

TARTU ÜLIKOOL
Matemaatika-informaatikateaduskond
Puhta matemaatika instituut
Matemaatika eriala

INDREK ZOLK

Banachi ruumi kommuteeruv aproksimatsiooniomadus

Magistritöö

Juhendaja: professor Eve Oja

Tartu 2006

Sisukord

<i>Sissejuhatus</i>	3
1 <i>Vajalikud eelteadmised</i>	6
1.1 Minkowski funktsionaal kui norm	6
1.2 Bochneri integraal	12
1.3 Banachi ruumide aproksimatsiooniomadused	19
2 <i>Willise ruum</i>	24
2.1 Willise ruumi konstrueerimine	24
2.2 Willise ruumi kommuteeruv kompaktne aproksimatsiooniomadus	29
3 <i>Godefroy-Saphari teoreemi üldistus</i>	45
3.1 Banachi ruumi omadus $M^*(a, B, c)$	46
3.2 Banachi ruumi $M(a, B, c)$ -võrratus	49
3.3 Banachi ruumi $M(r, s)$ -võrratus	54
3.4 Dixmier' karakteristik	55
3.5 Godefroy-Saphari teoreemi üldistus ja selle tõestus	59
4 <i>Järeldused Godefroy-Saphari teoreemi üldistusest</i>	62
4.1 Radon-Nikodými omadus ja eksponeeritud punktid	62
4.2 Radon-Nikodými omadus ja $M(a, B, c)$ -võrratus	65
4.3 Vahetud järeldused	69
4.4 Radon-Nikodými omadusega seotud järeldus	71
4.5 Järeldused isomorfsete ruumide korral	72
4.6 Ideaalid ja ideaaliprojektorid	73
4.7 Kompaktsete operaatorite ideaalidega seotud järeldused	75
<i>Indeks</i>	78
<i>Summary</i>	80
<i>Kirjandus</i>	81

Sissejuhatus

Prantsuse matemaatiku A. Grothendiecki aproksimatsiooniomaduse-alastest süstemaatilistest uuringutest (1950-ndatest aastatest) alates on välja toodud terve rida erinevaid aproksimatsiooniomadusi (tõkestatud, kommutatiivne tõkestatud, kompaktne jne.) Aproksimatsiooniomadus on sellest ajast peale osutunud oluliseks uurimisobjektiks ja töövahendiks Banachi ruumide teoorias (vt. näiteks P. Casazza hiljutist ülevaateartiklit [2]).

Austraalia matemaatik G. Willis näitas oma 1992. aastal avaldatud artiklis [28], et meetrilisest kompaktsest aproksimatsiooniomadusest ei järeldu aproksimatsiooniomadus: nimelt eksisteerib Banachi ruum W , millel on meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus, kuid ei ole aproksimatsiooniomadust. Käesoleva magistritöö üks põhitulemus on see, et Willise poolt konstrueeritud meetriline kompaktne aproksimeeriv pere ruumis W on kommuteeruv (vt. teoreem 41). Nii siis oleme Willise väidet tugevdanud: kommuteeruvast meetrilisest kompaktsest aproksimatsiooniomadusest ei järeldu aproksimatsiooniomadus.

Oma 1988. aasta artiklis [10] näitasid prantsuse matemaatik G. Godefroy ja iisraeli matemaatik P. D. Saphar, kuidas separaabli Banachi ruumi geomeetriline struktuur, konkreetsemalt, M -ideaaliks olemine oma teises kaasruumis, võimaldab kommuteeruva aproksimatsiooniomaduse „tõsta“ Banachi ruumist tema kaasruumi. Käesoleva töö teine põhitulemus (vt. teoreem 83) on Godefroy ja Saphari tulemuse üldistus mitteseparaablile juhule; üldistatud on ka ruumi M -ideaaliks olemine oma teises kaasruumis.

G. Godefroy ja P. D. Saphar näitasid artiklis [10] ka, kuidas juhul, kui Banachi ruumi (esimesel või teisel) kaasruumil on Radon-Nikodými omadus, saame kaasruumi (kompaktse) aproksimeeriva pere olemasolul järeldada, et nii ruumil kui ka selle kaasruumil on meetriline (kompaktne) aproksimeeriv pere. Seda kasutades saame magistritöö kolmanda põhitulemusena teoreemi 83 ühe rakenduse (vt. teoreem 106), mille kohaselt teoreemi 83 eeldustel on nii vaadeldaval ruumil kui ka selle kaasruumil meetriline (kompaktne) aproksimatsiooniomadus.

Käesolev magistritöö koosneb neljast peatükist.

Esimeses peatükis vaatame läbi vajalikud eelteadmised topoloogilistest vektorruumidest (Minkowski funktsionaal), mõõduteooriast (Bochneri integraal) ning Banachi ruumide teooriast (aproksimatsiooniomadus). Ülikooli põhikursusse kuuluvad mõisted ja tulemused loeme lugejale tuntuks ning kasutame edaspidises ilma täiendavate viideteta. Funktsionaalanalüüsi-alast põhivara võib lugeja leida näiteks õpikust [24] või raamatutest [20], [14] ja [7].

Teises peatükis on üksikasjalikult lahti kirjutatud tõestus G. Willise konstrueeritud ruumi kohta (vt. artikkel [28]), millel ei ole aproksimatsiooniomadust, on aga kommuteeruv meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus.

Kolmandas peatükis vaadeldakse Godefroy ja Saphari poolt 1988. aastal avaldatud (vt. artikkel [10]) teoreemi üldistuseks vajalikke mõisteid ja -tulemusi ning tõestatakse nimetatud teoreemi üldistus.

Neljandas peatükis tuuakse sisse kolmanda peatüki põhiteoreemi rakenduste andmiseks vajalikud mõisted ja tulemused ning tehakse kõnealusest Godefroy-Saphari teoreemi üldistusest mitmesuguseid järeldusi.

Töös kasutatakse järgmisi üldiselt levinud tähistusi.

Arvjada $(r_n) \subset \mathbb{R}$ korral tähistagu $r_n \nearrow r$ ja $r_n \searrow r$ asjaolu, et $r_n \rightarrow r$ ning vastavalt $r_n \leq r_{n+1}$ või $r_n \geq r_{n+1}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Olgu X vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Kui A on ruumis X tegutsev lineaarne operaator, siis tähistame vastavalt ruumi X kujutise operaatori A korral ja operaatori A tuuma järgnevalt:

$$\text{ran } A = \{Ax \in X : x \in X\}, \quad \ker A = \{x \in X : Ax = 0\}.$$

Vektorruumi X suvalise alamhulga Y lineaarset katet tähistame

$$\text{span } Y = \left\{ \sum_{k=1}^n \xi_k y_k : n \in \mathbb{N}, \xi_k \in \mathbb{K}, y_k \in Y, k = 1, \dots, n \right\},$$

kumerat katet tähistame

$$\text{conv } Y = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k : n \in \mathbb{N}, \lambda_k \in \mathbb{K}, y_k \in Y, k = 1, \dots, n, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right\}$$

ning absoluutselt kumerat katet tähistame

$$\begin{aligned} \text{absconv } Y = \\ = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k : n \in \mathbb{N}, \lambda_k \in \mathbb{K}, y_k \in Y, k = 1, \dots, n, \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Kui X on normeeritud ruum, siis sümboolitega B_X ja S_X tähistame vastavalt ruumi X kinnist ühikera ning ühiksfääri, st.

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}, \quad S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

Normeeritud ruumi X suvalise hulga Y korral viime sisse järgmised kirja pilti lihtsustavad tähistused:

$$\overline{\text{span}} Y = \overline{\text{span } Y}, \quad \overline{\text{conv}} Y = \overline{\text{conv } Y}, \quad \overline{\text{absconv}} Y = \overline{\text{absconv } Y}.$$

Ruumi X normi topoloogiast erineva topoloogia kasutamisel kirjutame topoloogia tähise vahetult sulundi märgi kõrvale, näiteks $\overline{\text{span}}^w Y$ jne.

Olgu X ja Y normeeritud ruumid üle korpuse $\mathbb{K}$. Pidevate lineaarsete operaatorite $A : X \rightarrow Y$ normeeritud ruumi tähistame tavapäraselt $\mathcal{L}(X, Y)$ ning kompaktsete lineaarsete operaatorite ruumi $\mathcal{K}(X, Y)$. Olukorras $X = Y$ kirjutame lühemalt vastavalt $\mathcal{L}(X)$ ja $\mathcal{K}(X)$.

Normeeritud ruumi X alamhulga $Y \subset X$ annulaatoriks nimetame hulka

$$Y^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(y) = 0 \ \forall y \in Y\}.$$

Banachi ruumi X loomulikku sisestust oma teise kaasruumi X^{**} tähistame j_X . Teatavasti on $j_X : X \rightarrow j_X(X)$ isomeetiline isomorfism; kirjanduses on tavaline samastada ruumi X element x ruumi X^{**} elemendiga $j_X x$. Käesolevas töös kirjutame vajadusel j_X siiski ilmutatult välja.

PEATÜKK 1

Vajalikud eelteadmised

1.1. Minkowski funktsionaal kui norm

Sellesse jaotisesse koondame edaspidi vajaminevad tulemused Minkowski¹ funktsionaali kohta. Etteruttavalt mainime, et põhiline, mida edasises läheb vaja, on asjaolu, et absoluutselt kumera kompaktse hulga Minkowski funktsionaal on norm, kusjuures ruum selle normi suhtes on Banachi² ruum.

Jaotises tugineme loengukonspektile [17], magistritööle [21] ning raamatule [20].

Definitsioon 1. Vektorruumi X alamhulka U nimetatakse *neelavaks*, kui iga elemendi $x \in X$ korral leidub selline arv $\delta > 0$, et

$$|\mu| \leq \delta \Rightarrow \mu x \in U.$$

Definitsioon 2. Vektorruumi X alamhulka U nimetatakse *tasakaalus* hulgaks, kui

$$|\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda U \subset U.$$

Lause 3. Tasakaalus hulk U vektorruumis X on neelav parajasti siis, kui iga $x \in X$ korral leidub selline arv $\delta > 0$, et $\delta x \in U$.

TÕESTUS. Olgu U tasakaalus hulk vektorruumis X . Oletame, et X on neelav ning fikseerime suvalise $x \in X$. Sel juhul leidub arv $\delta > 0$ nii, et kui $|\mu| \leq \delta$, siis $\mu x \in U$. Muuhulgas siis ka $\delta x \in U$.

¹Hermann Minkowski (1864–1909), saksa matemaatik.

²Stefan Banach (1892–1945), poola matemaatik.

Olgu nüüd tasakaalus hulk U selline, et iga $x \in X$ korral leidub arv $\delta > 0$ nii, et $\delta x \in U$. Fikseerime suvalise $\mu \in \mathbb{K}$, kus $|\mu| \leq \delta$. Siis

$$\mu x = \frac{\mu}{\delta} \delta x \in \frac{\mu}{\delta} U \subset U,$$

kuna $\left| \frac{\mu}{\delta} \right| = \frac{|\mu|}{\delta} \leq 1$ ning U on tasakaalus. Oleme saanud, et U on neelav, nagu soovitud. $\square$

Definitsioon 4. Vektorruumi X alamhulka U nimetatakse *kumeraks*, kui mistahes elementide $x, y \in U$ korral kehtib implikatsioon

$$\lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in U.$$

Geomeetriliselt tähendab hulga U kumerus asjaolu, et koos iga oma kahe punktiga x ja y sisaldab U ka neid punkte ühendava sirglõigu

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Definitsioon 5. Vektorruumi X alamhulka U nimetatakse *absoluutselt kumeraks*, kui U on kumer ja tasakaalus.

Lause 6. Vektorruumi X alamhulk U on absoluutselt kumer parajasti siis, kui $\lambda x + \mu y \in U$ iga elementide paari $x, y \in U$ ja arvude $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ korral, mis rahuldavad tingimust $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

TÕESTUS. Olgu U tasakaalus kumer hulk. Fikseerime vabalt elemendid $x, y \in U$ ja arvud $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ selliselt, et $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Kui üks arvudest λ ja μ on võrdne nulliga, siis järeldub $\lambda x + \mu y \in U$ tänu sellele, et U on tasakaalus. Kui aga mõlemad arvud λ ja μ on nullist erinevad, siis $\frac{\lambda}{|\lambda|}x, \frac{\mu}{|\mu|}y \in U$ tänu sellele, et U on tasakaalus. Lisaks kehtib võrdus

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} = 1,$$

millest hulga U kumeruse tõttu

$$\frac{1}{|\lambda| + |\mu|}(\lambda x + \mu y) = \frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} \frac{\lambda}{|\lambda|} x + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} \frac{\mu}{|\mu|} y \in U.$$

Nüüd seetõttu, et U on tasakaalus ning $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, saame

$$\lambda x + \mu y \in (|\lambda| + |\mu|)U \subset U.$$

Teiselt poolt, kui iga $x, y \in U$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ korral, kus $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, kehtib $\lambda x + \mu y \in U$, siis ka mistahes $\lambda \in [0, 1]$ korral $|\lambda| + |1 - \lambda| = 1$, mis tähendab, et $\lambda x + (1 - \lambda)y \in U$. Järelikult U on kumer. Valides nüüd $\mu = 0$ ja suvalise sellise arvu λ , et $|\lambda| \leq 1$, kehtib mistahes $x \in U$ korral $\lambda x = \lambda x + \mu x \in U$. Seega U on tasakaalus. $\square$

Järeldus 7. Vektorruumi X alamhulk U on absoluutselt kumer parajasti siis, kui $U = \text{absconv } U$.

TÕESTUS. Eeldame, et hulk U on absoluutselt kumer ning näitame, et kehtib võrdus $U = \text{absconv } U$.

Sisalduvuse $U \subset \text{absconv } U$ kehtivus on ilmne. Sisalduvuse $\text{absconv } U \subset U$ näitamiseks paneme kõigepealt tähele, et mistahes arvu $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$, ja elemendi $x \in U$ korral kehtib sisalduvus $\lambda x \in \lambda U \subset U$ hulga U tasakaalus oleku tõttu.

Fikseerime nüüd arvu $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ning eeldame, et mistahes elementide $x_1, \dots, x_{n-1} \in U$ ja arvude $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$, $\sum_{k=1}^{n-1} |\lambda_k| \leq 1$, jaoks

kehtib $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k \in U$. Fikseerime vabalt elemendid $x_1, \dots, x_n \in U$ ning arvud

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ selliselt, et $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq 1$. Juhul, kui $\sum_{k=1}^{n-1} |\lambda_k| = 0$, siis

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \lambda_n x_n \in U$$

seetõttu, et U on tasakaalus hulk. Kui aga $\sum_{k=1}^{n-1} |\lambda_k| > 0$, siis

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|}{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|} x_k + \frac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|} x_n \in U$$

induktsiooni eelduse, lause 6 ning hulga U absoluutse kumeruse tõttu – seetarvis pidasime silmas võrratust

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|}{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|} + \frac{|\lambda_n|}{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|} \leq 1$$

ning

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|} \right| = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} |\lambda_k|}{\sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|} \leq 1.$$

Matemaatilise induktsiooni printsiibi põhjal saame nüüd vajaliku väite mistahes naturaalarvu n jaoks, st. sisalduvuse $\text{absconv } U \subset U$.

Teiselt poolt, kui $U = \text{absconv } U$, siis on lause 6 põhjal hulk U muidugi absoluutselt kumer. $\square$

Lause 8. Iga absoluutselt kumer mittetühi hulk U vektorruumis X on neelav alamruumis $\text{span } U \subset X$.

TÕESTUS. Olgu U mistahes absoluutselt kumer mittetühi hulk vektorruumis X . Veendume, et hulk U on neelav ruumis $\text{span } U$. Valime mistahes elemendi $y \in \text{span } U$. Kuna hulk U on tasakaalus, siis lause 3 põhjal piisab näidata, et leidub arv $\delta > 0$ nii, et $\delta y \in U$. Kui $y = 0$, siis $\delta y = 0 \in U$ koguni mistahes $\delta > 0$ korral, sest $\{0\} = 0U \subset U$ hulga U tasakaalus oleku tõttu. Olgu $y \neq 0$, siis

$$y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{K}, x_k \in U, \sum_{k=1}^n |\lambda_k| > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Tähistame

$$\delta = \frac{1}{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|},$$

siis

$$\delta y = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|} x_k \in U,$$

sest

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|} \right| = \sum_{k=1}^n \frac{|\lambda_k|}{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|} \leq 1$$

ning U on absoluutselt kumer (vt. järeldus 7). $\square$

Järeldus 9. Normeeritud ruumi X ühikera B_X on neelav ruumis X .

TÕESTUS. Fikseerime vabalt elemendid $x, y \in B_X$ ning arvud $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ selliselt, et $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Siis

$$\|\lambda x + \mu y\| \leq |\lambda| \|x\| + |\mu| \|y\| \leq |\lambda| + |\mu| \leq 1,$$

mistõttu $\lambda x + \mu y \in B_X$ ning lause 6 põhjal on B_X on absoluutselt kumer, seega lause 8 põhjal neelav ruumis $\text{span } B_X$.

Kuna mistahes $x \in X$ korral on kaks võimalust: $x = 0 \in B_X$ või $x \neq 0$, millest $x = \|x\| \cdot \frac{1}{\|x\|} x$, kus $\frac{1}{\|x\|} x \in B_X$, siis $X = \text{span } B_X$. $\square$

Definitsioon 10. Olgu U neelav alamhulk vektorruumis X . Funktsionaali $p_U : X \rightarrow \mathbb{R}$, mis on määratud võrdusega

$$p_U(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U\}$$

nimetatakse hulga U *Minkowski funktsionaaliks*.

Minkowski funktsionaali definitsioon on korrektne, sest neelava hulga U korral on garanteeritud sellise arvu $\delta > 0$ leidumine, et $\delta x \in U$, seega $x \in \frac{1}{\delta}U$.

Lause 11. Olgu X vektorruum. Kui neelavate hulkade $A, B \subset X$ korral $A \subset B$, siis

$$p_A(x) \geq p_B(x), \quad x \in X.$$

TÕESTUS. Olgu $x \in X$. Kuna

$$\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} \subset \{\lambda > 0 : x \in \lambda B\},$$

siis

$$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} \geq \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\} = p_B(x).$$

□

Lause 12. Olgu $(X, \|\cdot\|)$ normeeritud ruum ning U ruumi X kinnine tõkestatud absoluutselt kumer mittetühi alamhulk. Siis $(\text{span } U, p_U)$ on normeeritud ruum, kusjuures U on ruumi $(\text{span } U, p_U)$ kinnine ühikera.

TÕESTUS. Hulk U on vektorruumis $\text{span } U$ neelav (vt. lause 8) ning kumer ja tasakaalus (vt. definitsioon 5). On hästi teada (vt. näiteks [24], lk. 107), et niisuguse hulga Minkowski funktsionaal on poolnorm. Seega on p_U poolnorm. Näitame, et p_U on tegelikult norm. Kuna $0 \in \lambda U$ iga suguse $\lambda > 0$ korral, sest neelav hulk sisaldab nullelementi, siis $p_U(0) = \inf\{\lambda : \lambda > 0\} = 0$. Teiselt poolt, kehtigu $p_U(x) = 0$. Hulga U tõkestatuse tõttu leidub arv $M > 0$ selliselt, et $\|x\| \leq M$ iga $x \in U$ korral. Fikseerime vabalt arvu $\varepsilon > 0$. Kuna $p_U(x) = 0$, siis leidub arv $\lambda > 0$, $\lambda < \frac{\varepsilon}{M}$ nii, et $x \in \lambda U$. Nüüd aga

$$\|x\| \leq \lambda M < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

mistõttu $\|x\| = 0$.

Veendume, et U on ruumi $(\text{span } U, p_U)$ kinnine ühikera. Fikseerime elemendi $x \in \text{span } U$ ning näitame, et $p_U(x) \leq 1$ parajasti juhul, kui $x \in U$.

Märgime kõigepealt, et $\{z \in \text{span } U : p_U(z) < 1\} \subset U$. Tõepoolest, kui $p_U(z) < 1$, siis saame leida arvu $\lambda \in (0, 1)$ nii, et $z \in \lambda U$. Kuid $\lambda U \subset U$, sest

hulk U on tasakaalus. Tingimusest $p_U(x) \leq 1$ saame, et suvalise arvu $\mu \in (0, 1)$ korral

$$p_U(\mu x) = \mu p_U(x) \leq \mu < 1,$$

seega $\mu x \in U$. Kuna $\mu x \rightarrow x$, kui $\mu \rightarrow 1-$, siis $x \in \overline{U} = U$, sest hulk U on kinnine.

Teiselt poolt, olgu $x \in U$ suvaline element. Kuna $1x = x \in U$, siis kehtib võrratus $p_U(x) \leq 1$. $\square$

Teoreem 13. Olgu $(X, \|\cdot\|)$ Banachi ruum ning U ruumi X kompaktne absoluutselt kumer mittetühi alamhulk. Siis $(\text{span } U, p_U)$ on Banachi ruum, kusjuures U on ruumis $(\text{span } U, p_U)$ kinnine ühikker.

TÕESTUS. Kõigepealt märgime, et $(\text{span } U, p_U)$ on lause 12 põhjal normeeritud ruum, kusjuures U on ruumi $(\text{span } U, p_U)$ kinnine ühikker.

Veendumaks, et $\text{span } U$ on Banachi ruum, tuleb kontrollida, et temas iga Cauchy jada koondub. (Kasutame selleks raamatus [20], lk. 331, toodud tehnikat.) Oletame vastuväiteliselt, et leidub Cauchy jada $(y_k) \subset \text{span } U$, mis normi p_U suhtes ei koondub. Teadupärast on iga Cauchy jada tõkestatud; olgu siis arv $c > 0$ selline, et $p_U(y_k) \leq c$, $k \in \mathbb{N}$. Nüüd ka jada liikmetega $\bar{y}_k = \frac{y_k}{c} \in U$, $k \in \mathbb{N}$, on Cauchy jada, mis normi p_U suhtes ei koondub.

Osutub, et $(\bar{y}_k)$ on Cauchy jada ka ruumis $(X, \|\cdot\|)$. Tõepoolest, kuna U on tõkestatud hulk, siis $U \subset MB_X$ mingi arvu $M > 0$ korral. Cauchy jadaks olemine ruumis $(\text{span } U, p_U)$ annab, et mistahes arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $k_0 \in \mathbb{N}$ selliselt, et

$$k, l \geq k_0 \Rightarrow p_U(\bar{y}_k - \bar{y}_l) < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Seega kui $k, l \geq k_0$, siis leidub arv $\lambda > 0$, $\lambda < \frac{\varepsilon}{M}$, mille korral

$$\bar{y}_k - \bar{y}_l \in \lambda U \subset \frac{\varepsilon}{M} U \subset \varepsilon B_X.$$

Ruumi X täielikkuse ja hulga U kinnisuse tõttu leidub nüüd element $\bar{y} \in U$ nii, et $\|\bar{y}_k - \bar{y}\| \xrightarrow{k} 0$. Tähistades $w_k = \bar{y}_k - \bar{y}$, $k \in \mathbb{N}$, saame sellise Cauchy jada (w_k) ruumis $(\text{span } U, p_U)$, et $\|w_k\| \xrightarrow{k} 0$. Kuna $p_U(w_k) \not\rightarrow 0$ (vastasel korral oleks jada $(\bar{y}_k)$ ruumis $(\text{span } U, p_U)$ koonduv jada), siis peab leiduma osajada $(w_{k_n}) \subset (w_k)$ ning arv $\delta > 0$ nii, et

$$p_U(w_{k_n}) \geq \delta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tähistades

$$\bar{w}_n = \frac{w_{k_n}}{\delta}, \quad n \in \mathbb{N},$$

saame normi $\|\cdot\|$ suhtes hääbuva Cauchy jada $(\bar{w}_n)$ ruumis $\text{span } U$, sest

$$\bar{w}_m - \bar{w}_n = \frac{1}{\delta} ((\bar{y}_{k_m} - \bar{y}) - (\bar{y}_{k_n} - \bar{y})) = \frac{1}{\delta} (\bar{y}_{k_m} - \bar{y}_{k_n})$$

ning Cauchy jada $(\bar{y}_k)$ osajada $(\bar{y}_{k_n})$ on samuti Cauchy jada. Olgu siis $n_0 \in \mathbb{N}$ indeks, mille korral

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow p_U(\bar{w}_m - \bar{w}_n) < \frac{1}{2}.$$

Siis alumise raja definitsiooni põhjal kehtib eeldusel $n \geq n_0$ ja mingi arvu $\lambda_n < \frac{1}{2}$ korral sisalduvus

$$\bar{w}_{n_0} - \bar{w}_n \in \lambda_n U \subset \frac{1}{2}U.$$

Kuna U on kinnine ja $\|\bar{w}_n\| \xrightarrow{n} 0$, siis saame

$$\bar{w}_{n_0} = \bar{w}_{n_0} - 0 = \bar{w}_{n_0} - \lim_n \bar{w}_n = \lim_n (\bar{w}_{n_0} - \bar{w}_n) \in \frac{1}{2}U.$$

Seega $p_U(\bar{w}_{n_0}) \leq \frac{1}{2} < 1$, mis on aga võimatu, kuna

$$p_U(\bar{w}_{n_0}) = p_U\left(\frac{w_{k_{n_0}}}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta} p_U(w_{k_{n_0}}) \geq \frac{\delta}{\delta} = 1.$$

□

1.2. Bochneri integraal

Jaotise põhieesmärgiks on tuua sisse Bochneri³ integraal ning selle edaspidises vajaminevad omadused. Oma käsitluses tugineme raamatutele [5] ja [26].

Olgu selles jaotises X Banachi ruum ja $\Omega = (\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ lõpliku Lebesgue'i mõõduga ruum, st. Ω on hulk, $\mathfrak{A}$ on hulga Ω alamhulkade σ -algebra ja $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty)$ on täielik σ -aditiivne mõõt. Eeldame seejuures, et $\Omega \in \mathfrak{A}$ ja seega $\mu(\Omega) < \infty$.

³Salomon Bochner (1899–1982), poola matemaatik.

Lebesgue'i integraalteooria põhimõisted ja tulemused loeme tuntuks (vt. näiteks [30]). Kirjutis „funktsioon on integreeruv“ tähendagu selles jaotises ja edaspidi, et „funktsioon on Lebesgue'i mõttes integreeruv“. Muuhulgas kasutame me alljärgnevat Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreemi.

Teoreem 14 (Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreem). *Olgu μ -mõõtuvad funktsioonid $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ja funktsioon $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sellised, et*

- 1) $f_n \xrightarrow[n]{\mu} f$ μ -peaaegu kõikjal;
- 2) leidub integreeruv funktsioon $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ selliselt, et $|f_n| \leq g$ μ -peaaegu kõikjal, $n \in \mathbb{N}$.

Siis on funktsioon f integreeruv, kusjuures

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu.$$

Definitsioon 15. Öeldakse, et $f : \Omega \rightarrow X$ on *lihtne funktsioon*, kui funktsioonil f on lõplik arv erinevaid väärtusi.

Teisisõnu, funktsiooni f nimetatakse lihtsaks, kui leidub hulga Ω tükeldus n paarikaupa lõikumatuks alamhulgaks $E_1, \dots, E_n$ ning elemendid $x_1, \dots, x_n \in X$ selliselt, et $f(\omega) = x_k$, kui $\omega \in E_k$, $k = 1, \dots, n$. Seetõttu võib iga lihtsa funktsiooni f anda tema *kanoonilise esitusena*

$$f = \sum_{k=1}^n \chi_{E_k} x_k,$$

kus χ_E on hulga E karakteristlik funktsioon.

Definitsioon 16. Öeldakse, et $f : \Omega \rightarrow X$ on μ -mõõtuv lihtne funktsioon, kui f on niisugune lihtne funktsioon, mille kanoonilises esituses $f = \sum_{k=1}^n \chi_{E_k} x_k$ kõik hulgad E_k , $k = 1, \dots, n$, on μ -mõõtuvad.

Definitsioon 17. Öeldakse, et funktsioon $f : \Omega \rightarrow X$ on μ -mõõtuv, kui eksisteerib μ -mõõtuvate lihtsate funktsioonide jada (f_n) nii, et $\lim_n \|f_n - f\| = 0$ μ -peaaegu kõikjal⁴.

Lemma 18. *Olgu $f : \Omega \rightarrow X$ μ -mõõtuv funktsioon. Siis funktsioon $\|f\| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on samuti μ -mõõtuv.*

⁴Selles jaotises ning peatükis 2 tähistab funktsioonide $f : \Omega \rightarrow X$ korral kirjutis $\|f\|$ funktsiooni, mis on defineeritud eeskirjaga $\|f\|(\omega) = \|f(\omega)\|$, $\omega \in \Omega$.

TÕESTUS. Olgu $f : \Omega \rightarrow X$ μ -mõõtuv funktsioon, st. leidugu μ -mõõtuvate lihtsate funktsioonide jada (f_n) selliselt, et $\lim_n \|f_n - f\| = 0$ μ -peaaegu kõikjal. Siis $\lim_n |\|f_n\| - \|f\|| = 0$ samuti μ -peaaegu kõikjal, kusjuures $\|f_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, on μ -mõõtuvad lihtsad funktsioonid, kuivõrd kanoonilise esituse $f_n = \sum_{j=1}^k \chi_{E_j} x_j$ korral

$$\|f_n\| = \left\| \sum_{j=1}^k \chi_{E_j} x_j \right\| = \sum_{j=1}^k \chi_{E_j} \|x_j\|.$$

Järelikult on funktsioon $\|f\|$ μ -mõõtuv. □

Definitsioon 19. Olgu $f : \Omega \rightarrow X$ μ -mõõtuv lihtne funktsioon, mille kanooniline esitus on

$$f = \sum_{k=1}^n \chi_{E_k} x_k.$$

Funktsiooni f Bochneri integraal üle μ -mõõtuva alamhulga $E \subset \Omega$ defineeritakse järgmise summana ruumis X :

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^n \mu(E_k \cap E) x_k.$$

Lemma 20. Olgu $f : \Omega \rightarrow X$ μ -mõõtuv lihtne funktsioon. Siis

$$\left\| \int_E f d\mu \right\| \leq \int_E \|f\| d\mu$$

mistahes μ -mõõtuva alamhulga $E \subset \Omega$ korral.

TÕESTUS. Olgu $f = \sum_{k=1}^n \chi_{E_k} x_k$ funktsiooni f kanooniline esitus. Sel juhul

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f d\mu \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^n \mu(E_k \cap E) x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\| \mu(E_k \cap E) = \\ &= \int_E \|f\| d\mu. \end{aligned}$$

□

Definitsioon 21. Öeldakse, et μ -mõõtuv funktsioon $f : \Omega \rightarrow X$ on *Bochneri mõttes integreeruv*, kui leidub μ -mõõtuvate lihtsate funktsioonide jada (f_n) nii, et

$$\lim_n \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

Sellisel juhul on iga $E \in \mathfrak{A}$ korral defineeritud funktsiooni f *Bochneri integraal* $\int_E f d\mu$ võrdusega

$$\int_E f d\mu = \lim_n \int_E f_n d\mu. \quad (1.1)$$

Definitsioon 21 on korrektne, sest piirväärtus (1.1) eksisteerib ja ei sõltu jada (f_n) valikust. Tõepoolest, olgu (f_n) suvaline μ -mõõtuvate lihtsate funktsioonide jada, kusjuures $\lim_n \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu = 0$. Siis

$$0 \leq \int_E \|f_n - f\| d\mu \leq \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu,$$

millest $\lim_n \int_E \|f_n - f\| d\mu = 0$, ning

$$\begin{aligned} \left\| \int_E f_m d\mu - \int_E f_n d\mu \right\| &= \left\| \int_E (f_m - f_n) d\mu \right\| \leq \int_E \|f_m - f_n\| d\mu \leq \\ &\leq \int_E (\|f_m - f\| + \|f - f_n\|) d\mu = \\ &= \int_E \|f_m - f\| d\mu + \int_E \|f - f_n\| d\mu \xrightarrow{m,n} 0, \end{aligned}$$

mis tähendab, et $\left(\int_E f_n d\mu \right)_n$ on ruumis X Cauchy jada, järelikult koonduv jada. Seega piirväärtus (1.1) eksisteerib.

Näitamaks, et piirväärtus (1.1) ei sõltu jada (f_n) valikust, valime jadad (f_n) ja (g_n) selliselt, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|g_n - f\| d\mu = 0. \quad (1.2)$$

Tõestame, et

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_E f_p d\mu = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_E g_q d\mu. \quad (1.3)$$

Selleks fikseerime arvu $\varepsilon > 0$ ning võrduste (1.2) põhjal leiame indeksi $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\begin{aligned} n \geq N &\Rightarrow \int_E \|f_n - g_n\| d\mu \leq \int_E \|f_n - f\| d\mu + \int_E \|f - g_n\| d\mu < \frac{\varepsilon}{3}, \\ n \geq N &\Rightarrow \left\| \int_E f_n d\mu - \lim_{p \rightarrow \infty} \int_E f_p d\mu \right\| < \frac{\varepsilon}{3}, \\ n \geq N &\Rightarrow \left\| \int_E g_n d\mu - \lim_{q \rightarrow \infty} \int_E g_q d\mu \right\| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Me saame juhul $n \geq N$, et

$$\begin{aligned} \left\| \lim_{p \rightarrow \infty} \int_E f_p d\mu - \lim_{q \rightarrow \infty} \int_E g_q d\mu \right\| &\leq \left\| \lim_{p \rightarrow \infty} \int_E f_p d\mu - \int_E f_n d\mu \right\| + \\ &\quad + \left\| \int_E f_n d\mu - \int_E g_n d\mu \right\| + \\ &\quad + \left\| \lim_{q \rightarrow \infty} \int_E g_q d\mu - \int_E g_n d\mu \right\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \int_E \|f_n - g_n\| d\mu + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Oleme niisiis näidanud, et kehtib võrdus (1.3).

Siit järeldub, et definitsioon 21 on korrektne.

Lause 22. Olgu $\lambda \in \mathbb{K}$ suvaline arv. Kui funktsioonid f ja g on Bochneri mõttes integreeruvad, siis ka funktsioon $f + \lambda g$ on Bochneri mõttes integreeruv, kusjuures kehtib võrdus

$$\int_E (f + \lambda g) d\mu = \int_E f d\mu + \lambda \int_E g d\mu$$

mistahes $E \in \mathfrak{A}$ korral.

TÕESTUS. Kehtigu võrdused

$$\lim_n \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0, \quad \lim_n \int_\Omega \|g_n - g\| d\mu = 0,$$

kus (f_n) ja (g_n) on μ -mõõtuvate lihtsate funktsioonide jadad. Sel juhul ka $(f_n + \lambda g_n)$ on μ -mõõtuvate lihtsate funktsioonide jada ning

$$\begin{aligned} \int_\Omega \|(f_n + \lambda g_n) - (f + \lambda g)\| d\mu &\leq \\ &\leq \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu + |\lambda| \int_\Omega \|g_n - g\| d\mu \xrightarrow{n} 0. \end{aligned}$$

Lõpuks, olgu

$$f_n = \sum_{k=1}^n \chi_{E_k^n} x_k^n, \quad g_n = \sum_{k=1}^n \chi_{E_k^n} y_k^n$$

(ühise tükelduse $\{E_k^n : k = 1, \dots, n\}$ eeldamine ei kitsenda üldisust, sest kahe suvalise tükelduse korral saame vaadelda nende tükelduste paarikaupa ühisosasid, mis moodustavad ka tükelduse) funktsioonide f_n ja g_n kanoonilised esitused, $n \in \mathbb{N}$. Siis on

$$\sum_{k=1}^n \chi_{E_k^n} (x_k^n + \lambda y_k^n)$$

funktsiooni $f_n + \lambda g_n$ kanooniline esitus. Järelikult

$$\begin{aligned} \int_E (f + \lambda g) d\mu &= \lim_n \int_E (f_n + \lambda g_n) d\mu = \lim_n \sum_{k=1}^n \mu(E_k^n \cap E) (x_k^n + \lambda y_k^n) = \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^n \mu(E_k^n \cap E) x_k^n + \lambda \lim_n \sum_{k=1}^n \mu(E_k^n \cap E) y_k^n = \\ &= \int_E f d\mu + \lambda \int_E g d\mu \end{aligned}$$

suvalise $E \in \mathfrak{A}$ jaoks. □

Kontrollimaks, kas etteantud μ -mõõtuv funktsioon on Bochneri mõttes integreeruv, saab kasutada järgmist kriteeriumit.

Lause 23 (Bochner). *Kui $f : \Omega \rightarrow X$ on μ -mõõtuv funktsioon, siis f on Bochneri mõttes integreeruv parajasti siis, kui $\|f\|$ on integreeruv.*

TÕESTUS. Olgu μ -mõõtuv funktsioon $f : \Omega \rightarrow X$ Bochneri mõttes integreeruv. Lemma 18 põhjal on $\|f\| : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ samuti μ -mõõtuv funktsioon. Olgu (f_n) μ -mõõtuvate lihtsate funktsioonide jada, mille korral kehtib $\lim_n \int_\Omega \|f_n - f\| = 0$. Kuna funktsioonid $\|f_1\|$ ja $\|f_1 - f\|$ on integreeruvad ning kehtib hinnang

$$\|f\| \leq \|f - f_1\| + \|f_1\|,$$

siis on funktsioon $\|f\|$ integreeruv.

Vastupidi, olgu $\|f\|$ integreeruv, ning olgu (f_n) μ -mõõtuvate lihtsate funktsioonide jada, mis koondub μ -peaaegu kõikjal funktsiooniks f (vt. definitsioon 17). Fikseerime $\delta > 0$ ning tähistame

$$g_n(\omega) = \begin{cases} f_n(\omega), & \text{kui } \|f_n(\omega)\| \leq (1 + \delta)\|f(\omega)\|, \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases}$$

Funktsioonid g_n on μ -mõõtuvad lihtsad funktsioonid (peame silmas, et hulk $\{\omega \in \Omega : \|f_n(\omega)\| - (1 + \delta)\|f(\omega)\| \leq 0\}$, $n \in \mathbb{N}$, on funktsioonide $\|f\|$ ja $\|f_n\|$ μ -mõõtuvuse tõttu μ -mõõtuv), kusjuures $\|g_n - f\| \xrightarrow{n} 0$ μ -peaaegu kõikjal. Tõepoolest, iga $\omega \in \Omega$ korral, mille jaoks kehtib koondumine $\|(f_n - f)(\omega)\| \xrightarrow{n} 0$ ning samas $\|f(\omega)\| > 0$, leidub selline n_0 , et kui $n \geq n_0$, siis

$$\|f_n(\omega)\| - \|f(\omega)\| \leq \|\|f_n(\omega)\| - \|f(\omega)\|\| \leq \|(f_n - f)(\omega)\| < \delta\|f(\omega)\|.$$

Seega $g_n(\omega) = f_n(\omega)$, kui $n \geq n_0$, ning järelikult eeldusel $n \geq n_0$ kehtib koondumine

$$\|(g_n - f)(\omega)\| = \|(f_n - f)(\omega)\| \xrightarrow{n} 0.$$

Lisaks sellele

$$\|g_n - f\| \leq \|g_n\| + \|f\| \leq (2 + \delta)\|f\|,$$

kusjuures $(2 + \delta)\|f\|$ on integreeruv, mistõttu Lebesgue'i tõkestatud koonduvuse teoreemi (vt. teoreem 14) kohaselt kehtib $\int_{\Omega} \|g_n - f\| d\mu \xrightarrow{n} 0$. $\square$

Järeldus 24. Kui $f : \Omega \rightarrow X$ on Bochneri mõttes integreeruv funktsioon, siis

$$\left\| \int_{\Omega} f d\mu \right\| \leq \int_{\Omega} \|f\| d\mu.$$

TÕESTUS. Olgu (f_n) μ -mõõtuvate lihtsate funktsioonide jada integreeruvuse definitsioonist 21. Siis kehtib

$$\int_{\Omega} \|\|f_n\| - \|f\|\| d\mu \leq \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu \xrightarrow{n} 0,$$

kusjuures lemma 20 põhjal

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Omega} f d\mu \right\| &= \left\| \lim_n \int_{\Omega} f_n d\mu \right\| = \lim_n \left\| \int_{\Omega} f_n d\mu \right\| \leq \\ &\leq \lim_n \int_{\Omega} \|f_n\| d\mu = \int_{\Omega} \|f\| d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

Näitame veel, et pideva lineaarse operaatoriga võib minna Bochneri integraali märgi alla.

Lause 25. Olgu $f : \Omega \rightarrow X$ Bochneri mõttes integreeruv funktsioon. Kui $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, siis funktsioon $Tf : \Omega \rightarrow Y$ on Bochneri mõttes integreeruv ning kehtib võrdus

$$\int_{\Omega} Tf \, d\mu = T \left(\int_{\Omega} f \, d\mu \right).$$

TÕESTUS. Olgu (f_n) μ -mõõtuvate lihtsate funktsioonide jada, mis koondub μ -peaaegu kõikjal funktsiooniks f , kusjuures $\lim_n \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu$. Siis on (Tf_n) samuti μ -mõõtuvate lihtsate funktsioonide jada, kusjuures

$$\|Tf_n - Tf\| \leq \|T\| \|f_n - f\| \xrightarrow{n} 0$$

μ -peaaegu kõikjal. Seega on funktsioon Tf μ -mõõtuv. Lisaks sellele kehtivad operaatori T lineaarsuse tõttu võrdused

$$\int_{\Omega} Tf_n \, d\mu = T \left(\int_{\Omega} f_n \, d\mu \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kuna funktsioon $\|Tf_n - Tf\|$ on integreeruv iga $n \in \mathbb{N}$ korral (kasutasime hinnangut $\|Tf_n - Tf\| \leq \|T\| \|f_n - f\|$ ja funktsiooni $\|f_n - f\|$ integreeruvust) ja

$$\int_{\Omega} \|Tf_n - Tf\| \, d\mu \leq \int_{\Omega} \|T\| \|f_n - f\| \, d\mu = \|T\| \int_{\Omega} \|f_n - f\| \, d\mu \xrightarrow{n} 0,$$

siis Tf on Bochneri mõttes integreeruv ning

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Tf \, d\mu &= \lim_n \int_{\Omega} Tf_n \, d\mu = \lim_n T \left(\int_{\Omega} f_n \, d\mu \right) = \\ &= T \left(\lim_n \int_{\Omega} f_n \, d\mu \right) = T \left(\int_{\Omega} f \, d\mu \right). \end{aligned}$$

□

1.3. Banachi ruumide aproksimatsiooniomadused

Selles jaotises toome sisse klassikalised aproksimatsiooniomadused. Oma käsitluses tugineme peaaesjalikult Casazza⁵ ülevaateartiklile [2].

Definitsioon 26. Öeldakse, et Banachi ruumil X on aproksimatsiooniomadus (kompaktne aproksimatsiooniomadus), kui mistahes kompaktse hulga $K \subset X$

⁵Peter G. Casazza (1944), ameerika matemaatik.

ja mistahes arvu $\varepsilon > 0$ jaoks leidub pidev lõplikumõõtmeline operaator (kompaktne operaator) T nii, et $\|x - Tx\| < \varepsilon$, kus $x \in K$ on suvaline element.

Kui leidub arv $\lambda \geq 1$ nii, et operaatorit T saab valida selliselt, et $\|T\| \leq \lambda$, siis öeldakse, et ruumil X on λ -tõkestatud (kompaktne) aproksimatsiooniomadus. Kui tõkke väärtust rõhutada ei soovita, öeldakse lihtsalt *tõkestatud (kompaktne) aproksimatsiooniomadus*.

Kui $\lambda = 1$, siis öeldakse, et ruumil X on *meetiline (kompaktne) aproksimatsiooniomadus*.

Saab näidata (tõkestatud aproksimatsiooniomaduse juhul on detailne tõestus toodud näiteks bakalaureusetöös [31] ning tõkestatud kompaktse aproksimatsiooniomaduse korral on tõestus analoogiline), et kehtib

Teoreem 27. Olgu X Banachi ruum ning $\lambda \geq 1$. Järgmised tingimused on samaväärsed.

- (i) Ruumil X on λ -tõkestatud (kompaktne) aproksimatsiooniomadus.
- (ii) Leidub pidevate lõplikumõõtmeliste operaatorite (kompaktsete operaatorite) pere (T_ν) nii, et $\|T_\nu\| \leq \lambda$ ning $T_\nu x \xrightarrow{\nu} x$ iga $x \in X$ korral.

Separaabli Banachi ruumi X korral on võimalik tõestada teoreemi 27 jadaline variant.

Kuivõrd teoreemi 27 väites esinev samaväärne tingimus (ii) sisuliselt defineerib ruumi X tõkestatud (kompaktse) aproksimatsiooniomaduse, on kasulik järgmine

Definitsioon 28. Olgu X Banachi ruum. Pidevate lõplikumõõtmeliste operaatorite (Kompaktsete operaatorite) peret (T_ν) nimetatakse (kompaktseks) aproksimeerivaks pereks, kui ta koondub punktiivisi ühikoperaatoriks, st. $T_\nu x \xrightarrow{\nu} x$ iga $x \in X$ korral. Kui operaatorite T_ν normid on ülalt tõkestatud arvuga $\lambda \geq 1$ või $\lambda = 1$, nimetatakse vastavat operaatorite peret λ -tõkestatud või meetriliseks (kompaktseks) aproksimeerivaks pereks.

Separaabli ruumi X korral on võimalik teoreemi 27 jadalisele analoogile tuginedes definitsioon 28 kirjutada ümber jadalisele kujule. Sel juhul räägitakse *aproksimeerivast jadast*.

Definitsioon 29. Olgu X Banachi ruum. Öeldakse, et ruumi X (kompaktne) aproksimeeriv pere (T_ν) on *pingul*, kui selle kaasoperaatorite pere koondub ka punktiivisi ühikoperaatoriks, st. $T_\nu^* x^* \xrightarrow{\nu} x^*$ iga $x^* \in X^*$ korral.

Järgmine teoreem on tõestatud näiteks raamatus [5], lk. 247.

Teoreem 30 (Grothendieck⁶). Olgu X Banachi ruum, mille kaasruum X^* on

⁶Alexander Grothendieck (1928), prantsuse matemaatik.

separaabel. Siis ruumil X^* on aproksimatsiooniomadus parajasti siis, kui ruumil X^* on meetriline aproksimatsiooniomadus.

Järgnev on klassikaline tulemus aproksimatsiooniomaduste valdkonnast. Tõestuse võib leida näiteks raamatust [5], lk. 244.

Teoreem 31 (Grothendieck). Kui Banachi ruumi X kaasruumil X^* on meetriline aproksimatsiooniomadus, siis ka ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus.

Definitsioon 32. Öeldakse, et Banachi ruumil X on λ -kommuteeruv tõkestatud (kompaktne) aproksimatsiooniomadus, kui ruumil X leidub pidevate lõplikumõõtmeliste operaatorite (kompaktsete operaatorite) pere (T_ν) nii, et

- (i) $\limsup_{\nu} \|T_\nu\| \leq \lambda$,
- (ii) $T_\nu x \xrightarrow{\nu} x$ iga $x \in X$ korral,
- (iii) $T_\nu T_\mu = T_\mu T_\nu$ iga ν ja μ korral.

Vastavat operaatorite peret (T_ν) nimetatakse λ -kommuteeruvaks tõkestatud (kompaktseks) aproksimeerivaks pereks.

Öeldakse, et Banachi ruumil X on kommuteeruv tõkestatud (kompaktne) aproksimatsiooniomadus, kui ruumil X on λ -kommuteeruv tõkestatud (kompaktne) aproksimatsiooniomadus mingi $\lambda \geq 1$ korral. Öeldakse, et Banachi ruumil X on kommuteeruv meetriline (kompaktne) aproksimatsiooniomadus, kui ruumil X on 1-kommuteeruv tõkestatud (kompaktne) aproksimatsiooniomadus. Vastava operaatorite pere kohta öeldakse siis kommuteeruv tõkestatud (kompaktne) aproksimeeriv pere ning kommuteeruv meetriline (kompaktne) aproksimeeriv pere.

Separaabli ruumi X korral on võimalik definitsioon 32 kirjutada ümber jadalisele kujule.

Eestikeelse terminoloogia juurutamise huvides paneme tabelis 1.1 kirja üldlevinud ingliskeelsed terminid aproksimatsiooniomaduste kohta koos eestikeelsete vastete ning lühenditega.

Järgnev teoreem on tõestatud Casazza ja Kaltoni⁷ 1990. a. artiklis [3].

Teoreem 33 (Casazza, Kalton). Kui X on separabel Banachi ruum, millel on meetriline aproksimatsiooniomadus, siis ruumil X on kommuteeruv meetriline aproksimatsiooniomadus.

⁷Nigel John Kalton (1946), ameerika matemaatik.

Eesti keeles	Inglise keeles	Lühend
kompaktne aproksimatsiooniomadus	<i>compact approximation property</i>	CAP
aproksimatsiooniomadus	<i>approximation property</i>	AP
tõkestatud kompaktne aproksimatsiooniomadus	<i>bounded compact approximation property</i>	BCAP
tõkestatud aproksimatsiooniomadus	<i>bounded approximation property</i>	BAP
meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus	<i>metric compact approximation property</i>	MCAP
meetriline aproksimatsiooniomadus	<i>metric approximation property</i>	MAP
kommuteeruv tõkestatud aproksimatsiooniomadus	<i>commuting bounded approximation property</i>	CBAP
kommuteeruv meetriline aproksimatsiooniomadus	<i>commuting metric approximation property</i>	CMA
aproksimeeriv pere / jada	<i>approximation of the identity</i>	AI
kompaktne aproksimeeriv pere / jada	<i>compact approximation of the identity</i>	CAI
meetriline kompaktne aproksimeeriv pere / jada	<i>metric compact approximation of the identity</i>	MCAI
meetriline aproksimeeriv pere / jada	<i>metric approximation of the identity</i>	MAI

Tabel 1.1: Aproksimatsiooniomadustega seonduvad nimetused ja lühendid

Prantsuse matemaatiku Grothendiecki aproksimatsiooniomaduse-alastest süstemaatilistest uuringutest (1950-ndatest aastatest) alates oli lahtiseks küsimuseks, kas igal Banachi ruumil on aproksimatsiooniomadus. Näiteks kõigil klassikalistel jadaruumidel c_0 , c , ℓ_p ($1 \leq p \leq \infty$) ning funktsiooniruumidel $C[a, b]$, $L_p(a, b)$ ($1 \leq p < \infty$) on aproksimatsiooniomadus.

Seega ei ole imekspandav, et järgnev teoreem osutus versta-postiks aproksimatsiooniomaduste teoorias, tulemuse tõestas Enflo⁸ 1972. aastal (vt. 1973. aastal avaldatud artiklit [6]). Ka Willise ruumi konstrueerimisel (vt. peatükk 2) on Enflo teoreem lähtepunktiks.

Teoreem 34 (Enflo). *Leidub Banachi ruum, millel ei ole aproksimatsiooniomadust.*

Juba kümme aasta järel leiti ilma aproksimatsiooniomaduseta Banachi ruume mitmeid, muuhulgas alamruumidena ruumides c_0 , ℓ_p , $1 \leq p < 2$ või $2 < p$ (vt. näiteks Casazza ülevaateartiklit [2]).

Kompaktsete aproksimatsiooniomaduste vallas pole suudetud tõestada ega ümber lükata mitmeid aproksimatsiooniomaduste vallas kehtivaid (klassikalisi) tulemusi, muuhulgas ka teoreeme 30 ja 33.

Täpsemalt, üldisel (ja ka separaablil) juhul on lahtiseks probleemiks, kas sellest, et kaasruumil X^* on kompaktne aproksimatsiooniomadus, järeldeb, et ruumil X^* on ka meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus.

Samuti pole selge, kas sellest, et (separaablil) ruumil X on meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus, järeldeb, et ruumil X on ka kommuteeruv meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus.

Samas, Godefroy-Saphari teoreem artiklist [10] (vt. teoreem 101) on näide tulemusest, mida õnnestub pidevate lõplikumõõtmeliste operaatorite juhult üldistada kompaktsetele operaatoritele (vt. teoreem 83).

⁸Per Enflo (1944), rootsi matemaatik.

PEATÜKK 2

Willise ruum

Käesolevas peatükis esitame üksikasjalikult lahtikirjutatud tõestuse tõsiasjale, et leidub Banachi ruum, millel on meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus, aga millel ei ole aproksimatsiooniomadust. Nimetatud tulemuse avaldas Willis¹ 1991. aastal artiklis [28]. Lisaks tõestame selles peatükis ka, et Willise poolt konstrueeritud aproksimeeriva pere liikmed kommuteeruvad. Seega on Willise ruumil koguni kommuteeruv meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus.

2.1. Willise ruumi konstrueerimine

Selle jaotise eesmärgiks on konstrueerida Willise ruum W , millel ei ole aproksimatsiooniomadust, on aga kommuteeruv meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus.

Olgu X mistahes selline Banachi ruum üle korpuse $\mathbb{K}$, millel ei ole aproksimatsiooniomadust (vt. teoreem 34). Valime suvaliselt jada $(x_k) \subset X$, mis rahuldab nõudeid $\|x_k\| \leq 1$ ja $\|x_k\| \searrow 0$. (Selline jada kindlasti leidub, näiteks võime valida $x \in X$, $x \neq 0$, ning seejärel

$$x_k = \frac{x}{k\|x\|}.)$$

Iga $t \in (0, 1)$ korral tähistame $U_t = \overline{\text{absconv}} \left\{ \frac{x_k}{\|x_k\|^t} : k \in \mathbb{N} \right\}$.

¹George Alver Willis (1954), austraalia matemaatik.

Lemma 35. *Hulk U_t on kompaktne, kusjuures mistahes arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub hulgal U_t lõplik ε -võrk, mis avaldub kujul*

$$\mathcal{K} = \left\{ \sum_{k=1}^N q_{i_k} \frac{x_k}{\|x_k\|^t} : 1 \leq i_k \leq K \right\},$$

kus $\{q_j : 1 \leq j \leq K\} \subset B_{\mathbb{K}}$ on arvust ε sõltuv arvude lõplik hulk.

TÕESTUS. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$ ning näitame, et hulgal U_t leidub nõutav lõplik ε -võrk. Koondumise $x_k \xrightarrow[k]{} 0$ tõttu leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ selliselt, et

$$k \geq N \Rightarrow \left\| \frac{x_k}{\|x_k\|^t} \right\| = \|x_k\|^{1-t} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ühikera $B_{\mathbb{K}}$ on kompaktne, seega leidub tal lõplik $\frac{\varepsilon}{3N}$ -võrk. Niisiis leidub selline hulk $\{q_1, \dots, q_K\}$, et mistahes $\lambda \in B_{\mathbb{K}}$ korral saame leida q_i nii, et $|\lambda - q_i| < \frac{\varepsilon}{3N}$.

Lõplike lineaarkombinatsioonide hulk

$$\mathcal{K} = \left\{ \sum_{k=1}^N q_{i_k} \frac{x_k}{\|x_k\|^t} : 1 \leq i_k \leq K \right\}$$

on ilmselt lõplik.

Iga elemendi $x \in U_t$ korral saame sulundipunkti kirjelduse kohaselt leida elemendi $x' = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{x_k}{\|x_k\|^t}$, kus $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq 1$, nii, et $\|x - x'\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $n \geq N$ (vajadusel kirjutame juurde sobiva arvu nulliga võrdseid kordajaid).

Tähistame $x'' = \sum_{k=1}^N \lambda_k \frac{x_k}{\|x_k\|^t}$. Me saame

$$\begin{aligned} \|x' - x''\| &= \left\| \sum_{k=N+1}^n \lambda_k \frac{x_k}{\|x_k\|^t} \right\| \leq \sum_{k=N+1}^n |\lambda_k| \left\| \frac{x_k}{\|x_k\|^t} \right\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \cdot \sum_{k=N+1}^n |\lambda_k| \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Elemendi x' kordajatele $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ leiame lähendid $q_{i_1}, \dots, q_{i_N}$ selliselt, et $|\lambda_k - q_{i_k}| < \frac{\varepsilon}{3N}$ iga $1 \leq k \leq N$ korral. Tähistades

$$x''' = \sum_{k=1}^N q_{i_k} \frac{x_k}{\|x_k\|^t},$$

kehtib $x''' \in \mathcal{K}$ ning

$$\|x'' - x'''\| \leq \sum_{k=1}^N |q_{i_k} - \lambda_k| \cdot \left\| \frac{x_k}{\|x_k\|^t} \right\| < \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{3N} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kokkuvõttes

$$\|x - x'''\| \leq \|x - x'\| + \|x' - x''\| + \|x'' - x'''\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Hausdorffi teoreemi kasutades järeldame siit, et U_t on kompaktne. $\square$

MÄRKUS. Hulga U_t kompaktsust saab Mazuri teoreemi (vt. näiteks [29], lk. 451, teoreem 6 ja selle tõestus) põhjal näidata ka vahetult, kasutades asjaolu, et hulk

$$\left\{ \frac{x_k}{\|x_k\|^t} : k \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

on kompaktne.

Lemma 36. *Hulk U_t on absoluutselt kumer.*

TÕESTUS. Kuna absoluutselt kumera hulga sulund on absoluutselt kumer, siis U_t on absoluutselt kumer. $\square$

Lemma 37. *Kui $s < t < 1$, siis $U_s \subset U_t \subset B_X$.*

TÕESTUS. Olgu $s < t$. Sisalduvuse $U_s \subset U_t$ näitamiseks piisab sulundi mono-
toonsuse tõttu tõestada sisalduvus

$$\text{absconv} \left\{ \frac{x_k}{\|x_k\|^s} : k \in \mathbb{N} \right\} \subset \text{absconv} \left\{ \frac{x_k}{\|x_k\|^t} : k \in \mathbb{N} \right\}. \quad (2.1)$$

Sisalduvuse (2.1) tõestamiseks piisab omakorda näidata, et

$$\frac{x_k}{\|x_k\|^s} \in \text{absconv} \left\{ \frac{x_k}{\|x_k\|^t} : k \in \mathbb{N} \right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

See on ilmne, sest

$$\frac{x_k}{\|x_k\|^s} = \|x_k\|^{t-s} \frac{x_k}{\|x_k\|^t},$$

kusjuures $\|x_k\|^{t-s} \in (0, 1]$ võrratuste $\|x_k\| \leq 1$ ning $t - s > 0$ tõttu.

Sisalduvuse $U_t \subset B_X$ näitamiseks märgime, et $\left\| \frac{x_k}{\|x_k\|^t} \right\| \leq 1$, millest $\frac{x_k}{\|x_k\|^t} \in B_X$. Nüüd

$$U_t = \overline{\text{absconv}} \left\{ \frac{x_k}{\|x_k\|^t} : k \in \mathbb{N} \right\} \subset \overline{\text{absconv}} B_X = B_X.$$

□

Tähistame

$$Y_t = \text{span } U_t$$

ning defineerime normi ruumis Y_t Minkowski funktsionaali abil:

$$\|x\|_t = p_{U_t}(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U_t\},$$

kus $x \in Y_t$. Teoreemi 13 kohaselt on $(Y_t, \|\cdot\|_t)$ Banachi ruum, kusjuures U_t on ruumi $(Y_t, \|\cdot\|_t)$ kinnine ühikker.

Kuna juhul $s < t$ on ühikkerade vahel sisalduvus $U_s \subset U_t \subset B_X$, siis ka $Y_s \subset Y_t \subset X$, sest iga nullist erineva $y \in Y_s$ korral $\frac{y}{\|y\|_s} \in U_s \subset U_t \subset B_X$. Lause 11 abil järeldub siit ka ahelvõrratus

$$\|y\| \leq \|y\|_t \leq \|y\|_s$$

iga $y \in Y_s$ korral.

Lemma 38. Olgu $L_t : Y_t \rightarrow X$ loomulik sisestus. Siis L_t on kompaktne operaator, kusjuures $\|L_t\| \leq 1$.

TÕESTUS. Operaator L_t on kompaktne, sest $L_t(U_t) = U_t$ on ruumis X kompaktne, seega suhteliselt kompaktne.

Lemmas 37 saadud sisalduvusest $U_t \subset B_X$ järeldub

$$\|L_t\| = \sup_{x \in U_t} \|L_t x\| \leq \sup_{x \in B_X} \|x\| = 1.$$

□

Jaotise lõpuni toimub nüüd vahemikust $(0, 1)$ ruumi X kujutavate funktsioonide ruumi konstrueerimine. Iga vahemiku $(s, t) \subset (0, 1)$ ja elemendi $y \in Y_s$ jaoks olgu $y\chi_{(s,t)} : (0, 1) \rightarrow X$ selline funktsioon, kus

$$y\chi_{(s,t)}(r) = \begin{cases} y, & r \in (s, t), \\ 0, & r \notin (s, t). \end{cases}$$

Tähistame

$$\mathcal{W} = \text{span} \left\{ y\chi_{(s,t)} : 0 < s < t < 1, y \in Y_s \right\}.$$

Kui $f \in \mathcal{W}$, siis $f = \sum_{k=1}^n y_k \chi_{(s_k, t_k)}$ ning iga $r \in (0, 1)$ korral

$$y_k \chi_{(s_k, t_k)}(r) = \begin{cases} y_k, & r \in (s_k, t_k) \\ 0, & r \notin (s_k, t_k) \end{cases} \in Y_{s_k} \subset Y_r.$$

Kuna Y_r on liitmise suhtes kinnine, siis $f(r) \in Y_r$. Defineerime kujutuse $\|\cdot\| : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ võrdusega

$$\|f\| = \int_0^1 \|f(r)\|_r dr,$$

kus $f \in \mathcal{W}$.

Üldisust kitsendamata võime sisalduvuse $Y_s \subset Y_t$, kui $s < t$ (vt. lemma 37), põhjal eeldada, et $f \in \mathcal{W}$ on kujul

$$f = \sum_{k=1}^n y_k \chi_{(s_k, t_k)}, \quad 0 < s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n < 1, \\ y_k \in Y_{s_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Lemma 39. *Ruum $(\mathcal{W}, \|\cdot\|)$ on normeeritud ruum.*

TÕESTUS. Norm $\|\cdot\|$ on korrektselt defineeritud, sest võime avaldada mistahes

$$f = \sum_{k=1}^n y_k \chi_{(s_k, t_k)} \in \mathcal{W} \text{ korral}$$

$$\|f(r)\|_r = \sum_{k=1}^n \|y_k \chi_{(s_k, t_k)}\|_r.$$

Implikatsiooni

$$s < t \Rightarrow \|y_k\|_t \leq \|y_k\|_s$$

põhjal on funktsioon $\alpha_{y_k}(r) = \|y_k\|_r$ vahemikus (s_k, t_k) monotoonselt kahanev, $k = 1, \dots, n$, järelikult (Riemanni mõttes, seega ka Lebesgue'i mõttes) integreeruv. Niisiis eksisteerib ka integraal

$$\int_0^1 \|f\|_r dr = \sum_{k=1}^n \int_{s_k}^{t_k} \|y_k\|_r dr.$$

Võrdus $\|f\| = 0$ kehtib parajasti siis, kui punktihulga $\{r : \|f(r)\|_r > 0\}$ mõõt on 0. See tähendab, et $f = 0$ μ -peaaegu kõikjal. Integraali omaduste ja kujutuse $\|\cdot\|_t$ normiks olemise tõttu on homogeensus ja kolmnurga võrratus vahetult kontrollitavad. $\square$

Tähistame nüüd tähega W ruumi $\mathcal{W}$ täieldi. Ruumi W nimetame edaspidises ka *Willise ruumiks*.

Artiklis [28] on tõestatud ruumi W kohta järgmine teoreem.

Teoreem 40. *Ruumil W ei ole aproksimatsiooniomadust.*

2.2. Willise ruumi kommuteeruv kompaktne aproksimatsiooniomadus

Selles jaotises on meie eesmärgiks tõestada järgmine teoreem 41. Artiklis [28] on tõestatud see teoreem ilma väiteta, et ruumi W meetriline kompaktne aproksimeeriv jada on kommuteeruv.

Teoreem 41. *Ruumil W on kommuteeruv kompaktne meetriline aproksimatsiooniomadus.*

Alustame sellest, et iga $r \in (-1, 1)$ korral defineerime nihkeoperaatori $S_r : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ järgnevalt. Suvalise $(s, t) \subset (0, 1)$ ja $y \in Y_s$ korral defineerime

$$S_r(y\chi_{(s,t)}) = y\chi_{(s+r,t+r)}.$$

Edasi laiendame lineaarsust kasutades operaatori S_r ruumile $\mathcal{W}$ (kõigile liideta-vatele anname nihke). Tulemusena saame lineaarse operaatori $S_r : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$, kusjuures $S_0 = I_{\mathcal{W}}$.

Lemma 42. *Olgu $r \in [0, 1)$. Siis $S_r \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$, kusjuures $\|S_r\| \leq 1$.*

TÕESTUS. Olgu $f \in \mathcal{W}$. Siis $\|(S_r f)(q)\|_q \leq \|f(q)\|_q$, sest võrratuse vasakul pool normi all seisev funktsioon kujutab endast paremal pool normi all seisva funktsiooni nihet vaadelduna vahemikus $(0, 1)$. Seega

$$\|S_r f\| = \int_0^1 \|(S_r f)(q)\|_q dq \leq \int_0^1 \|f(q)\|_q dq = \|f\|.$$

Järelikult $S_r \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$ ja $\|S_r\| \leq 1$. $\square$

Lemma 42 põhjal on S_r , $r \in [0, 1)$, pidev operaator, mistõttu saame operaatori S_r jätkata ka ruumile W . Tähistame operaatori S_r pidevat jätku ruumile W samuti S_r . Seega $S_r \in \mathcal{L}(W)$ ja $\|S_r\| \leq 1$, kusjuures $S_0 = I_W$.

Lause 43. *Funktsioon $\varphi(r) = S_r f$, $r \in [0, 1)$, on normi järgi pidev mistahes fikseeritud $f \in W$ korral. Muuhulgas $\|S_r f - f\| \rightarrow 0$, kui $r \rightarrow 0+$, ja $f \in W$.*

TÕESTUS. Näitame, et φ on paremalt pidev (vasakult pidevus tõestatakse analoogiliselt). Fikseerime $\varepsilon > 0$ ja $r \in [0, 1]$; meil on vaja näidata, et leidub $\delta > 0$, mille korral kehtib implikatsioon

$$0 < r' - r < \delta \Rightarrow \|S_{r'}f - S_rf\| < \varepsilon.$$

Leiame $f_0 \in \mathcal{W}$ selliselt, et $\|f - f_0\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Sel juhul võrratuse

$$\|S_{r'}f - S_rf\| \leq \|S_{r'}\|\|f - f_0\| + \|S_{r'}f_0 - S_rf_0\| + \|S_r\|\|f - f_0\|$$

ning lemmas 42 saadud võrratuste $\|S_r\| \leq 1$, $\|S_{r'}\| \leq 1$ tõttu piisab leida $\delta > 0$ selliselt, et kehtiks implikatsioon

$$0 < r' - r < \delta \Rightarrow \|S_{r'}f_0 - S_rf_0\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.2)$$

Kirjutame $f_0 = \sum_{k=1}^n y_k \chi_{(s_k, t_k)}$, kus $0 < s_k < t_k < 1$, $y_k \in Y_{s_k}$, $k = 1, \dots, n$. Võime eeldada, et $f_0 \neq 0$, vastasel korral on tõestatav väide ilmne.

Hindame

$$\begin{aligned} \|S_{r'}f_0 - S_rf_0\| &= \int_0^1 \| (S_{r'}f_0)(\rho) - (S_rf_0)(\rho) \|_\rho d\rho = \\ &= \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n y_k (\chi_{(s_k+r', t_k+r')}(\rho) - \chi_{(s_k+r, t_k+r)}(\rho)) \right\|_\rho d\rho \leq \\ &= \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n y_k (\chi_{(t_k+r, t_k+r')}(\rho) - \chi_{(s_k+r, s_k+r')}(\rho)) \right\|_\rho d\rho \leq \\ &\leq \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\|y_k \chi_{(s_k+r, s_k+r')}(\rho)\|_\rho + \right. \\ &\quad \left. + \|y_k \chi_{(t_k+r, t_k+r')}(\rho)\|_\rho \right) d\rho = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{s_k+r}^{s_k+r'} \|y_k\|_\rho d\rho + \int_{t_k+r}^{t_k+r'} \|y_k\|_\rho d\rho \right) \leq \\ &\leq (r' - r) \sum_{k=1}^n \left(\|y_k\|_{s_k} + \|y_k\|_{s_k} \right) = \\ &= 2(r' - r) \sum_{k=1}^n \|y_k\|_{s_k}. \end{aligned}$$

Tähistanud

$$\delta = \frac{\varepsilon}{6 \sum_{k=1}^n \|y_k\|_{s_k}},$$

saame seega implikatsiooni (2.2). $\square$

Kui operaatorid S_r , $r \in (0, 1)$, oleksid kompaktsed, siis lause 43 põhjal moodustaksid nad ruumis W meetrilise kompaktse aproksimeeriva pere.

Operaator S_r , $r \in (0, 1)$, pole aga kompaktne. Tõepoolest, tähistame

$$B_{W-r} = \{S_r^{-1}f : f \in B_W\}.$$

Hulk B_{W-r} on tõkestatud, kuna lemma 42 põhjal on S_r , seega ka $S_r^{-1} = S_{-r}$ pidev (kasutasime S_r , $r \in (0, 1)$, bijektiivsust ja Banachi teoreemi pöördoperaatorist), mistõttu $\|S_r^{-1}f\| \leq \|S_r^{-1}\| \|f\| \leq \|S_r^{-1}\|$ iga $f \in B_W$ korral.

Et hulk B_{W-r} on tõkestatud, ruum W on lõpmatumõõtmeline ning kehtib võrdus $S_r(B_{W-r}) = B_W$, siis vastuväiteline oletus operaatori S_r kompaktsusest tähendaks ühikera B_W suhtelist kompaktsust, mis on võimatu, sest ruum W ei ole lõplikumõõtmeline.

Moodustamaks kompaktsed operaatoreid ruumil W , mis aproksimeeriksid ühikoperaatorit, defineerime iga n korral operaatori $T_n : W \rightarrow W$ seosega

$$(T_n f)(q) = n \int_0^{\frac{1}{n}} (S_r f)(q) dr, \quad q \in (0, 1), \quad f \in W. \quad (2.3)$$

Lemma 43 põhjal on funktsioon $\varphi(r) = S_r f$ normi järgi pidev, seega on funktsioon $\|S_r f\|$ integreeruv. Lause 23 põhjal eksisteerib nüüd ka Bochneri integraal (2.3). Lisaks sellele on operaator T_n Bochneri integraali lineaarsuse (vt. lause 22) tõttu lineaarne ning järelduse 24 põhjal kehtib võrratus

$$\begin{aligned} \|T_n f\| &= \left\| n \int_0^{\frac{1}{n}} S_r f dr \right\| = \int_0^1 n \left\| \int_0^{\frac{1}{n}} (S_r f)(q) dr \right\|_q dq \leq \\ &\leq \int_0^1 n \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \| (S_r f)(q) \|_q dr \right) dq = \\ &= n \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^1 \| (S_r f)(q) \|_q dq \right) dr = \\ &= n \int_0^{\frac{1}{n}} \| S_r f \| dr \leq n \int_0^{\frac{1}{n}} \| f \| dr = \| f \| \end{aligned}$$

(kasutasime, et võrratuse $\|(S_r f)(q)\|_q \leq \|f(q)\|_q$ ja funktsiooni $\|f(q)\|_q$ integreeruvuse tõttu piirkonnas $\{(r, q) : r, q \in (0, 1)\}$ on funktsioon $\|(S_r f)(q)\|_q$ integreeruv samas piirkonnas $(0, 1) \times (0, 1)$), millest järeldub, et

$$T_n \in \mathcal{L}(W), \quad \|T_n\| \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lause 44. Operaatorid T_n , $n \in \mathbb{N}$, on kompaktsed.

Lause 44 tõestus kasutab alljärgnevat abitulemust.

Lemma 45. Kui normeeritud ruumi $\mathcal{X}$ täiend on X , siis kehtib $\overline{B_{\mathcal{X}}} = B_X$.

TÕESTUS. Fikseerime arvu $\varepsilon > 0$ suvaliselt ning olgu $x \in B_X$, $x \neq 0$ (juhul $x = 0$ on ilmne, et $x \in B_{\mathcal{X}}$). Siis $\overline{\mathcal{X}} = X$ tõttu leidub $x' \in \mathcal{X}$ selliselt, et $\|x - x'\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Kui $\|x'\| \leq 1$, on lemma tõestatud. Vastasel korral normeerime

$$x'' = \frac{x'}{\|x'\|} \in B_{\mathcal{X}}.$$

Nüüd

$$1 < \|x'\| \leq \|x\| + \|x - x'\| < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

ning

$$0 < 1 - \frac{1}{\|x'\|} < 1 - \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{\varepsilon}{2}},$$

järelikult

$$\left| 1 - \frac{1}{\|x'\|} \right| < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{\varepsilon}{2}},$$

mille abil

$$\begin{aligned} \|x - x''\| &\leq \|x - x'\| + \|x' - x''\| < \frac{\varepsilon}{2} + \left| 1 - \frac{1}{\|x'\|} \right| \|x'\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Seega $\overline{B_{\mathcal{X}}} = B_X$. □

Järgneva lemma 47 tõestamiseks vajame Fréchet'-Kolmogorovi teoreemi (vt. näiteks [29], lk. 324–325).

Teoreem 46 (Fréchet'-Kolmogorovi teoreem). Alamhulk $K \subset L_1(0, 1)$ on suhteliselt kompaktne parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:

$$1) \sup_{g \in K} \int_0^1 |g(q)| \, dq < \infty,$$

$$2) \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 |g(t+q) - g(q)| \, dq = 0 \text{ ühtlaselt funktsioonide } g \in K \text{ korral,}$$

Lemma 47. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Operaator $A : L_1(0,1) \rightarrow L_1(0,1)$, mis on defineeritud võrdusega

$$Af = f * \left(n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \right),$$

on kompaktne operaator ruumil $L_1(0,1)$.

TÕESTUS. Olgu $s \in (0,1)$. Meil piisab näidata, et hulk

$$K = \left\{ f * \chi_{(0,s)} : f \in B_{L_1(0,1)} \right\}$$

on suhteliselt kompaktne, sest siis on ka

$$AB_{L_1(0,1)} = n \left\{ f * \chi_{(0, \frac{1}{n})} : f \in B_{L_1(0,1)} \right\}$$

suhteliselt kompaktne. Selleks kontrollime üle Fréchet'-Kolmogorovi teoreemi (vt. teoreem 46) tingimuste täidetuse, kusjuures tuletame meelde, et

$$(f * \chi_{(0,s)})(q) = \int_0^s f(q-r) \, dr.$$

Me saame hinnangu

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_{L_1(0,1)}} \int_0^1 \left| \int_0^s f(q-r) \, dr \right| \, dq &\leq \sup_{f \in B_{L_1(0,1)}} \int_0^1 \left(\int_0^s |f(q-r)| \, dr \right) \, dq = \\ &= \sup_{f \in B_{L_1(0,1)}} \int_0^1 \left(\int_{q-s}^q |f(u)| \, du \right) \, dq \leq \\ &\leq \sup_{f \in B_{L_1(0,1)}} \int_0^1 1 \, dq \leq \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Fikseerime nüüd arvu $\varepsilon > 0$. Vaja on leida arv $\delta > 0$ selliselt, et kui $|t| < \delta$, siis mistahes $f \in B_{L_1(0,1)}$ korral

$$\int_0^1 \left| \int_0^s f(t+q-r) \, dr - \int_0^s f(q-r) \, dr \right| \, dq < \varepsilon.$$

Vaatleme juhtu $t > 0$. (Juhtu $t < 0$ käsitleme analoogiliselt.) Me saame

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left| \int_0^s f(t+q-r) dr - \int_0^s f(q-r) dr \right| dq = \\
&= \int_0^1 \left| \int_{-t}^{s-t} f(q-r) dr - \int_0^s f(q-r) dr \right| dq = \\
&= \int_0^1 \left| \int_{-t}^0 f(q-r) dr - \int_{s-t}^s f(q-r) dr \right| dq \leq \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_{-t}^0 |f(q-r)| dr \right) dq + \int_0^1 \left(\int_{s-t}^s |f(q-r)| dr \right) dq = \\
&\leq \int_{-t}^0 \left(\int_0^1 |f(q-r)| dq \right) dr + \int_{s-t}^s \left(\int_0^1 |f(q-r)| dq \right) dr \leq \\
&\leq \int_{-t}^0 \left(\int_0^1 |f(u)| du \right) dr + \int_{s-t}^s \left(\int_0^1 |f(u)| du \right) dr \leq \\
&\leq t + t = 2t
\end{aligned}$$

(kasutasime Fubini-Tonelli teoreemi, et integreerimisjärjekorda vahetada), mistõttu piisab valida $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Fréchet-Kolmogorovi teoreemi (vt. teoreem 46) põhjal on hulk K suhteliselt kompaktne, mis tähendab, et A on kompaktne operaator.

LAUSE 44 TÕESTUS. Olgu $n \in \mathbb{N}$; näitame, et operaator T_n on kompaktne. Selleks tõestame, et $T_n(B_W)$ on suhteliselt kompaktne.

Tähistame

$$\begin{aligned}
B = \left\{ \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{t_i - s_i} y_i \chi_{(s_i, t_i)} : s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_p < t_p, \right. \\
\left. y_i \in U_{s_i}, i = 1, \dots, p, \sum_{i=1}^p |\lambda_i| \leq 1 \right\}.
\end{aligned}$$

ning näitame, et $B_W = \overline{B}$. Siis piisaks sisalduvuse

$$T_n(B_W) = T_n(\overline{B}) \subset \overline{T_n(B)}$$

tõttu lause tõestuseks näidata, et $T_n(B)$ on suhteliselt kompaktne.

Ühelt poolt kehtib võrratuse

$$\left\| \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{t_i - s_i} y_i \chi_{(s_i, t_i)} \right\| = \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{t_i - s_i} y_i \chi_{(s_i, t_i)} \right\|_r dr \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^p \frac{|\lambda_i|}{t_i - s_i} \int_{s_i}^{t_i} \|y_i\|_r \, dr \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^p \frac{|\lambda_i|}{t_i - s_i} \|y_i\|_{s_i} \int_{s_i}^{t_i} dr \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^p |\lambda_i| \leq 1
\end{aligned}$$

tõttu sisalduvus $B \subset B_{\mathcal{W}}$.

Näitame, et teiselt poolt $B_{\mathcal{W}}^\circ \subset B$. Sel juhul saaksime lemma 45 abil, et

$$B_W = \overline{B_{\mathcal{W}}} = \overline{B_{\mathcal{W}}^\circ} \subset \overline{B} \subset \overline{B_{\mathcal{W}}} = B_W,$$

millest $B_W = \overline{B}$, nagu tarvis.

Fikseerime $f = \sum_{i=1}^p y_i \chi_{(s_i, t_i)} \in B_{\mathcal{W}}^\circ$, kus vahemikud $(s_i, t_i) \subset (0, 1)$, $i = 1, \dots, p$, on paarikaupa lõikumatud. Siis kehtib tingimus

$$\sum_{i=1}^p \int_{s_i}^{t_i} \|y_i\|_r \, dr = \int_0^1 \|f\|_r \, dr = \|f\| < 1.$$

Näitame, et kehtib $f \in B$. Fikseerime selleks suvaliselt arvu $\varepsilon > 0$, kusjuures eeldame, et $\varepsilon < 1 - \|f\|$. Järgneva arutelu viime läbi iga indeksi $i = 1, \dots, p$ korral. Funktsiooni $\alpha_{y_i}(r) = \|y_i\|_r$ Riemanni mõttes integreeruvust kasutades leiame vahemiku (s_i, t_i) jaoks sellise arvu Δ_i , et vahemiku (s_i, t_i) iga alajaotuse korral, kus maksimaalne alajaotuse pikkus ei ületa arvu Δ_i , erineb integraal

$$\mu_i := \int_{s_i}^{t_i} \|y_i\|_r \, dr$$

vastava alajaotuse Darboux' ülemsummast vähem kui arvu $\frac{\varepsilon}{p}$ võrra. Niisiis ka vahemiku (s_i, t_i) ühtlase jaotuse $s_{ij} = s_i + j\Delta_i$, $j = 0, \dots, p_i$, kus võime eeldada $s_{i0} = s_i$, $s_{ip_i} = t_i$, $t_{ij} := s_{i,j-1}$ ($j = 1, \dots, p_i$), korral kehtib

$$0 < \sum_{j=1}^{p_i} \|y_i\|_{s_{ij}} \Delta_i - \mu_i < \frac{\varepsilon}{p},$$

kusjuures

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{p_i} \int_{s_{ij}}^{t_{ij}} \|y_i\|_r \, dr.$$

Tähistame $\lambda_{ij} = \|y_i\|_{s_{ij}} \Delta_i$, siis

$$\int_{s_{ij}}^{t_{ij}} \|y_i\|_r dr = \int_{s_{ij}}^{t_{ij}} \frac{\lambda_{ij}}{\Delta_i} \left\| \frac{y_i}{\|y_i\|_{s_{ij}}} \right\|_r dr.$$

Me saame, et

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p_i} \frac{\lambda_{ij}}{t_{ij} - s_{ij}} \frac{y_i}{\|y_i\|_{s_{ij}}} \chi_{(s_{ij}, t_{ij})} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p_i} y_i \chi_{(s_{ij}, t_{ij})} = \sum_{i=1}^p y_i \chi_{(s_i, t_i)} = f.$$

Samas, $f \in B$, kuna kehtivad tingimused

$$\left\| \frac{y_i}{\|y_i\|_{s_{ij}}} \right\|_{s_{ij}} \leq 1$$

ja

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p_i} |\lambda_{ij}| &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p_i} \|y_i\|_{s_{ij}} \Delta_i < \sum_{i=1}^p \left(\mu_i + \frac{\varepsilon}{p} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^p \int_{s_i}^{t_i} \|y_i\|_r dr + \varepsilon = \|f\| + \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

Näitamaks nüüd, et hulgal $T_n(B) = \{T_n f : f \in B\}$ leidub mistahes arvu $\varepsilon > 0$ korral lõplik ε -võrk, piisab näidata, et hulgal

$$C := \left\{ \frac{T_n(y \chi_{(s,t)})}{t-s} : 0 < s < t < 1; y \in U_s \right\}$$

leidub mistahes arvu $\varepsilon > 0$ korral lõplik ε -võrk.

Tõepoolest, fikseerime arvu $\varepsilon > 0$ ning elemendi

$$f = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{t_i - s_i} y_i \chi_{(s_i, t_i)} \in B,$$

kus $0 < s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_p < t_p < 1$, $y_i \in U_{s_i}$, $i = 1, \dots, p$,
 $\sum_{i=1}^p |\lambda_i| \leq 1$. Valime elementidele $\frac{T_n(\lambda_i y_i \chi_{(s_i, t_i)})}{t_i - s_i}$ lähendid f_i , $i = 1, \dots, p$, hulga

$C \frac{\varepsilon}{p}$ -võrgust. (Kuivõrd U_{s_i} on tasakaalus, siis $\lambda_i y_i \in U_{s_i}$ tingimuse $|\lambda_i| \leq 1$ tõttu.)
Nüüd

$$\begin{aligned} \left\| T_n f - \sum_{i=1}^p f_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^p \frac{T_n \left(\lambda_i y_i \chi_{(s_i, t_i)} \right)}{t_i - s_i} - f_i \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^p \left\| \frac{T_n \left(\lambda_i y_i \chi_{(s_i, t_i)} \right)}{t_i - s_i} - f_i \right\| < \\ &< p \cdot \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon, \end{aligned}$$

nagu soovitud.

Artiklis [28] on põhjendatud, et näitamaks hulga C suhtelist kompaktsust, piisab näidata, et hulk

$$D := \left\{ \frac{T_n \left(x_m \chi_{(s,t)} \right)}{(t-s) \|x_m\|^s} : 0 < s < t < 1; m \in \mathbb{N} \right\}$$

on suhteliselt kompaktne. Niisiis on lause tõestuse lõpetamiseks jäänud näidata, et hulgal D leidub mistahes arvu $\varepsilon > 0$ korral lõplik ε -võrk.

Iga kahe arvu s ja t korral, kus $s < t$, kehtib $x_m \in Y_s$ iga m korral ning

$$T_n \left(x_m \chi_{(s,t)} \right) = n \int_0^{\frac{1}{n}} S_r x_m \chi_{(s,t)} dr = x_m h,$$

kus

$$\begin{aligned} h(q) &= n \int_0^{\frac{1}{n}} \chi_{(s+r, t+r)}(q) dr = \\ &= n \int_0^{\frac{1}{n}} \chi_{(s,t)}(q-r) dr = \\ &= n \int_0^1 \chi_{(s,t)}(q-r) \chi_{(0, \frac{1}{n})}(r) dr \\ &= \left(\chi_{(s,t)} * \left(n \chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) \right) (q). \end{aligned}$$

Tõestame, et viimane võrdus laieneb funktsioonidelt $\chi_{(s,t)}$, $0 < s < t < 1$, kõigile funktsioonidele $f \in L_1(0,1)$, st. kehtib võrdus

$$T_n(x_m f) = x_m \left(f * \left(n \chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) \right), \quad f \in L_1(0,1). \quad (2.4)$$

Fikseerime suvalise $f \in L_1(0, 1)$. Siis leidub lihtsate funktsioonide

$$f_k = \sum_{i=1}^{p_k} a_{ik} \chi_{(s_{ik}, t_{ik})}, \quad 0 \leq s_{1k} < t_{1k} \leq s_{2k} < t_{2k} \leq \dots \leq s_{p_k, k} < t_{p_k, k} \leq 1,$$

jada selliselt, et $\int_0^1 |f_k(q) - f(q)| dq \xrightarrow[k]{k} 0$. On selge, et

$$x_m f_k = \sum_{i=1}^{p_k} a_{ik} x_m \chi_{(s_{ik}, t_{ik})} \in \mathcal{W}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Kuna

$$\begin{aligned} \|x_m f_k - x_m f\| &= \int_0^1 \| (x_m f_k - x_m f)(q) \|_q dq = \\ &= \sum_{i=1}^{p_k} \int_{s_{ik}}^{t_{ik}} \| a_{ik} x_m - f(q) x_m \|_q dq = \\ &= \sum_{i=1}^{p_k} \int_{s_{ik}}^{t_{ik}} |a_{ik} - f(q)| \|x_m\|_q dq \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{p_k} \int_{s_{ik}}^{t_{ik}} |a_{ik} - f(q)| dq = \\ &= \int_0^1 |f_k(q) - f(q)| dq \xrightarrow[k]{k} 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

siis $x_m f \in \overline{\mathcal{W}} = W$. Lisaks sellele kehtib integraali ja operaatori T_n lineaarsuse tõttu võrdus (2.4) funktsioonide f_k , $k \in \mathbb{N}$, korral, seega

$$T_n(x_m f_k) = x_m \left(f_k * \left(n \chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) \right).$$

Fikseerime suvalise $\varepsilon > 0$ ja põhjendame, et leidub indeks $k_0 \in \mathbb{N}$ nii, et eeldusel $k \geq k_0$ kehtivad hinnangud

$$\|T_n(x_m f_k) - T_n(x_m f)\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.6}$$

ja

$$\left\| x_m \left(f_k * \left(n \chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) \right) - x_m \left(f * \left(n \chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) \right) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.7}$$

Tõepoolest,

$$\|T_n(x_m f_k) - T_n(x_m f)\| \leq \|T_n\| \|x_m f_k - x_m f\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

kui valida koondumises (2.5) indeks $k_1 \in \mathbb{N}$ selliselt, et kui $k \geq k_1$, siis $\|x_m f_k - x_m f\| < \frac{\varepsilon}{2\|T_n\|}$.

Saame

$$\begin{aligned} & \left\| x_m \left(f_k * \left(n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) \right) - x_m \left(f * \left(n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) \right) \right\| = \\ &= \int_0^1 \left| \left((f_k - f) * \left(n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) \right) (q) \right| \|x_m\|_q dq \leq \\ &\leq n \int_0^1 \left| \left((f_k - f) * \chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) (q) \right| dq = \\ &= n \int_0^1 \left| \int_0^{\frac{1}{n}} (f_k - f)(q - r) dr \right| dq \leq \\ &\leq n \int_0^1 \left(\int_{q-\frac{1}{n}}^q |f_k - f|(u) du \right) dq = \\ &= n \int_0^1 \left(\int_{q-\frac{1}{n}}^q |f_k(u) - f(u)| du \right) dq \leq \\ &\leq n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

kui valida koondumises $\int_0^1 |f_k(u) - f(u)| du \xrightarrow[k]{k} 0$ indeks $k_2 \in \mathbb{N}$ selliselt, et kui $k \geq k_2$, siis $\int_0^1 |f_k(u) - f(u)| du < \frac{\varepsilon}{2n}$.

Jääb tähistada $k_0 = \max(k_1, k_2)$.

Pidades silmas hinnanguid (2.6) ja (2.7), saame hinnangu

$$\begin{aligned} & \left\| T_n(x_m f) - x_m \left(f * \left(n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) \right) \right\| \leq \|T_n(x_m f) - T_n(x_m f_{k_0})\| + \\ &+ \left\| T_n(x_m f_{k_0}) - x_m \left(f_{k_0} * \left(n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) \right) \right\| + \\ &+ \left\| x_m \left(f_{k_0} * \left(n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) \right) - x_m \left(f * \left(n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) \right) \right\| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

niisiis oleme tõestanud eeskirja (2.4).

Tähistame $Af = f * \left(n\chi_{(0, \frac{1}{n})}\right)$. Siis lemma 47 abil saame sisalduvuse $\frac{\chi_{(s,t)}}{t-s} \in B_{L^1(0,1)}$ tõttu, et iga fikseeritud indeksi $m \in \mathbb{N}$ korral hulk $\frac{x_m}{\|x_m\|^s} A \left(B_{L^1(0,1)}\right) \subset W$ on suhteliselt kompaktne (peame siin silmas seda, et fikseeritud arvu $\varepsilon > 0$ puhul on võrratust

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x_m}{\|x_m\|^s} Af - \frac{x_m}{\|x_m\|^s} Af_1 \right\| &= \int_0^1 |(Af - Af_1)(q)| \left\| \frac{x_m}{\|x_m\|^s} \right\|_q dq \leq \\ &\leq \int_0^1 |(Af - Af_1)(q)| \|x_m\|^{q-s} dq \leq \\ &\leq \frac{1}{\|x_m\|} \int_0^1 |(Af - Af_1)(q)| dq \end{aligned}$$

kasutades hulga $A \left(B_{L^1(0,1)}\right)$ mistahes ε -võrgu H korral hulk $\frac{x_m}{\|x_m\|^s} H$ hulga $\frac{x_m}{\|x_m\|^s} A \left(B_{L^1(0,1)}\right) \frac{\varepsilon}{\|x_m\|}$ -võrk). Järelikult on ka hulk

$$\begin{aligned} E &:= \left\{ \frac{T_n \left(x_m \chi_{(s,t)}\right)}{(t-s)\|x_m\|^s} : 0 < s < t < 1 \right\} = \\ &= \left\{ \frac{x_m}{\|x_m\|^s} \left(\frac{\chi_{(s,t)}}{t-s} * \left(n\chi_{(0, \frac{1}{n})}\right) \right) : 0 < s < t < 1 \right\} \subset \\ &\subset \frac{x_m}{\|x_m\|^s} A \left(B_{L^1(0,1)}\right), \end{aligned}$$

suhteliselt kompaktne. Niisiis leidub hulgal E mistahes arvu $\varepsilon > 0$ korral lõplik ε -võrk.

Kuna

$$\frac{x_m}{\|x_m\|^r} \in U_r$$

ning

$$\begin{aligned} \left| \left(\chi_{(s,t)} * \chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) (r) \right| &= \left| \int_0^1 \chi_{(s,t)}(r-q) \chi_{(0, \frac{1}{n})}(q) dq \right| = \\ &= \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \chi_{(s,t)}(r-q) dq \right| = \\ &= \left| \int_{r-\frac{1}{n}}^r \chi_{(s,t)}(u) du \right| \leq \\ &\leq t-s, \end{aligned}$$

kusjuures $\left| \left(\chi_{(s,t)} * \chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) (r) \right| = 0$, kui $r \notin \left(s, t + \frac{1}{n} \right)$, siis

$$\begin{aligned}
\left\| T_n \left(x_m \chi_{(s,t)} \right) \right\| &= \left\| x_m \left(\chi_{(s,t)} * \left(n \chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) \right) \right\| = \\
&= n \int_0^1 \left\| x_m \right\|_r \left| \left(\chi_{(s,t)} * \chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) (r) \right| dr \leq \\
&\leq n \int_s^{t+\frac{1}{n}} \left\| x_m \right\|^r (t-s) dr = \\
&= n(t-s) \frac{\left\| x_m \right\|^{t+\frac{1}{n}} - \left\| x_m \right\|^s}{\ln \left\| x_m \right\|} = \\
&= n(t-s) \frac{\left\| x_m \right\|^s - \left\| x_m \right\|^{t+\frac{1}{n}}}{|\ln \left\| x_m \right\||} \leq \\
&\leq \frac{n(t-s) \left\| x_m \right\|^s}{|\ln \left\| x_m \right\||}.
\end{aligned}$$

Fikseerime suvalise arvu $\varepsilon > 0$. Kui kehtib $\left\| x_m \right\| < e^{-\frac{2n}{\varepsilon}}$, siis $\ln \left\| x_m \right\| < -\frac{2n}{\varepsilon}$ ning seetõttu

$$\left\| \frac{T_n \left(x_m \chi_{(s,t)} \right)}{(t-s) \left\| x_m \right\|^s} \right\| \leq \frac{n(t-s) \left\| x_m \right\|^s}{(t-s) \left\| x_m \right\|^s |\ln \left\| x_m \right\||} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.8)$$

Kuna $\left\| x_m \right\| \rightarrow 0$, kui $m \rightarrow \infty$, siis kehtib saadud hinnang kõigi piisavalt suurte naturaalarvude m korral. Näitame, et seeläbi leidub hulgal D lõplik ε -võrk.

Tõepoolest, fikseerime arvu $\varepsilon > 0$ ning olgu $M \in \mathbb{N}$ selline, et

$$m \geq M \Rightarrow \left\| x_m \right\| < e^{-\frac{2n}{\varepsilon}}.$$

Olgu $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_M$ hulkade

$$\left\{ \frac{T_n \left(x_m \chi_{(s,t)} \right)}{(t-s) \left\| x_m \right\|^s} : 0 < s < t < 1 \right\}, \quad m = 1, \dots, M,$$

lõplikud ε -võrgud. Sel juhul on hinnangu (2.8) põhjal

$$\mathcal{K} = \bigcup_{m=1}^M \mathcal{K}_m \cup \{0\}$$

hulga D lõplik ε -võrk.

Oleme tõestanud, et operaatorid T_n , $n \in \mathbb{N}$, on kompaktsed operaatorid ruumil W . $\square$

TEOREEMI 41 TÕESTUS. Kuna operaatorid S_r aproksimeerivad ühikoperaatorit protsessis $r \rightarrow 0+$ (vt. lause 43), siis fikseerinud arvu $\varepsilon > 0$, leiame arvu r_ε , mille korral kehtib implikatsioon

$$0 < r < r_\varepsilon \Rightarrow \|S_r f - f\| < \varepsilon.$$

Järelikult kui $\frac{1}{n} < r_\varepsilon$, siis ka

$$\begin{aligned} \|T_n f - f\| &= \left\| n \int_0^{\frac{1}{n}} S_r f \, dr - n \int_0^{\frac{1}{n}} f \, dr \right\| = \\ &= n \left\| \int_0^{\frac{1}{n}} (S_r f - f) \, dr \right\| = \\ &= n \int_0^1 \left\| \int_0^{\frac{1}{n}} (S_r f - f)(q) \, dr \right\|_q \, dq \leq \\ &\leq n \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \| (S_r f - f)(q) \|_q \, dr \right) dq = \\ &= n \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^1 \| (S_r f - f)(q) \|_q \, dq \right) dr = \\ &= n \int_0^{\frac{1}{n}} \| S_r f - f \| \, dr \leq n \int_0^{\frac{1}{n}} \varepsilon \, dr = \varepsilon \end{aligned}$$

(võrratuse $\| (S_r f - f)(q) \|_q \leq 2 \| f(q) \|_q$ ja funktsiooni $\| f(q) \|_q$ integreeruvuse tõttu piirkonnas $\{(r, q) : r, q \in (0, 1)\}$ on funktsioon $\| (S_r f - f)(q) \|_q$ integreeruv samas piirkonnas $(0, 1) \times (0, 1)$). Niisiis $\|T_n f - f\| \xrightarrow{n} 0$ protsessis $n \rightarrow \infty$ suvalise $f \in W$ korral.

Lause 44 põhjal on operaatorid T_n , $n \in \mathbb{N}$, kompaktsed. Oleme tõestanud, et ruumil W on meetriline kompaktnelise aproksimatsiooniomadus.

Veendume lõpuks, et

$$T_n T_m = T_m T_n, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Kasutades operaatorite T_n pidevust, piisab võrduse (2.9) kehtivuseks tõestada võrdus

$$T_n T_m f = T_m T_n f, \quad f \in W,$$

iga $m, n \in \mathbb{N}$ korral. Nüüd pidades silmas ruumi $\mathcal{W}$ definitsiooni ja operaatorite T_n lineaarsust, piisab näidata, et operaatorid T_n kommuteeruvad kõigi elementide $y\chi_{(s,t)}$, kus $0 < s < t < 1$ ja $y \in Y_s$, korral. Teadupärast

$$Y_s = \overline{\text{span absconv} \left\{ \frac{x_k}{\|x_k\|^s} : k \in \mathbb{N} \right\}},$$

mis tähendab, et jälle operaatorite T_n pidevust ja lineaarsust kasutades piisab näidata operaatorite T_n kommuteeruvust elementidel $x_k\chi_{(s,t)}$, kus $0 < s < t < 1$ ja $k \in \mathbb{N}$. Teemegi seda.

Kõigepealt saame võrduse (2.4) põhjal

$$\begin{aligned} T_m \left(T_n \left(x_k \chi_{(s,t)} \right) \right) &= T_m \left(x_k \left(\chi_{(s,t)} * n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) \right) = \\ &= x_k \left(\left(\chi_{(s,t)} * n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) * m\chi_{(0, \frac{1}{m})} \right). \end{aligned}$$

Seega piisab veenduda võrduse

$$\left(\chi_{(s,t)} * n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) * m\chi_{(0, \frac{1}{m})} = \left(\chi_{(s,t)} * m\chi_{(0, \frac{1}{m})} \right) * n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \quad (2.10)$$

kehtivuses.

Me saame iga $q \in (0, 1)$ korral

$$\begin{aligned} &\left(\left(\chi_{(s,t)} * n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) * m\chi_{(0, \frac{1}{m})} \right) (q) = \\ &= m \int_0^1 \left(\chi_{(s,t)} * n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \right) (q - u) \chi_{(0, \frac{1}{m})}(u) du = \\ &= mn \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_{(s,t)}((q - u) - v) \chi_{(0, \frac{1}{n})}(v) dv \right) \chi_{(0, \frac{1}{m})}(u) du = \\ &= mn \int_0^{\frac{1}{m}} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \chi_{(s,t)}(q - (u + v)) dv \right) du. \end{aligned}$$

Kuna lahtine hulk

$$\begin{aligned} &\left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \chi_{(s,t)}(q - (u + v)) = 1 \right\} = \\ &= \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : s < q - (u + v) < t \right\} \end{aligned}$$

on Lebesgue'i mõttes mõõtuv, siis on funktsioon $\chi_{(t,s)}(q - (\cdot + \cdot))$ integreeruv. Järelikult Fubini-Tonelli teoreemi kohaselt

$$\int_0^{\frac{1}{m}} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \chi_{(s,t)}(q - (u + v)) dv \right) du =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^{\frac{1}{m}} \chi_{(s,t)}(q - (u + v)) \, du \right) dv.$$

Niisiis on võrdus (2.10) tõestatud.

□

PEATÜKK 3

Godefroy-Saphari teoreemi üldistus

Alljärgnev teoreem 83, mis on käesoleva magistritöö üks põhitulemusi, üldistab Godefroy¹ ja Saphari² 1988. aastal ilmunud artiklis [10] avaldatud teoreemi (vt. teoreem 101 jaotisest 4.3), mis väidab, et kui separaablil Banachi ruumil, mis on M -ideaal oma teises kaasruumis, leidub λ -kommuteeruv tõkestatud aproksimeeriv jada, kus $\lambda < 2$, siis see jada on pingul.

Teoreemis 83 on eeldustes M -ideaaliks olemise asemel üldisem omadus $M(a, B, c)$ -võrratus, kus $\max |B| + c > 1$ (vt. näiteks artiklit [23]), tingimus $\lambda < 2$ asendub tingimusega $\lambda < \max |B| + c$, lõplikumõõtmeliste operaatorite jada asemel vaadeldakse kompaktsete operaatorite peret ning seeläbi kehtib tulemus suvalises, mitte ainult separaablil Banachi ruumis.

Märgime, et erijuhul, kui X on separaabel reaalne Banachi ruum, mis on M -ideaal oma teises kaasruumis ning kompaktsete operaatorite pere (T_ν) asemel on pidevate lõplikumõõtmeliste operaatorite jada (T_n) , tõestasid teoreemi Godefroy ja Saphar 1988. aastal ilmunud artiklis [10]. Alternatiivne tõestus nimetatud erijuhul on avaldatud Godefroy 2001. a. artiklis [8] (vt. bakalaureusetöö [27], lk. 23–28).

Jaotistes 3.1 kuni 3.4 toome sisse Godefroy ja Saphari 1988. aastal avaldatud teoreemi 101 üldistamiseks vajalikud mõisted ja tulemused. Peatükk on kirjutatud põhiliselt artiklile [23], raamatule [15] ning artiklile [1] tuginedes.

Siin ja edaspidi olgu $B \subset \mathbb{K}$ kompaktne hulk ning $a, c \geq 0$ fikseeritud reaalarvud. Tähistame

$$\max |B| = \max \{|b| : b \in B\}$$

¹Gilles Godefroy (1953), prantsuse matemaatik.

²Pierre David Saphar (1934), Iisraeli matemaatik.

(hulga B kompaktsuse ja mooduli pidevuse tõttu maksimumi realiseeriv element $b \in B$ alati leidub).

3.1. Banachi ruumi omadus $M^*(a, B, c)$

Definitsioon 48. Olgu X Banachi ruum. Öeldakse, et ruumil X on *omadus* (M^*) , kui

$$\limsup_{\nu} \|x^* + x_{\nu}^*\| = \limsup_{\nu} \|y^* + x_{\nu}^*\|$$

mistahes $x^*, y^* \in X^*$, $\|x^*\| = \|y^*\|$, ning mistahes $*$ -nõrgalt nulliks koonduva tõkestatud pere (x_{ν}^*) korral.

Omaduse (M^*) jadalise variandi tõi sisse Kalton 1993. a. artiklis [16], eraldades seal välja ruumi X terminites väljendatava omaduse, mis kirjeldab selliseid separaableid ruume X , kus $\mathcal{K}(X)$ on M -ideaal ruumis $\mathcal{L}(X)$.

Definitsioon 49. Olgu X Banachi ruum. Öeldakse, et ruumil X on *omadus* (wM^*) , kui

$$\limsup_{\nu} \|2x^* - x_{\nu}^*\| = \limsup_{\nu} \|x_{\nu}^*\|$$

mistahes $*$ -nõrgalt elemendiks x^* koonduva tõkestatud pere (x_{ν}^*) korral.

Omaduse (wM^*) tõi sisse Lima³ 1995. a. artiklis [18].

Definitsioon 50. Olgu X kompleksne Banachi ruum. Öeldakse, et ruumil X on *kompleksne omadus* (wM^*) , kui

$$\limsup_{\nu} \|x_{\nu}^* + bx^*\| \leq \limsup_{\nu} \|x_{\nu}^*\| \quad \forall b \in \{b \in \mathbb{C} : |b + 1| = 1\}$$

mistahes $*$ -nõrgalt elemendiks x^* koonduva tõkestatud pere (x_{ν}^*) korral.

Kompleksse omaduse (wM^*) tõi sisse Oja 1999. a. artiklis [22].

Artiklis [22] leiavad omadused (M^*) ja (wM^*) üldistamist järgmiselt.

Definitsioon 51. Olgu X Banachi ruum. Öeldakse, et ruumil X on *omadus* $M^*(a, B, c)$, kui

$$\limsup_{\nu} \|ax_{\nu}^* + bx^* + cy^*\| \leq \limsup_{\nu} \|x_{\nu}^*\| \quad \forall b \in B$$

mistahes $x^*, y^* \in X^*$, $\|y^*\| \leq \|x^*\|$, ning mistahes $*$ -nõrgalt elemendiks x^* koonduva tõkestatud pere $(x_{\nu}^*) \subset X^*$ korral.

³Åsvald Lima (1942), norra matemaatik.

Omadused (M^*) ja (wM^*) on erijuhud omadusest $M^*(a, B, c)$.

Lause 52. Olgu X Banachi ruum. Ruumil X on omadus (M^*) parajasti siis, kui ruumil X on omadus $M^*(1, \{-1\}, 1)$.

Lause 53. Olgu X Banachi ruum. Ruumil X on omadus (wM^*) parajasti siis, kui ruumil X on omadus $M^*(1, \{-2\}, 0)$.

Lause 54. Olgu X kompleksne Banachi ruum. Ruumil X on kompleksne omadus (wM^*) parajasti siis, kui ruumil X on omadus $M^*(1, \{b \in \mathbb{C} : |b+1| = 1\}, 0)$.

Lause 55. Olgu X Banachi ruum, millel on omadus (M^*) . Siis ruumil X on omadus $M^*(1, \{b \in \mathbb{K} : |b+1| \leq 1-c\}, c)$ mistahes $c \in [0, 1]$ korral.

Lause 56. Olgu X Banachi ruum, millel on omadus (M^*) . Siis ruumil X on omadus (wM^*) . Juhul, kui X on kompleksne ruum, siis on ruumil X ka kompleksne omadus (wM^*) .

Lausete 52 kuni 56 üksikasjalikult lahtikirjutatud tõestused võib lugeja leida bakalaureusetööst [27].

Lause 58 pärineb artiklist [23], selle tõestuses kasutame Alaoglu teoreemi (vt. [14], lk. 45).

Teoreem 57 (Alaoglu⁴). Olgu X Banachi ruum. Siis kaasruumi X^* kinnine ühik-
kera B_{X^*} on $*$ -nõrgas topoloogias kompaktne.

Lause 58. Olgu X Banachi ruum, millel on omadus $M^*(a, B, c)$. Olgu Y ruumi X kinnine alamruum. Siis on ruumil Y omadus $M^*(a, B, c)$.

TÕESTUS. Oletame vastuväiteliselt, et ruumi X kinnisel alamruumil Y ei ole omadust $M^*(a, B, c)$. Siis leidub $b \in B$ ja funktsionaalid $y^*, w^* \in Y^*$ nii, et $\|w^*\| \leq \|y^*\|$, ning tõkestatud pere $(y_\nu^*)_{\nu \in \mathfrak{N}}$ selliselt, et $y_\nu^* \xrightarrow{\nu} y^*$ $*$ -nõrgalt ruumis Y^* , kusjuures

$$\limsup_{\nu \in \mathfrak{N}} \|ay_\nu^* + by^* + cw^*\| > \limsup_{\nu \in \mathfrak{N}} \|y_\nu^*\|.$$

Ülemise piirväärtuse omaduse kohaselt leiame pere $(y_\nu^*)_{\nu \in \mathfrak{N}}$ osapere $(y_\mu^*)_{\mu \in \mathfrak{M}}$ nii, et

$$\lim_{\mu \in \mathfrak{M}} \|ay_\mu^* + by^* + cw^*\| > \lim_{\mu \in \mathfrak{M}} \|y_\mu^*\|.$$

⁴Leonidas Alaoglu (1914), kreeka matemaatik.

Hahn-Banachi teoreemi abil leiame funktsionaalidele y_μ^* ja w^* normi säilitavad jätkud x_μ^* ja z^* ruumile X^* . Alaoglu teoreemi (vt. teoreem 57) kohaselt leidub pere (x_μ^*) osapere $(x_\lambda^*)_{\lambda \in \mathcal{L}}$ ning funktsionaal $x^* \in X^*$ selliselt, et $x_\lambda^* \xrightarrow{\lambda \in \mathcal{L}} x^*$ *-nõrgalt ruumis X^* . Näitame, et x^* on funktsionaali y^* jätk:

$$x^*(y) = \lim_{\lambda} x_\lambda^*(y) = \lim_{\lambda} y_\lambda^*(y) = y^*(y) \quad \forall y \in Y.$$

Kasutame nüüd seda, et ruumil X on omadus $M^*(a, B, c)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \in \mathcal{M}} \|ay_\mu^* + by^* + cw^*\| &= \lim_{\lambda \in \mathcal{L}} \|(ax_\lambda^* + bx^* + cz^*)|_Y\| \leq \\ &\leq \limsup_{\lambda \in \mathcal{L}} \|ax_\lambda^* + bx^* + cz^*\| \leq \\ &\leq \limsup_{\lambda \in \mathcal{L}} \|x_\lambda^*\| = \\ &= \limsup_{\lambda \in \mathcal{L}} \|y_\lambda^*\| = \\ &= \lim_{\mu \in \mathcal{M}} \|y_\mu^*\|. \end{aligned}$$

Saadud vastuolu põhjendab, et ruumil Y on omadus $M^*(a, B, c)$.

Lause 60 pärineb artiklist [23], selle tõestuses kasutame raamatust [14], lk. 31, pärinevat järgmist fakti.

Lause 59. Olgu X Banachi ruum ja Y ruumi X kinnine alamruum. Siis $(X/Y)^*$ on isomeetriliselt isomorfne ruumiga $Y^\perp \subset X^*$.

TÕESTUS. Vaatleme kujutust $\delta : Y^\perp \rightarrow (X/Y)^*$, mis on defineeritud võrdusega

$$(\delta x^*)(x + Y) = x^*(x), \quad x \in x + Y.$$

Definitsioon on korrektne, sest $x^* \in Y^\perp$, mis annab, et $x^*(x_1) = x^*(x_2)$ alati, kui $x_1, x_2 \in x + Y$. Veendumaks, et δ on pealekujutus, fikseerime $f \in (X/Y)^*$ suvaliselt ning defineerime $x^* \in X^*$ võrdusega $x^*(x) = f(x + Y)$. Siis $x^* \in Y^\perp$ ning $(\delta x^*)(x + Y) = x^*(x) = f(x + Y)$. On kerge vahetult kontrollida, et δ on lineaarne. Veendumaks, et δ on isomeetria, kirjutame

$$\|\delta x^*\| = \sup_{\|x+Y\|<1} |(\delta x^*)(x + Y)| = \sup_{\|x\|<1} |x^*(x)| = \|x^*\|.$$

Ahelvõrduse keskmise võrduse põhjenduseks vt. näiteks [24], lk. 145. □

Lause 60. Olgu X Banachi ruum, millel on omadus $M^*(a, B, c)$. Olgu Y ruumi X kinnine alamruum. Siis on ruumil X/Y omadus $M^*(a, B, c)$.

TÕESTUS. Oletame vastuväiteliselt, et ruumil X/Y ei ole omadust $M^*(a, B, c)$. Siis leidub $b \in B$ ja funktsionaalid $y^*, w^* \in (X/Y)^* \subset X^*$ (kasutades lauset 59, kehtib viimane sisalduvus isomeetria täpsuseni) nii, et $\|w^*\| \leq \|y^*\|$, ning tõkestatud pere $(y_\nu^*)_{\nu \in \mathfrak{N}}$ selliselt, et $y_\nu^* \xrightarrow{\nu} y^*$ $*$ -nõrgalt (lause 59 tõestuses kirjeldatud isomeetrilist isomorfismi δ kasutades saame

$$\left(\delta^{-1}y_\nu^*\right)(x) = y_\nu^*(x + Y) \xrightarrow{\nu} y^*(x + Y) = \left(\delta^{-1}y^*\right)(x), \quad x \in X,$$

mis tähendab, et $*$ -nõrk koondumine $y_\nu^* \xrightarrow{\nu} y^*$ leiab aset ruumi X^* mõttes), kusjuures

$$\limsup_{\nu \in \mathfrak{N}} \|ay_\nu^* + by^* + cw^*\| > \limsup_{\nu \in \mathfrak{N}} \|y_\nu^*\|.$$

Ülemise piirväärtuse omaduse kohaselt leiame pere $(y_\nu^*)_{\nu \in \mathfrak{N}}$ osapere $(y_\mu^*)_{\mu \in \mathfrak{M}}$ nii, et

$$\lim_{\mu \in \mathfrak{M}} \|ay_\mu^* + by^* + cw^*\| > \lim_{\mu \in \mathfrak{M}} \|y_\mu^*\|.$$

Seevastu, kuna ruumil X on omadus $M^*(a, B, c)$, siis

$$\lim_{\mu \in \mathfrak{M}} \|ay_\mu^* + by^* + cw^*\| \leq \lim_{\mu \in \mathfrak{M}} \|y_\mu^*\|.$$

Saadud vastuolu põhjendab, et ruumil X/Y on omadus $M^*(a, B, c)$. □

3.2. Banachi ruumi $M(a, B, c)$ -võrratus

Olgu X Banachi ruum. Operaatorit $\pi_X = j_{X^*}(j_X)^* : X^{***} \rightarrow X^{***}$ nimetatakse ruumi X^{***} loomulikuks ehk kanooniliseks projektoriks (ruumile X^*).

Definitsioon 61. Banachi ruumi X nimetatakse M -ideaaliks oma teises kaasruumis, kui ruumi X^{***} iga elemendi x^{***} korral

$$\|x^{***}\| = \|\pi_X x^{***}\| + \|x^{***} - \pi_X x^{***}\|.$$

Näiteks raamatus [15], lk. 105, on tõestatud, et Banachi ruum c_0 on M -ideaal oma teises kaasruumis.

Üldistame M -ideaali definitsiooni nii, et ta oleks kooskõlas jaotises 3.1 toodud omaduse (M^*) üldistamisega omaduseks $M^*(a, B, c)$.

Definitsioon 62. Olgu X Banachi ruum. Ütleme, et ruum X rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust, kui võrratus

$$\|ax^{***} + b\pi_X x^{***}\| + c \|\pi_X x^{***}\| \leq \|x^{***}\| \quad \forall b \in B$$

kehtib iga $x^{***} \in X^{***}$ korral.

Artiklis [23] on toodud ära järgmine lause.

Lause 63. Olgu X Banachi ruum. Kui ruumil X on omadus $M^*(a, B, c)$, siis ruum X rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust.

Üksikasjaliku tõestuse lausele 63 leiab lugeja bakalaureusetööst [27]. See tõestus on analoogiline raamatus [15], lk. 298, toodud tõestusega alljärgnevale lausele 64. Et lause 63 on üldisem, saame lause 64 siit juba järeldusena.

Lause 64. Olgu X Banachi ruum, millel on omadus (M^*) . Siis X on M -ideaal oma teises kaasruumis. $\square$

Lausete 67 ning 69 tõestamiseks tsiteerime õpikust [24], lk. 181, järgmise tulemuse.

Lause 65. Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ operaator. Kehtib võrdus

$$A^{**}j_X = j_Y A.$$

Veel läheb meil tarvis järgmist hästituntud tulemust (vt. näiteks [7], lk. 90, ül. 3.22), mille me täielikkuse huvides esitame koos tõestusega.

Lause 66. Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ operaator.

1) Kui T on isomeetria, siis T^* on isomeetria.

2) Kui T on isomeetriline kujutus, siis T^{**} on isomeetriline kujutus.

TÕESTUS. Väite 1) tõestuseks näitame, et kehtib võrdus $T(B_X) = B_Y$. Tõepoolest, kuna T on isomeetria, siis $T^{-1} : Y \rightarrow X$ on samuti isomeetria, sest ta on bijektsioon (kuna T on bijektsioon) ning $\|T^{-1}(Tx)\| = \|x\|$, $x \in X$. Niisiis mistahes elemendi $y \in Y$ korral kehtib $\|T^{-1}y\| = \|y\|$, mis annabki võrduse $T(B_X) = B_Y$. Nüüd saame võrduse

$$\|T^*y^*\| = \sup_{x \in B_X} |y^*(Tx)| = \sup_{y \in B_Y} |y^*(y)| = \|y^*\|, \quad y^* \in Y^*.$$

Et mistahes $x^* \in X^*$ korral võime defineerida $y^* = x^*T^{-1} \in Y^*$ ning

$$(T^*y^*)(x) = y^*(Tx) = x^*(T^{-1}(Tx)) = x^*(x), \quad x \in X,$$

siis on T^* ka sürjektsioon. Järelikult on T^* isomeetria.

Väite 2) tõestuseks vaatleme kujutust⁵ $T_0 : X \rightarrow \text{ran } T$. Kujutus T_0 on isomeetria, järelikult meie lause väidet 1) kaks korda rakendades saame, et kujutus $T_0^{**} : X^{**} \rightarrow (\text{ran } T)^{**}$ on samuti isomeetria. Tähistame nüüd tähega $i : \text{ran } T \rightarrow Y$ loomuliku sisestuse $iy = y, y \in \text{ran } T$.

Põhjendame, et i^{**} on isomeetriline kujutus. Selleks kasutame ka Hahn-Banachi teoreemi. Mistahes $y^{**} \in Y^{**}$ korral saame, et

$$\begin{aligned} \|i^{**}y^{**}\| &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|(i^{**}y^{**})(x^*)\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|y^{**}(i^*x^*)\| = \\ &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|y^{**}(x^*|_Y)\| = \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \|y^{**}(y^*)\| = \|y^{**}\|, \end{aligned}$$

mis tähendab, et i^{**} on isomeetriline kujutus.

On jäänud nentida, et $T^{**} = (iT_0)^{**} = i^{**}T_0^{**}$ on isomeetriline kujutus. $\square$

Lause 67. Olgu X Banachi ruum, mis rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust. Olgu Y ruumi X kinnine alamruum. Siis ruum Y rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust.

TÕESTUS. Olgu täidetud lause eeldused. Me peame näitama, et loomulik projektor π_Y rahuldab tingimust

$$\|ay^{***} + b\pi_Y y^{***}\| + c\|\pi_Y y^{***}\| \leq \|y^{***}\|$$

iga $y^{***} \in Y^{***}$ korral. Tähistame tähega $i : Y \rightarrow X$ loomuliku sisestuse, mis on defineeritud võrdusega $iy = y \in X$ iga $y \in Y$ korral. Siis muuseas $i^* : X^* \rightarrow Y^*$, $i^{**} : Y^{**} \rightarrow X^{**}$ ning $i^{***} : X^{***} \rightarrow Y^{***}$. Samuti $(i^*x^*)(y) = x^*(iy) = x^*(y)$, st. $i^*x^* = x^*|_Y$ iga $x^* \in X^*$ korral.

Näitame, et kehtib $\pi_Y i^{***} = i^{***} \pi_X$. Kasutades kaks korda lauset 65, saame

$$\begin{aligned} i^{***} \pi_X &= i^{***} j_{X^*} (j_X)^* = j_{Y^*} i^* (j_X)^* = j_{Y^*} (j_X i)^* = \\ &= j_{Y^*} (i^{**} j_Y)^* = j_{Y^*} (j_Y)^* i^{***} = \pi_Y i^{***}. \end{aligned}$$

Lause 66 põhjal on i^{**} isomeetriline kujutus.

Fikseerime nüüd vabalt $y^{***} \in Y^{***}$ ning leiame funktsionaali $x^{***} \in X^{***}$ nii, et $i^{***}x^{***} = y^{***}$ ja $\|x^{***}\| \leq \|y^{***}\|$. Selleks tähistame sümboliga $z^{***} \in (\text{ran } i^{**})^*$ funktsionaali, mis käitub elementidega $i^{**}y^{**} \in \text{ran } i^{**}$, kus $y^{**} \in Y^{**}$ on suvaline, järgnevalt:

$$z^{***} (i^{**}y^{**}) = y^{***} (y^{**}).$$

⁵Kirjanduses nimetatakse kujutust $T : X \rightarrow Y$ vaadelduna kujutusena $T : X \rightarrow Z$, kus $\text{ran } T \subset Z$, esialgse kujutuse $T : X \rightarrow Y$ astriktsiooniks (inglisekeelne termin on *astriction*).

Siis $\|z^{***}(i^{**}y^{**})\| \leq \|y^{***}\| \|y^{**}\| = \|y^{***}\| \|i^{**}y^{**}\|$, millest

$$\begin{aligned}\|z^{***}\| &= \sup_{i^{**}y^{**} \in B_{\text{ran } i^{**}}} \|z^{***}(i^{**}y^{**})\| \leq \\ &\leq \|y^{***}\| \cdot \sup_{i^{**}y^{**} \in B_{\text{ran } i^{**}}} \|i^{**}y^{**}\| = \\ &= \|y^{***}\|.\end{aligned}$$

Jätkame funktsionaali z^{***} alamruumilt $\text{ran } i^{**}$ normi säilitavalt ruumile X^{**} funktsionaaliks $x^{***} \in X^{***}$. Siis saame, et

$$(i^{***}x^{***})(y^{**}) = x^{***}(i^{**}y^{**}) = z^{***}(i^{**}y^{**}) = y^{***}(y^{**})$$

ning

$$\|x^{***}\| = \|z^{***}\| \leq \|y^{***}\|.$$

Nüüd

$$\begin{aligned}\|ay^{***} + b\pi_Y y^{***}\| + c\|\pi_Y y^{***}\| &= \|ai^{***}x^{***} + b\pi_Y i^{***}x^{***}\| + \\ &\quad + c\|\pi_Y i^{***}x^{***}\| = \\ &= \|i^{***}(ax^{***}) + i^{***}(b\pi_X x^{***})\| + \\ &\quad + c\|i^{***}\pi_X x^{***}\| \leq \\ &\leq \|i^{***}\| \cdot (\|ax^{***} + b\pi_X x^{***}\| + \\ &\quad + c\|\pi_X x^{***}\|) \leq \\ &\leq \|x^{***}\| \leq \\ &\leq \|y^{***}\|,\end{aligned}$$

mis põhjendabki, et ruum Y rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust (kasutasime, et

$$\|i^{***}\| = \|i\| = \sup_{y \in B_Y} \|iy\| = \sup_{y \in B_Y} \|y\| = 1).$$

Lause 67 äsjavaadeldud tõestus on analoogiline raamatus [15], lk. 111, toodud tõestusega alljärgnevale lausele 68. Et lause 67 on üldisem, saame lause 68 siit juba järeldusena.

Lause 68. Olgu X Banachi ruum, mis on M -ideaal oma teises kaasruumis. Kui Y on ruumi X kinnine alamruum, siis ka ruum Y on M -ideaal oma teises kaasruumis.

Lause 69. Olgu X Banachi ruum, mis rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust. Olgu Y ruumi X kinnine alamruum. Siis ruum X/Y rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust.

TÕESTUS. Olgu täidetud lause eeldused. Me peame näitama, et loomulik projektor $\pi_{X/Y}$ rahuldab tingimust

$$\|ax^{***} + b\pi_{X/Y}x^{***}\| + c\|\pi_{X/Y}x^{***}\| \leq \|x^{***}\|$$

iga $x^{***} \in (X/Y)^{***}$ korral. Tähistame tähega $q : X \rightarrow X/Y$ faktorkujutuse, mis on defineeritud võrdusega $q(x) = x + Y$, $x \in X$. Siis muuseas $q^* : (X/Y)^* \rightarrow X^*$, $q^{**} : X^{**} \rightarrow (X/Y)^{**}$ ning $q^{***} : (X/Y)^{***} \rightarrow X^{***}$.

Näitame, et kehtib $\pi_X q^{***} = q^{***} \pi_{X/Y}$. Kasutades kaks korda lauset 65, saame

$$\begin{aligned} q^{***} \pi_{X/Y} &= q^{***} j_{(X/Y)^*} (j_{X/Y})^* = j_{X^*} q^* (j_{X/Y})^* = j_{X^*} (j_{X/Y} q)^* = \\ &= j_{X^*} (q^{**} j_X)^* = j_{X^*} (j_X)^* q^{***} = \pi_X q^{***}. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et q^* on isomeetiline kujutus. Tõepoolest, mistahes funktsionaali $z^* \in (X/Y)^*$ korral

$$\|q^* z^*\| = \sup_{\|x\| < 1} |(q^* z^*)(x)| = \sup_{\|x\| < 1} |z^*(qx)| = \sup_{\|x+Y\| < 1} |z^*(x+Y)| = \|z^*\|,$$

kusjuures ahelvõrduse eelviimase võrduse põhjenduseks vt. näiteks [24], lk. 145.

Nüüd on lause 66 põhjal q^{***} isomeetiline kujutus.

Olgu $x^{***} \in (X/Y)^{***}$, sel juhul kehtib

$$\begin{aligned} \|ax^{***} + b\pi_{X/Y}x^{***}\| + c\|\pi_{X/Y}x^{***}\| &= \|q^{***}(ax^{***} + b\pi_{X/Y}x^{***})\| + \\ &\quad + c\|q^{***}\pi_{X/Y}x^{***}\| = \\ &= \|aq^{***}x^{***} + b\pi_X q^{***}x^{***}\| + \\ &\quad + c\|\pi_X q^{***}x^{***}\| \leq \\ &\leq \|q^{***}x^{***}\| = \\ &= \|x^{***}\|, \end{aligned}$$

mis põhjendabki, et ruum X/Y rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust.

Lause 69 äsjavaadeldud tõestus on analoogiline raamatus [15], lk. 112, toodud tõestusega alljärgnevale lausele 70. Et lause 69 on üldisem, saame lause 70 siit juba järeldusena.

Lause 70. Olgu X Banachi ruum, mis on M -ideaal oma teises kaasruumis. Kui Y on ruumi X kinnine alamruum, siis ka faktorruum X/Y on M -ideaal oma teises kaasruumis.

3.3. Banachi ruumi $M(r, s)$ -võrratus

Selle jaotise põhimõiste on sisse toodud artiklis [1]. Olgu $r, s \in (0, 1]$ fikseeritud reaalarvud.

Definitsioon 71. Ütleme, et Banachi ruum X rahuldab $M(r, s)$ -võrratust, kui tingimus

$$r \|\pi_X x^{***}\| + s \|x^{***} - \pi_X x^{***}\| \leq \|x^{***}\| \quad (3.1)$$

kehtib iga $x^{***} \in X^{***}$ korral.

Järeldus 72. Olgu X Banachi ruum. Ruum X rahuldab $M(1, 1)$ -võrratust parajasti siis, kui ruum X on M -ideaal oma teises kaasruumis.

TÕESTUS. Rahuldagu ruum X $M(1, 1)$ -võrratust, siis

$$\begin{aligned} \|\pi_X x^{***}\| + \|x^{***} - \pi_X x^{***}\| &\leq \|x^{***}\| = \\ &= \|\pi_X x^{***} + (x^{***} - \pi_X x^{***})\| \leq \\ &\leq \|\pi_X x^{***}\| + \|x^{***} - \pi_X x^{***}\|, \end{aligned}$$

mis tähendab, et ruum X on M -ideaal oma teises kaasruumis.

Olgu ruum X M -ideaal oma teises kaasruumis. Siis on definitsiooni 71 võrratus (3.1) rahuldatud võrdusena. $\square$

Lause 73. Olgu X Banachi ruum. Ruum X rahuldab $M(r, s)$ -võrratust parajasti siis, kui ruum X rahuldab $M(s, \{-s\}, r)$ -võrratust.

TÕESTUS. Rahuldagu ruum X $M(r, s)$ -võrratust. See tähendab, et ruumis X kehtib tingimus

$$\|sx^{***} - s\pi_X x^{***}\| + r \|\pi_X x^{***}\| \leq \|x^{***}\| \quad \forall x^{***} \in X^{***},$$

mis langeb täpselt kokku $M(s, \{-s\}, r)$ -võrratuse definitsiooni nõudega. $\square$

Järeldus 74. Olgu X Banachi ruum ning Y ruumi X faktorruumi kinnine alamruum. Kui ruum X rahuldab $M(r, s)$ -võrratust, siis ka ruum Y rahuldab $M(r, s)$ -võrratust.

TÕESTUS. Tõestatava väite saame lausete 73, 67 ja 69 vahetu rakendamise tulemusena. $\square$

3.4. Dixmier' karakteristik

Banachi ruumi X kaasruumi X^* alamruumi V karakteristiku mõiste tõi sisse Dixmier⁶ oma 1948. aasta artiklis [4].

Definitsioon 75. Olgu X Banachi ruum ning V kaasruumi X^* alamruum. Suurust

$$r(V) = \max \left\{ r \geq 0 : rB_{X^*} \subset \overline{B_V}^{w^*} \right\}$$

nimetatakse alamruumi $V \subset X^*$ Dixmier' karakteristikuks ehk karakteristikuks.

Definitsioon 75 on korrektne, see tähendab, hulgas

$$\left\{ r \geq 0 : rB_{X^*} \subset \overline{B_V}^{w^*} \right\}$$

leidub suurim element. Sest kui $r_n B_{X^*} \subset \overline{B_V}^{w^*}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, kus $r_n \nearrow r$, siis ka $rB_{X^*} \subset \overline{B_V}^{w^*}$. Tõepoolest, olgu $r_n B_{X^*} \subset \overline{B_V}^{w^*}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, kus $r_n \nearrow r$. Fikseerime $x^* \in X^*$ selliselt, et $\|x^*\| \leq r$. Tarvis on näidata, et $x^* \in \overline{B_V}^{w^*}$. Me saame, et $\frac{r_n}{r} x^* \in \overline{B_V}^{w^*}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, sest $\left\| \frac{r_n}{r} x^* \right\| \leq r_n$, $n \in \mathbb{N}$. Kuna

$$\left| \frac{r_n}{r} x^*(x) - x^*(x) \right| \leq \left| \frac{r_n}{r} - 1 \right| |x^*(x)| \xrightarrow{n} 0, \quad x \in X,$$

siis leiab aset koondumine $\frac{r_n}{r} x^* \xrightarrow{w^*} x^*$. Et $\overline{B_V}^{w^*}$ on *-nõrgalt kinnine, siis $x^* \in \overline{B_V}^{w^*}$.

Täielikkuse huvides anname Dixmier' karakteristikule ka teise arvutuseeskirja. Teoreemi 77 tõestus pärineb samast artiklist [4] (vt. [4, teoreem 7]), kuid me esitame ta mõnevõrra kaasaegsemal kujul. Tõestuses vajame ka Hahn-Banachi teoreemi geomeetrilist versiooni (vt. näiteks [32], lk. 172).

Teoreem 76 (Hahn-Banachi teoreemi geomeetriline versioon). *Olgu X lokaalselt kumer ruum, U kinnine absoluutselt kumer hulk ruumis X ning $x_0 \in X \setminus U$. Siis leidub $f \in X^*$ selliselt, et*

$$|f(x_0)| > \sup_{x \in U} |f(x)|.$$

Teoreem 77. *Olgu X Banachi ruum ning V kaasruumi X^* alamruum. Siis*

$$r(V) = \inf_{x \in S_X} \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)|.$$

⁶Jacques Dixmier (1924), prantsuse matemaatik.

TÕESTUS. Näitame, et $\inf_{x \in S_X} \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)| \geq r(V)$. Olgu $r(V) > 0$ (kui $r(V) = 0$, kehtib väide triviaalselt) ning olgu $x_0 \in S_X$ valitud suvaliselt. Siis Hahn-Banachi teoreemi järelduse kohaselt leidub $f \in X^*$ selliselt, et $\|f\| = r(V)$ ning $f(x_0) = r(V)$. Valime suvaliselt arvu $\varepsilon > 0$ ja tähistame

$$U_f^* = \{x^* \in X^* : |x^*(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon\},$$

st. U_f^* on funktsionaali f $*$ -nõrk ε -ümbrus. Kuna $r(V)B_{X^*} \subset \overline{B_V}^{w^*}$, siis $f \in \overline{B_V}^{w^*}$. Sulundi definitsiooni kohaselt leidub $x^* \in B_V$ selliselt, et $x^* \in U_f^*$. Osutub niisiis, et oleme leidnud sellise $x^* \in B_V$, et $|x^*(x_0) - r(V)| \leq \varepsilon$, millest $|x^*(x_0)| \geq r(V) - \varepsilon$. Seega $\sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)| \geq r(V)$ igasuguse $x \in S_X$ korral, st.

$$\inf_{x \in S_X} \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)| \geq r(V).$$

Tähistame $s = \inf_{x \in S_X} \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)|$ ning näitame, et $r(V) \geq s$. Selleks piisab

näidata, et $sB_{X^*} \subset \overline{B_V}^{w^*}$. Oletame vastuväiteliselt, et nii ei ole, siis leidub funktsionaal $f \in X^*$ selliselt, et $\|f\| = s$, ent $f \notin \overline{B_V}^{w^*}$. Hahn-Banachi teoreemi geomeetrilise versiooni (vt. teoreem 76) põhjal leidub punkt $x \in X$ nii, et $|f(x)| > \sup_{x^* \in \overline{B_V}^{w^*}} |x^*(x)|$. Funktsionaali ja supreemumi homogeensuse tõttu

võime üldisust kitsendamata eeldada, et $\|x\| = 1$. Siis aga

$$\sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)| \geq s \geq |f(x)| > \sup_{x^* \in \overline{B_V}^{w^*}} |x^*(x)| \geq \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)|,$$

mis on võimatu. Jääb üle teha järeldus, et peab kehtima $r(V) \geq s$. $\square$

Lause 78. Olgu X Banachi ruum ning V kaasruumi X^* alamruum. Siis $r(V) \leq 1$, kusjuures $r(V) = 1$ niipea, kui iga $x \in X$ korral

$$\|x\| = \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)|.$$

TÕESTUS. Kasutades teoreemi 77, saame lause eeldustel

$$r(V) = \inf_{x \in S_X} \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)| \leq \inf_{x \in S_X} \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| = \inf_{x \in S_X} \|x\| = 1.$$

Väite teises pooles antud eeldustel on ahelas võrratusmärgi kohal võrdus. $\square$

Kirjeldame nüüd Banachi ruumi kaasruumi kõiki kinniseid maksimaalseid pärisalamruume.

Lemma 79. Olgu X Banachi ruum ning V kaasruumi X^* kinnine maksimaalne pärisalamruum. Siis leidub $x^{**} \in S_{X^{**}}$ nii, et $V = \ker x^{**}$.

TÕESTUS. Olgu $V \subset X^*$ kinnine maksimaalne pärisalamruum. Järelikult leidub element $x_0^* \in X^*$ nii, et $x_0^* \notin V$. Kuna V on kinnine alamruum, siis leidub Hahn-Banachi teoreemi järelduse põhjal funktsionaal $x_0^{**} \in X^{**}$ nii, et $x_0^{**}(x_0^*) = 1$ ja $V \subset \ker x_0^{**}$. Sel juhul $\|x_0^{**}\| \neq 0$ ning võime normeerida $x^{**} = \frac{x_0^{**}}{\|x_0^{**}\|}$. Nüüd $\|x^{**}\| = 1$ ja $V \subset \ker x^{**}$. Valides aga suvalise $x^* \in X^* \setminus V$ nii, et $x^{**}(x^*) = 0$, oleme $x^{**}(x_0^*) \neq 0$ tõttu leidnud ruumi X^* pärisalamruumi $\text{span}(V \cup \{x^*\}) \supsetneq V$, mis on V maksimaalsuse tõttu võimatu. Järelikult $V = \ker x^{**}$. $\square$

Artiklis [23] (vt. [23, lk. 2817–2818]) on tõestatud lemma 81, mida vajame käesoleva magistritöö ühe põhitulemuse – teoreemi 83 – tõestamisel. Lemma 81 tõestuse lahtikirjutamiseks tsiteerime kõigepealt artiklist [9] järgmist tulemust (vt. [9], lause 2.3).

Lause 80. Olgu X Banachi ruum, $a > 0$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Järgmised tingimused on samaväärsed:

$$(1) \|I_X - \lambda \pi_X\| \leq a.$$

$$(2) \text{ Mistahes } x^{**} \in X^{**} \text{ korral eksisteerib pere } (x_\nu) \subset X, \text{ nii, et } x_\nu \xrightarrow[\nu]{w^*} x^{**} \text{ ning}$$

$$\limsup_{\nu} \|x^{**} - \lambda x_\nu\| \leq a \|x^{**}\|.$$

Lemma 81. Kui Banachi ruum X rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust, kusjuures $\max |B| + c > 1$, siis

$$r(V) \leq \frac{1}{\max |B| + c} < 1$$

iga kinnise pärisalamruumi $V \subset X^*$ korral.

TÕESTUS. Dixmier' karakteristik on monotoonne, st. sisalduvusest $V \subset W$ järeldub võrratus $r(V) \leq r(W)$. See väide on ilmne karakteristiku definitsioonist, sest $\overline{B_V}^{w^*} \subset \overline{B_W}^{w^*}$, kui $V \subset W$.

Järelikult piisab lemma väide tõestada ainult kinniste maksimaalsete pärisalamruumide jaoks, mille üldkuju on lemma 79 põhjal $V = \ker x^{**}$, kus $x^{**} \in S_{X^{**}}$. Tähistame siis $\beta = \max |B| = b \operatorname{sgn} b$ mingi $b \in B$ korral, kus

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Märgime, et $a > 0$, sest kui $a = 0$, siis seetõttu, et ruum X rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust, saaksime

$$\begin{aligned}\beta + c &= (\beta + c)\|\pi_X\| = \sup_{x^{***} \in B_{X^{***}}} (\beta + c)\|\pi_X x^{***}\| = \\ &= \sup_{x^{***} \in B_{X^{***}}} (\|b\pi_X x^{***}\| + c\|\pi_X x^{***}\|) \leq \\ &\leq \sup_{x^{***} \in B_{X^{***}}} \|x^{***}\| \leq 1,\end{aligned}$$

mis on vastuolus eeldusega $\beta + c > 1$.

Me saame võrratuse

$$\begin{aligned}\|(a \operatorname{sgn} b + \beta\pi_X + c\pi_X)x^{***}\| &\leq |\operatorname{sgn} b| \|(a + b\pi_X)x^{***}\| + c\|\pi_X x^{***}\| \leq \\ &\leq \|x^{***}\| \quad \forall x^{***} \in X^{***},\end{aligned}$$

ning seega, jaganud võrratuse läbi suurusega $|a \operatorname{sgn} b| = a$, korrastanud vasakul pool ning võtnud supreemumi üle $\|x^{***}\| \leq 1$, jõuame võrratuseni

$$\left\| I_{X^{***}} + \frac{\beta + c}{a \operatorname{sgn} b} \pi_X \right\| \leq \frac{1}{a}.$$

Lause 80 põhjal järeldub saadud võrratusest, et eksisteerib pere $(x_\nu) \subset B_X$, mille korral $x_\nu \xrightarrow{w^*} x^{**}$ ruumis X^{**} ning

$$\limsup_\nu \left\| x^{**} + \frac{\beta + c}{a \operatorname{sgn} b} x_\nu \right\| \leq \frac{1}{a}. \quad (3.2)$$

Nüüd saame, jätkates nagu artiklis [9] oleva lause 2.7 tõestuses, pidades silmas võrratust (3.2) ja asjaolu

$$x^* \in V \Rightarrow x^{**}(x^*) = 0,$$

et

$$\begin{aligned}(\beta + c)r(V) &\leq a \operatorname{sgn} b \cdot \frac{\beta + c}{a \operatorname{sgn} b} \inf_\nu \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x_\nu)| = \\ &= a \inf_\nu \sup_{x^* \in B_V} \left| x^* \left(\frac{\beta + c}{a \operatorname{sgn} b} x_\nu \right) \right| = \\ &= a \inf_\nu \sup_{x^* \in B_V} \left| x^{**}(x^*) + x^* \left(\frac{\beta + c}{a \operatorname{sgn} b} x_\nu \right) \right| \leq\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq a \inf_{\nu} \left\| x^{**} + \frac{\beta + c}{a \operatorname{sgn} b} x_{\nu} \right\| \leq \\
&\leq a \limsup_{\nu} \left\| x^{**} + \frac{\beta + c}{a \operatorname{sgn} b} x_{\nu} \right\| \leq \\
&\leq 1,
\end{aligned}$$

mida oligi tarvis tõestada. □

3.5. Godefroy-Saphari teoreemi üldistus ja selle tõestus

Alljärgnevas esitatud teoreemi 83 tõestus kasutab artikli [23] tehnikat, kusjuures tõestusskeem on analoogiline artiklis [10] tooduga.

Kõigepealt tõestame täielikkuse huvides ühe üldtuntud fakti.

Lemma 82. *Olgu X Banachi ruum ning $T \in \mathcal{K}(X)$. Koondugu tõkestatud pere $(x_{\nu}^*) \subset X^*$ *-nõrgalt elemendiks $x_0^* \in X^*$. Siis leiab aset koondumine $T^* x_{\nu}^* \xrightarrow{\nu} T^* x_0^*$ ruumis X^* .*

TÕESTUS. Schauderi teoreemi põhjal on operaator T^* kompaktne. Et $x_{\nu}^* \xrightarrow{\nu} x_0^*$, siis pere $(T^* x_{\nu}^*) = (T^* x_{\nu}^*)_{\nu \in \mathfrak{N}}$ koondub *-nõrgalt elemendiks $T^* x_0^*$. Tõepoolest,

$$(T^* x_{\nu}^*)(x) = x_{\nu}^*(Tx) \xrightarrow{\nu} x_0^*(Tx) = (T^* x_0^*)(x) \quad \forall x \in X.$$

Oletame vastuväiteliselt, et pere $(T^* x_{\nu}^*)$ ei koondu elemendiks $T^* x_0^*$. Siis leidub $\varepsilon > 0$ ja pere $(T^* x_{\nu}^*)$ osapere $(T^* x_{\mu}^*)_{\mu \in \mathfrak{M}}$ nii, et

$$\|T^* x_{\mu}^* - T^* x_0^*\| \geq \varepsilon \quad \forall \mu \in \mathfrak{M}. \quad (3.3)$$

Kuivõrd pere (x_{μ}^*) on tõkestatud (sest pere (x_{ν}^*) on tõkestatud ja operaator T^* kompaktne), siis saame perest $(T^* x_{\mu}^*)$ välja eraldada koonduva osapere $(T^* x_{\lambda}^*)_{\lambda \in \mathfrak{L}}$. Täpsemalt, leidub $y^* \in X^*$ nii, et $T^* x_{\lambda}^* \xrightarrow{\lambda} y^*$ ruumis X^* . Sellest järeldub, et $T^* x_{\lambda}^* \xrightarrow{\lambda} y^*$. Arvestades, et *-nõrk topoloogia on eralduv, saame $y^* = T^* x_0^*$. Nüüd aga $T^* x_{\lambda}^* \xrightarrow{\lambda} T^* x_0^*$ ruumis X^* , mis on vastuolus tingimusega (3.3). □

Teoreem 83. *Rahuldagu Banachi ruum X $M(a, B, c)$ -võrratust ning kehtigu võrratus $\max |B| + c > 1$. Kui ruumil X leidub λ -kommuteeruv tõkestatud kompaktne aproksimeeriv pere (T_{ν}) , kusjuures $\lambda < \max |B| + c$, siis pere (T_{ν}) on pingul.*

TÕESTUS. Olgu täidetud teoreemi eeldused. Meil tuleb näidata, et

$$T_\nu^* x^* \xrightarrow[\nu]{} x^* \quad \forall x^* \in X^*.$$

Kuna $T_\nu x \xrightarrow[\nu]{} x$ kõigi elementide $x \in X$ korral, siis leiab aset koondumine $T_\nu^* x^* \xrightarrow[\nu]{} x^*$ ruumis X^* kõigi $x^* \in X^*$ jaoks.

Tähistame ruumi X^* alamruumide $T_\nu^*(X^*)$ poolt tekitatud kinnise alamruumi

$$V = \overline{\text{span}} \bigcup_\nu T_\nu^*(X^*).$$

Tõestame kõigepealt, et vajalik koondumine leiab aset ruumi V elementide korral, see tähendab

$$T_\nu^* v \xrightarrow[\nu]{} v \quad \forall v \in V.$$

Olgu antud suvaline $v \in V$. Fikseerides vabalt arvu $\varepsilon > 0$, leiame elemendi $x_0^* \in \text{span} \bigcup_\nu T_\nu^*(X^*)$ selliselt, et $\|x_0^* - v\| < \frac{\varepsilon}{2\lambda} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. See tähendab, et $x_0^* = T_\mu^* x^*$ mingi $x^* \in X^*$ ja indeksi μ jaoks. Koondumisest $T_\nu^* x^* \xrightarrow[\nu]{} x^*$ järelneb lemma 82 põhjal koondumine

$$T_\nu^* x_0^* = T_\nu^* T_\mu^* x^* = T_\mu^* T_\nu^* x^* \xrightarrow[\nu]{} T_\mu^* x^* = x_0^*,$$

kasutasime, et $T_\nu^* T_\mu^* = (T_\mu T_\nu)^* = (T_\nu T_\mu)^* = T_\mu^* T_\nu^*$. Siis aga

$$\begin{aligned} \limsup_\nu \|T_\nu^* v - v\| &\leq \left(\limsup_\nu \|T_\nu^*\| \right) \|v - x_0^*\| + \limsup_\nu \|T_\nu x_0^* - x_0^*\| + \\ &\quad + \|x_0^* - v\| < \\ &< \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{2\lambda} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

mis tähendab, et $\limsup_\nu \|T_\nu^* v - v\| = 0$ ning järelikult $T_\nu^* v \xrightarrow[\nu]{} v$.

Tõestuse lõpetamiseks piisab näidata, et tegelikult $V = X^*$. Kui kehtiks $V \neq X^*$, siis lemma 81 kohaselt rahuldaks ruumi V Dixmier' karakteristik võrratust

$$r(V) \leq \frac{1}{\max |B| + c}.$$

See pole aga võimalik. Tõepoolest, kuna

$$0 < \limsup_{\nu} \|T_{\nu}\| \leq \lambda < \max |B| + c,$$

siis minnes üle osaperele (indeksitähise ν jätame loetavuse huvides muutmata), saame

$$0 < \tau := \lim_{\nu} \|T_{\nu}\| < \max |B| + c.$$

Sel juhul aga kehtib koondumine

$$\frac{T_{\nu}^* x^*}{\|T_{\nu}\|} \xrightarrow[\nu]{w^*} \frac{x^*}{\tau} \quad \forall x^* \in B_{X^*}, \quad (3.4)$$

sest

$$\left| \frac{T_{\nu}^* x^*(x)}{\|T_{\nu}\|} - \frac{x^*(x)}{\tau} \right| \leq \frac{|(T_{\nu}^* x^* - x^*)(x)|}{\|T_{\nu}\|} + \frac{|\tau - \|T_{\nu}\|| |x^*(x)|}{\|T_{\nu}\| \tau} \xrightarrow[\nu]{} 0$$

$\forall x \in X, \quad x^* \in B_{X^*}.$

Koondumisest (3.4) järeldub võrratuse $\left\| \frac{T_{\nu}^* x^*}{\|T_{\nu}\|} \right\| \leq \frac{\|T_{\nu}^*\| \|x^*\|}{\|T_{\nu}\|} \leq 1$ tõttu, et

$$\frac{x^*}{\tau} \in \overline{B_V}^{w^*} \quad \forall x^* \in B_{X^*}.$$

Järelikult $r(V) \geq 1/\tau$ ning seega

$$r(V) > \frac{1}{\max |B| + c},$$

mis lõpetab soovitud vastuolu konstrueerimise. □

PEATÜKK 4

Järeldused Godefroy-Saphari teoreemi üldistusest

Selle peatüki põhiteoreemiks võib pidada teoreemi 106; siiski on peatüki üldeesmärgiks pakkuda peatüki 3 põhiteoreemile – teoreem 83 – võimalikult laialdasi rakendusi.

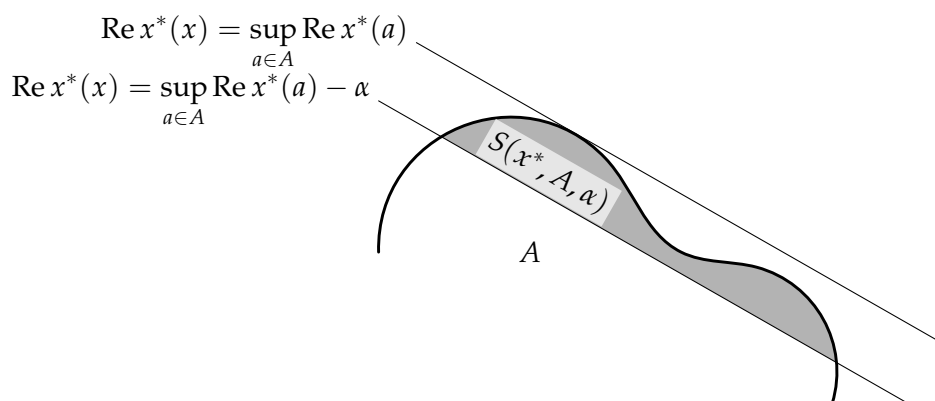
Teoreemist 83 tehtavad järeldused jagunevad nelja liiki. Esiteks kasutame erijuhte teoreemi 83 eeldustest, või siis piisavaid tingimusi, mis garanteerivad eelduste täidetuse. Teiseks toome selles peatükis sisse Radon-Nikodými omaduse mõiste ning järeldame seda kasutades artiklite [23] ja [10] tulemuste põhjal teoreemist 83 teoreemi 106. Kolmas liik järeldusi vaatab juhtumit, kus teoreemi 83 eelduste täidetust kandub ruumilt Y üle ruumile X olukorras, kus nende ruumide vahel leidub sobivate omadustega isomorfisme (täpsemalt, ruumide X ja Y vaheline Banach-Mazuri kaugus on piisavalt väike). Neljas järelduste liik on seotud ideaalide ja ideaaliprojektoritega; siin kasutame suures ulatuses artiklis [23] tõestatud tulemusi.

4.1. Radon-Nikodými omadus ja eksponeeritud punktid

Käesolev jaotis tugineb Phelps¹ raamatule [25]. Siin toome sisse mõned mõisted ja tulemused Banachi ruumi ja tema kaasruumi geomeetriast, mida vajame jaotises 4.4. Märkime, et Phelps viib oma käsitluse läbi reaalses Banachi ruumis; kasutamaks tema mõisteid ja tulemusi meie juhtumil, vaatleme selles jaotises funktsionaalide x^* asemel sisuliselt reaalkäärtustega funktsionaale $\operatorname{Re} x^*$.

Definitsioon 84. Olgu X Banachi ruum, $A \subset X$ mittetühi alamhulk ning arv

¹Robert Ralph Phelps (1926), ameerika matemaatik.



Joonis 4.2: Illustreeriv kujutus viilu $S(x^*, A, \alpha)$ kohta

$\alpha > 0$ ja funktsionaal $x^* \in X^*$ valitud suvaliselt. Hulga A viiluks² $S(x^*, A, \alpha)$ ruumis X nimetatakse hulka

$$S(x^*, A, \alpha) = \{x \in A : \operatorname{Re} x^*(x) > \sup_{a \in A} \operatorname{Re} x^*(a) - \alpha\}.$$

Olgu $A \subset X^*$ mittetühi alamhulk ning arv $\alpha > 0$ ja element $x \in X$ valitud suvaliselt. Hulga A *-nõrgaks viiluks $S(x, A, \alpha)$ ruumis X^* nimetatakse hulka

$$S(x, A, \alpha) = \{x^* \in A : \operatorname{Re} x^*(x) > \sup_{a^* \in A} \operatorname{Re} a^*(x) - \alpha\}.$$

Joonisel 4.2 on illustreerivalt kujutatud osa hulgast A koos tasemejoontega $\operatorname{Re} x^*(x) = \sup_{a \in A} \operatorname{Re} x^*(a) - \alpha$ ja $\operatorname{Re} x^*(x) = \sup_{a \in A} \operatorname{Re} x^*(a)$. Viilu $S(x^*, A, \alpha)$ moodustavad parajasti hulga A need punktid x , mille korral suuruse $\operatorname{Re} x^*(x)$ väärtus jääb toodud tasemejoonte vahele.

Definitsioon 85. Ütleme, et Banachi ruumi X mittetühi alamhulk A on viilutatav³, kui mistahes arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub $x^* \in X^*$ ning $\alpha > 0$ nii, et $\operatorname{diam} S(x^*, A, \alpha) < \varepsilon$.

Ütleme, et Banachi ruumi X kaasruumi X^* mittetühi alamhulk A on *-nõrgalt viilutatav, kui mistahes arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub $x \in X$ ning $\alpha > 0$ nii, et $\operatorname{diam} S(x, A, \alpha) < \varepsilon$.

²Vastav ingliskeelne termin on *slice*.

³Vastav ingliskeelne termin on *dentable*.

Definitsioon 86. Öeldakse, et Banachi ruumi X mittetühjal alamhulgal A on Radon⁴-Nikodými⁵ omadus, kui hulga A mistahes mittetühi tõkestatud alamhulk on viilutatav.

Järgnevad kaks teoreemi esitame tõestuseta.

Teoreem 87. Banachi ruumi X kaasruumil X^* on Radon-Nikodými omadus parajasti siis, kui ruumi X^* mistahes mittetühi tõkestatud alamhulk on $*$ -nõrgalt viilutatav.

Teoreem 88. Banachi ruumi X kaasruumil X^* on Radon-Nikodými omadus parajasti siis, kui ruumi X mistahes separaabli alamruumi Y kaasruum Y^* on separaabel.⁶

Definitsioon 89. Olgu C Banachi ruumis X kinnine kumer hulk. Punkti $x \in C$ nimetatakse tugevalt eksponeerituks, kui leidub funktsionaal $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, nii, et $x \in S(x^*, C, \alpha)$ iga $\alpha > 0$ korral ning $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{diam } S(x^*, C, \alpha) = 0$. Funktsionaali x^* nimetatakse tugevalt eksponeerivaks funktsionaaliks ning öeldakse, et x^* eksponeerib tugevalt punkti x .

Olgu $C \subset X^*$ kinnine kumer hulk. Funktsionaali $x^* \in C$ nimetatakse $*$ -nõrgalt tugevalt eksponeerituks, kui leidub punkt $x \in X$, $x \neq 0$, nii, et $x^* \in S(x, C, \alpha)$ iga $\alpha > 0$ korral ning $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{diam } S(x, C, \alpha) = 0$.

Definitsioon 90. Olgu $C \subset X$ kinnine kumer hulk. Punkti $x \in C$ nimetatakse eksponeerituks, kui leidub funktsionaal $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, nii, et $\text{Re } x^*(x) = \sup_{c \in C} \text{Re } x^*(c)$ ning $\text{Re } x^*(y) < \sup_{c \in C} \text{Re } x^*(c)$ iga $y \in C$, $y \neq x$, korral.

Sellisel kirjeldatud funktsionaali x^* nimetatakse eksponeerivaks funktsionaaliks ning öeldakse, et x^* eksponeerib punkti x .

Olgu $C \subset X^*$ kinnine kumer hulk. Funktsionaali $x^* \in C$ nimetatakse $*$ -nõrgalt eksponeerituks, kui leidub punkt $x \in X$, $x \neq 0$, nii, et $\text{Re } x^*(x) = \sup_{c^* \in C} \text{Re } c^*(x)$ ning $\text{Re } y^*(x) < \sup_{c^* \in C} \text{Re } c^*(x)$ iga $y^* \in C$, $y^* \neq x^*$ korral.

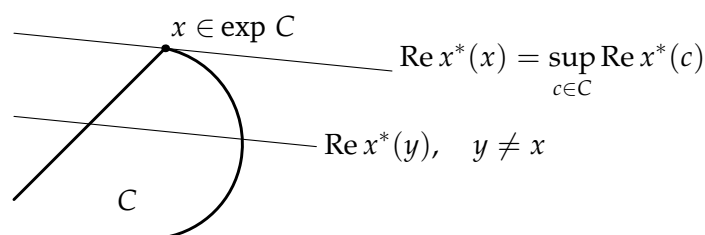
Joonisel 4.3 on illustreerivalt kujutatud osa hulgast C koos eksponeeritud punktiga $x \in C$ ning eksponeeriva funktsionaali x^* reaalsa väärtuste tasemejoontega $\text{Re } x^*(x)$ ja $\text{Re } x^*(y)$, kus $y \neq x$.

Kinnise kumera hulga $C \subset X$ kõigi (tugevalt) eksponeeritud punktide hulka tähistame vastavalt $\text{sexp } C$ ja $\text{exp } C$. Kinnise kumera hulga $C \subset X^*$ kõigi

⁴Johann Radon (1887–1956), tšehhi matemaatik.

⁵Otto Marcin Nikodým (1887–1974), poola matemaatik.

⁶Mõistevõrgu täielikkuse huvides märgime, et tihti nimetatakse Banachi ruumi X , mille mistahes separaabli alamruumi Y kaasruum Y^* on separaabel, *Asplundi ruumiks*.



Joonis 4.3: Illustreeriv kujutlus eksponeeritud punkti x kohta

$*$ -nõrgalt (tugevalt) eksponeeritud funktsionaalide hulka tähistame vastavalt w^* -sexp C ja w^* -exp C .

Järgneva teoreemi võtame tõestuseta.

Teoreem 91. Banachi ruumi X kaasruumil X^* on Radon-Nikodými omadus parajasti siis, kui iga $*$ -nõrgalt kompaktse kumera alamhulga $C \subset X^*$ korral kehtib

$$C = \overline{\text{conv}}^{w^*}(w^*\text{-sexp } C).$$

4.2. Radon-Nikodými omadus ja $M(a, B, c)$ -võrratus

Selle jaotise põhitulemus – teoreem 93 – sisaldub artiklis [23, teoreem 4.1, $1^\circ \Rightarrow 1^\circ$, ja selle tõestus]. Käesolevas anname temale üksikasjalikult lahtikirjutatud tõestuse.

Lemma 92. Olgu X separaabel Banachi ruum. Siis leidub separaabel kinnine alamruum $V \subset X^*$ selliselt, et $\|x\| = \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)|$ iga $x \in X$ korral⁷.

TÕESTUS. Ruumi X separaablus tähendab, et $X = \overline{\{x_k : k \in \mathbb{N}\}}$. Tähistame

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{kui } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, & \text{kui } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Meie jaoks on oluline asjaolu, et $\overline{\mathcal{Q}} = \mathbb{K}$ ning et hulk $\mathcal{Q}$ on loenduv.

Mistahes $k \in \mathbb{N}$ korral kasutame teoreemi piisavast arvust funktsionaalidest ning leiame $x_k^* \in X^*$ selliselt, et $x_k^* \in S_{X^*}$ ning $x_k^*(x_k) = \|x_k\|$. Me valime $V = \overline{\text{span}}\{x_k^* : k \in \mathbb{N}\}$, siis on $V \subset X^*$ kinnine alamruum, kusjuures

$$\mathcal{V} = \left\{ \sum_{k=1}^n q_k x_k^* : n \in \mathbb{N}, q_k \in \mathcal{Q}, k \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

⁷Kirjanduses öeldakse sellise alamruumi $V \subset X^*$ kohta, kus $\|x\| = \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)|$ iga $x \in X$ jaoks, *normeeriv alamruum* (inglisekeelne termin on *norming subspace*).

on selles kõikjal tihe ülimalt loenduv hulk.

Veendumaks, et $\mathcal{V}$ on ülimalt loenduv, avaldame ta ühe-elementiliste hulkade loenduva ühendina:

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{q_k \in \mathcal{Q}} \left\{ \sum_{k=1}^n q_k x_k^* \right\}.$$

Näitamaks, et $V = \overline{\mathcal{V}}$, fikseerime vabalt funktsionaali $x^* \in V$ ja arvu $\varepsilon > 0$. Siis leidub $x_0^* = \sum_{k=1}^n \zeta_k x_k^* \in \text{span} \{x_k^* : k \in \mathbb{N}\}$ selliselt, et

$$\|x^* - x_0^*\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nüüd on jäänud $\mathbb{K} = \overline{\mathcal{Q}}$ põhjal leida lähendid q_k , $k = 1, \dots, n$, selliselt, et

$$|\zeta_k - q_k| < \frac{\varepsilon}{2n\|x_k^*\|}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Kokkuvõttes

$$\sum_{k=1}^n q_k x_k^* \in \mathcal{V}$$

ning

$$\begin{aligned} \left\| x^* - \sum_{k=1}^n q_k x_k^* \right\| &\leq \|x^* - x_0^*\| + \left\| \sum_{k=1}^n \zeta_k x_k^* - \sum_{k=1}^n q_k x_k^* \right\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^n |\zeta_k - q_k| \|x_k^*\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

nagu soovitud.

Veendume lõpuks, et $\|x\| = \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)|$. Fikseerime $x \in X$. Sulundipunkti kirjelduse kohaselt saame mistahes arvu $\varepsilon > 0$ korral leida elemendi x_k nii, et $\|x - x_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Järelikult

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|x - x_k\| + \|x_k\| < \frac{\varepsilon}{2} + |x_k^*(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x_k)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{x^* \in B_V} (|x^*(x)| + |x^*(x_k - x)|) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)| + \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x_k - x)| \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)| + \|x_k - x\| < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)| + \frac{\varepsilon}{2} = \\
&= \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Protsessis $\varepsilon \rightarrow 0+$ saame $\|x\| \leq \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)|$.

Teiselt poolt ilmselt

$$\|x\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| \geq \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)|.$$

Kokkuvõttes $\|x\| = \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)|$, nagu soovitud. □

Teoreem 93. Kui Banachi ruum X rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust, kusjuures $\max |B| + c > 1$, siis kaasruumil X^* on Radon-Nikodými omadus ja

$$X^* = \overline{\text{span}}(w^*\text{-sexp } B_{X^*}).$$

TÕESTUS. Oletame, et ruumis X^* leidub kinnine pärisalamruum V nii, et iga $x \in X$ normi saame arvutada kujul

$$\|x\| = \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)|. \quad (4.1)$$

Siis lause 78 põhjal $r(V) = 1$. Teiselt poolt, lemma 81 põhjal kehtib meie eeldustel $r(V) < 1$, mis tähendab, et sellist kinnist pärisalamruumi V ei leidu. Seega $V = X^*$.

Ruumi X mistahes separaabli alamruumi Y kaasruum Y^* sisaldab lemma 92 põhjal niisugust separaablit kinnist alamruumi V , et $\|y\| = \sup_{y^* \in B_V} |y^*(y)|$ iga

$y \in Y$ korral. Järelikult, pidades silmas käesoleva tõestuse esimest lõiku ning asjaolu, et lause 67 põhjal päranduvad meie teoreemi eeldused ka kinnisele alamruumile, on ruumi X separaabli alamruumi Y kaasruum Y^* võrdne alamruumiga V , seega ise samuti separaabel. See aga tähendab teoreemi 88 põhjal, et kaasruumil X^* on Radon-Nikodými omadus.

Alaoglu teoreemi (vt. teoreem 57) põhjal teame, et ühikker B_{X^*} on $*$ -nõrgalt kompaktne. Kasutame nüüd teoreemi 91 ja saame, et

$$B_{X^*} = \overline{\text{conv}}^{w^*}(w^*\text{-sexp } B_{X^*}).$$

Tähistame $V = \overline{\text{span}}(w^*\text{-sexp } B_{X^*})$ ning näitame, et võrdus (4.1) kehtib iga $x \in X$ korral.

Fikseerime arvu $\varepsilon > 0$. Kõigepealt leiame funktsionaali $x_0^* \in B_{X^*}$ selliselt, et

$$\|x\| < |x_0^*(x)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nüüd sisalduvust $x_0^* \in \overline{\text{conv}}^{w^*}(w^*\text{-sexp } B_{X^*})$ kasutades leiame funktsionaali $x^* \in \text{conv}(w^*\text{-sexp } B_{X^*})$ selliselt, et $|x_0^*(x) - x^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Kokkuvõttes

$$\|x\| < |x_0^*(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \leq |x^*(x)| + |x_0^*(x) - x^*(x)| + \frac{\varepsilon}{2} < |x^*(x)| + \varepsilon,$$

millest sisalduvuse

$$x^* \in \text{conv}(w^*\text{-sexp } B_{X^*}) \subset \text{span}(w^*\text{-sexp } B_{X^*}) \subset V$$

tõttu

$$\|x\| < \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)| + \varepsilon.$$

Järelikult kehtib ahelvõrratus

$$\|x\| \leq \sup_{x^* \in B_V} |x^*(x)| \leq \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| = \|x\|,$$

millest järeldubki võrdus (4.1).

Pidades silmas käesoleva tõestuse algusosa, jääb ainsa võimalusena, et $V = X^*$. $\square$

Järeldus 94. Olgu X Banachi ruum, mis rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust, ning kehtigu $\max |B| + c > 1$. Kui ruumil X leidub meetriline (kompaktne) aproksimeeriv pere, siis see pere on pingul.

TÕESTUS. Olgu $(T_\nu) \subset \mathcal{L}(X)$ vastavalt lõplikumõõtmeliste või kompaktsete operaatorite pere, mille korral $T_\nu x \rightarrow x$, kui $x \in X$, ning $\sup_\nu \|T_\nu\| \leq 1$. Teoreemi 93 põhjal

$$X^* = \overline{\text{span}}(w^*\text{-sexp } B_{X^*}),$$

seega piisab näidata koondumine $T_\nu^* x^* \rightarrow x^*$ ainult kõigi $x^* \in B_{X^*}$ jaoks, mille korral leidub $x \in X$, $x \neq 0$, nii, et $x^* \in S(x, B_{X^*}, \alpha)$ mistahes arvu $\alpha > 0$ korral

ja $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{diam } S(x, B_{X^*}, \alpha) = 0$ (vt. definitsioon 89). Taoline element x rahuldab mistahes arvu $\alpha > 0$ korral tingimust

$$\sup_{f \in B_{X^*}} \text{Re } f(x) - \text{Re } x^*(x) < \alpha.$$

Fikseerime arvu $\varepsilon > 0$. Siis leidub selline arv $\alpha_\varepsilon > 0$, et iga element $y^* \in S(x, B_{X^*}, \alpha_\varepsilon)$ rahuldab nõuet $\|y^* - x^*\| < \varepsilon$ (kuna $x^* \in S(x, B_{X^*}, \alpha)$ igasuguse $\alpha > 0$ korral ning $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{diam } S(x, B_{X^*}, \alpha) = 0$). Koondumise

$$(T_\nu^* x^*)(x) = x^*(T_\nu x) \xrightarrow{\nu} x^*(x),$$

tõttu leidub indeks ν_ε , mille korral kehtib implikatsioon

$$\nu \succ \nu_\varepsilon \Rightarrow |(T_\nu^* x^*)(x) - x^*(x)| < \frac{\alpha_\varepsilon}{2}.$$

Järelikult eeldusel $\nu \succ \nu_\varepsilon$ kehtib

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_{X^*}} \text{Re } f(x) - \text{Re } (T_\nu^* x^*)(x) &= \left(\sup_{f \in B_{X^*}} \text{Re } f(x) - \text{Re } x^*(x) \right) + \\ &\quad + (\text{Re } x^*(x) - \text{Re } (T_\nu^* x^*)(x)) \leq \\ &\leq \frac{\alpha_\varepsilon}{2} + \text{Re } (x^*(x) - (T_\nu^* x^*)(x)) \leq \\ &\leq \frac{\alpha_\varepsilon}{2} + |x^*(x) - (T_\nu^* x^*)(x)| < \\ &< \alpha_\varepsilon, \end{aligned}$$

mis koos hinnanguga

$$\|T_\nu^* x^*\| \leq \|T_\nu^*\| \|x^*\| \leq 1$$

tähendab, et $T_\nu^* x^* \in S(x, B_{X^*}, \alpha_\varepsilon)$. Siit aga saame juba soovitud võrratuse $\|T_\nu^* x^* - x^*\| < \varepsilon$. $\square$

4.3. Vahetud järeldused

Kuna nii omadus $M^*(a, B, c)$ kui ka $M(a, B, c)$ -võrratus päranduvad kinnistele alamruumidele ja faktorruumidele (vt. laused 58, 60, 67 ja 69), siis kehtib teoreem 83 ka ruumi X faktorruumi kinnise alamruumi jaoks. Järeldused 95 kuni

100 on teoreemist 83 vahetult saadavad, kasutades ära $M(a, B, c)$ -võrratuse ning omaduse $M^*(a, B, c)$ kohta saadud tulemusi jaotistest 3.1 kuni 3.3.

Järeldus 95. Rahuldagu Banachi ruum X $M(a, B, c)$ -võrratust ning kehtigu võrratus $\max |B| + c > 1$. Kui ruumi X faktorruumi kinnisel alamruumil Y leidub λ -kommuteeruv tõkestatud aproksimeeriv pere (T_ν) , kusjuures $\lambda < \max |B| + c$, siis pere (T_ν) on pingul.

Järeldus 96. Olgu Banachi ruum X M -ideaal oma teises kaasruumis. Kui ruumi X faktorruumi kinnisel alamruumil Y leidub λ -kommuteeruv tõkestatud kompaktne aproksimeeriv pere (T_ν) , kusjuures $\lambda < 2$, siis pere (T_ν) on pingul.

Järeldus 97. Rahuldagu Banachi ruum X $M(r, s)$ -võrratust ning kehtigu võrratus $r + s > 1$. Kui ruumi X faktorruumi kinnisel alamruumil Y leidub λ -kommuteeruv tõkestatud kompaktne aproksimeeriv pere (T_ν) , kusjuures $\lambda < r + s$, siis pere (T_ν) on pingul.

Järeldus 98. Olgu Banachi ruumil X omadus $M^*(a, B, c)$ ning kehtigu võrratus $\max |B| + c > 1$. Kui ruumi X faktorruumi kinnisel alamruumil Y leidub λ -kommuteeruv tõkestatud kompaktne aproksimeeriv pere (T_ν) , kusjuures $\lambda < \max |B| + c$, siis pere (T_ν) on pingul.

Järeldus 99. Olgu Banachi ruumil X omadus (M^*) . Kui ruumi X faktorruumi kinnisel alamruumil Y leidub λ -kommuteeruv tõkestatud kompaktne aproksimeeriv pere (T_ν) , kusjuures $\lambda < 2$, siis pere (T_ν) on pingul.

Järeldus 100. Olgu Banachi ruumil X omadus (wM^*) . Kui ruumi X faktorruumi kinnisel alamruumil Y leidub λ -kommuteeruv tõkestatud kompaktne aproksimeeriv pere (T_ν) , kusjuures $\lambda < 2$, siis pere (T_ν) on pingul.

See on sobiv koht originaalse 1988. a. artiklis [10] tõestatud Godefroy-Saphari teoreemi esitamiseks, mille praegu saame juba järelduse 96 vahetu järeldusena.

Teoreem 101 (Godefroy, Saphar). Olgu separaabel Banachi ruum X M -ideaal oma teises kaasruumis. Kui ruumil X leidub λ -kommuteeruv tõkestatud aproksimeeriv jada (T_n) , kus $\lambda < 2$, siis jada (T_n) on pingul.

Cabello ja Nieto üldistasid oma 1998. a. artiklis [1] Godefroy-Saphari teoreemi 101, võttes eeldustesse M -ideaali asemel $M(r, s)$ -võrratuse. Meie käsitluses on Cabello ja Nieto väide vahetu järeldus järeldusest 97.

Teoreem 102 (Cabello, Nieto). Rahuldagu separaabel Banachi ruum X $M(r, s)$ -võrratust ning kehtigu $r + s > 1$. Kui ruumil X leidub λ -kommuteeruv tõkestatud aproksimeeriv jada (T_n) , kus $\lambda < r + s$, siis jada (T_n) on pingul.

2001. a. ülevaateartiklis [8] esitas Godefroy teoreemi 101 ning järeldas sellest teoreemi 104. Järgnev teoreem 103 on teoreemi 104 üldistus.

Teoreem 103. Olgu X separaabel Banachi ruum, mis rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust, ning kehtigu $\max |B| + c > 1$. Kui ruumil X on λ -kommuteeruv tõkestatud aproksimatsiooniomadus, kus $\lambda < \max |B| + c$, siis nii ruumil X kui ka kaasruumil X^* on kommuteeruv meetriline aproksimatsiooniomadus.

TÕESTUS. Pidades meie eeldustel teoreemi 83 tõestusest silmas võrdust

$$X^* = \overline{\text{span}} \bigcup_{\nu} T_{\nu}^*(X^*)$$

ning fakti, et kompaktsete operaatorite kujutisruum on separaabel, saab vahetult kontrollida, et meie eeldustel on kaasruum X^* separaabel (üksikasjalikult lahtikirjutatud tõestuse võib leida näiteks bakalaureusetööst [27]). Järeldus 95 annab, et teoreemi eeldustest tulenev ruumi X λ -kommuteeruv tõkestatud aproksimeeriv jada (T_n) on pingul, seetõttu on ruumil X^* aproksimatsiooniomadus. Teoreemi 30 kohaselt on kaasruumil X^* meetriline aproksimatsiooniomadus. Järelikult on teoreemi 31 põhjal ruumil X ka meetriline aproksimatsiooniomadus. Tõestuse lõpetamiseks jääb rakendada Casazza-Kaltoni teoreemi (vt. teoreem 33) nii ruumi X kui ka kaasruumi X^* korral. $\square$

Teoreem 104 (Godefroy). Olgu separaabel Banachi ruum X M -ideaal oma teises kaasruumis. Kui ruumil X on λ -kommuteeruv tõkestatud aproksimatsiooniomadus, kus $\lambda < 2$, siis on ruumil X kommuteeruv meetriline aproksimatsiooniomadus.

4.4. Radon-Nikodými omadusega seotud järeldus

Teoreemi 106 tõestamiseks vajame artiklist [10] järgmist tulemust (vt. [10, järeldus 1.6 ja selle tõestus]).

Teoreem 105. Olgu X selline Banachi ruum, et ruumil X^* või X^{**} on Radon-Nikodými omadus. Kui ruumil X leidub lõplikumõõtmeliste operaatorite (kompaktsete operaatorite) pere $(T_{\nu}) \subset \mathcal{L}(X)$ selliselt, et $T_{\nu}^* x^* \xrightarrow{\nu} x^*$ iga $x^* \in X^*$ korral, siis nii ruumil X^* kui ka ruumil X leidub meetriline (kompaktne) aproksimeeriv pere.

Teoreem 106. Rahuldagu Banachi ruum X $M(a, B, c)$ -võrratust ning kehtigu võrratus $\max |B| + c > 1$. Kui ruumil X leidub λ -kommuteeruv tõkestatud (kompaktne) aproksimeeriv pere, kusjuures $\lambda < \max |B| + c$, siis ruumil X on pingul meetriline (kompaktne) aproksimeeriv pere. Teoreemi eeldustel on seega nii ruumil X kui ka X^* meetriline (kompaktne) aproksimatsiooniomadus.

TÕESTUS. Teoreemi 83 kohaselt on ruumil X pingul (kompaktne) aproksimeeriv pere. Lisaks sellele on kaasruumil X^* teoreemi 93 põhjal Radon-Nikodými omadus. Tõestuse lõpetamiseks jääb rakendada teoreemi 105. $\square$

4.5. Järeldused isomorfsete ruumide korral

Järgnev mõiste on defineeritud näiteks raamatu [19] sissejuhatuses lk. xi.

Definitsioon 107. Olgu X ja Y Banachi ruumid. Arvu

$$\inf \left\{ \|\mathcal{I}\| \|\mathcal{I}^{-1}\| : \mathcal{I} : X \rightarrow Y \text{ on isomorfism} \right\}$$

nimetatakse nende ruumide vaheliseks *Banach-Mazuri kauguseks* ja tähistatakse $d_{BM}(X, Y)$. Kui X ja Y ei ole omavahel isomorfsed, siis kirjutatakse $d_{BM}(X, Y) = \infty$.

Järgnev järeldus on üldistus artiklis [8] toodud järeldusele 109.

Järeldus 108. Olgu X separaabel Banachi ruum, mis rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust ning kehtigu võrratus $\max |B| + c > 1$. Kui leidub Banachi ruum Y , millel on meetriline aproksimatsiooniomadus nii, et $d_{BM}(X, Y) < \max |B| + c$, siis on nii ruumil X kui ka kaasruumil X^* kommuteeruv meetriline aproksimatsiooniomadus.

TÕESTUS. Piisab näidata, et ruumis X saame valida lõplikumõõtmeliste operaatorite jada (T_n) , mis rahuldab teoreemi 103 eeldusi.

Tähistame $\gamma = \max |B| + c$, siis $\gamma > 1$. Eeldusest $d_{BM}(X, Y) < \gamma$ saame, et leidub selline isomorfism $\mathcal{I} : X \rightarrow Y$, mille korral

$$\|\mathcal{I}\| \|\mathcal{I}^{-1}\| = \gamma - \varepsilon,$$

kus $\varepsilon > 0$ on mingi arv.

Casazza-Kaltoni teoreemi (vt. teoreem 33) põhjal võime valida ruumis Y lõplikumõõtmeliste operaatorite jada (S_n) selliselt, et $\limsup \|S_n\| \leq 1$ mistahes n korral, $S_n y \xrightarrow{n} y$ mistahes $y \in Y$ korral ning $S_n S_k = \overset{n}{S_k} S_n$ mistahes $n, k \in \mathbb{N}$ korral. Ülemise piirväärtuse definitsiooni kohaselt leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n \geq N$, siis

$$\|S_n\| \leq \sup_{k \geq n} \|S_k\| < 1 + \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

Valime ruumis X operaatorid $T_n = \mathcal{I}^{-1} S_{N+n} \mathcal{I}$, $n \in \mathbb{N}$. Siis nad on lõplikumõõtmelised (sest operaatorid S_n on lõplikumõõtmelised). Samuti

$$\|T_n\| = \|\mathcal{I}^{-1} S_{N+n} \mathcal{I}\| \leq \|\mathcal{I}^{-1}\| \|S_{N+n}\| \|\mathcal{I}\| < (\gamma - \varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon}{\gamma}\right) = \gamma - \frac{\varepsilon^2}{\gamma},$$

$$T_n x = (\mathcal{I}^{-1} S_{N+n} \mathcal{I}) x = \mathcal{I}^{-1} (S_{N+n}(\mathcal{I}x)) \xrightarrow{n} \mathcal{I}^{-1}(\mathcal{I}x) = x$$

(kasutasime operaatori $\mathcal{I}^{-1}$ pidevust ja seda, et $S_n y \xrightarrow{n} y$ mistahes $y \in Y$ korral) ning

$$\begin{aligned} T_n T_k &= (\mathcal{I}^{-1} S_{N+n} \mathcal{I}) (\mathcal{I}^{-1} S_{N+k} \mathcal{I}) = \mathcal{I}^{-1} S_{N+n} S_{N+k} \mathcal{I} = \\ &= \mathcal{I}^{-1} S_{N+k} S_{N+n} \mathcal{I} = (\mathcal{I}^{-1} S_{N+k} \mathcal{I}) (\mathcal{I}^{-1} S_{N+n} \mathcal{I}) = \\ &= T_k T_n \end{aligned}$$

mistahes $n, k \in \mathbb{N}$ korral (kasutasime seda, et $S_n S_k = S_k S_n$ mistahes $n, k \in \mathbb{N}$ korral). $\square$

Erijuhul, kui ruum X on M -ideaal oma teises kaasruumis, tuleneb järeldusest 108 vahetult

Järeldus 109. Olgu X separaabel Banachi ruum, mis on M -ideaal oma teises kaasruumis. Kui leidub Banachi ruum Y , millel on meetriline aproksimatsiooniomadus nii, et $d_{BM}(X, Y) < 2$, siis on ruumil X kommuteeruv meetriline aproksimatsiooniomadus.

4.6. Ideaalid ja ideaaliprojektorid

Järgides artikli [9] terminoloogiat, defineerime järgmised mõisted.

Definitsioon 110. Banachi ruumi X kinnist mittetriviaalset alamruumi Y nimetatakse *ideaaliks*, kui ruumil X^* leidub projektor P selliselt, et $\|P\| = 1$ ning

$$\ker P = Y^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(y) = 0 \quad \forall y \in Y\}.$$

Projektorit P nimetatakse sel juhul *ideaaliprojektoriks*.

Definitsioon 111. Olgu X Banachi ruum ning Y ideaal ruumis X . Kui leidub ideaaliprojektor P nii, et kehtib võrdus

$$\|Px^*\| + \|x^* - Px^*\| = \|x^*\| \quad \forall x^* \in X^*,$$

siis öeldakse, et Y on M -ideaal ruumis X .

M -ideaalide kohta saadud tulemusi võib lugeja leida näiteks raamatust [15]. Mõiste „ M -ideaal oma teises kaasruumis“ on juba jaotise 3.2 alguses eraldi defineeritud ning üldistatud $M(a, B, c)$ -võrratuse mõisteks.

Definitsioon 112. Olgu X Banachi ruum ning Y ideaal ruumis X . Kui leidub ideaaliprojektor P nii, et kehtib võrdus

$$\|I - 2P\| = 1,$$

siis öeldakse, et Y on u -ideaal ruumis X . Kui kehtib võrdus

$$\|I - (1 + \lambda)P\| = 1,$$

niipea, kui $|\lambda| = 1$, siis öeldakse, et Y on h -ideaal ruumis X .

Definitsioonist 112 on selge, et iga u -ideaal on ühtlasi ka h -ideaal ning need mõisted ühtivad reaalsete ruumide korral. Banachi ruumide u - ja h -ideaalide kohta leiab tulemusi artiklist [9], täiendavate viidete jaoks vt. artiklit [23].

Definitsioon 113. Olgu X Banachi ruum ning Y ideaal ruumis X . Kui leidub ideaaliprojektor P ja leiduvad reaalarvud $r, s \in (0, 1]$ selliselt, et kehtib võrratus

$$r\|Px^*\| + s\|x^* - Px^*\| \leq \|x^*\| \quad \forall x^* \in X^*,$$

siis öeldakse, et Y on $M(r, s)$ -võrratust rahuldav ideaal ruumis X .

$M(r, s)$ -võrratust rahuldavate ideaalide kohta võib tulemusi leida artiklitest [1], [12], [13].

Bakalaureusetöös [11] on detailselt tõestatud fakt, et iga Banachi ruum $X = j_X(X)$ on ideaal ruumis X^{**} , kusjuures ideaaliprojektoriks on kanooniline projektor $\pi_X = j_{X^*}(j_X)^* : X^{***} \rightarrow X^{***}$.

Võtame Banachi ruumi X korral kasutusele tähise

$$\mathcal{I}(X) = \text{span}(\mathcal{K}(X) \cup \{I_X\}).$$

Nüüd võime tsiteerida artiklist [23] edaspidises vajaminevat kolme ideaalidega seotud tulemust. (Toome siin ainult selle osa, mida edasises kasutame.)

Teoreem 114 (vt. [23, järelalus 4.3, $1^\circ \Leftrightarrow 7^\circ$]). Olgu X Banachi ruum. Siis $\mathcal{K}(X)$ on M -ideaal ruumis $\mathcal{L}(X)$ parajasti siis, kui mistahes operaatori $S \in B_{\mathcal{L}(X)}$, kus $\dim \text{ran } S = 1$, korral leidub pingul meetriline kompaktne aproksimeeriv pere (T_ν) selliselt, et

$$\limsup_{\nu} \|I_X - T_\nu + S\| \leq 1.$$

Teoreem 115 (vt. [23, järelalus 4.4, $1^\circ \Leftrightarrow 4^\circ$]). Olgu X Banachi ruum ning rahuldagu arvud $r, s \in (0, 1]$ võrratust $r + s/2 > 1$. Siis $\mathcal{K}(X)$ on $M(r, s)$ -võrratust rahuldav ideaal ruumis $\mathcal{I}(X)$ parajasti siis, kui mistahes operaatori $S \in B_{\mathcal{L}(X)}$, kus $\dim \text{ran } S = 1$, korral leidub pingul meetriline kompaktne aproksimeeriv pere (T_ν) selliselt, et

$$\limsup_{\nu} \|s(I_X - T_\nu) + rS\| \leq 1.$$

Teoreem 116 (vt. [23, järeldus 4.5, $1^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$]). Olgu X Banachi ruum, kusjuures hulga $B \subset \mathbb{K}$ korral $\max |B| > 1$. Siis $\mathcal{K}(X)$ on ruumis $\mathcal{L}(X)$ ideaal ja ideaali-projektor P rahuldab tingimust $\|aI_{\mathcal{L}(X)^*} + bP\| \leq 1$ mistahes $b \in B$ korral ning täidetud on tingimus $\|aI_{X^{***}} + b\pi_X\| \leq 1$ mistahes $b \in B$ korral parajasti siis, kui leidub pingul meetriline kompaktne aproksimeeriv pere (T_ν) selliselt, et

$$\limsup_{\nu} \|aI_X + bT_\nu\| \leq 1 \quad \forall b \in B.$$

4.7. Kompaktsete operaatorite ideaalidega seotud järeldused

Selle jaotise järeldused 119–122 saadakse teoreemidest 114–116 tuginedes all-olevatele teoreemidele 117 ja 118.

Teoreem 117 (vt. [23, teoreem 3.5]). Olgu X Banachi ruum, kusjuures $\max |B| + c > 1$. Järgmised väited on samaväärsed:

- 1) ruumil X on meetriline (kompaktne) aproksimatsiooniomadus ning omadus $M^*(a, B, c)$;
- 2) mistahes operaatori $S \in B_{\mathcal{K}(X)}$ korral leidub pingul meetriline (kompaktne) aproksimeeriv pere (T_ν) selliselt, et

$$\limsup_{\nu} \|aI_X + bT_\nu + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B;$$

- 3) mistahes operaatori $S \in B_{\mathcal{L}(X)}$, kus $\dim \operatorname{ran} S = 1$, korral leidub pingul meetriline (kompaktne) aproksimeeriv pere (T_ν) selliselt, et

$$\limsup_{\nu} \|aI_X + bT_\nu + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B.$$

Teoreem 118. Olgu X Banachi ruum, millel on omadus $M^*(a, B, c)$, kehtigu $\max |B| + c > 1$ ja olgu $\lambda \in \mathbb{K}$ selline, et $1 \leq \lambda < \max |B| + c$. Kui ruumil X on λ -kommuteeruv tõkestatud (kompaktne) aproksimatsiooniomadus, siis mistahes operaatori $S \in B_{\mathcal{K}(X)}$ korral leidub pingul meetriline (kompaktne) aproksimeeriv pere (T_ν) ruumil X selliselt, et

$$\limsup_{\nu} \|aI_X + bT_\nu + cS\| \leq 1 \quad \forall b \in B.$$

TÕESTUS. Eeldusest, et ruumil X on omadus $M^*(a, B, c)$, saame, et ruum X rahuldab $M(a, B, c)$ -võrratust (vt. lause 63). Edasi kasutame teoreemi 106 ning

saame, et ruumil X on meetriline (kompaktne) aproksimatsiooniomadus. Tõestuse lõpetamiseks on jäänud kasutada teoreemi 117. $\square$

Kasutame nüüd teoreemi 118 omaduse $M^*(a, B, c)$ erijuhtude korral.

Järeldus 119. *Olgu X Banachi ruum, millel on omadus (M^*) ning olgu $\lambda \in \mathbb{K}$ selline, et $1 \leq \lambda < 2$. Kui ruumil X on λ -kommuteeruv tõkestatud kompaktne aproksimatsiooniomadus, siis $\mathcal{K}(X)$ on M -ideaal ruumis $\mathcal{L}(X)$.*

TÕESTUS. Teoreemi 118 abil saame, et mistahes operaatori $S \in B_{\mathcal{K}(X)}$ jaoks leidub pingul meetriline kompaktne aproksimeeriv pere $(T_\nu) \subset X$ selliselt, et

$$\limsup_{\nu} \|I_X - T_\nu + S\| \leq 1.$$

Järelikult teoreemi 117 põhjal leidub mistahes operaatori $S \in B_{\mathcal{L}(X)}$, kus $\dim \operatorname{ran} S = 1$, jaoks pingul meetriline kompaktne aproksimeeriv pere $(T_\nu) \subset X$ selliselt, et

$$\limsup_{\nu} \|I_X - T_\nu + S\| \leq 1.$$

Tõestuse lõpetamiseks on jäänud kasutada teoreemi 114. $\square$

Järeldus 120. *Olgu X Banachi ruum, millel on omadus $M^*(s, \{-s\}, r)$, kusjuures $r + s/2 > 1$, $r, s \in (0, 1]$, ning olgu $\lambda \in \mathbb{K}$ selline, et $1 \leq \lambda < r + s$. Kui ruumil X on λ -kommuteeruv tõkestatud kompaktne aproksimatsiooniomadus, siis $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{I}(X)$ on ideaal, mis rahuldab $M(r, s)$ -võrratust.*

TÕESTUS. Teoreemi 118 abil saame, et mistahes operaatori $S \in B_{\mathcal{K}(X)}$ jaoks leidub pingul meetriline kompaktne aproksimeeriv pere $(T_\nu) \subset X$ selliselt, et

$$\limsup_{\nu} \|sI_X - sT_\nu + rS\| \leq 1.$$

Järelikult teoreemi 117 põhjal leidub mistahes operaatori $S \in B_{\mathcal{L}(X)}$, kus $\dim \operatorname{ran} S = 1$, jaoks pingul meetriline kompaktne aproksimeeriv pere $(T_\nu) \subset X$ selliselt, et

$$\limsup_{\nu} \|sI_X - sT_\nu + rS\| \leq 1.$$

Tõestuse lõpetamiseks on jäänud kasutada teoreemi 115. $\square$

Järeldus 121. *Olgu X Banachi ruum, millel on omadus $M^*(1, B, 0)$, kusjuures $\max |B| > 1$, ning olgu $\lambda \in \mathbb{K}$ selline, et $1 \leq \lambda < \max |B|$. Kui ruumil X on λ -kommuteeruv tõkestatud kompaktne aproksimatsiooniomadus, siis $\mathcal{K}(X)$ on ideaal ruumis $\mathcal{L}(X)$ ja ideaaliprojektor P rahuldab tingimust $\|aI_{\mathcal{L}(X)^*} + bP\| \leq 1$ mistahes $b \in B$ korral.*

TÕESTUS. Teoreemi 118 abil saame, et leidub pingul meetriline (kompaktne) aproksimeeriv pere $(T_\nu) \subset X$ selliselt, et

$$\limsup_{\nu} \|aI_X + bT_\nu\| \leq 1 \quad \forall b \in B.$$

Tõestuse lõpetamiseks on jäänud kasutada teoreemi 116. □

Järeldus 122. Olgu X (kompleksne) Banachi ruum, millel on omadus (wM^*) (kompleksne omadus (wM^*)) ning olgu $\lambda \in \mathbb{K}$ selline, et $1 \leq \lambda < 2$. Kui ruumil X on λ -kommuteeruv tõkestatud kompaktne aproksimatsiooniomadus, siis $\mathcal{K}(X)$ on u -ideaal (h -ideaal) ruumis $\mathcal{L}(X)$.

TÕESTUS. Peame silmas, et ruumil X on omadus (wM^*) parajasti siis, kui tal on omadus $M^*(1, \{-2\}, 0)$ (vt. lause 53); kompleksel ruumil X on kompleksne omadus (wM^*) parajasti siis, kui tal on omadus $M^*(1, \{b \in \mathbb{C} : |b+1| = 1\}, 0)$ (vt. lause 54). Nüüd rakendame järeldust 121 vastavalt hulkade

$$B = \{-2\}$$

ning

$$B = \{b \in \mathbb{C} : |b+1| = 1\} = \{-(1+\lambda) : |\lambda| = 1\}$$

korral (mõlemal juhul $\max |B| = 2 > 1$). □

Indeks

- absoluutselt kumer hulk, 7
- aproksimatsiooniomadus, 19
 - kommuteeruv meetriline, 21
 - kommuteeruv meetriline kompaktne, 21
 - kommuteeruv tõkestatud, 21
 - kommuteeruv tõkestatud kompaktne, 21
 - kompaktne, 19
 - meetriline, 20
 - meetriline kompaktne, 20
 - tõkestatud, 20
 - tõkestatud kompaktne, 20
- aproksimeeriv jada, 20
- aproksimeeriv pere, 20
 - kommuteeruv meetriline, 21
 - kommuteeruv meetriline kompaktne, 21
 - kommuteeruv tõkestatud, 21
 - kommuteeruv tõkestatud kompaktne, 21
 - kompaktne, 20
 - meetriline, 20
 - meetriline kompaktne, 20
 - pingul, 20
 - tõkestatud, 20
 - tõkestatud kompaktne, 20
- Banach-Mazuri kaugus, 72
- Bochneri integraal
 - μ -mõõtuva funktsiooni, 15
 - μ -mõõtuva lihtsa funktsiooni, 14
- Dixmier' karakteristik, 55
- eksponeeritud
 - *-nõrgalt funktsionaal, 64
 - *-nõrgalt tugevalt funktsionaal, 64
 - punkt, 64
 - tugevalt punkt, 64
- ideaal, 73
 - M -ideaal, 73
 - teises kaasruumis, 49
 - $M(r, s)$ -võrratust rahuldav, 74
 - h -ideaal, 74
 - u -ideaal, 74
- ideaalprojektor, 73
- kumer hulk, 7
- lihtne funktsioon, 13
 - μ -mõõtuv, 13
- μ -mõõtuv funktsioon, 13
- Minkowski funktsionaal, 10
- neelav hulk, 6
- omadus (M^*), 46
- omadus (wM^*), 46

kompleksne, 46
 omadus $M^*(a, B, c)$, 46
 projektor
 kanooniline, 49
 Radon-Nikodými omadus, 64
 tasakaalus hulk, 6
 teoreem
 Alaoglu, 47
 Casazza-Kaltoni, 21
 Godefroy-Saphari, 70
 Grothendiecki, 20, 21
 $M(a, B, c)$ -võrratus, 50
 $M(r, s)$ -võrratus, 54
 viil, 63
 *-nõrk, 63
 viilutatav, 63
 *-nõrgalt, 63
 Willise ruum, 29

The Commuting Approximation Property of Banach Spaces

Indrek Zolk

Summary

The research on approximation properties has played an important role in the theory of Banach spaces already from Grothendieck's systematic studies initiated in the 1950s. Several variants of approximation properties and relationships between them have been found out since then.

This master thesis gives some results about approximation properties in Banach spaces. The thesis consists of four chapters.

In the first chapter various prerequisites from topological vector spaces, measure theory and theory of Banach spaces are pronounced, including Minkowski functionals, Bochner-integrable functions, and approximation properties of Banach spaces.

The second chapter discusses the result by Willis from 1992: *the compact approximation property does not imply the approximation property*, thus serving as an example of the techniques used in the field of approximation properties. What is more, it is shown in the second chapter that Willis's example of the compact approximation of the identity is commuting, thus establishing the stronger claim: *the commuting compact approximation property does not imply the approximation property*.

The third chapter introduces several results and notions about the geometry of Banach spaces, including the property $M^*(a, B, c)$ and the $M(a, B, c)$ -inequality. The Godefroy-Saphar theorem discussed there demonstrates how the geometric structure (being M -embedded) of a separable Banach space permits to lift commuting approximation properties from the space to its dual space. The main result of the third chapter is a generalisation of the Godefroy-Saphar theorem, allowing to drop the assumption on separability, using compact operators instead of finite rank operators, and extending the notion “ M -embedded Banach space” to “Banach space satisfying the $M(a, B, c)$ -inequality”.

The fourth chapter consists of several applications to the generalisation of the Godefroy-Saphar theorem, discussing also some additional results and notions (Radon-Nikodým property, concepts of (strongly) exposed points, and ideals in Banach spaces) for that task. The main result of the fourth chapter is:

Theorem. *Let X be a Banach space satisfying the $M(a, B, c)$ -inequality with $\max |B| + c > 1$ and let $1 \leq \lambda < \max |B| + c$. If X has a λ -commuting bounded (compact) approximation of the identity, then X has a shrinking metric (compact) approximation of the identity. In particular, both X and X^* have the metric (compact) approximation property.*

Kirjandus

- [1] J. C. CABELLO, E. NIETO, *On properties of M -ideals*, Rocky Mountain J. Math, **28** (1998), 61–93.
- [2] P. CASAZZA, *Approximation properties*, in: Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 1 (W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, eds.), Elsevier, Amsterdam, 2001, pp. 271–316.
- [3] P. CASAZZA, N. J. KALTON, *Notes on approximation properties in separable Banach spaces*, in: Geometry of Banach spaces. Proc. Conf. Strobl (1989) (P. F. X. Müller and W. Schachermayer, eds.), London Math. Soc. Lecture Notes Series 158, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, pp. 49–63.
- [4] J. DIXMIER, *Sur un théorème de Banach*, Duke Math. J. **15** (1948), 1057–1071.
- [5] J. DIESTEL, J. J. UHL, *Vector Measures*, Mathematical Surveys 15, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1977.
- [6] P. ENFLO, *A counterexample to the approximation property for Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973), 309–317.
- [7] M. FABIAN, P. HABALA, P. HÁJEK, V. MONTESINOS SANTALUCÍA, J. PELANT, V. ZIZLER, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer, New York, 2001.
- [8] G. GODEFROY, *The Banach space c_0* , Extracta Math. **16**, (2001), 1–25.
- [9] G. GODEFROY, N. J. KALTON, P. D. SAPHAR, *Unconditional ideals in Banach spaces*, Studia Math. **104** (1993), 13–59.
- [10] G. GODEFROY, P. D. SAPHAR, *Duality in spaces of operators and smooth norms on Banach spaces*, Illinois J. Math. **32** (1988), 672–695.
- [11] R. HALLER, *$M(r, s)$ -võrratus*, Bakalaureusetöö, Tartu Ülikool, Tartu, 1996.

- [12] R. HALLER, E. OJA, *Geometric characterizations of positions of Banach spaces in their biduals*, Archiv Math. **69** (1997), 227–233.
- [13] R. HALLER, E. OJA, E. PLEWNIA, *Quantitative versions of hereditary results on M -ideals of compact operators*, Math. Nachr. **246-247** (2002), 106–120.
- [14] P. HABALA, P. HÁJEK, V. ZIZLER, *Introduction to Banach Spaces*, I, Charles University, Prague, 1996.
- [15] P. HARMAND, D. WERNER, W. WERNER, *M -ideals in Banach Spaces and Banach Algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 1547, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.
- [16] N. J. KALTON, *M -ideals of compact operators*, Illinois J. Math. **37** (1993), 147–169.
- [17] T. LEIGER, *Topoloogilised vektorruumid*, Tartu Ülikool, 2001 (loengukursus TÜ matemaatika-informaatikateaduskonna üliõpilastele).
- [18] Å. LIMA, *Property (wM^*) and the unconditional metric compact approximation property*, Studia Math. **113** (1995), 249–263.
- [19] J. LINDENSTRAUSS, L. TZAFRIRI, *Classical Banach Spaces*, I, Sequence Spaces, Springer, Berlin-Heidelberg, 1977.
- [20] R. MEGGINSON, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, New York, 1998.
- [21] K. MIKKOR, *Nõrgalt kompaktsete operaatorite faktoriseerimine*, Magistritöö, Tartu Ülikool, Tartu, 2001.
- [22] E. OJA, *Géométrie des espaces de Banach ayant des approximations de l'identité contractantes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), 1167–1170.
- [23] E. OJA, *Geometry of Banach spaces having shrinking approximations of the identity*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 2801–2823.
- [24] E. OJA, P. OJA, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.
- [25] R. R. PHELPS, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lecture Notes in Math., vol. 1364, Springer, Berlin-Heidelberg, 1993.
- [26] R. RYAN, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer, London, 2002.

- [27] I. ZOLK, *Godefroy-Saphari teoreemi üldistus*, Bakalaureusetöö, Tartu Ülikool, Tartu, 2005.
- [28] G. A. WILLIS, *The compact approximation property does not imply the approximation property*, *Studia Math.* **103** (1992), 99–108.
- [29] Н. ДАНФОРД, ДЖ. Т. ШВАРЦ, *Линейные операторы, Общая теория*, Издательство иностранной литературы, Москва, 1962.
- [30] А. Н. КОЛМОГОРОВ, С. В. ФОМИН, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва, 1989.
- [31] Н. МОРОЗОВА, *Свойство метрической аппроксимации*, Бакалаврская работа, Тартуский Университет, Тарту, 2004.
- [32] Р. ЭДВАРДС, *Функциональный анализ, Теория и приложения*, Мир, Москва, 1969.