ТАРТУСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1986

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методический материал и задачи контрольных работ для студентов-заочников III курса специальностей: 1729-экономика торговли и 1734-финансы и кредит

Составитель Ю.Сикк

ТАРТУ 1986

Утверждено на заседании совета экономического факультета ТГУ I7 сентября 1986 года

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий материал математического программирования составлен для студентов-заочников экономического факультета ТГУ, основой которого является "Программа по математическому программированию для инженерно-экономических специальностей высших учебных заведений. Утверждена Учебно-методическим управлением по высшему образованию 10 ноября 1974 г."

Целью курса "Математического программирования" является дать представление о моделях в математическом программировании, дать основы теории математического программирования, предлогать изложение основных методов решения задач математического программирования. Главной задачй экономистов является составление математических моделей. Обычно задачи решаются на ЭВМ, но для понимания хода решений нужно знать и решение "вручную".

Задачи линейного программирования подробно изученные задачи и поэтому в программу включены в основном только линейные задачи.

Термин "линейное программирование" возник в результате неточного перевода английского "linear programming".Одно из значений слова "programming - составление планов, планирование. Следовательно, правильным переводом этого термина было бы не "линейное программирование", а "линейное планирование", "планирование на основе линейных отношений, что более точно отражает содержание дисциплины. В связи с этим далее пользуется более точный термин "математическое планирование".

I ПРОГРАММА

I. Математические методы в экономике. Экономические примеры. Общая задача линейного программирования. Понятия плана, оптимального плана.

2. Основная задача линейного программирования и ее геометрическая интерпретация. Выпуклость множества планов. Понятие опорного плана (базисного решения). Экстремальная точка в множестве планов.

3. Достаточные условия существования оптимального опорного плана (теорема существования).

4. Базисный план. Метод последовательного улучшения базисного плана (симплекс-метод).

5. Некоторые варианты симплекс-метода. Альтернативное решение.

6. Двойственные задачи. Соотношения между значениями целевых функций двойственных задач (основное неравенство двойственности). Теоремы двойственности и критерии оптимальности планов двойственных задач.

7. Экономическая интерпретация двойственных задач. Критерий Канторовича оптимальности плана задачи использования ресурсов.

8. Транспортная задача. Постановка задачи. Закрытые и открытые модели. Методы нахождения допустимых планов. Критерий оптимальности. Нахождение оптимального плана.

9. Модели экономического равновесия.

IO. Элементы теории матричных игр.

II ЛИТЕРАТУРА

А. Основная

1. Бирман И.Я. Оптимальное программирование. - М.,1968.
2. Гасс С. Линейное программирование. - М., 1961.
3. Карманов В.Г. Математическое программирование. - М., 1975.
4. Кузубов В.И., Кузнецов Ю.Н., Галагуз Б.П. Математическое программирование. - Киев, 1972.

Б. Дополнительная

1. Карандаев И.С. Элементы математического программирования. - М., 1976.
2. Карандаев И.С. Решение двойственных задач в оптимальном планировании. - М., 1976.
3. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. - М.: Наука. - 1978.
4. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. - М., 1972 или 1968.
5. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. - М., 1976.

III ПОВТОРНЫЕ ВОПРОСЫ

I. Предмет и метод математического планирования.
2. Исторический обзор применения методов математического планирования.
3. Классификация задач планирования.
4. Линейные задачи планирования.
5. Основная задача линейного планирования (мах-основная форма).
6. Решение, допустимый план, оптимальный план.
7. Приведение задач математического планирования к основной задаче.
8. Математическая формулировка экономических проблем.
9. Графическое решение неравенств.
IO. Графическое решение системы неравенств.
II. Графическое решение задач математического планирования.
I2. Графическое решение задач математического планирования с условием целочисленности переменных.
I3. Требования задачам, решаемые симплексным методом.
I4. Этапы решения задач линейного планирования симплексным методом.
I5. Основные, дополнительные и искусственные переменные.
I6. Составление начальной симплексной таблицы.
I7. Критерии оптимальности.
I8. Отыскание оптимального плана.
I9. Наличие решений симплексного метода.
20. Альтернативный оптимум симплексного метода.
2I. Обобщенный симплекс-метод (метод искусственного базиса).
22. Двойственные задачи.
23. Симметричные двойственные задачи.
24. Связи между решениями двойственной пары задач.
25. Экономическая интерпретация двойственных задач.
26. Постановка транспортной задачи и ее математическая модель.

27. Открытая и закрытая модель транспортной задачи.
28. Этапы решения транспортной задачи.
29. Нахождение первоначального плана транспортной задачи.
30. Метод северо-западного угла.
31. Метод минимальной стоимости.
32. Метод Фогеля.
33. Случай вырождения.
34. Оценка первоначального плана транспортной задачи.
35. Улучшение плана перевозок транспортной задачи.
36. Альтернативный оптимум транспортной задачи.
37. Модели экономического равновесия.
38. Коэффициенты прямых и косвенных затрат в моделях экономического равновесия.
39. Нахождение матрицы полных затрат.
40. Основные понятия теории игр.
41. Графический способ решения простейших игр.
42. Решение матричных игр симплексным методом.
43. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
44. Области применения метода Гаусса.

IУ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Студенты-заочники III курса специальностей "экономика торговли" и "финансы и кредит" изучают дисциплину "Математическое программирование", краткий конспект которой приведен в данном методическом материале в У части, причем XI тема - "Решение систем линейных уравнений методом Гаусса" не является одним методом решения задач математического программирования, а имеет вводный характер, так как метод полного исключения неизвестных применяется при решении нескольких разных проблем математического программирования как вспомогательный способ (например, при решении транспортных задач для нахождения потенциалов).

Каждый студент объязан выполнить контрольную работу и прислать ее не позднее I месяца перед началом экзаменационной сессии.

Внешнее оформление контрольной работы должно удовлетворять всем требованиям, уже знакомым студентам-заочникам по опыту обучения в ТГУ.

На зачете объязательно предъявляется рецензия зачтенной контрольной работы. Не принимается к проверке работа, выполненная не по своему варианту. Если рецензент устанавливает элементы несамостоятельного выполнения контрольной работы, то студенту предлагается выполнить новый индивидуальный вариант, а незачтенная работа остается на кафедре.

Высокое качество контрольной работы будет достигнуто при соблюдении студентом ниже помещенных требований и советов.

Ко всем этапам решения необходимо давать письменные пояснения. В задачах, связанных с геометрическими построениями, должен быть выполнен чертеж, согласованный с системой координат.

Решив задачу симлексным методом требуется экономическая интерпретация всех применяемых переменных и полученных результатов, а также надо дать экономическую интерпретацию двойственным переменным.

В транспортной задаче вначале найти допустимый план методом минимальной стоимости, затем оценивать полученное решение и если оно является неоптимальным, то улучшить (до оптимального). Суммарные затраты (значение целевой функции) найти при первоначальном и оптимальном планах.

Полезным считаем прочитание и освоение конспекта предмета, так как все темы снабжены подробными объяснениями и конкретными решениями примерных задач.

Дополнительное письмо к этому методическому материалу сделает известным конкретные варианты контрольной работы.

У КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ПРЕДМЕТА

I. ВВЕДЕНИЕ

Развитие современного общества характеризуется повышением технического уровня, усложнением организационной структуры производства, углублением общественного разделения труда, предъявлением высоких требований к методам планирования и хозяйственного руководства.

В этих условиях только глубоко научный подход к руководству экономической жизнью общества обеспечит высокие темпы развития народного хозяйства, позволит в полной мере использовать решающие преимущества социалистической системы перед капиталистической.

Одним из необходимых условий дальнейшего развития экономической науки является применение точных методов количественного анализа, широкое использование математики как могучего инструмента в исследованиях экономических процессов.

В настоящее время новейшие достижения математики и современной вычислительной техники находят все более широкое применение в экономических исследованиях и планировании. Этому способствует разработка сравнительно недавно возникших разделов математики, в частности, математического планирования, теории игр, теории массового обслуживания, а также бурное развитие быстродействующей электронно-вычислительной техники.

В нашей стране уже имеется достаточный опыт постановки и решения экономических задач при помощи математических методов. Особенно успешно развиваются методы оптимального планирования, которые и составляют сущность математического планирования.

Решение экстремальных экономических задач разбивается на три этапа:

1) построение экономико-математической модели;

2) нахождение оптимального решения одним из математических методов;

3) интерпретация решения и практическое внедрение в народное хозяйство.

Построение экономико-математической модели заключается в том, что сначала создается упрощенная экономическая модель, где в схематической форме отражается сущность изучаемого процесса. При этом особое внимание уделяют тому, чтобы в модели были отражены все существенные особенности задачи и учтены все ограничивающие условия, которые могут значительно повлиять на результат. Затем определяется цель решения, выбирается критерий оптимальности и дается математическая формулировка задачи.

В математическом планировании можно выделить две направления. К первому относятся детерминированные задачи - когда вся исходная информация является полностью определенной. Ко второму направлению - так называемому стохастическому планированию - относятся задачи, в которых исходная информация содержит элементы неопределенности, либо когда некоторые параметры задачи носят случайный характер с известными вероятностными характеристиками.

Задачи планирования можно делить на динамические и статистические, в зависимости от того, является ли фактор времени непосредственным переменным задачи или нет.

Составными частями математического планирования являются линейное, нелинейное, динамическое планирование. Далее рассматривается лишь линейное планирование с комплексом задач, к которым оно может быть применено.

Впервые постановка задачи линейного планирования в виде предложения по составлению оптимального плана перевозок, минимизирующего суммарный километраж, встречается в работе советского экономиста А.Н. Толстого в 1930 г.

В 1931 г. венгерский математик Б. Эгервари рассмотрел в математической постановке задачу линейного планирования, имеющую название "проблема выбора", и нашел метод ее решения, который получил название венгерского метода.

Систематическое исследование задач линейного планирования и разработка общих методов их решения начаты в 1939 г. в работах советского ученого Л.В. Канторовича, который предложил общий метод решения задач линейного планирования, названные методом разрешающих множителей. Он же совместно с М.К. Гавуриным в 1949 г. предложил метод потенциалов, который применяется для решения транспортных задач. В последующих работах Л.В. Канторовича, В.С. Немчинова, В.В. Новожилова, А.Л. Лурье, А. Брудно, А.Г. Аганбегяна, Д.Б. Юдина, Е.Г. Гольдштейна и многих других советских ученых математиков и экономистов получили дальнейшее развитие как математическая теория линейного и нелинейного планирования, так и приложение ее методов к исследованию различных экономических проблем.

Почти одновременно с советскими учеными методы линейного планирования разрабатывались зарубежными и, прежде всего, американскими учеными. В 1941 г. Ф.Л. Хичкок поставил транспортную задачу. Основной метод решения задач линейного планирования, т.н. симплексный метод был опубликован в 1949 г. Д. Данцигом в журнале "Econometrica".

В настоящее время разработка методов линейного планирования идет главным образом по пути выявления конкретных экономических задач (проблем), к решению которых оно может быть применено, а также по пути создания более удобных алгоритмов для решения задач на электронно-вычислительных машинах.

4

2. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Линйеное планирование - это наука о методах исследования и отыскания наибольших и наименьших значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения (неравенства или уравнения).

Линейной задачей планирования называется задача найти переменным (неизвестным) такие значения, которые дали бы предназначенной линейной функции (целевой функции) оптимальное (максимальное или минимальное) значение и удовлетворили бы предназначенным линейным неравенствам или уравнениям (ограничениям).

В линейной функции все переменные даны в первой степени и не встречается их произведения.

Линейное ограничение такое, в котором на левой стороне стоит линейная функция, на правой стороне констант и отделены знаками $\leq$ или $\geq$.

2.1. Линейная задача планирования и ее max - основная форма

Линейной задачей планирования на max-основной форме называется следующая задача:

$$\max z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq b_n, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_n \geq 0, \tag{3}$$

а в сокращенной записи эта-же задача имеет следующий вид:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \max \qquad (I)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i=1,2,\ldots, m \qquad (2)$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\ldots, n, \qquad (3)$$

т.е. задача состоится в том, что надо найти такие неотрицательные значения неизвестных x_1, $x_2, \ldots$, x_n, которые дали-бы линейной целевой функции (I) по возможности наибольшее значение и удовлетворили-бы при этом всем линейным ограничениям (2).

Задачи линейного планирования подразделяются на три основные части:

- целевая функция (I);
- система ограничений (2);
- условие неотрицательности переменных (3).

Всякое решение задачи, удовлетворяющее системе ограничений и условию неотрицательности, называется <u>допустимым решением</u>, а удовлетворяющее всем трем группам требований - <u>оптимальным решением</u>.

Допустимый план называется <u>невырожденным</u>, если он содержит ровно m положительных компонент. Если план содержит меньше чем m положительных компонент, то он называется <u>вырожденным планом</u>.

В задаче линейного планирования следующие обозначения:

x_j - переменные (неизвестные);

a_{ij} , b_i и c_j - конкретные числовые величины, причем

a_{ij} - коэффициенты системы ограничений,

b_i - свободные члены системы ограничений,

c_j - коэффициенты целевой функции.

Коэффициенты c_j целевой функции в экономических задачах линейного планирования могут обозначать прибыль на единицу продукции, цены, уровень затрат и т.д.

Коэффициенты a_{ij} могут обозначать расход i-ого ресурса (материала) на j -тый вид продукции. Свободные члены b_i могут обозначать объемы ресурсов (материалов) вообще.

Для содержания задачи очень важно, решается ли она на максимум (прибыль, объем продукции, производительность труда и т.д.) или на минимум (текущие затраты, капиталовложения, время выполнения работ и пр.).

2.2. Записание задачи на max-основной вид

Часто после формулировки экономической проблемы получается задача, которая не имеет max-основную форму. Поэтому для получения задачи, записанной в форме основной, нужно уметь переходить:

I) от минимизирующей функции на максимизирующую функцию;

2) от заданной системы условий к некоторым эквивалентным им ограничениям-неравенствам.

Конкретные возможности следующие:

I. Если в первоначальной задаче ограничение типа $\geqslant$, то это ограничение умножается на (-I), причем все знаки будут противоположными, в том числе знак ограничения.

Например, $2x_I + 3x_2 - 4x_3 + x_4 \geqslant -17$ и умноженное на (-I) это-же ограничение

$$-2x_I - 3x_2 + 4x_3 - x_4 \leqslant 17$$ эквивалентные.

2. Если в первоначальной задаче встречается уравнение, тогда вместо этого уравнения пишут два ограничения, из которых первое типа $\leqslant$, а второе типа $\geqslant$.

Например уравнение

$$7x_I + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 8$$

эквивалентное ограничениями

$$\begin{cases} 7x_I + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leqslant 8 \\ 7x_I + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \geqslant 8, \end{cases}$$

из которых второе умножается на (-I) и т.д.

3. Если в первоначальной задаче целевая функция задана на минимум, то для перехода к задаче с целевой функцией

заданной на максимум, нужно вместо минимизации функции z рассмотреть максимизацию функции $z^* = -z$ при прежних ограничениях задачи:

$$\min z = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$\min z = \max(-z)$$

$$-z = z^*$$

$$z^* = -c_0 - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \ldots - c_n x_n \longrightarrow \max$$

4. Если в начальной задаче о некоторых неизвестных не задано требование их неотрицательности, то вместо такого неизвестного пишут разницу двух новых неотрицательных неизвестных, так как любое число выражается разницей двух неотрицательных чисел.

Например x_2 - не задано условие неотрицательности, поэтому введет новые переменные $x_2'' \geqslant 0$ и $x_2' \geqslant 0$ и $x_2 = x_2' - x_2''$.

Отметим еще пару видоизменений, которые иногда оказываются полезными:

1) чтобы освободить задачи от уравнения, можно выражать одно неизвестное и поставить в другие ограничения (везде!)

2) если в начальной задаче ограничение выглядит следующим образом:

$$x_j \geqslant b_\ell ,$$

тогда оказывается полезным перейдти на новое переменное x_j', причем $x_j' = x_j - b_\ell$

$$x_j' \geqslant 0 .$$

Вместо x_j везде пишем $x_j' + b_\ell$.

Пример 1

Дана следующая задача линейного планирования:

$$\min z = x_1 - x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geqslant 15 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0 \ ; \ x_2 \geqslant 0$$

Свести к задаче записанной в max-основной форме:

Р е ш е н и е:

I) целевая функция (мин-функция) умножается на (-I):

$\max(-z) = \max z^* = -x_I + x_2 - 3x_3$;

2) I ограничение (типа $\geq$) умножается тоже на (-I) и получается:

$$-x_I - 2x_2 \leq -I5,$$

3) II ограничение (уравнение) заменяется двумя ограничениями:

$$\begin{cases} x_I + 4x_2 - 6x_3 \leq 8 \\ x_I + 4x_2 - 6x_3 \geq 8 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x_I + 4x_2 - 6x_3 \leq 8 \\ -x_I - 4x_2 + 6x_3 \leq -8 \end{cases}$$

После 3 действий получается:

$$\max z^* = -x_I + x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} -x_I - 2x_2 \leq -I5 \\ x_I + 4x_2 - 6x_3 \leq 8 \\ -x_I - 4x_2 + 6x_3 \leq -8 \end{cases}$$

$$x_I \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

4) для освобождения задачи от неизвестного x_3, введем переменные $x_3' \geq 0$ и $x_3'' \geq 0$:

$$x_3 = x_3' - x_3''$$

и после замены по последней формулы:

$$\max z^* = -x_I + x_2 - 3x_3' + 3x_3''$$

$$\begin{cases} x_I - 2x_2 \leq -I5 \\ x_I + 4x_2 - 6x_3' + 6x_3'' \leq 8 \\ -x_I - 4x_2 + 6x_3' - 6x_3'' \leq -8 \end{cases}$$

$$x_I \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\quad x_3' \geqslant 0,\quad x_3'' \geqslant 0$$

получен max-основной вид задачи.

Пример 2

Свести задачу:

$$z = 0{,}2x_I + 0{,}I5x_2 + 0{,}Ix_3 \to max$$

$$\begin{cases} 0{,}5x_I + 0{,}6x_2 + 0{,}7x_3 \leqslant 80 \\ 0{,}45x_I + 0{,}4Ix_2 + 0{,}IIx_3 \leqslant 40 \\ 0{,}05x_I + 0{,}04x_2 + 0{,}02x_3 \leqslant 4 \\ x_3 - 2x_I = 0 \\ x_2 \geqslant 20 \end{cases}$$

$$x_I \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\quad x_3 \geqslant 0.$$

Р е ш е н и е

I) Из IУ ограничения ($x_3 - 2x_I = 0$) выражаем x_3 ($x_3 = 2x_I$) и поставим в все другие ограничения:

$$max\ z = 0{,}2x_I + 0{,}I5x_2 + 0{,}I\cdot 2x_I$$

$$\begin{cases} 0{,}5x_I + 0{,}6x_2 + 0{,}7\cdot 2x_I \leqslant 80 \\ 0{,}45x_I + 0{,}4Ix_2 + 0{,}II\cdot 2x_I \leqslant 40 \\ 0{,}05x_I + 0{,}04x_2 + 0{,}02\cdot 2x_I \leqslant 4 \\ x_2 \geqslant 20 \end{cases}$$

$$x_I \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

или

$$max\ z = 0{,}40x_I + 0{,}I5x_2$$

$$\begin{cases} I{,}9x_I + 0{,}6x_2 \leqslant 80 \\ 0{,}67x_I + 0{,}4Ix_2 \leqslant 40 \\ 0{,}09x_I + 0{,}04x_2 \leqslant 4 \\ x_2 \geqslant 20 \end{cases}$$

$$x_I \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0;$$

2) учитывая, что в последней записи задачи имеется условие $x_2 \geqslant 20$, введем в задачу новое переменное $x_2' =$

$= x_2 - 20$ или $x_2 = x_2' + 20$, а в задаче заменяем:

$$\max z = 0{,}40x_1 + 0{,}15\,(x_2'+20)$$
$$1{,}9x_1 + 0{,}6\,(x_2' + 20) \quad 80$$
$$0{,}67x_1 + 0{,}41\,(x_2' + 20) \quad 40$$
$$0{,}09x_1 + 0{,}04\,(x_2' + 20) \quad 4$$
$$x_I \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_2' \geqslant 0,$$

поэтому окончательный вид задачи следующий:

$$\max z = 0{,}40x_1 + 0{,}15x_2' + 3$$
$$1{,}9x_1 + 0{,}6x_2' \leqslant 68$$
$$0{,}67x_1 + 0{,}41x_2 \leqslant 31{,}8$$
$$0{,}09x_1 + 0{,}04x_2 \leqslant 3{,}2$$
$$x_I \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_2' \geqslant 0.$$

3. ПРИМЕРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛИРОВКИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ

При практическом построении экономико-математической модели задачи первоначально создается ее экономическая модель, отражающая сущность изучаемого экономического вопроса. Затем определяется цель решения задачи, выбирается целевая функция, устанавливаются условия, при которых должно быть получено оптимальное решение. После этого осуществляется математическая формулировка задачи.

Вводя неизвестные величины, значения которых находятся в процессе решения задачи, устанавливается взаимосвязь между ними. Эти взаимосвязи являются,такими, что при помощи их отражаются все существенные особенности задачи.

Определяющей стороной решения задачи является построение целевой функции, математически описывающей цель задачи. В зависимости от выбранной функции можно получить тот или иной оптимальный план.

Рассмотрим построение математических моделей экономических задач на конкретных примерах задач линейного планирования.

Пример I

Предприятие для производства трех видов изделий A,B, C использует четыре вида сырья K_I, K_2, K_3 и K_4. Изделия A. B и C могут производиться в любых отношениях (сбыт обеспечен), но для производства их предприятие может использовать сырья K_I не больше 200 кг, сырья K_2 не больше I20 кг, сырья K_3 не больше I80 кг, сырья K_4 не больше I60 кг. На производство единицы изделия вида A используется 2 кг сырья K_I, 5 кг сырья K_3, 4 кг сырья K_4, на производство единицы изделия B требуется затратить сырья K_I - 4 кг, сырья K_3 - 6 кг, и на производство единицы изделия C используется сырья K_2 - 6 кг, сырья K_3 - 2 кг, сырья K_4 - 7 кг. Прибыль от реализации единицы изделия A равна 25 рублям, изделия

6

В - 28 рублям и изделия С - 27 рублям. Требуется составить такой план производства продукции, при котором общая прибыль предприятия от реализации всей продукции была бы наибольшей.

Для составления математической модели задачи предположим, что предприятие выпускает x_I единиц изделий вида А, x_2 единиц изделий вида В и x_3 единиц изделий вида С. Так как на изготовление одного изделия А требуется затратить 2 кг сырья K_I и на изготовление единицы изделия В - 3 кг этого же сырья, то на изготовление указанного количества изделий обоих видов будет израсходовано $2x_I + 3x_2$ кг сырья K_I. Поскольку предприятие может использовать для производства всех изделий не больше чем 200 кг сырья данного вида, то должно выполняться неравенство $2x_I + 3x_2 \le 200$. Неравенство (а не точное равенство) написано потому, что максимальную прибыль предприятие может получить и в том случае, когда сырье K_I используется не полностью.

Аналогичные рассуждения, проведенные относительно возможного использования второго (K_2), третьего (K_3) и четвертого (K_4) видов сырья, позволяет записать следующие неравенства:

$$4x_2 + 6x_3 \le 120$$
$$5x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 180$$
$$4x_1 + 7x_3 \le 160$$

Так как количество выпускаемых изделий каждого вида либо положительно, либо равно нулю, то $x_I \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Общая прибыль от реализации x_I изделий вида А, x_2 единиц изделий вида В и x_3 единиц изделий вида С равна $25x_I + 28x_2 + 27x_3$ рублям. Таким образом, приходим к следующей математической задаче:

$$z = 25x_1 + 28x_2 + 27x_3 \to \max \qquad (I)$$

при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 200 \\ 4x_2 + 6x_3 \le 120 \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 180 \\ 4x_1 + 7x_3 \le 160 \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \qquad (3)$$

т.е. требуется среди всех неотрицательных решений системы неравенств (2) найти такое, при котором функция (I) принимает наибольшее значение (максимизируется).

Пример 2.

Продажная цена трех продуктов соответственно 3, 5 и 2, а план реализации 750 рублей. Расход первого материала 2, 3 и 2 кг на единицу продукции, фонд его 550 кг, который нужно полностью использовать. Расход второго материала 3, I и 4 кг на единицу и фонд 650 кг. Себестоимость единицы продукции соответственно 2, 3 и 3,5 рублей. Найти план, при котором общая себестоимость минимальная.

Составим математическую модель задачи. Для этого обозначим через x_1 – количество первого продукта,

x_2 – количество второго продукта,

x_3 – количество третьего продукта.

Первое ограничение выражает реализацию продукции: план реализации требуется выполнять, а по возможности и перевыполнять, т.е.

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 750.$$

Второе ограничение показывает использование и наличие первого материала:

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 550,$$

а третье ограничение – использование и фонд второго материала:

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 650.$$

Учитывая количества продуктов и соответствующую себестоимость единицы продукции, можем получить общую себестоимость:

$$2x_1 + 3x_2 + 3{,}5x_3 = z$$

Итак, модель задачи следующая:

Минимизировать $z = 2x_1 + 3x_2 + 3{,}5x_3$

при условиях
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 750 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 550 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 650 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Пример 3

Бумажные рулоны шириной I9 dm нужно разрезать на куски шириной 9, 7 и 4 dm, причем рулонов шириной 9 dm требуется не менее I50, 7 dm - не менее I20, 4 dm - не менее I00 штуков, а количество рулонов шириной I9 dm не ограничено. Разрезать нужно так, что отходы были наименьшими.

Чтобы составить модель, нужно учитывать все возможные варианты разрезки (указаны в следующей таблице)

Показатель	Варианты разрезки					
	I	II	III	IУ	У	УI
9 dm	2	I	-	I	-	-
7 dm	-	I	2	-	I	-
4 dm	-	-	I	2	3	4
отходы (в dm-x)	I	3	I	2	0	3

Допустим, что I вариант разрезки используем x_I раз, II вариант - x_2 и т.д.

I ограничение учитывает возможности получения и нужного количества рулонов шириной 9:

$$2x_I + x_2 + x_4 \geqslant 150,$$

II ограничение аналогичное о рулонов шириной 7 dm и III - о рулонов шириной 4 dm:

$$x_2 + 2x_3 + x_5 \geqslant 120$$

$$x_3+2x_4+3x_5+x_6 \geqslant 100$$

Чтобы получить при этом наименьшие отходы, построим целевую функцию учитывая конкретные остатки рулонов при каждом варианте резрезки, т.е.

$$z = x_I + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_6.$$

Модель следующая:

$$z = x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_6 \to \min$$

при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 \geqslant 150 \\ x_2 + 2x_3 + x_5 \geqslant 120 \\ x_3+2x_4+3x_5+4x_6 \geqslant 100 \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, \ldots, x_6 \geqslant 0.$$

4. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного планирования и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трехмерного пространства, так как на чертеже довольно трудно изобразить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств.

Задачу пространства размерности больше трех изобразить на чертеже вообще невозможно. Не нужен именно мах-основной вид задачи.

Рассмотрим графический метод для решения задачи с двумя переменными x_1 и x_2 и m ограничениями:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 &\leq b_i \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\leq b_m \end{aligned} \qquad (2)$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \qquad (3)$$

Каждое из ограничений-неравенств данной задачи определяет полуплоскость с граничной прямой:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \quad i= 1,2,\dots, m \qquad (4)$$

Для того, чтобы найти данную полуплоскость, определяемую неравенством

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \leq b_k,$$

нужно сначала построить соответствующую прямую

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 = b_k,$$

а затем взяв одну из точек, лежащую выше или ниже этой прямой, определить какому из неравенств координаты ее удовлетворяют:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 < b_k, \qquad (5)$$
$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 > b_k \qquad (6)$$

Если координаты взятой точки удовлетворяют неравенству (5), то эта точка принадлежит искомой полуплоскости, если же координаты данной точки удовлетворяют неравенству (6), то искомой полуплоскостью является та полуплоскость, которой данная точка не принадлежит.

В практических решениях (если прямая не пройдет через начало координат) т.н. проверяющей точкой обычно выбирают начало координат, т.е. точку 0 с координатами $x_I = 0$ и $x_2 = 0$.

В случае, когда система неравенств (2) совместна, множеством решений ее есть множество пар чисел, являющихся координатами точек, принадлежащих всем полуплоскостям, определяемым исходной системой неравенств, т.е. областью решений совместной системы линейных неравенств есть пересечение некоторого конечного числа полуплоскостей. Так как, при этом множество точек пересечения данных полуплоскостей является выпуклым, то областью решений системы линейных неравенств (2), в случае ее совместимости, является выпуклое множество. Это множество называют многоугольником решений задачи линейного программирования. Стороны этого многоугольника располагаются на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы неравенств путем замены знаков неравенств на точные равенства.

Итак, исходная задача линейного планирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция F принимает наибольшее значение.

Задача линейного планирования имеет оптимальное решение тогда, когда многоугольник решений ее содержит хотя бы одну точку и на этом многоугольнике решений целевая функция ограничена. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция задачи достигает наибольшего значения. Для нахождения данной вершины нужно построить линию уровня

$$c_1x_1 + c_2x_2 = R$$

где R - некоторая постоянная, проходящую через многоугольник решений и передвигать ее в направлении вектора $a=\{c_I;c_2\}$ до тех пор, пока она не пройдет через последнюю общую точку ее с многоугольником решений. Координаты указанной точки определяют оптимальный план данной задачи.

Нахождение минимального значения линейной функции при данной системе ограничений отмечается от нахождения ее максимального значения при тех же ограничениях лишь тем, что линия уровня $c_Ix_I + c_2x_2 = R$ передвигается не в направлении вектора $a = \{c_I, c_2\}$, а в противоположном направлении.

Схема решения задачи (I)-(3) графическим методом следующая:

I. Записывают уравнения граничных прямых.
2. Строят графики граничных прямых на плоскости.
3. Выделяют область решения неравенств системы (2) учитывая условие неотрицательности переменных (3).
4. Строят многоугольник решений.
5. Строят график целевой функции (I).
6. Определяют экстремальную точку многоугольника.
7. Вычисляют координаты полученной точки.
8. Вычисляют значение целевой функции в полученной точке.

Пример

Найти максимум функции $F = x_I + x_2$

при выполнении условий

$$\begin{cases} 2x_I + 4x_2 \le I6 \\ -4x_I + 2x_2 \le 8 \\ x_I + 3x_2 \ge 9 \end{cases}$$

$$x_I \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решение.

Записываем соответствующие уравнения всем ограничениям-неравенствам и затем наидем для каждого уравнения координаты точек, лежащие на осях координат:

ℓ_1: $2x_I + 4x_2 = I6$

Если $x_I=0$, то $4x_2=I6$ и $x_2=4$ $\Longrightarrow$ (0;4)

Если $x_2=0$, то $2x_I=I6$ и $x_I=8$ (8;0)

l_2: $-4x_1 + 2x_2 = 8$

$x_1=0 \Rightarrow 2x_2= 8, \; x_2 = 4 \qquad (0;\ 4)$

$x_2=0 \Rightarrow -4x_1= 8, \; x_1 = -2 \qquad (-2;\ 0)$

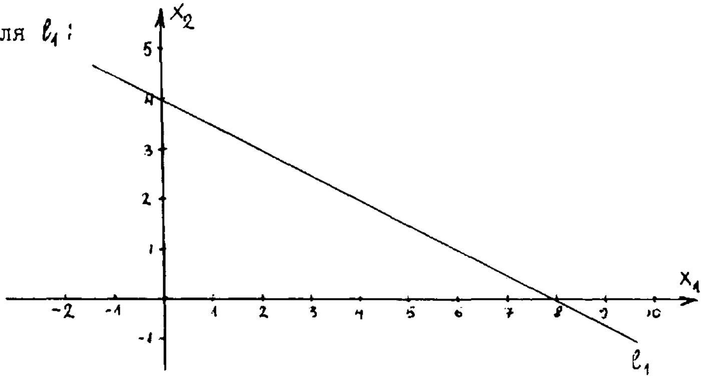
l_3: $x_1 + 3x_2 = 9$

$x_1 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 9, \; x_2 = 3 \qquad (0;\ 3)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 9 \qquad (9;\ 0)$

Строим графики каждого уравнения, т.е. граничной прямой и определяем полуплоскость допустимых решений с помощью вспомогательной точки 0 (0;0)

для l_1:

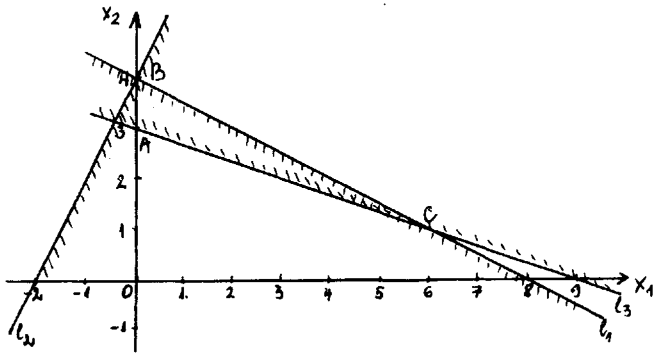


Проверяем, удовлетворяют-ли координаты точки 0 первому ограничению или нет:

$$2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \text{ и это должно быть } \leq 16,$$

это значит, что точка 0 (0; 0) и следовательно, все точки, лежащие на той полуплоскости где и начало координат, т.е. ниже прямой l_1, являются допустимыми решениями первого ограничения.

Учитывая условия (2)-(3) строят многоугольник решений, которым является треугольник АВС:

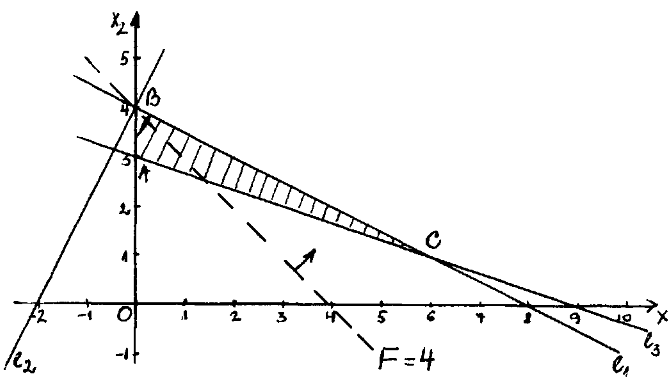


Выражение целевой функции приравниваем любому произвольному числу и строим график, соответствующий полученному уравнению прямой.

Пусть F = 4, т.е. $x_I + x_2 = 4$ и две точки, лежащие на осях координат имеют следующие координаты (0; 4) и (4;0). Если целевая функция прошла-бы через точку 0 (0; 0):

$$0_{(0;0)} = I \cdot 0 + I \cdot 0 = 0,$$

то из этого видно, что параллельно нужно перемещать прямую целевой функции от начало координат в направление прямой $x_I + x_2 = 4$.



Видно, что экстремальной точкой является точка С. Для нахождения координат этой последней точки многоугольника допустимых решений составляется система линейных уравнений, содержащая те уравнения прямых, при пересечении которых получилось данная точка С.

$$C: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 & (\ell_1) \\ x_1 - 3x_2 = 9 & (\ell_3) \end{cases}$$

Решение этой системы дает следующее решение:

$x_1 = 6;\quad x_2 = 1,$ т.е. $C\ (6;\ 1)$.

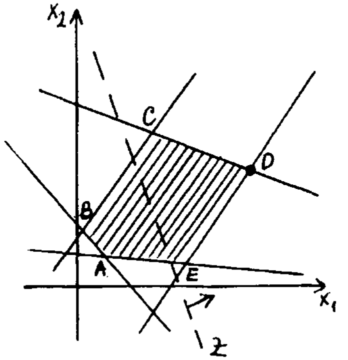
Координаты точки С дадут целевой функции F наибольшее значение:

$$F_{C(6;1)} = 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 = 7$$

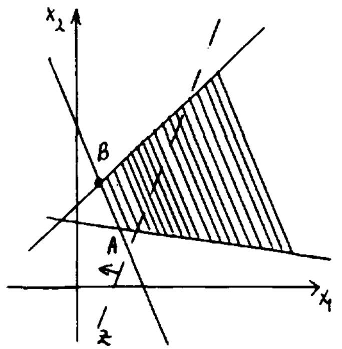
<u>Ответ</u>: $\max F = 7$ при $x_1 = 6$ и $x_2 = 1$.

Так как множество точек, удовлетворяющих условиям (2)-(3), может быть пустым, ограниченным или неограниченным, при решении задачи графическим методом могут встретиться следующие случаи:

1) задача имеет единственное решение, совпадающее с одной из вершин допустимого многоугольника:

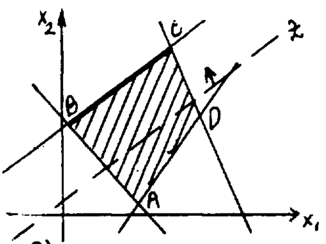


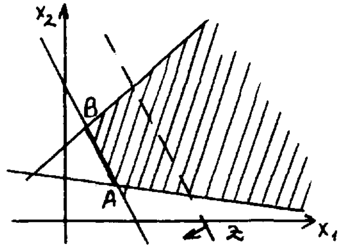
Многоугольник замкнутый



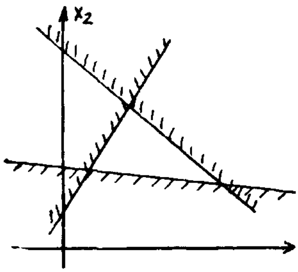
Многоугольник открытый

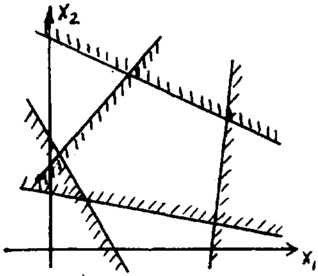
2) задача имеет бесконечное множество решений - ребро или грань многоугольника параллельные плоскостям целевой функции:



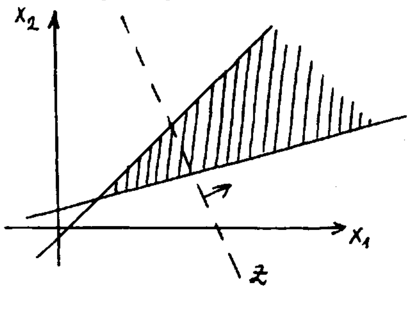


3) задача не имеет решения, так как система ограничений несовместна или многоугольник допустимых решений пустой:





4) целевая функция не ограничена ($z \to \infty$), решение в обычном понимании отсутствует:



5. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

Симплексный метод является универсальным методом решения задач линейного планирования. Автор метода американский математик Дж. Данциг (в 1947 г.). На ЭВМ была первая задача успешно решена в 1952 году. Называется еще методом последовательного улучшения плана.

Графический метод может быть применен лишь для решения задачи, число переменных в которой не больше чем три. Если же число переменных задачи больше чем два-три, то для ее решения может быть применен симплексный метод.

5.1. Требования к задачам

Прежде чем решать задачу симплексным методом, надо свести ее к задаче требуемого вида.

1. Все ограничения задачи (кроме условия неотрицательности неизвестных) нужно записать в виде уравнений.

Если после первоначальной математической формулировки в системе ограничений встречаются неравенства, то приведем все неравенства к уравнениям введением дополнительных переменных.

Неравенство исходной задачи, имеющее вид меньше или равно, может быть преобразовано в эквивалентное равенство путем добавления в левую часть его дополнительной неотрицательной переменной, а неравенство вида больше или равно может быть преобразовано в эквивалентное равенство путем вычитания из левой части его дополнительной неотрицательной переменной. Так что ограничение-неравенство исходной задачи вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$$

преобразуется в эквивалентное ограничение-равенство вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i,$$

$$(x_{n+1} \geq 0),$$

а ограничение неравенство вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geqslant b_i$$

преобразуется в эквивалентное ограничение-равенство вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i, \quad (x_{n+1} \geqslant 0).$$

Те переменные, которые встречаются в первоначальной задаче, называются основными переменными.

Неотрицательная переменная величина $x_{n+i} \geqslant 0$, при помощи которой неравенство преобразуется в уравнение, называется дополнительной переменной.

2. Система ограничений должен иметь канонический вид, т.е. матрица коэффициентов системы ограничений должна содержать единичную матрицу (порядок столбцов не имеет значения).

Система ограничений в общем виде следующая:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0; \ \ldots, \ x_n \geqslant 0.$$

В каноническом виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0; \ x_{n+1} \geqslant 0, \ldots, \ x_{n+m} \geqslant 0.$$

Пример

Система ограничений $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leqslant 8 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leqslant 17 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 \leqslant 6 \end{cases}$

в каноническом виде следующая:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 & = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5 & = 17 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_6 & = 6, \end{cases}$$

т.е. матрица состоит из двух частей: матрица А и единичная матрица Е:

$$\underset{A}{\left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & -2 \\ I & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \end{array}\right.} \left|\underset{E}{\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array}}\right)$$

Если система не имеет единичную матрицу, то прибавим ещё искусственные переменные (см. обобщенный симплексный метод).

3. Все свободные члены в системе должны быть неотрицательные, ($b_i \geqslant 0, i = I, 2, \ldots, m$).

4. Коэффициенты базисных переменных должны быть в целевой функции нули (0), тогда они не влияют на значение целевой функции.

5. Симплексным методом решаются только те задачи, целевая функция которой должна получить наибольшее значение.

Если у нас задача составлена на минимум, то от задачи на минимум переходим к задаче на максимум, умножая минфункцию на (-I).

5.2. Этапы решения задачи линейного планирования симплексным методом

Симплексный метод решения задачи линейного планирования заключается в переходе от одного опорного плана к другому, на котором значение целевой функции возрастает (при условии, что данная задача имеет оптимальный план и каждый опорный план ее является невырожденным). Для осуществления указанного перехода нужно найти первоначально какой-нибудь исходный опорный план. Этот опорный план можно непосредственно написать для задачи, записанной в форме основной задачи линейного планирования.

I. Составление математической модели задачи, т.е. нужно выписать систему ограничений и целевую функцию.

2. Приведение системы ограничений в канонический вид.

3. В записи целевой функции переносим все переменные в левую часть (кроме свободного члена). Если в целевой функции имеются переменные, относящиеся к единичной матрице системы ограничений, освобождаемся от них при помощи соответствующих уравнений системы (подробнее рассказано об этом в главе "Обобщенный симплексный метод").

Запись целевой функции:

$$z = c_0+c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

примет вид:

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n = c_0.$$

4. Составление исходной таблицы. В таблицу пишут коэффициенты системы ограничений (см. канонический вид) и целевой функции (см. этап 3). Исходная таблица на стр. 36.

5. Симплексный критерий: если в строке целевой функции (в таблице первая строка, обозначено через z) найдется хотя бы одно отрицательное число (кроме свободного члена и контрольного элемента), то можно улучшить решение, если все числа неотрицательные, то достигнуто оптимальное решение.

6. Выбор ключевого столбца

Если таблица не дает оптимального решения, то ключевой столбец выбирается по отрицательному числу в строке целевой функции (если отрицательных чисел несколько, то обычно выбирается из них наименьшее число).

Пусть ключевой столбец к-ый столбец.

7. Выбор ключевой строки

Для определения ключевой строки делить свободные члены b_i на положительные ненулевые коэффициенты a_{ik} к-того столбца (т.е. выбранного ключевого столбца) и по наименьшему частному определяем ключевую строку, это значит, что найти:

$$\min_i \left(\frac{b_i}{a_{ik}} \right) \text{для всех } a_{ik}>0, \text{ причем } b_i \geqslant 0.$$

Так достигаем неотрицательности свободных членов.

9*

	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{n+i}	...	x_{n+m}	Z	B	K
z	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_j$	...	$-c_n$	0	0	...	0	...	0	1	c_0	$c_0+1+\sum_{j=1}^{n}(-c_j)$
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	1	0	...	0	...	0	0	b_1	$b_1+1+\sum_{j=1}^{n} a_{1j}$
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	0	1	...	0	...	0	0	b_2	$b_2+1+\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n+i}	a_{i1}	a_{12}	...	a_{ij}	...	a_{in}	0	0	...	1	...	0	0	b_i	$b_i+1+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	..	a_{mj}	...	a_{mn}	0	0	...	0	...	1	0	b_m	$b_m+1+\sum_{j=1}^{n} a_{mj}$

Если в ключевом столбце индексом к нет положительных ненулевых элементов, т.е. все $a_{ik} \leq 0$, то целевая функция не ограничена ($z \to \infty$) и оптимального решения получить невозможно.

8. <u>Определение ключевого элемента</u>. Ключевой элемент находится на пересечении ключевого столбца и ключевой строки.

9. <u>Вычисление новой симплексной таблицы</u>.

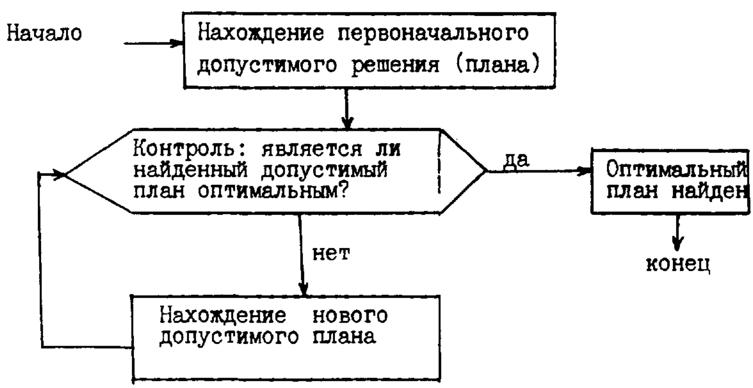
Элементы новой таблицы вычисляем методом последовательных исключений (см. тему "Решение систем линейных уравнений методом Гаусса"). В новой таблице выбранный ключевой столбец станет единичным столбцом.

<u>Примечание</u>. Контрольный столбец имеет, как и при методе Гаусса, контрольный, проверяющий характер.

10. <u>Интерпретация найденного решения</u> (при существовании I этапа).

5.3. Наличие решений задач линейного планирования симплексным методом

Общая схема решения задачи линейного планирования симплексным методом следующая:



При существовании оптимального плана получается этот план конечным числом шагов.

Возможно, что:

I) Задача линейного планирования не имеет оптимальное решение, если в ключевом столбце не найдется не одного положительного ненулевого элемента (тогда целевая функция неограничена на данном множестве планов),

2) Задача линейного планирования имеет больше одного оптимальных решений:

а) если в оптимальной симплексной таблице в строке целевой функции встречается хотя бы один нулевой элемент в небазисных столбцах. Если выбрать соответствующий столбец в качестве ключевого и произвести один шаг симплексных преобразований, можем рассчитать другой оптимальный так называемый <u>альтернативный</u> план, причем значения оптимального и альтернативного оптимального планов равны.

б) если число неизвестных (переменных), значения которых ненулевые, меньше числа ограничений (случай вырождения).

<u>ПРИМЕР</u>.

Найти наибольшее значение целевой функции

$$z = 3x_1 - 2x_2 - x_3$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 - 4x_3 \le 10 \\ 4x_1 \qquad -2x_3 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 7 \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0; \quad x_3 \geqslant 0.$$

<u>Решение</u>

Для приведения системы ограничений на канонический вид введем в задачу дополнительные переменные $x_5 \geqslant 0$; $x_6 \geqslant 0$; $x_7 \geqslant 0$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 - 4x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 \qquad - 2x_3 \qquad + x_5 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + x_6 = 7 \end{cases}$$

В записи целевой функции переносим все переменные в левую часть уравнения, т.е.

$z - 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

Отсюда пишем данные в первую симплексную таблицу:

Переменные / Базис	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	B	K
	-3	2	1	0	0	0	1	0	1
x_4	3	8	-4	1	0	0	0	10	18
$\leftarrow x_5$	4	0	-2	0	1	0	0	12	15
x_6	-1	2	3	0	0	1	0	7	12

Так как в строке z (целевой функции) отрицательный элемент (-3), то соответствующий столбец (столбец x_1) является ключевым.

Дальше выбираем ключевую строку. Так как в ключевом столбце (x_1) положительных чисел два (3; 4), то соответствующие строки могут быть ключевыми. Из них выбирается та строка, при которой

$\frac{b_i}{a_{i1}}$ получает наименьшее значение, т.е. найдем

$\frac{b_1}{a_{11}}$ и $\frac{b_2}{a_{21}}$ конкретно $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ и $\frac{12}{4} = 3$, из которых наименьшее 3 и соответствующая строка ключевая. Элемент 4 (на пересечении ключевой строки и ключевого столбца) ключевой. Обозначим ключевой элемент кружком и строку и столбец "$\rightarrow$ ".

Вычисляем элементы новой таблицы методом последовательных исключений:

а) разделим элементы ключевой строки на ключевой элемент;

б) при помощи новой ключевой строки найдем остальные элементы

x_6- строка II таблицы = x_6- строка I таблицы $+x_1$ - строка

x_4 - строка II таблицы = x_4- строка I таблицы + (x_1-строка)$\cdot$ $\cdot$(-3):

z - строка II таблицы = z - строка I таблицы +(x_1-строка)$\cdot$ 3

II таблица:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	B	K
z	0	2	-1/2	0	3/4	0	1	9	12 1/4
x_4	0	8	-5/2	1	-3/4	0	0	1	6 3/4
x_1	1	0	-1/2	0	1/4	0	0	3	3 3/4
← x_6	0	2	5/2	0	1/4	1	0	10	15 3/4

Один шаг сделан, но во второй таблице в строке z в третьем столбце отрицательный элемент, значит, план не оптимальный.

Для дальнейшего улучшения плана нужен следующий шаг.

Выбираем третий столбец ключевым по отрицательному коэффициенту в строке z (-1/2). Так как в остальных строках только один положительный элемент, то соответствующая строка (x_6) ключевая.

III таблица:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	B	K
z	0	12/5	0	0	4/5	1/5	1	11	15 2/5
x_4	0	10	0	1	-1/2	1	0	11	22 1/2
x_1	1	2/5	0	0	3/10	1/5	0	5	6 9/10
x_3	0	4/5	1	0	1/10	2/5	0	4	6 3/10

В III таблице в строке z все коэффициенты положительные - значит, план оптимальный.

Переменные, столбцы которых неединичные, имеют нулевые значения, а переменные, имеющие единичные столбцы, получают свои значения из столбца свободного члена (они написаны тоже перед строками и в столбце свободного члена соответствующей строки их значения):

$x_1 = 5;\ x_3 = 4;\ x_4 = 11;\quad x_2 = x_5 = x_6 = 0$

z = 11 (находится в столбце свободного члена в строке целевой функции).

6. ОБОБЩЕННЫЙ СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

Если ограничения задачи линейного планирования содержат единичную матрицу порядка m, то тем самым при неотрицательных правых частях определен первоначальный план и задача решена с помощью симплексного метода. Если ограничения задачи линейного планирования заданы в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad b_i \geqslant 0 \ (i= 1,2,\ldots, m),$$

то система ограничений всегда содержит единичную матрицу.

Многие задачи линейного планирования, имеющие решения, не содержат единичной матрицы и не приводятся к указанному виду. В том случае для решения задач применяется метод искусственного базиса (обобщенный симплексный метод).

Рассмотрим следующие задачи линейного планирования:

$$\left.\begin{array}{l} z = c_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \max \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i = 1,2,\ldots, m \\ b_i \geqslant 0 \\ x_j \geqslant 0 \ , \ j = 1,2, \ \ldots, n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} z = c_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \max \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \ , \ i = 1,2,\ldots,m \\ b_i \geqslant 0 \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$
\left.\begin{aligned}
& z = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \max \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i , \quad i = 1,2,\dots, k \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i , \quad i = k+1,\ k+2,\dots, p \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i , \quad i = p+1,\ p+2,\dots, m \\
& b_i \geqslant 0 \\
& x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,\dots, n
\end{aligned}\right\} \quad (3)
$$

После прибавления дополнительных переменных задачи (I), (2) и (3) не содержат единичную матрицу.

Рассмотрим задачу (I):

$$
\begin{aligned}
& z = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \max \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i , \quad i = 1,2,\dots, m \\
& b_i \geqslant 0 \\
& x_j \geqslant 0 , \quad j = 1,2,\dots, n,
\end{aligned}
$$

ее матрица

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{не содержит}
$$

единичной матрицы.

Для получения единичной матрицы к левой части каждого из равенств добавим по одной дополнительной неотрицательной переменной x_{n+i} ($i = 1, 2, \dots, m$), которые называются искусственными (тоже фиктивными). Единичные векторы x_{n+1}, $x_{n+2}, \dots, x_{n+i}, \dots, x_{n+m}$, соответствующие искусственным переменным, образуют искусственный базис.

Если в задаче имеются ограничения всех типов (задача 3), то искусственные переменные вводят только в тех строках системы ограничений, где отсутствуют естественные базисные переменные (также в задаче 2).

Чтобы не обнаружить равновесие уравнений прибавлением искусственных переменных, они должны быть нулевыми значениями, т.е. требуется, что:

$$x_{n+i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots, m,$$

поэтому прибавим эти переменные в целевую функцию с коэффициентом (-M), где $M > 0$ достаточно большое положительное число, конкретное значение которого обычно не задается:

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - M(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}).$$

Так как в целевой функции имеются искусственные переменные (переменные единичной матрицы), то для освобождения от них выражаем они через соответствующие уравнения и поставим в целевую функцию. Из этой записи целевой функции и из канонической формы системы ограничений получаем коэффициенты для начальной симплексной таблицы.

Пересчет симплекстаблицы при переходе от одного опорного плана к другому осуществляется по общим правилам симплексного метода.

Итерационный процесс ведется до тех пор, пока:

1) либо все искусственные векторы будут исключены из базиса;

2) либо строка целевой функции не содержит больше отрицательных элементов в столбцах с номерами от 1 до (n+m).

В оптимальном решении задачи все искусственные переменные должны равняться нулю. Если имеется оптимальное решение, в котором хоть одна из искусственных переменных отлична от нуля, то система ограничений исходной задачи несовместная в области допустимых решений и задача не имеет решения.

Если исходная задача содержит несколько единичных векторов, то их следует включить в искусственный базис. Это уменьшит количество вводимых дополнительных переменных и сократит число итераций, необходимых для решения задачи.

ПРИМЕР.

Найти $\max\ z = x_1 + x_2$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 12 \\ x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0$$

Решение. Используя дополнительные переменные x_3 и x_4, получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \qquad = 12 \\ x_1 + x_2 \qquad = 8 \\ x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 = 18 \end{cases}$$

Так как система уравнений не имеет канонический вид (не содержит единичную матрицу), введем искусственные переменные x_5 и x_6:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \qquad + x_5 = 12 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_6 = 8 \\ x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 \qquad = 18 \end{cases}$$

Прибавим искусственные переменные, умноженные на (-M) к целевой функции:

$$z = x_1 + x_2 - Mx_5 - Mx_6.$$

Так как целевая функция содержит элементы единичной матрицы, выражаем они в системе уравнений:

$$x_5 = 12 - 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$x_6 = 8 - x_1 - x_2$$

$$z - x_1 - x_2 + Mx_5 + Mx_6 = 0.$$

Новый вид целевой функции:

$$z - x_1 - x_2 + 12M - 2Mx_1 - Mx_2 + Mx_3 + 8M - Mx_1 - Mx_2 = 0.$$

Сокращенно:

$$z + (-1-3M)x_1 + (-1-2M)x_2 + Mx_3 = -20M$$

Таблица решений следующая:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	B
z	$-1-3M$	$-1-2M$	M	0	0	0	1	$-20M$
x_5	2	1	-1	0	1	0	0	12
x_6	1	1	0	0	0	1	0	8
x_4	1	3	0	1	0	0	0	18
z	0	$-1/2-1/2M$	$-1/2-1/2M$	0	$1/2+3/2M$	0	1	$6-2M$
x_1	1	$1/2$	$-1/2$	0	$1/2$	0	0	6
x_6	0	$1/2$	$1/2$	0	$-1/2$	1	0	2
x_4	0	$5/2$	$1/2$	1	$-1/2$	0	0	12
z	0	0	0	0	M	$1+M$	1	8
x_1	1	0	-1	0	1	-1	0	4
x_2	0	1	1	0	-1	2	0	4
x_4	0	0	-2	1	2	-5	0	2

$x_1 = 4$ $\quad x_4 = 2$ $\quad z_{max} = 8$
$x_2 = 4$ $\quad x_5 = 0$
$x_3 = 0$ $\quad x_6 = 0$

7. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

С каждой задачей линейного планирования тесно связана другая линейная задача, называемая двойственной. Первоначальная задача называется исходной (или прямой). Указанные две задачи образуют пару задач, называемую в линейном планировании двойственной парой.

Предложим, что нам дана задача линейного планирования, в которой система ограничении представляет собой систему неравенств вида меньше или равно, а целевая функция задана на максимум, т.е. предположим, что дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (I)$$

m линейных неравенств с n неизвестными и линейная функция

$$F = c_I x_I + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \qquad (2)$$

относительно этих же неизвестных и требуется найти среди всех неотрицательных решений системы линейных неравенств (I) такое, при котором функция (2) принимает наибольшее значение.

Двойственной задачей по отношению к сформулированной является следующая задача:

дана система

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n \end{cases} \qquad (3)$$

n линейных неравенств с m неизвестными и линейная функция

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \qquad (4)$$

относительно этих же переменных.

Требуется, среди всех неотрицательных решений системы (3), найти такое, при котором функция (4) принимает наименьшее значение.

Сравнивая две сформулированные задачи, видим, что:

I. Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных системы ограничений исходной задачи

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и аналогическая матрица в двойственной задаче

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11}a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12}a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1n}a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

получают друг из друга "транспонированием" (т.е. заменой строк столбцами, а столбцов строками).

2. Число ограничений в двойственной задаче равно числу переменных исходной задачи, а число переменных двойственной задачи равно числу ограничений исходной задачи.

3. В правых частях системы ограничений двойственной задачи стоят коэффициенты целевой функции прямой задачи.

4. Коэффициентами в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы ограничений исходной задачи.

5. Система ограничений исходной задачи состоит из неравенств вида $\leqslant$, а система ограничений двойственной задачи содержит неравенства вида $\geqslant$.

Исходная задача (I)-(2) и соответствующая двойственная (3)-(4) являются так называемыми симметричными двойственными задачами. В симметричных двойственных задачах ограничениями как исходной, так и двойственной задачи являются неравенства, причем переменные не могут принимать отрицательных значений.

В несимметричных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а двойственной- в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными.

Задача, двойственная по отношению к задаче со смешанными условиями

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \\ a_{k+1\,1}x_1 + a_{k+1\,2}x_2 + \ldots + a_{k+1}x_n = b_{k+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{5}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\ldots,\ e \le n),$$

составляется следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geqslant c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geqslant c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1e}y_1 + a_{2e}y_2 + \ldots + a_{me}y_m \geqslant c_e \\ a_{1e+1}y_1 + a_{2e+1}y_2 + \ldots + a_{me+1}y \geqslant c_{e+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{me}y_m \geqslant c_n \end{cases} \tag{6}$$

$$y_i \geqslant 0 \quad (i = 1,2,\ldots,\ k \le m),$$

согласно следующим правилам. Если на переменную x_j задачи (5) наложено условие ее неотрицательности, то j-ое ограничение системы (6) является неравенством. Если же переменная x_j указанной задачи может принимать отрицательные значения, то j-ое ограничение системы (6) представляет собой уравнение. Если i-ое ограничение системы (5) – неравенство, то $y_i \geqslant 0$. В противном случае переменная y_i может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Каждая из задач двойственной пары формально является самостоятельной задачей линейного планирования и может решаться независимо одна от другой. Однако находя решение одной из задач двойственной пары симплексным методом тем самым находится решение другой задачи.

Связи между решениями двойственной пары задач устанавливаются следующими теоремами двойственности:

I. Для любых допустимых решений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и

$(y_1, y_2, \dots, y_m)$ исходной и двойственной задач линейного планирования справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ .$$

Экономическое содержание этого неравенства состоит в том, что для любого плана производства $(x_1, x_2, \dots x_n)$ и любого допустимого вектора оценок ресурсов $(y_1, y_2, \dots y_m)$ общая стоимость всего производственного продукта не больше суммарной оценки ресурсов.

2. Если для некоторых допустимых решений $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ пары двойственных задач выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ ,$$

то векторы $x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots y_m)$ являются оптимальными решениями соответствующих задач линейного планирования.

Таким образом, план производства продукции и вектор оценок ресурсов являются оптимальными, если цена всей произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают.

3. Если одна из двух (исходная или двойственная) обладает оптимальным планом, то и другая имеет решение, причем, на оптимальных планах задач значения их целевых функций равны между собой, т.е. $F_{max} = F_{min}$.

Если целевая функция одной из задач не ограничена, то система другой задачи противоречива.

4. Для того, чтобы допустимые решения $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ пары двойственных задач являлись оптимальными решениями этих задач, необходимо и достаточно заполнение условий:

$$x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j\right) = 0, \quad j = 1,2,\dots, n$$

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right) = 0, \quad i = 1,2,\dots, m,$$

т.е. если какое-либо пространство системы ограничений одной из задач не обращается в точное равенство оптимальным решением этой задачи, то соответствующая компонента оптимального решения двойственной задачи должна равняться нулю; если же какая-либо компонента оптимального решения одной из задач положительна, то соответствующее ограничение в двойственной задаче ее оптимальным решением должно обращаться в точное равенство. Другими словами, если

$x_j > 0$ для некоторого j, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

и если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > c_j$, то $x_j = 0$ или же, если

$y_i > 0$ для некоторого i, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

и если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$, то $y_i = 0$.

Для того, чтобы найти решение двойственной задачи, найдем симплексным методом решение исходной задачи. Если исходная задача имеет оптимальное решение, то через каждое число шагов получится окончательная симплексная таблица, где в первой строке не будет ни одного отрицательного (кроме свободного члена и контрольного столбца) элемента. Это и означает, что для двойственной задачи также получено оптимальное решение, причем значения двойственных переменных находятся в первой строке в столбцах дополнительных переменных.

Обычно из пары двойственных задач выбирается та задача, которую удобнее и легче решать.

Экономическое содержание двойственной задачи.

Любую деятельность в народном хозяйстве можно рассматривать как процесс затраты определенных ресурсов и выпуска некоторой продукции. Процесс этот может происходить в различных формах, выполняться с применением различных ресурсов. Ресурсы, как правило, ограничены, причем, эффективность применения в различных процессах не одинакова. Поэтому возникает необходимость применения аппарата математического планирования и организации производства. Теория двойственности устанавливает связь между оптимальным распределением ресурсов и некоторой системой оценок на ресурсы, соответствующих плану.

Рассмотрим задачу планирования работы предприятия. Производство и виды продуктов требуют различные виды сырья, определенного станочного парка, электроэнергии, топлива и т.д. Пусть всего требуется m видов ресурсов. Количество ресурсов каждого вида на данном предприятии ограничено.

Составим математическую модель задачи. Обозначим через:

a_{ij} - расход i-го ресурса на изготовление одного продукта j-го вида;

b_i - объем i-го ресурса;

c_j - от каждого j-го продукта получаемая прибыль;

x_j - количество j-го вида продукта.

На j-ый вид продукта будет затрачено $a_{ij}x_j$ единиц i-го ресурса. Поэтому ограничения по расходам ресурсов записываются в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{cases}$$

причем, по смыслу задачи $x_1 \geqslant 0$; $x_2 \geqslant 0$; $x_3 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0$.

Надо указать, в каких количествах изготовлять различные продукты, т.е. определить значения $x_1, x_2, \dots x_n$, чтобы общая прибыль произведенного продукта $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ была максимальной. Мы пришли к задаче линейного планирования.

Предположим, что поставлена задача оценить каждый из применяемых ресурсов. Искомые оценки будут относительными, т.к. одни и те же ресурсы различных предприятий представляют различную ценность и оценки должны изменяться с изменением объемов ресурсов. Относительность оценок связана также с тем, что они измеряются в единицах ценности выпускаемой продукции.

Обозначим через y_i оценку единицы i-го ресурса. Каждый j-ый продукт производится прибыльно c_j и расходуется количество i-го ресурса равное a_{ij}. Общая оценка израсходованных ресурсов равна

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m ,$$

13*

причем, разумно предположить, что эта оценка не меньше оценки полученного продукта. Это приводит к системе условий

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geqslant c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geqslant c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geqslant c_n, \end{cases}$$

причем, оценки естественно считать неотрицательными числами

$$y_1 \geqslant 0; \quad y_2 \geqslant 0; \quad \ldots, \quad y_m \geqslant 0.$$

Суммарная оценка ресурсов $F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$ должна быть минимальной.

Задача определения оценок ресурсов является двойственной к задаче составления плана изготовляемых продуктов. Вектор оценок ресурсов представляет оптимальное решение двойственной задачи.

Обычно интерпретируют двойственные оценки следующим образом: величина двойственной оценки y_i того или иного ресурса (i-го ресурса) показывает, насколько возросло бы максимальное значение целевой функции (F), если объем данного (i-го) ресурса увеличился на единицу.

ПРИМЕРЫ.

I. Написать по отношению к задаче, состоящей в максимизации функции

$$F = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

при выполнении условий

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0,$$

двойственную задачу.

Ответ: $F = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \longrightarrow \min$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geqslant 2 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geqslant 1 \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geqslant 3 \end{cases}$$

2. Написать для задачи, состоящий в максимизации функции

$$F = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

при выполнении условий

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 20 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq 19 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

двойственную задачу.

<u>Ответ</u>: $F = 18y_1 + 20y_2 + 19y_3 \longrightarrow \min$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 1 \\ 2y_1 + y_2 - 3y_3 \geq -2 \\ 4y_1 - 3y_2 + 6y_3 \geq 5 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \ y_2 \geq 0, \ y_3 \geq 0.$$

3. Для задачи, состоящей в минимизации функции

$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3$$

при выполнении условий

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0,$$

написать двойственную задачу.

<u>Ответ</u>: $F = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \longrightarrow \max$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 1 \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \geq -4 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

8. ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ

Под "транспортной залачей" следует понимать широкий круг задач по планированию перевозок различных грузов, материально-технического снабжения и схем размещения предприятий.

Транспортная задача относится к общей задаче линейного планирования и может быть решена, например, симплексным методом. Сравнительная простота математической модели позволяет применить специальные методы для её решения.

8.I. Постановка задачи и ее математическая модель

Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у m поставщиков A_i в количестве a_i $(i = I, 2, \ldots, m)$ единиц соответственно, необходимо доставить n потребителям B_j в количестве $b_j (j = 1, 2, \ldots n)$ единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю.

Необходимо составить такой план перевозок, который позволяет вывести все грузы, удовлетворить все потребности и иметь минимальную стоимость.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированные к перевозке от i-ого поставщика к j-му потребителю.

Составим математическую модель задачи. Так как от i-го поставщика к j-му потребителю запланировано к перевозке x_{ij} единиц груза, то стоимость их перевозки составляет $c_{ij} x_{ij}$.

Стоимость всего плана выразится двойной суммой:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Систему ограничений получаем из следующих условий задачи:

а) все грузы должны быть вывезены, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\ldots, m),$$

б) все потребности должны быть удовлетворены, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j= 1,2,\ldots,n),$$

в) $x_{ij} \geqslant 0$.

Таким образом, математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид.

Найти наименьшее значение линейной функции

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{I}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \text{ , } i = 1,2,\ldots, m \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2,\ldots, n \tag{3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \ (i = 1,2,\ldots, m;\ j = 1,2,\ldots,n) \tag{4}$$

В рассмотренной модели предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ ,} \tag{5}$$

такая модель называется закрытой.

Если
$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6}$$

или
$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{7}$$

то модель называется открытым.

Условие (5) является необходимым и достаточным условием разрешимости транспортной задачи. Поэтому, если условие (5) для данной транспортной задачи не выполняется, то ее следует свести к транспортной задаче, для которой указанное условие имеет место.

В случае превышения запаса над потребностью (6) вводится фиктивный $(n+1)$-й потребитель с потребностью

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

и полагаются стоимости перевозок грузов от i-го поставщика к $(n+1)$-му потребителю равными нулю $c_{i,n+1} = 0$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ так как в действительности такие перевозки не существуют (или равными М, причем М довольно большое положительное число).

Аналогично при (7) вводится фиктивный $(m+1)$-й поставщик с запасам

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

и со стоимостью перевозок $c_{m+1,j} = 0$ (M), $i = 1,2,\ldots, m$.

Всякая транспортная задача может быть сведена к задаче имеющей закрытую модель.

Любая транспортная задача, у которой суммарный объем запасов совпадает с суммарным объемом потребностей, имеет всегда решение, в том числе оптимальное, причем число базисных неизвестных x_{ij} должно быть не более $n+m-1$.

Число переменных x_{ij} в транспортной задаче с m поставщиками и n потребителями равно $m \times n$, а число уравнений в ее системе ограничений равно $m+n$. В силу того, что мы рассматриваем транспортную задачу, для которой выполняется условие (5), число линейно независимых уравнений равно $n+m-1$. Поэтому опорный план транспортной задачи должен иметь не более $m+n-1$ отличных от нуля неизвестных.

План x_{ij} $(i=1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots, n)$ транспортной задачи, имеющий не более $m+n-1$ отличных от нуля компонент, называется опорным планом. Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности $m+n-1$, то план называется невырожденным, а если меньше, то план называется вырожденным.

Данные транспортной задачи сосредоточены в транспортной таблице:

Запасы поставщиков	Потребности потребителей					
	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
a_I	c_{II} x_{II}	c_{I2} x_{I2}	...	c_{1j}	...	c_{1n}
a_2	c_{2I}	c_{22}	...	c_{2j}		c_{2n}
⋮	......	....	....	.....	.....	....
a_i	c_{iI}	c_{i2}	...	c_{ij}		c_{in}
⋮	......	....	....	.....	.....	....
a_m	c_{mI}	c_{m2}	...	c_{mj}		c_{mn}

ПРИМЕР

3 поставщика с ресурсами соответственно 200, 260 и 340 единиц. Нужды четырех потребителей 300, 240, II0 и I00 единиц соответственно. Затраты на перевозку даны в таблице. Найти план перевозок с наименьшими затратами.

	B_I	B_2	B_3	B_4
A_I	3	5	7	II
A_2	I	4	6	3
A_3	5	8	I2	7

Найдем суммарные ресурсы и суммарные потребности:

Ресурсы поставщиков: $\sum_{i=I}^{3} a_i = 200+260+340 = 800$

Нужды потребителей: $\sum_{j=1} b_j = 300+240+110+100 = 750$.

Так как ресурсы превышают потребность, то вводим фиктивный потребитель B_5 с потребностью

$$b_5 = \sum_{i=1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{4} b_j = 800 - 750 = 50$$

и с стоимостью перевозок $c_{i5} = 0$.

Модель задачи получается следующая:

$$\min z = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 11x_{14} + x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23} + $$
$$+ 3x_{24} + 5x_{31} + 8x_{32} + 12x_{33} + 7x_{34}$$

при условиях:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 260 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 340 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 300 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 240 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 110 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 100 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 50 \end{cases}$$

$$x_{11} \geqslant 0, \quad x_{12} \geqslant 0, \quad \ldots, \quad x_{35} \geqslant 0.$$

Транспортная задача может быть решена симплексным методом. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ее ограничений:

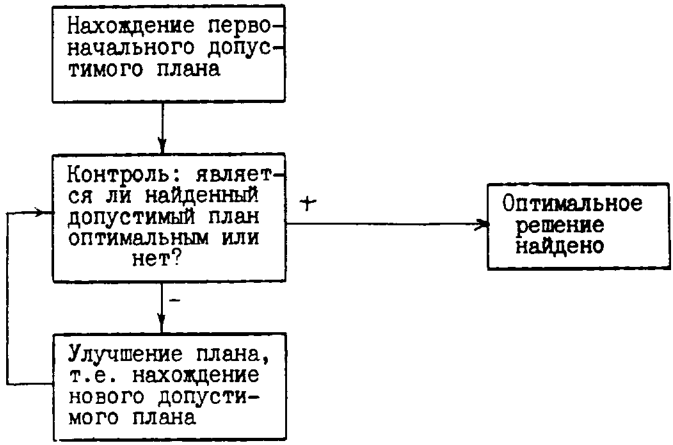
1) ограничения заданы в виде уравнений;

2) каждая неизвестная входит лишь в два уравнения;

3) коэффициенты при неизвестных - единицы;

для решения транспортной задачи разработаны специальные методы, более простые, чем симплекс-метод.

Общая схема решения транспортной задачи следующая:



8.2. Нахождение первоначального плана

Для нахождения допустимого, первоначального плана, существует несколько методов, три из которых - метод северо-западного угла, метод наименьшей (минимальной) стоимости и метод Фогеля - рассматриваются ниже.

Суть этих методов состоит в том, что опорный план находится последовательно в $m+n-1$ шагов, на каждом из которых заполняется одна клетка в таблице, которую в последствии называют занятой. Заполнение одной из клеток либо полностью обеспечивает удовлетворение потребности в грузе одного из потребителей (того, в столбце которого находится заполненная клетка), либо обеспечивает полностью вывоз груза с одного из поставщиков (с того, в строке которого находится заполняемая клетка).

В первом случае временно исключается из рассмотрения столбец, содержащий заполненную на данном шаге клетку, и рассматривается задача, таблице условий который содержит число столбцов на единицу меньше, чем было перед этим шагом, но с тем же количеством строк и с соответственно измененным запасом груза у одного из поставщиков (в том, за счет запаса которого была удовлетворена потребность в грузе потребителя на данном шаге); во втором случае временно исключается из рассмотрения строка, содержащая заполняемую клетку, и считается, что таблица условий имеет на одну строку меньше при неизменном количестве столбцов и при соответствующем изменений потребности в грузе потребителя, в столбце которого находится заполняемая клетка.

Сделав $n+m-2$ описанных выше шагов, придем к задаче с одним поставщиком и одним потребителем. При этом останется свободной только одна клетка, а запасы оставшегося поставщика будут равны потребностям оставшегося потребителя. Заполнив эту клетку, тем самым сделаем $m+n-1$ шагов и получим искомый опорный план.

8.2.I. Метод северо--западного угла

Не обращая внимание на стоимости перевозок при нахождении опорного плана по методу северо--западного угла на каждом шаге рассматривается первый из оставшихся прставщиков и первый из оставшихся потребителей, причем заполнение клеток таблицы начинается с заполнения левой верхней клетки ("северо--западный угол"), т.е. клетки неизвестного x_{II} и заканчивается заполнением клетки неизвестного x_{mn}, т.е. идет как бы по диагонали (по лестнице) таблицы.

Значение неизвестного x_{II} получается следующим образом:

$$x_{11} = \min (b_1; \ a_1),$$

а затем найдем оставшую потребность $b_1' = b_1 - x_{11}$ и оставшие запасы $a_I' = a_I - x_{II}$, причем существует 3 возможности:

I) если $a_I < b_I$, то $x_{II} = \min (a_I; b_1) = a_I$ и $a_I' = 0$, $b_1' = b_1 - x_{II} > 0$. Из рассмотрения исключается первый поставщик так как его запасы полностью израсходованы, т.е. первая строка и поэтому следующий искомый элемент x_{2I};

2) если $a_I > b_1$, то $x_{II} = b_1$ и $b_1' = 0$, а $a_I' = a_I - x_{II} > 0$, это значит, из рассмотрения исключается первый столбец, т.е. первый потребитель так как потребность

его полностью удовлетворена. Следующий элемент x_{12};

3) если $a_1 = b_1$, то $x_1 = a_1 = b_1$ и $a_1' = 0$; $b_1' = 0$, т.е. из рассмотрения исключается и столбец и строка. Переходим к заполнению клетки для неизвестного x_{22} и т.д.

ПРИМЕР. Найдем допустимый план методом северно-западного угла (исходные данные см. стр. 57). Закрытая транспортная задача в виде таблицы следующая:

a_i \ b_j	300	240	110	100	50
200	3	5	7	11	0
260	1	4	6	3	0
340	5	8	12	7	0

1. $x_{11} = \min(a_1;\ b_1) = \min(200;\ 300) = 200$
   $a_1' = 0$ и $b_1' = 300-200 = 100$;
2. $x_{21} = \min(a_2;\ b_1') = \min(260;\ 100) = 100$
   $a_2' = 260-100 = 160$ и $b_1'' = 0$;
3. $x_{22} = \min(a_2';\ b_2) = \min(160;\ 240) = 160$
   $a_2'' = 0$ и $b_2' = 240-160 = 80$;
4. $x_{32} = \min(340;\ 80) = 80$;
5. $x_{33} = \min(260;\ 110) = 110$;
6. $x_{34} = \min(150;\ 100) = 100$;
7. $x_{35} = \min(50;\ 50) = 50$.

Итак, транспортная задача имеет следующее решение:

	300	240	110	100	50
200	3 200	5	7	11	0
260	1 100	4 160	6	3	0
340	5	8 80	12 110	7 100	0 50

Решение должно иметь $m+n-1$, т.е. $3+5-1 = 7$ базисных элементов, это значит получено невырожденное решение.

Общая стоимость перевозок всего плана равна

$$z = 3x200 + 1x100 + 4x160 + 8x80 + 12x110 + 7x100 + 0x50 = 4000$$

§.2.2. Метод минимальной стоимости

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирается наименьшая, и в клетку, которая ей соответствует, помещается меньше из чисел, определяющее объем запаса поставщика и потребности потребителя, на пересечении которых она находится.

После этого из рассмотрения исключается либо строка, соответствующая поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены.

Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирается наименьшая стоимость, процесс распределения запасов продолжается, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Замечание: фиктивные стоимости (их значения нули) учитываем в последней очереди.

Из таблицы стоимостей выбираем наименьшую стоимость (стоимостей фиктивного потребителя не учитывая) - это $c_{21} = 1$, поэтому $x_{21} = \min (a_2; b_1) = \min (260; 300) = 260$ и вторая строка исключается из рассмотрения.

<u>Решение примера</u> по методу минимальной стоимости:

a_i \ b_j	~~300~~ 40	240	110	100	50
200	3	5	7	11	0
0 ~~260~~	1 260	4	6	3	0
340	5	8	12	7	0

После этого снова выбирается из таблицы стоимость с наименьшим значением:

$c_{11} = 3 \Rightarrow x_{11} = \min (200;\ 40) = 40$

и вычеркивается первый столбец;

$c_{12} = 5 \Rightarrow x_{12} = \min (160;\ 240) = 160$

и вычеркивается первая строка;

$c_{34} = 7 \Rightarrow x_{34} = \min (340;\ 100) = 100$

и вычеркивается четвертый столбец;

$c_{32} = 8 \Rightarrow x_{32} = \min (240;\ 80) = 80$,

вычеркивается второй столбец;

$c_{33} = 12 \Rightarrow x_{33} = \min (160;\ 110) = 110$,

вычеркивается третий столбец;

$c_{35} = 0 \Rightarrow x_{35} = \min (50;\ 50) = 50$

и все ресурсы распределены между потребителями.

После $n+m-1 = 7$ шагов получается следующий вид:

a_i \ b_j	300	240	110	100	50
200	3 40	5 160	7	11	0
260	1 260	4	6	3	0
340	5	8 80	12 110	7 100	0 50

$z = 3 \times 40 + 5 \times 160 + 1 \times 260 + 8 \times 80 + 12 \times 110 + 7 \times 100 + 0 \times 50 = 3840.$

8.2.3. Метод Фогеля

Суть метода заключается в том, что возить будут по маршруту, при котором по стоимости следующий маршрут принес-бы наибольший убыток.

К исходной таблице добавляют столбец и строку разностей, каждый элемент их равен результату, полученному вычитанием наименьший стоимости в строке (столбце) из следующей по величине. Из всех разностей выбирают наибольшую.
1. Если одна наибольшая разность, то в соответствующей строке (столбце) заполняют обычным образом клетку с наименьшей стоимостью и рассчитывают новые разности.
2. Если несколько наибольших разностей, то для заполнения выбирают клетку со стоимостью наименьшей как в строке, так и в соответствующем столбце. Если таких клеток несколько, то заполняют ту из них, которая, находясь в строке (столбце) с наибольшей разностью, соответствует столбцу (строке) с большей разностью. Если клеток с оптимальным элементом нет, то для заполнения ищут клетку следующим образом: в строках (столбцах) с наибольшей разностью отыскивают наименьшую стоимость, из которой вычитают наименьшую стоимость соответствующего столбца (строки). В результате получают несколько положительных чисел. Клетку, соответствующую наименьшему из них, заполняют, после чего разности рассчитывают заново.

Процесс продолжается до выполнения балансовых условий (2) и (3) в модели транспортной задачи.

Этот метод позволяет получить исходный план, близкий к оптимальному, а зачастую и оптимальный.

Решение примера по методу Фогеля:

Найдем разности для столбцов и для строк, а затем выбираем из них наибольшую (т.е. 4). Так как эта наибольшая разность соответствует четвертому столбцу, то выделяем в этом столбце наименьшую стоимость и заполняем соответствующую ей клетку возможным грузом:

	300	240	II0	100	50	Разности строк
200	3	5	7	11	0	2 (5-3)
~~260~~ 160	I	4	6	3 100	0	2 (3-I)
340	5	8	I2	7	0	2 (7-5)
Разности столбцов	2 (3-I)	I (5-4)	I (7-6)	4 (7-3)		

Рассчитываем новые разности:

	~~300~~/140	~~240~~ 150	II0	I00	50	Разности строк
~~200~~ 90	3	5 90 5.	7 II0 3.	II	0	5 - 3 = 2
~~260~~ 160	I I60 1.	4	6	3 I00	0	4-I = 3
50 ~~340~~ ~~200~~	5 I40 4.	6 I50 6.	I2	7	0 50 7.	8-5 = 3

Разности столбцов 3-I=2 5-4=I 7-6=I

5-3=2 8-5=3 I2-7=5

$z = 5x90 + 7x110 + 1x160 + 3x100 + 5x140 + 8x150 = 3580.$

8.3. Случай вырождения

Базисное решение имеет $m+n-1$ элементов. Если при отыскании $\min\{a_i, b_j\}$ получится, что $a_i = b_j$, т.е. потребности потребителя полностью удовлетворены, а запасы поставщика полностью использованы, то получается, что из рассмотрения одновременно выбывают и столбец и строка. В этом случае нужно в соответствующей клетке выбывающего столбца и строки (произвольно) поставить нулевой груз.

ПРИМЕР. Данная задача решена методом северо-западного угла.

	80	130	60	105	95
170	7 $_{80}$	10 $_{90}$	3	6	2
40	2	3 $_{40}$	7	3	5
140	6	11	8 $_{60}$	2 $_{80}$	1
120	4	1 $_{0}$	13	18 $_{25}$	7 $_{95}$

Базисных элементов должно быть $m+n-1 = 8$, а есть только 7.

При нахождении $x_{22} = \min\,(b_2' = 40;\ a_2 = 40)$ одновременно выбывали и столбец и строка, поэтому груз 0 поставим в одну пустую клетку или второго столбца или второй строки.

8.4. Оценка первоначального решения

Для оценки первоначального плана обратим все стоимости в клетках базисного решения в нули, вычитая подходящие числа, так называемые потенциалы из стоимостей по строкам и столбцам.

Обозначим потенциалы строк через α_i $(i=1,2,..m)$ и столбцов через β_j $(j=1,2,\dots,n)$. Для определения α_i и β_j составляем систему линейных уравнений:

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$$

для занятых клеток, то есть для всех $x_{ij} \neq 0$. Поскольку неизвестных $m+n$, а уравнений $m+n-1$, т.е. число неизвестных превышает на единицу число уравнений, то для решения этой системы (см. метод Гаусса) один из потенциалов принимается равным любому числу. После того, как все потенциалы найдены, для каждой из клеток находятся c_{ij}' (преобразованные стоимости):

$$c_{ij}' = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j) = c_{ij} - \alpha_i - \beta_j.$$

Признак оптимальности: если среди преобразованных стоимостей нет отрицательных, то **план является оптимальным**. Если же имеется хотя бы один отрицательный элемент, то **решение является неоптимальным**.

Примечание: в занятых клетках c'_{ij} должны равняться в нули, так как при нахождении потенциалов $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ $(x_{ij} \neq 0)$, а $c'_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j) = 0$.

ПРИМЕР. Начальное решение найдено методом минимальной стоимости:

	300	240	110	100	50
200	3 40	5 160	7	11	0
260	1 260	4	6	3	0
340	5	8 80	12 110	7 100	0 50

Пусть α_1, α_2 и α_3 потенциалы строк и β_1, β_2, β_3, β_4 и β_5 – потенциалы столбцов.

Система уравнений для определения $m+n=8$ неизвестных содержит $m+n-1=7$ уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 3 \\ \alpha_1 + \beta_2 = 5 \\ \alpha_2 + \beta_1 = 1 \\ \alpha_3 + \beta_2 = 8 \\ \alpha_3 + \beta_3 = 12 \\ \alpha_3 + \beta_4 = 7 \\ \alpha_3 + \beta_5 = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет общее решение, а нас интересует только одно (частное) решение, поэтому полагаем, что $\alpha_1 = 0$:

$$\begin{array}{ll} 0 + \beta_1 = 3 & \beta_1 = 3, \\ 0 + \beta_2 = 5 & \beta_2 = 5, \\ \alpha_2 + 3 = 1 & \alpha_2 = -2, \\ \alpha_3 + 5 = 8 & \alpha_3 = 3, \\ 3 + \beta_3 = 12 & \beta_3 = 9, \\ 3 + \beta_4 = 7 & \beta_4 = 4, \\ 3 + \beta_5 = 0 & \beta_5 = -3. \end{array}$$

Полученные потенциалы вычитаем из <u>всех стоимостей</u> ($c'_{ij} = c_{ij} - \alpha_i - \beta_j$) и получается таблица преобразованных стоимостей:

	300	240	110	100	50
200	0 40	0 160	-2	7	3
260	0 260	1	-1	1	5
340	-1	0 80	0 110	0 100	0 50

Так как среди преобразованных стоимостей встречаются отрицательные, это значит, что план неоптимальный.

8.5. Преобразование плана перевозок

Улучшение плана заключается в использовании незанятых клеток вместо заполненных. Заполняя одну из незанятых клеток, придется одновременно изменить цифры по меньшей мере в трех заполненных клетках (чтобы не нарушились итоговые величины в строках и столбцах таблицы). Поэтому при анализе возможностей улучшения плана каждая свободная клетка рассматривается не изолированно, а в связи с несколькими занятыми клетками.

Отрицательная преобразованная стоимость* выделяется кружком и построится замкнутый многоугольник (цикл) начиная с отрицательного числа, двигаясь только вертикально и горизонтально поворачивая только в заполненных клетках. В многоугольнике вершин всегда четное число и не больше $m+n$. Незанятая клетка (с отрицательной стоимостью) считается первой и ей приписывается знак "+", в соседнюю вершину "-" и т.д. В данную свободную клетку переносится меньшее из чисел x_{ij}, стоящих в клетках со знаками "-". Одновременно это число прибавляется к соответствующим числам, стоящим в плюсовых клетках, и вычитается из чисел, стоящих в минусовых клетках. Клет-

---

* Примечание: если отрицательных стоимостей несколько, то из них выбирается наименьшая.

ка, которая ранее была свободной, становится занятой,а клетка с отрицательным знаком, в которой стояло наименьшее из чисел x_{ij} ,считается свободной.

В результате указанных выше перемещений грузов в пределах клеток, связанных многоугольником с данной свободной клеткой, определяется новый опорный план транспортной задачи.

<u>ПРИМЕР</u>. Как было видно, отрицательных чисел несколько (-2; -I; -I), поэтому из них выбираем наименьшее (-2), обозначим кружком, построим многоугольник

	300	240	II0	I00	50
200	0 40	0 ~~160~~ 50 −	-2 II0 +	7	3
260	0 260	I	I	I	5
340	-I	0 I90 ~~80~~ +	0 ~~110~~ 0 −	0 I00	0 50

Обозначим клетку с отрицательным числом со знаком "+", соседнюю со знаком "-" и т.д.

$x = \min(160;\ 110) = 110.$

Сделаем изменения в плане, после которого свободной остается клетка (i= 3, j = 3). Проверяем оптимальность найденного плана:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ \alpha_1 + \beta_2 = 0 \\ \alpha_1 + \beta_3 = -2 \\ \alpha_2 + \beta_1 = 0 \\ \alpha_3 + \beta_2 = 0 \\ \alpha_3 + \beta_4 = 0 \\ \alpha_3 + \beta_5 = 0 \end{cases} \quad и \quad \alpha_1 = 0, \quad \begin{matrix} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = -2 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \beta_4 = 0 \\ \beta_5 = 0 \end{matrix}$$

Найдем $c''_{ij} = c'_{ij} - \alpha_i - \beta_j$

	300	240	II0	I00	50
200	0 40	0 50	0 II0	7	3
260	0 260	I	I	I	5
340	-I	0 I90	2	0 I00	0 50

Так как план ещё не оптимальный, улучшаем ещё раз. Клетку со стоимостью (-I) выбираем началом многоугольника и $x = \min(40; I90) = 40$

	300	240	II0	I00	50
200	0^{-} ~~40~~	0^{+} ~~50~~ 90	0 II0	7	3
260	0 260	I	I	I	5
340	$-I^{+}$ 40	0^{-} ~~190~~ I50	2	0 I00	0 50

Проверяем оптимальность этого плана:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_2 = 0 \\ \alpha_1 + \beta_3 = 0 \\ \alpha_2 + \beta_1 = 0 \\ \alpha_3 + \beta_1 = -1 \\ \alpha_3 + \beta_2 = 0 \\ \alpha_3 + \beta_4 = 0 \\ \alpha_3 + \beta_5 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = 0, \ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \beta_4 = 0 \\ \beta_5 = 0 \\ \beta_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1, \end{array}$$

$c_{ij}''' = c_{ij}'' - \alpha_i - \beta_j$:

	300	240	II0	I00	50
200	I	0 90	0 II0	7	3
260	0 260	0	0	0	4
340	0 40	0 I50	2	0 I00	0 50

План является оптимальным.

$$z_{min} = 5 \times 90 + 7 \times 110 + 1 \times 260 + 5 \times 40 + 8 \times 150 + 7 \times 100 = 3580.$$

8.6. Альтернативные решения транспортных задач

Признаком существования альтернативного оптимального плана является $c'_{ij} = 0$ для некоторой клетки, в которой $x_{ij} = 0$, т.е. другие оптимальные планы существуют тогда, когда в оптимальной транспортной таблице преобразованные стоимости в незанятой клетке нули.

Для нахождения альтернативного плана выбираем нулевой коэффициент началом построения многоугольника и пройдем процесс изменений плана.

ПРИМЕР.

	300	240	IIO	IOO	50
200	I	0 90	0 IIO	7	3
260	0 260	0	0	0	4
340	0 40	0 I50	2	0 IOO	0 50

$c_{22} = 0$, $c_{23} = 0$, $c_{24} = 0$, следовательно, всего 4 оптимальных плана. Для их нахождения выбираем один нулевой коэффициент $c_{24} = 0$:

	300	240	IIO	IOO	50
200	I	0 90	0 IIO	7	3
260	0 160 − ~~260~~	0	0	+ 0 IOO	4
340	0 + ~~40~~ I40	0	2	0 − ~~100~~	0 50

$$x = \min(260;\ 100) = 100$$

$c_{22} = 0$ и т.д.

9. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИГР

9.1. Основные понятия

И г р о й называют формализированную модель конфликтной ситуации. Она ведется по определенным правилам. Игру называют игрой с нулевой суммой, если сумма выигрышей всех участников равна нулю.

Сознательный выбор одного из возможных в данной ситуации ходов называют л и ч н ы м х о д о м.

Выбор хода с помощью какого-либо механизма случайного отбора называют с л у ч а й н ы м х о д о м. Чтобы игра была математически определенной, правила игры для каждого случайного хода должны указывать распределение вероятностей возможных исходов.

Совокупность правил, определяющих однозначно выбор при каждом личном ходе игрока в зависимости от сложившейся ситуации, называют с т р а т е г и е й и г р о к а.

Смешанной стратегией первого игрока (А) называют вектор – $p = (p_1;\ p_2;\ \ldots;\ p_m)$,

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \qquad p_i \geqslant 0 \ (i = 1,2,\ldots,m),$$

где m – число стратегий первого игрока.

Смешанной стратегией второго игрока (В) называют вектор $q = (q_1;\ q_2;\ \ldots;\ q_n)$,

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \quad q_j \geqslant 0,$$

где n – число стратегий второго игрока;

p_i; q_j – частоты, с которыми игроки выбирают свой ход соответственно i-й или j-й стратегии.

Смешанную стратегию, i-я компонента которой равна 1, а остальные нулю, называют i-й ч и с т о й с т р а т е г и е й п е р в о г о и г р о к а. Аналигично j-я чистая стратегия второго игрока имеет все компоненты, кроме

j -й, равными нулю.

Конечной называют игру, в которой у каждого игрока имеется только конечное число стратегий.

Конечную игру, в которой первый игрок имеет m стратегий $p_1, p_2, \dots, p_m$, а второй игрок n стратегий $q_1, q_2, \dots q_m$, называют игрой размерности $m \times n$.

Если игра состоит только из личных ходов, то выбор пары стратегий p_i, q_j однозначно определяет исход игры a_{ij}. Если же игра содержит, кроме личных, случайные хода, то выигрыш при паре стратегий p_i, q_j есть величина случайная, зависящая от исходов всех случайных ходов. Оценкой ожидаемого выигрыша является его математическое ожидание a_{ij}.

Значения a_{ij} записывают в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

строки которой соответствуют стратегиям p_i, а столбцы - стратегиям q_j. Матрицу A называют платежной.

Число $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ называют нижней ценой игры, а число $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ верхней ценой игры. Всегда $\alpha \leq \beta$. Если $\alpha = \beta$, то игра называется с седловой точкой, а общее значение α и β, которое будет обозначить через v - ценой игры.

Элемент платежной матрицы, являющийся одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце, называют седловой точкой матрицы. Седловой точке (i, j) соответствует пара чистых минимаксных стратегий. Эти стратегии называют оптимальными, а их совокупность - решением игры. Если матричная игра не имеет седловую точку, то ее решением называется такая пара смешанных стратегий $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ и действительное число v, что $f(p, q) \geqslant v$ для чистых стратегий $q_j (q_1, q_2, \dots q_n)$ и $f(p, q) \leqslant v$ для чистых стратегий p_i $(p_1, p_2, \dots, p_m)$. p и q называют оптимальными смешанными стратегиями.

Оптимальные стратегии игры с платежной матрицей $(a_{ij} + c)$ остаются теми же, что и для игры с платежной матрицей

(a_{ij}). Цена новой игры равна $v+c$, где v - цена игры, заданной матрицей (a_{ij}).

Фундаментальная теорема Неймана утверждает, что каждая конечная матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях, т.е. всегда найдется пара оптимальных смешанных стратегий p^*, q^* которая при любых смешанных стратегий p, q удовлетворяет неравенствам.

$$f(p, q^*) \leqslant f(p^*, q^*) \leqslant f(p^*, q).$$

ПРИМЕР I. Спортивный клуб А располагает двумя вариантами состава команды, а клуб В - тремя вариантами. Подавая заявку для участия в соревновании, ни один из клубов не знает, какой состав изберет другой. Вероятности выигрыша клуба А при различных вариантах составов команд, примерно известны из опыта прошлых встреч, заданы матрицей.

A \ B	I	2	3
I	70	80	60
2	80	20	40

Найти, с какой частотой клубы должны выставлять каждый из составов во встречах друг с другом, чтобы добиться наибольшего в среднем числа побед.

Р е ш е н и е. Если клуб А выставит первую команду, то худшее, что можно ожидать, есть встреча с третьей командой клуба В. Значит, гарантируемый выигрыш клуба А есть 60 %. Если он выставит вторую команду, то гарантируемый выигрыш - 20 %. Итак, целесообразно выставить первую команду. Формально - из наименьших чисел по строкам следует выбрать наибольшее.

Аналогично рассуждает клуб В. Если клуб В выставит первый состав команды, то максимальный проигрыш ("выигрыш") составит 80 %, соответственно для второй и третьей команд проигрыши будут 80 % и 60 %. Следовательно, клуб В должен выставить третий состав команды. Формально из наибольших чисел по столбцам выбирается наименьшее.

A \ B	I	2	3	Минимальный выигрыш клуба A
I	70	80	60	60
2	80	20	40	20
Максимальный проигрыш клуба B	80	80	60	

Если наибольшее из наименьших по строкам число равно наименьшему из наибольших по столбцам числу, то матрица имеет седловую точку.

В этом случае из соответствующих позиций, занимаемых указанными числами, получаем чистую стратегию клуба A: $p = (I;\ 0)$ и клуба B: $q = (0;\ 0;\ I)$.

Ценой игры – $v = 60$.

ПРИМЕР 2. Исследовать игру, заданную следующей матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Р е ш е н и е. I-я строка доминирует над 2-й и 3-й, так как все ее элементы соответственно не меньше элементов 2-й и 3-й строк. Поэтому стратегии p_2 и p_3 заведомо менее выгодны, чем p_I и могут быть исключены. В результате получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

В этой матрицы I, 4 и 5-й столбцы доминируют над 2-м. Поскольку столбцы характеризуют стратегии игрока B, стремящегося уменьшить выигрыш игрока A, то эти стратегии заведомо невыгодны. После их исключения получаем матрицу $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, в которой нет доминирующих стратегии.

Определив нижнюю и верхнюю цены игры, получаем:

$\alpha_1 = \min\ (6;\ 4) = 4$

$\alpha_2 = \min\ (2;\ 6) = 2$, откуда $\alpha = \max\ (4;\ 2) = 4$

$\beta_1 = \max(6;\ 2) = 6$

$\beta_2 = \max(4;\ 6) = 6$, откуда $\beta = \min(6;\ 6) = 6$

Так как $\alpha \neq \beta$, то игра не имеет седловой точки и ее решением будет смешанная стратегия.

9.2. Графическое решение игр

Задана игра платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix},$$

которую геометрически можно интерпретировать следующим образом. На оси абсцисс, отложив отрезок, равный условно 1, принимаем, что точка X_1 (0; 0) (левый конец установленного отрезка) изображает стратегию первого игрока А, а точка X_2 (1; 0) (правый конец этого же отрезка) изображает стратегию В.

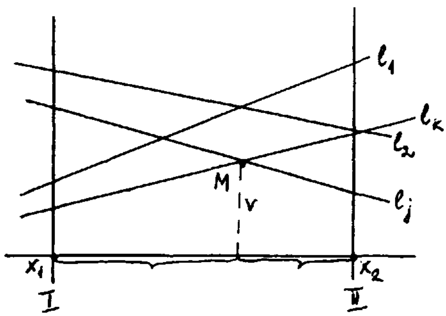


Рис. Геометрическая интерпретация игры размерности $2 \times n$.

Через точки X_1 и X_2 проводят два перпендикуляра, на которых откладывают выигрыши первого игрока при последовательном использовании своих n возможных стратегий вторым игроком.

Стратегии второго игрока $У_1, У_2, \dots, У_n$ будут изображены на графике прямыми $l_1, l_2, \dots l_k$.

Построив нижнюю границу выигрыша (ломаная $l_j M\ l_k$), находим на ней точку M с максимальной ординатой, которая принимается равной цене игры. Абсцисса этой точки обозначается x_2. Зная, что $x_1+x_2 = 1$, легко найти оптимальную стратегию первого игрока.

По чертежу выделяют пару "полезных" стратегии второго игрока, перекасающихся в точке M. Пусть это l_j и l_k.

Учитывая, что

$$a_j y_j + a_k y_k = v$$

$$y_j + y_k = 1$$

находят оптимальную смешанную стратегию второго игрока.

Аналогично решается задача m x2 второго игрока. При этом строится не нижняя граница, а верхняя выигрыша, на которой выбирается точка с минимальной ординатой, являющейся ценой игры.

9.3. Решение матричных игр симплексным методом

Схема решения матричных игр симплексным методом следующая:

1. Составляют пару двойственных задач линейного планирования, эквивалентных заданной матричной игре.

2. Вводят дополнительные обозначения для упрощения записи задач линейного планирования.

3. Решают пару двойственных задач симплексным методом по известному алгоритму.

4. Определяют решение игры.

<u>ПРИМЕР</u>. Решить матричную игру

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Как видно, матрица не имеет седловой точки и, следовательно, игра не имеет решения в чистых стратегиях. Ищем решение в смешанных стратегиях (т.е. определяем, с какой частотой использовать всевозможные стратегии) при помощи модели линейного планирования. Прежде всего прибавляем к элементам по 5 (чтобы в таблице не было отрицательных чисел) и составим модель для игрока В (тогда модель попроще):

A \ B	I	2	3
I	7	2	9
2	2	9	0
3	9	0	II

$$\begin{cases} 7y_I + 2y_2 + 9y_3 \le I \\ 2y_I + 9y_2 \le I \\ 9y_I + IIy_3 \le I \end{cases}$$

$$z = y_I + y_2 + y_3 \longrightarrow \text{мах}$$

Решение по симплексному методу следующее:

I таблица:

	y_I	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_0
z	-I	-I	-I	0	0	0	0
y_4	7	2	9	I	0	0	I
y_5	2	9	0	0	I	0	I
y_6	9	0	II	0	0	I	I

и последняя таблица:

	y_I	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_0
z	0	0	0	0,5	0,I	0,05	0,2
y_3	0	0	I	I,0I25	-0,225	-0,7375	0,05
y_2	0	I	0	0,275	0,05	-0,225	0,I
y_I	I	0	0	I,2375	0,275	I,0I25	0,05

Оптимальное решение: $z_{мах} = 0,2$; $y_I = 0,05$, $y_2 = 0,I$; $y_3 = 0,05$ и решение двойственной задачи $x_I = 0,05$, $x_2 = 0,I$; $x_3 = 0,05$.

Найденная цена игры $v' = \frac{I}{z_{мах}} = 5$ на 5 больше действенной, потому что все элементы увеличены на 5. Двойственная цена $v = 0$.

Смешанную стратегию игрока А получаем из решения двойственной задачи, умножив его на $v' = 5$:

$$p_1 = 0{,}25; \quad p_2 = 0{,}5; \quad p_3 = 0{,}25,$$

а смешанную стратегию игрока В получаем после умножения на 5 из решения исходной задачи:

$$q_1 = 0{,}25; \quad q_2 = 0{,}5; \quad q_3 = 0{,}25.$$

10. БАЛАНСОВАЯ МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВА

Балансовая модель записывается в виде системы уравнений, каждое из которых выражает требование равенства (баланса) между производимым отдельным экономическим объектом количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции.

Впервые балансовые модели начали использоваться в СССР в 20-х годах. В более или менее законченном виде теория балансовых моделей была разработана американским ученым Леонтьевым в середине 30-х годов.

Далее рассматриваем самую простую балансовую модель.

Пусть даны n экономических объектов (т.е. производств, производственных отраслей), причем каждый изготовляет только один вид продукции. Обозначим валовую продукцию i -го отрасля через x_i и нужды j-го отрасли на этот продукт составляют x_{ij}, т.е. x_{ij} - объем продукции i-го отрасля, используемый в производстве j-го отрасля.

Тогда при каждом $i = 1, 2, \ldots, n$

$$y_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \qquad (1)$$

выражает ту часть продукции i -го отрасля, которая остается после удовлетворения внутренних потребностей.

Если при каждом значении i ($i = 1, 2, \ldots, n$) $y_i = 0$, то модель Леонтьева называется закрытой, а если у хотя-бы одного значения i $y_i = 0$, то модель открытая.

Практический модель имеет немножко другой вид.

(2) $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$, т.е. a_{ij} можем интерпретировать как объем продукта i, который расходуется на изготовление единицы j -го продукта. Числа a_{ij} носят название коэффициентов прямых затрат.

Используя коэффициенты a_{ij}, можем уравнение (I) писать в виде:

$$y_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (3)$$

или

$$(E - A)\, x = y, \qquad (3')$$

где E – единичная матрица размерами $n \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Вопрос решается нахождением обратной матрицы, так как

$$x = (E - A)^{-1}\, y \qquad (4)$$

Обозначим обратную матрицу $(E-A)^{-1} = (b_{ij}) = B$ и тогда

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, y_j$$

где b_{ij} – <u>коэффициенты полных затрат</u>.

Величины b_{ij} показывают, сколько всего нужно произвести продукции i-ой отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-ой отрасли. Они включают в себя как прямые, так и косвенные затраты.

В задачах обычно даны: У – вектор конечной продукции,
А – матрица коэффициентов прямых затрат.

Найти: Х – вектор валовых выпусков.

Довольно сложной проблемой при этом является нахождение матрицы полных затрат.

Нахождение обратной матрицы опирается на следующее:

$$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = E$$

т.е. если матрицу умножать слева или справа на ее обратную матрицу, получается единичная матрица.

Это дает возможность применить при этом метод Гаусса. Выписываем в левой части заданную матрицу, а справа – единичную матрицу того же порядка. Последовательные преобразования строк таблицы производим так же, как и при решении уравнений (см. глава II), добиваясь в левой части таблицы образования единичных столбцов. Ключевые элементы нужно выбрать из элементов, лежащие на главном диагонале матрицы, это значит, ключевым является только такой элемент, у которого $i = j$.

ПРИМЕР I. Найти матрицу, обратную к следующей

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & I & 0 \\ I & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Решение:

№ итерации	Матрица A			Матрица E		
Исходные матрицы	-3	2	4	I	0	0
	2	I	0	0	I	0
	I	0	I	0	0	I
I	-7	0	4	I	-2	0
	2	I	0	0	I	0
	I	0	I	0	0	I
II	-II	0	0	I	-2	-4
	2	I	0	0	I	0
	I	0	I	0	0	I
III	I	0	0	$\frac{-I}{II}$	$\frac{2}{II}$	$\frac{4}{II}$
	0	I	0	$\frac{2}{II}$	$\frac{7}{II}$	$\frac{-8}{II}$
	0	0	I	$-\frac{I}{II}$	$-\frac{2}{II}$	$\frac{7}{II}$

Обратная матрица следующая:

$$A^{-I} = \begin{pmatrix} -\frac{I}{II} & \frac{2}{II} & \frac{4}{II} \\ \frac{2}{II} & \frac{7}{II} & -\frac{8}{II} \\ \frac{I}{II} & -\frac{2}{II} & \frac{7}{II} \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 2.

Известны матрица прямых затрат и конечная продукция:

Отрасль	Прямые затраты I	Прямые затраты 2	Конечная продукция
I	0,4	0,5	330
2	0,3	0,2	66

Определить валовые продукции.

Решение.

$$E\text{-}A=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}5 \\ -0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$(E\text{-}A)^{-I}=\left(\begin{array}{cc|cc} 0{,}6 & -0{,}5 & I & 0 \\ -0{,}3 & 0{,}8 & 0 & I \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc} I & \frac{-5}{6} & \frac{I0}{6} & 0 \\ 0 & \frac{II}{20} & \frac{I}{2} & I \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc} I & 0 & \frac{80}{33} & \frac{50}{33} \\ 0 & I & \frac{I0}{II} & \frac{20}{II} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \frac{80}{33} & \frac{50}{33} \\ \frac{I0}{II} & \frac{20}{II} \end{pmatrix}$$

$$X=(E\text{-}A)^{-I}\times У=\begin{pmatrix} \frac{80}{33} & \frac{50}{33} \\ \frac{I0}{II} & \frac{20}{II} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 330 \\ 60 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{80}{33}\cdot 330+\frac{50}{33}\cdot 66 \\ \frac{I0}{II}\cdot 330 \quad \frac{20}{II}\cdot 66 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 900 \\ 420 \end{pmatrix}.$$

Ответ: валовая продукция первой отрасли – 900 единиц, а второй отрасли – 420 единиц.

II. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении систем линейных уравнений применяются разные способы. Для дальнейшего изучения курса нам нужен так называемый метод полного исключения неизвестных или метод последовательных исключений. Называется еще методом Жордана-Гаусса.

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 +\ldots+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +\ldots+ a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + x_{m2}x_2 +\ldots+ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Последовательность решения:

I) Выбирается из системы уравнений (произвольно) <u>ключевое уравнение</u> и в нем <u>ключевое переменное</u>, коэффициент которого называется генеральным (или разрешающим) элементом. Все коэффициенты ключевого уравнения разделим на генеральный элемент. Новым генеральным элементом является <u>единица</u>.

2) В других уравнениях освобождаемся от ключевого переменного (неизвестного) при помощи нового ключевого уравнения: новое ключевое уравнение умножаем на коэффициент выбранного переменного в преобразуемом уравнении и затем вычитаем полученное уравнение от преобразуемого уравнения. В результате освобождаемся от ключевого неизвестного в преобразуемом уравнении. Так сделаются всеми уравнениями системы уравнений.

3) Такие шаги повторяются, пока не будут найдены все переменные, т.е. каждое уравнение и каждое переменное должны быть ключевыми, но только один раз.

<u>ПРИМЕР I</u>.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_I - x_2 + x_3 = 3 \\ x_I + 3x_2 - 2x_3 = I \\ \quad\;\; x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение:
I шаг: Выбираем (выбирается произвольно!) ключевым уравнением второе уравнение и в нем ключевым переменным первое (x_I), так как его коэффициент уже +I. Генеральный элемент обозначим кружком.

Наша цель освободить первое уравнение от неизвестного x_I, т.е. получить коэффициентом x_I в новой записи 0, для этого умножаем второе (ключевое) уравнение на (-2) и складываем с первым:

I. уравнение $2x_I - x_2 + x_3 = 3 \quad x(-2)$ +

2. уравнение $x_I + 3x_2 - 2x_3 = I$

Новое I. уравнение:

$$2x_I - 2x_I - x_2 - 6x_2 + x_3 + 4x_3 = 3-2$$

или

$$0 \times x_I - 7x_2 + 5x_3 = I,$$

новая система:

$$\begin{cases} \quad\;\; - 7x_2 + 5x_3 = I \\ x_I + 3x_2 - 2x_3 = I \\ \quad\;\; x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

(третье просто перепишем, так как не содержит первого переменного).

После первого шага переменное x_I встречается только во втором уравнении.

II шаг: Теперь выбираем ключевым уравнением третье уравнение и в нем ключевым переменным x_2:

$$\begin{cases} \quad\;\; - 7x_2 + 5x_3 = I \\ x_I + 3x_2 - 2x_3 = I \\ \quad\;\; x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Чтобы освободить первое уравнение от x_2, прибавляем к нему ключевое (третье) уравнение, умноженное на +7. Для освобождения второго уравнения от x_2 прибавляем к нему ключевое уравнение, умноженное на (-3):

$$\begin{cases} \qquad\quad 19x_3 = 57 \\ x_1 \qquad - 8x_3 = -23 \\ \quad x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

III шаг. Так как ключевым уравнением еще не было первое уравнение и ключевым переменном не было третье, единственная возможность выбирать x_3 в первом уравнении. При помощи аналигичных действии получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \qquad\quad x_3 = 3 \\ x_1 \qquad\quad = 1 \\ \qquad\quad x_2 = 2, \end{cases}$$

так и получили решение.

При решении систем линейных уравнений может произойти следующее:

1. В процессе исключении левая часть i-го уравнения системы обратилась в нуль, а правая часть равна некоторому числу, отличному от нуля, т.е. образуется равенство $0 = b_i \neq 0$.

Это значит, что система не имеет решений, так как i-му уравнению не могут удовлетворить никакие значения неизвестных.

2. В процессе исключений левая и правая часть i-го уравнения обратились в нуль. Это означает, что i-ое уравнение является линейной комбинацией остальных, ему будет удовлетворять любое найденное решение системы, и поэтому оно может быть отброшено.

3. После того, как все уравнения будут использованы для исключения неизвестных, то либо будет получено решение, либо будет доказано, что система несовместна.

Еще некоторые примеры решения систем линейных уравнений:

ПРИМЕР 1 - см. стр. 84 , получили одно (единственное) решение,

ПРИМЕР 2

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 = -22 \end{cases}$$

Выбираем 2. уравнение ключевым и в нем первое неизвестное (x_1). Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} -10x_2 - 5x_3 = -63 \\ x_1+2x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

Из полученной системы видна, что между I. и 3. уравнениями противоречие (разделив I. уравнение на (-5), получаем:

$$2x_2 + x_3 = \frac{63}{5},$$

а 3. уравнение:

$$2x_2 + x_3 = -4.$$

Если в двух уравнениях левые стороны равны, должны быть равными и правые стороны. А у нас

$$\frac{63}{5} = -4, \text{ т.е. противоречие!}$$

Так и система не имеет решения.

ПРИМЕР 3.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 10 \\ 8x_1 - x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 19 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 10 \\ 14x_1 - 10x_2 = 38 \end{cases}$$

Видно, что I. и 3. уравнение одинаковы, одно из них лишнее.

Удобнее решать задач в виде таблицы, в которую пишем из системы все коэффициенты переменных a_{ij} и свободные члены b_i. Для проверки сделанных решений можем прибавлять контрольный столбец, в который пишем сумму всех чисел в данной строке. Все преобразования сделаем и контрольным столбцом, но сохраняется условие, что в контрольном столбце стоит сумма всех предыдущих чисел этой строки.

ПРИМЕР 4.

$$\begin{cases} 2x_I + x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_I - x_2 - 3x_3 + I3x_4 = 7 \\ x_I + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

Все данные пишем в таблице

x_I	x_2	x_3	x_4	B	K (контрольный столбец)
2	I	I	3	4	9
3	-I	-3	I3	7	I9
I	I	-2	-I	3	2
2	I	-I	3	4	9
5	0	-4	I6	II	28
-I	0	-I	-4	-I	-7
0	I	-3	-5	2	-5
0	0	-9	-4	6	-7
I	0	I	4	I	7
0	I	8,25	0	-5,5	3,75
0	0	2,25	I	-I,5	I,75
I	0	-8	0	7	0

Все уравнения (т.е. строки) уже были ключевыми, но переменное x_3 мы не можем выбирать ключевым, потому что для него не хватает уравнения (каждое уравнение может быть ключевым только один раз).

Обозначим переменное x_3 (называем свободным переменным) через параметр C:

$$\begin{cases} x_2 + 8{,}25\,C = -5{,}5 \\ 2{,}25\,C + x_4 = -I{,}5 \\ x_I - 8\,C = 7 \end{cases}$$

и переносим на правую часть:

$$\begin{cases} x_2 = -5{,}5 - 8{,}25\,C \\ x_4 = -1{,}5 - 2{,}25\,C \\ x_1 = 7 + 8\,C \\ x_3 = C \end{cases}$$ – называется "общее решение"

Конкретные значения параметра (например, $C = 0$; -4; 1; $-2{,}5$ и т.д.) дают нам <u>частные решения</u>.

Если $C = 0$. частное решение следующее:

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -5{,}5 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -1{,}5 \end{cases}$$

УI ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

I. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

I. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 1/2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 3/2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 2 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ -3x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 3/2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 10x_4 = 6 \\ x_1 + x_3 + 10x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$

II. **Решить графически:**

16. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ x_1 - 3x_2 \leqslant 3 \\ 2,5x_1 - 5x_2 \leqslant 10 \\ 13 \leqslant 2x_1 + 5x_2 \leqslant 20 \end{cases}$

$x_1 \geqslant 0$ 1) $F_1 = 2x_1 + 7x_2 \to \max$

$x_2 \geqslant 0$ 2) $F_2 = 2x_1 + x_2 \to \min$

17. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leqslant 5 \\ x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant -4 \\ -x_1 + 4x_2 \geqslant 4 \\ 2 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 6 \end{cases}$

$x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ 1) $F = x_1 + 2x_2 \to \min$

2) $Z = x_1 \to \max$

18. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leqslant 6 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ -5x_1 + 2x_2 \leqslant 10 \\ 4 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 9 \end{cases}$

$x_1 \leqslant 5$

$x_1 \geqslant 0$ 1) $Z_1 = x_1 + x_2 \to \min$

$x_2 \geqslant 0$ 2) $Z_2 = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

19. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geqslant 4 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ 5x_1 + x_2 \geqslant 5 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 3,5 \end{cases}$

$x_2 \geqslant 0$ 2) $C = -x_1 + x_2 \to \min$

20. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ -5x_1 + 2{,}5x_2 \le 10 \\ 3x_1 - x_2 \geq -3 \\ 10 \le 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) $K = x_1 + 2x_2 \to \min$
2) $M = 7x_1 + 2x_2 \to \max$

21. $$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \le 36 \\ 2x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -6 \le -x_1 + x_2 \le 4 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) $F = -x_1 + 3x_2 \to \max$
2) $C = x_1 + x_2 \to \min$

22. $$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 10 \\ 6 \le 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 \geq 0 \\ 0 \le x_2 \le 6 \end{cases}$$

1) $F = 4x_1 + 3x_2 \to \max$
2) $C = 2x_1 + x_2 \to \min$

23. $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ x_2 \le 3 \\ -1 \le x_1 + x_2 \le 4 \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 0 \le x_1 \le 3 \\ 6 \geq x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) $F = -2x_1 + 3x_2 \to \max$
2) $C = 2x_1 + x_2 \to \min$

24. $$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 2x_1 + x_2 \le 19 \\ -1 \le x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 4 \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) $F = +x_1 + 3x_2 \to \max$
2) $C = 2x_1 + x_2 \to \min$

25. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4 \\ 0{,}5 \le x_2 \le 4{,}5 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ 2 \le 2x_1 + x_2 \le 8 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$

1) $Z = -2x_1 + 3{,}5x_2 \to \min$
2) $F = x_1 + x_2 \to \max$

26. $\begin{cases} -1 \le -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge -1 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 2x_1 - x_2 \le 2 \\ 0 \le x_1 \le 3 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$

1) $F = x_2 \to \max$
2) $P = x_1 - x_2 \to \min$

27. $\begin{cases} -x_1 - x_2 \le 4 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ 0 \le x_1 \le 8 \\ x_2 \le 3{,}5 \end{cases}$

1) $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$
2) $Z = 2x_1 + x_2 \to \min$

28. $\begin{cases} -2 \le x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge -2 \\ 2x_1 - x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 0 \le x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$

1) $F = -x_1 + x_2 \to \min$
2) $Z = x_1 \to \max$

29. На заводе изготовляются аппараты T_I и T_2 на станках C_I, C_2 и C_3, которых можно использовать в течении 100, 200 и 300 часов соответственно. Для изготовления аппарата T_I обрабатывают его на станке C_I I час, на C_2 – 3 и на C_3 – 4 часа, аппарата T_2 соответственно 2, 2 и 4 часа.

Найти такой план выпуска аппаратов T_I и T_2, чтобы получить максимальную валовую продукцию. Аппарат T_I стоит 2 руб., аппарат T_2 – 3 руб.

30. Фонды материалов следующие: материала M_I - I00 кг, материала M_2 - I00 кг и материала M_3 - 200 кг, которых используют для изготовления двух видов продуктов. Материалоемкость продукта T_I : 2 кг материала M_I, I кг материала M_2 и 3 кг материала M_3; материалоемкость продукта T_2: I, 2 и 3 кг соответственно. Найти такой план производства, который обеспечил-бы предприятию максимальную прибыль. Получаемые прибыли от I продукта соответственно 20 коп. и 30 коп.

III. Решить симплексным методом:

3I. Найти оптимальный производственный план из условия получения максимума товарной продукции, если продукты 4 видов изготовливаются из материалов: А, П и Т по следующим данным:

Материалы	Фонд материала (кг)	Расход материала на I продукт (кг)			
		I	2	3	4
А	20	2	0	2	I
П	I6	2	I	2	0
Т	30	2	2	3	2
Цена I продукта (руб.)		I0	6	8	6

Составить двойственную задачу, дать экономическую интерпретацию двойственным переменным.

32. Требуется найти оптимальный производственный план выпуска трех видов продуктов, при изготовлении которых используется три вида сырьевых ресурсов А, В и С из условия получения максимума товарной продукции по следующим данным:

Вид сырья	Ресурсы (кг)	Расход на I единицу продукции (кг)		
А	24	2	2	I
В	20	2	-	2
С	I6	2	I	2
Цена I единицы продукции (руб.)		I0	6	8

Составить двойственную задачу, дать экономическую интерпретацию двойственным оценкам.

33. III строительный участок строит дома по 4 типовым проектам, используются материалы M_1, M_2 и M_3, фонды которых соответственно 320, 90 и 150 $м^3$. По первому проекту строят дома, причем расходы материалов соответственно 7, 2 и 4 $м^3$, для домов второго типа - 6, 4 и 4 $м^3$, для домов третьего типа - 8, 4 и 2 $м^3$ и для домов четвертого типа - 12, 6 и 6 $м^3$. По каким проектам и в каком количестве нужно строить дома, чтобы получить наибольшую прибыль, если построение домов по различным типовым проектам дает прибыли соответственно 120, 100, 150 и 180 руб. Составить тоже двойственную задачу, дать экономическую интерпретацию двойственным переменным.

34. Предприятие для изготовления,различных изделий А, В и С использует три вида сырья. На производство единицы изделия А требуется затратить 9 кг сырья первого вида, 4 кг сырья второго вида и 5 кг сырья третьего вида. На производство единицы изделия В требуется затратить сырья первого вида 15 кг, второго вида - 4 кг, третьего вида - 3 кг, а на производство единицы изделия С требуется затратить 12 кг сырья первого вида, 8 кг второго вида и 3 кг сырья третьего вида.

Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 360 кг, сырьем второго вида в количестве 192 кг и сырьем третьего вида в количестве 180 кг.

Стоимость единицы готового изделия А равна 9 рублям, изделия В - 10 рублям и изделия С - 16 рублям.

Требуется составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции была бы наибольшей.

Составить двойственную задачу и дать экономическую интерпретацию двойственным переменным.

35. В предприятии изготовляют продукты T_1, T_2, T_3, T_4 и T_5. Для изготовления используются материалы C_1, C_2 и C_3, фонды которых соответственно 160, 160 и 200 центнеров.Найти

такой план производства, при котором получается наибольшую прибыль. Данные приведены в таблице:

	T_I	T_2	T_3	T_4	T_5
C_I	20	-	20	20	-
C_2	-	20	20	20	20
C_3	20	40	20	-	20
Прибыль (руб.)	40	20	60	-20	40

Составить двойственную задачу, дать экономическую интерпретацию ее решению.

36. Фабрика выпускает следующие товары: диван-кровать, кровать, кресло-кровать.

На производство указанной продукции расходуется остродефицитные материалы: гобелен, поролон, проволока, по которым заводу установлены жесткие лимиты:

Материалы	Виды продукции			Фонд материалов
	диван-кровать	кровать	кресло-кровать	
Поролон (кг)	2	I	3	24000
Гобелен ($м^2$)	4	5	3	30000
Проволока (кг)	7	4	0	I8500
Прибыль (руб.)	I75	I20	I80	

В каком количестве выпускать товаров, чтобы получить наибольшую прибыль.

Дать экономическую интерпретацию двойственным переменным.

37. Предприятие изготовляет 5 видов изделий $T_I \dots T_5$. Изделия обрабатываются на 3 станках А, В и С, причем возможное время их использования соответственно I00, 80 и 80 часов. В таблице приведены данные о нужности станков и получаемая прибыль с I изделия. Найти оптимальный производственный план, который максимизировал бы всю прибыль.

Станки \ Изделие	T_I	T_2	T_3	T_4	T_5
А	I	2	I	-	I
В	I	-	I	I	-
С	-	I	I	I	I
Прибыль (руб.)	2	I	3	I	2

Составить двойственную задачу и интерпретировать её решение.

38. Предприятие изготовляет 4 вида изделий. В таблице указаны ресурсы, их расход на единицу продукции и прибыль с единицы.

	Изделие				Ресурсы
	I	II	III	IУ	
Сырье (кг)	3	5	2	4	6I
Рабочее время (час)	4	2	I	3	56
Станки (час)	2	0	I/2	I	24
Прибыль (руб.)	6	2	3	4	

Используя эти данные, найти оптимальный производственный план, который обеспечил бы предприятию максимальную прибыль. Составить двойственную задачу и дать экономическую интерпретацию её решению.

39. Используя следующие данные найти оптимальный производственный план, который обеспечит наибольшую прибыль.

	Расход ресурсов на I изделие				Объем ресурса
	I	2	3	4	
Сырье (в кг)	3,5	5	2	5	60
Рабочее время (в часах)	2	4	8	4	80
Станки (в часах)	5	7	4	4	70
Прибыль (руб.)	30	25	56	48	

Составить соответствующую двойственную задачу, дать экономическую интерпретацию её переменным.

40. Цех изготовляет 5 видов продуктов $K_I \dots K_5$ из трех материалов M_I, M_2 и M_3, фонды которых I80, I20 и I00 кг соответственно. Найти такой производственный план, при котором получается наибольшая прибыль. Данные приведены в таблице.

	K_I	K_2	K_3	K_4	K_5
M_I	2	I	2	I	I
M_2	-	I	I	I	I
M_3	I	I	I	I	-
Прибыль (руб.)	2	4	-I	3	3

Составить двойственную задачу и дать экономическую интерпретацию её решению.

4I. Найти оптимальный производственный план из условия получения максимума товарной продукции, если продукты 4 видов изготовливаются из материалов: А, П и Т по следующим данным

Материалы	Фонд материала (кг)	Расход материала на I продукт (кг)			
		I	2	3	4
А	20	2	0	2	2
П	I6	2	I	2	0
Т	32	2	2	I	2
Цена I продукта (руб.)		I0	6	8	6

Составить двойственную задачу, дать экономическую интерпретацию двойственным переменным.

42. На предприятии изготовляются 4 вида продукции, причем для изготовления применяется сырье трех видов. Удельные расходы сырья на единицу продукции и запасы указаны в следующей таблице:

Продукция	I	2	3	4	Запасы сырья (кг)	Стоимость I кг сырья (руб.)
I	2	3	I	I	95	I
2	3	I	2	3	I25	2
3	I	3	4	2	I35	3
Прочие расходы на I продукции (в руб.)	2	3	I	I	I05	I

Предприятие продает свою продукцию по ценам, указанным в следующей таблице:

Продукция	I	2	3	4
Цена реализации I продукции	22	23	23	I5

Найти план производства, максимизирующий прибыль предприятия.

Составить двойственную задачу, дать экономическую интерпретацию двойственным переменным.

43. В цехе изготовляются 4 вида продукции, причем применяется 3 вида материалов А, В и С. Продукция реализуется по следующим ценам: I продукт - 22 руб./шт.
II продукт - 23 руб./шт.
III продукт - 23 руб./шт.
IУ продукт - I5 руб./шт.

Все данные указаны в следующей таблице:

Материалы	Расход материала I	II	III	IУ	Фонд материала (кг)	Цена I кг материала (руб.)
А	2	3	I	I	90	I
В	3	I	2	3	I25	2
С	I	3	4	2	I35	3
Прочие расходы на I продукции (руб.)	2	3	I	I	I05	

В каких количествах изготовлять продуктов, чтобы получить наибольшую прибыль. I продукта неразрешено выпускать больше 30 шт..

Составить двойственную задачу, дать экономическую интерпретацию двойственным переменным.

44. Найти оптимальный производственный план из условия получения максимума товарной продукции, если продукты 4 видов изготовливаются из материалов: А, П и Т по следующим данным:

Материалы	Фонд материала (кг)	Расход материала на I продукт (кг)			
		I	2	3	4
А	20	2	0	2	I
П	I6	2	I	2	0
Т	36	2	2	3	2
Цена I продукта (руб.)		I0	6	8	6

Составить двойственную задачу, дать экономическую интерпретацию двойственным переменным.

45. Требуется найти оптимальный производственный план выпуска четырех видов продуктов, при изготовлении которых используется три вида сырьевых ресурсов А, В и С из условия получения максимума товарной продукции по следующим данным:

Вид сырья	Ресурсы (в кг)	Расход на I единицу продукции (кг)			
		I	2	3	4
А	20	I	2	0	2
В	I6	-	2	I	2
С	36	2	2	2	3
Цена I единицы продукции (руб.)		6	I0	6	8

Первого продукта требуется не больше шести. Еще составить двойственную задачу, дать экономическую интерпретацию двойственным оценкам.

IУ. Составить начальную симплексную таблицу:

46. $M = -x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 80 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq 46 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

47. $K = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 41 \\ -x_1 + x_2 = 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

48. $T = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 \geq 6 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

49. $R = x_1 + 2x_3 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 14 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 14x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 25 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

50. $F = 4x_1 - x_2 + 3x_3 \quad \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 146 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 90 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 88 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

51. $P = 4x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + 3x_3 \leq 8 \\ 4x_1 - 2x_2 \geq 5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

52. $Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 90 \\ x_1 + 18x_2 - x_3 \leq 80 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 70 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

53. $F = 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 63 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 27 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 41 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

54. $M = -x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 80 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \geq 46 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

55. $Z = 2x_1 - 3x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 5x_2 + 3x_3 = 64 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 44 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

56. $K = 4x_1 - 8x_2 + 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 42 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 16 \\ -2x_1 + 7x_2 - x_3 \geq 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

57. $F = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 56 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 40 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

58. $Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 18 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 7 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0$$

59. $P = x_1 - x_2 + 2x_3 \to max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 14 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0$$

60. $M = 4x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 15x_2 - 5x_3 \geq 180 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 48 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0$$

V. Допустимый план найти методом минимальной стоимости и найти оптимальный план:

61.

	200	350	100	250	200
400	5	5	3	7	10
400	3	4	2	2	5
500	4	6	5	6	8

62.

	30	125	215	40
133	7	1	4	2
95	3	15	4	5
154	7	10	5	8
28	4	4	11	10

63.

	300	340	360	410
450	3	4	5	16
160	3	2	1	18
520	4	5	2	12

64.

	110	25	95	115
125	4	11	3	1
40	5	6	7	4
45	8	7	6	2
135	14	10	10	21

65.

	300	340	360	100	410	60
170	6	5	8	12	10	7
260	4	1	4	2	8	3
470	2	3	6	6	4	5
600	5	6	6	11	7	5

66.

	45	25	20	30
40	3	8	4	6
40	5	9	8	7
20	4	7	7	6

67.

	100	200	150	180	100
80	5	4	10	8	6
300	7	12	4	6	7
120	3	1	4	7	9
230	12	3	5	9	8

68.

	110	24	96	115
127	4	11	3	1
40	5	6	7	4
45	8	7	6	2
133	14	10	10	21

69.

	30	125	215	40
133	7	1	3	4
95	2	5	7	5
155	3	2	8	8
27	3	4	11	6

70.

	220	350	100	250	200
400	5	9	6	7	4
400	6	8	4	3	5
520	3	4	2	2	5
500	6	9	5	6	6

71.

	10	20	30	40	65
60	7	8	7	8	7
70	3	5	4	6	7
35	4	3	6	5	8

72.

	50	40	30	20
40	1	2	3	4
60	5	1	3	4
40	4	3	1	2

73.

	200	350	100	250	200
400	5	9	6	7	4
400	6	8	4	3	5
500	3	4	2	2	5
500	6	9	5	6	6

74.

	20	25	35	40	30
40	5	10	16	20	17
50	8	2	13	17	12
60	11	15	17	22	23

75. Производственные объемы 3 заводов соответственно $a_I = 460$, $a_2 = 340$, $a_3 = 300$ единиц. Нужды потребителей $в_I = 350$, $в_2 = 200$, $в_3 = 450$, $в_4 = 100$. Затраты на производство единицы продукта в первом заводе $к_I = 9$, во втором - $к_2 = 8$ и в третьем $к_3 = 2$ единицы. Затраты на перевозку единицы в таблице:

	$в_1$	$в_2$	$в_3$	$в_4$
a_1	3	4	6	I
a_2	5	I	2	3
a_3	4	5	8	I

Найти оптимальный план согласования взаимных отношений предприятий и потребителей, который минимизирует производственные и транспортный затраты. Внимание! Задача решается как обычная транспортная задача, причем вместо затраты на перевозку надо писать суммарные затраты, т.е. затраты на перевозку + производственные затраты.

УI. Решить следующие задачи экономического равновесия.

76. Химическое предприятие состоит из двух основных цехов и одного вспомогательного, каждый из которых выпускает один вид продукции. В следующей таблице указаны расходные коэффициенты ("прямые" затраты) a_{ik} единиц продукции i -го цеха, используемые как "сырье" ("промежуточный продукт") для выпуска единицы продукции к-го цеха, а также количество единиц y_i продукции i-го цеха, предназначенных для реализации (конечный продукт).

Цеха	Прямые затраты a_{ik}			Конечный продукт y_i
	I	II	III	
I	0	0,2	0	200
II	0,2	0	0,I	I00
III	0	0,I	0,2	300

Определить:

I) коэффициенты полных затрат;

2) валовый выпуск (план) для каждого цеха.

77. Дана следующая трехотраслевая линейная модель:

Потребление / Производство	Сельское хозяйство	Промышленность	Прочие отрасли	Конечный продукт
I.Сельское хозяйство	I0	60	I5	I5
2.Промышленность	60	I20	I0	II0
3.Прочие отрасли	I0	30	5	5

Определить коэффициенты полных затрат.

78. Дана следующая структурная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,I \\ 0,I & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассчитать коэффициенты полных внутрипроизводственных затрат и валовой выпуск для вектора конечного продукта $У$ = (I00, 500, 200).

79. Рассчитать в условиях задачи 77 полные затраты труда, если коэффициенты прямых затрат труда характеризуются вектор-строкой a_4 = (0,3; 0,2; 0,I5).

80. Рассчитать матрицу коэффициентов полных затрат по следующей структурной матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,I & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,I \\ 0,I & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$$

Найти вектор $У$ при $X = \begin{pmatrix} I20 \\ I00 \\ I80 \end{pmatrix}$.

8I. На плановый год задается матрица коэффициентов прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,09 & 0,08 \\ 0,08 & 0,24 & 0 \\ 0,07 & 0,06 & 0 \end{pmatrix}$$

и вектор конечного продукта

$$У = \begin{pmatrix} 153,4 \\ 17,2 \\ 38,4 \end{pmatrix}$$

Рассчитать матрицу коэффициентов полных затрат и найти вектор валовых выпусков.

82. На плановый период заданы матрица коэффицентов прямых затрат А и вектор конечной продукции У:

$$A = \begin{pmatrix} 0,30 & 0,25 & 0,20 \\ 0,15 & 0,12 & 0,03 \\ 0,10 & 0,05 & 0,08 \end{pmatrix}; \qquad У = \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Рассчитать матрицу полных затрат и плановые объемы валовой продукции.

83. Рассчитать матрицу коэффицентов полных затрат по следующей структурной матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Найти вектор валовой продукции при

$$У = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

84. По заданной матрице трехотраслевой модели

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$$

определить валовой выпуск при конечном выпуске

$$У = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

85. В комбинате производятся каменный уголь, сталь и машины. В таблице прямых затрат указаны взаимосвязи отдельных предприятий. По плану конечный спрос каменного угля 300, стали 200 и машин 300 единиц. Найти матрицу полных затрат и валовую продукцию.

86. В таблице дано распределение общей валовой продукции между тремя отраслями народного хозяйства:

Отрасль	Внутреннее потребление			Валовая продукция
	I	2	3	
I	240	72	I40	800
2	80	264	I80	600
3	0	I20	400	I000

Составить матрицу прямых затрат, найти коэффициенты полных затрат и определить конечный спрос.

87. В следующей таблице дано распределение общей валовой продукции между тремя отраслями:

Отрасль	Внутреннее потребление			Валовая продукция
	I	2	3	
I	0	67,2	32,3	242
2	36,3	67,2	0	336
3	48,4	0	64,6	323

Составить матрицу прямых затрат, найти коэффициенты полных затрат и конечный спрос.

88. Дана матрица прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,15 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}$$

и конечный спрос I50, 2I0 и 240 соответственно. Найти коэффициенты полных затрат, общую валовую продукцию и коэффициент косвенных затрат.

89. В таблице даны коэффициенты прямых затрат в трех отраслях народного хозяйства

Отрасль	I	2	3
I	0,3	0,I2	0,I4
2	0,I	0,46	0,I8
3	0	0,2	0,4

Составить матрицу полных затрат и при помощи ее найти валовую продукцию для выполнения конечного спроса $y_I = 360$, $y_2 = 100$ и $y_3 = 460$.

90. По данным трех отраслей коэффициенты прямых затрат следующие:

$$A = \begin{pmatrix} 0,I & 0,25 & 0,I5 \\ 0,I5 & 0,I & 0,3 \\ 0,05 & 0,I5 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Составить матрицу полных затрат и при помощи ее найти объемы валовой продукции для выполнения конечного спроса $y_I = 130$, $y_2 = 60$ и $y_3 = 160$.

Составитель: асс. Ю.Сикк

Заведующий кафедрой экономической кибернетики и статистики: доц. А.Изотамм

Председатель методической комиссии экономического факультета: доц. Т.Паас

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.
Методический материал и задачи контрольных работ для студентов-заочников III курса специальностей: I729 - экономика торговли и I734 - финансы и кредит.
Составитель Юта Сикк.
На русском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, I8.
Ответственный редактор Х. Калдару.
Подписано к печати 22.09.I986.
Формат 60x84/I6.
Бумага ротаторная.
Машинопись. Ротапринт.
Условно-печатных листов 6,5I.
Учетно-издательских листов 6,II. Печатных листов 7,0.
Тираж 500.
Заказ № 8II.
Цена 20 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.