i (y' x) - f_i (y'' x) | \geqq S (1 - \delta \,.\, \varepsilon \,.\, m^2)$$

$$m \, \delta \,.\, \sum_i | f_i (y' x) - f_i (y'' x) | \geqq \frac{2}{3} S \quad \ldots \ldots \; 1$$

Изъ этого заключаемъ, что, если для системы величинъ y изъ области $\Sigma a_{ij} y_i y_j < p$ и системы $x_1 \ldots x_n$ f_μ всѣ исчезаютъ, то эта система величинъ y есть единственная изъ области I, которая съ $x_1 \ldots x_n$ даетъ уравненія $f = o$. Ибо въ другомъ случаѣ мы имѣли бы двѣ различныя системы величинъ y, которыя должны были бы удовлетворять условію 1), между тѣмъ какъ одновременно $f_i (y' x) = f_i (y'' x) = o$. Отсюда, однако, слѣдуетъ $o \geqq \frac{2}{3} S$ и поэтому $S = o$, такъ что системы величинъ y не были бы различными.

Итакъ остается только доказать существованіе системы величинъ y (изъ области $\Sigma a_{ij} y_i y_j < p$), которая соотвѣтствуетъ $x_1 \ldots x_n$ такимъ образомъ, что $f_\mu (y, x) = o$ $(\mu = 1, 2 \ldots m)$.

Для этой цѣли доказываемъ сначала, что для каждой системы величинъ y изъ области $\Sigma a_{ij} y_i y_j = p$ имѣетъ силу неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} [f_i (y_1 \ldots y_m \, x_1 \ldots x_n)]^2 > \frac{m \,.\, \varepsilon^2 \,.\, p}{Q} \quad \ldots \ldots \; 2$$

независимо отъ значеній величинъ x.

Въ самомъ дѣлѣ. Предположимъ въ видѣ опыта, что это условіе не удовлетворяется въ особенномъ случаѣ, такъ что, слѣдовательно, для нѣкоторой системы $y_1 \ldots y_m$ $x_1 \ldots x_n$ имѣетъ мѣсто зависимость

$$\sum_{i=1}^{m} [f_i (y, x)]^2 \leqq \frac{m \, \varepsilon^2 \, p}{Q}$$

между тѣмъ какъ одновременно $\Sigma a_{ij} y_i y_j = p$. Примѣнимъ тогда формулу 1), положивъ $y_1' = y_1 \ldots y_m' = y_m$, $y_1'' = y_2'' \ldots = y_m'' = o$. Это даетъ

$$m \,.\, \delta \,.\, \sum_{i=1}^{m} (| f_i (y, x) | + | f_i (o, x) |) > \frac{2}{3} \sum_{\mu=1}^{m} | y_\mu |$$

и дальше

$$m \,.\, \delta \,.\, \sqrt{m} \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i (y\, x))^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i (o\, x))^2} \right] > \frac{2}{3} \sqrt{\sum_{\mu=1}^{m} y_\mu^2}$$

Но по предположенію имѣемъ $\sum_{i=1}^{m} [f_i (o, x)]^2 \leqq \frac{m \,.\, \varepsilon^2 \,.\, p}{Q}$. Кромѣ того

$$p = \Sigma a_{ij} y_i y_j \leqq Q \,.\, \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu^2.$$

Итакъ

$$2\,m\,\delta\sqrt{m}\,.\,\frac{\sqrt{m}\,.\,\varepsilon\,.\sqrt{p}}{\sqrt{Q}} > \frac{2}{3}\,.\,\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{Q}}$$

откуда, обращая наше вниманіе на значеніе ε, заключаемъ

$$\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{Q}} > \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{Q}}$$

Во избѣжаніе этого противорѣчія мы должны, слѣдовательно, признать неравенство 2) справедливымъ. Если, слѣдовательно, y удовлетворяютъ уравненію $\Sigma\, a_{ij}\, y_i\, y_j = p$, то имѣемъ

$$\sum_{i=1}^{m} \left[f_i\,(y,\,x)\right]^2 > \sum_{i=1}^{m} \left[f_i\,(o,\,x)\right]^2 \quad \ldots\ldots \quad 3$$

такъ какъ лѣвая часть $> \frac{m\varepsilon^2 p}{Q}$, правая $< \frac{m\varepsilon^2 p}{Q}$.

Величина $\omega = \sum_{i=1}^{m} \left[f_i\,(y,\,x)\right]^2$ для опредѣленной, произвольно выбранной системы величинъ x изъ области II и величинъ y области I по крайней мѣрѣ для одного мѣста области I должна принимать наименьшее значеніе — вслѣдствіе непрерывности. Для этого мѣста не можетъ быть однако $\Sigma\, a_{ij}\, y_i\, y_j = p$ вслѣдствіе неравенства 3); имѣемъ для упомяннутаго мѣста $\Sigma\, a_{ij}\, y_i\, y_j < p$. Отсюда слѣдуетъ, что для этого мѣста исчезаютъ всѣ частныя производныя $\frac{\partial\,\omega}{\partial\,y}$. Имѣемъ, слѣдовательно, уравненія

$$\sum_{i=1}^{m} f_i\,.\,\frac{\partial\,f_i}{\partial\,y_\mu} = o \qquad (\mu = 1,\,2\,\ldots\,m)$$

Но, такъ какъ функціональный опредѣлитель функцій f по y не исчезаетъ, то изъ этихъ уравненій слѣдуетъ, что для упомянутаго мѣста $f_1 = f_2 = \ldots f_m = o$.

Итакъ, наша теорема доказана.

§ 17.

Въ этомъ § мы дадимъ нашимъ предположеніямъ частный видъ и затѣмъ изложимъ приложеніе найденной теоремы. Эти болѣе узкія предположенія, которыя, впрочемъ, пусть относятся только къ этому §, слѣдующія:

Пусть дана та же самая система дифференціальныхъ уравненій какъ прежде (см. § 8); пусть остаются въ силѣ также условія, которымъ подчинена эта система въ предыдущемъ, и положимъ въ основаніе нашихъ изслѣдованій, напримѣръ, промежутокъ $t > \tau$ (или t произвольная величина). Кромѣ того пусть даны l функцій $\varphi_i\,(u_1\,\ldots\,u_k\;v_1\,\ldots\,v_l)$ $(i = 1,\,2\,\ldots\,l)$ (l, k какъ до сихъ поръ обозначаютъ количество величинъ*) q или p). Эти φ въ нѣкоторой окрестности мѣста $o\,\ldots\,o\;\;o\,\ldots\,o$ пусть будутъ непрерывныя функціи, имѣющія (также непрерывныя) частныя производныя перваго порядка. Для $u_1 = u_2 \ldots = u_k = v_1 = \ldots = v_l = o$ пусть исчезаютъ всѣ φ, но функціональный опредѣлитель функцій φ по v для этой системы значеній пусть отличается отъ нуля. Кромѣ того, предоставимъ себѣ право подчинить сте-

*) Предполагаемъ, что группы p и q существуютъ.

пень малости, введенную въ § 8, еще дальнѣйшимъ условіямъ, при чемъ пусть имѣемъ право, опредѣлить ее не только при помощи таблицы величинъ a, но также при помощи характера функцій φ. Также для величины γ опредѣлимъ степень малости такого рода.

Мы убѣдимся въ томъ, что, если степень малости для упомянутыхъ величинъ выбирается надлежащимъ образомъ, то имѣетъ силу слѣдующая теорема:

Каждому мѣсту $\omega_1 \,.\,.\, \omega_l$ нѣкоторой области $-\sigma \,.\, \gamma < \omega_\rho \leq \sigma \,.\, \gamma$ (причемъ $\sigma > o$ зависитъ только отъ таблицы коэффиціентовъ a и характера функцій φ) и каждому допущенному значенію $t \quad t_0$ соотвѣтствуетъ въ области

$$\text{I)} \quad \sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \, p_\mu^{\,2} < \delta \,.\, \gamma^2 \qquad\qquad \sum_{\nu=1}^{l} f_\nu \, q_\nu^{\,2} > -\delta \,.\, \gamma^2$$

одна и при томъ единственная система величинъ p, q, которая удовлетворяетъ уравненіямъ $\varphi_\nu\,(p_1 \,.\,.\, p_k \;\, q_1 \,.\,.\, q_l) = \omega_\nu$ ($\nu = 1, 2 \,.\,.\, l$), и взятая за начальную систему для $t = t_0$, даетъ рѣшеніе, остающееся для $t > t_0$ въ области I. При этомъ $d_\mu \,.\, f_\nu, \delta$ суть тѣ же самыя величины, зависящія отъ таблицы величинъ a, какъ въ предыдущихъ §.

Чтобы доказать эту теорему, опредѣлимъ сначала внутри окрестности мѣста $o \,.\,.\, o \;\, o \,.\,.\, o$, для которой имѣютъ силу вышеупомянутыя предположенія относительно φ, такую область, окружающую мѣсто $o \,.\,.\, o \;\, o \,.\,.\, o$

$$A_\mu < u_\mu < B_\mu \qquad\qquad C_\nu < v_\nu < D_\nu \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \quad 1$$

и такое число $E > o$, что

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v_1} + \displaystyle\sum_{\rho=1}^{k} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_\rho} \,.\, \varepsilon_\rho^{\,1} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v_l} + \displaystyle\sum_{\rho=1}^{k} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_\rho} \, \varepsilon_\rho^{\,l} \\ - & - & - \\ \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial v_1} + \displaystyle\sum_{\rho=1}^{k} \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial u_\rho} \, \varepsilon_\rho^{\,1} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial v_l} + \displaystyle\sum_{\rho=1}^{k} \dfrac{\partial \varphi_l}{\partial u_\rho} \, \varepsilon_\rho^{\,l} \end{vmatrix} \gtrless o \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \quad 2$$

если u и v принадлежатъ къ области 1) и $\varepsilon_\eta^{\,\vartheta}$ удовлетворяютъ условію $-E < \varepsilon_\eta^{\,\vartheta} < E$. Это возможно по сдѣланнымъ предположеніямъ. Затѣмъ можно найти такое число $\lambda > o$, что $\left| \dfrac{\triangle}{D} \right| < \lambda$, причемъ $\triangle$ обозначаетъ какой нибудь миноръ высшаго порядка опредѣлителя D и u, v, $\varepsilon_\eta^{\,\vartheta}$ удовлетворяютъ упомянутымъ условіямъ. Введемъ, наконецъ, обозначеніе

$$\varepsilon = \frac{1}{3\, l^2\, \lambda}\,.$$

Опредѣлимъ теперь область

$$\alpha_\mu < u_\mu < \beta_\mu \quad , \quad \gamma_\nu < v_\nu < \delta_\nu \qquad\qquad -s < \varepsilon_\eta^{\,\vartheta} < s \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \quad 3$$

съ слѣдующими свойствами. Область 3), на сколько рѣчь идетъ о u, v, пусть лежитъ внутри 1) и окружаетъ мѣсто $o \,.\,.\, o \;\; o \,.\,.\, o$; пусть кромѣ того имѣетъ мѣсто зависимость $o < s < E$. Наконецъ, разность значеній элемента опредѣлителя D для двухъ мѣстъ области 3) пусть численно меньше чѣмъ ε.

Всѣ эти дѣйствія основываются только на знаніи функцій φ.

Теперь сначала припишемъ величинѣ γ такую степень малости, что всѣ u, v области

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu u_\mu^2 < \delta \cdot \gamma^2 \qquad \sum_{\nu=1}^{l} |f_\nu| \cdot v_\nu^2 < \delta \cdot \gamma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4$$

принадлежать къ области 3).

На основаніи того, что мы изложили въ § 12, намъ извѣстно, что каждой системѣ величинъ q $q_1\ q_2 \ldots q_l$ области

$$\sum_{\nu=1}^{l} |f_\nu|\ q_\nu^2 < \delta \cdot \gamma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5$$

и каждому допущенному значенію t соотвѣтствуетъ одна и притомъ единственная такая система величинъ p $[p_1] \ldots [p_k]$ области

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \cdot p_\mu^2 < \delta \cdot \gamma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6$$

что $[p_1] \ldots [p_k]\ q_1 \ldots q_l$, взятая за начальную систему для упомянутаго значенія t, даетъ рѣшеніе, остающееся для всѣхъ большихъ t въ области (5, 6). Величины [p] по предыдущему разсматриваемъ какъ функціи величинъ q и параметра t. Эти функціи по § 13 непрерывны по q въ области 5). Онѣ кромѣ того въ области

$$\sum_{\nu=1}^{l} |f_\nu| \cdot q_\nu^2 < \delta \cdot \gamma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7$$

имѣютъ производныя перваго порядка по q, также непрерывныя по q.

Пусть теперь опредѣляется степень малости, о которой мы говорили при введеніи предположеній, такимъ образомъ, что всегда $\left|\frac{\partial [p]}{\partial q}\right| < s$, независимо отъ того, на какомъ t мы основываемся. Что это возможно, слѣдуетъ изъ § 13. Въ этомъ §, правда, мы только доказали, что при помощи надлежащаго формулированія предположеній можно дать $\left|\frac{\partial [p]}{\partial q}\right|$ степень малости, зависящую отъ таблицы величинъ a. Но, какъ легко видѣть, это обстоятельство показываетъ также справедливость нашего замѣчанія, такъ какъ s зависитъ только отъ характера функцій φ и степень малости, о которой мы говорили при введеніи предположеній, можетъ зависѣть не только отъ таблицы величинъ a, но также отъ этихъ функцій.

Выбирая упомянутую степень малости надлежащимъ образомъ, можемъ также достигнуть того, что для всѣхъ q области 5) всегда удовлетворяется условіе

$$\sum_{\mu=1}^{k} d_\mu \cdot [p_\mu]^2 < \delta_0 \cdot \gamma^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8$$

независимо отъ значенія t, на которомъ мы основываемся. При этомъ обозначаетъ

$$\delta_0 = \frac{\delta \cdot N}{36\ C^2 \cdot l^5 \cdot \lambda^2 \cdot k \cdot Q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9$$

C есть такое положительное число, что $C > \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\mu}\right|$ (i = 1, 2 . . l μ = 1, 2 . . k) для u, v области 3); N обозначаетъ наименьшее значеніе между d_μ, Q наибольшее между $|f_\nu|$. Что въ самомъ дѣлѣ возможенъ таокй выборъ, слѣдуетъ изъ § 14, если обратить вниманіе на то, что δ_0 зависитъ только отъ таблицы величинъ a и характера функцій φ.

Теперь образуемъ функціи

$$\chi_i = \varphi_i \quad ([p_1] \,.\,.\, [p_k]\; q_1 \,.\,.\, q_l) \qquad (i = 1,2 \,.\,.\, l) \quad \ldots\ldots \quad 10$$

χ суть функціи величинъ q, содержащія, кромѣ того, параметръ t. Онѣ опредѣлены для всѣхъ q области 5) и въ ней непрерывны по q. Для всѣхъ q области 7) онѣ имѣютъ производныя перваго порядка по q. Послѣднія непрерывны по q и представляются при помощи

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial q_\nu} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial v_\nu} + \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\mu} \cdot \frac{\partial \left[p_\mu\right]}{\partial q_\nu} \qquad (u_1 = [p_1] \,.\,.\, u_k = [p_k]\; v_1 = q_1 \,.\,.\, v_l = q_l)$$

Частныя значенія u, v, которыя слѣдуетъ подставить въ правыхъ частяхъ, принадлежатъ къ области 4) и, слѣдовательно, также къ области 3) Всѣ величины $\left|\frac{\partial [p]}{\partial q}\right|$, какъ мы сказали выше, меньше чѣмъ s.

Если сравнимъ $\frac{\partial \chi_i}{\partial q_\nu}$ съ элементами опредѣлителя 2) и вспомнимъ то, что мы сказали относительно области 3), то получимъ слѣдующее: функціональный опредѣлитель R функцій χ по q не исчезаетъ. Частное $\left|\frac{P}{R}\right|$, причемъ P обозначаетъ миноръ высшаго порядка опредѣлителя R, меньше чѣмъ λ. Значенія величины $\frac{\partial \chi}{\partial q}$ для двухъ системъ величинъ q области 7) отличаются другъ отъ друга менѣе, чѣмъ на $\varepsilon = \frac{1}{3\, l^2 \lambda}$.

Образуемъ теперь χ для $q_1 = \ldots = q_l = 0$. Получаемъ

$$\chi_i\,(o) = \sum_{\mu=1}^{k} \left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\mu}\right\} \cdot [p_\mu]_0 \qquad (i = 1,\, 2 \,.\,.\, l) \quad \ldots\ldots \quad 11$$

причемъ $\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\mu}\right\}$ слѣдуетъ образовать для нѣкоторыхъ значеній u, v области 3), между тѣмъ какъ $[p_\mu]$, представляетъ значеніе $[p_\mu]$ для $q_1 = \,.\,.\, = q_l = o$. Имѣемъ $\left|\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\mu}\right\}\right| < C$ (см. объясненіе формулы 9). Итакъ, уравненія 11) даютъ

$$\sum_{i=1}^{l} |\chi_i\,(o)| < l.\, C.\, \sqrt{k}\, .\, \sqrt{\sum_{\mu=1}^{k} [p_\mu]^2_0} < l.\, C.\, \sqrt{k}\, .\, \frac{\sqrt{\delta_0}}{\sqrt{N}} \cdot \gamma$$

причемъ мы воспользовались уравненіемъ 8). Обращая наше вниманіе на значеніе δ_0, получаемъ слѣдовательно

$$\sum_{i=1}^{l} |\chi_i\,(o)| < l.\, \sigma.\, \gamma \qquad \sigma = \frac{\sqrt{\delta}\, .\, \varepsilon}{2\sqrt{l}\, .\, \sqrt{Q}} \quad \ldots\ldots \quad 12$$

Теперь введемъ величины $\omega_1 \ldots \omega_l$, которыя пусть лежатъ въ области

$$-\sigma . \gamma < \omega_\rho \leq \sigma . \gamma \qquad (\rho = 1, 2 \ldots l) \quad \ldots \quad 13$$

Тогда всегда $\sum\limits_{\rho=1}^{l} | \omega_\rho | \overline{\overline{<}} l . \sigma . \gamma$. Итакъ, имѣемъ

$$\sum_{\nu=1}^{l} [\chi_\nu (o) - \omega_\nu]^2 < \left[\sum_{\nu=1}^{l} | \chi_\nu (o) | + \sum_{\nu=1}^{l} | \omega_\nu | \right]^2 < 4 \, l^2 . \sigma^2 . \gamma^2$$

или что тоже самое

$$\sum_{\nu=1}^{l} [\chi_\nu (o) - \omega_\nu]^2 < \frac{l . \varepsilon^2 . \delta . \gamma^2}{Q} \quad \ldots \quad 14$$

Итакъ, мы пришли къ слѣдующему результату: l функйй $\chi_\nu (q) - \omega_\nu$ даны въ области, которая опредѣлена при помощи 5) и 13). Онѣ непрерывны въ этой области и имѣютъ для области 7) непрерывныя производныя перваго порядка по q. Если R обозначаетъ функціональный опредѣлитель l функцій по q, P какой-нибудь миноръ высшаго порядка опредѣлителя R, то $\left| \frac{P}{R} \right| < \lambda$. Частное въ лѣвой части при этомъ всегда имѣетъ опредѣленный смыслъ, такъ какъ R не исчезаетъ. Если образуемъ производную $\frac{\partial}{\partial q} (\chi_\nu - \omega_\nu) = \frac{\partial}{\partial q} \chi_\nu$ для двухъ мѣстъ области 7), то найденныя значенія отличаются другъ отъ друга менѣе чѣмъ на $\varepsilon = \frac{1}{3 \, l^2 \lambda}$. Наконецъ, имѣетъ мѣсто уравненіе 14).

Теорема предыдущаго § даетъ, слѣдовательно, слѣдующее предложеніе:

Каждой системѣ ω области 13) и каждому допущенному значенію t соотвѣтствуетъ система величинъ q изъ области 7), удовлетворяющая уравненіямъ

$$\chi_\nu (q) = \omega_\nu \qquad (\nu = 1, 2 \ldots l) \quad \ldots \quad 15$$

Эта система также единственная система величинъ q изъ области 5), удовлетворяющая условіямъ 15)

Этимъ мы также доказали теорему, формулированную въ началѣ этого §. Ибо σ только зависитъ отъ таблицы величинъ a и функцій φ. Слѣдовательно, область 13) имѣетъ характеръ, предписанный для области величинъ ω въ упомянутой теоремѣ. Если дальше выбрать систему величинъ ω области 13) и значеніе t, то по предыдущему существуетъ система величинъ q области 7), удовлетворяющая уравненіямъ 15). Если дополнить эту систему величинъ q при помощи $p_1 = [p_1] \ldots p_k = [p_k]$ и принять такимъ образомъ полученную систему за начальную систему рѣшенія для выбраннаго значенія t, то это рѣшеніе для всѣхъ бо́льшихъ t лежитъ въ области (5, 6). Наконецъ, имѣемъ по 15)

$$\chi_\nu = \varphi_\nu ([p_1] \ldots [p_k] \, q_1 \ldots q_l) = \omega_\nu \qquad (\nu = 1, 2 \ldots l)$$

Слѣдовательно, выбранная начальная система удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ нашего предложенія. Легко также видѣть, что она единственная система, соотвѣтствующая даннымъ условіямъ. Ибо, еслибы мы допустили существованіе второй такой системы $p_1' \ldots p_k' \, q_1' \ldots q_l'$, то мы имѣли бы сначала $p_1' = [p_1]' \ldots p_k' = [p_k]'$, причемъ $[p_1]' \ldots [p_k]'$

обозначаютъ значенія функцій $[p_1] \ldots [p_k]$ для $q_1' \ldots q_l'$ и выбраннаго значенія t. Мы имѣли бы дальше

$$\omega_\nu = \varphi_\nu (p_1' \ldots p_k' \, q_1' \ldots q_l') = \varphi_\nu ([p_1]' \ldots [p_k]' \, q_1' \ldots q_l') \, \chi_\nu'$$
$$(\nu = 1 \ldots l)$$

если χ_ν' обозначаютъ значенія χ для $q_1' \ldots q_l'$ и выбраннаго значенія t. Отсюда слѣдуетъ по предыдущему $q_1 = q_1' \ldots q_l = q_l'$ и, слѣдовательно, также $[p_1]' = [p_1] \ldots [p_k]' = [p_k]$, такъ что обѣ системы (p, q) не могутъ быть различными.

§ 18.

Пусть даны дифференціальныя уравненія

$$\frac{dx_i}{dt} = L_i(x) + \xi_i \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \ldots \quad 1$$

L_i при этомъ обозначаютъ линейныя однородныя выраженія относительно $x_1 \ldots x_n$, имѣющія тотъ же самый видъ, какъ соотвѣтствующіе члены уравненій 1) § 8 и удовлетворяющія также условіямъ, упомянутымъ въ § 8. ξ_i суть равномѣрно непрерывныя функціи t, $x_1 \ldots x_n$ и нѣкоторыхъ параметровъ $\alpha, \beta \ldots$ въ области, характеризованной при помощи

I t произвольная величина II $m_i < x_i < n_i$ III $a < \alpha < A$, $b < \beta < B$ etc. 2

Преполагается также, что ξ_i въ области 2) лежатъ между конечными предѣлами. Кромѣ того, въ этой области $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ пусть существуютъ, пусть будутъ конечными и непрерывными по t, x, α, β etc. и пусть удовлетворяютъ условію $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| < \frac{\varkappa}{\sqrt{n}}$. $\varkappa > 0$ при этомъ обозначаетъ число, введенное въ § 11 и зависящее только отъ таблицы величинъ a.

Предположимъ теперь, что для каждой отдѣльной системы параметровъ области 2 III существуетъ рѣшеніе уравненій 1), остающееся для всѣхъ t въ области 2 II. Такое рѣшеніе тогда также есть единственное рѣшеніе такого рода для соотвѣтствующей системы параметровъ, какъ слѣдуетъ изъ вспомогательной теоремы § 11. Ибо, если u_i и $u_i + v_i$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ суть два рѣшенія упомянутаго рода, то уравненія 1) даютъ зависимости $\frac{dv_i}{dt} = L_i(v) + w_i$, причемъ вслѣдствіе сдѣланныхъ предположеній $|w_i| < \varkappa \sqrt{\sum_{\rho=1}^{n} v_\rho^2}$. Слѣдовательно, примѣненіе теоремы въ § 11 дастъ $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = 0$.

$x_1 \, x_2 \ldots x_n$ пусть обозначаютъ впослѣдствіи всегда элементы рѣшенія выше характеризованнаго рода.

Если положить $x_i(t\, \alpha + \Delta\alpha\, \beta + \Delta\beta \ldots) - x_i(t, \alpha, \beta \ldots) = z_i$, то получается

$$\frac{dz_i}{dt} = L_i(z) + \xi_i(x + z, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta \ldots) - \xi_i(x, \alpha, \beta \ldots) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3$$
$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

или

$$\frac{dz_i}{dt} = L_i(z) + \zeta_i + \vartheta_i \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \ldots \quad 4$$

причемъ $\zeta_i = \xi_i(x + z, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta \ldots) - \xi_i(x, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta \ldots)$ и $\vartheta_i = \xi_i(x, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta \ldots) - \xi_i(x, \alpha, \beta \ldots)$. По сдѣланнымъ предположеніямъ имѣемъ тогда $|\zeta_i| \overline{\overline{<}} x \,.\, \sqrt{\sum_{\rho=1}^{n} z_\rho^2}$. Если теперь, напримѣръ, для всѣхъ t $|\vartheta_i| < d$, причемъ d обозначаетъ положительное число, то вспомогательная теорема § 11 даетъ зависимость $|z_i| < e \,.\, d$ $(i = 1, 2 \ldots n)$, причемъ $e > o$ зависитъ только отъ таблицы величинъ a.

Если обратить вниманіе на сдѣланныя предположенія, то изъ сказаннаго, очевидно, слѣдуетъ, что $x_i(t, \alpha, \beta \ldots)$ суть равномѣрно непрерывныя функціи $t, \alpha, \beta \ldots$.

Предположимъ теперь еще существованіе производныхъ $\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. При этомъ эти величины пусть будутъ непрерывны по $t\, x\, \alpha\, \beta \ldots$ и пусть лежатъ между конечными предѣлами. Пусть, напримѣръ, $\left|\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}\right| < G$. Если тогда положить всѣ $\triangle\alpha, \triangle\beta \ldots = o$ за исключеніемъ $\triangle\alpha$, то, если $\triangle\alpha \gtrless o$,

$$|\xi_i(x, \alpha + \triangle\alpha, \beta \ldots) - \xi_i(x, \alpha, \beta \ldots)| < G \,.\, |\triangle\alpha|.$$

Итакъ, въ этомъ случаѣ слѣдуетъ $|z_i| < e \,.\, G \,.\, |\triangle\alpha|$, слѣдовательно, $\left|\frac{z_i}{\triangle\alpha}\right| < e \,.\, G$.

Пусть обозначается $\frac{z_i}{\triangle\alpha}$ при помощи v_i. Тогда имѣютъ мѣсто уравненія

$$\frac{dv_i}{dt} = L_i(v) + \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho} v_\rho + \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha} + \sum_{\rho=1}^{n} \left(\underline{\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho}} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho}\right) v_\rho + \left[\underline{\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}} - \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}\right] \quad \ldots \ldots \quad 5$$

При этомъ обозначаетъ $\underline{\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho}}$ величину $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho}$ для $x_\mu + \theta_i v_\mu \triangle\alpha, \alpha + \theta_i \triangle\alpha$, $\underline{\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}}$ — величину $\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}$ для $x_\mu + \theta_i v_\mu \,.\, \triangle\alpha, \alpha + \theta_i \,.\, \triangle\alpha$ $(\mu = 1, 2 \ldots n, o < \theta_i < 1)$.

Обратимъ теперь наше вниманіе на рядъ величинъ $\triangle\alpha$, отличающихся отъ нуля и стремящихся къ нулю. Представимъ себѣ, что для этихъ величинъ $\triangle\alpha$ образованы системы v. Если выбрать тогда опредѣленное значеніе t t_0, то системы v, полученныя для него, должны имѣть, по крайней мѣрѣ, одно мѣсто накопленія, такъ какъ всегда $|v| < e \,.\, G$.

Въ теченіи дальнѣйшаго изслѣдованія употребляются уравненія

$$\frac{du_i}{dt} = L_i(u) + \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho} u_\rho + \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha} \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6$$

$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\rho}$ и $\frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha}$ при этомъ будемъ разсматривать какъ функціи $t, \alpha, \beta \ldots$, представляя себѣ, что вмѣсто $x_1 \ldots x_n$ подставлены элементы выше упомянутаго рѣшенія $x_i(t, \alpha, \beta \ldots)$ $(i = 1, 2 \ldots n)$. Получаются при этомъ непрерывныя функціи $t, \alpha, \beta \ldots$.

Если $u_1\, u_2 \ldots u_n$ представляютъ рѣшеніе уравненій 6), остающееся для всѣхъ t между конечными предѣлами, то это рѣшеніе единственное, которое имѣетъ упомянутое свойство для той же самой системы параметровъ. Это слѣдуетъ на основаніи зависимости $\left|\frac{\partial\xi}{\partial x}\right| < \frac{\varkappa}{\sqrt{n}}$ аналогичнымъ образомъ, какъ въ случаѣ нѣкотораго изслѣдованія, встрѣчающагося въ началѣ этого §.

Обратимъ теперь наше вниманіе на рѣшеніе U уравненій 6), соотвѣтствующее мѣсту накопленія выше упомянутаго рода какъ начальному мѣсту для $t = t_0$*). По предъидущему можно найти системы v, которыя лежатъ сколь угодно близко къ начальной системѣ рѣшенія U для $t = t_0$ и соотвѣтствуютъ сколь угодно малымъ $|\triangle\alpha|$.

Обращая вниманіе на $|v| < e \cdot G$ и на непрерывность производныхъ функцій ξ, видимъ, что — по крайней мѣрѣ для сколь угодно большого конечнаго промежутка значеній t — можно сдѣлать при помощи выбора достаточно малаго $|\triangle\alpha|$ абсолютную величину двухъ послѣднихъ членовъ 5) сколь угодно малою. Отсюда слѣдуетъ**): Если выбрать какой нибудь конечный промежутокъ значеній t, то можно найти систему v, которая въ этомъ промежуткѣ лежитъ сколь угодно близко къ рѣшенію U. Итакъ, слѣдуетъ, что для рѣшенія U для всѣхъ вещественныхъ t $|u| \leqq e \cdot G$. Ибо, еслибы мы имѣли когда нибудь $|u_\rho| > e \cdot G$, причемъ ρ обозначаетъ одинъ изъ индексовъ $1, 2 \ldots n$, то мы могли бы найти систему v, лежащую такъ близко къ U, что также когда нибудь $|v_\rho| > e \cdot G$, что не возможно.

Рѣшеніе U по предъидущему для всѣхъ t остается между конечными предѣлами. Этимъ свойствомъ однако по предъидущему вполнѣ опредѣлено рѣшеніе уравненій 6) при данныхъ значеніяхъ параметровъ $\alpha, \beta \ldots$. Слѣдовательно, существуетъ единственное мѣсто накопленія вышеупомянутаго рода т. е. v, образованныя для $t = t_0$, стремятся къ вполнѣ опредѣленнымъ значеніямъ, если $\triangle\alpha$ стремится къ нулю, независимо отъ того, какъ происходитъ это стремленіе къ нулю. Эти значенія суть элементы только что снова характеризованнаго рѣшенія U для $t = t_0$.

Сдѣлаемъ теперь относительно β etc. тѣ же самыя предположенія какъ въ предъидущемъ относительно α. Тогда получается слѣдующая теорема: Если разсматриваемъ x какъ функціи $t, \alpha, \beta \ldots$, то эти функціи имѣютъ производныя $\frac{\partial x}{\partial\alpha}, \frac{\partial x}{\partial\beta} \ldots$. Послѣднія получаются при помощи тѣхъ рѣшеній [уравненій 6) (и аналогичныхъ)], которыя остаются между конечными предѣлами***).

Если кромѣ того предположить, что $\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\xi}{\partial\beta} \ldots \frac{\partial\xi}{\partial x}$ даны какъ равномѣрно непрерывныя функціи $x, t, \alpha, \beta \ldots$, то уравненія 6) и аналогичныя уравненія удовлетворяютъ

*) Упомянутое рѣшеніе распространяется на всѣ t. Справедливость этого замѣчанія, если его нельзя разсматривать какъ непосредственное слѣдствіе извѣстныхъ теоремъ изъ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, легко вытекаетъ изъ соображеній первой главы. Такъ какъ аналогичные случаи уже встрѣчаются въ предъидущемъ, то не такъ необходимо болѣе подробное изложеніе.

**) См. вспомогательную теорему въ § 1 гл. I.

***) Для каждой допущенной системы параметровъ уравненія 6) имѣютъ опредѣленное рѣшеніе, остающееся между конечными предѣлами. Это непосредственно слѣдуетъ изъ предъидущихъ соображеній. Послѣднія показываютъ также, что для элементовъ такого рѣшенія всегда $|u| \leqq e \cdot G$.

всѣмъ требованіямъ, чтобы повторить наши первоначальныя соображенія относительно упомянутыхъ уравненій. Слѣдовательно u или $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial x}{\partial \beta}$ etc. равномѣрно непрерывны по t и α β . . .

Если теперь еще ξ имѣютъ производныя втораго порядка по x, α, β . . . и если эти производныя равномѣрно непрерывны по x, t, α β . . . и лежатъ между конечными предѣлами, то примѣненіе доказанной теоремы къ 6) и аналогичнымъ уравненіямъ показываетъ, что также производныя втораго порядка величинъ x по α, β . . . существуютъ, равномѣрно непрерывны по t, α, β . . . и лежатъ между конечными предѣлами. Если соотвѣтствующія предположенія имѣютъ силу для всѣхъ производныхъ величинъ ξ до порядка ν включительно, то всѣ производныя величинъ x по α, β . . . до порядка ν включительно существуютъ, равномѣрно непрерывны по t, α, β . . . и лежатъ между конечными предѣлами.

Глава III.

§ 19.

Пусть даны уравненія

$$\frac{d x_i}{d t} = L_i (x) + \xi_i \qquad (i = 1, 2 \,.\,.\, n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

L_i при этомъ обозначаютъ линейныя однородныя выраженія относительно x того же самаго вида какъ въ уравненіяхъ 1) § 8. ξ_i суть функціи $x_1\ x_2 \,.\,.\, x_n\ t$, данныя для всѣхъ вещественныхъ t и для x нѣкоторой области I, которая опредѣляется при помощи условій вида $a_i < x_i < b_i$ или $x_i > a_i$ или $x_i < b_i$ или „x_i произвольная величина“. $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ пусть существуютъ и удовлетворяютъ условію $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| < \frac{\varkappa}{\sqrt{n}}$, причемъ $\varkappa$ обозначаетъ число, извѣстное намъ изъ § 11. Кромѣ того предполагается, что ξ_i происходятъ изъ нѣкоторыхъ функцій $\rho_i (x, u_1, \,.\,.\,.\, u_m)$ при помощи подстановки $u_1 = \frac{t}{\alpha_1} \,.\,.\,.\, u_m = \frac{t}{\alpha_m}$. ρ пусть даны для x области I и всѣхъ вещественныхъ и какъ равномѣрно непрерывныя функціи x и u періодическія по u съ періодами $1 \,.\, \alpha_1 \,.\,.\, \alpha_m$ обозначаютъ числа, отличающіяся отъ нуля, причемъ не имѣемъ между величинами $\frac{1}{\alpha}$ никакихъ однородныхъ линейныхъ уравненій, коэффиціенты которыхъ суть цѣлыя числа.

Предположимъ наконецъ, что существуетъ рѣшеніе уравненій 1), остающееся для всѣхъ t въ области, которая опредѣляется при помощи условій вида $\gamma_i < x_i < \beta_i$ и лежитъ внутри I. Изъ соображеній въ § 11 тогда слѣдуетъ, что не существуетъ никакого втораго рѣшенія (отличающагося отъ упомянутаго), которое для всѣхъ t остается въ области I и между конечными предѣлами. $x_1 \,.\,.\, x_n$ пусть обозначаютъ впослѣдствіи элементы только что введеннаго рѣшенія.

Если теперь образуемъ $y_i = x_i (t + \tau)$ $(i = 1, 2 \,.\,.\, n \quad \tau = \text{const.})$, то эти функціи удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\frac{d y_i}{d t} = L_i (y) + \xi_i (t + \tau, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

При этомъ $\xi_i\,(t + \tau, y)$ происходитъ изъ $\rho_i\,\left(y.\ u_1 + \frac{\tau}{\alpha_1} \ldots u_m + \frac{\tau}{\alpha_m}\right)$ при помощи подстановки $u_1 = \frac{t}{\alpha_1} \ldots u_m = \frac{t}{\alpha_m}$. Вмѣсто $\frac{\tau}{\alpha_1} \ldots \frac{\tau}{\alpha_m}$ можно подставить числа $v_1 \ldots v_m$, если имѣетъ мѣсто $\frac{\tau}{\alpha_1} \equiv v_1 \ldots \frac{\tau}{\alpha_m} \equiv v_m$. Знакомъ $\equiv$ соединяемъ величины, отличающіяся между собою только на цѣлыя числа.

Обратимъ теперь наше вниманіе на слѣдующую теорему*): Если $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ суть числа, отличающіяся отъ нуля, между обратными значеніями которыхъ не существуетъ никакихъ линейныхъ однородныхъ уравненій съ цѣлыми коэффиціентами, то къ произвольнымъ числамъ $\mathfrak{f}_1\ \mathfrak{f}_2 \ldots \mathfrak{f}_m$ можно найти такую величину τ, что $\frac{\tau}{\alpha_1} - \mathfrak{f}_1,\ \frac{\tau}{\alpha_2} - \mathfrak{f}_2 \ldots \frac{\tau}{\alpha_m} - \mathfrak{f}_m$ отличаются отъ цѣлыхъ чиселъ сколь угодно мало.

Мимоходомъ замѣтимъ, что только что упомянутое предложеніе содержится въ слѣдующей болѣе общей теоремѣ: Пусть даны $m\,(m + 1)$ величинъ

$$\begin{array}{cccccc} a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_m^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_m^2 \\ - & - & - & - & - \\ a_0^m & a_1^m & a_2^m & \ldots & a_m^m \end{array}$$

и пусть предполагается, что между n опредѣлителями знака

$$\left|\begin{array}{cccccc} a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_m^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_m^2 \\ - & - & - & - & - \\ a_0^m & a_1^m & a_2^m & \ldots & a_m^m \end{array}\right|$$

не существуетъ никакихъ однородныхъ линейныхъ уравненій съ цѣлыми коэффиціентами. Если дальше $\mathfrak{f}_1\ \mathfrak{f}_2 \ldots \mathfrak{f}_m$ даны произвольнымъ образомъ, то можно найти цѣлыя числа $n_0\ n_1 \ldots n_m$ такого рода, что въ уравненіяхъ

$$\begin{array}{c} n_0\, a_0^1 + n_1\, a_1^1 + n_2\, a_2^1 + \ldots + n_m\, a_m^1 = \mathfrak{f}_1 + \varepsilon_1 \\ n_0\, a_0^2 + n_1\, a_1^2 + n_2\, a_2^2 + \ldots + n_m\, a_m^2 = \mathfrak{f}_2 + \varepsilon_2 \\ - - - - - - = - - - - - - - \\ n_0\, a_0^m + n_1\, a_1^m + n_2\, a_2^m + \ldots + n_m\, a_m^m = \mathfrak{f}_m + \varepsilon_m \end{array}$$

величины ε имѣютъ степень малости, предписанную произвольно. Чтобы доказать эту теорему, можно свести ее къ предложеніямъ, даннымъ въ выше упомянутой моей работѣ. Изложить же здѣсь это доказательство нѣтъ надобности.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ: $v_1 \ldots v_m$, которыя происходятъ**) при помощи различнаго выбора τ изъ $v_1 \equiv \frac{\tau}{\alpha_1} \ldots v_m \equiv \frac{\tau}{\alpha_m}$, образуютъ образъ (Menge), имѣющій для каждаго мѣста***), опредѣленнаго m произвольными координатами $\mathfrak{f}_1\ \mathfrak{f}_2 \ldots \mathfrak{f}_m$, мѣсто накопленія.

*) См. мою работу „Ueber die Darstellung von Functionen einer Variabeln durch trig. Reihen etc.“ pag. 8.

**) Эти системы v назовемъ „системами перваго рода.“

***) Не необходимо, чтобы это мѣсто принадлежало къ упомянутому образу.

Дальше замѣтимъ, что для всѣхъ v $| \rho_i (x + z, v) - \rho_i (x, v) | < \varkappa \cdot \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^2}$, если x + z и x лежатъ въ области I. Ибо если v образуютъ систему перваго рода, то упомянутая зависимость слѣдуетъ прямо изъ предположенiй въ началѣ этого §. Если однако v образуютъ другую систему, то зависимость $| \rho_i (x + z, v) - \rho_i (x, v) | > \varkappa \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^2}$ также слѣдуетъ исключить. Еслибы она имѣла мѣсто, то можно было бы выбрать системы v перваго рода сколь угодно близкiя къ данной системѣ. Для всѣхъ этихъ имѣемъ $| \rho_i (x + z, v) - \rho_i (x, v) | < \varkappa \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^2}$, что вслѣдствiе равномѣрной непрерывности ρ представляетъ противорѣчiе къ предположенiю, только что введенному въ видѣ опыта. Слѣдовательно, для всѣхъ u имѣетъ мѣсто также зависимость

$$| \rho_i (x + z, u) - \rho_i (x, u) | < \varkappa \sum_{\mu=1}^{n} | z_\mu |.$$

Образуемъ теперь уравненiя

$$\frac{d\omega_i}{dt} = L_i(\omega) + \eta_i(\omega, t) \qquad (i = 1, 2 \,..\, n) \quad . \; . \; . \; . \quad 3$$

При этомъ η_i даны для всѣхъ t и величинъ ω области I_a, которая получается изъ I, если замѣнить x черезъ ω. $\eta_i(\omega, t)$ пусть происходятъ изъ $\rho_i(\omega, u_1 + v_1, \,..\, u_m + v_m)$ при помощи подстановки $u_1 = \frac{t}{\alpha_1} \;...\; u_m = \frac{t}{\alpha_m}$. $v_1 \,..\, v_m$ обозначаютъ какiя нибудь числа.

Какiя бы значенiя $v_1 \,..\, v_m$ въ уравненiяхъ 3) ни имѣли, всегда существуютъ сколь угодно близко къ мѣсту $v_1 \,..\, v_m$ системы v, для которыхъ уравненiя 3) допускаютъ рѣшенiе, данное для всѣхъ t и остающееся въ области $\gamma_i < \omega_i < \beta_i$ (i = 1, .. n). Ибо такое рѣшенiе существуетъ для каждой системы v перваго рода, какъ слѣдуетъ изъ замѣчанiй, относящихся къ уравненiямъ 2).

Изъ предъидущаго теперь вытекаетъ слѣдующее: Какiя бы значенiя $v_1 \,..\, v_m$ ни имѣли, уравненiя 3) имѣютъ рѣшенiе, которое дано для всѣхъ t и остается въ области $\gamma_i < \omega_i < \beta_i$.

Чтобы доказать это замѣчанiе, выберемъ рядъ системъ v перваго рода $S_1\, S_2\, S_3 \,...$, стремящiяся къ системѣ V, на которой мы основываемся. Каждой изъ этихъ системъ v перваго рода S_p сопоставимъ рѣшенiе l_p, которое дано для всѣхъ t и всегда остается въ области $\gamma_i < \omega_i < \beta_i$. Это возможно по предъидущему. Если теперь обратимъ наше вниманiе на системы ω, представляющiя для произвольно выбраннаго значенiя t $t = t_0$ упомянутыя рѣшенiя, то эти системы имѣютъ, по крайней мѣрѣ, одно мѣсто накопленiя $\omega_1^0\, \omega_2^0 \,..\, \omega_n^0$ въ области $\gamma_i < \omega_i < \beta_i$. Это мѣсто примемъ за начальное мѣсто рѣшенiя λ уравненiй 3) для $t = t_0$, при чемъ основываемся на V. Обращая вниманiе на соотношенiя $| \rho_i (x + z, u) - \rho_i (x, u) | < \varkappa \sum_{\mu=1}^{n} | z_\mu |$, видимъ, что такое рѣшенiе существуетъ опредѣленно по крайней мѣрѣ для нѣкотораго промежутка значенiй t, окружающаго t_0.

Тѣ же самыя соотношенія допускаютъ также на основаніи гл. I слѣдующее заключеніе: Если только что упомянутое рѣшеніе не имѣетъ того свойства, что оно дано для всѣхъ t и одновременно остается въ области $\gamma_i < \omega_i < \beta_i$, то можно найти значеніе t t_1 такого рода, что рѣшеніе между прочимъ распространяется на промежутокъ отъ $t = t_0$ до $t = t_1$ включительно и для $t = t_1$ лежитъ внѣ области $\gamma_i < \omega_i < \beta_i$. Послѣднее, однако, не можетъ быть. Ибо, если допустить это въ видѣ опыта, то можно по предъидущему найти рѣшенія l_p, которыя для $t = t_0$ лежатъ сколь угодно близко къ рѣшенію λ и одновременно соотвѣтствуютъ системамъ S_p, лежащимъ сколь угодно близко къ системѣ V. Можемъ поэтому — см. гл. I § 1 — найти рѣшенія l_p, которыя въ промежуткѣ отъ $t = t_0$ до $t = t_1$ лежатъ сколь угодно близко къ рѣшенію λ. Должны были бы слѣдовательно существовать рѣшенія l_p, лежащія для $t = t_1$ внѣ области $\gamma_i < \omega_i < \beta_i$, что противно предъидущему. Итакъ, λ имѣетъ то свойство, что оно дано для всѣхъ t и остается въ области $\gamma_i < \omega_i < \beta_i$, такъ что наше замѣчаніе справедливо.

Если имѣемъ два рѣшенія уравненій 3) упомянутаго рода, соотвѣтствующія двумъ системамъ v, то рѣшенія отличаются другъ отъ друга сколь угодно мало, если только системы v отличаются между собою достаточно мало. Это предложеніе непосредственно слѣдуетъ изъ вспомогательной теоремы въ § 11, если обратить вниманіе на равномѣрную непрерывность функцій ρ и на соотношенія $|\rho_i(x + z, u) - \rho_i(x, u)| < \varkappa \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^2}$. Существуетъ, слѣдовательно, для каждой произвольно выбранной системы v одно и при томъ единственное рѣшеніе уравненій 3), которое дано для всѣхъ t и всегда остается въ области $\gamma_i < \omega_i < \beta_i$. Впослѣдствіи $\omega_i(t, v_1 \ldots v_m)$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ пусть всегда обозначаютъ элементы рѣшенія упомянутаго рода.

Введемъ теперя $\sigma_i = \omega_i(t + \tau, v_1 \ldots v_m)$ $(i = 1, 2 \ldots n)$, причемъ τ обозначаетъ какое нибудь число. Имѣемъ тогда уравненія

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = L_i(\sigma) + \rho_i\left(\sigma, \frac{t+\tau}{\alpha_1} + v_1 \ldots \frac{t+\tau}{\alpha_m} + v_m\right) \quad \ldots \ldots \quad 4$$

$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

Сравненіе уравненій 4) и 3) даетъ соотношенія

$$\omega_i(t + \tau, v_1 \ldots v_m) = \omega_i\left(t, v_1 + \frac{\tau}{\alpha_1} \ldots v_m + \frac{\tau}{\alpha_m}\right) \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \ldots \quad 5$$

слѣдовательно также

$$\omega_i(t, o \ldots o) = \omega_i\left(o, \frac{t}{\alpha_1} \ldots \frac{t}{\alpha_m}\right) \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \ldots \quad 6$$

Очевидно $\omega_i(t, o \ldots o)$ суть ничто другое, какъ элементы введеннаго въ началѣ этого § рѣшенія уравненій 1), которое мы характеризовали при помощи $x_1 \ldots x_n$. Итакъ, имѣемъ

$$x_i(t) = \omega_i\left(o, \frac{t}{\alpha_1} \ldots \frac{t}{\alpha_m}\right) \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \ldots \quad 7$$

Съ другой стороны $\omega_i(o, v_1 \ldots, v_m)$, какъ слѣдуетъ изъ предъидущаго, суть непрерывныя функціи $v_1 \ldots v_m$ для всѣхъ v. Изъ опредѣленія упомянутыхъ функцій дальше слѣдуетъ, что онѣ суть функціи періодическія по v съ періодами 1.

Слѣдовательно, можно каждую изъ функцій ω_i ($o\ v_1 \ldots v_m$) разложить въ рядъ*), равномѣрно сходящійся для всѣхъ v,

$$\omega_{i1} + \omega_{i2} + \omega_{i3} + \ldots \qquad \ldots \ldots \qquad 8$$

причемъ каждый отдѣльный членъ $\omega_{i\nu}$ есть цѣлая раціональная функція выраженій

$$\cos 2\pi v_\mu \qquad \sin 2\pi v_\mu \qquad (\mu = 1, 2 \ldots m)$$

Отсюда слѣдуетъ: Элементы x_i (t) выше характеризованнаго рѣшенія можно разложить въ ряды, равномѣрно сходящіеся для всѣхъ t,

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \ldots \qquad \ldots \ldots \qquad 9$$

при чемъ каждый членъ есть цѣлая раціональная функція выраженій

$$\cos\left(2\pi \frac{t}{\alpha_\mu}\right) \qquad \sin\left(2\pi \frac{t}{\alpha_\mu}\right) \qquad (\mu = 1, 2 \ldots m)$$

§ 20.

Можно значительно упростить доказательство, данное въ предъидущемъ §, и видоизмѣнить предположенія на основаніи предложеній, которыя находятся въ выше упомянутой моей работѣ.

Пусть имѣютъ силу тѣ же самыя предположенія какъ въ предъидущемъ § передъ введеніемъ ρ. Вмѣсто слѣдующихъ же предположеній введемъ новыя: Къ каждому числу $d > o$ можно найти число $\varepsilon > o$ такого рода, что $|\xi_i(x, t + \tau) - \xi_i(x, t)|$ всегда меньше чѣмъ d, если $\frac{\tau}{\alpha_1}\ \frac{\tau}{\alpha_2} \ldots \frac{\tau}{\alpha_m}$ отличаются отъ цѣлѣхъ чиселъ менѣе чѣмъ на ε. Пусть существуетъ дальше рѣшеніе, которое для всѣхъ t остается въ области I и между конечными предѣлами. Характеризуемъ его при помощи $x_1\ x_2 \ldots x_n$.

Положимъ теперь $x_i(t + \tau) - x_i(t) = z_i$, причемъ τ сначала обозначаетъ произвольную постоянную. Тогда слѣдуетъ

$$\frac{dz_i}{dt} = L_i(z) + \xi_i(x + z, t + \tau) - \xi_i(x, t + \tau) + \xi_i(x, t + \tau) - \xi_i(x, t)$$

$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

Если употребляемъ обозначенія $u_i = \xi_i(x, t + \tau) - \xi_i(x, t)$ $v_i = \xi_i(x + z, t + \tau) - \xi_i(x, t + \tau)$ $(i = 1, \ldots n)$ то $|v_i| < \varkappa \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^2}$. Если теперь, напримѣръ, имѣемъ $|u_i| < \delta > o$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ для нѣкотораго τ и всѣхъ t, то слѣдуетъ по § 11 $|z_i| < e \cdot \delta$ $(i = 1, 2 \ldots n)$, причемъ $e > o$ только зависитъ отъ таблицы величинъ a.

Отсюда слѣдуетъ: Къ каждому числу $D > o$ можно найти $E > o$ такого рода, что

$$|x_i(t + \tau) - x_i(t)| < D \qquad (i = 1, 2 \ldots n), \text{ если } \frac{\tau}{\alpha_1}\ \frac{\tau}{\alpha_2} \ldots \frac{\tau}{\alpha_m}$$

отличаются отъ цѣлыхъ чиселъ менѣе чѣмъ на E.

*) См. выше упомянутое мое сочиненіе pag. 13.

Слѣдовательно *), x_i (t) разложимы въ тригонометрическіе ряды

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \ldots$$

причемъ каждый членъ есть цѣлое раціональное выраженіе относительно $\cos\left(2\pi \frac{t}{\alpha_\mu}\right)$ и $\sin\left(2\pi \frac{t}{\alpha_\mu}\right)$ ($\mu = 1, \ldots m$) и рядъ есть равномѣрно сходящійся для всѣхъ t.

Наконецъ, укажемъ еще на модификацію предположеній. Въ предыдущемъ мы предположили, что $|\xi(x, t+\tau) - \xi(x, t)|$ можно сдѣлать сколь угодно малыми для всѣхъ t и допущенныхъ x, если только $\frac{\tau}{\alpha_1} \ldots \frac{\tau}{\alpha_m}$ выбираются достаточно близко къ цѣлымъ числамъ. Это предположеніе выполнено для функціи ξ, если ее можно разложить въ рядъ $g_1 + g_2 + g_3 + \ldots$ равномѣрно сходящійся для всѣхъ t и допущенныхъ x, причемъ каждый членъ g представляетъ цѣлое раціональное выраженіе относительно $\cos\left(2\pi \frac{t}{\alpha_\mu}\right)$, $\sin\left(2\pi \frac{t}{\alpha_\mu}\right)$ съ коэффиціентами, которые суть функціи одного только x. При этомъ предполагается, что ξ лежитъ между конечными предѣлами. (Послѣднее впрочемъ слѣдуетъ изъ нашихъ предположеній, если I есть конечная область.)

Чтобы доказать наше утвержденіе, примемъ какое нибудь число $d > o$. Отдѣлимъ тогда такимъ образомъ члены $g_1 + g_2 + \ldots + g_N$, что $|g_{N+1} + g_{N+2} + \ldots| < \frac{d}{4}$, что по предъидущему возможно. Затѣмъ дадимъ суммѣ $g_1 + g_2 + \ldots + g_N$ видъ

$$G = \Sigma A \cos \alpha t + \Sigma B \sin \beta t$$

α и β обозначаютъ при этомъ суммы членовъ вида $\nu \frac{2\pi}{\alpha_\mu}$, причемъ ν есть цѣлое число. Кромѣ того $\alpha \geq o$ $\beta > o$. Наконецъ всѣ α различны между собою и соотвѣтствующее имѣетъ мѣсто для β. A, B обозначаютъ функціи x. Такъ какъ ξ остается между конечными предѣлами, то то же самое имѣетъ мѣсто для $G = g_1 + g_2 + \ldots + g_N$.

Пусть теперь a есть одна изъ величинъ α. Образуемъ

$$\frac{1}{t}\int_0^t G \cdot \cos at \cdot dt$$

Очевидно, это выраженіе стремится къ опредѣленному предѣлу, если t стремится къ $+\infty$, между тѣмъ какъ x разсматриваются постоянными величинами. Этотъ предѣлъ для частнаго случая $a = o$ равняется коэффиціенту члена въ G, содержащаго $\cos at$, и, если $a > o$, равняется половинѣ соотвѣтствующаго коэффиціента.

Пусть дальше b есть величина β. Образуемъ

$$\frac{1}{t}\int_0^t G \cdot \sin bt \, dt$$

Если t стремится къ $+\infty$, то это выраженіе стремится къ половинѣ коэффиціента у $\sin bt$ въ G.

*) См. мое выше упомянутое сочиненіе pag. 3.

Такъ какъ G остается между конечными предѣлами, то упомянутыя предѣльныя значенія и, слѣдовательно, также величины A, B для всѣхъ допущенныхъ x должны лежать между конечными предѣлами.

Теперь имѣемъ

$$|\xi(x, t+\tau) - \xi(x, t)| < |\Sigma A(\cos\alpha(t+\tau) - \cos\alpha t) + \Sigma B(\sin\beta(t+\tau) - \sin\beta t)| + \frac{d}{2}$$

Можно $|\cos\alpha(t+\tau) - \cos\alpha t|$ и $|\sin\beta(t+\tau) - \sin\beta t|$ сдѣлать сколь угодно малыми, если подчинить τ условію, что $\frac{\tau}{\alpha_\mu}$ отличаются отъ цѣлыхъ чиселъ достаточно мало. Это непосредственно слѣдуетъ изъ вида α и β. Если обратить вниманіе на то, что A и B остаются между конечными предѣлами, то слѣдуетъ, что можно сдѣлать первый членъ въ правой части меньше чѣмъ $\frac{d}{2}$ для всѣхъ t и допущенныхъ x. Итакъ, справедливость нашего утвержденія очевидна.

§ 21.

Вернемся опять къ предположеніямъ въ § 19 и прибавимъ еще слѣдующее предположеніе: функціи $\rho(x, u)$ пусть имѣютъ производныя по x и u до нѣкотораго порядка ν включительно. Эти производныя пусть суть непрерывныя функціи для всѣхъ u и допущенныхъ x.

Очевидно, всегда имѣетъ мѣсто $\left|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right| < \frac{\varkappa}{\sqrt{n}}$. Для мѣста u перваго рода это непосредственно слѣдуетъ изъ предположеній. Но также для мѣста u другого рода слѣдуетъ исключить $\left|\frac{\partial\rho}{\partial x}\right| > \frac{\varkappa}{\sqrt{n}}$. Ибо изъ существованія такого неравенства для мѣста x, u вслѣдствіе непрерывности $\frac{\partial\rho}{\partial x}$ слѣдовало бы существованіе того же самаго неравенства также для достаточно близкихъ мѣстъ x, u. Это обстоятельство однако не совмѣстимо съ тѣмъ, что сколь угодно близко къ каждому мѣсту x, u лежатъ такія мѣста, для которыхъ u образуютъ мѣсто u перваго рода.

Теперь опять обратимъ наше вниманіе на уравненія 3) § 19 и введемъ сначала область величинъ ω Ω и область величинъ v V. Ω пусть опредѣляется при помощи условій вида $\Gamma_i < \omega_i < B_i$ $(i = 1, \ldots n)$ такимъ образомъ, что она содержитъ область $\gamma_i < \omega_i < \beta_i$, но со включеніемъ предѣловъ лежитъ внутри I_a. V пусть опредѣляется при помощи условій $M_\mu < v_\mu < N_\mu$ $(\mu = 1, \ldots m)$, причемъ пусть $|M_\mu - N_\mu| > 1$. Тогда уравненія 3) § 19 относительно области, характеризованной при помощи „t произвольная величина" Ω, V, удовлетворяютъ аналогичнымъ условіямъ, какъ уравненія 1) § 18 относительно введенной въ немъ области 2). $v_1 \ldots v_m$ при этомъ играютъ роль „параметровъ".

Итакъ, получаемъ относительно функцій, обозначенныхъ въ § 19 черезъ $\omega_i(t, v_1 \ldots v_m)$, слѣдующее предложеніе: функціи ω_i для всѣхъ t и v равномѣрно непрерывны. Онѣ имѣютъ производныя по v до порядка ν включительно. Эти производныя также равномѣрно непрерывны по t и v и для всѣхъ t и v лежатъ между конечными предѣлами.

Къ этому предложенію замѣтимъ, что оно сначала получается для области V. Вслѣдствіе періодичности ω_i относительно v можно его тогда распространить на всѣ v.

Въ особенности, слѣдовательно, функціи ω_i $(o\ v_1\ .\ .\ .\ v_m)$ имѣютъ производныя по v до порядка ν включительно. Онѣ равномѣрно непрерывны для всѣхъ v и періодичны съ періодами 1. Если*) $\nu > 2m$, то можно разложить функціи ω_i $(o\ v_1\ .\ .\ v_m)$ въ тригонометрическіе ряды, для всѣхъ v абсолютно и равномѣрно сходящіеся. Эти ряды имѣютъ видъ употребительный въ случаѣ рядовъ Фурье для нѣсколькихъ перемѣнныхъ, такъ какъ каждый членъ имѣетъ видъ

$$A \cos 2\pi(\nu_1 v_1 + \eta_1) \cos 2\pi(\nu_2 v_2 + \eta_2) \ldots \cos 2\pi(\nu_m v_m + \eta_m)$$

При этомъ ν обозначаютъ положительныя цѣлыя числа или нуль, η обозначаютъ o или $1/4$.

Соотношенія $x_i(t) = \omega_i\left(o\ \frac{t}{\alpha_1}\ .\ .\ .\ \frac{t}{\alpha_m}\right)$ показываютъ тогда, что $x_i(t)$ можно разложить въ тригонометрическіе ряды

$$\Sigma\ A \cos 2\pi\left(\nu_1 \frac{t}{\alpha_1} + \eta_1\right) \ldots \cos 2\pi\left(\nu_m \frac{t}{\alpha_m} + \eta_m\right)$$

для всѣхъ t абсолютно и равномѣрно сходящіеся. Они получаются изъ предъидущихъ при помощи подстановки $v_1 = \frac{t}{\alpha_1}\ .\ .\ .\ v_m = \frac{t}{\alpha_m}$

Также новыя предположенія, которыя мы ввели въ началѣ этого §, можно видоизмѣнить а именно на основаніи предложенія, которое можно разсматривать какъ обобщеніе соображеній, находящихся въ моемъ выше упомянутомъ сочиненіи pag. 19. Доказательство этого предложенія занимало бы однако сравнительно много мѣста и подавало бы поводъ къ изслѣдованіямъ, имѣющимъ характеръ совершенно различный съ предъидущимъ. Предпочитаю поэтому, пропустить здѣсь изложеніе упомянутой модификаціи.

§ 22.

Въ этомъ § сдѣлаемъ замѣчаніе, относящееся къ уравненіямъ 1) § 19. Итакъ, пусть даны уравненія

$$\frac{dx_i}{dt} = L_i(x) + \xi_i(x, t) \qquad (i = 1, 2\ .\ .\ n)\ .\ .\ .\ .\ 1$$

При этомъ пусть удовлетворяются условія, данныя въ § 19 передъ введеніемъ функцій ρ. Дальше пусть существуетъ рѣшеніе $[x]$, данное для всѣхъ t и остающееся всегда между конечными предѣлами.

Пусть обозначаютъ теперь $\eta_i(x, t)$ $(i = 1, \ldots n)$ функціи x и t, которыя даны для всѣхъ x области I и t области $t \geqq \tau$. При этомъ τ обозначаетъ опредѣленное число. Функціи η пусть имѣютъ кромѣ того то свойство, что можно предположить $|\eta| < d$ ($d > o$ произвольная величина), если для t допускаются только достаточно большія значенія Послѣднѣе пусть имѣетъ мѣсто независимо отъ значеній x.

*) Ограничимся здѣсь этимъ условіемъ, которое вѣроятно, можно было бы обобщить въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ. См. мое выше упомянутое сочиненіе pag. 17.

Составимъ теперь уравненія

$$\frac{dy_i}{dt} = L_i(y) + \xi_i(y, t) + \eta_i(y, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

$$(i = 1, \ldots n)$$

Если, по крайней мѣрѣ, для достаточно большихъ t существуетъ рѣшеніе $|y|$ уравненій 2), остающееся между конечными предѣлами, то это рѣшеніе $|y|$ для безпредѣльно возрастающихъ t асимптотически приближается къ рѣшенію $|x|$.

Чтобы доказать это замѣчаніе, характеризуемъ элементы рѣшенія $|x|$ при помощи x, элементы рѣшенія $|y|$ при помощи y и положимъ $x_i = y_i + z_i$. Тогда слѣдуетъ для достаточно большихъ t

$$\frac{dz_i}{dt} = L_i(z) + \xi_i(y + z, t) - \xi_i(y, t) - \eta_i(y, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

$$(i = 1 \ldots n)$$

По предположеніямъ имѣемъ $|\xi_i(y + z, t) - \xi_i(y, t)| < \varkappa \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} z_\mu^2}$. Если теперь $d > o$ выбрано произвольно, то для достаточно большихъ t кромѣ того $|\eta_i(y, t)| < d$. Имѣемъ поэтому — такъ какъ z лежатъ между конечными предѣлами — для достаточно большихъ t наконецъ $|z_i| < e \, . \, d$, причемъ $e > o$ зависитъ только отъ таблицы величинъ a. Это слѣдуетъ изъ вспомогательной теоремы § 11. Этимъ доказана справедливость нашего утвержденія.

§ 23.

Результаты, найденные въ этой главѣ, вмѣстѣ съ результатами предыдущей главы даютъ слѣдующую теорему:

Пусть даны уравненія

$$\frac{dx_i}{dt} = L_i(x) + \xi_i \qquad (i = 1 \ldots n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

Они имѣютъ тотъ же самый видъ, какъ уравненія 1) § 8 предыдущей главы; пусть удовлетворяются также условія, данныя въ главѣ II, при чемъ мы основываемся на области значеній t „t произвольная величина". Кромѣ того предположимъ, что ξ_i — по крайней мѣрѣ для всѣхъ x области $-\gamma < x_i < \gamma$ и всѣхъ t — происходятъ изъ функцій $\varphi_i(x\ u_1 \ldots u_m)$ при помощи подстановки $u_1 = \frac{t}{\alpha_1} \ldots u_m = \frac{t}{\alpha_m}$. При этомъ φ пусть даны для всѣхъ x области $-\gamma < x_i < \gamma$ и всѣхъ u какъ непрерывныя функціи, періодическія по u съ періодомъ 1. $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ пусть суть числа, отличающіяся отъ нуля, между обратными значеніями которыхъ не существуетъ никакихъ линейныхъ однородныхъ уравненій съ цѣлыми коэффиціентами.

Если степень малости, упомянутая въ § 8, выбрана надлежащимъ образомъ, то существуетъ одно и при томъ единственное рѣшеніе уравненій 1), данное для всѣхъ t, которое всегда остается въ области $-\gamma < x_i < \gamma$, и элементы этого рѣшенія разложимы въ тригонометрическіе ряды

$$x_i(t) = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \ldots \qquad (i = 1, \ldots n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

для всѣхъ t равномѣрно сходящіеся. Каждый членъ $x_{i\nu}$ при этомъ цѣлое раціональное выраженіе относительно

$$\cos 2\pi \frac{t}{\alpha_\mu} \qquad \sin 2\pi \frac{t}{\alpha_\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots m) \quad \ldots \quad 3$$

Если кромѣ того извѣстно, что функціи ρ имѣютъ непрерывныя производныя по x и u до порядка ν включительно, причемъ $\nu > 2m$, то можно представить каждый элементъ $x_i(t)$ упомянутаго рѣшенія въ видѣ

$$x_i(t) = \Sigma A \cos 2\pi \left(\nu_1 \frac{t}{\alpha_1} + \eta_1\right) \ldots \cos 2\pi \left(\nu_m \frac{t}{\alpha_m} + \eta_m\right) \quad \ldots \quad 4$$

При этомъ $\nu > 0$ обозначаютъ цѣлыя числа, между тѣмъ какъ η или равняются нулю или $1/4$. 4) суть ряды, абсолютно и равномѣрно сходящіеся для всѣхъ t.

Глава IV.

§ 24.

Въ главѣ IV я буду разсматривать нѣкоторыя приложенія*) теоріи, изложенной въ предъидущемъ.

Большое число примѣровъ доставляютъ тѣ вопросы изъ механики, въ которыхъ встрѣчается разсѣяніе энергіи. Пусть, напримѣръ, дана механическая система съ одною степенью свободы. Не рѣдко тогда встрѣчается слѣдующее уравненіе

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\,\mathfrak{f}\,\frac{d\varphi}{dt} + p\varphi = \psi\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dt}, t\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1$$

При этомъ $\mathfrak{f} > o$ и $p > o$ суть постоянныя, между тѣмъ какъ ψ соединяетъ поправительные члены и члены, относящіеся къ возмущеніямъ. Предполагаемъ, что $\psi(\varphi, \chi, t)$ дана для области (A) $\alpha < \varphi < \beta$ $\alpha_1 < \chi < \beta_1$, содержащей мѣсто o, o и всѣхъ t и имѣетъ производныя $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial\psi}{\partial\chi}$, которыя равно какъ и ψ непрерывны по φ χ t. Абсолютныя величины упомянутыхъ производныхъ для $|\varphi| < \gamma$ $|\chi| < \gamma$ пусть суть меньше чѣмъ $\triangle_1$ и одновременно пусть имѣетъ мѣсто $|\psi(o, o, t)| < \triangle_2\,\gamma$. При этомъ γ пусть есть положительное число, между тѣмъ какъ относительно $\triangle_1$ и $\triangle_2$ мы предоставимъ себѣ право, выбрать ихъ надлежащимъ образомъ какъ положительныя числа, зависящія только отъ $\mathfrak{f}$ и p. Область $|\varphi| < \gamma$ $|\chi| < \gamma$ пусть лежитъ со включеніемъ предѣловъ внутри области (A).

Если замѣнить уравненіе 1) при помощи подстановки $\frac{d\varphi}{dt} = \chi$ системою

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= -2\,\mathfrak{f}\chi - p\varphi + \psi(\varphi, \chi, t) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \chi \end{aligned}\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2$$

и выбрать Δ_1, Δ_2 надлежащимъ образомъ, то вернемся къ случаю, характеризованному въ началѣ гл. II. „Таблица величинъ a“ при этомъ представляется при помощи

$$\begin{matrix} -2\mathfrak{f} & -p \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

---

*) См. замѣчанія, сдѣланныя въ введеніи относительно этихъ приложеній.

такъ что корни характеристичнаго уравненія т. е. $-f \pm \sqrt{-p + f^2}$ имѣютъ всегда отрицательную вещественную часть.

Получаемъ, слѣдовательно, на основаніи общихъ теоремъ, найденныхъ нами въ предъидущемъ, слѣдующее предложеніе: Существуетъ одно и при томъ единственное рѣшеніе Φ уравненія 1), данное для всѣхъ t, для котораго всегда $-\gamma < \varphi < +\gamma$ $-\gamma < \frac{d\varphi}{dt} < +\gamma$. Если φ_0 и $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$ выбраны достаточно малыми по абсолютной величинѣ, то эти величины, разсматриваемыя какъ начальныя значенія величинъ φ или $\frac{d\varphi}{dt}$ для произвольно выбраннаго значенія t, даютъ рѣшеніе уравненія 1), остающееся для бóльшихъ t въ области $-\gamma < \varphi < \gamma$ $-\gamma < \frac{d\varphi}{dt} < +\gamma$ и асимптотически приближающееся для $t \to +\infty$ къ рѣшенію Φ.

Если прибавить дальнѣйшее предположеніе, что t встрѣчается въ $\psi(\varphi, \chi, t)$ въ тригонометрическомъ видѣ*), то дальше слѣдуетъ: Рѣшеніе Φ можно представить при помощи тригонометрическаго ряда, равномѣрно сходящагося для всѣхъ t.

Перейдемъ теперь къ еще болѣе частному случаю, примѣняя сказанное къ вопросу изъ акустики.

Гельмгольцъ въ своей теоріи комбинаціонныхъ тоновъ основывается**) на слѣдующемъ уравненіи

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} = ax + bx^2 + f\sin(pt) + g\sin(qt + c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

При этомъ $a > o$. Гельмгольцъ полагаетъ $f = \varepsilon \,.\, f_1$ $g = \varepsilon \,.\, g_1$ и говоритъ, что уравненіе 3) имѣетъ интегралъ

$$x = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad 4$$

причемъ $x_1\ x_2 \ldots$ слѣдуетъ опредѣлять послѣдовательно изъ

$$m\ddot{x}_1 + ax_1 = -f_1\sin(pt) - g_1\sin(qt + c)$$
$$m\ddot{x}_2 + ax_2 = -b\,x_1^2$$
$$m\ddot{x}_3 + ax_3 = -2\,bx_1\,x_2$$
$$- - - - - - - -$$

Система послѣднихъ уравненій интегрируется такимъ образомъ, что интегралъ 4) получается въ видѣ тригонометрическаго ряда, имѣющаго аргументами цѣлыя кратности выраженій pt и qt. Аргументы $(p + q)t$, $(p - q)t$ даютъ тогда члены, соотвѣтствующіе комбинаціоннымъ тонамъ наинисшаго порядка.

Можно противъ этого возразить, что существованіе интеграла вида, указаннаго Гельмгольцомъ, до сихъ поръ еще не доказано. Уравненіе Гельмгольца можно сравнить съ уравненіемъ (упомянутымъ въ введеніи), которое встрѣчается въ небесной механикѣ и разсматривается Poincaré. Но Poincaré доказываетъ существованіе тригонометрическаго инте-

*) О значеніи этого выраженія см. введеніе.

**) Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. I. pag. 260.

грала только для положительнаго α (если число аргументовъ больше 1). Этотъ случай однако не соотвѣтствуетъ уравненію 3) при условіи $a > o$. Что для уравненія 3) дано соотвѣтствующее доказательство, во всякомъ случаѣ мнѣ не извѣстно.

Во вторыхъ спрашивается, почему — если допустить существованіе упомянутаго интеграла — слѣдуетъ выбрать именно этотъ интегралъ. Не думаю, чтобы было возможно найти отвѣтъ только при помощи нашего уравненія. Очевидно, при этомъ молча предполагаютъ тормозящія силы и употребляютъ заключеніе по аналогіи, обращая вниманіе на случаи, въ которыхъ тонъ, свойственный системѣ, вслѣдствіе торможенія мало-по-малу исчезаетъ и слѣдуетъ всегда принимать въ соображеніе только аргументы, соотвѣтствующіе внѣшнимъ силамъ.

Но именно тогда, если обратить вниманіе также на сопротивленія — правда по принятому обычаю — можно найти твердое основаніе теоріи. Ибо, если прибавить въ правой части уравненія 3) членъ $2\,q\,\frac{dx}{dt}$ $(q > o)$*), то новое уравненіе принадлежитъ къ выше упомянутому классу, если члены, соотвѣтствующіе внѣшнимъ силамъ, имѣютъ достаточно малую абсолютную величину. Одинъ интегралъ тогда можно представить въ видѣ тригонометрическаго ряда. Если ограничиться достаточно малыми начальными элонгаціями и скоростями, то каждое другое рѣшеніе асимптотически приближается къ упомянутому для безпредѣльно возрастающихъ t.

§ 25.

Какъ дальнѣйшій примѣръ разсмотримъ **движеніе механической системы вблизи положенія, гдѣ потенціалъ имѣетъ minimum, подъ вліяніемъ возмущающихъ силъ.**

Предположенія, на которыхъ мы при этомъ основываемся, введемъ въ двухъ различныхъ видахъ и будемъ отличать два соотвѣтствующіе случая при помощи знаковъ I и II.

Положеніе системы пусть опредѣляется при помощи n координатныхъ параметровъ $u_1\ u_2\ .\ .\ u_n$. Въ нѣкоторой окрестности мѣста $oo\ .\ .\ o$, характеризованной при помощи

$$a_i < u_i < b_i \qquad (i = 1, 2\ .\ .\ n)\ .\ .\ .\ .\ .\ 1$$

пусть даны силовая функція V и ея производныя перваго и втораго порядка какъ однозначныя и непрерывныя функціи $u_1\ .\ .\ .\ u_n$. Для $u_1 = u_2 = .\ .\ u_n = o$ V пусть имѣетъ minimum. Это пусть обнаруживается тѣмъ, что, если представить V по формулѣ Тэйлора, то члены втораго порядка даютъ опредѣленно положительную форму, между тѣмъ какъ члены перваго порядка исчезаютъ.

Живая сила T пусть выражается при помощи

$$2\,T = \sum_{i\,k} A_{ik}\, u_i'\, u_k' \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2\ .\ .\ n \\ k = 1, 2\ .\ .\ n \end{pmatrix.}\ A_{ik} = A_{ki}\Big)\ .\ .\quad 2$$

При этомъ A_{ik} и ихъ производныя перваго и втораго порядка въ области I) даны какъ

*) Впрочемъ изъ предыдущаго слѣдуетъ, что можно также еще ввести поправительные члены весьма общаго вида.

однозначныя и непрерывныя функціи $u_1 \ldots u_n$. При этомъ въ случаѣ I выраженіе 2) пусть имѣетъ силу для $u_1 \ldots u_n$ области 1) и $u_1' \, u_2' \ldots u_n'$ области

$$a_i' < u_i' < b_i' \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \quad 3$$

содержащей $o \; o \ldots o$. Въ случаѣ II 2) пусть имѣетъ силу для $u_1 \, u_2 \ldots u_n$ области 1) и всѣхъ $u_1' \, u_2' \ldots u_n'$. Неотрицательная T въ обоихъ случаяхъ пусть исчезаетъ только для $u_1' = u_2' = \ldots = u_n' = o$,

Образуемъ теперь уравненія Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_i'} = \frac{\partial (T + V)}{\partial u_i} + U_i \quad \ldots \ldots \quad 4$$
$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

При этомъ U_i соотвѣтствуютъ возмущающимъ силамъ. Въ случаѣ I U_i пусть суть функціи $t \, u_1 \ldots u_n \, u_1' \ldots u_n'$ для u области 1), u' области 3) и всѣхъ t. Въ случаѣ II U_i пусть суть функціи $t \, u_1 \ldots u_n \, u_1' \ldots u_n'$ для $u_1 \ldots u_n$ области 1) и всѣхъ $u_1' \ldots u_n' \, t$. Въ обоихъ случаяхъ производныя перваго порядка по $u_1 \ldots u_n \, u_1' \ldots u_n'$ пусть существуютъ и равно какъ и U_i пусть суть непрерывныя функціи u, u', t. Въ случаѣ II U_i пусть лежатъ между конечными предѣлами для всѣхъ разсматриваемыхъ u, u', t. Кромѣ того предоставимъ себѣ право, приписать $|U^o_i|$ (индексъ o указываетъ на то, что слѣдуетъ положить $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u_1' = \ldots = u_n' = o$) и $\left|\frac{\partial U_i}{\partial u_k}\right|$, $\left|\frac{\partial U_i}{\partial u'_k}\right|$ степень малости, а именно въ случаѣ I для u области 1), u' области 3) и всѣхъ t, въ случаѣ II для всѣхъ t и u, u' каждой области

$$-g < u_i < +g \qquad -g < u'_i < +g \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \quad 5$$

которая, на сколько рѣчь идетъ о u, лежитъ внутри 1). Пусть имѣемъ право поставить эту степень малости въ случаѣ I въ зависимость отъ характера T и V, въ случаѣ II отъ характера функцій T и V и кромѣ того отъ конечныхъ предѣловъ, между которыми по предъидущему лежатъ U_i.

Замѣнимъ систему уравненій 4) черезъ другую, разсматривая $u_1' \, u_2' \ldots u_n'$ какъ новыя перемѣнныя и дополняя систему при помощи $\frac{du_1}{dt} = u_1' \ldots \frac{du_n}{dt} = u_n'$. Получаемъ

$$A_{\mu 1}\frac{du_1'}{dt} + A_{\mu 2}\frac{du_2'}{dt} + \ldots + A_{\mu n}\frac{du_n'}{dt} = \frac{\partial V}{\partial u_\mu} + W_\mu + U_\mu \quad \ldots \quad 6$$
$$(\mu = 1, 2 \ldots)$$

причемъ W_μ обозначаютъ однородныя формы второй степени по u'. Коэффиціенты этихъ формъ представляются при помощи выраженій, образованныхъ изъ производныхъ перваго порядка величинъ A_{ik}. Упомянутыя выраженія линейныя и однородныя и имѣютъ постоянные коэффиціенты.

Уравненія 6) можно рѣшить по $\frac{du_1'}{dt} \ldots \frac{du_n'}{dt}$, такъ какъ опредѣлитель A коэффиціентовъ въ лѣвой части не исчезаетъ. Получаемъ

$$\frac{du'_i}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\alpha_{\mu i}}{A} \left(\frac{\partial V}{\partial u_\mu} + W_\mu + U_\mu \right)$$

$$(i = 1, 2 \ldots n) \qquad \ldots \ldots \; 7$$

причемъ $\alpha_{\mu i}$ обозначаетъ миноръ опрѣлителя A, соотвѣтствующій $A_{\mu i}$. $\frac{\alpha_{\mu i}}{A}$ поэтому суть непрерывныя функціи $u_1\, u_2 \ldots u_n$ и имѣютъ непрерывныя производныя перваго и второго порядка.

Дадимъ теперь найденнымъ уравненіямъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= u_i' \\ \frac{du_i'}{dt} &= C_{i1}\, u_1 + C_{i2}\, u_2 + \ldots + C_{in}\, u_n + R_i + S_i \\ (i &= 1, 2 \ldots n) \end{aligned}\right\} \ldots \ldots \; 8$$

При этомъ мы положили

$$\left.\begin{aligned} C_{i\nu} &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\alpha^0_{\mu i}}{A^0} \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_\mu \partial u_\nu} \\ Ri &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\alpha_{\mu i}}{A} \left(\frac{\partial V}{\partial u_\mu} + W_\mu \right) - C_{i1}\, u_1 - C_{i2}\, u_2 - \ldots - C_{in}\, u_n \\ S_i &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\alpha_{\mu i}}{A} U_\mu \end{aligned}\right\} \ldots \; 9$$

Индексъ o указываетъ при этомъ на то, что мы положили $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = o$. R_i суть непрерывныя функціи u и u' и имѣютъ непрерывныя производныя перваго порядка по u, u'. Для $u_1 = \ldots = u_n = u_1' = \ldots = u_n' = o$ исчезаютъ упомянутыя производныя равно какъ и R_i. Дальше замѣтимъ, что R_i зависятъ только отъ характера функцій T и V. S_i суть функціи u, u', t, которыя вмѣстѣ съ производными перваго порядка по u, u' непрерывны.

Образуемъ теперь уравненіе, которое въ слѣдующемъ играетъ роль характеристичнаго уравненія, т. е.

$$\begin{vmatrix} -\omega & o & \ldots & o & 1 & o & \ldots & o \\ o & -\omega & \ldots & o & o & 1 & \ldots & o \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ o & o & \ldots & -\omega & o & o & \ldots & 1 \\ C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1n} & -\omega & o & \ldots & o \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2n} & o & -\omega & \ldots & o \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots & C_{nn} & o & o & \ldots & -\omega \end{vmatrix} = o \qquad \ldots \ldots \; 10$$

Преобразуемъ его, вычитая первую строку, умноженную на $-\omega$, изъ $n + 1$-ой строки. Такимъ же образомъ поступаемъ затѣмъ относительно второй и $n + 2$-ой строки etc. Тогда получаемъ

$$\begin{vmatrix} C_{11} - \omega^2 & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} - \omega^2 & \dots & C_{2n} \\ - & - & - & - \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} - \omega^2 \end{vmatrix} = o \quad \dots \quad 11$$

Уравненіе 11) умножимъ на опредѣлитель

$$A^0 = \begin{vmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 & \dots & A_{1n}^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 & \dots & A_{2n}^0 \\ - & - & - & - \\ A_{n1}^0 & A_{n2}^0 & \dots & A_{nn}^0 \end{vmatrix}$$

по предъидущему отличающійся отъ нуля, причемъ индексъ о указываетъ на то, что слѣдуетъ положить $u_1 = u_2 = \dots = u_n = o$. Лѣвую часть полученнаго уравненія можно тогда такимъ образомъ представить въ видѣ опредѣлителя съ n^2 элементами, что s-ый членъ r-ой строки получаетъ видъ

$$\sum_{\nu=1}^{n} C_{\nu r} A_{\nu s}^0 - \omega^2 A_{rs}^0 = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\alpha_{\mu\nu}^0}{A^0} \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_\mu \partial u_r} \right] A_{\nu s}^0 - \omega^2 A_{rs}^0 =$$

$$= \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_r \partial u_s} - \omega^2 A_{rs}^0$$

Находимъ поэтому уравненіе

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_1 \partial u_1} - \omega^2 A_{11}^0 & \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_1 \partial u_2} - \omega^2 A_{12}^0 & \dots & \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_1 \partial u_n} - \omega^2 A_{1n}^0 \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_2 \partial u_1} - \omega^2 A_{21}^0 & \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_2 \partial u_2} - \omega^2 A_{22}^0 & \dots & \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_2 \partial u_n} - \omega^2 A_{2n}^0 \\ - & - & - & - \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_n \partial u_1} - \omega^2 A_{n1}^0 & \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_n \partial u_2} - \omega^2 A_{n2}^0 & \dots & \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_n \partial u_n} - \omega^2 A_{nn}^0 \end{vmatrix} = o \dots 12$$

Оно принадлежитъ къ извѣстному классу и въ нашемъ случаѣ, когда

$$\sum_{ik} A_{ik}^0 x_i x_k \qquad \sum_{ik} \frac{\partial^2 V_0}{\partial u_i \partial u_k} x_i x_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \dots n \\ k = 1, 2 \dots n \end{pmatrix}$$

суть опредѣленно положительныя квадратичныя формы относительно x, имѣетъ n вещественныхъ положительныхъ корней для ω^2 *). Слѣдовательно, всѣ корни уравненія 10) вещественны, отличаются отъ нуля и попарно имѣютъ противоположные знаки.

§ 26.

Остановимся теперь сначала на предположеніяхъ вида I и воспользуемся результатами предъидущихъ главъ; а именно воспользуемся теоремою, которую подробно привели въ введеніи. При этомъ для нашей цѣли имѣетъ важность случай „t произвольная величина“. Таблица

---

*) См. Thomson u. Tait, Theoretische Physik. Deutsche Ausgabe I, 1 p. 314. Weierstrass, Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Werke Bd. II, p. 43.

$$\left.\begin{array}{cccccccccc} o & o & \dots & o & 1 & o & \dots & & & o \\ o & o & \dots & o & o & 1 & \dots & & & o \\ - & - & - & - & - & - & - & - & & \\ o & o & \dots & o & o & o & \dots & & & 1 \\ C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} & o & o & \dots & & & o \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} & o & o & \dots & & & o \\ - & - & - & - & - & - & - & & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} & o & o & \dots & & & o \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 13$$

имѣетъ то свойство, что уравненіе 10*) имѣетъ только корни, вещественная часть которыхъ не исчезаетъ. Обозначимъ черезъ D_1 D_2 положительныя числа, которыя соотвѣтствуютъ таблицѣ 13) такимъ же образомъ, какъ $\triangle_1$ $\triangle_2$, упомянутыя въ введеніи, таблицѣ величинъ a уравненій 1) въ введеніи.

Опредѣлимъ теперь такое число $\gamma > o$, что область

$$-\gamma < u_i < \gamma \qquad -\gamma < u_i' < \gamma \qquad (i = 1, 2 \dots n) \quad \dots\dots \quad 14$$

со включеніемъ предѣловъ лежитъ внутри области, опредѣленной при помощи 1) и 3); что дальше для мѣстъ области 14) абсолютныя значенія производныхъ перваго порядка величинъ R_i по u, u' меньше чѣмъ $\frac{D_1}{2}$. Послѣднее возможно, такъ какъ упомянутыя производныя суть непрерывныя функціи u, u', которыя исчезаютъ для $u_1 = u_2 = \dots = u_n = u_1' = \dots u_n' = o$; γ можно разсматривать какъ величину, опредѣленную характеромъ T и V.

Можно затѣмъ такимъ образомъ выбрать согласно предъидущему степень малости, упомянутую въ предположеніяхъ предъидущаго §, что для мѣстъ области 14) и всѣхъ t $\left|\frac{\partial S_i}{\partial u_k}\right|$, $\left|\frac{\partial S_i}{\partial u_k'}\right| < \frac{D_1}{2}$ и $\left|S_i^{\,o}\right| < D_2\,\gamma$. Индексъ o при этомъ указываетъ на то, что слѣдуетъ положить $u_1 = u_2 = \dots = u_n = u_1' = \dots = u_n' = o$. Справедливость этого замѣчанія слѣдуетъ изъ вида S_i, характеризованнаго въ предъидущемъ §.

Ничто поэтому не мѣшаетъ примѣненію теоремы, приведенной въ введеніи. Можемъ поэтому ввести извѣстнымъ намъ образомъ $2n$ линейныхъ однородныхъ выраженій относительно величинъ u, u'

$$\begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{array}$$

съ опредѣлителемъ, отличающимся отъ нуля, и формулировать относительно этихъ выраженій теоремы, которыя непосредственно вытекаютъ изъ соотвѣтствующихъ теоремъ, приведенныхъ въ введеніи.

§ 27.

Мы основываемся теперь на предположеніяхъ вида II и начинаемъ наше изслѣдованіе для этого случая рядомъ предварительныхъ соображеній.

*) Ссылки, номеръ которыхъ не встрѣчается въ этомъ §, относятся къ § 25. Соотвѣтствующее имѣетъ мѣсто для слѣдующаго §.

A. Для каждой области $a_i^0 < u_i < b_i^0$, лежащей со включеніемъ предѣловъ внутри 1), можно заключить корни уравненія

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \sigma & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \sigma & \dots & A_{2n} \\ - & - & - & - \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

между двумя положительными числами. Поэтому для каждой отдѣльной такой области имѣемъ

$$K \sum_{i=1}^{n} u_i'^2 \leqq T < G \sum_{i=1}^{n} u_i'^2$$

причемъ $K > 0$, $G > 0$.

B. Если имѣемъ движеніе, распространяющееся на $t_1 \leqq t < t_2$, то T при этомъ не можетъ принимать сколь угодно большія значенія, если система не принимаетъ положеній сколь угодно близкихъ къ границѣ области 1). Ибо, если система не принимаетъ положеній сколь угодно близкихъ къ границѣ, то можно найти область $e_i < u_i < h_i$ (лежащую со включеніемъ предѣловъ въ области 1), внутри которой остается разсматриваемая система. Такъ какъ изъ 4) слѣдуетъ

$$\frac{d}{dt}(T - V) = \sum_{i=1}^{n} u_i' U_i$$

то имѣемъ тогда

$$\frac{dT}{dt} = 2 M \sqrt{T}$$

причемъ $|M|$ всегда меньше чѣмъ опредѣленное число $C > 0$. Тогда

$$\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1} < C(t_2 - t_1)$$

если T_0 есть значеніе T, принадлежащее къ значенію t t_0 изъ выше упомянутаго промежутка значеній t. Въ самомъ дѣлѣ. Если $T_0 < T_1$, то упомянутое утвержденіе не требуетъ доказательства. Если однако $T_0 > T_1$, то можно найти такимъ образомъ значеніе t $t_3 < t_0$, что для t_3 живая сила $= T_1$, между тѣмъ какъ для $t_3 < t < t_0$, $T > T_1$. Такъ какъ для $t_3 < t < t_0$ слѣдовательно $T > 0$, то можемъ писать для этого промежутка $\frac{d}{dt}\sqrt{T} = M$ и имѣемъ $\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1} < C(t_2 - t_1)$.

C. Пусть дано движеніе, которое совершается согласно нашимъ уравненіямъ. Обратимъ наше вниманіе на это движеніе начиная съ нѣкотораго момента времени τ (со включеніемъ этого момента) для возрастающихъ временъ. Если нельзя распространить упомянутаго движенія на всѣ $t > \tau$, то, какъ легко видѣть, можно распространить его на промежутокъ $\tau \leqq t < \vartheta$ и не дальше. При этомъ система для временъ, сколь угодно близкихъ къ ϑ, принимаетъ положенія, сколь угодно близкія къ границѣ области 1). Ибо, еслибы послѣднее утвержденіе не было справедливымъ, то — какъ слѣдуетъ изъ соображеній первой главы — для временъ, сколь угодно близкихъ къ ϑ, между величинами $|u'|$ должны были бы встрѣчаться сколь угодно большія значенія. Слѣдовательно, также T должна была бы принимать въ промежуткѣ $\tau \leqq t < \vartheta$ сколь угодно большія значенія. Но такъ какъ система въ упомянутомъ промежуткѣ не принимаетъ положеній, сколь угодно близкихъ къ границѣ области 1), то это слѣдствіе противно предъидущему.

Прежде чѣмъ продолжать наши предварительныя соображенія, опредѣлимъ область

$$-\gamma_0 < u_i < \gamma_0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 15$$

При этомъ $\gamma_0 > o$ такимъ образомъ выбрано какъ число, зависящее только отъ характера T и V, что 15) со включеніемъ предѣловъ лежитъ внутри 1).

D. Разсмотримъ теперь нѣкоторыя слѣдствія, вытекающія изъ предположенія, что нѣкоторое рѣшеніе для $t \gtreqless t_1$ остается внутри области

$$-D < u_i < D \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots\ldots \quad 16$$

причемъ $o < D \leqq \gamma_0$.

Пусть для $t = t_1$ по крайней мѣрѣ не всѣ u' равняются нулю. v пусть озозначаетъ такую величину u, что $|v'|$ для $t = t_1$ принимаетъ наибольшее значеніе, встрѣчающееся между величинами $|u'|$ для $t = t_1$. Обозначимъ значенія $v, v', u'_1 \ldots u_n'$ для $t = t_1$ черезъ $v_1, v_1' \; u_{11}' \ldots u_{n1}'$. Имѣемъ $|v_1'| > o$. Для $t = t_0$ $(t_0 > t_1)$

$$v_0 - v_1 - v_1'(t_0 - t_1) = \tfrac{1}{2}\, v''_{\mu}\,(t_0 - t_1)^2$$

причемъ v_0 обозначаетъ значеніе v для $t = t_0$ и v_{μ}'' обозначаетъ v'', образованное для значенія t между t_0 и t_1. Если положить

$$t_0 - t_1 = \frac{4\,D}{|v_1'|}$$

то слѣдуетъ

$$|v_{\mu}''| > \frac{v'^{\,2}_1}{4D}$$

При этомъ v_{μ}'' образуется для значенія t, которое отличается отъ t_1 менѣе чѣмъ на $\frac{4\,D}{|v_1'|}$, слѣдовательно, также менѣе чѣмъ на

$$\frac{4\sqrt{n}\;D}{\sqrt{u'^{\,2}_{11} + \ldots + u'^{\,2}_{n1}}}$$

Изъ уравненій 7) слѣдуетъ теперь, что, если u находятся въ области 15), величины $\left|\frac{du'}{dt}\right|$ меньше чѣмъ $P(u_1'^2 + \ldots + u_n'^2) + Q$, причемъ $P > o$ есть постоянная, опредѣленная характеромъ T и V, $Q > o$ постоянная, зависящая только отъ характера T и V и предѣловъ для U_i.

Имѣемъ, слѣдовательно, для нѣкотораго значенія $t > t_1$, отличающагося отъ t_1 менѣе чѣмъ на

$$\frac{4\sqrt{n}\;D}{\sqrt{u'^{\,2}_{11} + \ldots + u'^{\,2}_{n1}}}$$

$$P(u_1'^2 + \ldots + u_n'^2) + Q > \frac{u'^{\,2}_{11} + \ldots + u'^{\,2}_{n1}}{4\,n\,D} \quad \ldots\ldots \quad 17$$

Докажемъ теперь, что не можетъ быть

$$D < \frac{1}{4\,n\left[P + \frac{Q}{s_1{}^2}\right]}$$

причемъ мы положили $\sqrt{u'_{11}{}^2 + \ldots + u'_{n1}{}^2} = s_1$.

Ибо, еслибы это неравенство имѣло мѣсто, то мы имѣли бы

$$\frac{1}{4\,n\,D\,P} - \frac{Q}{Ps_1{}^2} = 1 + p$$

причемъ $p > o$. По 17) имѣемъ

$$P\,(u'_{12}{}^2 + \ldots + u'_{n2}{}^2) + Q > \frac{s_1{}^2}{4\,n\,D}$$

причемъ значенія $u'\;u'_{12}$ etc. относятся къ значенію $t\;t_2 > t_1$, отличающемся отъ t_1 менѣе чѣмъ на $\frac{4\sqrt{n}\,D}{s_1}$. Итакъ, слѣдуетъ, если $s_2 = \sqrt{u'_{12}{}^2 + \ldots + u'_{n2}{}^2}$

$$\frac{s_2{}^2}{s_1{}^2} > \frac{1}{4\,n\,D\,P} - \frac{Q}{P\,s_1{}^2}$$

и поэтому $\frac{s_2{}^2}{s_1{}^2} > 1 + p$. Поэтому $s_2 > o$ и $s_2{}^2 > s_1{}^2$. Исходя теперь изъ t_2 и s_2, получаемъ для нѣкотораго $t_3 > t_2$, отличающагося отъ t_2 менѣе чѣмъ на $\frac{4\sqrt{n}\,D}{s_2}$,

$$\frac{s_3{}^2}{s_2{}^2} > \frac{1}{4\,n\,DP} - \frac{Q}{Ps_2{}^2} > 1 + p$$

Слѣдовательно, $\frac{s_3{}^2}{s_2{}^2} > 1 + p$ etc. Получаемъ

$$\frac{s_m{}^2}{s_1{}^2} > (1 + p)^{m-1}$$

причемъ $s_m = \sqrt{u'_{1m}{}^2 + \ldots + u'_{nm}{}^2}$ и значенія $u'\;u'_{1m}$ etc. относятся къ значенію $t > t_1$ $t = t_m$, отличающемуся отъ t_1 мѣнѣе чѣмъ на

$$\frac{4\sqrt{n}\,D}{s_1} + \frac{4\sqrt{n}\,D}{s_1\sqrt{1+p}} + \frac{4\sqrt{n}\,D}{s_1\,(\sqrt{1+p})^2} + \ldots + \frac{4\sqrt{n}\,D}{s_1\,(\sqrt{1+p})^{m-2}}$$

слѣдовательно, также менѣе чѣмъ на

$$r = \frac{4\sqrt{n}\,D}{s_1} \cdot \frac{\sqrt{1+p}}{\sqrt{1+p} - 1}$$

$s^2 = u'_1{}^2 + \ldots + u'_n{}^2$, слѣдовательно, въ промежуткѣ $t_1 < t < t_1 + r$ принимаетъ сколь угодно большія значенія, чего не можетъ быть.

Прежде чѣмъ перейти къ слѣдующему изъ нашихъ предварительныхъ предложеній, введемъ линейныя однородныя выраженія p, q, образованныя изъ $u_1 \ldots u_n\;u'_1 \ldots u'_n$ такимъ образомъ, какъ p, q, встрѣчающіяся въ главѣ II, изъ $x_1 \ldots x_n$. Роль таблицы величинъ a при этомъ играетъ таблица

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\
- & - & - & - & - & - & - & & & & \\
0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \\
C_{11} & C_{12} & . & . & . & C_{1n} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\
C_{21} & C_{22} & . & . & . & C_{2n} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\
- & - & - & - & - & - & - & & & & \\
C_{n1} & C_{n2} & . & . & . & C_{nn} & 0 & 0 & . & . & . & 0
\end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18$$

Очевидно, существуютъ n величинъ p и n величинъ q. $u_1 \ldots u_n$ суть линейныя однородныя выраженія относительно p, q съ постоянными коэффиціентами, зависящими только отъ характера T и V. Эти выраженія пусть суть $\varphi_1 (p, q) \ldots \varphi_n (p\ q)$.

E. Докажемъ, что опредѣлители

$$\left|\begin{array}{cccc}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_n} \\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_n} \\
- & - & - & - \\
\frac{\partial\varphi_n}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial q_n}
\end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 19$$

и

$$\left|\begin{array}{cccc}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial p_n} \\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial p_n} \\
- & - & - & - \\
\frac{\partial\varphi_n}{\partial p_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial p_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial p_n}
\end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 20$$

не исчезаютъ*).

Для этой цѣли образуемъ слѣдующую вспомогательную систему

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dx_1}{dt} = x_1' \\
- - - - \\
\frac{dx_n}{dt} = x_n' \\
\frac{dx_1'}{dt} = C_{11}\, x_1 + C_{12}\, x_2 + \ldots + C_{1n}\, x_n \\
- - - - - - - - - - \\
\frac{dx_n'}{dt} = C_{n1}\, x_1 + C_{n2}\, x_2 + \ldots + C_{nn}\, x_n
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 21$$

---

*) Знаемъ, что C имѣютъ такія значенія, что уравненіе 10) имѣетъ только вещественные корни, отличающіеся отъ нуля, причемъ существуетъ одинаковое число положительныхъ и отрицательныхъ корней. Другими свойствами величинъ C мы не воспользуемся при слѣдующемъ доказательствѣ.

Пусть дальше $P_1 \dots P_n$ $Q_1 \dots Q_n$ образованы такимъ образомъ изъ $x_1 \dots x_n$ $x_1' \dots x_n'$, какъ p, q въ главѣ II изъ $x_1 \dots x_n$ на основанiи таблицы 18). Тогда изъ уравненiй 21) для P слѣдуютъ уравненiя, которыя распадаются на системы вида

$$\frac{d\mathfrak{p}_1}{dt} = h \cdot \mathfrak{p}_1$$

$$\frac{d\mathfrak{p}_2}{dt} = h \cdot \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_1$$

$$- - - - - - - -$$

$$\frac{d\mathfrak{p}_\mu}{dt} = h \cdot \mathfrak{p}_\mu + \mathfrak{p}_{\mu-1}$$

причемъ $h \gtrless o$.

Если функцiональный опредѣлитель 19) равняется нулю, то можно найти величину $Y = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_n x_n$, которая есть линейная однородная функцiя P. При этомъ исчезаютъ не всѣ постоянныя $r_1 \dots r_n$.

Можно было бы тогда, если $x_1 \dots x_n$ суть элементы системы рѣшенiй уравненiй 21), представить Y въ видѣ

$$\rho_1 (t) e^{h_1 t} + \rho_2 (t) e^{h_2 t} + \dots \qquad \dots \dots \dots \qquad 22$$

При этомъ ρ_1 ρ_2 etc обозначаютъ цѣлыя рацiональныя функцiи t, h_1 h_2 etc. величины h различныя между собою. Ибо для какого нибудь $\mathfrak{p}$ ряда $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_\mu$ имѣемъ $\mathfrak{p} = \rho (t) e^{ht}$, причемъ $\rho (t)$ есть цѣлая рацiональная функцiя t.

Если $x_1 (t) \dots x_n (t)$ суть элементы системы рѣшенiй уравненiй 21), то тоже самое имѣетъ мѣсто для $x_1 (-t) \dots x_n (-t)$. Имѣемъ дальше

$$r_1 x_1 (-t) + \dots + r_n x_n (-t) = \rho_1 (-t) e^{-h_1 t} + \rho_2 (-t) e^{-h_2 t} + \text{etc.} \dots \quad 23$$

Лѣвую часть можно однако по предъидущему выразить также аналогично 22). Отсюда слѣдуетъ $\rho_1 (t) = \rho_2 (t) \dots = o$, такъ что $r_1 x_1 + \dots + r_n x_n = o$. Однако мы не можемъ имѣть такого соотношенiя, такъ какъ можно найти элементы рѣшенiя $x_1 \dots x_n$, которые для выбраннаго значенiя t принимаютъ произвольныя значенiя.

Слѣдовательно 19) не исчезаетъ. Соотвѣтствующее имѣетъ мѣсто для 20).

Послѣ нѣкоторыхъ предварительныхъ соображенiй перейдемъ теперь къ нахожденiю тѣхъ результатовъ, которые имѣемъ въ виду.

Въ слѣдующемъ мы воспользуемся изслѣдованiями § 17, причемъ основываемся на случаѣ „t произвольная величина." Чтобы имѣть возможность, сдѣлать это удобнымъ образомъ, выбираемъ такимъ образомъ числа $\delta_1 \gtrless o$ $\delta_2 \gtrless o$ $\delta_3 \gtrless o$, что изъ предположенiя $\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| < \delta_1$ $\frac{|\xi_0|}{\gamma} < \delta_2$ $\gamma < \delta_3$ слѣдуетъ выполненiе предположенiй, введенныхъ въ § 17. При этомъ ξ_0 обозначаетъ значенiе ξ для $x_1 = \dots = x_n = o$. δ_1 δ_2 δ_3 можно разсматривать какъ числа, зависящiя только отъ таблицы величинъ a и характера функцiй $\varphi_1 (u_1 \dots u_k\ v_1 \dots v_l)$.

Возвращаясь теперь къ здѣсь разсматриваемому случаю, введемъ сначала функцiи $\varphi_i (w_1 \dots w_n\ v_1 \dots v_n)$, которыя происходятъ изъ выше упомянутыхъ φ_i (p, q), если писать для $p_1 \ldots p_n\ q_1 \ldots q_n\ w_1 \ldots w_n\ v_1 \ldots v_n$. Если назначить для этихъ функцій нѣкоторую окрестность мѣста $o \ldots o\ \varrho \ldots o$, то онѣ удовлетворяютъ условіямъ, даннымъ для $\varphi_i (u, v)$ въ § 17. Выбираемъ упомянутую окрестность такъ, что она опредѣляется какимъ нибудь образомъ при помощи характера T и V. Тогда можно разсматривать $\varphi (w, v)$ какъ функціи, характеризованныя при помощи T и V.

Введемъ теперь числа $D_1\ D_2\ D_3$, которыя всѣ больше нуля и соотвѣтствуютъ таблицѣ 18) и функціямъ $\varphi (w, v)$ такимъ же образомъ, какъ $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3$ таблицѣ величинъ a и $\varphi_i (u, v)$. $D_1\ D_2\ D_3$ можно разсматривать какъ числа, опредѣленныя характеромъ T и V.

Дальше $\mathfrak{w} > o$ пусть соотвѣтствуетъ таблицѣ 18) и функціямъ $\varphi (w, v)$ такимъ же образомъ, какъ σ таблицѣ величинъ a и $\varphi_i (u, v)$. Можно разсматривать $\mathfrak{w}$ какъ величину, опредѣленную характеромъ T и V.

Опредѣляемъ теперь такое число γ_1, что имѣютъ мѣсто неравенства $o < \gamma_1 < \gamma_0\ \gamma_1 < D_3$ и въ области

$$-\gamma_1 < u_i < \gamma_1 \qquad -\gamma_1 < u'_i < \gamma_1 \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots\ldots \quad 24$$

$\left|\dfrac{\partial R_\mu}{\partial u_\nu}\right| < \dfrac{D_1}{2}$ $\left|\dfrac{\partial R_\mu}{\partial u_\nu'}\right| < \dfrac{D_1}{2}$. γ_1 можно разсматривоть какъ число, зависящее только отъ характера T и V.

Затѣмъ выбираемъ γ_2 такимъ образомъ, что $o < \gamma_2 < \gamma_1$ и $u_i\ u'_i$ области

$$-\gamma_2 < u_i < \gamma_2 \qquad -\gamma_2 < u_i' < \gamma_2 \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots\ldots \quad 25$$

даютъ p, q въ области

$$\sum_{\mu=1}^{n} d_\mu\ p_\mu^2 < \delta \cdot \gamma_1^2 \qquad \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\ q_\nu^2 > -\delta \cdot \gamma_1^2 \quad \ldots\ldots \quad 26$$

При этомъ $d_\mu\ f_\nu\ \delta$ соотвѣтствуютъ таблицѣ 18) такимъ же образомъ, какъ величины того же самаго названія въ главѣ II таблицѣ величинъ a. γ_2 можно разсматривать какъ величину, зависящую только отъ характера T и V.

Далѣе выбираемъ такую $\mathfrak{g}$, что

$$o < \mathfrak{g} < \gamma_2 \qquad \mathfrak{g} < \frac{1}{4\,n\left[P + \dfrac{Q}{\gamma_2^2}\right]}$$

$\mathfrak{g}$ можно разсматривать какъ величину, опредѣленную характеромъ T и V и предѣлами для U_i.

Степень малости для $\left|\dfrac{\partial U_i}{\partial u_k}\right|$, $\left|\dfrac{\partial U_i}{\partial u_k'}\right|$, $|\,U_i^o\,|$ можемъ согласно предъидущему опредѣлить такимъ образомъ, что $\left|\dfrac{\partial S_i}{\partial u_k}\right| < \dfrac{D_1}{2}$ $\left|\dfrac{\partial S_i}{\partial u_k'}\right| < \dfrac{D_1}{2}$ $\dfrac{|\,S_i^o\,|}{\mathfrak{g}} < D_2$ (индексъ o указываетъ на то, что мы положили $u_1 = \ldots = u_n = u_1' = \ldots = u_n' = o$) въ области 24). Сдѣлаемъ это также на самомъ дѣлѣ.

На основаніи § 17 видимъ теперь, что каждому мѣсту области

$$-\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{g} < u_i < \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{g} \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots\ldots \quad 27$$

и каждому значенію $t\ t_1$ соотвѣтствуетъ одно и при томъ единственное мѣсто области

$$\sum_{\mu=1}^{n} d_\mu\ p_\mu^2 < \delta \cdot \mathfrak{g}^2 \qquad \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\ q_\nu^2 > -\delta \cdot \mathfrak{g}^2 \quad \ldots\ldots \quad 28$$

которое дастъ упомянутое мѣсто u и взятое за начальное мѣсто для $t = t_1$ дастъ рѣшеніе, остающееся для $t \geqq t_1$ въ области 28). Какъ легко видѣть, положительное число $\mathfrak{w}$ меньше чѣмъ 1.

Рѣшеніе, остающееся для $t > t_1$ въ области 28), для $t > t_1$ остается также въ области

$$-\mathfrak{g} < u_i < \mathfrak{g} \qquad -\mathfrak{g} < u_i' < \mathfrak{g} \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \quad 29$$

Для каждаго мѣста области 27) и каждаго значенія $t\ t_1$ существуетъ поэтому, по крайней мѣрѣ, одно рѣшеніе, остающееся для $t > t_1$ въ области

$$-\mathfrak{g} < u_i < \mathfrak{g} \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \quad 30$$

для котораго упомянутое мѣсто u есть частное начальное мѣсто для $t = t_1$. Докажемъ теперь, что существуетъ также только одно такое рѣшеніе.

Для этой цѣли обратимъ наше вниманіе сначала на то, что для рѣшенія разсматриваемаго рода никогда для значенія $t > t_1$ $u_1'^2 + \ldots + u_n'^2 > \gamma_2^2$. Ибо еслибы это когда нибудь имѣло мѣсто, то мы имѣли бы по выше доказанной теоремѣ

$$\mathfrak{g} > \frac{1}{4n\left[P + \dfrac{Q}{\sum\limits_{i=1}^{n} u_i'^2}\right]} > \frac{1}{4n\left[P + \dfrac{Q}{\gamma_2^2}\right]}$$

что противно предъидущему.

Слѣдовательно, u' для $t > t_1$ лежатъ въ области $-\gamma_2 < u_i' < \gamma_2$ $(i = 1, 2 \ldots n)$. Итакъ, разсматриваемое рѣшеніе для $t \geqq t_1$ лежитъ въ области 25), слѣдовательно, также въ области 26). Теперь однако слѣдуетъ изъ § 17, что каждому мѣсту области

$$-\mathfrak{w} \cdot \gamma_1 < u_i < \mathfrak{w} \cdot \gamma_1 \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \quad 31$$

и каждому значенію t соотвѣтствуетъ одно и при томъ единственное мѣсто области 26), которое даетъ упомянутое мѣсто u и, взятое за начальное мѣсто для упомянутаго значенія t, даетъ рѣшеніе, остающееся для бóльшихъ значеній t въ области 26).

Такъ какъ мѣсто u области 27), на которомъ мы основываемся, одновременно есть мѣсто u области 31), то изъ сказаннаго въ самомъ дѣлѣ слѣдуетъ, что существуетъ только одно рѣшеніе разсматриваемаго рода.

Констатируемъ дальше существованіе рѣшенія, остающагося для всѣхъ t въ области 30). Въ самомъ дѣлѣ, существуетъ рѣшеніе, остающееся для всѣхъ t въ 28). Оно также всегда остается въ 29). Это и единственное рѣшеніе, остающееся для всѣхъ t въ 30). Ибо каждое рѣшеніе, остающееся для всѣхъ t въ 30) остается также для всѣхъ t въ 26). Существуетъ однако только одно рѣшеніе послѣдняго свойства.

Два рѣшенія, остающіяся для $t \geqq t_1$ въ области 30), асимптотически приближаются для $t \to \infty$, какъ легко слѣдуетъ изъ того, что они остаются въ 26).

Мы пришли, слѣдовательно, къ слѣдующей теоремѣ: Каждому мѣсту u области

$$-\mathfrak{w} \cdot \mathfrak{g} \leqq u_i \leqq \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{g} \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

и каждому значенію $t\ t_0$ соотвѣтствуетъ одно и при томъ только одно рѣшеніе, дающее для $t = t_0$ упомянутое мѣсто u и остающееся для $t \geqq t_0$ въ области

$$-\mathfrak{g} < u_i < \mathfrak{g} \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \quad \ldots \quad 32$$

Существуетъ одно и при томъ только одно рѣшеніе, остающееся для всѣхъ t въ области 32). Два рѣшенія, остающіяся для достаточно большихъ t въ области 32), асимптотически приближаются для $t \to \infty$. При этомъ $\mathfrak{w} > o$ есть число, зависящее только отъ характера T и V. $\mathfrak{g} > o$ есть число, зависящее только отъ характера T и V и отъ предѣловъ для U_i.

Если $\mathfrak{h} > o$ есть число $< \mathfrak{g}$, то рѣшенія, соотвѣтствующія подобно какъ въ предъидущемъ мѣстамъ въ области

$$-\mathfrak{w} \, . \, \mathfrak{h} < u_i < \mathfrak{w} \, . \, \mathfrak{h} \qquad (i = 1, 2 \, . \, . \, n) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 33$$

лежатъ въ области

$$-\mathfrak{h} < u_i < \mathfrak{h} \qquad -\mathfrak{h} < u_i' < \mathfrak{h} \qquad (i = 1, 2 \, . \, . \, n) \quad . \; . \; . \; . \quad 34$$

если

$$\frac{| S_i^0 |}{\mathfrak{h}} < D_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 35$$

Ибо тогда для каждаго мѣста области 33) и каждаго значенія t можно найти соотвѣтствующее мѣсто изъ

$$\sum_{\mu=1}^{n} d_\mu \, p_\mu^{\,2} < \delta \, . \, \mathfrak{h}^2 \qquad \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu \, q_\nu^{\,2} > -\delta \, . \, \mathfrak{h}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 36$$

дающее рѣшеніе, которое для бо́льшихъ t остается въ 36). Оно остается также въ 34).

Условіе 35) можно считать выполненнымъ, если предоставимъ себѣ право, опредѣлить степень малости величинъ $| U_i^0 |$ не только при помощи выше упомянутыхъ данныхъ, но также при помощи $\mathfrak{h}$. Если $U_i^0 = o$ $(i = 1, 2 \, . \, . \, n)$, то упомянутое условіе удовлетворяется всегда.

Если имѣютъ мѣсто зависимости 35), то рѣшеніе, остающееся всегда въ 32), впрочемъ лежитъ въ 34).

Обратимъ теперь наше вниманіе еще на случай, когда $U_i = o$ $(i = 1, 2 \, . \, . \, n)$. Тогда удовлетворены установленія относительно степени малости, встрѣчающейся въ предположеніяхъ, и имѣютъ мѣсто также всегда зависимости 35). Приходимъ такимъ образомъ легко къ слѣдующей теоремѣ:

Пусть имѣютъ силу предположенія вида II, причемъ однако U_i въ уравненіяхъ 4) исчезаютъ и также тѣ части предположеній, которыя относятся къ U_i. Тогда имѣемъ слѣдующее предложеніе: Если $\mathfrak{h}$ есть какое нибудь число, удовлетворяющее условію $o < \mathfrak{h} < \mathfrak{z}$, причемъ $\mathfrak{z} > o$ обозначаетъ извѣстное число, зависящее только отъ характера T и V, то для каждаго мѣста области

$$-\mathfrak{w} \, . \, \mathfrak{h} \leqq u_i \leqq \mathfrak{w} \, . \, \mathfrak{h} \qquad (i = 1, 2 \, . \, . \, . \, n)$$

и для каждаго значенія t t_1 существуетъ рѣшеніе, остающееся для $t > t_1$ въ области

$$-\mathfrak{h} < u_i < \mathfrak{h} \qquad -\mathfrak{h} < u'_i < \mathfrak{h} \qquad (i = 1, 2 \, . \, . \, . \, n)$$

для котораго упомянутое мѣсто u есть частное начальное мѣсто для $t = t_1$. Это единственное рѣшеніе, остающееся для $t > t_1$ въ области

$$-\mathfrak{z} < u_i < \mathfrak{z} \qquad (i = 1, 2 \, . \, . \, . \, n) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 37$$

для котораго мѣсто u есть частное начальное мѣсто для $t = t_1$, $u_1 = \ldots = u_n = o$ есть единственное рѣшеніе, которое для всѣхъ t остается въ области 37). Для каждаго рѣшенія, остающагося для достаточно большихъ t въ области 37), имѣемъ

$$\lim_{t \to \infty} u_i = o \qquad \lim_{t \to \infty} u'_i = o \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

Конечно, можно формулировать предложенія, соотвѣтствующія предъидущему, причемъ знаки вида $t < t$, $t \to -\infty$ играютъ аналогичную роль, какъ въ предъидущемъ знаки вида $t > t$, $t \to \infty$.

Наконецъ замѣчаю, что къ изслѣдованіямъ этого § я былъ приведенъ работою*) профессора К н е з е р а*).

§ 28.

Отъ вопроса, разсмотрѣннаго въ трехъ послѣднихъ §, перейдемъ теперь къ частному случаю.

Пусть дана механическая система, состоящая изъ двухъ твердыхъ тѣлъ. Одно изъ нихъ пусть имѣетъ видъ шара и массу S, другое видъ кольца и массу R. Назовемъ первое изъ упомянутыхъ тѣлъ „Сатурномъ", второе тѣло „кольцомъ Сатурна"**). Сдѣлаемъ дальше слѣдующія предположенія. Кольцо Сатурна пусть представляетъ тѣло вращенія, имѣющее плоскость симметріи E, перпендикулярную къ оси. Если пересѣкаемъ его плоскостью E' проходящею черезъ ось, и выбираемъ на E' прямоугольную координатную систему, оси x и z которой совпадаютъ соотвѣтственно съ линіей пересѣченія плоскостей E и E' и съ осью вращенія, то сѣченіе не занимаетъ окрестности начала координатъ (центра кольца) и лежитъ въ части (плоскости), находящейся между прямыми $x + \sqrt{2}\, z = o$ и $x - \sqrt{2}\, z = o$ и содержащей ось x. Распредѣленіе массъ кольца пусть будетъ симметрическимъ вокругъ оси вращенія и также симметрическимъ относительно плоскости симметріи E. Радіусъ Сатурна пусть будетъ меньше чѣмъ радіусъ шара, который весь помѣщается внутри кольца Сатурна, если центръ шара совпадаетъ съ центромъ кольца. Распредѣленіе массъ Сатурна пусть будетъ концентрическимъ***).

Мы разсматриваемъ положенія Сатурна, въ которыхъ центръ Сатурна лежитъ на E, шаръ Сатурна однако вполнѣ внутри кольца, такъ что массы Сатурна находятся внѣ массъ кольца. Взаимный потенціалъ†) P обоихъ тѣлъ тогда равняется потенціалу кольца въ отношеніи къ массѣ R, которая считается сконцентрированною въ центрѣ Сатурна. На плоскости симметріи E примемъ прямоугольную координатную систему x y, начало которой лежитъ на оси вра-

*) См. A. Kneser, Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen. Journal für Mathematik Bd. 115 p. 308 u. Bd. 118 p. 186.

**) Этимъ мы однако ничего не утверждаемъ относительно строенія существующаго въ дѣйствительности кольца Сатурна.

***) Къ упомянутымъ предположеніямъ слѣдуетъ еще прибавить предположеніе общаго характера относительно распредѣленія массъ, чтобы обезпечить справедливость слѣдующихъ замѣчаній, которыя основываются на простѣйшихъ частяхъ теоріи потенціала. Формулированіе такихъ общихъ достаточныхъ условій можно предоставить теоріи потенціала.

†) Въ слѣдующемъ мы основываемся на законѣ Ньютона.

щенія. Для нѣкоторой окрестности мѣста $x = o$ $y = o$ P есть функція x и y (координатъ центра Сатурна) съ производными перваго и второго порядка, которыя равно какъ и P суть непрерывныя функціи x и y. Если индексъ o указываетъ на то, что мы положили $x = y = o$, то $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0 = o$. Величины втораго порядка — т. е.

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + 2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)_0 y^2\right]$$

— получаютъ видъ $A \cdot (x^2 + y^2)$, причемъ

$$A = \frac{S}{4}\int dm\, \frac{\rho^2 - 3e^2}{\rho^5}$$

Въ выраженіи въ правой части ρ указываетъ на разстояніе точки кольца отъ центра кольца, e на разстояніе точки кольца отъ плоскости симметріи E и dm на элементъ массы кольца. Интегралъ распространяется на кольцо. Изъ предположеній относительно вида кольца слѣдуетъ $A > o$. Если выбрать на плоскости симметріи E прямоугольную координатную систему, начало которой совпадаетъ съ центромъ Сатурна, то P выражается такимъ же образомъ при помощи u и v (координатъ центра кольца), какъ прежде при помощи x и y.

Изслѣдуемъ теперь движеніе выше упомянутой механической системы, причемъ представимъ себѣ, что она находится подъ вдіяніемъ силъ, происходящихъ съ одной стороны изъ взаимныхъ дѣйствій Сатурна и кольца, съ другой стороны изъ какихъ нибудь другихъ причинъ. Послѣднія силы пусть называются „внѣшними силами". Мы ограничиваемся такими движеніями, при которыхъ плоскость симметріи E имѣетъ опредѣленное положеніе, между тѣмъ какъ центръ Сатурна находится на E и шаръ Сатурна лежитъ вполнѣ внутри кольца. Внѣшнія силы при этомъ пусть обладаютъ симметріей относительно плоскости симметріи E.

Кромѣ неподвижной прямоугольной координатной системы въ пространствѣ ($\underline{x}$ $\underline{y}$ $\underline{z}$) съ плоскостью ($\underline{x}$ $\underline{y}$) параллельною плоскости симметріи E введемъ теперь на плоскости симметріи E прямоугольную координатную систему, оси которой имѣютъ одинаковое направленіе съ осями $\underline{x}$ и $\underline{y}$ только что упомянутой системы, между тѣмъ какъ начало координатъ лежитъ въ центрѣ Сатурна. Координаты центра кольца относительно послѣдней системы на плоскости пусть суть u v. Если еще обозначимъ проэкціи всей внѣшней силы, приложенной къ Сатурну или къ кольцу, |относительно неподвижной системы| при помощи $S \cdot X$ $S \cdot Y$ $R \cdot \Xi$ $R \cdot H$ то

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= \frac{R + S}{RS}\,\frac{\partial P}{\partial u} + \Xi - X \\ \frac{d^2 v}{dt^2} &= \frac{R + S}{RS}\,\frac{\partial P}{\partial v} + H - Y \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots \; 1$$

Мы придемъ къ частному случаю вопроса, разсматриваемаго въ § 25—27, если введемъ предположеніе, что $\Xi - X$ $H - Y$ суть функціи t, u, v, u', v', удовлетворяющія условіямъ которыя соотвѣтствуютъ предположеніямъ, сдѣланнымъ въ § 25 относительно U_i. Эти предположенія, какъ намъ извѣстно, мы ввели двоякимъ образомъ: они выразили, что нѣкоторыя величины даны въ нѣкоторыхъ областяхъ, что существуютъ нѣкоторыя производныя, что нѣкоторыя функціи непрерывны, что (въ соотвѣтствующемъ случаѣ) нѣкоторыя величины заключаются между предѣлами и, наконецъ, что дана нѣкоторая степень малости. Прежде чѣмъ формулировать предположенія относительно $\Xi - X$ и $H - Y$ слѣдуетъ ввести области, которыя въ нашемъ случаѣ играютъ ту же самую роль какъ 1) и 3) или 1) въ § 25.

Изслѣдованія § 25—27 обнаруживаютъ тогда безконечное множество движеній, при которыхъ для возрастающихъ временъ не происходитъ столкновеніе кольца и Сатурна, равно какъ и одно движеніе, при которомъ никогда не имѣемъ такого сталкновенія. Относительно упомянутыхъ движеній указываемъ на предъидущіе §.

Какъ извѣстно, Laplace*) изслѣдовалъ движеніе (на плоскости) системы, состоящей изъ Сатурна и кольца, предполагая при этомъ въ видѣ опыта, что послѣднее представляетъ однородную линію вида окружности. Laplace утверждаетъ, что при этомъ возмущающія силы всегда должны быть причиною столкновенія Сатурна и кольца. Какъ мы видѣли, это предложеніе не совершенно справедливо.

§ 29.

Какъ послѣдній примѣръ разсмотримъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{d^2z}{dt^2} - [\alpha + \varphi(t)]\, z = \psi(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1$$

При этомъ $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ пусть даны для всѣхъ t какъ непрерывныя функціи и пусть содержатъ t въ тригонометрическомъ видѣ. Послѣднее пусть выражаетъ, что $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ происходятъ изъ функцій $\Phi(u_1 \ldots u_m)$, $\Psi(u_1 \ldots u_m)$ при помощи подстановки $u_1 = \frac{t}{\alpha_1} \ldots u_m = \frac{t}{\alpha_m}$. Φ и Ψ при этомъ для всѣхъ вещественныхъ u даны какъ непрерывныя функціи, періодическія относительно u съ періодами 1. $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ обозначаютъ величины, отличающіяся отъ нуля, между обратными значеніями которыхъ не существуетъ никакихъ линейныхъ однородныхъ соотношеній съ цѣлыми коэффиціентами. α пусть обозначаетъ постоянную, которая больше нуля. $|\varphi(t)|$ пусть имѣетъ нѣкоторую степень малости, опредѣленную при помощи α, причемъ предоставимъ себѣ право, выбрать упомянутую степень малости впослѣдствіи.

Въ слѣдующемъ мы представимъ общее рѣшеніе уравненія 1). Сначала разсмотримъ нѣкоторое частное рѣшеніе.

Замѣнимъ 1) черезъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \zeta \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \alpha z + \varphi(t) z + \psi(t) \end{aligned}\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2$$

Уравненіе

$$\begin{vmatrix} -\omega & 1 \\ \alpha & -\omega \end{vmatrix} = 0$$

*) Въ небесной механикѣ, книга III гл. 6.

или $\omega^2 = \alpha$ имѣетъ корни $+ \sqrt{\alpha}$ и $- \sqrt{\alpha}$, вещественные и отличные отъ нуля. Δ_1 Δ_2 пусть суть положительныя числа, встрѣчающіяся въ введеніи для „таблицы величинъ а“

$$\begin{matrix} o & 1 \\ \alpha & o \end{matrix}$$

Согласно оставленному за нами по условію праву введемъ предположеніе $|\varphi(t)| < \Delta_1$. Такъ какъ можно выбрать такимъ образомъ число $\gamma > o$, что $|\psi(t)| < \Delta_2 \gamma$, то на основаніи предложенія, упомянутаго въ введеніи, легко получаемъ слѣдующее. Уравненіе 1) допускаетъ одно и при томъ только одно рѣшеніе, для котораго z лежитъ между конечными предѣлами. Для этого рѣшенія можно разложить z въ тригонометрическій рядъ, равномѣрно сходящійся для всѣхъ t, который имѣетъ видъ, характеризованный въ введеніи [см. введеніе 5)]. Если Φ, Ψ имѣютъ непрерывныя производныя по u до достаточно высокаго порядка, то можно разложить z въ тригонометрическій рядъ, для всѣхъ t абсолютно и равномѣрно сходящійся, который имѣетъ видъ, соотвѣтствующій обыкновеннымъ рядамъ Фурье для нѣсколькихъ перемѣнныхъ. (См. введеніе). Впослѣдствіи мы будемъ обозначать упомянутое z при помощи $\mathfrak{T}$.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію дифференціальнаго уравненія

$$\frac{d^2z}{dt^2} - [\alpha + \varphi(t)]\, z = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3$$

Сначала сдѣлаемъ замѣчаніе, справедливость котораго извѣстна или по крайней мѣрѣ легко можетъ быть доказана.

X пусть есть непрерывная функція t, данная для всѣхъ t. Если тогда v и w суть функціи t, данныя для всѣхъ t, которыя удовлетворяютъ условіямъ

$$\frac{dv}{dt} + v^2 + X = o \qquad\qquad \frac{dw}{dt} + w^2 + X = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 4$$

и отличаются между собою по крайней мѣрѣ для одного значенія t, то онѣ отличаются между собою для всѣхъ значеній t. Если обозначимъ $L = \frac{1}{2}(v - w)$ то

$$\frac{1}{\sqrt{|L|}}\, e^{\int_a^t L\, dt} \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{|L|}}\, e^{-\int_a^t L\, dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 5$$

представляютъ независимыя рѣшенія дифференціальнаго уравненія

$$\frac{d^2z}{dt^2} + Xz = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6$$

Образуемъ

$$\frac{d\lambda}{dt} = -2\sqrt{\alpha}\;\lambda - \lambda^2 + \varphi(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7$$

и обозначимъ черезъ δ_1 δ_2 величины, соотвѣтствующія такимъ же образомъ $-2\sqrt{\alpha}$, какъ Δ_1 Δ_2 въ введеніи „таблицѣ величинъ а“. Затѣмъ выберемъ такимъ образомъ g какъ число, зависящее только отъ α, что $o < g < \sqrt{\alpha}$ и $2g < \delta_1$. Наконецъ пусть $|\varphi(t)| < \delta_2 \,.\, g$ (По предъидущему мы имѣемъ право, сдѣлать такое предположеніе).

Существуетъ одно и при томъ только одно рѣшеніе уравненія 7), данное для всѣхъ t и остающееся всегда въ области $-g < \lambda < g$. Это рѣшеніе можно разложить въ тригонометрическій рядъ, равномѣрно сходящійся для всѣхъ t, который имѣетъ видъ, характеризованный въ введеніи (см. введеніе 5)). Если Φ имѣетъ непрерывныя производныя по u до достаточно высокаго порядка, то можно разложить это рѣшеніе въ тригонометрическій рядъ, абсолютно и равномѣрно сходящійся для всѣхъ t, который имѣетъ видъ, соотвѣтствующій обыкновеннымъ рядамъ Фурье для нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Обозначимъ черезъ λ только что характеризованное рѣшеніе. Имѣемъ всегда $|\lambda| < \sqrt{\alpha}$. Образуемъ дальше

$$\frac{d\mu}{dt} = 2\sqrt{\alpha}\,\mu - \mu^2 + \varphi(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 8$$

Подобнымъ образомъ какъ при разсматриваніи уравненія 7) слѣдуетъ теперь: Если $|\varphi(t)|$ имѣетъ нѣкоторую степень малости, опредѣленную при помощи α, то существуетъ рѣшеніе μ уравненія 8), данное для всѣхъ t, для котораго $|\mu| < \sqrt{\alpha}$, между тѣмъ какъ относительно разложимости рѣшенія μ въ тригонометрическій рядъ имѣемъ аналогичное выше сказанному для λ.

Теперь имѣемъ

$$\frac{d(\sqrt{\alpha} + \lambda)}{dt} = -(\sqrt{\alpha} + \lambda)^2 + \alpha + \varphi(t)$$

$$\frac{d(-\sqrt{\alpha} + \mu)}{dt} = -(-\sqrt{\alpha} + \mu)^2 + \alpha + \varphi(t)$$

Поэтому $\sqrt{\alpha} + \lambda$ и $-\sqrt{\alpha} + \mu$ удовлетворяютъ условію

$$\frac{d\eta}{dt} = -\eta^2 + \alpha + \varphi(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 9$$

$\sqrt{\alpha} + \lambda$ и $-\sqrt{\alpha} + \mu$ различны другъ отъ друга, ибо имѣемъ $2\sqrt{\alpha} > \mu - \lambda$ и, слѣдовательно, $\sqrt{\alpha} + \lambda > -\sqrt{\alpha} + \mu$.

Введемъ теперь обозначеніе $2\,T = 2\sqrt{\alpha} + \lambda - \mu$. Тогда $T > o$. Далѣе можно разложить T въ тригонометрическій рядъ, равномѣрно сходящійся для всѣхъ t и имѣющій видъ, характеризованный въ введеніи (см. введѣніе 5)). Если Φ имѣетъ непрерывныя производныя по u до достаточно высокаго порядка, то T разложима въ тригонометрическій рядъ, абсолютно и равномѣрно сходящійся для всѣхъ t и имѣющій видъ, соотвѣтствующій обыкновеннымъ рядамъ Фурье для нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Общее рѣшеніе уравненія 1) можно по предъидущему представить въ видѣ

$$\mathfrak{T} + c_1 \frac{e^{\int_a^t T\,dt}}{\sqrt{T}} + c_2 \frac{e^{-\int_a^t T\,dt}}{\sqrt{T}}$$

причемъ c_1 c_2 суть произвольныя постоянныя и a обозначаетъ произвольно выбранную постоянную.

Впрочемъ мы могли бы также изслѣдовать уравненіе 3) на основаніи слѣдующаго замѣчанія.

Если X есть функція, данная для всѣхъ t, и функція u, данная для всѣхъ t, удовлетворяетъ условію

$$u^3(u'' + Xu) = c \qquad (c = \text{const.})\ (c \gtrless o)$$

то въ случаѣ $c \angle o$

$$u\,.\,e^{\sqrt{-c}\int_a^t \frac{dt}{u^2}} \qquad u\,e^{-\sqrt{-c}\int_a^t \frac{dt}{u^2}}$$

въ случаѣ $c > o$

$$u \cos\left(\sqrt{c}\int_a^t \frac{dt}{u^2}\right) \qquad u \sin\left(\sqrt{c}\int_a^t \frac{dt}{u^2}\right)$$

суть рѣшенія уравненія $\frac{d^2z}{dt^2} + Xz = o$.

Важнѣе уравненія 1) то уравненіе, которое имѣетъ тотъ же самый видъ какъ 1), но содержитъ *), при предположеніяхъ впрочемъ подобныхъ предъидущему, отрицательную α. Для этого уравненія не извѣстно никакихъ результатовъ, соотвѣтствующихъ тѣмъ, которые находятся въ этомъ §. Впрочемъ также уравненіе, разсмотрѣнное нами, можетъ найти примѣненіе въ механикѣ.

*) См. A. Lindstedt, Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie. Petersburg 1883. pag. 17.

Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. II p. 277.

ТЕЗИСЫ.

1) Нельзя достигнуть въ математикѣ полной строгости.

2) Принципъ Гаусса (Princip des kleinsten Zwanges) формулируется Гаусс'омъ такъ, что не даетъ яснаго представленія.

3) Аргументы, на основаніи которыхъ Лапласъ пришелъ къ заключенію, что кольцо Сатурна не есть твердое тѣло, симметрическое относительно оси, не вполнѣ основательны.

4) Желательно было бы, ввести время въ механику болѣе удовлетворительнымъ образомъ, чѣмъ это дѣлается теперь.