TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 277 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKAALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

X

ТАРТУ 1971

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 277 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKAALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

X

TARTU 1971

О МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА ЛИНЕЙНЫХ УПОРЯДОЧЕНИЙ ПОЛУГРУППЫ

Е. Габович

Кафедра алгебры и геометрии

Под линейным порядком алгебраической системы ниже подразумевается порядок, согласованный с ее операциями. Для всякого линейного порядка подгруппы (определение линейно упорядоченной полугруппы см. в [6]) существует дуальный ему линейный порядок, получающийся из него заменой всех неравенств между элементами на противоположные.

Вопрос о существовании колец и полей с любой наперед заданной мощностью множества их линейных упорядочений положительно решен Ю. Л. Ершовым [2]. Аналогичный вопрос для унарных алгебр полностью изучен Г. И. Рубановичем [4]. Им же построен пример группоида, множество линейных упорядочений которого счетно.

Известны группы, линейно упорядочиваемые $2^{n+1} \cdot n!$ способами (см. [3]), однако не известна ни одна группа, множество линейных упорядочений которой было бы счетным. Вопрос о существовании таких групп составляет содержание проблемы Б. Неймана (см. [6], проблема 18 а). Аналогичная проблема для полугрупп сформулирована автором в [5] (проблема 15). Ниже приводится положительное решение этой проблемы.

Будем исходить из аксиоматики теории множеств, включающей в себя в качестве одной из аксиом обобщенную континуум-гипотезу, и будем обозначать через ω мощность счетного множества.

Теорема 1. *Для любого кардинального числа a, конечного или бесконечного, существует полугруппа, упорядочиваемая в точности a попарно недуальными способами.*

Фактически будет доказана следующая более сильная теорема.

Теорема 2. *Для любого кардинального числа a существует абелева нильпотентная полугруппа, линейно упорядочиваемая в точности a попарно недуальными способами.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно три случая: a — конечно, $a = \omega$ и $a > \omega$.

1. Пусть A — полугруппа с двумя образующими a и c, с нулем и с определяющими соотношениями

$$a^{3n+1} = c^2 = ac = ca = 0,$$

где n — фиксированное натуральное число. Рассмотрим в ней подполугруппу B, состоящую из всех элементов A, кроме $a, a^2, \ldots, a^{n-1}$. Предположим, что она линейно упорядочена, и пусть, для определенности, $a^n < 0$. Умножая это неравенство на $a^{n+k}(1 \leqslant k \leqslant 2n)$, получим, что тогда и $a^{2n+1} < 0, \ldots, a^{3n} < 0$.

Покажем, что в B имеют место неравенства

$$a^{n+k} < a^{n+k+1} \tag{1}$$

при $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$. Пусть сперва $k < n$. Если бы в этом случае (1) не выполнялось, то из $a^{n+k+1} < a^{n+k}$ следовало бы

$$0 = a^{3n+1} = a^{n+k+1} \cdot a^{2n-k} < a^{3n} = a^{n+k} \cdot a^{2n-k} < 0,$$

что невозможно. Однако, из неравенств (1) при $k = 0, 1, \ldots, n-1$ после умножения их на a^n получаются неравенства (1) для $k = n, n+1, \ldots, 2n-1$. Итак, если B линейно упорядочена и $a^n < 0$, то

$$a^n < a^{n+1} < \ldots < a^{2n} < a^{2n+1} < \ldots < a^{3n} < 0. \tag{2}$$

Добавление к неравенствам (2) любого из следующих неравенств

$$a^{2n} < c < a^{2n+1}, \quad \ldots, \quad a^{3n-1} < c < a^{3n}, \quad a^{3n} < c < 0, \quad 0 < c \tag{3}$$

превращает полугруппу B в линейно упорядоченную полугруппу. Других способов превращения B в линейно упорядоченную полугруппу нет. Действительно, из $c < a^{2n}$ следовало бы $0 = c \cdot a^n < a^{2n} \cdot a^n = a^{3n}$ вопреки (2), так что обязательно должно выполняться неравенство $c > a^{2n}$.

Поскольку количество неравенств (3) равно $n+2$, то мы установили $n+2$ различных способов линейного упорядочения для B, среди которых нет ни одной пары взаимно дуальных. В случае, когда $a^n > 0$, дуальные рассмотрения приводят к порядкам, каждый из которых дуален одному из сконструированных выше. Итак, построенная полугруппа B линейно упорядочиваема в точности $n+2$ попарно недуальными способами.

Ввиду того, что при n, принимающем натуральные значения, $n+2 \geqslant 3$, остается рассмотреть случаи $\alpha = 0, 1, 2$.

Случай $\alpha = 0$. Рассмотрим полугруппу B с нулем, порожденную элементами b_{11}, b_{12}, b_{21} и b_{22}, с определяющими соотношениями

$$b^3_{ij} = 0, \qquad i, j \in \{1, 2\},$$

$$b^p_{ij} b^q_{kl} = b^{p+q}_{\min(i,k)\min(j,l)}, \qquad i, j, k, l \in \{1, 2\}.$$

Покажем, что эта абелева нильпотентная полугруппа неупорядочиваема.

Предположим, что B упорядочена, и пусть для определенности $b_{11} < b_{22}$. Тогда

$$b^2_{11} = b_{11} b_{12} \leqslant b_{22} b_{12} = b^2_{12},$$
$$b^2_{11} = b_{21} b_{11} \leqslant b_{21} b_{22} = b^2_{21}.$$

Оба полученных неравенства строгие, ибо $b^2{}_{11}$, $b^2{}_{12}$ и $b^2{}_{21}$ — различные элементы в B. Однако, вопреки этому из $b_{12} < b_{21}$ следует, что

$$b^2{}_{12} = b_{12}b_{12} \leqslant b_{12}b_{21} = b^2{}_{11},$$

а из $b_{12} > b_{21}$ следует, что

$$b^2{}_{11} = b_{12}b_{21} \geqslant b_{21}b_{21} = b^2{}_{21}.$$

При предположении $b_{11} > b_{22}$ аналогичные рассуждения также приводят к противоречию.

Случай $\alpha = 1$. Любая конечная линейно упорядочиваемая моногенная полугруппа нильпотентна и обладает в точности двумя линейными порядками, которые дуальны друг другу (см. [1]).

Случай $\alpha = 2$. Рассмотрим полугруппу с нулем, порожденную элементами a и b, с определяющими соотношениями

$$a^3 = b^3 = 0, \qquad a^2 = ab = ba.$$

Она абелева и нильпотентна. Пусть она упорядочена, причем, для определенности $a < b$, так что $a^2 \leqslant b^2$. Предположим, что $b < b^2 < 0$. Тогда $a^2 = ab < ab^2 = 0$, так что и $a < a^2 < 0$. Итак, $a < b < b^2 < 0$ и $a < a^2 < b^2$. Поскольку из $a^2 < b$ следовало бы, что $0 = aa^2 \leqslant ab = a^2$, то $a < b < a^2 < b^2 < 0$. Последние неравенства действительно превращают рассматриваемую полугруппу в линейно упорядочиваемую полугруппу. Если же $0 < b < b^2$, то аналогичные рассуждения приводят к следующему линейному порядку рассматриваемой полугруппы: $0 < a^2 < b^2 < < a < b$.

В случае, когда $a > b$, дуальные рассмотрения приводят к двум порядкам, дуальным уже найденным. Следовательно, рассматриваемая полугруппа линейно упорядочиваема в точности двумя попарно недуальными способами.

Итак, теорема в случае конечного α доказана.

2. Пусть i пробегает множество $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Рассмотрим полугруппу B, состоящую из всех символов a^i, b^i, нуля и элемента c с операцией, задаваемой определяющими соотношениями

$$a^ia^j = b^{i+j}, \qquad a^ib^j = b^ja^i = b^ib^j = xy = 0, \qquad i, j \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

где x, $y \in B$, причем x или y лежит в $\{0, c\}$. Обозначим $A = = B\ \{c\}$. Пусть B линейно упорядочена.

Предположим, для определенности, что $a^0 < 0$. Тогда $b^i = = a^0a^i < 0 \cdot a^i = 0$ для любого $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ и, более того, $a^i < 0$, ибо из $a^i > 0$ мы получили бы $b^i = a^ia^0 > 0a^0 = 0$, вопреки доказанному. Итак, 0 — максимальный элемент в A.

Рассмотрим два случая: I. $a^0 < a^1$; и II. $a^0 > a^1$.

I. Умножив $a^0 < a^1$ на a^i, получим $b^i < b^{i+1}$, т. е.

$$b^0 < b^1 < \ldots < b^i < b^{i+1} < \ldots. \tag{4}$$

Теперь ясно, что не может быть $a^i > a^{i+1}$ ни при каком i, ибо, умножив это неравенство на a^0, получим $b^i > b^{i+1}$ вопреки (4). Итак,

$$a^0 < a^1 < \ldots < a^i < a^{i+1} < \ldots. \tag{5}$$

Более того, $a^k < b^0$ для любого $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, ибо из $b^0 < a^k$ следовали бы неравенства

$$0 = a^0 b^0 < b^k = a^0 a^k,$$

что невозможно. Итак, в рассматриваемом случае линейный порядок на B индуцирует ввиду (4) и (5) следующий линейный порядок на A:

$$a^0 < a^1 < \ldots < a^i < a^{i+1} < \ldots < b^0 < b^1 < \ldots <$$
$$< b^j < b^{j+1} < \ldots < 0. \qquad (6)$$

II. Рассуждения, аналогичные проведенным в случае I, приводят к следующему линейному порядку на A:

$$\ldots a^{i+1} < a^i < \ldots < a^1 < a^0 < \ldots < b^{j+1} < b^j < \ldots <$$
$$< b^1 < b^0 < 0. \qquad (7)$$

Как для линейного порядка (6), так и для линейного порядка (7) полугруппы A условие монотонности умножения выполнено. Фактически выше было доказано, что других линейных упорядочений полугруппы A в случае, когда $a^0 < 0$, не существует.

Вернемся к полугруппе B и опишем все способы, которыми линейную упорядоченность A можно продолжить до линейной упорядоченности B. Для элемента c как в случае (6), так и в случае (7) должны выполняться неравенства $a^n < c$, ибо из $c < a^n$ следовало бы, что $0 = a^0 c < b^n = a^0 a^n$.

Поэтому линейный порядок в B может возникнуть лишь в результате добавления к неравенствам (6) одного из следующих неравенств:

$$a^n < c < b^0 \quad \text{для всех } n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (8)$$
$$b^n < c < b^{n+1} \quad \text{для некоторого } n \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \qquad (9)$$
$$b^n < c < 0 \quad \text{для всех } n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (10)$$
$$0 < c, \qquad (11)$$

или же в результате добавления к неравенствам (7) неравенства (11) или одного из следующих неравенств:

$$a^0 < c < b^n \quad \text{для всех } n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (12)$$
$$b^{n+1} < c < b^n \quad \text{для некоторого } n \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \qquad (13)$$
$$b^0 < c < 0. \qquad (14)$$

С другой стороны, добавление к неравенствам (6) любого из неравенств (8)—(11) или к неравенствам (7) любого из неравенств (11)—(14) не нарушает монотонности, так что при каждом таком добавлении одного неравенства B превращается в линейно упорядоченную полугруппу и этим исчерпываются все способы линейного упорядочения полугруппы B, при которых $a^0 < 0$. Заметим, что все эти способы различны и попарно не дуальны, а мощность их множества равна ω.

В случае, когда $a^0 > 0$, дуальные рассуждения приводят к линейным упорядочениям, дуальным описанным. Таким образом, мощность множества всех линейных упорядочений полугруппы B равна ω.

3. Ввиду обобщенной континуум-гипотезы для любого бесконечного кардинального числа $\alpha > \omega$ найдется такое $\beta \geqslant \omega$, что $\alpha = 2^{\beta}$. Произвольное множество A мощности β превращается в полугруппу $(A, \circ)$ с нулевым умножением, если положить $x \circ y = 0$ для любых $x, y \in A$, где 0 — фиксированный элемент из A. Легко видеть, что любое линейное упорядочение множества A превращает $(A, \circ)$ в линейно упорядоченную полугруппу.

Но мощность множества всех линейных упорядочений множества A равна $2^{\beta} = \alpha$. Поэтому и мощность множества всех пар взаимно дуальных линейных порядков абелевой нильпотентной полугруппы $(A, \circ)$ равна α. Теорема доказана.

Литература

1. Габович Е. Я., Эндоморфизмы некоторых упорядоченных полугрупп. Лит. матем. сб., 1963, **2**, 69—76.
2. Ершов Ю. Л., О числе линейных порядков на поле. Матем. заметки, 1969, **6**, № 2, 201—211.
3. Каргаполов М. И., Кокорин А. И., Копытов В. М., К теории упорядочиваемых групп. Алгебра и логика, семинар, 1965, **4**, № 6, 21—27.
4. Рубанович Г. И., О линейно упорядоченных унарных алгебрах. Десятый всесоюзный алгебраический коллоквиум. Резюме сообщений и докладов, Новосибирск, 1969, том I, 94—95.
5. Свердловская тетрадь (нерешенные задачи теории полугрупп). Свердловск, 1969.
6. Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва, 1965.

Поступило
2 XII 1969

POOLRÜHMA LINEAARSETE JÄRJESTUSTE HULGA VÕIMSUSEST

J. Gabovitš

Resümee

Tõestatakse teoreem: iga kardinaalarvu α korral leidub nilpotentne Abeli poolrühm, mille kõigi teineteisele duaalsete lineaarsete järjestuste paaride hulga võimsus on α.

ABOUT THE POWER OF A SET OF LINEAR ORDERINGS OF A SEMIGROUP

J. Gabovitsh

Summary

A positive answer is given to the author's problem of the existence of some ordered semigroups with a countable set of linear orderings. This result follows from the theorem:

For every cardinal α, finite or infinite, there exists one nilpotent Abelian semigroup with α pairs of linear orderings (the orderings from one pair are dual to one another).

УПОРЯДОЧИВАЕМОСТЬ ВЕРБАЛЬНЫХ СУММ КОЛЕЦ

О. Иванова

Кафедра алгебры и геометрии

В работе по образцу вербальных произведений групп определяются вербальные суммы колец и для них рассматриваются некоторые вопросы, относящиеся к возможности их линейной упорядочиваемости. При этом кольца не предполагаются ассоциативными. Всюду, где многообразие колец не указано точно, речь идет о произвольном фиксированном многообразии колец Λ. Все приводимые результаты справедливы и для алгебр над линейно упорядоченным полем, доказательства почти дословно повторяют приведенные в работе.

Используемые определения и факты теории линейно упорядоченных колец можно найти в монографии [4]. В частности, там приводится известная теорема о том, что для линейной упорядочиваемости прямой суммы (как полной, так и дискретной) линейно упорядоченных колец необходимо и достаточно, чтобы все слагаемые, кроме, быть может, одного, были бы кольцами с нулевым умножением, т. е. принадлежали бы многообразию колец, определяемому тождеством $xy = 0$. Ниже это многообразие обозначается через Ω.

В статье для случая вербальных сумм колец доказываются некоторые аналоги утверждения о необходимости из приведенной выше теоремы и указываются примеры, отвергающие некоторые естественные аналоги утверждения о достаточности.

Пусть W и Λ — некоторые многообразия колец, а A_α, $\alpha \in I$, — кольца из Λ. Кольцо $\Sigma_\Lambda^{(W)} A_\alpha$ назовем вербальной W — суммой своих подколец A_α в Λ, если оно изоморфно фактор-кольцу

$$A = G/[A_\alpha \mid \alpha \in I] \cap W(G),$$

где G — свободное объединение колец A_α в Λ, $[A_\alpha \mid \alpha \in I]$ — взаимный коммутант колец A_α в G (т. е. идеал кольца G, порожденный всеми элементами вида $a_\alpha \cdot a_\beta$, где $a_\alpha \in A_\alpha$, $a_\beta \in A_\beta$, $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$), а $W(G)$ вербальный W-идеал кольца G. Вербальный W-идеал $W(G)$ кольца G определяется аналогично вербальной подгруппе группы, а именно, $g \in W(G)$ тогда и только тогда, когда g представим в виде $g = w(g_1, \ldots, g_n)$, где $w(x_1, \ldots, x_n) = 0$ — некоторое тождество, выполняющееся в многообразии W, а $g_1, \ldots, g_n \in G$.

Вербальная W-сумма существует в любом многообразии для любого набора колец, поскольку в любом многообразии колец определено свободное объединение и фактор-кольцо

$$G/[A_\alpha \mid \alpha \in I] \cap W(G)$$

содержит подкольца, изоморфные A_α. Последнее следует из того, что ядро канонического эпиморфизма свободного объединения G в прямую сумму этих же колец A_α, совпадающего на каждом A_α с тождественным изоморфизмом, содержит идеал $[A_\alpha | \alpha \in I] \cap \cap W(G)$. Более того, вербальная сумма колец является правильной суммой, т. е. кольцо $\Sigma_\Lambda^{(W)} A_\alpha$ порождается своими подкольцами A_α и для любого $\alpha \in I$ пересечение A_α с идеалом, порожденным остальными вербальными слагаемыми, есть нулевое подкольцо.

Вербальные суммы колец являются частным случаем известных поливербальных произведений универсальных алгебр и удовлетворяют всем постулатам ассоциативности операций (см. [1], теорема 4). Покажем, что *W_1-сумма и W_2-сумма колец A_α ($\alpha \in I$) в многообразии Λ совпадают, если* $W_1 \cap \Lambda = W_2 \cap \Lambda$. Это следует из того, что W-сумма в многообразии Λ совпадает с $(W \cap \Lambda)$-суммой (поэтому в дальнейшем будем считать, что $W \subset \Lambda$). Из определения вербальной суммы ясно, что для доказательства последнего достаточно показать, что $W(G) = (W \cap \Lambda)(G)$.

Очевидно, что $W(G) \subseteq (W \cap \Lambda)(G)$ поскольку для многообразий имеет место $W \cap \Lambda \subseteq W$. Докажем обратное включение. Кольцо $G/W(G)$ лежит в W и в Λ, поскольку уже G лежало в Λ, следовательно, лежит в $W \cap \Lambda$. Это означает, что любое тождество $w^1(x_1, \ldots, x_n) = 0$, выполняющееся в $W \cap \Lambda$, верно для любого набора элементов $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_n$ из $G/W(G)$, а это эквивалентно тому, что для любого такого w^1 и любых элементов $g_1, \ldots, g_n$ из G будет $w^1(g_1, \ldots, g_n) \in W(G)$, что и означает, что любой элемент идеала $(W \cap \Lambda)(G)$ лежит в $W(G)$.

В частности, когда $W \cap \Lambda$ равно нулевому многообразию, W-сумма вырождается в дискретную прямую сумму, совпадающую в любом многообразии Λ с вербальной Ω-суммой.

Многообразие колец W назовем *O-многообразием*, если хотя бы одно неодноэлементное кольцо из W упорядочиваемо.

Лемма. *Любое O-многообразие колец W содержит многообразие Ω.*

Доказательство. Поскольку всякое свободное кольцо многообразия Ω является дискретной прямой суммой колец с одним образующим с нулевым умножением, то, ввиду теоремы Биркгофа, достаточно доказать, что W содержит свободное кольцо многообразия Ω с одним образующим. Ввиду той же теоремы при этом достаточно показать, что свободное кольцо с одним образующим R многообразия W можно эпиморфно отобразить на свободное кольцо A с одним образующим многообразия Ω. Если такой эпиморфизм существует, то ввиду свободы R существует и эпиморфизм, отображающий свободный образующий r кольца R в свободный образующий a кольца A и, следовательно, nr в na, а R^2 в 0. Такой эпиморфизм невозможен только, если в W выполняется некоторое тождество вида

$$n_1x = n_2x^2 + n_{31}x^2 \cdot x + n_{32}x \cdot x^2 + \ldots, \qquad n_1 \neq 0, \tag{1}$$

где n_1, n_2, n_{31}, n_{32}, ... — целые числа.

Покажем, что из выполнения в W тождества (1) следует, что в этом многообразии должно выполняться и некоторое тождество вида

$$mx = 0, \qquad m \neq 0. \tag{2}$$

Обозначим через $f_e(x)$ однородный многочлен степени l относительно x. Тогда тождество (1) можно переписать следующим образом:

$$n_1(x) = f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_k(x), \qquad n_1 \neq 0,$$

или, опуская, если они имелись, первые равные нулю члены этой суммы:

$$n_1x = f_d(x) + f_{d+1}(x) + \ldots + f_k(x). \tag{3}$$

Покажем, что из тождества (3) следует некоторое тождество вида

$$n'_1x = f'_{d+1}(x) + \ldots + f'_k(x), \qquad n'_1 \neq 0. \tag{4}$$

Подставим $2x$ вместо x в (3) (это сделать можно, поскольку, если $2x = 0$ тождество в W, то утверждение доказано) и в полученном выражении заменим правую часть равенства (3) на левую:

$$\begin{aligned} 2n_1x &= 2^d f_d(x) + 2^{d+1} f_{d+1}(x) + \ldots + 2^k f_k(x) = \\ &= 2^d[f_d(x) + f_{d+1}(x) + \ldots + f_k(x)] + 2^d f_{d+1}(x) + \ldots + \\ &\quad + 2^d(2^{k-d} - 1) f_k(x) = \\ &= 2^d n_1 x + 2^d f_{d+1}(x) + \ldots + 2^d(2^{k-d} - 1) f_k(x), \end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда, ввиду $d \geqslant 2$ и $2^d - 2 \neq 0$, выполняется тождество

$$(2^d - 2) n_1 x = -2^d f_{d+1}(x) - \ldots - 2^d(2^{k-d} - 1) f_k(x),$$

имеющее вид (4). Производя такие преобразования не более $k - d$ раз, получим тождество вида (2).

Однако, аддитивная группа всякого упорядочиваемого кольца не имеет кручения. Поэтому в многообразии колец, удовлетворяющих, кроме прочего, и тождеству вида (2), не может быть неодноэлементных упорядочиваемых колец. Поскольку же W является O-многообразием, то в W не выполняется ни одно тождество вида (2), а следовательно, и вида (1). Поэтому существует нужный нам эпиморфизм и $\Omega \subset W$.

Предложение. *Если вербальная W-сумма $A(w)B$ двух колец A и B упорядочиваема и не вырождается в прямую, то W является O-многообразием.*

Доказательство. Из определения вербальной суммы ясно, что взаимный коммутант $[A, B]$ подколец A и B кольца $A(w)B$ принадлежит многообразию W. Если коммутант нулевой, то W-сумма вырождается в прямую. Если же он отличен от нулевого кольца, то W является O-многообразием, поскольку оно содержит ненулевое упорядочиваемое кольцо $[A, B]$.

Теорема 1. *Пусть W является O-многообразием. Если кольцо $\Sigma_A^{(W)} A_\alpha$ упорядочиваемо, то либо все A_α, кроме, быть может, одного, лежат в W, либо каждое A_α является расширением кольца из многообразия Ω при помощи кольца из многообразия W.*

Доказательство. Из постулатов ассоциативности для W-сумм следует, что теорему достаточно доказать для двух слагаемых. Пусть $R = A(w)B$ упорядочено. Если $A \in W$ или $B \in W$, то утверждение теоремы справедливо. Пусть поэтому $A \notin W$ и $B \notin W$. Доказательство теоремы разобьем на два пункта.

1°. Если для любого положительного элемента w из вербального идеала $W(A)$ найдется элемент $b \in B$ такой, что

$$b > w > 0, \tag{6}$$

то, ввиду неравенств

$$b^2 \geqslant wb \geqslant w^2 \geqslant 0$$

и равенства

$$wb = 0,$$

следующего из определения вербальной W-суммы, будет $w^2 = 0$ для любого положительного, а, следовательно, и для любого вообще элемента вербального идеала $W(A)$. Ввиду упорядоченности $W(A)$ (так как $W(A) \subset R$) это означает, что оно с нулевым умножением (поскольку в упорядоченном кольце произведение положительных элементов заключено между их квадратами). Итак, в этом случае A является расширением кольца с нулевым умножением $W(A)$ при помощи кольца $A/W(A)$ из W.

2°. Если же не для любого положительного $w \in W(A)$ найдется $b \in B$, удовлетворяющий условию (6), то для некоторого $w_0 \in W(A)$ будет

$$w_0 > b > 0 \tag{7}$$

при любом положительном $b \in B$. Применяя рассуждение, аналогичное приведенному в пункте 1° получим, что из (7) следует $b^2 = 0$ для всех положительных, а, следовательно, и для всех вообще элементов из B. Поэтому B, будучи упорядочиваемым как подкольцо в R, является кольцом с нулевым умножением. Поэтому ввиду леммы $B \in W$, вопреки предположению.

Поменяв роли A и B в приведенном доказательстве, получим, что и B является расширением кольца из Ω при помощи кольца из W. Теорема доказана.

Для вербальных сумм некоторых специальных видов утверждение теоремы 1 может быть усилено. Назовем тождество

$$w(x_1, x_2 \ldots, x_n) = 0$$

L-тождеством, если его левая часть линейна и однородна по каждому неизвестному и имеет положительные коэффициенты. Примером L-тождества может служить любое тождество нильпотентности, а примером W-сумм, в случае которых W задается L-тождествами является нильпотентные суммы, изучавшиеся автором для ассоциативных алгебр над полем в [2]. Ниже n-нильпотентная сумма колец A и B обозначается через $A(n)B$. Отметим, что дискретная прямая сумма совпадает с 2-нильпотентной суммой в любом многообразии. Для вербальных W-сумм в случае многообразий, задаваемых L-тождествами, имеет место следующее усиление теоремы 1.

Теорема 2. *Если многообразие W может быть в A определено L-тождествами и W-сумма колец упроядочиваема, то все ее слагаемые, кроме, быть может, одного, принадлежат многообразию W.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1 будем рассматривать случай двух слагаемых. Пусть $R = A(w)B$ линейно упорядочено и допустим, что A не лежит в W, т. е. существуют такие $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, что $w(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$, где $w = 0$ одно из L-тождеств, задающих W. Можно считать, что $a_1 > 0$, $a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$, поскольку

$$w(a_1, a_2, \ldots, -a_i, \ldots, a_n) = -w(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n).$$

Из положительности коэффициентов L-тождества следует, что $w(r_1, r_2, \ldots, r_n) \geqslant 0$ для любых положительных элементов r_1, $r_2, \ldots, r_n$ кольца R. Если $b > a_1$ для некоторого $b \in B$, то $b - a_1 > 0$ и, раскрывая скобки по дистрибутивности, получим

$$w((b - a_1), a_2, \ldots, a_n) = w(b, a_2, \ldots, a_n) - w(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ = -w(a_1, a_2, \ldots, a_n) < 0,$$

ибо $w(b, a_2, \ldots, a_n) = 0$ по определению вербальной суммы, а $w(a_1, a_2, \ldots, a_n) > 0$. Однако,

$$w((b - a_1), a_2, \ldots, a_n) \geqslant 0,$$

ибо все его аргументы положительны. Полученное противоречие показывает, что если A не лежит в W, то $b < a_1$ для любого $b \in B$ (равенство $b = a$, невозможно).

Если предположить, что и B тоже не лежит в W, то аналогичным образом получим, что любой элемент из A (в частности, и a_1) меньше некоторого положительного $b \in B$. Поскольку эти две ситуации не совместимы, одно из колец A или B принадлежит W. Теорема доказана.

Для последующих примеров нам потребуется метод, позволяющий продолжать положительные линейные порядки некоторых полугрупп до линейных порядков их полугрупповых колец (положительный порядок полугруппы — порядок, при котором все ее элементы больше или равны нулю). Будем называть такое продолжение *лексикографическим продолжением порядка полугруппы*. Полугруппы, для которых возможно такое лексикографическое продолжение — полугруппы с нулем и с законом ослабленного сокращения, т. е. удовлетворяющие аксиоме:

$$ab = a_1 b \neq 0 \quad (ba = ba_1 \neq 0) \text{ влечет } a = a_1.$$

Такими являются все полугруппы, используемые в дальнейших примерах, а также все свободные нильпотентные полугруппы, для которых этот же метод использован в доказательстве основной теоремы работы [3].

Этот же метод использовался в доказательстве теоремы 18 работы [5]; поскольку в [5] нет точного описания метода, изложим его здесь подробно.

Напомним, что в целочисленном полугрупповом кольце R линейно упорядоченной полугруппы A каждый ненулевой элемент может быть однозначно записан в виде конечной суммы элементов полугруппы A с целыми ненулевыми коэффициентами,

$$r = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n,$$

где $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ — элементы полугруппы A.

Полагаем, что $r > 0$ тогда и только тогда, когда $k_1 > 0$. Ясно, что при этом сумма положительных элементов положительна. Убедимся, что и произведение положительных элементов положительно. Пусть

$$r' = k'_1 a'_1 + k'_2 a'_2 + \ldots + k'_m a'_m,$$

где $a'_1 > a'_2 > \ldots > a'_m$ и $k'_1 > 0$. Если $a_1 a_1' = 0$, то из $a_1 > a_i > 0$ $(i = 2, \ldots, n)$ и $a'_1 > a'_j > 0$ $(j = 2, \ldots, m)$ следует, что для всех i, j $a_i a'_j = 0$ и $rr' = 0$. Если же $a_1 a'_1 > 0$, то из монотонности умножения при $j > 1$ следует $a_1 a'_1 > a_1 a'_j \geqslant a_i a'_j$ (первое неравенство строгое ввиду закона ослабленного сокращения). Следовательно,

$$rr' = k_1 k'_1 a_1 a'_1 + k''_2 a''_2 + \ldots + k''_s a''_s > 0,$$

ибо $k_1 k'_1 > 0$. Итак, введенное отношение является отношением линейного порядка в полугрупповом кольце R.

Замечание 1. *Для произвольных W аналог теоремы 2, утверждающий, что если W-сумма упорядочиваема, то все слагаемые, кроме, быть может, одного, принадлежат многообразию W, не имеет места, как показывает следующий пример.*

Пример 1. Пусть A — многообразие 3-нильпотентных колец (т. е. определяется тождеством $x_1 x_2 x_3 = 0$), а W — подмногообразие коммутативных 3-нильпотентных колец; A и B — два экземпляра свободного 3-нильпотентного кольца с двумя образующими, а a, b и c, d — свободные образующие колец A и B соответственно. Поскольку все тождества степени 2 многообразия W имеют вид $mxy - myx = 0$, а $(A * C)^3 = 0$, то $A(w)C$ в A является полугрупповым кольцом 3-нильпотентной полугруппы с образующими a, b, c, d и определяющими соотношениями

$$ac = ca, \quad ad = da, \quad bc = cb, \quad bd = db.$$

Эта полугруппа может быть линейно упорядочена соотношениями:

$$a > b > c > d > a^2 > ab > ba > b^2 > ac >$$
$$> bc > c^2 > ad > bd > cd > dc > d^2 > 0,$$

причем этот порядок может быть лексикографически продолжен до линейного порядка кольца $A(w)C$. Однако, ни одно из колец A и C не коммутативно и, следовательно, не принадлежит многообразию W.

Замечание 2. *Нетрудно найти многообразия W, для которых вербальная W-сумма линейно упорядочиваемых колец из W неупорядочиваема.* Например, никогда не упорядочиваема 3-нильпотентная сумма неодноэлементных колец с нулевым умножением. Приводимый ниже пример 2 показывает, что *вербальная W-сумма линейно упорядоченных колец может быть неупорядочиваемой, даже если оба слагаемые лежат в W и одно из них свободно в W.*

Пример 2. Пусть Λ — многообразие ассоциативных колец, а W — многообразие ассоциативных 4-нильпотентных колец (т. е. колец, удовлетворяющих тождеству $x_1x_2x_3x_4 = 0$); A — кольцо с образующими a и b и определяющими соотношениями

$$a^3 = ab = ba = b^2 = 0,$$

т. е. целочисленное полугрупповое кольцо 3-нильпотентной полугруппы $A_0 = \{a, a^2, b, 0\}$ с теми же определяющими соотношениями. Последняя может быть упорядочена, скажем, одним из следующих способов:

$$a > a^2 > b > 0 \quad \text{или} \quad a > b > a^2 > 0.$$

Поэтому и A упорядочиваемо (лексикографически).

Свободное 4-нильпотентное кольцо $F(x)$, как известно, упорядочиваемо. Покажем, что $R = A(4)F(x)$ не упорядочиваемо.

Допустим противное — R упорядочено. Покажем, что в таком случае одно из произведений ax^2 или x^2b равно нулю. Не теряя общности, можно считать R упорядоченным так, что

$$a > 0,\ b > 0,\ x > 0. \tag{8}$$

Если $a > x^2$, то, ввиду $x^2 > 0$ и (8), имеем

$$0 = ab \geqslant x^2b \geqslant 0,$$

т. е. $x^2b = 0$. Если же $a < x^2$, то

$$0 \leqslant ax^2 \leqslant x^2x^2 \leqslant 0$$

и $ax^2 = 0$.

Однако, в R на самом деле $x^2b \neq 0 \neq ax^2$. Действительно, в 4-нильпотентной сумме $R = A(4)F(x)$

$$x^2b = 0 \text{ или } ax^2 = 0 \tag{9}$$

имеет место только тогда, когда в кольце $A * F(x)$ слова x^2b и ax^2, соответственно, принадлежат идеалу $(A * F(x))^4$. Поскольку при любом гомоморфизме $\varphi : A * F(x) \to B$ на 4-нильпотентное кольцо B будет $(A * F(x))^4\varphi = 0$ условие (9) означает, что при любом таком гомоморфизме $(x^2b)\varphi = 0$ или, соответственно,

$(ax^2)\varphi = 0$, что, однако, не выполняется, например, при следующем гомоморфизме φ.

Пусть B — коммутативно-ассоциативное кольцо с образующими u, v и w и определяющими соотношениями $v^2 = u^3 = w^3 = uv = 0$.

Продолжим до гомоморфизмов $\varphi_1 : A \to B$ и $\varphi_2 : F(x) \to B$ отображения $a\varphi_1 = u_1$, $b\varphi_1 = v$ и $x\varphi_2 = w$ и склеим φ_1 и φ_2 в однозначно определенный гомоморфизм φ. При этом

$$(x^2c)\varphi = w^2v \neq 0, \quad (ax^2)\varphi = uw^3 \neq 0.$$

Итак, $x \notin (A * F(x))^4$, $ax^2 \notin (A * F(x))^4$ и, следовательно, R нельзя упорядочить.

В заключение, автор считает своим приятным долгом поблагодарить профессора А. Г. Куроша за полезные обсуждения.

Литература

1. Баранович Т. М., О политождествах в универсальных алгебрах. Сиб. матем. ж., 1964, **5**, № 5, 976—986.
2. Иванова О. А., Нильпотентные разложения ассоциативных алгебр. Матем. сб., 1966, **71**, № 3, 423—432.
3. Иванова О. А., Линейно упорядоченные кольца, не являющиеся O-эпиморфными образами упорядоченных свободных колец. Матем. заметки, 1971, **9**, № 6, 693—696.
4. Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва, 1965.
5. Хион Я. В., Кольца, нормированные при помощи полугрупп. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, **21**, 311—328.

Поступило
2 XII 1969

RINGIDE VERBAALSETE SUMMADE JÄRJESTATUS

O. Ivanova

Resümee

Artiklis leitakse tarvilikud tingimused ringide verbaalsete summade lineaarseks järjestatavuseks.

THE ORDERBILITY OF VERBAL SUMS OF RINGS

O. Iwanova

Summary

There is proved the next result:

Theorem 1. *If $W \subseteq \Lambda$, $A_\alpha \in \Lambda$ and W-sum of rings A_α in Λ is linearly ordered, then one of the following conditions is true: 1° all rings perhaps with the exception of one of them, are rings from W; 2° every ring A_α is an extension of a ring with zero-multiplication by a ring from W.*

For a number of varieties W is proved a stranger version of theorem 1 (only case 1° is true to them).

О МНОГООБРАЗИЯХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОЛУГРУПП

Е. Габович и М. Трепетин

Кафедра алгебры и геометрии

Обозначим через L_k многообразие всех k-нильпотентных полугрупп, задаваемых тождеством

$$x_1x_2\ldots x_k = y_1y_2\ldots y_k, \qquad k \geqslant 2. \tag{1}$$

Рассмотрим его свободную полугруппу F_k со счетным множеством X свободных образующих. Все слова, рассматриваемые в настоящей заметке, будут считаться словами в алфавите X. Поэтому любое тождество в L_k задает некоторое определяющее соотношение в полугруппе F_k.

Из тождества (1) следует равенство между собой любых слов, состоящих, по крайней мере, из k букв. Как элементы из F_k такие слова равны ее нулевому элементу 0. Поэтому при записи тождеств из L_k мы будем писать 0 вместо любого слова w, состоящего, по крайней мере, из k букв. При таком соглашении каждое определяющее соотношение из F_k может, в свою очередь, рассматриваться как тождество в L_k.

Тождества, эквивалентные тождеству $0 = 0$, или, что то же самое, тождеству (1), будем называть *вырожденными*.

Будем писать $x \in w$, если неизвестное x входит в слово w в качестве одной из его букв. Рассмотрим тождество

$$w_1 = w_2. \tag{2}$$

Если из $x \in w_1$ следует, что $x \in w_2$ и, наоборот, из $x \in w_2$ следует, что $x \in w_1$, то тождество (2) назовем *нормальным*. Невырожденное тождество (2) назовем *неровным*, если в слове w_1 некоторое неизвестное x_1, а в слове w_2 некоторое неизвестное x_2 (равное, быть может, x_1) встречается более, чем один раз. Так, например, при $k = 5$ из тождеств

$$x_1x_2x_3x_1 = x^3{}_2x_1, \qquad x_1x_2x_3x_1 = x_1x_3x_2$$

первое неровно, но не нормально, а второе нормально, но не неровно. Неровными нормальными тождествами при $k = 4$ являются, например, тождества

$$x_1x_2x_1 = x_1{}^2x_2, \qquad x_1x_2x_1 = x_2x_1{}^2, \qquad x_1x_2x_1 = x_1x^2{}_2.$$

Теорема. *Любое многообразие* L *такое, что* $L_{k-1} \subset L \subset L_k$, *может быть задано в* L_k *некоторым набором неровных нормальных тождеств и нормальных тождеств вида*

$$x_1x_2 \ldots x_s = x_{\alpha_1}x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_s} \qquad (1 < s < k), \tag{3}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — *некоторая перестановка на множестве* $\{1, 2, \ldots, s\}$.

Доказательство. Введем следующие обозначения. Запись $w = w(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ будет означать, что $x_i \in w$, $1 \leqslant i \leqslant s$, и других неизвестных с таким свойством нет. Через $l(w)$ обозначим длину слова w, т. е. сумму степеней всех входящих в него переменных.

Пусть (2) — тождество в L, причем $w_1 = w_1(x_1, x_2, \ldots, x_s)$. Предположим, что (2) не является нормальным. Покажем, что оно эквивалентно некоторому набору нормальных тождеств.

Поменяв, если это нужно, индексы у слов из (2), мы можем предположить существование такого неизвестного x, что $x \in w_2$, но $x \notin w_1$. Подставим вместо $x \in w_2$ слово $y^{k-l(w_2)+1}$, для некоторого $y \in X$ и получим тождество

$$w_1 = 0. \tag{4}$$

Тождество (4) эквивалентно нормальному тождеству

$$w_1 = x_1x_2 \ldots x_{s-1}x_s^{k-s+1}. \tag{5}$$

Далее, пусть $w_2 = w_2(y_1, y_2, \ldots, y_t)$. Ввиду (2) и (4)

$$w_2 = 0. \tag{6}$$

Но тождество (6) эквивалентно нормальному тождеству

$$w_2 = y_1y_2 \ldots y_{t-1}y_t^{k-t+1}. \tag{7}$$

Итак, из (2) следуют нормальные тождества (5) и (7). Наоборот, если тождества (5) и (7) выполнены, то, ввиду (1) имеет место (2). Следовательно, тождество (2) эквивалентно набору, состоящему из двух нормальных тождеств (5) и (7). Поэтому далее предполагается, что L задано некоторым набором нормальных тождеств.

Если (2) неровно и нормально, то $l(w_1) > s$ и $l(w_2) > s$, где s — число всех различных букв в словах w_1 и w_2. Предположим, что невырожденное нормальное тождество (2) в многообразии L не является неровным и пусть

$$l(w_1) \leqslant l(w_2). \tag{8}$$

Тогда $l(w_1) = s$. Перенумеруем неизвестные так, чтобы $w_1 = x_1x_2 \ldots x_s$. Если $l(w_1) = l(w_2)$, то тождество (2) имеет вид (3).

Покажем, что неравенство $l(w_1) < l(w_2)$ приводит к противоречию. Тождество (2) имеет вид

$$x_1x_2 \ldots x_s = w_2(x_1, x_2, \ldots, x_s), \qquad s < k. \tag{9}$$

Так как $l(w_2) > s$, то слово w_2 можно представить в виде $w = vu$, а (9) в виде

$$x_1 x_2 \ldots x_s = vu, \tag{10}$$

где $l(v) = s$, а $l(u) \geqslant 1$. Пусть

$$v = x_{\alpha_1}^{i_1} x_{\alpha_2}^{i_2} \ldots x_{\alpha_t}^{i_t},$$

где $i_1 + i_2 + \ldots + i_t = s$, а $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_t} \in w_1$. Совершим в тождестве (10) следующую замену индексов неизвестных

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i_1 & i_1+1 & i_1+2 & \ldots & i_1+i_2 & \ldots & s-i_t+1 & s-i_t+2 & \ldots & s \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_2 & \ldots & \alpha_t & \alpha_t & \ldots & \alpha_t \end{pmatrix}$$

После этого тождество (10) превратится в тождество $v = w$, где w — слово длины $l(w_2) > s$. Подставив w вместо v в (10), получим тождество

$$x_1 x_2 \ldots x_s = wu,$$

где $l(wu) = l(w_2) + l(u) > l(w_2)$. Повторив проделанное рассуждение нужное число раз, мы установим, что в многообразии L выполняется тождество

$$x_1 x_2 \ldots x_s = 0 \qquad (s \leqslant k-1),$$

т. е. $L \subset L_{k-1}$, что, ввиду условия теоремы невозможно.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие[1] **1.** *Если A_k обозначает многообразие абелевых k-нильпотентных полугрупп и $A_{k-1} \subset L \subset A_k$, то многообразие L может быть задано в A_k некоторой системой неровных нормальных тождеств вида:*

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_s^{i_s} = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_s^{j_s},$$

где $s < i_1 + i_2 + \ldots + i_s < k, \quad s < j_1 + j_2 + \ldots + j_s \leqslant k.$

Определение. *Многообразие полугрупп называется нормальным, если оно может быть задано некоторым набором нормальных тождеств.*

Следствие 2. *Всякое многообразие $L \subset L_k$ нормально.*

Доказательство. Пусть (2) — тождество в L. Тогда оно либо нормально (см. доказательство теоремы), либо эквивалентно двум тождествам $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, сводимым к нормальным. Откуда вытекает справедливость утверждения.

---

[1] Описание многообразий абелевых k-нильпотентных полугрупп было получено автором ранее и сообщалось в [1]. Там это описание дано при помощи полугрупп, свободных в многообразиях абелевых нильпотентных полугрупп.

Литература

1. Трепетин М. С., О полугруппах, свободных в многообразиях нильпотентных полугрупп. Первый Всесоюзный симпозиум по теории полугрупп. Свердловск, 1969, 75—76.

Поступило
3 IV 1970

NILPOTENTSETE POOLRÜHMADE MUUTKONDADEST

J. Gabovitš ja M. Trepetin

Resümee

On kirjeldatud k-nilpotentsete poolrühmade muutkonna kõik alammuutkonnad. Kõik nad osutuvad normaalseteks.

ABOUT THE VARIETIES OF NILPOTENT SEMIGROUPS

J. Gabovitsh and M. Trepetin

Summary

The identity is called normal if the left and the right parts of it consist of the same letters. The identity is called uneven if a letter in the left and if a letter in the right part of it occurs twice. Let L_k be the variety of all k-nilpotent semigroups ($A^k = 0$ for each $A \in L_k$).

Theorem. *Every variety L, $L_{k-1} \subset L \subset L_k$, may be given in L_k by some set of uneven normal identities and normal identities of the type*

$$x_1 x_2 \ldots x_s = x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_s},$$

where $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_s$ is some permutation on the set $\{1, 2, \ldots, s\}$.

Corollary. *Every variety $L \subset L_k$ is normal* (it may be given by certain set of normal identities).

ПОЛУКОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ КОММУТАТИВНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОЛУГРУПП

М. Трепетин

Кафедра алгебры и геометрии

Полукольцом называется алгебраическая система $\mathfrak{K}$ с ассоциативными операциями сложения и умножения, для элементов которой выполняются тождества: $x(y+z)=xy+xz$, $(y+z)x = yx+zx$. Понятия подполукольца, идеала, гомоморфизма и т. д. полукольца $\mathfrak{K}$ определяются обычным образом. Через $\mathfrak{K}^{\times}$ обозначим мультипликативную, а через $\mathfrak{K}^{+}$ — аддитивную полугруппы полукольца $\mathfrak{K}$.

Пусть A — полугруппа, $\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_A$ — полугруппа ее эндоморфизмов. Определим для любых φ, $\psi\in\mathfrak{E}$ их сумму, полагая для всех $a\in A$

$$a(\varphi+\psi)=a\varphi\cdot a\psi. \tag{1}$$

Известно, что если $\varphi+\psi\in\mathfrak{E}$, то $\mathfrak{E}$ образует полукольцо относительно операций сложения и умножения эндоморфизмов. Обозначим его через $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_A$. Пусть $\mathfrak{B}$ — класс всех полугрупп, у которых сумма любых двух эндоморфизмов в смысле (1) есть снова эндоморфизм и таких, что в каждой $B\in\mathfrak{B}$ множество $B^0=B\backslash B^2$ является ее системой образующих; $\mathfrak{B}'_k$ — класс полугрупп, задаваемых образующими, тождествами $x_1x_2\,\ldots\,x_k = y_1y_2\,\ldots\,y_k$, $xy=yx$ и определяющими соотношениями вида $u=v$, где u и v — слова одинаковой длины. Известно, что полугруппы из класса $\mathfrak{B}'_k$ являются k-нильпотентными, т. е. $A^k=0$ для всех $A\in\mathfrak{B}'_k$.

Основной результат работы состоит в доказательстве теоремы (теорема 4) об однозначной с точностью до изоморфизма определяемости в классе $\mathfrak{B}$ полугрупп из класса $\mathfrak{B}'_k$ их полукольцами эндоморфизмов.

Оба условия теоремы $A\in\mathfrak{B}'_k$ и $\mathfrak{R}_A\cong\mathfrak{R}_B$ существенны, ибо, как показывают примеры, в классе $\mathfrak{B}'_3$ существуют неизоморфные полугруппы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов (теорема 1), а в классе $\mathfrak{B}_4$ существуют неизоморфные полугруппы с изоморфными полукольцами эндоморфизмов (теорема 2), где $\mathfrak{B}_4$ — класс 4-нильпотентных полугрупп.

Другим важным результатом работы, решающим в одном частном случае проблему С. Улама ([3], стр. 47) является абстрактная характеристика полукольца эндоморфизмов произвольной полугруппы из $\mathfrak{B}'_k$ (теорема 3), которая, в частности, существенно используется при доказательстве основной теоремы.

Если S — полугруппа, $X \subset S$, то $[X]$ обозначает подполугруппу в S, порожденную элементами множества X. Одноэлементные множества отождествляются с самими элементами. Неопределяемые в работе понятия теории полугрупп можно найти в монографии Е. С. Ляпина [1].

Автор пользуется приятной возможностью выразить глубокую благодарность Е. Я. Габовичу за помощь в работе.

§ 1. Примеры

1. В этом параграфе, в отличие от остальных, операции рассматриваемых полугрупп записываются мультипликативно.

Теорема 1. *Существуют неизоморфные полугруппы, принадлежащие классу $\mathfrak{B}'_3$, полугруппы эндоморфизмов которых изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим абелевы 3-нильпотентные полугруппы A_1 и A_2 с образующими x, y, z. Пусть A_1 задана определяющими соотношениями

$$x^2 = y^2, \quad xy = xz = z^2, \tag{2}$$

а A_2 — определяющими соотношениями

$$x^2 = y^2 = xz, \quad xy = z^2. \tag{3}$$

Покажем, что полугруппы A_1 и A_2 не изоморфны. Предположим противное и пусть f — изоморфизм этих полугрупп. Тогда множество неразложимых элементов полугруппы A_1 должно отобразиться на множество неразложимых элементов полугруппы A_2. Поэтому $(A_1 \backslash A_1^2)f = A_2 \backslash A_2^2$. Снабдим все элементы из A_1 и A_2 индексами соответственно 1 и 2. Покажем, что $x_1 f = x_2$, $y_1 f = y_2$, $z_1 f = z_2$. Предположим, что $x_1 f \neq x_2$. Тогда либо $x_1 f = y_2$, либо $x_1 f = z_2$. Если $x_1 f = y_2$, а $y_1 f = x_2$, то $z_1 f = z_2$. В этом случае $z_2^2 = z_1^2 f = (x_1 z_1) f = y_2 z_2$, что в A_2 не выполняется. Если, как и прежде, $x_1 f = y_2$, но $y_1 f = z_2$, то $z_1 f = x_2$. Откуда $y_2 z_2 = x_1 f \cdot y_1 f = (x_1 y_1) f = z_1^2 f = x_2^2$, что в A_2 не имеет место, ввиду условий (3). Итак, условие $x_1 f = y_2$ приводит к противоречию. Следующий случай, когда $x_1 f = z_2$, при $y_1 f = x_2$ приводит к $z_2^2 = x_1^2 f = y_1^2 f = x_2^2$, что в A_2 не должно быть, ввиду условий (3). А при $y_1 f = y_2$ дает $y_2 z_2 = y_1 f \cdot x_1 f = z_1^2 f = z_2^2$, что также противоречит условиям (3), справедливым в A_2. Поэтому $x_1 f = x_2$. Тогда если $y_1 f = z_2$, то $z_2^2 = y_1^2 f = x_1^2 f = x_2^2$, вопреки условиям (3). Поэтому $y_1 f = y_2$, а также $z_1 f = z_2$. Из условий (3) и доказанного получим $x_1^2 = (x_2 f^{-1})^2 = x_2^2 f^{-1} = (x_2 z_2) f^{-1} = x_2 f^{-1} \cdot z_2 f^{-1} = x_1 z_1$, что противоречит условиям (2), справедливым в A_1. Следовательно, A_1 не изоморфна A_2.

Найдем теперь все эндоморфизмы полугрупп A_1 и A_2. Выбрав в качестве представителей классов элементы x, y, z, x^2, z^2, yz, 0, будем считать полугруппы A_1 и A_2, состоящими из одних и тех же элементов, умножаемых соответственно в согласии с (2) и (3). Рассмотрим полугруппу $\mathfrak{S}$ всех преобразований этого семиэлементного множества в себя. Полугруппы $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ эндоморфизмов полугрупп A_1 и A_2 являются подполугруппами в $\mathfrak{S}$. Ввиду этого справедливость теоремы следует из следующего утверждения: эндоморфизмами полугруппы $A_i (i=1,2)$ являются следующие (и только эти) элементы из $\mathfrak{S}$:

1) тождественное отображение ε,

2) все 3 отображения вида

$$\begin{pmatrix} x & y & z & x^2 & z^2 & yz & 0 \\ t & t & t & t^2 & t^2 & t^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $t \in \{x, y, z\}$,

3) все 64 отображения вида:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & x^2 & z^2 & yz & 0 \\ p & q & r & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $p, q, r \in \{x^2, yz, z^2, 0\}$.

Рассматриваемые отображения являются эндоморфизмами как полугруппы A_1, так и полугруппы A_2. Покажем, что других эндоморфизмов ни A_1 ни A_2 не имеют.

2. Пусть $X = \{x, y, z\}$. Рассмотрим все отображения $\varphi \in \mathfrak{S}$, отличные от отображений вида 1)—3). Любой эндоморфизм φ как полугруппы A_1, так и полугруппы A_2, удовлетворяет условиям $0\varphi = 0$, $(x^2)\varphi = (x\varphi)^2$, $(z^2)\varphi = (z\varphi)^2$, $(yz)\varphi = y\varphi \cdot z\varphi$. Поэтому рассмотрим только те отображения $\varphi \in \mathfrak{S}$, для которых эти условия выполнены. Рассматриваемое множество отображений обозначим через $\mathfrak{S}'$. Покажем, что каждое $\varphi \in \mathfrak{S}'$ не принадлежит ни $\mathfrak{E}_1$ ни $\mathfrak{E}_2$. Для этого установим, что для каждого $\varphi \in \mathfrak{S}'$ нарушается обязательно какое-то из условий $(x\varphi)^2 = (y\varphi)^2 = x\varphi \cdot z\varphi$, $x\varphi \cdot y\varphi = (z\varphi)^2$, которым должны удовлетворять все $\varphi \in \mathfrak{E}_2$, и, по крайней мере, одно из условий $(x\varphi)^2 = (y\varphi)^2$, $x\varphi \cdot z\varphi = (z\varphi)^2 = x\varphi \cdot y\varphi$, верных для всех $\varphi \in \mathfrak{E}_1$. Для доказательства разобьем $\mathfrak{S}'$ на два непересекающихся множества $\mathfrak{T}_0 = \{\varphi | \varphi \in \mathfrak{S}', X\varphi \subset X\}$, $\mathfrak{T} = \{\varphi | \varphi \in \mathfrak{S}', X\varphi \cap A^2 \neq \varnothing\}$. Покажем, что $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{E}_i = \varnothing$, $i = 1, 2$.

Пусть $\varphi \in \mathfrak{T}$. Тогда либо $x\varphi \in X$, либо $x\varphi \in A_i^2$. В первом случае $y\varphi \in X$ (иначе $(x\varphi)^2 \neq (y\varphi)^2$, что невозможно) и поэтому $z\varphi \in A_i^2$ (ибо $\varphi \in \mathfrak{T}$). Но тогда

$$x\varphi \cdot y\varphi \neq (z\varphi)^2. \tag{6}$$

Во втором случае $y\varphi \in A_i^2$ и $z\varphi \in X$, что снова приводит к (6).

Покажем, что $\mathfrak{T}_0 \cap \mathfrak{E}_i = \varnothing$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{T}_0$. Положим $Y = \{x, y\}$. Для $\varphi \in \mathfrak{S}'$ имеются следующие исключающие друг друга возможности: 1) $x\varphi$, $y\varphi$, $z\varphi \in Y$; 2) $x\varphi$, $y\varphi \in Y$, $z\varphi = z$;

3) $y\varphi$, $z\varphi \in Y$, $x\varphi = z$; 4) $x\varphi$, $z\varphi \in Y$, $y\varphi = z$; 5) $x\varphi \in Y$, $z\varphi = y\varphi = z$; 6) $y\varphi \in Y$, $x\varphi = z\varphi = z$; 7) $z\varphi \in Y$, $x\varphi = y\varphi = z$.

В случаях 3)—6) имеем $\varphi \notin \mathfrak{E}_i$, ибо $(x\varphi)^2 \neq (y\varphi)^2$. Условия 7) приводят к (6), что невозможно. В случае 2), если $x\varphi \neq y\varphi$, то $x\varphi = y$, $y\varphi = x$, ибо $\varphi \neq \varepsilon$. Тогда $x\varphi \cdot z\varphi = yz$, а $(xz)\varphi$ есть $x^2\varphi = (x\varphi)^2 = y^2 \neq yz$ в A_2, и $(z^2)\varphi = z^2 \neq yz$ в A_1. Если же $x\varphi = y\varphi$, то мы приходим к (6). Итак, $\varphi \notin \mathfrak{E}_i$. Наконец, в случае 1) из $z\varphi = x\varphi$ следует $x\varphi \neq y\varphi$, и приходим к (6); если же $z\varphi \neq x\varphi$, то условие $z\varphi = y\varphi$ приводит к (6), а условие $z\varphi \neq y\varphi$ влечет равенство $x\varphi = y\varphi$ и приводит к $x\varphi \cdot z\varphi = xy = z^2$, хотя $(xz)\varphi = (x^2)\varphi = (x\varphi)^2 = x^2 \neq z^2$ в A_2 и $(xz)\varphi = (z^2)\varphi = x^2 \neq z^2$ в A_1. Следовательно, в этом последнем случае $\varphi \notin \mathfrak{E}_i$, т. е. $\mathfrak{T}_0 \cap \mathfrak{E}_i = \varnothing$. Итак, $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ представляют собой одну и ту же подполугруппу в $\mathfrak{S}$. Следовательно, $\mathfrak{E}_1 \cong \mathfrak{E}_2$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Существуют неизоморфные полугруппы, принадлежащие классу $\mathfrak{B}_4$, полукольца эндоморфизмов которых изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим полугруппы A'_1, $A'_2 \in \mathfrak{B}_4$ с образующими x, y, z, t. Пусть A'_1 определяется соотношениями

$$x^2 = y^2, \quad xy = xz = z^2 = t^3, \quad t^2 = yz, \quad tx = 0, \tag{7}$$

а A'_2 — соотношениями

$$x^2 = y^2 = xz, \quad xy = z^2 = t^3, \quad t^2 = yz, \quad tx = 0. \tag{8}$$

Из условий (7) и (8) следует, что эти полугруппы можно считать состоящими из следующих элементов:

$$A'_1 = \{x, y, z, t, x^2, t^2, zt, yt, t^3, 0\},$$
$$A'_2 = \{x, y, z, t, x^2, t^2, zt, yt, t^3, 0\}.$$

Покажем, что полугруппы A'_1 и A'_2 не изоморфны. Применим для их элементов такие же обозначения как в теореме 1. Заметим сначала, что подполугруппа, порожденная x_1, y_1, z_1 в A'_1, изоморфна подполугруппе A_1 из теоремы 1. Аналогично, x_2, y_2, z_2 порождают в A'_2 подполугруппу, изоморфную A_2. Предположим, что $A'_1 \cong A'_2$, и пусть f — некоторый изоморфизм этих полугрупп. Тогда неразложимые элементы отобразятся на неразложимые и $(A'_1 \setminus A'^2_1)f = A'_2 \setminus A'^2_2$. Далее заметим, что условие $t_1 f \neq t_2$ приводит к $t_1^3 f \in \{x_2^3, y_2^3, z_2^3\} = 0$. Откуда $t_1^3 f = 0$ и $t_1^3 = 0$. Но это противоречит (7). Следовательно, $t_1 f = t_2$ и полугруппа, порожденная x_1, y_1, z_1, должна отобразиться на полугруппу, порожденную x_2, y_2, z_2. Но это невозможно, так как по теореме 1 полугруппы A_1 и A_2 не изоморфны.

Также, как в теореме 1, будем считать полугруппы A'_1 и A'_2, состоящими из элементов x, y, z, t, x^2, t^2, zt, yt, t^3, 0, которые умножаются в A'_1 и A'_2 соответственно в согласии с (7) и (8). Рассмотрим полугруппу $\mathfrak{S}$ всех преобразований этого десятиэлементного множества в себя. Полугруппы эндоморфизмов $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ полугрупп A'_1 и A'_2 являются подполугруппами в $\mathfrak{S}$. Нетождественными эндоморфизмами полугруппы A'_i $(i = 1,2)$ являются, как мы покажем в п. 4, отображения такого и только такого вида

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t & x^2 & yt & zt & t^2 & t^3 & 0 \\ p & q & r & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где p, q, r, $s \in A'^2_i$. Поэтому мультипликатные полугруппы $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ полуколец $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ эндоморфизмов полугрупп A'_1 и A'_2 совпадают с одной и той же подполугруппой из $\mathfrak{S}$, а потому и подавно изоморфны. Это соответствие является также изоморфизмом аддитивных полугрупп $\mathfrak{R}_1^+$ и $\mathfrak{R}_2^+$ полуколец $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$. Действительно, сумма любых двух нетождественных эндоморфизмов равна нулевому эндоморфизму. Если же ε — тождественный автоморфизм, а φ имеет вид (9), то как в A'_1, так и в A'_2,

$$\varphi + \varepsilon = \begin{pmatrix} x & y & z & t & x^2 & \ldots & 0 \\ px & qy & rz & st & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $A'^3_i = \{yzt(=t^3),\, 0\}$, то $px = 0$, а элементы qy, rz, st отличны от нуля как в A'_1, так и в A'_2, только, если $q = zt$, $r = yt$, $s = yz(=t^2)$, соответственно. Следовательно, и в $\mathfrak{R}_1^+$ и в $\mathfrak{R}_2^+$, сумма $\varphi + \varepsilon$ принимает всегда одинаковые значения. Итак, полукольца $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ изоморфны.

3. Пусть $\mathfrak{E}_i$ — полугруппа всех эндоморфизмов полугруппы A'_i $(i = 1, 2)$. Рассмотрим все отображения $\varphi \in S$, отличные от отображений вида (9) и тождественного. Так как любой эндоморфизм $\varphi \in \mathfrak{E}_i$ удовлетворяет условиям $0\varphi = 0$, $(x^2)\varphi = (x\varphi)^2$, $(yt)\varphi = y\varphi \cdot t\varphi$, $(zt)\varphi = z\varphi \cdot t\varphi$, $(t^l\varphi) = (t\varphi)^l$, где $l = 2, 3$, то рассмотрим только те отображения $\varphi \in S$, для которых эти условия выполнены. Обозначим рассматриваемое подмножество отображений из $\mathfrak{S}$ через $\mathfrak{S}'$. Покажем, что каждое $\varphi \in \mathfrak{S}'$ не принадлежит ни $\mathfrak{E}_1$ ни $\mathfrak{E}_2$. Для этого установим, что в оставшемся множестве отображений $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ для каждого $\varphi \in \mathfrak{S}'$ обязательно нарушается какое-то из условий

$$\begin{gathered} (x\varphi)^2 = (y\varphi)^2, \quad x\varphi \cdot y\varphi = x\varphi \cdot z\varphi = (z\varphi)^2 = (t\varphi)^3, \\ (t\varphi)^2 = y\varphi \cdot z\varphi, \quad t\varphi \cdot x\varphi = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

которым должны удовлетворять $\varphi \in \mathfrak{E}_1$ и какое-то из условий:

$$\begin{gathered} (x\varphi)^2 = (y\varphi)^2 = x\varphi \cdot z\varphi, \quad x\varphi \cdot y\varphi = (z\varphi)^2 = (t\varphi)^3, \\ (t\varphi)^2 = y\varphi \cdot z\varphi, \quad t\varphi \cdot x\varphi = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

верных для каждого $\varphi \in \mathfrak{E}_2$.

Пусть $X = \{x, y, z, t\}$. Разобьем $\mathfrak{S}'$ на два класса $\mathfrak{T}_0 = \{\varphi \in \mathfrak{S}' | X\varphi \subset X\}$, $\mathfrak{T} = \{\varphi \in \mathfrak{S}' | X\varphi \cap A_i^2 \neq \varnothing\}$.

4. Покажем, что $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{E}_i = \varnothing$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{T}$. Предположим сначала, что $z\varphi \in X$. Тогда $z\varphi = z$, ибо иначе было бы $(z\varphi)^2 \in \{x^2, t^2\}$, а $(t\varphi)^3 \in \{t^3, 0\}$. Отсюда

$$(z\varphi)^2 \neq (t\varphi)^3, \tag{12}$$

что противоречит (10) и (11). Так как из $x\varphi \in X$ следует $y\varphi \in X$ (ибо иначе $(x\varphi)^2 \neq (y\varphi)^2$, вопреки (10) и (11)), то из $x\varphi$, $y\varphi$, $z\varphi \in X$ вытекает, что $t\varphi \in A_i^2$, ибо $\varphi \in \mathfrak{T}$. Но это невозможно, так как $(z\varphi)^2 = z^2$, а $(t\varphi)^3 = 0$, и мы приходим к (12). Поэтому $\varphi \notin \mathfrak{E}_i$. Если же $x\varphi \in A'^2_i$, то и $y\varphi \in A'^2_i$, ибо иначе было бы $(x\varphi)^2 \neq (y\varphi)^2$, вопреки условиям (10) и (11). Но условия $x\varphi$, $y\varphi \in A'^2_i$ и $z\varphi = z$ приводят к (6), ибо $0 \neq z^2$. Следовательно, при $z\varphi \in X$ всегда $\varphi \notin \mathfrak{E}_i$. Поэтому рассмотрим $z\varphi \in A'^2_i$. Если $x\varphi \in A'^2_i$, то и $y\varphi \in A'^2_i$. Тогда $t\varphi \in X$, ибо $\varphi \in \mathfrak{T}$. Но это невозможно, так как $(t\varphi)^2 \neq 0$, а $z\varphi \cdot y\varphi = 0$, что противоречит (10) и (11). Если же $x\varphi \in X$, то и $y\varphi \in X$, и тогда либо $\{x\varphi, y\varphi\} \subset X \backslash t$, либо $\{x\varphi, y\varphi\} \not\subset X \backslash t$. В первом случае мы приходим к (6), и поэтому $\varphi \notin \mathfrak{E}_i$. Во втором случае из $x\varphi = y\varphi = t$ следует $x\varphi \cdot y\varphi = t^2 \neq (z\varphi)^2 = 0$, вопреки (10) и (11), а если $x\varphi = t \neq y\varphi$ или $x\varphi \neq t = y\varphi$, то $(x\varphi)^2 \neq (y\varphi)^2$, что снова противоречит (10) и (11). Итак, как при $z\varphi \in X$, так и при $z\varphi \in A'^2_i$, будет $\varphi \notin \mathfrak{E}_i$. А потому во всех случаях $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{E}_i = \varnothing$.

5. Покажем, что $\mathfrak{T}_0 \cap \mathfrak{E}_i = \varnothing$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{T}_0$. Если $z\varphi \neq z$, то $(z\varphi)^2 \in \{x^2, t^2\}$, а $(t\varphi)^3 \in \{t^3, 0\}$, и мы приходим к (12), откуда $\varphi \notin \mathfrak{E}_i$. Пусть, далее, $z\varphi = z$. Если $t\varphi \neq t$, то $(z\varphi)^2 = z^2$, а $(t\varphi)^3 = 0$, и мы снова приходим к (12). Поэтому будем далее считать, что $t\varphi = t$. Имеются следующие возможности: либо $\{x\varphi, y\varphi\} \subset X \backslash t$, либо $\{x\varphi, y\varphi\} \not\subset X \backslash t$. В первом случае, если $y\varphi \neq y$, то $(t\varphi)^2 = t^2$, хотя $y\varphi \cdot z\varphi \in \{xz, z^2\} \notin t^2$, что противоречит (10) и (11), и потому $\varphi \notin \mathfrak{E}_i$. Если же $y\varphi = y$, то либо: α) $x\varphi = y$, либо β) $x\varphi = z$ ($x\varphi \neq x$, так как $y\varphi = y$, $z\varphi = z$, $t\varphi = t$, а $\varphi \neq \varepsilon$). В случае α) имеем $x\varphi \cdot y\varphi = y^2 \neq z^2 = (z\varphi)^2$, вопреки (10) и (11). В случае β) получим $x\varphi \cdot y\varphi = yz \neq z^2 = (z\varphi)^2$, и снова $\varphi \notin \mathfrak{E}_i$.

Во втором случае, когда $\{x\varphi, y\varphi\} \not\subset X \backslash t$, при $x\varphi = t \neq y\varphi$, или $x\varphi \neq t = y\varphi$, получим $(x\varphi)^2 \neq (y\varphi)^2$, вопреки (10) и (11). Если, наконец, $x\varphi = y\varphi = t$, то $x\varphi \cdot y\varphi = t^2 \neq z^2 = (z\varphi)^2$. Итак, во всех случаях $\mathfrak{T}_0 \cap \mathfrak{E}_i = \varnothing$, откуда $\mathfrak{S}' \cap \mathfrak{E}_i = \varnothing$. Теорема доказана.

§ 2. Абстрактная характеристика полуколец эндоморфизмов полугрупп класса $\mathfrak{B}'_k$

Всюду в этом параграфе, кроме п. 1, A — абелева полугруппа с аддитивной записью операции в ней.

1. Пусть $0 \in A \neq 0$, $A^k = 0$, $A^\circ = A \backslash A^2$, A — вообще говоря, не абелева.

Лемма 2.1. A° — *неприводимое порождающее множество полугруппы* A.

Доказательство. Во-первых, $A \supset A^2$. В противном случае $A = A^2 = A^3 = \ldots = A^k = 0$, вопреки $A \neq 0$. Имеет место следующее разложение

$$A = \left[\bigcup_{i=1}^{k-1} (A^i \backslash A^{i+1}) \right] \cup \{0\}$$

в сумму непересекающихся подмножеств. Пусть $0 \neq a \in A$, тогда $a \in A^i \backslash A^{i+1}$ для некоторого $i < k$. Поэтому $a = x_1 x_2 \ldots x_i$, где $x_1, x_2, \ldots, x_i \in A$. Если бы $\{x_1, x_2, \ldots, x_i\} \not\subset A^\circ$, то $\{x_1, x_2, \ldots, x_i\} \cap A^2 \neq \varnothing$. Тогда для некоторого $j \in \{1, 2, \ldots, i\}$ выполняется $x_j = y_1 y_2$, $y_1, y_2 \in A$. Ввиду этого $a = x_1 x_2 \ldots \ldots x_{j-1} y_1 y_2 x_{j+1} \ldots x_i \in A^{i+1}$, вопреки $a \in A^i \backslash A^{i+1}$. Полученное противоречие показывает, что $\{x_1, x_2, \ldots, x_i\} \subset A^\circ$, т. е. $a \in [A^\circ]$, а потому $A \subseteq [A^\circ]$. Однако, $[A^\circ]$ — подполугруппа в A. Следовательно, $A = [A^\circ]$.

Множество A° является неприводимой системой образующих, ибо всякий его элемент неразложим и не представим через остальные. Лемма доказана.

По лемме всякий элемент $a \in A$ мультипликативно записывается[1] в виде

$$a = \Pi x_i^{\alpha_i^a}, \tag{13}$$

или, если A — абелева полугруппа, то в аддитивной записи

$$a = \Sigma \alpha_i^a x_i, \tag{14}$$

где $x_i \in A^\circ$, причем α_i^a — целые неотрицательные числа и $\Sigma \alpha_i^a < k$ для всякого $a \neq 0$.

2. Так как для всякого эндоморфизма $\varphi \in \mathfrak{E}$ и для любого элемента $a \in A \in \mathfrak{B}'_k$ выполняется

$$a\varphi = (\Sigma \alpha_i^a x_i)\varphi = \Sigma \alpha_i^a (x_i \varphi), \tag{15}$$

то действие $\varphi \in \mathfrak{E}$ на всей полугруппе A вполне определяется его действием на элементы из A°. В дальнейшем мы отождествляем те эндоморфизмы φ и ψ, у которых ограничения на A° совпадают.

Лемма 2.2. *Для всякого ненулевого идемпотентного эндоморфизма $\varphi \in \mathfrak{E}$ существует неподвижная точки $t \in A^\circ$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что для всех $x \in A^\circ$ имеет место $x\varphi \neq x$. Если при некотором $x \in A^\circ$, $x\varphi = y \in A^\circ$, то $x\varphi^2 = y\varphi \neq y = x\varphi$, т. е. $\varphi^2 \neq \varphi$, чего не должно быть. Если же при всяком $x \in A : x\varphi \in 2A$, то выбрав $x \in A^\circ$, для которого $x\varphi \neq 0$, получим, ввиду $\varphi^2 = \varphi$, что $0 \neq x\varphi = x\varphi^2 = \ldots = x\varphi^k = 0$. Полученные противоречия доказывают лемму.

3. Пусть $a \in A \in \mathfrak{B}'_k$ и имеет место разложение (14). Сопоставим $a \neq 0$ его длину $l(a) = \Sigma \alpha_i^a$. Так как длины левой и правой частей любого определяющего соотношения $u = v \neq 0$ в A равны, то $\Sigma \alpha_i^a$ принимает одно и то же значение для всех

[1] Здесь и в дальнейшем принято обозначение

$$\Pi x_i^{\alpha_i} = \prod_{i \in \Lambda} x_i^{\alpha_i},$$

где Λ — некоторое индексное множество, равномощное системе образующих той полугруппы, в которой рассматривается элемент $\Pi x_i^{\alpha_i}$.

Притом, когда i пробегает множество Λ, то x_i полностью пробегает множество образующих рассматриваемой полугруппы.

разложений a в виде (14). Поэтому если $a_1, a_2 \in A$ и $a_1 + a_2 \neq 0$, то $l(a_1 + a_2) = l(a_1) + l(a_2)$.

Пусть $a = 0$. Покажем, что длина всякого нулевого разложения в виде (14) не меньше k. Предположим противное, и пусть для некоторого разложения нуля $\Sigma \alpha_i^0 < k$. Так как $A \in \mathfrak{B}'_k$, то $kA = 0$. Следовательно, существует разложение $0 = \Sigma \beta_i^0 x_i$ такое, что $\Sigma \beta_i^0 = k$. Тогда $w_1 = \Sigma \alpha_i^0 x_i = 0 = \Sigma \beta_i^0 x_i = w_2$ является соотношением в A. Оно, однако, не может быть выведено из тождеств $x_1 x_2 \ldots x_k = y_1 y_2 \ldots y_k$, $xy = yx$, справедливых в $\mathfrak{B}'_k$ (ввиду $\Sigma \alpha_i^0 < k$). Следовательно, условие $w_1 = w_2$, либо задается в A независимо от этих тождеств, либо оно есть следствие других соотношений, определенных в A. Оба случая, однако, противоречат условию $A \in \mathfrak{B}'_k$. Первый — потому, что $w_1 = w_2$ не есть определяющее соотношение требуемого типа, ибо $l(w_1) = \Sigma \alpha_i^0 < \Sigma \beta_i^0 = l(w_2)$. Второй — ввиду того, что следствиями из определяющих соотношений, у которых длины левой и правой частей равны, будут соотношения такого же типа. Поэтому соотношение $w_1 = w_2$ не может выполняться в $A \in \mathfrak{B}'_k$. Следовательно, $\Sigma \alpha_i^0 \geqslant k$. Отсюда, в частности, вытекает, что $(k-1)A \neq 0$, а также то, что $a \neq 0$, если $l(a) < k$.

Через φ_a обозначим отображение $A \to A$, для которого при всяком $b \in A$ будет $b\varphi_a = [l(b)]a$. Так как $l(b)$ при $b \neq 0$ корректно определена, то φ_a — однозначное отображение. Отсюда если $a_1 + a_2 \neq 0$, то $(a_1 + a_2)\varphi_a = [l(a_1 + a_2)]a = [l(a_1)]a + [l(a_2)]a = a_1\varphi_a + a_2\varphi_a$. Если $a_1 + a_2 = 0$, то $l(a_1 + a_2) \geqslant k$, что влечет $[l(a_1) + l(a_2)] \geqslant k$ (ибо если $[l(a_1) + l(a_2)] < k$, то $l(a_1) + l(a_2) = l(a_1 + a_2) < k$, вопреки $l(a_1 + a_2) \geqslant k$). Отсюда $(a_1 + a_2)\varphi_a = [l(a_1 + a_2)]a = 0 = [l(a_1) + l(a_2)]a = [l(a_1)a + [l(a_2)]a = a_1\varphi_a + a_2\varphi_a$. Итак, во всех случаях $(a_1 + a_2)\varphi_a = a_1\varphi_a + a_2\varphi_a$. Следовательно, $\varphi_a \in \mathfrak{E}_A$.

Положим $\mathfrak{U}_A = \{\varphi_a | a \in A\}$.

Лемма 2.3. *Множество $\mathfrak{U}_A$ является подполукольцом полукольца $\mathfrak{R}_A$, причем полугруппы $\mathfrak{U}_A{}^+$ и A изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\varphi_a \in \mathfrak{U}_A$. Если $x \in A^\circ$, то $x\varphi_a = (\Sigma \alpha_i^x) a = 1 \cdot a = a$. Если $\varphi_a, \varphi_b \in \mathfrak{U}_A$, то ввиду (1) при $c \in A$,

$$c(\varphi_a + \varphi_b) = c\varphi_a + c\varphi_b = (\Sigma \alpha_i^c) a + (\Sigma \alpha_i^c) b = (\Sigma \alpha_i^c)(a + b) = c\varphi_{a+b},$$

т. е. $\varphi_a + \varphi_b = \varphi_{a+b} \in \mathfrak{U}_A$. Кроме того,

$$c\varphi_a\varphi_b = [(\Sigma \alpha_i^c) a]\varphi_b = (\Sigma \alpha_i^c)(\Sigma \alpha_i^a) b = c\varphi_{mb},$$

где $m = \Sigma \alpha_i^a$, т. е. $\varphi_a\varphi_b = \varphi_{mb} \in \mathfrak{U}_A$. Итак, $\mathfrak{U}_A$ — подполукольцо в $\mathfrak{R}_A$. Одновременно показано, что отображение $\mu : a \to \varphi_a$ является гомоморфизмом A на $\mathfrak{U}_A{}^+$. Но из $a, b \in A$ и $a \neq b$ следует, что $\varphi_a \neq \varphi_b$, ибо при $x \in A^\circ$: $x\varphi_a = a \neq b = x\varphi_b$. Следовательно, μ является изоморфизмом полугрупп A и $\mathfrak{U}_A{}^+$.

Лемма доказана.

Определение 1. *Пусть S — полугруппа с нулем;* $0 \neq \varphi =$

$= \varphi^2 \in S$; $S_\varphi = \{\psi | 0 \neq \psi = \psi^2 \in S,\ \psi\varphi = \psi\}$. *Комплекс* S_φ *назовем одномерным, если для всех* $\psi \in S_\varphi$ *имеет место* $S_\psi = S_\varphi$.

Лемма 2.4. *Всякий одномерный комплекс* S_φ *является подполугруппой в* S.

Доказательство. Так как $S_\varphi \subset S$, то умножение в S_φ ассоциативно. Остается показать, что S_φ замкнуто относительно умножения в S. Пусть $\psi,\ \gamma \in S_\varphi$. Так как $S_\varphi = S_\gamma = S_\psi$, то $\psi\gamma = \psi \in S_\varphi$ также, как и $\gamma\psi = \gamma \in S_\varphi$. Следовательно, лемма доказана.

Положим $S = \mathfrak{E}_A = \mathfrak{E}$. Элементы множества A° будем называть *точками*.

Лемма 2.5. *Для любого* $z \in A^\circ$ *комплекс* $\mathfrak{E}_{\varphi_z}$ *является одномерным. Разным* φ_z, φ_t *из* $\mathfrak{U}_A$ *отвечают непересекающиеся одномерные подполугруппы* $\mathfrak{E}_{\varphi_z}$ и $\mathfrak{E}_{\varphi_t}$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathfrak{E}_{\varphi_z}$. Ввиду леммы 2.2 найдется точка $t \in A^\circ$, неподвижная для ψ. Если $t \neq z$, то $t\psi\varphi_z = t\varphi_z = z \neq t = t\psi$, т. е. $\psi\varphi_z \neq \psi$, хотя $\psi \in \mathfrak{E}_{\varphi_z}$. Следовательно, $t = z = z\psi$. Так как для всех $x \in A^\circ : x\varphi_z\psi = z\psi = z = x\varphi_z$, то $\varphi_z\psi = \varphi_z$. Если $\eta \in \mathfrak{E}_\varphi$, то $\eta = \eta\varphi_z = \eta(\varphi_z\psi) = (\eta\varphi_z)\psi = \eta\psi$, т. е. $\mathfrak{E}_{\varphi_z} \subseteq \mathfrak{E}_\psi$. Если $\lambda \in \mathfrak{E}_\psi$, то $\lambda = \lambda\psi = \lambda(\psi\varphi_z) = (\lambda\psi)\varphi_z = \lambda\varphi_z$, т. е. $\mathfrak{E}_\psi \subseteq \mathfrak{E}_{\varphi_z}$. Следовательно, $\mathfrak{E}_\psi = \mathfrak{E}_{\varphi_z}$, т. е. $\mathfrak{E}_{\varphi_z}$ — одномерная подполугруппа.

Пусть $\varphi_z \neq \varphi_t$. Тогда из $\mathfrak{E}_{\varphi_z} \cap \mathfrak{E}_{\varphi_t} \neq \varnothing$ следовало бы, что $\mathfrak{E}_{\varphi_z} = \mathfrak{E}_{\varphi_t}$. Но это невозможно, ибо при $x \in A^\circ : x\varphi_z\varphi_t = z\varphi_t = t = x\varphi_t$, т. е. $\varphi_z\varphi_t = \varphi_t$, а ввиду $\varphi_z \in \mathfrak{E}_{\varphi_t}$ должно быть $\varphi_z\varphi_t = \varphi_z$. Полученное противоречие показывает, что для всех $z, t \in A^\circ$, $z \neq t$, $\mathfrak{E}_{\varphi_z} \cap \mathfrak{E}_{\varphi_t} = \varnothing$. Лемма доказана.

5. **Лемма 2.6.** *Каждая одномерная подполугруппа* $\mathfrak{E}_\varphi \subset \mathfrak{E}$ *является подполугруппой вида* $\mathfrak{E}_{\varphi_z}$ *при некотором* $z \in A^\circ$.

Доказательство. Если $\psi \in \mathfrak{E}_\varphi$ имеет две различные неподвижные точки, скажем, z и $t \in A^\circ$, то $\varphi_t\psi = \varphi_t$, $\varphi_z\psi = \varphi_z$, т. е. $\varphi_z, \varphi_t \in \mathfrak{E}_\psi = \mathfrak{E}_\varphi$. Но тогда $\mathfrak{E}_{\varphi_z} = \mathfrak{E}_{\varphi_t}$ при $z \neq t$, что невозможно. Следовательно, элементы подполугруппы $\mathfrak{E}_\varphi$ оставляют неподвижной лишь одну точку. Покажем, что все они имеют одну и ту же неподвижную точку. Предположим противное. Пусть $z\psi = z \neq t = t\gamma$ для $t, z \in A^\circ$ и $\psi, \gamma \in \mathfrak{E}_\varphi$. Тогда $\mathfrak{E}_\psi = \mathfrak{E}_\varphi = \mathfrak{E}_\gamma$ влечет $\psi\gamma = \psi$, ибо $\psi \in \mathfrak{E}_\gamma$. Но $z\psi\gamma = z\gamma \neq z = z\psi$, ибо лишь для точки t имеем $t\gamma = t$. Итак, z — единственная неподвижная точка для всех $\psi \in \mathfrak{E}_\varphi$. Соответствующий ей эндоморфизм φ_z является левым нулем всякого $\psi \in \mathfrak{E}_\varphi$ и, в частности, $\varphi_z\varphi = \varphi_z$, т. е. $\varphi_z \in \mathfrak{E}_\varphi$. Но тогда $\mathfrak{E}_\varphi = \mathfrak{E}_{\varphi_z}$.

6. Пусть S — полугруппа, содержащая одномерные подполугруппы. *Множество* $\mathfrak{L}$, *содержащее по одному представителю от*

каждой одномерной подполугруппы, называется $\mathfrak{L}$-множеством в S.

Положим, как и ранее, $S = \mathfrak{E}_A = \mathfrak{E}$.

Лемма 2.7. *Единственным $\mathfrak{L}$-множеством в $\mathfrak{E}$, являющимся правосингулярной подполугруппой, является $\{\varphi_x \in \mathfrak{U}_A | x \in A^\circ\} = \mathfrak{L}_A$.*

Доказательство. Множество $\mathfrak{L}_A$ является правосингулярной подполугруппой в $\mathfrak{E}$. Если $\mathfrak{L}'$ — другое $\mathfrak{L}$-множество в $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{L}_A$, то для некоторого $z \in A^\circ : \mathfrak{L}' \cap \mathfrak{E}_{\varphi_z} = \varphi \neq \varphi_z$. Для того же φ имеем $A\varphi = A\varphi\varphi_z \subseteq A\varphi_z = [z]$. Поэтому для некоторого $x \in A^\circ$ найдется такое $i \geqslant 2$, что $x\varphi = iz$. Выбрав для этого x соответствующую одномерную подполугруппу $\mathfrak{E}_{\varphi_x}$, получим для $\psi \in \mathfrak{E}_{\varphi_x} : z\psi = jx$ при $j \geqslant 1$. Но тогда $x\varphi\psi = iz\psi = i \cdot jx$, где $i \cdot j \geqslant 2$. С другой стороны, $x\psi = x$, так как x — неподвижная точка для всех $\psi \in \mathfrak{E}_{\varphi_x}$ Следовательно, $\varphi\psi \neq \psi$ при всяком $\psi \in \mathfrak{E}_{\varphi_x}$. Так как $\mathfrak{L}' \cap \mathfrak{E}_{\varphi_x} \neq \varnothing$, то $\mathfrak{L}$-множество $\mathfrak{L}'(\neq \mathfrak{L}_A)$ не является правосингулярной подполугруппой.

Лемма доказана.

7. **Лемма 2.8.** *Имеет место $\mathfrak{U}_A = \mathfrak{L}_A \cdot \mathfrak{E}$.*

Доказательство. Если $\varphi_a \in \mathfrak{U}_A$, $\varphi_x \in \mathfrak{L}_A$, то $\varphi_x\varphi_a = \varphi_a$. Таким образом, $\mathfrak{U}_A \subset \mathfrak{L}_A \cdot \mathfrak{E}$. Если же $\varphi_x \in \mathfrak{L}_A$, $\gamma \in \mathfrak{E}$, то $\varphi_x\gamma = \varphi_{x\gamma}$, т. е. $\mathfrak{L}_A\mathfrak{E} \subset \mathfrak{U}_A$ и $\mathfrak{L}_A\mathfrak{E} = \mathfrak{L}_A$. Лемма доказана.

Лемма 2.9. *Подполугруппа $\mathfrak{U}^\times{}_A$ плотно вложена в полугруппу $\mathfrak{E}_A = \mathfrak{R}^\times{}_A$ в классе мультипликативных полугрупп надполуколец полукольца $\mathfrak{R}_A$, содержащих $\mathfrak{U}^\times{}_A$ правым идеалом.*

Доказательство. Проверим первое и второе условия плотного вложения (определение плотно вложенной подполугруппы см. [1], стр. 393).

1) Пусть σ — собственный гомоморфизм полугруппы $\mathfrak{E}_A$. Тогда для некоторых γ, $\psi \in \mathfrak{E}_A$, $\gamma \neq \psi$, имеем $\gamma\sigma = \psi\sigma$. Так как $\gamma \neq \psi$, то найдется $x \in A^\circ$ такой, что $x\gamma \neq x\psi$, или $x\varphi_x\gamma \neq x\varphi_x\psi$, т. е. $\varphi_x\gamma \neq \varphi_x\psi$. Тогда $(\varphi_x\gamma)\sigma = \varphi_x\sigma \cdot \gamma\sigma = \varphi_x\sigma \cdot \psi\sigma = (\varphi_x\psi)\sigma$. Так как $\varphi_x\gamma = \varphi_{x\gamma}$, $\varphi_x\psi = \varphi_{x\psi} \in \mathfrak{U}^\times{}_A$, то σ — собственный гомоморфизм на $\mathfrak{U}^\times{}_A$, и первое условие выполнено.

2) Пусть $\mathfrak{R}'$ — надполукольцо, как $\mathfrak{R}_A$, так и $\mathfrak{U}_A$, причем $\mathfrak{U}^\times{}_A$ — правый идеал в $(\mathfrak{R}')^\times$. Определим при помощи $r' \in \mathfrak{R}'$ отображение r полугруппы A в себя, полагая для $x \in A^\circ : xr = x(\varphi_x r')$. На оставшемся множестве A^2 отображение r продолжим гомоморфным образом. Покажем, что r корректно определено. Действительно, если $\Sigma\alpha_i x_i = \Sigma\beta_i x_i$ — некоторое соотношение в A, то в $\mathfrak{R}_A$ и $\mathfrak{R}'$, следовательно, выполняется $\Sigma\alpha_i\varphi_{x_i} = \Sigma\beta_i\varphi_{x_i}$. А тогда, ввиду дистрибутивности в полукольце $\mathfrak{R}'$ и условия (1) имеем:

$$(\Sigma \alpha_i x_i) r = \Sigma \alpha_i (x_i r) = \Sigma \alpha_i x_i (\varphi_{x_i} r') = \Sigma \alpha_i x (\varphi_{x_i} r') =$$
$$= x[\Sigma \alpha_i (\varphi_{x_i} r')] = x[(\Sigma \alpha_i \varphi_{x_i}) r'] = x[(\Sigma \beta_i \varphi_{x_i}) r'] =$$
$$= x[\Sigma \beta_i (\varphi_{x_i} r')] = \Sigma \beta_i [x(\varphi_{x_i} r')] = \Sigma \beta_i [x_i (\varphi_{x_i} r')] =$$
$$= \Sigma \beta_i (x_i r) = (\Sigma \beta_i x_i) r,$$

т. е. $r \in \mathfrak{R}_A$. Покажем, что $\theta : r' \to r$ является гомоморфным отображением $\mathfrak{R}'$ в $\mathfrak{R}_A$, тождественном на $\mathfrak{R}_A$. Действительно, из определения r следует, что $\varphi_x r = \varphi_x r'$ для всех $\varphi_x \in \mathfrak{L}_A$, а тогда для r', $s' \in \mathfrak{R}'$ получим

$$\varphi_x[(r's')\theta] = \varphi_x(r's') = (\varphi_x r')s' = (\varphi_x r)s' = \varphi_{xr} s' =$$
$$= (\Sigma \alpha_i^{xr} \varphi_{x_i}) s' = \Sigma \alpha_i^{xr} (\varphi_{x_i} s') = \Sigma \alpha_i^{xr} (\varphi_{x_i} s) = (\Sigma \alpha_i^{xr} \varphi_{x_i}) s =$$
$$= \varphi_{xr} s = \varphi_x r s = \varphi_x (r'\theta) \cdot (s'\theta).$$

Следовательно, $(r's')\theta = r'\theta \cdot s'\theta$. Если теперь $r' \in \mathfrak{R}_A \subset \mathfrak{R}'$, то из $\varphi_x r' = \varphi_x r$ для всех $\varphi_x \in \mathfrak{L}$ следует $\varphi_{xr'} = \varphi_{xr}$ (ибо $r' \in \mathfrak{R}_A$!), т. е. $xr' = xr$ для всех $x \in A^\circ$. Следовательно, $r' = r = r'\theta$. В то же время для $v' \in \mathfrak{R}' \setminus \mathfrak{R}_A$ найдется, как было показано, $v \in \mathfrak{R}_A$ такое, что $v'\theta = v = v\theta$ при $v \neq v'$. Таким образом, второе условие также проверено, и лемма доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы для некоторого полукольца $\mathfrak{K}$ нашлась полугруппа $A \in \mathfrak{B}'_k$, для которых $\mathfrak{R}_A \cong \mathfrak{K}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *полугруппа $\mathfrak{K}^\times$ содержит единственную правосингулярную подполугруппу $\mathfrak{L}$, являющуюся $\mathfrak{L}$-множеством в $\mathfrak{K}^\times$.*

2) *Множество $\mathfrak{U} = \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{K}$ является подполукольцом в $\mathfrak{K}$.*

3) $\mathfrak{U}^+ \in \mathfrak{B}'_k$,

4) $\mathfrak{U}^\circ = \mathfrak{U}^+ \setminus 2\mathfrak{U}^+ \subseteq \mathfrak{L}$.

5) *Правый идеал $\mathfrak{U}^\times$ плотно вложен в полугруппу $\mathfrak{K}^\times$ в классе мультипликативных полугрупп надполуколец полукольца $\mathfrak{K}$, содержащих $\mathfrak{U}^\times$ в качестве правого идеала.*

Доказательство. Необходимость. Выше доказано, что полукольцо $\mathfrak{R}_A$ эндоморфизмов полугруппы $A \in \mathfrak{B}'_k$ удовлетворяет условиям теоремы. Следовательно, всякое полукольцо $\mathfrak{K}'$, изоморфное $\mathfrak{R}_A$, также удовлетворяет этим условиям.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{K}$ — полукольцо, удовлетворяющее условиям 1)—5). Во-первых, покажем, что тогда $\mathfrak{U}^\circ \supset \mathfrak{L}$, т. е. ввиду условия 4) имеем $\mathfrak{U}^\circ = \mathfrak{L}$. Так как $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{U}$, то $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{U}^+$. Предположим противное, т. е. что $\mathfrak{U}^\circ \not\supset \mathfrak{L}$. Тогда найдется $\psi \in \mathfrak{L}$ такое, что $\psi \in 2\mathfrak{U}^+$, т. е. $\psi = \lambda + \mu$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathfrak{U}^+$. Поскольку $\psi = \psi^2$ для всех $\psi \in \mathfrak{L}$, получим $\psi = \psi^2 = \psi(\lambda + \mu) = \psi\lambda + \psi\mu = \psi^2\lambda + \psi^2\mu = \psi(\lambda + \mu)\lambda + \psi(\lambda + \mu)\mu = \psi\lambda^2 + \psi\mu\lambda + \psi\lambda\mu + \psi\mu^2$. Продолжая это разложение достаточное число раз, получим, ввиду нильпотентности $\mathfrak{U}^+$ (см. условие 3)), что $\psi = 0$. Но любая одномерная подполугруппа состоит из ненулевых идемпотентов (см. определение 1 и лемму 2.4). Поэтому $\psi \notin \mathfrak{L}$. Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{U}^\circ$, т. е. $\mathfrak{L} = \mathfrak{U}^\circ$.

Пусть $\varkappa$— правый сдвиг полугруппы $\mathfrak{U}$, осуществляемый некоторым элементом $k \in \mathfrak{K}^\times$, т. е. $u\varkappa = uk$ для всех $u \in \mathfrak{U}$. Так как для $u, v \in \mathfrak{U}$ по условию 2) должно быть $u + v \in \mathfrak{U}$, то $(u + v)\varkappa = (u + v)k = uk + vk = u\varkappa + v\varkappa$, т. е. $\varkappa \in \mathfrak{E}_{U^+}$. Отсюда $\pi : k \to \varkappa$ является гомоморфным отображением $\mathfrak{R}^\times$ на $\mathfrak{E}_{U^+}$. Покажем, что π является биективным отображением. Установим сначала, что полугруппа $\mathfrak{U}$ слабо редуктивна справа, т. е. не имеет элементов, равнодействующих справа на $\mathfrak{U}$. Действительно, если $u, v \in \mathfrak{U}$ и для всякого $r \in \mathfrak{U}$ справедливо $ru = rv$, то, в частности, для любого $l \in \mathfrak{L}$ имеем $lu = lv$. Так как $u \in \mathfrak{U} = \mathfrak{L}\mathfrak{K}$, то $u = l'k$ для некоторых $l' \in \mathfrak{L}$ и $k \in \mathfrak{K}$. Поэтому, ввиду условия 1), получим $lu = l(l'k) = (ll')k = l'k = u$. Аналогично $lv = v$. Следовательно, $u = v$, и полугруппа $\mathfrak{U}$ слабо редуктивна справа. Как следует из результатов Е. С. Ляпина ([2], стр. 8), полугруппа $\mathfrak{K}^\times$ в этом случае, ввиду условия 5), не имеет элементов, равнодействующих справа на $\mathfrak{U}^\times$. Покажем, что отсюда следует взаимная однозначность отображения π. Пусть $k, m \in \mathfrak{U}$ и $k \neq m$, но $\varkappa = k\pi = m\pi = \mu$. Тогда для всех $u \in \mathfrak{U}$ имеем $uk = u\varkappa = u\mu = um$, т. е. k и m равнодействующие на $\mathfrak{U}$. Но это невозможно при $k \neq m$. Следовательно, $\varkappa = k\pi \neq m\pi = \mu$. Таким образом, $\mathfrak{K}^\times$ изоморфна $\mathfrak{K}^\times\pi \subseteq \mathfrak{E}_{U^+}$.

Установим, что $\mathfrak{K}^\times\pi = \mathfrak{E}_{U^+}$. Для этого покажем, что π отображает (изоморфно) $\mathfrak{U}$ на $\mathfrak{U}_{U^+}$. Отсюда ввиду плотной вложенности $\mathfrak{U}^\times$ в $\mathfrak{K}^\times$ и леммы 2.9 (если принять там $A = \mathfrak{U}^+$) получим непосредственно из определения плотного вложения ([1], стр. 393), что $\mathfrak{K}^\times\pi = \mathfrak{E}_{U^+}$. Итак, пусть $u \in \mathfrak{U}$. Тогда, ввиду $lu = u$ для всех $l \in \mathfrak{L}$, получим $l(u\pi) = lu = u$, т. е. $u\pi = \varphi_u$ в обозначениях п. 3. Поскольку π — биекция, то

$$\mathfrak{U}_{U^+} = \{\varphi_u \in \mathfrak{E}_{U^+} \mid u \in \mathfrak{U}^+\} = \{u\pi \mid u \in \mathfrak{U}^+\} = \mathfrak{U}\pi. \qquad (16)$$

Для завершения доказательства теоремы 3 покажем, что π является гомоморфизмом и аддитивных полугрупп $\mathfrak{K}^+$ и $\mathfrak{R}^+{}_A$. Пусть $k, m \in \mathfrak{K}$, $u \in \mathfrak{U}$. Ввиду (1) и дистрибутивности в полукольце имеем $u(k\pi + m\pi) = u(k\pi) + u(m\pi) = uk + um = u(k + m) = u[(k + m)\pi]$, т. е. $(k + m)\pi = k\pi + m\pi$. Следовательно, π является изоморфизмом полуколец $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{R}_U$. Ввиду условия 3) теорема доказана.

§ 3. Основной результат

Теорема 4. *Полугруппы A и B, $A \in \mathfrak{B}'_k$, $B \in \mathfrak{B}$, изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их полукольца эндоморфизмов.*

Всюду далее мы будем предполагать, что

$$A \in \mathfrak{B}'_k, \qquad B \in \mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{R}_B \cong \mathfrak{R}_A, \qquad (17)$$

и, следовательно, $\mathfrak{R}_B$ удовлетворяет условиям 1)—5) теоремы 3. Докажем, что тогда

$$\mathfrak{R}_B \cong \mathfrak{R}_A \Rightarrow B \cong A. \qquad (18)$$

Так как обратное справедливо всегда, то из (18) следует утверждение теоремы 4. Доказательство импликации (18) мы проведем в несколько приемов с помощью лемм 3.1—3.9.

В начале покажем, что если $B \in \mathfrak{B}'_m$, то $B \cong A$. В лемме 2 установим, что если B есть не обязательно абелева m-нильпотентная полугруппа из $\mathfrak{B}$, в которой левая и правая части любого определяющего соотношения $u = v \neq 0$ имеют одинаковую длину, то $B \cong A$. Если теперь B — произвольная полугруппа в классе $\mathfrak{B}$, то определив на ней некоторую эквивалентность ϱ (определение см. ниже), покажем, что множество $B^\circ = B \setminus B^2$ является ϱ-классом. Отсюда, как доказывается в леммах 7 и 8, будет следовать, что полугруппа B удовлетворяет условиям леммы 2, и, следовательно, $B \cong A$. Этим доказательство теоремы 4 сведено к доказательству названных лемм, к чему мы сейчас и переходим.

Лемма 3.1. *Если $B \in \mathfrak{B}'_m$, то имеет место* (18).

Доказательство. Пусть σ — изоморфизм полуколец $\mathfrak{R}_A$ и $\mathfrak{R}_B$. Ввиду условия[2] 1) в полукольцах $\mathfrak{R}_A$ и $\mathfrak{R}_B$ существуют единственные $\mathfrak{L}$-множества $\mathfrak{L}_A$ и $\mathfrak{L}_B$, являющиеся правосингулярными полугруппами. Следовательно, $\mathfrak{L}_A\sigma = \mathfrak{L}_B$. Ввиду этого подполукольца $\mathfrak{U}_A = \mathfrak{L}_A\mathfrak{R}_A$ и $\mathfrak{U}_B = \mathfrak{L}_B\mathfrak{R}_B$ также изоморфны (ибо $\mathfrak{U}_B = \mathfrak{L}_B\mathfrak{R}_B = \mathfrak{L}_A\sigma \cdot \mathfrak{R}_A\sigma = (\mathfrak{L}_A\mathfrak{R}_A)\sigma = \mathfrak{U}_A\sigma$). Так как по условию леммы $A \in \mathfrak{B}'_k$, $B \in \mathfrak{B}'_m$, то лемма 2.3 применима и $A \cong \mathfrak{U}_A{}^+ \cong \cong \mathfrak{U}_B{}^+ \cong B$.

Лемма 3.2. *Если, вообще говоря, не абелева полугруппа $B \in \mathfrak{B}$ удовлетворяет тождеству $x_1x_2 \ldots x_m = y_1y_2 \ldots y_m$ (при некотором $m > 1$) и в ней всякое определяющее соотношение $b_1 = b_2$, не являющееся следствием из этого и только этого тождества, удовлетворяет условию*[3] *$l(b_1) = l(b_2)$, то имеет место* (18).

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Рассмотрим отображение $\lambda_x : b \to x^{l(b)}$, $x \in B^\circ$. Оно однозначно, ибо для всякого соотношения $b_1 = b_2 \neq 0$ выполняется $b_1\lambda_x = x^{l(b_1)} = x^{l(b_2)} = b_2\lambda_x$ (ввиду условия леммы $l(b_1) = l(b_2)$); является гомоморфизмом, ибо для всяких $b_1, b_2 \in B$ будет $(b_1 \cdot b_2)\lambda_x = x^{l(b_1b_2)} = x^{l(b_1)+l(b_2)} = b_1\lambda_x \cdot b_2\lambda_x$. Следовательно, при всяком $x \in B^\circ$ отображение λ_x будет эндоморфизмом полугруппы B.

Так как A — абелева полугруппа, то сложение в полукольце $\mathfrak{R}_A$, а, следовательно, и в $\mathfrak{R}_B \cong \mathfrak{R}_A$ — коммутативно. Если теперь $x, y, z \in B^\circ$, то, ввиду $B \in \mathfrak{B}$, сумма двух эндоморфизмов есть эндоморфизм и $xy = z\lambda_x \cdot z\lambda_y = z(\lambda_x + \lambda_y) = z(\lambda_y + \lambda_x) = yx$. То есть умножение элементов из B° а, следовательно, и элементов из B — коммутативно. Поэтому $B \in \mathfrak{B}'_m$ ввиду леммы 3.1 получим $B \cong A$. Лемма доказана.

---

[2] В тексте выражение типа «ввиду условия 1» означает «ввиду условия 1 теоремы 3».

[3] Символ $l(b)$ означает $\Sigma \alpha_i{}^{(b)}$ в разложении элемента b в виде (13).

Далее пусть B — некоторая полугруппа из класса $\mathfrak{B}$, и условия (17) выполнены.

Лемма 3.3. *Полугруппа B есть нильполугруппа.*

Доказательство. Так как $A \in \mathfrak{B}'_k$, то $ka = 0$ для всех $a \in A$. При этом (см. § 2, п. 3) из условия $(k-1)A \neq 0$ следует существование такого $x \in A^\circ$, что $mx \neq 0$ для всех $m < k$. Отсюда и ввиду условия (1), определяющего сумму эндоморфизмов, получим для всякого $a \in A$ и тождественного автоморфизма $\varepsilon_A \in \mathfrak{R}_A$, что $a(k\varepsilon_A) = k(a\varepsilon_A) = ka = 0$, т. е. $k\varepsilon_A = 0$ и $m\varepsilon_A \neq 0$ при $m < k$. Так как при изоморфизме полуколец $\mathfrak{R}_A$ и $\mathfrak{R}_B$ их мультипликативные единицы ε_A и ε_B соответствуют друг другу, то $k\varepsilon_B = 0$ в $\mathfrak{R}_B$ и $0 \neq m\varepsilon_B$ при $m < k$. Тогда для всякого $b \in B$ получим $0 = b0 = b(k\varepsilon_B) = (b\varepsilon_B)^k = b^k$. Следовательно, B есть нильполугруппа с ограниченным показателем нильпотентности для всех ее элементов. Лемма доказана.

Пусть m_x — показатель нильпотентности элемента x. Установим один результат вспомогательного характера.

Лемма 3.4. *Существует $x \in B^\circ$, для которого $m_x = k$.*

Доказательство. Предположим противное и пусть $m_x \leqslant k-1$ для всех $x \in B^\circ$. Множество B° является в B системой образующих (см. введение), и потому всякий элемент $b \in B$ имеет вид

$$b = \Pi\, x_i^{\alpha_i}, \tag{19}$$

где $x_i \in B^\circ$, α_i — целые неотрицательные числа, причем x^{α_i} — пустой символ при $\alpha_i = 0$. Пусть $0 \neq b \in B$ имеет вид (19), тогда

$$b[(k-1)\varepsilon_B] = \Pi\, x_i^{\alpha_i}[(k-1)\varepsilon_B] = \Pi\,(x_i^{\alpha_i}\varepsilon_B)^{k-1} = \Pi\, x_i^{\alpha_i(k-1)} = 0,$$

ибо $\alpha_i \geqslant 1$ для некоторого i. Поэтому $(k-1)\varepsilon_B = 0$, вопреки тому, что $m\varepsilon_B = 0$ в полукольце $\mathfrak{R}_B$, только при $m \geqslant k$. Следовательно, найдется $x \in B^\circ$, для которого $m_x = k$.

Нашей целью является доказательство того, что нильполугруппа B удовлетворяет условиям леммы 2. Для этого введем отношение эквивалентности ϱ_λ на полугруппе B, где $\lambda \in \mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}_B$, полагая $(b_1, b_2) \in \varrho_\lambda \Leftrightarrow b_1\lambda = b_2\lambda$ для всяких $b_1, b_2 \in B$.
По условию 1 для всяких $\lambda, \mu \in \mathfrak{L}$ имеем $\lambda\mu = \mu$. Поэтому если $(b_1, b_2) \in \varrho_\lambda$, т. е. $b_1\lambda = b_2\lambda$, то $b_1\mu = b_1(\lambda\mu) = (b_1\lambda)\mu = (b_2\lambda)\mu = b_2(\lambda\mu) = b_2\mu$, т. е. $(b_1, b_2) \in \varrho_\mu$. Аналогично из $(b_1, b_2) \in \varrho_\mu$ следует $(b_1, b_2) \in \varrho_\lambda$, т. е. $\varrho_\lambda = \varrho_\mu$. Обозначим рассматриваемое отношение ϱ_λ через ϱ. Ограничение отношения ϱ на множестве B° обозначим через ϱ'. Пусть $B^\circ = \bigcup B_j$ есть разложение множества B° на непересекающиеся ϱ'-классы. Нашей ближайшей целью является изучение свойств отношения ϱ'. Мы хотим показать, что ϱ'-классы составляют целые ϱ-классы полугруппы B, и, более того, — множество B° есть целый ϱ-класс. Для осуществления нашего плана нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3.5. *Если $\lambda \in \mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}_B$, то $B^\circ\lambda \cap B^\circ \neq \varnothing$.*

Доказательство. Предположим противное и пусть для некоторого $\lambda \in \mathfrak{L}: B^\circ\lambda \cap B^\circ = \varnothing$, т. е. $B^\circ\lambda \subset B^2$. Тогда для всех $\mu \in \mathfrak{L}$ ввиду $\lambda\mu = \mu$ получим $B^\circ\mu = B^\circ(\lambda\mu) = (B^\circ\lambda)\mu \in B^2\mu \subset \subset B^2$. Так как B есть нильполугруппа, то в ней найдется элемент $y \neq 0$, для которого $y^2 = 0$. Преобразование $\varphi: B^\circ \to y$, $B^2 \to 0$ является, как легко видеть, эндоморфизмом полугруппы B, причем $\mu\varphi = 0$ для всех $\mu \in \mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}_B$, ибо $B^\circ\mu \subset B^2$. В то же время для любого $\psi \neq 0$ из $\mathfrak{R}_A$ найдется $x \in A^\circ$ такое, что $x\psi \neq 0$, а потому для $\varphi_x \in \mathfrak{L}_A$ ($\mathfrak{L}_A \subset \mathfrak{U}_A \subset \mathfrak{R}_A$, см. § 2, п. 3) $\varphi_x\psi \neq 0$, т. е. $\mathfrak{R}_A$ не изоморфно $\mathfrak{R}_B$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Переходим к доказательству того, что B° является целым ϱ-классом. Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 3.6. *Для любых $\lambda \in \mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}_B$ и $B_j \in B^\circ/\varrho'$ элемент $B_j\lambda \in B_j$.*

Доказательство. Предположим, что $B_i\lambda \notin B_i$ для некоторого $B_i \in B^\circ/\varrho'$ и $\lambda \in \mathfrak{L}$. Если $B_i\lambda \in B^\circ$, то B_i является целым ϱ-классом полугруппы B, ибо для $y \in B^2$ выполняется $y\lambda \in B^2$ и, следовательно, $y \notin B_i \subset B^\circ$. Так как $B_i\lambda = (B_i\lambda)\lambda$, то $B_i\lambda \in B_i$ по определению ϱ. Поэтому в случае $B_j \in B^\circ$ для всех j лемма верна ввиду условия 1).

Предположим, что $B_j\lambda \in B^2$ для некоторых $B_j \in B^\circ/\varrho'$ и $\lambda \in \mathfrak{L}$. Мы построим сейчас эндоморфизм $\varphi \in \mathfrak{R}_B$, $\varphi \neq 0$, и покажем, что $\mu\varphi = 0$ для всех $\mu \in \mathfrak{L}$. Последнее, как уже отмечалось в доказательстве леммы 3.5, противоречит $\mathfrak{R}_A \cong \mathfrak{R}_B$, и, следовательно, доказывает лемму. Фиксируем какое-нибудь $x \in B_j$. Определим φ следующим образом:

$$B_j\varphi = x^{m_x-1}, \quad (B^0 \setminus B_j)\varphi = B^2\varphi = 0. \tag{20}$$

Заметим, что $\varphi \in \mathfrak{R}_B$. Пусть $B_i \in B^\circ/\varrho'$. Если $B_i\mu \in B^2$, то $B_i(\mu\varphi) = 0$ ввиду (20). Если же $B_i\mu \in B^0$, то, как доказано выше, $B_i\mu \in B_i$. Но $i \neq j$, ибо из $B_j\lambda \in B^2$ следует, как нетрудно убедиться, что $B_j\mu \in B^2$. Поэтому из (20) следует, что $B_i(\mu\varphi) = (B_i\mu)\varphi \in B_i\varphi = 0$. Итак, во всех случаях $B_i(\mu\varphi) = 0$, т. е. $\mu\varphi = 0$ при $\mu \in \mathfrak{L}$, что невозможно. На этом доказательство леммы завершается.

Из сделанного в начале замечания следует, что всякий ϱ'-класс $B_i \in B^\circ$ является целым ϱ-классом.

Лемма 3.7. *Множество B° является целым ϱ-классом.*

Доказательство. Покажем, что условие $|B^\circ/\varrho| \geqslant 2$ приводит к противоречию.

Пусть $x' \in B^\circ\lambda'$ для некоторого $\lambda' \in \mathfrak{L}$ и $m_{x'} = k$. Если $m_x < k$ для всех $x \in B^\circ\lambda'$, то для $b \in B$ имеем $b(k-1)\lambda' = (\Pi x_i^{\beta_i})(k-1)\lambda' = \Pi(x_i\lambda')^{(k-1)\beta_i} = 0$. Отсюда $(k-1)\lambda' = 0$.

Но тогда ввиду $\lambda'\lambda = \lambda$ для всех $\lambda', \lambda \in \mathfrak{L}$ и дистрибутивности в полукольце $\mathfrak{R}_B$ получим $0 = 0\lambda = ((k-1)\lambda')\lambda = (k-1)(\lambda'\lambda) = (k-1)\lambda$. Так как, согласно доказанному в п. 3. § 2, $(k-1)A \neq 0$, то $(k-1)\mathfrak{U}_A^+ \neq 0$. Следовательно, $(k-1)\mathfrak{U}_B^+ \neq 0$. Как следует из доказательства теоремы 3 множество $\mathfrak{L}_A$ является системой образующих для $\mathfrak{U}_A^+$, а потому условие $(k-1)\lambda = 0$ для всех $\lambda \in \mathfrak{L} \subset \mathfrak{U}_B$ приводит к $(k-1)\mathfrak{U}_B^+ = 0$. Полученное противоречие показывает, что x' с требуемым свойством найдется.

Пусть ϱ-класс $B_i \ni x'$ и $x \in B_j$, причем $B_i \neq B_j$. Для этого x построим эндоморфизм φ по формуле (20). Если $y \in B_j$, то для всех $\mu \in \mathfrak{L}$ ввиду (20) и леммы 3.6 имеем $y(\mu\varphi) = (y\mu)\varphi = x^{m_x-1} = y\varphi$. Если же $y \in B^\circ \backslash B_j$, то ввиду леммы 3.6 получим $y\mu \in B^\circ \backslash B_j$ и $y(\mu\varphi) = 0 = y\varphi$. Следовательно, $\mu\varphi = \varphi$, т. е. $\varphi \in \mathfrak{L}\mathfrak{R} = \mathfrak{U}$. Поэтому $\varphi = \Sigma \alpha_r\lambda_r$, где $\Sigma \alpha_r < k$, ибо $\varphi \neq 0$. Ввиду (20) имеем $0 = x'\varphi = x'(\Sigma \alpha_r\lambda_r) = \Pi (x'\lambda_r)^{\alpha_r}$. Далее, получим $0 = 0\lambda' = [\Pi (x'\lambda_r)^{\alpha_r}]\lambda' = \Pi (x'\lambda_r\lambda')^{\alpha_r} = \Pi (x'\lambda')^{\alpha_r} = x'^{\Sigma\alpha_r}$, что невозможно, ибо $m_{x'} = k$, а $\Sigma \alpha_r < k$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Мы докажем далее, что B удовлетворяет условиям леммы 3.2.

Из леммы 3.7 следует, что $|B^\circ/\varrho| = 1$. Согласно лемме 3.5 для всякого $\lambda \in \mathfrak{L}$ имеем $B^\circ\lambda \cap B^\circ \neq \varnothing$. Поэтому каждое $\lambda \in \mathfrak{L}$ определяет единственным образом некоторый элемент $x = B^\circ\lambda \in B^\circ$. Обозначим такое λ через λ_x. Пусть $b = \Pi x_i^{\beta_i}$ и $l'(b) = \Sigma \beta_i$. Тогда

$$b\lambda_x = (\Pi x_i^{\beta_i})\lambda_x = \Pi (x_i\lambda_x)^{\beta_i} = x^{\Sigma \beta_i} = x^{l'(b)}.$$

Пусть $a = \Pi x_i^{\alpha_i}$, $b = \Pi x_i^{\beta_i}$ и в полугруппе B выполняется соотношение

$$a = b, \quad l'(a) > l'(b). \tag{21}$$

Лемма 3.8. *Если имеют место условия* (17), $|B^\circ/\varrho| = 1$ *и* (21), *то* $l'(b) \geqslant k$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены и предположим, что $l'(b) < k$. Фиксируем некоторое $x \in B^\circ\mathfrak{L}$ и эндоморфизм $\lambda_x \in \mathfrak{L}$. Тогда $x^{l'(a)} = a\lambda_x = b\lambda_x = x^{l'(b)}$, причем $l'(a) > l'(b)$. Так как B — нильполугруппа, то $x^{l'(b)} = 0$. Пусть $z \in B$. Тогда $z[l'(b)\lambda_x] = (z\lambda_x)^{l'(b)} = x^{l'(z)l'(b)} = 0$, т. е. $l'(b)\lambda_x = 0$ (z произвольно), хотя $l'(b) < k$, что невозможно, как отмечено в доказательстве леммы 3.7. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3.9. *Если выполнены условия* (17), $|B^\circ/\varrho| = 1$, *то* B — *k-нильпотентная полугруппа, удовлетворяющая условиям леммы* 3.2.

Доказательство. Если в полугруппе B выполняется соотношение $b_1 = b_2$, то условие $l'(b_1) < k$ ввиду предыдущей леммы влечет $l'(b_1) = l'(b_2)$. Поэтому, если $l'(b_1b_2) < k$, то $l'(b_1b_2) = l'(b_1) + l'(b_2)$. Пусть $x \in B^\circ$. Определим отображение λ_x, положив $b\lambda_x = x^{l'(b)}$ ($b \in B$), если $l'(b) < k$, и $b\lambda_x = 0$, если $l'(b) \geqslant k$. Это определение корректно ввиду леммы 3.8. Заметим, что

$\lambda_x \in \mathfrak{N}_B$. Предположим теперь, что $0 \neq b \in B$ и $l'(b) \geqslant k$. Пусть $x \in B^\circ$. Тогда $b = \Pi x_i^{\beta_i} = \Pi (x\lambda_{x_i})^{\beta_i} = x(\Sigma \beta_i \lambda_{x_i})$, где $\Sigma \beta_i \geqslant k$.

Поскольку $\mathfrak{N}_B \cong \mathfrak{N}_A$, и A, а с ней и $\mathfrak{N}_A{}^+$, являются k-нильпотентными полугруппами, то $\Sigma \beta_i \lambda_x = 0$ в $\mathfrak{N}_B$. Откуда $b = 0$, что противоречит предположению. Следовательно, $B^k = 0$. Отсюда следует, что B удовлетворяет тождеству $x_1 x_2 \ldots x_k = y_1 y_2 \ldots y_k$. Далее, если $b_1 = b_2$ некоторое определяющее соотношение в B, не являющееся следствием из этого тождества, то, по крайней мере, какое-то из b_i $(i = 1, 2)$ имеет длину, меньшую, чем k. Ввиду отмеченного в начале должно быть $l(b_1) = l(b_2)$. Следовательно, условия леммы 3.2 выполняются. Лемма доказана.

Этим завершается доказательство лемм 3.1—3.9, а также (как отмечено на стр. 31) доказательство теоремы 4.

Литература

1. Ляпин Е. С., Полугруппы. Москва, 1960.
2. Ляпин Е. С., Об условиях плотной вложимости в полугруппах. Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1962, 238, 3—20.
3. Улам С., Нерешенные математические задачи. Москва, 1963.

Поступило
25 III 1970

KOMMUTATIIVSETE NILPOTENTSETE POOLRÜHMADE ENDOMORFISMIDE POOLRINGID

M. Trepetin

Resümee

Tõestatakse, et kui A on nilpotentne ja kommutatiivne poolrühm, mille iga määrava seose $u = v$ korral sõnade u ja v pikkused on võrdsed, B on poolrühm, milles alamhulk B/B^2 kujutab endast taandamatut moodustajate süsteemi ning poolrühmade A ja B endomorfismide poolringid on isomorfsed, siis $A \cong B$. Näidatakse, et A ja B endomorfismide poolrühmade isomorfismist ei järeldu, et $A \cong B$.

THE ENDOMORPHISM SEMIRINGS OF COMMUTATIVE NILPOTENTIVE SEMIGROUPS

M. Trepetin

Summary

The semigroup $\mathfrak{E}$ of the endomorphisms of the Abelian semigroup A forms a semiring if we define the addition in $\mathfrak{E}$ by $a(\varphi + \psi) = a\varphi + a\psi$, $a \in A$, φ, $\psi \in \mathfrak{E}$. Let $\mathfrak{B}'_k$ be the class of all Abelian nilpotent semigroups, in which for every defining relation $u = v$ between nonzero words, the words u and v have the same length.

The abstract description of endomorphism semirings a semigroup $A \in \mathfrak{B}'_k$ is given (theorem 3).

If $A \in \mathfrak{B}'_k$ and B is a semigroup in which $B \backslash B^2$ form a set of generators and for the all ψ, $\varphi \in \mathfrak{E}_B$ is $\varphi + \psi \in \mathfrak{E}_B$, and endomorphism semirings of A and B are isomorphic, then $A \cong B$ (theorem 4). If for the same A and B their endomorfism semigroups are isomorphic, A and B cannot be isomorphic (theorem 1).

If A and B are Abelian nilpotent semigroups and their endomorphism semirings are isomorphic, A and B may be not isomorphic (theorem 2).

ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ГРИНА В СИСТЕМАХ МЕНГЕРА

Я. Хенно

Кафедра алгебры и геометрии

Пусть I — непустое подмножество множества N всех натуральных чисел. Совокупность $A = \{A_i,\ i \in I\}$ непересекающихся множеств A_i называется *системой Менгера*, если для любых $i, j \in I$ всяким $a_1, \ldots, a_j \in A_i$, $b \in A_j$ сопоставлен элемент $a_1 \ldots a_j b \in A_i$, причем выполняется тождество

$$a_1 \ldots a_j (b_1 \ldots b_k c) = (a_1 \ldots a_j b_1) \ldots (a_1 \ldots a_j b_k) c$$

для любых $a_1, \ldots, a_j \in A_i$, $b_1, \ldots, b_k \in A_j$, $c \in A_k$.

Известно (см., например, [3], [5]), что системы Менгера возникают при рассмотрении совокупностей многозначных функций относительно суперпозиции. Пусть $\varphi_i(M)$ является совокупностью всех i-местных функций на множестве $M = \{\alpha, \beta, \ldots\}$. Будем обозначать элементы множества M^i также через $\alpha, \beta, \ldots$; таким образом, $\alpha \in M^i$ обозначает $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_i \in M$. Если $a_1, \ldots, a_j \in \varphi_i(M)$, $b \in \varphi_j(M)$, то определим функцию $a_1 \ldots a_j b \in \varphi_i(M)$ следующей формулой:

$$\alpha(a_1 \ldots a_j b) = (\alpha a_1) \ldots (\alpha a_j) b,$$

где αa есть результат применения функции $a \in \varphi_i(M)$ к элементу $\alpha \in M^i$. При таком определении совокупность множеств $\varphi_I(M) = \{\varphi_i(M),\ i \in I\}$, где I — произвольное непустое подмножество из N, образует систему Менгера, которую будем называть *симметрической системой Менгера* множества M.

Если $A = \{A_i,\ i \in I\}$ — система Менгера, то определим на множестве $A' = \bigcup A_i$ бинарную операцию $a \circ b$ следующим образом: если $a \in A_i$, $b \in A_j$, то $a \circ b = a \ldots ab$, где a берется j раз. Относительно этой операции $(A', \circ)$ является полугруппой, а все A_i — ее правыми идеалами. Назовем полугруппу $(A', \circ)$ *диагональной полугруппой* системы A.

Пусть дана система Менгера $A = \{A_i,\ i \in I\}$. Пусть $a \in A_i$, $b \in A_j$. Будем говорить, что элементы a и b *находятся в отношении* $\mathfrak{L}$, если либо $a = b$, либо существуют такие $t_1, \ldots, t_i \in A_j$ и такие $t'_1, \ldots, t'_j \in A_i$, что $t_1 \ldots t_i a = b$ и $t'_1 \ldots t'_j b = a$.

Из определения следует, что бинарное отношение $\mathfrak{L}$ является отношением эквивалентности. Отношение $\mathfrak{L}$ обладает следующим свойством:

если $(a, b) \in \mathfrak{L}$, то $(a \dots ax, b \dots bx) \in \mathfrak{L}$ при любом $x \in A$.
(1)

Пусть $a \in A_i$, $b \in A_j$. Будем говорить, что элементы a и b *находятся в отношении* $\mathfrak{R}$, если либо $a = b$, либо существуют такие $s \in A_k$, $k \in I$ и $s' \in A_l$, $l \in I$, что $a \dots as = a \circ s = b$ и $b \dots bs' = b \circ s' = a$.

Так определенное отношение $\mathfrak{R}$ совпадает с отношением $\mathfrak{R}$ в диагональной полугруппе этой системы (см. [3], стр. 47; [4]). Следовательно, $\mathfrak{R}$ является отношением экивавалентности. В дальнейшем мы будем опускать доказательство утверждений, которые непосредственно следуют из соответствующих утверждений для полугрупп.

Сразу из определения следует, что если $(a, b) \in \mathfrak{R}$, то $i = j$ и $\mathfrak{R}$ обладает следующим свойством:

если $(a, b) \in \mathfrak{R}$, то $(x_1 \dots x_i a, x_1 \dots x_i b) \in \mathfrak{R}$ при любых $x_1, \dots, x_i \in A_k$, $a, b \in A_i$, $i, k \in I$.

Лемма 1. *Отношения* $\mathfrak{L}$ *и* $\mathfrak{R}$ *коммутируют.*

Доказательство. Пусть $a \in A_i$, $b, c \in A_j$ и пусть $(a, b) \in \mathfrak{L}$, $(b, c) \in \mathfrak{R}$. Покажем, что существует $d \in A_i$ такой, что $(a, d) \in \mathfrak{R}$ и $(d, c) \in \mathfrak{L}$. Если $a = b$, то $d = c$, если $b = c$, то $d = a$. Пусть $a \neq b$ и $b \neq c$. Тогда существуют элементы $t_1, \dots, t_i \in A_j$, $t'_1, \dots, t'_j \in A_i$, $s \in A_k$, $s' \in A_l$, $k, l \in I$ такие, что $t_1 \dots t_i a = b$, $t'_1 \dots t'_j b = a$, $b \dots bs = c$, $c \dots cs' = b$. Положим

$$d = a \dots as = (t'_1 \dots t'_j b) \dots (t'_1 \dots t'_j b) s = \\ = t'_1 \dots t'_j (b \dots bs) = t'_1 \dots t'_j c.$$

Тогда
$d \dots ds' = (t'_1 \dots t'_j c) \dots (t'_1 \dots t'_j c) s' = t'_1 \dots t'_j (c \dots cs') = = t'_1 \dots t'_j b = a$, т. е. $(a, d) \in \mathfrak{R}$. Аналогично $t_1 \dots t_i d = = t_1 \dots t_i (a \dots as) = (t_1 \dots t_i a) \dots (t_1 \dots t_i a) s = b \dots bs = c$ и $(d, c) \in \mathfrak{L}$, т. е. $\mathfrak{L}\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}\mathfrak{L}$.

Докажем обратное включение. Пусть $a, b \in A_i$, $c \in A_j$ и пусть $(a, b) \in \mathfrak{R}$, $(b, c) \in \mathfrak{L}$. Покажем, что существует такой $d \in A_j$, что $(a, d) \in \mathfrak{L}$, $(d, c) \in \mathfrak{R}$. Если $a = b$, то $d = c$, если $b = c$, то $d = a$. Пусть $a \neq b$, $b \neq c$. Положим $d = t_1 \dots t_i a = c \dots cs'$, где $t_1, \dots, t_i \in A_j$, $s' \in A_l$ такова, что $t_1 \dots t_i b = c$, $b \dots bs' = a$. То, что имеет место $(a, d) \in \mathfrak{L}$ и $(d, c) \in \mathfrak{R}$, проверяется как выше. Лемма доказана.

Обозначим $\mathfrak{D} = \mathfrak{L}\mathfrak{R} = \mathfrak{L}\mathfrak{R} = \mathfrak{L} \cup \mathfrak{R}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}$. Через L_a (соответственно R_a, D_a, H_a) будем обозначать $\mathfrak{L}$-класс (соответственно $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$) элемента $a \in A$, значит, $H_a = L_a \cap R_a$.

Рассуждения, аналогичные рассуждениям из теории полугрупп (см. [3], стр. 48) показывает, что если L_x — произвольный $\mathfrak{L}$-класс и R_y — произвольный $\mathfrak{R}$-класс, то $L_x \cap R_y \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда L_x и R_y содержатся в одном и том же $\mathfrak{D}$-классе.

Назовем систему множеств $L = \{L_i,\ i \in I\}$, где $L_i \subset A_i$, *левым идеалом* системы Менгера $A = \{A_i,\ i \in I\}$, если $x_1 \ldots x_i a \in L_j$ при любых $a \in L_i$, $x_1, \ldots, x_i \in A_j$, $i, j \in I$. Левый идеал, порожденный данным элементом, определяется как обычно.

Теорема 2. *Для того, чтобы элементы a и b системы Менгера $A = \{A_i,\ i \in I\}$ находились в отношении $\mathfrak{L}$, необходимо и достаточно, чтобы они порождали один и тот же левый идеал.*

Доказательство. Если $(a, b) \in \mathfrak{L}$, $a \in A_i$, $b \in A_j$ и $a \in L$ для некоторого левого идеала L системы A, то и $b = x_1 \ldots x_i a \in L$. Обратно, пусть a и b порождают одинаковые левые идеалы, $a \in A_i$, $b \in A_j$. Положим $L_i = \{a\} \cup \{x_1 \ldots x_i a\}$, где $x_1, \ldots, x_i$ — произвольные элементы из A_i, $L_j = \{x_1 \ldots x_i a\}$, где $i \neq j$ и $x_1, \ldots, x_i$ — любые элементы из A_j. Из определения ясно, что $L = \{L_i,\ i \in I\}$ есть левый идеал системы A. Так как $a \in L$, то и $b \in L$, и, следовательно, $b = x_1 \ldots x_i a$ для некоторых $x_1, \ldots, x_i \in A_k$, $k \in I$. Аналогично доказывается, что и $a = y_1 \ldots y_j b$. Теорема доказана.

Назовем систему множеств $R = \{R_i,\ i \in I_R\}$, где $R_i \subseteq A_i$, $I_R \subseteq I$ *правым идеалом* системы A, если $a_1 \ldots a_i x \in R_j$ при любых $a_1, \ldots, a_i \in R_j$, $x \in A_i$, $j \in I_R$, $i \in I$. Обычным образом определяется правый идеал, порожденный данным элементом.

Теорема 3. *Если элементы a и b системы Менгера $A = \{A_i,\ i \in I\}$ находятся в отношении $\mathfrak{R}$, то они порождают одинаковые правые идеалы. Более того, если $\mathfrak{R}$-классы элементов a и b состоят более чем из одного элемента, то справедливо и обратное утверждение.*

Доказательство. Если $(a, b) \in \mathfrak{R}$ и $a \in R$ для некоторого правого идеала R системы A_1, то и $b = a \ldots as \in R$. Обратно, пусть a и b порождают тот же правый идеал и пусть оба не являются единственными элементами в своих $\mathfrak{R}$-классах. Возьмем такой $a' \in A$, что $a \neq a'$, $(a, a') \in R$, и элементы $s \in A_k$, $s' \in A_l$ также, что $a \ldots as = a'$, $a' \ldots a's' = a$. Тогда множество $R_i = \{a \ldots ax\}$, где x — произвольный элемент из A_i, является при любом $i \in I$ правым идеалом, и так как $a = a' \ldots a's = (a \ldots as) \ldots (a \ldots as)s' = a \ldots a(s \ldots ss') \in R_k$, то и $b \in R_k$. Следовательно, существует $x \in A_k$ такой, что $a \ldots ax = b$. Аналогично существует $y \in A$ такой, что $b \ldots by = a$, т. е. $(a, b) \in R$. Теорема доказана.

Лемма 4. *Пусть $A = \{A_i,\ i \in I\}$ — система Менгера и $(a, b) \in \mathfrak{L}$, $a \in A_i$, $b \in A_j$, $a \neq b$. Если $t_1, \ldots, t_i \in A_j$, $t'_1, \ldots, t'_j \in A_i$ таковы, что $t_1 \ldots t_i a = b$, $t'_1 \ldots t'_j b = a$, то*

$$\sigma\colon\ x \to \sigma x = t_1 \ldots t_i x, \quad \text{где} \quad x \in R_a,$$
$$\sigma'\colon\ y \to \sigma' y = t'_1 \ldots t'_j y, \quad \text{где} \quad y \in R_b,$$

являются взаимно-обратными биекциями, причем σ отображает R_a на R_b, а σ' отображает R_b на R_a. Оба отображения сохраняют $\mathfrak{L}$-классы, т. е. $(x, \sigma x) \in \mathfrak{L}$, $(y, \sigma' y) \in \mathfrak{L}$.

Доказательство. Пусть $x \in R_a$. Тогда по (2) получаем $(t_1 \ldots t_i x, t_1 \ldots t_i a) = (\sigma x, b) \in \mathfrak{R}$ и $x \in R_b$. Аналогично $\sigma' y \in R_a$. Из определения ясно, что $\sigma' \sigma a = a$. Пусть $x \in R_a$, $x \neq a$. Тогда

$$\sigma' \sigma x = t'_1 \ldots t'_j (t_1 \ldots t_i x) = t'_1 \ldots t'_j (t_1 \ldots t_i (a \ldots as)) =$$
$$= t'_1 \ldots t'_j ((t_1 \ldots t_i a) \ldots (t_1 \ldots t_i a) s) = t'_1 \ldots t'_j (b \ldots bs) =$$
$$= (t'_1 \ldots t'_j b) \ldots (t'_1 \ldots t'_j b) s = a \ldots as = x.$$

Это показывает, что $\sigma' \sigma$ является тождественным отображением R_a на R_a. Аналогично $\sigma \sigma'$ является тождественным отображением R_b на R_b. Следовательно, σ и σ' являются взаимно-обратными биекциями. Так как $\sigma x = t_1 \ldots t_i x$ и $t'_1 \ldots t'_j (\sigma x) = x$, то $(x, \sigma x) \in \mathfrak{L}$. Аналогично, $(y, \sigma y) \in \mathfrak{L}$. Теорема доказана.

Лемма 5. *Пусть $A = \{A_i,\ i \in I\}$ — система Менгера и $(a, b) \in \mathfrak{R}$, $a, b \in A_i$, $a \neq b$. Если $s \in A_k$, $s' \in A_l$ такие, что $a \ldots as = b$, $b \ldots bs' = a$, то*

$$\varrho\colon\ x \to \varrho x = x \ldots xs, \quad \text{где} \quad x \in L_a,$$
$$\varrho'\colon\ y \to \varrho' y = y \ldots ys', \quad \text{где} \quad y \in L_b,$$

являются взаимно-обратными биекциями, причем ϱ отображает L_a на L_b, а ϱ' отображает L_b на L_a. Оба отображения сохраняют $\mathfrak{R}$-классы, т. е. $(x, \varrho x) \in \mathfrak{R}$, $(y, \varrho' y) \in \mathfrak{R}$.

Доказательство следует из соответственного факта, известного для диагональной полугруппы (см. [3], стр. 49).

Пусть $A = \{A_i,\ i \in I\}$ — система Менгера, $B \subseteq A_i$. Введем множества:

$T_l(B) = \{(t_1, \ldots, t_i)\}$, где $t_1, \ldots, t_i \in A_j$, $j \in I$, и $t_1 \ldots t_i x \in B$ при любом $x \in B$,

$T_r(B) = \{s\}$, где $s \in A$ и $x \ldots xs \in B$ при любом $x \in B$.

Обозначаем через $\Gamma_l(B)$ множество, состоящие из всевозможных преобразований $\gamma_t : B \to B$, где $t = (t_1, \ldots, t_i) \in T_l(B)$ и $\gamma_t(x) = t_1 \ldots t_i x$, $x \in B$, а через $\Gamma_r(B)$ множество преобразований $\gamma_s : B \to B$, где $s \in T_r(B)$ и $\gamma_s(x) = x \ldots xs$. Будем считать, что тождественное преобразование всегда принадлежит этим множествам. Множества $\Gamma_l(B)$ и $\Gamma_r(B)$ являются полугруппами относительно умножения преобразований.

Множество преобразований Γ множества M называется *просто транзитивным*, если для любых $\alpha, \beta \in M$ существует точно один элемент $x \in \Gamma$, который переводит α в β.

Теорема 6. *Для всякого $\mathfrak{H}$-класса H системы Менгера $A = \{A_i,\ i \in I\}$ множество $\Gamma_l(H)$ является просто транзитивной группой преобразований множества H. Если H' — некоторый другой $\mathfrak{H}$-класс, в том же $\mathfrak{R}$-классе, что и H, то группы $\Gamma_l(H)$ и $\Gamma_l(H')$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть дан $\mathfrak{H}$-класс H, $H \subseteq A_i$, и пусть $\gamma_t \in \Gamma_l(H)$, где $t = (t_1, \ldots, t_i) \in T_l(H)$. Для любого $h_0 \in H$ имеем, что $h_1 = \gamma_t(h_0) \in H$ и существуют $t'_1, \ldots, t'_i \in A_i$ такие, что $t'_1 \ldots t'_i h_1 = h_0$. По лемме 4 отображение $x \to t'_1 \ldots t'_i x$, где $x \in H$, является обратной к γ_t биекцией множества H на H. Поэтому $(t'_1, \ldots, t'_i) \in T_l(H)$, и, следовательно, $\Gamma_l(H)$ есть группа.

Для любых $h_1, h_2 \in H$, $h_1 \neq h_2$ существуют $t_1, \ldots, t_i \in A_i$ такие, что $t_1 \ldots t_i h_1 = h_2$, ввиду чего эта группа будет транзитивной. Предположим, что для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_l(H)$ и $h_0 \in H$ имеет место $\gamma_1(h_0) = \gamma_2(h_0)$. Тогда в силу $(h_0, h) \in \mathfrak{R}$ для любого $h \in H$ существует $s \in A$ такой, что $h_0 \ldots h_0 s = h$. Если $\gamma_1(x) = t_1 \ldots t_i x$, $\gamma_2(x) = t'_1 \ldots t'_i x$, то имеем:

$$\begin{aligned}\gamma_1(h) = t_1 \ldots t_i h = \\ &= t_1 \ldots t_i (h_0 \ldots h_0 s) = (t_1 \ldots t_i h_0) \ldots (t_1 \ldots t_i h_0) s = \\ &= (t'_1 \ldots t'_i h_0) \ldots (t'_1 \ldots t'_i h_0) s = t'_1 \ldots t'_i (h_0 \ldots h_0 s) = \\ &= t'_1 \ldots t'_i h = \gamma_2(h),\end{aligned}$$

т. е. $\gamma_1 = \gamma_2$. Следовательно, группа $\Gamma_l(H)$ просто транзитивна. Последнее утверждение теоремы вытекает из леммы 4.

Теорема 7. *Для всякого $\mathfrak{H}$-класса H системы Менгера $A = \{A_i, i \in I\}$ множество $\Gamma_r(H)$ является просто транзитивной группой преобразований множества H. Если H' — некоторый другой $\mathfrak{H}$-класс в том же $\mathfrak{L}$-классе, что и H, то группы $\Gamma_r(H)$ и $\Gamma_r(H')$ изоморфны.*

Доказательство следует из аналогичного утверждения для диагональной полугруппы (см. [3], стр. 64).

Известно, что если Γ и Γ' — две просто транзитивные группы преобразований множества M и все элемнеты из Γ коммутируют со всеми элементами из Γ', то группы Γ и Γ' антиизоморфны (см. [1], стр. 64). Все элементы $\Gamma_l(H)$ коммутируют со всеми элементами из $\Gamma_r(H)$. Поэтому группы $\Gamma_l(H)$ и $\Gamma_r(H)$ антиизоморфны.

Теорема 8. *Если H и H' $\mathfrak{H}$-классы из одного и того же $\mathfrak{D}$-класса, то группы $\Gamma_l(H)$ и $\Gamma_l(H')$ изоморфны, $\Gamma_r(H)$ и $\Gamma_r(H')$ изоморфны, а $\Gamma_l(H)$ и $\Gamma_r(H)$ антиизоморфны.*

Доказательство. Теорема доказывается при помощи рассуждений, совершенно аналогичных соответствующим рассуждениям из теории полугрупп (см. [3], стр. 65).

Теорема 9. *Если множество элементов некоторого $\mathfrak{H}$-класса системы Менгера $A = \{A_i, i \in I\}$ образует в диагональной полугруппе системы A группу, то эта группа изоморфна группе $\Gamma_r(H)$.*

Доказательство следует из аналогичного утверждения для диагональной полугруппы.

Введенные понятия используем для изучения симметрических систем Менгера. Пусть $\varphi_I(M) = \{\varphi_i(M), i \in I\}$ есть симметрическая система Менгера множества $M = \{\alpha, \beta \ldots\}$. Для всякого $a \in \varphi_i(M)$ определим:

1) *Область* $r(a) = M^i a = \{\alpha a, \alpha \in M^i\}$ элемента a.

2) *Разбиение* π_a элемента a. Это — эквивалентность на множестве M^i, определенная следующим образом: $(\alpha, \beta) \in \pi_a$ для произвольных $\alpha, \beta \in M^i$ тогда и только тогда, когда $\alpha a = \beta a$.

3) Мощность $o(a)$ множества $r(a)$ назовем *рангом* элемента a.

Отметим, что мощности множеств $r(a)$ и M^i/π_a совпадают.

Лемма 10. *Пусть даны элементы* $a \in \varphi_i(M)$, $b \in \varphi_j(M)$ *симметрической системы Менгера* $\varphi_I(M) = \{\varphi_i(M),\ i \in I\}$. *Тогда существуют элементы* $x_1, \ldots, x_i \in \varphi_j(M)$ *такие, что* $x_1 \ldots x_i a = b$ *тогда и только тогда, когда* $r(a) \supseteq r(b)$.

Доказательство. Если $x_1 \ldots x_i a = b$, то $r(b) = M^j b = M^j(x_1 \ldots x_i a) = (M^j x_1) \ldots (M^j x_i) a \subseteq M^i a = r(a)$. С другой стороны, пусть даны элементы $a \in \varphi_i(M)$, $b \in \varphi_j(M)$, где $r(b) \subseteq r(a)$. Обозначим для $\gamma \in r(x)$, $x \in \varphi_k(M)$, через γx^{-1} следующее множество: $\gamma x^{-1} = \{\alpha | \alpha \in M^k,\ \alpha x = \gamma\}$. Выберем для любого $\gamma \in r(b) \subseteq r(a)$ элемент $\gamma^* \in \gamma a^{-1} \subseteq M^i$ и определим отображения $x_t: M^j \to M$, где $t = 1, \ldots, i$, следующим образом: если $\alpha \in M^j$, $\alpha b = \gamma$ и $\gamma^* = (\gamma_1 \ldots \gamma_i)$, то $\alpha x_t = \gamma_t$, $t = 1, \ldots, i$. Так как для любого $\alpha \in M^j$ элементы αb и γ^* определены однозначно, то все отображения x_t, $t = 1, \ldots, i$, однозначно определены на всем M^j и ввиду $j \in I$ получаем $x_1, \ldots, x_i \in \varphi_j(M)$. Следовательно, при любом $\alpha \in M^j$ имеем $\alpha(x_1 \ldots x_i a) = (\alpha x_1) \ldots (\alpha x_i) a = \gamma^* a = \alpha b$, т. е. $x_1 \ldots x_i a = b$. Лемма доказана. Из нее непосредственно вытекает

Следствие 11. *В симметрической системе Менгера* $(a, b) \in \mathfrak{L}$ *тогда и только тогда, когда* $r(a) = r(b)$.

Лемма 12. *Для элементов* $a_1, \ldots, a_j$, $b \in \varphi_i(M)$ *из симметрической системы Менгера* $\varphi_I(M) = \{\varphi_i(M),\ i \in I\}$ *существует элемент* $x \in \varphi_j(M)$ *такой, что* $a_1 \ldots a_j x = b$ *тогда и только тогда,* когда $\pi_b \supseteq \bigcap \pi_{a_t}$, где $t = 1, \ldots, j$.

Доказательство. Если $a_1 \ldots a_j x = b$, где $a_1, \ldots, a_j$, $b \in \varphi_i(M)$, $x \in \varphi_j(M)$, то для любых точек $\alpha, \beta \in M^i$, где $(\alpha, \beta) \in \bigcap \pi_{a_t}$, имеем $\alpha b = \alpha(a_1 \ldots a_j x) = (\alpha a_1) \ldots (\alpha a_j) x = (\beta a_1) \ldots (\beta a_j) x = \beta(a_1 \ldots a_j x) = \beta b$. Значит, $\pi_b \supseteq \bigcap \pi_{a_t}$, $t = 1, \ldots, j$. Обратно, пусть даны элементы $a_1, \ldots, a_j$, $b \in \varphi_i(M)$ такие, что $\pi_b \supseteq \bigcap \pi_{a_t}$, $t = 1, \ldots, j$. Определим следующее отображение x: $M^j \to M$:

1. Если для $\alpha \in M^j$ существует такой $\beta \in M^i$, что $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_j) = (\beta a_1 \ldots \beta_j a_j)$, то положим $\alpha x = \beta b$.
2. Если же для $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_j)$ такого β не существует, то положим $\alpha x = \alpha_1$.

Отображение x определено однозначно. Действительно, если для какого-то $\alpha \in M^j$ имеем, что $\alpha = (\beta_1 a_1 \ \ldots \ \beta_1 a_j)$ и $\alpha = (\beta_2 a_1 \ldots \beta_2 a_j)$, $\beta_1, \beta_2 \in M^i$, то $(\beta_1, \beta_2) \in \bigcap \pi_{a_t}$, $t = 1, \ldots, j$, и поэтому $(\beta_1, \beta_2) \in \pi_b$ и $\beta_1 b = \beta_2 b$. Следовательно,

$$\alpha(a_1 \ldots a_j x) = (\alpha a_1) \ldots (\alpha a_j) x = \alpha b$$

для любого $\alpha \in M^i$, т. е. $a_1 \ldots a_j x = b$. Лемма доказана.

Следствие 13. *В симметрической системе Менгера* $(a, b) \in \mathfrak{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\pi_a = \pi_b$.

Доказательство следует из леммы 12 при $a_1 = a_2 = \ldots = a_j = a$.

Лемма 14. *В симметрической системе Менгера* $(a, b) \in \mathfrak{D}$ *тогда и только тогда, когда* $o(a) = o(b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о получаем при помощи рассуждений, совершенно аналогичных соответствующим рассуждениям из теории полугрупп (см. [3], стр. 52).

Из доказанных лемм выводится следующее утверждение.

Теорема 15. *Пусть* $\varphi_I(M) = \{\varphi_i(M),\ i \in I\}$ — *симметрическая система Менгера множества* M.

1. *Существует взаимно-однозначное соответствие между всеми* $\mathfrak{D}$*-классами системы* $\varphi_I(M)$ *и множеством всех кардинальных чисел* $\xi \leqslant |M|$ *такое, что* $\mathfrak{D}$*-класс* D_ξ, *соответствующий кардинальному числу* ξ, *состоит из всех элементов системы* $\varphi_I(M)$ *ранга* ξ.

2. *Пусть кардинальное число* $\xi \leqslant |M|$. *Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех* $\mathfrak{L}$*-классов из* D_ξ *и множеством всех подмножеств* N *множества* M *мощности* ξ *такое, что* $\mathfrak{L}$*-класс, соответствующий подмножеству* N, *состоит из всех элементов системы* $\varphi_I(M)$ *с областью* N.

3. *Пусть кардинальное число* $\xi \leqslant |M|$. *Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех* $\mathfrak{R}$*-классов из* D_ξ *и множеством всех эквивалентностей* π *на множестве* M^i, $i \in I$, *для которых* $|M^i/\pi| = \xi$ *такое, что* $\mathfrak{R}$*-класс, соответствующий эквивалентности* π, *состоит из всех элементов системы* $\varphi_I(M)$, *для которых разбиением является* π.

4. *Пусть кардинальное число* $\xi \leqslant |M|$. *Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех* $\mathfrak{H}$*-классов из* D_ξ *и множеством всех пар* (N, π), *где* N — *подмножество множества* M, *а* π — *эквивалентность на множестве* M^i, $i \in I$, *и* $|N| = |M^i/\pi| = \xi$ *такое, что* $\mathfrak{H}$*-класс, соответствующий паре* (N, π), *состоит из всех элементов системы* φ_I (M) *с разбиением* π *и областью* N.

В заключение отметим, что леммы 10 и 12 дают возможность описать все идеалы симметрической системы Менгера $\varphi_I(M)$ на множестве M.

Теорема 16. *Множество* L *элементов симметрической системы Менгера* $\varphi_I(M) = \{\varphi_i(M),\ i \in I\}$ *множества* M *является левым идеалом тогда и только тогда, когда совокупность* Σ *всех подмножеств множества* M, *являющихся областью для какого-нибудь элемента из* L, *замкнута относительно взятия подмножеств, и* L *содержит все элементы системы* $\varphi_I(M)$, *область которых принадлежит* Σ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество элементов L удовлетворяет условиям теоремы. Если $a \in L$, $a \in \varphi_i(M)$, то для произвольных $x_1, \ldots, x_i \in \varphi_j(M)$, $j \in I$, имеем по лемме 10, что $r(x_1 \ldots x_i a) \subseteq r(a)$, и, следовательно, $x_1 \ldots x_i a \in L$ и L — левый идеал. Обратно, пусть L — левый идеал. Обозначим через Σ совокупность всех подмножеств множества M, которые являются областью для какого-нибудь элемента из L. Пусть $N \in \Sigma$, т. е. существует $a \in L$, $a \in \varphi_i(M)$ такой, что $N = r(a)$. Если N_1 — такое подмножество множества M, что $N_1 \subseteq N$ и $N_1 = r(b)$ для кого-нибудь $b \in \varphi_j(M)$, то по лемме 10 существуют $x_1, \ldots, x_i \in \varphi_j(M)$ такие, что $x_1 \ldots x_i a = b$. Следовательно, $N_1 \in \Sigma$, $b \in L$ и Σ удовлетворяет условиям теоремы. Теорема доказана.

Назовем подмножество F структуры S *замкнутым сверху*, если из $x \in F$, $y \in S$, $y \geqslant x$ следует $y \in F$. Замкнутое сверху подмножество F структуры S называется *фильтром*, если из x, $y \in F$ следует $x \cap y \in F$.

Теорема 17. *Множество элементов $R = \{R_i,\ i \in I_R\}$ симметрической системы Менгера $\varphi_I(M) = \{\varphi_i(M),\ i \in I\}$ множества M является правым идеалом системы $\varphi_I\ (M)$ тогда и только тогда, когда при всяком $i \in I_R$ совокупность всех эквивалентностей на множестве M^i, которые являются разбиениями для некоторого элемента из R_i образует*

1° *при $I = \{1\}$ замкнутое сверху подмножество*

2° *при $I \neq \{1\}$ фильтр*

в структуре всех эквивалентностей множества M^i и R_i содержит все элементы системы $\varphi_I(M)$, разбиение которых принадлежит F.

Доказательство. Пусть подмножество $R = \{R_i,\ i \in I_R\}$ системы $\varphi_I(M)$ удовлетворяет условиям нашей теоремы. Если $a_1, \ldots, a_j \in R_i$, $i \in I_R$, то для произвольного $y \in \varphi_j(M)$ имеем $\pi(a_1 \ldots a_j y) \subseteq \bigcap \pi_{a_t}$, $t = 1, \ldots, j$, следовательно, $\pi(a_1 \ldots a_j y) \in F$, $a_1 \ldots a_j y \in R_i$ и R — правый идеал. Обратно, пусть R — правый идеал системы $\varphi_I(M)$, F — совокупность всех эквивалентностей множества M^i, которые являются разбиениями для какого-нибудь элемента из R_i, $i \in I_R$. Пусть $\pi \in F$, $\pi = \pi_a$ для некоторого $a \in R_i$, $i \in I$. Если π_1 — эквивалентность множества M^i, $\pi_1 \subseteq \pi$, то по лемме 12 существует $x \in \varphi_I(M)$ такой, что $\pi(a \ldots ax) = \pi_1$, следовательно, ввиду $a \ldots ax \in R$ имеет $\pi_1 \in F$. Если $I \neq \{1\}$, то существует $j \in I$ такой, что $j > 1$. Пусть π_1, $\pi_2 \in F$ — эквивалентности множества M^i, $\pi_1 = \pi_{a_1}$, $\pi_2 = \pi_{a_2}$. Если $b \in \varphi_i(M)$ такой элемент $\varphi_i(M)$, что $\pi_b = \pi_{a_1} \cap \pi_{a_2}$, то по лемме 12 существует $x \in \varphi_j(M)$ такой, что $a_1 a_2 \ldots a_2 x = b \in R_i$, следовательно, $\pi_2 \cap \pi_2 = \pi_b \in F$. Теорема доказана.

Лемма 18. *Если двусторонний идеал $T = \{T_i,\ i \in I\}$ симметрической системы Менгера $\varphi_I(M) = \{\varphi_i(M),\ i \in I\}$* содержит *элемент a ранга ξ, то он содержит все элементы системы $\varphi_I(M)$ ранга ξ.*

Доказательство. Пусть задан двусторонний идеал $T = \{T_i,\ i \in I\}$ симметрической системы Менгера $\varphi_I(M) = \{\varphi_i(M),\ i \in I\}$, $a \in T_i$. Пусть $b \in \varphi_j(M)$, $j \in I$ — произвольный элемент системы $\varphi_I(M)$, $o(a) = o(b)$. Так как $|M^j/\pi_b| = |r(a)|$, то существует элемент $c \in \varphi_j(M)$ такой, что $\pi_c = \pi_b$, $r(c) = r(a)$. По лемме 10 существуют $x_1, \ldots, x_i \in \varphi_j(M)$ такие что $x_1 \ldots x_i a = c$, и, значит, $c \in T_j$. По лемме 12 существует $x \in \varphi_k(M)$, $k \in I$, такой, что $c \ldots cx = b$, и, следовательно, $b \in T_j$. Лемма доказана.

Система Менгера $A = \{A_i,\ i \in I\}$ является при $I = \{1\}$ полугруппой и описание всех его двусторонних идеалов дано в [4].

Теорема 19. *Пусть $\varphi_I(M) = \{\varphi_i(M),\ i \in I\}$ есть симметрическая система Менгера множества M, $I \neq \{1\}$. Множество элементов $T = \{T_i,\ i \in I\}$ является двусторонним идеалом системы $\varphi_I(M)$ тогда и только тогда, когда оно является одним из следующих множеств:*

1) *Множеством всех элементов ранга* 1,
2) *Множеством всех элементов конечного ранга,*
3) *Множеством всех элементов, ранги которых меньше ξ, где ξ — бесконечное кардинальное число.*

Доказательство. При помощи теорем 16 и 17 легко проверяется, что все множества типа 1), 2) и 3) — левые и правые идеалы. Обратно, пусть $T = \{T_i,\ i \in I\}$ — двусторонний идеал системы $\varphi_I(M)$. Достаточно доказать, что если T содержит элементы конечного ранга n, $n > 1$, $n < |M|$, то он содержит и элементы ранга $n+1$. Пусть $i \in I$, $a \in T_i$, $o(a) = n$. Существуют $\alpha, \beta, \gamma \in M^i$ такие, что $(\alpha, \beta) \in \pi_a$, $(\beta, \gamma) \notin \pi_a$. Обозначим через π эквивалентность на множестве M^i, которая получается из π_a, если перенести точку β из своего π_a-класса в тот π_a-класс, где находится точка γ. Тогда $|M^i/\pi| = n$ и $|M^i/\pi_a \cap \pi| = n+1$. По лемме 18 существует элемент $b \in T_i$ такой, что $\pi_b = \pi$, а по лемме 10 существует $x \in \varphi_j(M)$, $j \in I$, $j > 1$, такой, что для $c = ab \ldots bx \in T_i$ имеет место $\pi_c = \pi_a \cap \pi_b$, и, значит, $o(c) = n+1$. Теорема доказана. Из нее непосредственно вытекает

Следствие 20. *Симметрическая система Менгера $\varphi_I(M) = \{\varphi_i(M),\ i \in I\}$ конечного множества M имеет при $I \neq \{1\}$ только один собственный двусторонний идеал, который является множеством всех элементов ранга* 1.

Литература

1. Мальцев А. И., Симметрические группоиды. Матем. сб., 1953, **31**, 136—151.
2. Хион Я. В., m-арные Ω-кольцоиды. Сиб. матем. ж., 1967, 8, 174—194.
3. Clifford, A. H., Preston, G. B., The algebraic theory of semigroups. Vol. I. Providence, 1961.

4. G r e e n, J., On the structure of semigroups. Ann. Math., 1951, **54**, № 2, 163—172.
5. W h i t l o c k, H. J., A composition algebra for multiplace functions. Math. Ann., 1964, **157**, № 2, 167—178.

Поступило
14 IV 1970

GREENI EKVIVALENTSID MENGERI SÜSTEEMIDES

J. Henno

R e s ü m e e

Käesolevas töös antakse Greeni ekvivalentside ning ühe- ja kahepoolsete ideaalide definitsioon Mengeri süsteemides (kõik definitsioonid on vastavate poolrühmateoorias tuntud definitsioonide üldistused). Näidatakse, et Greeni ekvivalentside põhilised omadused Mengeri süsteemides säilivad ja antakse sümmeetriliste Mengeri süsteemide Greeni ekvivalentside ja ühe- ja kahepoolsete ideaalide kirjeldus.

GREEN RELATIONS IN MENGER SYSTEMS

J. Henno

S u m m a r y

Green relations and one- and two-sided ideals are defined for Menger systems (all definitions are generalisations of those known in the theory of semigroups). It is shown that characteristic properties of Green relations are preserved; Green relations and one- and two-sided ideals in Menger systems of all functions are described.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ МЕНГЕРА МНОГОМЕСТНЫМИ ЭНДОМОРФИЗМАМИ

Э. Реди

Кафедра алгебры и геометрии

К. Менгер определил в [6, 7] новый тип алгебраических систем, приспособленных для абстрактного исследования многоместных функций, определенных и принимающих значения в данном множестве. Уитлок назвал эти системы алгебрами Менгера. Понятие простой алгебры Менгера равносильно понятию m-полугруппы с единицами, определенное Дикером [4]. Уитлок показал, что всякая система Менгера с единицами представима многоместными функциями с операцией суперпозиции (см. [8]). Частный случай, что всякая m-полугруппа с единицами представима m-полугруппой m-местных функций было доказано уже Дикером [4].

С другой стороны, хорошо известна теорема о представимости полугруппы с единицей полугруппой всех эндоморфизмов некоторой универсальной алгебры. Этот результат получен независимо Ватерманом и Грецером [5], но первое доказательство напечатано в статье [2] Амбруста — Шмидта, хотя идея принадлежит Биркгофу (см. [3]).

Я. Хион [1] определил многоместные эндоморфизмы универсальной алгебры и доказал, что многоместные эндоморфизмы каждой универсальной алгебры образуют систему Менгера. Понятие алгебры Менгера по Уитлоку совпадает с понятием системы Менгера с единицами по Я. Хиону.

Возникает вопрос о представимости системы Менгера с единицами системой всех многоместных эндоморфизмов некоторой универсальной алгебры. Теорема этой заметки дает положительный ответ на этот вопрос.

Пусть I — непустое подмножество множества натуральных чисел. Система $M=\{M_i,\ i\in I\}$ непересекающихся множеств M_i называется *системой Менгера*, если для любых $i,\ j\in I$ всяким $a_1, \ldots, a_j \in M_i$, $b\in M_j$ сопоставлен элемент $a_1\ldots a_j b\in M_i$, так что для любых $a_1, \ldots, a_j\in M_i$, $b_1, \ldots, b_k\in M_j$, $c\in M_k$

$$a_1\ldots a_j(b_1\ldots b_k c)=(a_1\ldots a_j b_1)\ldots(a_1\ldots a_j b_k)c. \tag{1}$$

Совокупность элементов $\bigcup \{e^k{}_1, \ldots, e^k{}_k | e^k{}_i \in M_k\}$ называется *полной системой единиц* системы Менгера, если

$$a_1 \ldots a_k e^k{}_i = a_i \qquad (i = 1, \ldots, k), \tag{2}$$
$$e^k{}_1 \ldots e^k{}_k a = a \tag{3}$$

для любых $a_1, \ldots, a_j \in M_i$, $a \in M_k$. Система Менгера, в которой существует полная система единиц, называется *системой Менгера с единицами.*

Примером системы Менгера служит система $F_I(A) = \{F_i(A) | i \in I\}$, где $F_i(A)$ — множество всех i-местных функций, определенных и принимающих значения в множестве A. Значение функции f на элементах $x_1, \ldots, x_i \in A$ обозначим через $x_1 \ldots x_i f$. При этом операция определена следующей формулой

$$x_1 \ldots x_i (f_1 \ldots f_j g) = (x_1 \ldots x_i f_1) \ldots (x_1 \ldots x_i f_j) g \tag{4}$$

для любых $x_1, \ldots, x_i \in A$, $f_1, \ldots, f_j \in F_i(A)$, $g \in F_j(A)$.

Пусть (A, Ω) — универсальная алгебра с основным множеством A и с системой операций Ω. Подмножество всех n-арных операций обозначим через Ω_n. Элемент $f \in F_k(A)$ называется k-эндоморвизмом алгебры (A, Ω), если при любых $\omega \in \Omega_n$, $\nu \in \Omega_0$ для всяких $a_{ij} \in A$ имеют место равенства

$$0_\nu \ldots 0_\nu f = 0_\nu,$$
$$(a_{11} \ldots a_{1n}\omega) \ldots (a_{k1} \ldots a_{kn}\omega) f = (a_{11} \ldots a_{k1} f) \ldots (a_{1n} \ldots a_{kn} f)\,\omega. \tag{5}$$

Здесь через 0_ν обозначен элемент основного множества A, выделенный нульарной операцией ν. Совокупность всех k-эндоморфизмов обозначим через $E_k(A)$.

Лемма. *Для любой универсальной алгебры (A, Ω) и любого непустого подмножества I множества натуральных чисел система $E_I(A) = \{E_i(A),\ i \in I\}$ является системой Менгера с единицами относительно операции* (4).

В [1] доказано, что $E_I(A)$ есть система Менгера. Из (2) и (3) следует, что полную систему единиц в ней составляют так называемые функции выделения аргумента, определенные формулой

$$x_1 \ldots x_k e^k{}_i = x_i \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{6}$$

для всяких $x_1, \ldots, x_k \in A$.

Теорема. *Для всякой системы Менгера с единицами существует такая универсальная алгебра, что соответствующая система многоместных эндоморфизмов этой алгебры изоморфна данной системе Менгера.*

Доказательство. Пусть дана система Менгера $\{M_i,\ i \in I\}$ с полной системой единиц $\bigcup \{e^k{}_1, \ldots, e^k{}_k | e^k{}_i \in M_k\}$. За основное множество искомой алгебры возьмем множество $A = \Pi M_i$ (прямое произведение множеств M_i). Для каждого индекса $s \in I$ и для каждой упорядоченной совокупности $\boldsymbol{y}_1 =$

$= (y^i{}_1, y^j{}_1, \ldots), \ldots, \boldsymbol{y}_s = (y^i{}_s, y^j{}_s, \ldots)$ из A определим унарную операцию $\omega(\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_s)$ следующим образом

$$\boldsymbol{a}\omega(\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_s) = (y^i{}_1 \ldots y^i{}_s a^s,\ y^j{}_1 \ldots y^j{}_s a^s,\ \ldots) \tag{7}$$

для любого $\boldsymbol{a} = (a^i, a^j, \ldots)$ из A. Множество всех таких унарных операций обозначим через Ω. Так мы построили универсальную алгебру (A, Ω).

Теперь сопоставим каждому элементу $m \in M_k$ в соответствие k-местную функцию g_m на множестве A, которая определена формулой

$$\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k g_m = (x^i{}_1 \ldots x^i{}_k m,\ x^j{}_1 \ldots x^j{}_k m,\ \ldots) \tag{8}$$

для любых $\boldsymbol{x}_1 = (x^i{}_1, x^j{}_1, \ldots), \ldots, \boldsymbol{x}_k = (x^i{}_k, x^j{}_k, \ldots)$ из A.

Все функции, определенные таким образом, являются k-эндоморфизмами алгебры (A, Ω), т. е. при каждой операции $\omega(\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_s)$ выполняется равенство

$$[\boldsymbol{x}_1\omega(\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_s)] \ldots [\boldsymbol{x}_k\omega(\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_s)] g_m = (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k g_m)\,\omega(\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_s) \tag{9}$$

для любых $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in A$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&[\boldsymbol{x}_1\omega(\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_s)] \ldots [\boldsymbol{x}_k\omega(\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_s)] g_m \overset{(7)}{=} \\
&\quad = (y^i{}_1 \ldots y^i{}_s x^s{}_1, \ldots) \ldots (y^i{}_1 \ldots y^i{}_s x^s{}_k, \ldots) g_m \overset{(8)}{=} \\
&\quad = ((y^i{}_1 \ldots y^i{}_s x^s{}_1) \ldots (y^i{}_1 \ldots y^i{}_s x^s{}_k) m, \ldots) \overset{(1)}{=} \\
&\quad = (y^i{}_1 \ldots y^i{}_s (x^s{}_1 \ldots x^s{}_k m), \ldots) \overset{(7)}{=} \\
&\quad = (x^i{}_1 \ldots x^i{}_k m, \ldots)\,\omega(\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_s) \overset{(8)}{=} \\
&\quad = (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k g_m)\,\omega(\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_s).
\end{aligned}$$

Покажем, что соответствие $m \to g_m$ является взаимно-однозначным, т. е. из равенства

$$\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k g_{m_1} = \boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k g_{m_2}$$

для всяких $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in A$ следует равенство $m_1 = m_2$. Пусть в дальнейшем элементы $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_k$ фиксированы следующим образом:

$$\boldsymbol{z}_1 = (z^i{}_1, \ldots, e^k{}_1, \ldots), \ldots, \boldsymbol{z}_k = (z^i{}_k, \ldots, e^k{}_k, \ldots),$$

где $e^k{}_j \in M_k$ — элементы из полной системы единиц данной системы Менгера. Остальные $z^i{}_j$ выбраны из соответствующих множеств произвольно. Приравнивая значения g_{m_1} и g_{m_2} при выбранных таким образом элементах, получим

$$\boldsymbol{z}_1 \ldots \boldsymbol{z}_k g_{m_1} = \boldsymbol{z}_1 \ldots \boldsymbol{z}_k g_{m_2},$$

откуда по (8)

$$\begin{aligned}
&(z^i{}_1 \ldots z^i{}_k m_1, \ldots, e^k{}_1 \ldots e^k{}_k m_1, \ldots) = \\
&= (z^i{}_1 \ldots z^i{}_k m_2, \ldots, e^k{}_1 \ldots e^k{}_k m_2, \ldots).
\end{aligned}$$

Так как элементы прямого произведения равны тогда и только тогда, когда все компоненты равны, то и

$$e^k{}_1 \ldots e^k{}_k m_1 = e^k{}_1 \ldots e^k{}_k m_2.$$

Из-за определения единиц (3), получим равенство $m_1 = m_2$. Значит, построенное соответствие действительно взаимно-однозначное.

Соответствие $m \to g_m$ сохраняет операцию системы Менгера:

$$\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k g_{a_1 \ldots a_p b} = (x^i{}_1 \ldots x^i{}_k (a_1 \ldots a_p b), \ldots) \underset{(1)}{=}$$
$$= ((x^i{}_1 \ldots x^i{}_k a_1) \ldots (x^i{}_1 \ldots x^i{}_k a_p) b, \ldots) \underset{(8)}{=}$$
$$= (x^i{}_1 \ldots x^i{}_k a_1, \ldots) \ldots (x^i{}_1 \ldots x^i{}_k a_p, \ldots) g_b \underset{(8)}{=}$$
$$= (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k g_{a_1}) \ldots (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k g_{a_p}) g_b \underset{(4)}{=}$$
$$= \boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k (g_{a_1} \ldots g_{a_p} g_b)$$

для любых $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in A$, $a_1, \ldots, a_p \in M_k$, $b \in M_p$.

Осталось еще убедиться в том, что k-местными функциями, которые определены формулой (8), исчерпываются все k-эндоморфизмы алгебры (A, Ω). Пусть g — произвольный k-эндоморфизм. Значение его на элементах $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_k$ обозначим через $\boldsymbol{u}$, т. е. $\boldsymbol{z}_1 \ldots \boldsymbol{z}_k g = \boldsymbol{u} = (u^i, \ldots, u^k, \ldots)$. Для любых $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ из A и $s = 1, \ldots, k$

$$\boldsymbol{x}_s = (x^i{}_s, \ldots, x^k{}_s, \ldots) = (x^i{}_1 \ldots x^i{}_k e^k{}_s, \ldots, x^k{}_1 \ldots x^k{}_k e^k{}_s, \ldots) =$$
$$= \boldsymbol{z}_s \omega (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k),$$

т. е. выполняется равенство

$$\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{z}_s \omega (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k) \tag{10}$$

для любых элементов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ из A. Теперь

$$\boldsymbol{z}_1 \ldots \boldsymbol{z}_k g \underset{(10)}{=} [\boldsymbol{z}_1 \omega (\boldsymbol{z}_1 \ldots \boldsymbol{z}_k)] \ldots [\boldsymbol{z}_k \omega (\boldsymbol{z}_1 \ldots \boldsymbol{z}_k)] g \underset{(9)}{=}$$
$$= (\boldsymbol{z}_1 \ldots \boldsymbol{z}_k g) \omega (\boldsymbol{z}_1 \ldots \boldsymbol{z}_k) = \boldsymbol{u} \omega (z_1 \ldots z_k) \underset{(7)}{=}$$
$$= (z^i{}_1 \ldots z^i{}_k u^k, \ldots) \underset{(8)}{=} \boldsymbol{z}_1 \ldots \boldsymbol{z}_k g_{u^k}.$$

Мы нашли k-эндоморфизм $g u^k$, определенный формулой (8) и принимающий с данным k-эндоморфизмом g одинаковое значение на совокупности $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_k$. Пусть $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ — произвольные элементы из A. Тогда, в силу последнего, имеем

$$\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k g \underset{(10)}{=} [\boldsymbol{z}_1 \omega (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k)] \ldots [\boldsymbol{z}_k \omega (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k)] g \underset{(9)}{=}$$
$$= (\boldsymbol{z}_1 \ldots \boldsymbol{z}_k g) \omega (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k) =$$
$$= (\boldsymbol{z}_1 \ldots \boldsymbol{z}_k g_{u^k}) \omega (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k) \underset{(9)}{=}$$
$$= [\boldsymbol{z}_1 \omega (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k)] \ldots [\boldsymbol{z}_k \omega (\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k)] g_{u^k} \underset{(10)}{=}$$
$$= \boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_k g_{u^k}.$$

Это завершает доказательство.

В случае $I = \{1\}$ система Менгера является обычной полугруппой. Следовательно, доказанная теорема вместе с леммой является обобщением известного факта; для полугруппы существует такая универсальная алгебра, что полугруппа изоморфна полугруппе всех эндоморфизмов этой алгебры тогда и только тогда, когда в полугруппе существует единица.

Литература

1. Хион Я. В., m-арные Ω-кольцоиды. Сиб. матем. ж., 1967, 8, № 1, 174—194.
2. Armbrust, M., Schmidt, J., Zum Cayleyschen Darstellungsatz. Math. Ann., 1964, **154**, № 3, 70—72.
3. Birkhoff, G., On groups of automorphisms. Rev. Union. mat. Argent. y Asoc. fis. Argent. 1946, **11**, 155—157.
4. Dicker, R., The substitutive law. Proc. London Math. Soc., 1963, **13**, 493—510.
5. Grätzer, G., Universal algebra. Pennsylvania, 1966.
6. Menger, K., Axiomatic Theory of Functions and Fluents. The Axiomatic Method. Amsterdam, 1959.
7. Menger, K., Algebra of Functions: Past, Present, Future. Rend. Semin. mat. Univ. Roma, 1961, **20**, 403—430.
8. Whitlock, H., A composition algebra for multiplace functions. Math. Ann., 1964, **157**, № 2, 167—178.

Поступило
16 IV 1970

MENGERI SÜSTEEMIDE ESITAMINE MITMEKOHALISTE ENDOMORFISMIDEGA

E. Redi

Resümee

Töös on tõestatud teoreem, et iga ühikutega Mengeri süsteemi jaoks leidub selline universaalne algebra, mille kõigi vastavakohaliste endomorfismide süsteem on isomorfne antud Mengeri süsteemiga. See tulemus üldistab tuntud fakti, et poolrühm on isomorfne mingi universaalse algebra kõigi endomorfismide poolrühmaga parajasti siis, kui temas leidub ühikelement.

REPRESENTATION OF MENGER ALGEBRAS BY MULTIPLACE ENDOMORPHISMS

E. Redi

Summary

It is a well-known fact that a semigroup G is isomorphic to a semigroup $E(A)$ of all endomorphisms of some universal algebra A iff G has a unit element. In the present paper the following generalization of this result is proved: a Menger algebra M is isomorphic to the system of all multiplace endomorphisms of a universal algebra iff M has a full system of units.

ОБ АЛГЕБРЕ ОГРАНИЧЕННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В КОММУТАТИВНОЙ БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЕ С ЕДИНИЦЕЙ

М. Абель

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

Пусть X — топологическое пространство и A — фиксированная комплексная коммутативная банахова алгебра (нормированное кольцо) с единицей. Всюду в дальнейшем вместо комплексной коммутативной банаховой алгебры с единицей будем говорить коротко банахова алгебра или алгебра. Множество всех ограниченных непрерывных функций, определенных на X, со значениями в A, обозначаем через [1] $C^*(X, A)$. Как известно (см. [14, 22]), это множество образует банахову алгебру, если алгебраические операции над функциями определить как обычно поточечно и норму функции f — через [2]

$$\|f\| = \|f\|_{C^*(X,A)} = \sup_x \|f(x)\|_A, \tag{1}$$

где $\| \ \|_A$ есть норма алгебры A, удовлетворяющая условию $\|e_A\|_A = 1$.

Функция $f \in C^*(X, A)$ называется *обратимой*, если в алгебре $C^*(X, A)$ существует обратная функция, т. е. существует функция f^{-1}, удовлетворяющая условию

$$f^{-1}(x) f(x) \equiv f(x) f^{-1}(x) \equiv e_A.$$

---

[1] Множество всех непрерывных не обязательно ограниченных функций, определенных на X, со значениями в A, в литературе обозначается через $C(X, A)$. Если, например, X — бикомпактное пространство, то $C(X, A) = C^*(X, A)$.

[2] Везде в этой статье

$$\sup_{x\in X} f(x), \qquad \sup_{M\in\mathfrak{M}_A} \hat{a}(M) \qquad \text{и} \qquad \sup_{(x,M)\in X\times\mathfrak{M}_A} F(x, M)$$

обозначаем соответственно через

$$\sup_x f(x), \qquad \sup_M \hat{a}(M) \qquad \text{и} \qquad \sup_{(x,M)} F(x, M)$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_A$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(C^*(X, A))$ — множества всех максимальных идеалов алгебр A и $C^*(X, A)$ соответственно, а элементы этих множеств соответственно через M и $\mathbf{M}$. Число, соответствующее элементу $a \in A$ (или функции $f \in C^*(X, A)$) при каноническом гомоморфном отображении алгебры A (соответственно алгебры $C^*(X, A)$) в поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел, определяемом максимальным идеалом $M_0 \in \mathfrak{M}_A$ (соответственно $\mathbf{M}_0 \in \mathfrak{M}$), обозначаем через $a\hat{\ }(M_0)$ (соответственно через $f\hat{\ }(\mathbf{M}_0)$). Для каждого фиксированного элемента $a \in A$ (или функции $f \in C^*(X, A)$) при изменении M в $\mathfrak{M}_A$ (соответственно $\mathbf{M}$ в $\mathfrak{M}$) получаем определенную на $\mathfrak{M}_A$ функцию $a\hat{\ }$ (соответственно определенную на $\mathfrak{M}$ функцию $f\hat{\ }$). Как хорошо известно, в силу топологии, используемой в книге [1], множества $\mathfrak{M}_A$ и $\mathfrak{M}$ будут бикомпактами, т. е. бикомпактными хаусдорфовыми пространствами, а $a\hat{\ }$ и $f\hat{\ }$ — непрерывными функциями на $\mathfrak{M}_A$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Относительно обычных алгебраических операций, множества этих функций образуют алгебры с единицей. Эти алгебры обозначаем как обычно через $A\hat{\ }$ и $C^*(X, A)\hat{\ }$.

Алгебра $A\hat{\ }$ называется *равномерно замкнутой*, если она является банаховным пространством относительно нормы

$$\|a\hat{\ }\| = \sup_M |a\hat{\ }(M)|.$$

В этом случае $A\hat{\ }$ есть равномерно замкнутая подалгебра алгебры $C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Если A — *самосопряженная банахова алгебра*, т. е. банахова алгебра, в которой для каждого элемента $a \in A$ существует такой элемент $\bar{a} \in A$, что [3] $\bar{a}\hat{\ }(M) = \overline{a\hat{\ }(M)}$ для всех $M \in \mathfrak{M}_A$, то алгебра $A\hat{\ }$ всюду плотна в $C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ (см. [7], стр. 115).

Как хорошо известно, для любой банаховой алгебры A

$$\sup_M |a\hat{\ }(M)| = \max_M |a\hat{\ }(M)| \leqslant \|a\|$$

для всех $a \in A$. Для того, чтобы норма алгебры A удовлетворяла условию

$$\|a\| = \max_M |a\hat{\ }(M)|,$$

необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\|a^2\| = \|a\|^2 \tag{2}$$

для всех $a \in A$ (см. [19], стр. 11). Поэтому, если банахова алгебра A удовлетворяет условию (2) для всех $a \in A$, то,

[3] Здесь $\bar{a}\hat{\ }(M)$ — комплексное сопряженное к $a\hat{\ }(M)$ для всех $M \in \mathfrak{M}_A$.

следуя [20], называем алгебру A *банаховой алгеброй с минимальной нормой.*

Банахова алгебра A называется *банаховой *-алгеброй*, если в алгебре A определена инволюция $a \to a^*$, а *B^*-алгеброй*, если кроме того, норма удовлетворяет условию

$$\|aa^*\| = \|a\|^2$$

для всех $a \in A$ (ср. [19], стр. 180).

Аналогично тому, как в [4], стр. 23, топологическое пространство X называем *вполне регулярным пространством*[4], если всякое его одноточечное подмножество замкнуто и для любого замкнутого множества $X_0 \subseteq X$ и любой точки $x_0 \notin X_0$ найдется такая непрерывная на X функция, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для всех $x \in X$, $f(x_0) = 1$ и $f(x) = 0$ при $x \in X_0$.

Вполне регулярное пространство X называется *псевдокомпактным* пространством, если каждая определенная на X вещественная непрерывная функция ограничена на X (см. [15], стр. 67). Каждый бикомпакт есть псевдокомпактное пространство, но существуют псевдокомпактные пространства, которые не являются бикомпактными пространствами (см. [12, 18]).

Как известно (см. [3], стр. 300), любое вполне регулярное пространство X имеет в смысле Стоуна—Чеха максимальное бикомпактное расширение βX такое, что у каждой на X определенной ограниченной непрерывной комплексной функции f существует единственное непрерывное продолжение f^β на βX, т. е. существует такая единственная непрерывная функция f^β, определенная на бикомпакте βX, что $f^\beta(x) = f(x)$ для всех $x \in X$.

В § 3 настоящей статьи найдены необходимые и достаточные условия для обратимости функции в алгебре $C^*(X, A)$ в случае, когда X — псевдокомпактное пространство и A — любая банахова алгебра (теорема 1), и в случае, когда X — любое вполне регулярное пространство, а A — полупростая банахова алгебра[5], для которой алгебра $\hat{A}$ равномерно замкнута (теорема 2).

В § 4 рассматривается как связаны между собой алгебра $C^*(X, A)$ и подалгебры алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ (теоремы 3 и 4). Показывается, что алгебры $C^*(X, A)$ и $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ топологически изоморфны[6], если A — полупростая банахова алгебра, для которой алгебра[7] $\hat{A} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ (теорема 5).

---

[4] Некоторые авторы (например, [5, 9]) называют это пространство *тихоновским пространством.*

[5] Напомним, что банахова алгебра является *полупростой алгеброй*, если пересечение всех ее максимальных идеалов содержит только нулевой элемент.

[6] Взаимно непрерывный изоморфизм называется *топологическим изоморфизмом.*

[7] В данном случае алгебры A и $C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ изоморфны, но необязательно изометричны.

В § 5, при помощи теоремы 5, решается проблема идеалов алгебры $C^*(X, A)$ и показывается, что пространства $\mathfrak{M}$ и $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ — гомеоморфны (теорема 6). Последнее является обобщением результата Юда [22] и, в частности, результата Хауснера [14].

В § 6 описываются все максимальные идеалы алгебры $C(X, A)$ в случае, когда X — псевдокомпактное пространство и A — полупростая самосопряженная банахова алгебра, или A — примарная банахова алгебра, т. е. банахова алгебра, имеющая только один максимальный идеал [8] (теоремы 7 и 8).

В § 7 предполагается, что A и B — полупростые банаховы алгебры, для которых $\hat{A} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ и $\hat{B} = C(\mathfrak{M}_B, \mathbf{C})$, и доказывается, что алгебры $C^*(X, A)$ и $C^*(Y, B)$ топологически изоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны пространства $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ и $\beta(Y \times \mathfrak{M}_B)$ (теорема 9). Если X — псевдокомпактное пространство и A — полупростая банахова алгебра, для которой алгебра $\hat{A} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, то из этой теоремы следует топологическая изоморфность алгебр $C(X, A)$ и $C(\beta X, A)$.

§ 2. Некоторые леммы

Для дальнейшего нам нужны следующие результаты.

Лемма 1. *Алгебры $C^*(X, \mathbf{C})$ и $C(\beta X, \mathbf{C})$ изоморфны.*

Доказательство. Как известно (см. [12], стр. 88, или [15], стр. 55), алгебры [9] $C^*(X, \mathbf{R})$ и $C(\beta X, \mathbf{R})$ изоморфны. Тогда изоморфными являются и алгебры $C^*(X, \mathbf{C})$ и $C(\beta X, \mathbf{C})$ (см. [15], стр. 97).

Лемма 2. *Для того, чтобы функция $f \in C^*(X, \mathbf{C})$ была обратимой в алгебре $C^*(X, \mathbf{C})$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$f^\beta(x) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \beta X. \tag{3}$$

Доказательство. По лемме 1, алгебры $C^*(X, \mathbf{C})$ и $C(\beta X, \mathbf{C})$ изоморфны. Поэтому, для обратимости функции f в алгебре $C^*(X, \mathbf{C})$, необходимо и достаточно, чтобы продолжение этой функции f^β было обратимо в алгебре $C(\beta X, \mathbf{C})$. В силу бикомпактности пространства βX, функция f^β обратима в алгебре $C(\beta X, \mathbf{C})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (3). Значит, выполнение условия (3) дает обратимость функции f в алгебре $C^*(X, \mathbf{C})$.

Лемма 3. *Пусть X и Y — бикомпакты. Для того, чтобы алгебры $C(X, \mathbf{C})$ и $C(Y, \mathbf{C})$ были топологически изоморфны, необходима и достаточна гомеоморфность пространств X и Y.*

---

[8] См. [17].

[9] Через $\mathbf{R}$ обозначаем поле вещественных чисел.

Доказательство. Необходимость см. [4], стр. 25.

Достаточность. Пусть пространства X и Y гомеоморфны. Тогда алгебры $C(X, \mathbf{R})$ и $C(Y, \mathbf{R})$ являются изоморфными (см. [12], стр. 57), откуда следует и изоморфизм между алгебрами $C(X, \mathbf{C})$ и $C(Y, \mathbf{C})$ (см. [15], стр. 97). Этот изоморфизм является топологическим как изоморфизм между полупростыми банаховыми алгебрами (см. [8], стр. 249).

Лемма 4. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *алгебра A является полупростой банаховой алгеброй, для которой алгебра $A^{\wedge}$ равномерно замкнута;*

б) *норма банаховой алгебры A удовлетворяет условию*

$$\|a\| \leqslant C \sup_{M} |a^{\wedge}(M)| \tag{4}$$

для всех $a \in A$, где C — некоторая постоянная, независящая от a;

в) *норма банаховой алгебры A удовлетворяет условию*

$$\|a\|^2 \leqslant C\|a^2\| \tag{5}$$

для всех $a \in A$, где C — некоторая постоянная, независящая от a.

Доказательство см. [7], стр. 103, или [16], стр. 39—40.

Лемма 5. *Если норма банаховой *-алгебры A удовлетворяет условию*

$$\|a\|^2 \leqslant C\|aa^*\| \tag{6}$$

для всех $a \in A$, где C — некоторая постоянная, независящая от a, то A — полупростая банахова алгебра, для которой алгебра $A^{\wedge} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$.

Доказательство см. [7], стр. 118—119.

Лемма 6. *Если X — псевдокомпактное пространство и Y — бикомпакт, то пространство $\beta(X \times Y) = \beta X \times Y$.*

Доказательство. Пространство $X \times Y$ псевдокомпактно, как произведение псевдокомпактного пространства и бикомпакта (см. [21], стр. 229, или [12], теорема 9.14). Поэтому пространство $\beta(X \times Y) = \beta X \times \beta Y = \beta X \times Y$ (см. [13], стр. 371—374, или [11]).

Лемма 7. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *алгебра A является B^*-алгеброй;*

б) *алгебра A является самосопряженной банаховой алгеброй с минимальной нормой.*

Доказательство. Как известно (см. [4], леммы 3 и 5), из утверждения а) следует справедливость утвреждения б).

Пусть теперь справедливо утверждение б). Тогда A — полупростая алгебра. В силу полупростоты и самосопряженности, алгебра A является банаховой *-алгеброй с $a^* = \bar{a}$ для всех $a \in A$ (см. [7], стр. 116). Поскольку

$$\|aa^*\| = \max_M |(aa^*)\hat{}\,(M)| = \max_M |a\hat{}\,(M)|^2 = \|a\|^2$$

для всех $a \in A$, то A есть B^*-алгебра.

Лемма 8. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *алгебра A является самосопряженной банаховой алгеброй, где норма удовлетворяет условию* (5) *для всех $a \in A$;*

б) *алгебра A является полупростой банаховой алгеброй, для которой алгебра $A\hat{} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$.*

Доказательство. Как известно (см. [1], стр. 57), из утверждения а) следует утверждение б).

Пусть теперь справедливо утверждение б). Тогда A — самосопряженная алгебра, а алгебра $A\hat{}$ равномерно замкнута. Значит, по лемме 4, справедливо утверждение а).

§ 3. Обратимость функций в алгебре $C^*(X, A)$

Пусть X — вполне регулярное пространство и A — банахова алгебра. Для каждой функции $f \in C^*(X, A)$ через F будем обозначать определенную на пространстве $X \times \mathfrak{M}_A$ функцию, удовлетворяющую условию

$$F(x, M) = f(x)\hat{}\,(M) \tag{7}$$

для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}_A$. Эта функция принадлежит алгебре $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, ибо она непрерывна на $X \times \mathfrak{M}_A$ (см. [22], лемма 2.2) и, в силу

$$\sup_{(x,M)} |F(x, M)| = \sup_x \sup_M |f(x)\hat{}\,(M)| \leqslant \sup_x \|f(x)\|_A = \|f\|,$$

ограниченна.

Как известно (см. [5], стр. 160), произведение двух вполне регулярных пространств является вполне регулярным пространством. Поскольку каждый бикомпакт есть вполне регулярное пространство (см. [12], стр. 37), то пространство $X \times \mathfrak{M}_A$ вполне регулярно. Поэтому $X \times \mathfrak{M}_A$ имеет максимальное бикомпактное расширение $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$, а для каждой $f \in C^*(X, A)$, у функции F, удовлетворяющей условию (7) для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}_A$, существует единственное продолжение F^β на $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$, причем

$$F^\beta(x, M) = F(x, M)$$

для всех $(x, M) \in X \times \mathfrak{M}_A$.

Предложение 1. *Пусть X — вполне регулярное пространство и A — банахова алгебра. Множество*

$$\mathbf{M}_{x,M} = \{f \in C^*(X, A) : F^\beta(x, M) = 0\},$$

где (x, M) — любая фиксированная точка в $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$, образует максимальный идеал алгебры $C^*(X, A)$.

Доказательство. Пусть для каждой функции $f \in C^*(X, A)$

$$\gamma_{x,M}(f) = F^{\beta}(x, M), \tag{8}$$

где (x, M) — некоторая фиксированная точка в $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$. Обозначим через E функцию, удовлетворяющую условию

$$E(x, M) = e(x)\hat{}\,(M)$$

для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}_A$, где e — единица алгебры $C^*(X, A)$. Поскольку $E \in C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, $E(x, M) \equiv 1$ на $X \times \mathfrak{M}_A$ и алгебра $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ коммутативна, то E — единица алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. По лемме 1, алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ и $C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$ изоморфны. Этот изоморфизм переводит единицу E в единицу E^{β} алгебры $C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$. Следовательно,

$$\gamma_{x,M}(e) = E^{\beta}(x, M) = 1$$

для всех $(x, M) \in \beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ и $\gamma_{x,M}(f) \not\equiv 0$, т. е. функционал $\gamma_{x,M}$ является нетривиальным на $C^*(X, A)$.

Пусть теперь функции $f, g \in C^*(X, A)$ и числа $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$. В силу изоморфизма между алгебрами $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ и $C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$,

$$(\lambda F + \mu G)^{\beta}(x, M) = \lambda F^{\beta}(x, M) + \mu G^{\beta}(x, M)$$

и

$$(FG)^{\beta}(x, M) = F^{\beta}(x, M)\, G^{\beta}(x, M)$$

для всех [10] $(x, M) \in \beta(X \times \mathfrak{M}_A)$. Поэтому

$$\gamma_{x,M}(\lambda f + \mu g) = (\lambda F + \mu G)^{\beta}(x, M) = \lambda \gamma_{x,M}(f) + \mu \gamma_{x,M}(g)$$

и

$$\gamma_{x,M}(fg) = (FG)^{\beta}(x, M) = \gamma_{x,M}(f)\gamma_{x,M}(g)$$

в каждой точке $(x, M) \in \beta(X \times \mathfrak{M}_A)$. Следовательно, если точка $(x, M) \in \beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ фиксирована, то $\gamma_{x,M}$ есть нетривиальный линейный мультипликативный функционал на алгебре $C^*(X, A)$. Поэтому ядро этого функционала представляет собой максимальный идеал алгебры $C^*(X, A)$.

В случае, когда (x, M) — любая фиксированная точка в $X \times \mathfrak{M}_A$, это предложение известно (см. [22], лемма 2.1).

Воспользуясь предложением 1, получаем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть X — псевдокомпактное пространство и A — банахова алгебра. Для того, чтобы функция $f \in C(X, A)$ была обратимой в алгебре $C(X, A)$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$F^{\beta}(x, M) \neq 0 \quad \textit{для всех} \quad (x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}_A. \tag{9}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f обратима в алгебре $C(X, A)$. Тогда f не принадлежит ни одному максимальному идеалу этой алгебры. Если $F^{\beta}(x, M) = 0$ в некоторой точке $(x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}_A$, то, по предложе-

[10] Здесь G — функция, удовлетворяющая условию $G(x, M) = g(x)\hat{}\,(M)$ для всех $(x, M) \in X \times \mathfrak{M}_A$.

нию 1 и лемме 6, функция $f \in \mathbf{M}_{x,M}$. Значит, для обратимости функции f в алгебре $C(X, A)$ необходимо выполнение условия (9).

Достаточность. Пусть выполнено условие (9). Поскольку

$$F^{\beta}(x, M) = f(x)^{\wedge}(M)$$

для всех $(x, M) \in X \times \mathfrak{M}_A$, то $f(x)^{\wedge}(M) \neq 0$ для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}_A$. Поэтому в каждой точке $x \in X$ в алгебре A существует обратный элемент $[f(x)]^{-1}$.

Пусть f^{-1} — функция, удовлетворяющая условию

$$f^{-1}(x) = [f(x)]^{-1} \tag{10}$$

для всех $x \in X$. Эта функция является непрерывной на X, ибо функция f — непрерывна на X и $[f(x)]^{-1}$ — непрерывная функция от $f(x)$ на множестве всех обратимых элементов алгебры A в каждой точке $x \in X$. Значит, функция f обратима в алгебре $C(X, A)$, ибо

$$f^{-1}(x) f(x) = [f(x)]^{-1} f(x) \equiv e_A$$

на X.

Следствие 1. *Пусть X — бикомпакт и A — банахова алгебра. Для того, чтобы функция $f \in C(X, A)$ была обратимой в алгебре $C(X, A)$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$f(x) \overline{\in} M \quad \text{для всех} \quad x \in X \quad \text{и} \quad M \in \mathfrak{M}_A.$$

Доказательство. Поскольку в данном случае $\beta X = X$ и $F^{\beta}(x, M) = f(x)^{\wedge}(M)$ для всех $(x, M) \in X \times \mathfrak{M}_A$, то, по теореме 1, получаем требуемое.

Пусть A — примарная банахова алгебра, M — единственный максимальный идеал алгебры A и ψ — функция, удовлетворяющая условию

$$\psi(x) = f(x)^{\wedge}(M)$$

для всех $x \in X$. Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Пусть X — псевдокомпактное пространство и A — примарная банахова алгебра. Для того, чтобы функция $f \in C(X, A)$ была обратимой в алгебре $C(X, A)$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\psi^{\beta}(x) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \beta X.$$

Пусть

$$K_f = \{\|f^{-1}(x)\|_A : x \in X\}.$$

Если X — вполне регулярное пространство, не являющееся псевдокомпактным пространством и A — любая банахова алгебра, то, вообще говоря, множество K_f не ограничено. Предпологая, что A — полупростая банаховая алгебра, для которой алгебра $A^{\wedge}$ равномерно замкнута, множество K_f является ограниченным. Действительно, имеет место

Теорема 2. *Пусть X — вполне регулярное пространство и A — полупростая банахова алгебра, для которой алгебра $A\hat{}$ равномерно замкнута. Для того, чтобы функция $f \in C^*(X, A)$ была обратимой в алгебре $C^*(X, A)$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$F^\beta(x, M) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad (x, M) \in \beta(X \times \mathfrak{M}_A). \qquad (11)$$

Доказательство. Необходимость. Отметим, что если X не является псевдокомпактным пространством, то, вообще говоря, пространство $\beta(X \times \mathfrak{M}_A) \neq \beta X \times \mathfrak{M}_A$ (см. [13]). Однако, доказательство необходимости условия (11) остается дословно тем же, что и доказательство необходимости условия (9) в теореме 1, поскольку предложение 1 в обеих случаях применимо.

Достаточность. Пусть условие (11) выполнено. Тогда, аналогично тому, как показано в доказательстве теоремы 1, существует на X непрерывная функция f^{-1}, удовлетворяющая условию (10) для всех $x \in X$. Обозначим через F^{-1} функцию, удовлетворяющую условию

$$F^{-1}(x, M) = f^{-1}(x)\hat{}\,(M)$$

для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}_A$. Эта функция непрерывна на $X \times \mathfrak{M}_A$ и является обратной функцией функции F, так как

$$F^{-1}(x, M) F(x, M) \equiv \{[f(x)]^{-1} f(x)\}\hat{}\,(M) \equiv e_A\hat{}\,(M) \equiv 1$$

на $X \times \mathfrak{M}_A$. Поскольку F удовлетворяет условию (11), то $F^{-1} \in C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ по лемме 2. Значит, функция F^{-1} ограничена на $X \times \mathfrak{M}_A$. По лемме 4, алгебра A удовлетворяет условию (4) для всех своих элементов. В силу этого,

$$\|f^{-1}(x)\|_A \leqslant C \sup_M |f^{-1}(x)\hat{}\,(M)| \leqslant C \sup_x \sup_M |F^{-1}(x, M)| = \\ = C \sup_{(x, M)} |F^{-1}(x, M)|.$$

Следовательно, функция $f^{-1} \in C^*(X, A)$.

Следствие 3. *Пусть X — вполне регулярное пространство и A удовлетворяет одному из следующих условий:*

а) *алгебра A является банаховой алгеброй, норма которой удовлетворяет условию (5) для всех $a \in A$;*

б) *алгебра A является банаховой алгеброй с минимальной нормой;*

в) *алгебра A является банаховой *-алгеброй, норма которой удовлетворяет условию (6) для всех $a \in A$;*

г) *алгебра A является B^*-алгеброй.*

Для того, чтобы функция $f \in C^*(X, A)$ была обратимой в алгебре $C^*(X, A)$, необходимо и достаточно выполнение условия (11).

Доказательство следует из теоремы 2, ибо в случаях а) и в) предположения теоремы 2 выполнены по леммам 4 и 5, а б) и г) являются соответственно частными случаями от а) и в).

Замечание 1. Как известно (см. [4], стр. 25), в действительности никогда не удается эффективно построить расширение βX вполне регулярного пространства X, не являющегося бикомпактом. Поэтому, для исследования обратимости функции f в алгебре $C^*(X, A)$, вместо условия (11) удобнее воспользоваться равносильным условием

$$\omega(f) = \inf_{(x,M)\in X\times\mathfrak{M}_A} |f(x)\hat{\ }(M)| > 0, \tag{12}$$

выполнение которого легче проверить.

Покажем равносильность условий (11) и (12). Для этого, пусть выполнено условие (11). Поскольку функция F^β непрерывна на бикомпакте $\beta(X\times\mathfrak{M}_A)$, то

$$\omega(f) = \inf_{(x,M)\in X\times\mathfrak{M}_A} |F^\beta(x,M)| \geqslant \inf_{(x,M)\in\beta(X\times\mathfrak{M}_A)} |F^\beta(x,M)| > 0.$$

Пусть теперь функция $f\in C^*(X,A)$ удовлетворяет условию (12). Тогда, аналогично тому, как в доказательстве теоремы 2, существует на $X\times\mathfrak{M}_A$ непрерывная функция F^{-1}, являющаяся обратной функцией функции F. Так как

$$\sup_{(x,M)} |F^{-1}(x,M)| \leqslant (\omega(f))^{-1},$$

то функция $F^{-1}\in C^*(X\times\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Значит, по лемме 2, необходимо выполнение условия (11).

§ 4. Связь между алгебрами $C^*(X,A)$ и $C^*(X\times\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$

Пусть X — топологическое пространство и A — банахова алгебра. Будем через $C^*{}_A(X\times\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ обозначать образ алгебры $C^*(X,A)$ в алгебре $C^*(X\times\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ при отображении $f\to F$, определяемом равенством (7) для всех $x\in X$ и $M\in\mathfrak{M}_A$.

Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть X — топологическое пространство и A — банахова алгебра. Отображение $f\to F$, определяемое равенством* (7) *для всех $x\in X$ и $M\in\mathfrak{M}_A$, гомоморфно отображает алгебру* $C^*(X,A)$ на подалгебру $C^*{}_A(X\times\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ алгебры $C^*(X\times\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. *Если алгебра A полупроста, то отображение $f\to F$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку отображение $f\to F$ замкнуто относительно алгебраических операций, то алгебра $C^*(X,A)$ гомоморфна подалгебре $C^*{}_A(X\times\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ алгебры $C^*(X\times\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$.

Пусть теперь $f_1 \to F$ и $f_2 \to F$. Тогда для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}_A$

$$f_1(x)\hat{}\,(M) = F(x, M) = f_2(x)\hat{}\,(M),$$

откуда

$$[f_1(x) - f_2(x)]\hat{}\,(M) = 0$$

для всех $M \in \mathfrak{M}_A$ в каждой точке $x \in X$. Если алгебра A полупроста, то $f_1(x) \equiv f_2(x)$ на X, или $f_1 = f_2$. Значит, отображение $f \to F$ является изоморфизмом между алгеброй $C^*(X, A)$ и подалгеброй $C^*{}_A(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Теорема доказана.

Доказанная выше теорема облегчает нам исследовать алгебраические свойства алгебры $C^*(X, A)$, поскольку многие алгебраические свойства для подалгебр алгебры $C^*(X, \mathbf{C})$, известны.

Для дальнейшего нам нужно

Предложение 2. *Пусть X — топологическое пространство и A — банахова алгебра. Алгебра $C^*(X, A)$ полупроста, если такова алгебра A.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ и $f \in C^*(X, A)$ такая, что $f(x_0)\hat{}\,(M) = 0$ для всех $M \in \mathfrak{M}_A$. В силу полупростоты алгебры A, элемент $f(x_0)$ является нулевым элементом алгебры A. Поэтому множество

$$P = \{f \in C^*(X, A) : f(x)\hat{}\,(M) = 0 \ \forall (x, M) \in X \times \mathfrak{M}_A\}$$

содержит только нулевой элемент алгебры $C^*(X, A)$. В силу леммы 2.1 из статьи [22], каждая точка $(x, M) \in X \times \mathfrak{M}_A$ определяет максимальный идеал $\mathbf{M}_{x,M}$ в алгебре $C^*(X, A)$.

Поскольку

$$P = \bigcap_{(x,M) \in X \times \mathfrak{M}_A} \mathbf{M}_{x,M}$$

и радикал алгебры $C^*(X, A)$ принадлежит P, то $C^*(X, A)$ — полупростая алгебра.

Следующая теорема дает нам возможность облегчить исследование топологических свойств алгебры $C^*(X, A)$.

Теорема 4. *Пусть X — топологическое пространство и A — полупростая банахова алгебра, для которой алгебра $\hat{A}$ — равномерно замкнута. Отображение $f \to F$, определяемое равенством (7) для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}_A$, является топологическим изоморфизмом между алгеброй $C^*(X, A)$ и замкнутой подалгеброй $C^*{}_A(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$.*

Доказательство. Пусть $\{F_n\}$ — некоторая фундаментальная последовательность функций в подалгебре $C^*{}_A(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. В силу теоремы 3, отображение $f \to F$, определяемое равенством (7) для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}_A$, является изоморфизмом между алгеброй $C^*(X, A)$ и подалгеброй $C^*{}_A(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Обозначим через $\{f_n\}$ последовательность функций в алгебре $C^*(X, A)$, члены f_n которой при изоморфизме $f \to F$ соответствуют членам F_n последовательности $\{F_n\}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку по лемме 4 норма алгебры A удовлетворяет для всех своих элементов условию (4), то

$$\|f_n - f_m\| \leqslant C \sup_x \sup_M |[(f_n - f_m)(x)]^{\wedge}(M)| =$$
$$= C \sup_{(x,M)} |(F_n - F_m)(x, M)| = C \|F_n - F_m\|.$$

Отсюда следует, что $\{f_n\}$ есть фундаментальная последовательность алгебры $C^*(X, A)$. В силу того, что $C^*(X, A)$ — полное пространство, последовательность $\{f_n\}$ сходится к некоторой функции алгебры $C^*(X, A)$. Обозначим эту функцию через f_0, а функцию, соответствующую функции f_0 при изоморфизме $f \to F$, через F_0. Тогда справедливо

$$\|F_n - F_0\| = \sup_{(x,M)} |[f_n(x) - f_0(x)]^{\wedge}(M)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_x \|f_n(x) - f_0(x)\| = \|f_n - f_0\|.$$

Значит, $C^*_A(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ есть полное пространство относительно нормы алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Поэтому $C^*_A(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ является замкнутой подалгеброй алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ и, следовательно, банаховой алгеброй относительно алгебраических операций и нормы алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. По предложению 2, алгебры $C^*(X, A)$ и $C^*_A(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ полупросты. В силу этого, изоморфизм $f \to F$ является топологическим (см. [8], стр. 249). Теорема доказана.

Возникает вопрос: каким условиям должна удовлетворять банахова алгебра A, чтобы подалгебра $C^*_A(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C}) = C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 5. *Пусть X — топологическое пространство и A — полупростая банахова алгебра с $\hat{A} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Отображение $f \to F$, определяемое равенством (7) для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}_A$, является топологическим*[11] *изоморфизмом между алгебрами $C^*(X, A)$ и $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$.*

Доказательство. Поскольку в данном случае алгебра $A^{\wedge}$ равномерно замкнута, то, по теореме 4, отображение $f \to F$ является топологическим изоморфизмом между алгеброй $C^*(X, A)$ и подалгеброй $C^*_A(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Нам остается показать, что подалгебра $C^*_A(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C}) = C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Для этого пусть F — произвольная функция алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Покажем, что тогда существует функция $f \in C^*(X, A)$, удовлетворяющая условию (7) для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}_A$. Действительно, если $x_0 \in X$ и $M_0 \in \mathfrak{M}_A$, то для лю-

[11] Если A — самосопряженная банахова алгебра с минимальной нормой (или по лемме 7 некоторая B^*-алгебра), то изоморфизм является изометричным.

бого $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $V(M_0)$ точки M_0 и окрестность $U_{M_0}(x_0)$ точки x_0, такие, что

$$|F(x, M) - F(x_0, M_0)| < \varepsilon$$

для всех $x \in U_{M_0}(x_0)$ и $M \in V(M_0)$, ввиду непрерывности функции F на $X \times \mathfrak{M}_A$.

Если M_0 пробегает всё пространство $\mathfrak{M}_A$, то окрестности вида $V(M_0)$ покрывают это пространство. В силу бикомпактности пространства $\mathfrak{M}_A$, из этого покрытия можно выбрать конечное число окрестностей, скажем $V(M_1)$, $V(M_2)$, ..., $V(M_n)$, покрывающие пространство $\mathfrak{M}_A$. Пусть $U_{M_k}(x_0)$ есть окрестности точки $x_0 \in X$, соответствующие окрестностям $V(M_k)$ при $k = 1, 2, \ldots, n$, и

$$U(x_0) = \bigcap_{k=1}^{n} U_{M_k}(x_0).$$

Тогда для всех $M \in \mathfrak{M}_A$ и $x \in U(x_0)$ справедливо

$$|F(x, M) - F(x_0, M)| < 2\varepsilon. \tag{13}$$

В силу полупростоты алгебры A и того, что $A^{\wedge} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, в алгебре A существует единственный элемент a_{x_0}, удовлетворяющий в каждой точке $x_0 \in X$ условию

$$a_{x_0}^{\wedge}(M) = F(x_0, M)$$

для всех $M \in \mathfrak{M}_A$. Пусть теперь f — функция, удовлетворяющая для всех $x \in X$ условию $f(x) = a_x$. Тогда, в силу леммы 4 и условия (13),

$$\|f(x) - f(x_0)\|_A \leqslant C \sup_M |a_x^{\wedge}(M) - a_{x_0}^{\wedge}(M)| =$$

$$= C \sup_M |F(x, M) - F(x_0, M)| \leqslant 2C\varepsilon$$

для всех $x \in U(x_0)$ и

$$\|f(x)\|_A \leqslant C \sup_x \sup_M |a_x^{\wedge}(M)| = C\|F\|.$$

Поэтому функция $f \in C^*(X, A)$ и, следовательно, функция $F \in C^*{}_A(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Значит, подалгебра $C^*{}_A(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C}) = C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Теорема доказана.

Следствие 4. *Если X — вполне регулярное пространство и A — полупростая банахова алгебра с $A^{\wedge} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, то алгебры $C^*(X, A)$ и $C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$ топологически изоморфны.*

Доказательство. По теореме 5 и лемме 1, алгебры $C^*(X, A)$ и $C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$ изоморфны. Поскольку в силу предложения 2 эти алгебры полупросты, то этот изоморфизм топологический.

§ 5. Идеалы в алгебре $C^*(X, A)$

Воспользуясь следствием 4 и результатами относительно идеалов алгебры $C(X, \mathbf{C})$, когда X — бикомпакт, получаем следующий результат.

Теорема 6. *Пусть X — вполне регулярное пространство и A — полупростая банахова алгебра с $\hat{A} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Тогда*

а) *пространства $\mathfrak{M}$ и $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ гомеоморфны;*

б) *всякий максимальный идеал алгебры $C^*(X, A)$ имеет вид $\mathbf{M}_{x,M}$, где (x, M) — некоторая фиксированная точка в $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$;*

в) *всякий замкнутый идеал алгебры $C^*(X, A)$ имеет вид*

$$I_S = \{f \in C^*(X, A) : F^\beta(x, M) = 0 \quad \forall (x, M) \in S\},$$

где S — некоторое фиксированное замкнутое подмножество пространства $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$;

г) *всякий примарный*[12] *идеал алгебры $C^*(X, A)$ максимален.*

Доказательство. По следствию 4, алгебры $C^*(X, A)$ и $C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$ топологически изоморфны. Этот изоморфизм обозначим через ϱ. Как известно (см. [16], стр. 63), сопряженное отображение ϱ^* изоморфизма ϱ является гомеоморфизмом между пространствами $\mathfrak{M}(C^*(X, A))$ и $\mathfrak{M}(C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C}))$. Поскольку пространства $\mathfrak{M}(C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C}))$ и $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ гомеоморфны (см. [4], стр. 24), то отсюда следует справедливость утверждения а).

Каждый идеал алгебры $C^*(X, A)$ при изоморфизме ϱ переходит в некоторый идеал алгебры $C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$, и обратно, причем замкнутые и также максимальные идеалы переходят соответственно в замкнутые и в максимальные идеалы. Как известно (см. [8], стр. 231—232, и [1], стр. 228), всякий максимальный идеал $\mathbf{M}(x, M)$ алгебры $C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$ есть совокупность всех функций $F^\beta \in C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$, равных нулю в некоторой фиксированной точке $(x, M) \in \beta(X \times \mathfrak{M}_A)$, а всякий замкнутый идеал $I(S)$ алгебры $C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$ есть совокупность всех функций $F^\beta \in C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$, равных нулю на некотором фиксированном замкнутом подмножестве S пространства $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$. Поскольку

$$\mathbf{M}_{x,M} = \varrho^{-1}[\mathbf{M}(x, M)]$$

в каждой точке $(x, M) \in \beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ и

$$I_S = \varrho^{-1}[I(S)]$$

для каждого замкнутого подмножества S пространства $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$, то справедливы утверждения б) и в). Итак, *всякий замкнутый идеал алгебры $C^*(X, A)$ есть пересечение всех содержащих его максимальных идеалов.*

---

[12] Замкнутый идеал называется *примарным*, если он содержится только в одном максимальном идеале.

Справедливость утверждения г) следует непосредственно из утверждения в). Теорема доказана.

Утверждение а) теоремы 6 известно в случае, когда X — бикомпакт (см. [14]), а при произвольном вполне регулярном X, когда A является B^*-алгеброй (см. [22], теорема 2), в частности, при $A = \mathbf{C}$ (см. [1, 2, 19]). Утверждение б) теоремы 6 известно при $A = \mathbf{R}$ (см. [12], теорема 7.2).

Следствие 5. *Пусть X — вполне регулярное пространство и A — алгебра, удовлетворяющая одному из следующих условий:*

а) *алгебра A является банаховой $*$-алгеброй, норма которой удовлетворяет условию* (6) *для всех $a \in A$;*

б) *алгебра A является B^*-алгеброй;*

в) *алгебра A является самосопряженной банаховой алгеброй с минимальной нормой.*

Тогда справедливы утверждения а)—г) *теоремы* 6.

Доказательство следует из теоремы 6, ибо в случае а) по лемме 5 алгебра A удовлетворяет предположениям теоремы 6, а б) и в) являются частными случаями условия а) ввиду леммы 7.

Следствие 6. *Пусть X — вполне регулярное пространство и A — полупростая банахова алгебра с $\hat{A} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Тогда всякий нетривиальный линейный мультипликативный функционал алгебры $C^*(X, A)$ имеет вид* (8), *где (x, M) — некоторая фиксированная точка в $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$.*

Доказательство. Доказывая предложение 1, мы показали, что $\gamma_{x,M}$ при $(x, M) \in \beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ являются нетривиальными линейными мультипликативными функционалами на $C^*(X, A)$ для любой банаховой алгебры A. Так как ядра этих функционалов в данном случае дают по теореме 6 все максимальные идеалы алгебры $C^*(X, A)$, а между всеми максимальными идеалами и всеми нетривиальными линейными мультипликативными функционалами имеет место взаимно однозначное соответствие, то всякий нетривиальный линейный мультипликативный функционал алгебры $C^*(X, A)$ имеет вид (8), где $(x, M) \in \beta(X \times \mathfrak{M}_A)$.

В случае, когда X — бикомпакт, следствие 6 известно (см. [14]).

Следствие 7. *Если X — вполне регулярное пространство и A — полупростая банахова алгебра с $\hat{A} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, то алгебра $C^*(X, A)$ регулярна*[13].

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_0$ — произвольное замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{M}$ и $\mathbf{M}_0$ — максимальный идеал алгебры $C^*(X, A)$, не принадлежащий $\mathfrak{M}_0$. По теореме 6, пространства $\mathfrak{M}$ и $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ гомеоморфны. Поэтому образ S_0 под-

[13] См., например, [1].

множества $\mathfrak{M}_0$ при этом гомеоморфизме замкнут в $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$, а образ (x_0, M_0) точки $\mathbf{M}_0$ не принадлежит S_0. Поскольку алгебра $C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$ регулярна, в силу теоремы Урысона, то в алгебре $C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$ существует функция F^β, обращающаяся в нуль на множестве S_0 и отлична от нуля в точке (x_0, M_0).

В силу следствия 4, функция $f = \varrho^{-1}(F^\beta) \in C^*(X, A)$. Поскольку по теореме 6 и следствию 6

$$f\hat{\ }(\mathbf{M}_{x,M}) = \gamma_{x,M}(f) = F^\beta(x, M) \tag{14}$$

для всех $f \in C^*(X, A)$ и $(x, M) \in \beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ (см. [4], стр. 19), то

$$f\hat{\ }(\mathfrak{M}_0) = F^\beta(S_0) = 0$$

и

$$f\hat{\ }(\mathbf{M}_0) = F^\beta(x_0, M_0) \neq 0.$$

Значит, алгебра $C^*(X, A)$ регулярна.

Следствие 8. *Если X — вполне регулярное пространство и A — полупростая банахова алгебра с $A\hat{\ } = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, то граница Шилова*[14] *алгебры $C^*(X, A)$ гомеоморфна пространстве $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$.*

Доказательство. В силу следствия 7, алгебра $C^*(X, A)$ регулярна. Поэтому граница Шилова и пространство $\mathfrak{M}$ совпадают (см. [8], стр. 263). Теперь, воспользуясь теоремой 6, получаем требуемое.

Как известно, каждая B^*-алгебра A изометрически изоморфна алгебре $C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Возникает вопрос: имеется ли полупростая банахова алгебра A с $A\hat{\ } = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, не являющаяся B^*-алгеброй? Покажем, что ответ на этот вопрос положителен. Действительно, пусть $A_0 = C^*(\mathbf{N}, \mathbf{C})_\alpha$ — множество всех последовательностей $x = \{x_n\}$ комплексных чисел x_n, удовлетворяющих условию

$$\sup_n |\alpha_n x_n| < \infty,$$

где $\alpha = \{\alpha_n\}$ — фиксированная последовательность комплексных чисел, причем

$$1 < \inf_n |\alpha_n| < L = \sup_n |\alpha_n| < \infty.$$

Если алгебраические операции между последовательностями определить покоординатно, норму равенством

$$\|x\|_\alpha = \sup_n |\alpha_n x_n|,$$

а инволюцию соотношением $x \to x^* = \{\overline{x_n}\}$, где $\overline{x_n}$ — комплексно сопряженное к x_n, то множество A_0 образует банахову *-ал-

[14] Некоторые авторы называют границы Шилова границей пространства максимальных идеалов (см. [1, 8]).

гебру с единицей $e=\{1\}$ и обладает свойствами $\|e\|_\alpha = L$ и

$$(\|x\|_\alpha)^2 = \sup_n |\alpha_n x_n|^2 \leqslant L \sup_n |\alpha_n x^2{}_n| = L\,\|xx^*\|_\alpha \tag{15}$$

для всех $x \in A_0$.

Как известно (см. [1], стр. 15), каждая последовательность $x \in A_0$ порождает линейный оператор A_x умножения на x, отображающий A_0 в себя, а множество

$$A = \{A_x : x \in A_0\}$$

образует относительно нормы

$$\|A_x\| = \sup_{\|y\|_\alpha \leqslant 1} \|xy\|_\alpha$$

коммутативную банахову алгебру с единицей A_e, причем $\|A_e\| = 1$ и алгебры A и A_0 являются топологически изоморфными. В силу этого изоморфизма и того, что A_0 — банахова *-алгебра, операция $A_x \to (A_x)^* = A_{x^*}$ определяет инволюцию в алгебре A. Так как

$$\|x\|_\alpha \leqslant \|e\|_\alpha \|A_x\| = L\,\|A_x\|$$

для всех $x \in A_0$ (см. [1], стр. 16) и справедливо неравенство (15) для всех $x \in A_0$, то

$$\|A_x\|^2 \leqslant (\|x\|_\alpha)^2 \leqslant L\,\|xx^*\|_\alpha \leqslant L^2\,\|A_{xx^*}\| = \\ = L^2\,\|(A_x)\circ(A_x)^*\|$$

для всех $A_x \in A$. Тогда по лемме 5 алгебра A полупроста и $A\hat{} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Поскольку $L > 1$, то A не является B^*-алгеброй.

Замечание 2. Из теоремы 6 следует теорема 2 в случае, когда A — полупростая банахова алгебра с $A\hat{} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$.

§ 6. Максимальные идеалы алгебры $C(X, A)$

Пусть A — полупростая самосопряженная банахова алгебра. Тогда алгебра $A\hat{}$ является равномерно плотной подалгеброй алгебры $C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Если норма алгебры A удовлетворяет условию (4), то $A\hat{} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ по леммам 4 и 8. В этом случае для нахождения всех максимальных идеалов алгебры $C^*(X, A)$ мы могли пользоваться следствием 4, а в случае, когда норма алгебры A не удовлетворяет условию (4), следствие 4 не применимо. Если X псевдокомпактное пространство, то нам удается найти все максимальные идеалы алгебры $C(X, A)$, независимо от того, удовлетворяет ли норма алгебры A условию (4) или нет.

Для этого нам нужно следующее

Предложение 3. *Если X — псевдокомпактное пространство и A — полупростая самосопряженная банахова алгебра, то алгебра $C(X, A)$ изоморфна самосопряженной*[15] *подалгебре*[16] $C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ *алгебры* $C(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, *которая удовлетворяет условию*

(a) *если функция* $F^\beta \in C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ *удовлетворяет условию* (9), *то обратная функция* $(F^\beta)^{-1} \in C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$.

Доказательство. В силу теоремы 3, алгебра $C(X, A)$ изоморфна подалгебре $C_A(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ алгебры $C(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. По леммам 1 и 6, алгебры $C(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ и $C(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ изоморфны. При этом изоморфизме $C_A(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ переходит на подалгебру $C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ алгебры $C(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Значит, алгебра $C(X, A)$ изоморфна подалгебре $C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ алгебры $C(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Этот изоморфизм будем обозначать через ϱ_A.

Пусть функция $F^\beta \in C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Тогда $f = \varrho_A^{-1}(F^\beta) \in C(X, A)$. Так как алгебра A полупроста и самосопряженна, то она является банаховой *-алгеброй с непрерывной инволюцией, причем $a^* = \bar{a}$ для всех $a \in A$ (см. [7], стр. 116—117). Обозначим через $\bar{f}$ функцию, удовлетворяющую условию $\bar{f}(x) = [f(x)]^*$ для всех $x \in X$. Эта функция непрерывна на X. Поэтому $\bar{f} \in C(X, A)$ и, следовательно, $\bar{F}^\beta = \varrho_A(\bar{f}) \in C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Поскольку для всех $(x, M) \in X \times \mathfrak{M}_A$ справедливо

$$\bar{F}(x, M) = \bar{f}(x)\hat{\ }(M) = [f(x)]^{*\hat{\ }}(M) = \overline{f(x)\hat{\ }(M)} = \overline{F(x, M)},$$

то, в силу леммы 1,

$$\bar{F}^\beta(x, M) = (\operatorname{Re}\bar{F} + i\operatorname{Im}\bar{F})^\beta(x, M) = (\operatorname{Re}F - i\operatorname{Im}F)^\beta(x, M) =$$
$$= (\operatorname{Re}F^\beta - i\operatorname{Im}F^\beta)(x, M) = \overline{F^\beta(x, M)} \tag{16}$$

для всех $(x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}_A$. Значит, для каждой функции $F^\beta \in C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ комплексно сопряженная функция также принадлежит $C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Следовательно, подалгебра $C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ самосопряженна.

Пусть теперь функция $F^\beta \in C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ удовлетворяет условию (9). Тогда по теореме 1 функция $f = \varrho_A^{-1}(F^\beta)$ обратима в алгебре $C(X, A)$. Поэтому $(F^\beta)^{-1} = (F^{-1})^\beta = \varrho_A(f^{-1}) \in C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Предложение доказано.

В силу предложения 3, имеет место

Теорема 7. *Если X — псевдокомпактное пространство и A — полупростая самосопряженная банахова алгебра, то всякий максимальный идеал алгебры $C(X, A)$ имеет вид* $\mathbf{M}_{x,M}$, *где*

[15] Напомним, что подалгебра алгебры $C(X, \mathbf{C})$ самосопряженна, если со всякой функцией она содержит и комплексно-сопряженную функцию.

[16] Если Y — псевдокомпактное пространство, то алгебра $C(Y \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C}) = C^*(Y \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ ввиду псевдокомпактности пространства $Y \times \mathfrak{M}_A$. Поэтому вместо $C^*_A(Y \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ можем написать $C_A(Y \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$.

(x, M) — *некоторая фиксированная точка в* $\beta X \times \mathfrak{M}_A$, *и пространства* $\mathfrak{M}$ *и* $\beta X \times \mathfrak{M}_A$ *гомеоморфны* [17].

Доказательство. По предложению 3, алгебра $C(X, A)$ изоморфна подалгебре $C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ алгебры $C(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, которая самосопряжённа и удовлетворяет условию (а). Так как пространство $\beta X \times \mathfrak{M}_A$ бикомпактно, то всякий максимальный идеал $\mathbf{M}(x, M)$ подалгебры $C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ есть совокупность всех функций $F^\beta \in C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, равных нулю в некоторой фиксированной точке $(x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}_A$ (см. [8], стр. 232). В силу того, что

$$\mathbf{M}_{x,M} = \varrho_A^{-1}[\mathbf{M}(x, M)]$$

для всех $(x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}_A$, всякий максимальный идеал алгебры $C(X, A)$ имеет вид $\mathbf{M}_{x,M}$,где (x, M) — некоторая фиксированная точка в $\beta X \times \mathfrak{M}_A$. Значит, между точками пространства $\beta X \times \mathfrak{M}_A$ и максимальными идеалами алгебры $C(X, A)$ существует взаимно однозначное соответствие $(x, M) \rightarrow \mathbf{M}_{x,M}$.

Аналогично тому, как в доказательстве следствия 6, находим, что каждый нетривиальный линейный мультипликативный функционал алгебры $C(X, A)$ имеет вид (8), где (x, M) — некоторая фиксированная точка в $\beta X \times \mathfrak{M}_A$. Следовательно, в каждой точке $(x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}_A$ имеют место равенства (14) для всех $f \in C(X, A)$ (см. [4], стр. 19). Поэтому прообразом окрестности

$$\{\mathbf{M}_{x,M} \in \mathfrak{M} : |\hat{f_k}(\mathbf{M}_{x,M}) - \hat{f_k}(\mathbf{M}_{x_0,M_0})| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$$

точки $\mathbf{M}_{x_0,M_0} \in \mathfrak{M}_A$ является множество

$$\{(x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}_A : |(F_k)^\beta(x, M) - (F_k)^\beta(x_0, M_0)| < \varepsilon,$$
$$\varepsilon > 0,\quad k = 1, 2, \ldots, n\},$$

где $F_k(x, M) = \hat{f_k(x)}(M)$ для всех $(x, M) \in X \times \mathfrak{M}_A$. В силу непрерывности функций $(F_k)^\beta$ на $\beta X \times \mathfrak{M}_A$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$, это множество является окрестностью точки $(x_0, M_0) \in \beta X \times \mathfrak{M}_A$ как пересечение конечного числа окрестностей точки (x_0, M_0). Значит, бикомпакты $\mathfrak{M}$ и $\beta X \times \mathfrak{M}_A$ гомеоморфны.

Следствие 9. *Пусть* X — *псевдокомпактное пространство и* A — *полупростая самосопряженная банахова алгебра. Тогда*

а) *граница Шилова алгебры* $C(X, A)$ *гомеоморфна пространству* $\beta X \times \mathfrak{M}_A$

и

б) *алгебра* $C(X, A)$ *изоморфна равномерно плотной подалгебре алгебры* $C(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$.

---

[17] Если алгебра A не удовлетворяет условию (4), то подалгебра $C_A(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ алгебры $C(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ не является банаховой алгеброй. Поэтому для доказательства гомеоморфности пространств $\mathfrak{M}$ и $\beta X \times \mathfrak{M}_A$ мы не можем воспользоваться сопряженным отображением $(\varrho_A)^*$ изоморфизма ϱ_A.

Доказательство. Доказывая предложение 3, мы показали, что со всякой функцией f алгебра $C(X, A)$ содержит и функцию $\bar{f}$ такую, что образы $F^\beta = \varrho_A(f)$ и $\bar{F}^\beta = \varrho_A(\bar{f})$ удовлетворяют условию (16) для всех $(x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}_A$. Поэтому, воспользуясь равенством (14), получаем, что

$$\bar{f}\hat{\ }(\mathbf{M}_{x,M}) = \bar{F}^\beta(x, M) = \overline{F^\beta(x, M)} = \overline{f\hat{\ }(\mathbf{M}_{x,M})}$$

для всех $(x, M) \in \beta X \times \mathfrak{M}_A$. Следовательно, $C(X, A)$ является самосопряженной банаховой алгеброй. В силу этого, границей Шилова алгебры $C(X, A)$ является пространство $\mathfrak{M}$ (см. [8], стр. 258). Поскольку по теореме 7 пространства $\mathfrak{M}$ и $\beta X \times \mathfrak{M}_A$ гомеоморфны, то отсюда следует утверждение а).

В силу теоремы 7 и леммы 3, алгебры $C(\mathfrak{M}, \mathbf{C})$ и $C(\beta X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ топологически изоморфны. Отсюда, по леммам 1 и 6, топологически изоморфными являются и алгебры $C(\mathfrak{M}, \mathbf{C})$ и $C(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Так как алгебра $C(X, A)$ самосопряженна, то алгебра $C(X, A)\hat{\ }$ равномерно плотна в $C(\mathfrak{M}, \mathbf{C})$. Поэтому алгебра $C(X, A)\hat{\ }$ переходит при этом изоморфизме на равномерно плотную подалгебру алгебры $C(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ (см. [6], стр. 111). В силу того, что алгебра $C(X, A)$ по предложению 2 полупростота, алгебры $C(X, A)$ и $C(X, A)\hat{\ }$ изоморфны, вследствие чего справедливо утверждение б).

Воспользуясь следствием 9, получаем следующий результат.

Следствие 10. *Пусть X — псевдокомпактное пространство, A — полупростая самосопряженная банахова алгебра и B — полупростая банахова алгерба с $B\hat{\ } = C(\mathfrak{M}_B, \mathbf{C})$. Если пространства $\mathfrak{M}_A$ и $\mathfrak{M}_B$ гомеоморфны, то алгебра $C(X, A)$ изоморфна равномерно плотной подалгебре алгебры $C(X, B)$.*

Доказательство. В силу того, что пространства $\mathfrak{M}_A$ и $\mathfrak{M}_B$ гомеоморфны, пространства $\beta X \times \mathfrak{M}_A$ и $\beta X \times \mathfrak{M}_B$ являются также гомеоморфными. Теперь, по леммам 1, 3 и 6, алгебры $C(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ и $C(X \times \mathfrak{M}_B, \mathbf{C})$ топологически изоморфны. Отсюда, по теореме 5, алгебры $C(X, B)$ и $C(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ являются также топологически изоморфными. В силу следствия 9, алгебра $C(X, A)$ изоморфна равномерно плотной подалгебре алгебры $C(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Эта подалгебра переходит при топологическом изоморфизме на некоторую равномерно плотную подалгебру алгебры $C(X, B)$. Значит, справедливо утверждение следствия.

Теперь откажемся от требования полупростоты и самосопряженности алгебры A и предположим, что A — примарная банахова алгебра. Тогда имеет место

Теорема 8. *Если X — псевдокомпактное пространство и A — примарная банахова алгебра, то всякий максимальный идеал алгебры $C(X, A)$ есть совокупность всех функций $f \in C(X, A)$,* *для которых функция*[18] ψ^β *равна нулю в некоторой фиксированной точке* $x \in \beta X$.

Доказательство. По предложению 1, каждая точка (x, M) с $x \in \beta X$ определяет максимальный идеал

$$\mathbf{M}_x = \{f \in C(X, A) : \psi^\beta(x) = 0\}$$

алгебры $C(X, A)$, ибо $F^\beta(x, M) = \psi^\beta(x)$ для всех $x \in \beta X$.

Пусть теперь $\mathbf{M}$ — какой-нибудь максимальный идеал алгебры $C(X, A)$. Докажем, что найдется точка $x_0 \in \beta X$, в которой для всех $f \in \mathbf{M}$ функция ψ^β равна нулю. Предположим противное. Тогда каждой точке $x_\alpha \in \beta X$ соответствует функция $f_\alpha \in \mathbf{M}$, для которой функция $(\psi_\alpha)^\beta$, где $\psi_\alpha(x) = f_\alpha(x)\hat{\ }(M)$ для всех $x \in X$, удовлетворяет условию

$$(\psi_\alpha)^\beta(x_\alpha) \neq 0.$$

В силу непрерывности функции $(\psi_\alpha)^\beta$ на βX,

$$|(\psi_\alpha)^\beta(x)| \geqslant \sigma(\alpha) > 0 \tag{17}$$

в некоторой окрестности U_α точки x_α. Значит, нами определено покрытие пространства βX при помощи окрестностей U_α. Поскольку пространство βX бикомпактно, то из этого покрытия можно выбрать конечное число окрестностей, скажем

$$U_1, U_2, \ldots, U_n,$$

покрывающие βX.

Пусть f_k — функции в $\mathbf{M}$, для которых $(\psi_k)^\beta$ обладают свойством (17) в окрестностях U_k, а g_k — функции, удовлетворяющие условию

$$g_k(x) = e_A \overline{\psi_k(x)}$$

для всех $x \in X$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Так как

$$\begin{aligned} \|g_k(x) - g_k(x_0)\|_A &= |\overline{f_k(x)\hat{\ }(M)} - \overline{f_k(x_0)\hat{\ }(M)}|\,\|e_A\|_A = \\ &= |[f_k(x) - f_k(x_0)]\hat{\ }(M)| \leqslant \\ &\leqslant \|f_k(x) - f_k(x_0)\|_A, \end{aligned}$$

то функции $g_k \in C(X, A)$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть

$$f_0 = \sum_{k=1}^{n} f_k g_k.$$

Эта функция принадлежит $\mathbf{M}$. Обозначая через ψ_0 функцию, удовлетворяющую условию $\psi_0(x) = f_0(x)\hat{\ }(M)$ для всех $x \in X$, получаем, что[19]

---

[18] См. стр. 59..

[19] Здесь $\overline{\psi}_k(x) = \overline{\psi_k(x)}$ для всех $x \in X$ и $k = 1, 2, \ldots, n$.

$$\psi_0(x) = [\,(\sum_{k=1}^{n} f_k g_k)\,(x)\,]^{\wedge}(M) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(x)\overline{\psi_k(x)} =$$

$$= (\sum_{k=1}^{n} \psi_k \bar{\psi}_k)\,(x)$$

для всех $x \in X$. Поэтому, в силу леммы 1 и условия (17),

$$(\psi_0)^{\beta}(x) = \sum_{k=1}^{n} (\psi_k)^{\beta}(x)\,(\bar{\psi}_k)^{\beta}(x) = \sum_{k=1}^{n} |\psi_k)^{\beta}(x)|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma(k)^2 > 0.$$

Следовательно, функция f_0 обратима в алгебре $C(X, A)$ по следствию 2. Таким образом, функция f_0 не может принадлежать ни одному максимальному идеалу алгебры $C(X, A)$, в частности, идеалу $\mathbf{M}$. Полученное противоречие показывает, что найдется точка $x_0 \in X$, в которой для каждой $f \in \mathbf{M}$ функция ψ^{β} равна нулю. Значит, $\mathbf{M} \in \mathbf{M}_x$, а, в силу максимальности идеала $\mathbf{M}$, справедливо $\mathbf{M} = \mathbf{M}_x$.

Следствие 11. *Если X — псевдокомпактное пространство и A — примарная банахова алгебра, то пространства $\mathfrak{M}$ и βX и граница Шилова алгебры $C(X, A)$ гомеоморфны.*

Доказательство аналогично доказательствам теоремы 7 и следствия 9.

В случае, когда X — бикомпакт, гомеоморфность пространств $\mathfrak{M}$ и X известна (см. [22], теорема 5.2).

§ 7. Изоморфизмы между алгебрами $C^*(X, A)$ и $C^*(Y, B)$

Следующая теорема дает возможность свести исследование топологических свойств пространств к исследованию алгебраических свойств соответствующих алгебр функций и наоборот.

Теорема 9. *Пусть X и Y — вполне регулярные пространства, а A и B — полупростые банаховы алгебры, для которых $\hat{A} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ и $\hat{B} = C(\mathfrak{M}_B, \mathbf{C})$. Для того, чтобы алгебры $C^*(X, A)$ и $C^*(Y, B)$ были топологически изоморфны, необходима и достаточна гомеоморфность пространств $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ и $\beta(Y \times \mathfrak{M}_B)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть алгебры $C^*(X, A)$ и $C^*(Y, B)$ топологически изоморфны. Тогда, по теореме 5 и лемме 1, алгебры $C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$ и $C(\beta(X \times \mathfrak{M}_B), \mathbf{C})$ являются также топологически изоморфными. Поэтому пространства $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ и $\beta(Y \times \mathfrak{M}_B)$ гомеоморфны (см. [4], стр. 25).

Достаточность. Пусть пространства $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ и $\beta(Y \times \mathfrak{M}_B)$ гомеоморфны. Тогда, в силу леммы 3, алгебры $C(\beta(X \times \mathfrak{M}_A), \mathbf{C})$ и $C(\beta(Y \times \mathfrak{M}_B), \mathbf{C})$ топологически изоморфны.

Отсюда, по лемме 1 и теореме 5, топологически изоморфными являются и алгебры $C^*(X, A)$ и $C^*(Y, B)$.

При $A = B = \mathbf{R}$ теорема 9 известна (см. [12], стр. 93).

Полагая в теореме 9 пространство $Y = \beta X$, получаем

Следствие 12. *Пусть X — вполне регулярное пространство, $\hat{A} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ и $\hat{B} = C(\mathfrak{M}_B, \mathbf{C})$. Для того, чтобы алгебры $C^*(X, A)$ и $C(\beta X, B)$ были топологически изоморфны, необходима и достаточна гомеоморфность пространств $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ и $\beta X \times \mathfrak{M}_B$.*

Из следствия 12 непосредственно вытекает

Следствие 13. *Если X — псевдокомпактное пространство и A — полупростая банахова алгебра, для которой алгебра $\hat{A} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, то алгебры $C(X, A)$ и $C(\beta X, A)$ топологически изоморфны.*

Имеют место следующие результаты.

Следствие 14. *Пусть X — псевдокомпактное пространство, а A и B — полупростые банаховы алгебры, для которых $\hat{A} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$* и *$\hat{B} = C(\mathfrak{M}_B, \mathbf{C})$. Если пространства $\mathfrak{M}_A$ и $\mathfrak{M}_B$ гомеоморфны, то алгебры $C(X, A)$ и $C(X, B)$ топологически изоморфны.*

Доказательство. В силу того, что пространства $\mathfrak{M}_A$ и $\mathfrak{M}_B$ гомеоморфны, пространства $\beta X \times \mathfrak{M}_A$ и $\beta X \times \mathfrak{M}_B$ являются также гомеоморфными. Тогда, по лемме 6 и теореме 9, алгебры $C(X, A)$ и $C(Y, B)$ топологически изоморфны.

Аналогично доказывается

Следствие 15. *Пусть X и Y — псевдокомпактные пространства и A — полупростая банахова алгебра с $\hat{A} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$. Если пространства βX и βY гомеоморфны, то алгебры $C(X, A)$ и $C(Y, A)$ топологически изоморфны.*

Замечание 3. Если $X \times \mathfrak{M}_A$ и $Y \times \mathfrak{M}_B$ — вполне регулярные пространства, удовлетворяющие первой аксиоме счетности, то из гомеоморфизма между пространствами $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ и $\beta(Y \times \mathfrak{M}_B)$ следует гомеоморфность пространств $X \times \mathfrak{M}_A$ и $Y \times \mathfrak{M}_B$ (см. [10], стр. 835). Следовательно, в данном случае для изоморфизма между алгебрами $C^*(X, A)$ и $C^*(Y, B)$ необходимо, чтобы пространства $X \times \mathfrak{M}_A$ и $Y \times \mathfrak{M}_B$ были гомеоморфными.

Открытыми остаются, например, следующие вопросы:

1. Если X — любое вполне регулярное пространство и A — полупростая банахова алгебра с $\hat{A} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, то по теореме 6, всякий максимальный идеал алгебры $C^*(X, A)$ имеет вид $\mathbf{M}_{x,M}$ с $(x, M) \in \beta(X \times \mathfrak{M}_A)$. Остается ли это справедливым, если не требовать самосопряженности алгебры A, например, предположив A полупростой банаховой алгеброй, для которой

алгебра $A^{\wedge}$ равномерно замкнута? Как в таком случае описать все замкнутые и все примарные идеалы?

2. Если A — полупростая банахова алгебра, то $C^*(X, A)$ — также полупростая алгебра, по предложению 2. Пусть теперь алгебра $C^*(X, A)$ полупроста. Следует ли отсюда полупростота банаховой алгебры A? Если X — бикомпакт, то ответ является утвердительным. Действительно, пусть $a \in A$ с $a^{\wedge}(M) = 0$ на $\mathfrak{M}_A$, $h \in C(X, \mathbf{C})$ и $g(x) = h(x)a$ на X. Тогда функция $g \in C(X, A)$. Поскольку каждый максимальный идеал $\mathbf{M}_{x,M}$ алгебры $C(X, A)$ при любой банаховой алгебре A имеет вид $\mathbf{M}_{x,M}$, где (x, M) — некоторая фиксированная точка в $X \times \mathfrak{M}_A$ (см. [14]) и в каждой точке $(x, M) \in X \times \mathfrak{M}_A$ справедливо

$$f^{\wedge}(\mathbf{M}_{x,M}) = f(x)^{\wedge}(M)$$

для всех $f \in C(X, A)$, то

$$g^{\wedge}(\mathbf{M}_{x,M}) = g(x)^{\wedge}(M) = h(x)a^{\wedge}(M) = 0$$

в каждой точке $(x, M) \in X \times \mathfrak{M}_A$ для любой функции $h \in C(X, C)$. Поэтому, в силу полупростоты алгебры $C(X, A)$, функция g является нулевой функцией алгебры $C(X, A)$. Значит, из условия $a^{\wedge}(M) = 0$ на $\mathfrak{M}_A$ следует, что a есть нулевой элемент алгебры A. Следовательно, A — полупростая алгебра.

В случае, когда пространство X не является бикомпактом, ответ остается открытым.

3. Как описать все замкнутые и примарные идеалы алгебры $C(X, A)$, если X — псевдокомпактное пространство и A — полупростая самосопряженная банахова алгебра?

4. Если X — псевдокомпактное пространство и A — полупростая банахова алгебра, для которой алгебра $A^{\wedge} = C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, то по следствию 13 алгебры $C(X, A)$ и $C(\beta X, A)$ топологически изоморфны. Остается ли следствие 13 в силе, если алгебра $A^{\wedge} \neq C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ или X не является псевдокомпактным пространством?

5. Учитывая следствие 12, интересно узнать, какими свойствами должно обладать пространство X, чтобы пространства $\beta(X \times Y)$ и $\beta X \times Y$ остались гомеоморфными для произвольного бикомпакта Y, если отказать от требования псевдокомпактности пространства X?

Литература

1. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца. Москва, 1960.
2. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., О различных методах введения топологии в множестве максимальных идеалов нормированного кольца. Матем. сб., 1941, **9**, 25—38.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.

4. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Спектральная теория. Москва, 1966.
5. Келли Дж. Л., Общая топология. Москва, 1968.
6. Куратовский К., Топология, т. 1, Москва, 1966.
7. Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ. Москва, 1956.
8. Наймарк М. А., Нормированные кольца. Москва, 1968.
9. Эдвардс Р., Функциональный анализ. Теория и приложения. Москва, 1969.
10. Čech, E., On bicompact spaces. Ann. Math., 1937, **38**, 823—844.
11. Frolik, Z., The topological product of two pseudocompact spaces. Чехосл. мат. ж., 1960, **10**, № 3, 339—349.
12. Gillman, L., Jerison, M., Rings of continuous functions. Princeton, New Yersey—London, 1960.
13. Glickberg, I., Stone-Čech compactifications of products. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **90**, № 3, 369—383.
14. Hausner, A., Ideals in a certain Banach algebra. Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, 246—249.
15. Hewitt, E., Rings of real-valued continuous functions, I. Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **64**, 45—99.
16. Hoffman, K., Fundamentals of Banach algebras. Curitiba, 1962.
17. Liu, T. S., Commutative Banach algebras having finitly many regular maximal ideals. H. C. Chow Sixtyfift Anniversary vol., Math. Res. Center. Nat. Taiwan Univ. Taipei, 1967, 76—80.
18. Novak, J., On a problem concerning completely regular sets. Fundam. math., 1954, **41**, № 1, 103—104.
19. Rickart, C. E., General theory of Banach algebras. Princeton, New Yersey—London, 1960.
20. Strzelecki, E., Algebras under a minimal norm. Collog. Math., 1963, **11**, № 1, 41—52.
21. Tamano, H., A note on the pseudocomapctness of the product of two spaces. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, Math., 1960, **33**, № 2, 225—230.
22. Yood, B., Banach algebras of continuous functions. Amer. J. Math., 1951, **73**, 30—42.

Поступило
17 IX 1970

PIDEVATE TÕKESTATUD FUNKTSIOONIDE ALGEBRAST, MILLE VÄÄRTUSED KUULUVAD KOMPLEKSSESSE KOMMUTATIIVSESSE ÜHIKUGA BANACHI ALGEBRASSE

M. Abel

Resümee

Olgu $C^*(X,A)$ kõigi pidevate tõkestatud funktsioonide hulk, mis on defineeritud täielikult regulaarsel ruumil X, ning mille väärtused kuuluvad komplekssesse kommutatiivsesse ühikuga Banachi algebrasse A. Hulk $C^*(X,A)$ moodustab ühikuga kommutatiivse Banachi algebra, kui algebralised operatsioonid defineerida nagu tavaliselt funktsioonide korral ning funktsiooni norm seose (1) abil.

Käesolevas artiklis vaadeldakse funktsioonide pööratavust ja ideaale algebras $C^*(X,A)$ juhul, kui X on täiesti regulaarne või pseudokompaktne ruum. Näidatakse, et algebrad $C^*(X,A)$ ja $C^*(X\times\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ on topoloogiliselt isomorfsed mistahes topoloogilise ruumi X ning algebraga $C(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ isomorfse Banach'i algebra A korral, kus $\mathfrak{M}_A$ tähistab algebra A maksimaalsete ideaalide ruumi. Uuritakse, kuidas on omavahel seotud ruumide $X\times\mathfrak{M}_A$ ja $Y\times\mathfrak{M}_B$ topoloogilised ning algebrate $C^*(X,A)$ ja $C^*(Y,B)$ algebralised omadused.

THE ALGEBRA OF ALL BOUNDED CONTINUOUS FUNCTIONS WITH VALUES IN A COMPLEX COMMUTATIVE BANACH ALGEBRA WITH UNIT

M. Abel

Summary

Let $C^*(X,A)$ denote the set of all bounded continuous functions defined over completely regular space X with values in a complex commutative Banach algebra A with unit. If we define addition, multiplication and scalar multiplication in the natural "pointwise" manner and norm by (1), then $C^*(X,A)$ is a commutative Banach algebra with unit.

In the present paper the reversibility of functions in $C^*(X, A)$ is considered in § 3. In § 4 it is proved that algebras $C^*(X, A)$ and $C^*(X \times \mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ are topologically isomorphic when A is a Banach algebra isomorphic to $C^*(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$, where $\mathfrak{M}_A$ denotes the space of all maximal ideals of A, and $\mathbf{C}$ denotes the field of complex numbers. This result makes possible (in § 5) to solve the problem of ideals of algebra $C^*(X, A)$ and to prove that the space $\mathfrak{M}$ of all maximal ideals of algebra $C^*(X, A)$ is homeomorphic to $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ (to the Stone-Čech compactification of the space $X \times \mathfrak{M}_A$). The last result generalizes the result of B. Yood [22] and, in particular, the result of A. Hausner [14]. In § 6 all the maximal ideals of $C^*(X, A)$ are described in the case, when X is a pseudocompact space and A is a semi-simple self-adjoint Banach algebra or primary Banach algebra. In § 7 it is assumed that A and B are isomorphic to $C^*(\mathfrak{M}_A, \mathbf{C})$ and $C^*(\mathfrak{M}_B, \mathbf{C})$ respectively, and it is proved that algebras $C^*(X, A)$ and $C^*(Y, B)$ are isomorphic if and only if the spaces $\beta(X \times \mathfrak{M}_A)$ and $\beta(Y \times \mathfrak{M}_B)$ are homeomorphic.

К ГЕОМЕТРИИ СИСТЕМЫ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Х. Кильп

Кафедра алгебры и геометрии

Введение

В работе изучается геометрия, инвариантно связанная с заданной на пятимерном аналитическом многообразии M_5 системой $S^1{}_{32}$ трех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с тремя неизвестными функциями и двумя независимыми переменными, построенная относительно общей аналитической группы многообразия M_5. Работа выполнена методом продолжений и охватов, основанном на теории бесконечных групп Ли, с использованием методов теории $\mathfrak{G}$-структур. Рассмотрение локальное. Как известно, изучение такой системы сводимо к изучению погруженного аналитического многообразия M_8 с заданной на нем системой Пфаффа в одиннадцатимерном пространстве интегральных элементов M_{11} системы $S^1{}_{32}$ относительно бесконечной группы всех невырожденных аналитических преобразований M_{11} в себя. Переход из данного пространства M_5 в пространство M_{11} интегральных элементов системы $S^1{}_{32}$ с соответствующим преобразованием самой задачи называется продолжением, а пфаффова система, рассматриваемая на продолженном многообразии M_8, — продолжением исходной системы $S^1{}_{32}$. В работе [1] многообразие M_8 в общем случае (§ 1, п. 2—5) рассматривается довольно бегло и с возможной быстротой автор переходит к рассмотрению класса квазилинейных систем, т. е. и к изучению соответствующего специального многообразия M_8.

Целью настоящей работы является подробное исследование многообразия M_8 в общем случае, основанное на изучении инвариантных расслоений многообразия интегральных элементов M_8. Изучено строение трехпараметрического семейства двумерных интегральных площадок в касательном пространстве

$T(M_8)$ в точке многообразия M_8. Выделены инвариантные подпространства в $T(M_8)$, определяющие системы Пфаффа, ассоциированные с данной, выяснены взаимосвязи последних, а также их связи с отдельными уравнениями данной канонизированной системы Пфаффа. Если поля этих инвариантных подпространств из $T(M_8)$ голономны на M_8, то соответствующая система Пфаффа определяет локальное инвариантное расслоение многообразия M_8, где в качестве базы расслоения берется многообразие интегральных многообразий этой системы. При этом изучаются следующие вопросы: какие из инвариантных на M_8 подпространств могут проектироваться из всех точек слоя в инвариантные подпространства на базе расслоения, а какие будут меняться в зависимости от точки слоя; какие из инвариантных подпространств-проекций образуют голономные поля, а также, во что проектируется трехпараметрическое семейство двумерных интегральных площадок и когда семейство-проекция определяет на базе систему дифференциальных уравнений первого порядка, при этом, когда последнюю систему можно рассматривать как проекцию продолжения системы $S^1{}_{32}$. Выделены случаи существования промежуточных интегралов.

Моей работой над этой темой руководил проф. А. М. Васильев, кому я выражаю свою глубокую благодарность.

§ 1. Соответствующая пфаффова $\mathfrak{G}$-структура

1. В результате канонизации объекта нулевого порядка можно пфаффовы формы заданной на M_8 системы Пфаффа включить в число главных форм многообразия M_8, в результате чего сама система Пфаффа запишется в виде [1]

$$\omega^\alpha = 0. \tag{1}$$

Система (1) задает на многообразии M_8 пфаффову $\mathfrak{G}$-структуру со структурной группой $\mathfrak{G}$, оставляющей инвариантным систему (1) в точке. Структурные уравнения такой $\mathfrak{G}$-структуры запишутся в виде

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega^\alpha{}_\beta \wedge \omega^\beta + a^\alpha{}_{ik}\omega^i \wedge \omega^k, \\ d\omega^i &= \omega^i{}_k \wedge \omega^k + \omega^i{}_\alpha \wedge \omega^\alpha, \end{aligned} \tag{2}$$

причем

$$\begin{aligned} da^\alpha{}_{ik} + a^\alpha{}_{lk}\omega^l{}_i + a^\alpha{}_{il}\omega^l{}_k - a^\beta{}_{ik}\omega^\alpha{}_\beta &= \ldots, \\ a^\alpha{}_{ik} &= -a^\alpha{}_{ki}, \end{aligned}$$

(здесь и в дальнейшем троеточие за знаком равенства означает линейную комбинацию главных форм многообразия M_8).

Объект $a^\alpha{}_{ik}$ называется *структурным тензором* $\mathfrak{G}$-структуры

[1] Используемые индексы будут принимать значения: $\lambda, \mu = 1, 2$; $s, r, t = 3, 4, 5$; $i, k, l = 1, 2, 3, 4, 5$; $\alpha, \beta = 6, 7, 8$; $\varepsilon, \varrho, \tau = 1, 2, \ldots, 8$; $a, b = 1, 2, 6, 7, 8$.

или *тензором неголономности системы* (1). Он же определяет основную классификацию систем (1), а тем самым и систем $S^1{}_{32}$.

2. Поскольку система (1) в координатах многообразия равносильна системе $du^\alpha - p^\alpha{}_\lambda dx^\lambda = 0$, то ее система ковариантов правильная относительно дифференциалов независимых переменных x^λ при $\omega^\alpha = 0$. Значит и система (1) должна быть правильной относительно каких-либо двух форм из ω^i. Возьмем в качестве них формы ω^1 и ω^2, т. е. объявляем их независимыми на интегральных многообразиях; тогда $a^\alpha{}_{st} = 0$. Поскольку теперь на первоначально заданном пятимерном многообразии M_5 зависимых и независимых переменных главными формами стали ω^λ, ω^α, которые в силу их строения образуют вполне интегрируемую систему, то $\omega^\lambda{}_s = 0$.

3. Пусть система (1) не является вполне интегрируемой, т. е. объект $a^\alpha{}_{ik}$ не тождественно нулевой. В результате полной канонизации его получится 10 различных видов объекта $a^\alpha{}_{ik}$ (см. [1]. Будем рассматривать случай, когда

$$a^6{}_{31} = a^7{}_{42} = a^8{}_{51} = a^8{}_{52} = 1,$$
$$a^6{}_{13} = a^7{}_{24} = a^8{}_{15} = a^8{}_{25} = -1,$$

а остальные компоненты $a^\alpha{}_{ik}$, равны нулю. Этим выделено некоторое специальное многообразие M_8 с соответствующей системой (1), находящейся в инволюции, которое соответствует самому общему типу систем $S^1{}_{32}$. Системы $S^1{}_{32}$ такого типа имеют три различные характеристики, выделяемые уравнениями $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$, $\omega^1 + \omega^2 = 0$ на интегральных многообразиях системы.

4. Требование инвариантности тензора $a^\alpha{}_{ik}$ на многообразии M_8 сужает структурную группу $\mathfrak{G}$ до $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}$ соотношениями, выражающими формы $\omega^6{}_6 - (\omega^3{}_3 + \omega)$, $\omega^7{}_7 - (\omega^4{}_4 + \omega)$, $\omega^8{}_8 - (\omega^5{}_5 + \omega)$, $\omega^6{}_7$, $\omega^6{}_8$, $\omega^7{}_6$, $\omega^7{}_8$, $\omega^8{}_6$, $\omega^8{}_7$, $\omega^1{}_2$, $\omega^2{}_1$, $\omega^3{}_2$, $\omega^3{}_4$, $\omega^3{}_5$, $\omega^4{}_1$, $\omega^4{}_3$, $\omega^4{}_5$, $\omega^5{}_3$, $\omega^5{}_4$, $\omega^5{}_1 - \omega^5{}_2$ (где через ω обозначается равное значение форм $\omega^1{}_1$ и $\omega^2{}_2$ в точке M_8) через главные формы многообразия M_8. Обозначим коэффициенты разложения форм $\omega^\alpha{}_\beta$ буквой «c», а форм $\omega^i{}_k$ — буквой «a». Обозначим еще через $\omega^5{}_0$ равное значение форм $\omega^5{}_1$ и $\omega^5{}_2$ в точке M_8. Тогда, поскольку $\omega^5{}_1 - \omega^5{}_2 = 2a^5{}_{0i} + 2a^5{}_{0\alpha}\omega^\alpha$, имеем, что $\omega_1{}^5 = \omega^5{}_0 + a^5{}_{0i}\omega^i + a^5{}_{0\alpha}\omega^\alpha$, $\omega^5{}_2 = \omega^5{}_0 - a^5{}_{0i}\omega^i - a^5{}_{0\alpha}\omega^\alpha$. При этом оказывается, что $a^3{}_{31} = 0$, $a^4{}_{42} = 0$, $a^5{}_{51} = a^5{}_{50}$, $a^5{}_{52} = -a^5{}_{50}$.

Подставим полученные соотношения в структурные уравнения (2), продифференцируем их и применим обобщенную и обычную леммы Картана. Получим дифференциальные уравнения коэффициентов и двухиндексных форм. В последние выражения войдут новые трехиндексные формы, независимые от прежних. Оказывается, что $c^\alpha{}_{s\beta}$, $a^s{}_{tr}$, $a^\lambda{}_{s\mu}$, $a^\lambda{}_{\alpha s}$, $a^s{}_{t\lambda}$ являются относительными инвариантами.

§ 2. Полуканонический репер

1. Проведем канонизацию полученных структурных уравнений, сначала с помощью трехиндексных, а затем и с помощью оставшихся двухиндексных форм, в результате чего получим следующие соотношения на коэффициенты:

$$
\begin{gathered}
a^\lambda_{\mu\nu} = a^s_{\mu\nu} = 0,\quad a^1_{\alpha 1} = -a^2_{\alpha 2} \equiv a_\alpha,\\
a^3_{41} = a^3_{51} = a^4_{32} = a^4_{52} = a^5_{32} = a^5_{41} = 0,\\
a^3_{71} = a^3_{81} = a^4_{62} = a^4_{82} = a^5_{71} = a^5_{62} = 0,\\
c^\alpha_{\alpha i} = c^\alpha_{\alpha\beta} = c^\alpha_{s\beta} = 0 \quad (\text{где } s = \alpha - 3,\ \beta \neq \alpha),\\
c^6_{71} = c^7_{62} = c^8_{71} = c^8_{62} = 0,\quad c^6_{81} = c^6_{82} \equiv c^6_{80},\quad c^7_{81} = c^7_{82} \equiv c^7_{80}.
\end{gathered}
$$

После такой канонизации формы ω^λ_α становятся главными, а

$$
\begin{aligned}
&\omega^3_7 = c^6_{57}\omega^5_0 + \ldots, && \omega^4_6 = c^7_{56}\omega^5_0 + \ldots, && \omega^5_6 = c^8_{46}\omega^4_2 + \ldots,\\
&\omega^3_8 = -c^6_{48}\omega^4_2 + \ldots, && \omega^4_8 = -c^7_{58}\omega^3_1 + \ldots, && \omega^5_7 = c^8_{37}\omega^3_1 + \ldots.
\end{aligned}
$$

Выражения для трехиндексных форм, участвовавших в канонизации, пропустим.

Отметим, что канонизация неполная. Свободными остались формы ω^3_6, ω^4_7, ω^5_8, ω^3_{11}, ω^4_{22}, ω^5_{00}, ω^3_{36}, ω^4_{47}, ω^5_{58}, ω^3_{16}, ω^4_{27}, ω^5_{08}. Они входят в дифференциальные уравнения некоторых коэффициентов структурных уравнений с некоторыми относительными инвариантами в качестве коэффициентов при них и в случае отличия от нуля последних возможно провести дальнейшую канонизацию.

2. Оставшиеся коэффициенты подчинены некоторым соотношениям, которые получаются в результате подстановки выражений для $d\omega^\lambda$, $d\omega^s$, $d\omega^\alpha$ в $d(d\omega^\alpha) = 0$, $d(d\omega^\lambda) = 0$. Выпишем из них во-первых ту часть, которая касается относительных инвариантов

$$
\begin{gathered}
a^3_{45} = c^6_{48} = c^6_{57} \equiv c^6,\quad a^4_{35} = c^7_{38} = c^7_{56} \equiv c^7,\quad a^5_{34} = c^8_{37} = -c^8_{46} \equiv c^8,\\
a^3_{34} = a_4,\quad a^3_{35} = a_5,\quad a^4_{34} = a_3,\quad a^4_{54} = a_5,\quad a^5_{53} = a_3,\quad a^5_{45} = a_4,\\
a^3_{32} = a^3_{42} = a^3_{52} = 0,\quad a^4_{31} = a^4_{41} = a^4_{51} = 0,\quad a^5_{31} = a^5_{42} = a^5_{50} = 0,\\
a^1_{42} = a^1_{52} = a^2_{31} = a^2_{51} = 0,\quad a^1_{32} = 2a_3,\quad a^2_{41} = -2a_4,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
a^1_{63} &= c^8_{36}a_5 - 4c^8c^7 - c^7_{36}a_4,\\
a^1_{64} &= c^8_{36}c^6 + c^8a_5 - c^8_{47}c^7 + 4a_3a_4,\\
a^1_{65} &= -2a_3a_5 + c^7_{36}c^6 - c^7_{58}c^8,\\
a^1_{73} &= -4a_3a_4,\\
a^1_{74} &= -c^6_{47}a_3 - 2c^6c^8,\\
a^1_{75} &= -c^6_{47}c^7 + c^6a_3 - c^6_{58}c^8,\\
a^1_{83} &= -4a_3a_5,\\
a^1_{84} &= -c^6_{47}c^7 - c^6_{58}c^8 - c^6a_3,\\
a^1_{85} &= -2c^6c^7 - c^6_{58}a_3,\\
a^2_{63} &= 2c^7c^8 + c^7_{36}a_4,\\
a^2_{64} &= -4a_3a_4,\\
a^2_{65} &= -c^7_{36}c^6 - a_4c^7 + c^7_{58}c^8,\\
a^2_{73} &= c^8_{47}c^7 + c^8a_5 - c^8_{36}c^6 + 4a_3a_4,\\
a^2_{74} &= -c^8_{47}a_5 + 4c^8c^6 + c^6_{47}a_3,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$a^2{}_{75}=-2a_4a_5+c^6{}_{47}c^7+c^6{}_{58}c^8,$$
$$a^2{}_{83}=-c^7{}_{36}c^6+c^7{}_{58}c^8+a_4c^7,$$
$$a^2{}_{84}=-4a_4a_5,$$
$$a^2{}_{85}=-2c^7c^6+c^7{}_{58}a_4,$$

Для коэффициентов получаются еще зависимости

$$a^1{}_{62}=2a_6+c^8{}_{72}c^7-c^7{}_{80}c^8-c^8{}_{61}a_5-c^7{}_{61}a_4,$$
$$a^1{}_{72}=c^6{}_{80}c^8+c^6{}_{72}a_3,\quad a^1{}_{82}=c^6{}_{72}c^7+c^6{}_{80}a_3,$$
$$a^2{}_{71}=-2a_7+c^8{}_{61}c^6+c^8{}_{72}a_5+c^6{}_{80}c^8+c^6{}_{72}a_3,$$
$$a^2{}_{61}=-c^7{}_{80}c^8+c^7{}_{61}a_4,\quad a^2{}_{81}=c^7{}_{80}a_4+c^7{}_{61}c^6,$$
$$a^1{}_{67}=2a^1{}_{62}a_4+a^1{}_{82}c^8,\quad a^1{}_{86}=-2a^1{}_{62}a_5+a^1{}_{72}c^7+c^8{}_{72}a^1{}_{85},$$
$$a^2{}_{67}=2a^2{}_{71}a_3+a^2{}_{81}c^8,\quad a^2{}_{78}=2a^2{}_{71}a_5+a^2{}_{61}c^6+c^8{}_{61}a^2{}_{85},$$
$$a^1{}_{78}=-c^6{}_{72}(-c^7{}_{36}c^6+c^7{}_{58}c^8+a_4c^7)+c^6{}_{47}(-c^7{}_{36}c^6{}_{80}-c^7{}_{80}a_3)+$$
$$+c^6{}_{58}(-c^8{}_{72}a_3-c^8{}_{36}c^6{}_{72})+c^6a^5{}_{83}+c^6{}_{80}(c^8{}_{47}c^7+c^8a_5-c^8{}_{36}c^6)-c^6a^4{}_{73},$$
$$a^2{}_{68}=-c^7{}_{61}a^1{}_{84}+c^7{}_{36}(-c^6{}_{47}c^7{}_{80}-c^6{}_{80}a_4)+c^7{}_{58}(c^8{}_{61}a_4-c^8{}_{47}c^7{}_{61})+$$
$$+c^7a^5{}_{84}+c^7{}_{80}(c^8{}_{36}c^6+c^8a_5-c^8{}_{47}c^7)-c^7a^3{}_{64},$$
$$a^3{}_{72}=c^6{}_{72}c^7{}_{80},\quad a^3{}_{82}=c^6{}_{72}c^7{}_{80},\quad a^4{}_{61}=c^7{}_{80}c^8{}_{61},$$
$$a^4{}_{81}=c^7{}_{61}c^6{}_{80},\quad a^5{}_{62}-a^5{}_{62}=c^8{}_{72}c^7{}_{61},$$
$$a^3{}_{73}=-a_7+c^6{}_{80}c^8,\quad a^4{}_{64}=-a_6+c^7{}_{80}c^8,\quad a^5{}_{65}=-a_6+c^8{}_{60}a_5+$$
$$+c^7{}_{80}c^8-c^7{}_{61}a_4,$$
$$a^3{}_{83}=-a_8+c^6{}_{80}a_3,\quad a^4{}_{84}=-a_8+c^6{}_{80}a_4,\quad a^5{}_{75}=-a_7-c^8{}_{72}a_5-c^6{}_{80}c^8+$$
$$+c^6{}_{72}a_3,$$
$$a^3{}_{74}=a^4{}_{64}=0$$
$$a^3{}_{75}=c^6{}_{78}=c^6{}_{58}c^8{}_{72}=-c^6{}_{47}c^7{}_{80},\quad a^4{}_{65}=c^7{}_{68}=c^7{}_{58}c^8{}_{61}=c^7{}_{36}c^6{}_{80},$$
$$a^5{}_{64}=a^5{}_{73}=c^8{}_{67}=c^8{}_{61}a_4+c^8{}_{47}c^7{}_{61}=-c^8{}_{72}a_3+c^8{}_{36}c^6{}_{72},$$
$$a^3{}_{84}=-c^6{}_{47}c^7{}_{80}-c^6{}_{80}a_4,\quad a^3{}_{85}=-c^6c^7{}_{80}+c^6{}_{80}a_5,$$
$$a^4{}_{83}=-c^7{}_{36}c^6{}_{80}-c^7{}_{80}a_3,\quad a^4{}_{85}=-c^7c^6{}_{80}-c^7{}_{80}a_5,$$
$$a^5{}_{63}=c^8{}_{72}c^7{}_{36}=c^8{}_{61}a_3+c^8c^7{}_{61},\quad a^5{}_{74}=c^8{}_{61}c^6{}_{47}=c^8c^6{}_{72}-c^8{}_{72}a_4,$$
$$a^3{}_{78}=c^6{}_{72}(c^7{}_{80}a_4+c^7{}_{61}c^6)+c^6{}_{80}(a_7+c^8{}_{61}c^6+c^6{}_{80}c^8+c^8{}_{72}a_5+c^6{}_{72}a_3)+$$
$$+c^6{}_{47}c^7{}_{61}c^6{}_{80},$$
$$a^4{}_{68}=c^7{}_{61}(c^6{}_{72}+c^6{}_{80}a_3)+c^6{}_{80}(a_6+c^8{}_{72}c^7-c^7{}_{80}c^8-c^8{}_{61}a_5-c^7{}_{61}a_4)+$$
$$+c^7{}_{36}c^6{}_{72}c^7{}_{80},$$
$$a^5{}_{67}=c^8{}_{61}a_7-c^8{}_{72}(c^7{}_{61}a_4-c^7{}_{80}c^8)-c^8{}_{47}c^7{}_{80}c^8{}_{61}=$$
$$=c^8{}_{61}(c^6{}_{80}c^8+c^6{}_{72}a_3)+c^6{}_{72}a_6-c^8{}_{36}c^6{}_{72}c^7{}_{80}$$

и некоторые квадратичные соотношения.

Оказалось, что все относительные инварианты $a^s{}_{t\lambda}$ равны нулю. За двенадцать независимых среди оставшихся можно брать c^α, $c^6{}_{47}$, $c^6{}_{58}$, $c^7{}_{36}$, $c^7{}_{58}$, $c^8{}_{36}$, $c^8{}_{47}$, a_s. Остальные $a^\lambda{}_{\alpha s}$ и $a^s{}_{tr}$ охватываются ими (см. [1], стр. 463). Отметим, что поскольку все оставшиеся относительные инварианты $c^\alpha{}_{s\beta}$, $a^s{}_{tr}$, $a^\lambda{}_{s\mu}$, $a^\lambda{}_{\alpha s}$ являются коэффициентами разложения форм $\omega^\alpha{}_\beta$, $\omega^s{}_r$, $\omega^\lambda{}_\mu$, $\omega^\lambda{}_\alpha$ соответственно по ω^s, то ими можно характеризовать свойства трехпараметрического семейства двумерных интегральных плоскостей $M_{(3)}$, определенных в каждой точке многообразия зависимых и независимых переменных, поскольку на последнем формы ω^λ, ω^α являются главными, а ω^s — вторичными, но ω^s являются главными на $M_{(3)}$ (см. [2]).

§ 3. Структурные уравнения пространства M_8

Выпишем теперь таким образом канонизированные структурные уравнения пространства M_8:

$$
\begin{aligned}
d\omega^1 = {} & \omega\wedge\omega^1 + a_s\omega^s\wedge\omega^1 + 2a_3\omega^3\wedge\omega^2 + a_\alpha\omega^\alpha\wedge\omega^1 + a^1{}_{\alpha 2}\omega^\alpha\wedge\omega^2 + \\
& + a^1{}_{\alpha s}\omega^\alpha\wedge\omega^s + \frac{1}{2}a^1{}_{\alpha\beta}\omega^\alpha\wedge\omega^\beta, \\
d\omega^3 = {} & \omega^3{}_1\wedge\omega^1 + \omega^3{}_3\wedge\omega^3 + a_4\omega^3\wedge\omega^4 + a_5\omega^3\wedge\omega^5 + c_6\omega^4\wedge\omega^5 + \\
& + \omega^3{}_6\wedge\omega^6 + c^6(\omega^5{}_0\wedge\omega^7 - \omega^4{}_2\wedge\omega^8) + a^3{}_{78}\omega^7\wedge\omega^8 + \\
& + a^3{}_{\alpha l}\omega^\alpha\wedge\omega^l, \text{ где } \alpha\neq 6,\ l\neq 1, \\
d\omega^5 = {} & \omega^5{}_0\wedge(\omega^1+\omega^2) + \omega^5{}_5\wedge\omega^5 + a_3\omega^5\wedge\omega^3 + a_4\omega^4\wedge\omega^5 + c^8\omega^3\wedge\omega^4 + \\
& + \omega^5{}_8\wedge\omega^8 + c^8(\omega^4{}_2\wedge\omega^6 + \omega^3{}_1\wedge\omega^7) + a^5{}_{67}\omega^6\wedge\omega^7 + \\
& + a^5{}_{\alpha l}\omega^\alpha\wedge\omega^l, \text{ где } \alpha\neq 8,\ a^5{}_{62} = a^5{}_{71} = 0, \\
d\omega^6 = {} & \omega^3\wedge\omega^1 + (\omega^3{}_3+\omega)\wedge\omega^6 + c^6{}_{72}\omega^7\wedge\omega^2 + c^6{}_{80}\omega^8\wedge(\omega^1+\omega^2) + \\
& + c^6{}_{78}\omega^7\wedge\omega^8 + c^6{}_{47}\omega^4\wedge\omega^7 + c^6(\omega^4\wedge\omega^8 + \omega^5\wedge\omega^7) + c^6{}_{58}\omega^5\wedge\omega^8, \\
d\omega^8 = {} & \omega^5\wedge(\omega^1+\omega^2) + (\omega^5{}_5+\omega)\wedge\omega^8 + c^8{}_{61}\omega^6\wedge\omega^1 + c^8{}_{72}\omega^7\wedge\omega^2 + \\
& + c^8{}_{67}\omega^6\wedge\omega^7 + c^8{}_{36}\omega^3\wedge\omega^6 + c^8{}_{47}\omega^4\wedge\omega^7 + c^8(\omega^3\wedge\omega^7 - \omega^4\wedge\omega^6)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

и дифференциальные уравнения оставшихся коэффициентов:

$$
\begin{aligned}
& dc^6{}_{72} + c^6{}_{72}(\omega^4{}_4 + \omega - \omega^3{}_3) - c^6{}_{47}\omega^4{}_2 - c^6\omega^5{}_0 = \ldots, \\
& dc^6{}_{80} + c^6{}_{80}(\omega^5{}_5 + \omega - \omega^3{}_3) - c^6\omega^4{}_2 - c^6{}_{58}\omega^5{}_0 = \ldots, \\
& dc^8{}_{61} + c^8{}_{61}(\omega^3{}_3 + \omega - \omega^5{}_5) - c^8{}_{36}\omega^3{}_1 - c^8\omega^4{}_2 = \ldots, \\
& dc^6{}_{78} + c^6{}_{78}(\omega^4{}_4 + \omega + \omega^5{}_5 - \omega^3{}_3) + (c^6{}_{47}c^7 + c^6{}_{58}c^8)\omega^3{}_1 + \\
& \qquad + c^6(\omega^4{}_7 - \omega^5{}_8) = \ldots, \\
& dc^8{}_{67} + c^8{}_{67}(\omega^3{}_3 + \omega + \omega^4{}_4 - \omega^5{}_5) + (c^8{}_{47}c^7 - c^8{}_{36}c^6)\omega^5{}_0 + \\
& \qquad + c^8(\omega^4{}_7 + \omega^3{}_6) = \ldots, \\
& da_6 + a_6(\omega^3{}_3 + \omega) + \frac{1}{2}a^1{}_{63}\omega^3{}_1 - \left(a_5c^8 + \frac{1}{2}a^2{}_{64}\right)\omega^4{}_2 + \\
& \qquad + \left[a_4c^7 + \frac{1}{2}(a^1{}_{65} - a^2{}_{65})\right]\omega^5{}_0 + a_3\omega^3{}_6 = \ldots, \\
& da_8 + a_8(\omega^5{}_5 + \omega) - \left(a_4c^7 - \frac{1}{2}a^1{}_{83}\right)\omega^3{}_1 - \left(a_3c^6 + \frac{1}{2}a^2{}_{84}\right)\omega^4{}_2 + \\
& \qquad + \frac{1}{2}(a^1{}_{85} - a^2{}_{85})\omega^5{}_0 + a_5\omega^5{}_8 = \ldots, \\
& da^1{}_{62} + a^1{}_{62}(\omega^3{}_3 + \omega) + a^1{}_{64}\omega^4{}_2 + a^1{}_{65}\omega^5{}_0 + 2a_3\omega^3{}_6 = \ldots, \\
& da^1{}_{72} + a^1{}_{72}(\omega^4{}_4 + \omega) + a^1{}_{74}\omega^4{}_2 + (a^1{}_{75} + 2a_3c^6)\omega^5{}_0 = \ldots, \\
& da^1{}_{82} + a^1{}_{82}(\omega^5{}_5 + \omega)\,(a^1{}_{84} - 2a_3c^6)\omega^4{}_2 + a^1{}_{85}\omega^5{}_0 = \ldots, \\
& da^1{}_{67} + a^1{}_{67}(\omega^3{}_3 + \omega^4{}_4 + \omega) + a^1{}_{65}c^8\omega^3{}_1 + a^1{}_{75}c^8\omega^4{}_2 + \\
& \qquad + (a^1{}_{63}c^6 - a^1{}_{74}c^7)\omega^5{}_0 - a^1{}_{73}\omega^3{}_6 + a^1{}_{67}\omega^4{}_7 = \ldots, \\
& da^1{}_{68} + a^1{}_{68}(\omega^3{}_3 + \omega^5{}_5 + \omega) - a^1{}_{64}c^7\omega^3{}_1 - (a^1{}_{63}c^6 - a^1{}_{85}c^8)\omega^4{}_2 - \\
& \qquad - a^1{}_{84}c^7\omega^5{}_0 - a^1{}_{83}\omega^3{}_6 + a^1{}_{65}\omega^5{}_8 = \ldots, \\
& da^1{}_{78} + a^1{}_{78}(\omega^4{}_4 + \omega^5{}_5 + \omega) - (a^1{}_{74}c^7 + a^1{}_{85}c^8)\omega^3{}_1 - \\
& \qquad - (a^1{}_{73}c^6 + a^1{}_{83}c^6{}_{47})\omega^4{}_2 - a^1{}_{84}\omega^4{}_7 + a^1{}_{75}\omega^5{}_8 = \ldots, \\
& da^3{}_{72} + a^3{}_{72}(\omega^4{}_4 + 2\omega - \omega^3{}_3) - a^1{}_{72}\omega^3{}_1 + (a^3{}_{74} - c^8{}_{72}c^6)\omega^4{}_2 + \\
& \qquad + a^3{}_{75}\omega^5{}_0 + c^6{}_{72}\omega^3{}_6 - c^6\omega^5{}_{00} = \ldots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&da^3_{82} + a^3_{82}(\omega^5_5 + 2\omega - \omega^3_3) - a^1_{82}\omega^3_1 + a^3_{84}\omega^4_2 + \\
&\qquad + (a^3_{85} + c^7_{80}c^6)\,\omega^5_0 - c^6_{80}\omega^3_6 + c^6\omega^4_{22} = \dots, \\
&da^5_{61} + a^5_{61}(\omega^3_3 + 2\omega - \omega^5_5) + (a^5_{63} - c^7_{61}c^8)\,\omega^3_1 + \\
&\qquad + (a^5_{65} - a_6 - a^2_{61})\,\omega^5_0 - c^8_{61}\omega^5_8 - c^8\omega^4_{22} = \dots, \\
&da^3_{73} + a^3_{73}(\omega^4_4 + \omega) - \frac{1}{2}(a^1_{73} + a_5c^8)\,\omega^3_1 + \left(\frac{1}{2}a^2_{74} - c^6c^8\right)\omega^4_2 + \\
&\qquad + \left[\frac{1}{2}(a^1_{75} + a^2_{75}) - c^6_{47}c^7 - 2c^6a_3\right]\omega^5_0 - a_4\omega^4_7 = \dots \\
&da^3_{83} + a^3_{83}(\omega^5_5 + \omega) - \frac{1}{2}(a^1_{83} + a_4c^7)\,\omega^3_1 + \\
&\qquad + \left(\frac{1}{2}a^2_{84} - c^6_{58}c^8 - a_3c^6\right)\omega^4_2 + \\
&\qquad + \left[\frac{1}{2}(a^1_{85} + a^2_{85}) + c^7c^6\right]\omega^5_0 - a_5\omega^5_8 = \dots, \\
&da^5_{75} + a^5_{75}(\omega^4_4 + \omega) + \left(\frac{1}{2}a^1_{73} - 2a_5c^8 - c^8_{47}c^7\right)\omega^3_1 + \frac{1}{2}a^2_{74}\omega^4_2 + \\
&\qquad + \left[-\frac{1}{2}(a^1_{75} + a^2_{75}) + a_3c^6\right]\omega^5_0 - a_4\omega^4_7 = \dots, \\
&da^3_{74} + a^3_{74}(\omega + 2\omega^4_4 - \omega^3_3) - a^1_{74}\omega^3_1 + c^8_{47}c^6\omega^4_2 + 3c^6a_4\omega^5_0 + \\
&\qquad + c^6_{47}\omega^3_6 = \dots, \\
&da^3_{85} + a^3_{85}(\omega + 2\omega^5_5 - \omega^3_3) - a^1_{85}\omega^3_1 - 3a_5c^6\omega^4_2 + c^7_{58}c^6\omega^5_0 + \\
&\qquad + c^6_{58}\omega^3_6 = \dots, \\
&da^5_{63} + a^5_{63}(\omega + 2\omega^3_3 - \omega^5_5) + c^7_{36}c^8\omega^3_1 + 3a_3c^6\omega^4_2 - \\
&\qquad - (a^1_{63} + a^2_{63})\,\omega^5_0 + c^8_{36}\omega^5_8 = \dots, \\
&da^3_{75} + a^3_{75}(\omega^4_4 + \omega^5_5 + \omega - \omega^3_3) - (a^1_{75} - 2a_3c^6)\,\omega^3_1 - 2a_4c^6\omega^4_2 + \\
&\qquad + a_5c^6\omega^5_0 + c^6(\omega^3_6 + \omega^4_7 - 2\omega^5_8) = \dots, \\
&da^3_{84} + a^3_{84}(\omega^5_5 + \omega + \omega^4_4 - \omega^3_3) - (a^1_{84} - 2a_3c^6)\,\omega^3_1 - 2a_4c^6\omega^4_2 + \\
&\qquad + a_5c^6\omega^5_0 + c^6(\omega^3_6 + \omega^4_7 - 2\omega^5_8) = \dots, \\
&da^5_{64} + a^5_{64}(\omega^3_3 + \omega + \omega^4_4 - \omega^5_5) - 2a_3c^8\omega^3_1 + a_4c^8\omega^4_2 - \\
&\qquad - (a^1_{64} + a^2_{64} - 2a_5c^8)\,\omega^5_0 + c^8(\omega^3_6 + \omega^5_8 + 2\omega^4_7) = \dots, \\
&da^3_{78} + a^3_{78}(\omega^4_4 + \omega^5_5 - \omega^3_3 + 2\omega) - [a^1_{78} + a^3_{74}c^7 + a^3_{85}c^8 - \\
&\qquad - c^6(c^7c^8_{72} - c^8c^7_{80})]\,\omega^3_1 + c^6(-a^3_{73} + a_7 + c^8c^6_{80})\,\omega^4_2 - \\
&\qquad - c^6(a^3_{83} + c^7c^6_{72} - a_8)\,\omega^5_0 - c^6_{78}\omega^3_6 - a^3_{84}\omega^4_7 + a^3_{75}\omega^5_8 - \\
&\qquad - c^6(\omega^4_{72} + \omega^5_{82}) = \dots, \\
&da^5_{67} + a^5_{67}(\omega^3_3 + \omega^4_4 - \omega^5_5 - 2\omega) + c^8(a^5_{65} + a_6 - c^7c^8_{72})\,\omega^3_1 + \\
&\qquad + c^8(a^5_{75} - a_7 + c^6c^8_{61})\,\omega^4_2 - [a^1_{67} + a^2_{67} + a^5_{74}c^7 + c^6a^5_{63} + \\
&\qquad + c^8(c^6c^7_{61} + c^7c^6_{72})]\,\omega^5_0 - a^5_{73}\omega^3_6 + a^5_{64}\omega^4_7 - c^8_{67}\omega^5_8 + \\
&\qquad + c^8(\omega^3_{61} + \omega^4_{72}) = \dots .
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь не выписаны все имеющиеся уравнения, но все пропущенные получаются из выписанных с помощью замены индексов $1 \longleftrightarrow 2$, $3 \longleftrightarrow 4$, $6 \longleftrightarrow 7$, где при этом индексы 0, 5, 8 остаются на месте (надо учесть эту замену и в обозначениях a_s, a_α, c^8, которые после замены приобретают еще знак «—»).

В целях краткости изложения будем и в дальнейшем, где это возможно (т. е. когда рассуждение идет на всем M_8 и относится ко всей системе), пользоваться этим фактом.

§ 4. Строение касательного пространства $T(M_8)$

1. После такой частичной канонизации в каждой точке многообразия M_8 в касательном пространстве $T(M_8)$ выделяется семейство реперов, инфинитезимальные преобразования которых имеют вид

$$\begin{aligned}
de_1 &= -\omega e_1 - \omega^3{}_1 e_3 - \omega^5{}_0 e_5,\\
de_2 &= -\omega e_2 - \omega^4{}_2 e_4 - \omega^5{}_0 e_5,\\
de_3 &= -\omega^3{}_3 e_3,\\
de_5 &= -\omega^5{}_5 e_5,\\
de_4 &= -\omega^4{}_4 e_4,\\
de_6 &= -\omega^3{}_6 e_3 - c^7\omega^5{}_0 e_4 - c^8\omega^4{}_2 e_5 - (\omega^3{}_3 + \omega) e_6,\\
de_7 &= -c^6\omega^5{}_0 e_3 - \omega^4{}_7 e_4 - c^8\omega^3{}_1 e_5 - (\omega^4{}_4 + \omega) e_7,\\
de_8 &= c^6\omega^4{}_2 e_3 + c^7\omega^3{}_1 e_4 - \omega^5{}_8 e_5 - (\omega^5{}_5 + \omega) e_8,
\end{aligned} \tag{6}$$

где c^α — относительные инварианты. Поскольку в уравнения инфинитезимального перемещения репера вошли величины c^α, то мы не можем говорить уже о группе, переводящей это семейство в себя, тем самым и о $\mathfrak{G}$-структуре.

Поскольку мы выбрали линейно независимыми формами на решениях формы ω^1 и ω^2, то интегральные площадки определяются векторами e_1 и e_2. Будем называть двумерное подпространство касательного пространства *плоскостью*. Из формул (6) видно, что плоскости (e_1, e_2) образуют трехпараметрическое семейство $M_{(3)}$ с параметрами $\omega^3{}_1$, $\omega^4{}_2$, $\omega^5{}_0$ на M_8, причем проходят через три инвариантные подпространства (e_1, e_3, e_5), (e_2, e_4, e_5), $(e_1 - e_2, e_3, e_4)$, одномерные подпространства пересечения которых (e_3), (e_4), (e_5) тоже инвариантны. Но такая двумерная плоскость может быть задана и с помощью любых двух векторов вида $e_1 + \lambda e_3 + \nu e_5$, $e_2 + \lambda e_4 + \gamma e_5$. Значит, на двумерных интегральных многообразиях из M_8, к которым эти плоскости являются касательными, выполняются уравнения $\omega^3 = \lambda\omega^1$, $\omega^4 = \mu\omega^2$, $\omega^5 = \gamma(\omega^1 + \omega^2)$, $\omega^\alpha = 0$, или что равносильно

$$\begin{gathered}
\omega^\alpha = 0,\\
\omega^3 \wedge \omega^1 = 0, \quad \omega^4 \wedge \omega^2 = 0, \quad \omega^5 \wedge (\omega^1 + \omega^2) = 0.
\end{gathered} \tag{A}$$

Из полученной системы (A) следует, что $\omega^\alpha = 0$, $d\omega^\alpha = 0$ и наоборот, как и должно быть на интегральных многообразиях.

С помощью формул (4) можно изучать одновременно все интегральные многообразия и не только те, которые касаются векторов e_1, e_2.

2. Системы Пфаффа в M_8 ассоциированные с заданной системой дифференциальных уравнений (А), можно получить, исходя из геометрических соображений, а именно, поскольку система p уравнений Пфаффа в n-мерном многообразии определяется заданием в каждом касательном пространстве $(n-p)$-мерного линейного подпространства, то и найдем последние в $T(M_8)$. При этом, введем для инвариантных подпространств и соответствующих им систем Пфаффа одно обозначение; например, $S_{(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)} \equiv S_{(\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\varepsilon_7\varepsilon_8)}$ означает и подпространство $(\boldsymbol{e}_{\varepsilon_1}\boldsymbol{e}_{\varepsilon_2}, \boldsymbol{e}_{\varepsilon_3})$ и систему $\omega^{\varepsilon_4} = \omega^{\varepsilon_5} = \omega^{\varepsilon_6} = \omega^{\varepsilon_7} = \omega^{\varepsilon_8} = 0$, где $\varepsilon_\rho = 1, \ldots, 8$.

Имеется три пятимерные подпространства

$$S_{136}, \quad S_{247}, \quad S_{058} \tag{H$_3$}$$

(индекс 0 означает вектор $\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ и форму $\omega^1 + \omega^2$), инвариантные соответственно при $c^6 = 0$, $c^7 = 0$, $c^8 = 0$. Условиями полной интегрируемости системы S_{136}, если учесть соотношения (3′) на все коэффициенты, при этом являются

$$\begin{gathered} a^1{}_{72} = a^1{}_{74} = a^1{}_{75} = a^1{}_{78} = a^1{}_{82} = a^1{}_{84} = a^1{}_{85} = a^3{}_{72} = a^3{}_{74} = \\ = a^3{}_{78} = 0, \\ a^3{}_{82} = a^3{}_{84} = a^3{}_{85} = c^6{}_{78} = c^6{}_{58} = c^6{}_{47} = c^6{}_{72} = c^6{}_{80} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Имеется три шестимерных подпространства S_{16}, S_{27}, S_{08}, каждое из которых содержит одно из пятимерных (H$_3$). Условия полной интегрируемости S_{16}:

$$\begin{gathered} a_3 = a^1{}_{7l} = a^1{}_{8l} = 0 \quad (l \neq 1), \qquad a^1{}_{78} = 0, \\ c^6{}_{72} = c^6{}_{80} = c^6{}_{47} = c^6{}_{58} = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Имеется три семимерных подпространства S_1, S_2, S_0, каждое из которых содержит одно из шестимерных и подпространство пересечения двух других шестимерных, которые сами пересекаются по шестимерному S_{12}.

Подпространства (H$_3$) пересекаются соответственно по двумерному $S_{(58)}$, инвариантному при $c^6 = c^7 = 0$, по $S_{(47)}$, инвариантному при $c^6 = c^8 = 0$, и $S_{(36)}$, инвариантному при $c^7 = c^8 = 0$, а условиями полной интегрируемости для этих систем являются соответственно

$$c^6{}_{58} = c^7{}_{58} = 0, \qquad a^3{}_{84} = a^4{}_{58} = 0, \tag{9$_1$}$$

$$c^6{}_{47} = c^8{}_{47} = 0, \qquad a^3{}_{47} = a^5{}_{47} = 0, \tag{9$_2$}$$

$$c^7{}_{36} = c^8{}_{36} = 0, \qquad a^4{}_{36} = a^5{}_{36} = 0. \tag{9$_3$}$$

Имеется три одномерных инвариантных подпространства

$$S_{(3)}, \quad S_{(4)}, \quad S_{(5)} \tag{H$_7$}$$

Соответствующие системы Пфаффа вполне интегрируемы и определяют три системы обыкновенных дифференциальных уравнений, инвариантно присоединенных к нашей системе (А). Понятно, что инвариантны и любые подпространства, натянутые на эти одномерные, а именно $S_{(34)}$, $S_{(35)}$, $S_{(45)}$, соответствующие системы которых вполне интегрируемы при $c^8 = 0$, $c^7 = 0$ и $c^6 = 0$ соответственно, и трехмерное $S_{(345)}$, определяющее вполне интегрируемую систему S_{12678}, которое выделяет пространство зависимых и независимых переменных.

Инвариантны и подпространства, натянутые на пары таких двумерных подпространств из $S_{(34)}$, $S_{(35)}$, $S_{(45)}$ и $S_{(36)}$, $S_{(47)}$, $S_{(58)}$ соответственно, которые пересекаются по одномерному, т. е.

$$S_{(346)},\quad S_{(356)},\quad S_{(458)}$$

при $c^8 = 0$, при $c^7 = 0$ и при $c^6 = 0$ соответственно. Условиями полной интегрируемости определенных ими систем являются соответственно

$$a^1{}_{64} = c^8{}_{47} = c^7{}_{36} = c^8{}_{36} = 0, \tag{10_1}$$
$$a^2{}_{84} = c^6{}_{47} = c^6{}_{58} = c^7{}_{58} = 0, \tag{10_2}$$
$$a^1{}_{65} = c^7{}_{58} = c^7{}_{36} = c^8{}_{36} = 0. \tag{10_3}$$

Имеются еще инвариантные четырех- и пятимерные подпространства, натянутые на подпространства пересечения (H_5), которые при обращении в нуль некоторых геометрических объектов образуют голономные поля, а также некоторые инвариантные подпространства, которые не могут образовать голономного поля.

§ 5. Инвариантное значение некоторых геометрических объектов

1. Можно указать инвариантное значение некоторых геометрических объектов, охваченных вышеуказанными. При $c^8 = 0$ решения систем $S_{(3)}$, $S_{(4)}$ образуют «четырехугольную» 2-ткань в смысле Бляшке, т. е. лежат на одних и тех же двумерных поверхностях — решениях системы $S_{(34)}$ (аналогично обстоит дело с решениями систем $S_{(3)}$, $S_{(5)}$ при $c^7 = 0$ и систем $S_{(4)}$, $S_{(5)}$ при $c^6 = 0$), а решения систем $S_{(3)}$, $S_{(4)}$, $S_{(5)}$ образуют в интегральном многообразии системы $S_{(345)}$ 3-ткань в смысле Бляшке.

Если системы $S_{(58)}$, $S_{(47)}$ (или $S_{(36)}$, $S_{(47)}$ или $S_{(36)}$, $S_{(58)}$) и $S_{(4578)}$ (или $S_{(3467)}$ или $S_{(3568)}$ соответственно) вполне интегрируемы, то решения первых двух образуют четырехугольную 2-ткань, а в случае полной интегрируемости систем $S_{(58)}$, $S_{(47)}$, $S_{(36)}$ и S_{12} решения первых трех образуют 3-ткань в интегральном многообразии S_{12}.

Если системы $S_{(36)}$, $S_{(45)}$ (или $S_{(47)}$, $S_{(35)}$ или $S_{(36)}$, $S_{(58)}$) и $S_{(4578)}$ (или $S_{(3457)}$ или $S_{(3458)}$ соответственно) вполне интегрируемы, то решения первых двух образуют четырехугольную 2-ткань.

В случае полной интегрируемости систем $S_{(36)}$, $S_{(4)}$ (или $S_{(36)}$, $S_{(5)}$ или $S_{(47)}$, $S_{(3)}$ или $S_{(47)}$, $S_{(5)}$ или $S_{(58)}$, $S_{(3)}$ или $S_{(58)}$, $S_{(4)}$) и $S_{(346)}$ (или $S_{(356)}$ или $S_{(347)}$ или $S_{(457)}$ или $S_{(358)}$ или $S_{(458)}$ соответственно) решения первых двух образуют четырехугольную 2-ткань. Наконец, при полной интегрируемости, например, систем $S_{(58)}$, $S_{(346)}$ и $S_{(34568)}$ решения систем $S_{(58)}$, $S_{(346)}$ образуют четырехугольную 2-ткань. Аналогичное верно для систем $S_{(36)}$, $S_{(458)}$ и $S_{(34568)}$, потом $S_{(47)}$, $S_{(358)}$ и $S_{(34578)}$ и т. д.

Сделанные выводы имеют прямое отношение к системе (A). Например, *в случае 2-ткани* $S_{(58)}$, $S_{(47)}$ на $S_{(4578)}$ (*или* $S_{(36)}$, $S_{(45)}$

или $S_{(36)}$, $S_{(4)}$ или $S_{(58)}$, $S_{(346)}$) на $S_{(4578)}$ (или S_{1278} или S_{12578} или S_{127} соответственно) за две (две, три, одну соответственно) из искомых функций системы (A) *естественно взять интегралы системы S_{1236} (S_{1278}, S_{127} соответственно), не являющиеся интегралами системы S_{12}.*

2. Мы изучаем продолжение системы $S^1{}_{32}$ на продолженном многообразии M_8, на котором интегральные поверхности выделяются условиями ω^α, $d\omega^\alpha = 0$, которые равносильны системе (A). Как видно из структурных уравнений (4) или же из уравнений инфинитезимального перемещения касательного репера, инвариантный смысл могут иметь и уравнения $\omega^\alpha = 0$ в отдельности или же взятые попарно в систему.

Определим класс и найдем характеристику для каждого из уравнений $\omega^\alpha = 0$. Известно, что класс пфаффова уравнения в восьмимерном пространстве в общем случае равняется 7. Возможны вырождения в 5 и 3. Условия для этого и системы, к которым сводится характеристическая система при этом сейчас и выпишем. Для уравнения $\omega^6 = 0$ с классом

1) равным 7 характеристическая система приводится к $S_{1235678}$ при $c^6{}_{47} = c^6 = 0$, к $S_{1234678}$ при $c^6 = c^6{}_{58} = 0$,

2) равным 5 характеристическая система приводится к S_{12368} при $c^6{}_{72} = c^6{}_{78} = c^6{}_{47} = c^6{}_{58} = c^6 = 0$, к S_{12367} при $c^6{}_{80} = c^6{}_{47} = c^6{}_{58} = c^6 = 0$, к S_{123467} при $c^6 = c^6{}_{58} = c^6{}_{80} = 0$,

3) равным 3 характеристическая система приводится к S_{136} при $c^6{}_{72} = c^6{}_{80} = c^6{}_{47} = c^6{}_{58} = c^6 = c^6{}_{80} = 0$.

Аналогичное для уравнения $\omega^7 = 0$ получается отсюда заменой индексов, а для уравнения $\omega^8 = 0$ с классом 7 характеристическая система приводима к $S_{1245678}$ при $c^8{}_{36} = c^8 = 0$, к $S_{1235678}$ при $c^8 = c^8{}_{47} = 0$, с классом 5 соответственно к S_{12578} при $c^8{}_{67} = c^8{}_{36} = c^8{}_{47} = c^8 = c^8{}_{61} = 0$, к S_{12568} при $c^8{}_{67} = c^8{}_{36} = c^8{}_{47} = c^8 = c^8{}_{72} = 0$, к S_{124578} при $c^8{}_{36} = c^8 = c^8{}_{61} = 0$, и с классом 3 к S_{058} при $c^8{}_{67} = c^8{}_{36} = c^8{}_{47} = c^8 = c^8{}_{61} = c^8{}_{72} = 0$.

В случае $c^6{}_{47} = c^8{}_{47} = c^6 = c^8 = 0$ уравнения $\omega^6 = 0$, $\omega^8 = 0$ имеют общую характеристическую систему, приводимую к $S_{1235678}$, а в случае $c^6 = c^6{}_{58} = c^6{}_{80} = c^7 = c^7{}_{58} = c^7{}_{80}$ — характеристическую систему, приводимую к S_{123467}, и т. д.

Системы (H_3) являются характеристическими класса 3 для уравнений $\omega^\alpha = 0$, (H_5) и $S_{(36)}$, $S_{(47)}$, $S_{(58)}$ класса 5, а (H_7) — класса 7.

3. Нам будут еще встречаться уравнения $\omega^6 \wedge \omega^1 = 0$, $\omega^7 \wedge \omega^2 = 0$, $\omega^8 \wedge (\omega^1 + \omega^2) = 0$. Определим и для каждого из них его класс и найдем характеристическую систему. В общем случае класс такого уравнения равен 8. Выпишем матрицы характеристических систем, из которых легко уследить и случаи снижения класса и системы, к которым сводится характеристическая система уравнения при этом. Для уравнения $\omega^6 \wedge \omega^1 = 0$:

$$\begin{Vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c^6{}_{72} & c^6{}_{80} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^6{}_{47} & -c^6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^6 & -c^6{}_{58} \\
0 & c^6{}_{72} & 0 & -c^6{}_{47} & -c^6 & 0 & 0 & c^6{}_{78} \\
0 & c^6{}_{80} & 0 & c^6 & c^6{}_{58} & 0 & -c^6{}_{78} & 0 \\
0 & -2a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^1{}_{73} & a^1{}_{83} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^1{}_{74} & a^1{}_{84} \\
0 & 0 & -2a_3 & 0 & 0 & 0 & -a^1{}_{72} & -a^1{}_{82} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^1{}_{75} & a^1{}_{85} \\
0 & -a^1{}_{72} & -a^1{}_{73} & -a^1{}_{74} & -a^1{}_{75} & 0 & 0 & -a^1{}_{78} \\
0 & -a^1{}_{82} & -a^1{}_{83} & -a^1{}_{84} & -a^1{}_{85} & 0 & a^1{}_{78} & 0
\end{Vmatrix}$$

и для уравнения $\omega^8 \wedge (\omega^1 + \omega^2) = 0$:

$$\begin{Vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^8{}_{61} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^8{}_{72} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^8{}_{36} & c^8 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^8 & c^8{}_{47} & 0 \\
c^8{}_{61} & 0 & -c^8{}_{36} & -c^8 & 0 & 0 & c^8{}_{67} & 0 \\
0 & c^8{}_{72} & c^8 & -c^8{}_{47} & 0 & -c^8{}_{67} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^0{}_{63} & a^0{}_{73} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^0{}_{64} & a^0{}_{74} & 0 \\
-a_5 & a_5 & 0 & 0 & 0 & a^0{}_{65} & a^0{}_{75} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -a_5 & a^0{}_{61} & a^0{}_{71} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & a^0{}_{62} & a^0{}_{72} & 0 \\
-a^0{}_{61} & -a^0{}_{62} & -a^0{}_{63} & -a^0{}_{64} & -a^0{}_{65} & -a^0{}_{67} & 0 & 0 \\
-a^0{}_{71} & -a^0{}_{72} & -a^0{}_{73} & -a^0{}_{74} & -a^0{}_{75} & 0 & a^0{}_{67} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{Vmatrix}$$

где $a^0{}_{\alpha s} = a^1{}_{\alpha s} + a^2{}_{\alpha s}$, $a^0{}_{\alpha\lambda} = a^1{}_{\alpha\lambda} + a^2{}_{\alpha\lambda}$ и $a^0{}_{67} = a^1{}_{67} + a^2{}_{67}$.

§ 6. Инвариантные расслоения многообразия M_8; классы систем, проектирующиеся в базы расслоений в системы первого порядка; промежуточные интегралы

1. Рассмотрим на многообразии M_n (у нас $n = 8$) голономные поля инвариантных подпространств $S(p+1, p+2, \ldots, n)$, т. е. случаи, когда соответствующая система $\omega^a = 0$, $a = 1, 2, \ldots, p$ вполне интегрируема. При локальном рассмотрении систему форм ω^a можно рассматривать как совокупность главных форм некоторого p-мерного многообразия M_p. Обращение в нуль форм ω^a фиксирует в M_p точку, а в M_n выделяется $(n-p)$-мерное интегральное многообразие M_{n-p} системы, соответствующее этой точке, на котором формы $\omega^{p+1}, \omega^{p+2}, \ldots$ $\ldots, \omega^n$ линейно независимы, т. е. их можно включить в число

вторичных форм многообразия M_p. Значит, задание вполне интегрируемой системы p форм Пфаффа на многообразии M_n определяет его локальное инвариантное расслоение на $(n-p)$-мерные слои с p-мерной базой M_p. Отображение расслоенного пространства M_n в базу M_p задает отображение касательных пространств, причем, если $Q \in M_n$ и $P \in M_p$ и Q проектируется в P, то $dQ = \omega^a e_a + \omega^h e_h$ проектируется в $dP = \omega^a e_a$, где $\{e_a\}$ — касательный репер к M_p, который является образом репера $\{e_a, e_h\}$, $h = p+1, \ldots, n$ к M_n при этой проекции. При сдвиге точки по слою и произвольном перемещении репера $\{e_a, e_h\}$ при этом репер $\{e_a\}$ переобразуется согласно уравнениям $de_a = \omega_a{}^b e_b$. При сдвиге точки по слою формы ω^a обращаются в нуль.

В $T(M_p)$ отобразятся и инвариантные в $T(M_8)$ подпространства, а также трехпараметрическое семейство $M_{(3)}$ двумерных интегральных площадок системы (A) из $T(M_8)$. В связи с первыми при каждом расслоении представляет интерес выделить такие инвариантные в $T(M_8)$ подпространства, которые при проектировании не будут меняться, т. е. проекции которых не будут зависеть от $\omega^{p+1}, \omega^{p+2}, \ldots, \omega^8$. В связи с проектированием $M_{(3)}$ из всех точек слоя представляет интерес выделить такие расслоения, на базе которого проекция $M_{(3)}$ определяет систему первого порядка или, более того, дает промежуточный интеграл. Изучение проекций $M_{(3)}$ со всего слоя в общем случае требует продолжений, но этим мы заниматься не будем.

Можно проверить, что формулы инфинитезимального перемещения касательного репера $\{e_a\}$ к базе M_p получаются в результате подстановки выражений ω^a в следующие:

$$de_1 = -\left[\omega + \frac{1}{2}(a_s\omega^s + a_\alpha\omega^\alpha)\right]e_1 +$$

$$+\left(a^4\omega^4 - \frac{1}{2}a^2{}_{\alpha 1}\omega^\alpha\right)e_2 - \omega^3{}_1 e_3 - \frac{1}{2}(a^4{}_{61}\omega^6 + a^4{}_{81}\omega^8)e_4 -$$

$$-\left(\omega^5{}_0 + \frac{1}{2}a^5{}_{61}\omega^6\right)e_5 - \left(\omega^3 + \frac{1}{2}c^6{}_{80}\omega^8\right)e_6 -$$

$$-\frac{1}{2}(c^7{}_{61}\omega^6 + c^7{}_{80}\omega^8)e_7 - \left(\omega^5 + \frac{1}{2}c^8{}_{61}\omega^6\right)e_8,$$

$$de_3 = \frac{1}{2}(a_3\omega^1 + 2a_3\omega^2 + a^1{}_{\alpha 3}\omega^\alpha)e_1 - \frac{1}{2}(a_3\omega^2 - a^2{}_{\alpha 3}\omega^\alpha)e_2 -$$

$$-\left[\omega^3{}_3 - \frac{1}{2}(a_4\omega^4 - a_5\omega^5 + a^3{}_{73}\omega^7 + a^3{}_{83}\omega^8)\right]e_3 +$$

$$+\frac{1}{2}(a_3\omega^7 + c^7\omega^5 - a^4{}_{63}\omega^6 - a^4{}_{83}\omega^8)e_4 -$$

$$-\frac{1}{2}(a_3\omega^5 - c_8\omega^4 + a^5{}_{63}\omega^6 + a^5{}_{73}\omega^7)e_5 +$$

$$+\frac{1}{2}(c^7{}_{36}\omega^6+c^7\omega^8)e_7+\frac{1}{2}(c^8{}_{36}\omega^6+c^8\omega^7)e_8,$$

$$de_5=\frac{1}{2}(a_5\omega^1+a^1{}_{\alpha 5}\omega^\alpha)e_1-\frac{1}{2}(a_5\omega^2-a^2{}_{\alpha 5}\omega^\alpha)e_2-$$

$$-\frac{1}{2}(a_5\omega^3+c^6\omega^4+a^3{}_{75}\omega^7+a^3{}_{85}\omega^8)e_3+$$

$$+\frac{1}{2}(a_5\omega^4-c^7\omega^3-a^4{}_{65}\omega^6-a^4{}_{85}\omega^8)e_4-$$

$$-\left[\omega^5{}_5-\frac{1}{2}(a_3\omega^3-a_4\omega^4-a^5{}_{65}\omega^6-a^5{}_{75}\omega^7)\right]e_5+$$

$$+\frac{1}{2}(c^6\omega^7+c^6{}_{58}\omega^8)e_6+\frac{1}{2}(c^7\omega^6+c^7{}_{58}\omega^8)e_7,$$

$$de_6=\frac{1}{2}(a^1{}_{6l}\omega^l+a^1{}_{6\alpha}\omega^\alpha)e_1+\frac{1}{2}(a^2{}_{6l}\omega^l+a^2{}_{6\alpha}\omega^\alpha)e_2-$$

$$-\omega^3{}_6e_3-\left[c^7\omega^5{}_0-\frac{1}{2}(a^4{}_{68}\omega^8-a^4{}_{6l}\omega^l)\right]e_4-$$

$$-\left[c^8\omega^4{}_2-\frac{1}{2}(a^5{}_{67}\omega^7-a^5{}_{6l}\omega^l)\right]e_5-(\omega^3{}_3+\omega)e_6+$$

$$+\frac{1}{2}(c^7{}_{61}\omega^1+c^7{}_{68}\omega^8-c^7{}_{36}\omega^3-c^7\omega^5)e_7+$$

$$+\frac{1}{2}(c^8{}_{61}\omega^1+c^8{}_{67}\omega^7-c^8{}_{36}\omega^3+c^8\omega^4)e_8,$$

$$de_8=\frac{1}{2}(a^1{}_{8l}\omega^l+a^1{}_{8\alpha}\omega^\alpha)e_1+\frac{1}{2}(a^2{}_{8l}\omega^l+a^2{}_{8\alpha}\omega^\alpha)e_2-$$

$$-\left[c^6\omega^4{}_2+\frac{1}{2}(a^3{}_{78}\omega^7-a^3{}_{8l}\omega^l)\right]e_3-$$

$$-\left[c^7\omega^3{}_1+\frac{1}{2}(a^4{}_{68}\omega^6-a^4{}_{8l}\omega^l)\right]e_4-\omega^5{}_8e_5+$$

$$+\frac{1}{2}[c^6{}_{80}(\omega^1+\omega^2)-c^6{}_{78}\omega^7-c^6\omega^4-c^6{}_{58}\omega^5]e_6+$$

$$+\frac{1}{2}[c^7{}_{80}(\omega^1+\omega^2)-c^7{}_{68}\omega^6-c^7\omega^3-c^7{}_{58}\omega^5]e_7-$$

$$-(\omega^5{}_5+\omega)e_8, \tag{11}$$

где $a^4{}_{62}=a^5{}_{62}=a^3{}_{81}=a^4{}_{82}=a^3{}_{71}=a^5{}_{71}=0$. Когда ссылаются на формулы (11), то подразумеваются выражения для всех восьми касательных векторов, где выражения для de_2, de_4, de_7 получаются указанной заменой индексов из выписанных выражений для de_1, de_3, de_6.

2. В качестве базы расслоения M_p берем множество первых интегралов M_{12678} вполне интегрируемой системы S_{12678}, само являющееся многообразием M_5 и рассмотрим проекцию в касательное пространство базы вдоль слоя M_{8-p} с главными формами ω^3, ω^4, ω^5. В уравнения инфинитезимального перемещения касательного к базе репера коэффициентами являются относительные инварианты a_s, $a^\lambda{}_{\alpha s}$, $c^\alpha{}_{\beta s}$. Инвариантными могут быть следующие образы:

1) прямые: $S_{(6)}$ при $a^\lambda{}_{\alpha s} = c^7{}_{36} = c^8{}_{36} = c^7 = c^8 = 0$, в которую проектируются $S_{(36)}$, $S_{(346)}$, $S_{(356)}$, $S_{(3456)}$ из $T(M_8)$; $S_{(8)}$ при $a^\lambda{}_{8s} = c^6 = c^7 = c^6{}_{58} = c^7{}_{58} = 0$, в которую проектируются $S_{(58)}$, $S_{(358)}$, $S_{(458)}$, $S_{(3458)}$ из $T(M_8)$;

2) плоскости: $S_{(67)}$ при $a^\lambda{}_{6s} = a^\lambda{}_{7s} = c^8{}_{36} = c^8{}_{47} = c^8 = 0$, в которую проектируются S_{1281}, S_{1258} из $T(M_8)$; плоскость $S_{(78)}$ при $a^\lambda{}_{7s} = a^\lambda{}_{8s} = c^6{}_{47} = c^6{}_{58} = c^6 = 0$ в которую проектируются S_{126}, S_{1236} из $T(M_8)$;

3) трехмерные подпространства: S_{12} при $a^\lambda{}_{\alpha s} = 0$, в которую проектируется S_{12} из $T(M_8)$; подпространство S_{16} при $a_3 = a^1{}_{75} = a^1{}_{83} = c^6{}_{47} = c^6{}_{58} = c^6 = 0$, в которую проектируются S_{16}, S_{136} из $T(M_8)$; подпространство S_{08} при $a^1{}_{\alpha s} - a^2{}_{\alpha s} = 0$, $\alpha \neq 8$, $c^8{}_{36} = c^8{}_{47} = c^8 = 0$, в которую проектируются S_{08}, S_{058} из $T(M_8)$;

4) четырехмерные подпространства: S_2 при $a^1{}_{\alpha s} = 0$, в которую проектируется S_2 из $T(M_8)$; подпространство S_0 при $a^1{}_{\alpha s} - a^2{}_{\alpha s} = 0$, в которую проектируется S_0 из $T(M_8)$;

нулевую проекцию имеют $S_{(3)}$, $S_{(5)}$, $S_{(34)}$, $S_{(35)}$, $S_{(345)}$ из $T(M_8)$.

Оказывается, что подпространства, которые могут иметь инвариантную проекцию, могут образовать голономные поля на M_8 *и наоборот.*

Проекция $M_{(3)}$ со всего слоя зависит существенно от трех параметров ω^3, ω^4, ω^5 и на базе (т. е. в пространстве зависимых и независимых переменных) *задана произвольная система трех уравнений с тремя неизвестными функциями.* Если же $c^\alpha = c^6{}_{47} = c^6{}_{58} = c^7{}_{36} = c^7{}_{58} = c^8{}_{36} = c^8{}_{47} = 0$, тогда как следствие равны нулю $a^\lambda{}_{\alpha s}$, т. е. инвариантно выделяется подпространство S_{12}. Если еще потребовать $a_s = 0$, то приобретут инвариантный смысл подпространства S_{16}, S_{27}, S_{08}, и систему можно записать в виде $\omega^6 \wedge \omega^1 = 0$, $\omega^7 \wedge \omega^2 = 0$, $\omega^8 \wedge (\omega^1 + \omega^2) = 0$, *т. е. выделен класс уравнений, содержащий в качестве подкласса квазилинейные.* Последние выделяются добавочным требованием полной интегрируемости системы S_{12} (см. [1]).

3. Берем в качестве базы расслоения множество интегральных многообразий системы S_{136}. Припомним, что условиями инвариантности и полной интегрируемости являлись $c^6 = c^6{}_{47} = c^6{}_{58} = c^6{}_{72} = c^6{}_{80} = 0$.

На базе расслоения инвариантным является S_6, а при $a_3=0$ инвариантным становится S_{16}, и при этом S_{16} вполне интегрируема (наоборот, если система S_{16} вполне интегрируема, то автоматически и система S_{136}). При $a_3=a^1{}_{62}=a^1{}_{65}=0$ инвариантным становится еще S_1.

Проекция семейств $M_{(3)}$ на базу M_{136} со слоя с главными формами ω^2, ω^4, ω^5, ω^7, ω^8 зависит существенно от одного параметра $\omega^3{}_1$, а в случае $a_3=0$ образует плоский пучок.

На базе расслоения S_{16} инвариантных подпространств в общем случае нет, а лишь при $a^1{}_{62}=a^1{}_{65}=0$ инвариантно $S_{(1)}$, которое вполне интегрируемо при этом. Проекция семейств $M_{(3)}$ со слоя с главными формами ω^2, ω^3, ω^4, ω^5, ω^7, ω^8, которая зависит от одного параметра, в последнем случае вырождается в плоский пучок.

Значит, в общем случае на базе расслоения M_{136} *определится уравнение* $\omega^6=0$, *а на базе расслоения* M_{16} *уравнение* $\omega^6\wedge\omega^1=0$.

Обозначим локальные координаты на M_{136} через u^1, u^3. u^6. На решениях дифференциального уравнения на базе за независимую считаем u^1, тогда на решениях

$$du^3=\frac{\partial u^3}{\partial u^1}du^1,\qquad du^6=\frac{\partial u^6}{\partial u^1}du^1.$$

Образуем главные на M_{136} формы $\omega^\xi=u^\xi{}_\eta du^\eta$ ($\xi,\eta=1,3,6$). В случае полной интегрируемости S_{16} здесь можно считать $u^1{}_3=u^6{}_3=0$. Дифференциальное уравнение, записанное на M_{136} в виде $\omega^6=0$, получается, если в левую часть ввести выражения главной формы ω^6 и дифференциалов du^3, du^6 на решениях. Поскольку дифференциальный ковариант $\omega^3\wedge\omega^1=0$ содержит один добавочный параметр ω^3, то получаем одно уравнение первого порядка, которая записывается в переменных u^1, u^3, u^6, а в случае полной интегрируемости системы S_{16} лишь в переменных u^1, u^6, т. е. в части из первоначальных зависимых и независимых переменных системы (A).

Значит, в обеих случаях из системы (A) выделяется одно самостоятельное уравнение, т. е. *имеем промежуточный интеграл.*

Аналогичное верно на расслоениях с множеством первых интегралов систем S_{247}, S_{058} в качестве базы.

4. Рассмотрим в качестве базы расслоения множество интегральных многообразий системы S_{1267}. Условиями ее полной интегрируемости являются $c^6=c^6{}_{58}=c^7=c^7{}_{58}=0$, $a^1{}_{83}=-4a_3a_5=0$, $a^2{}_{84}=-4a_4a_5=0$. Проекция семейств $M_{(3)}$ со слоя с главными формами ω^3, ω^4, ω^5, ω^8 зависит в общем случае от четырех параметров, а при $a_5=a_8=c^6{}_{80}=c^7{}_{80}=0$ от ω^3 и ω^4. Тогда инвариантными являются S_{12}, S_1, S_2, а S_{27} при $c^7{}_{36}=a_4=0$ и S_{16} при $c^6{}_{47}=a_3=0$. В последнем случае имеем двухпараметрическое семейство интегральных площадок, пересекающих две плоскости, т. е. *линейную конгруэнцию*. Рассмотрим этот случай. Определяемая уравнениями $\omega^6 \wedge \omega^1 = 0$, $\omega^7 \wedge \omega^2 = 0$ *система двух дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными* содержит уравнение

$$\begin{vmatrix} u^6{}_1 & u^6{}_2 \\ u^1{}_1 & u^1{}_2 \end{vmatrix} + \frac{\partial u^6}{\partial u^1} \begin{vmatrix} u^6{}_6 & u^6{}_2 \\ u^1{}_6 & u^1{}_2 \end{vmatrix} + \frac{\partial u^6}{\partial u^2} \begin{vmatrix} u^6{}_1 & u^6{}_6 \\ u^1{}_1 & u^1{}_6 \end{vmatrix} + \frac{\partial u^7}{\partial u^1} \begin{vmatrix} u^7{}_7 & u^7{}_2 \\ u^1{}_7 & u^1{}_2 \end{vmatrix} +$$
$$+ \frac{\partial u_7}{\partial u^2} \begin{vmatrix} u^7{}_1 & u^7{}_7 \\ u^1{}_1 & u^1{}_7 \end{vmatrix} + \frac{\partial u^6}{\partial u^1} \frac{\partial u^7}{\partial u^2} \begin{vmatrix} u^6{}_6 & u^6{}_7 \\ u^1{}_6 & u^1{}_7 \end{vmatrix} +$$
$$+ \frac{\partial u^6}{\partial u^2} \frac{\partial u^7}{\partial u^1} \begin{vmatrix} u^6{}_7 & u^6{}_6 \\ u^1{}_7 & u^1{}_8 \end{vmatrix} = 0$$

и уравнение, получаемое из этой заменой индексов $1 \longleftrightarrow 2$, $6 \longleftrightarrow 7$. Квазилинейную систему получим при $u^1{}_6 = u^1{}_7 = u^2{}_6 = u^2{}_7 = 0$, т. е. когда u^1 и u^2 являются интегралами системы S_{12};

При инвариантности S_{16} и S_{27} на S_{1267} характеристические системы уравнений $\omega^6 \wedge \omega_1 = 0$, $\omega^7 \wedge \omega^2 = 0$ совпадают с S_{123467}. Рассмотрим расслоение с базой M_{123467}. Условиями инвариантности были $c^6 = c^7 = 0$, а полной интегрируемости $c^6{}_{58} = c^7{}_{58} = 0$, $a^3{}_{85} = c^6{}_{80}a_5 = 0$, $a^4{}_{85} = -c^7{}_{80}a_5 = 0$.

Проекция $M_{(3)}$ со слоя с главными формами ω^5, ω^8 зависит от четырех параметров ω_5, ω^8, $\omega^3{}_1$, $\omega^4{}_2$. Инвариантными являются S_{1267}, далее, S_6 при $c^7{}_{80} = 0$, S_7 при $c^6{}_{80} = 0$, но S_{16} при $c^6{}_{80} = 0$, $c^6{}_{80}a_3 = 0$, $c^7{}_{80}a_3 = 0$, и S_{27} при $c^7{}_{80} = 0$, $c^7{}_{80}a_4 = 0$, $c^6{}_{80}a_4 = 0$.

При инвариантности S_6, S_7 характеристические системы уравнений $\omega^6 = 0$, $\omega^7 = 0$ приводимы к S_{123467}. Дифференциальные уравнения, определяемые уравнениями $\omega^6 = 0$, $\omega^7 = 0$, получаются из $A^{\alpha'}{}_\lambda du^\lambda = 0$, где

$$A^{\alpha'}{}_\lambda = u^{\alpha'}{}_\eta \frac{\partial u^\eta}{\partial u^\lambda} \qquad (\xi, \eta = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7;\ \alpha' = 6,\ 7),$$

учитывая то, что дифференциальными ковариантами уравнений $\omega^6 = 0$, $\omega^7 = 0$ при этом, а тогда и уравнений $A^{\alpha'}{}_\lambda du^\lambda = 0$ являются соответственно $\omega^3 \wedge \omega^1 = 0$, $\omega^4 \wedge \omega^2 = 0$, т. е. $dA^6{}_\lambda = H^6{}_\lambda\omega^3$, $dA^7{}_\lambda = H^7{}_\lambda\omega^4$. Получаем одну зависимость между $A^6{}_1$, $A^6{}_2$ и одну между $A^7{}_1$, $A^7{}_2$. Значит, *в общем случае получаем два дифференциальных уравнения в частных производных первого порядка*, которые на M_{123467} записываются во всех ее координатах, а при $u^6{}_3 = u^6{}_4 = u^7{}_3 = u^7{}_4 = 0$, т. е. при полной интегрируемости S_{1267} лишь в переменных последнего, т. е. в исходных переменных.

Значит из системы (A) выделяется самостоятельная часть $\omega^6 = 0$, $\omega^7 = 0$, $\omega^3 \wedge \omega^1 = 0$, $\omega^4 \wedge \omega^2 = 0$, т. е. имеем промежуточный интеграл.

5. Берем в качестве базы расслоения множество первых интегралов вполне интегрируемой системы S_{12367}. Инвариантность получилась за счет $c^6=0$, а полная интегрируемость за счет $c^6{}_{58}=c^7{}_{58}=0$, $a^1{}_{84}=-c^6{}_{47}c^7=0$, $a^2{}_{84}=-4a_4a_5=0$, $a^3{}_{84}=c^6{}_{47}c^7{}_{80}-c^6{}_{80}a_4=0$, $a^3{}_{85}=c^6{}_{80}a_5=0$.

Проекция семейств $M_{(3)}$ со слоя с главными формами $\omega^4, \omega^5, \omega^8$ зависит от трех параметров тогда и только тогда, когда $a_5=a^7=a^3{}_{75}=0$. Тогда вполне интегрируемым становится S_{1268}, а также S_{123467}. Инвариантными являются еще S_6 при $c^6{}_{80}=c^6{}_{47}=0$ и S_{27} при $a_4=a^7{}_{80}=0$. Мы видим, что выделился класс, когда все члены в выражениях $a^1{}_{84}$, $a^2{}_{84}$, $a^3{}_{84}$, $a^3{}_{85}$ равны нулю. Теперь характеристические системы уравнений $\omega^6=0$, $\omega^7\wedge\omega^2=0$ равносильны системе S_{12367}. Уравнения $\omega^6=0$, $\omega^7\wedge\omega^2=0$ определяют *систему двух дифференциальных уравнений, которые записываются в переменных многообразия* M_{1267}, *благодаря ее полной интегрируемости и из которых одна (получаемая из* $\omega^7\wedge\omega^2=0$*) приводима к квазилинейной в частном случае.* В выделенном частном случае расслоения с базой M_{12367} имеем промежуточный интеграл.

6. Берем в качестве базы расслоения множество первых интегралов системы $S_{1234678}$. На ней инвариантна и вполне интегрируема система S_{12678}. Инвариантны еще S_6 при $c^6=c^6{}_{58}=0$, а также S_7 при $c^7=c^7{}_{58}=0$ и S_{08} при $a_5=0$, $a^1{}_{65}+a^2{}_{65}=0$, $a^1{}_{75}+a^2{}_{75}=0$. Эти же условия для каждого из уравнений самостоятельно дают, что его характеристическая система переводима к $S_{1234678}$. Поскольку дифференциальными ковариантами уравнений $\omega^6=0$, $\omega^7=0$ являются $\omega^3\wedge\omega^1=0$, $\omega^4\wedge\omega^2=0$, получаем, что на базе теперь определяются три уравнения первого порядка в частных производных, записываемые благодаря полной интегрируемости S_{12678} в первоначальных переменных, одна из которых приводима к квазилинейной в частном случае.

7. Берем в качестве базы расслоения множество первых интегралов системы S_{126}. Система эта вполне интегрируема при $c^6{}_{47}=c^6{}_{58}=c^6=0$. На базе инвариантных подпространств в общем случае нет. Проекции семейств $M_{(3)}$ со слоя будут зависеть от одного параметра ω^3 в случае $a_4=a^2{}_{71}=c^6{}_{80}=c^6{}_{72}=a^1{}_{68}=a^2{}_{67}=a^2{}_{68}=a^1{}_{64}\,a^1{}_{65}=0$. Тогда при $a_3=0$ инвариантен $S_{(2)}$, при $a^2{}_{63}=0$ инвариантен S_2, при $a_3=a^1{}_{63}=0$ инвариантен S_{12}. При инвариантности $S_{(2)}$ соответствующая система S_{16} вполне интегрируема и инвариантно присоединяется уравнение $\omega^6\wedge\omega^1=0$.

8. Мы рассматривали из всех однотипных расслоений лишь один, например, с множеством первых интегралов системы S_{12367} в качестве базы расслоения. Из полученных результатов аналогичное получается заменой индексов для S_{12467}. Аналогичные рассуждения проводимы и результаты получаемы также для

S_{12368}, S_{12568} и из последних уже с помощью замены индексов для S_{12478}, S_{12578}. Также можно комбинировать полученные результаты, например, выделить геометрический объект, при обращении в нуль которого система (А) распадается на три самостоятельные уравнения или же на самостоятельные подсистему из двух уравнений и одно уравнение и т. д., притом по-разному.

9. Как отмечалось в п. 4 дальнейшая канонизация в общем случае уже невозможна, а частные предположения, дающие эту возможность, можно выбирать по-разному и дают при этом существенно различные результаты. Например, при $a_s \neq 0$ (тогда за счет $\omega^s{}_s$ можно a_s привести к 1; и $\omega^s{}_s$ при этом становятся главными, а все остальные относительные инварианты абсолютными) можно за счет $\omega^3{}_6$, $\omega^4{}_7$, $\omega^5{}_8$ привести к нулю a_α. Тогда в $T(M_8)$ инвариантными становятся подпространство $S_{(3)}$ при $c^6 = c^7 = c^6{}_{58} = c^7{}_{58} = 0$, $a^1{}_{83} = -4a_3a_5 = 0$, $a^2{}_{84} = -4a_4a_5 = 0$, подпространство $S_{(6)}$ при $c^7 = c^8 = c^8{}_{36} = c^7{}_{36} = 0$, $a^1{}_{64} = 4a_3a_4 = 0$, $a^1{}_{65} = -2a_3a_5 = 0$, по этим условиям уже нетрудно выписать условия инвариантности подпространств $S_{(7)}$, $S_{(67)}$, $S_{(68)}$, $S_{(78)}$ и $S_{(678)}$. Инвариантными могут быть еще $S_{(367)}$, $S_{(368)}$, $S_{(568)}$, $S_{(3678)}$, $S_{(4678)}$, $S_{(5678)}$. Можно указать геометрические объекты уже второго порядка, дающие голономность полей этих подпространств, и рассматривать соответствующие расслоения, на которых проекция семейств $M_{(3)}$ со слоя определит систему первого порядка, например, на M_{12458} систему, равносильную $\omega^4 \wedge \omega^2 = 0$, $\omega^5 \wedge (\omega^1 + \omega^2) = 0$, $\omega^8 = 0$, на S_{1234} систему $\omega^3 \wedge \omega^1 = 0$, $\omega^4 \wedge \omega^2 = 0$, и т. д.

Литература

1. Васильев А. М., Системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трех неизвестных функциях и двух независимых переменных (локальная теория). Матем. сб., 1966, **70**, № 4, 457—480.
2. Сычева В. Г., Канонические реперы конгруэнций прямых в четырехмерном проективном пространстве. Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп. 1965, **190**, 69—88.

Поступило
14 XII 1970

KOLME ESIMEST JÄRKU OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEMI GEOMEETRIAST

H. Kilp

Resümee

Pealkirjas kirjeldatud süsteemi kolme otsitava kahe muutuja funktsiooniga uuritakse jätkatud muutkonnal M_8, millel antud süsteemi lahendamine on samaväärne kolmest võrrandist Pfaffi süsteemi lahendamisega. On leitud antud süsteemiga assotsieeritud süsteemid, välja selgitatud viimaste omavaheline seos, aga samuti seos Pfaffi süsteemi üksikute võrranditega. Assotsieeritud süsteemide täieliku integreeruvuse korral on määratud muutkonna M_8 lokaalne invariantne kihtumine, samuti muutkonna M_8 projektsioon tekkiva kihtkonna baasile. Selliseid projektsioone uurides on välja eraldatud nende hulgas niisugused, kus esialgse süsteemi kujutiseks on samuti esimest järku süsteem. Samuti on välja eraldatud juhud, mil eksisteerib vahepealne integraal.

GEOMETRY OF THE SYSTEM OF THREE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST DEGREE

H. Kilp

Summary

The system with three functions of two variables and of the type, mentioned in the heading, has been examined locally in the prolonged manifold M_8, in which the solution of the given system is equivalent to the solution of a Pfaff system consisting of three equations. Systems associated with the given system have been found and their mutual relations as well as those with equations of the Pfaff system have been established. In case of complete integrability of an associated system when the invariant foliation of the manifold M_8 is defined, the projections of the manifold M_8 on the base of the corresponding local bundle in a beighbourhood of a point of M_8 have been examined. Investigating such projections those among them, where the given system maps also into a system of the first degree, have been separated. The cases, where there exists an intermediate integral, have been separated as well.

ТРИ ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕТРАЭДРА

Х. Эспенберг и Я. Габович

Эстонская сельскохозяйственная академия

1. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ с треугольником ABC в основании и с вершиной D. Обозначим середины ребер BC, CA, AB через A', B', C', середины ребер AD, BD, CD через A'', B'', C'' и центры тяжести боковых граней BCD, CAD, ABD через A_1, B_1, C_1.

Введем обозначения

$$
\begin{array}{lll}
a = BC, & b = CA, & c = AB, \\
a_1 = AD, & b_1 = BD, & c_1 = CD, \\
m_1 = DA', & m_2 = DB', & m_3 = DC', \\
m_A = AA_1, & m_B = BB_1, & m_C = CC_1, \\
m_a = A'A'', & m_b = B'B'', & m_c = C'C''.
\end{array}
$$

Отрезки m_1, m_2, m_3 называются боковыми медианами, отрезки m_A, m_B, m_C — медианами и отрезки m_a, m_b, m_c — бимедианами тетраэдра.

2. Известная формула Сильвестра выражает объем тетраэдра V через его ребра. В статье [1] выведены формулы, выражающие объем тетраэдра через следующие шестерки его линейных элементов:

1) a_1, b_1, c_1, m_1, m_2, m_3;
2) a, b, c, m_A, m_B, m_C;
3) m_a, m_b, m_c, m_A, m_B, m_C;
4) a, b, c, m_1, m_2, m_3;
5) a, b, c, m_a, m_b, m_c;
6) a_1, b_1, c_1, m_a, m_b, m_c.

Все эти формулы (а также формула Сильвестра) выражают квадрат объема тетраэдра в виде определителя 5-го порядка, элементами которого являются квадраты вышеназванных линейных элементов тетраэдра. Статья [1] оставляет открытым вопрос о том, можно ли выразить V^2 в виде определителя 5-го порядка такой же структуры в остальных трех возможных случаях:

I. m_1, m_2, m_3, m_a, m_b, m_c;
II. m_1, m_2, m_3, m_A, m_B, m_C;
III. a_1, b_1, c_1, m_A, m_B, m_C.

В настоящей статье показано, что и в этих трех случаях[1] квадрат объема тетраэдра можно выразить в виде определителя 5-го порядка, однако несколько иной структуры, чем определители, полученные в [1]. Неожиданным при этом оказывается то обстоятельство, что решение каждой из задач I—III может быть дано в двух различных детерминантных формах.

3. Выразим объем тетраэдра через его боковые медианы и бимедианы. При помощи формул для длин медиан треугольника легко получить следующие равенства:

$$\begin{aligned} 8m^2_a &= 4m^2_1 - 2a^2_1 + 2b^2 + 2c^2 - a^2, \\ 8m^2_b &= 4m^2_2 - 2b^2_1 + 2a^2 + 2c^2 - b^2, \\ 8m^2_c &= 4m^2_3 - 2c^2_1 + 2a^2 + 2b^2 - c^2; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 4m^2_1 &= 2b^2_1 + 2c^2_1 - a^2, \\ 4m^2_2 &= 2a^2_1 + 2c^2_1 - b^2, \\ 4m^2_3 &= 2a^2_1 + 2b^2_1 - c^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Исключая из этих равенств величины a^2_1, b^2_1, c^2_1, получим

$$\begin{aligned} 16m^2_a &= 12m^2_1 - 4m^2_2 - 4m^2_3 - a^2 + 3b^2 + 3c^2, \\ 16m^2_b &= -4m^2_1 + 12m^2_2 - 4m^2_3 + 3a^2 - b^2 + 3c^2, \\ 16m^2_c &= -4m^2_1 - 4m^2_2 + 12m^2_3 + 3a^2 + 3b^2 - c^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} 5a^2 &= -8m^2_a + 12m^2_b + 12m^2_c + 12m^2_1 - 8m^2_2 - 8m^2_3, \\ 5b^2 &= 12m^2_a - 8m^2_b + 12m^2_c - 8m^2_1 + 12m^2_2 - 8m^2_3, \\ 5c^2 &= 12m^2_a + 12m^2_b - 8m^2_c - 8m^2_1 - 8m^2_2 + 12m^2_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Формуле (20) из [1], т. е. формуле

$$72V^2 = \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & m^2_a & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & m^2_b & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & m^2_c & 1 \\ m^2_a & m^2_b & m^2_c & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

можно при помощи элементарных преобразований придать вид

$$72 \cdot 125V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 5c^2 & 5b^2 & 5m^2_a & 1 \\ 5c^2 & 0 & 5a^2 & 5m^2_b & 1 \\ 5b^2 & 5a^2 & 0 & 5m^2_c & 1 \\ 5m^2_a & 5m^2_b & 5m^2_c & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из первых трех столбцов четвертый столбец и в полученном определителе вычтем из первых трех строк четвертую строку. Получим

$$72 \cdot 125V^2 =$$

[1] Несложный анализ показывает, что получить решения задач I—III в такой же простой детерминантной форме, в какой были получены решения задач 1—6, невозможно.

$$
=\begin{vmatrix}
-10m_a^2 & 5(c^2-m_a^2-m_b^2) & 5(b^2-m_a^2-m_c^2) & 5m_a^2 & 0\\
5(c^2-m_a^2-m_b^2) & -10m_b^2 & 5(a^2-m_b^2-m_c^2) & 5m_b^2 & 0\\
5(b^2-m_a^2-m_c^2) & 5(a^2-m_b^2-m_c^2) & -10m_c^2 & 5m_c^2 & 0\\
5m_a^2 & 5m_b^2 & 5m_c^2 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}.
$$

Значение этого определителя не изменится, если в четвертом столбце и в четвертой строке элементы $5m_a^2$, $5m_b^2$, $5m_c^2$ заменить соответственно элементами $7m_a^2-8m_1^2$, $7m_b^2-8m_2^2$, $7m_c^2-8m_3^2$. В полученном в результате этой замены определителе вычтем из первых трех столбцов четвертый столбец. Затем вычтем из первых трех строк четвертую строку. После этого (учитывая равенства (3)) мы придем к формуле

$$
72\cdot 125V^2=
$$

$$
=\begin{vmatrix}
-24m_a^2+16m_1^2 & -8m_c^2+12m_3^2 & -8m_b^2+12m_2^2 & 7m_a^2-8m_1^2 & -1\\
-8m_c^2+12m_3^2 & -24m_b^2+16m_2^2 & -8m_a^2+12m_1^2 & 7m_b^2-8m_2^2 & -1\\
-8m_b^2+12m_2^2 & -8m_a^2+12m_1^2 & -24m_c^2+16m_3^2 & 7m_c^2-8m_3^2 & -1\\
7m_a^2-8m_1^2 & 7m_b^2-8m_2^2 & 7m_c^2-8m_3^2 & 0 & 1\\
-1 & -1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix},
$$

которая, после элементарных преобразований, принимает следующий окончательный вид:

$$
2250V^2=\begin{vmatrix}
0 & 8m_1^2-7m_a^2 & 8m_2^2-7m_b^2 & 8m_3^2-7m_c^2 & 4\\
8m_1^2-7m_a^2 & 4m_1^2-6m_a^2 & 3m_3^2-2m_c^2 & 3m_2^2-2m_b^2 & 1\\
8m_2^2-7m_b^2 & 3m_3^2-2m_c^2 & 4m_2^2-6m_b^2 & 3m_1^2-2m_a^2 & 1\\
8m_3^2-7m_c^2 & 3m_2^2-2m_b^2 & 3m_1^2-2m_a^2 & 4m_3^2-6m_c^2 & 1\\
4 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}. \quad (4)
$$

При выводе этой формулы мы опирались на формулу (20) из [1]. Но имеется и другая возможность — вместо формулы (20) из [1] использовать формулу (19) из [1]. Тогда при помощи аналогичных преобразований мы придем к формуле

$$
2250V^2=\begin{vmatrix}
0 & 7m_1^2-3m_a^2 & 7m_2^2-3m_b^2 & 7m_3^2-3m_c^2 & 1\\
7m_1^2-3m_a^2 & 4m_1^2-6m_a^2 & 3m_3^2-2m_c^2 & 3m_2^2-2m_b^2 & 1\\
7m_2^2-3m_b^2 & 3m_3^2-2m_c^2 & 4m_2^2-6m_b^2 & 3m_1^2-2m_a^2 & 1\\
7m_3^2-3m_c^2 & 3m_2^2-2m_b^2 & 3m_1^2-2m_a^2 & 4m_3^2-6m_c^2 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}. \quad (5)
$$

4. Выразим объем тетраэдра через его медианы и боковые медианы. Введем обозначения $d_1=AA_1$, $d_2=BB_1$, $d_3=CC_1$. По теореме косинусов из треугольника AA_1D получим

$$
m_A^2=a_1^2+\frac{4}{9}m_1^2-\frac{4}{3}a_1m_1\cos ADA',
$$

а из треугольника $AA'D$ —

$$
d_1^2=a_1^2+m_1^2-2a_1m_1\cos ADA'.
$$

Исключая из этих соотношений $\cos ADA'$, получим систему

$$
\begin{aligned}
9m_A^2 - 6d_1^2 &= 3a_1^2 - 2m_1^2,\\
9m_B^2 - 6d_2^2 &= 3b_1^2 - 2m_2^2,\\
9m_C^2 - 6d_3^2 &= 3c_1^2 - 2m_3^2
\end{aligned}
\tag{6}
$$

(второе и третье равенства получаются аналогично из треугольников $BB'D$ и $CC'D$).

Из треугольника ABC найдем, что

$$
\begin{aligned}
4d_1^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2,\\
4d_2^2 &= 2a^2 + 2c^2 - b^2,\\
4d_3^2 &= 2a^2 + 2b^2 - c^2.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Исключая из равенств (6) при помощи формул (2) и (7) величины a_1, b_1, c_1, d_1, d_2, d_3, получим

$$
\begin{aligned}
9a^2 - 15b^2 - 15c^2 &= -20m_1^2 + 12m_2^2 + 12m_3^2 - 36m_A^2,\\
-15a^2 + 9b^2 - 15c^2 &= 12m_1^2 - 20m_2^2 + 12m_3^2 - 36m_B^2,\\
-15a^2 - 15b^2 + 9c^2 &= 12m_1^2 + 12m_2^2 - 20m_3^2 - 36m_C^2,
\end{aligned}
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
42a^2 &= -40m_1^2 + 16m_2^2 + 16m_3^2 - 18m_A^2 + 45m_B^2 + 45m_C^2,\\
42b^2 &= 16m_1^2 - 40m_2^2 + 16m_3^2 + 45m_A^2 - 18m_B^2 + 45m_C^2,\\
42c^2 &= 16m_1^2 + 16m_2^2 - 40m_3^2 + 45m_A^2 + 45m_B^2 - 18m_C^2.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Исходя из формулы (19) статьи [1] и учитывая соотношения (8), мы приходим (после соответствующих преобразований, вполне аналогичных преобразованиям, проведенным в п. 3) к следующему результату:

$$
-9\cdot 168^3 V^2 =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
0 & 45m_A^2-152m_1^2 & 45m_B^2-152m_2^2 & 45m_C^2-152m_3^2 & 2\\
45m_A^2-152m_1^2 & 45m_A^2+16m_1^2 & 9m_C^2+20m_3^2 & 9m_B^2+20m_2^2 & 1\\
45m_B^2-152m_2^2 & 9m_C^2+20m_3^2 & 45m_B^2+16m_2^2 & 9m_A^2+20m_1^2 & 1\\
45m_C^2-152m_3^2 & 9m_B^2+20m_2^2 & 9m_A^2+20m_1^2 & 45m_C^2+16m_3^2 & 1\\
2 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}
\tag{9}
$$

Если для этой же цели применить формулу (15) из [1], то получим следующий ответ:

$$
-9\cdot 168^3 V^2 =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
0 & 171m_A^2+128m_1^2 & 171m_B^2+128m_2^2 & 171m_C^2+128m_3^2 & 16\\
171m_A^2+128m_1^2 & 45m_A^2+16m_1^2 & 9m_C^2+20m_3^2 & 9m_B^2+20m_2^2 & 1\\
171m_B^2+128m_2^2 & 9m_C^2+20m_3^2 & 45m_B^2+16m_2^2 & 9m_A^2+20m_1^2 & 1\\
171m_C^2+128m_3^2 & 9m_B^2+20m_2^2 & 9m_A^2+20m_1^2 & 45m_C^2+16m_3^2 & 1\\
16 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}.
\tag{10}
$$

5. Выразим объем тетраэдра через его медианы и боковые ребра. Заменим в формулах (6) величины d_1, d_2, d_3 по формулам (7). Из полученных соотношений найдем:

$$
\begin{aligned}
20a^2 &= 12a_1^2 - 8b_1^2 - 8c_1^2 - 18m_A^2 + 27m_B^2 + 27m_C^2,\\
20b^2 &= -8a_1^2 + 12b_1^2 - 8c_1^2 + 27m_A^2 - 18m_B^2 + 27m_C^2,\\
20c^2 &= -8a_1^2 - 8b_1^2 + 12c_1^2 + 27m_A^2 + 27m_B^2 - 18m_C^2.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Формулы (11) вместе с формулой (2) из [1] (или с формулой (15) из [1]) приводят нас к следующим результатам:

$$18\cdot 40^3V^2=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 28a_1^2-27m_A^2 & 28b_1^2-27m_B^2 & 28c_1^2-27m_C^2 & 2 \\ 28a_1^2-27m_A^2 & 8a_1^2-27m_A^2 & 6c_1^2-9m_C^2 & 6b_1^2-9m_B^2 & 1 \\ 28b_1^2-27m_B^2 & 6c_1^2-9m_C^2 & 8b_1^2-27m_B^2 & 6a_1^2-9m_A^2 & 1 \\ 28c_1^2-27m_C^2 & 6b_1^2-9m_B^2 & 6a_1^2-9m_A^2 & 8c_1^2-27m_C^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

$$18\cdot 40^3V^2=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 32a_1^2-63m_A^2 & 32b_1^2-63m_B^2 & 32c_1^2-63m_C^2 & 8 \\ 32a_1^2-63m_A^2 & 8a_1^2-27m_A^2 & 6c_1^2-9m_C^2 & 6b_1^2-9m_B^2 & 1 \\ 32b_1^2-63m_B^2 & 6c_1^2-9m_C^2 & 8b_1^2-27m_B^2 & 6a_1^2-9m_A^2 & 1 \\ 32c_1^2-63m_C^2 & 6b_1^2-9m_B^2 & 6a_1^2-9m_A^2 & 8c_1^2-27m_C^2 & 1 \\ 8 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

6. Полученные выше результаты дают возможность установить некоторые любопытные детерминантные тождества.

Обратим внимание на то, что определители (4) и (5) получены в результате окаймления одного и того же определителя третьего порядка. Если для элементов последнего ввести обозначения

$$A_1=4m_1^2-6m_a^2,\quad A_2=4m_2^2-6m_b^2,\quad A_3=4m_3^2-6m_c^2,$$
$$B_1=3m_1^2-2m_a^2,\quad B_2=3m_2^2-2m_b^2,\quad B_3=3m_3^2-2m_c^2,$$

то, учитывая равенство определителей (4) и (5), после простых преобразований придем к тождеству

$$\begin{vmatrix} 0 & 6B_1-A_1 & 6B_2-A_2 & 6B_3-A_3 & 2 \\ 6B_1-A_1 & A_1 & B_3 & B_2 & 1 \\ 6B_2-A_2 & B_3 & A_2 & B_1 & 1 \\ 6B_3-A_3 & B_2 & B_1 & A_3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & A_1+4B_1 & A_2+4B_2 & A_3+4B_3 & 8 \\ A_1+4B_1 & A_1 & B_3 & B_2 & 1 \\ A_2+4B_2 & B_3 & A_2 & B_1 & 1 \\ A_3+4B_3 & B_2 & B_1 & A_3 & 1 \\ 8 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

В частном случае, когда

$$A_1=B_1,\qquad A_2=B_2,\qquad A_3=B_3, \quad (15)$$

имеем

$$\begin{vmatrix} 0 & 5A_1 & 5A_2 & 5A_3 & 2 \\ 5A_1 & A_1 & A_3 & A_2 & 1 \\ 5A_2 & A_3 & A_2 & A_1 & 1 \\ 5A_3 & A_2 & A_1 & A_3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 5A_1 & 5A_2 & 5A_3 & 8 \\ 5A_1 & A_1 & A_3 & A_2 & 1 \\ 5A_2 & A_3 & A_2 & A_1 & 1 \\ 5A_3 & A_2 & A_1 & A_3 & 1 \\ 8 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (16)$$

т. е. равенство между двумя определителями пятого порядка, отличающимися друг от друга лишь двумя своими элементами.

Проведя совершенно аналогичные рассуждения и исходя при этом из равных между собой определителей (9) и (10), придём к тождеству

$$
\begin{vmatrix}
0 & 3A_1-10B_1 & 3A_2-10B_2 & 3A_3-10B_3 & 2 \\
3A_1-10B_1 & A_1 & B_3 & B_2 & 1 \\
3A_2-10B_2 & B_3 & A_2 & B_1 & 1 \\
3A_3-10B_3 & B_2 & B_1 & A_3 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
0 & 3A_1+4B_1 & 3A_2+4B_2 & 3A_3+4B_3 & 16 \\
3A_1+4B_1 & A_1 & B_3 & B_2 & 1 \\
3A_2+4B_2 & B_3 & A_2 & B_1 & 1 \\
3A_3+4B_3 & B_2 & B_1 & A_3 & 1 \\
16 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}. \qquad (17)
$$

Частный случай (15) принимает здесь следующий вид:

$$
\begin{vmatrix}
0 & 7A_1 & 7A_2 & 7A_3 & -2 \\
7A_1 & A_1 & A_3 & A_2 & 1 \\
7A_2 & A_3 & A_2 & A_1 & 1 \\
7A_3 & A_2 & A_1 & A_3 & 1 \\
-2 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix} =
\begin{vmatrix}
0 & 7A_1 & 7A_2 & 7A_3 & 16 \\
7A_1 & A_1 & A_3 & A_2 & 1 \\
7A_2 & A_3 & A_2 & A_1 & 1 \\
7A_3 & A_2 & A_1 & A_3 & 1 \\
16 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix}. \qquad (18)
$$

Тождества (14)—(18) имеют чисто алгебраический характер. Однако установить их удалось, решая геометрическую задачу выражения объема тетраэдра через некоторые его линейные элементы. Вопрос о достаточно простом алгебраическом доказательстве этих тождеств остается открытым.

Литература

[1] Габович Я., Объем тетраэдра как функция некоторых его элементов. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **25**, 136—146.

Поступило
9 III 1970

KOLM ÜLESANNET TETRAEEDRI RUUMALA ARVUTAMISE KOHTA

H. Espenberg ja J. Gabovitš

Resümee

Artiklis [1] oli esitatud tetraeedri ruumala arvutamise kohta üheksa ülesannet, millest õnnestus lahendada vaid kuus. Käesolevas artiklis antakse ülejäänud kolme ülesande lahendused.

DREI AUFGABEN ÜBER DIE BERECHNUNG DES RAUMINHALTES DES TETRAEDERS

H. Espenberg and J. Gabowitsch

Zusammenfassung

In [1] waren neun Aufgaben über die Berechnung des Rauminhaltes des Tetraeders gegeben worden, von denen sechs gelöst wurden. In der vorliegenden Arbeit werden die Lösungen der drei übrigen Aufgaben vorgelegt.

ОБ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ НЕЛЯ

М. Абель

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

Пусть X — произвольное топологическое пространство, A — комплексная коммутативная банахова алгебра (нормированное кольцо) с единицей, $\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbf{R}$ — поле вещественных чисел и B — одно из A или $\mathbf{R}$. Множество всех ограниченных непрерывных функций, определенных на X, со значениями в B, обозначаем через $C^*(X, B)$. Это множество образует комплексную (вещественную) коммутативную банахову алгебру с единицей, если алгебраические операции над функциями определить как обычно поточечно, а норму функции $f \in C^*(X, B)$ — через

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_B, \tag{1}$$

где $\| \ \|_B$ — норма алгебры (поля) B. Всюду в дальнейшем вместо коммутативной банаховой алгебры $C^*(X, B)$ с единицей будем коротко говорить алгебра $C^*(X, B)$.

Подалгебра $S(X, B)$ алгебры $C^*(X, B)$ называется *равномерно плотной* в алгебре $C^*(X, B)$, если каждая функция $f \in C^*(X, B)$ равномерно аппроксимируема функциями из подалгебры $S(X, B)$.

Пусть $f \in C^*(X, \mathbf{R})$. Множество

$$Z = Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$$

называется *нуль-множеством функции* f в пространстве X, а каждое подмножество пространства X, которое является нуль-множеством некоторой функции $f \in C^*(X, \mathbf{R})$, называется *нуль-множеством пространства* X (см. [6]).

В 1967 г. Нель ([12], стр. 229) доказал следующее обобщение[1] теоремы Стоуна—Вейерштрасса:

[1] Некоторые обобщения теоремы Стоуна—Вейерштрасса для вполне регулярных пространств сформулировал Мровка [11], а для нормальных пространств (комплексный вариант теоремы) доказали Истратеску и Константин [9].

Пусть X — топологическое пространство. Для того, чтобы подалгебра $S(X, \mathbf{R})$ алгебры $C^*(X, \mathbf{R})$ была равномерно плотна в $C^*(X, \mathbf{R})$, необходимо и достаточно выполнение условий:

(a) *для каждых непустых непересекающихся нуль-множеств Z_1 и Z_2 пространства X в подалгебре $S(X, \mathbf{R})$ существует такая функция f, что*[2]

$$\mathrm{cl}\, f(Z_1) \cap \mathrm{cl}\, f(Z_2) = \varnothing; \tag{2}$$

(b) *подалгебра $S(X, \mathbf{R})$ содержит функцию g, которая на X удовлетворяет условию*

$$\inf_{x \in X} |g(x)| > 0. \tag{3}$$

В случае, когда X — бикомпактное хаусдорфово пространство, то условие (a) *равносильно условию*

(c) *подалгебра $S(X, \mathbf{R})$ отделяет*[3] *точки пространства X.*

В настоящей статье эта теорема обобщается на подалгебры алгебр $C^*(X, \mathbf{C})$ и $C^*(X, A)$ в случае, когда A — полупростая банахова алгебра[4] с $A^\wedge = C(\mathfrak{M}, \mathbf{C})$, где $A^\wedge$ — алгебра гельфандовских представлений на пространстве $\mathfrak{M}$ всех максимальных идеалов банаховой алгебры A.

В качестве приложения доказывается, что а) равномерное замыкание тензорного произведения $C^*(X, \mathbf{C}) \otimes A$ топологически изоморфно алгебре $C^*(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ и б) множество всех комплексных последовательностей, элементы которых имеют только конечное число различных значений, является равномерно плотной подалгеброй алгебры всех ограниченных последовательностей.

§ 2. Равномерно плотные подалгебры в алгебре $C^*(X, \mathbf{C})$

Пусть $S(X, \mathbf{C})$ — некоторая самосопряженная подалгебра алгебры $C^*(X, \mathbf{C})$, т. е. такая подалгебра алгебры $C^*(X, \mathbf{C})$, которая со всякой функцией f содержит и комплексно сопряженную функцию $\bar{f}$. Тогда для каждой $f \in S(X, \mathbf{C})$ функции $\mathrm{Re} f = (f + \bar{f})/2$ и $\mathrm{Im} f = i(\bar{f} - f)/2$ также принадлежат $S(X, \mathbf{C})$. Пусть $S(X, \mathbf{R})$ — множество всех вещественных функций подалгебры $S(X, \mathbf{C})$. Это множество образует подалгебру алгебры $C^*(X, \mathbf{R})$. Воспользуясь теоремой Неля, получаем следующий результат.

---

[2] Здесь и всюду в дальнейшем через $\mathrm{cl}\, U$ обозначаем замыкание подмножества $U \subset B$ относительно топологии пространства B.

[3] Говорят, что подалгебра $S(X, B)$ алгебры $C^*(X, B)$ отделяет точки пространства X, если для любых различных точек x_1 и x_2 пространства X в подалгебре $S(X, B)$ существует такая функция f, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

[4] Если X — бикомпактное хаусдорфово пространство, то вместо $C^*(X, \mathbf{C})$ пишем $C(X, \mathbf{C})$, ибо все функции в алгебре $C(X, \mathbf{C})$ ограничены.

Теорема 1. *Пусть X — топологическое пространство. Для того, чтобы самосопряженная подалгебра $S(X, \mathbf{C})$ алгебры $C^*(X, \mathbf{C})$ была равномерно плотна в $C^*(X, \mathbf{C})$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1° для каждых непустых непересекающихся нуль-множеств Z_1 и Z_2 пространства X в подалгебре $S(X, \mathbf{C})$ существует вещественная функция f, удовлетворяющая условию (2);

2° подалгебра $S(X, \mathbf{C})$ содержит функцию g, удовлетворяющую условию (3).

Доказательство. Необходимость. Пусть $S(X, \mathbf{C})$ — некоторая самосопряженная равномерно плотная подалгебра алгебры $C^*(X, \mathbf{C})$. Тогда $S(X, \mathbf{R})$ является равномерно плотной подалгеброй алгебры $C^*(X, \mathbf{R})$. Действительно, если это не так, то в алгебре $C^*(X, \mathbf{R})$ существует функция, которая не аппроксимируема функциями из подалгебры $S(X, \mathbf{R})$. Поскольку $C^*(X, \mathbf{R}) \subset C^*(X, \mathbf{C})$, то и в алгебре $C^*(X, \mathbf{C})$ существует функция, не аппроксимируемая функциями из $S(X, \mathbf{C})$. Следовательно, теорема Неля дает необходимость условий 1° и 2° теоремы 1.

Достаточность. Пусть $S(X, \mathbf{C})$ — самосопряженная подалгебра алгебры $C^*(X, \mathbf{C})$, удовлетворяющая условиям 1° и 2° теоремы 1. Тогда подалгебра $S(X, \mathbf{R})$ алгебры $C^*(X, \mathbf{R})$ удовлетворяет условиям (a) и (b) теоремы Неля. Действительно, из условия 1° следует выполнение условия (a), а, в силу условия 2°, в подалгебре $S(X, \mathbf{R})$ существует функция $(\mathrm{Re}\, g)^2 + (\mathrm{Im}\, g)^2$, которая удовлетворяет условию (3). Поэтому $S(X, \mathbf{R})$ — равномерно плотная подалгебра алгебры $C^*(X, \mathbf{R})$.

Пусть теперь f — произвольная функция в алгебре $C^*(X, \mathbf{C})$. Так как $\mathrm{Re}\, f$ и $\mathrm{Im}\, f$ принадлежат $C^*(X, \mathbf{R})$ и

$$C^*(X, \mathbf{R}) = \mathrm{cl}\, S(X, \mathbf{R}) \subset \mathrm{cl}\, S(X, \mathbf{C}),$$

то $f \in \mathrm{cl}\, S(X, \mathbf{C})$. Следовательно, подалгебра $S(X, \mathbf{C})$ равномерно плотна в $C^*(X, \mathbf{C})$.

Для дальнейшего нужна

Лемма 1. *Пусть X_1 и X_2 — произвольные замкнутые непересекающиеся подмножества бикомпактного хаусдорфова пространства X и $S(X, \mathbf{R})$ — равномерно плотная подалгебра алгебры $C^*(X, \mathbf{R})$. Тогда в подалгебре $S(X, \mathbf{R})$ существует такая функция g, что*

$$g(x) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in X_1$$

и

$$g(x) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in X_2.$$

Доказательство см. [12], стр. 227.

Следующая теорема показывает, что теорема 1 для бикомпактного хаусдорфова пространства X дает нам комплексный вариант теоремы Стоуна—Вейерштрасса в формулировке Неля, поскольку в обычной формулировке теорема Стоуна—Вейерштрасса дает только достаточные условия для равномерной плотности подалгебры $S(X, \mathbf{C})$ в алгебре $C^*(X, \mathbf{C})$ (кроме этого, вместо условия 2° теоремы 1 обычно предполагается, что в подалгебре $S(X, \mathbf{C})$ существуют постоянные функции).

Теорема 2. *Пусть X — бикомпактное хаусдорфово пространство, а $S(X, \mathbf{C})$ — самосопряженная подалгебра алгебры $C^*(X, \mathbf{C})$, которая удовлетворяет условию 2° теоремы 1. Для того, чтобы $S(X, \mathbf{C})$ отделяла точки пространства X, необходимо и достаточно выполнение условия 1° теоремы 1.*

Доказательство. Необходимость. Пусть x_1 и x_2 — две любые различные точки пространства X и $f \in S(X, \mathbf{C})$ — функция, отделяющая эти точки, а $g \in S(X, \mathbf{C})$ — функция, удовлетворяющая условию (3). Тогда одна из функций $\operatorname{Re} f$ или $\operatorname{Im} f$ также отделяет точки x_1 и x_2 и, в силу самосопряженности подалгебры $S(X, \mathbf{C})$, функция $(\operatorname{Re} g)^2 + (\operatorname{Im} g)^2 \in S(X, \mathbf{R})$ и удовлетворяет условию (3). Поэтому подалгебра $S(X, \mathbf{R})$ равномерно плотна в алгебре $C^*(X, \mathbf{R})$ по теореме Неля.

Пусть Z_1 и Z_2 — произвольные непустые непересекающиеся нуль-множества пространства X. По лемме 1, в подалгебре $S(X, \mathbf{R})$ существует такая функция h, что

$$h(Z_1) \cap h(Z_2) = \varnothing.$$

Поскольку каждое нуль-множество замкнуто и h — непрерывная функция на X, то, в силу бикомпактности пространства X, множества $h(Z_k)$ замкнуты при $k = 1, 2$ (см. [2], стр. 28). Поэтому функция h удовлетворяет условию (2). Значит, условие 1° теоремы 1 выполнено, ибо $S(X, \mathbf{R}) \subset S(X, \mathbf{C})$.

Достаточность. Пусть самосопряженная подалгебра $S(X, \mathbf{C})$ алгебры $C^*(X, \mathbf{C})$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда $S(X, \mathbf{C})$ есть равномерно плотная подалгебра алгебры $C^*(X, \mathbf{C})$. Как и в доказательстве теоремы 1, отсюда следует равномерная плотность подалгебры $S(X, \mathbf{R})$ в алгебре $C^*(X, \mathbf{R})$. Поскольку каждое одноточечное множество замкнуто в пространстве X и $S(X, \mathbf{R}) \subset S(X, \mathbf{C})$, то, по лемме 1, подалгебра $S(X, \mathbf{C})$ отделяет точки пространства X.

§ 3. Равномерно плотные подалгебры в алгебре $C^*(X, A)$

1. Пусть A — коммутативная комплексная банахова алгебра с единицей. В дальнейшем будем говорить, что подалгебра $S(X, A)$ алгебры $C^*(X, A)$ удовлетворяет условию [5] (α), если для каждой функции $f \in S(X, A)$ в подалгебре $S(X, A)$ суще-

[5] Если $A = \mathbf{C}$, то условие (α) равносильно самосопряженности подалгебры $S(X, A)$.

ствует такая функция $\overline{f}$, что[6] для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}$

$$\overline{f}(x)^{\wedge}(M) = \overline{f(x)^{\wedge}(M)}.$$

Для дальнейшего нам нужна

Лемма 2. *Пусть X — топологическое пространство и A — полупростая банахова алгебра, для которой алгебра $A^{\wedge} = C(\mathfrak{M}, \mathbf{C})$. Отображение $f \to F$, определяемое равенством*

$$f(x)^{\wedge}(M) = F(x, M)$$

для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}$, является топологическим изоморфизмом между алгебрами $C^*(X, A)$ и $C^*(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$.

Доказательство см. [1], стр. 63—64.

Воспользуясь леммой 2 и теоремой 1, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть X — топологическое пространство и A — полупростая банахова алгебра, для которой алгебра $A^{\wedge} = C(\mathfrak{M}, \mathbf{C})$. Для того, чтобы подалгебра $S(X, A)$ алгебры $C^*(X, A)$, удовлетворяющая условию (α), была равномерно плотна в алгебре $C^*(X, A)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1° *для каждых непустых непересекающихся нуль-множеств Z_1 и Z_2 пространства $X \times \mathfrak{M}$ в подалгебре $S(X, A)$ существует функция f с $\operatorname{Im} f(x)^{\wedge}(M) \equiv 0$ на $X \times \mathfrak{M}$ такая, что*

$$\operatorname{cl} D(f, Z_1) \cap \operatorname{cl} D(f, Z_2) = \varnothing,$$

где при $k = 1, 2$

$$D(f, Z_k) = \{f(x)^{\wedge}(M) \in \mathbf{R} : (x, M) \in Z_k\};$$

2° *подалгебра $S(X, A)$ содержит функцию g, удовлетворяющую условию*

$$\inf\{|g(x)^{\wedge}(M)|, \quad (x, M) \in X \times \mathfrak{M}\} > 0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $S(X, A)$ — некоторая равномерно плотная подалгебра алгебры $C^*(X, A)$, удовлетворяющая условию (α). По лемме 2, изоморфный образ $S(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ подалгебры $S(X, A)$ является равномерно плотной (см. [3], стр. 111) самосопряженной подалгеброй алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$. В силу теоремы 1, подалгебра $S(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ обладает следующими свойствами:

---

[6] Здесь и всюду в дальнейшем для каждой функции $f \in C^*(X, A)$ через $f(x)^{\wedge}(M)$ обозначаем комплексное число, соответствующее элементу $f(x) \in A$ с $x \in X$ при гомоморфном отображении алгебры A в поле $\mathbf{C}$, определяемом максимальным идеалом $M \in \mathfrak{M}$, а через $\overline{f(x)^{\wedge}(M)}$ — комплексное сопряженное к $f(x)^{\wedge}(M)$ для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}$.

(A) *для каждых непустых непересекающихся нуль-множеств* Z_1 *и* Z_2 *пространства* $X \times \mathfrak{M}$ *в подалгебре* $S(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ *существует вещественная функция* F, *удовлетворяющая условию* (2),

(B) *подалгебра* $S(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ *содержит функцию* G, *которая на* $X \times \mathfrak{M}$ *удовлетворяет условию* (3).

В силу этого, в подалгебре $S(X, A)$ существуют функции f и g, соответствующие функциям F и G при изоморфизме $f \to F$, удовлетворяющие условиям 1° и 2° теоремы 3, ибо $F(Z_k) = D(f, Z_k)$ *при* $k = 1, 2$.

Достаточность. Пусть $S(X, A)$ — подалгебра алгебры $C^*(X, A)$, удовлетворяющая условию (α) и условиям 1° и 2° теоремы 3. Тогда, по лемме 2, изоморфный образ $S(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ подалгебры $S(X, A)$ является самосопряженной подалгеброй алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$. В этой подалгебре существуют функции F и G, соответствующие функциям f и g при изоморфизме $f \to F$, которые удовлетворяют соответственно условиям (A) и (B). Поэтому, в силу теоремы 1, подалгебра $S(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ равномерно плотна в алгебре $C^*(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$. Отсюда, по лемме 2, следует, что и подалгебра $S(X, A)$ равномерно плотна в алгебре $C^*(X, A)$, что и требовалось доказать.

Следующая теорема показывает, что в случае бикомпактного хаусдорфова пространства X, условие 1° теоремы 3 можно заменить более простым условием. Имеет место следующая

Теорема 3а. *Пусть* X — *бикомпактное хаусдорфово пространство,* A — *полупростая банахова алгебра с* $\hat{A} = C(\mathfrak{M}, \mathbf{C})$ *и* $S(X, A)$ — *подалгебра алгебры* $C^*(X, A)$, *удовлетворяющая условию* (α). *Для того, чтобы* $S(X, A)$ *была равномерно плотна в алгебре* $C^*(X, A)$, *необходимо и достаточно выполнение условия* 2° *теоремы* 3 *и условия*

$1^{\circ\circ}$ *для любых различных точек* (x_1, M_1) *и* (x_2, M_2) *пространства* $X \times \mathfrak{M}$ *в подалгебре* $S(X, A)$ *существует такая функция* f, *что*

$$f(x_1)\hat{}\,(M_1) \neq f(x_2)\hat{}\,(M_2).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $S(X, A)$ — некоторая равномерно плотная подалгебра алгебры $C^*(X, A)$, удовлетворяющая условию (α). Как и в доказательстве теоремы 3 получаем, что изоморфный образ $S(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ подалгебры $S(X, A)$ является самосопряженной подалгеброй алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ и по лемме 2 удовлетворяет условиям (A) и (B). Так как $X \times \mathfrak{M}$ — бикомпактное хаусдорфово пространство, то теорема 2 обеспечивает выполнение следующего условия:

(C) *подалгебра* $S(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ *алгебры* $C^*(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ *отделяет точки пространства* $X \times \mathfrak{M}$.

Следовательно, ввиду леммы 2, подалгебра $S(X, A)$ удовлетворяет условию $1^{\circ\circ}$ и условию 2° теоремы 3.

Достаточность. Пусть $S(X, A)$ — подалгебра алгебры $C^*(X, A)$, удовлетворяющая условию 2° теоремы 3 и условиям $1^{\circ\circ}$ и (α). Тогда, по лемме 2, изоморфный образ $S(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ подалгебры $S(X, A)$ является самосопряженной подалгеброй алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ и удовлетворяет условиям (B) и (C). В силу теоремы 2, подалгебра $S(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ удовлетворяет и условию (A). Поэтому, применяя теорему 1, получаем, что $S(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ является равномерно плотной подалгеброй алгебры $C^*(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$. Значит, $S(X, A)$ — равномерно плотная подалгебра алгебры $C^*(X, A)$, по лемме 2.

2. Пусть A — банахова $*$-алгебра, т. е. банахова алгебра с инволюцией. Тогда $C^*(X, A)$ — также банахова $*$-алгебра, причем для всех $x \in X$

$$f^*(x) = [f(x)]^*.$$

Подалгебра $S(X, A)$ алгебры $C^*(X, A)$ при некоторой банаховой $*$-алгебре A называется *$*$-подалгеброй*, если для каждой функции $f \in S(X, A)$ функция $f^* \in S(X, A)$.

Лемма 3. *Пусть A — банахова $*$-алгебра, норма которой удовлетворяет условию*

$$\|a\|^2 \leqslant C\,\|aa^*\| \tag{4}$$

для всех $a \in A$ при некоторой постоянной $C \geqslant 1$, не зависящей от a. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

а) *подалгебра $S(X, A)$ алгебры $C^*(X, A)$ удовлетворяет условию (α);*

б) *подалгебра $S(X, A)$ алгебры $C^*(X, A)$ является $*$-подалгеброй.*

Доказательство. Как известно ([4], стр. 118—119), каждая банахова $*$-алгебра, норма которой удовлетворяет условию (4) для всех своих элементов, является полупростой алгеброй, причем для всех $a \in A$ и $M \in \mathfrak{M}$

$$a^{*\wedge}(M) = \overline{a^{\wedge}(M)}.$$

Пусть условие а) выполнено. Тогда для каждой функции $f \in S(X, A)$ существует функция $\bar{f} \in S(X, A)$ такая, что для всех $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}$

$$\bar{f}(x)^{\wedge}(M) = \overline{f(x)^{\wedge}(M)} = [f(x)]^{*\wedge}(M) = f^*(x)^{\wedge}(M),$$

или

$$[\bar{f}(x) - f^*(x)]^{\wedge}(M) = 0.$$

В силу полупростоты алгебры A, отсюда следует, что $\bar{f} = f^*$. Следовательно, из утверждения а) следует выполнение утверждения б). Доказательство того, что из утверждения б) следует выполнение утверждения а) является аналогичным.

Так как каждая полупростая банахова алгебра A с $\hat{A} = C(\mathfrak{M}, \mathbf{C})$ является банаховой $*$-алгеброй с единицей, норма которой удовлетворяет условию (4) для всех своих элементов, и обратно ([4], стр. 118), то, в силу леммы 3, получаем следующую новую формулировку теорем 3 и 3а.

Теорема 4. *Пусть X — топологическое пространство и A — банахова $*$-алгебра с единицей, норма которой удовлетворяет условию (4) для всех своих элементов. Для того, чтобы $*$-подалгебра $S(X, A)$ алгебры $C^*(X, A)$ была равномерно плотна в алгебре $C^*(X, A)$, необходимо и достаточно выполнение условий 1° и 2° теоремы 3, а если X — бикомпактное хаусдорфово пространство — то условия 1°° теоремы 3а и условия 2° теоремы 3.*

Пусть теперь A — некоторая B^*-алгебра, т. е. такая банахова $*$-алгебра, которая удовлетворяет условию $\|a\|^2 = \|aa^*\|$ для всех $a \in A$. Из теоремы 4 непосредственно вытекает следующий результат.

Следствие 1. *Пусть X — топологическое пространство и A — некоторая B^*-алгебра с единицей. Для того, чтобы $*$-подалгебра $S(X, A)$ алгебры $C^*(X, A)$ была равномерно плотна в алгебре $C^*(X, A)$, необходимо и достаточно выполнение условий 1° и 2° теоремы 3, а если X — бикомпактное хаусдорфово пространство, то условия 1°° теоремы 3а и условия 2° теоремы 3.*

В 1951 г. Капланский доказал аналогичный следствию 1 результат (только достаточность условий) для алгебры $C_0(X, A)$ всех непрерывных на локально бикомпактном пространстве X функций, равных нулю на бесконечности, в случае, когда A — некоторая (не обязательно коммутативная) B^*-алгебра с единицей (см. [10], теорема 3.4, или [5], стр. 406). Следовательно, следствие 1 «совпадает» с результатом Капланского в коммутативном случае, если X — бикомпактное хаусдорфово пространство.

§ 4. Некоторые применения

1. Пусть X — топологическое пространство, A — банахова алгебра и $C^*(X, \mathbf{C}) \otimes A$ — тензорное произведение алгебр $C^*(X, \mathbf{C})$ и A, т. е. множество всех конечных сумм вида

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \otimes a_k,$$

где $f_k \in C^*(X, \mathbf{C})$ и $a_k \in A$ для всех k. Аналогично тому как в [7] для всех $x \in X$ положим

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_k \otimes a_k\right)(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, a_k. \tag{5}$$

Поскольку

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, a_k\right\|_A \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|a_k\|_A \, \|f_k\|$$

и функции вида (5) непрерывны на X для любых элементов из $C^*(X, \mathbf{C}) (\times) A$, то $C^*(X, \mathbf{C}) (\times) A$ есть подмножество в алгебре $C^*(X, A)$. Это подмножество образует подалгебру алгебры $C^*(X, A)$.

Так как алгебра $C^*(X, \mathbf{C})$ для каждой функции f содержит также комплексно сопряженную функцию $\bar{f}$ с $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ на X и

$$\overline{(\sum_{k=1}^{n} f_k (\times) a_k)(x)^{\wedge}(M)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{f_k(x)} \, \overline{a_k^{\wedge}(M)} = \sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k(x) \bar{a}_k^{\wedge}(M) =$$

$$= (\sum_{k=1}^{n} \bar{f}_k (\times) \bar{a}_k)(x)^{\wedge}(M)$$

для всех $(x, M) \in X \times \mathfrak{M}$, где $\bar{a}_k^{\wedge}(M) = \overline{a_k^{\wedge}(M)}$ для всех $M \in \mathfrak{M}$, то подалгебра $C^*(X, \mathbf{C}) (\times) A$ удовлетворяет условию (α), если A — самосопряженная банахова алгебра, т. е. банахова алгебра, в которой для каждого $a \in A$ существует $\bar{a} \in A$ такой, что $\bar{a}^{\wedge}(M) = \overline{a^{\wedge}(M)}$ для всех $M \in \mathfrak{M}$.

Пусть X — бикомпакт, а e и e_A — единицы алгебр $C(X, \mathbf{C})$ и A соответственно. Тогда $e (\times) e_A \in C(X, \mathbf{C}) (\times) A$ и $(e (\times) e_A)(x)^{\wedge}(M) = e(x) e_A^{\wedge}(M) = 1$ для всех $(x, M) \in X \times \mathfrak{M}$. Если (x_1, M_1) и (x_2, M_2) — любые различные точки пространства $X \times \mathfrak{M}$ с $M_1 \neq M_2$ и элемент $a \in M_1 \setminus M_2$, то $e (\times) a \in C(X, \mathbf{C}) (\times) A$, причем

$$(e (\times) a)(x_1)^{\wedge}(M_1) = e(x_1) a^{\wedge}(M_1) = a^{\wedge}(M_1) = 0$$

и

$$(e (\times) a)(x_2)^{\wedge}(M_2) = e(x_2) a^{\wedge}(M_2) = a^{\wedge}(M_2) \neq 0.$$

Пусть теперь (x_1, M_1) и (x_2, M_2) — любые различные точки пространства $X \times \mathfrak{M}$ с $M_1 = M_2$. Так как каждое одноточечное множество пространства X замкнуто, то, по лемме Урысона, в алгебре $C(X, \mathbf{C})$ существует такая функция f, что $f(x_1) = 0$ и $f(x_2) = 1$. Поэтому $f (\times) e_A \in C(X, \mathbf{C}) (\times) A$, причем

$$(f (\times) e_A)(x_1)^{\wedge}(M_1) = f(x_1) e_A^{\wedge}(M_1) = f(x_1) = 0$$

и

$$(f (\times) e_A)(x_2)^{\wedge}(M_2) = f(x_2) e_A^{\wedge}(M_2) = f(x_2) = 1.$$

Значит, подалгебра $C(X, \mathbf{C}) (\times) A$ удовлетворяет условиям $1^{\circ\circ}$ теоремы 3а и 2° теоремы 3. Поэтому, если A — полупростая банахова алгебра с $A^{\wedge} = C(\mathfrak{M}, \mathbf{C})$, то, в силу самосопряженности алгебры A, подалгебра $C(X, \mathbf{C}) (\times) A$ равномерно плотна в алгебре $C(X, A)$, по теореме 3а. Итак, мы получили результат

А. Гротендика (см. [7], стр. 90), доказанный А. Хауснером (см. [8], стр. 246), для полупростой банаховой алгебры A с $A^{\wedge} = C(\mathfrak{M}, \mathbf{C})$.

Теперь, при помощи леммы 3, алгебры $\mathrm{cl}(C(X, \mathbf{C}) (\times) A)$ и $C(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ топологически изоморфны. Этот результат известен (см. [7], стр. 90) при $A = C(Y, \mathbf{C})$, где Y — бикомпактное хаусдорфово пространство.

2. Пусть $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, а

$$S(\mathbf{N}, \mathbf{C}) = \{f \in C^*(\mathbf{N}, \mathbf{C}) : \operatorname{card} f(\mathbf{N}) < \infty\}.$$

Это подмножество самосопряженно и образует подалгебру в алгебре $C^*(\mathbf{N}, \mathbf{C})$. Пусть Z_1 и Z_2 — произвольные непустые непересекающиеся нуль-множества пространства $\mathbf{N}$, а ϱ — характеристическая функция множества Z_1, т. е. $\varrho(Z_1) = 1$ и $\varrho(\mathbf{N} \backslash Z_1) = 0$. Эта функция вещественная и принадлежит $S(\mathbf{N}, \mathbf{C})$. Поскольку функция ϱ удовлетворяет условию (2) и единичная функция e, которая принадлежит $S(\mathbf{N}, \mathbf{C})$, удовлетворяет условию (3), то по теореме 1 подалгебра $S(\mathbf{N}, \mathbf{C})$ равномерно плотна в $C^*(\mathbf{N}, \mathbf{C})$. Итак, мы получили комплексный аналог результата Неля ([12], стр. 230).

Литература

1. Абель М., Об алгебре ограниченных непрерывных функций со значениями в коммутативной банаховой алгебре с единицей. Настоящий сборник, стр. 52—77.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
3. Куратовский К., Топология, т. 1. Москва, 1968.
4. Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ. Москва, 1956.
5. Наймарк М. А., Нормированные кольца. Москва, 1968.
6. Gillman, L., Jerison, M., Rings of continuous functions. Princeton, New Jersey — London, 1960.
7. Grothendieck, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc., 1955, **16**, 1—186.
8. Hausner, A., Ideals in a certain Banach algebra. Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, 246—249.
9. Istratescu, I., Constantin, Gh., O extensiune a teoremei lui Weierstrass-Stone. An. Univ. Timisoara. Ser. stiinte mat.-fiz., 1965, **3**, 155—161.
10. Kaplansky, I., The structure of certain operator algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1951, **70**, № 2, 219—255.
11. Mrówka, S. G., Still on approximation theorems. Notice Amer. Math. Soc., 1965, **12**, 212.
12. Nel, L. G., Theorems of Stone-Weierstrass type non-compact spaces. Math. Z., 1968, **104**, 226—230.

Поступило
11 II 1971

NEL'I TEOREEMI ÜLDISTUSED

M. Abel

Resümee

Olgu $C^*(X, A)$ kõigi pidevate tõkestatud funktsioonide hulk, mis on defineeritud topoloogilisel ruumil X, ning mille väärtused kuuluvad ühikuga komplekssesse kommutatiivsesse Banachi algebrasse A. Hulk $C^*(X, A)$ moodustab ühikuga kommutatiivse komplekse Banachi algebra, kui algebralised operatsioonid hulgas $C^*(X, A)$ defineerida nagu tavaliselt funktsioonide korral ning funktsiooni norm seosega (1).

Käesolevas artiklis üldistatakse Neli teoreem [12] algebrale $C^*(X, A)$ juhul, kui A on poollihtne Banachi algebra, mille korral $\hat{A} = C^*(\mathfrak{M}, \mathbf{C})$, kus $\mathfrak{M}$ on algebra A maksimaalsete ideaalide hulk ning $\hat{A}$ on ruumil $\mathfrak{M}$ defineeritud Gelfandi esituste algebra. Tõestatakse, et a) tensorkorrutise $C^*(X, A) (\times) A$ sulund, juhul kui X on bikompaktne Hausdorffi ruum ning A — poollihtne Banachi algebra, mille korral $\hat{A} = C(\mathfrak{M}, \mathbf{C})$, on topoloogiliselt isomorfne algebraga $C^*(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$ ja b) komplekssete jadade hulk, millede elementidel on lõplik arv erinevaid väärtusi, moodustab ühtlaselt tiheda alamalgebra kõigi tõkestatud jadade algebras.

THE GENERALIZATION OF A THEOREM OF NEL

M. Abel

Summary

Let $C^*(X, A)$ denote the set of all bounded continuous functions defined over topological space X with values in a complex commutative Banach algebra A with unit. The set $C^*(X, A)$ forms a commutative complex Banach algebra with unit, when algebraic operations in $C^*(X, A)$ are defined in the natural "pointwise» manner and the norm of function by (1).

In the present paper a theorem of Nel [12] is generalized to the algebra $C^*(X, A)$ in the case, when A is a semisimple Banach algebra with $\hat{A} = C^*(\mathfrak{M}, \mathbf{C})$, where $\mathfrak{M}$ is the space of all maximal ideals of algebra A and $\hat{A}$ is the algebra of Gelfand representations defined on $\mathfrak{M}$.

It is proved that a) the closure of tensorproduct $C^*(X, \mathbf{C}) (\times) A$ is topologically isomorphic to the algebra $C^*(X \times \mathfrak{M}, \mathbf{C})$, when X is a bicompact Hausdorff space and A is a semisimple Banach algebra with $\hat{A} = C^*(\mathfrak{M}, \mathbf{C})$ and b) the set of all sequences of complex numbers the elements of which attain only finitely many values is uniformly dense in the algebra of all sequences of complex numbers.

МНОЖЕСТВА СОВЕРШЕНСТВА ДЛЯ МЕТОДОВ, СОХРАНЯЮЩИХ СХОДИМОСТЬ

Э. Юримяэ

Кафедра математического анализа

1. Введение

В настоящей статье будем рассматривать матричные методы суммирования в виде преобразования последовательности в последовательность [1]

$$\eta_n = \sum_k a_{nk}\xi_k. \tag{1}$$

Говорят, что метод $A = (a_{nk})$ суммирует последовательность $x = \{\xi_k\}$, если существует предел $\lim \eta_n$. Этот предел обозначается через $\lim_A x$ и называется A-суммой последовательности x. Если $y = \{\eta_n\} \in c$ для всех $x = \{\xi_k\} \in c$, то метод $A = (a_{nk})$ называется *К-методом*. По теореме Кожима — Шура известно, что *метод A является К-методом тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) $\lim\limits_n a_{nk} = a_k$,
2) $\lim\limits_n \sum\limits_k a_{nk} = a$,
3) $\sum\limits_k |a_{nk}| \leqslant M$.

Известно [5], что для всякого метода $A = (a_{nk})$ поле суммируемости c_A (т. е. множество всех $x = \{\xi_k\}$, для которых существует $\lim_A x$) является FK-пространством с полунормами

$$p_{2n+2}(x) = \sup_m \Big|\sum_{k=0}^{m} a_{nk}\xi_k\Big|,$$

$$p_{2n+1}(x) = |\xi_n|,$$

$$p_0(x) = \sup_n \Big|\sum_k a_{nk}\xi_k\Big|.$$

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то они имеют все целочисленные значения от 0 до $+\infty$.

Если метод A является *реверсивным*, т. е. система (1) имеет только единственное решение для всех $y = \{\eta_n\} \in c$, то c_A оказывается BK-пространством с нормой $p_0(x)$.

Общий вид линейных непрерывных функционалов в c_A дается формулой (см. [5])

$$f(x) = \sum_k \beta_k \xi_k + \sum_n \tau_n \sum_k a_{nk} \xi_k + \tau \lim_A x, \tag{2}$$

где $\Sigma |\tau_n| < \infty$, и числа β_k таковы, что ряд $\Sigma \beta_k \xi_k$ сходится для всех $x \in c_A$, т. е. β_k являются множителями сходимости для метода A. Если A является K-методом, то и $\Sigma |\beta_k| < \infty$. Для реверсивного метода A каждый линейный непрерывный функционал в c_A можно представить формулой (2), где все $\beta_k = 0$. Если матрица $A = (a_{nk})$ имеет в каждой строке только конечное число отличных от нуля элементов (конечнострочный метод), то множителями сходимости являются все последовательности, которые имеют только конечное число отличных от нуля членов. Оказывается, что с этими последовательностями можно и ограничиваться, так как для конечнострочного метода A каждый линейный непрерывный функционал можно представить формулой (2), где $\beta_k \neq 0$ имеет место только для конечного числа индексов (см. [5]).

Если A является K-методом, то замыкание множества c в c_A называется *множеством совершенства метода* A и обозначается через A_P. Если $A_P = c_A$, то метод A называется *совершенным*. Целлером [6] было показано, что для каждого регулярного метода A найдется регулярный метод B, для которого $c_B = A_P$. В настоящей статье этот результат обобщается для всех K-методов (теорема 2) и доказываются некоторые условия для того, чтобы $x \in A_P$.

2. Классификация K-методов

Обычно все K-методы разделяются на два класса: корегулярные и конулевые методы. Известно, что конулевые методы являются, в некотором смысле, более мощными, чем корегулярные методы. Точнее (см. [5]), поле конулевого метода A не может включаться в поле корегулярного метода B. Важным подклассом множества корегулярных методов является класс регулярных методов (для них $a_k = 0$ и $a = 1$). Оказывается, что для некоторых корегулярных методов существуют равносильные регулярные методы, а для некоторых нет. Все зависит от того, как расположена последовательность $e = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ в c_A.

Разделение класса K-методов на корегулярные и конулевые методы можно провести при помощи последовательности e. Если в c_A для e имеет место слабая сходимость по отрезкам[2], то

---

[2] Отрезками последовательности $x = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots\}$ называются последовательности $x^r = \{\xi_0, \ldots, \xi_r, 0, 0, \ldots\}$.

K-метод A называется *конулевым*, в противном случае *корегулярным.* Из этого определения следует, что для конулевого метода A имеет место соотношение $e \in \bar{c}_0$ в c_A. Но соотношение $e \in \bar{c}_0$ может выполняться и тогда, когда для e не имеет места слабая сходимость по отрезкам, т. е. и для некоторых корегулярных методов. (Для регулярных методов A всегда верно соотношение $e \mathrel{\overline{\in}} \bar{c}_0$ в c_A.) Учитывая, что для FK-пространств топология подпространства не слабее топологии данного пространства, получаем, что поле регулярного метода A не может включить поле такого метода B, для которого $e \in \bar{c}_0$ в c_B. Это замечание можно взять за основу более подробной классификации корегулярных методов. Будем называть корегулярный метод A *эквирегулярным*, если $e \mathrel{\overline{\in}} \bar{c}_0$ в c_A, в противном случае — *псевдорегулярным.* Ясно, что класс *эквирегулярных* методов содержит все регулярные методы.

Теорема 1. *Метод A является эквирегулярным тогда и только тогда, когда существует такой регулярный метод B, что $c_B = c_A$.*

Доказательство. Достаточность получается из того, что для регулярного метода B последовательность $e \mathrel{\overline{\in}} \bar{c}_0$ в $c_B = c_A$.

Доказывая необходимость, допустим, что $e \mathrel{\overline{\in}} \bar{c}_0$ в c_A. Тогда можно выбрать такой линейный непрерывный функционал в c_A, что

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in c_0, \\ 1, & \text{если } x = e. \end{cases} \tag{3}$$

Отсюда следует, что в (2) число $\tau \neq 0$. Последнее дает, что $f(x)$ можно представить матрицей B, т. е. $f(x) = \lim_B x$, для которой $c_B = c_A$ (см. [5], теорема 5.3). Так как из (3) следует регулярность метода B, то теорема доказана.

Факт, что эквирегулярные методы не охватывают весь класс корегулярных методов, доказан в [2, 3].

Для конулевого метода A известно [4], что множество c не замкнуто в c_A. Из этого следует, что в c_A имеются как ограниченные, так и неограниченные расходящиеся последовательности (см. [4, 5]). Доказательство названных свойств конулевых методов основывается на соотношении $e \in \bar{c}_0$ в c_A. Учитывая это, можно сказать, что эти свойства верны и для псевдорегулярных методов.

3. Обобщение теоремы Целлера

Теорема 2. *Для каждого K-метода A найдется такой метод B, что*

а) $c_B = A_P$,

б) *A и B совместны на c_B.*

Доказательство. Так как c_A сепарабельно, то в $G = c_A \setminus A_P$ найдется всюду плотное счетное множество $\{x_i\}$. Для каждой x_i выбираем такой линейный непрерывный функционал f_i в c_A, что

$$f_i(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in A_P,$$
$$f_i(x_i) = 1.$$

Эти функционалы выражаются формулой (2). Заметим, что для каждого индекса i выполнено условие

$$|\tau_i| + \sum_n |\tau_{in}| < \infty.$$

Поэтому, при помощи функционалов f_i, можно получить последовательность линейных непрерывных функционалов $\{\varphi_i\}$ в c_A таких, что

$$\varphi_i(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in A_P,$$
$$\varphi_i(x_i) = l_i \neq 0,$$

и

$$|\tau_i| + \sum_n |\tau_{in}| \leqslant 1 \quad \text{для всех } i.$$

Составим новую последовательность функционалов $\{g_j\}$, в которой каждый из функционалов φ_i и $-\varphi_i$ участвует бесконечно много раз. Такая последовательность $\{g_j\}$ сходится к нулю на A_P и расходится на G.

Учитывая, что

$$g_j(x) = \sum_k \beta_{jk}\xi_k + \sum_n \tau_{jn} \sum_k a_{nk}\xi_k + \tau_j \lim_n \sum_k a_{nk}\xi_k,$$

выбираем $m(j)$ таким образом, чтобы для

$$h_j(x) = \sum_k \beta_{jk}\xi_k + \sum_{n=0}^{m(j)} \tau_{jn} \sum_k a_{nk}\xi_k + \tau_j \sum_k a_{m(j),k}\xi_k = \sum_k d_{jk}\xi_k$$

имело место соотношение

$$\lim_j [g_j(x) - h_j(x)] = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in c_A.$$

Так как $h_j = (h_j - g_j) + g_j$, то последовательность $h_j(x)$ сходится к нулю на A_P и расходится на G. Функционалы $h_j(x)$ определяют некоторый K-метод $D = (d_{nk})$.

Определим матрицу $B = (b_{nk})$ следующим образом:

$$b_{2n,k} = a_{nk},$$
$$b_{2n+1,k} = a_{nk} + d_{nk}.$$

Так как $c_D \supset A_P$ и $\lim_D x = 0$ при $x \in A_P$, то $\lim_A x = \lim_B x$ на A_P. С другой стороны, $c_B \subset c_A$, и $\lim_D x$ не существует для $x \in G = c_A \setminus A_P$. Отсюда следует, что $c_B = A_P$. Теорема доказана.

Учитывая эквивалентность двух топологий, превращающих данное множество в FK-пространство, можно сказать, что c_B имеет такую же топологию, что и замкнутое множество A_P, рассматриваемое как подпространство пространства c_A. Отсюда следует, что A и определенный теоремой 2 метод B принадлежат к одному и тому же классу, перечисленному в п. 2. Поэтому, свойства данного метода в некоторой степени определяются свойствами его множества совершенства.

Для регулярных и эквирегулярных методов A может иметь место соотношение $A_P = c$. Это означает, что A не суммирует расходящуюся ограниченную последовательность. Если $A_P \neq c$, то A_P содержит все A-суммируемые ограниченные последовательности и некоторые неограниченные последовательности. Последнее утверждение следует из соответствующей теоремы Мазура — Орлича, так как A_P является полем некоторого K-метода.

Для псевдорегулярных и конулевых методов A обязательно имеет место соотношение $A_P \neq c$, т. е. A_P содержит как расходящиеся ограниченные, так и неограниченные последовательности. Известно, что для корегулярных методов A (в том числе и для псевдорегулярных) множество A_P содержит все A-суммируемые ограниченные последовательности, но для конулевых методов это не всегда так. Имеются конулевые методы, которые суммируют ограниченные расходящиеся последовательности, не принадлежащие его множеству совершенства.

4. Множество совершенства корегулярного метода

Теорема 3. *Пусть A — корегулярный метод суммирования и $x_0 = \{t_k\} \in c_A$. Соотношение $x_0 \in A_P$ имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\sum_k \sum_n \tau_n a_{nk} t_k = \sum_n \tau_n \sum_k a_{nk} t_k \tag{4}$$

для всех $\{\tau_n\} \in l$, при которых величины $\sum_n \tau_n a_{nk}$ являются множителями сходимости для метода A.

Доказательство. Точка $x_0 \in A_P$ тогда и только тогда, когда $f(x_0) = 0$ для всех линейных непрерывных функционалов в c_A, которые вырождаются на c, т. е. когда

$$f(e) = \sum_k \beta_k + \sum_n \tau_n \sum_k a_{nk} + \tau a = 0, \tag{5}$$

$$f(e_k) = \beta_k + \sum_n \tau_n a_{nk} + \tau a_k = 0, \tag{6}$$

где $e_k = \{0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots\}$. Суммируя равенство (6) по k и вычитая из (5), получаем, что

$$\tau (a - \sum a_k) = 0.$$

Отсюда следует, что $\tau = 0$, так как для корегулярного метода $\varrho(A) = a - \Sigma a_k \neq 0$. На основе вышесказанного нам надо найти условия, чтобы из

$$f(e_k) = \beta_k + \sum \tau_n a_{nk} = 0 \tag{7}$$

следовало $f(x_0)=0$. Соотношения (7) означают, что $f(x)=0$ на множестве c тогда и только тогда, когда величины $\Sigma\tau_n a_{nk} = -\beta_k$ являются множителями сходимости для метода A. Таким образом, получается, что на всем множестве c вырождаются только те функционалы, которые выражаются формулой

$$f(x) = -\sum_k \sum_n \tau_n a_{nk}\xi_k + \sum_n \tau_n \sum_k a_{nk}\xi_k.$$

Отсюда немедленно следует утверждение теоремы.

Замечание. Вообще условие теоремы 3 является неэффективным, так как критерии для множителей сходимости известны только для некоторых методов суммирования (см. [1], стр. 180—183). Если потребовать, чтобы условие выполнялось для всех $\{\tau_n\}\in l$, для которых сходится ряд в левой части равенства (4), то такое требование сильнее, и, тем самым, получаем лишь достаточное условие.

Следствие 1. *Если A корегулярен, то все A-суммируемые ограниченные последовательности принадлежат к A_P.*

Действительно, для ограниченных последовательностей $x_0 = \{t_k\}$ равенство (4) имеет место для всех $\{\tau_n\}\in l$.

Следствие 2. *Пусть A — корегулярный конечнострочный метод суммирования. Точка $x_0=\{t_k\}\in c_A$ принадлежит к A_P тогда и только тогда, когда для каждого целого числа N имеет место соотношение*

$$\sum_n \tau_n \left(\sum_{k=N}^{\infty} a_{nk}t_k\right) = 0, \tag{8}$$

где $\{\tau_n\}\in l$ является решением системы

$$\sum_n \tau_n a_{nk} = 0, \quad k = N, N+1, \ldots . \tag{9}$$

Действительно, при конечно-строчном методе за множество множителей сходимости можно рассматривать множество всех последовательностей, которые имеют только конечное число отличных от нуля членов (см. п. 1). Это значит, что система (7) дает систему (9), и из условия (4) получается (8).

Пример 1. Пусть

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 2n, \\ 0, & \text{если } k \neq 2n. \end{cases}$$

Для $N=2m$ из системы (9) получаем, что $\tau_n = 0$ при $n > m-1$, а для $N=2m+1$ — при $n>m$. В обоих случаях получаем, что условие (8) выполняется для всех $x_0\in c_A$, т. е. метод A является совершенным.

Теорема 4. *Точка $x_0=\{t_k\}$ принадлежит к множеству совершенства реверсивного корегулярного метода A тогда и только тогда, когда для всех решений $\{\tau_n\}\in l$ системы*

$$\sum_n \tau_n a_{nk} = 0 \tag{10}$$

выполняется условие

$$\lim_r \sum_k \left(\sum_{n=r}^{\infty} \tau_n a_{nk} \right) t_k = 0. \tag{11}$$

Доказательство. При реверсивном методе A каждый линейный непрерывный функционал f имеет вид (2), где все $\beta_k = 0$. Поэтому на основе (7) получаем, что $x_0 \in A_P$ тогда и только тогда, когда для всех решений $\{\tau_n\} \in l$ системы (10) имеет место соотношение

$$\sum_n \tau_n \sum_k a_{nk} t_k = 0.$$

Эквивалентность этого условия с условием (11) вытекает из равенства

$$\sum_n \tau_n \sum_k a_{nk} t_k = \sum_k \left(\sum_n \tau_n a_{nk} \right) t_k + \sum_{n=r}^{\infty} \tau_n \sum_k a_{nk} t_k -$$

$$- \sum_k \left(\sum_{n=r}^{\infty} \tau_n a_{nk} \right) t_k,$$

так как $\{\tau_n\}$ является решением системы (10).

Пример 2. Пусть

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n-1, \\ -\dfrac{1}{n}, & \text{если } k = n, \\ 0, & \text{если } k \neq n-1, n, \end{cases}$$

Этот метод $A = (a_{nk})$ является регулярным и реверсивным. Система (10) имеет нетривиальное решение вида

$$\tau_n = \frac{1}{n!} \tau_0.$$

Для проверки условия (11) отметим, что

$$\sum_{n=r}^{\infty} \tau_n a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{r!} \tau_0, & \text{если } k = r-1, \\ 0, & \text{если } k \neq r-1. \end{cases}$$

Отсюда получим, что к A_P принадлежат такие A-суммируемые последовательности, для которых выполнено условие

$$\lim_r \frac{1}{r!} \tau_0 \xi_r = 0.$$

Это условие не выполнено для A-суммируемой последовательности $\{(k+1)!\}$. Тем самым, последовательность $\{(k+1)!\} \bar{\in} A_P$. Этот результат вполне естественный, так как $c_A \cap m = c$ (ибо преобразование (1) для A есть $\eta_n = \xi_{n-1} - n^{-1}\xi_n$), и поэтому множество c замкнуто в c_A, т. е. $A_P = c$.

5. Множество совершенства конулевого метода

Для конулевых методов уравнение (5) является следствием уравнений (6). Это обстоятельство усложняет вывод критериев, аналогичных п. 4.

Теорема 5. *Пусть A — конулевой метод суммирования. Если сходится ряд $\Sigma a_k t_k$, то $x_0 = \{t_k\} \in c_A$ является точкой множества совершенства метода A тогда и только тогда, когда*

1° $\lim_A x_0 = \sum_k a_k t_k$,

2° $\sum_k (\sum_n a_{nk}\tau_n) t_k = \sum_n \tau_n \sum_k a_{nk} t_k$

при всех $\{\tau_n\} \in l$, для которых величины $\sum_n \tau_n a_{nk}$ являются множителями сходимости для метода A.

Доказательство. Точка $x_0 \in c_A$ принадлежит к множеству A_P тогда и только тогда, когда из (6) следует, что

$$f(x_0) = \sum_k \beta_k t_k + \sum_n \tau_n \sum_k a_{nk} t_k + \tau \lim_A x_0 = 0. \qquad (12)$$

Необходимость условия 1° следует из того, что ввиду сходимости ряда $\Sigma a_k t_k$ можно взять $\tau_n = 0$. Необходимость условия 2° получается при $\tau = 0$.

Достаточность условий 1° и 2° получаем, если найти β_k из (6) и подставить в (12).

Следствие 1. *Если $x_0 \in c_A \cap m$, то $x_0 \in A_P$ тогда и только тогда, когда выполнено условие* 1°.

Действительно, для ограниченных последовательностей $x_0 = \{t_k\}$ ряды в условиях 1° и 2° теоремы 5 сходятся абсолютно.

Следствие 2. *Пусть A — конулевой конечнострочный метод суммирования. Если сходится ряд $\Sigma a_k t_k$, то точка $x_0 = \{t_k\} \in c_A$ принадлежит к A_P тогда и только тогда, когда выполнено условие* 1° *и*

3° *для каждого целого числа N имеет место соотношение* (8), *где $\{\tau_n\} \in l$ является решением системы* (9).

Доказательство получается из теоремы 5 точно так же, как следствие 2 из теоремы 3.

Пример 3. Рассмотрим конулевой метод суммирования, определенный матрицей

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 1, & \text{если } k = 2n+1, \\ -1, & \text{если } k = 2n+2, \\ 0, & \text{для остальных } k. \end{cases}$$

Этот метод суммирует последовательность $x_0 = \{1, -1, 1, -1, \ldots\}$ к сумме -1. Так как $a_0 = 1$ и $a_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то для этой последовательности не выполняется условие 1°, т. е. $x_0 \overline{\in} A_P$. Этот метод суммирует и последовательность $x_1 = \{1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots\}$

к 1. Для этой последовательности выполнено условие 1°. Проверим условие 3° следствия 2. При $x = x_1$ получаем, что

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_{nk}\xi_k = \begin{cases} 1, \text{ если } N = 0, \\ -n, \text{ если } N = 2n + 2, \\ 0, \text{ если } N = 2n + 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\sum_{n} \tau_n \sum_{k=N}^{\infty} a_{nk}\xi_k = \begin{cases} -p\tau_p \text{ при } N = 2p + 2, \\ 0 \quad \text{ при } N = 2p + 1. \end{cases}$$

Система (9) при $N = 0$ дает, что все $\tau_n = 0$, и при $N = 2p + 2$, что $\tau_p = \tau_{p+1} = \ldots = 0$. Таким образом, получаем, что условие 3° следствия 2 выполнено, и поэтому $x_1 \in A_P$. Можно проверить, что условие 3° выполняется для всех A-суммируемых последовательностей. Таким образом, к A_P принадлежит все A-суммируемые последовательности, для которых выполняется 1°.

Рассмотрим теперь реверсивные конулевые методы. Для них вместо системы (6) получаем систему

$$f(e_k) = \sum_n \tau_n a_{nk} + \tau a_k = 0. \tag{13}$$

Последовательность $x_0 = \{t_k\} \in A_P$ тогда и только тогда, когда из (13) следует

$$f(x_0) = \sum_n \tau_n \sum_k a_{nk} t_k + \tau \lim_A x_0 = 0.$$

Точно так же, как при теореме 5, можно завершить доказательство следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть A — реверсивный конулевой метод суммирования. Если сходится ряд $\Sigma a_k t_k$, то $x_0 = \{t_k\} \in c_A$ принадлежит к A_P тогда и только тогда, когда выполнено* 1° *и*

4° *для всех решений $\{\tau_n\} \in l$ системы* (8) *выполнено условие* (11).

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Hayman, W. K., Wilansky, A., An example in summability. Bull. Amer. Math., Soc., 1961, **67**, 554—555.
3. Wilansky, A., Summability: the inset, replaceable matrices, the basis in summability space. Duke Math. J., 1952, **19**, 647—660.
4. Wilansky, A., Zeller, K., Summation of bounded divergent sequences, topological methods. Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, 501—509.
5. Zeller, K., Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z., 1951, 53, 463—487.
6. Zeller, K., Über den perfekten Teil von Wirkfeldern. Math. Z., 1956, **64**, 123—130.

Поступило
23 II 1970

KOONDUVUST SÄILITAVATE MENETLUSTE PERFEKTSUSE HULGAD

E. Jürimäe

Resümee

Käesolevas artiklis näidatakse, et iga koonduvust säilitava menetluse A korral leidub menetlus B, mille puhul summeerimisväli c_B langeb kokku menetluse A perfektsuse hulgaga (s. t. koonduvate jadade hulga sulundiga ruumis c_A). Leitakse ka tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et vaadeldav jada x_0 kuuluks menetluse perfektsuse hulka.

SETS OF THE PERFECTNESS OF THE CONSERVATIVE SUMMABILITY METHODS

E. Jürimäe

Summary

The purpose of this paper is to study the closure of c (the set of the perfectness A_P) in the summability field c_A, where A is a conservative method. It is shown (theorem 2) that for each conservative methed A exists a conservative B with $c_B = A_P$ and $\lim_B x = \lim_A x$ for every $x \in c_B$. By the following theorems 3—6 and their corollaries the necessary and sufficient conditions are given on the $x_0 \in c_A$, which imply $x_0 \in A_P$.

О ЯДРАХ ЭЛЕМЕНТА ОТДЕЛИМОГО ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОГО ПРОСТРАНСТВА

Л. Лооне

Кафедра математического анализа

Введение

Кнопп определил ядро $K^{\circ}(x)$ комплексной последовательности $x = \{x_k\}$ как замкнутую выпуклую оболочку ее предельных точек (см. [5], гл. 6). Можно показать, что это ядро состоит из комплексных чисел z, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re}(\alpha z) \leqslant \overline{\lim_{n}} \operatorname{Re}(\alpha x_n)$$

для всякого комплексного числа α (см. [5], гл. 6).

Бонсоль расширил понятие ядра последовательности, определяя ядро для элемента произвольного векторного пространства E над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ (или вещественных чисел $\mathbf{R}$). Ядро $K^{\pi}(x)$ элемента $x \in E$ в смысле Бонсоля — это совокупность всех $z \in \mathbf{C}$ (соответственно $z \in \mathbf{R}$), удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re}(\alpha z) \leqslant \pi(\alpha x)$$

для всякого $\alpha \in \mathbf{C}$ (соответственно $\alpha \in \mathbf{R}$), причём π — полуаддитивная и положительно однородная функция на E со значениями в $(-\infty, +\infty]$.

В настоящей работе определяется ядро элемента топологического векторного пространства. Ядро $K(x)$ элемента x топологического векторного пространства E над $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$) рассматривается, как множество в $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$), определяемое некоторым фильтром $\mathfrak{A}$ в пространстве E', топологического сопряженного к E. В настоящей работе в основном изучаются ядра, определяемые фильтром, имеющим базис из слабо бикомпактных выпуклых множеств. Оказывается, что в таком случае изучение свойств ядер можно заменить изучением свойств одного слабо бикомпактного множества в пространстве E'.

Благодаря введению топологии в определение ядра, появляются новые свойства ядер элементов векторного пространства. Например, оказывается, что в пространстве m всех ограниченных последовательностей $x = \{x_k\}$ с нормой $\|x\| = \sup|x_k|$ ядро Кноппа $K^\circ(x)$ состоит из значений всех таких функционалов в точке x, норма которых равна единице и сужение которых на пространстве всех сходящихся последовательностей $x = \{x_k\}$ совпадает с $\lim x_k$.

В связи с наличием топологии в векторном пространстве E можно применять и новые методы для изучения отношений между ядрами элементов. Как известно, в теории ядер в смысле Кноппа и Бонсоля большую роль играет проблема: при каких условиях для некоторого линейного оператора $A : E \to E$ ядро элемента x включает ядро элемента Ax для каждого $x \in E$. Пользуясь новым определением ядра, показывается, что при некоторых ограничениях эту проблему можно свести к исследованию включения двух множеств из E'.

В § 1 дается определение ядра для элемента из локально выпуклого пространства E. В этом же параграфе доказывается предложение, дающее возможность определить, при некоторых ограничениях, ядра элементов из E только одним множеством из E'.

В §§ 2—4 изучаются только ядра, определяемые одним множеством. При этом в § 2 рассматривается проблема включения ядер элемента. Кроме того, в § 2 также показывается, что для всякого $B \subset E$ можно построить множество K в E', определяющее ядра элемнетов из E, так что множество B содержится в множестве всех сходящихся элементов L, определяемых множеством K.

В § 3 рассматривается множество K, определяющее ядро элементов пространства m всех ограниченных последовательностей, такое, что ядро $K(x)$ совпадает с ядром Кноппа $K^\circ(x)$ для всех элементов $x \in m$.

В § 4 изучаются отношения между ядром Бонсоля и ядром, определенным в данной работе. Выясняется, что для всякой конечной функции[1] Бонсоля π на E можно найти слабо бикомпактное множество K в E', определяющее ядро $K(x)$, такое, что $K(x) = K^\pi(x)$ для каждого $x \in E$, если топологией является сильнейшая на E локально выпуклая топология. Кроме того, доказывается, что если E — бочечное пространство, то для всякого слабо бикомпактного K, определяющего ядро элементов из E, найдется конечная функция Бонсоля, удовлетворяющая условию $K(x) = K^\pi(x)$ для каждого $x \in E$.

---

[1] Принимая во внимание определение ядра в смысле Бонсаля, назовем всякую полуаддитивную и положительно однородную функцию функцией Бонсаля.

§ 1. Определение ядра и некоторые его свойства

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство над $\mathbf{R}$ (или над $\mathbf{C}$) и E' — топологическое сопряженное пространство к E. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторый фильтр в E' с базисом $\mathfrak{B}=\{K_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$ из выпуклых слабо замкнутых множеств.

Пусть

$$K_i(x)=\{\langle x, f\rangle : f\in K_i\}.$$

Множество

$$K(x)=\bigcap_{i\in\mathfrak{J}}\overline{K_i(x)}$$

назовем ядром элемента $x\in E$ *по фильтру* $\mathfrak{A}$.

Фильтр с базисом из выпуклых замкнутых множеств назовем *фильтром, определяющим ядро в* E.

Из определения непосредственно следует, что ядро элемента есть выпуклое замкнутое множество в $\mathbf{R}$ (или в $\mathbf{C}$). Будем говорить, что *элемент* $x\in E$ *ограничен* (точнее — ограничен по ядру), если ядро $K(x)$ является непустым и ограниченным множеством. Если ядро $K(x)$ элемента x содержит только один элемент, то говорим, что x *сходится* (точнее — сходится по ядру). Поскольку ядро $K(x)$ является подмножеством пространства $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$), то сходимость элемента x по ядру совпадает со сходимостью фильтра $\mathfrak{A}(x)$.

Если в пространстве E' найдется множество K такое, что для каждого $x\in E$ имеет место

$$\bigcap_{i\in\mathfrak{J}}\overline{K_i(x)}=\{\langle x, f\rangle : f\in K\},$$

то говорим, что *множество* K *определяет ядро в* E.

Предложение 1. *Если фильтр* $\mathfrak{A}$, *определяющий ядро в* E, *имеет базис* $\mathfrak{B}=\{K_i\}_{i\in\mathfrak{J}}$ *из слабо бикомпактных выпуклых множеств, то множество*

$$K=\bigcap_{i\in\mathfrak{J}}K_i$$

и фильтр $\mathfrak{A}$ *определяют одно и то же ядро* $K(x)$ *для каждого элемента* $x\in E$.

Доказательство. Поскольку множества K_i слабо бикомпактны, то для каждого i множества $K_i(x)$ замкнуты. Остается доказать, что

$$\bigcap_{i\in\mathfrak{J}}K_i(x)=\Big(\bigcap_{i\in\mathfrak{J}}K_i\Big)(x).$$

По определению множеств $K_i(x)$ имеем

$$\bigcap_{i\in\mathfrak{J}}K_i(x)\supset\Big(\bigcap_{i\in\mathfrak{J}}K_i\Big)(x).$$

Покажем, что верно и обратное включение. Действительно, предположим противное, т. е. пусть найдется z такое, что

$$z \in \bigcap_{i \in \mathfrak{J}} K_i(x), \quad z \overline{\in} (\bigcap_{i \in \mathfrak{J}} K_i)(x).$$

Пусть

$$B = \{f : \langle x, f \rangle = z, f \in E'\}.$$

Так как E — отделимое пространство, то B — замкнутое множество. Для каждого $i \in \mathfrak{J}$ справедливо $B \cap K_i \neq \varnothing$. Пусть

$$B_i = K_i \cap K_{i_0} \cap B,$$

где K_{i_0} есть некоторый фиксированный элемент из $\mathfrak{B}$. Семейство $\{B_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$ замкнутых множеств в множестве K_{i_0} имеет по предположению пустое пересечение. Ввиду того, что K_{i_0} — слабо бикомпактное множество, найдется конечное подмножество $\mathfrak{E}$ множества $\mathfrak{J}$ такое, что

$$\bigcap_{i \in \mathfrak{E}} B_i = \varnothing.$$

Отсюда

$$\bigcap_{i \in \mathfrak{E}} K_i \cap K_{i_0} \cap B = \varnothing.$$

Поскольку $\mathfrak{E}$ — конечное множество в $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{B} = \{K_i\}_{i \in \mathfrak{J}}$ — базис фильтра, то найдется $j_0 \in \mathfrak{J}$, для которого

$$K_{j_0} \subset \bigcap_{i \in \mathfrak{E}} K_i \cap K_{i_0}.$$

Но тогда $K_{j_0} \cap B = \varnothing$, что невозможно. Предложение доказано.

Из предложения 1 следует, что если задан фильтр с базисом из слабо бикомпактных выпуклых множеств, то изучение свойств ядер можно заменить изучением свойств одного слабо бикомпактного множества в пространстве E'. В случае слабо бикомпактного множества, определяющего ядро, все элементы пространства E ограничены.

§ 2. Ядра элементов локально выпуклого пространства, определяемые слабо бикомпактным множеством

Пусть K — слабо бикомпактное множество, определяющее ядро в E. Из определения сходящегося элемента вытекает, что элемент x сходится тогда и только тогда, когда существует число a такое, что $\langle x, f \rangle = a$ для всех $f \in K$. Поскольку K — подмножество пространства E', то по принципу продолжения тождеств ([5], стр. 108) вытекает, что множество L всех сходящихся элементов является замкнутым векторным подпространством пространства E.

Предложение 2. *Пусть K_1 и K_2 — слабо бикомпактные множества, определяющие ядра в E. Для того, чтобы $K_1(x) \subset K_2(x)$ для всех $x \in E$ необходимо и достаточно, чтобы $K_1 \subset K_2$.*

Доказательство вытекает непосредственно из того факта, что в локально выпуклом пространстве некоторое множество A содержится в замкнутом выпуклом множестве B тогда и только тогда, когда для каждого непрерывного линейного функционала F в этом пространстве выполняется условие $F(A) \subseteq F(B)$. Действительно ,включение $K_1 \subset K_2$ равносильно включению $K_1(x) \subset K_2(x)$ для каждого $x \in E$, поскольку все слабо непрерывные функционалы на E' представимы в виде $f \to \langle x, f \rangle$.

Следствие 2.1. *Пусть K — слабо бикомпактное множество в E', определяющее ядро в E. Пусть A — линейный непрерывный оператор на E и пусть $K_A = \{{}^tAf : f \in K\}$, где ${}^tA$ — сопряженный оператор к оператору A. Для того, чтобы $K(Ax) \subseteq K(x)$ для всех $x \in E$, необходимо и достаточно, чтобы $K_A \subseteq K$.*

Доказательство. В самом деле, по определению ядра

$$K(Ax) = \bigcap_{i \in \mathfrak{J}} K_i(Ax) = \bigcap_{i \in \mathfrak{J}} K_{iA}(x),$$

где

$$K_{iA} = \{{}^tAf : f \in K_i\}.$$

Семейство $\{K_{iA}\}_{i \in \mathfrak{J}}$ является базисом фильтра в E' (см. [3], стр. 85). Поскольку K_i — выпуклые слабо бикомпактные множества, то множества K_{iA} являются выпуклыми и слабо бикомпактными, т. е. фильтр с базисом $\{K_{iA}\}_{i \in \mathfrak{J}}$ определяет ядро в пространстве E. По предложению 1 множество

$$\bigcap_{i \in \mathfrak{J}} K_{iA}$$

определяет в пространстве E то же самое ядро. Такими же методами, как в предложении 1, можно показать, что

$$\bigcap_{i \in \mathfrak{J}} K_{iA} = {}^tA\left(\bigcap_{i \in \mathfrak{J}} K_i\right).$$

Но

$${}^tA\left(\bigcap_{i \in \mathfrak{J}} K_i\right) = {}^tA(K) = K_A.$$

Применяя предложение 2, получаем требуемое.

Теорема 3. *Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, топология которого задана множеством Γ полунорм. Пусть $f_0 \in E'$ такой, что $|\langle x, f_0 \rangle| \leqslant cp(x)$ для всех $x \in E$, где $p \in \Gamma$. Пусть, далее, A — множество всех таких $x \in E$, для которых $p(x) = 0$ и пусть B — некоторое множество в E. Тогда множество K, состоящее из всех таких функционалов $f \in E'$, которые удовлетворяют условиям*

$$1^\circ \quad |\langle x, f\rangle| = cp(x) \qquad \forall x \in E, \tag{1}$$
$$2^\circ \quad \langle x, f\rangle = \langle x, f_0\rangle \qquad \forall x \in B, \tag{2}$$

является слабо бикомпактным множеством, определяющим некоторое ядро для элементов из E. При этом множеством L всех сходящихся элементов является замкнутая оболочка множества $A \cup B$.

Доказательство. Сперва докажем, что K — слабо бикомпактное множество, определяющее ядро в пространстве E. Пусть T — множество всех $f \in E'$, удовлетворяющих условию 1°. По лемме, данной в [4], стр. 458, множество T выпукло и слабо бикомпактно. Пусть

$$H_x = \{f : \langle x, f\rangle = \langle x, f_0\rangle, f \in E'\}.$$

Множество $\mathfrak{B}$ пересечений всевозможных конечных семейств множеств из $\{H_x \cap T\}_{x \in B}$ есть базис фильтра (см. [3], гл. I, § 6). Поскольку множества H_x выпуклы и слабо замкнуты, а T выпукло и слабо бикомпактно, то фильтр с базисом $\mathfrak{B}$ определяет ядро. По предложению 1 множество K определяет в пространстве E то же самое ядро.

Теперь нам остается доказать, что замкнутая линейная оболочка X множества $A \cup B$ — множество всех сходящихся элементов L. Так как множество L является векторным пространством, то из $A \subseteq L$ и $B \subseteq L$ вытекает $X \subseteq L$. Мы должны еще доказать, что $L \subseteq X$, т. е. для произвольного $x_0 \overline{\in} X$ существует $g \in K$ такой, что

$$\langle x_0, g\rangle \neq \langle x_0, f_0\rangle.$$

Пусть сперва E — вещественное локально выпуклое пространство. Рассмотрим в E подпространство X_1, состоящее из всех элементов вида $x = y + \alpha x_0$, где $\alpha \in R$ и $y \in X$. Определим постоянные m и M по следующим формулам:

$$m = \sup_{x \in X} [-cp(x + x_0) - \langle x, f_0\rangle], \tag{3}$$
$$M = \inf_{x \in X} [cp(x + x_0) - \langle x, f_0\rangle]. \tag{4}$$

Из того, что X замкнуто в E и $A \subset X$, вытекает, что $m < M$ и

$$m \leqslant \langle x_0, f_0\rangle \leqslant M. \tag{5}$$

Пусть $\beta \in [m, M]$, где $\beta \neq \langle x_0, f_0\rangle$. Зададим линейную форму g на пространстве X_1 следующим образом:

$$\langle x, g\rangle = \langle y, f_0\rangle + \alpha\beta, \tag{6}$$

где $x = y + \alpha x_0$, $y \in X$. Очевидно, что $\langle x, g\rangle = \langle x, f_0\rangle$ для всех $x \in X$ и $\langle x_0, g\rangle \neq \langle x_0, f_0\rangle$. Воспользовавшись формулами (3)—(5), из равенства (6) заключаем, что

$$|\langle x, g\rangle| \leqslant cp(x) \tag{7}$$

для всех $x \in X_1$. Применив теорему Хана—Банаха, продолжим g на всё пространство E, сохраняя ограничение (7) для всякого

$x \in E$. Этим для вещественного E теорема доказана, так как для произвольного $x_0 \overline{\in} X$ найден функционал $g \in K$ такой, что $\langle x_0, g\rangle = \langle x_0, f_0\rangle$. Пусть теперь E — комплексное локально выпуклое пространство и E_0 — его базисное вещественное локально выпуклое пространство. Как известно ([1], стр. 212), отображение $f \to \mathrm{Re} f$ является изоморфизмом пространства E', сопряженного к E, на пространство E'_0, сопряженного к E_0. Учитывая этот факт, из случая для вещественного E получаем, что для произвольного $x_0 \overline{\in} X$ найдется g с $\mathrm{Re}\, g \in \mathrm{Re}\, K$ такой, что $\langle x_0, \mathrm{Re}\, g\rangle \neq \neq \langle x_0, \mathrm{Re} f_0\rangle$. (Здесь $\mathrm{Re}\, K$ обозначает множество $\{\mathrm{Re} f : f \in K\}$.). Следовательно, $g \in K$ и $\langle x_0, g\rangle \neq \langle x_0, f_0\rangle$, т. е. теорема доказана.

Из этой теоремы вытекают следующие утверждения.

Следствие 3.1. *Для всякого множества $B \subset E$ существует слабо бикомпактное множество K в E', определяющее ядро для элементов из E, такое, что множество B содержится в подпространстве L всех элементов, сходящихся по K.*

Следствие 3.2. *Для любого замкнутого подпространства E_1 линейного нормированного пространства E существует бикомпактное множество K, определяющее ядро, такое, что множество элементов, сходящихся по K, совпадает с подпространством E_1.*

§ 3. Об одном множестве, определяющем ядро элементов пространства m

Рассмотрим пространство m всех ограниченных последовательностей $x = \{x_k\}$ с нормой $\|x\| = \sup |x_k|$.

Обозначим в этом параграфе через K множество всех таких линейных непрерывных функционалов f на m, которые удовлетворяют следующим условиям (здесь $f(x) = \langle x, f\rangle$):

1° $\|f\| \leqslant 1$, (8)

2° $f(e_\nu) = 0$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, (9)

3° $f(e) = 1$, (10)

причем $e = (1, 1, 1, \ldots)$ и $e_\nu = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, где 1 стоит на ν-том месте. Так как последовательности e и e_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ составляют тотальное множество в пространстве c всех сходящихся последовательностей, из теоремы 3 получаем, что множество K определяет такое ядро для элементов из m, для которого множеством сходящихся элементов является пространство c всех сходящихся последовательностей.

Предложение 4. *Пусть A — непрерывный линейный оператор в m. Для того, чтобы включение $K(Ax) \subseteq K(x)$ имело место для всех $x \in m$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $f \in K$ выполнялись следующие условия:*

1° $f(Ae) = 1$, (11)

2° $f(Ae_\nu) = 0$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, (12)

3° $\|{}^tAf\| = 1$.

Доказательство. Применим следствие 2.1. Из (8)—(10) следует, что условия этого предложения необходимы и достаточны для того, чтобы $K_A \subseteq K$.

Из этого предложения вытекает следующее следствие.

Следствие 4.1. *Пусть $A = (a_{nk})$ — матричное преобразование с*

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| = 1.$$

Если выполнены ограничения (11) *и* (12), *то имеет место включение $K(Ax) \subseteq K(x)$ для всех $x \in m$.*

Предложение 5. *Для любого $x \in m$ имеет место равенство*

$$K^\circ(x) = K(x),$$

где $K^\circ(x)$ — ядро последовательности $x \in m$ в смысле Кноппа.

Доказательство 1. Покажем, что для любого $x \in m$ справедливо включение

$$K^\circ(x) \supseteq K(x). \tag{13}$$

Пусть a — некоторый элемент из $K(x)$, т. е. найдется $f \in K$ такой, что $f(x) = a$. Для каждого функционала $f \in m'$ и для каждого $x \in m$ можно (см. [6], теорема 4.2.2) выбрать такие числа a_{nk}, что

$$f(x) = \lim_n \sum_k a_{nk} x_k,$$

причем

1° $a_{nk} = 0$ при $k > k_n$, где k_n — некоторое число, (14)

2° $\sum\limits_k |a_{nk}| \leqslant \|f\|$, (15)

3° $\lim\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}| = \|f\|$. (16)

Учитывая ограничения (8)—(10), получим (см. [6], стр. 135 и 144), что матричное преобразование $A = (a_{nk})$ регулярно, причем

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 1,$$

т. е. $K^\circ(Ax) \subseteq K^\circ(x)$ (см. [5], гл. 6). Поскольку $K^\circ(Ax) = \{a\}$ и a — произвольный элемент из $K(x)$, то справедливо (13).

Кроме того, $K^\circ(x) = K(x)$, когда $x \in c$.

2. Покажем, что для любого $x = \{x_k\}$ имеет место включение

$$K^\circ(x) \subseteq K(x), \tag{17}$$

т. е. $K(x)$ содержит множество $D(x)$ предельных точек последовательности x. Пусть $z \in D(x)$, т. е. найдется подпоследовательность $x^* = \{x_{k_\nu}\}$ последовательности $x = \{x_k\}$ такая, что

$$\lim_\nu x_{k_\nu} = z.$$

Из включения $x^* \in c$ вытекает, что $f(x^*) = z$ для любого $f \in K$. Пусть $A = (a_{nk})$ — регулярное матричное преобразование, удовлетворяющее условиям (14)—(16), причем

$$f(x^*) = \lim_n \sum_\nu a_{n\nu} x_{k_\nu}.$$

Определим преобразование $B = (b_{nk})$ следующим образом:

$$b_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \overline{\in} \{k_\nu\}, \\ a_{nk} & \text{при } k \in \{k_\nu\}. \end{cases}$$

Преобразование $B = (b_{nk})$ регулярно и удовлетворяет условиям (14)—(16). Применяя следствие 4.1, получим, что $K(Bx) \subseteq K(x)$. Так как $K(Bx) = \{z\}$ и z — произвольный элемент из $D(x)$, то справедливо включение (17). Предложение доказано.

§ 4. Слабо бикомпактные множества, определяющие ядро Бонсоля в локально выпуклом пространстве

Пусть E — векторное пространство над полем $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$) и π — конечная функция Бонсоля на этом пространстве. Обозначим через $K^\pi(x)$ ядро элемента $x \in E$ в смысле Бонсоля. В дальнейшем нам понадобится следующая теорема, доказанная Бонсолем (см. [7]).

Теорема 6. *Для любого $x \in E$ множество $K^\pi(x)$ состоит из значений всех таких линейных функционалов f в точке x, которые для всех $x \in E$ удовлетворяют условию $\langle x, \operatorname{Re} f\rangle \leqslant \pi(x)$.*

Рассмотрим сильнейшую на E локально выпуклую топологию. Так как функция π — полуаддитивна и положительно однородна, она непрерывна в этой топологии.

Предложение 7. *Для всякой конечной функции Бонсоля π найдется слабо бикомпактное множество K, определяющее ядро элементов из M такое, что для всех $x \in E$*

$$K(x) = K^\pi(x). \tag{18}$$

Доказательство. По теореме 6 для всякой функции Бонсоля π найдется множество K, состоящее из линейных функционалов, такое, что для каждого $x \in E$ множество

$$\{\langle x, f\rangle : f \in K\}$$

является ядром $K^\pi(x)$ элемента x в смысле Бонсоля. Докажем, что множество K определяет (в смысле нашей работы) ядро элементов из E. Пусть

$$p(x) = \sup_{a \neq 0} \pi\left(\frac{a}{|a|} x\right),$$

где $a \in \mathbf{R}$ (соответственно $a \in \mathbf{C}$). Нетрудно проверить, что p — полунорма на E, причём каждый $f \in K$ удовлетворяет условию

$$|\langle x, f\rangle| \leqslant p(x) \tag{19}$$

для всякого $x \in E$, т. е. $K \subset E'$. Если E — вещественное пространство, то множество

$$\{f : \langle x, f\rangle \leqslant \pi(x)\} \tag{20}$$

слабо замкнуто в E' для каждого $x \in E$.

Если E — комплексное векторное пространство, то его базисное вещественное пространство обозначим через E_0. Как известно (см. [1], гл. 4, § 2), отображение $f \to \operatorname{Re} f$ является гомеоморфизмом пространства E' на пространство E'_0 для слабых топологий в них. Принимая это во внимание, получим, что множество

$$\{f : \langle x, \operatorname{Re} f \rangle \leqslant \pi(x)\} \tag{21}$$

слабо замкнуто в E' для каждого $x \in E$.

Пусть H_x — множество, определенное формулой (20), если E — вещественное пространство, и формулой (21), если E — комлексное пространство. Пусть T слабо бикомпактное множество, состоящее из всех функционалов, удовлетворяющих условию (19). Множество $\mathfrak{B}$ пересечений всевозможных конечных семейств множеств из $\{H_x \cap T\}_{x \in E}$ есть базис фильтра (см. [3], гл. I, § 6, n° 3). Поскольку множества H_x выпуклы и слабо замкнуты, а T выпукло и слабо бикомпактно, то фильтр с базисом $\mathfrak{B}$ определяет ядро. По предложению 1 множество

$$K = \bigcap_{x \in E} H_x$$

определяет ядро в пространстве E. Предложение доказано.

Предложение 8. *Пусть E — бочечное пространство. Для всякого слабо бикомпактного множества K, определяющего ядро для элементов из E, найдется конечная функция Бонсоля π такая, что для всех $x \in E$ справедливо* (18).

Доказательство. Докажем это предложение только для вещественного E. Комплексный случай получается из вещественного при помощи вышеупомянутого гомеоморфизма $f \to \operatorname{Re} f$.

Пусть

$$\pi(x) = \sup_{f \in K} \langle x, f \rangle. \tag{22}$$

Значит, π — полуаддитивная и положительно однородная конечная функция. Поскольку E бочечное пространство, то слабо бикомпактное множество K является равностепенно непрерывным, вследствие чего π — непрерывная функция. Из непрерывности функции π вытекает, что все линейные функционалы $f \in B$, где

$$B = \{f : \langle x, f \rangle \leqslant \pi(x) \, \forall x \in E\},$$

непрерывны. Докажем, что функция π является функцией Бонсоля такой, что имеет место (18). Из слабой бикомпактности множества K следует, что для всякого $a \in E$ найдется $f_a \in K$ с $\pi(a) = \langle a, f_a \rangle$, т. е. гиперплоскость

$$H_a = \{f : \langle a, f \rangle = \pi(a)\} \tag{23}$$

является опорной гиперплоскостью множества K, причем все опорные гиперплоскости множества K можно задать формулой (23). Поскольку в отделимом локально выпуклом пространстве каждое выпуклое бикомпактное множество есть пересечение содержащих его замкнутых полупространств, определяемых опорными гиперплоскостями к этому множеству, и справедливо включение $K \subseteq B$, то удовлетворено равенство $K = B$. По теореме 6 из этого вытекает (18). Предложение доказано.

Литература

1. Бурбаки Н., Топологические векторное пространства. Москва, 1959.
2. Бурбаки Н., Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства. Москва, 1959.
3. Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры. Москва, 1968.
4. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
5. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
6. Реймерс Э., Новые общие методы суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 119—154.
7. Bonsall F. F., Core-preserving transformations of a vector space. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, 15—25.

Поступило
13 IV 1970

ERALDUVA LOKAALSELT KUMERA RUUMI ELEMENDI TUUM

L. Loone

Resümee

Knopp defineeris kompleksarvude jada tuuma (vt. [5], pt. 6). Bonsall üldistas seda mõistet, defineerides vektorruumi elemendi tuuma (vt. [7]). Käesolevas artiklis antakse topoloogilise vektorruumi tuuma mõiste.

Paragrahvis 1 ja 2 antakse eralduva lokaalselt kumera ruumi elemendi tuuma mõiste ja uuritakse tuuma ning koonduvate elementide ruumi omadusi. Paragrahvis 3 näidatakse, et tõkestatud arvjada tuum Knoppi mõttes on tuum ka antud töös toodud definitsiooni mõttes. Paragrahvis 4 vaadeldakse Bonsalli tuuma definitsiooni ja antud töös toodud tuuma definitsiooni vahekorda.

THE CORE OF AN ELEMENT IN A LOCALLY CONVEX SPACE

L. Loone

Summary

The core of a sequence of complex numbers has been defined by Knopp (see [5], ch. 6). That conception was extended by Bonsall who defined the core of an element in a vector space (see [7]). In the present paper the conception of the core of an element in the topological space is defined.

In section 1 and 2 the conception of the core of an element in a locally convex space is defined and some properties of the core and the space of convergent elements are investigated. In section 3 it is shown that the core of a bounded sequence in the conception of Knopp is also a core in the conception defined in this paper. In section 4 the relations of the conception of the core of Bonsall and the one presented in this paper are considered.

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ РЯДОВ, λ-ОГРАНИЧЕННЫХ МЕТОДАМИ РИСА И ЧЕЗАРО

Г. Кангро

Кафедра математического анализа

Пусть[1] $\lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow$. Сходящуюся последовательность $x = \{\xi_n\}$ с $\lim \xi_n = \xi$ мы назвали λ-сходящейся [3], если существовал конечный предел

$$\beta = \lim \beta_n, \quad \beta_n = \lambda_n (\xi_n - \xi).$$

Поскольку в приложениях существование предела β не всегда известно, то целесообразно ввести и следующее более широкое понятие.

Сходящуюся последовательность x будем называть *λ-ограниченной*, если $\beta_n = O(1)$. Понятие λ-ограниченности совпадает с понятием сходимости тогда и только тогда, когда последовательность λ ограничена, например, при $\lambda_n = 1$. Множество всех λ-ограниченных (вещественных или комплексных) последовательностей обозначим через m^λ.

Пусть A — некоторый метод суммирования последовательностей, переводящий x в последовательность Ax. Если $Ax \in m^\lambda$, то последовательность x называем *λ-ограниченной методом A* или просто *A^λ-ограниченной*. Ряд Σu_n называем *A^λ-ограниченным*, если последовательность частичных сумм этого ряда A^λ-ограничена. В частности, ряд Σu_n является λ-ограниченным (т. е. E^λ-ограниченным, где E — метод сходимости) тогда и только тогда, когда

$$\lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = O(1).$$

Пусть B — метод суммирования последовательностей и $\mu = \{\mu_n\}$, $0 < \mu_n \uparrow$. Согласно общему определению множителей суммируемости будем называть числа ε_n *множителями суммируемости класса* $(A^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$, коротко $\varepsilon_n \in (A^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$, если при каждом A^λ-ограниченном ряде Σu_n ряд $\Sigma \varepsilon_n u_n$ является B^μ-огра-

---

[1] Свободные индексы принимают значения 0, 1, ...

ниченным. При $\lambda_n = \mu_n = 1$ класс $(A^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$ превращается в класс (A, B). В 1963 г. Алянчич [6] доказал следующую теорему для метода Зигмунда[2] $Z = (Z, \alpha)$, $\alpha > 0$.

Пусть последовательность $\lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, такая, что для некоторого $a > 0$ имеем $n^a/\lambda_n \uparrow$. Тогда $\varepsilon_n \in (Z^\lambda{}_O, Z^\mu{}_O)$ при $\mu_n = \lambda_n/\varepsilon_n$, если:

I. $0 < \varepsilon_n \downarrow$, $\Delta^2\varepsilon_n \geqslant 0$, $n^b\varepsilon_n \uparrow$ для некоторого $b > 0$, $\alpha > a + b$ *или*

II. $0 < \varepsilon_n \uparrow$, $\Delta^2\varepsilon_n \geqslant 0$ или $\Delta^2\varepsilon_n \leqslant 0$, $n^c/\mu_n \downarrow$ при некотором $c > 0$, $\alpha > a$.

Случай I теоремы Алянчича при $\alpha = 1$ (т. е. для метода арифметических средних) рассматривали Алексич и Кралик [5]. Алексич и Кралик, а также Алянчич предполагали, что u_n — элементы любого банахова пространства X, но поскольку числа $\varepsilon_n \in (A^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$ не зависят от структуры пространства X, то ряд $\Sigma\, u_n$ можно считать числовым. Алянчич показал, что его теорема позволяет оценить скорость убывания модулей непрерывности и гладкости функции f_ε (и ее производных), рядом Фурье которой служит ряд

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 a_0 + \sum_n \varepsilon_n (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

если известны оценки для убывания соответствующих модулей 2π-периодической функции f (и ее производных) из пространства C или L^p $(1 \leqslant p < \infty)$ с рядом Фурье

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

В связи с этими исследованиями Алянчича представляет интерес более детально изучить множители суммируемости класса $(A^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$. В настоящей заметке устанавливаются необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости классов $(P^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$ (теорема 2) и $(C^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$ (теорема 3), где $P = (R, p_n)$ — метод взвешенных средних Риса (превращающийся в метод Зигмунда при $p_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$), $C = (C, \alpha)$ — метод Чезаро целочисленного порядка α, а B — общий треугольный метод, подчиненный некоторым ограничениям. Теорема 2 содержит, в частности, теорему Алянчича, а теорема 3 — известную теорему Шура о множителях класса $((C, \alpha), (C, \beta))$ и некоторые результаты Хислопа [8]. В связи с доказательством теоремы 3 дано простое доказательство известной леммы Андерсена (примечание 4).

При выборе последовательности λ решающим является свойство сохранения λ-ограниченности. Поэтому предварительно познакомимся некоторыми свойствами матричных методов сумми-

[2] Алянчич сформулировал свою теорему без понятия множителей суммируемости.

рования (в частности методов Риса и Чезаро), сохраняющих λ-ограниченность. Эти свойства позволяют также упростить некоторые результаты статей [3—4] (примечание 2).

§ 1. Методы, сохраняющие λ-ограниченность

1. Пусть преобразование A переводит последовательность $x = \{\xi_k\}$ в последовательность $y = \{\eta_n\}$ с

$$\eta_n = \sum a_{nk}\xi_k. \tag{1}$$

При нахождении множителей суммируемости класса $(A^\lambda{}_0, B^\mu{}_0)$ основной является следующая теорема, где $e = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$.

Теорема 1. *Преобразование $A = (a_{nk})$ обладает свойством $A(m^\lambda) \subset m^\mu$ тогда и только тогда, когда*

1° $\exists \lim\limits_n a_{nk} = a_k,$

2° $Ae \in m^\mu,$

3° $\sum\limits_k \frac{|a_k|}{\lambda_k} < \infty,$

4° $\mu_n \sum\limits_k \frac{|a_{nk} - a_k|}{\lambda_k} = O(1),$

причем в случае $\mu_n = O(1)$, $\lambda_n \neq O(1)$ следует заменить O на o.

При $\lambda_n = \mu_n = 1$ из теоремы 1 получается известная теорема Кожима—Шура.

Доказательство. Необходимость условий 1° и 2° теоремы вытекает соответственно из соотношений $e_k \in m^\lambda$, $e \in m^\lambda$, где $e_k = \{\delta_{\nu k}\}$. В силу условия 2° ряд $\sum\limits_k a_{nk}$ сходится, вследствие чего формуле (1) можно придать вид

$$\eta_n = \sum_k \frac{a_{nk}}{\lambda_k}\beta_k + \xi A_n, \tag{2}$$

где $A_n = \sum\limits_k a_{nk}$.

Если $\lambda_n \neq O(1)$, то, ввиду условия 2°, преобразование последовательностей с матрицей (a_{nk}/λ_k) должно переводить каждую ограниченную последовательность $\{\beta_k\}$ в сходящуюся последовательность $\{\eta_n - \xi A_n\}$. Для этого, согласно теореме Шура (см. [1], стр. 17—18), необходимо и достаточно выполнение условий [3] 1° и 3° теоремы и

$$\lim_n \sum_k \frac{|a_{nk} - a_k|}{\lambda_k} = 0, \tag{3}$$

[3] Отметим, что в формулировке теоремы Шура, данной в [1], условие $\sum\limits_k |a_{nk}| = O(1)$ можно заменить условием $\sum |a_k| < \infty$.

причем из (2) вытекает

$$\eta = \lim_n \eta_n = \sum_k \frac{a_k}{\lambda_k} \beta_k + \xi a,$$

где $a = \lim A_n$. Следовательно,

$$\mu_n (\eta_n - \eta) = \mu_n \sum_k \frac{a_{nk} - a_k}{\lambda_k} \beta_k + \xi \mu_n (A_n - a).$$

Ввиду условия 2° соотношение $A(m^\lambda) \subset m^\lambda$ справедливо тогда и только тогда, когда преобразование последовательностей с матрицей

$$\left(\mu_n \frac{a_{nk} - a_k}{\lambda_k} \right)$$

сохраняет ограниченность. Для этого необходимо и достаточно выполнение условия 4° теоремы. Поскольку при $\mu_n \neq O(1)$ условие (3) вытекает из условия 4° теоремы, то в случае $\lambda_n \neq O(1)$ теорема доказана.

В случае $\lambda_n = O(1)$ доказательство можно провести аналогично, лишь надо иметь в виду, что тогда $\beta_k = o(1)$, вследствие чего вместо теоремы Шура следует применить теорему Кожима — Шура. V

Примечание 1. Доказательство теоремы 1 мы свели к теоремам Шура и Кожима — Шура. Но известно (см. [2], стр. 115), что в случае числовой матрицы эти теоремы имеют место и тогда, когда преобразуемая последовательность $x = \{\xi_n\}$ принадлежит любому банахову пространству X. Поэтому и теорема 1 — и вместе с ней все результаты настоящей статьи — справедливы и в том случае, когда рассматриваемые последовательности и ряды принадлежат пространству X.

2. Будем говорить, что метод A *сохраняет λ-ограниченность*, если $A(m^\lambda) \subset m^\lambda$. Соответствующие необходимые и достаточные условия получаются из теоремы 1 при $\mu_n = \lambda_n$. В частности, из теоремы 1 вытекает, что *регулярный метод $A = (a_{nk})$ с $A_n = 1$ сохраняет λ-ограниченность тогда и только тогда, когда*

$$\lambda_n \sum_k \frac{|a_{nk}|}{\lambda_k} = O(1). \tag{4}$$

Покажем, что метод Зигмунда (Z, α), $\alpha > 0$, сохраняет λ-ограниченность, если λ удовлетворяет предположению теоремы Алянчича, т. е. если существует $0 < a < \alpha$ такое, что $n^a/\lambda_n \uparrow$.

Метод Зигмунда (Z, α) выражается в виде преобразования последовательности в последовательность треугольной матрицей с элементами

$$a_{nk} = \frac{(k+1)^\alpha - k^\alpha}{(n+1)^\alpha} \qquad (k \leqslant n).$$

Поскольку $(k+1)^{\alpha}-k^{\alpha} \sim \alpha(k+1)^{\alpha-1}$, то (Z, α) сохраняет λ-ограниченность тогда и только тогда, когда $l_n = O(1)$, где, по условию (4),

$$l_n = \frac{\lambda_n}{(n+1)^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)^{\alpha-1}}{\lambda_k}.$$

Согласно предположению при $k \leqslant n$ имеем

$$\frac{(k+1)^{a}}{\lambda_k} \leqslant \frac{(n+1)^{a}}{\lambda_n},$$

и, поскольку $\alpha - 1 - a > -1$,

$$l_n = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-a}} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\alpha-1-a} = \frac{O(1)}{(n+1)^{\alpha-a}} \sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha-1-a} = O(1),$$

где $A_k^{\beta} = \binom{k+\beta}{k}$.

Вместе с тем доказано, что в предположениях теоремы Алянчича (Z, α) сохраняет и μ-ограниченность, так как в случае I теоремы Алянчича имеем $n^{a+b}/\mu_n \uparrow$ при $0 < a+b < \alpha$, а в случае II имеем $\lambda_n/\mu_n \uparrow$, откуда при $k \leqslant n$ вытекает $\mu_n/\mu_k \leqslant \lambda_n/\lambda_k$ и, следовательно,

$$\frac{\mu_n}{(n+1)^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)^{\alpha-1}}{\mu_k} \leqslant l_n = O(1).$$

3. Выведем из (4) некоторые простые следствия для методов суммирования взвешенных средних Риса и Чезаро порядка $\alpha > 0$.

Лемма 1. *Если метод Риса (R, p_n) сохраняет λ-ограниченность, то*

1° $\dfrac{\lambda_n}{\lambda_\nu} \dfrac{P_\nu}{P_n} = O(1) \qquad (\nu \leqslant n)$,

2° $\lambda_n = o(P_n), \qquad |P_n| \to \infty$.

Доказательство. Метод (R, p_n) определяется в виде преобразования последовательности в последовательность треугольной матрицей с элементами

$$a_{nk} = \frac{p_k}{P_n} \qquad (k \leqslant n),$$

где $P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n \neq 0$. Поэтому условие (4) имеет вид

$$\frac{\lambda_n}{|P_n|} \sum_{k=0}^{n} \frac{|p_n|}{\lambda_k} = O(1). \tag{5}$$

Первое утверждение леммы 1 вытекает из (5) ввиду неравенств

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|p_k|}{\lambda_k} \geqslant \sum_{k=0}^{\nu} \frac{|p_k|}{\lambda_k} \geqslant \frac{1}{\lambda_\nu} \sum_{k=0}^{\nu} |p_k| \geqslant \frac{|P_\nu|}{\lambda_\nu} \qquad (\nu \leqslant n).$$

При $\nu = 0$ из 1° следует $\lambda_n = O(P_n)$. Поэтому существует константа $m > 0$ такая, что

$$\frac{|p_n|}{\lambda_n} \geqslant m \frac{|p_n|}{|P_n|} \geqslant m \frac{|p_n|}{|p_0| + |p_1| + \ldots + |p_n|},$$

вследствие чего ряд $\Sigma |p_n|/\lambda_n$ расходится, если $|P_n| \to \infty$. Тем самым из (5) следует второе утверждение леммы 1.

Из утверждения 1° леммы 1 при $\nu = n - 1$ получается

Следствие 1. *Если метод Риса* (R, p_n) *сохраняет* λ-*ограниченность и* $P_n = O(P_{n-1})$, *то* $\lambda_n = O(\lambda_{n-1})$.

Лемма 2, *Если метод Чезаро* (C, α) *порядка* $\alpha > 0$ *сохраняет* λ-*ограниченность, то*

1° $\dfrac{\lambda_n}{\lambda_\nu} \dfrac{\nu + 1}{n + 1} = O(1) \qquad (\nu \leqslant n)$,

2° $\lambda_n = o(n + 1)$.

Доказательство. В случае метода (C, α) условие (4) гласит

$$\frac{\lambda_n}{A_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{\lambda_k} = O(1). \tag{6}$$

Без ограничения общности можем предполагать, что $\alpha \geqslant 1$. Действительно, если $0 < \alpha < 1$, то, в силу неравенства

$$\frac{A_{n-k}^{\alpha}}{A_n^{\alpha+1}} = \frac{\alpha+1}{\alpha} \frac{n-k+\alpha}{n+\alpha+1} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}},$$

соотношение (6) остается справедливым, если в нем α заменить на $\alpha + 1 > 1$.

Нетрудно поверить, что, ввиду предположения $\alpha \geqslant 1$, справедливо неравенство

$$\frac{A_{n-1}^{\alpha-1}}{A_{\nu-1}^{\alpha-1}} \geqslant \frac{A_n^{\alpha-1}}{A_\nu^{\alpha-1}} \qquad (1 \leqslant \nu \leqslant n).$$

Следовательно,

$$\frac{\lambda_n}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{\lambda_k} \geqslant \frac{\lambda_n}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{\lambda_k} \geqslant \frac{\lambda_n}{\lambda_\nu A_n^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\nu} A_{\nu-k}^{\alpha-1} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_{\nu-k}^{\alpha-1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\lambda_n A_\nu^{\alpha} A_n^{\alpha-1}}{\lambda_\nu A_n^{\alpha} A_\nu^{\alpha-1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_\nu} \frac{\nu+\alpha}{n+\alpha};$$

откуда получается первое утверждение леммы 2.

При $\nu = 0$ из 1° вытекает $\lambda_n = O(n + 1)$, вследствие чего ряд $\Sigma 1/\lambda_n$ расходится. Поскольку метод Чезаро $(C, \alpha - 1)$ вполне регулярен при $\alpha \geqslant 1$, то

$$\lim_n \frac{1}{A_n^{\alpha-1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{\lambda_k} = \infty.$$

Так как

$$\frac{\lambda_n}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{\lambda_k}=\alpha\frac{\lambda_n}{n+\alpha}\frac{1}{A_n^{\alpha-1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{\lambda_k},$$

то из (6) следует второе утверждение леммы 2.

Из утверждения 1° леммы 2 при $\nu=n-1$ получается

Следствие 2. *Если метод Чезаро (C, α) порядка $\alpha>0$ сохраняет λ-ограниченность, то $\lambda_n=O(\lambda_{n-1})$.*

4. Для нахождения множителей суммируемости класса $(A^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$ полезна еще

Лемма 3. *Если треугольный регулярный метод B, определяемый в виде преобразования ряда в последовательность матрицей (β_{nk}), сохраняет μ-ограниченность, то для каждого μ-ограниченного ряда Σu_n имеем*

$$\mu_n\sum_{k=0}^{n}(1-\beta_{nk})u_k=O(1),$$

причем в случае $\mu_n=O(1)$ можно заменить O на o.

Доказательство. Обозначив

$$\eta_n=\sum_{k=0}^{n}\beta_{nk}u_k,\qquad \eta=\sum u_k,$$

в силу регулярности метода B, имеем $\lim\eta_n=\eta$ и, следовательно,

$$\mu_n\sum_{k=0}^{n}(1-\beta_{nk})u_k=\mu_n(\eta-\eta_n)-\mu_n\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k. \tag{7}$$

Так как метод B сохраняет μ-ограниченность, то $\{\eta_n\}$ является μ-ограниченной и, стало быть, первый член в правой части равенства (7) ограничен. Второй член в правой части равенства (7) ограничен по предположению. Если $\mu_n=O(1)$, то оба члена в правой части равенства (7) стремятся к нулю.

Примечание 2. Ввиду утверждения 2° леммы 1, условие 1° теоремы 2 из [3] можно отбросить, а если $p_n>0$, то (в силу леммы 3) и условие 5° этой теоремы. Ввиду утверждения 2° леммы 2, условие 1° теоремы 1 из [4] можно отбросить, а также (в силу леммы 3) условие 4° той же теоремы.

§ 2. Общие свойства множителей суммируемости класса $(A^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$

Если A — нормальный и B — произвольный треугольные методы суммирования, определяемые в виде преобразования ряда в последовательность соответственно матрицами (α_{nk}) и (β_{nk}), то методом обратного преобразования Шура на основе теоремы 1 нетрудно доказать следующую основную лемму (ср. [3], стр. 141—142).

Лемма 4. *Если метод A удовлетворяет условию $a_{n0}=1$, а метод B — условию $Be \in m^\mu$, то $\varepsilon_n \in (A^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$ тогда и только тогда, когда*

1° $\exists \lim\limits_n c_{nk} = c_k$,

$$2^\circ \quad \mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|c_k|}{\lambda_k} = O(1),$$

$$3^\circ \quad \mu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|c_{nk}-c_k|}{\lambda_k} = O(1),$$

где

$$c_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \beta_{n\nu}\varepsilon_\nu a'_{\nu k}, \qquad (a'_{nk}) = (a_{nk})^{-1},$$

причем в случае $\mu_n = O(1)$, $\lambda_n \neq O(1)$ следует заменить[4] *O на o.*

Обозначим через $m^\lambda{}_A$ множество всех A^λ-ограниченных последовательностей, т. е.

$$m^\lambda{}_A = \{x : Ax \in m^\lambda\}.$$

В частном случае $\varepsilon_n = 1$ лемма 4 дает необходимые и достаточные условия для включения

$$m^\mu{}_B \supset m^\lambda{}_A.$$

Из леммы 4 выведем два простых условия, необходимых для множителей суммируемости класса $(A^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$.

Лемма 5. *Если метод A сохраняет λ-ограниченность, а треугольный метод B удовлетворяет условию*

$$\lim_n \beta_{nk} = 1, \tag{8}$$

то для $\varepsilon_n \in (A^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$ необходимо

$$1^\circ \quad \mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\Delta\varepsilon_k|}{\lambda_k} = O(1)$$

и, если $Be \in m^\mu$,

2° $\mu_n \varepsilon_{n+1} = O(\lambda_n)$,

причем в случае $\mu_n = O(1)$, $\lambda_n \neq O(1)$ следует заменить O на o.

Доказательство. Поскольку A сохраняет λ-ограниченность, то $(A^\lambda{}_O, B^\mu{}_O) \subset (E^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$, где E — метод сходимости. Поэтому достаточно найти необходимые условия для множителей суммируемости класса $(E^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$.

В случае $A = E$ имеем

$$a_{nk} = 1\,(k \leqslant n), \quad a'_{kk} = 1, \quad a'_{k+1,k} = -1, \quad a'_{nk} = 0\,(n > k+1),$$

---

[4] Это относится к условию 3°. При $\mu_n = O(1)$ условие 2° превращается в условие $\sum |c_k|/\lambda_k < \infty$ и, тем самым, не зависит от замены O на o.

а величины c_{nk} в лемме 4 определяются по формуле[5]

$$c_{nk} = \Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k)$$

и, следовательно, $c_k = \Delta\varepsilon_k$. Тем самым условие 2° леммы 4 превращается в условие 1° леммы 5°. Так как в рассматриваемом случае

$$\sum_{k=0}^{n}(c_{nk} - c_k) = (\beta_{n0} - 1)\varepsilon_0 + \varepsilon_{n+1}$$

и, ввиду $\lambda_n \uparrow$,

$$\frac{\mu_n}{\lambda_n}\left|\sum_{k=0}^{n}(c_{nk} - c_k)\right| \leqslant \mu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|c_{nk} - c_k|}{\lambda_k};$$

то, в силу $Be \in m^{\mu}$ и условия 3° леммы 4, имеет место условие 2° леммы 5.

Примечание 3. Условия 1° и 2° леммы 4 необходимы для $\varepsilon_n \in (E^{\lambda}{}_O, B^{\mu}{}_O)$, если B удовлетворяет условиям (8) и $Be \in m^{\mu}$. Покажем, что условия 1° и 2° являются также достаточными для $\varepsilon_n \in (E^{\lambda}{}_O, B^{\mu}{}_O)$, если B сохраняет μ-ограниченность.

Действительно, взяв в лемме 4 методы $A = B = E$, найдем

$$c_{nk} = \begin{cases} \Delta\varepsilon_k, & k < n \\ \varepsilon_n, & k = n, \end{cases}$$

причем условие 1° леммы 4 выполнено с $c_k = \Delta\varepsilon_k$, а условия 2° и 3° леммы 4 превращаются соответственно в условия 1° и 2° леммы 5. Тем самым показано, что условия 1° и 2° леммы 5 необходимы и достаточны для того, чтобы $\varepsilon_n \in (E^{\lambda}{}_O, E^{\mu}{}_O)$. Поскольку B сохраняет μ-ограниченность, то $(E^{\lambda}{}_O, E^{\mu}{}_O) \subset \subset (E^{\lambda}{}_O, B^{\mu}{}_O)$. Следовательно, *если треугольный метод B сохраняет μ-ограниченность и удовлетворяет условию* (8), *то выполнение условий* 1° *и* 2° *леммы* 5 *необходимо и достаточно для того, чтобы $\varepsilon_n \in (E^{\lambda}{}_O, B^{\mu}{}_O)$.*

§ 3. Множители суммируемости класса $(P^{\lambda}{}_O, B^{\mu}{}_O)$

1. Докажем следующую теорему для метода Риса $P = (R, p_n)$.

Теорема 2. *Если регулярный метод Риса $P = (R, p_n)$ с $p_n \neq 0$ сохраняет λ-ограниченность, а треугольный регулярный метод*[6] *B удовлетворяет условию $\beta_{nk} \leqslant 1$ и сохраняет μ-ограниченность, причем $\mu_n = O(\mu_{n-1})$, то $\varepsilon_n \in (P^{\lambda}{}_O, B^{\mu}{}_O)$ тогда и только тогда, когда*

[5] При наличии двух индексов разность берется по второму индексу.

[6] Предполагается, что B определяется в виде преобразования последовательности в последовательность матрицей (b_{nk}) и в виде преобразования ряда в последовательность — матрицей (β_{nk}). При этом $b_{nk} = \Delta\beta_{nk}$.

1° $\mu_n P_n \Delta\varepsilon_{n+1} = O(\lambda_n p_{n+1})$,

2° $\mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \left|P_k \Delta \frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k}\right| = O(1)$,

3° $\mu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \left|P_k \Delta \frac{b_{nk}}{p_k} \cdot \varepsilon_{k+1}\right| = O(1)$,

причем в случае $\mu_n = O(1)$, $\lambda_n \neq O(1)$ следует заменить O на o.

Доказательство. В случае $A = (R, p_n)$ величины c_{nk} в лемме 4 вычисляются по формуле (ср. [3], стр. 143)

$$c_{nk} = P_k \Delta \frac{\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k)}{p_k};$$

откуда следует выполнение условия 1° леммы 4, причем

$$c_k = P_k \Delta \frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k}.$$

Поскольку предположения леммы 4 выполнены, то остается доказать эквивалентность условий 2° и 3° леммы 4 условиям 1°—3° теоремы. При этом достаточно рассматривать случаи $\mu_n \neq O(1)$ и $\mu_n = O(1)$, $\lambda_n = O(1)$, так как случай $\mu_n \equiv O(1)$, $\lambda_n \neq O(1)$ изучается аналогично.

Необходимость. Пусть $\varepsilon_n \in (P^{\lambda}{}_O, B^{\mu}{}_O)$. Тогда условия 2° и 3° леммы 4 выполнены, причем из условия 3°, в силу $\lambda_n \uparrow$, вытекает

$$\mu_n \sum_{k=0}^{n} (c_{nk} - c_k) = O(\lambda_n).$$

Поскольку

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \varepsilon_0 - \varepsilon_{n+1} - P_n \frac{\Delta\varepsilon_{n+1}}{p_{n+1}}, \tag{9}$$

то

$$\sum_{k=0}^{n} (c_{nk} - c_k) = (\beta_{n0} - 1)\varepsilon_0 + \varepsilon_{n+1} + P_n \frac{\Delta\varepsilon_{n+1}}{p_{n+1}}.$$

Ввиду условия $Be \in m^{\mu}$ (вытекающего из того, что B сохраняет μ-ограниченность) и условия 2° леммы 5, имеет место условие 1° теоремы. Условие 2° теоремы — это условие 2° леммы 4. Условие 3° теоремы следует из тождества (ср. [3], стр. 144)

$$P_k \Delta_k \frac{b_{nk}}{p_k} \cdot \varepsilon_{k+1} = c_{nk} - c_k + (1 - \beta_{nk}) c_k - (b_{nk} + b_{n,k+1}) P_k \frac{\Delta\varepsilon_{k+1}}{p_{k+1}}$$

на основе условия 3° леммы 4, леммы 3 (с $u_k = |c_k|/\lambda_k$) вместе с условием 2° теоремы, и условия 1° теоремы, если учитывать, что B сохраняет μ-ограниченность и $\mu_n = O(\mu_{n-1})$.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1°—3° теоремы. Условие 2° леммы 4 — это условие 2° теоремы, а условие 3° леммы 4 получается из тождества

$$c_{nk}-c_k=P_k\Delta_k\frac{b_{nk}}{p_k}\cdot\varepsilon_{k+1}-(1-\beta_{nk})c_k+(b_{nk}+b_{n,k+1})P_k\frac{\Delta\varepsilon_{k+1}}{p_{k+1}}$$

на основе условия 3° теоремы, леммы 3 (с $u_k=|c_k|/\lambda_k$) вместе с условием 2° теоремы, и условия 1° теоремы, если иметь в виду, что B сохраняет μ-ограниченность и $\mu_n=O(\mu_{n-1})$.

2. В частности, если $B=(R,\ p_n)$, то условие 3° теоремы 2 превращается в условие 2° леммы 5 и из теоремы 2 получается

Следствие 3. *Если регулярный метод Риса $P=(R,\ p_n)$ с $p_n\neq 0$ сохраняет λ-ограниченность и μ-ограниченность, причем $\mu_n=O(\mu_{n-1})$, то $\varepsilon_n\in(P^{\lambda}{}_O,\ P^{\mu}{}_O)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия 1° и 2° теоремы 2 и*

$$\mu_n\varepsilon_{n+1}=O(\lambda_n),\tag{10}$$

причем в случае $\mu_n=O(1)$, $\lambda_n\neq O(1)$ следует заменить O на o.

Для проверки выполнения условия 2° теоремы 2 полезна

Лемма 6. *Если $\mu_n\neq O(1)$ и*

$$\mu_n\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\bar{\Delta}\frac{\lambda_k}{\mu_k}=O(1),\tag{11}$$

а $c_k=P_k\Delta(\Delta\varepsilon_k/p_k)$ сохраняет знак, то условие 2° теоремы 2 вытекает из условия 1° теоремы 2 и (10).

Доказательство. Обозначив

$$D_k=\varepsilon_0-\sum_{\nu=0}^{k}c_\nu,$$

с помощью преобразования Абеля находим

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{\lambda_k}=\frac{\varepsilon_0}{\lambda_0}-\sum_{k=0}^{n}\Delta\frac{1}{\lambda_k}\cdot D_k-\frac{D_n}{\lambda_{n+1}}.\tag{12}$$

На основе формулы (9) из условия 1° теоремы 2 и условия 2° леммы 5 вытекает

$$\mu_kD_k=O(\lambda_k).\tag{13}$$

Но поскольку $\mu_n\neq O(1)$, то $D_n=O(\lambda_{n+1})$ и из (12) следует

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda_k}=-\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta\frac{1}{\lambda_k}\cdot D_k+\frac{D_n}{\lambda_{n+1}}.$$

Так как c_k сохраняет знак, то, ввиду (13), имеем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|c_k|}{\lambda_k}\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta\frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{\lambda_k}{\mu_k}+\frac{|D_n|}{\lambda_{n+1}}.$$

С помощью преобразования Абеля получаем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta\frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{\lambda_k}{\mu_k}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\bar{\Delta}\frac{\lambda_k}{\mu_k}+\frac{1}{\lambda_{n+1}}\frac{\lambda_n}{\mu_n}$$

и, следовательно, в силу (13),

$$\mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|c_k|}{\lambda_k} \leqslant \mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \overline{\Delta} \frac{\lambda_k}{\mu_k} + O(1):$$

На основе условия (11) лемма доказана.

Отметим, что в случае теоремы Алянчича условие (11) необходимо. Действительно, поскольку тогда $\varepsilon_n = \lambda_n/\mu_n$ и, согласно следствию 1, $\lambda_n = O(\lambda_{n-1})$, то условие (11) эквивалентно условию

$$\mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\Delta\varepsilon_k|}{\lambda_k} = O(1). \tag{14}$$

Но по лемме 5 условие (14) необходимо для $\varepsilon_n \in (Z^{\lambda}{}_O,\ Z^{\mu}{}_O)$.

Применим лемму 6 к выводу теоремы Алянчича из следствия 3. Метод Зигмунда (Z, α) представляет собой метод Риса (R, p_n) с

$$p_n = (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \sim \alpha(n+1)^{\alpha-1}, \qquad P_n = (n+1)^{\alpha}.$$

Так как в теореме Алянчича $\varepsilon_n = \lambda_n/\mu_n$, то выполнение условия (10) следует из соотношения $\lambda_n = O(\lambda_{n-1})$.

Далее, Алянчич показал (см. [6], стр. 219), что из предположений его теоремы вытекает

$$n\Delta\varepsilon_n = O(\varepsilon_n).$$

В силу условия (10) отсюда получается выполнение условия 1° теоремы 2.

Поскольку

$$\left|P_k \Delta \frac{\Delta\varepsilon_k}{p_k}\right| \leqslant P_k \left|\Delta \frac{1}{p_k}\right| |\Delta\varepsilon_k| + \frac{P_k}{p_{k+1}} |\Delta^2\varepsilon_k|,$$

а в случае метода Зигмунда (см. [1], стр. 112)

$$P_k \Delta \frac{1}{p_k} \approx \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \qquad \frac{P_k}{p_{k+1}} \approx \frac{1}{\alpha}(k+1),$$

то условие 2° теоремы 2 выполнено, если выполнены условие (14) и

$$\mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1) \frac{|\Delta^2\varepsilon_k|}{\lambda_k} = O(1). \tag{15}$$

Но условие (15) получается из условия 2° теоремы 2 при $\alpha = 1$, т. е. при $p_k = 1$. Так как в условиях теоремы Алянчича $\mu_n \neq O(1)$ и $\Delta^2\varepsilon_k$ сохраняет знак, то, согласно лемме 6, условие (15) вытекает из условий[7] 1° теоремы 2 и (10), если выполнено условие (14). С целью показать выполнение условия (14) рассмотрим оба случая теоремы Алянчича в отдельности.

I. Если $\varepsilon_n \downarrow$, то

$$\mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\Delta\varepsilon_k|}{\lambda_k} \leqslant \frac{\mu_n}{\lambda_{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta\varepsilon_k \leqslant \frac{\mu_n}{\lambda_{n+1}} \varepsilon_{n+1} = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} = O(1).$$

[7] Условия, получаемые из условия 1° теоремы 2 при $p_n = 1$ и $p_n = (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}$, эквивалентны.

II. Если $\varepsilon_n \uparrow$, то, по предположению теоремы Алянчича, существует $c > 0$ такое, что $n^c/\mu_n \downarrow$. Поэтому на основе условия Алянчича $n\Delta\varepsilon_n = O(\varepsilon_n)$ находим

$$\mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\Delta\varepsilon_k|}{\lambda_k} = O(1)\mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k\mu_k} =$$

$$= O(1)\mu_n \frac{(n+1)^c}{\mu_{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+c}} = O(1).$$

Тем самым теорема Алянчича доказана.

§ 4. Множители суммируемости класса $(C^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$

1. Согласно формуле (4) метод арифметических средних $(C, 1)$ сохраняет λ-ограниченность тогда и только тогда, когда

$$\frac{\lambda_n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_k} = O(1). \tag{16}$$

Покажем, что при условии (16) имеет место включение

$$m^\lambda{}_{(C,\alpha)} \supset m^\lambda{}_{(C,\gamma)} \qquad (1 \leqslant \gamma \leqslant \alpha). \tag{17}$$

Действительно, для включения (17), согласно лемме 4, необходимо и достаточно выполнение условия 3° леммы 4 с

$$c_{nk} = \frac{A_{n-k}^{\alpha-\gamma-1} A_k^\gamma}{A_n^\alpha}$$

и $c_k = 0$.

Поскольку $A_k^\gamma / A_n^\gamma \downarrow$ при $\gamma \uparrow$, то из утверждения 1° леммы 2 находим

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_k} \frac{A_k}{A_n^\gamma} = O(1) \qquad (k \leqslant n) \tag{18}$$

и, следовательно,

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|c_{nk}|}{\lambda_k} = O(1) \frac{A_n^\gamma}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-\gamma-1} = O(1),$$

т. е. условие 3° леммы 4 выполнено.

Воспользовавшись (17) при $\gamma = 1$, получим

$$(C^\lambda{}_O, B^\mu{}_O) \subset ((C, 1)^\lambda{}_O, B^\mu{}_O),$$

где $C = (C, \alpha)$, $\alpha \geqslant 1$. Итак, если выполнено (16), то множители суммируемости $\varepsilon_n \in (C^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$ должны удовлетворять условиям теоремы 2 при $p_n = 1$. В частности, условие 1° теоремы 2 дает

$$\mu_n (n+1) \Delta\varepsilon_{n+1} = O(\lambda_n).$$

Но, согласно лемме 2, имеем $\lambda_n = o(n+1)$, и следовательно,

$$\Delta\varepsilon_n = o(1). \tag{19}$$

Из доказательства необходимости условия 1° теоремы 2 вытекает, что условие (19) необходимо для $\varepsilon_n \in (C^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$ при $\alpha \geqslant 1$, если выполнены условия $Be \in m^\mu$, (8) и (16).

Для нахождения множителей суммируемости класса $(C^\lambda{}_O, B^\mu{}_O)$ важна следующая лемма, обобщающая известные леммы Андерсена (см. [1], стр. 157—158).

Лемма 7. *Если выполнены условия* (16) *и* (19), *то из соотношения*

$$\mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} A_k^\alpha |\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k| = O(1)$$

вытекает:

1° $\mu_n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} A_k^\gamma |\Delta^{\gamma+1}\varepsilon_k| = O(1) \qquad (\gamma = 0, 1, \ldots \alpha),$

2° $\mu_n A_n^\gamma \Delta^\gamma \varepsilon_{n+1} = O(\lambda_n) \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, \alpha),$

причем в случае $\mu_n \neq O(1)$ *можно заменить* O *на* o.

Доказательство. В силу условия (19), при $\gamma \geqslant 1$ имеем

$$\Delta^\gamma \varepsilon_k = \sum_{\nu=k}^{\infty} \Delta^{\gamma+1}\varepsilon_\nu \tag{20}$$

и, следовательно,

$$\mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} A_k^{\gamma-1} |\Delta^\gamma \varepsilon_k| \leqslant \mu_n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu^{\gamma-1} |\Delta^{\gamma+1} \varepsilon_\nu| \sum_{k=n+1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_k} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma\mu_n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} A_\nu^\gamma |\Delta^{\gamma+1}\varepsilon_\nu| \frac{\lambda_\nu}{\nu+1} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{\lambda_k}$$

или, ввиду (16),

$$\mu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^{\gamma-1} |\Delta^\gamma \varepsilon_k| = O(1)\mu_n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} A_\nu^\gamma |\Delta^{\gamma+1}\varepsilon_\nu|.$$

Придав γ последовательно значения $\alpha, \alpha-1, \ldots, 1$, получим 1°.

С помощью формулы (20) находим

$$\mu_n A_n^\gamma |\Delta^\gamma \varepsilon_{n+1}| \leqslant \mu_n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} A_n^\gamma |\Delta^{\gamma+1} \varepsilon_\nu|.$$

В силу $\nu > n$ из (18) получаем

$$A_n^\gamma = O(\lambda_n) \frac{1}{\lambda_\nu} A_\nu^\gamma \qquad (\gamma \geqslant 1)$$

и, следовательно,

$$\mu_n A_n^\gamma |\Delta^\gamma \varepsilon_{n+1}| \leqslant O(\lambda_n)\mu_n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} A_\nu^\gamma |\Delta^{\gamma+1} \varepsilon_\nu|.$$

На основе 1° отсюда и следует 2°.

2, Для метода Чезаро $C = (C, \alpha)$ докажем следующую теорему при целых $\alpha \geqslant 1$ и $0 \leqslant b \leqslant \alpha$. Множители суммируемости класса $(C^{\lambda}{}_{O}, B^{\mu}{}_{O})$ при $\alpha = 0$ даются в примечании 3.

Теорема 3. *Пусть последовательности λ и μ такие, что метод арифметических средних сохраняет λ-ограниченность и μ-ограниченность. Если нормальный регулярный метод[6] B удовлетворяет условиям $\beta_{nk} \leqslant 1$ и*

$$m^{\mu}{}_{B} \supset m^{\mu}{}_{(C,b)}, \tag{21}$$

$$\mu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mu_k} \left| b^{-1}{}_{kk} \Delta^{b+1} b_{nk} \right| = O(1), \tag{22}$$

$$b_{nn} = O(b_{n+1,n+1}), \tag{23}$$

$$b_{n+1,n+1} = O(b_{nn}), \tag{24}$$

то $\varepsilon_n \in (C^{\lambda}{}_{O}, B^{\mu}{}_{O})$ тогда и только тогда, когда

1° $\Delta\varepsilon_n = o(1)$,

2° $\mu_n \varepsilon_{n+1} = O(\lambda_n)$,

3° $\mu_n (n+1)^{\alpha} b_{nn} \varepsilon_n = O(\lambda_n)$,

4° $\mu_n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{k^{\alpha}}{\lambda_k} \left|\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k\right| = O(1)$,

причем в случае $\mu_n = O(1)$ следует заменить O на o.

Доказательство. Отметим, что из (21) на основе[8] (16) и (17) вытекает, что B сохраняет μ-ограниченность и, в частности, $Be \in m^{\mu}$. В случае $A = (C, \alpha)$ величины c_{nk} в лемме 4 вычисляются по формуле (ср. [4], стр. 389)

$$c_{nk} = A_k^{\alpha} \Delta^{\alpha+1} (\beta_{nk} \varepsilon_k),$$

откуда следует выполнение условия 1° леммы 4, причем

$$c_k = A_k^{\alpha} \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_k.$$

Остается доказать равносильность условий 2° и 3° леммы 4 условиям 1°—4° теоремы. При этом достаточно ограничиваться случаями $\mu_n \neq O(1)$ и $\mu_n = O(1)$, $\lambda_n = O(1)$, ибо случай $\mu_n = O(1)$, $\lambda_n \neq O(1)$ рассматривается аналогично.

Необходимость. Пусть $\varepsilon_n \in (C^{\lambda}{}_{O}, B^{\mu}{}_{O})$. Выполнение условия 1° теоремы доказано в п. 1, а выполнение условия 2° следует из леммы 5. Из условия 3° леммы 4 вытекает

$$\mu_n (c_{nn} - c_n) = O(\lambda_n).$$

Но так как (согласно следствию 2) $\mu_n = O(\mu_{n-1})$, то из условия 2° леммы 4 получается $\mu_n c_n = O(\lambda_n)$ и, следовательно, $\mu_n c_{nn} = O(\lambda_n)$, что эквивалентно условию 3° теоремы. Условие 4° теоремы равносильно условию 2° леммы 4.

---

[8] Если заменить λ на μ.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1°—4° теоремы. Условие 2° леммы 4 эквивалентно условию 4° теоремы. При исследовании выполнения условия 3° леммы 4 исходим из тождества (ср. [4], стр. 390)

$$c_{nk} - c_k = T_0 + \sum_{\nu=1}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{\nu} T_\nu, \tag{25}$$

где

$$T_0 = (\beta_{nk} - 1) c_k, \qquad T_\nu = A_k^\alpha \Delta^\nu \beta_{nk} \cdot \Delta^{\alpha+1-\nu} \varepsilon_{k+\nu} \qquad (\nu > 0).$$

1) Ввиду условия $\beta_{nk} \leqslant 1$ и условия 4° теоремы из леммы 3 вытекает

$$\mu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|T_0|}{\lambda_k} = O(1). \tag{I}$$

2) В силу утверждения 2° леммы 7 при $\gamma = \alpha$ и того, что B сохраняет μ-ограниченность (ср. (4)), имеем

$$\mu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|T_1|}{\lambda_k} = O(1). \tag{II}$$

3) Пусть $2 \leqslant \nu \leqslant b + 1$. Поскольку метод B удовлетворяет условию (8), то для включения (21) по лемме 4 необходимо и достаточно выполнение условия

$$\mu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mu_k} A_k^b \left|\Delta^{b+1} \beta_{nk}\right| = O(1).$$

Из (17) при $\alpha = \beta$ и из (21) следует

$$m^\mu{}_B \supset m^\mu{}_{(C,\gamma)} \qquad (1 \leqslant \gamma \leqslant b),$$

т. е.

$$\mu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mu_k} A_k^\gamma \left|\Delta^{\gamma+1} \beta_{nk}\right| = O(1) \qquad (1 \leqslant \gamma \leqslant b). \tag{26}$$

Учитывая, что (согласно следствию 2) $\lambda_n = O(\lambda_{n-1})$, на основе утверждения 2° леммы 7 (при $\nu < \alpha + 1$) и условия 2° теоремы (при $\nu = \alpha + 1$) можем написать

$$\mu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|T_\nu|}{\lambda_k} = O(1) \mu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mu_k} A_k^{\nu-1} \left|\Delta^\nu \beta_{nk}\right|;$$

откуда, взяв в (26) число $\gamma = \nu - 1$, получим

$$\mu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|T_\nu|}{\lambda_k} = O(1) \qquad (2 \leqslant \nu \leqslant b + 1). \tag{III}$$

4) Пусть $b + 1 < \nu \leqslant \alpha + 1$. Воспользуясь соотношением

$$\mu_k (k+1)^\alpha b_{kk} \Delta^i \varepsilon_k = O(\lambda_k) \qquad (i \geqslant 0),$$

вытекающимся из условия 3° теоремы с помощью условий (23) и $\lambda_n = O(\lambda_{n-1})$, получаем

$$T_\nu = O\left(\frac{\lambda_k}{\mu_k}\right) b^{-1}{}_{kk}\Delta^{\nu-1}b_{nk}.$$

Так как

$$\Delta^{\nu-1}b_{nk} = \Delta^{\nu-b-2}(\Delta^{b+1}b_{nk}),$$

где $\nu - b - 2 \geqslant 0$, то, ввиду условий (24) и $\lambda_n = O(\lambda_{n-1})$, находим

$$T_\nu = O\left(\frac{\lambda_k}{\mu_k}\right) b^{-1}{}_{kk}\Delta^{b+1}b_{nk}.$$

Тем самым из (22) вытекает

$$\mu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|T_\nu|}{\lambda_k} = O(1) \qquad (b+1 < \nu \leqslant \alpha + 1). \tag{IV}$$

Из тождества (25) с помощью соотношений (I)—(IV) и следует выполнение условия 3° леммы 4.

Если $B = (C, \beta)$ с произвольным $\beta \geqslant 0$, то условия (21)—(24) выполнены при[9] $b = [\beta]$, если (C, β) сохраняет μ-ограниченность. Если, кроме того, $\lambda_n = \mu_n = 1$, то из теоремы 3 получается известная теорема Шура о множителях суммируемости класса $((C, \alpha), (C, \beta))$, впервые доказанная Бозанкэт [7].

Если $\beta = \alpha$, то часть 4) доказательства достаточности условий теоремы 3 отпадает, вследствие чего в случае $\beta = \alpha$ предположения (22)—(24) и условие 3° теоремы 3 можно отбросить.

Примечание 4. Пусть m — множество всех ограниченных (вещественных или комплексных) последовательностей. Нетрудно проверить, что при $\lambda_n = 1$, $\mu_n \neq O(1)$ теорема 1 дает необходимые и достаточные условия для включения $A(m) \subset m^\mu$, а при $\lambda_n \neq O(1)$, $\mu_n = 1$ — для включения $A(m^\lambda) \subset m$, если условие 2° при $\mu_n = 1$ заменить на $Ae \in m$. Отсюда вытекает, что условия 1°—4° теоремы 3 необходимы и достаточны при $\lambda_n \neq O(1)$, $\mu_n = 1$ для $\varepsilon_n \in (C^\lambda{}_O, B_O)$, а при $\lambda_n = 1$, $\mu_n \neq O(1)$ — для $\varepsilon_n \in (C_O, B^\mu{}_O)$. Например, если $\lambda_n = \varepsilon_n = (n+1)^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, $\mu_n = 1$, то условие 4° теоремы 3 не выполняется и, следовательно, $(n+1)^\gamma \overline{\in} (C^\lambda{}_O, B_O)$. В случае $B = (C, \beta)$, $\beta \geqslant 0$ отсюда получается уточнение одной теоремы Хислопа (см. [8], теорема 10). При $\lambda_n = 1$, $\mu_n = (n+1)^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, из теоремы 3 следует $(n+1)^{-\gamma} \in (C_O, C^\mu{}_O)$ (см. [8], теорема 13).

Примечание 5. Метод доказательства условия (26) позволяет просто доказать лемму Андерсена, согласно которой из

$$\left|\sum' A^\alpha_k \left|\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k\right|\right| < \infty \tag{27}$$

и $\varepsilon_k = O(1)$ вытекает

[9] При $\beta > 0$ выполнение условия (22) следует из леммы 2 и формулы Андерсена (см. [1], стр. 72).

$$\sum A_k^{\gamma}|\Delta^{\gamma+1}\varepsilon_k| < \infty \qquad (0 \leqslant \gamma \leqslant \alpha). \tag{28}$$

Действительно, при $\varepsilon_k = O(1)$ условие

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha}|\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k| = O(1),$$

равносильное условию (27), необходимо и достаточно для включения $B \supset (C, \alpha)$, где $B = (\beta_{nk})$ с

$$\beta_{nk} = \begin{cases} \varepsilon_k, & k \leqslant n \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Но из $B \supset (C, \alpha)$ вытекает $B \supset (C, \gamma)$, $0 \leqslant \gamma \leqslant \alpha$, или, другими словами, из (27) вытекает (28).

Тот же самый метод применим и к доказательству утверждения 1° леммы 7.

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Кангро Г., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ. матем. наук, 1956, **5**, № 2, 108—128.
3. Кангро Г., О множителях суммируемости типа Бора — Харди для заданной скорости. I. Изв. АН ЭстССР. Физ., Матем., 1969, **18**, № 2, 137—146.
4. Кангро Г., О множителях суммируемости типа Бора — Харди для заданной скорости. II. Изв. АН ЭстССР. Физ., Матем., 1969, **18**, № 4, 387—395.
5. Alexits G., Kralik D., Über Approximationen mit den arithmetischen Mitteln allgemeinen Orthogonalreihen. Acta math. Acad. scient. hung., 1960, **11**, 387—399.
6. Aljančić S., Über konvexe Multiplikatoren bei Fourier-Reihen. Math. Z., 1963, **81**, № 3, 215—222.
7. Bosanquet L. S., Note on convergence and summability factors. J. London. Math. Soc., 1945, **20**, 39—48.
8. Hyslop J. M., On the approach of a series to its Cesàro limit. Proc. Edinburgh Math. Soc. 1938, **5**, 182—201.

Поступило
25 XII 1969

RIESZI JA CESÀRO MENETLUSEGA λ-TÕKESTATUD RIDADE SUMMEERUVUSTEGURID

G. Kangro

Resümee

Olgu $\lambda = \{\lambda_n\}$, $0 \leqslant \lambda_n \uparrow$. Me ütleme, et piirväärtuseks ξ koonduv jada $x = \{\xi_n\}$ on *λ-tõkestatud*, kui jada $\{\lambda_n(\xi_n - \xi)\}$ on tõkestatud. Olgu m^λ kõigi reaalsete või kompleksete) λ-tõkestatud jadade hulk. Antud maatriksmenetluse A puhul ütleme, et jada x on *A^λ-tõkestatud*, kui $Ax \in m^\lambda$. Rida Σu_n nimetame A^λ-tõkestatuks, kui rea Σu_n osasummade jada on A^λ-tõkestatud. Me ütleme,

et arvud ε_n on klassi $(A^{\lambda}o, B^{\mu}o)$ summeeruvustegurid, lühidalt $\varepsilon_n \in (A^{\lambda}o, B^{\mu}o)$, kui iga A^{λ}-tõkestatud rea Σu_n korral rida $\Sigma \varepsilon_n u_n$ on B^{μ}-tõkestatud. Aljančić [6] on leidnud summeeruvustegurite klassi $(Z^{\lambda}o, Z^{\mu}o)$ jaoks ühe alamklassi juhul $\mu_n = \lambda_n/\varepsilon_n$, kus $Z = (Z, \alpha)$ tähendab Zygmundi menetlust järku $\alpha > 0$.

Käesolevas artiklis leitakse summeeruvustegurite $\varepsilon_n \in (P^{\lambda}{}_O, B^{\mu}{}_O)$ ja $\varepsilon_n \in (C^{\lambda}{}_O, B^{\mu}{}_O)$ jaoks efektiivsed tarvilikud ja piisavad tingimused, kus $P = (R, p_n)$ on Rieszi kaalutud keskmiste menetlus (mis taandub juhul $p_n = (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}$ Zygmundi menetluseks), $C = (C, \alpha)$ aga Cesàro menetlus täisarvulist järku α. Eelnevalt on leitud tarvilikud ja piisavad tingimused sisalduvuse $A(m^{\lambda}) \subset m^{\mu}$ jaoks ja uuritud λ-tõkestatust säilitatavate (s .o. tingimust $A(m^{\lambda}) \subset m^{\lambda}$ rahuldavate) menetluste mõningaid omadusi.

SUMMABILITY FACTORS FOR THE SERIES λ-BOUNDED BY THE METHODS OF RIESZ AND CESÀRO

G. Kangro

Summary

Let $\lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow$. A sequence $x = \{\xi_n\}$, converging to ξ, is said to be *λ-bounded* if the sequence $\{\lambda_n(\xi_n - \xi)\}$ is bounded. Let m^{λ} be the set of all (real- or complexvalued) λ-bounded sequences. Giving a matrix summability method A, the sequence x is called *A^{λ}-bounded* if $Ax \in m^{\lambda}$. The series Σu_n is said to be A^{λ}-bounded if the sequence of partial sums of Σu_n is A^{λ}-bounded. The numbers ε_n are called summability factors of the class $(A^{\lambda}{}_O, B^{\mu}{}_O)$, briefly $\varepsilon_n \in (A^{\lambda}{}_O, B^{\mu}{}_O)$, if for any A^{λ}-bounded series Σu_n the series $\Sigma \varepsilon_n u_n$ is B^{μ}-bounded. Aljančić [6] has found a subclass of the class $(Z^{\lambda}{}_O, Z^{\mu}{}_O)$ in case of $\mu_n = \lambda_n/\varepsilon_n$, where $Z = (Z, \alpha)$ denotes the method of Zygmund of order $\alpha > 0$.

In the present paper effective necessary and sufficient conditions for $\varepsilon_n \in (P^{\lambda}{}_O, B^{\mu}{}_O)$ and $\varepsilon_n \in (C^{\lambda}{}_O, B^{\mu}{}_O)$ are established, $P = (R, p_n)$ being the Riesz method of weighted means (reducing to the method of Zygmund for $p_n = (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}$), and $C = (C, \alpha)$ the means of Cesàro of integral order α. Previously necessary and sufficient conditions for the inclusion $A(m^{\lambda}) \subset m^{\mu}$ have been found and some properties of the methods preserving λ-boundedness (i. e.. satisfying the condition $A(m^{\lambda}) \subset m^{\lambda}$) investigated.

ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ ДЛЯ МЕТОДА РИСА

Г. Кангро

Кафедра математического анализа

Питерсен [4] проводит доказательство O-тауберовы теоремы для метода арифметических средних C методом, предложенным Гофманом. Согласно методу Гофмана, составляется вспомогательное семейство методов взвешенных средних Риса $Q = (R, A_n^{\alpha-1})$ с $\alpha > 0$, эквивалентных методу C, таких, что каждую C-суммируемую последовательность x, удовлетворяющую тауберову условию, можно аппроксимировать образами Qx с любой точностью. В настоящей заметке методом Гофмана для метода взвешенных средних Риса P устанавливается тауберова теорема с остаточным членом в смысле суммируемости с заданной скоростью (см. [2], стр. 141). Предварительно изучается отношение (относительно скорости суммируемости λ) метода P ко вспомогательным методам (т. н. λ-эквивалентность).

1. Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow$. Будем говорить, что последовательность $x = \{\xi_n\}$, сходящаяся к пределу ξ, *сходится со скоростью* λ или просто λ*-сходится*, если существует конечный предел

$$\lim \lambda_n (\xi_n - \xi).$$

Множество всех (вещественных или комплексных) λ-сходящихся последовательностей обозначим через c^λ. Матричный метод суммирования A называем λ-консервативным, если $A(c^\lambda) \subset c^\lambda$. Необходимые и достаточные условия для λ-консервативности метода A, определяемого в виде преобразования последовательности в последовательность матрицей (a_{nk}), даются следующей леммой (см. [2], стр. 139).

Лемма 1. *Метод $A = (a_{nk})$ является λ-консервативным тогда и только тогда, когда*

$1°$ $\exists \lim\limits_n \lambda_n (a_{nk} - a_k)$, $a_k = \lim\limits_n a_{nk}$,

$2°$ $\exists \lim\limits_n \lambda_n (\sum\limits_k a_{nk} - a)$, $a = \lim\limits_n \sum\limits_k a_{nk}$,

$3°$ $\exists \lim\limits_n \lambda_n \sum\limits_k \dfrac{a_{nk} - a_k}{\lambda_k}$;

4° $\sum_k \frac{|a_k|}{\lambda_k} < \infty$,

5° $\lambda_n \sum_k \frac{|a_{nk} - a_k|}{\lambda_k} = O(1)$.

В [2] вместо условия 3° имеется условие

$$\exists \lim_n \lambda_n \left(\sum_k \frac{a_{nk}}{\lambda_k} - a^\lambda \right), \qquad a^\lambda = \lim_n \sum_k \frac{a_{nk}}{\lambda_k}.$$

Это условие эквивалентно условию 3° леммы 1, так как

$$a^\lambda = \sum_k \frac{a_k}{\lambda_k} + r,$$

где

$$r = \begin{cases} 0, & \lambda_n \neq O(1), \\ (a - \sum_k a_k) \lim_n \frac{1}{\lambda_n}, & \lambda_n = O(1). \end{cases}$$

Последняя формула получается из условия 5° на основе 4°, причем в случае $\lambda_n = O(1)$ следует предварительно применить преобразование Абеля.

В частности, из леммы 1 вытекает, что *регулярный метод Риса $P = (R, p_n)$ с $p_n > 0$ является λ-консервативным тогда и только тогда, когда*[1]

$$\exists \lim_n \frac{\lambda_n}{P_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{\lambda_k}, \tag{1}$$

где $P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n$.

Последовательность $x = \{\xi_n\}$, или ряд $\sum u_n$ с $\xi_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$) называем *$A^\lambda$-суммируемой*, если $Ax \in c^\lambda$. Если каждая A^λ-суммируемая последовательность x является B^λ-суммируемой, то пишем $A^\lambda \subset B^\lambda$. Если одновременно $A^\lambda \subset B^\lambda$ и $B^\lambda \subset A^\lambda$, то методы A и B будем называть *λ-эквивалентными*.

2. Соответственно регулярному методу P с $p_n > 0$ и параметру $\alpha > 0$ определим метод Риса $Q = (R, q_n)$ рекуррентным соотношением

$$\frac{q_{n+1}}{p_{n+1}} = \alpha \frac{Q_n}{P_n}, \qquad q_0 = p_0 = 1. \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что

$$Q_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\alpha p_k}{P_{k-1}} \right) \quad (n > 0); \tag{3}$$

$$q_n = \alpha \frac{p_n}{P_{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha p_k}{P_{k-1}} \right) \quad (n > 1), \; q_1 = \alpha p_1. \tag{4}$$

---

[1] Относительно выполнения условия 1° леммы 1 см. лемма 1 статьи [3].

В силу регулярности метода P имеем $\lim P_n=\infty$. Поэтому ряд $\sum p_k/P_{k-1}$ расходится и из (3) вытекает, что $\lim Q_n=\infty$. Поскольку $q_n>0$, то метод Q регулярен.

Например, если P — метод арифметических средних, т. е. $p_n=1$, то $q_n=A_n^{\alpha-1}$. Но поскольку

$$q_n\sim\frac{(n+1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

то метод Q, соответствующий по (2) методу арифметических средних, равносилен (в смысле обычной суммируемости) последнему методу (см. [1], стр. 111). Оказывается, что метод Q всегда равносилен (в смысле обычной суммируемости) методу P. Следующие две леммы характеризуют отношения между методами P и Q относительно скорости суммируемости.

Лемма 2. *Если $\alpha\neq 1$, то включение*

$$Q^\lambda\supset P^\lambda$$

имеет место тогда и только тогда, когда метод Q является λ-консервативным.

Доказательство. Включение $Q^\lambda\supset P^\lambda$ справедливо тогда и только тогда, когда метод $A=QP^{-1}$ окажется λ-консервативным. Для матрицы $A=(a_{nk})$ имеем (см. [1], стр. 109)

$$a_{nk}=\frac{P_k}{Q_n}\Delta\frac{q_k}{p_n}\qquad(k<n)$$

$$a_{nn}=\frac{P_n}{Q_n}\frac{q_n}{p_n}.$$

С помощью формулы (4) находим

$$P_k\Delta\frac{q_k}{p_k}=(1-\alpha)q_k,\tag{5}$$

и, учитывая также формулу (3),

$$\lambda_n\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{nk}}{\lambda_k}=(1-\alpha)\frac{\lambda_n}{Q_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{q_k}{\lambda_k}+\alpha,$$
$$\lambda_n\sum_{k=0}^{n}\frac{|a_{nk}|}{\lambda_k}=|1-\alpha|\frac{\lambda_n}{Q_n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{q_k}{\lambda_k}+\frac{\alpha P_n}{P_n+(\alpha-1)p_n}.\tag{6}$$

Так как

$$a_k=\lim_n a_{nk}=0,\qquad\sum_{k=0}^{n}a_{nk}=1,$$

то для λ-консервативности метода A по лемме 1 необходимо и достаточно выполнение условий

$$\exists\lim_n\lambda_n\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{nk}}{\lambda_k},$$

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_{nk}|}{\lambda_k} = O(1).$$

Последние условия, в силу формул (6) и условия $\alpha \neq 1$, равносильны условию

$$\exists \lim_n \frac{\lambda_n}{Q_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{q_k}{\lambda_k}.$$

Поскольку Q регулярен и $q_n > 0$, то последнее условие, согласно (1), необходимо и достаточно для λ-консервативности метода Q.

3. Следующая лемма дает достаточные условия для λ-консервативности метода Q.

Лемма 3. *Из λ-консервативности метода P вытекает λ-консервативность метода Q при $\alpha \geqslant 1$.*

Доказательство. Обозначая

$$l^P{}_n = \frac{\lambda_n}{P_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{\lambda_k}, \qquad l^Q{}_n = \frac{\lambda_n}{Q_n} \sum_{k=0}^{n} \frac{q_k}{\lambda_k},$$

с помощью преобразования Абеля находим

$$l^Q{}_n = \frac{\lambda_n}{Q_n} \left[\sum_{k=0}^{n} \Delta \frac{q_k}{p_k} \cdot \sum_{\nu=0}^{k} \frac{p_\nu}{\lambda_\nu} + \frac{q_{n+1}}{p_{n+1}} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{p_\nu}{\lambda_\nu} \right] =$$

$$= \frac{\lambda_n}{Q_n} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k}{\lambda_k} \Delta \frac{q_k}{p_k} \cdot l^P{}_k + \frac{q_{n+1} P_n}{p_{n+1} \lambda_n} l^P{}_n \right],$$

или, ввиду формул (5) и (2),

$$l^Q{}_n = (1-\alpha) \sum_{k=0}^{n} c_{nk} l^P{}_k + \alpha l^P{}_n, \tag{7}$$

где

$$c_{nk} = \frac{\lambda_n q_k}{Q_n \lambda_k}.$$

Из λ-консервативности метода P, ввиду (1), следует (см. [3], лемма 1)

$$l^P{}_n = O(1), \qquad \frac{\lambda_n}{P_n} = o(1).$$

Но по формуле (3) для фиксированных k и n при $\alpha \uparrow$ имеем $Q_n \uparrow$, $Q_k/Q_n \downarrow$, и, следовательно,

$$\frac{\lambda_n}{Q_n} \downarrow, \quad l^Q{}_n = \lambda_n \left(\sum_{k=0}^{n} \Delta \frac{1}{\lambda_k} \cdot \frac{Q_k}{Q_n} + \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) \downarrow,$$

ибо $\Delta(1/\lambda_k) \geqslant 0$. Поскольку при $\alpha = 1$ метод Q совпадает с P, а P является λ-консервативным, то для $\alpha \geqslant 1$ справедливы соотношения

$$\lim_n c_{nk} = 0, \qquad \sum_{k=0}^{n} c_{nk} = l^Q{}_n = O(1).$$

Согласно теореме Кожима—Шура, метод суммирования последовательностей с треугольной матрицей (c_{nk}) сохраняет нуль-последовательности. Положив, учитывая (1), $l^{P}_{k} = l + \varepsilon_k$, где $l = \lim l^{P}_{k}$, $\varepsilon_k = o(1)$, из (7) получим

$$[1 + (\alpha - 1) l] l^{Q}_{n} = (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{n} c_{nk} \varepsilon_k + \alpha l^{P}_{n},$$

откуда

$$\lim_n l^{Q}_{n} = \frac{\alpha l}{1 + (\alpha - 1) l}.$$

В силу условия (1), метод Q является λ-консервативным.

Следствие 1. *Если метод P является λ-консервативным, то методы P и Q будут λ-эквивалентными при $\alpha \geqslant 1$.*

Доказательство. Включение $Q^{\lambda} \supset P^{\lambda}$ непосредственно вытекает из лемм 2 и 3. Из определения (2) выясняется, что роли методов P и Q можно поменять, считая метод Q заданным. Тогда включение $P^{\lambda} \supset Q^{\lambda}$ следует из леммы 2, ибо в ней нет ограничений на $\alpha > 0$.

4. Приходим к основному результату заметки.

Теорема. *Если λ-консервативный регулярный метод Риса $P = (R, p_n)$ с $p_n > 0$ регулярен, то из условия $\lambda_n P_n u_n = O(p_n)$ и P^{λ}-суммируемости ряда $\sum u_n$ вытекает λ-сходимость этого ряда.*

Доказательство. При обозначении

$$\eta^{Q}_{n} = \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^{n} q_k \xi_k;$$

где $\xi_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_k$, имеем

$$\eta^{Q}_{n} = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{Q_{k-1}}{Q_n}\right) u_k = \xi_n - \frac{1}{Q_n} \sum_{k=0}^{n} Q_{k-1} u_k.$$

С одной стороны, ввиду условия $\lambda_k P_k |u_k| \leqslant M p_k$ и (2) отсюда следует

$$\lambda_n \left| \xi_n - \eta^{Q}_{n} \right| \leqslant \frac{M}{\alpha} l^{Q}_{n},$$

откуда по лемме 3, в силу λ-консервативности метода P,

$$\lambda_n \left| \xi_n - \eta^{Q}_{n} \right| \leqslant \frac{N}{\alpha} \quad (\alpha \geqslant 1), \tag{8}$$

где N не зависит от α. С другой стороны, согласно лемме 3, метод Q является λ-консервативным, вследствие чего по лемме 2 справедливо включение $Q^{\lambda} \supset P^{\lambda}$. Тем самым ряд Σu_n является Q^{λ}-суммируемым, т. е. существует предел

$$\lim_n \lambda_n (\eta^{Q}_{n} - \eta), \tag{9}$$

где $\eta = \lim \eta^{Q}_{n}$ не зависит от α, поскольку метод Q, ввиду регулярности метода $A = QP^{-1}$, совместен с P. Покажем, что последовательность $\{\beta_n\}$ с $\beta_n = \lambda_n(\xi_n - \eta)$ фундаментальна и, тем самым, сходится. В силу условий (8) и (9) имеем

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}} |\beta_m - \beta_n| \leqslant \overline{\lim_{m,n\to\infty}} |\lambda_m(\xi_m - \eta^Q{}_m) - \lambda_n(\xi_n - \eta^Q{}_n)| + \\ + \overline{\lim_{m,n\to\infty}} |\lambda_m(\eta^Q{}_m - \eta) - \lambda_n(\eta^Q{}_n - \eta)| \leqslant \frac{2N}{\alpha}$$

для $\alpha \geqslant 1$. Отсюда при $\alpha \to \infty$ получаем

$$\lim_{m,n\to\infty} |\beta_m - \beta_n| = 0,$$

т. е. $\{\beta_n\}$ фундаментальна. Теорема доказана.

В случае $\lambda_n = O(1)$ теорема известна (см., например,[2] [5], стр. 46). При $p_n = 1$ из теоремы получается

Следствие 2. *Из условия $\lambda_n n u_n = O(1)$ и C^λ-суммируемости ряда $\sum u_n$ вытекает λ-сходимость этого ряда, если метод C является λ-консервативным.*

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Кангро Г., О множителях суммируемости типа Бора — Харди для заданной скорости I. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1969, 18, № 2, 137—146.
3. Кангро Г., Множители суммируемости для рядов, λ-ограниченных методами Риса и Чезаро. Настоящий сборник, стр. 136—154.
4. Petersen, G. M., Regular matrix transformations. London, 1966.
5. Peyerimhoff, A., Lectures on summability. Berlin, 1969.

Поступило
3 IV 1970

JÄÄKLIIKMEGA TAUBERI TEOREEM RIESZI MENETLUSE JAOKS

G. Kangro

Resümee

Tõestatakse jääkliikmega Tauberi teoreem (antud kiirusega summeeruvuse mõttes [2]) Rieszi kaalutud keskmiste menetluste jaoks. Kasutatakse Goffmani meetodit, mida on rakendanud Petersen [4] aritmeetiliste keskmiste menetlusele hariliku summeeruvuse puhul.

A TAUBERIAN REMAINDER THEOREM FOR THE RIESZ METHOD

G. Kangro

Summary

A Tauberian remainder theorem (in the sense of summability with a given rapidity [2]) for the Riesz weighted means is proved by the method of Goffman, published by Petersen [4] for the arithmetical means in case of ordinary summability.

---

[2] В [5] имеется лишнее ограничение $\underline{\lim}\, P_{n-1}/P_n > 0$.

ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ ДЛЯ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ЧЕЗАРО И ГЕЛЬДЕРА

И. Таммерайд

Кафедра математического анализа

Как известно (см. Харди [6]), из суммируемости последовательности $x = \{\xi_n\}$ методом Чезаро[1] C^k, при выполнении тауберова условия[2] $n\Delta\xi_n = O(1)$, вытекает сходимость последовательности x. Ввиду равносильности методов C^k и H^k, аналогичный результат справедлив и для метода Гельдера H^k. Наиболее простой метод доказательства теоремы (см. [5, 7]) основывается на равносильности методов C^k и H^k. Основной целью этой заметки является оценка остаточного члена теоремы Харди, используя теоремы Кангро [1, 2, 3] о суммируемости со скоростью. Кроме того, некоторые вспомогательные результаты, например, теорема 1, являются более точными, чем обобщения теоремы Харди (теоремы 2, 3, 6 и 7).

§ 1. Определения и основные леммы

Пусть A — матричный метод суммирования последовательностей, $\lambda = \{\lambda_n\}$ и $\mu = \{\mu_n\}$ — монотонно возрастающие последовательности положительных чисел. Следуя Кангро, [1, 2, 3], будем последовательность $x = \{\xi_n\}$ называть *сходящейся со скоростью* λ или λ-*сходящейся*[3], если существуют пределы[4]

$$\lim_n \xi_n = \xi, \qquad \lim_n \beta_n = \beta, \tag{1}$$

где

$$\beta_n = \lambda_n(\xi_n - \xi).$$

---

[1] В этой статье $k \in N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

[2] Символ $\triangle$ будем называть разностью вперед, причем

$$\Delta\xi_n = \xi_n - \xi_{n+1}.$$

[3] Здесь в основном сохранена символика статей [1, 2, 3].

[4] Все пределы в данной статье конечны. Под знаком предела указание $\to\infty$ всюду опущено.

Последовательность x будем называть *ограниченной со скоростью* λ или λ*-ограниченной*, если существует предел (1) и $\beta_n = O(1)$. Множество всех λ-сходящихся или λ-ограниченных последовательностей обозначаем через c^λ или m^λ соответственно. Если последовательность λ ограничена, то

$$c^\lambda = m^\lambda = c,$$

где c — множество всех сходящихся последовательностей. Для произвольной последовательности λ имеем

$$c^\lambda \subset m^\lambda \subset c.$$

Говорят, что *матричный метод* A, определенный соотношением[5]

$$\eta_n = \sum_l a_{nl}\xi_l, \tag{2}$$

принадлежит классу (c^λ, c^μ) или (m^λ, m^μ), если $A(c^\lambda) \subset c^\mu$ или $A(m^\lambda) \subset m^\mu$ соответственно. Будем говорить, что *последовательность* x *принадлежит классу* (A, c^λ), если последовательность $y = \{\eta_n\}$, определенная соотношением (2), удовлетворяет условиям

$$\exists \lim_n \eta_n = \eta, \tag{3}$$

$$\exists \lim_n \gamma_n,$$

где

$$\gamma_n = \lambda_n(\eta_n - \eta).$$

Будем говорить, что *последовательность* x *принадлежит классу* (A, m^λ), если существует предел (3) и $\gamma_n = O(1)$.

Лемма 1. *Матричный метод* A *принадлежит классу* (c^λ, c^μ) *тогда и только тогда, когда*

$$Ae_p \in c^\mu,$$
$$Ae \in c^\mu,$$
$$Ae^\lambda \in c^\mu,$$
$$\sum_l \frac{|a_l|}{\lambda_l} < \infty,$$
$$\mu_n \sum_l \frac{|a_{nl} - a_l|}{\lambda_l} = O(1),$$

где

$$e_p = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{p \text{ нулей}}, 1, 0, \ldots\},$$
$$e = \{1, 1, 1, \ldots\},$$
$$e^\lambda = \left\{\frac{1}{\lambda_0}, \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_p}, \ldots\right\}$$

и $a_l = \lim_n a_{nl}$.

[5] Во всей статье свободные индексы принимают значения 0, 1, 2, ... Если у знака суммы пределы индексов суммирования опущены, то суммирование происходит по всем целочисленным значениям индексов от 0 до ∞.

Доказательство см. Кангро [1], стр. 137—139.

Лемма 2. *Матричный метод A принадлежит классу (m^λ, m^μ) тогда и только тогда, когда*

$$Ae^p \in m^\mu,$$

$$Ae \in m^\mu,$$

$$\sum_l \frac{|a_l|}{\lambda_l} < \infty,$$

$$\mu_n \sum_l \frac{|a_{nl} - a_l|}{\lambda_l} = O(1),$$

причем в случае $\mu_n = O(1)$, $\lambda_n \neq O(1)$, следует заменить O на o.

Доказательство см. Кангро [2], стр. 138—139.

Лемма 3. *Если последовательность x суммируема методом Чезаро $C^\alpha (\alpha > 0)$ и $n\Delta\xi_n = O(1)$, то последовательность x сходится.*

Доказательство см. Гайер и Целлер [5], стр. 83—87.

Лемма 4. *Если последовательность x удовлетворяет условиям*

$$n\lambda_n \Delta \xi_n = O(1) \tag{4}$$

и

$$x \in (C^1, c^\lambda),$$

то

$$x \in (E, c^\lambda),$$

если

$$\exists \lim_n \frac{\lambda_n}{n+1} \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{\lambda_l}. \tag{5}$$

Доказательство см. Кангро [3], стр. 160.

§ 2. Тауберовы и абелевы теоремы с остаточным членом для метода Чезаро

Чезаровские средние порядка α определены соотношением (2) с

$$a_{nl} = \begin{cases} \dfrac{A_{n-l}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} & \text{при} \quad l \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad l > n. \end{cases}$$

Для изучения свойств метода C^α, связанных со скоростью суммируемости, рассмотрим один конкретный метод взвешенных средних Рисса, определенный последовательностью $\{p_n\}$ с $p_n = A_n^{\alpha-1}$. Обозначим этот метод через R^α.

Следующие леммы 5 и 6 являются следствиями леммы 2.

Лемма 5. *Условие*[6]

$$\frac{\mu_n}{A_n^{\alpha}}\sum_{l=0}^{n}\frac{A_{n-l}^{\alpha-1}}{\lambda_l}=O(1)$$

необходимо и достаточно для включения

$$(C^{\alpha},\ m^{\mu})\supset(E,\ m^{\lambda}).$$

Лемма 6. *Условие*

$$\frac{\mu_n}{A_n^{\alpha+1}}\sum_{l=0}^{n}\frac{A_l^{\alpha}}{\lambda_l}=O(1)$$

необходимо и достаточно для включения

$$(R^{\alpha+1},\ m^{\mu})\supset(E,\ m^{\lambda}). \tag{6}$$

Лемма 7. *Условия*[7] *для включений* (6) *и*

$$(C^{\alpha+1},\ m^{\mu})\supset(C^{\alpha},\ m^{\lambda})$$

совпадают.

Доказательство следует из соотношения

$$\sigma_n^{\alpha+1}=\sum_{l=0}^{n}\frac{A_l^{\alpha}}{A_n^{\alpha+1}}\sigma_l^{\alpha} \tag{7}$$

ввиду лемм 2 и 6, где

$$\sigma_n^{\alpha}=\sum_{l=0}^{n}\frac{A_{n-l}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}\xi_l.$$

Лемма 8. *Если включение* (6) *справедливо при* $\alpha=\beta\geqslant 0$, *то оно справедливо и при* $\alpha=\beta+\delta>\beta$.

Доказательство. Достаточно показать, что функция

$$\varphi_n(\beta)=\frac{\mu_n}{A_n^{\beta+1}}\sum_{l=0}^{n}\frac{A_l^{\beta}}{\lambda_l}\qquad(\beta\geqslant 0)$$

при фиксированном n является убывающей функцией переменного β. Применяя преобразование Абеля, получаем

$$\varphi_n(\beta)-\varphi_n(\beta+\delta)=\frac{\mu_n}{A_n^{\beta+1}}\sum_{l=0}^{n}\left(\triangle\frac{1}{\lambda_l}\right)\left(A_l^{\beta+1}-A_l^{\beta+\delta+1}\frac{A_n^{\beta+1}}{A_n^{\beta+\delta+1}}\right).$$

Ввиду справедливости неравенства

$$\frac{A_l^{\beta+1}}{A_n^{\beta+1}}>\frac{A_l^{\beta+\delta+1}}{A_n^{\beta+\delta+1}}$$

при $l<n$, лемма доказана.

---

[6] Начиная с § 2 последовательности λ и μ предполагаются неограниченными, если не оговорено противное.

[7] Ср. [8], теорема 3.1.

Лемма 9. *Из условий*

$$\frac{\lambda_n}{A_n^{\alpha+1}}\sum_{l=0}^{n}\frac{A_l^{\alpha}}{\lambda_l}=O(1) \qquad (\alpha\geqslant 0),$$

$$n\lambda_n\,\Delta\,\sigma_n^{\alpha}=O(1)$$

следует условие

$$n\lambda_n\,\Delta\,\sigma_n^{\alpha+1}=O(1).$$

Доказательство. Применяя соотношение (7) и преобразование Абеля, имеем

$$\Delta\,\sigma_n^{\alpha+1}=\frac{\alpha+1}{(n+\alpha+2)A_n^{\alpha+1}}\sum_{l=0}^{n}A_l^{\alpha+1}\,\Delta\,\sigma_l^{\alpha}.$$

Следовательно, при выполнении предположений леммы, получаем

$$n\lambda_n\left|\Delta\,\sigma_n^{\alpha+1}\right|\leqslant\frac{(\alpha+1)n\lambda_n}{(n+\alpha+2)A_n^{\alpha+1}}\sum_{l=0}^{n}A_l^{\alpha+1}\left|\Delta\,\sigma_l^{\alpha}\right|=$$

$$=O(1)\,\frac{\lambda_n}{A_n^{\alpha+1}}\sum_{l=0}^{n}\frac{A_l^{\alpha+1}}{(l+1)\lambda_l}=$$

$$=O(1)\,\frac{\lambda_n}{A_n^{\alpha+1}}\sum_{l=0}^{n}\frac{A_l^{\alpha}}{\lambda_l}=O(1).$$

При $\lambda_n=O(1)$ соответствующий результат получили Гайер и Целлер (см. [5], стр. 82).

Лемма 10. *Из условий* (4) *и*

$$\frac{\lambda_n}{n+1}\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{\lambda_l}=O(1) \tag{8}$$

следует условие

$$n\lambda_n\,\Delta\,\sigma^k{}_n=O(1)$$

для любого k.

Доказательство вытекает из лемм 8 и 9.

Теорема 1. *Если последовательности x и λ при $\alpha\geqslant 0$ удовлетворяют условиям*

$$x\in(C^{\alpha+1},\ m^{\lambda}),$$

$$n\lambda_n\,\Delta\,\sigma_n^{\alpha}=O(1),$$

$$\frac{\lambda_n}{A_n^{\alpha+1}}\sum_{l=0}^{n}\frac{A_l^{\alpha}}{\lambda_l}=O(1),$$

то

$$x\in(C^{\alpha},\ m^{\lambda}).$$

Доказательство. Вычитая из обеих частей равенства (7) величину σ^{α}_{n} и применяя преобразование Абеля, находим

$$\sigma^{\alpha+1}_{n} - \sigma^{\alpha}_{n} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{A^{\alpha+1}_{l}}{A^{\alpha+1}_{n}} \triangle \sigma^{\alpha}_{l}.$$

Второе и третье условия теоремы влекут за собой оценку

$$\lambda_n \left|\sigma^{\alpha+1}_{n} - \sigma^{\alpha}_{n}\right| \leqslant \frac{\lambda_n}{A^{\alpha+1}_{n}} \sum_{l=0}^{n} A^{\alpha+1}_{l} \left|\Delta \sigma^{\alpha}_{l}\right| = O(1),$$

а по первому условию теоремы

$$\lambda_n (\sigma^{\alpha+1}_{n} - s) = O(1),$$

то заключаем, что

$$\lambda_n (\sigma^{\alpha}_{n} - s) = O(1),$$

где $s = \lim\limits_{n} \sigma^{\alpha+1}_{n}$.

Теорема 2. *Если последовательность x удовлетворяет условиям* (4) *и*

$$x \in (C^{\alpha}, m^{\lambda}) \qquad (\alpha > 0),$$

где λ — любая монотонно возрастающая последовательность, удовлетворяющая условию (8), *то*

$$x \in (E, m^{\lambda}).$$

Доказательство. При $\lambda_n = O(1)$ теорема следует из леммы 3. Докажем утверждение теоремы для случая неограниченных последовательностей λ и $\alpha \in N$. Доказательство при $\alpha \,\overline{\in}\, N$ легко привести к случаю $\alpha \in N$. Действительно, пусть

$$\alpha \,\overline{\in}\, N, \ \delta > 1, \ \alpha + \delta \in N.$$

Тогда условие

$$\frac{\lambda_n}{A^{\alpha+\delta}_{n}} \sum_{l=0}^{n} \frac{A^{\delta-1}_{n-l} A^{\alpha}_{l}}{\lambda_l} = O(1),$$

необходимое и достаточное для включения $(C^{\alpha}, m^{\lambda}) \subset (C^{\alpha+\delta}, m^{\lambda})$, следует из условия (8) ввиду оценки

$$\frac{\lambda_n}{A^{\alpha+\delta}_{n}} \sum_{l=0}^{n} \frac{A^{\delta-1}_{n-l} A^{\alpha}_{l}}{\lambda_l} = O(1) \frac{\lambda_n}{A^{\alpha+1}_{n}} \sum_{l=0}^{n} \frac{A^{\alpha}_{l}}{\lambda_l}$$

и леммы 8. Следовательно, при условиях теоремы $(C^{\alpha}, m^{\lambda}) \subset (C^{\alpha+\delta}, m^{\lambda})$, и достаточно доказать теорему при $\alpha \in N$. Утверждение теоремы при $\alpha \in N$ вытекает из теоремы 1, лемм 8 и 9.

§ 3. Тауберовы и абелевы теоремы для метода Гельдера

Гельдеровские средние порядка k определены соотношениями

$$H^k{}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n} H^{k-1}_l \qquad (k \in N),$$

$$H^0{}_n = \xi_n.$$

Лемма 11. *Условие*

$$\exists \lim_n \frac{\mu_n}{n+1}\sum_{l_k=0}^{n}\frac{1}{l_k+1}\sum_{l_{k-1}=0}^{l_k}\frac{1}{l_{k-1}+1}\cdots\sum_{l_1=0}^{l_2}\frac{1}{\lambda_{l_1}}$$

необходимо и достаточно для включения

$$(H^k, c^\mu)\supset(E, c^\lambda). \tag{9}$$

Доказательство непосредственно следует из леммы 1.

Лемма 12. *Включение*

$$(H^{k+1}, c^\mu)\supset(H^k, c^\lambda)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$(H^1, c^\mu)\supset(E, c^\lambda).$$

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из леммы 1 при помощи соотношения $H^{k+1} = H^1H^k$.

Лемма 13. *Условие* (5) *достаточно для включения* (9) *при* $\lambda_n = \mu_n$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из $A \in \in (c, c)$, где A матричный метод суммирования, определенный соотношением (2), и

$$a_{nl} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_n}{\lambda_l(n+1)} & \text{при} \quad n \geqslant l, \\ 0 & \text{при} \quad n < l. \end{cases}$$

Теорема 3. *Если последовательность x удовлетворяет условиям* (4) *и*

$$x \in (H^k, c^\lambda)$$

где λ — любая монотонно возрастающая последовательность, удовлетворяющая условию (5), *то*

$$x \in (E^k, c^\lambda),$$

Доказательство для случая $\lambda_n = O(1)$ вытекает из леммы 3 в силу равносильности методов C^k и H^k в случае обыкновенной суммируемости. Для неограниченных последовательностей λ утверждение теоремы вытекает из лемм 4 и 10 при помощи соотношения $H^k = H^1H^{k-1}$.

§ 4. Некоторые достаточные условия для равносильности методов суммирования C^k и H^k со скоростью

Теорема равносильности методов C^k и H^k в случае обыкновенной суммируемости в наших терминах имеет вид

$$(C^k, m^\lambda) = (H^k, m^\lambda), \tag{10}$$

или

$$(C^k, c^\lambda) = (H^k, c^\lambda), \tag{11}$$

где последовательность λ ограничена. Возникает вопрос: при каких условиях соотношения (10) и (11) справедливы для неограниченных последовательностей λ. Необходимые и достаточные условия для соотношений (10) и (11) зависят от порядка k. Цель этого параграфа найти эффективные достаточные условия для справедливости соотношений (10) и (11). Далее, пользуясь этими условиями равносильности, выведем некоторые тауберовы теоремы с остаточным членом для методов C^k и H^k.

Для дальнейшего обозначим

$$\xi^1{}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n}\xi^0{}_l \qquad (\xi^0{}_l = \xi_l).$$

Лемма 14. *При условии* (8) *соотношения* $\{\xi^0{}_n\} \in (C^k, m^\lambda)$ *и* $\{\xi^1{}_n\} \in (C^{k-1}, m^\lambda)$ *равносильны.*

Доказательство. Последовательности

$$\sigma^k{}_n(\xi^0) = \frac{1}{A^k{}_n}\sum_{l=0}^{n} A^{k-1}_{n-l}\xi^0{}_l$$

и

$$\sigma^k{}_n(\xi^1) = \frac{1}{A^k{}_n}\sum_{l=0}^{n} A^{k-1}_{n-l}\xi^1{}_l$$

связаны равенствами (см. [4], стр. 134)

$$\sigma^k{}_n(\xi^0) = k\sigma_n^{k-1}(\xi^1) - (k-1)\sigma^k{}_n(\xi^1) \tag{12}$$

и

$$(n+1)\sigma^k{}_n(\xi^1) = \sum_{l=0}^{n}\sigma^k{}_l(\xi^0). \tag{13}$$

Пусть $\{\xi^1{}_n\} \in (C^{k-1}, m^\lambda)$ и $S = \lim\limits_n \sigma_n^{k-1}(\xi^1)$. Из условий (8) и $\{\xi^1{}_n\} \in (C^{k-1}, m^\lambda)$ по леммам 7 и 8 получаем, что $\{\xi^1{}_n\} \in (C^k, m^\lambda)$. Из (12) вытекает формула

$$\lambda_n\{\sigma^k{}_n(\xi^0) - S\} = \lambda_n k\{\sigma_n^{k-1}(\xi^1) - S\} - \lambda_n(k-1)[\sigma^k{}_n(\xi^1) - S]$$

и

$$\{\xi^0{}_n\} \in (C^k, m^\lambda).$$

Обратно, пусть $\{\xi^0{}_n\} \in (C^k, m^\lambda)$. Принимая во внимание соотношение (13) и утверждения лемм 6 и 7, получаем, что условие (8) достаточно (и необходимо) для того, чтобы $\{\xi^1{}_n\} \in (C^k, m^\lambda)$. В силу формулы (12) имеем $\{\xi^1{}_n\} \in (C^{k-1}, m^\lambda)$. Лемма доказана.

Теорема 4. *Условие* (8) *достаточно для соотношения*

$$(C^k, m^\lambda) = (H^k, m^\lambda).$$

Доказательство. Определяем.

$$(n+1)\xi^k{}_n = \sum_{l=0}^{n} \xi_l{}^{k-1},$$

$$\sigma^p{}_n(\xi^m) = \sum_{l=0}^{n} \frac{A^{p-1}_{n-l}\xi^m{}_l}{A^p{}_n} \qquad (m, p = 0, 1, \ldots, k);$$

и применяем k раз лемму 14. Получаем, что при условии (8) утверждения

$$\sigma^k{}_n(\xi^0) \in (E, m^\lambda),$$
$$\sigma_n^{k-1}(\xi^1) \in (E, m^\lambda),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma^1{}_n(\xi^{k-1}) \in (E, m^\lambda),$$
$$\sigma^0{}_n(\xi^k) \in (E, m^\lambda)$$

все равносильны.

Лемма 15. *При условии* (5) *соотношения* $\{\xi^0{}_n\} \in (C^k, c^\lambda)$ *и* $\{\xi^1{}_n\} \in (C^{k-1}, c^\lambda)$ *равносильны.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 14.

Теорема 5. *Условие* (5) *достаточно для соотношения*

$$(C^k, c^\lambda) = (H^k, c^\lambda).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4, заменяя в нем лемму 14 на 15.

Теорема 6. *Если последовательность x удовлетворяет условиям* (4) *и*

$$x \in (H^k, m^\lambda),$$

где λ — любая монотонно возрастающая последовательность, удовлетворяющая условию (8), *то*

$$x \in (E, m^\lambda).$$

Доказательство вытекает из теорем 2 и 4.

Теорема 7. *Если последовательность x удовлетворяет условиям* (4) *и*

$$x \in (C^k, c^\lambda),$$

где λ — любая монотонно возрастающая последовательность, удовлетворяющая условию (5), *то*

$$x \in (E, c^\lambda).$$

Доказательство вытекает из теорем 3 и 5.

Литература

1. Кангро Г., О множителях суммируемости типа Бора — Харди для заданной скорости I. Изв. АН ЭстССР. Физ.-матем., 1969, 18, № 2, 137—146.
2. Кангро Г., Множители суммируемости для рядов, λ-ограниченных методами Риса и Чезаро. Настоящий сборник, стр. 136—154.
3. Кангро Г., Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса. Настоящий сборник, стр. 155—160.
4. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
5. Gaier, D., Zeller, K., Über den O-Umkehrsatz für das C_k-Verfahren. Rend. Circolo mat. Palermo, (2), 1954, 3, № 1, 83—88.
6. Hardy, G. H., Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series. Proc. London Math. Soc., (2), 1910, 8, 301—320.
7. Knopp, K., On the proof of the main Tauberian theorem for the C_k and H_k methods. Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 571—573.
8. Korevaar, J., An estimate of the error in Tauberian theorems for power series. Duke Math., J., 1951, 18, 723—734.

Поступило
27 II 1970

JÄÄKLIIKMEGA TAUBERI TÜÜPI TEOREEMID CESÀRO JA HÖLDERI SUMMEERIMISMENETLUSTE KORRAL

I. Tammeraid

Resümee

Käesolevas artiklis leitakse piisavad tingimused selleks, et iga menetlusega C^k teatud kiirusega summeeruv jada oleks koonduv sama kiirusega. Analoogiline probleem lahendatakse menetluse H^k korral. Leitakse piisavad tingimused selleks, et tavalise summeeruvuse korral tuntud menetluste C^k ja H^k ekvivalentsusteoreem oleks rakendatav ka kiirusega summeeruvuse jaoks.

TAUBERIAN REMAINDER THEOREMS FOR THE CESÀRO AND HÖLDER METHODS OF SUMMABILITY

I. Tammeraid

Summary

A sequence $x = \{\xi_n\}$ is called convergent or bounded with the rapidity $\lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow)$ if the finite limit

$$\lim_n \lambda_n (\xi_n - \xi) \qquad (\xi = \lim_n \xi_n)$$

exists or

$$\lambda_n (\xi_n - \xi) = O(1)$$

respectively. A sequence $x = \{\xi_n\}$ is called λ-summable or λ-bounded by a matrix method A if the sequence Ax is λ-convergent or λ-bounded respectively. Tauberian conditions are found to deduce λ-convergency from λ-summability for C^k and H^k methods of summability. The same problem is solved for λ-bounded sequences.

ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ ДЛЯ МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ ЭЙЛЕРА—КНОППА

И. Таммерайд

Кафедра математического анализа

Методом Эйлера—Кноппа E_τ называют треугольный матричный метод суммирования, определенный в виде преобразования последовательности в последовательность матрицей [1]

$$a_{nk} = \binom{n}{k} \tau^k (1-\tau)^{n-k} \qquad (0 < \tau \leqslant 1).$$

Харди и Литтльвуд [4] доказали в 1916 году, что если последовательность $x = \{\xi_n\}$ суммируема методом Бореля и удовлетворяет условию [2]

$$u_n \sqrt{n} = O(1), \tag{1}$$

то последовательность x сходится. В силу включения методов Бореля и Эйлера—Кноппа условие (1) является тауберовым и для метода Эйлера—Кноппа. Прямое доказательство тауберовы теоремы для суммируемости по Эйлеру—Кноппу предложил Кнопп (см. [6], стр. 139—147). Метод доказательства Кноппа основывается на свойствах метода суммирования $E^\nu{}_\tau$, где метод $E^\nu{}_\tau$ определен как ν-кратное произведение методов E_τ. Кнопп доказал, что если последовательность x суммируема методом $E^{\nu+1}{}_{1/2}$ и удовлетворяет условию (1), то последовательность x суммируема методом $E^\nu{}_{1/2}$. Из приведенного результата Кнопп выводит тауберову теорему для метода E_τ.

До сих пор по данным автора не был решен вопрос об остаточном члене в тауберовой теореме для метода суммирования Эйлера—Кноппа. В настоящей заметке предложено частичное

---

[1] В этой статье мы исследуем только регулярные методы Эйлера—Кноппа.

Во всей статье свободные индексы принимают значения $0, 1, 2, \ldots$

[2] Для перехода от последовательности x к ряду Σu_n обозначим $u_n = \overline{\triangle} \xi_n$, где

$$\overline{\triangle} \xi_n = \begin{cases} \xi_n - \xi_{n-1} & \text{при} \quad n \geqslant 1, \\ \xi_0 & \text{при} \quad n = 0. \end{cases}$$

Если у знака суммы пределы индексов суммирования опущены, то суммирование происходит по всем целочисленным значениям индексов от 0 до ∞.

решение этой проблемы. Для доказательства тауберовы теоремы с остаточным членом для метода Эйлера—Кноппа используем метод, который получен соединением метода Кноппа [5, 6] для получения обыкновенной тауберовы теоремы с результатами Кангро [2] о суммируемости со скоростью.

В первом параграфе изучаем вопросы, связанные с сохранением [3] λ-ограниченности при методе суммирования Эйлера—Кноппа. Во втором параграфе излагаем доказательство основной тауберовы теоремы с остаточным членом для метода Эйлера—Кноппа. Используя полученные в параграфе 2 результаты и некоторые теоремы статьи [3], выведем (в третьем параграфе) некоторые теоремы о включении множеств [4] (E_τ, m^λ) и (C^β, m^μ).

§ 1. Сохранение λ-ограниченности методом E_τ

Лемма 1. *Метод E_τ принадлежит классу* [5] (m^λ, m^λ) *тогда и только тогда, когда*

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\tau^k (1-\tau)^{n-k}}{\lambda_k} = O(1). \tag{2}$$

Доказательство следует из теоремы 1 статьи [2].

Лемма 2. *Если последовательность λ удовлетворяет условию* (2) *и последовательность x удовлетворяет условию* [6]

$$\lambda_n u^{(\nu)}{}_n \sqrt{n+1} = O(1), \tag{3}$$

то

$$\lambda_n u^{(\nu+1)}{}_n \sqrt{n+1} = O(1).$$

Доказательство. По определению метода суммирования $E^\nu{}_\tau$ имеем

$$u^{(\nu+1)}{}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} \tau^k (1-\tau)^{n-k} u^{(\nu)}{}_k.$$

Так как справедливы соотношения (2) и (3), то

---

[3] Здесь в основном сохранена символика статьи [3].

[4] *Последовательность x принадлежит классу* (A, m^λ), если последовательность x суммируема методом A к пределу η и

$$\lambda_n (\eta_n - \eta) = O(1),$$

где $\{\eta_n\} = Ax$.

Здесь $\lambda = \{\lambda_n\}$ и $\mu = \{\mu_n\}$ — монотонно возрастающие последовательности положительных чисел. Последовательности λ и μ предполагаются неограниченными, если не оговорено противное.

[5] *Матричный метод суммирования A принадлежит классу* (m^λ, m^λ), если $A(m^\lambda) \subset m^\lambda$ (см. [3], стр. 162).

[6] Для перехода от последовательности

$$\{\xi^{(\nu)}{}_n\} = x^{(\nu)} = E^\nu{}_\tau x \qquad (x^{(0)} = x)$$

к ряду $\Sigma u^{(\nu)}{}_n$ имеем $u_n^{(\nu)} = \bar{\Delta} \xi_n^{(\nu)}$.

$$\lambda_n u^{(\nu+1)}{}_n \sqrt{n+1} = O(\lambda_n \sqrt{n+1}) \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} \tau^k (1-\tau)^{n-k} \frac{1}{\lambda_k \sqrt{k+1}} =$$

$$= O(\lambda_n) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tau^k (1-\tau)^{n-k} \frac{1}{\lambda_k} =$$

$$= O(1).$$

Следствие. *При условиях* (2) *и*

$$\lambda_n u_n \sqrt{n+1} = O(1) \tag{4}$$

справедливо соотношение (3).

Доказательство вытекает из леммы 2 методом математической индукции.

Определим *множество* Λ как совокупность всех последовательностей λ, удовлетворяющих при каком-либо числе $\nu \in (0, 1)$ условию

$$\lambda_n = O(\lambda_{[n\nu]}). \tag{5}$$

Замечание. *Если* $\lambda \in \Lambda$, *то при каждом числе* $\nu \in (0, 1)$ *справедливо соотношение*

$$\lambda_n = O_\nu(\lambda_{[n\nu]}).$$

Лемма 3. *Если справедливо соотношение* (5), *то*

$$\lambda_n = O(1)(n+1)^{O(1)}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть справедливо соотношение (5). Из него методом математической индукции выводим существование таких положительных чисел m_1 и m_2, что

$$\lambda_n \leqslant m_1(n+1)^{m_2}.$$

Лемма 4. *Метод* E_τ $(0 < \tau < 1)$ *принадлежит классу* (m^λ, m^λ) *тогда и только тогда, когда* $\lambda \in \Lambda$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и $m = [n/v]$, где[7] $v \in N$. Обозначим

$$\varrho_1(n) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \tau^k (1-\tau)^{n-k} (\lambda_n/\lambda_k),$$

$$\varrho_2(n) = \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \tau^k (1-\tau)^{n-k} (\lambda_n/\lambda_k)$$

и

$$\varrho(n) = \varrho_1(n) + \varrho_2(n).$$

Согласно лемме 1 имеем $E_\tau \in (m^\lambda, m^\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\varrho_n = O(1)$. Доказательство проводим отдельно при $0 < \tau < 1/2$ и при $1/2 \leqslant \tau < 1$.

Пусть $0 < \tau < 1/2$. В силу соотношения

$$(v-1)^{(v-1)/v} = v + o(v) \qquad (v \to \infty)$$

[7] Здесь N — множество натуральных чисел.

существует такое число $v_0(\tau) \in N$, что при $v \geqslant v_0(\tau)$ справедливо неравенство

$$\frac{(1-\tau)v}{(v-1)^{(v-1)/v}} < 1. \tag{7}$$

Пусть $v(\tau)$ — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее одновременно условиям (7) и $v(\tau) > 1$. При условиях $v = v(\tau)$, $\lambda \in \Lambda$ и $0 < \tau < 1/2$ при помощи леммы 3 выводим, что

$$\varrho_1(n) = O(\lambda_n)\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{m}\tau^k(1-\tau)^{n-k} =$$

$$= O_\tau(\lambda_n)\binom{n}{m}(1-\tau)^n\frac{(1-\tau)^{m+1}-\tau^{m+1}}{(1-\tau)^m} =$$

$$= O_\tau(\lambda_n)\binom{n}{m}(1-\tau)^n =$$

$$= O_\tau\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\frac{(1-\tau)v}{(v-1)^{(v-1)/v}}\right)^n = o_\tau(1),$$

причем применяли соотношение

$$\binom{n}{m} = \frac{O(1)v^{mv}}{\sqrt{m+1}\,(v-1)^{m(v-1)}}. \tag{8}$$

Если $\lambda \in \Lambda$ и $v = v(\tau)$, то

$$\varrho_2(n) = \sum_{k=m+1}^{n}\binom{n}{k}\tau^k(1-\tau)^{n-k}O_\tau(1) = O_\tau(1)$$

и, следовательно,

$$\varrho(n) = o_\tau(1) + O_\tau(1) = O_\tau(1).$$

Пусть $1/2 \leqslant \tau < 1$. Тогда справедливо соотношение

$$\sum_{k=0}^{m}\tau^k(1-\tau)^{-k} \leqslant (m+1)\tau^m(1-\tau)^{-m}$$

и, следовательно,

$$\varrho_1(n) = O(\lambda_n)\binom{n}{m}(1-\tau)^n\sum_{k=0}^{m}\tau^k(1-\tau)^{-k} =$$

$$= O(\lambda_n)(m+1)\binom{n}{m}\tau^m(1-\tau)^{n-m}.$$

Если $\lambda \in \Lambda$ и $v = 3$, то, применяя соотношение (8), получаем, что $\varrho_1(n) = o(1)$. При $\lambda \in \Lambda$ и $v = 3$ имеем также $\varrho_2(n) = O(1)$ и, следовательно, $\varrho(n) = O(1)$.

Необходимость. Пусть $E_\tau \in (m^\lambda, m^\lambda)$. Согласно лемме 1 справедливо соотношение (2) и, следовательно,

$$\lambda_n\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n}{k}\tau^k(1-\tau)^{n-k} = O(\lambda_{n-m}). \tag{9}$$

$$\sum_{k=n-m}^{n} \binom{n}{k} \tau^k (1-\tau)^{n-k} = o_\tau(1), \tag{10}$$

то из соотношения (9) следует $\lambda \in \Lambda$. Докажем справедливость соотношения (10).

Пусть $1/2 \leqslant \tau < 1$. В силу соотношения

$$\frac{(v-1)\tau^v}{(1-1/v)^v} = o_\tau(1) \qquad (v \to \infty)$$

существует такое число $v_0(\tau) \in N$, что при $v \geqslant v_0(\tau)$ справедливо неравенство

$$\frac{(v-1)\tau^v}{(1-1/v)^v} < 1. \tag{11}$$

Пусть $v(\tau)$ — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее одновременно условиям (11) и $v(\tau) > 2$. При условиях $v = v(\tau)$ и $1/2 \leqslant \tau < 1$ выводим при помощи формулы (8), что

$$\sum_{k=n-m}^{n} \binom{n}{k} \tau^k (1-\tau)^{n-k} = O(1) \binom{n}{m} (1-\tau)^n \sum_{k=n-m}^{n} \tau^k (1-\tau)^{-k} =$$

$$= O(m+1) \binom{n}{m} (1-\tau)^n \tau^n (1-\tau)^{-n} =$$

$$= O(\sqrt{m+1}) \left(\frac{(v-1)\tau^v}{(1-1/v)^v} \right)^m = o_\tau(1).$$

Пусть $0 < \tau < 1/2$. Выбираем $v = 3$. В силу фрмулы (8) и соотношения

$$\sum_{k=n-m}^{n} \tau^k (1-\tau)^{-k} = O_\tau(1)$$

справедливо соотношение (10). Лемма доказана.

§ 2. Тауберовы теоремы для метода E_τ

Лемма 5. *Если последовательности λ и x удовлетворяют условиям* (4),

$$\lambda \in \Lambda \tag{12}$$

и

$$x \in (E_{1/2}, m^\lambda), \tag{13}$$

то

$$x \in (E, m^\lambda).$$

Доказательство при $\lambda_n = O(1)$ предложил Кнопп (см. [6], стр. 139—147). Пусть $\lambda_n \neq O(1)$ и $m = [n/2]$. Обозначим

$$\varrho_1(n) = \lambda_n 2^{-2n} \sum_{k=0}^{m} \binom{2n}{k} (\xi_k - \xi_n),$$

$$\varrho_2(n) = \lambda_n 2^{-2n} \sum_{k=m+1}^{2n-m-1} \binom{2n}{k} (\xi_k - \xi_n),$$

$$\varrho_3(n) = \lambda_n 2^{-2n} \sum_{k=2n-m}^{2n} \binom{2n}{k} (\xi_k - \xi_n)$$

и

$$\varrho(n) = \lambda_n (\eta_{2n} - \xi_n), \tag{14}$$

где

$$\eta_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \xi_k.$$

Если $0 \leqslant k \leqslant m$, то по условию (4) выводим

$$\xi_k - \xi_n = - \sum_{i=k+1}^{n} u_i = O(n).$$

Поэтому при помощи формулы Стирлинга и леммы 3 получаем, что

$$\varrho_1(n) = O(n\lambda_n 2^{-2n}) \sum_{k=0}^{m} \binom{2n}{k} =$$

$$= O(n^2 \lambda_n 2^{-2n}) \binom{2n}{m} = o(1).$$

Если $m + 1 \leqslant k \leqslant 2n - m - 1$, то по условиям (4) и (12) имеем

$$\xi_k - \xi_n = O(1) \frac{|n-k|}{\lambda_n \sqrt{n+1}}. \tag{15}$$

Согласно формуле Кноппа (см. [6], стр. 137)

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} |n-k| = n \binom{2n}{n}$$

и формуле Стирлинга из соотношения (15) следует, что

$$\varrho_2(n) = \lambda_n 2^{-2n} \sum_{k=m+1}^{2n-m-1} \binom{2n}{k} |n-k| \frac{O(1)}{\lambda_n \sqrt{n+1}} =$$

$$= O(2^{-2n}) (n+1)^{-1/2} \sum_{k=m+1}^{2n-m-1} \binom{2n}{k} |n-k| =$$

$$= O(1).$$

Если $2n - m \leqslant k \leqslant 2n$, то по условию (4) имеем

$$\xi_k - \xi_n = O(n). \tag{16}$$

При помощи соотношения (16) и формулы Стирлинга из леммы 3 следует, что

$$\varrho_3(n) = o(1).$$

В силу соотношений (12), (13) и (14), из равенства

$$\varrho(n) = \varrho_1(n) + \varrho_2(n) + \varrho_3(n)$$

выводим

$$\varrho(n) = O(1)$$

и

$$x \in (E, m^\lambda).$$

Лемма 6. *Если последовательности* λ *и* x *удовлетворяют условиям* (3), (12) *и*

$$x \in (E_{1/2}^{\nu+1}, m^\lambda),$$

то

$$x \in (E_{1/2}^{\nu}, m^\lambda). \tag{17}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 5 ввиду определения метода суммирования $E^\nu{}_\tau$.

Лемма 7. *Если последовательности* λ *и* x *удовлетворяют условиям* (4), (12) *и* (17), *то*

$$x \in (E, m^\lambda).$$

Доказательство. По следствию из леммы 2 и по лемме 4 из условий (4) и (12) следует, что справедливо соотношение (3) при каждом $\nu \in N$. Если теперь применить лемму 6 последовательно ν раз, то лемма доказана.

Теорема 1. *Если последовательности* λ *и* x *удовлетворяют условиям* (4), (12) *и*

$$x \in (E_\tau, m^\lambda), \tag{18}$$

то

$$x \in (E, m^\lambda).$$

Доказательство. Если $\tau = 1/2^\nu$, где $\nu \in N$, то теорема непосредственно вытекает из леммы 7. Если τ — любое число в промежутке $(0, 1)$, то определяем индекс $\nu \in N$ так, чтобы $\tau > 1/2^\nu$. Согласно свойствам произведения методов суммирования Эйлера—Кноппа получаем, что

$$E_\tau E_\varrho = E_{1/2}^\nu, \tag{19}$$

где

$$2^\nu \tau \varrho = 1.$$

По условию (12) и выбору чисел ν и ϱ из леммы 4 следует, что

$$E_\varrho \in (m^\lambda, m^\lambda). \tag{20}$$

Ввиду соотношений (18), (19) и (20) справедливо соотношение (17). Завершаем доказательство применением леммы 7.

§ 3. Некоторые достаточные условия для включения множеств (C^β, m^μ) и (E^τ, m^λ)

В статье [6] Кнопп доказал следующую теорему: *если ряд* Σu_n *суммируем методом* $E^\nu{}_{1/2}(\nu \in N)$ *к сумме* S *и*

$$\sigma_n^{\beta-1} = O(n^{\alpha-\beta+1/2}) \qquad (\alpha \geqslant \beta),$$

то

$$\sigma^\beta{}_n = S + o(n^{\alpha-\beta}).$$

Докажем аналог этой теоремы для суммируемости со скоростью.

Теорема 2. *Если*

$$\lambda_n = (n+1)^\alpha \qquad (1/2 < \alpha < 1), \tag{21}$$

$$\lambda_n = \mu_n \sqrt{n+1} \tag{22}$$

и

$$x \in (E_\tau, m^\lambda) \cap (C^\beta, m^\mu) \qquad (\beta \geqslant 0), \tag{23}$$

то

$$x \in (C^{\beta+1}, m^\lambda).$$

Доказательство. При условии (21) справедливо соотношение

$$\frac{\lambda_n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_k} = O(1)$$

и метод Чезаро $C^{\beta+1}(\beta \geqslant 0)$ сохраняет λ-ограниченность (см. [3], стр. 166). Тогда по условию (23) получаем, что

$$x \in (C^{\beta+1} E_\tau, m^\lambda).$$

Ввиду коммутативности произведения методов Хаусдорфа (см. [1], стр. 128) справедливо соотношение

$$(C^{\beta+1} E_\tau, m^\lambda) = (E_\tau C^{\beta+1}, m^\lambda),$$

и, следовательно,

$$x \in (E_\tau C^{\beta+1}, m^\lambda). \tag{24}$$

Из условий (21), (22) и (23) по леммам 7 и 6 статьи [3] следует, что

$$x \in (C^{\beta+1}, m^\mu).$$

Для доказательства теоремы 2 ввиду соотношения (24) и теоремы 1 достаточно доказать, что

$$\lambda_n \sqrt{n+1}\,(\sigma_n^{\beta+1} - \sigma_{n-1}^{\beta+1}) = O(1), \tag{25}$$

где

$$\sigma_n^{\beta+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\beta}}{A_n^{\beta+1}} \xi_k. \tag{26}$$

Справедливость соотношения (25) следует из условий (21)—(24), а именно

$$\lambda_n \sqrt{n+1}\,(\sigma_n^{\beta+1} - \sigma_{n-1}^{\beta+1}) = \frac{(\beta+1)(n+1)\mu_n}{n+\beta+1} (\sigma_n^{\beta} - \sigma_{n-1}^{\beta+1}) =$$

$$= \frac{(\beta+1)(n+1)\mu_n}{n+\beta+1}(\overset{\beta}{\sigma_n} - \xi + \xi - \overset{\beta+1}{\sigma_{n-1}}) =$$

$$= O(\mu_n)|\overset{\beta}{\sigma_n} - \xi| + O(\mu_n)|\overset{\beta+1}{\sigma_{n-1}} - \xi| = O(1),$$

причем

$$\xi = \lim_n \sigma_n{}^\beta.$$

Кнопп [6] доказал и в некоторым смысле обратную теорему: *если ряд* Σu_n *суммируем методом* $C^\alpha (\alpha \in N)$ *к сумме* S *и*

$$\sigma^\alpha{}_n = s + o(n^{-1/2}),$$

причем последовательность $\{\sigma^\alpha{}_n\}$ *определена формулой* (26) *при* $\beta = \alpha - 1$, *то последовательность* $\{\sigma^{\alpha-1}{}_n\}$ *суммируема методом* $E_{1/2}$. Кнопп доказал эту теорему при помощи следующей леммы: если ряд Σu_n суммируем методом арифметических средних к сумме S и

$$\sigma^1{}_n = s + o(n^{-1/2}),$$

то ряд Σu_n суммируем методом $E_{1/2}$.

Следуя Кноппу, сперва докажем аналог леммы, а затем аналог теоремы Кноппа для суммируемости со скоростью.

Лемма 8. *Если последовательности* λ, μ *и* x *удовлетворяют условиям* (22),

$$\mu_n = O(1)(n+1)^{O(1)} \tag{27}$$

и

$$x \in (C^1, m^\lambda), \tag{28}$$

то

$$x \in (E_\tau, m^\mu) \qquad (0 < \tau < 1).$$

Доказательство. Согласно условию (28) имеем

$$\lambda_n(\sigma^1{}_n - \xi) = O(1).$$

где последовательность $\{\sigma^1{}_n\}$ определена формулой (26) при $\beta = 0$ и

$$\xi = \lim_n \sigma^1{}_n.$$

Пусть

$$\xi = 0, \tag{29}$$

$$0 < p < m < n \tag{30}$$

и $v = \{v_k\}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ — такая последовательность положительных чисел, которая монотонно возрастает до элемента v_m, а затем монотонно убывает. Тогда из одного неравенства Абеля (см. [6], стр. 150) следует, что

$$\mu_n \left|\sum_{k=0}^n v_k \xi_k\right| \leqslant \mu_n \gamma p v_p + 2\mu_n \gamma_n m v_m + \mu_n \gamma_n \sum_{k=0}^n v_k, \tag{31}$$

где

$$\gamma = \sup_{k \in N} |\sigma^1{}_k| \tag{32}$$

и

$$\gamma_n = \sup_{k\in N} |\sigma^1{}_{n+k}|. \tag{33}$$

Если выбирать

$$v_k = \binom{n}{k} \tau^k (1-\tau)^{-k} \qquad (0<\tau<1) \tag{34}$$

и

$$p = [(n\tau)/2], \tag{35}$$

то

$$m = [n\tau + \tau] \tag{36}$$

и при достаточно больших $n \in N$ справедливо соотношение (30). Следовательно, при условиях (34)—(36) и при достаточно больших n из неравенства (31) следует неравенство

$$\mu_n |\eta_n| \leqslant \mu_n\gamma_n + \mu_n\gamma_n (1-\tau)^{n-m}\tau^m 2m \binom{n}{m} + $$
$$+ \mu_n (1-\tau)^{n-p}\tau^p \gamma p \binom{n}{p}, \tag{37}$$

где

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tau^k (1-\tau)^{n-k} \xi_k.$$

Ввиду соотношений (36) и (35) при помощи формулы Стирлинга выводим

$$\mu_n\gamma_n + \mu_n\gamma_n (1-\tau)^{n-m}\tau^m 2m \binom{n}{m} = O_\tau(\mu_n\gamma_n \sqrt{n+1}) \tag{38}$$

и

$$\mu_n (1-\tau)^{n-p}\tau^p \gamma p \binom{n}{p} = O_\tau(\mu_n \sqrt{n+1}) \left(2\left(\frac{1-\tau}{2-\tau} \right)^{1-\tau/2} \right)^n. \tag{39}$$

Если $0<\tau<1$, то

$$0 < 2\left(\frac{1-\tau}{2-\tau} \right)^{1-\tau/2} < 1, \tag{40}$$

и, следовательно, ввиду соотношений (28), (29), (32), (33), (38)—(40) из соотношения (37) получаем, что

$$\mu_n\eta_n = O_\tau(1),$$

т. е.

$$x \in (E_\tau, m^\mu) \qquad (0<\tau<1).$$

Пусть $\xi \neq 0$. По условию (28) и доказанной части леммы имеем

$$z \in (E_\tau, m^\mu) \qquad (0<\tau<1),$$

где $z = \{\varsigma_n\}$, $\varsigma_n = \xi_n - \xi$. Следовательно,

$$x \in (E_\tau, m^\mu) \qquad (0<\tau<1).$$

Теорема 3. *Если последовательности* λ, μ *и* x *удовлетворяют условиям* (22),

$$\frac{\lambda_n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k}=O(1) \tag{41}$$

и

$$x\in(C^{\alpha}, m^{\lambda}) \qquad (\alpha\in N), \tag{42}$$

то

$$x\in(E_{\tau}C^{\alpha-1}, m^{\mu}) \qquad (0<\tau<1).$$

Доказательство. Справедлива формула (см. [6], стр. 152)

$$(n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n}\sigma_k^{\alpha-1}=(\alpha-1)\alpha^{-1}(n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n}\sigma^{\alpha}{}_k+\alpha^{-1}\sigma^{\alpha}{}_n \qquad (\alpha\in N). \tag{43}$$

В силу условий (41) и (42) и леммы 5 статьи [3] выводим

$$\lambda_n((n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n}\sigma^{\alpha}{}_k-\xi)=O(1) \qquad (\alpha\in N), \tag{44}$$

где последовательность $\{\sigma^{\alpha}{}_n\}$ определена формулой (26) при $\beta=\alpha-1$ и

$$\xi=\lim_n \sigma^{\alpha}{}_n.$$

Согласно формуле (43) и соотношениям (44), (42) находим, что

$$\lambda_n((n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n}\sigma_k^{\alpha-1}-\xi)=O(1) \qquad (\alpha\in N). \tag{45}$$

В силу соотношений (45), (22) и (42) выполнены условия леммы 8. Следовательно,

$$x\in(E_{\tau}C^{\alpha-1}, m^{\mu}) \qquad (\alpha\in N;\ 1>\tau>0).$$

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Кангро Г., Множители суммируемости для рядов, λ-ограниченных методами Риса и Чезаро. Настоящий сборник, стр. 136—154.
3. Таммерайд И., Тауберовы теоремы с остаточным членом для методов суммирования Чезаро и Гельдера. Настоящий сборник, стр. 161—170.
4. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential method. Rend. Circolo mat. Palermo, 1916, 41, 36—53.
5. Knopp, K., Über das Eulersche Summierungsverfahren. Math. Z., 1922, 15, 226—253.
6. Knopp, K., Über das Eulersche Summierungsverfahren. (II. Mitteilung.) Math. Z., 1923, 18, 125—156.

Поступило
13 I 1971

JÄÄKLIIKMEGA TAUBERI TÜÜPI TEOREEMID EULER-KNOPPI SUMMEERIMISMENETLUSE KORRAL

I. Tammeraid

Resümee

Käesolevas artiklis leitakse piisavad tingimused selleks, et iga menetlusega $E_\tau (0 < \tau < 1)$ teatud kiirusega summeeruv jada oleks koonduv sama kiirusega. Leitakse mõningad piisavad tingimused selleks, et jada $x = \{\xi_n\}$ kuuluks hulka $(E_\tau, m^\lambda) \cap (C^\beta, m^\mu)$.

TAUBERIAN REMAINDER THEOREMS FOR THE EULER-KNOPP METHOD OF SUMMABILITY

I. Tammeraid

Summary

A E_τ-summable sequence $x = \{\xi_n\}$ is said to belong to the class (E_τ, m^λ) $(0 < \lambda_n)$ if $\lambda_n (\eta_n - \eta)$ is bounded, where $\{\eta_n\} = E_\tau x$ and η is E_τ-limit for a sequence x. In the present paper we have established Tauberian conditions for the class (E_τ, m^λ), where $0 < \tau < 1$, $\lambda_n \neq O(1)$. Also some sufficient conditions for a sequence x to belong to the class $(E_\tau, m^\lambda) \cap (C^\beta, m^\mu)$ are found.

ОБ ОДНОМ МАТРИЧНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ДВОЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

С. Барон

Кафедра математического анализа

Сведя различные вопросы теории рядов к исследованию некоторого матричного преобразования, зачастую трудно из общей системы необходимых и достаточных условий для этого преобразования вывести эффективные необходимые условия. Пусть ω — любой из классов[1] m, mc, r или $rcrn$ двойных последовательностей. В настоящей заметке находятся необходимые условия для того, чтобы матричное преобразование[2]

$$u''_{mn} = \sum_{k,l} a_{mnkl} U'_{kl} \tag{1}$$

переводило все двойные последовательности

$$\{U'_{kl}\} \tag{2}$$

из класса ω в абсолютно сходящиеся двойные ряды

$$\sum_{m,n} u''_{mn}. \tag{3}$$

В результате получается аналог одной теоремы Пейеримхоффа ([8], теорема 1, [2], теорема 5.2) для двойных рядов. В заметке даем также применения этой теоремы к множителям суммируемости двойных рядов.

1. Условия для преобразования ω в l

Предварительно нам нужны следующие леммы.

Пусть $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — конечные подмножества из $N = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$. Обозначим их произведения через $\mathfrak{D} = \mathfrak{K} \times \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{E} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$.

---

[1] Для классов двойных последовательностей $\{U_{kl}\}$ применяем обозначения статей Кулля [4, 5]. Через $rcrn$ обозначаем такие $\{U_{kl}\} \in r$, для которых $\lim_k U_{kl} = \lim_l U_{kl} = 0$.

[2] Во всей заметке свободные индексы принимают все значения 0, 1, … . Если у знака Σ пределы индексов суммирования опущены, то суммирование происходит по всем их целым значениям от 0 до ∞.

Лемма 1. *Для того, чтобы двойной ряд*

$$\sum_{m,n} u_{mn} \tag{4}$$

сходился абсолютно, необходимо и достаточно существование постоянной $K > 0$ такой, что

$$\left|\sum_{(m,n)\in\mathfrak{E}} u_{mn}\right| \leqslant K$$

для любого $\mathfrak{E}$. При этом

$$\sum_{m,n} |u_{mn}| \leqslant 4 \sup_{\mathfrak{E}} \left|\sum_{(m,n)\in\mathfrak{E}} u_{mn}\right| \leqslant 4K.$$

Доказательство то же самое, что в статье Кулля ([5], стр. 16—17).

Лемма 2. *Для того, чтобы матричное преобразование* (1) *существовало для всех $\{U'_{kl}\} \in \omega$ и переводило их в абсолютно сходящиеся двойные ряды* (3), *необходимо и достаточно существование постоянной $M > 0$ такой, что для произвольного $\mathfrak{E}$*

$$\sum_{k,l} \left|\sum_{(m,n)\in\mathfrak{E}} a_{mnkl}\right| \leqslant M.$$

Доказательство такое же, как в статье Кулля ([5], стр. 17) в виду того, что все $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ можно упорядочить в последовательности (см., например, [6], стр. 104).

Пусть σ'_k, σ''_l, τ'_m и τ''_n — произвольные последовательности, принимающие лишь неотрицательные целочисленные значения. Пусть, далее, $\{\mathfrak{M}_p\}$ и $\{\mathfrak{N}_q\}$ — последовательности конечных подмножеств из N. Обозначим $\mathfrak{E}_{pq} = \mathfrak{M}_p \times \mathfrak{N}_q$, $\mathfrak{E}_{\sigma(k,l)} = \mathfrak{M}_{\sigma'_k} \times \mathfrak{N}_{\sigma''_l}$ и $\mathfrak{E}_{\tau(m,n)} = \mathfrak{M}_{\tau'_m} \times \mathfrak{N}_{\tau''_n}$.

Имеет место

Теорема 1. *Если преобразование* (1) *существует для всех двойных последовательностей* (2) *из класса ω и переводит их в абсолютно сходящиеся двойные ряды* (3), *то найдется зависящая только от матрицы $\mathfrak{A} = (a_{mnkl})$ постоянная $L > 0$ такая, что для любых $\mathfrak{E}_{pq}$ с $\mathfrak{M}_p \cap \mathfrak{M}_q = \varnothing$ и $\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{N}_q = \varnothing$ при*[3] *$p \neq q$ и любой ограниченной двойной последовательности $\{d_{mn}\}$ выполняются условия*[4]

$$\sum_{m,n} \left|\sum_{(k,l)\in\mathfrak{E}_{\tau(m,n)}} a_{mnkl} d_{kl}\right| \leqslant Ld, \tag{5}$$

$$\sum_{k,l} \left|\sum_{(m,n)\in\mathfrak{E}_{\sigma(k,l)}} a_{mnkl} d_{mn}\right| \leqslant Ld, \tag{6}$$

где

$$d = \sup |d_{mn}|.$$

---

[3] Среди множеств последовательностей $\{\mathfrak{M}_p\}$ и $\{\mathfrak{N}_q\}$ могут быть сколько угодно одинаковых, непересекаемость требуется лишь для всех различных множеств.

[4] Если $\sigma'_k, \sigma''_l = \mathrm{const}$ при $d_{mn} = 1$, то условие (6) превращается в условие леммы 2.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. При помощи лемм 1 и 2 (ср. [2], стр. 33) для любых двойных последовательностей $\{U_{kl}\}$, $\{V_{mn}\} \in rcrn$ находим

$$\sum_{m,n} |V_{mn} \sum_{k,l} a_{mnkl} U_{kl}| \leqslant 4 \sup |V_{mn}| \cdot \sup |U_{kl}| \cdot \\ \cdot \sup_{\mathfrak{E}} \sum_{k,l} | \sum_{(m,n)\in\mathfrak{E}} a_{mnkl}| \leqslant \\ \leqslant 4M \sup |V_{mn}| \cdot \sup |U_{kl}|. \qquad (7)$$

Теперь определим последовательности

$$t'_k = \begin{cases} p & \text{при} \quad k \in \mathfrak{M}_p, \\ -1 & \text{при} \quad k \overline{\in} \mathfrak{M}_p, \end{cases} \qquad t''_l = \begin{cases} q & \text{при} \quad l \in \mathfrak{N}_q, \\ -1 & \text{при} \quad l \overline{\in} \mathfrak{N}_q. \end{cases}$$

Положив для произвольных $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$

$$U_{kl} = \begin{cases} d_{kl} e^{-i(xt'_k + yt''_l)} & \text{при} \quad (k, l) \in \mathfrak{D}, \\ 0 & \text{при} \quad k \overline{\in} \mathfrak{K} \quad \text{или} \quad l \overline{\in} \mathfrak{L}, \end{cases}$$

$$V_{mn} = \begin{cases} e^{i(x\tau'_m + y\tau''_n)} & \text{при} \quad (m, n) \in \mathfrak{E}, \\ 0 & \text{при} \quad m \overline{\in} \mathfrak{M} \quad \text{или} \quad n \overline{\in} \mathfrak{N}, \end{cases}$$

из (7) выводим

$$\Big| \sum_{(m,n)\in\mathfrak{E}} e^{i(x\tau'_m + y\tau''_n)} \sum_{(k,l)\in\mathfrak{D}} a_{mnkl} d_{kl} e^{-i(xt'_k + yt''_l)} \Big| \leqslant 4Md. \qquad (8)$$

Далее, так как, например,

$$\int_0^{2\pi} e^{ix(\tau'_m - t'_k)}\, dx = \begin{cases} 2\pi & \text{при} \quad t'_k = \tau'_m, \\ 0 & \text{при} \quad t'_k \neq \tau'_m, \end{cases}$$

то, интегрируя по x, y в прямоугольнике $(0, 2\pi;\ 0, 2\pi)$ выражение, стоящее в (8) под знаком абсолютной величины, находим

$$\Big| \sum_{(m,n)\in\mathfrak{E}} \sum_{(k,l)\in\mathfrak{E}_{\tau(m,n)}} a_{mnkl}\, d_{kl} \Big| \leqslant 4Md, \qquad (9)$$

ибо после интегрирования суммирование в (8) по индексам $(k, l) \in \mathfrak{D}$ производится лишь по тем их значениям, для которых одновременно $t'_k = \tau'_m$ и $t''_l = \tau''_n$, т. е. по всем $(k, l) \in \mathfrak{D} \cap \mathfrak{E}_{\tau(m,n)}$, а, ввиду произвольности $\mathfrak{D}$, неравенство (8) должно иметь место для всех $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{E}_{\tau(m,n)}$. По лемме 1 из (9) вытекает (5) с $L = 16\, M$.

Отметим, что непересекаемость всех различных $\mathfrak{M}_p$ и $\mathfrak{N}_p$ здесь важно при переходе от (8) к (9).

Аналогичным рассуждением, положив

$$U_{kl} = e^{i(x\sigma'_k + y\sigma''_l)} \quad \text{при} \quad (k, l) \in \mathfrak{D},$$
$$V_{mn} = d_{mn} e^{-i(xt'_k + yt''_l)} \quad \text{при} \quad (m, n) \in \mathfrak{E},$$

придем к необходимости условия (6).

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Для того, чтобы матричное преобразование* (1) *существовало для всех двойных последовательностей* (2) *класса* ω *и переводило их в абсолютно сходящиеся двойные ряды* (3), *необходимо выполнение условий*[5]

$$\sum_{k,l} \left| \sum_{m,n} a_{mnkl} d_{mn} \right| < \infty, \tag{10}$$

$$\sum_{k,l} \left| \sum_{m} a_{mlkl} d_{ml} \right| < \infty, \tag{11}$$

$$\sum_{k,l} \left| \sum_{n} a_{knkl} d_{kn} \right| < \infty, \tag{12}$$

$$\sum_{m,n} |a_{mnmn}| < \infty \tag{13}$$

для любой $\{d_{mn}\} \in m$.

Доказательство. Взяв $\tau'_m = m$ и $\tau''_n = n$ в условии (5) теоремы 1 и считая $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$ состоящими из одного элемента m и n соответственно, приходим к необходимости условия (13).

Взяв $\sigma'_k = k$ в условии (6) теоремы 1 и считая в $\mathfrak{E}_k = \mathfrak{M}_k \times \mathfrak{N}$ множество $\mathfrak{M}_k = \{k\}$ одноэлементным, получаем, что для любого $\mathfrak{N}$

$$\sum_{k,l} \left| \sum_{n \in \mathfrak{N}} a_{knkl} d_{kn} \right| \leqslant Ld.$$

Положив здесь $\mathfrak{N} = \{0, 1, \ldots, q\}$, выводим, что для любых $q, \mu, \nu = 0, 1, \ldots$

$$\sum_{k,l=0}^{\mu,\nu} \left| \sum_{n=0}^{q} a_{knkl} d_{kn} \right| \leqslant Ld.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $q \to \infty$, приходим к условию, равносильному (12), ибо сходимость (даже абсолютная) рядов

$$\sum_{n} a_{knkl} d_{kn}$$

следует из условия (5) теоремы 1. Действительно, взяв в (5) одноэлементным множество $\mathfrak{E}_{\tau(m,n)} = \{(k, l)\}$ для произвольных фиксированных $k, l = 0, 1, \ldots$ и $d_{kl} \equiv 1$, получаем необходимость условий

$$\sum_{m,n} |a_{mnkl}| < \infty, \qquad \sum_{m} |a_{mlkl}| < \infty, \qquad \sum_{n} |a_{knkl}| < \infty,$$

(первое из которых влечет за собой два остальных).

Необходимость условий (10) и (11) доказывается аналогично.

---

[5] Выполнение условия (10) также достаточно для преобразования (1) классов ω в l (см. [1], лемма 1).

2. Применения к множителям суммируемости

Пусть $A=(a_{mnkl})$ — нормальный метод суммирования двойных рядов в виде преобразования двойного ряда (4) в двойную последовательность (2), а $A^{-1}=(\eta_{mnkl})$ — его обратная матрица. Пусть B — треугольный метод суммирования двойных рядов с матрицей (β_{mnkl}) преобразования ряда в последовательность и с матрицей $(\overline{\beta}_{mnkl})$ преобразования ряда в ряд.

Напомним, что комплексные числа ε_{mn} называются *множителями суммируемости типов* (A_ω, B_l), если для любого A_ω-суммируемого (т. е. A-ограниченного, ограниченно A-суммируемого, вполне A-суммируемого или к нулю вполне A-суммируемого) ряда (4) ряд

$$\sum_{m,n}\varepsilon_{mn}u_{mn} \tag{14}$$

является абсолютно B-суммируемым.

Обозначая B-средние ряда (14) через u''_{mn}, можем при помощи матрицы A^{-1} нахождение множителей суммируемости типов (A_ω, B_l) свести к исследованию матричного преобразования (1) с $a_{mnkl}=c_{mnkl}$, где

$$c_{mnkl}=\sum_{\mu,\nu=k,l}^{m,n}\eta_{\mu\nu kl}\overline{\beta}_{mn\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}. \tag{15}$$

Применяя к (15) лемму 2, получается

Лемма 3. *Пусть метод A нормален, а B треуголен. Для того, чтобы комплексные числа ε_{mn} были множителями суммируемости типов (A_ω, B_l), необходимо и достаточно существование постоянной $M>0$ такой, что для произвольного $\mathfrak{E}$*

$$\sum_{k,l}\Big|\sum_{(m,n)\in\mathfrak{E}}c_{mnkl}\Big|\leqslant M. \tag{16}$$

Условие (16) леммы 3 неэффективно для практической проверки. Поэтому, чтобы получить эффективные условия для ε_{mn}, наложим ограничения на A и B.

Пусть треугольный метод B абсолютно регулярен, т. е. (см. [4], стр. 21 и 23, и ср. [2], стр. 27—28) удовлетворяет условиям

$$\sum_{m,n=k,l}^{\infty}|\overline{\beta}_{mnkl}|=O(1),$$

$$\sum_{m,n=k,l}^{\infty}\overline{\beta}_{mnkl}=1.$$

Следовательно, сходятся ряды

$$\sum_{n=l}^{\infty}\overline{\beta}_{mnml}=\beta'_m,\qquad \sum_{m=k}^{\infty}\overline{\beta}_{mnkn}=\beta''_n.$$

Предположим также (ср. [3], стр. 26), что [6] β'_m не зависит от l, а β''_n не зависит от k.

Введем обозначения

$$H\varepsilon_{mn} = \sum_{\mu,\nu=m,n}^{\infty} \eta_{\mu\nu mn}\varepsilon_{\mu\nu}, \tag{17}$$

$$H'\varepsilon_{mn} = \sum_{\mu=m}^{\infty} \eta_{\mu nmn}\varepsilon_{\mu n}, \tag{18}$$

$$H''\varepsilon_{mn} = \sum_{\nu=n}^{\infty} \eta_{m\nu mn}\varepsilon_{m\nu}, \tag{19}$$

считая эти ряды абсолютно сходящимися. Тогда из абсолютной регулярности метода B вытекает, например, что

$$\sum_{m=k}^{\infty} c_{mlkl} = \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{\mu=k}^{m} \eta_{\mu lkl}\bar{\beta}_{ml\mu l}\varepsilon_{\mu l} =$$

$$= \sum_{\mu=k}^{\infty} \eta_{\mu lkl}\varepsilon_{\mu l} \sum_{m=\mu}^{\infty} \bar{\beta}_{ml\mu l} = \beta''_l H'\varepsilon_{kl}.$$

Таким образом, применяя теорему 2 с $d_{mn} = 1$ к матрице (15), обнаруживаем, что имеет место

Теорема 3. *Пусть A нормнален, а B треуголен и абсолютно регулярен, причем [6] β'_m и β''_n не зависят соответственно от l и k. Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типов (A_ω, B_l), необходимо выполнение условий*

$$\sum_{m,n} |H\varepsilon_{mn}| < \infty, \tag{20}$$

$$\sum_{m,n} |\beta''_n H'\varepsilon_{mn}| < \infty, \tag{21}$$

$$\sum_{m,n} |\beta'_m H''\varepsilon_{mn}| < \infty, \tag{22}$$

$$\sum_{m,n} \left| \frac{\beta_{mnmn}}{\alpha_{mnmn}} \varepsilon_{mn} \right| < \infty, \tag{23}$$

причем ряды (17), (18) *и* (19) *абсолютно сходятся.*

Из теорем 2 и 3 вытекает необходимость условий леммы 2 статьи [1]. Действительно, если в теореме 3 положить $A = C^{\alpha,\beta}$ и $B = C^{\gamma,\delta}$ с $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geqslant 0$, то, ввиду необходимости условия $\varepsilon_{mn} = O(1)$, все предположения теоремы 3 выполнены, причем условия (20), (21), (22) и (23) теоремы 3 превращаются в условия (B), (L_1), (L_2) и (M) леммы 2 из [1]. Необходимость условий (L_2^1) и (M^1) вытекает соответственно из условий (10) и (11) теоремы 2 при $d_{mn} = A^{\gamma}_{m}/A^{\gamma+i\varphi}_{m}$, $\varphi > 0$, а условий (L_1^2) и

[6] Если $B = B' \odot B''$, то β'_m и β''_n являются диагоналями соответственно матриц B' и B''.

(M^2) соответственно из условий (10) и (12) при $d_{mn}=A_n^\delta/A_n^{\delta+i\psi}$, $\psi>0$, если в теореме 2 положить $a_{mnkl}=c_{mnkl}$ с $A=C^{\alpha,\beta}$ и $B=C^{\gamma,\delta}$, где $\alpha,\beta,\gamma,\delta\geqslant 0$. Доказательство необходимости условий (L_1), (L_2), (M), (M^1) и (M^2) в статье [1] неубедительно.

3. Множители абсолютной сходимости и суммируемости двойных рядов

1. Пусть $B=E$ — метод сходимости. Так как $\overline{E}=(\delta_{mk}\delta_{nl})$, где δ_{mk} — символ Кронекера, то (15) принимает вид

$$c_{mnkl}=\eta_{mnkl}\varepsilon_{mn},$$

а условие (23) теоремы 3 превращается в

$$\sum_{m,n}\left|\frac{\varepsilon_{mn}}{a_{mnmn}}\right|<\infty. \tag{24}$$

Предположим, что метод A удовлетворяет условию Мура—Кангро (ср. [2], стр. 165)

$$\sum_{m,n}D_{mn}<\infty, \tag{25}$$

где

$$D_{mn}=\sup_{k,l}\left|a_{k+m,l+n,k+m,l+n}\eta_{k+m,l+n,k,l}\right|.$$

Теперь можем доказать, что из (24) и (25) вытекает условие (16) леммы 3. Действительно,

$$\sum_{k,l}\sum_{m,n=k,l}^{\infty}\left|\eta_{mnkl}\varepsilon_{mn}\right|=\sum_{k,l}\sum_{m,n}\left|\eta_{k+m,l+n,k,l}\varepsilon_{k+m,l+n}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m,n}D_{mn}\sum_{k,l}\left|\frac{\varepsilon_{k+m,l+n}}{a_{k+m,l+n,k+m,l+n}}\right|<\infty.$$

Итак, доказана (ср. [2], § 23)

Теорема 4. *Пусть нормальный метод A удовлетворяет условию (25). Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями сходимости типов (A_ω, E_l), необходимо и достаточно выполнение условия (24).*

2. Пусть $A=A'\odot A''$ — нормальный метод с $\eta_{mnkl}=\eta'_{mk}\eta''_{nl}$, факторы $A'=(a'_{mk})$ и $A''=(a''_{nl})$ которого имеют в своих обратных матрицах (η'_{mk}) и (η''_{nl}) соответственно $\alpha+2$ и $\beta+2$ отличных от нуля диагоналей, т. е.

$$\eta'_{mk}=0 \quad \text{при} \quad k<m-\alpha-1, \qquad \eta''_{nl}=0 \quad \text{при} \quad l<n-\beta-1.$$

Такие методы впредь обозначим через $A^{\alpha,\beta}$. Методами $A^{\alpha,\beta}$ являются методы Чезаро $C^{\alpha,\beta}$ порядков $\alpha,\beta=0,1,\ldots$, Рисса $P^{\alpha,\beta}=P^\alpha\odot P^\beta$ порядков α, $\beta=1, 2, \ldots$ (см. [9], стр. 426; [7], стр. 94) и многие др.

Для методов $A^{\alpha,\beta}$ выражения (17), (18) и (19) существуют, так как

$$H\varepsilon_{mn} = \sum_{\mu,\nu=m,n}^{m+\alpha+1,n+\beta+1}{}' \eta_{\mu\nu mn}\varepsilon_{\mu\nu},$$

$$H'\varepsilon_{mn} = \sum_{\mu=m}^{m+\alpha+1}{}' \eta_{\mu nmn}\varepsilon_{\mu n},$$

$$H''\varepsilon_{mn} = \sum_{\nu=n}^{n+\beta+1}{}' \eta_{m\nu mn}\varepsilon_{m\nu}.$$

Покажем, что для методов $A^{\alpha,\beta}$ условия теоремы 3 также достаточны для множителей суммируемости типов $(A^{\alpha,\beta}_{\omega}, B_l)$ при некоторых дополнительных ограничениях на B.

Пусть метод B удовлетворяет условиям

$$\beta_{mnmn} = O(\beta_{m+1,n,m+1,n}), \quad \beta_{mnmn} = O(\beta_{m,n+1,m,n+1}), \tag{26}$$

$$\beta'_m = O(\beta'_{m+1}), \quad \beta''_n = O(\beta''_{n+1}), \tag{27}$$

$$\sum_{m,n=k,l}^{\infty} |\Delta_{kl}\overline{\beta}_{mnkl}| = O(\beta_{klkl}), \tag{28}$$

$$\sum_{m,n=k,l}^{\infty} |\Delta_{k}\overline{\beta}_{mnkl}| = O(\beta'_k), \quad \sum_{m,n=k,l}^{\infty} |\Delta_{l}\overline{\beta}_{mnkl}| = O(\beta''_l). \tag{29}$$

Из условий (26) для любых фиксированных $\varkappa, \lambda = 0, 1, \ldots$ непосредственно вытекает оценка

$$\beta_{mnmn} = O(\beta_{m+\varkappa,n+\lambda,m+\varkappa,n+\lambda}), \tag{30}$$

так как

$$\beta_{mnmn} = O(\beta_{m+1,n,m+1,n}) = \cdots = O(\beta_{m+\varkappa,n,m+\varkappa,n}) =$$
$$= O(\beta_{m+\varkappa,n+1,m+\varkappa,n+1}) = \ldots = O(\beta_{m+\varkappa,n+\lambda,m+\varkappa,n+\lambda}).$$

Теперь можем доказать, что из условий теоремы 3 вытекает условие (16) леммы 3.

Действительно, применяя преобразование Абеля—Харди ([3], стр. 8), находим

$$c_{mnkl} = \sum_{\mu,\nu=k,l}^{m,n} \Delta_{\mu\nu}\overline{\beta}_{mn\mu\nu}\cdot \sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{\mu,\nu}{}' \eta_{\varkappa\lambda kl}\varepsilon_{\varkappa\lambda} =$$

$$= \sum_{\mu,\nu=k,l}^{m,n} \Delta_{\mu\nu}\overline{\beta}_{mn\mu\nu}\cdot\Big(\sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{\infty}{}' - \sum_{\varkappa,\lambda=k,\nu+1}^{\infty}{}' - \sum_{\varkappa,\lambda=\mu+1,l}^{\infty}{}' + \sum_{\varkappa,\lambda=\mu+1,\nu+1}^{\infty}{}'\Big)\eta_{\varkappa\lambda kl}\varepsilon_{\varkappa\lambda} =$$

$$= e_{mnkl} - f_{mnkl} - g_{mnkl} + h_{mnkl}.$$

Ввиду абсолютной регулярности метода B из условия (20) выводим

$$\sum_{k,l}\Big|\sum_{m,n=k,l}^{\infty} e_{mnkl}\Big| = \sum_{k,l}|H\varepsilon_{kl}|\sum_{m,n=k,l}^{\infty}|\overline{\beta}_{mnkl}| = O(1).$$

Далее, при помощи (28) убеждаемся в том, что

$$\sum_{m,n=k,l}^{\infty}|h_{mnkl}| \leqslant \sum_{m,n=k,l}^{\infty}\sum_{\mu,\nu=k,l}^{m,n}|\Delta_{\mu\nu}\bar{\beta}_{mn\mu\nu}|\sum_{\varkappa,\lambda=\mu,\nu}^{\infty}|\eta_{\varkappa\lambda kl}\varepsilon_{\varkappa\lambda}| =$$

$$= \sum_{\mu,\nu=k,l}^{\infty}\sum_{\varkappa,\lambda=\mu,\nu}^{\infty}|\eta_{\varkappa\lambda kl}\varepsilon_{\varkappa\lambda}|\sum_{m,n=\mu,\nu}^{\infty}|\Delta_{\mu\nu}\bar{\beta}_{mn\mu\nu}| =$$

$$= O(1)\sum_{\mu,\nu=k,l}^{\infty}|\beta_{\mu\nu\mu\nu}|\sum_{\varkappa,\lambda=\mu,\nu}^{\infty}|\eta_{\varkappa\lambda kl}\varepsilon_{\varkappa\lambda}|.$$

Теперь, учитывая, что $\eta_{\varkappa\lambda kl} = 0$ при $\varkappa > k + \alpha + 1$ или $\lambda > l + \beta + 1$, а также оценку (30) и нормальность метода $A^{\alpha,\beta}$, мы вправе писать

$$\sum_{m,n=k,l}^{\infty}|h_{mnkl}| = O(1)\sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{k+\alpha+1,l+\beta+1}|\eta_{\varkappa\lambda kl}\varepsilon_{\varkappa\lambda}|\sum_{\mu,\nu=k,l}^{\varkappa,\lambda}|\beta_{\mu\nu\mu\nu}| =$$

$$= O(1)\sum_{\varkappa,\lambda=k,l}^{k+\alpha+1,l+\beta+1}|\eta_{\varkappa\lambda kl}\varepsilon_{\varkappa\lambda}\beta_{\varkappa\lambda\varkappa\lambda}| =$$

$$= O(1)\sum_{\varkappa,\lambda=0}^{\alpha+1,\beta+1}D_{\varkappa\lambda}\left|\frac{\beta_{\varkappa+k,\lambda+l\,\varkappa+k,\lambda+l}}{\alpha_{\varkappa+k,\lambda+l,\varkappa+k,\lambda+l}}\varepsilon_{\varkappa+k,\lambda+l}\right|,$$

если существуют конечные $D_{\varkappa\lambda}$ при $0 \leqslant \varkappa,\ \lambda \leqslant \alpha + 1,\ \beta + 1$. Наконец, ввиду условия (23) отсюда заключаем

$$\sum_{k,l}\sum_{m,n=k,l}^{\infty}|h_{mnkl}| = O(1)\sum_{\varkappa,\lambda=0}^{\alpha+1,\beta+1}D_{\varkappa\lambda}\sum_{k,l=\varkappa,\lambda}^{\infty}\left|\frac{\beta_{klkl}}{\alpha_{klkl}}\varepsilon_{kl}\right| = O(1).$$

Далее ввиду того, что $A^{\alpha,\beta}$ факторизируем и нормален, имеем

$$f_{mnkl} = \sum_{\nu=l}^{n}\Delta_{\nu}\bar{\beta}_{mnk\nu}\sum_{\varkappa,\lambda=k,\nu+1}^{\infty}\eta_{\varkappa\lambda kl}\varepsilon_{\varkappa\lambda} =$$

$$= \sum_{\nu=l}^{n}\Delta_{\nu}\bar{\beta}_{mnk\nu}\sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty}\alpha''_{\lambda\lambda}\eta''_{\lambda l}H'\varepsilon_{k\lambda},$$

вследствие чего, из (29) и (27) вытекает

$$\sum_{m,n=k,l}^{\infty}|f_{mnkl}| \leqslant \sum_{\nu=l}^{\infty}\sum_{\lambda=\nu}^{\infty}|\alpha''_{\lambda\lambda}\eta''_{\lambda l}H'\varepsilon_{k\lambda}|\sum_{m,n=k,\nu}^{\infty}|\Delta_{\nu}\bar{\beta}_{mnk\nu}| =$$

$$= O(1)\sum_{\lambda=l}^{\infty}|\alpha''_{\lambda\lambda}\eta''_{\lambda l}H'\varepsilon_{k\lambda}|\sum_{\nu=l}^{\lambda}|\beta''_{\nu}| =$$

$$= O(1)\sum_{\lambda=l}^{l+\beta+1}|\alpha_{k\lambda k\lambda}\eta_{k\lambda kl}\beta''_{\lambda}H'\varepsilon_{k\lambda}|.$$

Следовательно, условие (21) влечет за собой

$$\sum_{k,l}\sum_{m,n=k,l}^{\infty}|f_{mnkl}| = O(1)\sum_{\lambda=0}^{\beta+1}|D_{0\lambda}|\sum_{k,l=0,\lambda}^{\infty}|\beta''_{l}H'\varepsilon_{kl}| = O(1).$$

Аналогично условие (22) влечет за собой

$$\sum_{k,l} \sum_{m,n=k,l}^{\infty} |g_{mnkl}| = O(1).$$

Итак, доказана

Теорема 5. *Пусть для метода* $A^{\alpha,\beta}$ *существуют конечные* D_{mn} *при* $0 \leqslant m$, $n \leqslant \alpha+1$, $\beta+1$, *а треугольный метод* B *абсолютно регулярен и удовлетворяет условиям*[7] (26), (27), (28) *и* (29), *причем*[6] β'_m *и* β''_n *не зависят соответственно от* l *и* k. *Для того, чтобы числа* ε_{mn} *были множителями суммируемости типов* $(A_{\omega}^{\alpha,\beta}, B_l)$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (20), (21), (22) *и* (23).

Литература

1. Барон С., Множители абсолютной суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 135—155.
2. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
3. Кангро Г., О множителях суммируемости для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 3—42.
4. Кулль И., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.
5. Кулль И., Линейные преобразования некоторых классов двойных последовательностей. Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1961, **10**, № 1, 13—21.
6. Очан Ю. С., Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного. Москва, 1965.
7. Тюрнпу Х., Множители суммируемости для методов Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 90—105.
8. Peyerimhoff, A., Über ein Lemma von Herrn H. C. Chow. J. London Math. Soc., 1957, **32**, 33—36.
9. Russel, D. C., Note on convergence factors. Tôhoku Math. J., 1966, **18**, № 4, 414—428.

Поступило
8 X 1968

KAHEKORDSETE JADADE ÜHEST MAATRIKSTEISENDUSEST

S. Baron

Resümee

Artiklis vaadeldakse kahekordsete jadade klasside *m, mc, r* ja *rcrn* maatriksteisendust (1) absoluutselt koonduvate ridade klassi *l*. Saadakse Peyerimhoffi teoreemi [8] üldistus kahekordsetele jadadele (teoreem 1). Selle rakendusena leitakse (teoreem 4) absoluutsed koonduvustegurid normaalse summeeri-

[7] Если $B = B' \odot B''$, то условия (27) и (29) вытекают из (26) и (28) ввиду абсолютной регулярности B.

mismenetluse A jaoks, mis rahuldab Moore'i-Kangro tingimust (25), ning absoluutsed summeeruvustegurid (teoreem 5) faktoriseeruva normaalse menetluse $A^{\alpha,\beta}$ jaoks, mille faktorite pöördmaatriksites on lõplik hulk nullist erinevaid diagonaale, ning B on absoluutselt regulaarne ja rahuldab kitsendusi (26)—(29).

ÜBER EINEN MATRIXTRANSFORMATION VON DOPPELFOLGEN

S. Baron

Zusammenfassung

In diesem Aufsatz wird die Matrixtransformation (1) behandelt, die die Klassen *m, mc, r* und *rcrn* der Doppelfolgen in die Klasse *l* der absolut konvergenten Doppelreihen überführt. Es wird der bekannter Satz von Peyerimhoff [8] auf Doppelfolgen verallgemeinert (Theorem 1). Als Anwendung dieses Ergebnises werden absolute Konvergenzfaktoren für normale Matrixverfahren, die den Moore—Kangro Bedingung (25) erfüllen, abgeleitet (Theorem 4). Auch werden absolute Summierbarkeitsfaktoren mit den Bedingungen (26)—(29) erfüllenden Matrixverfahren B für faktorisierende normale Matrixverfahren $A^{\alpha,\beta}$, deren Umkehrmatrixen der Reihe-Folge-Transformationen eine endliche Anzahl von Null verschiedene Diagonale bezitzen, gefunden (Theorem 5).

О КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

О. Карма

Кафедра вычислительной математики

В настоящей статье обобщаются на случай оператор-функций некоторые результаты [1, 2, 5] о приближении собственных значений линейного оператора собственными значениями некоторых аппроксимирующих операторов. Используется понятие компактной аппроксимации, введенное в [1, 2]; основные идеи доказательств заимствованы из [1, 2, 4, 5].

Приведенные теоремы можно использовать для обоснования применения широкого класса конкретных методов приближенного решения нелинейных собственных задач. Можно, например, обобщить результаты [1, 3, 5] о дискретизационных методах на случай, когда ядро интегрального оператора или коэффициенты дифференциального уравнения аналитически зависят от параметра. Как частный случай из приводимых результатов вытекает сходимость метода Бубнова — Галеркина для аналитических оператор-функций, установленная другим путем в [8].

§ 1. Аппроксимация оператор-функциями, действующими в подпространствах основных пространств

1. Пусть E, F — (вещественные или комплексные) банаховы пространства, а E_n, F_n последовательности[1] их замкнутых подпространств, таких что (см. также замечание 5)

$$\inf_{z_n \in E_n} \|z - z_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ для каждого } z \in E. \qquad (1)$$

Будем говорить, что последовательность операторов[2] $B_n \in L(E_n, F_n)$ *компактно аппроксимирует* оператор $B \in L(E, F)$, и писать B_n *к. а.* B, если

---

[1] Если не оговорено противное, то $n = 1, 2, \ldots$.

[2] Через $L(E, F)$ обозначается банахово пространство линейных непрерывных операторов из E в F, определенных на всем E, с нормой

$$\|B\| = \sup_{\|z\|=1,\, z \in E} \|Bz\|.$$

а) из $z_n \to z$ $(z_n \in E_n, \quad z \in E)$ при $n \to \infty$ следует, что $\|B_n z_n - Bz\| \to 0$,

б) для любой последовательности $z_n \in E_n$ с $\|z_n\| = 1$ последовательность $\{B_n z_n - Bz_n\}$ компактна в F.

Отметим, что условие а) равносильно требованию, чтобы $\|B_n z_n - Bz\| \to 0$ для любой компактной в E последовательности $z_n \in E_n$, а условие б) требованию компактности, если

$$\|z_n\| \leqslant c = \text{const}.$$

Пусть, далее, при каждом λ из некоторого метрического пространства Λ заданы операторы $T(\lambda) \in L(E, F)$ и $T_n(\lambda) \in L(E_n, F_n)$ такие, что оператор-функции $T(\lambda)$ и $T_n(\lambda)$ сильно непрерывны в каждой точке $\lambda \in \Lambda$ (впрочем, можно доказать, что при выполнении условий следующего определения $T(\lambda)$ всегда сильно непрерывна).

Определение 1. *Будем говорить, что последовательность оператор-функций $T_n(\lambda)$ компактно аппроксимирует оператор-функцию $T(\lambda)$ (и писать $T_n(\lambda)$ к. а. $T(\lambda)$) на подмножестве $\Lambda' \subset \Lambda$, если $T_n(\lambda_n)$ к. а. $T(\lambda_0)$ для каждой сходящейся последовательности $\lambda_n \to \lambda_0$ $(\lambda_n, \lambda_0 \in \Lambda')$.*

Замечание 1. Если $T_n(\lambda)$ к. а. $T(\lambda)$, $S_n(\lambda)$ к. а. $S(\lambda)$, то любая подпоследовательность $T_{n_k}(\lambda)$ к. а. $T(\lambda)$ и $(T_n + S_n)(\lambda)$ к. а. $(T + S)(\lambda)$.

Замечание 2. Если $T_n(\lambda)$ к. а. $T(\lambda)$ на компакте (т. е. замкнутом компактном подмножестве) $\Lambda_0 \subset \Lambda$, то

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_0, n = 1, 2, \dots} \|T_n(\lambda)\| < \infty. \tag{2}$$

Чтобы убедиться в справедливости замечания 2, можно воспользоваться фактом, что из сильной непрерывности оператор-функции на компакте следует (по принципу равномерной ограниченности) ограниченность его нормы на этом компакте. Впрочем, (2) вытекает как из а), так и из б).

2. Будем обозначать через $\varrho(T)$ множество всех *регулярных точек* оператор-функции $T(\lambda)$ (т. е. тех $\lambda \in \Lambda$, при которых существует $T^{-1}(\lambda) \in L(F, E)$), и пусть $\sigma(T) = \Lambda \setminus \varrho(T)$. Множество *характеристических точек* (т. е. тех $\lambda \in \Lambda$, при которых существует $z \neq 0$, называемый *собственным элементом*, такой что $T(\lambda)z = 0$) обозначим через $\sigma_p(T)$. Множество тех точек $\lambda \in \Lambda$, для которых из

$$\inf_{\|z\| = 1, z \in E} \|T(\lambda)z\| > 0$$

не вытекает существование обратного $T^{-1}(\lambda) \in L(F, E)$, обозначим через $\sigma_r(T)$. В случае, когда λ — комплексные числа, $E = F$ — комплексное банахово пространство и $T(\lambda) = \lambda I - T$, эти определения и обозначения совпадают с теми, которые даны в [7] соответственно для резольвентного множества, спектра, точечного спектра и остаточного спектра оператора T.

Предложение 1. *Пусть $T_n(\lambda)$ к. а. $T(\lambda)$ на подмножестве $\Lambda' \subset \Lambda$, причем $\Lambda' \cap \sigma_r(T) = \varnothing$. Если найдутся число $c = \text{const}$ и сколь угодно большие индексы n такие, что $\Lambda' \subset \varrho(T_n)$ и $\|T^{-1}{}_n(\lambda)\| \leqslant c$ при $\lambda \in \Lambda'$, то $\Lambda' \subset \varrho(T)$.*

Доказательство. Допустим, что найдется $\lambda_0 \in \Lambda' \cap \sigma(T)$. Тогда

$$a = \inf_{\|z\|=1,\, z \in E} \|T(\lambda_0) z\| = 0,$$

т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $z \in E$ с $\|z\| = 1$ такой, что $\|T(\lambda_0) z\| \leqslant \varepsilon$. Но так как $T_n(\lambda_0)$ к.а. $T(\lambda_0)$, то из $z_n \to z$ с $\|z_n\| = 1$ получим для всех достаточно больших n, что $\|T_n(\lambda_0) z_n\| \leqslant 2\varepsilon$. Это, ввиду произвольности ε, противоречит предположениям.

Теорема 1. *Пусть $T_n(\lambda)$ к.а. $T(\lambda)$ на компакте $\Lambda_0 \subset \varrho(T)$. Если $\Lambda_0 \cap \sigma_r(T_n) = \varnothing$ при всех (достаточно больших) n, то найдется число n_0 такое, что $\Lambda_0 \subset \varrho(T_n)$, $\|T^{-1}{}_n(\lambda)\| \leqslant c$ ($c = \text{const}$, $\lambda \in \Lambda_0$) при всех $n > n_0$, и $T^{-1}{}_n(\lambda)$ к.а. $T^{-1}(\lambda)$ на Λ_0 при $n > n_0$.*

Доказательство. Сначала убедимся, что $\liminf a_n > 0$, где

$$a_n = \inf_{\|z_n\|=1,\, z_n \in E_n,\, \lambda \in \Lambda_0} \|T_n(\lambda) z_n\|.$$

Хотя это можно вывести из леммы 3.1 статьи [2], мы все же приведем прямое доказательство ради полноты изложения.

Допустим, что $\liminf a_n = 0$. Тогда найдутся подпоследовательности[3] $\{z_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ такие, что $z_n \in E_n$, $\|z_n\| = 1$, $\lambda_n \in \Lambda_0$, $\lambda_n \to \lambda_0 \in \Lambda_0$ и

$$T_n(\lambda_n) z_n = (T_n(\lambda_n) z_n - T(\lambda_0) z_n) + T(\lambda_0) z_n \to 0.$$

Так как $\{T_n(\lambda_n) z_n - T(\lambda_0) z_n\}$ — компактная в F последовательность, то такими должны быть также последовательности $T(\lambda_0) z_n$ и $z_n = T^{-1}(\lambda_0)(T(\lambda_0) z_n)$. По условию а) отсюда следует, что $T(\lambda_0) z_n \to 0$, а так как $\lambda_0 \in \varrho(T)$, то и $z_n \to 0$, что противоречит выбору z_n. Значит, $\liminf a_n > 0$, а, ввиду условия $\Lambda_0 \cap \sigma_r(T_n) = \varnothing$, это означает, что $\Lambda_0 \subset \varrho(T_n)$ при достаточно больших n, причем

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_0,\, n > n_0} \|T^{-1}{}_n(\lambda)\| < \infty.$$

Отсюда вытекает и сильная непрерывность оператор-функций $T^{-1}{}_n(\lambda)$ на Λ_0. Далее, из тождества

$$T^{-1}{}_n(\lambda_n) w_n - T^{-1}(\lambda_0) w_n = T^{-1}(\lambda_0)(T(\lambda_0) - T_n(\lambda_n)) T^{-1}{}_n(\lambda_n) w_n \tag{3}$$

следует выполнение условия б) определения 1. Пусть теперь $\lambda_n \to \lambda_0$ ($\lambda_n, \lambda_0 \in \Lambda_0$), а $\{w_n\}$ — компактная в F последовательность с $w_n \in F_n$. Так как в этих условиях последовательности

---

[3] Для подпоследовательностей мы здесь и ниже обычно сохраняем обозначение первоначальных последовательностей.

(3) и $T^{-1}(\lambda_0)w_n$ компактны, то и последовательность $T^{-1}{}_n(\lambda_n)w_n$ должна быть компактной. Но тогда тождество (3), с учетом выполнения свойства а) для оператор-функций $T_n(\lambda)$ и $T(\lambda)$, завершает доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть $T_n(\lambda)$ к.а. $T(\lambda)$ на компакте $\Lambda_0 \subset \Lambda$. Тогда для каждого открытого множества $V \supset \sigma(T)$ существует число n_0 такое, что $(\sigma(T_n) \setminus \sigma_r(T_n)) \cap \Lambda_0 \subset V \cap \Lambda_0$ при всех $n > n_0$.*

Замечание 3. Если $T(\lambda)$, $T_n(\lambda)$ — непрерывные по норме оператор-функции, то в случае, когда в теореме 1 (в предложении 1) компакт Λ_0 (соответственно множество Λ') связно, вместо требования $\Lambda_0 \cap \sigma_r(T_n) = \varnothing$ (соответственно $\Lambda' \cap \sigma_r(T) = \varnothing$) достаточно требовать, чтобы $\Lambda_0 \not\subset \sigma_r(T_n)$ (соответственно $\Lambda' \not\subset \sigma_r(T)$); см., например, [2], доказательство теоремы 3.1.

Замечание 4. Все сказанное в этом пункте остается в силе также в случае, когда Λ — произвольное топологическое пространство, а Λ_0 — замкнутое и (секвенциально) компактное в смысле [7] подмножество.

Замечание 5. Если $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, то условие (1) можно заменить более слабым требованием

$$\inf_{z_n \in E_n} \|z - z_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ для всех } z \in \{z : \exists\, \lambda \in \sigma(T),\ T(\lambda)z = 0\}.$$

3. В этом пункте будем предполагать, что E и F — комплексные банаховы пространства, Λ — область (открытое связное множество) с границей Γ в m-мерном комплексном векторном пространстве $\mathbf{C}^m$, оператор-функции $T(\lambda)$ и $T_n(\lambda)$ голоморфны (по терминологии [7] аналитичны) на Λ и что $\sigma_r(T) = \sigma_r(T_n) = \varnothing$, $\sigma(T) \neq \Lambda$. Отметим, что множество $\sigma(T) = \Lambda \setminus \varrho(T)$ замкнуто в Λ.

Назовем Σ-множеством подмножество из $\sigma(T)$, одновременно открытое и замкнутое в $\sigma(T)$, и такое, что его замыкание в $\mathbf{C}^m$ не пересекается с границей Γ области Λ.

Теорема 2. *Пусть $T_n(\lambda)$ к. а. $T(\lambda)$ на области $\Lambda \subset \mathbf{C}^m$ с границей Γ. Тогда*

1) *для каждого Σ-множества $\Sigma \subset \sigma(T)$ найдется последовательность λ_n такая, что расстояние $\varrho(\lambda_n, \Sigma) \to 0$ при $n \to \infty$ и $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ при достаточно больших n,*

2) $$\sup_{\lambda_n \in \sigma(T_n) \cup \Gamma} \varrho(\lambda_n, \sigma(T) \cup \Gamma) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть для Σ найдется окрестность $\Lambda' \subset \Lambda$ с границей Γ' такая, что существуют сколь угодно большие индексы, при которых $\Lambda' \subset \varrho(T_n)$. Без ограничения общности можно предполагать, что $\Gamma' \subset \Lambda$ и что замыкание окрестности Λ' не пересекается с $\sigma(T) \setminus \Sigma$. Тогда на Γ' выполнены условия теоремы 1, и поэтому для всех достаточно больших n

на Γ' существуют операторы $T^{-1}{}_n(\lambda) \in L(F_n, E_n)$ с $\|T^{-1}{}_n(\lambda)\| \leqslant c$. Ввиду голоморфности оператор-функции $T^{-1}{}_n(\lambda)$ на $\varrho(T_n)$ по принципу максимума модуля при тех n, для которых $\Lambda' \subset \varrho(T_n)$, это неравенство распространяется на все Λ', и мы получим противоречие с предложением 1. Утверждение 1) доказано.

Для доказательства утверждения 2) достаточно заметить, что если образовать любой компакт Λ_0, получаемый из Λ выбрасыванием некоторой окрестности множества $\sigma(T) \cup \Gamma$, то на Λ_0 будут выполнены условия теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Выделим особо случай, когда $m = 1$, т. е. когда Λ — область в поле комплексных чисел **C**, а операторы $T(\lambda)$, $T_n(\lambda)$ при любом $\lambda \in \Lambda$ фредгольмовы[4] (таковыми будут в случае $E = F$, $E_n = F_n$, например, операторы вида $I - K(\lambda)$, $I_n - K_n(\lambda)$, где $K(\lambda)$ и $K_n(\lambda)$ при любом $\lambda \in \Lambda$ вполне непрерывны). Тогда известно (например, [6]), что $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ либо совпадает с Λ, либо не имеет в ней предельных точек. Так как мы предполагали, что $\sigma(T) \neq \Lambda$, то справедлива

Теорема 3. *Пусть $T_n(\lambda)$ к. а. $T(\lambda)$ на $\Lambda \subset$ **C**. Для того, чтобы $\lambda_0 \in \Lambda$ была характеристической точкой оператор-функции $T(\lambda)$, необходимо и достаточно, чтобы λ_0 была пределом некоторой последовательности λ_n характеристических точек оператор-функций $T_n(\lambda)$.*

4. Справедливо следующее

Замечание 6. Если $T(\lambda)$ и $T_n(\lambda)$ — равностепенно непрерывные по норме оператор-функции в каждой точке $\lambda \in \Lambda$ (т. е. для каждого $\varepsilon > 0$, $\lambda_0 \in \Lambda$ существует окрестность $V(\lambda_0, \varepsilon)$ точки λ_0 такая, что из $\lambda \in V(\lambda_0, \varepsilon)$ следует $\|T(\lambda) - T(\lambda_0)\| \leqslant \varepsilon$, $\|T_n(\lambda) - T_n(\lambda_0)\| \leqslant \varepsilon$), то

1° $T_n(\lambda)$ к. а. $T(\lambda)$ на Λ тогда и только тогда, когда на каждом компакте $\Lambda_0 \subset \Lambda$

а$_1$) из того, что $z_n \to z_0$ $(z_n \in E_n,\ z_0 \in E)$ следует, что $T_n(\lambda) z_n \to T(\lambda) z_0$ в пространстве[5] $C_F(\Lambda_0)$,

б$_1$) для любой ограниченной последовательности $z_n \in E_n$ последовательность $\{T_n(\lambda) z_n - T(\lambda) z_n\}$ компактна в пространстве $C_F(\Lambda_0)$.

2° $T_n(\lambda)$ к. а. $T(\lambda)$ на Λ тогда и только тогда, когда $T_n(\lambda_0)$ к. а. $T(\lambda_0)$ в каждой точке $\lambda_0 \in \Lambda$.

Для проверки замечания 6, кроме простых стандартных рассуждений, нужно учесть, что для компактности последователь-

---

[4] Оператор T называется *фредгольмовым*, если область его значений замкнута, а размерности ядра и коядра оператора T конечны и равны.

[5] Через $C_F(\Lambda_0)$ обозначается пространство всех непрерывных на компакте Λ_0 функций (от параметра λ) со значениями F и с нормой

$$\|u(\lambda)\|_0 = \max_{\lambda \in \Lambda_0} \|u(\lambda)\|_F.$$

ности $u_n(\lambda) \in C_F(\Lambda_0)$ достаточно (см. [7]), чтобы выполнялись условия:

1) последовательность $\{u_n(\lambda)\}$ ограничена в $C_F(\Lambda_0)$,

2) функции $u_n(\lambda)$ равностепенно непрерывны на Λ_0,

3) при каждом фиксированном $\lambda \in \Lambda_0$ последовательность $u_n(\lambda)$ компактна в F.

В случае, когда $T_n(\lambda)$ к. а. $T(\lambda)$, а $T(\lambda)$ и $T_n(\lambda)$ — голоморфные на $\Lambda \subset \mathbf{C}$ оператор-функции, из замечания 2 вытекает выполнение предположения замечания 6.

Пусть, далее, $T(\lambda)$ и $T_n(\lambda)$ голоморфны, $\Gamma(t)$ с $0 \leqslant t \leqslant 1$ — спрямляемая кривая в $\Lambda \subset \mathbf{C}$, а $f(\lambda)$, $f_n(\lambda)$ — непрерывные на ней функции, такие, что $f_n(\lambda) \to f(\lambda)$ равномерно по $\lambda \in \Gamma(t)$ при $n \to \infty$. Тогда из 1° следует

Предложение 2. *Если $T_n(\lambda)$ к. а. $T(\lambda)$ на Λ, то и операторы $B_n = \int\limits_\Gamma f_n(\lambda) T(\lambda) d\lambda$ к. а. оператор $B = \int\limits_\Gamma f(\lambda) T(\lambda) d\lambda$.*

Используя 2° и представление k-ых производных в виде интегралов Коши, из предложения 2 получим

Следствие 2. *Если $T_n(\lambda)$ к. а. $T(\lambda)$ на Λ, то и $T^{(k)}{}_n(\lambda)$ к. а. $T^{(k)}(\lambda)$ на Λ при каждом $k = 1, 2, \ldots$.*

Если предположить дополнительно, что операторы $T(\lambda)$ и $T_n(\lambda)$ фредгольмовы при любом $\lambda \in \Lambda$ и $\sigma(T) \neq \Lambda$, то будет справедливо

Замечание 7. Пусть $T_n(\lambda)$ к. а. $T(\lambda)$ на $\Lambda \subset \mathbf{C}$. Если $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ и $\lambda_n \to \lambda_0 \in \Lambda$, то из всякой последовательности собственных элементов z_n с $\|z_n\| = 1$, соответствующих характеристическим точкам λ_n оператор-функций $T_n(\lambda)$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к собственному элементу z_0, соответствующему характеристической точке λ_0 оператор-функции $T(\lambda)$.

Действительно, из [2, 5] следует, что из $\{z_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $z_n \to z_0$, но тогда $T(\lambda_0) z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(\lambda_n) z_n = 0$.

§ 2. Аппроксимация оператор-функциями, действующими в пространствах, отличных от основных пространств (общий подход)

Ниже будут, следуя подходу книги [5], рассмотрены случаи, когда аппроксимирующие оператор-функции действуют в пространствах, изоморфных подпространствам (п. 1) или факторпространствам (п. 2) основных пространств. Отметим, что, хотя фактически можно было бы ограничиться случаем подпространств или факторпространств, в приложениях все же иногда удобнее пользоваться именно приводимой ниже теорией. В то же время нам кажется, что именно в случае подпространств особенно хорошо видны основные идеи доказательств, поэтому этот случай был рассмотрен отдельно в § 1.

1. Пусть E, F, E_n, F_n — (вещественные или комплексные) банаховы пространства и пусть, кроме того, существуют операторы (связывающие отображения) $\Phi_n \in L(E_n, E)$ и $\Psi_n \in L(F_n, F)$ и положительные постоянные c', c'', c_1, c_2 такие, что

$$\|\Phi_n\| \leqslant c', \quad \|\Phi_n x_n\| \geqslant c_1 \|x_n\| \quad \text{для } \forall x_n \in E_n, \tag{4}$$

$$\|\Psi_n\| \leqslant c'', \|\Psi_n y_n\| \geqslant c_2 \|y_n\| \quad \text{для } \forall y_n \in F_n, \tag{5}$$

$$\inf_{x_n \in E_n} \|z - \Phi_n x_n\| \to 0 \quad \text{для} \quad \forall z \in E \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1'}$$

Отметим, что из (4) (или (5)) вытекает изоморфизм между E_n (соответственно F_n) и замкнутым подпространством $\Phi_n E_n$ (соответственно $\Psi_n F_n$) пространства E (соответственно F).

Будем говорить, что последовательность операторов $B_n \in L(E_n, F_n)$ *компактно аппроксимирует* оператор $B \in L(E, F)$ по отношению к связывающим отображениям $\Phi_n \in L(E_n, E)$, $\Psi_n \in L(F_n, F)$, и писать B_n *к. а.* B, если

а′) $\|\Psi_n B_n x_n - B\Phi_n x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ для любой последовательности $x_n \in E_n$ такой, что $\{\Phi_n x_n\}$ компактна в E,

б′) для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, $\|x_n\| = 1$, последовательность $\{\Psi_n B_n x_n - B\Phi_n x_n\}$ компактна в F.

Заметим, что равносильное определение получится, если в б′) вместо $\|x_n\| = 1$ потребовать лишь $\|x_n\| \leqslant c = \text{const}$.

Для сильно непрерывных оператор-функций $T(\lambda)$, $T_n(\lambda)$, заданных на некотором метрическом пространстве Λ и таких, что $T(\lambda) \in L(E, F)$, $T_n(\lambda) \in L(E_n, F_n)$, формально перенесем определение 1 из § 1. Тогда формально дословно переносятся и все утверждения § 1, кроме замечаний 5, 6, 7, которые изменяются очевидным образом. Более того, почти дословно переносятся и все доказательства. Для иллюстрации роли операторов Φ_n и Ψ_n приведем коротко все же доказательства предложения 1 и теоремы 1, (используя введенные в § 1 обозначения α и α_n).

Доказательство предложения 1. Если $\alpha = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $z \in E$ с $\|z\| = 1$ такой, что $\|T(\lambda_0) z\| \leqslant \varepsilon$. По условию (1′) найдется последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\Phi_n x_n \to z$, а, значит, $\|\Psi_n T_n(\lambda_0) x_n - T(\lambda_0)\Phi_n x_n\| \to 0$. Но тогда для достаточно больших n имеем $\|\Psi_n T_n(\lambda_0) x_n\| \leqslant 2\varepsilon$, а, из-за условий (4) и (5), также $\|T_n(\lambda_0) x_n\| \leqslant 2\varepsilon/c_2$, $\|x_n\| \geqslant 1/(2c')$, что ввиду произвольности ε противоречит предположениям.

Доказательство теоремы 1. Покажем, что $\liminf \alpha_n > 0$. Если это не так, то нашлись бы подпоследовательности $\{x_n\}$, $\{\lambda_n\}$ такие, что $x_n \in E_n$, $\|x_n\| = 1$, $\lambda_n \in \Lambda_0$, $\lambda_n \to \lambda_0 \in \Lambda_0$ и $\|T_n(\lambda_n) x_n\| \to 0$. Но тогда $\Psi_n T_n(\lambda_n) x_n \to 0$ и ввиду условия б′) последовательность $\{T(\lambda_0)\Phi_n x_n\}$, а, значит, и $\{\Phi_n x_n\}$, должны быть компактными. По условию а′) отсюда вытекает, что $T(\lambda_0)\Phi_n x_n \to 0$, $\Phi_n x_n \to 0$, и по (4) получаем $x_n \to 0$, что противоречит выбору x_n.

Из тождества

$$\Phi_n T^{-1}{}_n(\lambda_n) y_n - T^{-1}(\lambda_0) \Psi_n y_n =$$
$$= T^{-1}(\lambda_0) (T(\lambda_0)\Phi_n - \Psi_n T_n(\lambda_n)) T^{-1}{}_n(\lambda_n) y_n, \; y_n \in F_n \qquad (3')$$

следует выполнение условия б′). Если же последовательность y_n такова, что $\Psi_n y_n$ компактна в F, то $\{\Psi_n y_n\}$, а, значит, и $\{y_n\}$ ограничена. По уже доказанному б′) выполнено, а тогда $\{\Phi_n T_n^{-1}(\lambda_n) y_n\}$ тоже компактна. Значит, из выполнения а′) для $T_n(\lambda)$ и $T(\lambda)$ и тождества (3′) вытекает выполнение а′) для $T_n^{-1}(\lambda)$ и $T^{-1}(\lambda)$.

Отметим еще, что замечания 5 и 6 изменяются очевидным образом, а в замечании 7 надо лишь утверждение $z_n \to z_0$ заменить на $\Phi_n x_n \to z_0$.

2. В этом пункте рассмотрим случай, когда для банаховых пространств E, F, E_n, F_n существуют операторы $p_n \in L(E, E_n)$, $q_n \in L(F, F_n)$ (называемые также связывающими отображениями) и положительные постоянные c', c'', c_1, c_2 такие, что [6]

$$p_n E = E_n, \; \|p_n\| \leqslant c', \; \|x_n\| \geqslant c_1 \inf_{w \in F,\, q_n w = y_n} \|z\| \text{ для } \forall x_n \in E_n, \qquad (6)$$

$$q_n F = F_n, \; \|q_n\| \leqslant c'', \; \|y_n\| \geqslant c_2 \inf_{z \in E,\, p_n z = x_n} \|w\| \text{ для } \forall y_n \in F_n, \qquad (7)$$

$$\|p_n z\| \to \|z\|, \; \liminf \|q_n w\| > 0$$
$$\text{при } n \to \infty \text{ для } \forall z \in E, \; \forall w \in F, \; w \neq 0. \qquad (1'')$$

Отметим, что из (6) (или (7)) вытекает изоморфизм между E_n (соответственно F_n) и фактор-пространством [7] $E/p_n^{-1}(0)$ (соответственно $F/q_n^{-1}(0)$).

Будем говорить, что последовательность операторов $B_n \in L(E_n, F_n)$ *компактно аппроксимирует* оператор $B \in L(E, F)$ по отношению к связывающием отображениям p_n и q_n, и писать B_n *к. а.* B, если

а″) $\|q_n Bz - B_n p_n z\| \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $z \in E$,

б″) для любой последовательности $\{x_n\}$ $(x_n \in E_n, \|x_n\| = 1)$ существуют такие $z_n \in E$, $w_n \in F$, что $p_n z_n = x_n$, $q_n w_n = B_n x_n$ и последовательность $\{w_n - Bz_n\}$ компактна в F, причем компактной является и подпоследовательность w_{n_k}, если только $\|B_{n_k} x_{n_k}\| \to 0$.

Заметим, что равносильное определение получится, если в б″) требование $\|x_n\| = 1$ заменить на $1/c \leqslant \|x_n\| \leqslant c = \text{const}, c \neq 0$, и что из компактности последовательности $\{w_n\}$ в условии б″) следует $w_n \to 0$. Отметим также, что для компактности последовательности $\{w_{n_k}\}$ при $\|B_{n_k} x_{n_k}\| \to 0$ достаточно требовать, например, чтобы существовала $c = \text{const}$ такая, что $\|w_n\| \leqslant c \|B_n x_n\|$; вариант условия б″) с привлечением последнего неравенства использован в [4].

---

[6] См. также замечание 5″.

[7] Через $p_n^{-1}(0)$ обозначен полный прообраз элемента $0 \in E_n$.

Некоторое различие с определением в [5] обусловлено тем, что там приведено определение лишь для вполне непрерывных операторов. Если оператор B вполне непрерывен, то, ввиду (6), для выполнения условия б$''$) достаточно требовать, чтобы для любой последовательности $\{x_n\}$ ($x_n \in E_n$, $\|x_n\| = 1$) существуют $w_n \in F$ такие, что $q_n w_n = B_n x_n$ и последовательность w_n компактна в F.

Для сильно непрерывных оператор-функций $T(\lambda)$, $T_n(\lambda)$, заданных на некотором метрическом пространстве Λ и таких, что $T(\lambda) \in L(E, F)$, $T_n(\lambda) \in L(E_n, F_n)$ при любом $\lambda \in \Lambda$, опять формально перенесем определение 1 из § 1. Тогда и в этом случае формально дословно переносятся все утверждения пунктов 1, 2 и 3 из § 1, кроме замечания 5. Более того, и в этом случае сохраняются основные идеи соответствующих доказательств. Для того, чтобы продемонстрировать роль операторов p_n, q_n и появляющие различия со случаем п. 1 из § 2, приведём ниже доказательства предложения 1 и теоремы 1 и в этом случае (опять используя введенные в § 1 обозначения α и α_n). Что касается п. 4 из § 1, то здесь требуются дополнительные рассуждения (трудности возникают с условием б$_1$) утверждения 1°).

Доказательство предложения 1. Если $\alpha = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $z \in E$ с $\|z\| = 1$ такой, что $\|T(\lambda_0) z\| \leqslant \varepsilon$. Так как $T_n(\lambda_0)$ *к. а.* $T(\lambda_0)$, то

$$\|T_n(\lambda_0) p_n z - q_n T(\lambda_0) z\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и поэтому получим, что $\|T_n(\lambda_0) p_n z\| \leqslant 2\varepsilon$, $\|p_n z\| \geqslant 1/2$ для всех достаточно больших n. А ввиду произвольности ε это противоречит условиям предложения 1.

Доказательство теоремы 1. Покажем что $\liminf \alpha_n > 0$. В противном случае нашлись бы подпоследовательности $\{x_n\}$ и $\{\lambda_n\}$, такие что $x_n \in E_n$, $\|x_n\| = 1$, $\lambda_n \in \Lambda_0$, $\lambda_n \to \lambda_0 \in \Lambda_0$ и $\|T_n(\lambda_n) x_n\| \to 0$. Возьмем для последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяющие условию б$''$) последовательности $z_n \in E$ и $w_n \in F$. Ввиду б$''$) последовательность $z_n = T^{-1}(\lambda_0)\,(T(\lambda_0) z_n)$ тоже будет компактной и из условия а$''$) следует, что

$$\|q_n T(\lambda_0) z_n - T_n(\lambda_n) p_n z_n\| \to 0.$$

Но тогда и $\|q_n T(\lambda_0) z_n\| \to 0$, а вместе с тем $\|q_n T(\lambda_0) z_0\| \to 0$ и для любой предельной точки z$_0$ последовательности z_n. По (1$''$) это означает, что $T(\lambda_0) z_0 = 0$. Так как $\|x_n\| = 1$, то $\|z_0\| > 0$, что противоречит предположению $\lambda_0 \notin \sigma(T)$.

Из тождества

$$\begin{gathered} T^{-1}{}_n(\lambda_n) q_n w - p_n T^{-1}(\lambda_0) w = \\ = T^{-1}{}_n(\lambda_n)\,(q_n T(\lambda_0) - T_n(\lambda_n) p_n)\, T^{-1}(\lambda_0) w, \; w \in F \end{gathered} \tag{3$''$}$$

сразу следует выполнение условия а$''$), если учесть, что по только что доказанному $\|T_n^{-1}(\lambda)\| \leqslant c = \text{const}$ для $\lambda \in \Lambda_0$. Пусть теперь даны последовательности $\{y_n\}$ $(y_n \in F_n,\ \|y_n\| = 1)$ и $\{\lambda_n\}$ $(\lambda_n \to \lambda_0,\ \lambda_n,\ \lambda_0 \in \Lambda_0)$. Так как $\|T_n(\lambda)\| \leqslant c$, то $\|T_n^{-1}(\lambda) y_n\| \geqslant$ $\geqslant 1/c$ и надо лишь доказать существование таких $w'_n \in F$ и $z'_n \in E$, что $q_n w'_n = y_n$, $p_n z'_n = T_n^{-1}(\lambda_n) y_n$ и $\{z'_n - T^{-1}(\lambda_0) w'_n\}$ компактна в E.

Заметим, что последовательность $x_n = T_n^{-1}(\lambda_n) y_n$ удовлетворяет условиям $x_n \in E_n$, $1/c \leqslant \|x_n\| \leqslant c = \mathrm{const}$, $c \neq 0$. Значит, для нее существуют такие $z_n \in E$ и $w_n \in F$, что выполнено б$''$). Возьмем $z'_n = z_n$ и $w'_n = w_n$. Тогда компактность последовательности $\{z'_n - T^{-1}(\lambda_0) w'_n\}$ вытекает из тождества

$$z'_n - T^{-1}(\lambda_0) w'_n = T^{-1}(\lambda_0) (T(\lambda_0) z_n - w_n)$$

и непрерывности оператора $T^{-1}(\lambda_0)$. Теорема 1 полностью доказана.

Приведем еще новую формулировку замечания 5.

Замечание 5$''$. Если $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, то условие (1$''$) можно заменить более слабым условием:

$$\liminf \|p_n z\| > 0,\ \liminf \|q_n w\| > 0 \text{ для } \forall z \in E,\ z \neq 0,\ \forall w \in F,\ w \neq 0.$$

Автор искренно благодарен своему научному руководителю Г. Вайникко за терпеливость и ряд ценных замечаний.

Литература

1. Вайникко Г. М., Компактная аппроксимация линейных вполне непрерывных операторов операторами в факторпространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 190—204.
2. Вайникко Г. М., Принцип компактной аппроксимации в теории приближенных методов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, **9**, № 4, 739—761.
3. Вайникко Г. М., О разностном методе для обыкновенных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, **9**, № 5, 1057—1074.
4. Вайникко Г. М., Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение операторных уравнений. Докл. АН СССР, 1969, **189**, № 2, 237—240.
5. Вайникко Г. М., Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. Тарту, 1970.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 2, 43—118.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
8. Трофимов В. П., Сходимость метода Бубнова — Галеркина для операторов, аналитически зависящих от параметра. Сб. работ студентов и аспирантов Воронежск. ун-та, 1965, 96—102.

Поступило
10 IV 1970

OPERAATORFUNKTSIOONIDE KOMPAKTSEST APROKSIMATSIOONIST

O. Karma

Resümee

Artiklis üldistatakse mõningad töödes [1, 2, 5] toodud tulemused lineaarse operaatori omaväärtuste lähendamisest mingite aproksimeerivate operaatorite omaväärtustega operaator-funktsioonide juhule üldisematel eeldustel kui töös [8]. Rakendatakse G. Vainikko poolt [1, 2] sissetoodud kompaktse aproksimatsiooni mõistet; põhilised tulemused on formuleeritud teoreemidena.

ABOUT COMPACT APPROXIMATION OF OPERATORS DEPENDING ON A PARAMETER

O. Karma

Summary

Some results of [1, 2, 5], concerning the convergence of eigenvalues of some approximating operators to the eigenvalues of the given linear operator are generalized for the case of operator-functions (in more general than in [8] case). The concept of compact approximation introduced by G. Vainikko in [1, 2] is used; the main results are formulated as theorems.

ОБ ОЦЕНКЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ В СЛУЧАЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

И. Саарнийт

Кафедра вычислительной математики

В настоящей статье приводится одна возможность установления сходимости и оценки сходимости метода конечных разностей для дифференциальных уравнений второго порядка с отклоняющимся аргументом. При этом используется связь между методами конечных разностей и механических квадратур, а также понятие компактной аппроксимации операторов [1, 2]. Для задачи Коши в случае уравнений первого порядка вопросы о сходимости конечноразностных методов рассматриваются в [4—6].

1. Введем некоторые вспомогательные понятия. Рассмотрим некоторую функцию $x = x(t)$, принадлежащую к пространству $Q[0, 1]$, т. е. пространству функций, непрерывных всюду на $[0, 1]$ за исключением конечного числа точек, в которых x имеет разрывы первого рода. Пусть функция x имеет k точек разрыва $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k \leqslant 1$. Обозначим через $Q[0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, 1] = Q_x[0, 1]$ множество всех функций $u \in Q[0, 1]$, непрерывных на промежутках $[0, \tau_1)$, (τ_1, τ_2), $\ldots$, $(\tau_k, 1]$. Для $Q_x[0, 1]$ можно указать много сходных с пространством $C[0, 1]$ свойств. Если определить в $Q_x[0, 1]$ обычным образом операцию сложения функций и ввести норму посредством равенства

$$\|u\|_{Q_x[0,1]} = \sup_{t \in [0,1]} |u(t)|,$$

то $Q_x[0, 1]$ превращается в банахово пространство. На пространство $Q_x[0, 1]$ переносится и критерий компактности, аналогичный теореме Арцела.

Теорема 1. *Для того чтобы множество $B \subset Q_x[0, 1]$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы функции $u \in B$ были равномерно ограничены на $[0, 1]$ и равностепенно непрерывны на каждом из промежутков (τ_j, τ_{j+1}), где $j = 0, 1, \ldots, k$; $\tau_0 = 0$, $\tau_{k+1} = 1$.*

В дальнейшем особый интерес для нас в пространстве $Q_x[0, 1]$ будут представлять операторы вида

$$Tu = \int_0^1 K(t, s) u(s) ds. \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть функция $K(t, s)$ ограничена на квадрате $0 \leqslant t,\ s \leqslant 1$, а точки ее разрыва лежат на конечном числе кривых*

$$s = \varphi_i(t) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ l),$$

где $\varphi_i(t)$ — непрерывные функции, и на прямых

$$t = \tau_j \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Пусть в промежутках $[0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{l} \varphi_i(\tau_j)$

$$\lim_{t \to \tau_j +} K(t, s) = k_j^+(s), \qquad \lim_{t \to \tau_j -} K(t, s) = k_j^-(s),$$

и функции $k_j^+(s)$, $k_j^-(s)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ непрерывны в этих промежутках. Тогда формула (1) *определяет в пространстве $Q_x[0, 1] = Q[0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, 1]$ вполне непрерывный оператор.*

Данная теорема вытекает из аналогичного утверждения об операторах вида (1) в пространстве $C[0, 1]$ (см., например, [7], стр. 237) и теоремы 1.

Пусть на отрезке $[0, 1]$ определена еще вторая кусочно-непрерывная функция $y(t)$. Определим пространство $Q_{x,y}[0, 1] = Q_x[0, 1] \wedge Q_y[0, 1]$ как пространство всех функций, непрерывных на промежутках между точками разрыва функций x и y и имеющих в этих точках конечные пределы справа и слева.

2. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} u''(t) + p(t) u'(t) + p_1(t) u'(t - \tau_1(t)) + q(t) u(t) + \\ + q_2(t) u(t - \tau_2(t)) = f(t), \end{gathered} \tag{2}$$

$$u(t) = \alpha(t) \quad \text{при} \quad t \in E_0, \ u(t) = \beta(t) \quad \text{при} \quad t \in E_1, \tag{3}$$

где E_0 и E_1 — начальные множества:

$$E_0 = \{t : t = s - \tau_i(s) \leqslant 0,\ 0 \leqslant s \leqslant 1,\ i = 1 \text{ или } i = 2\},$$
$$E_1 = \{t : t = s - \tau_i(s) \geqslant 1,\ 0 \leqslant s \leqslant 1,\ i = 1 \text{ или } i = 2\}.$$

Предполагается, что функции $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ непрерывны на отрезке $[0, 1]$, функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ непрерывны соответственно на E_0 и E_1 и имеют там непрерывные производные первого порядка, $p(t)$, $q(t)$, $q_2(t)$, $f(t) \in Q[0, 1]$; $p_1(t) \in C[0, 1]$. Предположим, что уравнения $t - \tau_1(t) = 0$ и $t - \tau_1(t) = 1$ имеют на отрезке $[0, 1]$ не более чем конечное число решений ϑ_j, причем

$$0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant \vartheta_2 \leqslant \ldots \leqslant \vartheta_m \leqslant 1.$$

Рассмотрим следующую конечноразностную задачу, соответствующую краевой задаче (2, 3):

$$\Delta^2 u_i + p_i \Delta u_i + p_{1i} \Delta u_{i - \varkappa_{1i}} + q_i u_i + q_{2i} u_{i - \varkappa_{2i}} = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n - 1), \tag{4}$$

$$u_i = \alpha_i \quad \text{при} \quad i \in E'_0, \qquad u_i = \beta_i \quad \text{при} \quad i \in E'_1, \tag{5}$$

где

$$h=\frac{1}{n},\ t_i=ih=\frac{i}{n}\qquad (i=\ldots,-1,0,1,\ldots);$$

p_i, p_{1i}, q_i, q_{2i}, f_i — значения функций $p(t)$, $p_1(t)$, $q(t)$, $q_2(t)$, $f(t)$ в точке t_i, если точка t_i не является точкой разрыва для какой-нибудь функции из них, и средние значения пределов справа и слева в противном случае;

α_i и β_i — значения функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ в точке t_i;

u_i — приближенное значение решения $u(t)$ задачи (2, 3) в точке t_i;

$$\varkappa_{ki}=\begin{cases}[\tau_{kih}] & \text{при}^1\ \{\tau_{kih}\}<1/2,\\ [\tau_{kih}]+1 & \text{при}\ \{\tau_{kih}\}\geqslant 1/2;\end{cases}\quad \text{где}\ \tau_{kih}=\frac{\tau_k(t_i)}{h},$$

$$E'_0=\{i:t_i\in E_0\},\qquad E'_i=\{i:t_i\in E_1\};$$

$$\Delta^2 u_k=\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2}.$$

В определении оператора Δ различаем 7 случаев в зависимости от расположения точки u_k и значений функции $t-\tau_1(t)$.

Случай А: $\Delta u_k=(2h)^{-1}(u_{k+1}-u_{k-1})$ при $k=1,2,\ldots,n-1$.

Случай Б: $\Delta u_k=h^{-1}(u_1-u_0)$ при $k=i-\varkappa_{1i}=0$, если $t_i-\tau_1(t_i)>0$, или если $t_i-\tau_1(t_i)=0$ (тогда $t_i=\vartheta_j$ при каком-нибудь j) и $t-\tau_1(t)>0$ в промежутках $(\vartheta_{j-1},\vartheta_j)$ и $(\vartheta_j,\vartheta_{j+1})$.

Случай В: $\Delta u_k=h^{-1}(u_n-u_{n-1})$ при $k=i-\varkappa_{1i}=n$, если $t_i-\tau_1(t_i)<1$, или если $t_i-\tau_1(t_i)=1$ (тогда $t_i=\vartheta_j$) и $t-\tau_1(t)<1$ в промежутках $(\vartheta_{j-1},\vartheta_j)$, $(\vartheta_j,\vartheta_{j+1})$.

Случай Г: $\Delta u_k=[h^{-1}(u_1-u_0)+\alpha'(t_0)]/2$ при $k=i-\varkappa_{1i}=0$ и $t_i-\tau_1(t_i)=0$ (тогда $t_i=\vartheta_j$), если $t-\tau_1(t)$ меняет в точке $t_j=\vartheta_j$ знак.

Случай Д: $\Delta u_k=[h^{-1}(u_n-u_{n-1})+\beta'(t_n)]/2$ при $k=i-\varkappa_{1i}=n$ и $t_i-\tau_1(t_i)=1$ (тогда $t_i=\vartheta_j$), если $t-\tau_1(t)-1$ меняет в точке $t_i=\vartheta_j$ знак.

Случай Е: $\Delta u_k=\alpha'(t_k)=\alpha'_k$ при $k=i-\varkappa_{1i}<0$, а также при $k=i-\varkappa_{1i}=0$, если $t_i-\tau_1(t_i)<0$, или если $t_i-\tau_1(t_i)=0$ (тогда $t_i=\vartheta_j$) и $t-\tau_1(t)<0$ в промежутках $(\vartheta_{j-1},\vartheta_j)$ и $(\vartheta_j,\vartheta_{j+1})$.

Случай Ж: $\Delta u_k=\beta'(t_k)=\beta'_k$ при $k=i-\varkappa_{1i}>n$, а также при $k=i-\varkappa_{1i}=n$, если $t_i-\tau_1(t_i)>1$, или если $t_i-\tau_1(t_i)=1$ (тогда $t_i=\vartheta_j$) и $t-\tau_1(t)>1$ в промежутках $(\vartheta_{j-1},\vartheta_j)$ и $(\vartheta_j,\vartheta_{j+1})$.

Замечание. Вышеприведенная разностная схема естественно не является единственно возможной. Все нижеследующие утверждения останутся в силе, если определить, например, в случаях Г, Д, Е и Ж

$$u_k=\frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2h}.$$

---

[1] Здесь $[a]$ — целая часть числа a, $\{a\}=a-[a]$.

3. Описанную в [2] замену дифференциального уравнения равносильным ему интегральным нетрудно провести и в случае задачи (2,3). Для этого введем функцию $G(t,s)$:

$$G(t,s)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad t\leqslant 0,\\ \Gamma(t,s), & \text{если} \quad 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 0, & \text{если} \quad t\geqslant 1.\end{cases}$$

Здесь $\Gamma(t,s)$ является функцией Грина оператора u'' при краевых условиях $u(0)=u(1)=0$. Решение задачи

$$\begin{aligned} u''(t)&=x(t)\\ u(r)&=0 \qquad \text{при} \quad r\leqslant 0 \quad \text{или} \quad r\geqslant 1,\end{aligned}$$

где $x(t)\in Q[0,1]$, можно выразить в виде

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)x(s)\,ds,$$

причем

$$u'(t)=\int_0^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}x(s)\,ds.$$

Из последнего утверждения вытекает, что задача (2,3) равносильна интегральному уравнению

$$\begin{aligned} x(t)&+p(t)\left(\int_0^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}x(s)\,ds+g'(t)\right)+\\ &+p_1(t)\left(\int_0^1 \frac{\partial G(t-\tau_1(t),s)}{\partial t}x(s)\,ds+g'(t-\tau_1(t))\right)+\\ &+q(t)\left(\int_0^1 G(t,s)x(s)\,ds+g(t)\right)+\\ &+q_2(t)\left(\int_0^1 G(t-\tau_2(t),s)x(s)\,ds+g(t-\tau_2(t))\right)=f(t), \qquad (6)\end{aligned}$$

где

$$g(t)=\begin{cases}\alpha(t) & \text{при} \quad t\leqslant 0,\\ t(\beta(1)-\alpha(0))+\alpha(0) & \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant 1,\\ \beta(t) & \text{при} \quad t\geqslant 1.\end{cases}$$

Решение u задачи (2,3) и решение x уравнения (6) связаны между собой соотношениями

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)x(s)\,ds+g(t), \qquad x(t)=u''(t),$$

и из существования одного из них вытекает существование другого. Уравнение (6) можно переписать в виде

$$x(t)+\int_0^1 K(t,s)x(s)\,ds=h(t), \tag{6'}$$

причем

$$K(t,s)=p(t)\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}x(s)\,ds+p_1(t)\frac{\partial G(t-\tau_1(t),s)}{\partial t}+$$
$$+q(t)G(t,s)+q_2(t)G(t-\tau_2(t),s),$$
$$h(t)=f(t)-p(t)g'(t)-p_1(t)g'(t-\tau_1(t))-q(t)g(t)-$$
$$-q_2(t)g(t-\tau_2(t)).$$

Ядро $K(t,s)$ удовлетворяет в пространстве $Q_x[0,1]=$ $=Q_p[0,1]\wedge Q_q[0,1]\wedge Q_{q_2}[0,1]\wedge Q_f[0,1]\wedge Q[0,\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_m,1]$ условиям теоремы 2 и определяет таким образом в данном пространстве вполне непрерывный оператор T.

Рассмотрим конечноразностную задачу

$$\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}=\xi_i \quad (i=1,2,\ldots,n-1), \tag{7}$$

$$u_i=\alpha_i \quad \text{при} \quad i\leqslant 0, \quad u_i=\beta_i \quad \text{при} \quad i\geqslant n. \tag{8}$$

Лемма 1. *Система линейных уравнений* (7, 8) *имеет при любых* $\xi_i(i=1,\ldots,n-1)$, α_i $(i=0,-1,\ldots)$, β_i $(i=n, n+1,\ldots)$ *единственное решение* u_i $(i=\ldots,-1,0,1,\ldots)$, *и это решение задается формулой*

$$u_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}G(t_i,t_j)\xi_j+g_i, \tag{9}$$

где

$$g_i=\begin{cases}\alpha_i & \text{при} \quad i\leqslant 0,\\ t_i(\beta_n-\alpha_0)+\alpha_0 & \text{при} \quad 0\leqslant i\leqslant n,\\ \beta_i & \text{при} \quad i\geqslant n.\end{cases}$$

При этом

$$\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial G(t_i,t_j)}{\partial t}\xi_j+g'_i, \tag{10}$$

где

$$g'_i=\frac{g_{i+1}-g_{i-1}}{2h},$$

$$\left.\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s}=\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s-}+\left.\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|_{t=s+}\right],$$

$$\left.\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0+}\frac{\partial G(t,s)}{\partial t},$$

$$\left.\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|_{t=1}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 1-}\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}.$$

Доказательство леммы совпадает с доказательством леммы 2 статьи [2]. Дополнительно надо лишь таким же способом проверить верность равенства (10) при $i=0$ и $i=n$, на чем мы здесь останавливаться не будем.

В силу леммы 1 конечноразностная задача (4, 5) оказывается равносильной системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\xi_i + p_i\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial G(t_i,t_j)}{\partial t}\xi_j + g'_i\right) + \\
&+ p_{1i}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\mathfrak{G}(t_{i-\varkappa_{1i}}, t_j)\xi_j + \mathfrak{g}_{i-\varkappa_{1i}}\right) + \\
&+ q_i\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} G(t_i,t_j)\xi_j + g_i\right) + \\
&+ q_{2i}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} G(t_{i-\varkappa_{2i}}, t_j)\xi_j + g_{i-\varkappa_{2i}}\right) = f_i
\end{aligned} \tag{11}$$

$(i=1,2,\ldots,n-1)$, в которой (см. стр. 207)

$$\mathfrak{G}(t_k,s) = \begin{cases} \dfrac{\partial G(t_k,s)}{\partial t} & \text{в случаях А, Г и Д,} \\ 2\dfrac{\partial G(t_0,s)}{\partial t} & \text{в случае Б,} \\ 2\dfrac{\partial G(t_n,s)}{\partial t} & \text{в случае В,} \\ 0 & \text{в случаях Е и Ж;} \end{cases}$$

$$\mathfrak{g}_k = \begin{cases} \beta_n - \alpha_0 & \text{в случае А, Б и В,} \\ \dfrac{1}{2}[\beta_n - \alpha_0 + \alpha'_0] & \text{в случае Г,} \\ \dfrac{1}{2}[\beta_n - \alpha_0 + \beta'_n] & \text{в случае Д,} \\ \alpha'_k & \text{в случае Е,} \\ \beta'_k & \text{в случае Ж.} \end{cases}$$

Решения систем уравнений (4, 5) и (11) связаны соотношениями (7) и (9), причем из разрешимости одной системы из них вытекает разрешимость другой.

Обозначим через Q_{n-1} замкнутое подпространство пространства $Q_x[0,1]$, состоящее из функций, удовлетворяющих в точках t_i $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ условию:

если t_i не является точкой разрыва $x(t)$, то $y(t_i)=0$,

если t_i является точкой разрыва $x(t)$, то

$$(y(t_i+)+y(t_i-))/2 = 0.$$

Факторпространство Q_x/Q_{n-1} состоит из классов функций в пространстве $Q_x[0, 1]$, принимающих в узле t_i одинаковые значения (если t_i не является точкой разрыва $x(t)$) или имеющих в этом узле одинаковое среднее пределов справа и слева (в противном случае). Пространство Q_x/Q_{n-1} отождествимо с $(n-1)$-мерным векторным пространством. Каноническое отображение $\pi_{n-1}: Q_x \to Q_x/Q_{n-1}$ ставит функции $z(t) \in Q_x[0, 1]$ в соответствие вектор

$$\pi_{n-1}z(t) = (z_1, \ldots, z_{n-1}),$$

где $z_i = z(t_i)$, если t_i не является точкой разрыва $x(t)$, и $z_i = [z(t_i+) + z(t_i-)]/2$, если t_i является такой точкой. Оператор π_{n-1} удовлетворяет условию

$$\|\pi_{n-1}z\| \to \|z\|$$

при $n \to \infty$ для всех $z \in Q_x[0, 1]$.

Перепишем систему уравнений (11) в следующем виде:

$$\xi_i + \sum_{j=1}^{n-1} k_{ij}\xi_j = h_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{11'}$$

где

$$k_{ij} = \frac{1}{n}\left(p_i \frac{\partial G(t_i, t_j)}{\partial t} + p_{1i}\mathfrak{G}(t_{i-\varkappa_{1i}}, t_j) + q_i G(t_i, t_j) + \right.$$
$$\left. + q_{2i}G(t_{i-\varkappa_{2i}}, t_j)\right),$$
$$h_i = f_i - p_i g'_i + p_{1i}g_{i-\varkappa_{1i}} - q_i g_i - q_{2i}g_{i-\varkappa_{2i}}.$$

Данную систему можно рассматривать как некоторое операторное уравнение в факторпространстве Q_x/Q_{n-1}. Определяемый матрицей (k_{ij}) оператор T_{n-1} является вполне непрерывным в этом пространстве.

4. Операторы T и T_{n-1}, определенные соответственно уравнениями (6′) и (11′), связывает следующая

Лемма 2. *Пусть функции $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ удовлетворяют на $[0, 1]$ условию Липшица:*

$$|\tau_i(t) - \tau_i(t')| < \lambda |t - t'| \qquad (i = 1, 2). \tag{12}$$

Тогда последовательность операторов T_{n-1} компактно аппроксимирует оператор T.

Доказательство. Требуется проверить (ср. [1]), что:

а) $\|\pi_{n-1}Tx - T_{n-1}\pi_{n-1}x\| \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $x \in Q_x[0, 1]$ и

б) для любых $\xi_{n-1} \in Q_x/Q_{n-1}$, $\|\xi_{n-1}\| \leqslant c = \text{const}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ существуют $y_{n-1}(t) \in T_{n-1}\xi_{n-1}$ такие, что последовательность $\{y_{n-1}(t)\} \subset Q_x[0, 1]$ компактна.

Здесь $\pi_{n-1}Tx$ и $T_{n-1}\pi_{n-1}x$ является $(n-1)$-мерными векторами:

$$\pi_{n-1}T_x = ((Tx)_1, \ldots, (Tx)_{n-1}),$$
$$T_{n-1}\pi_{n-1}x = ((T_{n-1}\pi_{n-1}x)_1, \ldots, (T_{n-1}\pi_{n-1}x)_{n-1}),$$

где

$$(Tx)_i = p_i \int_0^1 \frac{\partial G(t_i, s)}{\partial t} x(s)\,ds + p_{1i} \int_0^1 \frac{\partial G(t-\tau_1(t), s)_i}{\partial t} x(s)\,ds +$$

$$+ q_i \int_0^1 G(t_i, s) x(s)\,ds + q_{2i} \int_0^1 G(t_i - \tau_2(t_i), s) x(s)\,ds,$$

$$\frac{\partial G(t-\tau_1(t), s)_i}{\partial t} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\partial G(t_i - \tau_1(t_i), s)}{\partial t}, & \text{если } t_i \neq \vartheta_j, \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial G((t_i+) - \tau_1(t_i+))}{\partial t} + \dfrac{\partial G((t_i-) - \tau_1(t_i-))}{\partial t}\right], & \text{если } t_i = \vartheta_j, \end{cases}$$

$$(T_{n-1}\pi_{n-1}x)_i = p_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial G(t_i, t_j)}{\partial t} x_j + p_{1i} \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \mathfrak{G}(t_{i-\varkappa_{1i}}, t_j) x_j +$$

$$+ q_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} G(t_i, t_j) x_j + q_{2i} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} G(t_{i-\varkappa_{2i}}, t_j) x_j.$$

Выпишем неравенство

$$|(Tx)_i - (T_{n-1}\pi_{n-1}x)_i| \leqslant$$

$$\leqslant |p_i| \left| \int_0^1 \frac{\partial G(t_i, s)}{\partial t} x(s)\,ds - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial G(t_i, t_j)}{\partial t} x_j \right| +$$

$$+ |p_{1i}| \left| \int_0^1 \frac{\partial G(t-\tau_1(t), s)_i}{\partial t} x(s)\,ds - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \mathfrak{G}(t_{i-\varkappa_{1i}}, t_j) x_j \right| +$$

$$+ |q_i| \left| \int_0^1 G(t_i, s) x(s)\,ds - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} G(t_i, t_j) x_j \right| +$$

$$+ |q_{2i}| \left| \int_0^1 G(t_i - \tau_2(t_i), s) x(s)\,ds - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} G(t_{i-\varkappa_{2i}}, t_j) x_j \right|. \qquad (13)$$

Квадратурные формулы на правой стороне неравенства (13) сходятся к соответствующим интегралам, т. е. при $n \to \infty$

$$|(Tx)_i - (T_{n-1}\pi_{n-1}x)_i| \to 0.$$

Более того, из положительности коэффициентов квадратурной формулы и из (R)-интегрируемости ядер по s равномерно по t (см. [2, 3]) вытекает, что при $n \to \infty$

$$\max_i |(Tx)_i - (T_{n-1}\pi_{n-1}x)_i| \to 0,$$

т. е. выполнено условие а).

Построим для каждого $\xi_{n-1}=(\xi_{n-1,1}, \ldots, \xi_{n-1,n-1})$ с $\|\xi_{n-1}\| \leqslant c=\text{const}$ функцию

$$y_{n-1}(t)=p(t)\,G'_{n-1}(t)+p_1(t)\,\mathfrak{G}'_{n-1}(t)+q(t)\,G_{n-1}(t)+ \\ +q_2(t)\,\mathfrak{G}_{n-1}(t),$$

где $G_{n-1}(t)$, $\mathfrak{G}_{n-1}(t)$ и $G'_{n-1}(t)$ представляют собой непрерывные на $[0,1]$ ломаные, принимающие в своих вершинах значения

$$G_{n-1}(t_i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} G(t_i, t_j)\,\xi_{n-1,j} \qquad (i=0, 1, \ldots, n),$$

$$\mathfrak{G}_{n-1}(t_i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} G(t_{i-\varkappa_{2i}}, t_j)\,\xi_{n-1,j} \qquad (i=0, 1, \ldots, n),$$

$$G'_{n-1}(t_i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial G(t_i, t_j)}{\partial t}\,\xi_{n-1,j} \qquad (i=1, \ldots, n-1),$$

$$G'_{n-1}(t_0)=G'_{n-1}(t_1), \qquad G'_{n-1}(t_n)=G'_{n-1}(t_{n-1}).$$

Функция $\mathfrak{G}'_{n-1}(t)$ является разрывной ломаной, которая принимает в точках $t_i \neq \vartheta_j$ значения

$$\mathfrak{G}'_{n-1}(t_i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} \mathfrak{G}(t_{i-\varkappa_{1i}}, t_j)\,\xi_{n-1,j},$$

$$\mathfrak{G}'_{n-1}(t_0)=\mathfrak{G}'_{n-1}(t_1), \qquad \mathfrak{G}'_{n-1}(t_n)=\mathfrak{G}'_{n-1}(t_{n-1}).$$

В точках разрыва ϑ_j определим значения $\mathfrak{G}'_{n-1}(t)$ следующим образом:

$$\mathfrak{G}'_{n-1}(\vartheta_j+)= \\ =\begin{cases} \mathfrak{G}'_{n-1}(t_i), & \text{если} \quad t_{i-1}<\vartheta_j<t_i<\vartheta_{j+1}, \\ 2\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n-1} \mathfrak{G}'(t_{i-\varkappa_{1i}}, t_j)\,\xi_{n-1,j}-\mathfrak{G}'_{n-1}(\vartheta_j-), & \text{если} \quad t_i=\vartheta_j, \\ \mathfrak{G}'_{n-1}(\vartheta_j-), & \text{если} \quad t_{i-1}<\vartheta_j<\vartheta_{j+1}\leqslant t_i, \end{cases}$$

$$\mathfrak{G}'_{n-1}(\vartheta_j-)=\begin{cases} \mathfrak{G}'_{n-1}(t_i), & \text{если} \quad \vartheta_{j-1}<t_i<\vartheta_j\leqslant t_{i+1}, \\ \mathfrak{G}'_{n-1}(\vartheta_{j-1}+), & \text{если} \quad t_i\leqslant\vartheta_{j-1}<\vartheta_j\leqslant t_{i+1}. \end{cases}$$

Функции $y_{n-1}(t)$ принадлежат пространству $Q_x[0,1]$; при их построении мы руководствовались требованием, чтобы $\pi_{n-1}y_{n-1}= =T_{n-1}\xi_{n-1}$ $(n=2, 3, \ldots)$.

Равномерная ограниченность на $[0,1]$ функций $y_{n-1}(t)$ $(n=2, 3, \ldots)$ следует из ограниченности последовательности $\{\xi_{n-1}\}$ и функций $G(t,s)$, $\dfrac{\partial G(t,s)}{\partial t}$, $p(t)$, $p_1(t)$, $q(t)$, $q_2(t)$.

Используя свойства расширенной функции Грина $G(t,s)$ и учитывая условие (12), устанавливаем, что функции $G_{n-1}(t)$, $G'_{n-1}(t)$, $\mathfrak{G}_{n-1}(t)$ и $\mathfrak{G}'_{n-1}(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
&|G_{n-1}(t)-G_{n-1}(t')| \leqslant c\,|t-t'| && \text{при} \quad 0 \leqslant t, t' \leqslant 1;\\
&|G'_{n-1}(t)-G'_{n-1}(t')| \leqslant c\,|t-t'| && \text{при} \quad 0 \leqslant t, t' \leqslant 1;\\
&|\mathfrak{G}_{n-1}(t)-\mathfrak{G}_{n-1}(t')| \leqslant c_1(\lambda)\,|t-t'| && \text{при} \quad 0 \leqslant t, t' \leqslant 1;\\
&|\mathfrak{G}'_{n-1}(t)-\mathfrak{G}'_{n-1}(t)| \leqslant c_2(\lambda)\,|t-t'| && \text{при} \quad \vartheta_j < t, t' < \vartheta_{j+1}
\end{aligned}
$$
$$(j=0,\ 1,\ \ldots,\ m).$$

Из этих неравенств следует равностепенная непрерывность функций $y_{n-1}(t)$ на промежутках $(\tau_j,\ \tau_{j+1})$, а вместе с тем и компактность последовательности $\{y_{n-1}(t)\}$ в пространстве $Q_x[0, 1]$. Лемма 2 доказана.

5. В [1, 3] устанавливается связь между разрешимостью уравнений

$$x = Tx + f \tag{14}$$

и

$$x_n = T_n x_n + f_n, \tag{15}$$

где T и T_n — линейные вполне непрерывные операторы соответственно в некотором банаховом пространстве E и его факторпространстве E/E_n. А именно, справедлива

Теорема 3. *Пусть последовательность линейных вполне непрерывных операторов $T_n: E/E_n \to E/E_n$ компактно аппроксимирует линейный вполне непрерывный оператор $T: E \to E$ и пусть уравнение* (14) *имеет единственное решение x^*. Пусть*

$$\|\pi_n f - f_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{16}$$

Тогда уравнение (15) *при достаточно больших n имеет единственное решение $x^*_n \in E/E_n$ и $\|x^*_n - \pi_n x^*\| \to 0$ при $n \to \infty$. Справедлива оценка* ($c_1,\ c_2 = \mathrm{const} > 0$)

$$
\begin{aligned}
c_1\,\big|\,\|\pi_n f - f_n\| - \|\pi_n T x^* - T_n \pi_n x^*\|\,\big| \leqslant \|x^*_n - \pi_n x^*\| \leqslant \\
\leqslant c_2(\|\pi_n f - f_n\| + \|\pi_n T x^* - T_n \pi_n x^*\|).
\end{aligned} \tag{17}
$$

Теорема 4. *Пусть уравнение* (6) *имеет единственное решение $x^*(t)$ и пусть функции $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ удовлетворяют условию* (12). *Тогда система* (11) *при достаточно больших n имеет единственное решение $\xi^*_{n-1} = (\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n-1})$* и при $n \to \infty$.

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |x^*(t_i) - \xi_i| \to 0.$$

Если, кроме того, функции $p(t)$, $p_1(t)$, $q(t)$, $q_2(t)$, $f(t)$ на промежутках $(\tau_j,\ \tau_{j+1})$, функция $\alpha'(t)$ на E_0 и функция $\beta'(t)$ на E_1 удовлетворяют условию Липшица, то справедлива оценка

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |x^*(t_i) - \xi_i| < c \cdot h. \tag{18}$$

Доказательство. Компактная аппроксимация определяемого уравнением (6′) оператора T операторами T_{n-1}, которые определяются уравнением (11′), вытекает из леммы 2. Далее оценим разность i-й компоненты вектора $\pi_{n-1}h(t)$ и величины h_i:

$$\big|(h(t))_i - h_i\big| \leqslant |p_{1i}| \cdot |g'(t - \tau_1(t))_i - \mathfrak{g}_{i-\varkappa_{1i}}| +$$

$$+|q_{2i}|\cdot|g(t_i-\tau_2(t_i))-g(t_{i-\varkappa_{2i}})|,$$

откуда, учитывая требования, наложенные на $\alpha'(t)$ и $\beta'(t)$, следует, что

$$|(h(t))_i-h_i|<c\cdot h \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{19}$$

Из неравенства (19) следует выполненность условия (16).

Условия, наложенные на функции $p(t)$, $p_1(t)$, $q(t)$, $q_2(t)$, $f(t)$, $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$, $\alpha'(t)$ и $\beta'(t)$, гарантируют выполнение условия Липшица на промежутках $(\tau_j,\ \tau_{j+1})$ для решения $x^*(t)$. В таком случае из неравенства (13) вытекает, что

$$\|\pi_{n-1}Tx^*-T_{n-1}\pi_{n-1}x^*\|<c\cdot h. \tag{20}$$

Справедливость утверждений теоремы вытекает теперь из теоремы 3.

Исходя из теоремы 4, получаем оценку сходимости конечноразностного метода (4, 5).

Теорема 5. *Пусть краевая задача* (2, 3) *имеет единственное решение* $u^*(t)$ *и пусть функции* $\tau_1(t)$ *и* $\tau_2(t)$ *удовлетворяют условию* (12). *Тогда конечноразностная задача* (4, 5) *при достаточно больших* n *имеет единственное решение* $u^*_{n-1}=(u_1,\ \ldots,\ u_{n-1})$ и при $n\to\infty$

$$\max_i|u^*(t_i)-u_i|\to 0.$$

Если функции $p(t)$, $p_1(t)$, $q(t)$, $q_2(t)$, $f(t)$ *на* $(\tau_j,\ \tau_{j+1})$ $(j=0,1,\ldots,k)$, $\alpha'(t)$ *на* E_0 *и* $\beta'(t)$ *на* E_1 *удовлетворяют условию Липшица, то справедлива оценка*

$$\max_i|u^*(t_i)-u_i|<c\cdot h. \tag{21}$$

Доказательство. Существование единственного u^*_{n-1} вытекает из равносильности задачи (2, 3) и уравнения (6), а также систем (4, 5) и (11) и из теоремы 4. Для выяснения сходимости u^*_{n-1} к $u^*(t)$ выпишем неравенство

$$|u^*(t_i)-u_i|=\Big|\int_0^1 G(t_i,s)x^*(s)\,ds-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}G(t_i,t_j)\xi_j\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{n-1}\int_{s_j}^{s_{j+1}}|G(t_i,s)-G(t_i,s_j)|\,|x^*(s)|\,ds+$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}\int_{s_j}^{s_{j+1}}|G(t_i,s_j)|\,|x^*(s)-x^*(s_j)|\,ds+$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1}\int_{s_j}^{s_{j+1}}|G(t_i,s_j)|\,|x^*(s_j)-\xi_j|\,ds,$$

откуда, учтя свойства $G(t,s)$ и $x^*(t)$, а также оценку (18), получаем (21). Теорема 5 доказана.

Литература

1. Вайникко Г. М., Компактная аппроксимация линейных вполне непрерывных операторов операторами в факторпространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 190—204.
2. Вайникко Г. М., О связи между методами механических квадратур и конечных разностей. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, **9**, № 2, 259—270.
3. Вайникко Г. М., Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. Тарту, 1970.
4. Зверкина Т. С., Модификация конечноразностных методов для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с негладкими решениями. В сб. «Числен. методы решения дифференц. и интегральн. уравнений и квадратурн. формулы». Москва, 1964, 149—160.
5. Зверкина Т. С., Модифицированная формула Адамса для интегрирования уравнений с отклоняющимся аргументом. Тр. Семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющ. аргументом. Ун-т дружбы народов им. Патриса Лумумбы, 1965, **3**, 221—232.
6. Зверкина Т. С., Конечноразностные методы интегрирования дифференциальных уравнений с запаздыванием. Тр. Семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющ. аргументом. Ун-т дружбы народов им. Патриса Лумумбы, 1967, **5**, 85—89.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа. Москва, 1968.

Поступило
15 IV 1970

DIFERENTSMEETODI KOONDUVUSE HINDAMISEST HÄLBIVA ARGUMENDIGA DIFERENTSIAALVÕRRANDITE KORRAL

I. Saarniit

Resümee

Käesolevas artiklis kasutatakse seost diferents- ja kvadratuuride meetodi vahel ning operaatorite kompaktse aproksimatsiooni mõistet [1—3] diferentsmeetodi koonduvuse kindlakstegemiseks ja koonduvuskiiruse hindamiseks hälbiva argumendiga teist järku diferentsiaalvõrrandi korral.

ÜBER DIE SCHÄTZUNG DER KONVERGENZ EINES DIFFERENZENVERFAHRENS IM FALL DER DIFFERENZIALGLEICHUNGEN MIT ABWEICHENDEM ARGUMENT

I. Saarniit

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Aufsatz wird ein Zusammenhang der Differenzenverfahren mit den Quadraturverfahren und der Begriff der kompakten Approximation der Operatoren [1—3] für die Feststellung der Konvergenz und für die Schätzung der Konvergenzgeschwindigkeit eines Differenzenverfahrens im Fall einer Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit abweichendem Argument benutzt.

О ПРИМЕНЕНИИ МОНОТОННОСТИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

М. Фишер и Э. Тамме

Кафедра вычислительной математики

§ 1. Метод Ричардсона

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$P(v) = 0,$$

где оператор P действует в гильбертовом пространстве H. Оператор P называется сильно монотонным (см. [2]), если при некотором $\gamma > 0$ выполнено неравенство

$$(P(v) - P(w), v - w) \geqslant \gamma \|v - w\|^2. \tag{1}$$

При исследовании разностных схем, например, в работах [1,4] пользуются фактом, что для решения уравнения с сильно монотонным оператором применим итерационный метод Ричардсона

$$v^{m+1} = v^m - \lambda P(v^m), \ \lambda > 0, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

В упомянутых работах требуется, чтобы условие монотонности (1) было выполнено во всем пространстве, что является довольно сильным ограничением. Следующая лемма показывает, что метод Ричардсона сходится и тогда, когда условие монотонности выполнено только в некоторой окрестности искомого решения.

Лемма 1. *Пусть имеются такие постоянные* $\beta \geqslant 0$, $\gamma > \varepsilon > 0$ *и элемент* $w^0 \in H$, *что в шаре*

$$S = \left\{ v : \|v - w^0\| \leqslant \frac{\|P(w_0)\|}{\gamma - \varepsilon} \right\}$$

выполнены условия (1) *и*

$$\|P(v) - P(w)\| \leqslant \beta \|v - w\|.$$

Тогда уравнение $P(v) = 0$ *имеет в шаре* S *единственное решение* v^* *и метод Ричардсона* (2) *при*

$$0 < \lambda \leqslant \frac{2\varepsilon}{\beta^2 - (\gamma - \varepsilon)^2} \tag{3}$$

сходится к этому решению при произвольном $v^0 \in S$ со скоростью

$$\|v^m - v^*\| \leqslant \frac{\varkappa^m}{1-\varkappa} \lambda \|P(v^0)\|,$$

где

$$\varkappa = (1 - 2\lambda\gamma + \lambda^2\beta^2)^{1/2} < 1. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим

$$A(v) = v - \lambda P(v).$$

Для любых $v, w \in S$ имеем

$$\begin{aligned} \|A(v) - A(w)\|^2 &= \|v - w - \lambda[P(v) - P(w)]\|^2 = \|v - w\|^2 - \\ &- 2\lambda(P(v) - P(w), v - w) + \lambda^2 \|P(v) - P(w)\|^2 \leqslant \\ &\leqslant (1 - 2\lambda\gamma + \lambda^2\beta^2)\|v - w\|^2 = \varkappa^2\|v - w\|^2, \end{aligned}$$

где $\varkappa$ определена формулой (4). Таким образом, оператор A удовлетворяет в шаре S условию Липшица

$$\|A(v) - A(w)\| \leqslant \varkappa \|v - w\|,$$

где $0 \leqslant \varkappa < 1$, если $0 < \lambda < 2\gamma/\beta^2$. При $0 < \varepsilon < \gamma$ имеем

$$\frac{2\varepsilon}{\beta^2 - (\gamma - \varepsilon)^2} < \frac{2\gamma}{\beta^2}.$$

Поэтому все утверждения леммы следуют из принципа сжатых отображений (см., например, [3]), если еще покажем, что оператор A преобразует шар S в себя. Пусть $v \in S$. Тогда $A(v) \in S$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|A(v) - w^0\| &\leqslant \|A(v) - A(w^0)\| + \|A(w^0) - w^0\| \leqslant \\ &\leqslant \varkappa \|v - w^0\| + \lambda \|P(w^0)\| \leqslant \\ &\leqslant \left(\frac{\varkappa}{\gamma - \varepsilon} + \lambda\right) \|P(w^0)\| \leqslant \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \|P(w^0)\|, \end{aligned}$$

если λ удовлетворяет условию (3).

При оценке погрешности метода конечных разностей применима следующая

Лемма 2. *Если выполнены условия леммы 1 и уравнение $P(w) = g$ имеет в шаре S решение w^*, тогда имеет место оценка*

$$\|w^* - v^*\| \leqslant \frac{1}{\gamma} \|g\|,$$

где v^* решение уравнения $P(v) = 0$.

Доказательство. Из $P(w^*) = g$ и $P(v^*) = 0$ получаем, что

$$(P(w^*) - P(v^*), w^* - v^*) = (g, w^* - v^*) \leqslant \|g\| \, \|w^* - v^*\|,$$

откуда в силу условия (1) вытекает утверждение леммы.

Укажем некоторые применения леммы 1 при решении квазилинейных краевых задач методом конечных разностей.

§ 2. Обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

Аппроксимируем краевую задачу

$$Lu \equiv [a(x, u, u', u'')]'' - [k(x)u']' + cu' + f(x, u, u', u'') = 0, \tag{5}$$

$$u(0) = u(l) = 0, \quad u''(0) = u''(l) = 0 \tag{6}$$

разностной краевой задачей

$$L_h v \equiv \delta^2 a(x, v, \delta v, \delta^2 v) - \Delta(b \nabla v) + c\delta v + f(x, v, \delta v, \delta^2 v) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{7}$$

$$v_0 = v_N = 0, \qquad \delta^2 v_0 = \delta^2 v_N = 0, \tag{8}$$

где

$$h = l/N,\ x_i = ih,\ v = v_i = v(x_i),$$
$$\Delta v = \Delta v_i = (v_{i+1} - v_i)/h,\ \nabla v = \nabla v_i = (v_i - v_{i-1})/h,$$
$$\delta v = (\Delta v + \nabla v)/2,\ \delta^2 v = \Delta \nabla v,\ b = b_i = k(x_i - h/2).$$

Возьмем в качестве гильбертова пространства H множество векторов v_i $(i = -1, 0, \ldots, N, N+1)$, удовлетворяющее краевым условиям (8), причем

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{N-1} \delta^2 v_i \delta^2 w_i h, \quad \|v\| = (v, v)^{1/2}.$$

Для векторов $v \in H$ имеют место оценки (см. [5])

$$\max_{i=1, \ldots, N-1} |v_i| \leqslant \frac{l}{8}\sqrt{2l}\,\|v\|, \qquad \max_{i=-1, \ldots, N} |\Delta v_i| \leqslant \frac{1}{3}\sqrt{3l}\,\|v\|.$$

Определим в пространстве H оператор

$$\Lambda_h v = \delta^2\delta^2 v, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Этот оператор имеет обратный Λ_h^{-1}, причем (см. [5])

$$\|\Lambda_h^{-1} w\| \leqslant \frac{l}{8}\sqrt{2l} \sum_{i=1}^{N-1} |w_i|\, h. \tag{9}$$

Для решения нелинейной системы $\{(7), (8)\}$ можно применить итерационный метод

$$\Lambda_h v^{m+1} = \Lambda_h v^m - \lambda L_h(v^m), \quad m = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

или

$$v^{m+1} = v^m - \lambda P(v^m),$$

где $P = \Lambda_h^{-1} L_h$ является оператором в пространстве H.

Из леммы 1 следует

Теорема 1. *Пусть $v^0{}_i$ — приближенное решение системы* (7), *удовлетворяющее краевым условиям* (8). *Пусть в этой системе c — постоянная, $0 \leqslant b_i \leqslant M_0$, а частные производные функций $a(x, v, p, q)$ и $f(x, v, p, q)$ удовлетворяют неравенствам*

$$0 < m_1 \leqslant \frac{\partial a}{\partial q} \leqslant M_1, \qquad m_2 \leqslant \frac{\partial f}{\partial v} \leqslant M_2,$$

$$\left|\frac{\partial a}{\partial v}\right| \leqslant M_3, \quad \left|\frac{\partial a}{\partial p}\right| \leqslant M_4, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial p}\right| \leqslant M_5, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial q}\right| \leqslant M_6$$

в области $0 \leqslant x_i \leqslant l$, $\max\limits_{i=1, \ldots, N-1} \left|v_i - v^0{}_i\right| \leqslant \frac{l}{8}\sqrt{2l}\, r$,

$$\max_{i=0, \ldots, N} \left|p_i - \delta v^0{}_i\right| \leqslant \frac{1}{3}\sqrt{3l}\, r, \quad -\infty < q_i < +\infty,$$

где

$$r = \frac{l}{8(\gamma - \varepsilon)}\sqrt{2l} \sum_{i=1}^{N-1} \left|L_h(v^0{}_i)\right| h \qquad (0 < \varepsilon < \gamma).$$

Если

$$\gamma = m_1 + \frac{l^4}{64}\min(0, m_2) - \frac{l^2}{8}(M_3 + M_6) -$$

$$- \left(\frac{l}{4}\sqrt{2} + \frac{2l}{3}\right) M_4 - \frac{l^3}{32}\sqrt{2}\, M_5 > 0,$$

то разностная краевая задача $\{(7), (8)\}$ *имеет в области*

$$\left|v_i - v^0{}_i\right| \leqslant \frac{l}{8}\sqrt{2l}\, r$$

единственное решение $v^*{}_i$, *и итерационный процесс* (10) *при условии* (3) *сходится к этому решению со скоростью*

$$\max_{i=0, \ldots, N} \left|v^m{}_i - v^*{}_i\right| \leqslant \frac{l}{8}\sqrt{2l}\, \frac{\varkappa^m}{1 - \varkappa}\lambda(\gamma - \varepsilon) r, \qquad m = 0, 1, \ldots,$$

где $\varkappa$ *определена соотношением* (4) *и*

$$\beta = M_1 + \frac{l^4}{64}\max(M_2, |m_2|) + \frac{l^2}{8}(M_0 + M_3 + M_6) +$$

$$+ \left(\frac{l}{4}\sqrt{2} + \frac{2l}{3}\right) M_4 + \frac{l^3}{32}\sqrt{2}\, |c|.$$

Примечание. Пусть $v^*{}_i$ — приближенное решение задачи $\{(5), (6)\}$, найденное как точное решение задач $\{(7), (8)\}$. Его погрешность $u_i - v^*{}_i$ удовлетворяет следующему уравнению

$$L_h(u - v^*) = \psi, \qquad i = 1, \ldots, N-1$$

с краевыми условиями

$$u_0 - v^*{}_0 = 0, \qquad u_N - v^*{}_N = 0,$$
$$\delta^2 u_0 - \delta^2 v^*{}_0 = \varphi_1, \qquad \delta^2 u_N - \delta^2 v^*{}_N = \varphi_2,$$

где $u_i = u(x_i)$ — значения решения задачи $\{(5), (6)\}$, $\psi = L_h u$, $\varphi_1 = \delta^2 u_0$ и $\varphi_2 = \delta^2 u_N$. Для погрешности имеет место априорная оценка

$$\|u - v^*\| \leqslant \frac{1}{\gamma}\Bigg[\frac{l}{8}\sqrt{2l}\sum_{i=1}^{N-1} |\psi_i|\, h +$$

$$+ \sqrt{\frac{l}{3}}\left(M_1 + \frac{h}{2} M_4\right)(|\varphi_1| + |\varphi_2|)\Bigg]. \tag{11}$$

Если решение $u(x)$ задачи $\{(5), (6)\}$ имеет в области $-h \leqslant x \leqslant$ $\leqslant l + h$ непрерывные производные до шестого порядка, а $k(x)$

до третьего порядка, и $a(x,u,u',u'')$ имеет непрерывные частные производные по x, u, u', u'' до четвертого порядка в некоторой окрестности решения краевой задачи $\{(5),\ (6)\}$, то $\psi=O(h^2)$, $\varphi_1=O(h^2)$, $\varphi_2=O(h^2)$ и из оценки (11) следует, что при $h\to 0$ решение v^* задачи $\{(7),\ (8)\}$ приближается к решению исходной задачи со скоростью

$$\max_{i=0,\ldots,N}|u_i-v^*{}_i|\leqslant\frac{l}{8}\sqrt{2l}\,\|u-v^*\|=O(h^2).$$

§ 3. Уравнение в частных производных четвертого порядка

Весьма аналогично предыдущему можно применить лемму 1 и при решении в прямоугольнике

$$D=\{(x,y):0<x<l_1,\ 0<y<l_2\}$$

с границей Γ следующей краевой задачи

$$\begin{aligned}Lu\equiv{}&\frac{\partial^2}{\partial x^2}a_1\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}a_{12}\left(x,y,\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}\right)+\\&+\frac{\partial^2}{\partial y^2}a_2\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\\&-\frac{\partial}{\partial y}\left(k_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+c_1\frac{\partial u}{\partial x}+c_2\frac{\partial u}{\partial y}+\\&+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y},\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)=0,\end{aligned}\tag{12}$$

$$u=0,\qquad\frac{\partial^2u}{\partial n^2}=0\quad\text{при}\quad(x,y)\in\Gamma,\tag{13}$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к границе Γ.

При аппроксимации краевой задачи $\{(12),\ (13)\}$ разностной краевой задачей пользуемся разностной сеткой

$$\begin{aligned}\bar\omega=\{(x_i,y_i):x_i=ih_1,y_j=jh_2,\ i=-1,\ \ldots,\ N_1+1;\\ j=-1,\ \ldots,\ N_2+1,\ h_1=l_1/N_1,\ h_2=l_2/N_2\}.\end{aligned}$$

Введем обозначения для следующих подмножеств узлов:

$\omega=\bar\omega\cap D$ (множество внутренних узлов),

$\gamma=\bar\omega\cap\Gamma$ (множество граничных узлов).

Аппроксимируем краевую задачу $\{(12),\ (13)\}$ разностной краевой задачей

$$\begin{aligned}L_hv\equiv{}&\delta^2{}_1a_1(x,y,v,\delta_1v,\delta^2{}_1v)+\\&+\Delta_1\Delta_2a_{12}(x-h_1/2,y-h_2/2,\nabla_1\nabla_2v)+\delta^2{}_2a_2(x,y,v,\delta_2v,\delta^2{}_2v)-\\&-\Delta_1(b_1\nabla_1v)-\Delta_2(b_2\nabla_2v)+c_1\delta_1v+c_2\delta_2v+\\&+f(x,y,v,\delta_1v,\delta_2v,\delta_1\delta_2v,\delta^2{}_1v,\delta^2{}_2v)=0\quad\text{при}\quad(x,y)\in\omega,\end{aligned}\tag{14}$$

$$v=0,\ \delta^2{}_1v=\delta^2{}_2v=0\qquad\text{при}\quad(x,y)\in\gamma,\tag{15}$$

где

$$v = v_{ij} = v(x_i, y_j), \qquad \Delta_1 v = (v_{i+1,j} - v_{ji})/h_1,$$
$$\nabla_1 v = (v_{ij} - v_{i-1,j})/h_1, \quad \Delta_2 v = (v_{i,j+1} - v_{ij})/h_2,$$
$$\nabla_2 v = (v_{ij} - v_{i,j-1})/h_2, \quad \delta_\nu v = (\Delta_\nu v + \nabla_\nu v)/2, \quad \delta^2{}_\nu = \Delta_\nu \nabla_\nu v,$$
$$b_1 = k_1(x_i - h_1/2, y_j), \qquad b_2 = k_2(x_i, y_j - h_2/2).$$

В качестве гильбертова пространства H возьмем множество векторов v_{ij} ($i = -1, 0, \ldots, N_1 + 1$; $j = -1, 0, \ldots, N_2 + 1$), удовлетворяющее краевым условиям (15), причем

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (\delta^2{}_1 v_{ij} \delta^2{}_1 w_{ij} + \delta^2{}_2 v_{ij} \delta^2{}_2 w_{ij}) h_1 h_2 +$$
$$+ 2 \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \nabla_1 \nabla_2 v_{ij} \nabla_1 \nabla_2 w_{ij} h_1 h_2,$$
$$\|v\| = (v, v)^{1/2}.$$

Для векторов $v \in H$ имеет место оценка (см. [5])

$$\max_\omega |v| \leqslant \frac{1}{8} \sqrt{2 l_1 l_2}\, \|v\|.$$

Определим в пространстве H оператор

$$\Lambda_h v = \delta^2{}_1 \delta^2{}_1 v + 2 \delta^2{}_1 \delta^2{}_2 v + \delta^2{}_2 \delta^2{}_2 v,$$

имеющий обратный Λ_h^{-1}, причем

$$\|\Lambda_h^{-1} w\| \leqslant \frac{1}{8} \sqrt{2 l_1 l_2} \sum_\omega |w|\, h_1 h_2.$$

Для решения нелинейной системы $\{(14), (15)\}$ можно опять применить итерационный метод (10).

Из леммы 1 следует

Теорема 2. *Пусть* $v^0{}_{ij}$ — *приближенное решение системы* (14), *удовлетворяющее краевым условиям* (15). *Пусть в этой системе* c_1, c_2 — *постоянные,* $0 \leqslant b_1 \leqslant M_{01}$, $0 \leqslant b_2 \leqslant M_{02}$, *а частные производные, функции* $a_1(x, y, v, p_1, q_1)$, $a_{12}(x, y, q_{12})$, $a_2(x, y, v, p_2, q_2)$ *и* $f(x, y, v, p_1, p_2, q_{12}, q_1, q_2)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$0 < m_{1\nu} \leqslant \frac{\partial a_\nu}{\partial q_\nu} \leqslant M_{1\nu}, \qquad m_2 \leqslant \frac{\partial f}{\partial v} \leqslant M_2,$$
$$\left|\frac{\partial a_\nu}{\partial v}\right| \leqslant M_{3\nu}, \quad \left|\frac{\partial a_\nu}{\partial p_\nu}\right| \leqslant M_{4\nu}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial p_\nu}\right| \leqslant M_{5\nu},$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial q_\nu}\right| \leqslant M_{6\nu}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial q_{12}}\right| \leqslant M_7, \quad 0 < m_8 \leqslant \frac{\partial a_{12}}{\partial q_{12}} \leqslant M_8 \quad (\nu = 1,2)$$

в области $(x, y) \in D \cup \Gamma$,

$$\max_\omega |v - v^0| \leqslant \frac{1}{8} \sqrt{2 l_1 l_2}\, r,$$
$$-\infty < p_1, p_2, q_{12}, q_1, q_2 < +\infty,$$

где

$$r=\frac{1}{8(\gamma-\varepsilon)}\sqrt{2l_1l_2}\sum_{\omega}|L_h(v^0)|\,h_1h_2 \qquad (0<\varepsilon<\gamma).$$

Если

$$\gamma=\min(Q_1,Q_2,Q_{12})>0,$$

где

$$Q_\nu=m_{1\nu}-\left(\frac{l_\nu}{4}\sqrt{2}+\frac{2l_\nu}{3}\right)M_{4\nu}-\frac{l_\nu^2}{8}(M_{3\nu}+M_{6\nu})-\frac{l_\nu^3}{32}\sqrt{2}\,M_{5\nu},$$

$$Q_{12}=\frac{1}{2}\left[m_8+\frac{(l_1l_2)^2}{64}\min(0,m_2)-\frac{l_1l_2}{8}M_7\right],$$

то разностная краевая задача {(14), (15)} *имеет в области*

$$\max_{\omega}|v-v^0|\leqslant\frac{1}{8}\sqrt{2l_1l_2}\,r$$

единственное решение v^* *и итерационный метод* (10) *при условии* (3) *сходится к этому решению со скоростью*

$$\max_{\omega}|v^m-v^*|\leqslant\frac{1}{8}\sqrt{2l_1l_2}\frac{\varkappa^m}{1-\varkappa}\lambda(\gamma-\varepsilon)\,r,$$

причем $\varkappa$ *определена соотношением* (4) *и*

$$\beta=\max(R_1,R_2,R_{12}),$$

где

$$R_\nu=\frac{l_\nu^2}{8}(M_{0\nu}+M_{3\nu}+M_{6\nu})+\left(\frac{l_\nu}{4}\sqrt{2}+\frac{2l_\nu}{3}\right)M_{4\nu}+$$
$$+\frac{l_\nu^3}{32}\sqrt{2}(M_{5\nu}+|c_\nu|),$$

$$R_{12}=\frac{1}{2}\left[\frac{l_1l_2}{8}M_7+M_8+\frac{(l_1l_2)^2}{64}\max(M_2,|m_2|)\right].$$

Литература

1. Дьяконов Е. Г., О построении итерационных методов на основе использования операторов эквивалентных по спектру. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, **6**, № 1, 12—34.
2. Качуровский Р. И., Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах. Успехи матем. наук, 1968, **23**, № 2, 121—168.
3. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др., Приближенное решение операторных уравнений. Москва, 1969.
4. Сапаговас М. П., Решение квазилинейных эллиптических уравнений методом конечных разностей. Лит. матем. сб., 1965, **5**, № 2, 291—302.
5. Тамме Э., О решении квазилинейной краевой задачи четвертого порядка методом конечных разностей. Уч .зап. Тартуск. ун-та, 1970, **253**, 258—275.

Поступило
13 II 1970

MONOTOONSUSE KASUTAMISEST DIFERENTSMEETODITE UURIMISEKS KVAASILINEAARSETE RAJAÜLESANNETE LAHENDAMISEL

M. Fischer ja E. Tamme

Resümee

Artiklis on antud tingimused Richardsoni iteratsioonimeetodi (2) koondumiseks. Neid tingimusi on rakendatud diferentsmeetodi uurimiseks neljandat järku hariliku ja osatuletistega diferentsiaalvõrrandi rajaülesannete {(5), (6)} ja {(12), (13)} lahendamisel.

ÜBER DIE ANWENDUNG DER MONOTONIE BEI DER UNTERSUCHUNG DES DIFFERENZENVERFAHRENS FÜR DIE LÖSUNG DER QUASILINEAREN RANDWERTAUFGABEN

M. Fischer und E. Tamme

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz werden die Konvergenzbedingungen für das Richardsonsche Iterationsverfahren gegeben. Diese Bedingungen werden bei der Untersuchung des Differenzverfahrens für die Lösung der Randwertaufgaben {(5), (6)} und {(12), (13)} für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung verwendet.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ НА ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ

Э. Эхасалу

Кружок СНО при кафедре вычислительной математики

Э. Тамме

Кафедра вычислительной математики

В данной заметке исследуется метод конечных разностей решения задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа в треугольной области. При этом используется общая равномерная треугольная сетка. В § 1 выводится разностная аппроксимация второй степени точности для дифференциального уравнения. В § 2 получаются априорные оценки для решения разностной краевой задачи. Эти оценки применяются при исследовании сходимости рассматриваемого метода конечных разностей в случае линейной, а в § 3 также в случае квазилинейной краевой задачи.

§ 1. Аппроксимация дифференциального уравнения на треугольной сетке

Рассмотрим уравнение эллиптического типа

$$Lu \equiv b_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + b_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_1\frac{\partial u}{\partial x} + c_2\frac{\partial u}{\partial y} - ru = f \quad (1)$$

в области G с краевым условием Дирихле

$$u = \varphi \text{ на границе } \Gamma, \quad (2)$$

где $b_{ij} = b_{ij}(P)$, $c_i = c_i(P)$, $r = r(P)$, $f = f(P)$ и $\varphi = \varphi(P)$ заданные непрерывные функции точки $P = (x, y)$ соответственно в G и на Γ.

Предположим, что $\dfrac{\partial b_{ij}}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial b_{ij}}{\partial y}$ непрерывны в G.

Рассмотрим случай, когда G — треугольная область с вершинами Q_ν и открытыми сторонами Γ_ν, причем ν здесь и в дальнейшем принимает значения 1, 2, 3. Граница $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup$

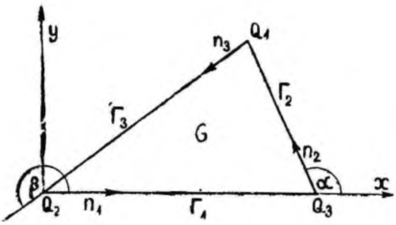


Рис. 1.

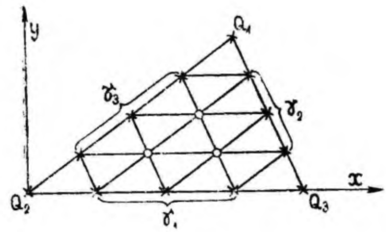


Рис. 2.

$\cup \{Q_1, Q_2, Q_3\}$. Внесем направления n_ν, параллельные сторонам Γ_ν (см. рис. 1): n_1 направлено в положительном направлении оси x от Q_2 к Q_3, n_2 — от Q_3 к Q_1 и n_3 — от Q_1 к Q_2. Они образуют соответственно углы α и β с положительным направлением оси x. При этом $0 < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < 2\pi$ и $0 < \beta - \alpha < \pi$.

Покроем область $\bar{G} = G \cup \Gamma$ треугольной сеткой, разбив Γ_ν на N равных частей длины $h_\nu = l_\nu/N$, где l_ν — длина стороны Γ_ν, и соединим точки деления отрезками, параллельными сторонам треугольника (см. рис. 2). Узлы сетки, находящиеся в области G, назовем внутренними узлами, а узлы, находящиеся на границе Γ — граничными узлами (на рисунке 2 внутренние узлы обозначены кружками, а граничные узлы крестиками). Множество внутренних узлов обозначим через ω, а множество граничных узлов через γ. В дальнейшем используем также множества $\gamma_\nu = \{P : P \in \gamma \cap \Gamma_\nu\}$ узлов, находящиеся на стороне Γ_ν. Тогда $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \{Q_1, Q_2, Q_3\}$.

Для получения разностной аппроксимации уравнения (1), заменим в нем частные производные производными по направлениям n_ν. Из выражения производных

$$\frac{\partial u}{\partial n_\nu} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos n_\nu x + \frac{\partial u}{\partial y} \sin n_\nu x$$

по направлениям n_ν получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial n_1}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= (-\cot \alpha + \lambda \sin(\beta - \alpha)) \frac{\partial u}{\partial n_1} + \\ &+ \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \lambda \sin \beta\right) \frac{\partial u}{\partial n_2} + \lambda \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial n_3}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\lambda = \lambda(P)$ — произвольная непрерывная в G функция. Выражая и вторые частные производные через производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial n_\nu^2}$, преобразуем уравнение (1) к виду

$$Lu \equiv \sum_{\nu=1}^{3} \left[\frac{\partial}{\partial n_\nu} \left(p_\nu \frac{\partial u}{\partial n_\nu} \right) + q_\nu \frac{\partial u}{\partial n_\nu} \right] - ru = f \qquad (P \in G), \qquad (4)$$

где

$$p_1 = b_{11} - b_{12}(\cot\alpha + \cot\beta) + b_{22}\cot\alpha\cot\beta,$$

$$p_2 = \frac{b_{22}\cos\beta - b_{12}\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)}, \qquad p_3 = \frac{b_{22}\cos\alpha - b_{12}\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\beta-\alpha)};$$

$$q_1 = c_1 - c_2\cot\alpha - \frac{\partial p_1}{\partial n_1} + \lambda\sin(\beta-\alpha),$$

$$q_2 = \frac{c_2}{\sin\alpha} - \frac{\partial p_2}{\partial n_2} - \lambda\sin\beta, \qquad q_3 = -\frac{\partial p_3}{\partial n_3} + \lambda\sin\alpha.$$

Замечание. Часто уравнение (1) имеет самосопряженный вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(b_{11}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - ru = f, \tag{5}$$

т. е. $b_{12} = 0$, $c_1 = \frac{\partial b_{11}}{\partial x}$ и $c_2 = \frac{\partial b_{22}}{\partial y}$. Тогда выбирая

$$\lambda = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha)}\frac{\partial b_{22}}{\partial n_3},$$

в уравнении (4) получаем $q_1 = q_2 = q_3 = 0$.

Введем следующие обозначения. Пусть P — узел сетки. Обозначим через $P^{(\pm 1_\nu)}$ (соответственно $P^{(\pm 0,5_\nu)}$) точки, находящиеся от P на расстоянии h_ν (соответственно $0,5\,h_\nu$), в положительном или отрицательном направлении n_ν (см. рис. 3). Пусть $v = v(P)$ — функция, заданная на сетке. Обозначим

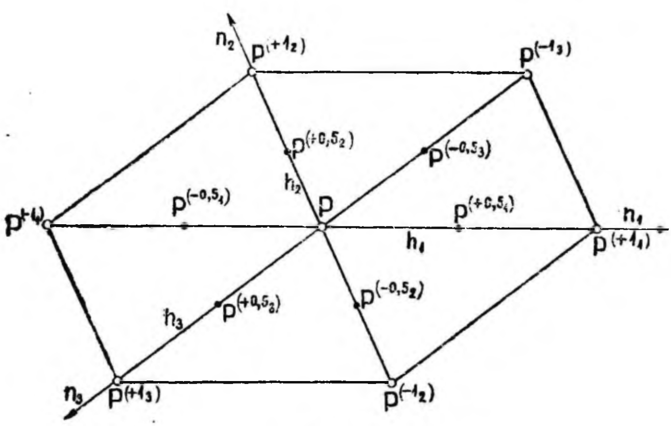


Рис. 3.

$$\Delta_\nu v = \frac{1}{h_\nu}\,[v(P^{(+1_\nu)}) - v(P)],$$

$$\nabla_\nu v = \frac{1}{h_\nu}\,[v(P) - v(P^{(-1_\nu)})],$$

$$\delta_\nu v = \frac{1}{2}\,(\Delta_\nu v + \nabla_\nu v).$$

Обозначим еще $h = h_1$. Тогда $h_\nu = \tau_\nu h$, где

$$\tau_1 = 1, \quad \tau_2 = -\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}, \quad \tau_3 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}. \tag{6}$$

Заменяя в уравнении (4) производные по направлениям n_ν соответствующими разностями (см., например, [3]), получим разностную аппроксимацию этого уравнения

$$L_h v \equiv \sum_{\nu=1}^{3} [\Delta_\nu (a_\nu \nabla_\nu v) + q_\nu \delta_\nu v] - rv = f \quad (P \in \omega), \tag{7}$$

где $a_\nu = a_\nu(P) = p_\nu(P^{(-0,5_\nu)})$. Отметим, что в случае правильной треугольной сетки ($\alpha = 120°$, $\beta = 240°$) такая аппроксимация уравнения (5) получена в [1], стр. 281.

Перенося краевое условие на граничные узлы сетки, получаем

$$v = \varphi \quad \text{при} \quad P \in \gamma. \tag{8}$$

Пусть $u = u(P)$ — решение задачи $\{(4), (2)\}$ и $v = v(P)$ — решение разностной задачи $\{(7), (8)\}$. Погрешность $z = u - v$ приближенного решения исходной задачи удовлетворяет условиям

$$L_h z = \psi \text{ при } P \in \omega \text{ и } z = 0 \text{ при } P \in \gamma, \tag{9}$$

где $\psi = L_h u - f$ — погрешность аппроксимации.

При помощи исследования выражения

$$\psi = L_h u - f = L_h u - Lu =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{3} \left[\Delta_\nu (a_\nu \nabla_\nu u) - \frac{\partial}{\partial n_\nu}\left(p_\nu \frac{\partial u}{\partial n_\nu} \right) + q_\nu \left(\delta_\nu u - \frac{\partial u}{\partial n_\nu} \right) \right]$$

получается следующий результат.

Теорема 1. *Пусть решение u задачи $\{(4), (2)\}$ имеет в G непрерывные и ограниченные частные производные до четвёртого порядка, коэффициенты p_ν до третьего порядка, а q_ν ограничены в G. Тогда погрешность аппроксимации*

$$\psi = O(h^2),$$

т. е. существует постоянная M такая, что

$$|\psi| \leqslant Mh^2 \quad \textit{при} \quad P \in \omega.$$

В следующем параграфе выведем априорные оценки для решения задачи (9). Из этих оценок следует сходимость и скорость сходимости рассматриваемого метода конечных разностей.

§ 2. Априорные оценки для решения линейной разностной краевой задачи

Пусть v и w — функции, определенные на сетке $\overline{\omega} = \omega \cup \gamma$. Введем обозначения

$$(v, w) = \sum_{\omega} vwh^2, \quad (v, w]^{\nu} = \sum_{\omega \cup \gamma_\nu} vwh^2,$$

$$(v, w)_{\nu} = \frac{1}{\tau_\nu} \sum_{\gamma_\nu} vwh,$$

где τ_ν выражается формулами (6).

Имеет место следующая формула суммирования по частям

$$(\Delta_\nu v, w) = -(v, \nabla_\nu w]^{\nu'} + (v, w)_{\nu'} - (v^{(+1_\nu)}, w)_{\nu''}, \tag{10}$$

где $v^{(+1_\nu)} = v(P^{(+1_\nu)})$, $\nu' = \nu + 1 \pmod 3$ и $\nu'' = \nu - 1 \pmod 3$, т. е. при $\nu = 1$ имеем $\nu' = 2$ и $\nu'' = 3$, при $\nu = 2$ имеем $\nu' = 3$ и $\nu'' = 1$, при $\nu = 3$ имеем $\nu' = 1$ и $\nu'' = 2$. Для вывода формулы (10) применяем одномерную формулу суммирования по частям (см., например, [3], стр. 562) на каждой строке узлов сетки и затем суммируем по строкам.

Используем еще гильбертово пространство H со скалярным произведением (v, w), причем элементами этого пространства считаем функции v, определенные на сетке ω и удовлетворяющие условию $v = 0$ при $P \in \gamma$.

Теорема 2. *Если*

$$a_\nu - \frac{1}{4} h_\nu^2 \nabla_\nu q_\nu \geqslant A_\nu > 0, \quad r + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3} \delta_\nu q_\nu \geqslant 0, \tag{11}$$

то разностная краевая задача (9) *имеет единственное решение* z *и верны априорные оценки*

$$\|z\| \leqslant \frac{1}{\varkappa} \|\psi\|, \quad \|\nabla_\nu z\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varkappa A_\nu}} \|\psi\|, \tag{12}$$

где

$$\varkappa = 4 \sum_{\nu=1}^{3} \frac{A_\nu}{l_\nu^2}, \quad \|\psi\|^2 = (\psi, \psi), \quad \|z\|^2 = (z, z),$$

$$\|\nabla_\nu z\|^2 = (\nabla_\nu z, \nabla_\nu z]^{\nu'}.$$

Доказательство. Применяя формулу (10) и некоторые равенства из [2], получаем для решения задачи (9) тождество

$$(-L_h z, z) = -\sum_{\nu=1}^{3} [(\Delta_\nu (a_\nu \nabla_\nu z), z) + (q_\nu \delta_\nu z, z)] + (rz, z) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{3} \left(a_\nu - \frac{1}{4} h^2_\nu \nabla_\nu q_\nu, (\nabla_\nu z)^2\right]^{\nu'} + \left(r + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3} \delta_\nu q_\nu, z^2\right),$$

откуда в силу условий (11) следует

$$(-L_h z, z) \geqslant \sum_{\nu=1}^{3} A_\nu \|\nabla_\nu z\|^2.$$

Если еще учтем неравенство

$$\|z\| \leqslant \frac{l_\nu}{2} \|\nabla_\nu z\|,$$

то получим

$$(-L_h z, z) \geqslant \varkappa (z, z),$$

где постоянная $\varkappa > 0$ определена в формулировке теоремы.

Таким образом, оператор $-L_h$ положительно определен в пространстве H. Из этого следует существование и единственность решения задачи (9), а также первая из оценок (12). Вторая из оценок (12) получается из уже известных неравенств:

$$\|\nabla_\nu z\|^2 \leqslant \frac{1}{A_\nu} (-L_h z, z) = \frac{1}{A_\nu} (-\psi, z) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{A_\nu} \|\psi\| \, \|z\| \leqslant \frac{1}{\varkappa A_\nu} \|\psi\|^2.$$

Теорема 2 доказана.

Так как матрицы систем линейных уравнений $\{(7),\ (8)\}$ и (9) совпадают, то в условиях теоремы 2 задача $\{(7),\ (8)\}$ также имеет единственное решение v, которое мы принимаем за приближенное решение задачи $\{(4),\ (2)\}$. Если выполнены условия теорем 1 и 2, то для погрешности этого приближения получаем оценку

$$\|z\| = \|u - v\| \leqslant \frac{1}{\varkappa} \|\psi\| = O(h^2),$$

т. е. метод конечных разностей $\{(7),\ (8)\}$ сходится со скоростью $O(h^2)$ в пространстве H.

В следующем параграфе применим априорные оценки (12) при исследовании метода конечных разностей для решения квазилинейной краевой задачи.

§ 3. Решение квазилинейной краевой задачи

Будем рассматривать решение квазилинейного уравнения

$$Lu = g\left(P,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (P \in G) \tag{13}$$

с краевым условием (2), где g — заданная функция, Lu — линейное дифференциальное выражение, определенное формулой (1), и G — треугольник, описанный в § 1.

Аппроксимируем уравнение (13) разностным уравнением

$$L_h v = g(P, v, \delta_1 v, \delta_y v) \qquad (P \in \omega), \tag{14}$$

где $L_h v$ определено формулой (7) и

$$\delta_y v = (-\cot\alpha + \lambda_\mu \sin(\beta - \alpha))\,\delta_1 v + \\ + \left(\frac{1}{\sin\alpha} - \lambda_\mu \sin\beta\right)\delta_2 v + \lambda_\mu \sin\alpha\,\delta_3 v \tag{15}$$

образовано на основании формулы (3). При этом λ_μ может отличаться от величины λ в выражении $L_h v$. Целесообразно использовать в качестве λ_μ одну из величин

$$\lambda_1 = \frac{\cot\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta} \qquad \text{или} \qquad \lambda_3 = 0,$$

при которых один из коэффициентов $\delta_\nu v$ в выражении (15) равен нулю.

В общем случае лучше всего использовать ту из этих трех λ_μ, при которой величина ϱ, определенная в формулировке следующей теоремы 3, наименьшая.

Для решения задачи $\{(14),\ (8)\}$ можно применять итерационный процесс

$$\begin{aligned} L_h v_{m+1} &= g(P, v_m, \delta_1 v_m, \delta_y v_m) \quad \text{при} \quad P \in \omega, \\ v_{m+1} &= \varphi \quad \text{при} \quad P \in \gamma \quad (m = 0, 1, \ldots), \end{aligned} \tag{16}$$

где v_0 — начальное приближение, удовлетворяющее условию (8). Условия сходимости этого процесса дает

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (11), *функция* $g(P, v^0, v^1, v^2)$ *имеет ограниченные частные производные по* v^i, *причем*

$$\left|\frac{\partial g}{\partial v^i}\right| \leqslant M_i \qquad (i = 0, 1, 2), \tag{17}$$

и величина

$$\varrho = \frac{M_0}{\varkappa} + \frac{1}{\sqrt{\varkappa A_1}}\left[M_1 + M_2\left|-\cot\alpha + \lambda_\mu \sin(\beta-\alpha)\right|\right] + \\ + \frac{M_2}{\sqrt{\varkappa A_2}}\left|\frac{1}{\sin\alpha} - \lambda_\mu\sin\beta\right| + \frac{M_2}{\sqrt{\varkappa A_3}}\left|\lambda_\mu \sin\alpha\right| < 1.$$

Тогда задача $\{(14),\ (8)\}$ *имеет единственное решение* v *и итерационный процесс* (16) *при любом начальном приближении* v^0, *удовлетворяющем условию* (8), *сходится в пространстве* H *к этому решению со скоростью*

$$\|v - v_m\| \leqslant \frac{\varrho^m}{\varkappa(1-\varrho)}\,\|L_h(v_1 - v_0)\| \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Доказательство. Из соотношений (16) получим

$$L_h(v_{m+1}-v_m)=g(P, v_m, \delta_1 v_m, \delta_y v_m)-$$
$$-g(P, v_{m-1}, \delta_1 v_{m-1}, \delta_y v_{m-1})$$

при $P\in\omega$ и $v_{m+1}-v_m=0$ при $P\in\gamma$. Обозначим $z_m=v_{m+1}-v_m$ и $w_m=L_h z_m$. Тогда на основании теоремы 2

$$\|z_m\|\leqslant\frac{1}{\varkappa}\|w_m\|,$$

$$\|\delta_\nu z_m\|=\sqrt{(\delta_\nu z_m, \delta_\nu z_m)}\leqslant\|\nabla_\nu z_m\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\varkappa A_\nu}}\|w_m\|.$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении, в силу (17) получим

$$\|w_m\|\leqslant M_0\|z_{m-1}\|+M_1\|\delta_1 z_{m-1}\|+M_2\|\delta_y z_{m-1}\|\leqslant\varrho\|w_{m-1}\|.$$

Следовательно,

$$\|w_m\|\leqslant\varrho^m\|w_0\| \quad \text{и} \quad \|z_m\|=\|v_{m+1}-v_m\|\leqslant\frac{1}{\varkappa}\varrho^m\|w_0\|,$$

откуда следуют все утверждения теоремы.

О сходимости рассматриваемого метода конечных разностей имеет место следующая

Теорема 4. *Пусть решение u задачи $\{(13), (2)\}$ существует и имеет в G непрерывные и ограниченные частные производные до четвертого порядка, коэффициенты p_ν и q_ν удовлетворяют условиям теоремы 1 и выполнены условия теоремы 3. Тогда для приближенного решения v задачи $\{(13), (2)\}$, найденного как решение задачи $\{(14), (8)\}$, имеет место оценка погрешности*

$$\|u-v\|=O(h^2).$$

Доказательство. Обозначим

$$\psi=L_h u-g(P, u, \delta_1 u, \delta_y u)=O(h^2).$$

Учитывая равенство (14), получим

$$L_h(u-v)=g(P, u, \delta_1 u, \delta_y u)-g(P, v, \delta_1 v, \delta_y v)+\psi \quad \text{при} \quad P\in\omega.$$

Аналогично доказательству теоремы 3 отсюда вытекает, что

$$\|L_h(u-v)\|\leqslant\varrho\|L_h(u-v)\|+\|\psi\|$$

и

$$\|u-v\|\leqslant\frac{1}{\varkappa(1-\varrho)}\|\psi\|=O(h^2).$$

Литература

1. Бабушка И., Виташек Э., Прагер М., Численные процессы решения дифференциальных уравнений. Москва, 1969.
2. Тамме Э. Э., О решении нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка методом конечных разностей. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, 8, № 5, 988—1000.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики. Москва, 1966.

Поступило
26 II 1970

DIRICHLET' ÜLESANDE LAHENDAMISEST KOLMNURKSEL VÕRGUL

E. Ehasalu ja E. Tamme

Resümee

Vaadeldakse elliptilist tüüpi diferentsiaalvõrrandi (1) Dirichlet' ülesande lahendamist kolmnurkses piirkonnas. Diferentsiaalvõrrand aproksimeeritakse ühtlasel kolmnurksel võrgul diferentsvõrrandiga (7). Tuletatakse aprioorsed hinnangud (12), mille abil näidatakse, et vaadeldav diferentsmeetod annab teatud eeldustel teise astme täpsuse. Samade aprioorsete hinnangute abil tuletatakse koonduvustingimused hariliku iteratsioonimeetodi (16) jaoks kvaasilineaarse diferentsiaalvõrrandi (13) Dirichlet' ülesande lahendamisel kolmnurksel võrgul.

ON SOLVING DIRICHLET PROBLEM ON A TRIANGULAR NET

E. Ehasalu and E. Tamme

Summary

The solution of the Dirichlet problem for a differential equation (1) of the elliptic type in a triangular domain is considered. The differential equation is approximated on a uniform triangular net by finite-difference equation (7). A priori estimations (12) are derived by means of which it is shown that under some conditions the error of the finite-difference method (7) has the order of magnitude $O(h^2)$. The same estimations (12) have been used for deriving conditions of convergence for an ordinary iteration method (16) for solving the Dirichlet problem for a quasilinear differential equation (13) on a triangular net.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В ТОЛСТОЙ ПЛАСТИНЕ

Ю. Лепик

Кафедра теоретической механики

Исследуются распространение и взаимодействия плоских волн в толстой пластине. К поверхности пластины приложено давление порядка 10^5 бар, которое, мгновенно достигнув максимального значения, остается постоянным, а затем сразу падает до нуля. Деформации считаются немалыми; задача сформулирована и решена в переменных Лагранжа. Влиянием температуры и скоростью деформации на механические характеристики материала пренебрегается.

Диаграмма «напряжение-деформация» линеаризируется. Рассматриваются два частных вида этой диаграммы: 1) принимаются в учет начальный упругий участок и также участки упругой разгрузки и вторичных пластических деформаций; 2) всеми упругими эффектами пренебрегается.

Из проведенных вычислений вытекает, что при напряжениях 300000—400000 бар вполне можно применить газодинамическую модель среды, так как влияние упругих эффектов несущественно.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную пластину со свободными поверхностями $x = 0$ и $x = h$. Пусть на поверхности $x = 0$ в момент $t = 0$ прилагается сжимающая нагрузка σ_x, которая поддерживается постоянной и в момент времени $t = t_1$ полностью снимается. Так как эта нагрузка распределена равномерно по всей пластине, то реализуется состояние плоской деформации, т. е.

$$e_x < 0, \qquad e_y = e_z = 0, \qquad \sigma_y = \sigma_z. \tag{1.1}$$

Вычисляя интенсивности напряжений и деформаций σ_i, e_i, а также среднее гидростатическое давление σ и относительное изменение объема $\Delta = 3e$, находим, что

$$e_i = \frac{2}{3} e_x, \qquad \sigma_i = \sigma_x - \sigma_y,$$
$$3\sigma = \sigma_x + 2\sigma_y, \qquad 3e = e_x. \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем положительными будем считать сжимающие напряжения и деформации.

Условия (1.2) могут быть записаны в форме

$$\sigma_x = \sigma + \frac{2}{3}\sigma_i, \qquad e_x = 3e = \frac{3}{2} e_i. \tag{1.3}$$

Из формул (1.3) следует, что для построения зависимости $\sigma_x - e_x$ должны быть известными диаграмма $\sigma_i - e_i$ и диаграмма Гюгонио $\sigma - \Delta$.

Определим еще величину σ_x для момента возникновения первых пластических деформаций. В пределах упругих деформаций имеем (ν — модуль Пуассона):

$$\sigma_y = \frac{\nu\sigma_x}{1-\nu}.$$

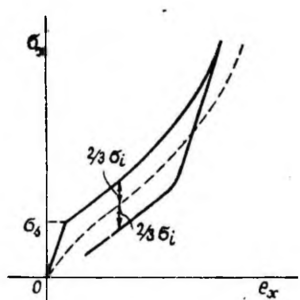
Подставляя это выражение во вторую формулу (1.2), находим

$$\sigma_x = \frac{1-\nu}{1-2\nu}\sigma_i.$$

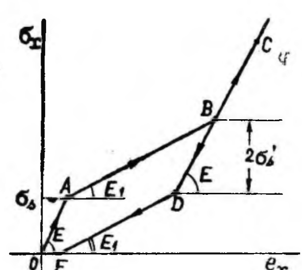
Обозначим компоненту напряжения σ_x на пределе текучести символом σ_s и соответствующее значение интенсивности деформации символом σ_{is}. Тогда имеем

$$\sigma_s = \frac{1-\nu}{1-2\nu}\sigma_{is}. \tag{1.4}$$

Выведенные выше соотношения имеют место в области активных пластических деформаций. Но при распространении волн возникают и области разгрузки и вторичных пластических деформаций. Из формул (1.3) вытекает, что кривая $\sigma_x - e_x$ лежит выше «гидродинамической кривой» $\sigma - \Delta$ на ординату (2/3) σ_i. Если предполагать выполненным идеальный эффект Баушингера,



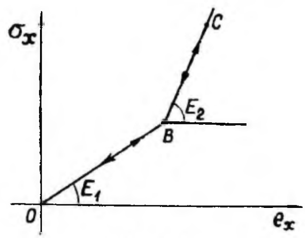
Фиг. 1.



Фиг. 2.

то можно допустить, что кривая вторичных пластических деформаций лежит от ординат кривой гидродинамического сжатия ниже на $(2/3)\sigma_i$, и мы получим картину указанную на фиг. 1.

Для упрощения вычислений действительная диаграмма $\sigma_x - e_x$ часто линеаризируется. Одна из таких линеаризаций представлена на фиг. 2. Эта диаграмма состоит из трех прямых OA, AB и BC, причем прямые OA и BC имеют одинаковый наклон E. Разгрузка материала происходит по линиям CD и DF. Эту диаграмму можно еще упростить, полагая $\sigma_s = 0$ и $\sigma'_s = 0$, тогда мы приходим к диаграмме, состоящей из двух пересекающихся прямых (фиг. 3).



Фиг. 3.

У диаграммы на фиг. 3 нагрузка и разгрузка материала происходит по единой кривой; так как предел текучести σ_s равняется нулю, то по существу мы имеем здесь гидродинамическую модель среды.

В случае гидродинамической модели мы отбрасываем второй член в первой формуле (1.3). Такое упрощение допустимо при достаточно больших напряжениях. Сказанное можно иллюстрировать при помощи следующего примера. Допустим для простоты, что материал не имеет упрочнения, т. е. $\sigma_i = \sigma_{is} = \text{const}$. Из формулы (1.3) находим, что

$$\frac{\sigma_x - \sigma}{\sigma_x} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_{is}}{\sigma_x}.$$

Принимая для σ_{is} значение 6000 кГ/см^2, находим что

$$\frac{\sigma_x - \sigma}{\sigma_x} = \begin{cases} 0{,}10 & \text{при} \quad \sigma_x = 40\,000 \text{ кГ/см}^2, \\ 0{,}01 & \text{при} \quad \sigma_x = 400\,000 \text{ кГ/см}^2. \end{cases}$$

В последнем случае различие между диаграммами $\sigma_x - e_x$ и $\sigma - \Delta$ уже вполне несущественно. Эффективность применения гидродинамической модели вытекает и из результатов вычислений, проведенных в § 3.

Для составления диаграммы, указанной на фиг. 3, можно исходить из диаграммы Гюгонио, которая обычно дается в переменных σ и V/V_0, где $V = 1/\varrho$, $V_0 = 1/\varrho_0$, а ϱ_0, ϱ — начальная и текущая плотности материала. В случае гидродинамической модели имеем

$$\sigma_x = \sigma, \qquad e_x = 1 - V/V_0. \tag{1.5}$$

В этих формулах σ_x и e_x суть «натуральное напряжение» и «натуральная деформация». Они связаны с техническими величинами по формулам

$$(\sigma_x)_{\text{техн}} = \sigma_x, \qquad e_x = -\ln[1 - (e_x)_{\text{техн}}]. \tag{1.6}$$

Так как в уравнения движения входят технические величины, то целесообразно написать формулы (1.5) в виде

$$(\sigma_x)_{\text{техн}} = \sigma, \qquad (e_x)_{\text{техн}} = 1 - \exp\left(\frac{V}{V_0} - 1\right). \tag{1.7}$$

Формулы (1.7) позволяют перейти от диаграммы Гюгонио к диаграмме $\sigma_x - e_x$. В дальнейшем мы для простоты индекса «техн» у величин σ_x и e_x писать не будем и под этими символами будем всегда понимать «технические величины».

§ 2. Основные уравнения задачи

Основные уравнения движения выпишем в лагранжевых координатах $(x,\ t)$. Здесь символом x обозначена координата пластины до деформации.

Для упрощения опустим в дальнейшем у символов σ_x и e_x индекс «x». Если обозначить еще буквой v скорость частиц, то уравнения движения элемента пластины приобретают вид

$$\varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\varrho^2}{\varrho_0}\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{2.1}$$

Так как $e = -\partial u/\partial x$, где u — перемещение вдоль оси x, то

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.2}$$

и второе уравнение системы (2.1) приобретает форму

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} - \frac{\varrho^2}{\varrho_0}\frac{\partial e}{\partial t} = 0.$$

Интегрирование по t дает $e = C(x) - \varrho_0/\varrho$. Определяя величину $C(x)$ из начальных условий $\varrho = \varrho_0$, $e \equiv 0$ при $t = 0$, приходим к хорошо известному соотношению

$$e = 1 - \frac{\varrho_0}{\varrho}. \tag{2.3}$$

Таким образом, нам остается удовлетворить еще первое уравнение системы (2.1). Это уравнение повидимому удовлетворено для таких v и σ, которые имеют постоянные значения в некоторой области в плоскости $(x,\ t)$; такие интегралы уравнения (2.1) мы будем применять в § 3.

Переходим теперь к исследованию условия разрыва на фронтах волн. При этом следует различать сформулирована ли данная задача в переменных Эйлера или в переменных Лагранжа. Обозначим в дальнейшем эйлерову координату символом X, лагранжевую координату через x (последняя величина определяет положение точки среды в недеформируемом состоянии). Скорость распространения волн в эйлеровой и лагранжевой системах координат есть $X^{\cdot} = D$ или, соответственно, $x^{\cdot} = a$. Следуя методике Куранта — Фридрихса ([2], стр. 138), определим связь между величинами D и a. Если в момент времени t ударный фронт захватывает частицу с лагранжевой координатой $x = x(t)$, то положение ударного фронта дается равенством $X = X[x(t),\ t]$.

Дифференцируя это выражение по времени и учитывая, что $v = \partial X/\partial t$, $\partial X/\partial x = \varrho_0/\varrho$, находим

$$X^{\cdot} = \frac{\varrho_0}{\varrho} x^{\cdot} + v,$$

или

$$D = \frac{\varrho_0}{\varrho} a + v. \tag{2.4}$$

Обозначим квадратными скобками скачок соответствующей величины на фронте волны. Так, например, $[v] = v_+ - v_-$, где символы v_- и v_+ обозначают значения величины v до и после прохождения линии скачка. Так как величины D и a при прохождении фронта волны непрерывны, то из (2.4) получаем

$$[v] + \left[\frac{\varrho_0}{\varrho}\right] a = 0.$$

В силу формулы (2.3) имеем $[\varrho_0/\varrho] = [1 - e] = -[e]$ и, следовательно,

$$[v] = a[e]. \tag{2.5}$$

Закон сохранения импульса имеет вид (ср. [2])

$$[\sigma] = \varrho_0 a[v]. \tag{2.6}$$

Условия (2.5)—(2.6) являются условиями скачка в переменных Лагранжа.

Выведем теперь условия скачка в переменных Эйлера. Из формулы (2.4) вытекает, что $\varrho_0 a = \varrho(D - v)$, и, следовательно,

$$[\varrho(D - v)] = 0. \tag{2.7}$$

Этот результат представляет собой закон сохранения массы. В случае переменных Эйлера закон типа (2.5) не может быть выполнен. В действительности, при помощи соотношения (2.3) условие (2.7) может быть приведено к виду

$$[v] = D[e] + e_- v_+ - e_+ v_-. \tag{2.8}$$

Следовательно, условие (2.5) для эйлеровой скорости D имеет место лишь тогда, когда добавочные члены $e_- v_+ - e_+ v_-$ в формуле (2.8) или равны нулю или настолько малы, что ими можно пренебрегать по сравнению с другими величинами.

Выведем теперь закон сохранения импульса. Формулу (2.6) можно переписать в форме

$$\sigma_- - \varrho_0 v_- a = \sigma_+ - \varrho_0 v_+ a.$$

Введя, по формуле (2.4), эйлерову скорость волны D, приходим к условию

$$[\sigma]=[\varrho v(D-v)]. \tag{2.9}$$

Таким образом, условиями скачка в переменных Эйлера являются уравнения (2.7) и (2.9).

Иногда условие сохранения импульса (2.9) линеаризируют, заменяя его формулой типа (2.6).

Так как в силу (2.7) формулу (2.9) можно написать в форме

$$[\sigma]=\varrho_-(D-v_-)[v]=\varrho_+(D-v_+)[v],$$

то линеаризация формулы (2.9), повидимому, допустима лишь тогда, когда 1) $v_- \ll D$, $v_+ \ll D$ и 2) $\varrho_- \approx \varrho_+ \approx \varrho_0$.

Следует отметить, что при применении условий скачка (2.5)—(2.7) и (2.9) в литературе нет последовательности. Для иллюстрации сказанного рассмотрим работу [1]. Хотя в этой работе исследуются большие деформации (ϱ считается переменной), не говорится о том, какие переменные (Эйлера или Лагранжа) применялись. На фронтах слабых разрывов используются условия (2.5) и (2.6), на ударных фронтах — условия (2.7) и (2.9), причем не различают эйлеровые и лагранжевые скорости волн. Из-за этих недостатков результаты работы [1] нуждаются в пересмотре.

§ 3. Метод решения задачи. Численные примеры.

За счет упрощающих предположений, сделанных в §§ 1—2, плоскость (x, t) разделяется на области, в которых напряжение σ_x, деформация e_x, плотность материала ϱ и скорость частиц v имеют постоянные значения. Для простоты опустим индексы «x» у символов σ_x и e_x и снабдим все величины номером области в плоскости (x, t); так, например, σ_2 есть напряжение σ_x в области 2, ϱ_2 — плотность материала в той же области и т. д.

Условия разрыва на границе областей с номерами i и j имеют на основании (2.5) и (2.6) форму

$$\begin{aligned} v_j - v_i &= a_{i,j}(e_j - e_i) \\ \sigma_j - \sigma_i &= \varrho_0 a_{i,j}(v_j - v_i), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где символом $a_{i,j}$ обозначена лагранжевая скорость разрыва на границе областей i и j. Решая систему (3.1) относительно величин $a_{i,j}$ и v_j, приходим к формулам

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \pm\sqrt{\frac{A_{i,j}}{\varrho_0}} \\ v_j &= v_i \pm (e_j - e_i)\sqrt{\frac{A_{i,j}}{\varrho_0}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В этих формулах введено обозначение

$$A_{i,j} = \frac{\sigma_j - \sigma_i}{e_j - e_i}. \tag{3.3}$$

В дальнейшем аппроксимируем зависимость $\sigma - e$ линеаризированной диаграммой на фиг. 2. Тогда или $A_{i,j} = E$, или $A_{i,j} = E_1$. Нижние знаки в (3.2) придется взять в случае, когда волна движется в отрицательном направлении оси x (тогда $a_{i,j} < 0$).

Условия (3.2) позволяют определить величины σ, e, ϱ и v во всех областях плоскости (x, t). Это можно сделать аналитически, но очень простым и удобным является и графический метод, который представляется ниже.

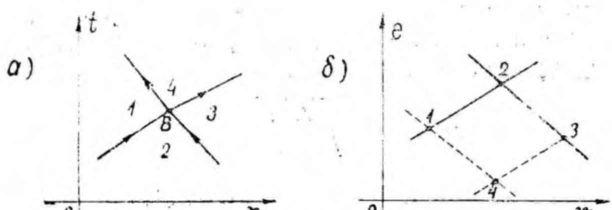
Посмотрим сперва как исследовать взаимодействие двух волн. Соответствующее построение проведем на плоскостях (x, t) и (v, e) (фиг. 4).

Допустим, что величины σ, e, ϱ, v известны в областях 1, 2, 3, а также известны и скорости $a_{1,2}$ и $a_{2,3}$. Эти волны встречаются в точке B, вследствие чего возникает преломленная волна 3—4 и отраженная волна 1—4. Нам придется определить скорости этих волн $a_{3,4}$, $a_{1,4}$ и величины σ_4, e_4, ϱ_4, v_4.

Так как величины e_1, e_2, e_3, v_1, v_2, v_3 известны, то нам известны и точки 1, 2, 3 в плоскости (v, e) (фиг. 4б). Теперь надо расчитать на каком отрезке из фиг. 4 мы находимся при переходе из точек 1 и 3 в точку 4 и по формуле (3.3) вычислить величины $A_{1,4}$, $A_{3,4}$. Из второй формулы системы (3.2) вытекает, что прямые 1—4 и 3—4 на фиг. 4б имеют наклоны к оси e:

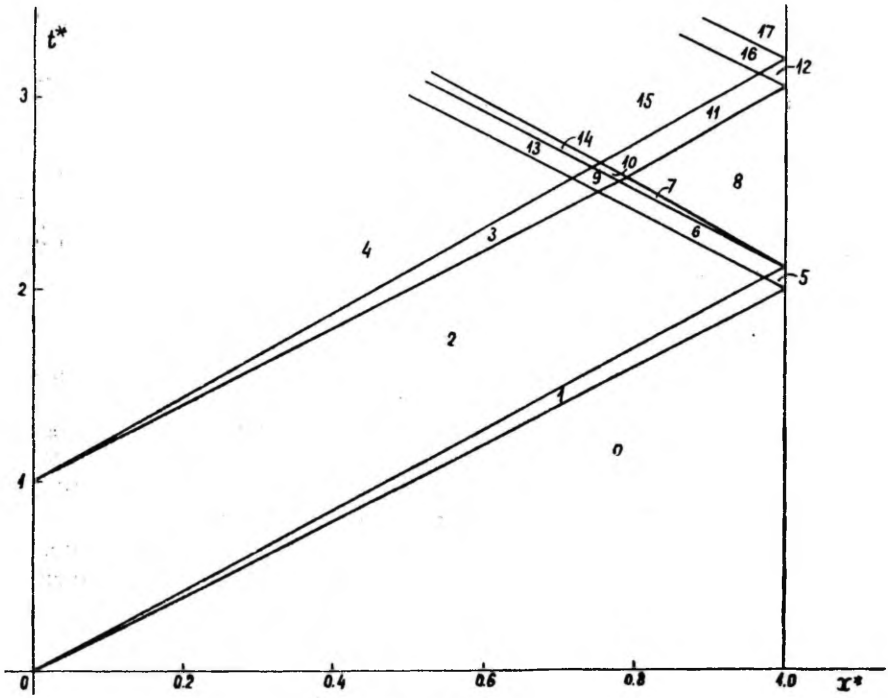
$$-\sqrt{\frac{A_{1,4}}{\varrho_0}} \quad \text{и} \quad +\sqrt{\frac{A_{3,4}}{\varrho_0}}.$$

(Здесь в случае отраженной волны взят перед радикалом знак «—»). Теперь уже нетрудно найти точку пересечения 4 и из фиг. 4б определить величины e_4 и v_4. Напряжение вычисляем на основании диаграммы фиг. 2, а плотность ϱ_4 по формуле $\varrho_4 = \varrho_0(1 - e_4)^{-1}$. Из формул (3.2) вытекает еще, что прямые линии на фиг. 4 а и б должны иметь соответственно одинаковый



Фиг. 4.

наклон; это дает нам возможность определить направления волн 3—4 и 1—4 на фиг. 4а (например, линия 3—4 из фиг. 4а должна быть параллельна прямой линии 3—4 из фиг. 4б). По такой же методике можно исследовать всякие взаимодействия между волнами.



Фиг. 5.

Целесообразно перейти к безразмерным величинам $t^* = t/t_1$, $x^* = x/h$; тогда снятие нагрузки происходит при $t^* = 1$, а край пластины определяется условием $x^* = 1$. Введем еще параметр

$$\delta = \frac{h}{t_1} \tag{3.4}$$

и переходим к безразмерным скоростям

$$a^* = \frac{a}{\delta}, \qquad v^* = \frac{v}{\delta}. \tag{3.5}$$

В плоскости (x^*, t^*) фронт волны представляется прямой линией

$$x^* = a^*t^* + \mathrm{const}, \tag{3.6}$$

а прямые в плоскости (v^*, e) имеют наклоны к оси e:

$$\pm \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{A_{ij}}{\varrho_0}} \tag{3.7}$$

и, следовательно, параллельность между соответствующими прямыми в плоскостях (x^*, t^*) и (v^*, e) сохраняется.

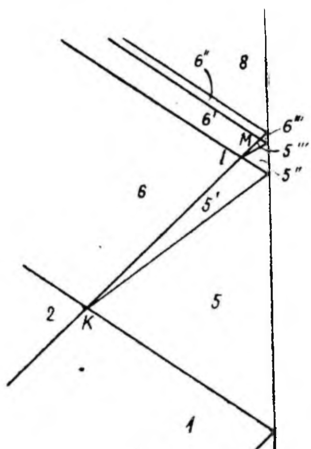
Таблица 1

№	v	e	$\sigma \cdot 10^{-5}$	№	v	e	$\sigma \cdot 10^{-5}$
1	0,0025	0,0050	0,100	9	0,0491	0,0947	1,545
2	0,1046	0,2175	4,000	10	0,1075	—0,0335	—0,570
3	0,0488	0,0950	1,550	11	0,1513	—0,1274	—2,120
4	0,0017	0,0011	0	12	0,0981	—0,0214	0
5	0,0050	0	0	13	0,0041	—0,0041	—0,085
6	0,1071	0,2125	3,900	14	0,0625	—0,1323	—2,201
7	0,1660	0,0950	1,550	15	0,1075	—0,2273	—3,768
8	0,2088	0,0011	0				

Введение параметра δ позволяет найденные результаты перенести на другие задачи с тем же соотношением $h : t_1$.

В качестве примера решим следующую задачу. Пусть диаграмма $\sigma - e$ имеет указанный на фиг. 2 вид, причем $E = 2 \cdot 10^6$ [кГ/см²], $E_1 = 1{,}65 \cdot 10^6$ [кГ/см²], $\sigma_s = \sigma'_s = 10\,000$ [кГ/см²], $\sigma_B = 175\,000$ [кГ/см²], $\varrho_0 = 7{,}8$ [г/см³].

В промежутке $0 \leqslant t^* \leqslant 1$ на пластине действует напряжение $\sigma_0 = 400\,000$ [кГ/см²]. Для параметра δ примем значение $\delta = 10^6$ [см/сек].



Фиг. 6.

Результаты вычислений представлены на фиг. 5 и в таблице 1, где даны значения величин v, e, σ в областях, указанных на фиг. 5. В момент приложения нагрузки возникают две волны: упругая волна 0—1 и ударная волна 1—2, переводящая материал из состояния A в состояние C (фиг. 2). В момент снятия нагрузки $t^* = 1$ возникают тоже две волны: упругая волна разгрузки 2—3 (разгружает материал до точки D) и волна пласти-

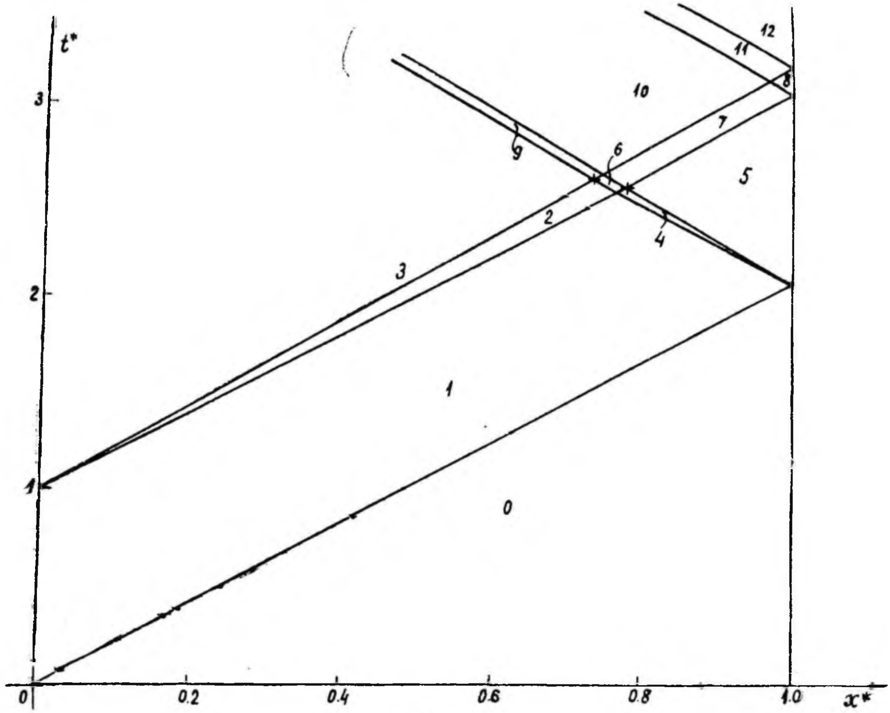
Таблица 2

№	v	e	$\sigma \cdot 10^{-5}$
5′	0,0075	0,0050	0,100
5″	0,0100	0	0
5‴	0,0125	0,0050	0,100
6′	0,1096	0,2075	3,800
6″	0,1121	0,2025	3,700
6‴	0,0150	0	0

ческой разгрузки 3—4 (этой волне соответствует снятие нагрузки по прямой DF на фиг. 2). Отражение волн 0—1 и 0—2 от края $x^* = 1$ требует более детального исследования (фиг. 6). Непосредственный переход из области 5 в область 6 невозможен, так как точка σ_6 лежит на прямой BC из фиг. 2, а точка $\sigma_5 = 0$ в начале координат. Следовательно, между ними должна возникнуть область 5′, где $\sigma'_5 = \sigma_A = \sigma_s$; фронт 5′—6 является ударным. Такое раздвоение волн[1] появляется и в точках L, M и т. д.; после многократных отражений напряжение уменьшается до значения $\sigma_8 = 0$ (точка F на фиг. 2). Проведенные вычисления дали для параметров в областях на фиг. 6 значения, указанные в таблице 2. Но имея в виду малые размеры областей 5′, 5″, 5‴, 6′, 6″, 6‴ и т. д., можно их на диаграмме 5 не учитывать и считать, что переход из области 6 в область 8 происходит через область 7, где $\sigma_7 = \sigma_D$.

Раздвоение волн возникает и в точке пересечения фронтов 2—3 и 2—6, но, имея в виду малые размеры области 9, этот эффект вряд ли имеет существенное влияние на результаты вычислений. Поэтому мы в дальнейшем указанное выше раздвоение волн учитывать не будем. Из таблицы 1 вытекает еще, что в некоторых областях величина σ изменяет знак и появляются растягивающие напряжения. Впервые возникает отрицательное напряжение в области 10, где имеем $\sigma_{10} = -57000$ [кГ/см^2]. Повидимому, настолько больших растягивающих напряжений материал не может выдержать и происходит откол, вследствие чего толщина пластины уменьшается. Проведенный расчет показывает, что откол происходит при координате $x^*_p = 0{,}771$.

[1] Если $\sigma < \sigma_B$, то возникает еще стационарный фронт.



Фиг. 7.

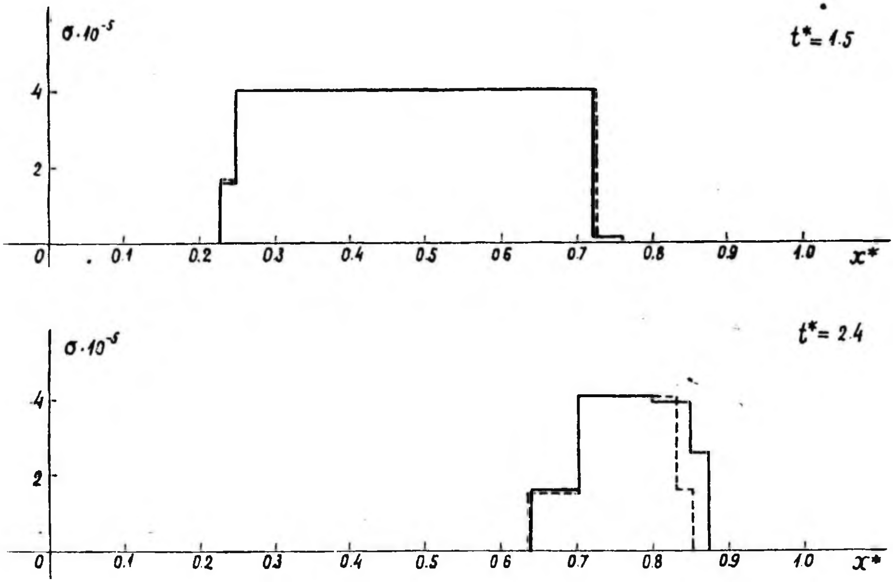
Для того чтобы выяснить, насколько существенно учесть на диаграмме 2 начальный упругий участок AO и участок упругой разгрузки BD, решим поставленную задачу также по упрощенной диаграмме из фиг. 3. В качестве σ_B возьмем значение $\sigma_B = 165\,000$ [кГ/см^2], значения всех остальных величин оставим неизменными. Результаты представлены на фиг. 7 и в таблице 3.

В целях сравнения решений для обоих случаев, составлено распределение напряжений по толщине пластины для моментов

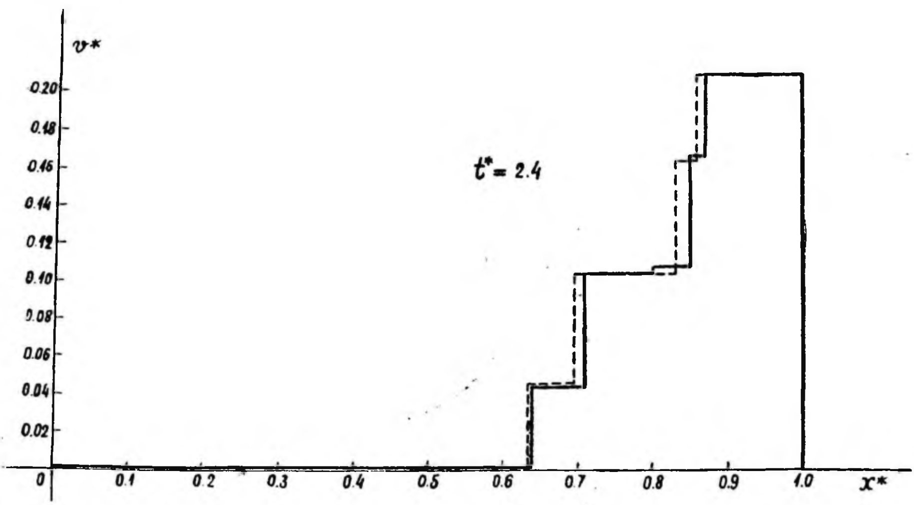
Таблица 3

№	v	e	$\sigma \cdot 10^{-5}$	№	v	e	$\sigma \cdot 10^{-5}$
1	0,1046	0,2175	4,000	7	0,1522	—0,1294	—2,134
2	0,0457	0,1000	1,650	8	0,0932	0	0
3	0,0001	0	0	9	0,0590	—0,1294	—2,134
4	0,1635	0,1000	1,650	10	0,1697	—0,0908	—1,498
5	0,2091	0	0	11	0,1108	—0,0386	0,637
6	0,1046	—0,0294	—0,484	12	0,1284	0	0

времени $t^* = 1{,}5$ и $t^* = 2{,}4$ и распределение скорости v^* при $t^* = 2{,}4$; эти графики представлены на фиг. 8—9 (сплошная линия соответствует диаграмме на фиг. 2, пунктирная линия — упрощенной диаграмме на фиг. 3). Как видно из этих графи-



Фиг. 8.



Фиг. 9.

ков, разница между обоими случаями несущественна. Из диаграммы на фиг. 7 и из таблицы 3 вытекает еще, что откол происходит в точке пересечения фронтов 1—2 и 1—4, причем координата откола имеет значение $x^*_p = 0{,}771$, полученное также для случая диаграммы из фиг. 2.

На основании сказанного можно делать вывод, что при напряжениях порядка 300 000—400 000 кГ/см^2 вполне можно пренебречь упругими эффектами материала.

Литература

1. Буранцев А. И., Есенина Н. А., Взаимодействие волны разгрузки с ударной волной. Вестн. Ленингр ун-та, 1966, № 13, 55—63.
2. Курант Р., Фридрихс К., Сверхзвуковое течение и ударные волны. Москва, 1950.

Поступило
2 I 1970

SUURE AMPLITUUDIGA TASAPINNALISTE LAINETE LEVIK JA PEEGELDUMINE PAKSUS PLAADIS

Ü. Lepik

Resümee

Analüüsitakse tasapinnaliste lainete levikut ja peegeldumist paksus plaadis. Plaadi pinnale on rakendatud rõhk suurusjärguga 10^5 baari; rõhk saavutab maksimaalse väärtuse alghetkel, jääb seejärel konstantseks ning kahaneb uuesti hetkeliselt nullväärtuseni. Deformatsioonid on lõplikud. Temperatuuri ja deformatsioonikiiruse mõju materjali mehhaanilistele karakteristikutele ei arvestata.

«Pinge-deformatsiooni» diagramm lineariseeritakse. On vaadeldud selle diagrammi kahte erijuhtu: 1) arvestatakse elastseid deformatsioone, elastset koormuselangust ja sekundaarseid plastseid deformatsioone: 2) kõik elastsed efektid jäetakse arvesse võtmata.

Läbiviidud arvutustest nähtub, et rõhkudel 300 000—400 000 baari võib kasutada gaasidünaamilist mudelit, kuna neil rõhkudel elastsete efektide osa on väike.

PROPAGATION AND REFLECTION OF PLANE WAVES WITH HIGH AMPLITUDES IN A THICK PLATE

Ü. Lepik

Summary

Propagation and reflection of plane waves in a thick plate is analysed. On the surface of the plate pressure of order 10^5 bar is applied; the pressure profile in time has a rectangural form. Strains are considered finite; the problem is formulated and resolved in the variables of Lagrange.

Temperature and strain-rate effects on the characteristics of the material are neglected.

Strain-stress diagram of the material is linearized. Two special forms of this diagram are examined: 1) elastic strains, unloading and secondary plastic strains are taken in account, 2) all elastic effects are neglected (gasodynamical model).

It follows from the calculations carried out that for stresses 300 000—400 000 bar the gasodynamical model guarantees a fully sufficient exactness.

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ УДАРНОЙ НАГРУЗКЕ

Ю. Кирс

Кружок СНО при кафедре теоретической механики

Когда на идеальный жестко-пластический материал действует нагрузка, превышающая статическую разрушающую нагрузку, то не может существовать какое-либо состояние равновесия напряжений. В этом случае конструкция должна испытывать ускоренное движение. Если такое движение продолжается некоторое время, то изменения в геометрии конструкции станут весьма существенными и конструкция станет неспособной выполнять свои функции в дальнейшем. Однако, если нагрузка действует в течение предельно короткого времени, то внутренняя сопротивляемость конструкции может стать достаточной, чтобы предупредить разрушение конструкции. После прекращения действия нагрузки тело (конструкция) скоро остановится. Чтобы судить о дальнейшей работе конструкции, надо знать конечное положение тела, какие силы и изгибающие моменты действовали в нем, какая была скорость частиц тела и т. д.

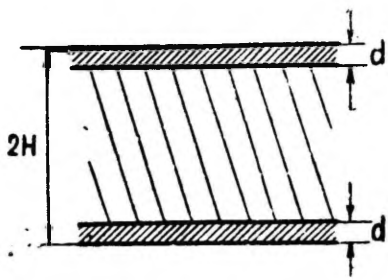
В работе [1] исследуется деформирование цилиндрических оболочек конечной длины при ударной нагрузке в виде равномерно распределенного внешнего давления. Используется приближенное условие текучести в виде квадрата на плоскости $M_x N_\varphi$ (где M_x — осевой изгибающий момент, N_φ — окружная сила). Исследуются только малые прогибы. Большие статические прогибы цилиндрической оболочки исследуются в работе [2].

В данной статье исследуются большие прогибы жестко-пластической цилиндрической оболочки под действием *постоянного* статического осевого растяжения N_x и равномерно распределенного внешнего динамического давления P.

Предполагаем, что в интервале времени $(0, T)$ нагрузка P является постоянной (и превышает статическую разрушающую нагрузку P_0), и в момент T_0 нагрузка P становится мгновенно равной нулю. Итак, нагрузка P действует в течение предельно короткого времени. Материал оболочки двухслойный и имеет вид, изображенный на фигуре 1.

§ 1. Основные соотношения

Рассмотрим цилиндрическую оболочку длиной $2L$, толщиной $2H$ и радиуса R. Начало координат находится на центральной поверхности левого конца оболочки, ось OX направлена параллельно оси цилиндра, ось OZ — по радиусу к центру (см. фиг. 2).



Фиг. 1.

Используем следующие безразмерные величины:

$$u=\frac{U}{I},\qquad w=\frac{W}{H},\qquad x=\frac{X}{L},$$

$$n_\varphi=\frac{N_\varphi}{2\sigma_0 d},\quad n_x=\frac{N_x}{2\sigma_0 d},\quad m_x=\frac{M_x}{2\sigma_0 H d},\tag{1.1}$$

$$t=\frac{T}{T_0},\quad \omega^2=\frac{L^2}{HR},\quad b=\frac{\mu L^2}{T_0^2 2\sigma_0 d},\quad p=\frac{PR}{2\sigma_0 d},$$

где U — перемещение в направлении оси OX,
W — прогиб оболочки,
T — время,
μ — плотность материала оболочки,
σ_0 — предел текучести материала оболочки,
ω^2, b — константы, характеризующие оболочку и ее нагружение.

Уравнение равновесия имеет следующий вид:

$$m''_x+n_x w''+n_\varphi\omega^2+p\omega^2-b\ddot{w}=0,\tag{1.2}$$

где точка над буквой обозначает дифференцирование на t, а штрих — по x.

Безразмерные усилия и моменты равняются:

$$n_x = \frac{1}{2\sigma_0}(\sigma_x^+ + \sigma_x^-),$$

$$n_\varphi = \frac{1}{2\sigma_0}(\sigma_\varphi^+ + \sigma_\varphi^-),$$

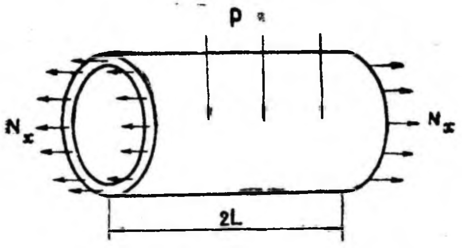
$$m_x = \frac{1}{2\sigma_0}(\sigma_x^+ - \sigma_x^-),$$

где σ_x^+ и σ_φ^+ — напряжения в верхнем слое, а σ_x^- и σ_φ^- — в нижнем слое. Обобщённые компоненты имеют вид:

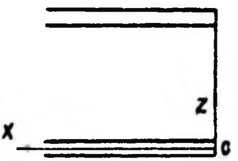
$$\lambda_x = u' + \frac{H^2}{2L^2}(w')^2,$$

$$\lambda_\varphi = -\frac{H}{R}w,$$

$$k_x = -\frac{H^2}{L^2}w''.$$

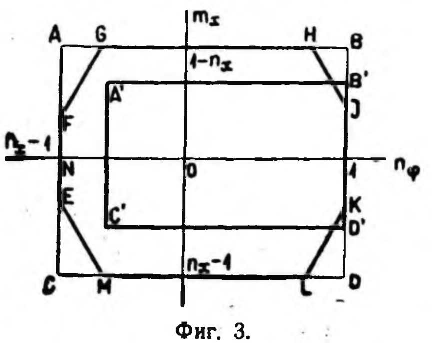


Фиг. 2a.



Фиг. 2b.

Материал оболочки подчиняется закону пластичности Треска и ассоциированному закону течения. Учитывая двухслойность оболочки и то обстоятельство, что осевая сила n_x не меняется, получим кривую текучести в виде восьмиугольника или четырёхугольника в зависимости от силы n_x. Если $n_x < 1/2$ — употребляем восьмиугольник $FGHJKLME$, если $n_x > 1/2$ — четырехугольник $A'B'D'C'$ (см. фиг. 3).



Фиг. 3.

Уравнения сторон:

$$EF \text{ и } A'C': \qquad n_\varphi = n_x - 1,$$
$$FG: m_x - 2n_\varphi = 2 - n_x,$$
$$GH: \qquad m_x = 1 - n_x,$$

где $n_x = a = \text{const}$.

Вектор скорости деформации имеет вид

$$\mu_1(\dot{\lambda}_x, \dot{\lambda}_\varphi, \dot{k}_x),$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= \dot{u}' + \frac{H^2}{L^2} w'\dot{w}', \\ \dot{\lambda}_\varphi &= -\frac{H}{R}\dot{w}, \\ \dot{k}_x &= -\frac{H^2}{L^2}\dot{w}''. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Начальные условия:

$$w(x, 0) = \dot{w}(x, 0) = 0. \tag{1.4}$$

Граничные условия и условия симметрии:

$$\begin{gathered} m_x(0, t) = w(0, t) = \dot{w}(0, t) = 0, \\ m'_x(1, t) = 0, \quad \text{и} \quad w'(1, t) = 0 \quad \text{или} \quad m_x(1, t) = 1 - n_x. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Прогиб w и момент m_x должны быть непрерывными, и следующие равенства должны быть выполнены:

$$[\dot{w}] + \dot{\xi}_1[w'] = 0, \quad [\dot{m}_x] + \dot{\xi}_1[m'_x] = 0, \tag{1.6}$$

где [ ] — обозначает скачок соответствующей величины и $\dot{\xi}_1$ — скорость движения шарнирной окружности.

§ 2. Деформирование оболочки при четырехугольной кривой текучести

В рассматриваемом здесь случае получим точное решение при $n_x > 1/2$ и приближенное решение при $n_x < 1/2$. Деформирование оболочки происходит в течение двух фаз.

I фаза: $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $p = \text{const}$. Оболочка работает в следующих режимах: при $0 \leqslant x \leqslant x_1(t)$ — в режиме NA, и при $x_1(t) \leqslant x \leqslant 1$ — в режиме A, причем $x_1(0) = 1$ и $\dot{x}_1 < 0$, (см. фиг. 3).

1) Если $0 \leqslant x \leqslant x_1(t)$, то $n_\varphi = a - 1$ и $n_x = a$. Из ассоциированного закона течения и уравнений (1.4) и (1.5) следует:

$$w = \varphi_1(t)x, \qquad \dot{w} = \dot{\varphi}_1(t)x,$$

где

$$\varphi_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) = 0. \tag{2.1}$$

Из уравнения (1.2), применяя граничные условия (1.5), находим:

$$m_x = \frac{\ddot{\varphi}_1 b}{6}(x^3 - x_1^2 x) - \frac{\omega^2}{2}(a + p - 1)(x^2 - x_1 x) + \frac{(1-a)x}{x_1}.$$

2) Если $x_1(t) \leqslant x \leqslant 1$, то $n_\varphi = a - 1$, $n_x = a$ и $m_x = 1 - a$. Из уравнения равновесия (1.2) получается:

$$aw'' - b\ddot{w} = (1 - a - p)\omega^2. \tag{2.2}$$

Решение уравнения (2.2) будем искать в виде:

$$w = \psi_1(t)x^3 + \psi_2(t)x^2 + \psi_3(t)x + \psi_4(t).$$

Чтобы оно удовлетворяло уравнению (2.2), должны выполняться условия:

$$\ddot{\psi}_1 = \ddot{\psi}_2 = 0, \quad 6a\psi_1 = \ddot{\psi}_3 b, \quad 2a\psi_2 - \ddot{\psi}_4 b = (1 - a - p)\omega^2.$$

Функции φ_1, ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 и x_1 можем определить из следующих условий: непрерывности w, w' и $\dot{w}$ при значении аргумента $x = x_1$, симметрии $w'(1, t) = 0$, начальных условий (2.1), условия $m'_x(1, 0) = 0$. В итоге получим:

$$x_1^2 = 1 - \frac{3at^2(\omega^2(a + p - 1) - 2(1 - a))}{b(6(1 - a) - \omega^2(a + p - 1))},$$

$$\varphi_1(t) = \frac{x_1 - 1}{2a} \cdot (\omega^2(a + p - 1) - 6(1 - a)),$$

и если $x_1 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$w = \frac{3t^2}{4b}(\omega^2(a + p - 1) - 2(1 - a)) -$$

$$- \frac{1}{4a}(6(1 - a) - \omega^2(a + p - 1))(x - 1)^2.$$

Решение является кинематически возможным, если

$$\dot{w}'' \leqslant 0, \quad \dot{w} > 0, \quad 0 < x_1 < 1.$$

Первое из этих неравенств всегда выполнено, второе выполняется, если

$$p < (1 - a)\left(1 + \frac{6}{\omega^2}\right), \tag{2.3}$$

и третье, если

$$p < (1 - a)\left(1 + \frac{6(a + b)}{\omega^2(3a + b)}\right). \tag{2.4}$$

Решение является и статически возможным, ибо $0 \leqslant m_x \leqslant 1 - a$.

З а м е ч а н и е. Если выполняется неравенство (2.4), то всегда выполнено и (2.3).

II ф а з а: $1 \leqslant t \leqslant t_2$ и $p = 0$. Движение оболочки замедляется и в момент $t = t_2$ она остановится. Теперь мы имеем следующие режимы: при $0 \leqslant x \leqslant x^*_1$ — режим NA, и при $x^*_1 \leqslant x \leqslant 1$ — режим A, где

$$x_1^* = \sqrt{1 - \frac{3a(\omega^2(a+p-1)-2(1-a))}{b(6(1-a)-\omega^2(a+p-1))}} = \text{const}.$$

1) Если $0 \leqslant x \leqslant x_1^*$, то $n_\varphi = a - 1$ и $n_x = a$. Опять $\dot{w}'' = 0$ и $w = \varphi_2(t)x$. Выражение для момента m_x получается, как и раньше, из уравнения равновесия (1.2), учитывая граничные условия (1.5):

$$m_x = \frac{\ddot{\varphi}_2 b}{6}(x^3 - x_1^{*2}x) + \frac{\omega^2}{2}(1-a)(x^2 - x_1^* x) + \frac{(1-a)x}{x_1^*}. \quad (2.5)$$

2) Если $x_1^* \leqslant x \leqslant 1$, то $m_x = 1 - a$, $n_\varphi = a - 1$, $n_x = a$ и условия, которым должен удовлетворять прогиб w, следующие:

а) уравнение равновесия $aw'' - b\ddot{w} = (1-a)\omega^2$,

б) непрерывность w и $\dot{w}$ в момент $t = 1$ как при $0 \leqslant x \leqslant x_1^*$, так и при $x_1^* \leqslant x \leqslant 1$,

в) непрерывность w и $\dot{w}$ при значении аргумента $x = x_1^*$,

г) условие симметрии $w'(1, t) = 0$.

Прогиб выразится так:

$$w = \xi(x) + \eta(t), \qquad (\text{при} \quad x_1^* \leqslant x \leqslant 1).$$

Следовательно,

$$\xi'' = -\frac{1}{2a}(6(1-a) - \omega^2(a+p-1)),$$

$$\ddot{\eta} = \frac{1}{2b}(\omega^2(a+p-1) - 8(1-a)).$$

Из условий а), б), в) и г) можем конкретизировать выражение для w и найти функцию $\varphi_2(t)$. При $x_1^* \leqslant x \leqslant 1$ получим:

$$\begin{aligned} w = {} & \frac{1}{2b}(\omega^2(a+p-1) + 1 - a)(2t-1) - \\ & - \frac{1}{4b}(8(1-a) - \omega^2(a+p-1))t^2 - \\ & - \frac{1}{4a}(6(1-a) - \omega^2(a+p-1))(x-1)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) = {} & \frac{1}{2bx_1^*}(\omega^2(a+p-1) + 1 - a)(2t-1) - \\ & - \frac{1}{4bx_1^*}(8(1-a) - \omega^2(a+p-1))t^2 - \\ & - \frac{1}{4ax_1^*}(6(1-a) - \omega^2(a+p-1))(x_1^* - 1)^2. \end{aligned}$$

Оболочка остановится, если $\dot{w} = 0$, т. е. в момент

$$t_2 = \frac{2(\omega^2(a+p-1) + 1 - a)}{8(1-a) - \omega^2(a+p-1)}.$$

Решение является кинематически возможным, если

$$\dot{w}'' \leqslant 0, \quad \ddot{w} < 0, \quad \dot{w} \geqslant 0, \quad t_2 > 1.$$

Эти условия выполнены. Решение является статически возможным, если вычисляемый из выражения (2.5) момент m_x удовлетворяет неравенству:

$$a - 1 \leqslant m_x \leqslant 1 - a.$$

Окончательное положение оболочки:

$$w(x, t_2) = A - B(x-1)^2 \qquad \text{при} \quad x_1^* \leqslant x \leqslant 1,$$
$$w(x, t_2) = (A - B(x_1^* - 1)^2) \qquad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_1^*,$$

где

$$A = \frac{3(\omega^2(a+p-1)+1-a)(\omega^2(a+p-1)+2a-2)}{2b(8-8a-\omega^2(a+p-1))},$$

$$B = \frac{6(1-a)-\omega^2(a+p-1)}{4a}.$$

На фиг. 4 в качестве применения рассматриваемой теории приведен пример деформации оболочки при следующих цифровых данных: $a = 0{,}5$, $b = 2$, $\omega^2(a+p-1) = 2$.

Во время I фазы движеия имеется нестационарная шарнирная окружность, а во время II фазы — стационарная шарнирная окружность. Условие непрерывности (1.6) всегда выполнено.

§ 3. Деформирование оболочек при восьмиугольной кривой текучести

По-прежнему осевая сила $n_x = a = \text{const}$. Движение оболочки происходит в течение двух фаз.

I фаза: $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $p = \text{const}$. Зоны оболочки находятся в следующих режимах: при $0 \leqslant x \leqslant x_1$ — в режиме NF и при $x_1 \leqslant x \leqslant 1$ — в режиме FG (см. фиг. 3).

1) Если $0 \leqslant x \leqslant x_1$, то $n_x = a$, $n_\varphi = a - 1$ и $\dot{w}'' = 0$. Для прогиба и скорости прогиба получим:

$$w = \varphi(t)x \quad \text{и} \quad \dot{w} = \dot{\varphi}(t)x. \tag{3.1}$$

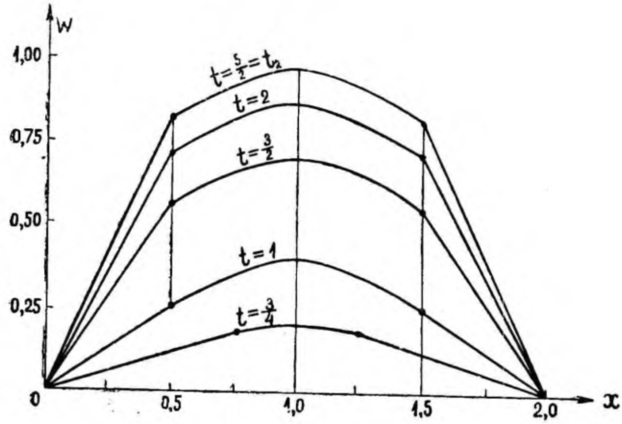
Выражение для m_x получим из уравнения равновесия (1.2), употребляя граничные условия $m_x(0, t) = 0$, $m_x(x_1, t) = a$:

$$m_x = \frac{\ddot{\varphi}b}{6}(x^3 - x_1^2x) - \frac{\omega^2}{2}(a+p-1)(x^2 - x_1x) + \frac{ax}{x_1}. \tag{3.2}$$

2) Если $x_1 \leqslant x \leqslant 1$, то $n_x = a$.

Из ассоциированного закона течения следует:

$$\begin{aligned} &m_x = 2n_\varphi + 2 - a, \\ &\dot{w}'' + \frac{\omega^2}{2}\dot{w} = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$



Фиг. 4.

откуда

$$\dot{w} = \dot{C}_1(t)\cos\omega_1 x + \dot{C}_2(t)\sin\omega_1 x,$$

где $\omega_1^2 = \dfrac{\omega^2}{2}$.

Из условия непрерывности $\dot{w}$ при значении аргумента $x = x_1$ (тогда и w непрерывен при $x = x_1$) и условия симметрии $w'(1, t) = 0$ определяем константы интегрирования $C_1(t)$ и $C_2(t)$. Прогиб w равняется:

$$w = \frac{\varphi(t)\, x_1 \cos(\omega_1(1 - x))}{\cos(\omega_1(1 - x_1))}. \tag{3.4}$$

Так как w' непрерывен при $x = x_1$, то

$$\omega_1 x_1 \tan(\omega_1(1 - x_1)) = 1. \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) — трансцендентное уравнение для определения x_1. Подставляя соотношения (3.3) в уравнения равновесия (1.2) получим

$$m''_x + \frac{\omega^2}{2} m_x = \frac{\omega^2}{2}(2 - a - 2p) - aw'' + b\ddot{w}.$$

Отсюда, учитывая граничные условия $m_x(x_1, t) = a$, $m'_x(1, t) = 0$, получим выражение для момента m_x:

$$m_x = 2 - a - 2p + \frac{2(a + p - 1)\cos(\omega_1(1 - x))}{\cos(\omega_1(1 - x_1))} +$$

$$+ \frac{x_1(a\omega_1^2\varphi + b\ddot{\varphi})}{2\omega_1^2\cos^2(\omega_1(1 - x_1))}\cdot\{\cos(\omega_1(1 - x_1))\cos(\omega_1(1 - x)) -$$

$$- x\omega_1\cos(\omega_1(1 - x_1))\sin(\omega_1(1 - x)) - \omega_1\sin(\omega_1(x - x_1))\}. \tag{3.6}$$

Условие непрерывности m'_x при $x = x_1$ дает возможность определить функцию $\varphi(t)$ из следующего дифференциального уравнения:

$$\ddot{\varphi}(t)+\alpha^2\varphi(t)=\beta, \tag{3.7}$$

где

$$\alpha^2=\frac{3a\omega_1^2\{1-x_1\cos^2(\omega_1(1-x_1))\}}{b\{3-x_1\cos^2(\omega_1(1-x_1))\}}, \tag{3.8}$$

$$\beta=\frac{6\cos^2(\omega_1(1-x_1))\cdot(a+2p-2+\omega_1^2x_1^2(a+p-1))}{bx_1^2\{3-x_1\cos^2(\omega_1(1-x_1))\}}. \tag{3.8}$$

Решением дифференциального уравнения (3.7) при начальных условиях $\varphi(0)=\dot{\varphi}(0)=0$, является функция

$$\varphi(t)=\frac{\beta}{\alpha^2}(1-\cos\alpha t).$$

Подставляя функцию $\varphi(t)$ и ее производные в выражения (3.1), (3.2), (3.4) и (3.6), мы получим выражения для изгибающих моментов m_x и прогибов в окончательном виде.

Решение является кинематически возможным, если $\dot{k}_x\geqslant 0$ и $\dot{\lambda}_\varphi<0$. Это выполнено, если $\dot{\varphi}>0$, т. е. если $\beta\alpha^{-1}\sin\alpha t>0$.

Решение является статически возможным, если $m_x\leqslant 1-a$. Это выполнено, если удовлетворено неравенство:

$$1-2p+\frac{2(a+p-1)}{\cos(\omega_1(1-x_1))}+\frac{(a\omega_1^2\varphi+b\ddot{\varphi})(x_1-1)}{2\omega_1^2\cos(\omega_1(1-x_1))}\leqslant 0.$$

II фаза: $t>1$, $p=0$. Скорость оболочки замедляется и в момент $t=t_2$ становится равной нулю. Зоны оболочки находятся в тех же режимах что и при I фазе: при $0\leqslant x\leqslant x_1$ — в режиме NF, при $x_1\leqslant x\leqslant 1$ — в режиме FG (см. фиг. 3).

Задача решается аналогично тому, как было проведено решение в I фазе. Результаты вычислений следующие:

1) $0\leqslant x\leqslant x_1$:

$$n_x=a,\qquad n_\varphi=a-1,$$

$$\dot{w}=\dot{\psi}(t)x,\quad w=\psi(t)x,$$

$$m_x=\frac{b\ddot{\psi}}{6}(x^3-x_1^2x)+\omega_1^2(1-a)(x^2-x_1x)+\frac{ax}{x_1}.$$

2) $x_1\leqslant x\leqslant 1$:

$$n_x=a,$$

$$m_x=2n_\varphi+2-a,$$

$$\dot{w}=\frac{\psi(t)x_1\cos(\omega_1(x-1))}{\cos(\omega_1(1-x_1))}.$$

Момент m_x можем вычислить из формулы (3.6), только подставив там $p=0$ и ψ вместо φ.

Для функции $\psi(t)$ получим

$$\psi(t)=\alpha^{-2}\{\gamma-\beta\cos\alpha t+(\beta-\gamma)\cos(\alpha(t-1))\},$$

где α^2 и β определяются через (3.8) и

$$\gamma = \frac{6\cos^2(\omega_1(1-x_1))\cdot(a-2+\omega_1^2 x_1^2(a-1))}{b x_1^2\{3 - x_1\cos^2(\omega_1(1-x_1))\}}.$$

Оболочка остановится в момент t_2:

$$t_2 = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arccot}\frac{\beta+(\gamma-\beta)\cos\alpha}{(\gamma-\beta)\sin\alpha}.$$

Решение является кинематически возможным, если $\dot{\psi}>0$ и $\ddot{\psi}<0$, т. е.

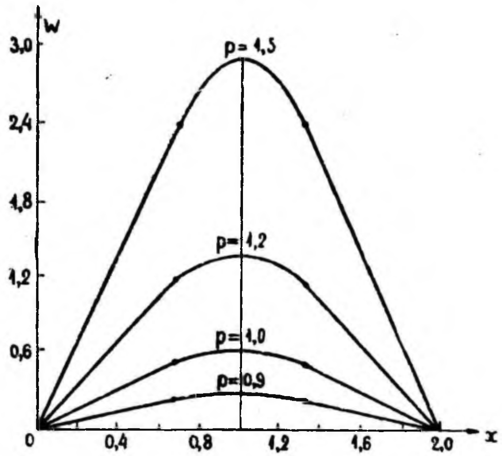
$$\beta\cos\alpha t + (\gamma-\beta)\cos(\alpha(t-1)) < 0$$

при каждом значении t, откуда

$$\gamma < \beta(1-\cos\alpha).$$

Решение является статически возможным при

$$m_x \leqslant 1 - a.$$



Фиг. 5.

На фиг. 5 изображено конечное положение оболочки, т. е. в момент $t=t_2$, при $\omega^2=8$, $a=1/4$, $b=2$ и нескольких значениях нагрузки p.

Литература

1. Hodge, P. G., Impact Pressure Loading of Rigid-pastic Cylindrical Shells. J. Mech. Phys. Solids, 1955, 3, 176—188.
2. Lepik, Ü., Large Deflections of Rigid-plastic Cylindrical Shells under Axial Tension and External Pressure. Nuclear Eng. and Design, 1966, 4, 29—38.

Поступило
18 III 1970

JÄIK-PLASTSETE SILINDRILISTE KOORIKUTE DÜNAAMILINE KOORMAMINE SUURTE LÄBIPAINETE PUHUL

J. Kirs

Resümee

Käesolevas töös uuritakse jäik-plastsete silindriliste koorikute suuri läbipaindeid dünaamilisel koormamisel. Löökkoormus on väline ja silindri külgpinnal ühtlaselt jaotatud. Peale selle mõjub koorikule veel muutumatu teljesuunaline tõmbejõud. On kasutatud kahekihilist koorikut, mis allub Tresca plastsuse tingimusele ja assotsieeritud voolamisseadusele. Kõik muud eeldused on toodud §-s 1. On lahendatud ülesanne vabalt toetatud kooriku jaoks nii ristkülikukujulise voolavuskõvera (§ 2) kui kaheksanurgakujulise voolavuskõvera (§ 3) korral. Mõlemal juhul on toodud üks näide.

LARGE DEFLECTIONS OF RIGID-PLASTIC CYLINDRICAL SHELLS UNDER DYNAMIC LOADING

J. Kirs

Summary

Using Tresca's yield condition and associated flow rule, deformations of cylindrical shells of sandwich type with simply supported ends are studied. The shell under observation is loaded with impact lateral pressure load and with a constant tensile end-load. Deflections may be of the same order as the thickness of the shell. The solution of the problem is found using both rectangular and octagonal yield curves.

О БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ ЖЁСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Я. Леллеп

Кружок СНО при кафедре теоретической механики

В настоящей статье рассматриваются большие прогибы свободно опертых и жестко заделанных стержней, которые нагружены внезапно приложенной равномерно распределенной поперечной нагрузкой и осевым растяжением. Допускается, что осевое растяжение приложено к стержню раньше, чем поперечная нагрузка, и оно остается постоянным во всем процессе деформации. Время действия поперечной нагрузки считают малым по сравнению с длительностью движения стержня. Вопрос исследуется отдельно в двух случаях, когда время действия поперечной нагрузки бесконечно мало (в таком случае речь идет о мгновенном импульсе) и когда оно конечно (прямоугольный импульс).

В пределах концепции жёстко-пластического тела в статье получены точные решения задач. Решения остаются справедливыми и в таком случае, когда материал стержня имеет различные пределы текучести при растяжении и сжатии.

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим пластический изгиб прямого стержня длины $2l$ под действием внезапно приложенной равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью q. Допустим, что к стержню приложено осевое растяжение N, постоянное во всем процессе деформации.

Координатную систему O_{xy} выбираем следующим образом: за ось x возьмем ось стержня, ось y направим вертикально вниз, а начало координат поместим в центр тяжести левого торца стержня. Уравнение равновесия элемента стержня имеет вид:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + N\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = -q + m_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

где M — изгибающий момент, W — прогиб, t — время и m_0 — масса стержня, приходящаяся на единицу длины.

Для дальнейшего целесообразно ввести следующие безразмерные величины (из-за симметрии рассмотрим лишь левую половину стержня $0 \leqslant x \leqslant l$):

$$\begin{aligned} &\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{t}{l}\sqrt{\frac{N_0}{m_0}}, \quad w = \frac{N_0}{M_0} W, \\ &m = \frac{M}{M_0}, \quad n = \frac{N}{N_0}, \quad \mu = \frac{ql^2}{M_0}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

В этих формулах M_0 — предельный изгибающий момент и N_0 — предельная растягивающая сила, величины которых зависят от предела текучести σ_s и от размеров поперечного сечения стержня. Например, в случае прямоугольного однородного поперечного сечения $M_0 = \sigma_s h^2/4$, $N_0 = \sigma_s h$ (h — высота профиля стержня). В безразмерных величинах (1.2) уравнение равновесия (1.1) приобретает вид:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} + n\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = -\mu + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}. \tag{1.3}$$

Материал стержня будем считать жестко-пластическим (без упрочнения). Кривую текучести определяем формулой

$$|m| = f(n). \tag{1.4}$$

Функция $f(n)$ в последнем равенстве имеет разную форму при разных сечениях стержня (см., например, [2], стр. 51). Например, для прямоугольного поперечного сечения $f(n) = 1 - n^2$, а для идеального двухслойного сечения $f(n) = 1 - |n|$.

Заметим ещё, что деформацию стержня можно разбить на несколько фаз. Для каждой фазы будем время τ отсчитывать от начала данной фазы.

§ 2. Свободно опёртый стержень под действием мгновенного импульса

Допустим, что интенсивность нагрузки q очень большая ($q \to \infty$), а время T ее действия мало ($T \to 0$). При кратковременном действии нагрузки масса стержня не успевает сколько-нибудь заметно переместиться, т. е. стержень остается почти недеформированным до момента времени T, но все его точки (кроме опорных) обладают начальной скоростью v_0. Движение стержня характеризуется в этом случае уравнением равновесия (1.3) с $\mu = 0$:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \xi^2} + n\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}. \tag{2.1}$$

Деформация стержня происходит в течение двух фаз.

I фаза. В первой фазе изгиба движущийся пластический шарнир разбивает левую половину стержня на два участка:

$0 \leqslant \xi < \xi_1$ — жесткий, но изогнутый участок,

$\xi_1 \leqslant \xi \leqslant 1$ — пластическая область.

В области $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant 1$ изгибающий момент m имеет постоянную величину $f(n)$, поэтому движение центрального участка стержня описывается уравнением:

$$n \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}. \tag{2.2}$$

Обозначим

$$a = \frac{v_0 l}{M_0 f(n)} \sqrt{m_0 N_0}$$

Решением уравнения (2.2) при начальных условиях

$$w(\xi, 0) = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial \tau}(\xi, 0) = af(n)$$

является:

$$w = af(n)\tau. \tag{2.3}$$

Боковая часть стержня в дальнейшем движется как твердое тело, поэтому

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{d\varphi}{d\tau}\xi, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1, \tag{2.4}$$

где φ — неизвестная пока функция, зависящая только от τ. Интегрируя уравнение (2.1) с учётом формулы (2.4) и удовлетворяя граничным условиям

$$w(0, \tau) = m(0, \tau) = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi_1) = \frac{\partial m}{\partial \xi}(\xi_1) = 0,$$

приходим к уравнению

$$m(\xi, \tau) + nw(\xi, \tau) = \frac{1}{6}\frac{d\varphi}{d\tau}(\xi^2 - 3\xi_1^2)\xi, \ 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1. \tag{2.5}$$

Требуя ещё выполнение условия непрерывности прогиба и изгибающего момента в точке ξ_1, приходим при помощи условия непрерывности скорости прогиба в этой же точке, т. е. условия

$$\varphi(\tau) = \frac{af(n)}{\xi_1(\tau)}, \tag{2.6}$$

к дифференциальному уравнению для определения ξ_1:

$$\xi_1 \frac{d\xi_1}{d\tau} = 3\left(n\tau + \frac{1}{a}\right). \tag{2.7}$$

Решением уравнения (2.7) при начальном условии $\xi_1(0) = 0$ является:

$$\xi_1(\tau) = \sqrt{3\tau\left(n\tau + \frac{2}{a}\right)}. \tag{2.8}$$

Прогиб боковой части стержня $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$ определяется формулой:

$$w(\xi, \tau) = af(n)\left\{\tau' + \xi \int\limits_{\tau'}^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{3\tau\left(n\tau + \frac{2}{a}\right)}}\right\}, \tag{2.9}$$

где

$$\tau' = \frac{1}{an}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{n}{3}(a\xi)^2}\right). \tag{2.10}$$

В этих формулах τ' — безразмерная величина, соответствующая моменту времени, когда в данном пересечении ξ реализуется пластический шарнир. Проводя интегрирование в формуле (2.9), получаем аналитическую форму для прогиба бокового участка стержня:

$$w(\xi, \tau) = \frac{f(n)}{n}\left\{-1 + \sqrt{1 + \frac{n}{3}(a\xi)^2} + a\sqrt{\frac{n}{3}}\,\xi \ln \frac{1 + an\tau + \sqrt{an\tau(2 + an\tau)}}{a\sqrt{\frac{n}{3}}\,\xi + \sqrt{1 + \frac{n}{3}(a\xi)^2}}\right\}. \tag{2.11}$$

Для изгибающего момента из уравнения (2.5) при помощи (2.6), (2.8) и (2.11) получаем формулу:

$$m(\xi, \tau) = f(n)\left\{1 - \sqrt{1 + \frac{n}{3}(a\xi)^2} - a\sqrt{\frac{n}{3}}\,\xi \ln \frac{1 + an\tau + \sqrt{an\tau(2 + an\tau)}}{a\sqrt{\frac{n}{3}}\,\xi + \sqrt{1 + \frac{n}{3}(a\xi)^2}} - \frac{1 + an\tau}{2\left[3\left(n\tau^2 + \frac{2\tau}{a}\right)\right]^{3/2}} \cdot \left[\xi^2 - 9\left(n\tau^2 + \frac{2\tau}{a}\right)\right]\xi\right\}. \tag{2.12}$$

Полученное решение будет справедливым до тех пор, пока пластический шарнир не достигнет сечения $\xi = 1$, где он сливается с пластическим шарниром, двигающимся навстречу ему с противоположного конца стержня. Время окончания первой фазы:

$$\tau_1 = \frac{1}{an}\left(\sqrt{1 + \frac{n}{3}a^2} - 1\right). \tag{2.13}$$

II фаза. Во второй фазе происходит движение стержня с одним стационарным пластическим шарниром, находящимся в сечении $\xi=1$. Остальные сечения стержня остаются жесткими. Поэтому вторая производная прогиба по ξ сохраняет на участке $(0, 1)$ величину, которую она имела в конце первой фазы. Так как уравнение равновесия (2.1) остается в силе, то остается в силе и его интеграл (2.5), если только там заменить ξ_1 на 1 и $w(\xi,\tau)$ на $w(\xi,\tau_1)$. Следовательно,

$$m(\xi,\tau)=-nw(\xi,\tau_1)+\frac{1}{6}\frac{d\varphi}{d\tau}(\xi^2-3)\xi. \tag{2.14}$$

Удовлетворяя условию $m(1,\tau)=f(n)$ и учитывая соотношения (2.4), (2.11) и (2.13), приходим к уравнениям:

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=-3f(n)\sqrt{1+\frac{n}{3}\alpha^2}, \tag{2.15}$$

$$w(\xi,\tau)=-\frac{3f(n)}{2}\sqrt{1+\frac{n}{3}\alpha^2}\cdot\xi\tau^2+g(\xi)\tau+h(\xi). \tag{2.16}$$

Для определения неизвестных функций $g(\xi)$ и $h(\xi)$ в уравнении (2.16) получим следующие начальные условия:

$$\frac{\partial w}{\partial\tau}(\xi,0)=\alpha f(n)\xi,$$

$$w(\xi,0)=\frac{f(n)}{n}\left(-1+\sqrt{1+\frac{n}{3}(\alpha\xi)^2}+\right.$$

$$\left.+\alpha\sqrt{\frac{n}{3}}\xi\ln\frac{1+\sqrt{1+\frac{3}{n\alpha^2}}}{\xi+\sqrt{\xi^2+\frac{3}{n\alpha^2}}}\right). \tag{2.17}$$

Прогиб и изгибающий момент во второй фазе определяются следующими формулами:

$$w(\xi,\tau)=f(n)\left\{\frac{1}{n}\left(-1+\sqrt{1+\frac{n}{3}(\alpha\xi)^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\alpha\sqrt{\frac{n}{3}}\xi\ln\frac{1+\sqrt{1+\frac{3}{n\alpha^2}}}{\xi+\sqrt{\xi^2+\frac{3}{n\alpha^2}}}\right)+$$

$$\left.+\left(\alpha-\frac{3\tau}{2}\sqrt{1+\frac{n\alpha^2}{3}}\right)\xi\tau\right\}, \tag{2.18}$$

$$m = f(n)\left\{1 - \sqrt{1+\frac{n}{3}(\alpha\xi)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{n\alpha^2}{3}}(\xi^2-3)\xi - \right.$$

$$\left. - \alpha\sqrt{\frac{n}{3}}\,\xi \ln \frac{1+\sqrt{1+\frac{3}{n\alpha^2}}}{\xi+\sqrt{\xi^2+\frac{3}{n\alpha^2}}}\right\}. \tag{2.19}$$

Вторая фаза изгиба оканчивается в момент времени, когда скорость прогиба стержня обращается в нуль. Время окончания второй фазы τ_2 определяется выражением:

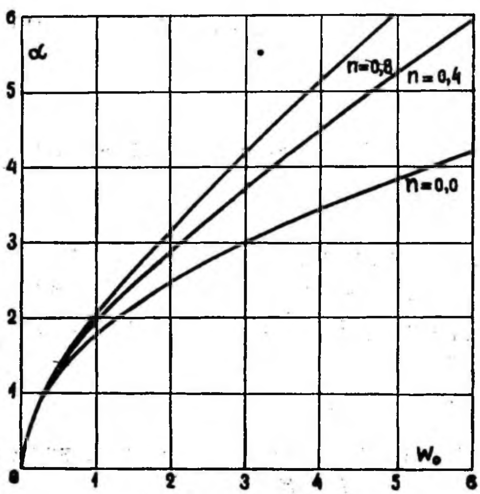
$$\tau_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{3(3+n\alpha^2)}}. \tag{2.20}$$

Время движения от начального момента до остановки стержня определяется суммой:

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{\alpha n}\left(\frac{3+2n\alpha^2}{\sqrt{3(3+n\alpha^2)}} - 1\right).$$

Результаты вычислений представлены на фиг. 1, на котором показана зависимость максимального прогиба $w_0 = w(1, \tau_2)/f(n)$ свободно опертого стержня от величины импульса α и от растягивающей силы n.

Отметим, что в случае жестко заделанного стержня получим решение аналогичным путем, заменив граничное условие $m(0,\tau) = 0$ условием $m(0,\tau) = -f(n)$.



Фиг. 1.

§ 3. Свободно опертый стержень под действием прямоугольного импульса

Допустим, что стержень подвержен действию внезапно приложенной нагрузки, интенсивность q которой остается неизменной за время её действия. Пусть снятие нагрузки происходит в момент времени T.

В зависимости от интенсивности нагрузки возможны три типа деформаций:

1) при $\mu < 2f(n)$ стержень остается недеформированным,

2) при $2f(n) \leqslant \mu \leqslant 6f(n)$ в центре стержня возникает пластический шарнир,

3) при $\mu > 6f(n)$ вблизи центра стержня возникает пластический участок.

Движение стержня с центральным пластическим шарниром реализуется лишь при условии, что изгибающий момент меньше предельного в области $0 \leqslant \xi < 1$. Процесс деформации можно разбить на две фазы.

I фаза. Интегрируя уравнение равновесия (1.3) с учетом условия $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0$ и удовлетворяя начальным и граничным условиям

$$
\begin{aligned}
&w(\xi, 0) = \frac{\partial w}{\partial \tau}(\xi, 0) = w(0, \tau) = m(0, \tau) = 0,\\
&m(1, \tau) = f(n), \qquad \frac{\partial m}{\partial \xi}(1, \tau) = 0
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

приходим к формулам

$$
m = \frac{\xi}{4}\{\mu + 6f(n) - \xi[2\mu - \xi(\mu - 2f(n))]\}, \tag{3.2}
$$

$$
w = \frac{3}{4}(\mu - 2f(n))\xi\tau^2. \tag{3.3}
$$

Первая фаза оканчивается в момент снятия нагрузки

$$
\tau_1 = \frac{T}{l}\sqrt{\frac{N_0}{m_0}}.
$$

II фаза. Приравнивая μ в уравнении (1.3) к нулю, получим формулы для прогиба и изгибающего момента:

$$
w = \frac{3}{2}\xi\left[-f(n)\tau^2 + \frac{\tau_1}{2}(\mu - 2f(n))(\tau_1 + 2\tau)\right], \tag{3.4}
$$

$$
m = \frac{f(n)}{2}(3 - \xi^2)\xi. \tag{3.5}
$$

Деформация стержня оканчивается в момент времени

$$
\tau_2 = \left(\frac{\mu}{2f(n)} - 1\right)\tau_1. \tag{3.6}
$$

Время движения стержня в течение первой и второй фазы

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{\mu}{2f(n)} \tau_1. \tag{3.7}$$

Если $\mu > 6f(n)$, то вышеуказанное решение не остается справедливым. При $\mu > 6f(n)$ деформация стержня происходит в течение трех фаз.

I фаза. В области $\xi_0 \leqslant \xi \leqslant 1$ изгибающий момент m имеет предельную величину $f(n)$. Поэтому уравнение равновесия (1.3) имеет вид

$$n \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = -\mu + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}. \tag{3.8}$$

Интегралом уравнения (3.8) при начальных условиях (3.1) является

$$2w = \mu \tau^2. \tag{3.9}$$

В боковом жёстком участке $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$:

$$w = \frac{\mu}{2\xi_0} \xi \tau^2. \tag{3.10}$$

Интегрируя уравнения (1.3) с учетом (3.10) и удовлетворяя граничным условиям: $m(0, \tau) = 0$, $m(\xi_0, \tau) = f(n)$, $\frac{\partial m}{\partial \xi}(\xi_0, \tau) = 0$, приходим к формулам:

$$m = \frac{\mu}{6\xi_0} (\xi^3 - 3\xi_0 \xi^2 + 3\xi_0^2 \xi), \tag{3.11}$$

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{6f(n)}{\mu}}. \tag{3.12}$$

В пересечении $\xi = \xi_0$ находится стационарный пластический шарнир. При стационарном шарнире $\frac{\partial w}{\partial \xi}$ имеет скачок, но величины w и $\frac{\partial w}{\partial \tau}$ должны быть непрерывными. Из (3.9) и (3.10) следует, что эти требования выполнены.

Первая фаза оканчивается как и в предыдущем случае в момент времени τ_1 снятия нагрузки.

II фаза. В момент снятия нагрузки пластический шарнир в точке ξ_0 раздваивается: один из них движется к центру стержня, а другой остается в точке $\xi = \xi_0$. Пусть движущийся пластический шарнир определен координатой ξ_1. После снятия нагрузки уравнением равновесия элемента стержня является (2.1). В центральном участке $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant 1$ изгибающий момент $m = f(n)$. Поэтому интегралом уравнения (2.1) при начальных условиях, которые получаются из формулы (3.10), является:

$$w = \frac{\mu \tau_1}{2} (2\tau + \tau_1). \tag{3.13}$$

Как и в предыдущем параграфе, $\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{d\varphi}{d\tau}\ \xi$ при $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$.

Условие непрерывности скорости прогиба в точке $\xi = \xi_1$ приводит к соотношению:

$$\varphi(\tau) = \frac{\mu\tau_1}{\xi_1(\tau)}. \tag{3.14}$$

Таким же путем как и в § 2 для определения ξ_1 получим дифференциальное уравнение:

$$\xi_1 \frac{d\xi_1}{d\tau} = 3\left[\frac{f(n)}{\mu\tau_1} + \frac{n}{2}(2\tau + \tau_1)\right], \tag{3.15}$$

откуда при начальном условии $\xi_1(0) = \xi_0$ находим:

$$\xi_1(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau_1}(\tau + \tau_1)(3n\tau_1\tau + \xi_0^2)}. \tag{3.16}$$

Прогиб бокового участка определяется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} w(\xi, \tau) &= \xi\int_0^\tau \varphi(\tau)\,d\tau + \frac{\mu\tau_1^2}{2\xi_0}\ \xi, && 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0, \\ w(\xi, \tau) &= \xi\int_{\tau'}^\tau \varphi(\tau)\,d\tau + \frac{\mu\tau_1}{2}(2\tau' + \tau_1), && \xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1, \end{aligned} \tag{3.17}$$

где τ' — момент времени, когда в данном пересечении ξ находится пластический шарнир. Величина τ' определяется по формуле:

$$\tau' = \frac{1}{6n\tau_1}\left[-\xi_0^2 - 3n\tau_1^2 + \sqrt{(\xi_0^2 - 3n\tau_1^2)^2 + 12n(\tau_1\xi)^2}\right]. \tag{3.18}$$

При помощи формул (3.17) и (3.18) получим выражения для прогиба:

$$w(\xi, \tau) = \mu\tau_1\xi\left\{\frac{1}{\sqrt{3n}}\ln\frac{\xi_0^2 + \tau_1[2\sqrt{3n}\,\xi_1 + 3n(\tau_1 + 2\tau)]}{\xi_0^2 + \tau_1[2\sqrt{3n}\,\xi_0 + 3n\tau_1]} + \frac{\tau_1}{2\xi_0}\right\}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0, \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} w(\xi, \tau) = \mu\tau_1\Bigg\{&\frac{\xi}{\sqrt{3n}}\ln\frac{\xi_0^2 + \tau_1[2\sqrt{3n}\,\xi_1 + 3n(\tau_1 + 2\tau)]}{2\sqrt{3n}\,\tau_1\xi + \sqrt{(\xi_0^2 - 3n\tau_1^2)^2 + 12n(\tau_1\xi)^2}} + \\ &+ \frac{1}{6n\tau_1}\left(-\xi_0^2 + \sqrt{(\xi_0^2 - 3n\tau_1^2)^2 + 12n(\tau_1\xi)^2}\right)\Bigg\}, \qquad \xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1 \end{aligned}$$

Аналитические выражения для изгибающего момента получаем путем интегрирования уравнения (2.1) с учетом (3.19) и удовлетворения условиям $m(0, \tau) = 0$, $m(\xi_1) = f(n)$, а также условию непрерывности изгибающего момента в точке ξ_0, т. е. получаем:

$$m(\xi,\tau)=\mu n\tau_1\xi\left\{\frac{1}{\sqrt{3n}}\ln\frac{\xi_0^2+\tau_1[2\sqrt{3n}\,\xi_0+3n\tau_1]}{\xi_0^2+\tau_1[2\sqrt{3n}\,\xi_1+3n(\tau_1+2\tau)]}-\frac{\tau_1}{2\xi_0}\right\}+$$

$$+\frac{\mu\xi(3\xi_1^2-\xi^2)}{12\xi_1^3}[3n\tau_1(\tau_1+2\tau)+\xi_0^2],\qquad 0\leqslant\xi\leqslant\xi_0,\qquad (3.20)$$

$$m(\xi,\tau)=\mu\tau_1\sqrt{\frac{n}{3}}\,\xi\ln\frac{2\sqrt{3n}\,\tau_1\xi+\sqrt{(\xi_0^2-3n\tau_1^2)^2+12n(\tau_1\xi)^2}}{\xi_0^2+\tau_1[2\sqrt{3n}\,\xi_1+3n(\tau_1+2\tau)]}+$$

$$+\frac{\mu}{6}\Big[\xi_0^2-\sqrt{(\xi_0^2-3n\tau_1^2)^2+12n(\tau_1\xi)^2}+$$

$$+\xi\frac{3\xi_1^2-\xi^2}{2\xi_1^3}(3n\tau_1(\tau_1+2\tau)+\xi_0^2)\Big],\qquad \xi_0\leqslant\xi\leqslant\xi_1.$$

Вторая фаза движения оканчивается в тот момент, когда движущийся пластический шарнир достигает середины пролёта ($\xi_1=1$). Положив в уравнении (3.18) координату $\xi=1$, получим выражение для определения времени τ_2 окончания второй фазы движения:

$$\tau_2=\frac{1}{6n\tau_1}(\xi_0^2-3n\tau_1^2+\sqrt{(\xi_0^2-3n\tau_1^2)^2+12n\tau_1^2}).\qquad (3.21)$$

III фаза. В течение третьей фазы реализуется движение стержня с одним пластическим шарниром, который находится в центре стержня. Движение такого типа мы рассматривали в § 2 при изучении движения стержня под действием мгновенного импульса. В данном случае решение получается аналогичным путём, поэтому для краткости записи ограничиваемся лишь выписыванием основных результатов. Прогиб определяется теперь формулами:

$$w(\xi,\tau)=\mu\tau_1\xi\left\{\tau\left(1-\frac{\tau}{4\tau_1}\sqrt{(\xi_0^2-3n\tau_1^2)^2+12n\tau_1^2}\right)+\frac{\tau_1}{2\xi_0}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{3n}}\ln\frac{2\sqrt{3n}\,\tau_1+\sqrt{(\xi_0^2-3n\tau_1^2)^2+12n(\tau_1\xi)^2}}{(2\sqrt{3n}\,\xi_0+3n\tau_1)\tau_1+\xi_0^2}\right\},\qquad 0\leqslant\xi\leqslant\xi_0,$$

$$w(\xi,\tau)=\mu\tau_1\left\{\xi\tau\left(1-\frac{\tau}{4\tau_1}\sqrt{(\xi_0^2-3n\tau_1^2)^2+12n\tau_1^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\xi}{\sqrt{3n}}\ln\frac{2\sqrt{3n}\,\tau_1+\sqrt{(\xi_0^2-3n\tau_1^2)^2+12n(\tau_1\xi)^2}}{2\sqrt{3n}\,\tau_1\xi+\sqrt{(\xi_0^2-3n\tau_1^2)^2+12n(\tau_1\xi)^2}}\right\}-$$

$$(3.22)$$

$$-\frac{\mu}{6n}\left(\xi_0^2-\sqrt{(\xi_0^2-3n\tau_1^2)^2+12n(\tau_1\xi)^2}\right),\qquad \xi_0\leqslant\xi\leqslant 1.$$

Изгибающий момент выражается следующим образом:

$$m = -nw(\xi, \tau_2) + \frac{\mu\xi(3-\xi^2)}{12}\sqrt{(\xi_0^2 - 3n\tau_1^2)^2 + 12n\tau_1^2}. \quad (3.23)$$

Движение стержня прекращается в момент времени τ_3, когда скорость стержня обращается в нуль:

$$\tau_3 = \frac{2\tau_1}{\sqrt{(\xi_0^2 - 3n\tau_1^2)^2 + 12n\tau_1^2}}.$$

Добавим, что решение для жестко заделанного стержня получается аналогичным путем, если только заменить граничное условие $m(0,\tau) = 0$ условием $m(0,\tau) = -f(n)$. При этом стержень остается недеформированным, если $\mu < 4f(n)$; стержень деформируется с пластическим шарниром в центре, если $4f(n) \leqslant \mu \leqslant 12f(n)$. Деформация стержня с жестко заделанными концами реализуется с пластическим участком с конечными размерами, если $\mu > 12f(n)$.

Эти задачи рассматривались и П. Саймондсом [1], но без учёта осевого растяжения. Решения, полученные в данной статье, совпадают с результатами Саймондса, если во всех формулах n стремится к нулю и функция $f(n)$ к единице.

Полученные результаты остаются справедливыми и в таком случае, когда материал стержня имеет различные пределы текучести при растяжении и сжатии, если только функция $f(n)$ определена соответствующим уравнением кривой предельного состояния. Для определения функции $f(n)$ рассмотрим предельное состояние поперечного сечения стержня. Для конкретности ограничиваемся случаем прямоугольного сплошного сечения. Допустим, что напряженное состояние следующее: при $-1 \leqslant \eta < \eta_0$ имеет место сжатие, а при $\eta_0 < \eta \leqslant 1$ — растяжение ($\eta = 2z/h$, $\eta_0 = 2z_0/h$, z_0 — координата нейтральной оси). Обозначим пределы текучести при растяжении и сжатии соответственно символами σ^+_s и $-\sigma^-_s$. Как и в статьях [3, 4] введем безразмерную величину $\gamma = \sigma^+_s/\sigma^-_s$. Пусть $\gamma < 1$ (если $\gamma = 1$, то материал является изотропным). Если в данном случае, как и выше, m обозначает безразмерный изгибающий момент M/M_0 и n — безразмерную растягивающую силу N/N_0, причём $M_0 = \sigma^-_s h^2/4$ и $N_0 = \sigma^-_s h$, то

$$m = \int_{-1}^{1} \frac{\sigma}{\sigma_s^-}\eta d\eta, \qquad n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\sigma}{\sigma_s^-} d\eta.$$

После интегрирования приходим к формулам

$$m = \frac{1}{2}(1+\gamma)(1-\eta_0^2),$$

$$n = \frac{1}{2}[\gamma - 1 - (1+\gamma)\eta_0],$$

откуда находим

$$f(n)=\frac{2}{1+\gamma}[\gamma-(1-\gamma)n-n^2].$$

Если $f(n)$ определено последним равенством, то решения, полученные в § 2 и в § 3 остаются в силе и для стержней, материал которых имеет различные пределы текучести при растяжении и сжатии.

Литература

1. Саймондс П. С., Большие пластические деформации стержней под действием нагрузки взрывного типа. Механика, 1956, № 4, 90—108.
2. Дикович И. Л., Динамика упруго-пластических балок. Ленинград, 1962.
3. Лепик Ю. Р., К предельному равновесию пластин, материал которых имеет различные пределы текучести при растяжении и сжатии. Тр. VII Всес. конференции по теории оболочек и пластинок, 1969. Москва. 1970, 360—364.
4. Sankaranarayanan, R., Olszak, N., A note on the load carrying capacity of anisotropic plates and shells. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. tehn., 1966, 14, № 4, 329—336.

Поступило
24 II 1970

JÄIK-PLASTSETE VARRASTE SUURTEST LÄBIPAINETEST DÜNAAMILISEL KOORMAMISEL

J. Lellep

Resümee

Käesolevas artiklis vaadeldakse vabalt toetatud ja jäigalt kinnitatud jäik-plastsete varraste käitumist ühtlaselt jaotatud dünaamilise ristkoormuse ja teljesuunalise tõmbe mõju all. Teljesuunalise tõmbe kohta eeldatakse, et ta jääb muutumatuks kogu deformatsiooni vältel. Küsimust uuritakse eraldi juhtudel, kui ristkoormuse intensiivsus on väga suur ja ta mõjub väga lühikese aja jooksul ning kui koormuseks on ristkülikukujuline impulss.

ON LARGE DEFLECTIONS OF RIGID-PLASTIC BEAMS UNDER DYNAMIC LOADING

J. Lellep

Summary

This paper is concerned with the plastic deformations of simply supported and clamped beams, which are subjected to the transverse impulsive pressure loading and tensile end-load. The tensile end-load is assumed to be constant and smaller than the limit one. The analysis is carried out in two cases, when intensity of the transverse loading is infinite (then the period of its action is considered to be very short) and when they are finite.

Within the limits of the concept of a rigid-plastic body exact solutions are found. The solutions remain valid when the material of the beam has different yield stresses in tension and compression.

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ
X

На русском языке

Резюме на эстонском, английском и немецком языках
Тартуский государственный университет.
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18
Ответственный редактор С. Барон
Корректоры А. Тоуарт, Э. Оя, Г. Лийв, Г. Кондас

Сдано в набор 16/VI 1970 г. Подписано к печати 13/VIII 1971 г. Печ. листов 17,0. Учетно-издат. листов 19,3. Тираж 500 экз. Бумага фабрики «Кохила», типографская № 2. 60 × 90. 1/16. МВ 06547. Заказ № 3438.

Типография им. Ханса Хейдеманна. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 17/19. II

Цена 1 руб. 90 коп.

2—2

1 руб. 90 коп.