P.Kard

RELATIIVSUSTEOORIA ALGKURSUS

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Teoreetilise füüsika kateeder

P.Kard

RELATIIVSUSTEOORIA ALGKURSUS

TARTU 1978

Kinnitatud füüsika- keemiateaduskonna
nõukogus 23. septembril 1977

Пауль К а р д. НАЧАЛЬНЫЙ КУРС ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. На эстонском языке. Тартуский государственный университет. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18. Vastutav toimetaja A. Koppel. Korrektor L.Uba. Paljundamisele antud 24.04.1978. Kirjutuspaber 30x42 1/4. Trükipooganid 7,25. Tingtrükipoognaid 6,74. Arvestuspoognaid 6,47. Trükiarv 600. TRÜ trükikoda, ENSV, Tartu, Palsoni t. 14. Tell.nr. 553. Hind 20 kop.

SAATEKS

Käesolev õppevahend sisaldab algosa erirelatiivsusteooria kursusest, mis on ette nähtud elektrodünaamika programmis füüsikaosakonna üliõpilastele III õppeaastal. Relatiivsusteooria põhiideede ja -mõistete taustal antakse raamatus relativistliku dünaamika ja kinemaatika ülesehitus. Seejuures on aine järjestus tavalisega võrreldes teistsugune. Üks tähtsamaid lähtemõisteid on meil valguse massi mõiste, mida põhjendame algul klassikalise füüsika vahenditega. Relatiivsusteooriasse viiduna võimaldab see mõiste vahetult asuda relativistliku dünaamika põhijoonte arendamisele, ilma et selleks oleks vaja Lorentzi teisendusi või relativistlikke kinemaatilisi efekte. Need jäävad lõppu. Niisugune ülesehitus võimaldab tõhusamalt avada relatiivsusteooria olemust ja ideelist sisu ning ilmekamalt esile tuua selle olulisimaid tulemusi. Ühtlasi saavutatakse sel teel märkimisväärne lihtsus, mis lubab osa esitatud materjalist kasutada õpimaterjalina ka madalamatel tasemetel - üldfüüsika ülikoolikursuses (umbes §-d 1 - 8, 10, 14, 15, 17, 19, 20) ja keskkooli lõpuklassides (umbes §-d 1 - 7, 14, 15, 17, 19), ilma et seejuures kannataks rangus või sidusus.

Neljamõõtmelist formalismi ega relativistlikku elektrodünaamikat käesolev algkursus ei sisalda. See kuulub relatiivsusteooria teistesse osadesse. Lõpus me ainult juhime tähelepanu sündmuste maailma nendele struktuuriomadustele, mis ilmnevad relativistliku kinemaatika iseärasustes. Need saavadki lähteks neljamõõtmelisele formalismile.

P. Kard

SISSEJUHATUS

Sissejuhatuseks piisab, kui ütleme paar sõna relatiivsusteooria ühest radikaalseimast tulemusest, mida kavatseme eelseisvas kursuses arvestada võimalikult varakult ning järjekindlalt.

Nagu klassikalises füüsikas, nii on ka relatiivsusteoorias suure tähtsusega jäävusseadused. Jäävate suuruste hulka kuuluvad mass, impulss, energia, elektrilaeng ja rida teisi. Nad on jäävad nii klassikalises kui ka relativistlikus füüsikas, ent nende mõistete sisu ei ole mõlemal pool igakord just sama. Suurim erinevus puudutab massi ja energiat.

Klassikalises füüsikas on mass ja energia kaks olemuselt täiesti erinevat suurust. Mass on inertsuse mõõt, väljendades ühtlasi mõningas mõttes "ainehulka". Energia on seevastu liikumise mõõt. Liikumine on kas makroskoopiline tegelik liikumine, mille mõõt on kineetiline energia, või "varjatud" potentsiaalne liikumine, mille mõõt on potentsiaalne energia, või mikroskoopiline siseliikumine (mõõt siseenergia). Massi ja energia vahel pole klassikalises füüsikas mingit kindlat seost, nagu pole midagi ühist ka aine ja liikumise vahel.

Relatiivsusteooria üks tähtsamaid tulemusi on, vastupidi, massi ja energia põhimõttelise identsuse avastamine: mass on energia ja energia on mass. Seda tõde nimetatakse harilikult massi ja energia ekvivalentsuse seaduseks. Muuhulgas tähendab see, et kaht sõltumatut massi ja energia jäävuse seadust relatiivsusteoorias ei ole. Mõlemaid asendab üksainus massi-energia jäävusseadus.

Massi ja energia ekvivalentsuse seadusele jõudmiseks on kõige loomulikum hakata teooriat üles ehitama kaht mõistet kasutamata. On olemas kaks mõeldavat teed: kas loobume algul energia mõistetest ja võtame loodavasse teooriasse ainult massi mõiste või vastupidi. Esimesel juhul peab varem või hiljem selguma, et energia on mass, teisel juhul - et mass on energia. Tegelikult osutub metoodiliselt palju efektiivsemaks esimene tee. Valimegi selle ja hakkame relatiivsusteooriat üles ehitama ilma energia mõisteteta.

Alustuseks teeme esmalt lühiülevaate klassikalise mehhaanika jäävusseadustest.

§ 1.

MASS, IMPULSS JA ENERGIA KLASSIKALISES MEHHAANIKAS

Käesolevas paragrahvis vaatleme klassikalise mehhaanika tähtsamaid suurusi: massi, impulssi ja energiat, pöörates peatähelepanu nende jäävusele.

Nagu juba eespool öeldud, on keha mass tema inertsuse mõõt. See asjaolu avaldub klassikalise mehhaanika põhivõrrandis. Newtoni II seaduse kohaselt

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{1.1}$$

kus $\vec{F}$ on kehale rakendatud jõud, $\vec{a}$ kiirendus, mille keha selle jõu mõjul saab, ja m on keha mass. Mida suurem on mass, seda väiksema kiirenduse saab sama jõu mõjul keha. See tähendabki, et mass on inertsuse mõõt.

Mass on jääv. See tähendab, et iga keha mass on tema olekust sõltumatu. Mass ei muutu ka võimalike keemiliste muutuste korral. Kui keha jaguneb mitmeks tükiks, siis võrdub tükkide masside summa esialgse keha massiga, ja vastupidi: mitme keha liitudes üheks kehaks on viimase mass võrdne liituvate kehade masside summaga. Niisiis, mis tahes kehade suletud kogumi summaarne mass on jääv. Massi jäävuse seadus põhineb arvukatel kogemustel, mis ei piirdu ainult mehhaanikaga, vaid kuuluvad kogu füüsika, keemia ja teiste loodusteaduste alale.

Liikuva keha impulsiks nimetatakse tema massi ja kiiruse korrutist. Impulss on teatavas mõttes liikumise mõõt, mistõttu teda on varemalt sageli nimetatud ka liikumishulgaks. Nagu kiiruski, on impulss vektor. Võttes kiiruse tähiseks $\vec{u}$ ja impulsi tähiseks $\vec{p}$, võime kirjutada:

$$\vec{p} = m\vec{u} \,. \tag{1.2}$$

Newtoni II ja III seadusest järgneb, et kehade suletud kogumi summaarne impulss on jääv suurus. Üksikute kogumisse kuuluvate kehade impulss võib muutuda, kuid mis tahes keha impulsi muutuse kompenseerivad teiste kehade impulsside muutused nii, et impulsside kogusumma jääb muutumatuks. Summa on siin mõeldud muidugi vektoriaalses mõttes.

Massi ja impulsi jäävuse seadused kehtivad klassikalises mehhaanikas piiramatult ning täiesti üldiselt. Mõnevõrra teisiti on lugu <u>energia</u> jäävusega. Mehhaanilise energiana tunneme kineetilist ja potentsiaalset energiat. Keha kineetiline energia T avaldub valemina

$$T = mu^2/2 \,, \tag{1.3}$$

potentsiaalne energia U sõltub keha asukohast potentsiaalses (konservatiivses) jõuväljas (näit. raskusväljas). Kui muid jõude peale konservatiivsete ei ole, siis on keha summaarne mehhaaniline energia jääv:

$$T + U = const. \tag{1.4}$$

Samasuguse kujuga jäävuse valem kehtib ka mitme keha suletud kogumi korral, kusjuures T on kõikide kehade kineetiliste energiate summa ja U on potentsiaalsete energiate summa.

Ent alati pole kõikide jõudude konservatiivsuse eeldus täidetud. Sel korral pole mehhaaniline energia jääv.

Füüsikas kehtib küll universaalne energia jäävuse seadus. Mehhaanilise energia mittejäävus tähendab lihtsalt selle muundumist teisteks energialiikideks. Arusaadavalt pole sellise muundumise korral jääv omaette mingit kindlat liiki energia, vaid jääv on ainult igat liiki energiate summa.

Me nimetame mehhaanilisi protsesse, milles mehhaaniline energia on jääv, <u>elastseteks</u>, ja protsesse, milles mehhaaniline energia ei ole jääv, <u>mitteelastseteks</u>. Need nimetused on pärit peamiselt põrketeooriast. Kahe keha põrkumisel muundub alati osa nende mehhaanilisest energiast siseenergiaks (kehad deformeeruvad ja soojenevad). Siis öeldakse, et põrge on suuremal või vähemal määral mitteelastne. Ideaalsel piirjuhul võime aga vaadelda põrget täielikult elastsena, nimelt siis, kui mehhaanilise energia kadu siseenergiaks on väga väike, nii et seda ei ole praktiliselt mõtet arvestada. Sel juhul on kõik deformatsioonid mööduva iseloomuga ja pärast põrget taastub täielikult kehade kuju ja siseolek.

Alljärgnevalt vaatleme põrkeprotsesse lähemalt. Vaatame, mida võimaldavad põrkeprotsesside kulgemise ja tulemuste kohta kindlaks teha jäävusseadused. On märkimisväärne, et seda on küllaltki palju. Arvestades ainult jäävusseadusi, saab põrget kirjeldada üsna täielikult, ilma et oleks vaja teada põrke vältel kehade vahel mõjunud jõudude kulgemise üksikasju. Piirdume ainult kahe keha tsentraalsete otsepõrgetega, s. o. sellistega, mille puhul mõlema keha kiirused on enne ja pärast põrget samasihilised. Eeldame ka, et välised konservatiivsed jõud puuduvad, seega potentsiaalset energiat kehadel ei ole. Mehhaanilise energiana tuleb arvestada ainult kineetilist energiat.

Olgu kahe keha massid m_1 ja m_2, nende algkiirused v_1 ja v_2 ja lõppkiirused u_1 ja u_2. Kiirust loeme teatavas kindlas suunas (tavalise kombe kohaselt vasakult paremale) positiivseks, vastassuunas negatiivseks. Kogumass m on

$$m = m_1 + m_2 \ ; \tag{1.5}$$

algimpulsid tähistame p_1, p_2, lõppimpulsid q_1, q_2, jääva koguimpulsi p, nii et

$$p = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{1.6}$$

ja

$$p = q_1 + q_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \ . \tag{1.7}$$

Ülesanne seisneb lõppkiiruste (või lõppimpulsside) määramises etteantud masside ja algkiiruste (või algimpulsside) järgi, arvestades ühtlasi võimalikku mehhaanilise energia kadu.

Olgu energia enne põrget T ja pärast põrget αT :

$$T = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) \qquad (1.8)$$

ja

$$\alpha T = \frac{1}{2}(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2) \; ; \qquad (1.9)$$

α tähendab siin kineetilise energia murdosa, mis säilib põrkeprotsessis, kusjuures ilmselt $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Kui $\alpha = 1$, siis on põrge elastne, kui $\alpha < 1$, siis mitteelastne.

Defineerime veel järgmised suurused. Teise keha algkiirus esimese suhtes olgu

$$v = v_2 - v_1 \qquad (1.10)$$

ja lõppkiirus

$$u = u_2 - u_1 \; . \qquad (1.11)$$

Mõlema keha taandatud massina defineerime suuruse

$$\overline{m} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{m} \; . \qquad (1.12)$$

Asudes nüüd ülesande lahendamisele, arvutame esmalt valemitest (1.5) ja (1.8) suuruse $2mT$. Arvestades impulsi avaldist (1.6), leiame:

$$2mT = p^2 + m_1 m_2 (v_2 - v_1)^2 \qquad (1.13)$$

ehk (1.10) ja (1.12) põhjal

$$T = \frac{p^2}{2m} + \frac{\overline{m} v^2}{2} \; . \qquad (1.14)$$

Analoogiliselt saame valemitest (1.5), (1.7), (1.9), (1.11) ja (1.12) seose

$$\alpha T = \frac{p^2}{2m} + \frac{\overline{m} u^2}{2} \; . \qquad (1.15)$$

Need seosed võimaldavad määrata suhtelise kiiruse u. Kui põrge on elastne, siis saab valem (1.15) kuju

$$T = \frac{p^2}{2m} + \frac{\overline{m}u^2}{2} \; ; \qquad (1.16)$$

selle kõrvutamine valemiga (1.14) annab otsekohe:

$$u = \pm v \, . \qquad (1.17)$$

Kui aga põrge on mitteelastne, siis tuleb u avaldada otse valemist (1.15). Arvestades seejuures ka avaldist (1.12), leiame:

$$u = \pm \sqrt{\frac{2\alpha m T - p^2}{m_1 m_2}} = \pm \sqrt{\alpha v^2 - \frac{p^2(1-\alpha)}{m_1 m_2}} \, . \qquad (1.18)$$

Lõppkiiruste leidmiseks jääb ainult moodustada võrranditest (1.7) ja (1.11) süsteem

$$\begin{aligned} m_1 u_1 + m_2 u_2 &= p \, , \\ u_2 - u_1 &= u \, , \end{aligned} \qquad (1.19)$$

kus u on juba tuntud. Selle süsteemi lahend on

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{p - m_2 u}{m} \, , \\ u_2 &= \frac{p + m_1 u}{m} \, . \end{aligned} \qquad (1.20)$$

Seega olemegi ülesande täielikult lahendanud. Uurime nüüd lahendit lähemalt.

Elastse põrke korral kehtib valem (1.17). Asetades valemitesse (1.20) esmalt $u = v = v_2 - v_1$ ning asendades p ja m valemitest (1.5) ja (1.6), leiame: $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$. See tähendab õieti, et põrget pole olnudki; kumbki keha säilitas oma kiiruse. See tulemus on triviaalne, kuid ta on kooskõlas jäävusseadustega; seepärast ei saanudki ta meie tulemustest välja jääda. Mittetriviaalse lahendi annab alumine märk valemis (1.17), s. o. $u = -v_2 + v_1$. Sel juhul leiame:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \ ,$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \ . \tag{1.21}$$

Need valemid võib esitada veel teisel kujul. Elimineerides (1.6) abil esimesest valemist v_2 ja teisest v_1, saame:

$$u_1 = -v_1 + 2p/m \ ,$$
$$u_2 = -v_2 + 2p/m \ . \tag{1.22}$$

Võime samuti kiiruste asemele panna valemitesse impulsid. Korrutades esimest valemit (1.22) m_1-ga ja teist m_2-ga, leiame:

$$q_1 = -p_1 + 2m_1 p/m \ ,$$
$$q_2 = -p_2 + 2m_2 p/m \ . \tag{1.23}$$

Need valemid võib kirjutada ka teisiti. Avaldades parema poole esimesed liikmed kujul $p_1 - 2p_1$ ja $p_2 - 2p_2$ ja asendades teistes liikmetes $p = p_1 + p_2$ ja $m = m_1 + m_2$, leiame:

$$q_1 = p_1 + \frac{2(m_1 p_2 - m_2 p_1)}{m_1 + m_2} \ ,$$
$$q_2 = p_2 - \frac{2(m_1 p_2 - m_2 p_1)}{m_1 + m_2} \ . \tag{1.24}$$

Siin näitavad paremate poolte teised liikmed ühelt kehalt teisele ülekantud impulssi. Ja veel: kui valemites (1.24) asendame $p_1 = m_1 v_1$, $p_2 = m_2 v_2$ ja (1.12) põhjal $m_1 + m_2 = \frac{m_1 m_2}{\bar{m}}$, siis, arvestades (1.10), saame:

$$q_1 = p_1 + 2\bar{m}v \ ,$$
$$q_2 = p_2 - 2\bar{m}v \ . \tag{1.25}$$

Siirdume mitteelastse põrke juhule. Nüüd kehtib valem (1.18). Me võiksime asetada selle u avaldise valemitesse

(1.20), saades niiviisi lõppkiiruste avaldised m_1, m_2, v_1, v_2 ja α kaudu. Kuid see lõpptulemus osutuks kaunis kohmakaks. Selle järgi pole ka vajadust, sest u_1 ja u_2 võib määrata valemitest (1.18) ja (1.20) kahes järgus: arvutades esmalt u ja asetades leitud väärtuse valemitesse (1.20). Triviaalset juhtu siin ei ole; mõlemad märgid juure ees valemis (1.18) annavad mittetriviaalse tulemuse. Seega määravad jäävusseadused mitteelastse põrke korral lõppkiirused kaheselt.

Teeme veel mõned järeldused. Valemist (1.18) nähtub, et α ei või olla kui tahes väike. Minimaalne võimalik väärtus on see, mille puhul $u = 0$, s. o.

$$\alpha_{min} = \frac{p^2}{2mT} = \frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{(m_1+m_2)(m_1v_1^2+m_2v_2^2)} . \qquad (1.26)$$

Sel juhul nimetatakse põrget <u>täielikult mitteelastseks</u>. Et suhteline kiirus u on null, on selge, et pärast niisugust põrget liiguvad mõlemad kehad koos nagu üks keha ühe ja sama kiirusega:

$$u_1 = u_2 = p/m = \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2} . \qquad (1.27)$$

Kehade summaarne kineetiline energia pärast täielikult mitteelastset põrget on

$$\alpha_{min}T = p^2/2m = \frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{2(m_1+m_2)} . \qquad (1.28)$$

Oleme vaadelnud klassikalise mehhaanika jäävusseadusi. Relatiivsusteoorias on mõndagi teisiti, kuid massi ja impulsi jäävuse seadused on ka relativistliku mehhaanika põhialus. Seejuures selgub, et üksiku keha mass ei ole jääv - ta sõltub keha kiirusest ja siseolekust. Aga suletud kogumi summaarne mass on ikkagi jääv. Mis puutub energia mõistesse, siis saab see relatiivsusteoorias hoopis uue sisu: nagu rõhutasime juba sissejuhatuses, osutub energia massiga ekvivalentseks suuruseks. Seetõttu pole energia mõistet relatiivsusteoorias õigupoolest vaja, vähemalt algul.

§ 2.

KLASSIKALISE MEHHAANIKA RELATIIVSUSPRINTSIIP

Relatiivsusprintsiip on üks relatiivsusteooria põhiprintsiipe. Ta pole seal siiski täiesti uudne, sest juba klassikalises mehhaanikas kehtib analoogiline printsiip. Käesolevas paragrahvis vaatlemegi klassikalise mehhaanika relatiivsusprintsiipi.

See printsiip väidab, et taustsüsteemi inertsiaalne, s.o. ühtlane ja sirgjooneline liikumine ei avalda mingit mõju selles süsteemis toimuvatele mehhaanilistele protsessidele. Seetõttu ei saa ühtki inertsiaalset taustsüsteemi põhimõtteliselt teistele eelistada; nad kõik on mehhaanikanähtuste kirjeldamisel samaväärsed. Taustsüsteemi võib esindada mingi inertsiaalne (s. o. jõuvaba) keha (taustkeha), kuid sellise keha reaalne olemasolu pole tingimata vajalik: me võime taustkeha lihtsalt kujutleda. Taustkehaga (kas reaalse või kujuteldavaga) seotakse inertsiaalne koordinaatsüsteem ehk lühidalt inertsiaalsüsteem, mille taustal vaadeldakse kõikide kehade asukohti ja liikumisi. Relatiivsusprintsiibi põhjal võib iga inertsiaalsüsteemi lugeda liikumatuks; mehhaaniliste nähtuste kulg allub mis tahes inertsiaalsüsteemis täpselt samasugustele seaduspärasustele, nagu igas teises inertsiaalsüsteemis. Nähtuste kulus pole ühtki tunnust, mis lubaks midagi järeldada süsteemi enda liikumise kohta. Midagi pole olemas, mis sunniks üht süsteemi teistele eelistama. See tähendabki, et nad kõik on mehhaanikanähtuste kirjeldamisel samaväärsed.

Seda klassikalist relatiivsusprintsiipi nimetatakse Galilei-Newtoni relatiivsusprintsiibiks. Galilei oli esimene, kes XVII saj. algul sai selgesti aru inertsist kui kehade põnioomadusest ja põhjendas sellele toetudes relatiivsusprintsiibi. Lõplikult viimistletud kuju saab see printsiip seoses Newtoni mehhaanika põhiseadustega. Nimelt kehtivad need seadused ühesugusel kujul kõikides inertsiaalsüsteemides. Selles avaldubki relatiivsusprintsiip. Ühelegi inertsiaalsüsteemile ei saa omistada mingit absoluutset liikumist. Nad liiguvad üksteise suhtes erinevate relatiivsete kiirustega, aga ühelgi pole võimalik avastada absoluutset kiirust "ruumi suhtes".

Veendume lähemalt, et Newtoni mehhaanika põhiseadused on tõesti ühesugused kõikides inertsiaalsüsteemides. Newtoni I seaduse järgi iga keha, millele ei mõju ükski jõud (või millele mõjuvate jõudude summa võrdub nulliga), liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Olgu mõne sellise keha kiirus mingis inertsiaalsüsteemis $\vec{u}$. Kui sedasama keha vaatleme teise inertsiaalsüsteemi taustal, mis eelmise suhtes liigub kiirusega $\vec{v}$, siis leiame tema kiirusena

$$\vec{u}'=\vec{u}-\vec{v} . \tag{2.1}$$

Et $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on ajas muutumatud, siis on ka $\vec{u}'$ ajas muutumatu, s. o. Newtoni I seadus kehtib ka teises inertsiaalsüsteemis. Edasi, kui kehasse mõjub jõud $\vec{F}$, siis on tal kiirendus $\vec{a}$, mis tähendab kiiruse $\vec{u}$ muutu ajaühiku kohta. Et valemis (2.1) on $\vec{v}$ ikka ajas muutumatu, seega muutub $\vec{u}'$ ajaühikus sama palju nagu $\vec{u}$, ehk, teiste sõnadega, kiirendus on teises inertsiaalsüsteemis sama:

$$\vec{a}'=\vec{a} . \tag{2.2}$$

Et ka kehasse mõjuv jõud on sama:

$$\vec{F}'=\vec{F} , \tag{2.3}$$

järgneb sellest, et jõud esinevad Newtoni III seaduse põhjal ainult kehade vastastikuste jõududena, mis võivad sõltuda ainult kehade vastastikusest asetusest ja nende suhtelistest kiirustest. Et aga mis tahes kahe keha vastastikune asetus ja suhteline kiirus on kõikides inertsiaalsüsteemides ühesugused, siis on ka jõud ühesugused, s. o. kehtib valem (2.3). Mass on samuti igas inertsiaalsüsteemis ühesugune:

$$m' = m \ , \tag{2.4}$$

sest ta ei sõltu kiirusest, aga siirdel teise inertsiaalsüsteemi ainult kiirus muutubki. Seega kehtib Newtoni II seaduse valem

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2.5}$$

samasugusel kujul ka teises inertsiaalsüsteemis:

$$\vec{F}' = m'\vec{a}' \ . \tag{2.6}$$

Lõpuks, valem (2.3) näitab, et ka III Newtoni seadus kehtib ühesugusel kujul kõikides inertsiaalsüsteemides.

Pöördume seoses relatiivsusprintsiibiga veel kord jäävusseaduste juurde. Impulsi ja energia jäävuse seadused on mehhaanika põhiseaduste järeldus (mehhaaniline energia, tõsi küll, alati jääv ei ole, kuid ka see on kooskõlas mehhaanikaseadustega). Et aga mehhaanikaseadused on kõikides inertsiaalsüsteemides ühesugused, siis peavad ka jäävusseadused kehtima igas inertsiaalsüsteemis. Veendume selles täiendavalt impulsi ja energia teisendusvalemite abil. Need on valemid, mille järgi teisenevad impulss ja energia siirdel ühest inertsiaalsüsteemist teise. Nende tuletamiseks avaldame mingisse kehade kogumisse kuuluva i-nda keha impulsi ja kineetilise energia kahes inertsiaalsüsteemis:

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= m_i \vec{u}_i \ , \\ \vec{p}_i{}' &= m_i \vec{u}_i{}' \end{aligned} \tag{2.7}$$

ja

$$\begin{aligned} T_i &= m_i u_i^2/2 \ , \\ T_i{}' &= m_i u_i'^2/2 \ . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Asendades $\vec{p}_i{}'$ ja $T_i{}'$ avaldistes kiiruse $\vec{u}_i{}'$ vahega $\vec{u}_i - \vec{v}$ (vt. valem (2.1)), leiame:

$$\vec{p}_i{}' = \vec{p}_i - m_i\vec{v} , \tag{2.9}$$

$$T_i{}' = T_i - \vec{p}_i\vec{v} + m_i v^2/2 . \tag{2.10}$$

Need on üksiku keha impulsi ja kineetilise energia teisendusvalemid. Summeerides i järgi, saame kogumi summaarse impulsi $\vec{p}$ ja summaarse energia T teisendusvalemid:

$$\vec{p}\,' = \vec{p} - m\vec{v} \tag{2.11}$$

ja

$$T' = T - \vec{p}\vec{v} + mv^2/2 , \tag{2.12}$$

kus m on kogumi summaarne mass. Need valemid näitavad vahetult, et jäävusseadused kehtivad igas inertsiaalsüsteemis, kui nad kehtivad ühes ainsaski. Tõepoolest, kui $\vec{p}$ on ajas konstantne (impulss on jääv), siis on ka $\vec{p}\,'$ ajas konstantne (sest ka mass m on jääv). Täpselt samuti järeldub elastse protsessi korral T' jäävus T , $\vec{p}$ ja m jäävusest. Kui aga protsess on esimeses inertsiaalsüsteemis mitteelastne, siis on ta mitteelastne ka teises. See nähtub sellest, et valemi (2.12) parema poole kaks viimast liiget kujutavad igal juhul jäävaid suurusi; seega T vähenedes väheneb ka T' . Märgime veel, et suurus $2mT - p^2$ on <u>invariantne</u>, s. o. kõikides inertsiaalsüsteemides ühesugune. Tõepoolest, valemitest (2.11) ja (2.12) järgneb:

$$2mT' - p'^2 = 2mT - p^2 . \tag{2.13}$$

§ 3

VALGUSE MASS JA IMPULSS

Eespool me käsitlesime jäävusseadusi ainult kehade mehhaanika vallas. Aga ka valgus allub teataval määral mehhaanikaseadustele. Rangelt võttes pole mehhaanika ilma valguse mehhaanilisi omadusi arvestamata üldse võimalik. Asi seisab selles, et kehad alati kiirgavad, peegeldavad ja neelavad valgust (valguse all laiemas mõttes tuleb siin mõista üldse igasugust elektromagnetilist kiirgust). Seejuures avaldab valgus kehadele mehhaanilist toimet. Kui me seda toimet ei arvestaks, siis ei saaks me ka mehhaanikaseadusi pidada rangelt kehtivaks, siis poleks meil ka jäävaid suurusi ega jäävusseadusi. Tõsi küll, valguse mehhaaniline toime on väga nõrk, mistõttu pikka aega seda tõsiselt ei arvestatud. Selle mõõtmine eeldab väga tundlike mõõtevahendite olemasolu. Aga põhimõtteliselt on see väga tähtis. Valguse mehhaaniline toime ilmneb peamiselt valguse rõhuna. Kui valgus langeb mingis suunas kehale, osalt neeldudes kehas ja osalt talt peegeldudes, siis mõjub ta sellesse kehasse teatava jõuga. Ka siis, kui keha ise kiirgab valgust, mõjub temasse jõud kiiratava valguse poolt.

Esmakordselt järeldas valguse rõhu olemasolu teoreetiliselt 1864. aastal J. C. Maxwell, kes lähtus seejuures tema enda loodud elektromagnetismi teooriast. Maxwell näitas, et valguse rõhk on võrdeline valguse intensiivsusega. Näiteks päikesevalguse rõhk täielikult neelavale ehk absoluutselt mustale pinnale on normaalse langemise korral võrdne $4,6 \cdot 10^{-6}$ N/m^2. Kui pind on täielikult peegeldav, siis on rõhk kaks korda suurem, üldjuhul aga $1+R$ korda suurem (R on peegeldumistegur).

Mitmeks aastakümneks jäi valguse rõhk puht-teoreetiliseks ennustuseks, millel puudus eksperimentaalne kinnitus ja mida kaugeltki mitte kõik füüsikud ei tahtnud tunnistada. Alles 1899. aastal näitas P. N. Lebedev valguse rõhu olemasolu katseliselt. Katse kinnitas kõik teoreetilised ootused nii kvalitatiivselt kui ka kvantitatiivselt. Sellega kadus igasugune kahtlus, et valgus võtab osa mehhaanilistest protsessidest, olgugi et tavaliste intensiivsuste korral väga tagasihoidlikul määral. Vaatame, mida võib see asjaolu tähendada jäävusseaduste seisukohalt.

Kui kehasse mõjub jõud, hakkab ta liikuma ning omandab teatava impulsi. Kui seda jõudu põhjustab teine keha, siis mõjub sellesse Newtoni III seaduse järgi võrdvastupidine jõud, mis paneb ta liikuma vastassuunas. Mõlema keha impulsside vektoriaalne summa on null kooskõlas impulsi jäävuse seadusega. Aga mis siis, kui jõudu ei põhjusta teine keha, vaid kehale langev ja selles neelduv valgus? Newtoni III seadust siis enam rakendada ei saa, sest pole mõtet rääkida neelduvale valgusele rakenduvast võrdvastupidisest jõust. Seevastu peame primaarse tähenduse omistama impulsi jäävusele. Kui keha sai impulsi, siis pidi valgusel olema enne neeldumist sama suur impulss. Valgus, langedes kehale ja neeldudes selles, annab talle oma impulsi üle. Kui me valgusele impulssi ei omistaks, oleks impulsi tekkimine kehal arusaamatu.

Niisiis, valgusel on olemas impulss. Mehhaanikast on teada, et keha impulss avaldub tema massi ja kiiruse korrutisena. Tekib küsimus, kas samasugune seos kehtib ka valguse puhul. Kas võime omistada valgusele peale impulsi ka massi? See näib küll üsna tõepärasena, aga kuidas võiks seda täpsemalt põhjendada? Parim põhjendus oleks kahtlemata sama, mida kasutasime impulsi korral, s. o. jäävusseaduse rakendamine. Kui valgus, neeldudes kehas, annab talle üle oma impulsi, siis peab ta üle andma ka oma massi, kui see on tal olemas. Keha mass peab suurenema, mis peaks olema põhimõtteliselt mõõdetav. Kahjuks osutub arvatav massi juurdekasv liiga väikeseks. Selle avastamine või mõõtmine Lebedevi katse tüüpi katsetes ei tule vististi kõne alla. Teeme sellekohase arvutuse. Langegu musta keha 1 m^2 pinnale päikesevalgus 1 sekundi vältel. Keha saab siis $4{,}6.10^{-6}$ N suuruse jõu mõjul impulsi $p = 4{,}6.10^{-6}$ kg.m/s. Sama suur impulss pidi seega olema valgusel. Me oletasime, et see võrdub valguse massi μ ja kiiruse c korrutisega, s. o.

$$p = \mu c \; . \tag{3.1}$$

Et $c = 3.10^8$ m/s, leiame, et mass on $\mu = 1{,}5.10^{-8}$ mg. Seega peaks musta keha mass suurenema valgustamisel päikese-valgusega pinna iga ruutmeetri kohta $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ mg võrra sekundis. See on tõesti väga väike juurdekasv. Isegi kujutledes keha õhukese kilena paksusega kõigest 0,1 mm ja võttes tiheduseks 1 g/cm^3, nii et kile mass on 100 g/m^2, leiame, et arvatav massi juurdekasv moodustab kõigest $1{,}5 \cdot 10^{-13}$ olemasolevast massist. Säärase väikese lisa mõõtmine näib olevat täiesti lootusetu üritus.

Seega peame - vähemalt esiotsa - loobuma valguse massi otsesest eksperimentaalsest kindlakstegemisest. Selle asemel peame otsima kaalukaid teoreetilisi argumente valguse massi olemasolu kasuks. Massi jäävuse seaduse asemel lähtume massi kui inertsuse mõõdu mõistest. Püüame näidata, et valgus on inertne.

Selleks on kõige kohasem alljärgnev mõttekäik. Kujutleme keha massiga m, mille sees on vaakum-õõnsus. Õõnsuse seinad kiirgavad valgust (s. o. üldse elektromagnetkiirgust) kõikides suundades ühtlaselt. Mingist seina punktist teatud hetkel kiirgunud valgus langeb lühikese aja järel seinale teises kohas ja neeldub seal. Eeldame, et neeldumine on täielik, s. o. et seinad on absoluutselt mustad. Seinast kiirguv valgus avaldab seinale rõhku, samuti seinas neelduv valgus. Kui keha on liikumatu, siis on nende rõhkude resultant võrdne nulliga, sest eelduse kohaselt kiirgub valgus kõikides suundades ühtlaselt. Vaatame aga nüüd olukorda, kus kehasse mõjub välisjõud $\vec{F}$. See paneb keha liikuma kiirendusega $\vec{a}$. Leiame $\vec{F}$ ja $\vec{a}$ vahelise seose. Lisaks välisjõule tuleb siin arvestada neelduva valguse poolt mõjuvat resulteerivat jõudu. Selle arvutamiseks arutleme nõnda. Alghetkel, mil hakkab mõjuma jõud $\vec{F}$, on keha alles liikumatu. Vaatleme sel hetkel seintest kiirgunud valgust. Mingi valguseosake, impulsiga $d\vec{p}$, hakkab liikuma keha algasendi suhtes kiirusega $\vec{c}$, omandab aga lühikese ajaga Δt keha suhtes kiiruse lisakomponendi $-\vec{a}\Delta t$, sest $\vec{a}\Delta t$ on kiirus, mille keha ise selle ajaga saab. Et valguseosakese impulss on alati tema kiiruse suunaline, vastab kiiruse lisakomponendile $-\vec{a}\Delta t$ ka impulsi lisakomponent $-\frac{\vec{a}\Delta t\, dp}{c}$.

Olgu nüüd Δt see aeg, mis kulub valguseosakesel, et langeda seinale kuskil teises kohas. Osake neeldub seinas ja annab talle üle oma impulsi. Et lisaimpulsi ülekanne toimub ajaga Δt, siis mõjub seinale sel puhul jõud $-\frac{\vec{a}dp}{c}$. Tähistame $dp/c=d\mu$. Lisajõud on siis $-\vec{a}d\mu$. Nüüd integreerime üle kõikide valguseosakeste. Tähistades

$$\int d\mu = \int \frac{dp}{c} = \mu , \tag{3.2}$$

leiame, et integraalne lisajõud on $-\vec{a}\mu$. Siit Newtoni II seaduse alusel järeldame, et

$$m\vec{a} = \vec{F} - \vec{a}\mu \tag{3.3}$$

ehk

$$\vec{F} = (m+\mu)\vec{a} . \tag{3.4}$$

See tulemus näitab, et meie õõnes keha käitub nii, nagu oleks tal lisamass μ. Tema inertsuse mõõt ei ole mitte m, vaid $m+\mu$. Aga suurus μ kuulub ainult õõnsuses olevale kiirgusele. Seega on kiirgus tõesti inertne. Valem (3.2) näitab, et valguse mass on kõigi valguseosakeste masside summa ja et iga valguseosakese mass võrdub tema impulsi ja kiiruse jagatisega.

Valemist (3.4) järeldub omakorda, et kui õõnes keha liigub mingi kiirusega $\vec{u}$, siis tema impulss on

$$\vec{p} = (m+\mu)\vec{u} ; \tag{3.5}$$

siin esineb keha massina jälle kesta massi ja valguse massi summa. Tuleb eriti tähele panna, et valguse kiirusena esineb selles valemis mitte $\vec{c}$, vaid $\vec{u}$. See on ka arusaadav, sest õõnsuses olev valgus liigub koos kehaga kui üks tervik just kiirusega $\vec{u}$. Iga üksik valguseosake massiga $d\mu$ liigub õõnsuse suhtes kiirusega $\vec{c}$ ja tal on impulss $\vec{c}\,d\mu$. Kui keha on liikumatu, siis on kõigi nende elementaarimpulsside vektoriaalne summa võrdne nulliga. Kui aga keha liigub kiirusega $\vec{u}$, siis on iga kiirguseosakese kiirus võrdne $\vec{c}+\vec{u}$ (kiirusele $\vec{c}$ lisandub ülekandekiirus $\vec{u}$); impulss on $d\mu(\vec{c}+\vec{u})$ ja impulsside summa $\mu\vec{u}$.

Pöördume korraks veel tagasi massi jäävuse juurde. Me nägime, et otsese makroskoopilise eksperimendi abil on vähe lootust saada kinnitust massi jäävusele laiendatud kujul, s. o. kaasa arvestades kiirguse massi. Seetõttu oleme sunnitud esialgu ainult postuleerima, et massi jäävuse seadus kehtib rangelt ainult kehade ja kiirguse summaarse massi kohta. See postulaat ei ole vastuolus varasemate katseandmetega, kuigi nendes kiirguse massi ei arvestatud, sest viimase väiksuse tõttu kehtib massi jäävus väga suure täpsusega ka ilma selleta. Ent põhimõtteliselt on seaduse laiendamine elektromagnetilisele kiirgusele väga tähtis. Nagu näeme veidi hiljem, võimaldab see üsna lihtsal viisil jõuda relatiivsusteooria põhitulemustele. Et aga relatiivsusteooria järeldused on kooskõlas suure hulga eksperimentidega, siis tuleb ka massi jäävuse üldistatud seadust lugeda tõeseks ning katseliselt põhjendatuks. Öeldu kõrval olgu mainitud, et mikroosakeste vaheliste protsesside puhul kinnitavad seda seadust ka otsesed katsetulemused (vt. § 13).

Peame veel rõhutama, et eespool antud valguse massi mõiste põhjendus on klassikaline, s. o. mitterelativistlik. See ilmneb seal, kus me rakendame valguse kiirusele klassikalist kiiruste liitmise valemit, mis relatiivsusteoorias ei kehti (vt. § 5). Sellele vaatamata on meil õigus kasutada valguse massi mõistet relatiivsusteooria ülesehitamisel. Meie senine tulemus näitab lihtsalt niipalju, et valguse mass ei ole a i n u l t relativistlik mõiste, vaid ta on juba klassikalises mehhaanikas paratamatu, kui tahetakse kirjeldada valguse mehhaanilist toimet. Et uut teooriat üles ehitada, peab seda arvestama, peab lähtuma klassikalistest mõistetest. Nii on see kehade massi korral, nii on ka valguse massi korral. Mõlemad mõisted tuleb relatiivsusteooriasse viia klassikalisest teooriast. Mida uut tekib seejuures nende mõistete sisus, selgub alles uue teooria ülesehitamise käigus.

Lõpuks tuleb meil vastata veel ühele küsimusele. Selle paragrahvi alguses ütlesime, et valguse rõhk on võrdeline valguse intensiivsusega. Nimelt näitab Maxwelli teooria, et täielikult neelava pinna puhul

$$P = I/c \ , \tag{3.6}$$

kus P on rõhk ja I langeva valguse intensiivsus, s. o. pinnaühikule ajaühikus langev energia. Seda valemit kinnitab ka eksperiment. Teisest küljest võrdub rõhk ajaühikus langeva valguse impulsiga:

$$P = \mu c \ . \tag{3.7}$$

Mõlemast valemist järgneb:

$$I = \mu c^2 \ . \tag{3.8}$$

Seega on valguse mass ja energia teineteisega võrdelised. See on õieti endastmõistetav, sest ka keha kineetiline energia on võrdeline tema massiga. Aga ühes suhtes on valguse puhul asi teisiti: energia ei ole mitte $\mu c^2/2$ (sarnaselt keha kineetilise energiaga), vaid sellest täpselt kaks korda suurem.

Siit nähtub, et valgusele ei saa täiel määral rakendada klassikalist mehhaanikat. Siin kohtume esmakordselt relativistliku seosega. Nagu juba sissejuhatuses ja § 1 lõpus märkisime, saab energia mõiste relatiivsusteoorias klassikalisest hoopis erineva tähenduse. Valguse massi ja impulsi relativistlikud mõisted on küll üsna lähedased klassikalistele, ent valgusel on ka oluliselt relativistlikke omadusi, millel pole klassikalist analoogi.

§ 4.

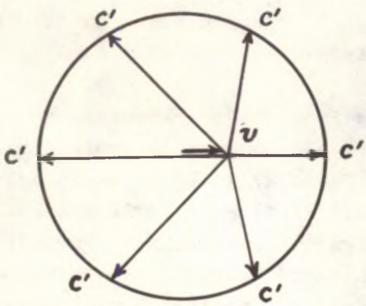
EETER JA EETRITUUL. MICHELSONI KATSE

Relatiivsusprintsiibi kohaselt ei saa ühelegi kehale omistada absoluutset kiirust (s. o. kiirust absoluutse ruumi suhtes). Mis tahes kiirus on määratav vaid ühe või teise taustsüsteemi suhtes, kusjuures kõik inertsiaalsed taustsüsteemid on samaväärsed. Siirdel ühest inertsiaalsüsteemist teise teiseneb kiirus valemi (2.1) järgi. Inertsiaalsüsteemide samaväärsus tähendab, et kõik mõeldavad selle valemi järgi määratavad kiirused on ühevõrra reaalsed, ainult et igaüks neist on vaadeldav ühes kindlas inertsiaalsüsteemis.

Nüüd tekib küsimus, kuidas on lugu valguse kiirusega vaakumis? Kas allub ta samale teisendusvalemile (2.1)? Näib, et peaks alluma, sest miks peaks see kiirus käituma teistest erinevalt? Valguse kiirus on küll väga suur, ent valem (2.1) saadakse klassikalises kinemaatikas täiesti üldisena, ilma et kiirustele $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ seataks mingeid kitsendusi. Niisiis, tähistades valguse kiiruse kui vektori $\vec{c}$-ga, kirjutame valemi (2.1) eeskujul valguse kiiruse teisendusvalemi:

$$\vec{c}\,' = \vec{c} - \vec{v} \quad . \tag{4.1}$$

Vaatame siit tulenevaid järeldusi. Ennekõike näitab see valem, et valguse kiirus peab üldiselt sõltuma suunast. On mõeldav ainult üks inertsiaalsüsteem, milles valguse kiirus võiks olla suunast sõltumatu. Eeldame, et valemis (4.1) $\vec{c}$ ongi suunast sõltumatu kiirus. Ilmselt ei ole siis $\vec{c}\,'$ suunast sõltumatu, vaid on kõige väiksem $\vec{v}$ suunas, kõige suurem vastupidises suunas ja on kõiksugu vahepealsete väärtustega teistes suundades (vt. joon. 1).



Joon. 1.

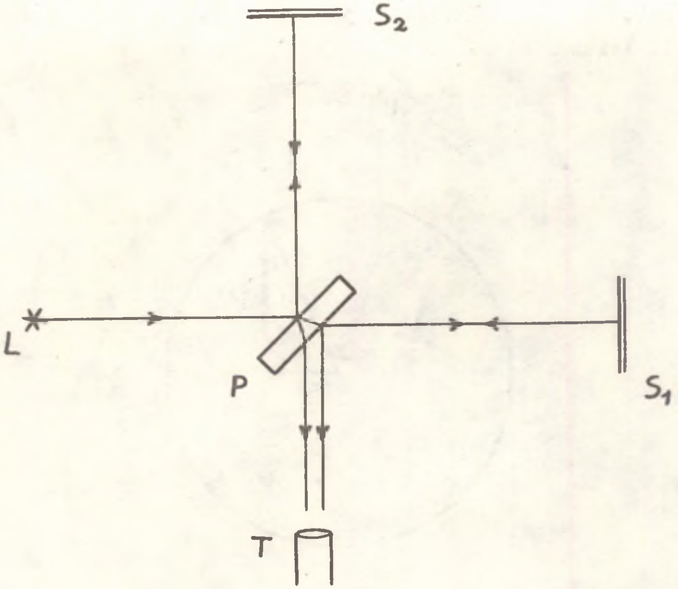
Seega tekib omapärane olukord: ühest küljest kehtib mehhaanikas relatiivsusprintsiip, teisest küljest mehhaanikas saadud kiiruste liitmise valem, rakendatuna valgusele, tühistab sellesama relatiivsusprintsiibi. Ilmselt ei ole nüüd enam kõik inertsiaalsüsteemid samaväärsed, vaid see inertsiaalsüsteem, milles valguse kiirus suunast ei sõltu, on teistega võrreldes eelistatud.

Klassikalises valguseteoorias arvati, et valgus on mingis keskkonnas leviv laineline nähtus (sarnaselt helile, mis levib lainena õhus või mõnes teises keskkonnas). Keskkonnale, milles levib valgus, pandi nimeks eeter. Et valgus võib levida vaakumis, kus tavalist ainet ei ole, peab eeter olema mingi eriline, universaalne, kogu maailmaruumi liikumatult täitev aine. Eetriga seotud inertsiaalsüsteem ongi see eelistatud inertsiaalsüsteem, milles valgus levib kõikides suundades ühesuguse kiirusega. Eeter on selles süsteemis liikumatu taustkeha. Seega võis pidada eetrit absoluutse ruumi kehastuseks. Relatiivsusprintsiip säilitab seejuures oma praktilise kehtivuse mehhaanikas, kuid näib kehtetuks muutuvat valgusnähtuste vallas.

Et Maa tiirleb Päikese ümber, peab ta liikuma kindlasti ka eetri suhtes. Piltlikult öeldi, et Maal peab puhuma "eetrituul" (sarnaselt sellele, nagu läbi õhu sõitvas lahtises autos tajume tuult - õhu vastuvoolu). Eetrituul pidi oma mõju avaldama selles, et Maal mõõdetud valguse kiirus pidi sõltuma suunast.

Niisugused on esialgsed teoreetilised kaalutlused, mis lähtuvad valemist (4.1). Tekib küsimus, kas katse kinnitab neid. Esmakordselt püüdis sellele küsimusele vastust saada A. Michelson 1881. aastal. Õieti oli ta eetrituule olemasolus veendunud ja tahtis teada, kui suur on Maa absoluutne kiirus. Katseriistaks oli tal tema enda leiutatud tundlik interferomeeter.

Alljärgnevalt esitame Michelsoni katse skeemi ja kokkuvõtliku teooria. Interferomeetri põhiosadeks on poolläbipaistev tasaparalleelne plaat P (joon. 2) ja kaks tasapeeglit S_1 ja S_2. Need kõik on jäigalt kinnitatud horisontaalsele alusele, mis koosneb kahest jäigast täisnurga all ühendatud harust (alus on joonisel näitamata). Peeglid on harudega, seega ka teineteisega risti, aga plaat moodustab nendega 45° nurgad. Kogu riista võib pöörata vertikaaltelje ümber. Plaadile suunatakse valgusallikast L ühe haru suunas monokromaatiline valguskiir, mis osalt peegeldub plaadilt peegli S_2 suunas ja osalt läbib plaadi peegli S_1 suunas. Pärast



Joon. 2.

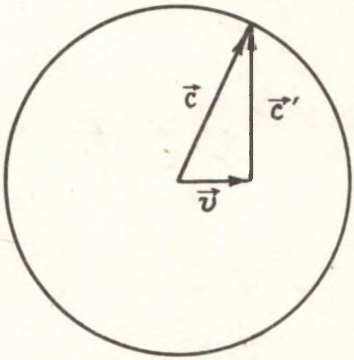
peegeldumist langevad kiired uuesti plaadile ning osalise peegeldumise ja plaadi läbimise järel juhitakse kokku pikksilma T suunas. Pikksilma vaateväljas tekib mõlema kiire interfereerumise tulemusena interferentsipilt, milles tumedad triibud perioodiliselt vahelduvad heledatega. Triipude asendid sõltuvad mõlema kiire faasivahest (ehk käiguvahest) $\omega(t_2-t_1)$, kus ω on sagedus ja t_1 , t_2 ajad, mida vajab üks ja teine kiir plaadi ja vastava peegli vahelise kauguse läbimiseks ja tagasi.

Nüüd oletame, et esimene haru on just oletatava eetrituule suunas. Siis on valguse kiirus piki seda haru ühes suunas $c-v$ ja vastassuunas $c+v$. Seega

$$t_1 = \frac{\ell_1}{c-v} + \frac{\ell_1}{c+v} = \frac{2c\ell_1}{c^2-v^2} , \qquad (4.2)$$

kus ℓ_1 on selle haru pikkus. Teine haru on eetrituulega risti. Kui suur on valguse kiirus selles suunas? Joonise 3 abil leiame, et see on

$$c' = \sqrt{c^2-v^2} . \qquad (4.3)$$



Joon. 3.

Vastassuunaline kiirus on ilmselt sama. Seega

$$t_2 = \frac{2\ell_2}{\sqrt{c^2-v^2}} , \qquad (4.4)$$

kus ℓ_2 on interferomeetri teise haru pikkus. Nüüd saame faasivahe f jaoks valemi

$$f = (2\omega/c)[\ell_2(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} - \ell_1(1-v^2/c^2)^{-1}] . \qquad (4.5)$$

Mis juhtub, kui pöörame riista 90° võrra nii, et mõlemad harud vahetavad oma suunad? Ilmselt muutub sel juhul faasivahe, sest muutuvad valguse kiirused. Piki esimest haru saab kiiruseks $\sqrt{c^2-v^2}$ ja piki teist $c-v$ ja $c+v$. Seega avaldub muutunud faasivahe f' järgmiselt:

$$f' = (2\omega/c)[l_2(1-v^2/c^2)^{-1} - l_1(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}] . \quad (4.6)$$

Tähistades muutuse $f' - f = \Delta f$, leiame:

$$\Delta f = \frac{2\omega(l_1+l_2)}{c}[(1-v^2/c^2)^{-1} - (1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}] . \quad (4.7)$$

Faasivahe muutus tähendab, et muutuvad interferentstriipude asendid - interferentsipilt tervikuna peab riista pööramisel nihkuma. Nihke suurus moodustab interferentsipildi täisperioodist (s. o. kahe lähestikku asetseva tumeda või heleda triibu kaugusest) samasuguse murdosa, nagu Δf moodustab faasi täisperioodist, s. o. (2π) -st:

$$\Delta f/2\pi = \frac{\omega(l_1+l_2)}{\pi c}[(1-v^2/c^2)^{-1} - (1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}] . \quad (4.8)$$

Toome sisse sagedusele ω vastava lainepikkuse

$$\lambda = 2\pi c/\omega . \quad (4.9)$$

Siis saab eelmine valem kuju

$$\Delta f/2\pi = \frac{2(l_1+l_2)}{\lambda}[(1-v^2/c^2)^{-1} - (1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}] . \quad (4.10)$$

Edasi eeldame, et $v \ll c$ (oleks see teisiti, siis oleks eetrituult võimalik avastada hoopis kergesti ka ilma interferomeetrita). Siis võime sulgudes oleva avaldise arendada ritta

$$(1-v^2/c^2)^{-1} - (1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \approx v^2/2c^2 , \quad (4.11)$$

nii et lõplikult

$$\Delta f/2\pi = \frac{l_1+l_2}{\lambda} \cdot \frac{v^2}{c^2} . \quad (4.12)$$

Interferomeetri tundlikkus seisnebki nüüd selles, et oodatav efekt peab olema hästi märgatav vaatamata v^2/c^2 väiksusele. Seda kompenseerib asjaolu, et teine tegur $\frac{l_1+l_2}{\lambda}$ on suur. Lainepikkus on ju väike (alla tuhandiku millimeetri), aga interferomeetri harud võib teha mõne meetri pikkusteks. Kasutades korduvaid peegeldusi ning lastes valguskiirtel läbida üht ja sama kaugust edasi-tagasi mitu korda, võib harude efektiivset pikkust suurendada isegi mõnekümne meetrini. Võtame näiteks $\ell_1 + \ell_2$ = 22 m (nii oli see A. Michelsoni hilisemates katsetes, mis ta sooritas koos E. W. Morley'ga 1887. aastal). Lainepikkuseks valime λ = 5,9.10^{-7} m (naatriumi kollane joon). Siis

$$\frac{\ell_1 + \ell_2}{\lambda} = 3{,}7 \cdot 10^7 . \tag{4.13}$$

Maa absoluutse kiiruse kohta pole midagi kindlat ette teada, aga ta ei saa olla väiksem Maa orbitaalse liikumise kiirusest, mis võrdub 30 km/s; täpsemalt öeldes, kui ta ka oleks juhuslikult väiksem, koguni ehk võrdne nulliga (s. o. kui Päikese kiirus eetri suhtes oleks just võrdvastupidine Maa orbitaalse kiirusega), siis peaks ta poole aasta pärast, mil Maa orbitaalse kiiruse suund muutub vastupidiseks, suurenema kuni 60 km/s. Seetõttu võtame valemis (4.12) v = 30 km/s ning v/c = 10^{-4}. Sel juhul oleks

$$\Delta f / 2\pi = 0{,}37 . \tag{4.14}$$

Niisugune nihe oleks pidanud olema hästi märgatav. Ometi ei leitud midagi. Interferentsipilt jäi interferomeetri pööramisel muutumatult oma kohale.

A. Michelson ei tahtnud uskuda oma silmi, niivõrd endastmõistetavana näis talle, et katse annab jaatava tulemuse. Ta püüdis avastada katseseadmes vigu ja korraldas järjest uusi katseid igal aastaajal, iga kord täiuslikumate vahenditega. Ka mitmed teised uurijad tegid sedasama. Tulemus oli ja jäi eitavaks. Isegi meie päevil korratakse aeg-ajalt Michelsoni katset, kuigi nüüd peetakse, vastupidi, endastmõistetavaks eitavat tulemust. Eitav ta alati ongi olnud. Eetrituult ei ole olemas.

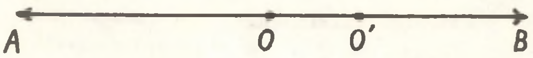
§ 5.

RELATIIVSUSTEOORIA PÕHIPOSTULAADID

Eetrituult ei ole olemas. Seda pole õnnestunud avastada ei Michelsoni katses ega teisteski katsetes, kus on kasutatud optilisi või elektrodünaamilisi vahendeid. Kujunenud olukorrast leidis õige väljapääsu A. Einstein, luues 1905. aastal teooria, mis sai relatiivsusteooria nime. Selle teooria aluseks on kaks postulaati. Esimene postulaat on universaalne relatiivsusprintsiip, mille kehtivust nõutakse nii mehhaanikas kui ka optikas ja elektrodünaamikas. Kõik inertsiaalsüsteemid on kõigi füüsikanähtuste kirjeldamisel täiesti samaväärsed; absoluutset paigalolekut ega absoluutset liikumist pole olemas; ühtki liikumist ei saa vaadelda olematu absoluutse ruumi taustal, vaid ainult relatiivse liikumisena meelevaldselt valitud inertsiaalsüsteemi taustal. Siit järgneb kohe, et koos absoluutse ruumiga saab olematuks ka eeter. Vastasel juhul võiks liikumist eetri suhtes käsitada absoluutse liikumisena ning eetrit absoluutse ruumi kehastajana. Loobuda tuleb ka valguse kiiruse teisendamisest klassikalise valemi (4.1) järgi. Tekib paratamatu vajadus võtta selle asemele mingi uus tõde.

Relatiivsusteooria teine põhipostulaat väidabki, et valguse kiirus on kõikides inertsiaalsüsteemides ühesugune ja suunast sõltumatu. See väide on kooskõlas relatiivsusprintsiibiga ja kõikide katsetulemustega. Ta on küll näilises vastuolus "terve mõistusega", aga tegelikult ilmneb siin vastuolu ainult juurdunud kujutlusega, et aeg on absoluutne. "Tervet mõistust" imiteerib vaid harjumus. Ent tõeliselt ei nõua terve mõistus aja absoluutsust. Relatiivsusteooria teebki otsustava sammu ja tunnistab aja relatiivseks. Siis pole ka midagi võimatut selles, et valguse kiirus ei allu klassikalisele kiiruste liitmise reeglile.

Selgitame lähemalt, kuidas on valguse kiiruse konstantsuse postulaat seotud aja relatiivsusega. Mingist antud inertsiaalsüsteemis liikumatust punktist O (joon. 4) kiirgub valgus kahte vastassuunda. O-st võrdsetel kaugustel olevatesse punktidesse A ja B jõuavad need valgussignaalid samaaegselt (sest valguse kiirus ei sõltu suunast). Vaatleme samu signaale teise inertsiaalsüsteemi taustal. Valguse levimist tuleb seal vaadelda arvates punktist O', mis liigub O suhtes (näiteks suunas A-st B poole), ühtides kiirgamise hetkel O-ga. Joonisel on märgitud O' asukoht hetkel,



Joon. 4.

mil signaalid on jõudnud punktidesse A ja B. Kas võib nüüd väita, et signaalide kiirused on ka O' suhtes võrdsed? Absoluutse aja korral ei või, sest $O'A > O'B$, seega peaks vasakpoolse signaali kiirus olema suurem parempoolse signaali kiirusest (täpselt kooskõlas valemiga (4.1)). Ent me võime tõlgendada võrratust $O'A > O'B$ teisiti: signaalide kiirused on ka O' suhtes võrdsed, aga nende jõudmise ajad punktidesse A ja B on erinevad. Parempoolne signaal läbis lühema tee, vasakpoolne pikema; seega jõudis parempoolne signaal punkti B varem kui vasakpoolne punkti A. Me näeme, et aeg voolab O'-ga seotud inertsiaalsüsteemis teisiti kui O-ga seotud inertsiaalsüsteemis: sündmused, mis viimases on samaaegsed, ei ole samaaegsed eelmises ega tarvitse üldse teisteski inertsiaalsüsteemides olla samaaegsed. Seejuures ei saa ühegi inertsiaalsüsteemi aega pidada eelistatult absoluutseks. Inertsiaalsüsteemide samaväärsusega eeldatakse, et kõikide ajad on relatiivsed.

Aja relatiivsusest räägime pikemalt uuesti §-des 16 ja 17.

Lõpuks juhime veel kord tähelepanu asjaolule, et kuigi §-s 3 antud valguse massi mõiste põhjendus on mitterelativistlik, ei ole alust seada valguse massi olemasolu relativistlikult seisukohalt kahtluse alla. On hästi teada, et väga paljud klassikalise füüsika mõisted lähevad üle relatiivsusteooriasse (tarbe korral nii- või teistsuguste täpsustustega). Nende mõistete hulka kuulub ka valguse massi mõiste. See ei ole olemuselt relativistlik mõiste. Sel on oma koht juba klassikalise füüsika mõistete süsteemis. §-s 3 andsimegi talle mitterelativistliku põhjenduse. See ei välista selle mõiste relatiivsusteooriasse viimise võimalust. Nüüd ongi meie ülesandeks selgitada, mil viisil oleks see võimalik. Seda teeme §-des 6 - 11.

§ 6.

KEHA MASSI SÕLTUVUS KIIRUSEST

Klassikalises mehhaanikas keha mass kiirusest ei sõltu. Keha mass on lihtsalt võrdne kõikide kehas olevate aatomite masside summaga, iga aatomi mass on aga täiesti kindel muutumatu suurus. Tõsi küll, kui arvestada valguse massi, siis see viimane väide päris täpselt enam ei kehti. Keha mass, nagu nägime §-s 3, peab valguse neelamisel suurenema. Et sel puhul uusi aatomeid juurde ei teki ja et valguse neeldumine toimubki ilmselt aatomites, siis oleme sunnitud järeldama, et valguse neelamisel aatomi poolt peab viimase mass suurenema. Siin on meil tegemist esmakordse vihjega sellele, et mass (vähemalt üksikute aatomite oma) ei olegi nii rangelt konstantne suurus, nagu seda klassikalises mehhaanikas massi jäävuse seaduse raames tavaliselt eeldatakse. Nüüd peame möönma vastupidist: just massi jäävuse üldine seadus nõuab, et vähemalt üksikute aatomite mass peab olema teatavates - olgugi üsna kitsastes - piirides muutlik. Aga massi sõltuvust kiirusest siin veel ikkagi ei ole. Seega jääb esialgu püsima klassikalise mehhaanika eeldus, et mass on kiirusest sõltumatu.

Ent meie peame minema edasi, peame lähemalt ning täpsemalt uurima, millistele järeldustele viivad massi ja impulsi jäävuse seadused, kui neid rakendada valguse neeldumisele kehas. Alljärgnevalt näitame, et relatiivsusteooria põhipostulaadid (eriti valguse kiiruse konstantsuse postulaat) on massi ja impulsi jäävuse seadustega kooskõlas ainult siis, kui keha mass sõltub teataval kindlal viisil tema kiirusest.

Esmalt näitame, et mass ei saa olla kiirusest sõltumatu. Vaatleme liikumatut keha massiga m, millele langeb valgus massiga μ ja neeldub kehas. Olgu neeldumine täielik. Valguse rõhk paneb keha liikuma mingi kiirusega v. Keha mass on nüüd valguse neelamise tõttu senisest suurem; olgu see m_1. Massi ja impulsi jäävuse põhjal kehtivad seosed

$$m + \mu = m_1 \,, \tag{6.1}$$

$$\mu c = m_1 v \,. \tag{6.2}$$

Me võime aga sama protsessi vaadelda inertsiaalsüsteemis, mis eelmise inertsiaalsüsteemi suhtes liigub kiirusega v, s. o. milles keha on liikumatu pärast valguse neelamist. Enne neelamist liigub keha ilmselt kiirusega v vastu valgusele, mille kiirus on ikka c (see on üks relatiivsusteooria põhipostulaate). Eeldades, et mass kiirusest ei sõltu, seega keha mass enne ja pärast valguse neelamist on ikka m ja m_1, saame massi ja impulsi jäävuse valemid kujul

$$m + \mu = m_1 \,, \tag{6.3}$$

$$\mu c = m v \,. \tag{6.4}$$

Seosed (6.1) ja (6.3) ühtivad ning annavad $m_1 > m$; aga seostest (6.2) ja (6.4) järgneb, et $m_1 = m$. Saime ilmse vastuolu.

Seega, võttes valguse kiiruse ühesuguseks mõlemas inertsiaalsüsteemis ja eeldades, et mass kiirusest ei sõltu, satume vastuollu nõudega, et massi ja impulsi jäävuse seadused kehtiksid mõlemas inertsiaalsüsteemis. Loobuda sellest nõudest ei saa, sest siis tekib vastuolu relatiivsusprintsiibiga. Märgime, et kui võtaksime teises inertsiaalsüsteemis valguse kiiruseks c asemele $c - v$ (klassikalise kiiruste liitmise valemi järgi), siis vastuolu kaoks, sest siis saaksime (6.4) asemele võrduse $\mu(c-v)=mv$; siit ja valemist (6.2) järgneks $m_1=m+\mu$, kooskõlas valemitega (6.1) ja (6.3).

Tuleb välja, et vastuolu vältimiseks peaksime loobuma kas relatiivsusprintsiibist või valguse kiiruse konstantsusest. Üks ega teine tee pole relatiivsusteoorias vastuvõetav. Õnneks on olemas kolmas võimalus: eeldada, et keha mass sõltub kiirusest.

Sõltuvuse tuletamiseks paneme kõigepealt tähele, et selle üldine kuju peab olema

$$m(v)=m_0\gamma(v), \tag{6.5}$$

kus $\gamma(v)$ on teatav, esialgu tundmatu, kiiruse funktsioon, m_0 on <u>seisumass</u> ja $m(v)$ on mass kiirusel v . Funktsioon $\gamma(v)$ peab rahuldama algtingimust

$$\gamma(0)=1, \tag{6.6}$$

sest $m(0)=m_0$. Valemi (6.5) põhjendamiseks kujutleme antud keha koosnevana mingist arvust n ühesugusest väiksemast osakehast. Ilmselt on iga osakeha seisumass n korda väiksem liitkeha seisumassist, ja ka kiirusel v on osakeha mass n korda väiksem liitkeha massist (sest ka liikudes koosneb liitkeha ikka n ühesugusest väiksemast osakehast). Kui M on liitkeha mass ja m osakeha mass, kehtib eelöeldu põhjal võrdus

$$M_0/m_0 = M(v)/m(v) \tag{6.7}$$

ehk

$$M(v)/M_0= m(v)/m_0 . \tag{6.8}$$

See võrdus näitabki, et suhe $\frac{m(v)}{m_0}$, mille tähistasime γ-ga, ei sõltu kehast, vaid sõltub ainult kiirusest.

Nüüd pöördume uuesti eespool vaadeldud protsessi juurde, kus liikumatu keha seisumassiga m_0 neelab temale langeva valguse massiga μ . Massi ja impulsi jäävuse seadused avalduvad nüüd (6.1) ja (6.2) asemel järgmiselt:

$$m_0+\mu = m_{10}\gamma(v), \tag{6.9}$$

$$\mu c = m_{10}\gamma(v)v, \tag{6.10}$$

kus m_{10} on keha seisumass pärast valguse neelamist.

Siinkohal teeme vahemärkuse. Me ei tea esialgu, kas on m_{10} tingimata m_0-st erinev või on vahest $m_{10}=m_0$. Kindel on ainult see, et keha mass peab μ võrra suurenema, aga kas ka seisumass muutub, jääb esialgu teadmata. Ent edasises mõttekäigus pole see oluline.

Siirdume inertsiaalsüsteemi, milles keha on liikumatu pärast valguse neelamist. Massi ja impulsi jäävuse seadused kehtivad nüüd kujul

$$m_0\gamma(v) + \mu' = m_{10} \ , \tag{6.11}$$

$$\mu' c = m_0\gamma(v)v \tag{6.12}$$

(vrd. (6.3) ja (6.4)). Siin μ' on valguse mass teises inertsiaalsüsteemis. Varemalt, kui me massi sõltuvust kiirusest ei arvestanud, pidi massi jäävuse põhjal olema $\mu'=\mu$. Nüüd see võrdus vahest enam ei kehti. Seepärast kirjutamegi valemites (6.11) ja (6.12) μ asemel μ'. Edasist mõttekäiku see erinevus ei häiri.

Nüüd on $\gamma(v)$ leidmine päris lihtne. Elimineerides valemitest (6.9) ja (6.10) μ ning valemitest (6.11) ja (6.12) μ', leiame:

$$m_0 = m_{10}\gamma(v)(1 - v/c) \ , \tag{6.13}$$

$$m_{10} = m_0\gamma(v)(1 + v/c) \ . \tag{6.14}$$

Korrutades need valemid teineteisega läbi ja taandades m_0m_{10}-ga, saame:

$$\gamma^2(v)(1 - v^2/c^2) = 1 \ . \tag{6.15}$$

Siit

$$\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \ . \tag{6.16}$$

Algtingimus (6.6) on ilmselt rahuldatud.

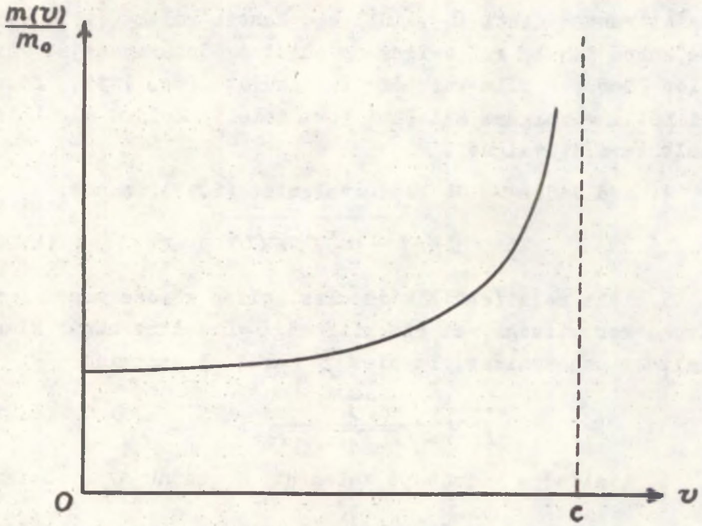
Niisiis, keha mass peab sõltuma kiirusest valemi

$$m(v) = m_0(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{6.17}$$

järgi. Ainult sel eeldusel on massi ja impulsi jäävuse seadused kooskõlas relatiivsusteooria põhipostulaatidega.

Valemi (6.17) graafik on toodud joonisel 5.

Valem (6.17) on üks põhilisemaid kogu relatiivsusteoorias. Teeme sellest mõned kohesed järeldused.



Joon. 5.

1. Iga keha massi võib esitada seisumassi ja liikumisest tingitud massiosa summana; seda viimast nimetame __kineetiliseks massiks__ ja tähistame m_{kin}. Seega

$$m = m_0 + m_{kin} , \tag{6.18}$$

kusjuures

$$m_{kin} = m_0 \left[(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] . \tag{6.19}$$

2. Keha kiirus ei või ületada valguse kiirust ega saada sellega võrdseks, vaid on alati väiksem valguse kiirusest. Tõepoolest, $v = c$ korral oleks mass lõpmatu ja $v > c$ korral koguni imaginaarne. See on aga füüsikaliselt mõttetu ja

on vastuolus ka massi jäävusega. Seega etendab valguse kiirus relatiivsusteoorias kiiruste ülemtõkke ehk piirkiiruse osa.

3. Valem (6.17) kehtib ainult kehade, mitte aga vabalt leviva valguse kohta. Valgus ei saa olla liikumatu, sest tema kiirus on alati c. Küll aga kehtib valem (6.17) valguse kohta juhul, kui valgus on suletud õõnsusesse ja võib selles õõnsuses olla kui tervik liikumatu (vt. § 3). Edaspidi mõtleme valguse all (kui just teisiti öeldud ei ole) vabalt levivat valgust.

4. Avaldades v m kaudu valemist (6.17), saame:

$$v = c\sqrt{1 - m_0^2/m^2(v)} \,. \tag{6.20}$$

5. Keha relativistlik impulss, olles võrdne massi ja kiiruse korrutisega, ei ole kiirusega võrdeline nagu klassikalises mehhaanikas. Impulss $\vec{p}$ avaldub valemina

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,. \tag{6.21}$$

6. Avaldades viimasest valemist $\vec{p}$ kaudu $\vec{v}$, leiame:

$$\vec{v} = \frac{c\vec{p}}{\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}} \,. \tag{6.22}$$

7. Elimineerides valemitest (6.17) ja (6.21) v, saame relativistliku seose keha massi ja impulsi vahel:

$$p^2 = (m^2 - m_0^2)c^2 \,, \tag{6.23}$$

kus m tähendab liikuva keha massi $m(v)$. See valem on väga tähtis, sest seda läheb vaja mõnedes esmajärgulise kaaluga küsimustes.

8. Valguse puhul kehtib massi μ ja impulsi $\vec{p}$ vaheline seos kujul $\vec{p} = \mu\vec{c}$. Siit järgneb, et valem (6.23) kehtib ka valguse puhul, kui arvata valguse seisumass nulliks. Valemid (6.17) ja (6.21) aga valguse puhul ikkagi ei kehti, sest nende paremad pooled saavad $v = c$ ja $m_0 = 0$ puhul määramata kuju $\frac{0}{0}$.

9. Veendume, et valguse täielikul neelamisel keha seisumass muutub, s. o. kehtib võrratus $m_0 \neq m_{10}$. Selleke jagame teineteisega läbi valemid (6.13) ja (6.14). Tegur $\gamma(v)$ taandub ja me saame:

$$m_{10} = m_0 \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \ . \tag{6.24}$$

Seega muundub neeldumisel algselt liikumatus kehas valguse mass μ osalt keha seisumassiks (suurendades senist seisumassi), osalt aga kineetiliseks massiks (sest keha pärast valguse neelamist liigub ning vahe $m_{10}\gamma(v) - m_0$ on suurem kui $m_{10} - m_0$). Kui aga vaatleme seda protsessi keha lõppoleku seisusüsteemis, siis muundub valguse mass keha seisumassiks täielikult, kusjuures seisumassiks muundub ka keha algne kineetiline mass.

10. Et valguse kiirus on kõikides inertsiaalsüsteemides c, ei ole mõtet rääkida valguse massi sõltuvusest kiirusest. Ent see ei tähenda, et valguse mass oleks igas inertsiaalsüsteemis ühesugune. Näitame, et siirdel antud inertsiaalsüsteemist teise, valguse levimise suunas kiirusega v liikuvasse süsteemi, teiseneb valguse mass valemi

$$\mu' = \mu \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \tag{6.25}$$

järgi. Selleks kasutame seoseid (6.10) ja (6.12). Jagades viimase läbi eelmisega, saame:

$$\mu'/\mu = m_0/m_{10} \ . \tag{6.26}$$

Arvestades (6.24), saamegi siit (6.25).

11. Tuletame ligikaudse valemi keha kineetilise massi jaoks juhul, kui $v \ll c$. Võttes valemis (6.19) ligikaudu $(1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + v^2/2c^2$, leiame:

$$m_{kin} \approx m_0 v^2/2c^2 \ . \tag{6.27}$$

Siit näeme, et kineetiline mass osutub selles lähenduses võrdeliseks mitterelativistliku kineetilise energiaga $m_0 v^2/2$.

Nagu edaspidi (vt. § 15) selgub, pole see juhuslik asjaolu, vaid selles peegeldub relativistliku energia mõiste olemus.

Lõpuks ütleme paar sõna eespool saadud tulemuste katselise kontrolli kohta. Nagu juba §-s 3 märkisime, on keha massi muutus valguse neelamisel niivõrd väike, et seda praktiliselt mõõta ei saa. Kiirus, mille keha võib valguselt saada, on ka väga väike, olgugi mõõdetav (P. N. Lebedevi katsed). Selliste väikeste kiiruste juures on kineetiline mass niivõrd väike, et massi võib vabalt lugeda võrdseks seisumassiga. Isegi kiirustel suurusjärguga mõni km/s (taevakehad ja kosmoselaevad) on massi relativistlik suurenemine äärmiselt väike. Teisiti on lugu siis, kui asendame makroskoopilise keha mikroosakesega, näiteks aatomi või aatomituumaga. Nende massi muutumine valguse neelamisel on hästi jälgitav. Mikroosakesi tuleb kasutada ka valemi (6.17) eksperimentaalseks kontrolliks, milleks läheb vaja valguse kiirusega võrreldavaid kiirusi. Tavalisi, makroskoopilisi kehi niikaugele kiirendada tänapäeva tehniliste vahenditega ei saa. Aga elektronidel ja teistel elementaarosakestel on valemi (6.17) kehtivust katseliselt korduvalt kontrollitud, kusjuures kooskõla leiti olevat laitmatu.

§ 7.

SAMASIHILISTE KIIRUSTE LIITMINE

Et valguse kiirus on kõikides inertsiaalsüsteemides ühesugune, tähendab muuhulgas seda, et ta ei allu klassikalisele kiiruste liitmise valemile (2.1). Siit tekib mõte, et viimane ei kehti relatiivsusteoorias ka teiste kiiruste puhul. Veendume, et see on tõesti nii ja tuletame relativistliku kiiruste liitmise valemi. Käesolevas paragrahvis piirdume esialgu lihtsama juhuga, kus liidetavad kiirused on samasihilised. Üldjuhtu vaatleme järgmises paragrahvis.

Kasutame sama meetodit, mille abil eelmises paragrahvis tuletasime massi sõltuvuse kiirusest. Vaatlesime seal liikumatut keha, millele langeb valgus ja paneb ta liikuma, ise neeldudes kehas. Nüüd võtame valguse asemele mingi teise keha, mis liigub kiirusega u ja liitub täielikult mitteelastsel põrkel liikumatu kehaga ühte ("neeldub" selles). Mõlemast kehast moodustunud sekundaarne keha liigub mingi kiirusega v. Analoogiliselt valemitele (6.9) ja (6.10) võime kirja panna massi ja impulsi jäävust väljendavad seosed järgmiselt:

$$M_0 + m = M_{10}\gamma(v) , \tag{7.1}$$

$$mu = M_{10}\gamma(v)\, v , \tag{7.2}$$

kus m on pealelangeva keha mass (mitte seisumass, vaid kogumass, s. o. seisumassi ja kineetilise massi summa), M_0 ja M_{10} on primaarse ja sekundaarse keha seisumassid ja $\gamma(v)$ on juba tuntud tegur (vt. valem (6.16)).

Siirdume sekundaarse keha paigaloleku süsteemi, mis liigub senise süsteemi suhtes kiirusega v. Seal kehtivad massi ja impulsi jäävuse seadused kujul (vrd. (6.11) ja (6.12))

$$M_0\gamma(v) + m' = M_{10} , \tag{7.3}$$

$$m'u' = M_0\gamma(v)\, v , \tag{7.4}$$

kus m' on pealelangeva keha mass ja u' tema kiirus uues inertsiaalsüsteemis.

Elimineerides seostest (7.1) ja (7.2) m ning seostest (7.3) ja (7.4) m', saame:

$$M_0 = M_{10}\gamma(v)(1 - v/u) , \tag{7.5}$$

$$M_{10} = M_0\gamma(v)(1 + v/u') . \tag{7.6}$$

Korrutades need valemid teineteisega läbi ja taandades M_0M_{10}-ga, leiame:

$$\gamma^2(v)(1 - v/u)(1 + v/u') = 1 \tag{7.7}$$

ehk (6.16) põhjal

$$(1 - v/u)(1 + v/u') = 1 - v^2/c^2 . \tag{7.8}$$

Siit avaldame u':

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} . \tag{7.9}$$

See ongi relativistlik kiiruste liitmise valem. Teisiti võib seda nimetada kiiruse teisendusvalemiks. Kiirus u teiseneb selle valemi järgi kiiruseks u' siirdel teise inertsiaalsüsteemi, mis liigub samas suunas kiirusega v.

Esitatud mõttekäik ei ole siiski mitte täiesti üldine, sest nagu nähtub valemist (7.5), kehtib võrratus $v < u$, mistõttu ka $u' > 0$. Ent valem kehtib siiski ka juhul, kui $v > u$ ning $u' < 0$. Veendume selles järgmiselt. Selle asemel, et teisendada u, teisendame sekundaarse keha kiiruse v, siirdudes algsüsteemi suhtes kiirusega u liikuvasse inertsiaalsüsteemi, s. o. pealelangeva keha paigaloleku süsteemi. Selles süsteemis liigub sekundaarne keha kiirusega $-u'$ (sest pealelangev keha liigub sekundaarse keha suhtes kiirusega u'). Seega $v' = -u'$. Et u' on juba teada (valem 7.9)), saame otsekohe ka v' avaldise:

$$v' = \frac{v - u}{1 - vu/c^2} \,. \tag{7.10}$$

See ongi kiiruse v teisendusvalem siirdel kiirusega u liikuvasse inertsiaalsüsteemi. See valem on samasuguse kujuga nagu (7.9), ent nüüd on teisendatud kiirus negatiivne. Seega kehtib valem (7.9) tõesti täiesti üldiselt, sõltumata kiiruste u ja v suurusvahekorrast.

Teeme sellest valemist mõned kohesed järeldused.

1. Kui $u \ll c$ ja $v \ll c$, siis $uv/c^2 \ll 1$ ning

$$u' \approx u - v \,. \tag{7.11}$$

See on klassikaline (mitterelativistlik) valem. Relativistlik valem annab sellest märgatavalt erineva tulemuse ainult siis, kui u või v või mõlemad on võrreldavad c-ga.

2. Kui $u = c$, siis ka $u' = c$, nagu peabki olema.

3. Arvutades suuruse $1 - u'^2/c^2$, leiame:

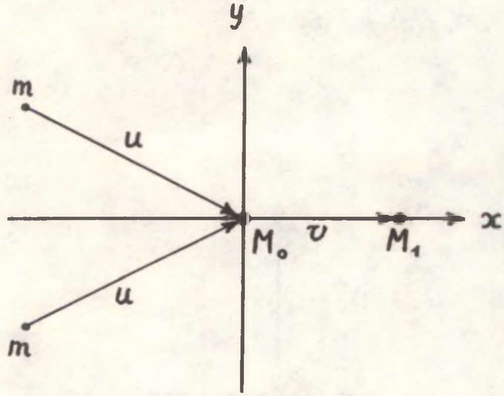
$$1 - u'^2/c^2 = \frac{(1 - u^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - uv/c^2)^2} \,. \tag{7.12}$$

Siit nähtub, et $u < c$ korral on ka $u' < c$. See tähendab, et mingis inertsiaalsüsteemis valguse kiirusest väiksem kiirus on selline ka kõikides teistes inertsiaalsüsteemides. Relatiivsusprintsiibi põhjal peabki nii olema.

§ 8.

KIIRUSE TEISENDAMINE ÜLDJUHUL

Käesolevas paragrahvis tuletame kiiruse komponentide teisendusvalemid üldjuhul, s. o. siis, kui teisendatav kiirus $\vec{u}$ ja kahe inertsiaalsüsteemi suhteline kiirus $\vec{v}$ ei ole samasihilised. Valime kiiruse $\vec{v}$ suuna x -teljeks ja võtame y -telje kiiruste $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ tasandis (vt. joon. 6).



Joon. 6.

Siis on kiirusel $\vec{u}$ kaks komponenti: u_x ja u_y . Tuleb leida nende teisendusvalemid.

Selleks võib kasutada laiendatud kujul eelmise paragrahvi meetodit. Langegu liikumatule kehale seisumassiga M_0 nurga all korraga kaks ühesugust keha võrdsete kiirustega u. Kummagi mass (mitte seisumass, vaid kogumass) olgu m . Täie-

6

likult mitteelastse põrke tulemusena liituvad nad primaarse kehaga ja moodustavad sekundaarse keha seisumassiga M_{10}, mis hakkab liikuma kiirusega v. Selle suunaks on sümmeetria tõttu (mis kindlustab impulsi y-komponendi jäävuse) pealelangevate kehade kiiruste vahelise nurga poolitaja. Selle võtsime juba eespool x-teljeks. Massi ja impulsi x-komponendi jäävust väljendavad seosed

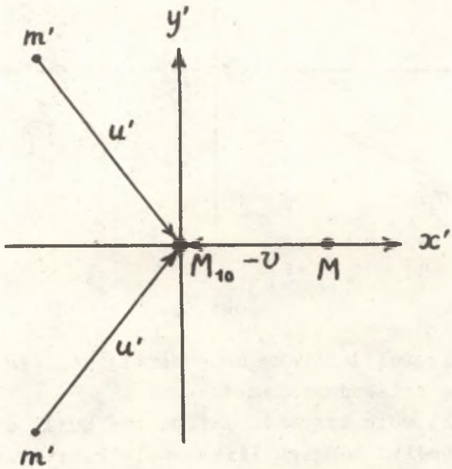
$$M_0 + 2m = M_{10}\gamma(v) , \tag{8.1}$$

$$2mu_x = M_{10}\gamma(v)v . \tag{8.2}$$

Siirdume teise inertsiaalsüsteemi, mis liigub esimese suhtes x-telje suunas kiirusega v ning milles sekundaarne keha on liikumatu (joon. 7). Olgu pealelangevate kehade mass selles süsteemis m' ja kiirus u'. Nüüd kehtivad massi ja impulsi x-komponendi jäävuse valemid järgmisel kujul:

$$M_0\gamma(v) + 2m' = M_{10} , \tag{8.3}$$

$$2m'u'_x = M_0\gamma(v)v . \tag{8.4}$$



Joon. 7.

Seosed (8.1) - (8.4) on täiesti sarnased seostega (7.1) - (7.4). Vahe on ainult selles, et m ja m' asemel seisab nüüd $2m$ ja $2m'$ ning u ja u' asemel u_x ja u'_x. Seetõttu saame ka analoogilise tulemuse. Elimineerides $2m$ ja $2m'$, korrutades tulemused läbi ja taandades $M_0 M_{10}$-ga, saame u'_x avaldise kujul

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} . \tag{8.5}$$

See ongi kiiruse x -komponendi teisendusvalem. Ta on kujult identne valemiga (7.9); viimane ongi meie uue valemi erijuhuks $u_y = 0$ korral. Nüüd peame tuletama veel teisendusvalemi kiiruse y -komponendile. Selleks talitame järgmiselt. Elimineerime seostest (8.1) ja (8.2) M_{10} ning avaldame m :

$$m = \frac{M_0 v}{2(u_x - v)} . \tag{8.6}$$

Siis avaldame seosest (8.4) m' :

$$m' = \frac{M_0 \gamma(v) v}{2u'_x} \tag{8.7}$$

ehk, asetades siia u'_x avaldise (8.5),

$$m' = \frac{M_0 \gamma(v) v (1 - u_x v/c^2)}{2(u_x - v)} . \tag{8.8}$$

Jagades selle valemi läbi valemiga (8.6), leiame:

$$m'/m = \gamma(v)(1 - u_x v/c^2) . \tag{8.9}$$

Teisest küljest

$$m'/m = \gamma(u')/\gamma(u) . \tag{8.10}$$

Seega

$$\gamma(u') = \gamma(u)\gamma(v)(1 - u_x v/c^2) . \tag{8.11}$$

Arvestades γ tähendust (valem (6.16)), kirjutame selle tulemuse ümber kujul

$$1 - u'^2/c^2 = \frac{(1 - u^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - u_x v/c^2)^2} . \tag{8.12}$$

See valem on valemi (7.12) üldistus. Et $u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2$ ning $u^2 = u_x^2 + u_y^2$, võime siit kergesti avaldada u'_y. Tulemus on

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x v/c^2} . \qquad (8.13)$$

Seega oleme leidnud kiiruse y-komponendi teisendusvalemi. Et x-telje risttasandis on y- ja z-telje valik meelevaldne, siis ei tarvitsegi teisendatav kiirus olla xy-tasandis. Tal võib olla ka z-komponent, kusjuures selle jaoks peab kehtima ilmselt samakujuline valem nagu y-komponendi jaoks. Kokkuvõttes on kõik kolm valemit järgmised:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1-u_x v/c^2} , \\ u'_y &= \frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x v/c^2} , \\ u'_z &= \frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x v/c^2} . \end{aligned} \qquad (8.14)$$

§ 9.

VALGUSE ABERRATSIOON

Eelmises paragrahvis tuletatud kiiruse komponentide teisendusvalemid (8.14) kehtivad ka valguse kiiruse kohta. Samuti kehtib valem (8.9), kus m ja m' all tuleb mõista valguse massi kahes inertsiaalsüsteemis ja u_x all mõelda valguse kiiruse x-komponenti.

Tuletuskäik põhineb analoogilisel mõttelisel katsel, mida me kasutasime eelmises paragrahvis, selle vahega, et kahe pealelangeva keha asemel tuleb vaadelda kaht valgusvoogu. Niisiis, olgu meil liikumatu keha seisumassiga M_0, millele langevad nurga all kaks ühesugust valgusvoogu, kumbki massiga m. Neeldudes täielikult kehas, panevad nad selle liikuma kiirusega v suunas, mis poolitab nendevahelise nurga. Võtame selle suuna x-teljeks. Keha seisumass pärast valgusvoogude neelamist olgu M_{10} . Siis kehtivad massi ja impulsi jäävuse valemid kujul (vrd. (8.1) - (8.4))

$$M_0+2m = M_{10}\gamma(v) , \qquad (9.1)$$

$$2mc_x = M_{10}\gamma(v)v \qquad (9.2)$$

(keha algse paigaloleku inertsiaalsüsteemis) ja

$$M_0\gamma(v) + 2m' = M_{10} , \qquad (9.3)$$

$$2m'c_x' = M_0\gamma(v)v \qquad (9.4)$$

(keha lõpp-paigaloleku inertsiaalsüsteemis). Elimineerides esimesest valemitepaarist $2m$ ja teisest $2m'$, korrutades tulemused läbi, taandades M_0M_{10}-ga ja avaldades c_x', saame:

$$c_x' = \frac{c_x - v}{1 - c_x v/c^2} . \qquad (9.5)$$

See valem on täiesti samakujuline nagu (8.5). Edasine mõttekäik on ka algul samasugune. Elimineerides seostest (9.1) ja (9.2) M_{10} ja avaldades m, leiame:

$$m = \frac{M_0 v}{2(c_x - v)} . \qquad (9.6)$$

Seosest (9.4) avaldame m' :

$$m' = \frac{M_0\gamma(v)v}{2c_x'} \qquad (9.7)$$

ehk, asendades c_x' avaldisega (9.5),

$$m' = \frac{M_0\gamma(v)v(1 - c_x v/c^2)}{2(c_x - v)} . \qquad (9.8)$$

Valemid (9.6) ja (9.8) annavad nüüd:

$$m'/m = \gamma(v)(1 - c_x v/c^2) . \qquad (9.9)$$

See ongi valem (8.9), rakendatuna valgusele. Jääb tuletada valguse kiiruse y- ja z-komponentide teisendusvalemid. Siin peame küll varasemast mõttekäigust kõrvale kalduma, sest valemit (8.10) valgusele rakendada ei saa. Aga asi on siin lihtsam. Kasutades valguse kiiruse konstantsust, võime kirjutada:

$$c_x'^2 + c_y'^2 + c_z'^2 = c^2 ,$$
$$c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = c^2 . \qquad (9.10)$$

Asetades esimesse võrdusse c_x' avaldise valemist (9.5) ja avaldades $\sqrt{c_y'^2 + c_z'^2}$, leiame:

$$\sqrt{c_y'^2 + c_z'^2} = \frac{\sqrt{c^2 - c_x^2}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - c_x v/c^2} . \qquad (9.11)$$

Arvestades teist võrdust (9.10), saame siit:

$$\sqrt{c_y'^2 + c_z'^2} = \frac{\sqrt{c_y^2 + c_z^2}\ \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - c_x v/c^2} . \qquad (9.12)$$

Siin tähendab $\sqrt{c_y^2 + c_z^2}$ või $\sqrt{c_y'^2 + c_z'^2}$ valguse kiiruse komponenti, mis on risti kiirusega v. Et aga selles risttasandis on kõik suunad üheväärsed, kehtib samakujuline valem ka y- ja z-komponendi jaoks eraldi. Kirjutame välja kõigi kolme komponendi teisendusvalemid koos:

$$c_x' = \frac{c_x - v}{1 - c_x v/c^2} ,$$
$$c_y' = \frac{c_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - c_x v/c^2} , \qquad (9.13)$$
$$c_z' = \frac{c_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - c_x v/c^2} .$$

Seega oleme näidanud, et kiiruse komponentide teisendusvalemid (8.14) kehtivad tõesti ühesugusel kujul nii kehade kui ka valguse puhul. Võime lühidalt ütelda, et nad kehtivad mis tahes kindla kiirusega liikuva materiaalse objekti kohta. Lisaks näitasime, et ka valem (8.9) kehtib samas mõttes täiesti üldiselt.

Valguse kiiruse komponentide teisenemise puhul on kohane rõhutada, et valguse kiiruse konstantsus kehtib kiiruse absoluutväärtuste kohta, mitte aga kiiruse kui vektori kohta. Valguse kiiruse absoluutväärtus ei sõltu inertsiaalsüsteemi valikust ega suunast mis tahes inertsiaalsüsteemis. Aga kiiruse suund sõltub inertsiaalsüsteemi valikust. Seda sõltuvust näitavadki kiiruse komponentide teisendusvalemid.

Tuletame veel ühe valemi, mis peaks ilmekamalt näitama valguse kiiruse suuna muutumist siirdel ühest inertsiaalsüsteemist teise. Nurk, mille valguse kiirus moodustab x-teljega, olgu α ; teises inertsiaalsüsteemis, mis liigub esimese suhtes x-telje suunas kiirusega v , olgu see nurk α' . Siis

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= c_x/c \, , \\ \cos\alpha' &= c'_x/c \, . \end{aligned} \tag{9.14}$$

Asetades teise valemisse c'_x avaldise valemist (9.5), leiame:

$$\cos\alpha' = \frac{c_x - v}{c - c_x v/c} \, . \tag{9.15}$$

Võttes siin $c_x = c\cdot\cos\alpha$, saame:

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha - v/c}{1-(v/c)\cos\alpha} \, . \tag{9.16}$$

See ongi valem, mis näitab, kuidas muutub siirdel teise inertsiaalsüsteemi valguse kiiruse suund. See üksainus valem on samaväärne (kui silmas pidada valguse kiiruse absoluutväärtuse invariantsust) kolme valemiga (9.13).

Nähtust, mis seisneb valguse kiiruse suuna muutumises siirdel teise inertsiaalsüsteemi, nimetatakse valguse aberratsiooniks. Praktiliselt on aberratsioon vaadeldav tänu Maa tiirlemisele Päikese ümber. See liikumine on mitteinertsiaalne, aga igal hetkel liigub Maa kindla (hetkelise) kiirusega. Me võime seetõttu pidada Maad hetkeliselt liikumatuks teatavas inertsiaalsüsteemis, mis liigub Päikese suhtes just sama kiirusega, millega liigub antud hetkel Maa. Maa tiirlemist võib seega vaadelda pideva siirdumisena ühest inertsiaalsüsteemist teise, sealt kolmandasse jne. Aga siis peab iga maavälise allika, näiteks tähe valgus Maalt vaadatuna pidevalt muutma oma suunda, vastavalt aberratsiooni valemile (9.16).

Selle astronoomilise aberratsiooni tegi esmakordselt vaatluste teel kindlaks J. Bradley 1728. aastal. Kui täht asetseb näiteks ekliptika pooluses, siis on Päikesega seotud süsteemis valguskiir risti Maa kiirusega kogu aasta vältel. Valemis (9.16) tuleb võtta $\cos\alpha = 0$, mispuhul $\cos\alpha' = -\frac{v}{c}$. See tähendab, et täht paistab Maa liikumise suunas ettepoole nihkununa nurga võrra, mille siinus on v/c, kus v on Maa kiirus Päikese suhtes. Et $c = 3 \cdot 10^5$ km/s ja $v = 30$ km/s, siis $v/c = 10^{-4}$. Selle arvu väiksuse tõttu võime siinuse asendada nurgaga (ehk kaarega). 10^{-4} radiaani on tavalises kaaremõõdus $20{,}5''$. Vastavalt Maa kiiruse suuna muutumisele muutub ka tähe nihke suund, jäädes ikka võrdseks 20,5 kaaresekundiga (siin me ei arvesta Maa kiiruse mõningat muutumist aasta vältel). Seega joonistab täht aasta jooksul taevavõlvile ringikese raadiusega $20{,}5''$. Kui täht ei asetse ekliptika pooluses, siis on tema aberratsiooniline liikumistee ellips, mille suur pooltelg on ikka $20{,}5''$. Ekliptikal asetseva tähe puhul kõdub ellips sirglõiguks.

Niisugune on J. Bradley poolt avastatud astronoomiline aberratsioon. J. Bradley andis sellele nähtusele ka õige seletuse, olgugi et relatiivsusteooriat tol ajal veel ei olnud. Asi seisab selles, et relativistlik aberratsioonivalem (9.16) ja vastav klassikaline valem annavad väikeste kiiruste puhul praktiliselt eristamatuid tulemusi. Klassikaline aberratsioonivalem põhineb klassikalisel kiiruste liitmise valemil (4.1). Kui $\vec{v}$ on x-telje suunaline, siis oleks selle järgi

$$\begin{aligned} c'_x &= c_x - v \,, \\ c'_y &= c_y \,, \\ c'_z &= c_z \end{aligned} \tag{9.17}$$

ja siit oleks

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= c_x/c = \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}} \,, \\ \cos\alpha' &= c'_x/c' = \frac{c'_x}{\sqrt{c'^2_x + c'^2_y + c'^2_z}} \,. \end{aligned} \tag{9.18}$$

Asetades teise valemisse c'_x , c'_y , c'_z avaldised (9.17), saamegi klassikalise aberratsioonivalemi:

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha - v/c}{\sqrt{1 - 2(v/c)\cos\alpha + v^2/c^2}} . \qquad (9.19)$$

See valem erineb muidugi valemist (9.16), ent kui mõlemas kasutame arendust v/c astmete järgi ning piirdume ainult esimest järku liikmetega, siis saame ühesuguse tulemuse:

$$\cos\alpha' = \cos\alpha - (v/c)\sin^2\alpha . \qquad (9.20)$$

Et $v/c = 10^{-4}$ korral on see lähendus enam kui küllaldane, ongi selge, et astronoomiline aberratsioon on seletatav ka ilma relatiivsusteooriata - ainuüksi klassikalise kinemaatika alusel.

§ 10.

MASSI JA IMPULSI TEISENDAMINE

§-s 2 me tuletasime klassikalised, s. o. mitterelativistlikud impulsi ja kineetilise energia teisendusvalemid (vt. valemid (2.11) ja (2.12)). Nüüd vaatame analoogilist küsimust relativistlikult seisukohalt. Vahe on kõigepealt selles, et relativistlikku energiat me veel ei tunne, teisest küljest aga tuleb teisendada peale impulsi ka massi. Relativistlik mass ei ole ju invariant sarnaselt klassikalisele massile. Keha mass sõltub kiirusest, järelikult peab ta siirdel teise inertsiaalsüsteemi muutuma. Ka valguse mass muutub (vt. valemid (6.25) või (9.9)), kuigi valguse kiirus ei muutu. Niisiis peame vaatama, kuidas teisenevad keha või valguse mass ja impulss. Selgub, et mõlemat liiki objektide puhul on teisendusvalemid täpselt ühesugused.

Teisendusvalemite tuletamiseks läheb vaja ainult kiiruse komponentide teisendusvalemeid (8.14) ja valemit (8.9) (valguse puhul vastavalt (9.13) ja (9.9)). Alljärgnevalt esitame selle tuletuskäigu, tähistades kiiruse komponendid u_x, u_y , u_z ; täpselt samasugune on see mõttekäik ka siis, kui tegemist on valgusega, mille kiiruse komponendid on c_x, c_y , c_z . Lõpptulemus aga kiiruse komponente enam üldse ei sisalda.

Et impulss võrdub massi ja kiiruse korrutisega, avaldame impulsi komponendid kahes inertsiaalsüsteemis järgmiselt:

$$p_x = mu_x ,\quad p_y = mu_y ,\quad p_z = mu_z \tag{10.1}$$

ja

$$p'_x = m'u'_x ,\quad p'_y = m'u'_y ,\quad p'_z = m'u'_z . \tag{10.2}$$

Rõhutame, et m ega m' ei ole seisumass, vaid kiirusega $\vec{u}$ või $\vec{u}'$ liikuva keha mass (või valguse mass, mispuhul kiiruseks on $\vec{c}$ või $\vec{c}'$). Nüüd asendame valemite (10.2) paremateI pooltel m' valemi (8.9) kaudu ja u'_x , u'_y , u'_z nende avaldistega valemitest (8.14). Tulemus on niisugune:

$$p'_x = \frac{m(u_x - v)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,\quad p'_y = mu_y ,\quad p'_z = mu_z . \tag{10.3}$$

Arvestades valemeid (10.1), saame:

$$p'_x = \frac{p_x - mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,\quad p'_y = p_y ,\quad p'_z = p_z . \tag{10.4}$$

Need ongi impulsi komponentide teisendusvalemid. Kordame veel, et nende saamisviis on täpselt ühesugune nii keha kui ka valguse puhul. Me kasutasime valemeid (8.9) ja (8.14), aga täpselt sama tulemuse oleksime saanud kasutades valemeid (9.9) ja (9.13).

Jääb tuletada massi teisendusvalem. Õieti polegi vaja tuletada, sest see on juba olemas. See on valem (8.9) või (9.9). Avaldades sellest m' ning arvestades, et $mu_x = p_x$, leiame:

$$m' = \frac{m - v p_x / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \qquad (10.5)$$

See ongi massi teisendusvalem.

Paneme tähele, et p'_x avaldises esineb peale p_x ka m, samuti m' avaldises peale m ka p_x. See tähendab, et mõlemad suurused teisenevad koos üksteise kaudu. Seepärast on mõistlik vaadelda kõiki nelja teisendusvalemit ühise tervikuna. Kirjutamegi nad kõik koos veel kord ümber:

$$\begin{aligned} p'_x &= \frac{p_x - mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \\ p'_y &= p_y , \\ p'_z &= p_z , \\ m' &= \frac{m - v p_x / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \end{aligned} \qquad (10.6)$$

Rõhutame nende valemite suurt universaalsust, mis avaldub selles, et nad kehtivad mis tahes kindla kiirusega liikuva objekti kohta, olgu see objekt keha või valgusvoog. Teeme nüüd veel mõned täiendavad märkused.

1. Teatavasti kehtib massi ja impulsi vahel seos (6.23):

$$p^2 = (m^2 - m_0^2) c^2 ,$$

mille kirjutame siinkohal ümber kujul

$$m^2 c^2 - \vec{p}^{\,2} = m_0^2 c^2 \qquad (10.7)$$

(valguse puhul seisab paremal poolel muidugi null). Et seisumass on invariantne suurus, peab kehtima võrdus

$$m'^2 c^2 - \vec{p}'^{\,2} = m^2 c^2 - \vec{p}^{\,2} . \qquad (10.8)$$

Selles võime ka otseselt veenduda: asetades vasakule poolele m', p'_x, p'_y, p'_z avaldised valemitest (10.6), saame identsuse.

2. Olgu kahe objekti massid m_1, m_2 ja impulsid $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$. Suurus $m_1 m_2 c^2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2$ on invariant, s. o.

$$m_1' m_2' c^2 - \vec{p}_1{}' \vec{p}_2{}' = m_1 m_2 c^2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2 \ . \qquad (10.9)$$

Selles veendume otseselt, asetades vasakule poolele teisendatud masside ja impulsi komponentide avaldised (10.6). Pärast mõningaid lihtsustusi osutub see identseks parema poolega.

3. Eelmises punktis defineeritud invariant on mittenegatiivne suurus:

$$m_1 m_2 c^2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2 \geqslant 0 \ . \qquad (10.10)$$

Tõepoolest, asendades $\vec{p}_1 = m_1 \vec{u}_1$, $\vec{p}_2 = m_2 \vec{u}_2$, leiame: $m_1 m_2 c^2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2 = m_1 m_2 (c^2 - \vec{u}_1 \vec{u}_2) = m_1 m_2 c^2 (1 - \frac{u_1 u_2}{c^2} \cos\alpha) \geqslant 0$, kus α on $\vec{u}_1$ ja $\vec{u}_2$ vaheline nurk. Näeme ühtlasi, et võrdus kehtib ainult siis, kui mõlema objekti kiirused on samasuunalised ning absoluutväärtuselt võrdsed c -ga. Kõigil teistel juhtudel kehtib võrratus.

4. Valemid (10.6), mis on tuletatud üksiku keha või valgusvoo jaoks, kehtivad ka mitmest objektist koosneva kogumi kohta. Selle kogumi impulss on üksikute objektide impulsside $\vec{p}_i$ vektoriaalne summa ja mass on üksikute objektide masside m_i summa:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \sum_i \vec{p}_i \ , \\ m &= \sum_i m_i \ . \end{aligned} \qquad (10.11)$$

Et $\vec{p}$ ja m teisenevad samade valemite järgi nagu üksikud $\vec{p}_i$ ja m_i, järgneb nende valemite l i n e a a r s u s e s t p_x, p_y, p_z, m suhtes. Pannes nad kirja indeksiga i ja summeerides seejärel selle indeksi järgi, saamegi ilmselt samakujulised valemid ka summaarsete suuruste $\vec{p}$ ja m jaoks.

5. Pöörame valemid (10.6) ümber, s. o. avaldame nendest p_x', p_y', p_z', m' kaudu p_x, p_y, p_z, m. Tulemus on niisugune:

$$
\begin{aligned}
p_x &= \frac{p_x' + m'v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} , \\
p_y &= p_y' , \\
p_z &= p_z' , \\
m &= \frac{m' + v p_x'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} .
\end{aligned}
\qquad (10.12)
$$

Need valemid erinevad algvalemitest ainult kiiruse v märgi poolest, mis on ka mõistetav, sest esimene inertsiaalsüsteem liigub teise suhtes kiirusega $-v$.

6. Lõpuks võrdleme impulsi teisendusvalemeid klassikalise valemiga (2.11). Kirjutame selle ümber üksikute komponentide jaoks, võttes $\vec{v}$ x -telje suunaliseks:

$$
\begin{aligned}
p_x' &= p_x - mv , \\
p_y' &= p_y , \\
p_z' &= p_z .
\end{aligned}
\qquad (10.13)
$$

Näeme, et need klassikalised valemid kehtivad relativistlike valemite lähendina, kui viimastes jätame ära ruutjuure $\sqrt{1-v^2/c^2}$. See tähendab, et me piirdume esimest järku täpsusega v/c suhtes, mis on $v \ll c$ korral õigustatud. Ka massi teisendusvalem saab sel eeldusel klassikalise kuju $m' = m$.

§ 11.

SEISUMASSI ABSOLUUTSUS JA RELATIIVSUS, MITTEADITIIVSUS JA MITTEJÄÄVUS

Seisumassi absoluutsus tähendab invariantsust: antud objekti seisumass ei sõltu sellest, millises inertsiaalsüsteemis me seda objekti vaatleme. Selle vastandiks on massi ja impulsi relatiivsus - need suurused, nagu nägime eelmises paragrahvis, sõltuvad kindlate teisendusvalemite järgi inertsiaalsüsteemist, milles vaadeldakse vastavat objekti.

Relatiivsus on omane siiski ka seisumassile, aga hoopis teises tähenduses. Seisumassi relatiivsus on seotud tema mitteaditiivsusega. Alljärgnevalt selgitame, mida tähendab mitteaditiivsus ja mis mõttes on seisumass relatiivne.

Vaatleme massi ja impulssi omavate objektide (kehade, osakeste ja valgusvoogude) kogumit. Märkides üksikutele objektidele kuuluvad suurused indeksiga i ja summeerides selle indeksi järgi, saame kogumi summaarse impulsi $\vec{p}$ ja summaarse massi m :

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \;, \qquad m = \sum_i m_i \;. \tag{11.1}$$

Need seosed väljendavad massi ja impulsi aditiivsust, kusjuures mõõduandev on siin asjaolu, et $\vec{p}$ ja m teisenevad siirdel ühest inertsiaalsüsteemist teise samade valemite järgi nagu üksikutele objektidele kuuluvad suurused $\vec{p}_i$ ja m_i. Just see asjaolu lubabki pidada $\vec{p}$ kogumi impulsiks ja m kogumi massiks.

Aga seisumassi puhul on asi teisiti. Kui m_{0i} on i-nda objekti seisumass, siis tähendab $\sum_i m_{0i}$ küll kõigi objektide seisumasside summat, aga seda ei saa käsitada objektide kogumi kui terviku seisumassina. Et selles veenduda, peame esmalt põhjendama kogumi kui terviku seisumassi mõiste.

Üksikobjekti puhul kehtib seisumassi avaldis

$$m_0 = \sqrt{m^2 - \vec{p}^{\,2}/c^2} \tag{11.2}$$

(vt. valem (10.7)). Kui $\vec{p} = 0$, s. o. kui objekt on liikumatu (mis on võimalik nullist erineva seisumassi puhul), siis $m_0 = m$. On loomulik käsitada valemit (11.2) seisumassi d e f i n i t s i o o n i n a , laiendades selle kehtivust üksikobjektilt mis tahes objektide kogumile. $\vec{p}$ ja m tähendavad sel puhul kogumi summaarset impulssi ja summaarset massi. Selle üldistatud seisumassi mõiste õigustuseks paneme tähele, et kui kogumi summaarne impulss on null, s. o. kui kogum tervikuna on liikumatu, siis tuleb selle terviku massi vaadelda seisumassina; valem (11.2) annabki $\vec{p} = 0$ korral $m = m_0$.

Üksikobjekt saab olla liikumatu teatavasti ainult siis, kui tema seisumass on nullist erinev. Nii on see ka kogumi puhul. Aga oluline erinevus seisneb selles, et iga kogum (välja arvatud, nagu kohe selgub, üks triviaalne juht) ongi tegelikult alati nullist erineva seisumassiga; seega on olemas ka inertsiaalsüsteem, milles kogumi impulss on null. Seda inertsiaalsüsteemi nimetatakse kogumi massikeskme süsteemiks (täpsemalt, massikeskme paigaloleku süsteemiks). See on süsteem, milles kogum tervikuna on liikumatu ja tema summaarne mass võrdub tema (üldistatud) seisumassiga. Mingi meelevaldselt valitud inertsiaalsüsteemi suhtes liigub massikeskme süsteem kiirusega

$$\vec{v} = \vec{p}/m = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i m_i}, \tag{11.3}$$

kus $\vec{p}$ ja m on impulss ja mass selles meelevaldses süsteemis. Tõepoolest, võttes $\vec{p}$ suuna ajutiselt x-teljeks, nii et $p_y = p_z = 0$ ja teisendades impulsi komponendid kiirusega $v = p_x/m$ x-telje suunas (s. o. $\vec{p}$ suunas) liikuvasse inertsiaalsüsteemi, saame valemite (10.6) järgi $p'_x = p'_y = p'_z = 0$. See tähendabki, et niisuguse kiirusega liikuv süsteem on massikeskme süsteem.

Nüüd näitame, et massikeskme süsteem on alati (peale ühe triviaalse juhu) olemas. Selleks on nõutav ainult tingimus $v < c$, mis annab võrratuse

$$\left(\sum_i \vec{p}_i\right)^2 < c^2 \left(\sum_i m_i\right)^2 . \tag{11.4}$$

Valemitest (10.7) ja (10.10) järgneb, et see võrratus kehtib tõepoolest. Ainus erand on see, kus kõigi objektide seisumassid on võrdsed nulliga ja kiirused samasuunalised, s. o. kui kogumiks on mitu ühes suunas liikuvat valgusvoogu. Tegelikult moodustavad niisugused vood üheainsa voo, nii et kogum kõdub üksikobjektiks. See on triviaalne juht, mida ei tarvitse arvestada.

Niisiis, igal kogumil on olemas massikese, mis on liikumatu ühes kindlas inertsiaalsüsteemis - massikeskme süsteemis. Kogumi summaarne impulss on selles süsteemis null, mass aga võrdub valemiga (11.2) defineeritud üldistatud seisumassiga. Tähistades kõik suurused massikeskme süsteemis indeksiga ', võime kirjutada:

$$\vec{p}\,' = 0 ,$$
$$m' = m_0 . \tag{11.5}$$

Kogumi seisumassi definitsiooni täiendavaks õigustuseks märgime, et siirdel massikeskme süsteemist mingisse meelevaldsesse inertsiaalsüsteemi avaldub kogumi mass täpselt samakujulise valemiga (6.17) nagu üksikobjekti mass:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} . \tag{11.6}$$

Selle valemi saame otseselt massi teisendusvalemist (10.12), võttes seal $p'_x = 0$ ja $m' = m_0$. Samuti järgneb see valemist (11.2), kus tuleb võtta (11.3) põhjal $\vec{p} = m\vec{v}$. Avaldades seejärel m, saamegi (11.6).

Nüüd näitame, et

$$m_0 \geqslant \sum_i m_{0i} . \tag{11.7}$$

Selleks paneme tähele, et massi aditiivsuse põhjal

$$m' = \sum_i m'_i \tag{11.8}$$

ehk

$$m_0 = \sum_i m'_i . \tag{11.9}$$

Massikeskme süsteemis on kogumi massikese liikumatu, aga üksikud objektid ei tarvitse muidugi olla liikumatud. Seega kehtib võrratus $m'_i \geqslant m_{0i}$, mis teebki võrduse (11.9) võrratuseks (11.7). Ühtlasi näeme, et võrdusmärk kehtib seal ainult sel juhul, kui $m'_i = m_{0i}$ iga objekti puhul, s. o. kui kõik kogumisse kuuluvad objektid on massikeskme süsteemis liikumatud, ehk, teiste sõnadega, kui nad kõik liiguvad mis tahes inertsiaalsüsteemis ühe ja sama kiirusega. Üldjuhul aga kehtib võrratus.

Võrratus (11.7) väljendabki seisumassi mitteaditiivsust: kogumi kui terviku seisumass on suurem kui kogumit moodustavate objektide seisumasside summa.

Mitteaditiivsus toob kaasa teatava omapärase relatiivsuse (rõhutame veel kord, et sel relatiivsusel pole midagi ühist relatiivsusega inertsiaalsüsteemi valiku suhtes). Nimelt on meil vabadus kas arvestada iga objekti üksikult või vaadelda kõiki neid üheainsa kogumina või moodustada mitu väiksemat kogumit (mida võib teha mitmel eri viisil). Iga kord saame erineva seisumassi (välja arvatud eelnimetatud erijuht, kus kõik objektid on üksteise suhtes liikumatud). Selles mõttes ongi seisumass relatiivne: tema väärtus sõltub kogumite moodustamise viisist. Seejuures on kõik need erinevad seisumassid invariantsed, s. o. inertsiaalsüsteemi valikust sõltumatud suurused.

Eelöeldut ei tule siiski niiviisi mõista, nagu oleksid kõik need vaatleja meelevallast sõltuvad seisumassid samaväärsed. Mitmest objektist kogumite meelevaldne moodustamine on formaalne toiming, mis iga kord ei tarvitse peegeldada midagi objektiivset. Olgu näiteks kõnesolevad objektid vabad ning üksteisest täiesti sõltumatud. Siis ei ole nende rühmitamisel kogumiteks suuremat objektiivset tähendust. Seda võib muidugi teha, kusjuures mitmed erinevad seisumassi väärtused, mis sel teel saadakse, on kõik ühevõrra "tõelised" - selles mõttes, et igaüks vastab objektiivselt ühele kindlale rühmitamisviisile. Aga rühmitamisel endal puudub objektiivne tagapõhi. Praktiliselt on hoopis tähtsam vaadelda iga sõltumatut objekti omaette. Vastupidise juhuga on tegemist seal, kus objektid ei ole vabad, vaid on seostatud ühte kompaktsesse materiaalsesse tervikusse. Sel korral on praktiliselt sageli eelistatav arvestada seisumassina just selle terviku seisumassi, olgugi et igal üksikul osal on oma seisumass. Ühe tüüpilise seda laadi juhuga kohtusime juba §-s 3. Seal me vaatlesime musta kiirgusega täidetud õõnsat keha. Kui keha seisumass on m_0 ja kiirguse mass keha paigaloleku inertsiaalsüsteemis μ , siis on ko-

8

gu selle terviku seisumass $m_0+\mu$. See on üldistatud seisumass; iga eraldi võetud kiirguseosakese seisumass on null; võrratus $m_0+\mu > m_0$ väljendabki seisumassi mitteaditiivsust antud juhul. Niikaua kui õõnes keha püsib kompaktse tervikuna, on kõigiti otstarbekohane vaadelda seisumassina $m_0+\mu$.

Vastöeldu kehtib õieti mis tahes makroskoopilise keha kohta. Keha seisumass on tema mass paigalolekus. Aga iga keha koosneb aatomitest, mis keha sees liiguvad. Seetõttu ei ole keha seisumass võrdne aatomite seisumasside summaga. Ent kuna keha on kompaktne tervik, siis on praktiliselt õige arvestada seisumassina just kogu selle keha kui seostatud aatomite kogumi seisumassi.

Siirdume küsimusele seisumassi mittejäävusest. Kirjanduses ei tehta mõnikord vahet jäävuse ja aditiivsuse vahel, aga tegelikult on need mõisted täiesti erinevad, olgugi et mõningane seos nende vahel on olemas. Jäävusest tuleb rääkida ajas kulgeva p r o t s e s s i puhul, mille lõpus antud suurus on sama väärtusega nagu algul. Kui väärtus ei ole sama, siis on suurus mittejääv. Aditiivsus on aga s t r u k t u u r n e omadus, mis iseloomustab antud suurust materiaalse kogumi o l e k u suhtes, igasugu protsessidest sõltumatult. Seega ei ütle seisumassi mitteaditiivsus veel midagi jäävuse või mittejäävuse kohta.

Niisiis, kas seisumass on jääv või mitte? Esimesest pilgust võiks ehk paista, et küsimus on ammugi selge. Seisumass on mittejääv! See järeldub kas või §-s 6 vaadeldud protsessist, mille abil tuletasime keha massi sõltuvuse kiirusest. Valem (6.24) näitab, et valguse neelamisel keha poolt selle seisumass suureneb. Et valguse seisumass on null, tähendabki see, et seisumass on mittejääv.

Nii on see küll, ent siiski on siinkohal vajalik täiendav selgitus. Kirjanduses leidub nimelt väiteid, et seisumass olevat jääv. Vaatame, mis alusel sünnivad need väited ja põhjendame vastupidise seisukoha.

Vaatleme objektide kogumit, mis olgu muust maailmast isoleeritud. Toimugu kogumis mingi protsess, mille käigus muutuvad üksikute objektide massid ja impulsid, muutub vahest ka objektide arv, aga summaarne impulss ja summaarne mass on kindlasti jäävad. Kogumit kui tervikut iseloomustab valemi (11.2) kohaselt ka üldistatud seisumass. Otsekohe on selge, et kui m ja $\vec{p}$ on jäävad, siis on jääv ka m_0. Niiviisi jõutaksegi seisumassi jäävusele.

Esitatud mõttekäik paistab küllalt veenvana, tegelikult aga ei tõesta midagi. Järeldus on õieti triviaalne; arvatav seisumassi jäävus ei iseloomusta protsessi olemust. Kogumi seisumass ei ole ju midagi muud kui sellesama kogumi mass massikeskme süsteemis. Seega ei anna seisumassi jäävuse deklareerimine mitte mingit lisa sellele, mis on niigi teada: et mass on igas inertsiaalsüsteemis (sealhulgas massikeskme süsteemis) jääv. Teiseks, meenutagem, et kogumi seisumass, nagu ta on valemiga (11.2) defineeritud, ei ole seisumassi mitteaditiivsuse tõttu ainus mõeldav seisumass. Formaalselt võiksime seda muidugi eelistada, aga sellega me ei saavutaks midagi, sest, nagu äsja nägime, ei väljenda selle suuruse jäävus mitte midagi muud kui lihtsalt massi jäävust ühes kindlas inertsiaalsüsteemis. Hoopis sisukam on mitteformaalne seisukoht, mille kohaselt iga sõltumatu objekti seisumassi tuleb määrata eraldi. Aga sel juhul ei ole seisumass üldiselt jääv. Just seisumassi mittejäävus iseloomustabki markantselt paljusid protsesse. Mittejäävus on seisumassi objektiivne omadus, millest ei saa ega ole mõtet vaikides mööda minna. Kui aga meelevaldselt rakendatakse seisumassi mõistet ainult isoleeritud kogumitele, tehes sel teel seisumassi petlikult jäävaks, siis tähendab see mainitud objektiivse omaduse ignoreerimist.

Seisumassi mittejäävust mitmesugustes protsessides jälgime lähemalt §-s 13.

§ 12.

TEINE MEETOD MASSI JA IMPULSI RELATIVISTLIKE MÕISTETE PÕHJENDAMISEKS

§-des 6 - 10 andsime relativistliku põhjenduse massi ja impulsi mõistetele. Alustasime keha massi sõltuvusega kiirusest, tuletasime seejärel kiiruse teisendusvalemid (kaasa arvatud valguse kiirus) ja lõpetasime massi ja impulsi teisendusvalemite tuletamisega. Selle teooria rakendusi konkreetsetes ülesannetes vaatleme veidi hiljem, siin aga esitame teise meetodi massi ja impulsi mõistete põhjendamiseks. See meetod on kompaktsem ning põhimõtteliselt lihtsam, ent ühtlasi ka formaalsem ning abstraktsem, seega vähem näitlik. Igatahes moodustab ta kasuliku täienduse varemesitatud meetodile.

Meetodite vahel on veel üks erinevus. Eespool me eeldasime massi ja impulsi jäävust. Uues meetodis seda eeldust vaja ei ole. Selle asemel piisab nõrgemast eeldusest. See seisneb selles, et mass ja impulsi komponendid peavad teisenema siirdel teise inertsiaalsüsteemi lineaarselt. On kerge näha, et see eeldus on tarvilik selleks, et massi ja impulsi jäävus (kui nad jäävad on) kehtiks kõikides inertsiaalsüsteemides, olles seega kooskõlas relatiivsusprintsiibiga. Aga iseenesest ei tähenda teisenduste lineaarsus veel, et mass ja impulss on jäävad: lineaarsuse eeldus ei ole selleks küllaldane. See tähendabki, et meie uus eeldus on eelmisest nõrgem. Muidugi kasutame lineaarsuse eelduse kõrval, nagu ennegi, relatiivsusteooria põhipostulaate.

Tuletuskäigu suund on uues meetodis vanale vastupidine. Seal me saime massi ja impulsi teisendusvalemid lõpptulemusena, siin peame saama nad esmajärjekorras. Kõik muu osutub teisendusvalemite järelduseks. Niisiis, meie esimeseks ülesandeks on leida impulsi komponentide ja massi teisendusvalemid.

Massi ja impulssi loeme iga liikuvat objekti iseloomustavaks suuruste kompleksiks, kusjuures impulss võrdub alati massi ja kiiruse korrutisega:

$$\vec{p} = m\vec{u} \, . \tag{12.1}$$

Impulss on $\vec{u} = 0$ korral (s. o. liikumatul objektil) null, aga mass on igal objektil nullist erinev. Objekti kohta mingit kitsendavat eeldust vaja ei ole - see võib olla keha või valgusvoog või veel midagi muud. Oluline on ainult see, et temal on mingi kindel kiirus.

Siirdudes teise inertsiaalsüsteemi, võtame selle kiiruse $\vec{v}$ x-teljeks. Teises inertsiaalsüsteemis kehtib massi ja impulsi vahel analoogiline seos:

$$\vec{p}\,' = m'\vec{u}\,' . \tag{12.2}$$

Teisenduse lineaarsuse eelduse põhjal võime kirjutada:

$$\begin{aligned} p'_x &= \alpha_{11}(v)\,p_x + \alpha_{12}(v)\,m + \alpha_{10}(v) , \\ m' &= \alpha_{22}(v)\,m + \alpha_{21}(v)\,p_x + \alpha_{20}(v) , \end{aligned} \tag{12.3}$$

kus kordajad α_{11}, α_{12}, α_{10}, α_{22}, α_{21}, α_{20} ei sõltu objektist ega selle kiirusest, vaid sõltuvad ainult inertsiaalsüsteemide suhtelisest kiirusest v. Tuleb veel tähele panna, et p'_x ja m' võivad sõltuda ainult p_x-st ja m-st, mitte aga impulsi teistest komponentidest. See järgneb sümmeetriast: kui p'_x või m' avaldises seisaks, näiteks, veel mõni liige kujuga $\alpha(v)\,p_y$, siis asenduse $p_y \to -p_y$ puhul muutuks see liige vastasmärgiliseks, mistõttu teisendatud suurus (p'_x või m') saaks senisest erineva väärtuse; aga see ei ole võimalik, sest p_y ja $-p_y$ on x-telje suunalise liikumise seisukohalt samaväärsed.

Edasi veendume, et $\alpha_{10} = \alpha_{20} = 0$. Tõepoolest, võttes $p_x = p_y = p_z = m = 0$, teeme objekti esimeses inertsiaalsüsteemis olematuks. Siis ei saa objekt eksisteerida ka teises inertsiaalsüsteemis, s. o. peab olema $p'_x = m' = 0$. Aga valemid (12.3) annavad $p'_x = \alpha_{10}$ ja $m' = \alpha_{20}$. Seega tõesti $\alpha_{10} = \alpha_{20} = 0$.

Nüüd saavad teisendusvalemid kuju

$$\begin{aligned} p'_x &= \alpha_{11}\,p_x + \alpha_{12}\,m , \\ m' &= \alpha_{22}\,m + \alpha_{21}\,p_x \end{aligned} \tag{12.4}$$

(argumendi v jätame siin ja edaspidi märkimata). Ülesanne seisneb kordajate α_{11}, α_{12}, α_{22}, α_{21} leidmises.

Selleks rakendame valemeid (12.4) kolmele erijuhule. Olgu esiteks $u_x = c$, $u_y = u_z = 0$, s. o. objektiks on x-telje suunas leviv valgusvoog. Siis on ka teises inertsiaalsüsteemis $u'_x = c$, $u'_y = u'_z = 0$ ning valemid (12.4) annavad:

$$m'c = \alpha_{11} mc + \alpha_{12} m ,$$
$$m' = \alpha_{22} m + \alpha_{21} mc . \quad (12.5)$$

Siit järgneb:

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} c^{-1} = \alpha_{22} + \alpha_{21} c \quad (12.6)$$

Teiseks, vaatleme x-telje negatiivses suunas levivat valgusvoogu. Nüüd on $u_x = -c$, $u_y = u_z = 0$ ning $u'_x = -c$, $u'_y = u'_z = 0$. Valemitest (12.4) leiame:

$$-m'c = -\alpha_{11} mc + \alpha_{12} m ,$$
$$m' = \alpha_{22} m - \alpha_{21} mc . \quad (12.7)$$

Siit

$$\alpha_{11} - \alpha_{12} c^{-1} = \alpha_{22} - \alpha_{21} c . \quad (12.8)$$

Kolmandaks olgu $u'_x = u'_y = u'_z = 0$, s. o. objekt on teises inertsiaalsüsteemis liikumatu. Siis on $u_x = v$, $u_y = u_z = 0$ ning esimesest valemist (12.4) saame:

$$\alpha_{11} mv + \alpha_{12} m = 0 \quad (12.9)$$

ehk

$$\alpha_{11} v + \alpha_{12} = 0 . \quad (12.10)$$

Nüüd on meil käes kolm võrrandit, (12,6), (12.8) ja (12.10), mis seovad otsitavaid kordajaid α_{11} , α_{12} , α_{21} ja α_{22} . Nendest võrranditest võime avaldada kolm ühe, näiteks α_{11} kaudu:

$$\alpha_{22} = \alpha_{11} ,$$
$$\alpha_{12} = -v\alpha_{11} , \quad (12.11)$$
$$\alpha_{21} = -v\alpha_{11}/c^2 .$$

Seega jääb teisendusvalemitesse veel ainult üks kordaja:

$$p'_x = \alpha_{11} (p_x - mv) ,$$
$$m' = \alpha_{11} (m - v p_x/c^2) . \quad (12.12)$$

Selle leidmiseks paneme tähele, et ta peab olema kiiruse v paarisfunktsioon: $\alpha_{11}(-v) = \alpha_{11}(v)$. Tõepoolest, olgu $\vec{p} = 0$; siis $m' = \alpha_{11} m$. See tähendab, et siirdel objekti paigaloleku süsteemist teise süsteemi, kus ta liigub kiirusega v, suureneb mass α_{11} korda. Ent kuna kõik liikumise suunad on samaväärsed (ruum on isotroopne), siis ei või suurenemise tegur α_{11} sõltuda suunast, mis tähendabki, et $\alpha_{11}(-v)=\alpha_{11}(v)$. Siirdume nüüd teisest inertsiaalsüsteemist tagasi esimesse. Et esimene süsteem liigub teise suhtes kiirusega $-v$, siis kehtivad (12.12) eeskujul seosed

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_{11}(p'_x + vm'), \\ m &= \alpha_{11}(m' + vp'_x/c^2). \end{aligned} \tag{12.13}$$

Asetame nende seoste paremattesse pooltesse p'_x ja m' avaldised (12.12). Siis saame:

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_{11}^2(1-v^2/c^2)p_x, \\ m &= \alpha_{11}^2(1-v^2/c^2)m. \end{aligned} \tag{12.14}$$

Need mõlemad valemid annavad kooskõlalise tulemuse:

$$\alpha_{11} = (1-v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{12.15}$$

Seega saavad teisendusvalemid (12.12) lõpliku kuju:

$$\begin{aligned} p'_x &= \frac{p_x - vm}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ m' &= \frac{m - vp_x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{12.16}$$

Jääb tuletada p_y ja p_z teisendusvalemid. Selleks vaatleme meelevaldses suunas liikuvat valgusvoogu. Et

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m\vec{c}, \\ \vec{p}' &= m'\vec{c}', \end{aligned} \tag{12.17}$$

siis, võttes need võrdused ruutu ning arvestades, et $\vec{c}^2 = \vec{c}'^2 = c^2$, leiame:

$$\begin{aligned} \vec{p}^2 - m^2c^2 &= 0, \\ \vec{p}'^2 - m'^2c^2 &= 0. \end{aligned} \tag{12.18}$$

Nende seoste mõte on see, et ühe kehtimisel peab kehtima ka teine. Pikemalt võib kirjutada nad kujul

$$p_x^2+p_y^2+p_z^2-m^2c^2=0,$$
$$p_x'^2+p_y'^2+p_z'^2-m'^2c^2=0\,. \tag{12.19}$$

Asetame teise valemisse p_x' ja m' avaldised (12.16). Siis saame:

$$p_y'^2+p_z'^2+\frac{(p_x-vm)^2-c^2(m-vp_x/c^2)^2}{1-v^2/c^2}=0 \tag{12.20}$$

ehk

$$p_x^2+p_y'^2+p_z'^2-m^2c^2=0\,. \tag{12.21}$$

Lahutades siit esimese võrduse (12.19), leiame:

$$\sqrt{p_y'^2+p_z'^2}=\sqrt{p_y^2+p_z^2}\,. \tag{12.22}$$

Selle võrduse mõlematel pooltel seisavad impulsi x-teljega ristiolevad komponendid kahes inertsiaalsüsteemis. Ilmselt on meil võimalus valida y- ja z- ning y'- ja z'-teljed nii, et oleks

$$p_y'=p_y\,,$$
$$p_z'=p_z\,. \tag{12.23}$$

Seega on impulsi komponentide ja massi teisendusvalemite tuletamine lõpule viidud. Saadud valemid (12.16) ja (12.23) on identsed valemitega (10.6).

Siirdume teiste seoste juurde. Kiiruse komponentide teisendusvalemid saame väga lihtsalt valemitest

$$\vec{u}=\vec{p}/m\,,$$
$$\vec{u}'=\vec{p}'/m'\,. \tag{12.24}$$

Asendades $\vec{u}'$ komponentide avaldistes $\vec{p}'$ komponendid ja m' $\vec{p}$ komponentide ja m kaudu, saame:

$$u_x'=\frac{p_x-vm}{m-vp_x/c^2}\,,$$
$$u_y'=\frac{p_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{m-vp_x/c^2}\,, \tag{12.25}$$
$$u_z'=\frac{p_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{m-vp_x/c^2}\,.$$

Jagades kõigi kolme avaldise lugejad ja nimetajad läbi m-ga ja arvestades, et $p_x/m=u_x$ jne., leiame:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2},$$
$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2}, \tag{12.26}$$
$$u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2}.$$

Need ongi kiiruse komponentide teisendusvalemid. Nad ühtivad varem teisel teel tuletatud valemitega (8.14). Nad kehtivad ka valguse kiiruse komponentide jaoks (kujul (9.13)), sest massi ja impulsi teisendusvalemid ning kiiruse avaldised (12.24) kehtivad ühesuguselt niihästi kehade kui ka valguse kohta. Seega oleme korraga saanud ka valguse aberratsiooni.

Jäi üle veel keha massi sõltuvus kiirusest. Selle saamiseks võtame $p_x = p_y = p_z = 0$. Keha on seega liikumatu ja tema mass on seisumass: $m=m_0$. Teises inertsiaalsüsteemis liigub sama keha kiirusega v , s. o. $m'=m(v)$. Seega saab teine valem (12.16) kuju

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{12.27}$$

See ongi sama valem (6.17), mille saime teisel teel §-s 6.

Tuleb rõhutada, et massi teisendusvalem (teine valem (12.16)) on üldisem võrreldes valemiga (12.27). Ta kehtib nii kehade kui ka valguse puhul. Valguse puhul aga paigalóleku inertsiaalsüsteemi ei ole. Valemi (12.27) asemele saame teistsuguse valemi. Asendame valemis (12.16) $p_x = mc_x = mc\cos\alpha$, kus α on nurk, mille valguse kiirus moodustab x-teljega (see on sama tähistus, nagu aberratsiooni valemis (9.16)). Siis saame valguse massi teisendusvalemi kujul

$$m' = \frac{m(1-(v/c)\cos\alpha)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{12.28}$$

9

See on õieti identne valemiga (9.9). Erijuhuks on valem (6.25).

Nii oleme välja jõudnud sinna, kust me varem alustasime, ja see algus on uue meetodi lõpupunkt. Uus meetod näitab veel kord ilmekalt massi ja impulsi teisendusvalemite erakordset universaalsust ning sisukust. Kui need valemid on kord käes, siis järeldub kõik ülejäänu juba iseenesest.

§ 13.

RELATIVISTLIKUD PÕRKED

§-s 1 vaadeldud klassikalise põrketeooria aluseks on massi ja impulsi jäävuse seadused, kusjuures elastsete põrgete puhul tuleb arvestada ka mehhaanilise energia jäävust. Relativistlikus põrketeoorias lähtutakse samuti massi ja impulsi jäävusest, energiat aga pole vaja arvestada. Me ei saakski seda teha, sest meil alles puudub relativistlik energia mõiste. Meil ei olnud seda mõistet siiani vaja ja ta on ka põrketeoorias tarbetu.

Nagu mitterelativistlikus põrketeoorias, nii tuleb ka relativistlikus põrketeoorias eristada elastseid ja mitteelastseid põrkeid. Elastseteks nimetame põrkeid, mille puhul seisumass on jääv; mitteelastseteks põrkeid, mille puhul seisumass ei ole jääv. Näiliselt on see elastsuse kriteerium hoopis teistsugune, võrreldes mitterelativistliku kriteeriumiga, kus elastsus või mitteelastsus seostub energia jäävuse või mittejäävusega. Siiski on mõlemad kriteeriumid tegelikult teineteisega täpses vastavuses. Selles veendume hiljem, §-s 15, pärast relativistliku energia mõiste sissetoomist.

Mõningaid põrkeid oleme vaadelnud juba varem, eriti §-des 6 - 8. Need olid kõik mitteelastsed põrked.

Mitteelastsetele relativistlikele põrgetele on iseloomulik ka see, et muutuda võib peale seisumassi ka põrkes osalevate komponentide arv. Eriti on see tüüpiline elementaarosakeste vahelistele põrgetele. Osakesed võivad põrgete puhul muunduda ja paljuneda. Valguse elementaarosakesena osaleb sedaliiki muundumistes footon.

Alljärgnevalt piirdume ainult selliste põrgetega, mille puhul kõikide kehade (või osakeste) ja valgusvoogude impulsid, nii enne kui ka pärast põrget, on samasihilised. Need on tsentraalsed otsepõrked. Impulssi loeme ühes kindlas suunas (vasakult paremale) positiivseks ja vastassuunas negatiivseks.

Vaatleme esmalt kahe keha elastset põrget. Tähistame kehade seisumassid M_0 ja m_0, nende algmassid M ja m, lõppmassid M_1 ja m_1, algimpulsid P ja p, lõppimpulsid P_1 ja p_1, algkiirused U ja u, lõppkiirused U_1 ja u_1. Etteantud suurustena on kasulik vaadelda M, m, P ja p. Tarbe korral võib nende kaudu avaldada ka algkiirused ja seisumassid:

$$U = P/M, \qquad u = p/m \tag{13.1}$$

ja

$$M_0 = \sqrt{M^2 - P^2/c^2}, \qquad m_0 = \sqrt{m^2 - p^2/c^2}. \tag{13.2}$$

Otsitavateks suurusteks on vastavalt lõppmassid M_1, m_1 ja lõppimpulsid P_1 ja p_1. Nende määramiseks on vaja nelja võrrandit. Need on esiteks massi ja impulsi jäävust väljendavad seosed

$$P + p = P_1 + p_1, \qquad M + m = M_1 + m_1 \tag{13.3}$$

ja teiseks mõlema keha seisumassi jäävust väljendavad seosed

$$M^2 - P^2/c^2 = M_1^2 - P_1^2/c^2, \qquad m^2 - p^2/c^2 = m_1^2 - p_1^2/c^2. \tag{13.4}$$

Võrrandisüsteemi (13.3) - (13.4) lahendamiseks toome sisse abitundmatud x ja y :

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P - x\,,\\
p_1 &= p + x\,,\\
M_1 &= M - y\,,\\
m_1 &= m + y\,.
\end{aligned}
\tag{13.5}
$$

Ilmselt rahulduvad siis võrrandid (13.3), kuna võrrandid (13.4) saavad kuju

$$
\begin{aligned}
&y^2 - x^2/c^2 - 2My + 2Px/c^2 = 0\,,\\
&y^2 - x^2/c^2 + 2my - 2px/c^2 = 0\,.
\end{aligned}
\tag{13.6}
$$

Sel võrrandisüsteemil on olemas triviaalne lahend $x = y = 0$, mis meile huvi ei paku, sest see tähendab, et põrget pole olnudki (kehade massid ja impulsid ei muutunud). Mittetriviaalne lahend on järgmine:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2(mP - Mp)(M+m)c^2}{(M+m)^2c^2 - (P+p)^2}\,,\\
y &= \frac{2(mP - Mp)(P+p)}{(M+m)^2c^2 - (P+p)^2}\,.
\end{aligned}
\tag{13.7}
$$

Asetades need avaldised valemitesse (13.5), leiame:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P - \frac{2(mP - Mp)(M+m)c^2}{(M+m)^2c^2 - (P+p)^2}\,,\\
p_1 &= p + \frac{2(mP - Mp)(M+m)c^2}{(M+m)^2c^2 - (P+p)^2}
\end{aligned}
\tag{13.8}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
M_1 &= M - \frac{2(mP - Mp)(P+p)}{(M+m)^2c^2 - (P+p)^2}\,,\\
m_1 &= m + \frac{2(mP - Mp)(P+p)}{(M+m)^2c^2 - (P+p)^2}\,.
\end{aligned}
\tag{13.9}
$$

Seega on ülesanne lahendatud. Erijuhul, kui kehade impulsid on võrdvastupidised, s. o. $P + p = 0$, on võrrandisüsteemi (13.3) - (13.4) lahendiks $P_1 = -P$, $p_1 = -p$, $M_1 = M$, $m_1 = m$, milles võib vahetult veenduda (ka valemid (13.8) ja (13.9) annavad sama tulemuse). See tähendab, et võrdvastupidiste algimpulsside puhul muutub pärast põrget kummagi keha impulss vastassuunaliseks, ilma et muutuks absoluutväärtus. Järelikult ei muutu ka massid. See tähelepanek võimaldab tuletada valemid (13.8) ja (13.9) veel teisel teel, ilma võrrandisüsteemi (13.3) - (13.4) lahendamata. Selle asemel teisendame kehade algimpulsid ja algmassid nende massikeskme inertsiaalsüsteemi, kus nende summaarne impulss on null (vt. § 11), pöörame impulsid vastassuunalisteks ja teisendame tagasi algsüsteemi. Massikeskme süsteemi kiirus algsüsteemi suhtes on

$$v = \frac{P+p}{M+m} \tag{13.10}$$

(vt. valem (11.3)). Asetades selle avaldise v asemele teisendusvalemitesse (10.6), arvutame kehade algimpulsid P', p' ja algmassid M', m' massikeskme süsteemis:

$$P' = \frac{(mP-Mp)c}{\sqrt{(M+m)^2c^2-(P+p)^2}},$$

$$p' = -\frac{(mP-Mp)c}{\sqrt{(M+m)^2c^2-(P+p)^2}} \tag{13.11}$$

ja

$$M' = \frac{M(M+m)c^2-P(P+p)}{c\sqrt{(M+m)^2c^2-(P+p)^2}},$$

$$m' = \frac{m(M+m)c^2-p(P+p)}{c\sqrt{(M+m)^2c^2-(P+p)^2}}. \tag{13.12}$$

Seejärel teisendame lõppimpulsid $P_1' = -P'$, $p_1' = -p'$ ja lõppmassid $M_1' = M'$, $m_1' = m'$ tagasi algsüsteemi, võttes selleks teisendusvalemites (10.6) $v = -\frac{P+p}{M+m}$. Tulemuseks saame uuesti valemid (13.8) ja (13.9).

Siirdume mitteelastsete põrgete juurde. Põrke tulemus oleneb siin põrkuvate kehade või osakeste algimpulssidest ja algmassidest ning ka sellest, kuidas muutuvad seisumassid. Seega on võimalikud väga mitmekesised konkreetsed üleanded. Alljärgnevalt piirdume ainult mõnede huvitavamate näidetega.

1. Annihilatsioon. Elektron ja positron liiguvad teineteisele vastu võrdsete kiirustega $\pm u$. Et nende seisumassid on võrdsed, siis on ka impulsid võrdvastupidised. Põrke tulemusena tekivad kaks võrdvastupidiste impulssidega γ-footonit. Massi jäävus määrab nende massi. Tähistades elektroni ja positroni seisumassi m_0 ja footoni massi μ, leiame:

$$\mu = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} . \tag{13.13}$$

Selles ülesandes on elektroni ja positroni summaarne impulss null, s. o. inertsiaalsüsteem, milles me annihilatsiooni vaatlesime, on massikeskme süsteem. Seega tähendab osakeste summaarne mass $\frac{2m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ mõlemast koosneva kogumi üldistatud seisumassi (vt. § 11). Footonite summaarne mass võrdub samuti $\frac{2m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ ja et summaarne impulss on ka null. võiksime seda suurust vaadelda kahe footoni kogumi üldistatud seisumassina. Ent juba §-s 11 me näitasime, et need on tarbetud formaalsed arutlused; "kogumit" tegelikult ei ole, sest kaks footonit on teineteisest kaugele eemaldunud. Samuti näeme selle konkreetse ülesande najal, et üldistatud seisumassi jäävus ei väljenda mitte midagi enamat, kui lihtsalt massi jäävust massikeskme süsteemis.

2. Antiprootoni teke. Liikumatu prootoniga, mille seisumass on M_0, põrkub teine prooton, mis liigub massiga M. Kui M on küllalt suur, siis on võimalik prooton-antiprootonpaari teke (mispuhul mõlemad põrkuvad prootonid säilivad). Kui suur peab M selleks vähemalt olema?

Arvestame, et prootoni ja antiprootoni seisumassid on võrdsed. Esimesel pilgul võib paista, et $M=3M_0$, sest kahe uue osakese tekkimiseks läheb vaja lisamassi vähemalt $2M_0$. Ent see pole õige lahendus: ta arvestab ainult massi, mitte aga impulsi jäävust. Et algimpulss on nullist erinev, siis ei saa neli osakest protsessi lõpus jääda liikumatuks; seega ei saa nende summaarne mass olla $4M_0$.

Õige lahendus käib nõnda. Pealelangeva prootoni algimpulss on $c\sqrt{M^2-M_0^2}$ (vt. valem (6.23)). Sama suur peab olema ka lõppimpulss. Et kõne all on minimaalne vajalik M väärtus, peavad kõik neli osakest liikuma pärast põrget koos ühe ja sama kiirusega ning ühe ja sama impulsiga. Seega tuleb iga osakese kohta lõppimpulss $(c/4)\sqrt{M^2-M_0^2}$. Iga osakese lõppmass võrdub siis $\sqrt{M_0^2+\frac{1}{16}(M^2-M_0^2)}$. Seega kehtib massi jäävuse põhjal võrdus

$$M+M_0=4\sqrt{M_0^2+\tfrac{1}{16}(M^2-M_0^2)}\ .$$

Lahendades selle võrrandi M suhtes, leiame:

$$M=7M_0\ . \tag{13.14}$$

Siit saame valemi (6.20) järgi ka minimaalselt vajaliku prootoni kiiruse

$$u=(4\sqrt{3}/7)c\approx 0{,}99c\ . \tag{13.15}$$

Teisiti võiksime selle ülesande lahendada ka siirdudes massikeskme süsteemi. Et pealelangeva prootoni impulss $c\sqrt{M^2-M_0^2}$ on ühtlasi summaarne algimpulss, siis on massikeskme süsteemi kiirus

$$v=\frac{c\sqrt{M^2-M_0^2}}{M+M_0}=c\sqrt{\frac{M-M_0}{M+M_0}}\ . \tag{13.16}$$

Kahe prootoni massid M' on massikeskme süsteemis võrdsed. Arvutades M' teisendusvalemite (10.6) järgi, leiame:

$$M'=\sqrt{\frac{M_0(M+M_0)}{2}}\ . \tag{13.17}$$

Pärast põrget peavad kõik neli osakest olema liikumatud (sest me tahame, et M oleks minimaalne). Seega võrdub minimaalne lõppmass massikeskme süsteemis $4M_0$ ning massi jäävusest järgneb, et $2M'=4M_0$, s. o.

$$\sqrt{2M_0(M+M_0)}=4M_0\ . \tag{13.18}$$

Sellest võrrandist saame jälle $M=7M_0$.

Vaatleme veel osakeste spontaanse lagunemise protsesse. Need ei ole küll ranges mõttes põrked, sest algul on üksainus osake. Et aga ka sel juhul on määrava tähtsusega massi ja impulsi jäävuse seadused, siis võib ka neid protsesse vaadelda "põrgetena" teatavas üldistatud mõttes.

3. Osakese lagunemine kaheks footoniks. On osakesi (näiteks π^0 -meson), mis lagunevad kaheks footoniks. Olgu ühe niisuguse osakese seisumass m_0 ja kiirus u . Footonite impulsid olgu u -ga samasihilised. Leiame footonite massid. Tähistame osakese liikumise suunas väljalendava footoni massi μ_1 , vastassuunas väljalendava footoni massi μ_2 . Massi ja impulsi jäävuse põhjal

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} &= \mu_1+\mu_2 , \\ \frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} &= (\mu_1-\mu_2)c . \end{aligned} \tag{13.19}$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi, saame:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (m_0/2)\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}} , \\ \mu_2 &= (m_0/2)\sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}} . \end{aligned} \tag{13.20}$$

Kui teisendame need massid osakese paigaloleku süsteemi (selleks tuleb valemis (6.25) võtta $\mu=\mu_1$ ja $v=u$ ning $\mu=\mu_2$ ja $v=-u$), siis leiame, et kumbki võrdub $(m_0/2)$ -ga. Nii peabki olema: paigaloleku süsteemis on footonite impulsid vördvastupidised, massid seega võrdsed, aga masside summa peab võrduma osakese seisumassiga m_0 .

4. π -mesoni lagunemine müüoniks ja neutriinoks. Olgu π -mesoni seisumass M_0 , müüoni oma m_0 ; neutriino seisumass (nagu footoni oma) võrdub nulliga. Vaatleme π -mesoni lagunemist paigalolekus. Siis on müüoni impulss p ja neutriino impulss $-p$ võrdvastupidised. Nende massid on vastavalt $m=\sqrt{m_0^2+p^2/c^2}$ ja p/c . Seega kehtib massi jäävuse põhjal võrrand

$$p/c + \sqrt{m_0^2 + p^2/c^2} = M_0 \,. \tag{13.21}$$

Lahendades selle p suhtes, leiame:

$$p = \frac{(M_0^2 - m_0^2)c}{2M_0} \,. \tag{13.22}$$

Siit leiame ka müüoni massi:

$$m = \frac{M_0^2 + m_0^2}{2M_0} \tag{13.23}$$

ja kiiruse $p/m = u$:

$$u = c \cdot \frac{M_0^2 - m_0^2}{M_0^2 + m_0^2} \,. \tag{13.24}$$

§ 14.

DÜNAAMIKA PÕHIVÕRRAND

Impulsi jäävuse seadus järeldub klassikalises mehhaanikas Newtoni II ja III seadusest. Relatiivsusteoorias omandab primaarse tähenduse, vastupidi, impulsi jäävuse seadus, sest Newtoni III seadus kaotab oma algupärases formuleeringus paljudel juhtudel mõtte. Vaatleme, näiteks, valguse neelamist keha poolt. Impulss on selles protsessis jääv, kehasse mõjub protsessi vältel jõud, aga kas on mõtet ütelda, et valgusesse mõjub võrdvastupidine jõud? Seda ei saa ütelda, sest valgusele tähendab see protsess kadu. Tõsi küll, valgus pidi varem kiirguma mingist teisest kehast ja kiirgamise ajal mõjus sellesse kehasse jõud, mis on võrdvastupidine valguse neelanud kehasse mõjunud jõuga. Ka impulsid, mille saavad kiirgaja ja neelaja, on võrdvastupidised. Seega näib, nagu taastuks Newtoni III seaduse rakendusvõimalus, kui loobume valguse kui vahendaja osa arvestamisest ja käsitleme kehadesse mõjuvaid jõude nende vahetu vastastikuse mõjuna. Ent niisugune seisukoht viib tõsistesse raskustesse. Kiiratud valgus ei tarvitse neelduda otsekohe ega lähemal ajal. Paratamatult peame valgust vaatlema kehade kõrval iseseisva materiaalse objektina, impulsi ja massi kandjana. Newtoni III seadus on oma olemuselt <u>kaugmõju</u> seadus. Aga relatiivsusteooria eitab hetkelise kaugmõju võimalust. Vastastikune mõju teineteisest eemalolevate kehade vahel ei ole teisiti võimalik, kui mingi vahendaja, näiteks valguse kaudu. See vahendaja on kehade vastastikuse mõju realiseerumisel nende võrdõiguslik partner. Dünaamika põhiseadused tuleb formuleerida nii, et nad kehtiksid ühevõrra mis tahes materiaalsete objektide kohta. Newtoni III seadus seda nõuet ei rahulda.

Seetõttu olemegi juba alates §-st 3 esikohale seadnud impulsi jäävuse seaduse. Newtoni III seadust pole selle kõrval enam vaja.

Teisiti on lugu Newtoni II seadusega. Impulss on jääv suletud ehk isoleeritud süsteemis, s. o. objektide kogumis, millesse on arvatud kõik antud protsessis osalevad objektid. Sageli on aga kasulik vaadelda üksikut objekti, näiteks üksikut keha. Ta ei ole teistest objektidest isoleeritud, mistõttu tema impulss ega mass jäävad ei ole. Nad muutuvad aja jooksul ja selle põhjuseks on teiste objektide mõju. Seda mõju võib kirjeldada <u>jõu</u> mõiste abil. Newtoni mehhaanikas defineeritakse jõud $\vec{F}$ impulsi tuletisena aja järgi:

$$\vec{F}=d\vec{p}/dt \; . \tag{14.1}$$

Miski ei takista meid defineerimast samal viisil ka relativistlikku jõudu. See tähendab, et me kanname relatiivsusteooriasse üle Newtoni II seaduse valemi (14.1) kujul ja vaatleme seda relativistliku dünaamika põhivõrrandina.

Öeldu ei tähenda, et relativistlik jõud on samade omadustega nagu mitterelativistlik jõud. Viimane on invariant, s. o. ta on ühesugune kõikides inertsiaalsüsteemides. Aga relativistlik jõud ei ole invariantne suurus. Siirdel teise inertsiaalsüsteemi teisenevad tema komponendid kindlal viisil. See on vajalik selleks, et dünaamika põhivõrrand (14.1) oleks ühesuguse kujuga kõikides inertsiaalsüsteemides. Lähemalt jõu teisenemisest on §-s 20.

On olemas veel üks oluline erinevus relativistliku ja mitterelativistliku valemi (14.1) vahel. Klassikalises dünaamikas mass kiirusest ei sõltu, seega asendus $\vec{p}=m\vec{u}$ annab

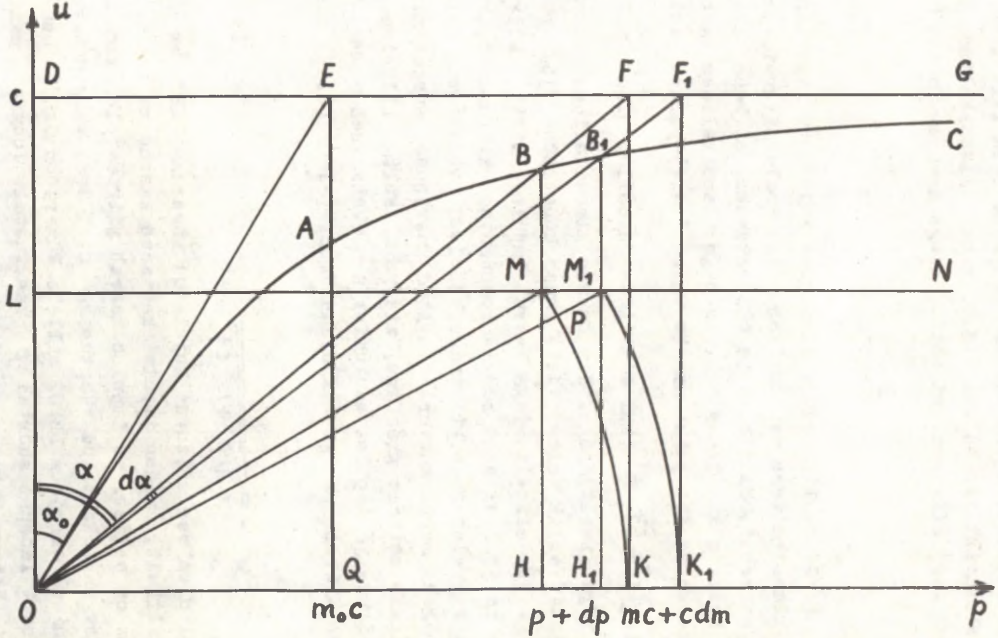
$$\vec{F}=m\vec{a}\,, \tag{14.2}$$

kus $\vec{a}=d\vec{u}/dt$ on kiirendus. Niisugune kuju ongi tavaliselt käibel klassikalises mehhaanikas. Aga relatiivsusteoorias (14.2) ei kehti. Siit saab ka mõistetavaks, et keha kiirus ei saa kasvada kui tahes suureks nagu klassikalises teoorias. Konstantse jõu puhul annaks valem (14.2) pärast integreerimist $\vec{u}=\vec{F}t/m$ (kui algkiirus on null), s. o. kiirus kasvab võrdeliselt ajaga. Nii on see klassikalises teoorias. Aga relativistlik valem (14.1) annab konstantse jõu puhul $\vec{p}=\vec{F}t$. Võrdeliselt ajaga kasvab impulss, mitte kiirus. Konstantne jõud ei anna kehale konstantset kiirendust, vaid kiiruse kasvades peab kiirendus järjest vähenema. Selles avaldub keha massi kasvust tingitud inertsuse suurenemine.

Lõpuks esitame graafiku, mis näitlikult illustreerib keha kiiruse ja impulsi muutumist nendevahelises seoses. Tähistades kiiruse u -ga kirjutame ümber valemi (6.22) järgmiselt:

$$u=\frac{pc}{\sqrt{p^2+m_0^2c^2}}\,. \tag{14.3}$$

Joonisel 8 on see sõltuvus kujutatud kõverana OABC. See näitab piltlikult, kuidas impulsi kasvades kasvab ka kiirus. Aga vahe on selles, et impulss kasvab piiramatult, kuna kiiruse kasv on tõkestatud väärtusega c. Seda väärtust kujutab joonisel sirgjoon DEFG, millele kõverjoon OABC asümptootiliselt läheneb suurtel p väärtustel. Joonis näitab ka massi. Võtame kiiruse graafikul meelevaldse punkti B ja tõmbame sirgjoone OB, pikendades seda kuni lõikumiseni punktis F asümptoodiga DG. Tähistades OB ja vertikaaltelje vahelise nurga α -ga, leiame:



Joon. 8.

$$\tan\alpha = m \,. \tag{14.4}$$

Et nurk α punkti B nihkudes suuremate impulsside suunas kasvab, näitab see valem, kuidas kasvab mass kiiruse ja impulsi kasvades. Lineaarses mõõdus kujutab massi punkti P abstsiss OK, mis võrdub $c\cdot\tan\alpha = mc$. Impulsi ja kiiruse vähenedes pöördub sirgjoon OP kellaosuti vastassuunas, kuni ta enam kiiruse graafikut ei lõika, vaid muutub puutujaks punktis O (sirgjoon OE). Siis on kiirus ja impulss võrdsed nulliga, mass aga võrdub seisumassiga. Seda kujutab punkti E abstsiss OQ, mis võrdub m_0c -ga. Tähistades OE ja vertikaaltelje vahelise nurga α_0 -ga, võime kirjutada:

$$\tan\alpha_0 = m_0 \,. \tag{14.5}$$

Järgmises paragrahvis näitame kirjeldatud graafiku kasutamist relativistliku töö ja energia küsimuses.

§ 15.

RELATIVISTLIK TÖÖ JA ENERGIA. MASSI JA ENERGIA EKVIVALENTSUS

Klassikalises mehhaanikas jõutakse energia mõistele töö mõiste kaudu. Et selgitada relativistliku energia mõiste põhjendamise võimalusi, on loomulik minna analoogilist teed ka relativistlikus mehhaanikas.

Arvutame töö, mida teeb kehasse mõjuv jõud. Liikugu keha trajektoori elemendi $d\vec{s}$ võrra edasi. Siis on töö

$$dA = \vec{F}d\vec{s} \,. \tag{15.1}$$

Et $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, siis

$$dA = (d\vec{p}/dt)d\vec{s} = (d\vec{s}/dt)d\vec{p} \,. \tag{15.2}$$

Et aga

$$d\vec{s}/dt = \vec{u} = \vec{p}/m \,, \tag{15.3}$$

siis

$$dA = m^{-1}\vec{p}d\vec{p} \,. \tag{15.4}$$

See tulemus on ühtaegu relativistlik ja mitterelativistlik, sest valem (15.3) kehtib mõlemal pool. Edasi aga lähevad teed lahku. Klassikalises mehhaanikas on $\vec{p} = m\vec{u}$, kus m on kiirusest sõltumatu, seega $d\vec{p} = m\,d\vec{u}$ ning valem (15.4) saab kuju

$$dA_{kl} = m\vec{u}\,d\vec{u}. \tag{15.5}$$

Et kehasse mõjuva jõu töö võrdub klassikalises mehhaanikas keha kineetilise energia T_{kl} muuduga

$$dA_{kl} = dT_{kl}\ , \tag{15.6}$$

siis

$$dT_{kl} = m\vec{u}\,d\vec{u}\ . \tag{15.7}$$

Integreerides, leiame klassikalise kineetilise energia valemi hästituntud kujul:

$$T_{kl} = mu^2/2\ . \tag{15.8}$$

Relatiivsusteoorias tuleb seevastu kasutada seost (6.23), millest diferentseerimise teel saame:

$$\vec{p}\,d\vec{p} = c^2 m\,dm\ . \tag{15.9}$$

Asetades selle avaldise valemisse (15.4), leiame:

$$dA = c^2 dm\ . \tag{15.10}$$

See on samavõrd lihtne kui ka tähtis tulemus. Mis on selle füüsikaline sisu?

Eelkõige on näha, et energia mõiste sissetoomine on õieti tarbetu. Töö osutus meil võrdeliseks keha massi muuduga, kusjuures võrdeteguriks on universaalne konstant c^2. Integreerides alates paigalolekust, saame:

$$A = c^2(m - m_0)\ . \tag{15.11}$$

Seega on jõu poolt sooritatud töö mõõduks keha kineetiline mass. Nüüd me saame aru, miks ei olnud meil energia mõistet relativistlikus mehhaanikas vaja. Ei olnud sellepärast vaja, et mass, mis oli senini ainult inertsuse mõõt, osutus ühtlasi ka töö mõõduks. See tulemus on üks fundamentaalsemaid kogu relatiivsusteoorias. Ta näitab, et töö hulga väljendamiseks pole uut mõistet massi kõrval tarvis.

Siiski on traditsioonipäraselt energia mõiste tarvitusel ka relatiivsusteoorias. Kahe mõiste - massi ja energia paralleelset kasutamist õigustab mitterelativistliku piirjuhu praktiline tähtsus. Et sel piirjuhul on mass ja energia täiesti eri liiki suurused, siis on üleminekü hõlbustamiseks otstarbekohane, kui ka relatiivsusteoorias esinevad kõrvuti mõlemad suurused.

Aga kust me siiski relativistliku energia mõiste saame? Selleks on ilmselt olemas ainult üks võimalus. Energia tuleb defineerida massiga ekvivalentse (samaväärse) suurusena:

$$E = mc^2 . \tag{15.12}$$

Seda universaalset seost nimetatakse <u>massi ja energia ekvivalentsuse seaduseks</u>. Valem (15.10) saab nüüd kuju

$$dA = dE . \tag{15.13}$$

Relativistlik kineetiline energia on kineetilise massiga ekvivalentne suurus:

$$T = (m - m_0)c^2 = E - E_0 = m_0 c^2 [(1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} - 1], \tag{15.14}$$

kus

$$E_0 = m_0 c^2 \tag{15.15}$$

on seisumassiga ekvivalentne energia ehk <u>seisuenergia</u>. Kui võtame valemis (15.14) $u \ll c$, siis $(1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + u^2/2c^2$ ja valem saab kuju

$$T \approx m_0 u^2/2 . \tag{15.16}$$

Seega langeb relativistlik kineetiline energia väikese kiiruse puhul ühte mitterelativistliku kineetilise energiaga (vrd. kineetilise massi avaldist (6.27) samas lähenduses).

Keha koguenergia võrdub alati kineetilise energia ja seisuenergia summaga:

$$E = E_0 + T\,, \qquad (15.17)$$

täiesti sarnaselt analoogilise seosega massi jaoks (vt. (6.18)). Seisuenergia on puht-relativistlik mõiste, millele ei leidu vastet klassikalises mehhaanikas. Tõsi küll, seisuenergia on ekvivalentne seisumassiga, mis on hästi tuntud juba mitterelativistliku suurusena. Ent asi seisab selles, et see ongi mitterelativistlikus teoorias ainult mass, ilma igasuguse energeetilise ekvivalendita. Massi ja energia ekvivalentsus läheb siirdumisel mitterelativistlikule piirjuhule kaotsi; see, mis relatiivsusteoorias oli mass ning seeläbi ka energia, osutub piirjuhul ainult massiks, sest mitterelativistlik energia mõiste on hoopis teistsugune, ta on massi mõistest sõltumatu.

Mitterelativistlikult seisukohalt on kehadel olemas küll ka siseenergia, ent see moodustab vaid väga väikese osa relativistlikust seisuenergiast. Mitterelativistlik siseenergia on lihtsalt kõikide kehaosakeste summaarne kineetiline ja potentsiaalne energia. Osakeste relativistlik seisuenergia on kaugelt suurem, aga mitterelativistlikult seisukohalt pole seda olemas.

Põhimõtteline võimalus piirduda relatiivsusteoorias ainult ühe suurusega kahest tähendab mõlema suuruse olemuse identsust. Selles seisneb massi ja energia ekvivalentsuse täpne tähendus. Sageli püütakse säilitada massi ja energia mõistelist erinevust viitega sellele, et mass on inertsuse mõõt, kuna energia mõõdab keha (või üldse mis tahes füüsikalise süsteemi) võimet tööd teha. Ent see on ekslik seisukoht, sest siin käsitletakse energiat mitterelativistliku traditsiooni kohaselt, mis relatiivsusteoorias ei pea paika. Me nägime, et energia defineerimiseks ei ole relatiivsusteoorias teist võimalust peale massiga ekvivalentse suuruse sissetoomise. Relativistlik energia defineeritakse massi, mitte töö kaudu. Vastupidi, töö on sekundaarne mõiste. Töö on energia (massi) makroskoopilise ülekande mõõt. Muide, isegi mitterelativistlikus füüsikas on energia defineerimine töö kaudu ajast ja arust. See on omal kohal vahest ainult elementaarsel tasemel, kus on vaja luua mingi algeline kujutlus energiast. Aga arenenud teoorias esineb energia fundamentaalse primaarse mõistena, mida tuleb defineerida ja defineeritaksegi sõltumatult töö mõistest. On levinud näiteks niisugune definitsioon: energia on universaalne liikumise mõõt.

Aga seegi definitsioon ei saa olla aluseks massi ja energia relativistliku identsuse eitamisele. Ei saa väita, et mass ja energia on olemuselt erinevad seetõttu, et mass on inertsuse mõõt ja energia liikumise mõõt. See on puhtal kujul mitterelativistlik seisukoht. Relatiivsusteooriasse seda üle kanda ei saa, sest sellega lähevad tühja valemid (15.11) - (15.15). Relativistlik energia ei ole liikumise mõõt, või kui ongi, siis täpselt samal määral ning samas mõttes nagu seda on mass. Relativistlik mass ei ole ainuüksi inertsuse mõõt, vaid kineetiline osa massist on ühtlasi liikumise mõõt. Mõlemad suurused väljendavad ühel ja samal viisil nii liikumatust (seisumass ja seisuenergia) kui ka liikumist. Selles nende identsus seisnebki, et neil on täielikult kattuvad predikaadid: iga väide, mis kehtib massi kohta, kehtib ka energia kohta, ja vastupidi.

Massi ja energia mõistete ühtesulamine on ainulaadne nähtus füüsika arenguloos. Seepärast on eriti huvipakkuv jälgida, mil viisil hargneb ühtne massi-energia mõiste uuesti kaheks juhtudel, kus praktiliselt kehtib mitterelativistlik teooria. Määrava tähtsusega on siin järgmine asjaolu. Nagu me nägime eespool (§-d 3 ja 6), on valguse mass tavalistes tingimustes võrreldes kehade seisumassiga väga väike, samuti kehade kineetiline mass valguse kiirusest palju väiksemate kiiruste puhul. Seetõttu jääb see mass mitterelativistlikus nähtuste valdkonnas arvestamata, kusjuures massi jäävuse seadus kehtib ikkagi suure täpsusega edasi. Jäävaks osutub praktiliselt seisumass omaette. Aga valguse massi ja kehade kineetilise massi suhteline väiksus ei tähenda, et neid poleks üldse võimalik avastada. Avastamata jääb ainult see fakt, et tegemist on massiga. On ju mitterelativistlikus füüsikas mass ainult inertsuse (ja gravitatsiooni) mõõt. Aga valguse mass ja kehade kineetiline mass on seisumassi kõrval niivõrd väikesed, et nendest tingitud inertsuse suurenemine jääb märkamata. Tegelikult väljendab mass ka liikumist. Olukorra omapära seisnebki selles, et liikumist on võimalik tajuda, mõõta ja tunnetada, ilma et oleks vaja mõõta kaduv-väikest inertsuse muutust. Niiviisi tekib petlik, ent mitterelativistlike nähtuste valdkonnas praktiliselt õigustatud kujutlus, et liikumise mõõduna tuleb kasutusele võtta hoopis teist liiki suurus. See ongi mitterelativistlik energia.

Lühidalt öeldes on mitterelativistlik energia kineetilise massiga ekvivalentne suurus ja mitterelativistlik mass on seisusnergiaga ekvivalentne suurus.

Aga nüüd peame vastama veel ühele küsimusele. Vastöeldu põhjal võib tekkida arvamus, et samasugune massi ja energia eristamine nagu mitterelativistlikul piirjuhul peaks olema võimalik ka relativistlikus nähtuste valdkonnas, s. o. suurte kiiruste puhul. Siis ei oleks tõesti mitte mingisugust ekvivalentsust massi ja energia vahel. Massiks nimetaksime ainult seisumassi ja energiaks ainult kineetilise massiga ekvivalentset suurust (ilma ekvivalentsust üldse mainimata), ka sel juhul, kui see on võrreldav seisumassiga. Ometi ei ole see mõte teostatav, ja seda peamiselt kahel põhjusel. Esiteks, me peaksime sel korral loobuma nii massi kui ka energia jäävuse seadustest, sest seisumass ja kineetiline energia teatavasti eraldi jäävad ei ole. Aga mitte see pole just mõõduandev, vaid see, et jääv suurus on ikkagi olemas: see on seisumassi ja kineetilise massi summa (s.o. meie äsjase terminoloogilise katsetuse järgi massi ja energia summa). Kuidas seda suurust nimetada? Ilmselt on nimetus vajalik, sest jäävus on fundamentaalse tähtsusega omadus. Kogu aeg me nimetasime seda massiks (toetudes muu hulgas faktile, et just see suurus on inertsuse mõõt) ja lõpuks veendusime, et relativistlik energia saab olla ainult sellesama massiga ekvivalentne (identne) suurus. Ei ole mingit alust ega vajadust seda loomulikku terminoloogiat muuta.

Teine asjaolu, mis kõneleb seisumassi ainsaks massiks tunnustamise vastu, on §-s 11 näidatud seisumassi mitteaditiivsus ja sellega seotud relatiivsus. See võib tekitada arusaamatusi. Mida tuleks, näiteks, pidada antud keha massiks? On see tema molekulide masside summa või tema kui terviku mass? Mitterelativistlikult seisukohalt on vahe tähtsusetu, ent meil on ju kõne all relativistlik vaade. Ei saa relatiivsusteooriasse üle kanda mitterelativistlikku kujutlust massist, sest siin muutub see liiga ebamääraseks. Küll aga kaovad hoobilt kõik arusaamatused, kui seisumassi asemele võetakse teoorias kasutusele kiirusest sõltuv relativistlik mass.

Niisiis, juhul, kui kineetiline mass on võrreldes seisumassiga väga väike, on õigustatud mitterelativistlik käsitlus, mille kohaselt kineetilist massi ei mõõdeta nii nagu seisumassi, inertsuse ja kaalu järgi, vaid teistsuguste meetoditega. Need on tuntud energeetiliste mõõtmismeetoditena. Nii mõõdetakse nn. soojusenergiat kalorimeetriliselt; mehhaanilist, elektrilist, keemilist energiat nii- või teistsuguste muundumiste järgi. Kõik tavalistes tingimustes kulgevad termilised, mehhaanilised, elektrilised, keemilised ja muud sellised protsessid on selles mõttes mitterelativistlikud - mass ja energia esinevad teineteisest lahus, seostamatute ning sõltumatute suurustena, sest muundumistes osalev mass (energia) on väga väike võrreldes kogumassiga.

Mõnevõrra teisiti on lugu tuumareaktsioonide puhul. Seisumass muutub tuumaprotsessides küll ka suhteliselt vähe (alla 1 %), kuid tavaliste keemiliste protsessidega võrreldes on see muutuv osa siiski miljoneid kordi suurem. Tuumareaktsioonides seisumassi arvel vabanev kineetiline mass omab seetõttu väga suurt energeetilist ekvivalenti, mida mõõdetakse ja kasutatakse traditsioonilistes vormides kas soojusenergiana või muul viisil. Et aga seisumassi muutus on märgatav ja sõltumatul viisil mõõdetav, tuleb tuumareaktsioone vaadelda oluliselt relativistlike protsessidena, mille tõlgendamisel massi ja energia ekvivalentsust enam ignoreerida ei saa. Selles mõttes pakuvad tuumareaktsioonid eksperimentaalse kinnituse massi ja energia ekvivalentsuse seadusele.

Looduses esineb ka selliseid protsesse, milles seisumass muundub täielikult. Siia liiki kuuluvad annihilatsiooniprotsessid (vt. § 13). Annihilatsiooni on seni vaadeldud vaid mikromaailmas - üksikute elementaarosakeste vahel. Seda liiki protsessid on läbinisti relativistlikud - sel määral, et nende kirjeldamisel on kahe mõiste - massi ja energia mõistete paralleelne kasutamine tarbetu ning eksitav. Pole õige, nagu mõnikord väidetakse, nagu muunduks annihilatsiooni puhul mass energiaks. Positroni ja elektroni mass muundub footonite massiks, mis ei ole sugugi vähem reaalne. Soovi korral võidakse asendada mass mõlemal pool energiaga, ent see oleks vaid teine nimetus massile.

Põhimõtteliselt on annihilatsioon võimalik ka makrotasemel - selleks on vaid vaja küllaldasel hulgal antiainet.

Valguse energia nagu iga muugi energia on valguse massiga ekvivalentne suurus. Massile μ vastab energia μc^2 (vt. § 3). Valguse energia on täies ulatuses kineetiline, sest seisumass võrdub nulliga. Siit järgneb, et mitterelativistliku kineetilise energia valem (15.16) valguse puhul ei kehti. Valgus on selles mõttes puhtrelativistlik objekt.

Massi ja energia ekvivalentsuse seaduse valguses saab arusaadavaks ka see, et mehhaaniliste protsesside elastsust või mitteelastsust võib samaväärselt defineerida kahte moodi. §-s 13 me nimetasime elastseteks protsessid, mille puhul seisumass on jääv ja mitteelastseteks protsessid, mille puhul seisumass ei ole jääv. Et aga kogumass on jääv ning võrdub seisumassi ja kineetilise massi summaga, siis tähendab seisumassi jäävus või mittejäävus vastavalt kineetilise massi jäävust või mittejäävust. Viimane on ekvivalentne kineetilise energiaga, seega võib elastsuse või mitteelastsuse üle otsustada kineetilise energia jäävuse või mittejäävuse järgi. Klassikalises mehhaanikas ongi ainuvõimalik nimelt see kriteerium (vt. § 1), sest klassikalise mehhaanika kehtivuse valdkonnas on mass praktiliselt jääv igal juhul. Relativistlikult seisukohalt on aga mõlemad kriteeriumid täiesti ekvivalentsed.

Pöördume lõpetuseks veel kord tagasi eelmises paragrahvis toodud graafilise esituse poole (vt. joon. 8) ja näitame, kuidas saab kujutada seal tööd ja energiat. Meil on kaks samaväärset relativistliku elementaartöö valemit: (15.4) ja (15.10). Mõlemal on graafiline ekvivalent. Võtame kiiruse graafikul OAC kaks lõpmata lähedast punkti, B ja B_1, mille abstsissid on OH = p ja $OH_1 = p+dp$ ja ordinaadid BH = u ja $B_1H_1 = u+du$. Elementaartrapetsi BB_1HH_1 pindala on seega $udp = m^{-1}pdp$. Valemi (15.4) järgi kujutab see pindala tööd, mida jõud teeb impulsi muutudes dp võrra. Integreerides alates paigalolekust kuni mingi impulsini p, saame kineetilise energia, mida kujutab graafiliselt pindala OABHQ. Ent võime integreerida ka teisiti, asendades trapetsi BB_1HH_1 pindala sellega võrdse ristküliku FF_1KK_1 pindalaga, kus F ja F_1 on sirgjoonte OB ja OB_1 pikenduste lõikepunktid asümptoodiga DG. Näitame, et nimetatud pindalad on tõesti võrdsed. Selleks võtame ordinaatteljel punkti L kaugusel OL = OQ = m_0c alguspunktist ja tõmbame abstsissteljega paralleelse joone LN, mis lõikab ordinaate BH ja B_1H_1 punktides M ja M_1. Siis on $OM = \sqrt{OH^2 + HM^2} = \sqrt{p^2 + m_0^2c^2} = mc$ = OK ja niisamuti $OM_1 = OK_1$. Seega asetsevad punktid M ja K ringjoone kaarel keskpunktiga O, ja niisamuti punktid M_1 ja K_1. Tähistades kaare MK lõikepunkti raadiusega OM_1 P-ga, leiame kolmnurkade OLM ja M_1PM sarnasusest, et $\frac{MM_1}{PM_1} = \frac{OM}{LM}$. Vasak pool võrdub siin trapetsi BB_1HH_1 ja ristküliku FF_1KK_1 aluste suhtega HH_1/KK_1; parem pool on aga võrdne mc/p ehk c/u, s. o. trapetsi ja ristküliku kõrguste pöördsuhtega. Siit järgnebki, et mõlema pindalad on võrdsed. Ristküliku pindala on c^2dm, seega oleme saanud graafilisel teel valemi (15.10). Integreerides alates paigalolekust kuni impulsini p, saame kineetilise energia kujutisena ristküliku QEFK pindala. Seisuenergiat m_0c^2 kujutab ilmselt ristküliku ODEQ pindala ning koguenergiat mc^2 - ristküliku ODFK pindala.

§ 16.

AJA RELATIIVSUS. OMAAEG

Piirkiiruse olemasolust järgneb, et põhjuslik seos ei ole mitte iga sündmustepaari puhul võimalik. Vaatleme kaht sündmust, mille kohavektorid on mingis meelevaldses inertsiaalsüsteemis $\vec{r}_1$ ja $\vec{r}_2$ ja nende ajad samas inertsiaalsüsteemis t_1 ja t_2. Olgu $t_2 > t_1$. Sündmuste kohtade vaheline kaugus on $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ ja ajavahemik nende vahel $t_2 - t_1$. Põhjuslik mõju, mis lähtub esimesest sündmusest, peab teise juurde jõudmiseks liikuma kiirusega $\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$. Et aga c on piirkiirus, siis on põhjuslik seos võimalik ainult eeldusel, et

$$\frac{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}{t_2 - t_1} \leqslant c \tag{16.1}$$

ehk

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \leqslant c(t_2 - t_1). \tag{16.2}$$

Siin võime eristada kaks juhtu. Kui

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = c(t_2 - t_1), \tag{16.3}$$

siis on põhjuslik mõju võimalik ainult valguse kiirusega leviva signaali abil. Kui aga

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| < c(t_2 - t_1), \tag{16.4}$$

siis on põhjuslikku seost vahendava signaali kiirus väiksem piirkiirusest c.

Alljärgnevalt vaatleme seda viimast juhtu lähemalt. Sel juhul on olemas inertsiaalsüsteem, milles mõlemad sündmused on samapaiksed. See on nimelt süsteem, mis liigub algsüsteemi suhtes mõlemaid sündmusi ühendava signaali kiirusega

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}, \tag{16.5}$$

mis on eelduse järgi väikem piirkiirusest c.

Antud sündmustepaari puhul on inertsiaalsüsteem, milles sündmused on samapaiksed, teatava eelistatud tähendusega. Ajavahemikku nende sündmuste vahel selles süsteemis nimetatakse nendevaheliseks omaajaks (ehk, täpsemalt, omaaja vahemikuks). See ajavahemik iseloomustab sündmuste ajalist vahekorda invariantsel viisil, s. o. inertsiaalsüsteemi valikust sõltumatult. Ta on küll ühes kindlas inertsiaalsüsteemis määratud ajavahemik, aga selle inertsiaalsüsteemi valik pole meelevaldne, vaid on määratud üheselt sündmuste enestega. See tähendabki, et omaaja vahemik ei sõltu inertsiaalsüsteemi valikust*. Tähistame omaaja vahemiku $\tau_2-\tau_1$.

Näitame, et omaaja vahemik on alati väiksem kui samade sündmuste vaheline ajavahemik mingis teises inertsiaalsüsteemis, milles sündmused samapaiksed ei ole. Selles avaldub aja relatiivsus. Juba §-s 5 jõudsime kvalitatiivsele järeldusele, et aeg on relatiivsusteoorias paratamatult relatiivne. Nüüd tuletame sellekohase kvantitatiivse seose. See on niisugune:

$$\tau_2-\tau_1=(t_2-t_1)\sqrt{1-v^2/c^2}\,, \qquad (16.6)$$

kus v on mõlema inertsiaalsüsteemi suhteline kiirus. Võime esitada selle valemi ka teisel kujul. Kui $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ on sündmuste kohavektorid süsteemis, kus nad samapaiksed ei ole, siis avaldub $\vec{v}$ valemiga (16.5). Asendades $\vec{v}$ selle avaldisega eelmises valemis, saame:

$$\tau_2-\tau_1=\sqrt{(t_2-t_1)^2-c^{-2}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2}\,. \qquad (16.7)$$

Valemi (16.6) tuletamiseks on meetodeid palju. Valime ühe lihtsama, mis on mõnevõrra analoogiline §-s 6 kasutatud meetodiga keha massi kiirusest sõltuvuse tuletamiseks.

Vaatleme kaht inertsiaalset keha, A ja B, mis ee-

---

* Siin on teatav analoogia keha seisumassiga, mis on samuti invariantne suurus, olgugi et ta tähendab massi ühes kindlas inertsiaalsüsteemis. Aga selle süsteemi valik pole meelevaldne; see on keha paigaloleku süsteem, sõltub seega vaid kehast endast.

malduvad teineteisest suhtelise kiirusega v nendevahelise sirgjoone sihis. Keha A kiirgab B suunas teatava ajavahega kaks hetkelist valgussignaali, mis saabuvad mõne aja pärast keha B juurde, samuti teatava ajavahega. Kumbki ajavahemik on määratav kas keha A või keha B paigaloleku süsteemis, kusjuures aja relatiivsuse tõttu on väärtused erinevad. Seega on meil tegemist kokku nelja väärtusega. Leiame nendevahelised seosed.

Tähistame ajavahemikud järgmiselt. Keha A paigaloleku süsteemis olgu signaalide kiirgumise vaheline ajavahemik τ_A ja nende keha B juurde saabumise vaheline ajavahemik t_B. Keha B paigaloleku süsteemis olgu ajavahemikud vastavalt t_A ja τ_B. Indeksid A või B märgivad kohti, kus toimuvad signaalide väljumise või saabumise sündmused. Ilmselt on τ_A omaaja vahemik, t_A aga samade sündmuste vaheline ajavahemik teises inertsiaalsüsteemis (keha B süsteemis). Niisamuti on τ_B omaaja vahemik, kuna t_B on ajavahemik samade sündmuste vahel teises inertsiaalsüsteemis (keha A süsteemis). Olgu otsitav tegur, mis seob omaaja vahemikku ajavahemikuga mingis teises süsteemis, $k(v)$, nii et

$$\tau = k(v)t . \tag{16.8}$$

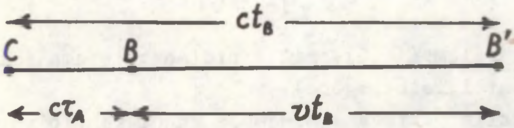
Meie kahe ajavahemiku puhul oleks seega

$$\tau_A = k(v)t_A ,\qquad \tau_B = k(v)t_B . \tag{16.9}$$

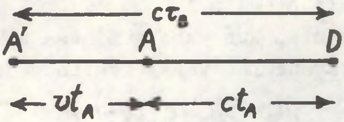
Teguri $k(v)$ leidmiseks vaatleme esmalt protsessi keha A paigaloleku süsteemis. Teine signaal kiiratakse τ_A võrra esimesest hiljem. Esimene on selle ajaga eemaldunud kaugusele $c\tau_A$. Et signaalide kiirused on võrdsed, säilib nendevaheline kaugus $c\tau_A$ muutumatuna kogu liikumise vältel. Joonisel 9 B on punkt, kus esimene on jõudnud parajasti keha B juurde. Teine on sel hetkel punktis C $c\tau_A$ võrra tagapool. Ta jõuab B juurde t_B võrra hiljem kuskil punktis B'. Siis on BB' = vt_B ja CB' = ct_B. Järelikult $c\tau_A = ct_B - vt_B$ ehk

$$\tau_A = (1 - v/c)\, t_B . \tag{16.10}$$

Nüüd siirdume keha B paigaloleku süsteemi. Kiirgav keha A liigub selles süsteemis kiirusega v . Punktis A (vt. joon. 10) kiirgab ta esimese signaali, punktis A' tei-



Joon. 9



Joon. 10.

ee. Et teine kiiratakse t_A võrra hiljem, jõuab esimene selle ajaga liikuda kaugusele AD = ct_A , kuna keha ise liigub sama ajaga vastassuunas kaugusele AA' = vt_A . Siit järgneb, et signaalide vaheline kaugus on $(c+v)t_A$. See säilib muutumatuna kogu tee vältel. Kui esimene on jõudnud liikumatu keha B juurde, on teine alles kaugusel $(c+v)t_A$ temast. Seega kulub tal veel aega $\frac{(c+v)t_A}{c}$, s. o.

$$\tau_B = (1 + v/c)t_A \,. \tag{16.11}$$

Soovitava tulemuse saamiseks jääb ainult valemid (16.10) ja (16.11) läbi korrutada, samuti valemid (16.9):

$$\begin{aligned} \tau_A\tau_B &= (1 - v^2/c^2)\, t_A t_B \,, \\ \tau_A\tau_B &= k^2(v)\, t_A t_B \,. \end{aligned} \tag{16.12}$$

Nendest seostest saame vahetult:

$$k^2(v) = 1 - v^2/c^2 \tag{16.13}$$

2

ning

$$k(v)=\sqrt{1-v^2/c^2}\,. \qquad (16.14)$$

Seega

$$\tau=t\sqrt{1-v^2/c^2}\,. \qquad (16.15)$$

See ongi valem (16.6), mille pidime tuletama (ainult tähistus on veidi teistsugune).

Niisiis, kui kahe sündmuse puhul kehtib võrratus (16.4), on olemas inertsiaalsüsteem, milles need sündmused on samapaiksed, kusjuures sündmustevaheline ajavahemik (omaaja vahemik) on selles süsteemis lühem ajavahemikust mis tahes teises inertsiaalsüsteemis.

Siirdume juhule, kus kahe sündmuse vahelise kauguse ja nendevahelise ajavahemiku vahel kehtib seos

$$|\vec{r}_2-\vec{r}_1|=c\,(t_2-t_1) \qquad (16.16)$$

(vt. (16.3)). Sel juhul on põhjuslik seos võimalik ainult valgussignaali abil. Erinevalt eespoolvaadeldud juhust (16.4) ei saa nüüd sündmused olla samapaiksed üheski inertsiaalsüsteemis, sest see nõuaks valgussignaali liikumatust. Ei ole olemas ka ühtegi eelissüsteemi. Vaatame, kuidas teiseneb ajavahemik siirdel teise inertsiaalsüsteemi, mis liigub esimese suhtes kiirusega v sündmusi ühendava valgussignaali suunas.

Eelkõige on selge, et teisendusvalem peab olema kujuga

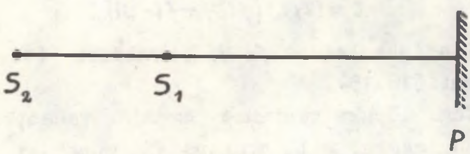
$$t_2'-t_1'=(t_2-t_1)f(v)\,, \qquad (16.17)$$

kus $f(v)$ on esialgu tundmatu kiiruse funktsioon. See järgneb sellest, et aja homogeensuse tõttu peab teisendatud ajavahemik $t_2'-t_1'$ olema võrdeline ajavahemikuga t_2-t_1 vanas süsteemis, aga võrdetegur võib sõltuda ainult kiirusest v. Ei ole ju olemas ühtki teist suurust, millest ta võiks sõltuda. Funktsioon $f(v)$ peab rahuldama tingimust

$$f(v)f(-v)=1\,, \qquad (16.18)$$

sest vana inertsiaalsüsteem liigub uue suhtes kiirusega $-v$, pöördteisendus peab aga andma endise ajavahemiku t_2-t_1.

Funktsiooni $f(v)$ kuju leidmiseks vaatleme järgmist protsessi. Mingis inertsiaalsüsteemis on liikumatu valgusallikas ja sellest eemal liikumatu peegel. Valgusallikas kiirgab peegli suunas hetkelise valgussignaali, mis peale peegeldumist jõuab tagasi lähtepunkti. Signaali kiirgamine ja tagasijõudmine on samapaiksed sündmused ja nendevaheline ajavahemik on omaaja vahemik. Olgu see τ. Et valguse kiirus on mõlemas suunas sama, on signaali liikumise aeg allikast peeglini $\tau/2$ ning peeglist allikani samuti $\tau/2$. Siirdume teise inertsiaalsüsteemi, mis liigub kiirusega v esmase signaali suunas. Valgusallikas ja peegel liiguvad selles süsteemis, vastupidi, peegeldunud signaali suunas. Joonisel 11 on S_1 valgusallika asend kiirgamise hetkel, S_2 on valgusallika asend signaali tagasijõudmise hetkel, P - peegli



Joon. 11.

asend peegeldumise hetkel. Avaldame signaali liikumise ajad peeglini ja tagasi. Et kiirgamine ja peegeldumine, samuti peegeldumine ja tagasijõudmine on valgussignaalidega seotud sündmustepaarid, kehtib valem (16.17). Signaali liikumise aeg peeglini on seega uues süsteemis $(\tau/2)f(v)$ ja tagasi $(\tau/2)f(-v)$. Mõlema aja summa on $(\tau/2)[f(v)+f(-v)]$. Selle ajaga liikus valgusallikas kaugusele S_1S_2, mis võrdub seega $(\tau v/2)[f(v)+f(-v)]$. Teiselt poolt on see just see kaugus, mille võrra peegeldunud signaali tee on pikem; et aga mõlema kiirused on võrdsed, siis kulub peegeldunud signaalil S_1S_2/c võrra enam aega, s. o.

$$(\tau v/2c)[f(v)+f(-v)]=(\tau/2)[f(-v)-f(v)]\,. \qquad (16.19)$$

Taandades $(\tau/2)$-ga, leiame:

$$(v/c)[f(-v)+f(v)]=f(-v)-f(v). \tag{16.20}$$

Korrutame selle võrduse $f(v)$ -ga. Arvestades (16.18), saame:

$$(v/c)[1+f^2(v)]=1-f^2(v). \tag{16.21}$$

Siit

$$f(v)=\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}. \tag{16.22}$$

Seega saab teisendusvalem (16.17) alljärgneva lõpliku kuju:

$$t_2'-t_1'=(t_2-t_1)\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}. \tag{16.23}$$

Esitatud mõttekäik võimaldab uuesti tuletada ka valemi (16.15). Tähistades ajavahemiku signaali kiirgamise ja tagasijõudmise vahel teises inertsiaalsüsteemis t-ga, võime kirjutada:

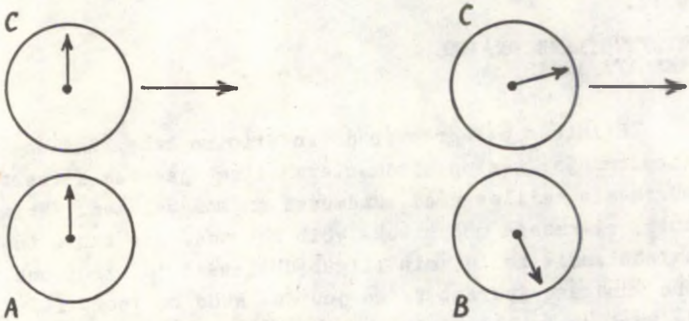
$$t=(\tau/2)[f(v)+f(-v)]. \tag{16.24}$$

Asetades siia juba leitud $f(v)$ avaldise (16.22), saamegi uuesti valemi (16.15).

Puudutame lõpuks küsimust omaaja vahemiku mõõtmisest inertsiaalsüsteemis, milles antud sündmused ei ole samapaiksed. Aeg, mida näitavad selles süsteemis liikumatud kellad, ei ole omaaeg. Omaaja mõõtmiseks tuleb kasutada liikuvat kella. See peab liikuma ühtlaselt ja sirgjooneliselt kiirusega

$$\vec{v}=\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{t_2-t_1}, \tag{16.25}$$

nii et hetkel t on ta punktis $\vec{r}_1$ ja hetkel t_2 punktis $\vec{r}_2$. Niisugune kell on liikumatu inertsiaalsüsteemis, milles sündmused on samapaiksed, järelikult näitab ta omaaega. Et aga omaaja vahemik on väiksem ajavahemikust antud inertsiaalsüsteemis, siis tuleb välja, et liikuv kell käib võrreldes liikumatuga aeglasemalt. Joonisel 12 asetsevad kellad A ja B liikumatult sündmuste kohtades ja näitavad selle inertsiaalsüsteemi aega, kus nad liikumatud on. Kell C liigub nendest mööda ühtlaselt ja sirgjooneliselt nii, et 1. sündmuse toimumisel (hetkel t_1) on ta kella A juures ja 2. sündmuse toimumisel (hetkel t_2) on ta kella B juures. Liikuv kell C on seega liikumatu inertsiaalsüsteemis, milles sündmused on samapaiksed, ja ta näitab omaaega. Kui teha A ja C näidud nende kohtumisel ühesuguseks, siis näitab C kohtudes B-ga väiksemat aega. Seda efekti nimetatakse aja aeglustumiseks liikuvas kellas. Arusaadavalt on see efekt hästi märgatav ainult siis, kui kella kiirus on võrreldav valguse kiirusega.



Joon. 12.

Kellade all tuleb eeltoodud mõttekäigus mõista ideaalseid ajanäitajaid, mis kehastavad objektiivselt kulgevat aega ühes või teises inertsiaalsüsteemis. Kõik protsessid, mis toimuvad mingis inertsiaalses kehas, kulgevad selle keha ajas, s. o. keha paigaloleku inertsiaalsüsteemi ajas. Seepärast nimetatakse aega, mida mõõdab keha suhtes liikumatu ideaalne kell, selle keha omaajaks. Ajavahemik kehas toimuva protsessi mis tahes kahe hetkelise faasi vahel on selle kellaga mõõtes nende faaside vaheline omaaja vahemik, sest nad on samapaiksed - mõlemad leiavad aset liikumatus kehas. Kui aga vaatleme protsessi kulgu mingis teises inertsiaalsüsteemis, milles keha liigub, siis ei ole protsessi hetkfaasid samapaiksed sündmused, seega mõõdavad selle inertsiaalsüsteemi kellad nende vahel pikemaid ajavahemikke. Teiste sõnadega, liikuvas kehas kulgeb protsess aeglasemalt kui samasugune protsess liikumatus kehas. Arusaadavalt on liikumine ja paigalolek ikka suhtelised. Kui kaks ühesugust keha liiguvad teineteise suhtes ja mõlemas toimuvad ühesugused protsessid, siis kummaski kehas olev kell mõõdab teises kehas toimuva protsessi kulgu aeglasemana. Nagu juba §-s 5 rõhutasime, on see tulemus ainult näiliselt "terve mõistusega" vastuolus. Tegelikult avaldub selles aja relatiivsus.

§ 17.

MITTEÜHTLANE OMAAEG. KELLAPARADOKS

Eelmises paragrahvis defineerisime kahe sündmuse vahelise omaaja: see on sündmustevaheline ajavahemik inertsiaalsüsteemis, milles need sündmused on samapaiksed. Nägime samuti, et omaaja mõõtmiseks võib kasutada mis tahes inertsiaalsüsteemis kella, mis liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt ühe sündmuse juurest teise juurde. Nüüd on loomulik püstitada küsimus: millise ajavahemiku mõõdab kell, mis liigub esimese sündmuse juurest teise juurde mitteühtlaselt?

Mõnikord väidetakse, et see küsimus kuulub üldrelatiivsusteooriasse, et erirelatiivsusteooria sellele vastata ei suuda. Väidetakse, et erirelatiivsusteooria uurib ainult inertsiaalseid liikumisi ega oska midagi ütelda mitteinertsiaalsete liikumiste kohta. Tegelikult see nii ei ole. Erirelatiivsusteooria on võimeline kirjeldama mitteinertsiaalseid liikumisi mitte halvemini kui inertsiaalseid liikumisi. Erirelatiivsusteooriale on iseloomulik ainult see, et ta kõiki neid liikumisi kirjeldab inertsiaalsetes taustsüsteemides. Gravitatsiooni puudumisel on see alati võimalik.

Niisiis, meie küsimusseade on õigustatud. Kaks kella läbivad liikudes hetkel t_1 antud punkti ja saabuvad mõne aja pärast teise punkti hetkel t_2. Liikugu üks neist inertsiaalselt, teine mitteinertsiaalselt. Esimene, teame juba, näitab omaaega $(t_2-t_1)\sqrt{1-v^2/c^2}$, kus v on tema kiirus. Mida näitab teine?

Ennekõike nimetame teise kella aja samuti omaajaks. Seda nimetust õigustab asjaolu, et see on tõesti selle kella oma aeg, s. o. aeg, mis voolas selles mitteühtlaselt liikunud kellas liikumise vältel. Et aga seda aega eristada inertsiaalselt liikunud kella omaajast, nimetame seda mitteühtlaseks omaajaks.

Mitteühtlase omaaja leidmiseks paneme tähele, et mitteühtlast liikumist võib lõpmata väikese ajavahemiku vältel vaadelda ühtlasena. Seega võime rakendada valemit (16.6) kujul

$$d\tau = dt\sqrt{1-v^2/c^2}\,, \qquad (17.1)$$

kus v on kella kiirus antud hetkel, dt selle inertsiaalsüsteemi aja diferentsiaal, milles me seda liikumist vaatleme, ja $d\tau$ on kellas möödunud mitteühtlase omaaja diferentsiaal. Integreerides (17.1) alghetkest t_1 lõpphetkeni t_2, saamegi otsitava mitteühtlase omaaja:

$$(\tau_2-\tau_1)_{\text{mitteühtlane}} = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt\,. \qquad (17.2)$$

Mitteühtlane omaaeg on invariant, nagu seda on ka tavaline (ühtlane) omaaeg. See nähtub otseselt selle suuruse definitsioonist, sest mitteühtlaselt liikunud kella näitude vahe ei või sõltuda sellest, millises inertsiaalsüsteemis me neid näitusid vaatame. Valemis (17.2) avaldub mitteühtlane omaaeg küll integraalina meelevaldselt valitud inertsiaalsüsteemi ajas, kuid selle integraali väärtus on mis tahes valiku puhul ühesugune. Muu hulgas võime kasutada inertsiaalsüsteemi, milles liikumise algus ja lõpp on samapaiksed sündmused. Sel juhul saab integreerimismuutujaks ühtlane omaaeg ja valem omandab kuju

$$(\tau_2-\tau_1)_{\text{mitteühtlane}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{1-v'^2/c^2}\,d\tau\,, \qquad (17.3)$$

kus v' on kella kiirus selles inertsiaalsüsteemis. Ühtlast omaaega näitav kell on selles süsteemis liikumatu, kuna mitteühtlast omaaega näitav kell liigub ajavahemikus τ_1-st τ_2-ni mingit kinnist trajektoori mööda.

Valemist (17.3) nähtub, et mitteühtlane omaaeg on alati väiksem ühtlasest:

$$(\tau_2-\tau_1)_{\text{mitteühtlane}} < (\tau_2-\tau_1)_{\text{ühtlane}}\,, \qquad (17.4)$$

sest integrand on väiksem 1-st. On ka selge, et mitteühtlase omaaja väärtus sõltub kella liikumise kiirusest. Liikugu näiteks kell ringjoont mööda raadiusega R absoluutväärtuselt konstantse kiirusega. Et sel juhul

$$v' = \frac{2\pi R}{\tau_2-\tau_1}\,, \qquad (17.5)$$

siis on (17.3) järgi

$$(\tau_2-\tau_1)_{\text{mitteühtlane}} = \sqrt{(\tau_2-\tau_1)^2-\frac{4\pi^2R^2}{c^2}}\,. \qquad (17.6)$$

Tulemus sõltub seega ringjoone raadiusest. Arusaadavalt peab selles näites kehtima tingimus $R < \frac{c(\tau_2-\tau_1)}{2\pi}$.

Teise näitena vaatleme liikumist, mille puhul tekib näiliselt paradoksaalne olukord, niinimetatud kellaparadoks. Kell saab hetkel τ_1 lõpmatu kiirenduse, saavutades mingi konstantse kiiruse v'. Liikunud selle kiirusega sirgjooneliselt aja $\frac{\tau_2-\tau_1}{2}$ vältel kaugusele $\frac{v'(\tau_2-\tau_1)}{2}$, peatub kell vastassuunalise lõpmatu kiirenduse mõjul hetkeliselt ning saab seejärel vastassuunalise kiiruse $-v'$. Selle kiirusega liikudes jõuab ta hetkel τ_2 tagasi lähtekohta ja niisama hetkeliselt peatub. Arvutades mitteühtlase omaaja valemi (17.3) järgi, leiame:

$$(\tau_2-\tau_1)_{\text{mitteühtlane}} = (\tau_2-\tau_1)_{\text{ühtlane}}\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\,, \qquad (17.7)$$

sest v' = const. peaaegu kogu liikumise vältel (välja arvatud lõpmata väikesed ajavahemikud alguses, suuna muutmisel ja lõpus). Paradoksaalsena võib see tulemus tunduda seetõttu, et mõlemad kellad on näiliselt samaväärsed. Ühtlast omaaega näitav kell, mis jääb kogu ajaks paigale, on kahtlemata inertsiaalne; teine, mis edasi-tagasi liikus, on näiliselt ka inertsiaalne, sest peaaegu kogu aja vältel liikus ta konstantse kiirusega. Aga siis on valemi (17.7) ebasümmeetriline kuju arusaamatu. Miks on teise (liikunud) kella aeg väiksem esimese (liikumatu) kella omast, mitte vastupidi? Me võiksime ju mõlema poolaja vältel vaadelda liikumatuna teist kella ja liikuvana esimest. Aga siis peaks ka tulemus olema vastupidine. Kas ei ole valem (17.7) vastuolus relatiivsusprintsiibiga, mis nõuab inertsiaalsete liikumiste samaväärsust?

Mingit vastuolu relatiivsusprintsiibiga siiski siin ei ole. Kellad ei ole tegelikult samaväärsed. Teine kell liikus küll peaaegu kogu aeg inertsiaalselt, kuid ta ei olnud liikumatu mitte ühesainsas inertsiaalsüsteemis, vaid kahes erinevas inertsiaalsüsteemis. Teiste sõnadega, tal pidi olema aja $\frac{\tau_2-\tau_1}{2}$ möödudes kiirendus, olgugi väga lühikest aega. Aga esimene kell oli liikumatu kogu aeg ühesainsas inertsiaalsüsteemis ja tal polnud mingit kiirendust. Kui mõlemad kellad oleksid rangelt inertsiaalsed, siis oleks küll kummagi paigaloleku süsteemis teise käik aeglasem, aga seda poleks võimalik kindlaks teha nende näitude vahetu võrdlemise teel, sest inertsiaalsed kellad võivad kohtuda ainult üks kord elus. Kui aga tahetakse kahe kella näitusid võrrelda kaks korda, et vahetult kindlaks teha, kumb nendest käib teisest kiiremini, siis peab kahest vähemalt üks olema mitte-inertsiaalne. Kellad ei ole samaväärsetes tingimustes ja siis on ka loomulik, kui nende näitude võrdlemisel on tulemus ebasümmeetriline.

§ 18.

PIKKUSTE RELATIIVSUS

Aja relatiivsusega on lähedalt seotud ka pikkuste relatiivsus. Vaatleme kaht efekti: liikuva varda pikkuse sõltuvust kiirusest ja kahe valgussignaali vahelise kauguse sõltuvust inertsiaalsüsteemi valikust. Õieti on mõlemal juhul tegemist teatava kauguse sõltuvusega inertsiaalsüsteemi valikust - varda pikkus on ju tema otste vaheline kaugus. Erinevus on siiski kahe efekti vahel selles, et varda puhul on olemas inertsiaalsüsteem, milles varras on liikumatu, aga valgussignaalidel paigaloleku süsteemi ei ole. Sellest tingituna on nende efektide valemid erinevad.

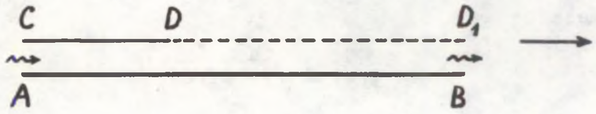
Alustame varda pikkuse valemi tuletamisest. Liikuva varda pikkus on, nagu juba märgitud, tema otste vaheline kaugus. Täpsemalt tuleb ütelda: otste samaaegsete asendite vaheline kaugus. Niiviisi defineeritud pikkus ei saa olla igas inertsiaalsüsteemis ühesugune, sest samaaegsus on teatavasti relatiivne. Tegelikult osutub varras seda lühemaks, mida suurema kiirusega ta liigub. Me vaatleme siin ainult varda enda sihilisi liikumisi. Avaldame pikkuse sõltuvuse kiirusest valemiga

$$\ell = \ell_0 g(v), \tag{18.1}$$

kus ℓ_0 on liikumatu varda pikkus ehk <u>seisupikkus</u> ja ℓ on sama varda pikkus, kui ta liigub kiirusega v . Ruumi homogeensuse tõttu peab ℓ olema võrdeline seisupikkusega: siit ka valem (18.1). Võrdetegur $g(v)$ sõltub mingil esialgu tundmatul viisil kiirusest, kusjuures ilmselt $g(0)=1$.

Lühenemise teguri $g(v)$ kuju leidmiseks kasutame meetodit, mis on analoogiline §-des 6 ja 16 rakendatud meetoditega, kus me tuletasime keha massi sõltuvuse kiirusest ja omaaja valemi. Vaatleme kaht paralleelset teineteise suhtes nende endi sihis suhtelise kiirusega v liikuvat varrast. Olgu nende seisupikkused ℓ_1 ja ℓ_2 . Liikugu teine varras esimese suhtes vasakult paremale ja olgu varraste pikkused sellised, et esmalt ühtivad nende vasakpoolsed otsad ja mõne aja pärast parempoolsed otsad. Eeldame veel, et hetkel, mil vasakpoolsed otsad on koos, lähtub sealtsamast piki vardaid paremale poole hetkeline valgussignaal, ja et hetkel, mil on koos parempoolsed otsad, jõuab see signaal parajasti sinnasamasse.

Nüüd paneme kirja eespoolöeldut väljendavad seosed, esmalt esimese varda paigaloleku süsteemis. Joonisel 13 AB on esimene (liikumatu) varras, CD teise (liikuva) varda asend hetkel, mil vasakpoolsed otsad on koos. Väike laineline noolеke kujutab valgussignaali ja punktiirjoon DD_1 on liikuva varda parempoolse otsa tee. Eelduse järgi liigub see ots



Joon. 13.

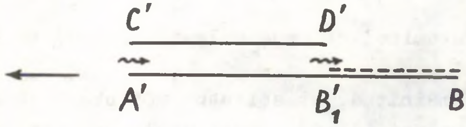
DD_1 võrra edasi ajaga, mis kulub valgussignaali liikumiseks A juurest B juurde. Seega

$$\ell_1 = \ell_2 g(v) + \lambda \,, \tag{18.2}$$

$$\ell_1 / c = \lambda / v \,, \tag{18.3}$$

kus λ tähendab varraste pikkuste vahet DD_1.

Analoogiliselt võime vaadelda olukorda teise varda paigaloleku süsteemis (joon. 14). C'D' on teine (liikumatu)



Joon. 14.

varras, A'B' esimese (liikuva) varda asend hetkel, mil vasakpoolsed otsad on koos. Väike laineline nooleke on valgussignaal ja punktiirjoon $B'B_1'$ on liikuva varda parempoolse otsa tee. Nüüd kehtivad seosed

$$l_1 g(v) = l_2 + \lambda' , \tag{18.4}$$

$$l_2/c = \lambda'/v , \tag{18.5}$$

kus λ' on varraste pikkuste vahe $B'B_1'$.

Elimineerides valemitest (18.2) ja (18.3) λ ja valemitest (18.4) ja (18.5) λ' , leiame:

$$\begin{aligned} l_2 g(v) &= l_1 (1 - v/c) , \\ l_1 g(v) &= l_2 (1 + v/c) . \end{aligned} \tag{18.6}$$

Korrutades need valemid teineteisega läbi ja taandades $l_1 l_2$-ga, saame:

$$g(v) = \sqrt{1 - v^2/c^2} . \tag{18.7}$$

Niisiis, liikuva varda pikkus $l(v)$ avaldub seisupikkuse l_0 ja liikumise kiiruse v kaudu järgmiselt:

$$l(v) = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} . \tag{18.8}$$

Me näeme, et $l(v) < l_0$, s. o. liikuv varras on liikumatust lühem.

Märgime, et lühenemise efekt on otseses seoses valguse kiiruse konstantsuse postulaadiga. Tõepoolest, kui allutaksime valguse kiiruse klassikalisele kiiruste liitmise seadusele, siis tuleks valemis (18.5) võtta c asemele $c - v$. Siis oleks teine valem (18.6) niisugune:

$$l_1 g(v) = l_2 (1 - v/c)^{-1} ; \tag{18.9}$$

selle läbikorrutamisel esimese valemiga (18.6) saaksime $g(v) = 1$.

Olgu veel mainitud, et esitatud mõttekäik võimaldab uuesti tuletada valemi (16.23). Meil on ju varraste vasakpoolsete otste ühtimine ja parempoolsete otste ühtimine valgussignaaliga ühendatud sündmused. Nendevaheline ajavahemik on esimeses inertsiaalsüsteemis ℓ_1/c ja teises inertsiaalsüsteemis ℓ_2/c . Tähistades, nagu valemis (16.23), esimest ajavahemikku t_2-t_1 ja teist $t_2'-t_1'$, leiame:

$$\frac{t_2'-t_1'}{t_2-t_1}=\ell_2/\ell_1 . \qquad (18.10)$$

Teisest küljest, jagades esimese valemi (18.6) läbi teisega, saame:

$$(\ell_2/\ell_1)^2=\frac{1-v/c}{1+v/c} . \qquad (18.11)$$

Seega

$$\frac{t_2'-t_1'}{t_2-t_1}=\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} , \qquad (18.12)$$

mis ongi samane valemiga (16.23).

Siirdume teise efekti juurde. Liikugu antud inertsiaalsüsteemis kaks hetkelist valgussignaali (näiteks kaks footonit) teineteise järel kaugusel ℓ teineteisest. Teises inertsiaalsüsteemis, mis liigub esimese suhtes samas suunas kiirusega v , on signaalide vaheline kaugus ℓ' . Tuleb leida seos ℓ' ja ℓ vahel.

Selleks kujutleme liikumatut keha, mis kiirgab ühes ja samas suunas kaks hetkelist valgussignaali ajavahega ℓ/c . On selge, et esimene signaal, liikudes kiirusega c , jõuab eemalduda kaugusele ℓ , kui kiiratakse teine. Seega on mõlema signaali vaheline kaugus ℓ . Ajavahemik ℓ/c on omaaja vahemik, sest mõlemad signaalid kiiratakse ühest ja samast kohast. Siirdume teise inertsiaalsüsteemi, mis liigub signaalide kiirgamise suunas kiirusega v . Selles süsteemis liigub kiirgav keha sama kiirusega vastassuunas. Ajavahemik kahe signaali kiirgamise vahel ei ole teises süsteemis omaaja vahemik. See avaldub valemi (16.15) järgi omaaja kaudu kujul

$$t=\frac{\ell/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} . \qquad (18.13)$$

Kui suur on signaalide vaheline kaugus? Joonisel 15 kiirgas keha esimese signaali punktist A ja teise punktist A', nii et $AA' = vt$. Teise signaali kiirgamise hetkel on esimene

Joon. 15.

jõudnud juba punkti B, s. o. $AB = ct$. Siit järgneb, et signaalide vaheline kaugus on $\ell' = A'B = (c+v)t$. Asetades siia t avaldise (18.13), saame:

$$\ell' = \ell\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} . \tag{18.14}$$

§ 19.

LORENTZI TEISENDUS

Eespool §-des 16 - 18 vaadeldud ajavahemike ja pikkuste teisendused iseloomustavad relativistlikke aegruumilisi suhteid. Nendes valemites avalduvad aegruumi geomeetrilised omadused. Nad kuuluvad seega kinemaatika alale, mistõttu neid nimetatakse sageli relativistlikeks kinemaatilisteks efektideks.

Käesolevas paragrahvis tuletame üldised teisendusvalemid sündmuste ruumikoordinaatide ja aja jaoks. Nad annavad täieliku iseloomustuse aegruumi geomeetriale ja võimaldavad tuletada peale eespool vaadeldud kinemaatiliste efektide kõik teised geomeetrilised (kinemaatilised) seosed. Neid teisendusvalemeid nimetatakse Lorentzi teisendusvalemiteks, sest esimesena tuletas nad H. A. Lorentz juba 1904. aastal, s. o. aasta enne relatiivsusteooria sündi.

Toimugu mingi sündmus ruumipunktis, mille Cartesiuse koordinaadid antud inertsiaalsüsteemis on x , y , z ; sündmuse ajamoment (ajakoordinaat) olgu t . Teises inertsiaalsüsteemis, mis liigub esimese suhtes kiirusega v , olgu sama sündmuse ruumikoordinaadid x' , y' , z' ja ajakoordinaat t' . Et ruumiliste koordinaattelgede suunad on meelevaldsed, võtame valemite lihtsustamiseks x - ja x' - telje kiiruse v suunas. Ruumikoordinaadistike alguspunktid ja aja alghetked valime mõlemas süsteemis nii, et $x = y = z = t = 0$ puhul oleks $x' = y' = z' = t' = 0$. See tähendab, et hetk, mil mõlema koordinaadistiku alguspunktid ühtivad, on võetud mõlemas inertsiaalsüsteemis ajaarvamise alghetkeks. Teisendusvalemid peavad olema l i n e a a r s e d , mis järgneb aja ja ruumi homogeensusest: teisendatud koordinaatide ja aja tuletised vanade järgi peavad olema konstantsed, s. o. koordinaatidest ja ajast sõltumatud suurused. Aga sellest, et alghetkel alguspunktid ühtivad, järgneb ka valemite h o m o g e e n s u s .

Lorentzi teisendusvalemite tuletamiseks on olemas palju meetodeid, millest valime ühe lihtsama. See põhineb §-s 8 tuletatud kiiruse komponentide teisendusvalemitel. Et kiiruse komponendid on vastavate koordinaatide tuletised aja järgi, kirjutame ümber valemid (8.14) kujul

$$dx'/dt' = \frac{dx/dt - v}{1 - (v/c^2)dx/dt} ,$$

$$dy'/dt' = \frac{(dy/dt)\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - (v/c^2)dx/dt} , \qquad (19.1)$$

$$dz'/dt' = \frac{(dz/dt)\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - (v/c^2)dx/dt}$$

ehk

$$dx'/dt' = \frac{dx - v\,dt}{dt - (v/c^2)dx} ,$$
$$dy'/dt' = \frac{dy\sqrt{1-v^2/c^2}}{dt - (v/c^2)dx} , \qquad (19.2)$$
$$dz'/dt' = \frac{dz\sqrt{1-v^2/c^2}}{dt - (v/c^2)dx} .$$

Teisendusvalemite lineaarsusest järgneb siit:

$$dx' = \alpha(dx - v\,dt) ,$$
$$dy' = \alpha\sqrt{1-v^2/c^2}\,dy , \qquad (19.3)$$
$$dz' = \alpha\sqrt{1-v^2/c^2}\,dz ,$$
$$dt' = \alpha(dt - (v/c^2)dx) ,$$

kus $\alpha \equiv \alpha(v)$ on koordinaatidest ja ajast sõltumatu kiiruse funktsioon. Integreerides, leiame:

$$x' = \alpha(x - vt) ,$$
$$y' = \alpha\sqrt{1-v^2/c^2}\,y , \qquad (19.4)$$
$$z' = \alpha\sqrt{1-v^2/c^2}\,z ,$$
$$t' = \alpha(t - (v/c^2)x) ,$$

kusjuures integreerimiskonstandid on võetud võrdseks nulliga, sest otsitavad valemid peavad olema homogeensed. Jääb määrata tegur α . Selleks paneme esmalt tähele, et see peab olema kiiruse paarisfunktsioon, s. o. $\alpha(-v) = \alpha(v)$. See järgneb jälle ruumi homogeensusest. Kui α sõltuks kiiruse v suunast, teiseneksid y - ja z -koordinaadid eri suundade puhul erinevalt, mis pole võimalik, sest mõlemad suunad on nende telgedega risti, seega samaväärsed. Nüüd teostame pöördteisenduse, siirdudes teisest inertsiaalsüsteemist tagasi esimesse. Selle kiirus teise süsteemi suhtes on $-v$. Pöördteisenduse valemid on (19.4) eeskujul järgmised:

$$x = \alpha(x' + vt'),$$
$$y = \alpha\sqrt{1 - v^2/c^2}\, y',$$
$$z = \alpha\sqrt{1 - v^2/c^2}\, z', \qquad (19.5)$$
$$t = \alpha(t' + (v/c^2)x').$$

Lõpuks asendame nende valemite parematel pooltel seisvad x', y', z', t' nende avaldistega (19.4). Siis saame:

$$x = \alpha^2(1 - v^2/c^2)x,$$
$$y = \alpha^2(1 - v^2/c^2)y,$$
$$z = \alpha^2(1 - v^2/c^2)z, \qquad (19.6)$$
$$t = \alpha^2(1 - v^2/c^2)t.$$

Kõik neli valemit annavad kooskõlalise tulemuse:

$$\alpha = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (19.7)$$

Seega saavad valemid (19.4) lõpliku kuju:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
$$y' = y,$$
$$z' = z, \qquad (19.8)$$
$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Need ongi Lorentzi teisendusvalemid. Teeme alljärgnevalt nendest mõned üldist laadi järeldused.

1. Fundamentaalse tähtsusega on asjaolu, et impulsi komponentide ja massi teisendusvalemid (10.6) on kujult täpselt identsed Lorentzi teisendusvalemitega.

2. Teatavasti on suurus $m^2c^2 - \vec{p}^{\,2}$ invariant (vt. valem (10.8)). Analoogiliselt on suurus $c^2t^2 - \vec{r}^{\,2}$, kus $\vec{r}$ on kohavektor, invariant:

$$c^2t'^2 - \vec{r}'^2 = c^2t^2 - \vec{r}^{\,2}. \qquad (19.9)$$

Selles võime veenduda vahetult, asendades vasakul poolel t' ja $\vec{r}'$ komponendid x', y', z' nende avaldistega t, x, y, z kaudu. Pärast mõningaid teisendusi osutub tulemus identselt võrdseks parema poolega.

3. Lorentzi teisendusvalemite lineaarsusest järgneb, et samakujulistele teisendustele alluvad ka kahe sündmuse ajalis-ruumiliste koordinaatide vahed. Tõepoolest, tähistades sündmused indeksitega 1 ja 2, kirjutades teisendusvalemid mõlema indeksiga ja lahutades, leiame:

$$
\begin{aligned}
x_2'-x_1' &= \frac{x_2-x_1-v(t_2-t_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\
y_2'-y_1' &= y_2-y_1, \\
z_2'-z_1' &= z_2-z_1, \\
t_2'-t_1' &= \frac{t_2-t_1-(v/c^2)(x_2-x_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.
\end{aligned}
\tag{19.10}
$$

Teisiti öeldes tähendab üleminek valemitelt (19.8) valemitele (19.10) ruumilise alguspunkti nihutamist punkti (x_1, y_1, z_1) ja aja alghetke nihutamist hetkele t_1.

4. Et koordinaatide vahed teisenevad samal viisil nagu koordinaadid ise, kehtib vahede kohta ka analoogiline invariantsus:

$$c^2(t_2'-t_1')^2-(\vec{r}_2\,'-\vec{r}_1\,')^2 = c^2(t_2-t_1)^2-(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2. \tag{19.11}$$

5. Kahe sündmuse vaheliseks <u>intervalliks</u> nimetatakse invariantset suurust

$$s = \sqrt{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2}. \tag{19.12}$$

Intervall võib olla kas reaalne või imaginaarne või võrdne nulliga. Esimesel juhul nimetatakse intervalli <u>ruumisarnaseks</u>, teisel juhul <u>ajasarnaseks</u>, kolmandal juhul <u>isotroopseks</u>.

6. Kui intervall on ajasarnane, siis on kohane defineerida reaalne invariant, mille ruut on $-\frac{s^2}{c^2}$. Tähistame selle $\tau_2-\tau_1$:

$$\tau_2-\tau_1=\sqrt{(t_2-t_1)^2-c^{-2}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)^2} = \text{inv.} \tag{19.13}$$

Me paneme tähele, et see valem on identne omaaja valemiga (16.7). Omaaja invariantsus on ka juba teada. Nüüd oleme sõltumatul teel jõudnud samale tulemusele.

Niipalju üldist laadi märkusi. Siirdume lõpuks mõningatele kaugematele järeldustele. Lorentzi teisenduste abil võib tuletada mitmesuguseid seoseid, nende hulgas kõik varem käsitletud kinemaatilised efektid. Omaaja valemi me juba saime. Vaatleme teisi.

Kui kahe sündmuse vaheline intervall on isotroopne, siis ühendab neid sündmusi valgussignaal, sest $S = 0$ korral

$$\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{t_2-t_1}=\vec{c} \tag{19.14}$$

Tuletame Lorentzi teisenduse abil uuesti valemi (16.23). Valides x -telje vektori $\vec{r}_2-\vec{r}_1$ suunas, kirjutame valemi (19.14) ümber kujul

$$\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=c\,. \tag{19.15}$$

Nüüd rakendame neljandat valemit (19.10). Asendades selles $x_2-x_1=c(t_2-t_1)$, saame:

$$t_2'-t_1'=(t_2-t_1)\cdot\frac{1-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

ehk

$$t_2'-t_1'=(t_2-t_1)\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\,. \tag{19.16}$$

See ongi valem (16.23).

Valemitest (19.13) ja (19.16) järgneb, et ajasarnase või isotroopse intervalli korral on sündmuste ajaline järjestus invariantne: kui ühes inertsiaalsüsteemis on $t_2-t_1>0$, siis kehtib samakujuline võrratus ka teistes inertsiaalsüsteemides. See on kooskõlas põhjuslikkuse võimalusega niisuguste sündmustepaaride vahel, sest sündmus, mis põhjustab teist, peab alati, sõltumatult inertsiaalsüsteemi valikust, ajas teisele eelnema. Kui aga intervall on ruumisarnane, siis

$$\frac{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}{t_2-t_1} > c\ , \qquad (19.17)$$

seega põhjuslik seos ei ole võimalik. Sel juhul ei ole ka sündmuste ajaline järjestus invariantne - olenevalt inertsiaalsüsteemi valikust võivad sündmused olla samaaegsed või kumb tahes võib teisele eelneda. Veendume selles. Olgu jälle x -telg vektori $\vec{r}_2-\vec{r}_1$ suunaline. Valem (19.17) annab siis $\frac{c^2(t_2-t_1)}{x_2-x_1}<c$. Võttes teisendusvalemites (19.10) $v=\frac{c^2(t_2-t_1)}{x_2-x_1}$, saame, et $t_2'-t_1' = 0$, s. o. sündmused on teises inertsiaalsüsteemis samaaegsed. Ühtlasi annab esimene valem (19.10), et $x_2'-x_1' = (x_2-x_1)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Siirdume edasi kolmandasse inertsiaalsüsteemi, mis liigub teise suhtes x'-telje suunas kiirusega v'. Neljas valem (19.10), milles tuleb võtta $t_2-t_1 \rightarrow t_2'-t_1' = 0$, $x_2-x_1 \rightarrow x_2'-x_1'$ ja $v \rightarrow v'$, annab:

$$t_2''-t_1'' = -(v'/c^2)(x_2-x_1)\cdot\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{\sqrt{1-v'^2/c^2}}\ . \qquad (19.18)$$

Et v' märk on meelevaldne, saame suva järgi kas $t_2''-t_1'' > 0$ või $t_2''-t_1'' < 0$. Seega võib tõesti sündmuste ajaline järjestus olla olenevalt inertsiaalsüsteemi valikust kas nii- või teistsugune. Valides veel kiiruse v' absoluutväärtuse kui tahes lähedase c -le, võime teha ajavahemiku kui tahes pikaks.

Siirdume efektidele, mis väljendavad pikkuse relatiivsust. Liikuva varda lühenemise valemi saame järgmiselt. Olgu varras liikumatu teises inertsiaalsüsteemis ja tema otste koordinaadid olgu x_1' ja x_2', nii et seisupikkus on

$$\ell_0 = x_2'-x_1'\ . \qquad (19.19)$$

Esimeses inertsiaalsüsteemis liigub see varras kiirusega v. Tema otste koordinaadid x_1 ja x_2 muutuvad ajas. Esimene valem (19.10) annab:

$$x_2'-x_1' = \frac{x_2(t_2)-x_1(t_1)-v(t_2-t_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ . \qquad (19.20)$$

Varda pikkuse saame, fikseerides otste koordinaadid ühel ja samal hetkel. Seega, võttes $t_2 = t_1$, saame $x_2 - x_1 = l$ ning valem saab kuju

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{19.21}$$

See ongi pikkuse lühenemise valem (18.8).

Lõpuks vaatleme kahe hetkelise valgussignaali vahelise kauguse teisendamist (valem (18.14)). Fikseerides esimeses inertsiaalsüsteemis signaalide koordinaadid x_1, x_2 samaaegselt, s. o. võttes $t_1 = t_2 = t$, saame signaalide vahelise kaugusena

$$x_2 - x_1 = l . \tag{19.22}$$

Teisendame need sündmused teise inertsiaalsüsteemi. Valemite (19.8) järgi saame:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{19.23}$$

ja

$$t'_1 = \frac{t - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,$$

$$t'_2 = \frac{t - (v/c^2)x_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{19.24}$$

Siit

$$x'_2 - x'_1 = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,$$

$$t'_2 - t'_1 = - \frac{vl/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{19.25}$$

Et $t_2' - t_1' \neq 0$, ei ole koordinaatide vahe $x_2' - x_1'$ mitte signaalide vaheline kaugus teises inertsiaalsüsteemis. See on kaugus esimese signaali hetkel t_1' fikseeritud asukoha ja teise signaali hetkel t_2' fikseeritud asukoha vahel. Õige kauguse leiame, kui fikseerime teise signaali asukoha samuti hetkel t_1'. Et $t_1' = t_2' + \frac{vl/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, liigub teine signaal lisaajaga $\frac{vl/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ kaugusele $\frac{vl/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Seega on signaalide samaaegsete asendite vaheline kaugus teises süsteemis võrdne $l' = x_2' + \frac{vl/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - x_1'$ Asetades siia $x_2' - x_1'$ avaldise valemist (19.25), leiame $l' = l \cdot \frac{1+v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ehk

$$l' = l\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} . \tag{19.26}$$

See ongi valem (18.14).

§ 20.

JÕU TEISENDAMINE

§-s 14 me tõime sisse relativistliku jõu mõiste, märkides samas, et relativistlik jõud on teistsuguste omadustega kui mitterelativistlik jõud. Väikeste kiiruste puhul ei ole küll erinevus praktiliselt märgatav, kuid seevastu suurtel (valguse kiirusele lähedastel) kiirustel on erinevus väga suur. Relativistlik jõud ei ole invariantne suurus. Käesolevas paragrahvis tuletame teisendusvalemid jõu komponentide jaoks.

Lähtume dünaamika põhivõrrandist

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt . \tag{20.1}$$

Siirdume teise, x -telje suunas kiirusega v liikuvasse inertsiaalsüsteemi. Relatiivsusprintsiip nõuab, et seal oleks see võrrand samasuguse kujuga:

$$\vec{F}' = d\vec{p}'/dt' . \tag{20.2}$$

Et impulsi komponentide ja aja teisendusvalemid on juba teada, saame siit kergesti ka jõu komponentide teisendusvalemid.

Aga enne teeme ühe olulise täienduse. On teada, et impulsi komponendid teisenevad ühiselt massiga. Seetõttu on otstarbekohane koos impulsi tuletisega aja järgi vaadelda ka massi tuletist aja järgi. See on meil kaudselt valemites (15.1) ja (15.10) juba olemas. Võrrutades need kaks dA avaldist, saame:

$$\vec{F}d\vec{s} = c^2 dm \,. \tag{20.3}$$

Jagades selle võrduse läbi $c^2 dt$-ga ja arvestades, et $\frac{d\vec{s}}{dt}$ on keha kiirus $\vec{u}$, leiame:

$$dm/dt = \vec{F}\vec{u}/c^2 \,. \tag{20.4}$$

Teises inertsiaalsüsteemis on vastavalt

$$dm'/dt' = \vec{F}'\vec{u}'/c^2 \,. \tag{20.5}$$

Nüüd võtame teisendusvalemites (10.6) diferentsiaalid impulsi komponentidest ja massist:

$$\begin{aligned} dp'_x &= \frac{dp_x - v\,dm}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,, \\ dp'_y &= dp_y \,, \\ dp'_z &= dp_z \,, \\ dm' &= \frac{dm - (v/c^2)dp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \tag{20.6}$$

ja neljandas valemis (19.8) ajast:

$$dt' = \frac{dt - (v/c^2)dx}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,. \tag{20.7}$$

Jagades valemid (20.6) läbi valemiga (20.7), leiame:

$$dp'_x/dt' = \frac{dp_x/dt - v\,dm/dt}{1-(v/c^2)dx/dt},$$

$$dp'_y/dt' = \frac{(dp_y/dt)\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-(v/c^2)dx/dt},$$

$$dp'_z/dt' = \frac{(dp_z/dt)\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-(v/c^2)dx/dt}, \tag{20.8}$$

$$dm'/dt' = \frac{dm/dt-(v/c^2)dp_x/dt}{1-(v/c^2)dx/dt}.$$

Jääb ainult asendada kõik impulsi komponentide tuletised vastavate jõu komponentidega, massi tuletis jõu tööga (vt. valemid (20.4) ja (20.5)) ja dx/dt kiiruse x -komponendiga u_x. Siis saame järgmised valemid:

$$F'_x = \frac{F_x - v\vec{F}\vec{u}/c^2}{1-vu_x/c^2},$$

$$F'_y = \frac{F_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-vu_x/c^2},$$

$$F'_z = \frac{F_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-vu_x/c^2}, \tag{20.9}$$

$$\vec{F}'\vec{u}' = \frac{\vec{F}\vec{u} - vF_x}{1-vu_x/c^2}.$$

Need ongi jõu komponentide ja jõu töö teisendusvalemid. Märgime, et neljanda valemi kontrollimiseks võiksime arvutada esimese kolme abil, arvestades ühtlasi kiiruse komponentide teisendusvalemeid, korrutise $\vec{F}'\vec{u}' = F'_x u'_x + F'_y u'_y + F'_z u'_z$. Pärast lihtsaid teisendusi osutubki see identseks neljanda valemi parema poolega.

§ 21.

AEGRUUM

Lorentzi teisendusvalemitele (19.8) on iseloomulik, et ruumikoordinaadid ja aeg teisenevad koos. See tähendab, et aeg ja ruum moodustavad ühe geomeetrilise (kinemaatilise) terviku. Seda tervikut nimetatakse aegruumiks. Aegruum on neljamõõtmeline ruum, mille punktideks on elementaarsündmused, s. o. sündmused, mis toimuvad ühes ruumipunktis ühel ajahetkel. Eri inertsiaalsüsteemid tähendavad eri koordinaatsüsteeme aegruumis, sarnaselt eri koordinaadistikele tavalises kolmemõõtmelises ruumis. Lorentzi teisendused, mis kirjeldavad siirdeid ühelt inertsiaalsüsteemilt teisele, on analoogilised teisendustele, millega minnakse üle kolmemõõtmelises ruumis ühelt Cartesiuse koordinaadistikult teisele. Vaatleme seda analoogiat lähemalt.

Cartesiuse koordinaadistiku teisendamine seisneb teatavasti muutumatu alguspunkti puhul koordinaadistiku pööramises, millele võib lisanduda ka peegeldusteisendus. Analoogiliselt võib Lorentzi teisendusi vaadelda pööretena aegruumis. Kolmemõõtmelise koordinaadistiku pööramisel (või pööramisel koos peegeldusega) jääb muutumatuks mis tahes kahe punkti vaheline kaugus. Teiste sõnadega, suurus

$$l = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (21.1)$$

on invariantne pöörete ja peegelduste suhtes. Analoogiline invariant on olemas ka neljamõõtmelises aegruumis. See on meile juba tuttav intervall (vt. valem (19.12)). Seda analoogiat aitab selgemini esile tuua alljärgnev võte. Asendame reaalse ajakoordinaadi imaginaarsega:

$$u = ict\,, \qquad (21.2)$$

omistades talle teguri c abil ühtlasi pikkuse dimensiooni. Siis on $c^2(t_2-t_1)^2 = -(u_2-u_1)^2$ ja intervalli valem saab kuju

$$s = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+(u_2-u_1)^2}\,. \qquad (21.3)$$

See avaldis on formaalselt täiesti sarnane kahe punkti vahelise kauguse avaldisega (21.1). Erinevus on ainult mõõtmete arvus: seal kolm, siin neli. Seega võib intervalli pidada teatavas mõttes kahe sündmuse vaheliseks aegruumiliseks kauguseks.

Ühes suhtes on see analoogia siiski mittetäielik. Viimane liige juure all valemis (21.3) on tegelikult negatiivne, kuna valemis (21.1) on kõik liikmed juure all positiivsed. Sellest on tingitud tähtis asjaolu, et kahe sündmuse vaheline intervall võib võrduda nulliga, ilma et sündmused ühtiksid; seevastu tähendab kolmemõõtmelises ruumis punktidevaheline nullkaugus, et punktid ühtivad. Ka võib intervall olla imaginaarne, kuna tavalises kolmemõõtmelises ruumis on kõik kaugused reaalsed.

Seoses nimetatud erinevusega on tarvitusel alljärgnev terminoloogia. Kolmemõõtmelises ruumis kehtivat geomeetriat nimetatakse <u>eukleidiliseks</u>. Neljamõõtmelise aegruumi geomeetria on teistsugune, kuigi mitmes suhtes eukleidilisega sarnane. Aegruumi geomeetriat nimetatakse <u>pseudoeukleidiliseks</u>. Sellele geomeetriale on iseloomulik just see, et ortogonaalsete koordinaatteisenduste suhtes invariantses ruutvormis ei ole mitte kõik liikmed positiivsed. Täpsemalt määrab pseudoeukleidilise geomeetria liigi negatiivsete liikmete arv. Selle väljendamiseks kasutatakse <u>signatuuri</u> mõistet. Aegruumi signatuur on +++-, s. o. mainitud ruutvormis on kolm positiivset ja üks negatiivne liige.

Analoogiliselt kolmemõõtmelisele tensorarvutusele tavalises eukleidilises ruumis on ka pseudoeukleidilises aegruumis võimalik neljamõõtmeline tensorarvutus. Nii on näiteks sündmuse ruumikoordinaadid ja aeg selle sündmuse neljamõõtmelise kohavektori komponentideks. On olemas ka teisi neljamõõtmelisi vektoreid. Teame näiteks, et impulsi komponendid ja mass teisenevad siirdel teise inertsiaalsüsteemi täpselt niisamuti nagu ruumikoordinaadid ja aeg. See tähendab, et kolmemõõtmelise impulsivektori komponendid ja mass moodustavad koos neljamõõtmelise vektori. Seda nimetatakse neljamõõtmeliseks impulsiks. On olemas ka 16-komponendilisi suurusi, mis käituvad Lorentzi teisenduste puhul nagu neljamõõtmelised 2. järku tensorid jne.

Kolmemõõtmeline tensorarvutus võimaldab teatavasti avaldada füüsikaliste suuruste vahelisi seoseid kujus, mis ei sõltu mingi konkreetse ruumikoordinaadistiku valikust. Üks ja sama kuju kehtib ühesuguselt kõikides koordinaatsüsteemides. Analoogiliselt on neljamõõtmelise tensorarvutuse abil võimalik kõiki relativistlikke seoseid avaldada inertsiaalsüsteemi valikust sõltumatus kujus. Täpsemalt öeldes, on võimalik niisugune kuju, mille sõltumatus inertsiaalsüsteemi valikust on vahetult ilmne. Niisugust kuju nimetatakse kovariantseks. Sel viisil viiakse relatiivsusteoorias kõik seosed ilmseesse kooskõlla realtiivsusprintsiibiga.

Käesolevas algkursuses me pole veel kovariantset esitust kasutanud. Seda polnud esialgu otseselt vaja. Aga kursuse järgnevates osades on see möödapääsmatu. Neljamõõtmeline tensorarvutus on seal niisama loomulik ja mugav nagu kolmemõõtmeline tensorarvutus klassikalises mehhaanikas või väljateoorias.

S i s u k o r d

Saateks 3
Sissejuhatus 4
§ 1. Mass, impulss ja energia klassikalises mehhaanikas 6
§ 2. Klassikalise mehhaanika relatiivsusprintsiip .. 13
§ 3. Valguse mass ja impulss 16
§ 4. Eeter ja eetrituul. Michelsoni katse 22
§ 5. Relatiivsusteooria põhipostulaadid 29
§ 6. Keha massi sõltuvus kiirusest 31
§ 7. Samasihiliste kiiruste liitmine 38
§ 8. Kiiruse teisendamine üldjuhul 41
§ 9. Valguse aberratsioon 44
§ 10. Massi ja impulsi teisendamine 49
§ 11. Seisumassi absoluutsus ja relatiivsus, mitteaditiivsus ja mittejäävus 53
§ 12. Teine meetod massi ja impulsi relativistlike mõistete põhjendamiseks 59
§ 13. Relativistlikud põrked 66
§ 14. Dünaamika põhivõrrand 73
§ 15. Relativistlik töö ja energia. Massi ja energia ekvivalentsus 77
§ 16. Aja relatiivsus. Omaaeg 86
§ 17. Mitteühtlane omaaeg. Kellaparadoks 94
§ 18. Pikkuste relatiivsus 98
§ 19. Lorentzi teisendus 102
§ 20. Jõu teisendamine 110
§ 21. Aegruum 113

20 kop.