

Tartu Ülikool  
Sotsiaal- ja haridusteaduskond  
Haridusteaduste instituut  
Klassiõpetaja õppekava

Triin Ojaste

KUUENDA KLASSI ÕPILASTE TEADMISED HARILIKEST MURDUDEST JA  
ÕPETAJATE ARVAMUSED NENDE TEADMISTE KUJUNDAMISEST

magistritöö

Juhendaja: Anu Palu

Läbiv pealkiri: Õpilaste teadmised murdudest

KAITSMISELE LUBATUD

Juhendaja: Anu Palu, Ph.D

.....

*(allkiri ja kuupäev)*

Kaitsmiskomisjoni esimees: Krista Uibu, Ph.D

.....

*(allkiri ja kuupäev)*

Tartu 2015

Kuuenda klassi õpilaste teadmised harilikest murdudest ja õpetajate arvamused nende teadmiste kujundamisest

Resümee

Magistritöö eesmärgiks oli välja selgitada kuuenda klassi õpilaste teadmised harilikest murdudest, teha kindlaks enim raskusi valmistavad ülesanded ja uurida milliseid tüüpvigu õpilased teevad. Lisaks sooviti teada saada, millised on õpetajate arvamused ning tõekspidamised harilike murdude teema õpetamisest. Uuringus osales kokku 261 õpilast viiest Tartu linna koolist ja 12 õpetajat. Õpilaste testide tulemustest selgus, et paremaid tulemusi saavutati pigem protseduuriliste oskuste kui mõistelise arusaamise ülesannete lahendamisel. Keerulised ülesanded jäeti tihti lahendamata. Uuringus selgus, et tüdrukute ja poiste tulemused erinesid statistiliselt oluliselt. Tüdrukud olid edukamad arvutus-, võrdlus- ja mõistete tundmise ülesannete lahendamisel. Samuti oskasid nad oma vastuseid paremini põhjendada. Õpilaste tulemused erinesid klassiti. Õpetajate arvamuste analüüs näitas, et oluliseks peetakse igapäevaeluga seotud ülesannete lahendamist, õpilase iseseisva töö oskuste kujundamist, intensiivset põhiteadmiste ja -oskuste harjutamist. Vähem oluliseks peeti harjutamist läbi mängu ja erinevate tegevuste ning definitsioonide või seaduspärasuste sõna-sõnalist omandamist. Õpetajate õpetamisviiside ja õpilaste õpitulemuste vahel ei leitud seost.

*Märksõnad:* õpilaste teadmised harilikest murdudest kognitiivsetel tasemetel, tüüpvead murdudega ülesannete lahendamisel, õpetajate arvamused murdude õpetamisest

## Sixth grade students' knowledge about fractions and teachers' opinions on the formation of their knowledge

### Abstract

The aim of this Master's thesis is to examine the sixth grade students' knowledge about fractions, to identify the most challenging tasks and to analyze common mistakes that students make. Also another aim was to find out the teachers' views and understandings on teaching the subject. The study comprised a total of 261 students from five schools in Tartu and 12 teachers. In general the results of the students' tests revealed that procedural knowledge tasks were solved more successfully than conceptual understanding tasks. Complex tasks were often left unsolved. The findings indicated that the tests results of boys and girls were statistically different. Girls were more successful in solving tasks related to computations, comparisons and meaning of definitions. They were also better in explaining their answers. The results of the students differed by classes. The analysis of the teachers' opinions revealed that they prioritise the solution of tasks related to everyday life, the development of students' skills of independent work and intensive practising of basic knowledge and skills. Practising through play and varied activities, either the learning of definitions or rules word by word was considered to be less important. In addition there was no connection found between teachers' teaching methods and students' learning outcomes.

*Keywords:* students' knowledge of fractions at cognitive level, common errors in solving tasks with fractions, teachers' views of teaching fractions

## Sisukord

|                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Sissejuhatus .....                                                                       | 6  |
| <i>Õpilaste teadmiste hindamine erinevatel kognitiivsetel tasemetel</i> .....            | 7  |
| <i>Varasematest uurimustest leitud probleeme harilike murdude omandamisel</i> .....      | 8  |
| <i>Harilike murdude õpetamise metoodika</i> .....                                        | 11 |
| <i>Uurimuse eesmärgid ja uurimisküsimused</i> .....                                      | 13 |
| Metoodika.....                                                                           | 14 |
| <i>Valim ja protseduur</i> .....                                                         | 14 |
| <i>Mõõtvahendid</i> .....                                                                | 14 |
| <i>Andmetöötlus</i> .....                                                                | 15 |
| Tulemused .....                                                                          | 16 |
| <i>Harilike murdude testi üldine lahendatus 6. klassides</i> .....                       | 16 |
| <i>Halvemini ja paremini lahendatud ülesanded sisu järgi</i> .....                       | 17 |
| <i>Õpilaste teadmised harilikest murdudest erinevatel kognitiivsetel tasemetel</i> ..... | 18 |
| <i>Enamlevinud vead ülesannete lahendamisel</i> .....                                    | 18 |
| <i>Õpetajate arvamused õpetamisest</i> .....                                             | 21 |
| <i>Õpilaste testi tulemuste seos õpetajate arvamustega</i> .....                         | 23 |
| Arutelu.....                                                                             | 24 |
| <i>Harilike murdude testi üldine lahendatus 6. klassides</i> .....                       | 24 |
| <i>Halvemini ja paremini lahendatud ülesanded sisu järgi</i> .....                       | 25 |
| <i>Õpilaste teadmised harilikest murdudest erinevatel kognitiivsetel tasemetel</i> ..... | 26 |
| <i>Enamlevinud vead ülesannete lahendamisel</i> .....                                    | 26 |
| <i>Õpetajate arvamused õpetamisest</i> .....                                             | 29 |
| <i>Õpilaste testi tulemuste seos õpetajate arvamustega</i> .....                         | 30 |
| <i>Uurimuse piirangud ja soovitused</i> .....                                            | 31 |
| Tänuõnad .....                                                                           | 32 |
| Autorsuse kinnitus.....                                                                  | 32 |

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| Kasutatud kirjandus .....        | 33 |
| Lisa 1. Õpilase test .....       | 38 |
| Lisa 2. Õpetaja küsimustik ..... | 40 |

## Sissejuhatus

Matemaatikaõpetust peetakse tihti keeruliseks õppeaineaks, seda nii õpetajate kui ka õpilaste seas. Mitmed mõisted on liiga spetsiifilised ning nende mõistmiseks tuleb aru saada mõiste sisulisest tähendusest, mida kindel sõna kujutab (Orton, 2004). Riiklike tasemetööde analüüsid on küll näidanud 6. klassi õpilaste häid keskmisi tulemusi matemaatikas, kuid jälgides üksikülesannete näitajaid on murdudega ülesannete lahendamisoskus iga aastaga langenud (Taal, 2011; Taperson, 2008; Tibar, 2013). Teisi sõnu on problemaatiline murdude sisuline mõistmine ja põhimõistetest arusaamine (Taal, 2012; Taperson, 2008). Ühed mõisted, mille omandamine on õpilaste jaoks keeruline, on lugeja ja nimetaja (Taperson, 2008).

Harilike murdude põhimõistete (nt lugeja, nimetaja ja murrujoon) õppimisega alustatakse juba 3. klassis, kus õpilased selgitavad murru tähendust ja oskavad leida osa arvust (Põhikooli riiklik õppekava, 2011). Teema jätkub II kooliastmes üldisema teema *Arvutamine* all ja III kooliastmes, kus teadmised murdudest on õpetamisel aluseks järgnevatele käsitlemisele kuuluvatele teemadele (nt protsent, algebra ja funktsioon). Nagu eelpool mainitud, valmistavad harilikud murrud ühe teemana matemaatikas õpilastele raskusi, tekitades väärarusaamu, mis mõjutavad edaspidi õpitavate teemade omandamist (Hecht & Vagi, 2010; Siegler, Fazio, Baley & Zhou, 2013). Vigade analüüsimine võimaldab leida väärarusaamade tekkimise põhjusi, mille tulemusena saame ennetada edaspidi tekkivaid raskusi, andes soovitusi õppetöö parandamiseks.

Kindlate arusaamiste ja oskuste tekkimise aluseks on nii mõisteline arusaamine kui ka protseduuride teadmine ehk konkreetsete algoritmide tundmine ülesannete lahendamisel (Battista, 2011; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Siiski ei pruugi õpilased iseseisvalt mõista tehtavate toimingute sügavamat tähendust ja luua olemasolevate teadmiste vahel loogilisi seoseid (Hallett, Nunes & Bryant, 2010; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001).

Arusaamisele aitab kaasa õige õpetamismetoodika valik. Lisaks õpilaste teadmistele tuleks vaadelda ka õpetaja õpetamisviise (Samuelsson, 2010), sest õpetaja roll, suhtumine ja enesekehtestus õpetamisel mõjutavad õpilaste õpitulemusi (Uibu, 2010; Uibu & Kikas, 2014).

Selle magistritöö eesmärgiks on välja selgitada 6. klassi õpilaste teadmised harilikest murdudest, määrata kindlaks enim raskusi valmistavad ülesanded ja uurida milliseid tüüpvigu õpilased teevad. Lisaks teada saada, millised on õpetajate arvamused harilike murdude teema õpetamisest ning leida nende seost õpilaste teadmistega.

*Õpilaste teadmiste hindamine erinevatel kognitiivsetel tasemetel*

Põhikooli riiklik õppekava (2011), TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study, 2003), PISA (Programme for International Student Assessment, 2006) ja erinevad autorid (Ghazali & Zakaria, 2011; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Samuelsson, 2010) jaotavad matemaatikateadmised kognitiivsete ehk tunnetuslike erinevuste alusel tasemeteks. Õpilaste teadmiste ja oskuste, tugevuste ja nõrkuste kohta põhjalikuma tagasiside saame just ülesannete lahendamiseks vajalike kognitiivsete tegevuste hindamisel (Kurvits, 2011; Palu, 2010a; Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Sellest tulenevalt on käesolevas töös matemaatikateadmised jaotatud kahel kognitiivsel tasemel, mis on nimetatud järgmiselt: fakti- ehk protseduurilised teadmised ja seose ehk mõistelised teadmised.

Protseduuriliste teadmiste ning oskuste all mõeldakse õpilaste võimet valida ülesande lahendamiseks sobiv algoritm või reegel, mille abil kindlas järjekorras ülesanne lahendada (Samuelsson, 2010; Star, 2005). Eelkõige seisneb see päheõpitud toimingute meenutamises, kus õpilased ei pruugi veel mõista tehtavate toimingute sügavamat tähendust (Orton, 2004; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001). Nii näiteks suudavad paljud õpilased ülesande korrektselt lahendada, aga nad ei oska saadud vastust põhjendada (Hallett et al., 2010). See tuleneb sellest, et õpilastel ei ole protseduurilistest teadmistest välja kujunenud mõistelist arusaamist (Hallett et al., 2010; Hecht & Vagi, 2012). Sarnaseid probleeme on leitud ka teistes kõrge arengutasemega riikides nagu Jaapanis ja Hiinas (Chan, Leu & Chen, 2007; Ni, 2001).

Mõisteline arusaamine hõlmab üheaegselt matemaatika teadmisi põhimõistetest, operatsioonidest ja suhetest. Selline teemakäsitus ei eelda informatsiooni päheõppimist, pigem aitab luua ning näha seoseid juba olemasolevate teadmiste vahel (Hallett et al., 2010; Orton, 2004). Seoste loomine tähendab oskust ühendada olemasolevaid teadmisi terviklikuks ning eeldab õpilaste võimekust neid teadmisi rakendada (Samuelsson, 2010). Näiteks kõrge mõistelise arusaamisega õpilased on võimelised lahendama ülesandeid, millega nad varem ei ole kokku puutunud (Canobi, 2009; Ghazali & Zakaria, 2011). See tähendab, et õpilased saavad ülesandest aru, oskavad teadmiste hulgast valida sobivad võtted ja eristada tekstist olulist informatsiooni, mille abil ülesanne lahendada (Canobi, 2009; Hallett et al., 2010).

Mõisteline arusaamine, faktilised teadmised ja protseduurilised oskused on vajalikud matemaatikas edukaks toimetulekuks (Osana & Pitsolantis, 2013; Star, 2007; Stylianides & Stylianides, 2007). Need teadmised ja oskused on omavahel seotud, nad täiendavad teineteist vastastikku ning ühe muutumine mõjutab ka teist (Ghazali & Zakaria, 2011; Rittle-Johnson &

Schneider, 2015; Schneider, Rittle-Johnson & Star, 2011). Siiski mitmed uuringud kinnitavad, et mõistelistel teadmistel on suurem mõju protseduuriliste teadmiste üle. Nii näiteks arvavad Baroody, Feil ja Johnson (2007), et ülesannete lahendamisel ei tohiks õpilaste jaoks olla kõige olulisemaks konkreetse valemi peast teadmine ja kasutamine probleemi käsitlemisel. Ka Põhikooli riiklik õppekava (2011) rõhutab matemaatikaõpetuses sisulisele arusaamisele, mitte niivõrd faktide ja protseduuride tundmisele.

### *Varasematest uurimustest leitud probleeme harilike murdude omandamisel*

I ja II kooliastmes on murdude teema matemaatikas kesksel kohal. Põhimõistete õppimisega alustatakse juba 3. klassis, kus õpilased teavad murru tähendust ja oskavad leida osa arvust (Põhikooli riiklik õppekava, 2011). Kuuendas klassis tegeletakse kõige intensiivsemalt harilike murdude teema õppimisega. Sellest tulenevalt peaksid õpilased II kooliastme lõpuks ühe oodatava õpitulemusena olema võimelised mõistma hariliku murru põhiomadusi, samuti oskama võrrelda ning arvutada harilike murdudega (Põhikooli riiklik õppekava, 2011).

Viimaste uuringute kohaselt on siiski teadmised murdudest õpilastele raskusi valmistavad ning nende tuleks õppimisel enam tähelepanu pöörata (Tibar, 2013). Samuti on täheldatud, et poiste keskmised tulemused on madalamad kui tüdrukutel (Taal, 2011; Taal, 2012; Taperson, 2008). Keskmisest tulemusest ei selgu, kas poisid ja tüdrukud teevad samu või erinevaid vigu. Poiste ja tüdrukute tehtud vigade kõrvutamine võimaldab saada infot sooliste iseärasuste arvestamiseks õpetuse planeerimisel. Seega on esmalt oluline keskenduda õpilaste vigadele, mille kaudu saame reflekteerida õpetusviiside efektiivsust.

Takistused harilike murdude mõistmisel algavad juba põhimõistete omandamisel ning nende rakendamisel (Brown & Quinn, 2006; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Nimelt 6. klassi tasemetööde analüüsist selgus, et õpilased ei mõista murru sisulist tähendust, täpsemini mõisteid „lugeja, nimetaja ja murrujoon“ (Taal, 2011; Taperson, 2008). Taperson (2008) toob välja, et õpilased teadsid paremini, mis on murru lugeja (lahendatus 75,5%) kui seda, mis on murru nimetaja (lahendatus 59,1%). Afanasjev (2005) järeldab, et neid mõisteid kasutatakse igapäevases koolitöös liiga vähe ja leiab, et matemaatiliste mõistete või sümbolite tundmiseks tuleks neid tihedamini kasutada.

Mitmed autorid (Hecht & Vagi, 2010; Siegler & Pyke, 2013; Siegler, Thompson & Schneider, 2011) on leidnud, et lisaks valmistavad õpilastele raskusi murdude sisuline mõistmine ja suurusjärgudest arusaamine. 2012. aasta 6. klassi tasemetöö analüüsist selgus, et



õpilased eksisid kõige enam suurusjärkude mõistmisel ja võrdlemisel. Samas selgus, et eksisid rohkem tüdrukud kui poisid (lahendatus vastavalt 66,6% ja 73,4%) (Jakobson, 2014).

Põhjuseks, miks murdude võrdlemine valmistab raskusi, võib nimetada õpilaste ekslike eeldusi täisarvude samastamisel kogu arvuhulgaga (Ni & Zhou, 2005; Siegler et al., 2013; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Kõige enam tekib segadus, kui murru lugejad või nimetajad on ühenimelised (Siegler et al., 2013; Siegler & Pyke, 2013). Näiteks murdude  $\frac{1}{4}$  ja  $\frac{1}{6}$  võrdlemisel. Õpilastel tekib vastuolu, kuidas ja mida võrrelda, sest ekslikult arvatakse, et teine murd on suurem, sest 6 on suurem kui 4 (Kurvits, 2010).

Murdude sisuline mõistmine, suurusjärkude võrdlemine ja oma vastuse põhjendamine eeldavad mõistelist teadmist ja arusaamist. Näiteks vastusete põhjendused aitavad vigade analüüsimisel kindlaks määrata, millises lahendamise etapis on õpilane eksinud. Nii tasemetöö analüüsid kui ka teised uuringud (Kurvits, 2008; Kurvits, 2010; Taal, 2012) kinnitavad, et õpilased ei oska oma vastuseid põhjendada, miks on üks murd teisest suurem või vastupidi. Väga paljudel õpilastel on põhjendus kirjutamata või ei osata seda teha (lahendatus 49,7%) (Taal, 2012). Need tulemused näitavad, et mõisteline arusaamine ei ole välja kujunenud või on veel nõrk (Battista, 2011; Rittle-Johnson & Schneider, 2015; Schneider, Grabner & Paetsch, 2009).

Samamoodi eeldab mõistelist arusaamist murdude märkimine arvkiirele. Uurijad (Siegler et al., 2013; Siegler & Pyke, 2013) on leidnud, et murdude kujutamine arvkiirel valmistab õpilastele raskusi. Seda kõige enam murdude järjestamisel kasvavas järjekorras (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Ka mitmetes tasemetööde analüüsides selgus, et keerulisemaks ülesandeks oli murdude märkimine arvkiirele (Oja, 2007; Tibar, 2013). Näiteks 2007. ja 2013. aasta tasemetöös oli antud ülesande lahendatus vastavalt vaid 51% ja 52%. See tähendab, mida paremal tasemel on õpilaste oskused, seda kergem on lahendada kõrgemaid kognitiivseid teadmisi eeldavaid ülesandeid (Ghazali & Zakaria, 2011).

Keerulisemad ongi ülesanded, mis eeldavad probleemi püstitusel ning lahendamisel nii algoritmide tundmist kui ka sisulist arusaamist (Battista, 2011). Seda näiteks erinevate tekstülesannete lahendamisel. Palu ja Kikas (2010) leidsid, et vead tekstülesannetes tulenevad eelkõige tekstist mitteamisest ja selle tulemusena tehakse mingeid tehteid olemasolevate arvudega ega mõisteta tervikut. Või keskendutakse hoopis ebaolulise informatsiooni tõlgendamisele ja seetõttu valitakse vale algoritm ülesande lahendamiseks. Näiteks kui ülesandes on antud, et poodi toodi müüki 120 kg komme, esimesel päeval müüdi  $\frac{1}{4}$  kommidest, teisel päeval müüdi alles jäänud kommidest  $\frac{1}{2}$ , ning õpilastelt küsiti, kui palju

jäi kolmandaks päevaks komme müüa, siis enamik annaks vastuseks 15 kg. Täpsemalt, õpilased arvutavad murruga määratud osad, pööramata tähelepanu sellele, millisest tervikust tuleb osa leida. See näitab, et õpilane ei ole teksti süvenenud ja on olemasolevate arvudega lihtsalt arvutanud. Vead võivad tekkida ka rutiinseks muutunud ülesannetes (Orton, 2004), kas lohakuse või vähese funktsionaalse lugemisoskuse tõttu (Lepmann, 2010).

Probleeme esineb ka protseduurilistes teadmistes ja oskustes. Erinevad autorid (Brown & Quinn, 2006; Siegler, Thompson & Schneider, 2011) on uurinud õpilaste tehete sooritamise oskust. On selgunud, et kõige problemaatilisem on murdude liitmine ja lahutamine. Seda eelkõige lihtmurdude liitmisel (lahendatus 57%) ja lahutamisel (Taal, 2011; Taperson, 2008). Leslie, Gelman ja Gallistel (2008) leidsid, et õpilased ajavad segi murdude liitmisel ning lahutamisel kasutatavaid võtteid korrutamise ja jagamise võtetega. Cowan'i (2006) arvates tekib segadus teemade paralleelsel või järjestikku käsitlemisel. Näiteks liitmisel või lahutamisel tuleb leida murdude ühine nimetaja. Selle asemel kasutavad õpilased murdude korrutamise ja jagamise võtteid, kus ühisel murrujoonel vastavad lugejad ja nimetajad korrutatakse (Kurvits, 2010; Siegler, Thompson & Schneider, 2011). Seetõttu on kerged tulema vead nagu  $7/10 + 5/13 = 13/23$ . Mõistmise teeb keerulisemaks see, et korrutamise puhul see arutlus kehtibki.

Ülesannetes õigete lahendusteedeni mitte jõudmine võib seisneda selles, et faktiteadmised ja mõisted on puudulikud või valed (Booth, Newton & Twiss-Garrity, 2014). Näiteks 2011. aasta tasemetöö analüüsist selgus, et õpilastel oli raskusi harilike murdude jagamisega (keskmine lahendatus 64%) ning suur osa neist vältisid arvutamist harilike murdudega (Taal, 2011). Tüüpilisemad vead tulenevad sellest, et õpilased hakkava kombineerima antud arve ega keskendu sisule. Ka 2011. aasta tasemetöö analüüsist toodi välja, et õpilased tegid suvalisi ümardamisi ja andsid ebatäpseid vastuseid (Taal, 2011). Sellest tulenevalt võib lahendamata jätmisest järeldada, et õpilased ei oska ülesannet lahendada või ei mäleta, kuidas seda tehti.

Lisaks on murdudega arvutamisel täheldatud, et õpilased jätavad ülesannetes vastused lõpuni taandamata (Jakobson, 2014; Taal, 2012; Oja, 2007) ning kaotavad seetõttu ülesandes enim punkte (Taperson, 2008). Brown ja Quinn (2006) uuringus selgus, et 27% õpilastest ei osanudki murde taandada. Ilmnes, et õpilased oskavad küll järk-järgult taandada, kuid ei jõua lõpptulemuseni ja paljud õpilased ei saa töökäsklusest aru (Brown & Quinn, 2006). Muidugi võib vigu sisse tulla sellest, kui õpilased ei loe tähelepanelikult ülesande tööjuhust.

Harilike murdude õppimisel ei esine probleeme ainult õppimise algstaadiumis, need on välja tulnud ka hilisemates teadmistes ning oskustes (Siegler et al., 2013; Siegler & Pyke, 2013; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Teadmised harilikest murdudest on III kooliastmes aluseks järgnevatele käsitlemisele kuuluvatele teemadele: protsent, algebra ja funktsioon. Mitmed autorid (Ross & Bruce, 2009; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010) leidsid, et ka paljudes gümnaasiumi õpilastes tekitab murdudega arvutamine endiselt segadust või ei osata seda teha. Samuti erinevatel ametikohtadel nagu arstidel, õdedel, kokkadel – nendel, kellel on vaja määrata kindlaid koguseid, annuseid või doose (Ross & Bruce, 2009). Need tulemused näitavad, kui oluline on selgeks teha põhimõisted ja nendevahelised seosed, mille mittemõistmine tekitab teadmistesse väärarusaamu ja on tihti erinevate vigade põhjuseks (Jordan, Hansen, Fuchs, Siegler, Gersten & Micklos, 2013; Merenluoto & Lehtinen, 2004).

#### *Harilike murdude õpetamise metoodika*

Matemaatikas on oluline, et õpilastel tekiks mõistete, sümbolite ja reeglite kohta kindlad arusaamad. Nende tekkimisel on aluseks nii protseduurilised oskused ehk kindlate algoritmide teadmine ülesannete lahendamisel kui ka mõisteline arusaamine (Star, 2007; Stylianides & Stylianides, 2007). Täpsemini teoreetilised teadmised, mis põhinevad mõistelisel arusaamisel, on eelduseks õpilaste edasisel arengul (Booth, Newton & Twiss-Garrity, 2014; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001). Sellest tulenevalt on vaja luua seoseid olemasolevate teadmistega, et õpilased oleksid võimelised omandama ja harjutama uusi oskusi (Battista, 2011; Lobato, 2012).

Eelteadmised on aluseks seoste tekkimisel olemasolevate ja uue teadmiste vahel (Brown & Quinn, 2006; Palu, 2010a). Mitmed uuringud kinnitavad, et raskused harilike murdude sisulisel mõistmisel on seotud õpilaste esialgsete teadmistega arvuhulga olemusest (Ni & Zhou, 2005; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Seega on oluline mõista, mis on arvusüsteem ja arvuhulk. Need oskused ei teki iseenesest, vaid vajavad süstemaatilist arendamist (Battista, 2011; Merenluoto & Lehtinen, 2004).

Rittle-Johnson, Siegler ja Alibali (2001) uuringus selgus, et õppimisel on esmalt vaja selgeks teha mõistete tähendused. Seda eelkõige protseduurilisi oskusi eeldavate ülesannete lahendamisel ja harjutamisel (Star, 2005). Kui ülesande lahendamisel vajalikku algoritmi ei mõisteta või ei teata, siis on raske aru saada teemast tervikuna (Siegler & Pyke, 2013). Arusaamine paraneb kogemusega ning harjutamisega, kuid tulemusteni jõudmine võtab aega. Näiteks biheivioristlik õpiteooria rõhutab õpetaja poolt ettevalmistatud materjali, kus olulisel

kohal on kindlate definitsioonide või algoritmide pähe õppimine ehk trillimine läbi pideva treeningu ja harjutamise (Siegler, 2005; Uibu, 2010). See tähendab, et õppimine on õpetaja poolt juhitud protsess.

Murdude mõistmine nõuab siiski põhjalikumaid ja korrastatud teadmisi arvuhulkadest. Õppimisel on vaja teadmisi täisarvudest ümber organiseerida ja mõista, kuidas on tekkinud murdarvud (Siegler et al., 2013). Mõistete omandamist arusaamise tasemel toetab pigem konstruktivistlik kui biheivioristlik õpiteooria, sest arusaamise kujundamiseks ja heade tulemuste saavutamiseks ei saa õppimine olla vaid valmistõdede äraõppimine (Osana & Pitsolantis, 2013; Palu, 2010b; Ross & Bruce, 2009). See tähendab, et õppimisprotsessis rõhutakse teistmoodi lähenemist ja teiste meetodite kasutamist, kus õppija omandab ning loob ise seoseid uute ja olemasolevate teadmiste vahel (Battista, 2011; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Seega tuleks mõistete ja seoste selgitamisel keskenduda mitmesugusete näitvahendite, praktiliste tööde ja mänguliste elementide kasutamisele (Palu, 2010b).

Põhiteadmiste omandamiseks vajalik harjutamine on võimalik õppijale huvitavamaks teha läbi mängu (Palu, 2010b). Oluline on tähelepanu pöörata, et mängides või praktilisi töid tehes oleksid erinevad mõisted ja sümbolid õpilastele üheselt mõistetavad ja arusaadavad. Nimelt erinevate jooniste kasutamise miinuseks võib olla liigne sümbolite kasutamine ja reaalsete situatsioonide lahendamine jääb tahaplaanile (Osana & Pitsolantis, 2013). Näiteks murru  $\frac{1}{4}$  kujutamisel joonisel. Õpetajad kasutavad selle sümboli seletamiseks üldjuhul riskülikut, mis jaotatakse võrdselt neljaks osaks ja joonisel värvitakse ära üks osa. Tihti ei osata tähelepanu pöörata, et riskülik iseenesest on juba õpilaste jaoks sümbol ning võib tekitada veel enam segadust (Osana & Pitsolantis, 2013).

Igapäevaelu ja -kogemustega seotud näiteid tuleks samuti õpetamises võimalikult palju kasutada, sest need motiveerivad ülesandeid lahendama ja õppima (Fatai, Faqih & Bustan, 2014; Stylianides & Stylianides, 2007). Näiteks saab õpilastele neljandikku seletada koogi, pitsa, kella või võileiva osadeks jaotamise kaudu. Igapäevaeluga seotud teemasid tajuvad õpilased paremini (Osana & Pitsolantis, 2013; Stylianides & Stylianides, 2007). Nad leiavad ise erinevaid võimalusi ülesande lahendamiseks ning oskavad hinnata saadud tulemuse objektiivsust (Battista, 2011).

Õpilaste teemast arusaamise hindamisel on vajalik kindlaks määrata, kas õpilased on omandanud vajalikud teadmised ja oskused (Battista, 2011; Kurvits, 2011). Sellest tulenevalt on vaja teada, milliseid strateegiaid nad ülesannete lahendamisel kasutavad ning milliseid vigu teevad. Neid strateegiaid ja vigu analüüsides on võimalik näha õpetuse puudujääke ning

parandada või muuta õpetamismeetodeid. Näiteks mõistete ja põhjenduste õppimine nõuab rohkem tähelepanu ja oskusi, kui ainult faktide meenutamine ja algoritmi pähe õppimine (Orton, 2004; Osana & Pitsolantis, 2013). Mitmed autorid (Stylianides & Stylianides, 2007; Uibu, 2010) on leidnud, et traditsiooniline õpetamine toetab faktide ja protseduuride omandamist, konstruktivistlik aga mõtlemisoskuse arendamist.

### *Uurimuse eesmärgid ja uurimisküsimused*

Riiklike tasemetööde analüüsid näitavad, et 6. klassi õpilaste matemaatikaalaste teadmiste keskmised tulemused on paranenud, kuid jälgides üksikülesannete näitajaid on murdudega ülesannete lahendamise oskus iga aastaga langenud (Taal, 2011; Taperson, 2008; Tibar, 2013). Mitmed uuringud on kinnitanud, et madalad teadmised murdudest I ja II kooliastmes on takistuseks edasisel haridusteel (Hecht & Vagi, 2010; Ross & Bruce, 2009; Siegler, Fazio, Baley & Zhou, 2013). Arvestades, et harilike murdude sisuline arusaamine valmistab 6. klassi õpilastele probleeme ning õpilased teevad erinevaid vigu murdudega ülesannete lahendamisel, on põhjust uurida harilike murdude põhimõistete omandamist.

Uurimuse eesmärgiks on välja selgitada 6. klassi õpilaste teadmised harilikest murdudest, tuua välja enim raskusi valmistavad ülesanded ja uurida milliseid tüüpvigu õpilased teevad. Lisaks soovitakse teada saada, millised on õpetajate arvamused ning tõekspidamised harilike murdude teema õpetamisest. Eesmärgi saavutamiseks püstitati järgmised uurimisküsimused:

1. Millised on 6. klassi õpilaste üldised teadmised harilikest murdudest?
2. Millised on halvemini ja paremini lahendatud ülesanded?
3. Mil määral erinevad poiste ja tüdrukute testide tulemused?
4. Millised on 6. klassi õpilaste harilike murdude teadmised erinevatel kognitiivsetel tasemetel?
5. Millised on harilike murdudega ülesannete lahendamisel enamlevinud väärilahendused?
6. Millised on õpetajate arvamused antud teema õpetamisest?
7. Kuidas on õpetajate õpetamisviisid seotud õpilaste tulemustega?

Magistritöö tulemusena saaks ülevaate harilike murdude põhimõistete omandamisega seotud probleemidest. Töö annaks väärtuslikke teadmisi nii klassiõpetajale kui ka matemaatikaõpetajale harilike murdude teema teadlikumaks käsitlemiseks.

## Metoodika

### *Valim ja protseduur*

Magistritöö andmed koguti 2015. aasta veebruarikuus. Uurimus viidi läbi pärast teema õpetamist teise trimestri lõpul. Mugavusvalimi moodustasid 12 matemaatikaõpetajat viiest Tartu linna koolist. Õpetajate keskmine tööstaaž oli 19,6 aastat, millest kõige rohkem 38 ja kõige vähem 2 aastat. Uurimuses osales 15 klassi, kus kokku vastas testile 261 õpilast. Neist 133 (50,9%) olid tüdrukud ja 128 (49,1%) poisid.

Testid jagas õpilastele matemaatikaõpetaja ja nende täitmiseks oli aega 45 minutit. Õpetaja täitis küsimustiku harilike murdude õpetamise kohta. Ülesanded olid õpilastele iseseisvaks lahendamiseks. Samuti paluti õpetajatel testid jaotada õpilastele ilma eelneva teema meeldetuletamiseta. Testide tulemusi kontrollis töö autor.

### *Mõõtvahendid*

Kuuenda klassi õpilaste teadmiste mõõtvahendiks oli harilike murdude kohta koostatud test (Lisa 1). Testi koostamisel oli lähtutud riiklikus õppekavas esitatud harilike murdude õpitulemustest (Põhikooli riiklik õppekava, 2011), üleriigilistest 6. klassi matemaatika tasemetööde analüüsides (Taal, 2011; Taal, 2012; Taperson, 2008; Tibar, 2013) ja varasematest uuringutest (Brown & Quinn, 2006; Hodgen et al., 2009; Izsak, 2008; Siegler, Thompson & Schneider, 2011; Osana & Pitsolantis, 2013). Testi valiidsuse tagamiseks viidi läbi eeltestimine ja omapoolse eksperthinnangu andis üks 6. klassi matemaatikaõpetaja. Samuti aitas uurimuse juhendaja välja selgitada testi nõrgad kohad ja sõnastada ühiselt arusaadavad tööjuhendi küsimused. Testi reliaabluse leidmiseks arvutati Cronbach'i alfa, mis kinnitas testi usaldusväärsust ( $\alpha = 0,855$ ).

Test koosnes üheksast ülesandest, alaülesannetega kokku 24. Protseduurilisi oskusi nõudvad ehk faktide meenutamise ülesanded olid 1; 4; 9. Hariliku murru konseptsioonist arusaamist kontrolliti ülesannetega 2; 3; 5; 6; 7; 8. Mõned ülesanded (4; 6) sisaldasid lisaks vastuse põhjendamist.

Esimene ülesanne kontrollis kirjaliku arvutamise oskust harilike murdudega. See ülesanne oli otseselt seotud ka harilike murdude põhiteadmiste ja -oskustega. Teine ja kolmas ülesanne nõudsid osamäära mõiste tundmist. Teises ülesandes oli veel õpilasel vaja märkida saadud osa pinnamudelile. Kolmandas ülesandes aga tuli kujutada murdu osana hulgast. Neljandas ülesandes pidi õpilane võrdlema harilikke murde ja oma tegutsemisviisi põhjendama. Samamoodi nõudis ka kuues ülesanne murdude võrdlemise oskust igapäevaelu

situatsioonis. Ka selles ülesandes paluti õpilasel oma vastust põhjendada. Viienda ülesandega uuriti, kui hästi teab õpilane osamäära mõistet ja vastavalt sellele kujutada kujundil osa tervikust. Seitsmendas ülesandes tuli õpilasel märkida harilik murd arvkiirele. Kaheksas ülesanne oli seotud teksti mõistmisega ning selle lahendamiseks oli vaja tunda mõisteid ja luua seoseid igapäevaeluga. Üheksandas ülesandes kontrolliti õpilaste põhimõistete teadmisi ja -oskusi.

Õpetajate arvamuste hindamiseks koostati küsimustik (Lisa 2), mille koostamisel oli autorile abiks Anu Palu. Küsimustik tugines õpilase testile ja koosnes kolmest osast. Esimeses osas sooviti saada teavet õpetajate õpetamisviiside kohta. Neil paluti hinnata harilike murdude õpetamisega seotud aspektide olulisust Lickert'i skaalal. Teises osas küsiti õpetajate arvamusi kahe enamlevinud õpilaste väärarusaama kohta. Mõlema probleemi puhul küsiti väärarusaama tekkimise põhjust ja paluti seejärel esitada võimalikke võtteid olukorra lahendamiseks. Kolmanda osa küsimused olid õpetajate tausta kohta. Samuti oli siin õpetajatel võimalus teha ettepanekuid harilike murdude õpetuse, õppekava ja õpikute parendamise kohta.

Õpetajate vastused õpetamisviiside kohta kodeeriti vastavalt kolmele kategooriale: õpetajakeskne, õppijakeskne ja kahe eelneva kombinatsioon. Õpetajakesksele õpetamisele orienteerunud õpetamine tähendas intensiivset põhiteadmiste ja -oskuste harjutamise esikohale seadmist, meeldetuletamist ja võimalikult palju sarnaste ülesannete lahendamist. Õppijakesksele õppimisele orienteeritud õpetamine tähendas rohkem näitlikustamist, praktiliste tegevuste korraldamist ja koos tegutsemist. Kolmas õpetamisviis on kahe eelneva vahelvorm, kus õpetamisel pööratakse rõhku nii pidevale harjutamisele kui ka näitlikustamisele. Usaldusvääruse tagamiseks kodeeriti õpetajate vastused töö autori ja tema juhendaja poolt, mille tulemusena saavutati kodeerimiskooskõla.

### *Andmetöötlus*

Andmete töötlemiseks kasutati andmetöötlusprogrammi *SPSS versiooni 22.0* ja tabelarvutusprogrammi *Microsoft Office Excel 2010*. Andmeid töödeldi kvantitatiivsete andmeanalüüsimeetoditega kasutades kirjeldava statistika näitajaid: aritmeetiline keskmine (M), standardhälve (SD), minimaalne ja maksimaalne tulemus. Järeldava statistika tegemiseks kasutati aritmeetiliste keskmiste võrdlemisel disperisoonanalüüsi ANOVA ja T-testi. Statistiliselt oluliseks loeti tulemusi usaldusnivool  $p < 0,05$ , mis tähendab kuni 5% eksimisvõimalust.

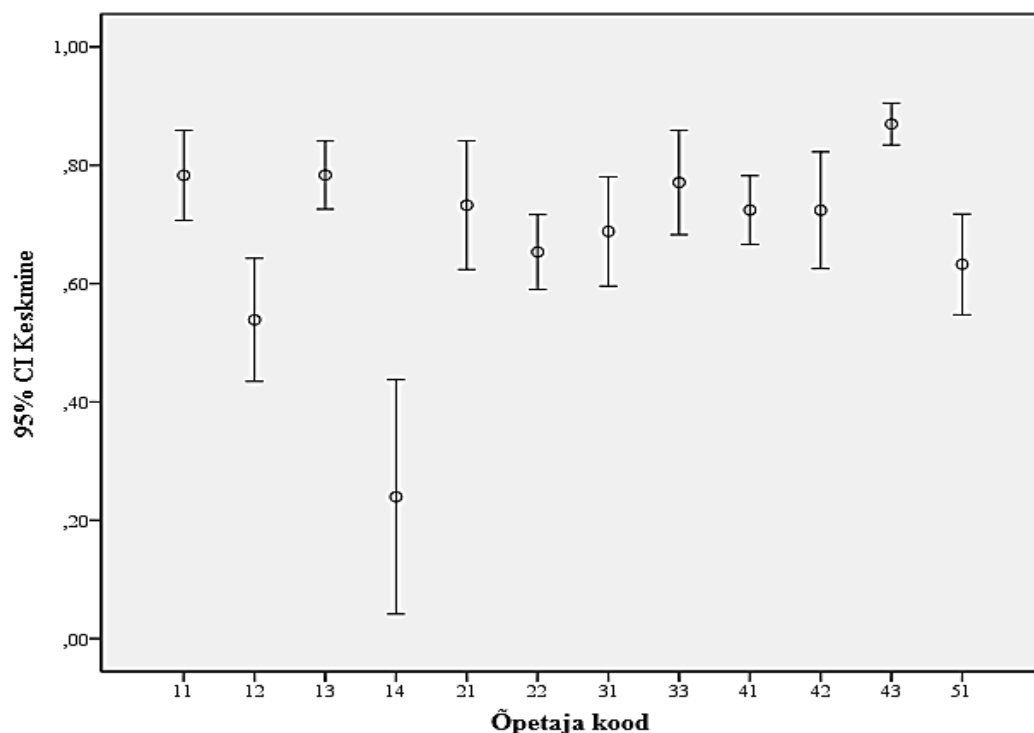
## Tulemused

*Harilike murdude testi üldine lahendus 6. klassides*

Esmalt sooviti teada, millised on 6. klassi õpilaste teadmised harilikest murdudest. Sellest tulenevalt analüüsiti testide tulemusi kirjeldava statistika analüüsimeetoditega. Uuringus osalenud 6. klassi õpilaste testi keskmine lahendus oli 0,71 (SD = 0,21; min 0,08; max 1,00). Parima tulemuse ehk kõik ülesanded lahendasid õigesti 5 õpilast, mis moodustab 1,9% kogu valimist. 50 õpilase (19,1%) keskmine tulemus jäi alla 50%. Õpilaste testide keskmised tulemused erinesid statistiliselt oluliselt (T-test,  $p < 0,001$ ).

Võrreldes poiste ja tüdrukute testide keskmisi tulemusi selgus, et tüdrukutel olid need paremad kui poistel. Ülesannete keskmine lahendus tüdrukutel oli 0,74 (SD = 0,19; min 0,21; max 1,00), poistel 0,68 (SD = 0,22; min 0,08; max 1,00).

Uuringus osalesid 12 õpetaja klassid (kokku 15 klassi). Joonis 1 kirjeldab iga õpetaja õpilaste keskmisi tulemusi.



Joonis 1. Erinevate õpetajate õpilaste keskmiste tulemuste 95% usaldusvahemikud

Dispersioon analüüs ANOVA näitas, et erinevate õpetajate õpilaste keskmised tulemused olid statistiliselt oluliselt erinevad,  $F = 6,21$  (11,28),  $p < 0,001$ . Parim tulemus oli  $M = 0,87$ ,  $SD = 0,08$ . Kõige madalam tulemus oli  $M = 0,24$ ,  $SD = 0,12$ .



*Halvemini ja paremini lahendatud ülesanded sisu järgi*

Ülesannete keskmist lahendatust kirjeldab tabel 1. Testis ei esinenud ühtegi ülesannet, mille kõik 261 õpilast oleksid veatult sooritanud. Kõige paremini lahendati ühenimeliste lihtmurdude liitmise ülesanne. Samuti murdude võrdlemise alaülesanne, kus tuli võrrelda ühenimelisi murde. Kõige halvemini lahendati ülesanded 5.2 ja 7.1, mille õigesti lahendatus (vastavalt 35% ja 45%) oli alla poole.

Tabel 1. Ülesannete keskmine lahendatus

| Ülesanne | Kirjeldus                           | Õigesti lahendatud tulemuste % |          |      |
|----------|-------------------------------------|--------------------------------|----------|------|
|          |                                     | Poisid                         | Tüdrukud | Kõik |
| 1.1      | Ühenimeliste lihtmurdude liitmine   | 93%                            | 89%      | 91%  |
| 4.2      | Ühenimeliste murdude võrdlemine     | 91%                            | 90%      | 91%  |
| 3.1      | Osa märkimine hulgamudelile         | 88%                            | 88%      | 88%  |
| 1.3      | Lihtmurru lahutamine                | 83%                            | 87%      | 85%  |
| 9.3      | Segaarvu teisendamine               | 78%                            | 89%      | 84%  |
| 4.1      | Murdude võrdlemine                  | 81%                            | 85%      | 83%  |
| 1.7      | Lihtmurru jagamine täisarvuga       | 73%                            | 86%      | 79%  |
| 2.2      | Osa märkimine pinnamudelile         | 72%                            | 80%      | 76%  |
| 2.1      | Osa leidmine tervikust              | 74%                            | 77%      | 76%  |
| 1.5      | Ühenimeliste murdude korrutamine    | 71%                            | 77%      | 74%  |
| 6.1      | Teksti põhjal murdude võrdlemine    | 66%                            | 78%      | 72%  |
| 4.4      | Võrdsete murdude võrdlemine         | 70%                            | 74%      | 72%  |
| 1.4      | Täisarvust lihtmurru lahutamine     | 72%                            | 73%      | 72%  |
| 5.1      | Osa leidmine tervikust              | 69%                            | 75%      | 72%  |
| 1.6      | Segaarvu ja lihtmurru korrutamine   | 62%                            | 81%      | 72%  |
| 4.3      | Liigmurdude võrdlemine              | 61%                            | 74%      | 68%  |
| 1.8      | Täisarvu ja lihtmurru jagamine      | 56%                            | 77%      | 67%  |
| 1.2      | Segaarvude liitmine                 | 67%                            | 65%      | 66%  |
| 8.1      | Igapäeva eluga seotud tekstülesanne | 63%                            | 66%      | 64%  |
| 9.2      | Hariliku murru taandamine           | 55%                            | 61%      | 58%  |
| 9.1      | Hariliku murru laiendamine          | 48%                            | 65%      | 57%  |
| 7.2      | Punkti märkimine arvkiirele         | 53%                            | 52%      | 52%  |
| 7.1      | Osa leidmine tervikust              | 45%                            | 45%      | 45%  |
| 5.2      | Osa märkimine kujundist             | 38%                            | 33%      | 35%  |

Poiste ja tüdrukute ülesannete lahendatuse keskmisi erinevusi kirjeldab samuti tabel 1. Nende keskmiste tulemuste vahel oli statistiliselt oluline erinevus (T-test,  $p < 0,05$ ). 93% poistest lahendas kõige paremini arvutusülesannet 1.1. Samas tüdrukute kõige paremini lahendatud ülesandeks oli võrdlusülesanne 4.2 (lahendatus 90%). Ometi, ei saa väita, et poiste ja tüdrukute kõigi üksikülesannete vahel oleks leitud statistiliselt olulist erinevust. Küll leiti

statistiliselt oluline erinevus arvutusülesannete 1.6, 1.7 ja 1.8 (T-test,  $p < 0,01$ ) ning võrdlemisülesannete 4.3, 4.4 ja 6.1 lahendamisel. Samuti leiti oluline erinevus ülesande 9 alaülesannete 9.1 ja 9.3 lahendamisel, mis eeldasid mõistete tundmist, täpsemini mõisteid laiendamine ja teisendamine. Kõiki nimetatud ülesandeid lahendasid paremini tüdrukud.

### *Õpilaste teadmised harilikest murdudest erinevatel koginiivsetel tasemetel*

Ülesannete lahendatust erinevatel koginiivsetel tasemetel võrreldes, selgus, et õpilased lahendasid paremini protseduurilisi oskusi eeldanud ülesandeid (lahendatus 74,6%) ja halvemini neid ülesandeid, mis nõudsid mõistelist arusaamist ja rakendamist (lahendatus 64,6%). Protseduuriliste ülesannete keskmiste tulemuste ja mõistelise arusaamise rakendamist nõudvate ülesannete keskmiste tulemuste vahel oli statistiliselt oluline erinevus (T-test,  $p < 0,001$ ). Tüdrukud lahendasid poistest paremini protseduurilisi oskusi ehk reeglite või päheõpitud toimingute meenutamist nõudvaid ülesandeid (T-test,  $p < 0,01$ ). Samas ei leitud, et mõistelist arusaamist eeldavate ülesannete lahendamisel oleks poiste ja tüdrukute vahel olnud statistiliselt oluline erinevus ( $p > 0,05$ ).

### *Enamlevinud vead ülesannete lahendamisel*

Järgnevalt uuriti enim raskusi valmistanud ülesannete väärvastuseid, selgitamaks milliseid tüüp vigu teevad õpilased. Kõige madalama lahendustulemusega oli mõistelist arusaamist eeldava ülesande 5 alaülesanne 5.2 (lahendatus 35%), kus õpilased pidid antud ülesandes varjutama kujundist veel teatud osa, et kokku oleks varjutatud nimetatud osa. Alaülesande 5.2 puhul jäeti kõige sagedamini osa varjutamata (52,5%). Kõige enam (6,9%) varjutasid õpilased pool kujundist. Lisaks esitasid 5,6% õpilastest erinevaid väärvastuseid (kokku 6), kus erinevate vigade variatiivsus jäi alla 2%. Tuleks lisada, et alaülesande 5.1 lahendatus oli 72%. See tähendab, et õpilased oskasid leida osa tervikust, kuid ei osanud saadud osa kujundile märkida.

Protseduurilisi oskusi nõudvatest arvutusülesannetest olid õpilaste tulemused kõige nõrgemad ülesandes 1.2, mis eeldas segaarvudega liitmise oskust. Ülesande keskmine lahendatus oli vaid 66,3%. Ühe klassi õpilased lahendasid selle alaülesande veatult. Üldiselt oli vigade variatiivsus suur, kokku anti 38 erinevat väärvastust. Enamlevinud valed vastused on esitatud tabelis 2. 8% (21 õpilast) jätsid vastuse lõpuni lahendamata ehk täisosa eraldamata ja 5% (13 õpilast) tegid ebaratsionaalseid tehteid, teisendades segaarvud liigmurruks, mille tulemusena tekkisid erinevad arvutusvead.

Tabel 2. Ülesande 1.2 vastused. Segaarvude liitmine

| Vastus                          | Kirjeldus                                | Õpilaste arv | Õpilaste arv % |
|---------------------------------|------------------------------------------|--------------|----------------|
| $7\frac{7}{24}$                 | Korrektne vastus                         | 173          | 66,3%          |
| $6\frac{7}{24}; 6\frac{17}{24}$ | Leidis ühise nimetaja, eksis arvutamisel | 23           | 8,8%           |
| $6\frac{31}{24}$                | Lõpuni lahendamata, täisosa eraldamata   | 21           | 8,0%           |
| $7\frac{17}{24}$                | Ebaratsionaalsus, eksis arvutamisel      | 13           | 5,0%           |
| Vastus puudub                   | Lahendamata                              | 11           | 4,2%           |
| $6\frac{12}{20}$                | Liitis omavahel lugejad ja nimetajad     | 7            | 2,7%           |
| $7\frac{5}{12}$                 | Ei leidnud ühist nimetajat               | 6            | 2,3%           |
| Muud vastused                   |                                          | 7            | 2,7%           |

Problemaatiline oli ka ülesanne 7, kus tuli leida, mis kalendrikuuga algab aasta viimane kolmandik. Korrektseks vastuseks loeti üks nendest variantidest: september või septembrikuu. 45,2% õpilastest oskas nimetada, mis kalendrikuuga algab aasta viimane kolmandik. Seejärel tuli saadud vastus märkida arvkiirele. Õpilased andsid kokku 18 erinevat väärvastust. Kõige tüüpilisemaks veaks oli augustikuu märkimine (11,5% õpilastest). Arvkiirele jätsid punkti tähistamata 27 õpilast, mis on 10,3% kogu valimist.

Keskmisest halvemini lahendati ka ülesande 9 alaülesanded 9.1 ja 9.2, mis eeldasid mõistete tundmist. Ülesanne 9.1 seisnes murru laiendamises etteantud nimetajani. Ülesandele 9.1 vastas õigesti 149 õpilast (57,1%). Selle ülesande puhul jäeti kõige sagedamini ülesanne lahendamata (22,2%). 43 õpilast (16,5%) kombineeris ülesandes antud arve, näiteks 9 õpilast pakkus lahenduseks  $7 \cdot 8 = 56$  ja 6 õpilast  $7/8 = 56/56 = 1$ . Teises alaülesandes oli õpilastel vaja taandada liigmurd. Korrektse vastuse andis 151 õpilast, mis on 57,9% kogu valimist. Suurem osa õpilastest (19,5%) kaotas punkte vastuse lõpuni taandamata jätmise pärast ja 29 õpilast (11,1%) jätsid ülesande lahendamata. Kolmandale alaülesandele, kus segaarv tuli teisendada liigmurruks, vastas õigesti 218 õpilast (83,5%). 8% õpilastest jättis ka selle alaülesande lahendamata.

Kaks ülesannet – 4 ja 6 – nõudsid õpilase teguviisi põhjendamist. Ülesanne 4 seisnes harilike murdude võrdlemises ning vastuse põhjendamises. Keskmiselt 78,5% õpilastest oskas murde võrrelda, aga oma vastust põhjendas 60,5% õpilastest. Kõige paremini põhjendati alaülesannet 4.2 ja kõige halvemini 4.4, tulemused vastavalt 70,1% ja 47,1% õpilastest.

Ülesanne 4.2 seisnes ühenimeliste murdude võrdlemises, kus kõige enam õpilasi (36,4%) põhjendas vastust „murru 6/7 lugeja on suurem kui murru 4/7 lugeja“ või „lugeja 4 on väiksem kui lugeja 6“. Lisaks oskas 51 õpilast (19,5%) põhjendada korrektse sõna-sõnalise definitsiooniga. Alaülesanne 4.4 eeldas õpilaste oskusi võrrelda murde 3/20 ja 15/100. Siin eksisid õpilased kõige enam mõistete kasutamisega (18%), jätsid vastuse põhjendamata (18%) või põhjendasid täpselt sama vastusega (4,6%).

Ülesande 6 sisu oli järgmine: *Mõlemal vennal oli ühepalju raha. Vanem vend kulutas 5/6 oma rahast ja noorem vend kulutas 4/5 oma rahast. Kumb vend kulutas rohkem? Põhjenda oma vastust.* Kogu valimist 72% õpilastest ütles õigesti, kumb vend kulutas rohkem. Sellest hoolimata selgus, et korrektselt oskas oma vastust põhjendada 122 õpilast (46,8%). 53,2% õpilastest ei osanud oma vastust põhjendada, millest arvestatav hulk (20,7%) jättis üldse põhjendamata. Tabelis 4 on esitatud kõik ülesande 6 põhjendused.

Tabel 4. *Õpilaste esitatud põhjendused ülesandes 6*

|                                 | Vastus                                                         | Kirjeldus                       | Õpilaste arv | Õpilaste arv % |
|---------------------------------|----------------------------------------------------------------|---------------------------------|--------------|----------------|
| Vastuste korrektsed põhjendused | $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$ ja $\frac{4}{5} = \frac{24}{30}$ | Laiendamine ühenimelisteks      | 94           | 36,1%          |
|                                 | $\frac{5}{6}$ 30-st on 25 ja $\frac{4}{5}$ 30-st 24            | Tervikust osa leidmine          | 16           | 6,1%           |
|                                 | $\frac{5}{6} = 0,83(3)$ ja $\frac{4}{5} = 0,8$                 | Teisendamine kümnendmurruks     | 12           | 4,6%           |
| Erinevad valed põhjendused      | Puudub                                                         | Ülesanne lahendamata            | 54           | 20,7%          |
|                                 | $\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$                                    | Sama vastusega põhjendamine     | 39           | 14,9%          |
|                                 | Mõlemal jäi üks osa alles                                      | Mõlemad kulutasid võrdselt      | 21           | 8%             |
|                                 | $\frac{5}{6} - \frac{4}{5} = \frac{1}{30}$                     | Ebaratsionaalsed arvutused      | 19           | 7,3%           |
|                                 | Muud vastused                                                  | Eksitavad joonised ja arvutused | 6            | 2,3%           |

Lisaks leiti, et poiste ja tüdrukute põhjenduoskus on erinev (T-test,  $p < 0,005$ ). Nimelt poistest 66,4% ja tüdrukutest 78,2% oskasid antud ülesandes oma vastust põhjendada.

*Õpetajate arvamused õpetamisest*

Õpetajate käest küsiti arvamusi harilike murdude õpetamise kohta. Kõigepealt sooviti teada, kuidas nad hindavad õpetamisega seotud aspektide olulisust. Selleks esitati neile 20 erinevat aspekti ning paluti hinnata nende olulisust skaalal 1 (ei ole üldse tähtis) kuni 5 (on väga tähtis). Olulisuse hindamiseks leiti antud vastuste keskmised, mis on esitatud tabelis 5. Kõik õpetajad pidasid väga oluliseks või oluliseks igapäevaeluga seotud ülesannete lahendamist, intensiivset põhiteadmiste ja -oskuste harjutamist, süstemaatilist kordamist, õpilase iseseisva töö oskuse kujundamist (sh koos õpikuga) ja kindlate vormistusreeglite nõudmist ülesannete vormistusel.

Tabel 5. *Õpetajate hinnang aspektide olulisuse kohta skaalal 1–5*

| Harilike murdude õpetamise aspektid                                       | Keskmine |
|---------------------------------------------------------------------------|----------|
| Igapäevaeluga seotud ülesannete lahendamine.                              | 4,83     |
| Intensiivne põhiteadmiste ja -oskuste harjutamine.                        | 4,58     |
| Õpilase iseseisva töö oskuste kujundamine (sh töö õpikuga).               | 4,58     |
| Õppimine võimalikult näitlikul tasandil.                                  | 4,50     |
| Murru mõiste konkretiseerimine hulga mudeliga (nt ül. 3 õpilase testis).  | 4,50     |
| Kindlate vormistusreeglite nõudmine ülesannete lahenduste vormistamisel.  | 4,50     |
| Ülesannete erinevate lahendusteede otsimise soodustamine.                 | 4,50     |
| Süstemaatiline kordamine.                                                 | 4,50     |
| Õpilaste suunamine uute lahendusteede ja ideede genereerimisele.          | 4,36     |
| Murru mõiste konkretiseerimine arvkiirel.                                 | 4,33     |
| Õpilane saab ise sõnastada definitsioone, arvutamisalgoritme ja reegleid. | 4,33     |
| Arvutamisalgoritmide ja reeglite selgitamine konkreetsel tasandil.        | 4,27     |
| Diferentseeritud mitmekülgne harjutamine.                                 | 4,27     |
| Õpilaste suunamine enesekontrollile ülesannete lahendamisel.              | 4,25     |
| Murru mõiste konkretiseerimine pinnamudeliga.                             | 4,16     |
| Kasutatava terminoloogia ja definitsioonide korrektsuse jälgimine.        | 4,16     |
| Süstemaatiline õpilaste teadmiste ja oskuste kontrollimine.               | 4,16     |
| Võimalikult suure hulga rakenduste esitamine.                             | 3,92     |
| Harjutamine mängu ja tegevuse abil.                                       | 3,75     |
| Definitsioonide või seaduspärasuste sõna-sõnaline omandamine.             | 3,54     |

Enamus õpetajaid vastas, et oluliseks peetakse ka ülesannetele erinevate lahendusteede otsimise soodustamist ning õpilaste suunamist enesekontrollile ülesannete lahendamisel. Lisaks peeti näitlikustamise poole pealt tähtsaks murru mõiste konkretiseerimist hulga mudeliga. Seevastu selgus, et ühe õpetaja jaoks pole nimetatud õpetamisviisid eriti tähtsad. Õpetamisviise, mida õpetajad eriti oluliseks ei pea, leiti kokku 7. Näiteks kaks õpetajat ei pea

eriti tähtsaks definitsioonide või seaduspärasuste sõna-sõnalist omandamist. Kuigi 6 õpetajat peavad seda vähemalt oluliseks, 3 õpetajat jäävad neutraalseks ning üks õpetaja jättis vastuse märkimata.

Kogu valimist 4 õpetajat pidasid vähemalt oluliseks kõiki õpetamisviise, aga jäid oma vastustes neutraalseks ühe valiku puhul. Nendest üks õpetaja pidas väga oluliseks kõiki õpetamisviise, ainult definitsioonide ja seaduspärasuste sõna-sõnalilisel omandamisel jäi ta neutraalseks. Mitte ükski õpetaja ei märkinud õpetamisviiside kohta „pole üldse tähtis“. Kaks õpetajat jätsid üksikud vastused märkimata.

Küsimustiku teises osas esitati kaks õpilaste väärarusaama harilikest murdudest ja paluti avaldada arvamust nende kahe enamlevinud vea kohta. Esimeseks väärarusaamaks esitati: õpilane on harilike murdudega liitmisel või lahutamisel omavahel lugejad liitnud või lahutanud, ja nimetajad liitnud või lahutanud. Kõik õpetajad leidsid, et neile esitatud probleem on aktuaalne igapäevatoos. Täpsemini suurem osa õpetajaid leidsid, et õpilastel ei ole mõisted selged või on need ununenud. Lisaks selgus, et enamus õpetajad on märganud, et õpilastel tekib seesugune viga peale korrutamise ja jagamise teema õppimist. Näiteks „Õpilane eksib selliselt peale korrutamise või jagamise õppimist, enne ta nimetajaid ei liida või lahuta. Kõige tõenäolisemalt ajab ta reeglid segamini ega mõtle sisule.“ Arvati ka, et sellised vead tekivad rutiinsete ülesannete lahendamisel, sest õpilased ei mõtle, mida peab tegema, vaid automaatselt lahendavad ette antud tehteid.

Teiseks paluti õpetajatel kommenteerida õpilaste väära segaarvude teisendust: õpilane on murru  $5\frac{1}{2}$  teisendamisel saanud vastuseks  $8/2$ . Küsimusele vastanud 12 õpetajast 2 ei pakkunud lahenduskäiku selle kohta, sest nad ei ole sellist viga kohanud. Küsimusele vastanud suurem osa õpetajatest leidsid, et õpilane on liitnud täisosale lugeja ja nimetaja. Neist 6 põhjendas vea tekkimist tehtega „ $5+2+1=8$ “ või „ $5+2+1/2=8/2$ “ ja 3 seletasid õpilase lahenduskäigu lahti „Õpilane liitis täisosale nii nimetaja kui ka lugeja.“ Samas üks õpetaja vastas, et õpilane ei ole tähelepanelikult tunnis kuulanud ning selle tulemusena tekivad vead.

Mõlema probleemi puhul küsiti õpetajate arvamust, mida saaks teha õpilase vigade parandamiseks või ennetamiseks. Õpetajate poolt antud vabavastused kodeeriti ja neist moodustati 3 gruppi: õpetajakesksele õpetusele, õppijakesksele õpetusele ja kahe eelneva kombinatsioonile omased väited. Õpetajakeskset õpetamist iseloomustasid arvamused, mille järgi on õpilastel veel vaja mõisteid ja reegleid meelde tuletada, pidevalt harjutada ja kinnistada, samuti lahendada näidisülesandeid ning rõhutada arvutamise reeglit. Näiteks „Kinnistada reeglit, et liidame või lahutame lugejaid ning mõistet ühine nimetaja.“ ja

„Rohkem harjutada, reeglit meenutada ja korrata.“ Õpetajaid, kes arvasid, et õpetuse parandamiseks ja vigade vältimiseks tuleks kasutada õpetajakeskset õpetust, oli kokku 6.

Õppijakeskset õpetamist iseloomustasid arvamused, mille järgi on oluline teemast arusaamine, igapäevaeluliste näidete toomine ja saadud vastuste võrdlemine jooniste abil. Näiteks „Visuaalselt seletada, mitu poolt on terves ja liita veel pool juurde.“ või „Selgitada mõistet erinevate jooniste abil.“ Sellelaadsete arvamustega õpetajaid oli vaid 2.

Osa õpetajatest arvasid, et vigade vältimiseks tuleks nii pidevalt korrata kui ka näitlikustada. Nende õpetajate arvamused moodustasid kolmanda, kombineeritud grupi (kokku 4 õpetajat). Näiteks „Siin aitabki pidev kordamine ning tihti on vaja näitlikud materjalid uuesti üle vaadata, et õpilasel kinnistuks arusaam.“ Üks õpetaja tõi konkreetselt välja, kuidas erinevate õpistiilidega õpilasi abistada. Täpsemini leidis ta, et nägemismäluga õpilasele tuleks teemat näitlikustada joonisega ja kuulmismäluga õpilasele pidevalt korrata, aga õpiabi õpilase puhul keskenduda konkreetsete näidisülesannete andmisele. Sellest tulenevalt võib oletada, et need õpetajad on orienteeritud nii õppija- kui ka õpetajakesksele õpetamisele.

Küsimustiku kolmandas ehk viimases osas oli õpetajatel võimalus teha ettepanekuid või jagada muresid, mis on seotud harilike murdude õpetamisega 6. klassis. Enamus õpetajatest leiavad, et matemaatika tunde võiks rohkem olla, sest harjutamiseks ja kordamiseks jääb vähe aega. Mõned õpetajad sooviksid õpikus antule lisaks kinnistamisülesandeid ja suuremat ülesannete valikut. Samuti peavad kaks õpetajat antud teemat raskeks. Leiti, et õpilasel on ülesande põhjal raske mõista, kas murd näitab osa tervikust või on tekstis arvuna, millega lihtsalt tehakse tehteid.

### *Õpilaste testi tulemuste seos õpetajate arvamustega*

Õpetajate arvamusi võrreldi õpilaste testi tulemustega. Üldiselt võib öelda, et kõige paremad tulemused saavutasid klassid, kelle õpetajad rõhutasid intensiivset põhiteadmiste ja -oskuste harjutamist, süstemaatilist kordamist ja kindlate vormistusreeglite nõudmist ülesannete lahenduste vormistamisel.

Valimis olid klasside keskmised tulemused üldiselt väga sarnased. Sellest tulenevalt võeti võrdlusesse kaks äärmuslikku klassi. Täpsemini kõige kõrgema (keskmise 0,87) ja kõige madalama (keskmise 0,24) tulemusega klassid. Nende klasside õpetajate vastustest selgus, et kõige kõrgema tulemuse saavutanud klassi õpetaja peab oluliseks õpetajakeskset õpetamist. See tähendab, et õpetamisel rõhutatakse intensiivset põhiteadmiste ja -oskuste

harjutamist ning süstemaatilist kordamist. Kõige madalama tulemusega klassi õpetaja peab oluliseks nii õppija- kui ka õpetajakeskset õpetamist. Sellest tulenevalt on õpetamisel olulisel kohal nii pidev harjutamine ja mõistete meenutamine kui ka näitlikustamine ja igapäevaeluliste ülesannete lahendamine.

Lisaks võrreldi nende klasside tulemusi, kelle õpetaja andis paralleelselt mitmele kuuendale klassile matemaatikat. Vaatluse alla võeti 3 õpetajat ja 6 klassi. Selgus, et kõikide õpetajate klasside vahel oli statistiliselt oluline erinevus (T-test,  $p < 0,05$ ). Õpetaja 22 klasside keskmised tulemused olid 71,6% ja 59,1%, õpetajal 31 olid 78,7% ja 57,8% ning õpetajal 41 olid 75,4% ja 68,1%.

### Arutelu

Magistritöö eesmärgiks oli välja selgitada 6. klassi õpilaste teadmised harilikest murdudest, kindlaks teha enim raskusi valmistavad ülesanded ja leida enamlevinud väärlahendusi murdudega ülesannete lahendamisel. Samuti sooviti teada saada, millised on õpetajate arvamused harilike murdude õpetamisest.

#### *Harilike murdude testi üldine lahendus 6. klassides*

Magistritöö esimese uurimisküsimusena sooviti välja selgitada kuuenda klassi õpilaste teadmised harilikest murdudest. Testi keskmine lahendus oli 71%, mis tähendab, et harilike murdude teema oli suuremas osas omandatud. Võib oletada, et antud testi kõrge lahendus võib olla tingitud asjaolust, et uurimuses osalesid vaid Tartu linna koolid. Näiteks 2013. aasta tasemetöö analüüsis (Tibar, 2013) selgus, et edukamad on Tartumaa õpilased. Lisaks leiti, et paremad tulemused on linna koolide õpilastel (Taal, 2011; Taperson, 2008; Tibar, 2013).

Poiste ja tüdrukute testide keskmisi tulemusi võrreldes selgus, et tüdrukute keskmised tulemused olid paremad kui poistel. Nii varasemad tasemetööde tulemused (Jakobson, 2014; Taal, 2011; Taal, 2012; Tibar, 2013) kui ka Vaabeli (2013) uuring on näidanud tüdrukute edukust. Uurimusest ei esinenud ühtegi ülesannet, mille poisid oleksid tüdrukutest statistiliselt oluliselt paremini lahendanud. Küll leidis kaks ülesannet (osa märkimine hulgamudelile ja osa leidmine tervikust), mille poisid ja tüdrukud lahendasid võrdselt.

Üldiselt lahendati test hästi, kuid selgus, et õpilaste teadmised olid klassiti erinevad. Samuti erinesid oluliselt samade õpetajate paralleelklasside tulemused. Mõnes klassis võis keskmine tulemus jääda madalamaks seetõttu, et kohal polnud kõiki õpilasi. Siiski võib oletada, et klassiti erinevad tulemused on otseselt mõjutatud õpilaste kognitiivsete tasemete ja



individuaalsete võimete arenguga. Ka I kooliastme uuringute tulemused on näidanud, et erinevus võib tuleneda õpilaste ealiste iseärasuste, kognitiivsete tasemete ja individuaalsete võimete arengust (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004).

### *Halvemini ja paremini lahendatud ülesanded sisu järgi*

Uurimustöö teiseks küsimuseks oli, millised on paremini ja halvemini lahendatud ülesanded. Samuti käsitletakse siin, mil määral erinevad poiste ja tüdrukute testide tulemused.

Kõige paremini lahendati ühenimelist lihtmurdude liitmise ülesanne, mille keskmine lahendatus oli 91%. Kuigi varasematest uuringutest (Brown & Quinn, 2006) on esile toodud, et problemaatiline on lihtmurdude liitmine ja lahutamine, siis antud uurimus seda ei kinnita. Tulemuste põhjal võib järeldada, et 6. klassi õpilased on harilike murdudega tehete sooritamiseks omandanud vajalikud algoritmide. Ka I kooliastmes on täheldatud, et õpilased saavutavad kõige paremaid tulemusi ülesannetes, mille lahendamiseks tuleb rakendada protseduurilisi oskusi ja teadmisi (Metsa, 2013; Palu, 2010a).

Erinevaid arvutamises ülesandeid võrreldes selgus, et õpilastele valmistasid raskusi segaarvudega arvutamine. Võib oletada, et nad saavad aru ja oskavad teha tehteid lihtsamate murdudega. Siiski ei olnud selle ülesande lahendatuse protsent tüdrukutel ja poistel statistiliselt oluliselt erinev. Küll aga erines see korrutamise- ja jagamises ülesannetes, mida lahendasid paremini tüdrukud.

Poiste ja tüdrukute testide tulemusi kõrvutades oli näha, et statistiliselt oluliselt erinesid nende tulemused protseduurilisi oskusi eeldavates ülesannetes, täpsemini arvutus ülesannetes, mõistete tundmises ja murdude võrdlemises. Nimetatud ülesandeid lahendasid paremini tüdrukud. Ka Vaabeli (2013) uuringus selgus, et tüdrukud lahendavad paremini protseduurilisi oskusi eeldavaid ülesandeid, näiteks arvutus ülesandeid. Che, Wiegert ja Threlkeld (2012) leiavad, et tüdrukud on paremad arvutajad. Nende uurimus kinnitab, et tüdrukud on kohusetundlikumad reeglite ning algoritmide õppimisel. Sellest tulenevalt võib järeldada, et kuna harilike murdude teema on suuremal osal üles ehitatud mõistete tundmisele ja arvutus ülesannete lahendamisele, siis ongi tüdrukute tulemused kõrgemad.

Seevastu toovad nad (Che, Wiegert & Threlkeld, 2012) välja, et poisid julgevad rohkem katsetada ja eksida. Samuti oskavad poisid ebaolulist materjali ignoreerida ja loovad loogilisi seoseid igapäevaeluliste situatsioonidega. Sellest võib oletada, et poisid suudavad keerulisi ülesandeid paremini lahendada. Antud uurimuses osutus keeruliseks ja halvemini lahendatud ülesandeks osa märkimine kujundile, mille lahendamiseks oli vaja mõistelist arusaamist ja

oskust eristada ebaolulist informatsiooni. See oli üks ainukesi ülesandeid, mille poisid lahendasid natukene paremini kui tüdrukud (lahendatus vastavalt 38% ja 33%). Ometi, ei saa väita, et poiste ja tüdrukute kõigi üksikülesannete vahel oleks leitud statistiliselt oluline erinevus.

### *Õpilaste teadmised harilikest murdudest erinevatel kognitiivsetel tasemetel*

Uurimustöö kolmandaks küsimuseks oli, millised on õpilaste teadmised erinevatel kognitiivsetel tasemetel. Töös vaadeldi matemaatikateadmisi kahel kognitiivsel tasemel: protseduurilised ja mõistelised teadmised.

Analüüs näitas, et õpilaste tulemused olid kõrgemad ülesannetes, mille lahendamiseks oli vaja protseduurilisi oskusi, ja madalamad ülesannetes, mille lahendamine eeldas mõistelist arusaamist. Täpsemini võib öelda, et õpilased saavutasid üldiselt häid tulemusi lihtsamates arvutusülesannetes, kuid tegid vigu või jätsid lahendamata need ülesanded, mille lahendamiseks tuli rakendada kõrgema taseme pädevusi ehk joonistele, kujunditele ja arvkiirele andmete märkimist. Võib oletada, et fakte ja protseduure harjutatakse ja kinnistatakse pidevalt, mistõttu olid seda tüüpi ülesanded õpilastele tuttavamad, ning neid osatakse paremini lahendada.

Sellest tulenevalt tuleks õpetamisel tähelepanu pöörata, et kõiki kognitiivseid tasemeid arendataks üheaegselt, sest edukaks toimetulekuks on vajalikud nii faktilised teadmised kui ka mõisteline arusaamine (Osana & Pitsolantis, 2013; Star, 2007; Stylianides & Stylianides, 2007). Sealhulgas on oluline lahendada erinevatel tasemetel olevaid ülesandeid, et teadmiste vahele tekiks loogilised seosed.

### *Enamlevinud vead ülesannete lahendamisel*

Magistritöö neljandaks uurimisküsimuseks oli, millised on harilike murdudega ülesannete lahendamisel enamlevinud väärilahendused. Vigade analüüs näitas selgemalt, millised on murdudega õpetamise kitsaskohad ja milliseid vigu tehti erinevates ülesannete liikides. Ka õppetöös aitaks vigadele keskendumine õpetajal tundi paremini planeerida ja seeläbi tõsta õpilaste teadmiste taset ning tagada paremat arusaamist teemast.

Kõige suurema vigade variatiivsusega (38 erinevat vastust) oli segaarvude liitmise ülesanne, kus tüüpilisemaid vastuseid esines vähem. Õpilased küll teadsid algoritmi, kuid eksisid arvutamisel või unustasid ülesande lõpuni lahendada. Osa õpilastest tegid ebaratsionaalseid tehteid (teisendasid segaarvud liigmurruks), mille tulemusena muutus

arvutamine keerukaks ja õpilased eksisid just seetõttu. Õpetamisel tuleks pöörata rohkem tähelepanu algoritmide näitlikustamisele, näidates konkreetset, miks on ebaratsionaalne segarvude liitmisel ja lahutamisel teisendada need arvud liigmurdudeks.

Õpilastele osutusid raskeks ka ülesanded, mille lahendamiseks oli vaja teada konkreetseid mõisteid „nimetaja, laiendamine, taandamine“. Kõige sagedamini jäeti need ülesanded üldse lahendamata või kombineeriti olemasolevaid arve. Sedalaadi õpilaste eksimusi on kinnitanud ka tasemetööde tulemuste analüüsid (Taal, 2011; Taperson, 2008). Võib oletada, et õpilastel puudusid teadmised mõistetest või olid need ununenud. Selle tulemusena sooritasid nad mingeid tehteid etteantud arvudega või kombineerisid neid.

Tasemetööde analüüsides (Jakobson, 2014; Taal, 2012; Oja, 2007) on esile toodud, et vaatamata lõppvastusele esitatud nõudele, jätavad õpilased murrud taandamata. Sama võime täheldada ka selle uurimuse põhjal. Brown ja Quinn (2006) leidsid, et õpilased oskavad küll järk-järgult taandada, kuid ei jõua lõpptulemuseni. Muidugi võib vigu sisse tulla sellest, kui ülesannete lahendamine on õpilaste jaoks muutunud rutiinseks ja selle tulemusena ei loe nad tähelepanelikult tööjuhust.

Problemaatiline oli ka osa leidmise ja arvkiirele märkimise ülesanne (lahendus 48,5%). 2013. aasta tasemetöös oli sarnase ülesande lahendus 52% (Tibar, 2013). Erinevate arvkiirte ja -telgede ülesanded on ka varasemalt (Oja, 2007; Siegler et al., 2013; Siegler & Pyke, 2013;) probleeme valmistanud. Peab märkima, et läbiviidud uuringus oskasid õpilased leida osa tervikust, kuid ei tulnud toime murru kujutamise arvkiirel. Märkimiväärne hulk õpilasi jättis selle ülesande lahendamata. See võib olla tingitud asjaolust, et hariliku murdu õpetatakse liiga abstrakselt. Soovituslik on harilikke murde konkretiseerida kolme mudeliga: 1) arvkiirel, 2) osana kujundist (pinnamudel) ja 3) osana hulgast (hulgamudel) (Zevenbergen, Dole & Wright, 2004). Õpikutest leiab piisavalt ülesandeid pinnamudeli kohta, kuid märgatavalt vähem on arvkiire kasutamist.

Kõige halvemini lahendati ülesannet, kus õpilased pidid varjutama kujundist veel teatud osa, et kokku oleks varjutatud nimetatud osa. Ülesande analüüs näitas, et kõige sagedamini jäetakse ülesanne pigem lahendamata (52,5%). Sarnase tulemuse on saanud ka Post (2014), kes uuris küll teist teemat, kuid selgus, et õpilased jätavad keerulisema või mõistelist arusaamist eeldava ülesande pigem lahendamata. Antud uurimusest võime oletada sama, et õpilased jätavad ülesande lahendamata pigem puudulikest teadmistest ja oskamatusest. Tuleks lisada, et õpilased oskasid leida küll osa tervikust arvuliselt, kuid ei osanud saadud osa

kujundile märkida. Ka siin võime oletada, et õpetamisel on enam rõhku pandud algoritmide omandamisele kui murru näitlikustamisele, visuaalsele kujutamisele ja arusaamisele.

Üheks võimaluseks vaadata õpilaste arusaamist teemast, on lasta neil oma teguviisi põhjendada. Õpilaste põhjendamise taset testiti kahe ülesande vastuste põhjal. Täpsemini pidid nad põhjendada, miks on üks murd teisest suurem või väiksem. Tulemustest võib järeldada, et õpilaste põhjendamisoskus on nõrk. Nii tasemetöö analüüsid kui ka teised uuringud (Kurvits, 2008; Kurvits, 2010; Taal, 2012) on jõudnud samade tulemusteni. Õpilaste põhjenduste sõnastused olid erinevad. Kuigi õpetajate vastustest selgus, et õpetamisel ei peeta eriti oluliseks definitsioonide või seaduspärasuste sõna-sõnalist omandamist, oli õpilasi, kes põhjendasid korrektse sõna-sõnalise definitsiooniga. Võib siiski oletada, et õpetamisel peetakse tähtsaks mõistete ja definitsioonide teadmist, sest eelteadmised on aluseks seoste tekkimisel olemasolevate ja uue teadmiste vahel (Brown & Quinn, 2006; Palu, 2010a).

Lisaks leiti, et poiste ja tüdrukute põhjendusoskus on oluliselt erinev. Nimelt poistest 66% ja tüdrukutest 78% oskasid oma vastust põhjendada. Varasemad uurimused (Gurian & Ballew, 2004) on leidnud, et tüdrukutel on kõrgem verbaalsem võimekus ja suurem sõnavara kui samaealistel poistel. Seega on neile lihtsam õpetada konkreetseid mõisteid, mis on seotud suulise ja kirjaliku eneseväljendusega. Sellest tulenevalt täheldati, et tüdrukud on tugevamad vabavastustelistes küsimustes, aga poisid valikvastustega küsimustes. Seda saab oletada ka nimetatud ülesannete uurimustulemuste põhjal, sest need olid üles ehitatud vabavastuselistele põhjendustele.

Üldiselt võib ülesannete enamlevinud väärvastustest oletada, et puudujäägid teadmistes viisid alternatiivsete valede lahendusteni, kus arve kombineeriti ja tehteid sooritati olemasolevate arvudega. Ülesannete analüüs näitas, et kõige sagedamini jäetakse raskena mõistetav ülesanne lahendamata. Raskusi võisid tekitada nii puudulikud oskused seoste loomisel, teksti mõistmisel kui ka olulise ja ebaolulise info selekteerimisel. Lisaks võib oletada, et väärvastuseid nimetatud ülesandele anti tähelepanematusel või puudujääkidest teadmistes. Seega tuleks õpetuses rohkem keskenduda lahenduskäikude ja vigade analüüsimisele, mis annab tagasiside õpetuse puudujääkide kohta ning toetab õpilase teadmiste arengut (Aunola et al., 2004). Näiteks vastusete põhjendused aitavad vigade analüüsimisel kindlaks määrata, millises lahendamise etapis on õpilane eksinud. Vead võivad tekkida erinevatel põhjustel, seepärast on oluline suunata õpilasi oma vastuseid kontrollima, et vältida ka hooletusvigu.

*Õpetajate arvamused õpetamisest*

Magistritöös sooviti teada õpetajate arvamusi harilike murdude teema õpetamisest. Õpetajatelt küsiti, milliseid aspekte nad peavad oluliseks selle teema õpetamisel. Nende vastuste põhjal võib teha oletusi tegeliku õpetamise kohta.

Selgus, et õpetajad pidasid oluliseks igapäevaeluga seotud ülesannete lahendamist, intensiivset põhiteadmiste ja -oskuste harjutamist, süstemaatilist kordamist, õpilase iseseisva töö oskuse kujundamist (sh koos õpikuga) ja kindlate vormistusreeglite nõudmist ülesannete vormistusel. Siit võime järeldada, et antud teema õpetamisel on suurem osa õpetajatest keskendunud ülesannete lahendamisele, harjutamisele ja kordamisele, mis on omane õpetajakesksele õpetamisele.

Seevastu pidasid õpetajad vähem oluliseks definitsioonide või seaduspärasuste sõna-sõnalist omandamist, võimalikult suure hulga rakenduste esitamist ning harjutamist läbi mängu ja erinevate tegevuste. Võime oletada, et õpetajad tähtsustavad pigem loogiliste seoste loomist ja oma sõnadega reeglite esitust või mõistete defineerimist. Küll aga on üllatav, et õpetajad ei pööra tähelepanu harjutamise mitmekesistamisele. Teise kooliastme õpilaste jaoks oleks just harjutamine läbi mängu või muude tegevuste tunduvalt efektiivsem ning tulemusrikkam kui rutiinseks muutunud ülesannete lahendamine, harjutamine ja kordamine (Palu, 2010b). Õpilased õpivad paremini, kui õpimeetodid on vaheldusrikkad (Gurian & Ballew, 2004).

Küsimustiku teises osas esitati kaks õpilaste väärarusaama harilikest murdudest ja paluti avaldada arvamust nende kahe enamlevinud vea kohta. Sellest tulenevalt analüüsiti 6. klassi matemaatikaõpetajate vabavastuselisi arvamusi õpilaste vigade kohta. Õpetajad leidsid, et neile esitatud probleemid on aktuaalsed igapäevatöös ning esitasid lahendusi vigade vältimise või parandamise kohta, mis näitab õpetajate valmisolekut probleemidega tegeleda. Selle kohta, kuidas õpetajad õpilaste väärarusaamu parandaks või ennetaksid, anti erinevaid vastuseid. Nende vastuste põhjal eristati kolm õpetajate gruppi. Ühe neist moodustasid õpetajakesksele ja teise õppijakesksele õpetamisele orienteeritud õpetajad. Kolmanda grupi moodustasid õpetajad, keda ei olnud võimalik kindlalt esimesse või teise gruppi paigutada.

Õpetajakesksele õpetamisele orienteerunud õpetajad leidsid, et õpilastel on veel vaja mõisteid ja reegleid meelde tuletada, pidevalt harjutada ja kinnistada. Võime oletada, et nende õpetajate õpilased oskavad paremini lahendada protseduurilisi oskusi nõudvaid ülesandeid nagu arvutamise-, võrdlemise- ja mõistete tundmise ülesandeid. Õppijakeskset õpetamist iseloomustasid arvamused, mille järgi on oluline igapäevaeluliste näidete toomine ja saadud

vastuste võrdlemine jooniste abil. Sellest võime järeldada, et õpilastel on parem mõisteline arusaamine ning visuaalne kujutlusvõime. Kolmandasse gruppi kuulunud õpetajad leidsid, et vigade vältimiseks tuleks nii pidevalt korrata kui ka näitlikustada. See võib tähendada, et õpetajad tähtsustavad nii mõistelisi teadmisi kui ka protseduurilisi oskusi, mida on mitmed uurijad (Osana & Pitsoulantis, 2013; Star, 2007; Stylianides & Stylianides, 2007) pidanud matemaatikas eduka toimetuleku eelduseks.

Õpetajate vabavastusteliste ettepanekute analüüs näitas, et õpetajad soovivad rohkem matemaatika tunde, sest harjutamiseks ja kordamiseks jääb vähe aega. Samuti leiavad nad, et murdude teema on õpilaste jaoks raske. Ülesannete lahendamine, harjutamine ja kordamine paistab olevat oluline osa harilike murdude õpetamisel, sest õpetajad soovisid õpikus antule lisaks kinnistamisülesandeid ja suuremat ülesannete valikut. Kuigi testi tulemustes selgus, et õpilastel olid head protseduurilised teadmised ja problemaatilisem oli murdude sisuline arusaam, ei olnud see õpetajatele probleemiks, sest sooviti pigem veel rohkem harjutada ja treenida.

### *Õpilaste testi tulemuste seos õpetajate arvamustega*

Viimase uurimisküsimusena sooviti teada saada, kuidas on õpetajate õpetamisviisid seotud õpilaste tulemustega. Õpetajatelt küsiti arvamusi harilike murdude teema õpetamise kohta ja neid seostati õpilaste tulemustega. Valmisse kuulunud klasside keskmised tulemused olid üldiselt väga sarnased ning selle tulemusena otsustati võrrelda äärmuslikke (kõige parema ning kõige nõrgema) ja nende õpetajate klasside tulemusi, kes õpetasid paralleelselt mitmele kuuendale klassile matemaatikat.

Võib öelda, et kõige paremad tulemused saavutasid klassid, kelle õpetajad rõhutasid intensiivset põhiteadmiste ja -oskuste harjutamist, süstemaatilist kordamist ja kindlate vormistusreeglite nõudmist ülesannete lahenduste vormistamisel. Peab aga märkima, et head tulemused saavutati siiski ainult protseduuriliste teadmiste valdkonnas, mitte mõistelises arusaamises. Kuid reeglite ja algoritmide päheõppimine ilma mõistelise arusaamiseta võib osutuda mõttetuks (Palu, 2010b). Kui protseduurid ununevad, tekivad õpilastel raskused. Mõistelise arusaamine aitaks aga ununenut meelde tuletada.

Õpetajate vastustest selgus, et kõige kõrgema tulemuse saavutanud klassi õpetaja pidas oluliseks õpetajakeskset õpetamist. See lubab oletada, et treenitakse sarnast tüüpi ülesandeid, mis omakorda soosib teatud faktide ja võtete päheõppimist ning rutiinseks muutumist. Seetõttu jääb vastavate mõistete, tähenduste ja seoste sisuline mõistmine puudulikuks ning

mõisteline arusaamine ei arene täielikult välja. Samuti võib see mõjutada õpilaste tähelepanu ja tööjuhiste lugemise täpsust. Õpilased ei pööra enam nii palju tähelepanu juhistele, vaid hakkavad rutiinselt ülesandeid lahendama ning on lihtsamalt tulema hooletusvead. Seega, mitte ülesannete rohkus, vaid mitmekülgsus aitab jõuda paremate tulemusteni.

Kõige madalama tulemusega klassi õpetaja pidas oluliseks nii õppija- kui ka õpetajakeskset õpetamist. Kuigi varasemad uurimused (Osana & Pitsolantis, 2013; Star, 2007; Stylianides & Stylianides, 2007) on leidnud, et matemaatikas edukaks toimetulekuks on vajalikud nii sisuline arusaamine kui ka protseduurilised oskused. Võime oletada, et üldisi matemaatika teadmisi arvestades on oluline rakendada õppija- ja õpetajakeskset õpetamist. Samas keskendudes konkreetse teema õpetamisele võime oletada, et vastavalt teemale on õpetajad õpetamisel erinevalt orienteerunud ning selle tulemusena saavutatakse erinevaid tulemusi. Näiteks Posti (2014) pindala teema uurimuses ilmnes, et paremaid tulemusi saavutavad mõistelist arusaamist ehk õppijakeskset õpetamist väärtustavad õpetajad.

Paralleelklasse analüüsides selgus, et kõikide klasside tulemuste vahel oli oluline erinevus. Nende tulemuste põhjal võib järeldada, et õpetaja õpetamisviiside ja õpilaste tulemuste vahel ei pruugi olla seost. Ka varasematest uurimustest (Samuelsson, 2010) ei ole leitud kindlat seost õpetamisviiside ja õpilaste tulemuste vahel. Sellest võime järeldada, et tulemused on eelkõige seotud õpilaste erinevate võimete, tasemete ja õpimotivatsiooniga. Motivatsiooni mõju on kinnitanud ka teised uurimused (Aunola, Leskinen & Nurmi, 2006).

### *Uurimuse piirangud ja soovitus*

Uurimuses ilmnesid ka mõningad piirangud. Testid viis läbi õpetaja, mitte uurimistöö autor. Seega ei saa olla päris kindel, kas õpetaja kordas harilike murdude teemat enne testide lahendamist või mitte. Kirjaliku testi tulemused ei pruugi alati näidata õpilaste arusaamist. Järgmistes uuringutes võiks lisaks kirjalikule testile läbi viia ka intervjuusid õpilastega, et välja selgitada nende sügavamad arusaamised matemaatilistest seostest, mõistetest ja algoritmidest. Täpsemalt uurida õpilaste kognitiivseid teadmisi kvalitatiivselt. Piiranguks oli ka see, et uurimuses osalesid vaid Tartu linna koolid. Teiste linnade ja maakondade koolide õpitulemuste vahel võib esineda erinevusi.

Õpetajate küsitluses hinnati õpetamisviiside ja meetodite olulisust vaid õpetajapoolse hinnangu põhjal. Selline hinnang võib olla subjektiivne. Edaspidi võiks sarnaste uurimuste korral kasutada intervjuud või vaatlust, et täpsemalt uurida, kas õpetajad ka praktikas nimetatud õpetamisviise ja meetodeid rakendavad. Vaatamata piirangutele on tulemused siiski

olulised. Hinnates õpilaste matemaatikateadmisi kognitiivsest valdkonnast lähtuvalt ja analüüsides lahendamisel tehtud vigu on võimalik välja selgitada raskusi, millega õpilased matemaatika omandamisel kokku puutuvad.

Kokkuvõtteks, magistritööst selgus, et 6. klassi õpilased saavutasid paremaid tulemusi pigem protseduuriliste oskuste kui mõistelise arusaamise ülesannete lahendamisel. Hea arvutamisoskuse on taganud ilmselt pidev harjutamine ja treenimine, mida läbiviidud uuringu põhjal õpetajad väga oluliseks pidasid. Kuid murdude õppimine ei tohiks jääda ainult protseduuride omandamiseks, oluline on ka mõisteline arusaam. Õpetamisel tuleks kasutada mitmekülgsemaid õpetamismeetodeid, kus lisaks rutiinsele harjutamisele ja kordamisele rakendatakse ka igapäevaelulisi näiteid, mudeleid ja jooniseid murdude sisuliseks mõistmiseks.

#### Tänuõnad

Autor tänab kõiki uuringus osalenud õpilasi ja nende õpetajaid, kes aitasid kaasa uurimuse läbiviimisele.

#### Autorsuse kinnitus

Kinnitan, et olen koostanud ise käesoleva lõputöö ning toonud korrektselt välja teiste autorite ja toetajate panuse. Töö on koostatud lähtudes Tartu Ülikooli haridusteaduste instituudi lõputöö nõuetest ning on kooskõlas heade akadeemiliste tavadega.

25.05.2015



## Kasutatud kirjandus

- Afanasjev, J. (2005). *6. klassi matemaatika tasemetöö*. Külastatud aadressil [http://www.ekk.edu.ee/vvfiles/0/6.kl\\_matem\\_j.pdf](http://www.ekk.edu.ee/vvfiles/0/6.kl_matem_j.pdf).
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M-K., & Nurmi, J-E. (2004). Developmental Dynamics of Math Performance From Preschool to Grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96(4), 699–713.
- Aunola, K., Leskinen, E., & Nurmi, J-E. (2006). Developmental dynamics between mathematical performance, task motivation, and teachers' goals during the transition to primary school. *British Journal of Educational Psychology*, 76(1), 21–40.
- Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 115–131.
- Battista, M. T. (2011). Conceptualizations and Issues Related to Learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication. *The Mathematics Enthusiast*, 8(3), 507–570.
- Booth, J. L., Newton, K. J., & Twiss-Garrity, L. K. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *Journal of experimental child psychology*, 118(1), 110–118.
- Brown, G., & Quinn, R. J. (2006). Algebra students' difficulty with fractions: An error analysis. *Australian Mathematics Teacher*, 62(4), 28–40.
- Canobi, K. H. (2009). Concept-procedure interactions in children's addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102(2), 131–149.
- Chan, W-H., Leu, Y-C., & Chen, C-M. (2007). Exploring group-wise conceptual deficiencies of fractions for fifth and sixth graders in Taiwan. *Journal of Experimental Education*, 76(1), 26–57.
- Che, M., Wiegert, E., & Threlkeld, K. (2012). Problem solving strategies of girls and boys in single-sex mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 311–326.
- Cowan, P. (2006). *Teaching mathematics: a handbook for primary & secondary school teachers*. London: Routledge.
- Fatai, I. A. O., Faqih, A., & Bustan, W. K. (2014). Children's Active Learning Through Unstructured Play in Malaysia. *Childhood Education*, 90(4), 259–264.
- Ghazali, N. H. C., & Zakaria, E. (2011). Students' Procedural and Conceptual Understanding of Mathematics. *Australian Journal of Basic & Applied Science*, 5(7), 684–691.

- Gurian, M., & Ballew, A. C. (2004). *Poisid ja tüdrukud õpivad erinevalt*. Tartumaa: El Paradiso.
- Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102(2), 395–406.
- Hecht, S. A., & Vagi, K. J. (2012). Patterns of strengths and weaknesses in children's knowledge about fractions. *Journal of Experimental Child Psychology*, 111(2), 212–229.
- Hecht, S. A., & Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology*, 102(4), 843–859.
- Hodgen, J., Küchemann, D., Brown, M., & Coe, R. (2009). Lower secondary school students' knowledge of fractions. *British Society for Research into Learning Mathematics*, 29(1), 65–70.
- Izsak, A. (2008). Mathematical knowledge for teaching fraction multiplication. *Cognition and Instruction*, 26(1), 95–143.
- Jakobson, K. (2014). *Matemaatika 6. klassi tasemetööst 2014*. Külastatud aadressil [http://www.innove.ee/UserFiles/Tasemet%C3%B6%C3%B6d/2014/Matemaatika/matemaatika\\_6kl\\_2014\\_tasemetoo\\_lyhianalyys.pdf](http://www.innove.ee/UserFiles/Tasemet%C3%B6%C3%B6d/2014/Matemaatika/matemaatika_6kl_2014_tasemetoo_lyhianalyys.pdf).
- Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, 116(1), 45–58.
- Kurvits, J. (2008). Multiplikatiivne mõtlemine – probleem koolimatemaatikas. J. Afanasjev, L. Lepmann, & T. Lepmann (Toim), *Koolimatemaatika XXXV* (lk 29–33). Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.
- Kurvits, J. (2011). Proportsionaalse mõtlemise areng. E. Abel, & K. Kokk (Toim), *Koolimatemaatika XXXVIII* (lk 34–39). Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.
- Kurvits, J. (2010). Tehted ratsionaalarvudega 5.–7. klassides. E. Abel, H. Jukk, & K. Kokk (Toim), *Koolimatemaatika XXXVII* (lk 18–23). Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.
- Lepmann, T. (2010). Rahvusvaheliste võrdlusuuringute TIMSS 2003 ja PISA 2006 õppetund Eesti matemaatikaõpetajale. I. Henno (Koost), *Rahvusvaheliste võrdlusuuringute TIMSS 2003 ja PISA 2006 õppetunnid* (lk 77–120). Tallinn: Archimedes.
- Leslie, A. M., Gelman, R., & Gallistel, C. R. (2008). The generative basis of natural number concepts. *Trends in Cognitive Science*, 12(6), 213–218.
- Lobato, J. (2012). The actor-oriented transfer perspective and its contributions to educational research and practice. *Educational Psychologist*, 47(3), 232–247.

- Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction*, 14(5), 519–534.
- Metsa, K. (2013). *Matemaatikaalased teadmised ja nende areng I kooliastmes*. Publitseerimata magistr töö. Tartu Ülikool.
- Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, 26(3), 400–417.
- Ni, Y., & Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52.
- Oja, M. (2007). *6. klassi matemaatika tasemetöö analüüs 2007*. Külastatud aadressil [http://www.ekk.edu.ee/vvfiles/0/m.\\_oja\\_6.kl.tasemetoo\\_analyys.pdf](http://www.ekk.edu.ee/vvfiles/0/m._oja_6.kl.tasemetoo_analyys.pdf).
- Orton, A. (2004). *Learning Mathematics: Issues, theory and classroom practice*. London: Continuum.
- Osana, H. P., & Pitsolantis, H. (2013). Addressing the struggle to link form and understanding in fractions instruction. *British Journal of Educational Psychology*, 83(1), 29–56.
- Palu, A. (2010a). *Algklassi õpilaste matemaatikaalased teadmised, nende areng ja sellega seonduvad tegurid*. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.
- Palu, A. (2010b). Matemaatika. E. Kikas (Toim), *Õppimine ja õpetamine esimeses ja teises kooliastmes* (lk 243–261). Tartumaa: Ecoprint.
- Palu, A., & Kikas, E. (2010). The types of the most widespread errors in solving arithmetic word problems and their persistence in time. In A. Toomela (Ed.), *Systemic Person-Oriented Study of Child Development in Early Primary School* (pp. 155–172). Frankfurt am Main: Peter Lang Verlag.
- Post, J. (2014). *Neljanda klassi õpilaste teadmised pindala mõistest ja õpetajate arvamused selle kujundamisest*. Publitseerimata magistr töö. Tartu Ülikool.
- Põhikooli riiklik õppekava, lisa 3*. (2011). Külastatud aadressil <https://www.riigiteataja.ee/akt/129082014020>.
- Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Kadosh, & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition* (pp. 1102–1118). Oxford: Oxford University Press.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346–362.

- Ross, J. A., & Bruce, C. D. (2009). Student achievement effects of technology-supported remediation of understanding of fractions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(6), 713–727.
- Samuelsson, J. (2010). The Impact of Teaching Approaches on Students' Mathematical Proficiency in Sweden. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 5(2), 61–78.
- Schneider, M., Grabner, R., & Paetsch, J. (2009). Mental number line, number line estimation, and mathematical achievement: their interrelations in Grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology*, 101(2), 359–372.
- Schneider, M., Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). Relations Among Conceptual Knowledge, Procedural Knowledge, and Procedural Flexibility in Two Samples Differing in Prior Knowledge. *Developmental Psychology*, 47(6), 1525–1538.
- Siegler, R. S. (2005). Children's Learning. *American Psychologist*, 60(8), 769–778.
- Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Science*, 17(1), 13–19.
- Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding fractions. *Developmental Psychology*, 49(10), 1994–2004.
- Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273–296.
- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14(5), 503–518.
- Star, J. R. (2007). Foregrounding procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 132–135.
- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404–411.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2007). Learning Mathematics with Understanding: A Critical Consideration of the Learning Principle in the Principles and Standards for School Mathematics. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 4(1), 103–114.
- Zevenbergen, R., Dole, S., & Wright, R. J. (2004). *Teaching Mathematics in Primary Schools*. Crows Nest: Allen & Unwin.
- Taal, D. (2011). *Üleriigiline 6. klassi matemaatika tasemetöö 2011*. Külastatud aadressil [http://www.ekk.edu.ee/vvfiles/0/6tt2011\\_kokkuv6te.pdf](http://www.ekk.edu.ee/vvfiles/0/6tt2011_kokkuv6te.pdf).

- Taal, D. (2012). *2012. aasta 6. klassi matemaatika tasemetööst*. Külastatud aadressil [http://www.innove.ee/UserFiles/Tasemet%C3%B6%C3%B6d/2012/2012\\_6\\_kl\\_matemaatika\\_tasemetoost.pdf](http://www.innove.ee/UserFiles/Tasemet%C3%B6%C3%B6d/2012/2012_6_kl_matemaatika_tasemetoost.pdf).
- Taperson, H. (2008). *6. klassi matemaatika tasemetöö analüüs*. Külastatud aadressil [http://www.ekk.edu.ee/vvfiles/0/tasemetoo\\_analyys\\_matem\\_6kl\\_2008.pdf](http://www.ekk.edu.ee/vvfiles/0/tasemetoo_analyys_matem_6kl_2008.pdf).
- Tibar, S. (2013). *2013. aasta 6. klassi matemaatika tasemetööst*. Külastatud aadressil [http://www.innove.ee/UserFiles/Tasemet%C3%B6%C3%B6d/2013/Matemaatika/2013\\_a\\_6\\_kl\\_matemaatika\\_tasemetoost.pdf](http://www.innove.ee/UserFiles/Tasemet%C3%B6%C3%B6d/2013/Matemaatika/2013_a_6_kl_matemaatika_tasemetoost.pdf).
- Uibu, K. (2010). *Teachers' roles, instructional approaches and teaching practices in the social-cultural context*. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.
- Uibu, K., & Kikas, E. (2014). Authoritative and authoritarian-inconsistent teachers' preferences for teaching methods and instructional goals. *Education 3 – 13*, 42(1), 5–22.
- Vaabel, M. (2013). *Neljanda klassi õpilaste matemaatikateadmised, tüüpilised vead ning poiste ja tüdrukute erinevused ülesannete lahendamisel*. Publitseerimata magistritöö. Tartu Ülikool.
- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, 28(2), 181–209.





## Lisa 2. Õpetaja küsimustik

### Hea 6. klassi matemaatikaõpetaja!

Olen Tartu Ülikooli klassiõpetaja eriala magistrant Triin Ojaste. Minu lõputöö eesmärk on välja selgitada, mil määral on 6. klassi õpilased omandanud harilike murdude teema. Selleks palun Teie abi.

Esiteks palun Teid oma klassis läbi viia harilike murdude test. Selle testi ülesanded on mõeldud õpilastele iseseisvalt lahendamiseks. Abi võib anda töökorraldustest arusaamiseks, kuid mitte sisuliseks lahendamiseks. Teiseks soovin teada Teie arvamust, milline on tulemusterikas harilike murdude õpetus. Selleks palun Teid vastata mõningatele õpetamisega seotud küsimustele.

**I. Palun mõelge 6. klassi teema „Harilikud murrud“ õpetamisele ja andke hinnang antud teema õpetamisega seotud aspektide olulisuse kohta. Vastamiseks kasutage antud skaalat. Tõmmake ring ümber Teie arvates sobivale variandile.**

| Lühidalt ühikutele: Põhikõne ning ühikute pole ar vates sobivate vahendamine. |                                                                           |                 |           |                |   |   |   |
|-------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------|----------------|---|---|---|
| 1                                                                             | 2                                                                         | 3               | 4         | 5              |   |   |   |
| Pole üldse tähtis                                                             | Mitte eriti tähtis                                                        | Olen neutraalne | On tähtis | On väga tähtis |   |   |   |
|                                                                               |                                                                           |                 |           |                |   |   |   |
| 1.                                                                            | Õppimine võimalikult näitlikul tasandil.                                  |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 2.                                                                            | Murru mõiste konkretiseerimine arvkiirel.                                 |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 3.                                                                            | Murru mõiste konkretiseerimine pinnamudeliga.                             |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 4.                                                                            | Murru mõiste konkretiseerimine hulga mudeliga (nt ül. 3 õpilase testis).  |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 5.                                                                            | Arvutamisalgoritmide ja reeglite selgitamine konkreetsetel tasandil.      |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 6.                                                                            | Õpilane saab ise sõnastada definitsioone, arvutamisalgoritme ja reegleid. |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 7.                                                                            | Definitsioonide või seaduspärasuste sõna-sõnaline omandamine.             |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 8.                                                                            | Kindlate vormistusreeglite nõudmine ülesannete lahenduste vormistamisel.  |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 9.                                                                            | Intensiivne põhiteadmiste ja -oskuste harjutamine.                        |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 10.                                                                           | Kasutatava terminoloogia ja definitsioonide korrektsuse jälgimine.        |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 11.                                                                           | Võimalikult suure hulga rakenduste esitamine.                             |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 12.                                                                           | Igapäevaeluga seotud ülesannete lahendamine.                              |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 13.                                                                           | Ülesannete erinevate lahenduste otsimise soodustamine.                    |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 14.                                                                           | Diferentseeritud mitmekülgne harjutamine.                                 |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 15.                                                                           | Süstemaatiline kordamine.                                                 |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |
| 16.                                                                           | Õpilaste suunamine uute lahenduste ja ideede genereerimisele.             |                 | 1         | 2              | 3 | 4 | 5 |



|                                                                  |   |   |   |   |   |
|------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|
| 17. Süstemaatiline õpilaste teadmiste ja oskuste kontrollimine.  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 18. Õpilase iseseisva töö oskuste kujundamine (sh töö õpikuga).  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 19. Harjutamine mängu ja tegevuse abil.                          | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 20. Õpilaste suunamine enesekontrollile ülesannete lahendamisel. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

**II. Järgnevad küsimused on seotud õpilaste väärarusaamadega. Palun avaldage oma arvamust kahe levinud vea kohta.**

**1. Õpilane on harilike murdudega liitmisel või lahutamisel omavahel lugejad liitnud või lahutanud ja nimetajad liitnud või lahutanud.**

1) Mis Te arvate, miks õpilane seda teeb?

.....

.....

.....

2) Mida saaks klassis õpetamisel teha, et õpilased sellist viga ei teeks?

.....

.....

.....

**2. Õpilane on murru  $5\frac{1}{2}$  teisendamisel saanud vastuseks  $\frac{8}{2}$ .**

1) Mis Te arvate, kuidas õpilane selle sai?

.....

.....

.....

2) Mida saaks klassis õpetamisel teha, et õpilased sellist viga ei teeks?

.....

.....

.....

**III. Viimaseks palun vastake järgmistele küsimustele**

1) Mitu aastat olete töötanud õpetajana? .....

2) Milline on Teie omandatud eriala? .....

3) Kas näete probleeme harilike murdude õpetamisel 6. klassis? Millised need on?

.....

.....

.....

4) Kas näete vajadust midagi muuta oma õpetuses, õppekavas, õpikutes? Millised oleksid Teie ettepanekud?

.....

.....

.....

**Suur tänu koostöö eest!**

## **Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina Triin Ojaste

(sünnikuupäev: 13.06.1991)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Kuuenda klassi õpilaste teadmised harilikest murdudest ja õpetajate arvamused nende teadmiste kujundamisest,

mille juhendaja on Anu Palu,

1.1.reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2.üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 25.05.2015