TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

KÕRGEM MATEMAATIKA

majandusteaduskonna üliõpilastele

1981

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Teoreetilise mehaanika kateeder

KÕRGEM MATEMAATIKA

majandusteaduskonna üliõpilastele

J. Lellep, L. Roots,
K. Soonets, I. Vainikko

TARTU 1981

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nõukogus
26.märtsil 1981.

<u>Saateks</u>

Käesolev töö on mõeldud esmajoones kasutamiseks TRÜ majandusteaduskonna esimese kursuse üliõpilastele. Osaliselt sobib see ka teiste teaduskondade üliõpilastele, kus õpitakse kõrgemat matemaatikat.

Konspektis on vaatluse all mitme muutuja funktsioonid koos rakendustega empiiriliste valemite konstrueerimiseks; lineaaralgebra elemendid; lineaarsed võrrandisüsteemid ja lihtsamad harilikud diferentsiaalvõrrandid ning nende lahendite leidmine. Paragrahvide lõppu on lisatud küsimused enesekontrolliks. Suhteliselt suur arv näiteülesandeid on toodud selleks, et õppija ei piirduks lahenduskäikude jälgimisega, vaid põhiliselt lahendaks neid ülesandeid iseseisvalt.

Autorid

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.
Для студентов экономического факультета.
Составители Яан Л е л л е п, Лембит Р о о т с и др.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202 400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Vastutav toimetaja E. Sake.
Paljundamisele antud 04.06.1981.
Formaat 30x42/4.
Rotaatoripaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 6,05.
Arvestuspoognaid 4,73. Trükipoognaid 6,5.
Trükiarv 500.
Tell. nr. 710.
Hind 15 kop.
TRÜ trükikoda, ENSV, 202400 Tartu, Paleoni t. 14.

§1. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONID

1. Mitme muutuja funktsiooni mõiste

Funktsionaalse sõltuvuse mõiste esineb matemaatikas kõikjal, kus on tegemist mitmesuguste muutuvate suuruste koosmuutumisega (s.t. muutumisega sõltuvalt üksteisest).

Kui näiteks mingis protsessis muutuvad seoses teineteisega kaks muutuvat suurust x ja y ning sealjuures niiviisi, et igale muutuva suuruse x kindlale väärtusele vastab üke (või mitu) teise muutuva suuruse y täiesti kindlat väärtust, siis ütleme, et need on omavahel funktsionaalses sõltuvuses, ehk: muutuv suurus y on muutuva suuruse x funktsioon.

Tegelikkuses esineb aga ka selliseid nähtusi, kus muutuvad koos rohkem kui kaks suurust. Näiteks 1) Koonuse ruumala V sõltub tema kõrgusest h ja põhja raadiusest r, nende suuruste vahel on sõltuvus

$$V = \frac{1}{3} r^2 h.$$

2) Rentaablus R sõltub kasumist Π, mis saadakse kauba realiseerimisel, samuti aga ka põhi- ja käibefondide suurustest a ja b :

$$R = \frac{\Pi}{a + b} .$$

Neil juhtudel räägitakse mitme muutuja funktsioonidest. Nii on koonuse ruumala kahe muutuja funktsioon, mille argumentideks on põhja raadius r ja kõrgus h:

$$V = V(r, h),$$

rentaablus aga kolme muutuja Π, a ja b funktsioon R:

$$R = R(\Pi, a, b).$$

Defineerime kahe muutuja funktsiooni:

Kui igale muutuvate suuruste x ja y väärtuste paarile vastab üks (või mitu) täiesti kindlat muutuva suuruse z väärtust, siis öeldakse, et z on kahe muutuja x ja y funktsioon ning kirjutatakse

$$z = f(x, y) \quad .$$

Kolme ning enama arvu muutujate funktsioonid defineeritakse täiesti analoogiliselt.

Kui argumentide väärtuste paarile $x = x_o$, $y = y_o$ vastav z väärtus on olemas, siis öeldakse, et kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ on punktis (x_o, y_o) määratud; vastupidisel juhul ta selles punktis määratud ei ole.

Kõigi niisuguste punktide hulka tasapinnal O_{xy}, milles z on määratud, nimetatakse selle funktsiooni määramispiirkonnaks. Näiteks funktsioon $z = 2x + 3y + 5$ on määratud kogu tasapinnal Oxy; funktsiooni $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ määramispiirkonnaks on ringjoone $x^2 + y^2 = 25$ sisse jääv ala, kaasa arvatud ka selle ringjoone enese punktid.

Nagu ühe muutuja funktsiooni, nii ka kahe muutuja funktsiooni võib esitada analüütiliselt ehk valemiga, tabeliga või graafiliselt. Kõige sagedamini esitatakse kahe muutuja funktsioon valemiga, mis näitab, milliseid tehteid tuleb sooritada argumentide väärtustega, et saada funktsiooni väärtust, mis nendele argumentide väärtustele vastab. Näiteks

$$z = xy \, .$$

Teades sõltuvust väljendavat valemit, saame, andes selles argumentidele vajalikud väärtused, neile vastava funktsiooni väärtuse arvutada. Kui näiteks $x = 3$ ja $y = 5$, siis $z = 3 \cdot 5 = 15$; kui $x = 2$ ja $y = 3{,}5$, siis $z = 7$.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ esitamisel tabeliga antakse lihtsalt tabeli kujul teatud arv kokkukuuluvaid argumentide ja funktsioonide väärtusi. Niisuguse tabeli üldkuju on järgmine:

$y \backslash x$	x_1	x_2	x_3	...	...
y_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_2, y_1)$	$f(x_3, y_1)$	...	...
y_2	$f(x_1, y_2)$	$f(x_2, y_2)$	$f(x_3, y_2)$	...	...
⋮	...	...	...	...	...
⋮	...	...	...	...	...

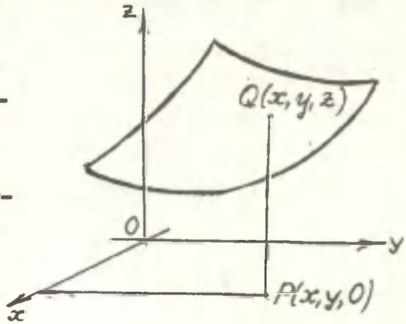
Toome ka ühe konkreetse näite:

$y \backslash x$	1	2	3	4	5
0,1	1,105	2,210	3,316	4,421	5,526
0,2	1,221	2,443	3,664	4,886	6,107
0,3	1,350	2,700	4,050	5,400	6,750
0,4	1,492	2,984	4,475	5,967	7,459
0,5	1,649	3,297	4,946	6,595	8,244

Sellest tabelist võime leida, et kui $x = 4$ ja $y = 0,3$, siis $z = 5,400$. Tabelist on aga võimalik leida ainult selles sisalduvate argumendi väärtustele vastavaid funktsiooni väärtusi.

Kahe muutuja funktsiooni graafiliseks esitamiseks vajame kolmemõõtmelises ruumis ristkoordinaadistikku Oxyz (joon. 1).

Igale arvupaarile (x, y) vaatab tasapinnal Oxy punkt P (x, y, 0). Selles punktis tasapinnale Oxy tõmmatud ristsirgel märgime punkti Q (x, y, z), kus z on parajasti argumentide valitud väärtustele x ja y vaetav funktsiooni väärtus. Niiviisi saadud punktid ruumis, mis vastavad kõikvõimalikele arvupaarile (x, y), moodustavad ruumis pinna. See pind ongi funktsiooni $z = f(x, y)$ geomeetriliseks vasteks; teda nimetatakse selle funktsiooni graafikuks.

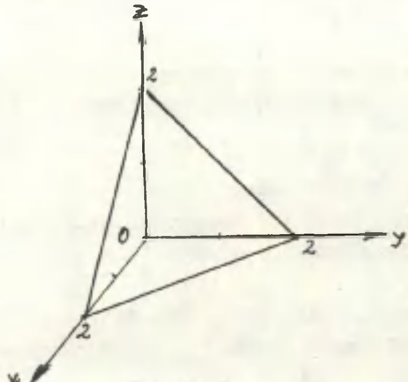


Joonis 1.

<u>Niisiis: funktsiooni z = f(x, y) graafikuks on niisugune pind, mille punktide aplikaadid sõltuvad abstsissidest ja ordinaatidest samuti nagu z väärtused oma argumentide väärtustest.</u>

Funktsionaalset sõltuvust väljendav valem on ühtlasi funktsiooni graafikuks oleva pinna võrrandiks.

N ä i d e. Funktsiooni $z = 2 - x - y$ graafikuks on tasapind, mis läbib punkte (2,0,0), (0, 2, 0) ja (0, 0, 2) (joon. 2).



Joonis 2.

2. Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

Me ütleme, et punktide P_n (x_n, y_n) $(n = 1,2...)$ jada läheneb punktile P_0 (x_0, y_0), kui indeksi n tõkestamatul kasvamisel punktide P_n ja P_0 vaheliste kauguste jada läheneb nullile. S.t. jada P_n läheneb P_0-le, kui

$$\lim_{n \to \infty} P_nP_0 = \lim_{n \to \infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0$$

ehk, mis on seesama, kui x_n läheneb arvule x_0, y_n aga arvule y_0.

Defineerime. Arvu A nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtuseks punkti (x, y) lähenemisel punktile (x_0, y_0), kui iga punktide jada (x_n, y_n) korral, kus $n \to \infty$ läheneb punktile (x_0, y_0), vastav funktsiooni väärtuste jada $f(x_n, y_n)$ läheneb arvule A.

Asjaolu, et arv A on funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtus lähenemisel punktile P_0 (x_0, y_0), märgime kirjas järgmiselt:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

ehk

$$f(x, y) \to A, \text{ kui } (x, y) \to (x_0, y_0) .$$

N ä i t e i d:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (2x^2 - y^2) = -2$, 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{5 - xy}{x^2 + y^2} = \dfrac{5}{1} = 5$.

Kahe muutuja funktsioonide piirväärtuste puhul kehtivad ühe muutuja funktsiooni piirväärtuste teooria põhilised laused.

1) Funktsioonide summa (vahe) piirväärtus võrdub nende funktsioonide piirväärtuste summaga (vastavalt - vahega). S.t. et kui $x \to x_0, y \to y_0$ puhul $f(x, y) \to A$ ja $g(x, y) \to B$,

siis

$$f(x, y) + g(x, y) \to A + B,$$
$$f(x, y) - g(x, y) \to A - B.$$

2) Funktsioonide korrutise piirväärtus võrdub tegurite piirväärtuste korrutisega. S.t. et $x \to x_0$, $y \to y_0$ puhul $f(x, y) \to A$ ja $g(x, y) \to B$, siis

$$f(x, y)\, g(x, y) \to AB.$$

3) Kahe funktsiooni jagatise piirväärtus võrdub nende funktsioonide piirväärtuste jagatisega tingimusel, et jagaja piirväärtus pole null. S.t. et kui $x \to x_0$, $y \to y_0$ puhul $f(x, y) \to A$ ja $g(x, y) \to B \neq 0$, siis

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \to \frac{A}{B}.$$

Kahe muutuja funktsiooni <u>pidevus</u> defineeritakse samuti analoogiliselt ühe muutuja funktsiooni pidevusega.

<u>Funktsiooni $z = f(x, y)$ nimetatakse pidevaks punktis (x_0, y_0), kui ta on selles punktis määratud ning</u>

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

<u>s.t. kui funktsiooni väärtus punktis (x_0, y_0) võrdub tema piirväärtusega lähenemisel sellele punktile</u>.

N ä i t e i d:

1) Funktsioon $z = x + y$ on pidev kõikjal, s.t. O_{xy}-tasapinna kõigis punktides. Tõepoolest, missugused arvud ka oleksid x_0 ja y_0, ikka on

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} (x + y) = x_0 + y_0,$$

mis on ka funktsiooni väärtuseks punktis (x_0, y_0).

2) Funktsioon $z = \dfrac{1 - xy}{x^2 + y^2}$ on pidev punktis $x = 0$,

$y = 1$, seat $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{1 - xy}{x^2 + y^2} = 1 = f(0, 1)$.

Näiteks punktis $x = 0$, $y = 0$ aga see funktsioon pidev ei ole.

Funktsioonide korral, mille argumentide arv on suurem kui kaks, mõistetakse piirväärtust ja pidevust täiesti analoogiliselt eelnevaga.

3. Osatuletised

Olgu antud kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$. Lähtume tema argumentide suvalistest väärtustest x, y. Jätame y väärtuse muutumatuks, x-le aga anname juurdekasvu x. Siis funktsioon z saab juurdekasvu

$$\Delta z_x = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

(indeks x osutab sellele, et juurdekasvu põhjuseks on ainult ühe argumendi, nimelt x, muutumine).

Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} ,$$

siis seda nimetatakse funktsiooni z esimest järku <u>osatuletiseks</u> x järgi ja tähistatakse $\frac{\partial z}{\partial x}$ [või $f'_x(x, y)$ või ka lihtsalt z'_x].

Analoogiliselt defineeritakse esimest järku osatuletis y järgi:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

[tähistatakse ka $f'_y\ (x, y)$, z'_y].

Kuna osatuletised on defineeritud täiesti analoogiliselt ühe muutuja funktsiooni tuletisega - ühe argumendi väärtuse muutumatuna hoidmisel z ongi ju ainult ühe muutuja funktsioon, siis

1) osatuletist ühe argumendi järgi arvutame nagu ühe muutuja funktsiooni tuletist, lugedes teise argumendi konstandiks;

2) osatuletiste arvutamisel võime kasutada kõiki ühe muutuja funktsiooni tuletiste jaoks tõestatud reegleid, valemeid ja lauseid.

N ä i t e d.

1) Leida funktsiooni $z = x^2y - 2\ln y + 4x + 5$ osatuletised.

Osatuletise arvutamisel x järgi loeme y konstandiks; saame

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 4 .$$

Defineerimisel y järgi loeme aga x konstandiks; seega

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - \frac{2}{y} .$$

2) Leida funktsiooni $z = \frac{xy}{x + y}$ osatuletiste väärtused punktis (2, 3).

Kõigepealt leiame osatuletiste üldavaldised:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x + y)y - xy}{(x + y)^2} = \frac{y^2}{(x + y)^2} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x + y)x - xy}{(x + y)^2} = \frac{x^2}{(x + y)^2} .$$

Seejärel asetame saadud valemitesse antud punkti koordinaadid; nii leiame, et

$$f'_x(2, 3) = \frac{3^2}{(2 + 3)^2} = \frac{9}{25} ,$$

$$f'_y(2, 3) = \frac{4}{25} .$$

Leides osatuletised osatuletistest, saame teist järku osatuletised. Neid tähistatakse järgmiselt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (\text{või ka } z''_{xx},\ f''_{xx}(x,\ y)),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \quad (\text{või } z''_{xy},\ \text{või } f''_{xy}(x,\ y)) \quad \text{jne.}$$

N ä i d e. Leida funktsiooni

$$z = x^4 - 5x^2y^2 + 6xy + 7$$

teist järku osatuletised.

Esimest järku osatuletised on

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 10xy^2 + 6y \quad ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -10x^2y + 6x \ .$$

Diferentseerides neid veel kord, saame teist järku osatuletised:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 10y^2 \ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -20xy + 6$$ (enne diferentseeritud x, siis y järgi);

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -20xy + 6$$ (enne y, siis x järgi);

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -10x^2 \ .$$

Osatuletisi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

nimetatakse funktsiooni $z = f(x,y)$ teist järku segatuletisteks. Nad on võrdsed pideva funktsiooni z korral, s.t.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} \ .$$

Eelnevas näites nägimegi, et see on nii.

Teist järku osatuletisi diferentseerides saame kolmandat järku osatuletised jne., jne.

N ä i d e. Leida funktsiooni $z = x^4 - 5x^2y^2 + 3xy^3$ kolmandat järku osatuletis $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 10xy^2 + 3y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 10y^2 ;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -20y .$$

Diferentseerimise järjekord ei ole ka siin oluline (võib näiteks alguses diferentseerida y järgi, siis kaks korda x järgi).

Rohkem kui kahe muutuja funktsioonide korral defineeritakse osatuletised analoogiliselt. Segatuletiste võrdus kehtib ka siin.

N ä i d e. Leida funktsiooni $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - 2x_1x_2 - x_2^2x_3^2$ esimest järku osatuletised.

Leiame, lugedes x_1 järgi diferentseerimisel x_2 ja x_3 konstantseteks,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 2x_2 ;$$

analoogiliselt

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_1 - 2x_2x_3^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = -2x_2^2x_3 .$$

4. Täisdiferentsiaal

Olgu antud kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$. Eeldame, et see funktsioon on pidev; samuti olgu pidevad tema esimest järku osatuletised.

Lähtume argumentide suvalistest väärtustest x, y. Kui neile anda juurdekasvud Δx, Δy, siis funktsioon saab juurdekasvu

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) .$$

Sealjuures pideva funktsiooni korral argumentide juurdekasvude tõkestamatul lähenemisel nullile Δz on tõkestamatult kahanev,

kui $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$, siis $\Delta z \to 0$.

Teisendame funktsiooni juurdekasvu Δz avaldist:

$$\Delta z = \left[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)\right] + \\ + \left[f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\right].$$

Nüüd on mõlemates nurksulgudes sisuliselt ühe muutuja funktsioonid. Rakendame neile ühe muutuja funktsioonide teooriast tuntud Lagrange'i keskväärtuse lauset; selle kohaselt

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \\ = f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\Delta x,$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, y + \theta_1 \Delta y)\Delta y ,$$

kus

$$0 < \theta_1 < 1 , \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Et eelduse kohaselt esimest järku osatuletised on pidevad, siis

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y)$$

ja

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y)$$

ning järelikult

$$f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \varepsilon_1$$

ja

$$f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_x(x, y) + \varepsilon_2 ,$$

kus $\varepsilon_1 \to 0$ ja $\varepsilon_2 \to 0$, kui $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$.

Seega funktsiooni juurdekasv

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

Ilmselt on siin kaks viimast liidetavat argumentide ja juurdekasvude lähenemisel nullile kõrgemat järku väikesed suurused võrreldes kahe esimese liidetavaga. Seega kujutab avaldis

$$f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$$

endast funktsiooni juurdekasvu Δz <u>peaosa</u> argumentide juurdekasvude tõkestamatul kahanemisel.

Defineerime. <u>Kahe muutuja funktsiooni juurdekasvu peaosa argumentide juurdekasvude tõkestamatul kahanemisel nimetatakse selle funktsiooni täisdiferentsiaaliks</u>.

Täisdiferentsiaali tähistatakse sümboliga dz. Eelnevast järeldub, et

$$dz = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y.$$

Argumentide juurdekasve nimetatakse enamikul juhtudel argumentide diferentsiaalideks ning tähistatakse dx, dy:

$$\Delta x = dx, \qquad \Delta y = dy.$$

Seega

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

N ä i d e. Leida funktsiooni $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ täisdiferentsiaal. Leiame

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Seega

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy.$$

Kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali võib kasutada funktsiooni juurdekasvu ligikaudseks arvutamiseks; selle juures loetakse funktsiooni juurdekasv Δz ligikaudu võrdseks täisdiferentsiaaliga dz. Niisugune talitusviis on lubatav loomulikult ainult siis, kui argumentide juurdekasvud on väikesed.

N ä i d e. Olgu koonuse kõrgus $h = 30$ cm, põhja raadius $r = 10$ cm. Kui palju suureneb koonuse ruumala, kui tema kõrgust suurendada 3 mm võrra, põhja raadiust aga vähendada 1 mm võrra.

Koonuse ruumala

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

on kahe muutuja r ja h funktsioon.
Leiame osatuletised:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi rh}{3}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{3} r^2;$$

võttes $\Delta V \approx dV$, leiame, et koonuse ruumala muut

$$\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2r\pi h}{3} dr + \frac{\pi}{3} r^2 dh =$$

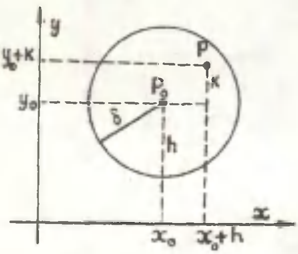
$$= \frac{\pi}{3}(2rhdr + r^2dh) = \frac{\pi}{3}(2.10.30(-0,1) + 100.0,3) =$$

$$= -10\pi \approx -31,4 \text{ cm}^3.$$

Märk "miinus" viitab sellele, et võrreldes esialgsega ruumala väheneb.

5. Kahe muutuja funktsiooni ekstreemumid

Vaatleme mingit ringi keskpunktiga $P_0(x_0, y_0)$ ja raadiusega $\delta > 0$. Selle ringi sisepunktide hulka nimetatakse punkti P_0 ümbruseks raadiusega δ ehk δ-ümbruseks. Punkt $P(x_0 + h, y_0 + k)$ kuulub punkti $P_0(x_0, y_0)$ δ-ümbrusesse siis ja ainult siis, kui $h^2 + k^2 < \delta^2$ (joon.3).



Joon. 3.

Öeldakse, et funktsioonil $z = f(x,y)$ on maksimum punktis $P_0(x_0, y_0)$, kui leidub selle punkti (küllalt väike) ümbrus, mille punktides

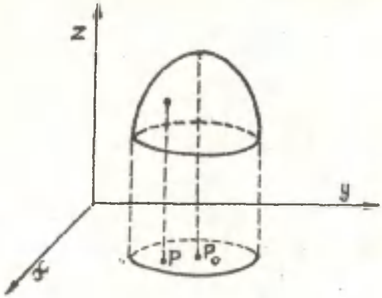
$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

(vt. joon.4).

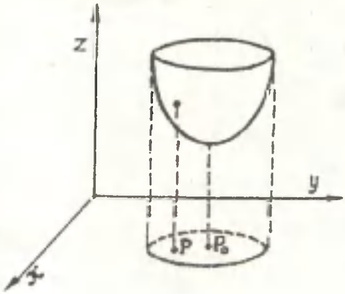
Analoogiliselt öeldakse, et funktsioonil $z = f(x, y)$ on miinimum punktis $P_0(x_0, y_0)$, kui leidub selle punkti (küllalt väike) ümbrus, mille punktides

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

(vt. joon. 5).



Joon. 4.



Joon. 5.

Kuidas leida funktsiooni eketreemumeid? Osutub, et kui funktsioonil f(x, y) on punktis (x_o, y_o) ekstreemum, siis

$$f'_x(x_o, y_o) = 0, \qquad f'_y(x_o, y_o) = 0.$$

Tôepoolest, kui kahe muutuja funktsioonil f(x, y) on punktis (x_o, y_o) ekstreemum, siis ka ühe muutuja funktsioonil $F(x, Y_o)$ on punktis $x = x_o$ ekstreemum ja järelikult tema tuletis argumendi x järgi on vôrdne nulliga. Samuti peab ekstreemumpunktis olema null ka osatuletis argumendi y järgi.

Osutub aga, et tingimused $f'_x(x, y) = 0$ ja $f'_y(x, y) = 0$ ei ole piisavad ekstreemumi olemasoluks. Näiteks funktsiooni $z = xy$ osatuletised punktis $x = 0$, $y = 0$ on vôrdsed nulliga, kuid antud punktis ei ole sellel funktsioonil ekstreemumit.

Vôib tôestada järgmise teoreemi.

Kui funktsioonil $z = f(x, y)$ on olemas punkti (x_o, y_o) ümbruses esimest ja teist järku osatuletised, siis punktis (x_o, y_o), kus $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, on ekstreemum juhul, kui selles punktis on täidetud tingimus

$$W(x, y) = f''_{xx} f''_{yy} - (f_{xy})^2 > 0\ ;$$

sealjuures on punktis (x_o, y_o) maksimum, kui selles punktis $f''_{xx} < 0$, ja miinimum, kui $f''_{xx} > 0$.

Kui $W(x, y) < 0$, siis funktsioon f(x, y) selles punktis ekstreemumit ei oma. Kui aga $W = 0$, siis tuleb funktsiooni käitumist lähemalt uurida. Suurust $W(x, y)$ nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ diskriminandiks.

N ä i d e. Leida funktsiooni $z = 3x + 24y - x^3 - 2y^3$ ekstreemumpunktid.

Leiame $f'_x = 3 - 3x^2$, $f'_y = 24 - 6y^2$.

Tarvilik tingimus ekstreemumi olemasoluks punktis (x_o, y_o) on

$$f'_x(x_o, y_o) = 0, \qquad f'_y(x_o, y_o) = 0.$$

ehk antud juhul

$$3 - 3x^2 = 0, \qquad 24 - 6y^2 = 0.$$

Lahendades selle süsteemi, saame neli punkti, kus võiks olla ekstreemum: (1,2), (-1, -2), (1, -2) ja (-1, 2). Arvutame välja diskriminandi

$$f''_{xx} = -6x \;, \; f''_{yy} = -12y \;, \quad f''_{xy} = 0;$$

$$W = f''_{xx} \; f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 = (-6x)\,(-12y) = 72\,xy.$$

Leiame diskriminandi saadud punktides:

$$W(1,2) = 144 \qquad W(-1, -2) = 144,$$

$$W(1, -2) = 144, \qquad W(-1, 2) = -144.$$

Osutub, et punktides (1, -2), (-1, 2) ekstreemumit pole, sest nende punktide korral $W < 0$.

Antud juhul on ekstreemumpunktideks punktid (1, 2) ja (-1, -2), kusjuures punktis (1, 2) on maksimum, sest $f''_{xx}(1, 2) = -6 < 0$ ja punktis (-1, -2) miinimum, kuna $f''_{xx}(-1, -2) = 6 > 0$.

6. Homogeensed funktsioonid

Funktsiooni $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nimetatakse k-järku homogeenseks funktsiooniks, kui kehtib võrdus

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

kõikide $x_1, x_2, \ldots, x_n$ väärtuste ja iga t väärtuse korral.

N ä i t e i d. 1) Vaatleme funktsiooni

$$f(x, y) = ax + by$$

Kui t on meelevaldne arv, siis

$$f(tx, ty) = atx + bty = t(ax + by) = tf(x, y).$$

Järelikult antud funktsioon on esimest järku homogeenne funktsioon.

2) Vaatleme funktsiooni

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Kui t on meelevaldne arv, siis

$$f(tx, ty, tz) = (tx)^2 + (ty)^2 + (tz)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 + t^2z^2 = t^2(x^2 + y^2 + z^2) = t^2f(x, y, z).$$

Järelikult see funktsioon on teist järku homogeenne funktsioon.

3) Vaatleme funktsiooni

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^4 - y^4} .$$

Meelevaldse arvu t puhul kehtib

$$f(tx, ty) = \frac{tx + ty}{t^4x^4 - t^4y^4} = \frac{x + y}{t^3(x^4 - y^4)} = \left(\frac{1}{t}\right)^3 \frac{x + y}{x^4 - y^4} = t^{-3} f(x, y).$$

Järelikult antud funktsiooni homogeensuse järk on -3. Kehtib järgmine teoreem (Euleri teoreem).

Kui funktsioon $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on k-järku homogeenne funktsioon, siis

$$x_1f'_{x_1} + x_2f'_{x_2} + \ldots + x_nf'_{x_n} = kf(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

N ä i t e i d. 4) Funktsioon $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ on teist järku homogeenne funktsioon. Siin

$$f'_x = 2x,\ f'_y = 2y,\ f'_z = 2z,$$

millest

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2f(x, y, z).$$

5) Funktsiooni $f(x, y) = \frac{x}{y}$ on 0. järku homogeenne funktsioon.

$$f'_x = \frac{1}{y}, \quad f'_y = -\frac{x}{y^2},$$

järelikult

$$xf'_x + yf'_y = \frac{x}{y} - \frac{x}{y} = 0 = 0.\ f(x, y).$$

6) Funktsioon

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^4 - y^4}$$

on (-3). järku homogeenne funktsioon. Järelikult

$$xf'_x + yf'_y = -3\ \frac{x + y}{x^4 - y^4}.$$

7. Empiiriliste valemite leidmine vähimruutude meetodil

Loodusteaduses, tehnikas, ökonoomikas kohtame tihti empiirilisi valemeid, s.o. valemeid, mis on koostatud katsetulemuste põhjal. Üheks kõige enam kasutatavaks võtteks selliste valemite leidmiseks on vähimruutude meetod. Esitame selle meetodi idee.

Olgu tarvis leida seos suuruste x ja y vahel. Katse või vaatluse tulemusena oleme saanud suuruse x väärtustele vastavad suuruse y väärtused, mis on esitatud tabeli kujul

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Tahame nende suuruste vahelist seost kirjutada ligikaudse (empiirilise) valemi kujul $y = f(x)$. Vähimruutude meetodi idee seisneb selles, et parimaks valemiks, mis esitab katseliselt saadud sõltuvust, peetakse seda, mille puhul katsel saadud väärtuste ja valemi järgi arvutatud väärtuste vahede ruutude summa on vähim. Antud meetodi puhul tuleb kõige enne anda ette funktsiooni $y = f(x)$ kuju, milles esinevate parameetrite leidmiseks kasutame vähimruutude meetodit. Kui teoreetiliste kaalutluste põhjal ei ole võimalik teha mitte mingisuguseid oletusi, milline selle funktsiooni kuju olema peaks, siis on otstarbekohane kanda saadud katseandmed joonisele. Selleks kanname Oxy-tasandile punktid (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$. Kui graafikult on näha, et need punktid on grupeerunud teatud sirge lähedale, siis võib eeldada, et suuruste x ja y vahel on lineaarne sõltuvus, mis on esitatav valemiga

$$y = ax + b \quad ,$$

kus kordajad a ja b on otsitavad parameetrid. Kui graafikul on näha, et punktid on grupeerunud mingi kõvera ümbruses, siis võib suuruste y ja x vahel olla näiteks ruutsõltuvus

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kus parameetrid a, b, c leiame vähimruutude meetodil. Võib esineda ka juht, kus suuruste y ja x vaheline sõltuvus on esitatav eksponentfunktsioonina

$$y = ab^x \; ,$$

kus a ja b on otsitavad parameetrid.

1) Olgu empiiriline valem kujul y = ax + b. Leiame a ja b (parameetrid) tingimusest, et see sirge tuleb tõmmata nii, et empiiriliselt saadud punktide ordinaatide ja samadele abstsissidele vastavate sirge punktide ordinaatide vahede ruutude summa oleks minimaalne, s.t. suurus

$$u = [y_1 - (ax_1 + b)]^2 + [y_2 - (ax_2 + b)]^2 + \ldots + \\ + [y_n - (ax_n + b)]^2$$

oleks minimaalne. Saadud summat võib vaadelda kui kahe muutuja a ja b funktsiooni, sest x_k ja y_k on antud suurused. Nüüd tuleb leida selle funktsiooni u = u(a, b) miinimum. Kahe muutuja funktsiooni miinimumi tarvilik tingimus on mõlema esimest järku osatuletise võrdumine nulliga, s.t.

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial u}{\partial b} = 0.$$

Leiame need osatuletised:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = -2\left[y_1 - (ax_1 + b)\right] \cdot (-x_1) + 2\left[y_2 - (ax_2 + b)\right] \cdot (-x_2) +$$
$$+ \ldots + 2\left[y_n - (ax_n + b)\right] \cdot (-x_n),$$
$$\frac{\partial u}{\partial b} = -2\left[y_1 - (ax_1 + b)\right] - 2\left[y_2 - (ax_2 + b)\right] - \ldots -$$
$$- 2\left[y_n - (ax_n + b)\right].$$

Võrrutades saadud tulemused 0-ga ja jagades kahega, saame a ja b leidmiseks kaks lineaarset võrrandit kahe tundmatuga:

$$(ax_1 + b - y_1)x_1 + \ldots + (ax_n + b - y_n)x_n = 0,$$
$$(ax_1 + b - y_1) + \ldots + (ax_n + b - y_n) = 0.$$

Pärast lihtsustamist võib selle võrrandsüsteemi kirjutada kujul:

$$a(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$$
$$= x_1y_1 + y_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$
$$a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + nb = y_1 + y_2 + \ldots + y_n;$$

ehk

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i,$$
$$a \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i .$$

Saadud süsteemi nimetatakse ka normaalvõrrandite süsteemiks. Siit leiame a ja b väärtused ning asetame need empiirilisse valemisse $y = ax + b$.

2) Olgu x ja y vaheline seos niisugune, mille kirjeldamiseks näib sobivat ruutsõltuvus

$$y = ax^2 + bx + c .$$

Kordajad a, b, c määrame siis vähimruutude meetodil järgmiselt. Suurus u on praegusel juhul järgmine:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \left[y_1 - (ax_i^2 + bx_i + c)\right]^2 ;$$

tema osatuletised

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2\left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right](-x_i^2) ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2\left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right](-x_i) ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n} 2\left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right](-1) .$$

Funktsiooni u miinimumi tarvilikud tingimused

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} = 0$$

annavad pärast lihtsustamist a, b ja c jaoks lineaarse võrrandsüsteemi

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i ,$$

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i .$$

3) Kui on alust eeldada x ja y vahel eksponentsiaalset sõltuvust, otsime seda kujul

$$y = ab^x$$

Logaritmime seda funktsiooni:

$$\log y = x \log b + \log a .$$

Siit on näha, et log y sõltub argumendist x lineaarselt, kusjuures log b ja log a võime vaadelda parameetritena, mis tuleb sobivalt määrata. Nende parameetrite leidmiseks kasutame jälle vähimruutude meetodit. Antud juhul on

$$u = \sum_{i=1}^{n} (x_i \log b + \log a - \log y_i)^2 \ ;$$

tema miinimumi tarvilikud tingimused

$$\frac{\partial u}{\partial(\log a)} = 0 \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial(\log b)} = 0$$

(diferentseerimine toimub log a ja log b järgi).
Need tingimused annavad log a ja log b jaoks võrrandsüsteemi, mis oma ehituselt on analoogiline juhul 1 saadud süsteemiga:

$$\log b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \log a \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i ,$$

$$\log b \sum_{i=1}^{n} x_i + n \log a = \sum_{i=1}^{n} \log y_i .$$

Selle süsteemi lahendamisel saadud parameetrite log a ja log b järgi leiame logaritmide tabelitest a ja b.

N ä i t e i d: 1) Nelja aasta jooksul on suurused x ja y omandanud järgmieed väärtused:

Aasta	1	2	3	4
x_i	-3	-1	1	3
y_i	1	2	2	3

Leida sirge võrrand, mis väljendaks võimalikult hästi suuruse y sõltuvust suurusest x.

Lahendamisel on otstarbekohane kasutada järgnevat tabelit:

Aasta	x_i	y_i	xy_i	x_i^2
1	-3	1	-3	9
2	-1	2	-2	1
3	1	2	2	1
4	3	3	9	9
Summa	0	8	6	20

Tabelist on näha, et

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 8, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 6, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 20.$$

Järelikult saame a ja b määramiseks süsteemi

$$\begin{aligned} a \cdot 20 + b \cdot 0 &= 6, \\ a \cdot 0 + b \cdot 4 &= 8, \end{aligned}$$

millest $a = 0,3$ ja $b = 2$. Otsitava sirge võrrand on

$$y = 0,3x + 2 .$$

2) Kasutades vähimruutude meetodit, määrata funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ kordajate väärtused nii, et ta võimalikult hästi kirjeldaks järgmise tabeliga esitatud sõltuvust;

x_i	0,5	1	1,5	2	2,5
y_i	0,8	1,9	4,9	8,8	13,9

Nõutavate summade leidmiseks koostame tabeli

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0,5	0,8	0,25	0,125	0,0625	0,4	0,2
2	1,0	1,9	1,0	1,0	1,0	1,9	1,9
3	1,5	4,9	2,25	3,375	5,0625	7,35	11,025
4	2,0	8,8	4,0	8,0	16,0	17,6	35,2
5	2,5	13,9	6,25	15,625	39,0625	34,75	86,875
$\sum$	7,5	30,3	13,75	28,125	61,1875	62,0	135,2

Saame järgmise süsteemi kordajate a, b, c määramiseks:

$$\begin{aligned} 61,1875a + 28,125b + 13,75c &= 135,2 \ , \\ 28,125a + 13,75b + 7,5c &= 62,0 \ , \\ 13,75a + 7,5b + 5c &= 30,3 \end{aligned}$$

Selle süsteemi lahendamisel leiame, et $a = 2,54$, $b = -1$ ja $c = 0,575$.

3) Leida eksponentsiaalne sõltuvus $y = ab^x$, mis väljen-

daks võimalikult hästi järgmise tabeliga esitatud sõltuvust:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	45,5	48,5	55,8	65,7	86	96,3	105

Koostame tabeli

x_i	y_i	$\log y_i$	$x_i \log y_i$	x_i^2
0	45,5	1,6580	0,0000	0
1	48,5	1,6857	1,6857	1
2	55,8	1,7466	3,4932	4
3	65,7	1,8176	5,4528	9
4	86,0	1,9345	7,7380	16
5	96,3	1,9836	9,9180	25
6	106,0	2,0212	12,1272	36
$\sum x_i = 21$		$\sum \log y_i = 12,8472$	$\sum x_i \log y_i = 40,4149$	$\sum x_i^2 = 91$

Vastavalt eeltoodule saame a ning b jaoks võrrandisüsteemi

$$91 \log b + 21 \log a = 40,4149 ,$$
$$21 \log b + 7 \log a = 12,8472 .$$

Sellest

$$\log a = 1,6346 , \quad \log b = 0,0669$$

ning järelikult

$$a = 43,1 \quad \text{ja} \quad b = 1,167 .$$

Otsitav seos on seega

$$y = 43,1 \cdot 1,167^x .$$

K o n t r o l l k ü s i m u s e d

1. Defineerige kahe muutuja funktsioon. Mis on selles analoogilist ja uut ühe muutuja funktsiooni definitsiooniga võrreldes?

2. Mis on kahe muutuja funktsiooni graafikuks?
3. Defineerige kahe muutuja funktsiooni piirväärtus.
4. Esitage pidevuse definitsioon funktsiooni juurdekasvu abil. Kuidas pidevust geomeetriliselt tõlgendada?
5. Defineerige osatuletis ühe argumendi järgi. Mitme muutuja funktsioon on kahe muutuja funktsiooni osatuletis ühe argumendi järgi?
6. Kuidas defineeritakse kõrgemat järku osatuletised?
7. Mis on täisdiferentsiaal? Kirjutage üles kolme muutuja funktsiooni $f(x,y,z)$ täisdiferentsiaal.
8. Defineerige tasandi punkti ümbrus.
9. Tõlgendage kahe muutuja ekstreemumeid geomeetriliselt.
10. Millised on ekstreemumi tarvilikud tingimused?
11. Kuidas määratakse kahe muutuja funktsiooni ekstreemumi olemasolu ja iseloomu funktsiooni diskriminandi abil?
12. Andke homogeense funktsiooni definitsioon. Tooge näiteid.
13. Veenduge funktsiooni $f(x,y) = x^3 - 5x^2y + 2y^3$ korral Euleri teoreemi täidetuses.
14. Mida mõistetakse empiirilise valemi all? Milles seisneb vähimruutude meetodi idee empiirilise valemi konstrueerimisel?
15. Tuletage normaalvõrrandite süsteem funktsiooni ab^x parameetrite leidmiseks.

§ 2. MAATRIKSID JA DETERMINANDID

1. Vektorid n-mõõtmelises ruumis

Varemast teame, et igale ruumipunktile vastab kohavektor ning punkti koordinaadid ühtivad kohavektori koordinaatidega. Kohavektori koordinaatide arv on võrdne vektorbaasi moodustavate baasivektorite arvuga. Sirgel asuval vektoril on üks, tasandil asuval vektoril kaks ja ruumis asuval vektoril kolm koordinaati - niisama palju kui baasivektoreid. Öeldakse, et vektorbaas määrab sirgel ühemõõtmelise, tasandil kahemõõtmelise ja ruumis kolmemõõtmelise vektorruumi. Kohavektorite lõpp-punktidel on ka vaetavalt üke, kaks või kolm koordinaati, s. t. igaüka neist kuulub vastavamõõtmelisee ruumi. Seega on igal vektorbaasil vabavektorite hulk üksüheses vaatavuses vektorruumi punktidega ja seega arvujärjenditega.

Järjestatud arvukolmikud ei pea tingimata tähistama punkti geomeetrilist asukohta. Näiteks ettevõtteid võib iseloomustada järgmiste näitajatega: toodangu mahu, omahinna ja tööviljakuse plaani täitmise protsendid. Siin on ettevõtte iseloomustamiseks võetud 3 parameetrit ehk arvukolmik. Arvukolmikut tõlgendame vektorina kolmemõõtmelises ruumis. Õpperühmade õppeedukust ülikoolis võib iseloomustada järgmiste parameetritega: eksamisessiooni sooritanute protsent ning ainult hinnetele "hea" ja "väga hea" õppijate proteent. Arvupaarid määravad vektori kahemõõtmelises ruumis (tasandil).

Kui lisada eespool ettevõtteid iseloomustavatele parameetritele toodangu realiseerimisplaani täitmise proteent, saame juba arvude neliku. Mõnede objektide kirjeldamisel on parameetrite hulk veelgi suurem. Seepärast osutub otstarbekaks laiendada vektorruumi mõistet. Järjestatud n arvu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nimetatakse punkti koordinaatideks n-mõõtmelises ruumis. Punkti koordinaatidega $(0, 0, \ldots, 0)$ nimetatakse n-mõõtmelise ruumi nullpunktiks. Igale ruumipunktile $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ seatakse vastavusse n-mõõtmeline kohavektor, mis "viib" nullpunktist $O(0, 0, \ldots, 0)$ punkti P ja mida tähistatakse

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) . \tag{2.1}$$

Vektor $\vec{X}$ n-mõõtmelisee ruumis teisendab selle ruumi punktid sama ruumi punktideks. Reaalarve x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nimetatakse n-mõõtmelise vektori koordinaatideks. Kui ühe-, kahe- ja kolmemõõtmelisi vektoreid saab geomeetriliselt esitada, siis nelja- jne. mõõtmeliste vektorite korral see võimalus puudub.

Lineaartehted n-mõõtmeliste vektoritega defineeritakse analoogiliselt tehetega kolmemõõtmeliste vektoritega.

Vektorite $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ja $\vec{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$

summaks (vaheke) nimetatakse vvektorit $\vec{X} \pm \vec{Y}$ koordinaatidega

$$\vec{X} \pm \vec{Y} = (x_1 \pm y_1, \ldots, x_n \pm y_n) \; ; \qquad (2.2)$$

vektori $\vec{X}$ korrutiseks skalaariga k nimetatakse vektorit

$$k\vec{X} = (kx_1, \ldots, kx_n) \; . \qquad (2.3)$$

Defineeritakse veel vektorite $\vec{X}$ ja $\vec{Y}$ skalaarkorrutis:

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \; . \qquad (2.4)$$

Kehtima jäävad kõik kolmemõõtmeliste vektorite tehete omadused.

Vektori $\vec{X}$ pikkuseks (mooduliks) nimetatakse mittenegatiivset arvu

$$\vec{X} = \sqrt{\vec{X} \cdot \vec{X}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \; . \qquad (2.5)$$

N ä i d e . Leida viiemõõtmeliste vektorite $\vec{X} = (0,1,-2,3,2)$ ja $\vec{Y} = (1,4,1,0,-3)$ summa ning skalaarkorrutis.

Vektorite liitmisel liidetakse vastavad koordinaadid ja seega

$$\vec{X} + \vec{Y} = (1,5,-1,3,-1) \; .$$

Skalaarkorrutis $\vec{X} \cdot \vec{Y} = 0.1 + 1.4 + (-2) \cdot 1 + 3.0 + 2(-3) = -4$.

Nullvektoriks nimetatakse vektorit, mille kõik koordinaadid on nullid. Nullvektori pikkus on 0 . Näiteks nullvektor viiemõõtmelises ruumis on (0,0,0,0,0).

Vektorite $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_m$ lineaarkombinatsiooniks nimetatakse avaldist $k_1\vec{X}_1 + k_2\vec{X}_2 + \ldots + k_m\vec{X}_m$. Vektoreid nimetatakse lineaarselt sõltumatuteks, kui null on ainult nende vektorite triviaalne lineaarkombinatsioon, ning lineaarselt sõltuvateks, kui nulliga võrdub mittetriviaalne lineaarkombinatsioon.

Osutub, et n-mõõtmelise ruumi maksimaalne lineaarselt sõltumatute vektorite arv on parajasti n . Valime n-mõõtmelise ruumi baasiks vektorid

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= (1,0,0,\ldots,0)\ ,\\ \vec{e}_2 &= (0,1,0,0,\ldots,0)\ ,\\ \vec{e}_3 &= (0,0,1,0,\ldots,0)\ ,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \vec{e}_n &= (0,0,\ldots,0,1)\ .\end{aligned} \tag{2.9}$$

Vektorid $\vec{e}_i$ on ühikvektorid, s. t. $|\vec{e}_i| = 1$ $(i=1,2,\ldots,n)$ (kontrollige valemi (2.5) abil!). Iga vektor (2.1) esitub ühikvektorite (2.6) lineaarkombinatsioonina kujul

$$\vec{X} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n \tag{2.7}$$

Baasivektorid $\vec{e}_i$ on pealegi omavahel paarikaupa "risti", sest nende skalaarkorrutised võrduvad nulliga. Näiteks

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1.0 + 0.1 + 0.0 + \ldots + 0.0 = 0\ .$$

Kui valida $n = 3$, saame käesoleva punkti valemitest varemast tuttavad tulemused kolmemõõtmelises ruumis.

2. Hüpertasand

Analoogiliselt tasandile tavalises mõttes räägitakse "tasandist" ka n-mõõtmelises ruumis. Harilikult nimetatakse seda "tasandit" hüpertasandiks.

Lähtume tasandi vektorvõrrandist $\vec{N}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0) = 0$ ning peame seal esinevaid vektoreid n-mõõtmelisteks:

hüpertasandi normaalvektor $\vec{N} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$,
hüpertasandi antud punkti kohavektor $\vec{r}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$,
hüpertasandi jooksva punkti kohavektor $\vec{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Hüpertasandi vektorvõrrandist $\vec{N}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0) = 0$ saame skalaarkorrutise valemi kohaselt

$$A_1(x_1 - x_{01}) + A_2(x_2 - x_{02}) + \ldots + A_n(x_n - x_{0n}) = 0\ .$$

Tähistame avaldise $-A_1x_{01} - A_2x_{02} - \ldots - A_nx_{0n} = D$. Siis esitub hüpertasandi üldvõrrand kujul

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + D = 0 \qquad (2.8)$$

- n muutujaga lineaarvõrrand määrab hüpertasandi n-mõõtmelises ruumis.

Hüpertasandiks kahemõõtmelises ruumis on sirge üldvõrrandiga $ax + by + c = 0$; ühemõõtmelises ruumis (sirgel) - punkt. Hüpertasandit nelja- jne. mõõtmelises ruumis ei saa enam geomeetriliselt näitlikult esitada.

3. Maatriksi mõiste

Maatriksiks nimetatakse ristkülikukujulist arvude tabelit

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \quad m \text{ rida} \qquad (2.9)$$

n veergu

N ä i d e . Tabelis on antud kulunormid viie toote valmistamiseks kahest erinevast materjaliest:

Materjal	Tooted				
	1	2	3	4	5
I	10	8	12	20	6
II	5	6	2	4	6

Kui eelnevalt on kokku lepitud tabeli ridade ja veergude tähenduses, võime kulunormide maatriksi esitada järgmisel kujul:

$$\left\| \begin{matrix} 10 & 8 & 12 & 20 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{matrix} \right\| .$$

Tabelis olevaid arve nimetatakse maatriksi elementideks. Elemendid on paigutatud ridade (horisontaalselt) ja veergude (vertikaalselt) kaupa. Maatriksi elemente tähistatakse tavaliselt väikeste tähtedega, mis on varustatud kahe indeksiga: esimene indeks näitab rea, teine veeru järjekorranumbrit, kusjuures indeksite vahele koma ei panda. Element a_{ij} asub i-nda rea ja j-nda veeru lõikekohas. Maatrikseid tähistatakse kas suurte tähtedega (maatriks A) või näidatakse tema üldelement a_{ij} kahekordsete püstkriipsude vahel (sageli ka ümarsulgudes (a_{ij})), s. t.

$$A = \|a_{ij}\| . \tag{2.10}$$

Kui maatriksis on m rida ja n veergu, siis nimetatakse teda m • n-maatriksiks (näites kulunormide kohta on 2•5-maatriks). Erineva ridade ja veergude arvuga maatriksit nimetatakse ristkülikmaatriksiks, võrdse ridade ja veergude arvu korral räägitakse n•n-ruutmaatriksist ehk n-järku ruutmaatriksist. Maatriksi A ridade ja veergude arv näidatakse vajaduse korral järgmiselt: $A_{m \cdot n}$. Ruutmaatriksi <u>peadiagonaaliks</u> nimetatakse diagonaali, mis ühendab vasakul ülemises nurgas asuvat elementi a_{11} paremal alumises nurgas asuva elemendiga a_{mn} . Alumisest vasakust nurgast ülemisse paremasse nurka läheb <u>kõrvaldiagonaal</u>.

<u>Maatriksist A ridade ja veergude ümbervahetamisel saadud maatriksit nimetatakse transponeeritud maatriksiks</u>. A^T: m•n-maatriksi A transponeeritud maatriksiks on n•m-maatriks. Ruutmaatriksi A transponeeritud maatriks A^T saadakse maatriksi A pööramisel ümber peadiagonaali 180° võrra.

N ä i d e . Allpool on esitatud maatriks A koos transponeeritud maatriksiga A^T:

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \end{Vmatrix} , \qquad A^T = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 5 \\ 0 & 7 \end{Vmatrix} .$$

Ruutmaatriksit, millel on väljaspool peadiagonaali ainult nullelemendid, nimetatakse <u>diagonaalmaatriksiks</u>:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} . \qquad (2.11)$$

Ruutmaatriksit, mille peadiagonaali elementideks on ainult ühed ja ülejäänud elemendid on nullid, nimetatakse ühikmaatriksiks I . Nullmaatriksil on kõik elemendid nullid. Näiteks

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} \qquad 0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} \qquad (2.12)$$

$1 \cdot n$-maatriks on n-mõõtmeline vektor:

$$A = \left(a_1, \ a_2, \dots, a_n \right) , \qquad (2.13)$$

mida nimetatakse ka reavektoriks.

Analoogiliselt $n \cdot 1$-maatriksit

$$\begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{Vmatrix} \qquad (2.14)$$

nimetatakse veeruvektoriks. Veeruvektor saadakse reavektori transponeerimisel. Maatriksi $A_{m \cdot n}$ iga rida või veergu võib tõlgendada n-mõõtmelise reavektorina või m-mõõtmelise veeruvektorina.

Maatriksi jagamisel osadeks horisontaalsete ja vertikaalsete sirgetega jaotub ta ristkülikuteks, mis on omakorda maatriksid. Neid nimetatakse plokkideks.

Näiteks maatriks

$$A = \left\Vert \begin{array}{ccc:cc} 3 & 8 & 5 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -2 & 5 \\ \hdashline 2 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 9 & 0 & -1 & 4 & 6 \end{array} \right\Vert$$

on jagatud neljaks plokiks. Mõnikord tähistatakse üksikuid plokke (maatrikseid) suurte tähtedega, mille indeksid näitavad ploki asukohta lähtemaatriksis. Vaadeldavas näites

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}, \quad A_{11} = \begin{Vmatrix} 3 & 8 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{Vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{Vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 5 \end{Vmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{Vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 9 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{Vmatrix}.$$

4. Tehted maatriksitega

Esmalt defineerime maatriksite võrdsuse. Kaht sama järku maatriksit nimetatakse <u>võrdseteks</u>, kui vastavatel kohtadel seisvad elemendid on võrdsed, s. t.

$A_{m\cdot n} = \|a_{ij}\|$ ja $B_{m\cdot n} = \|b_{ij}\|$ jaoks kehtib võrdus $A = B$, kui $a_{ij} = b_{ij}$ iga i ning j korral.

Maatriksite jaoks defineeritakse järgmised tehted: liitmine (lahutamine), korrutamine skalaariga ja maatriksite korrutamine.

Kahe $m\cdot n$-maatriksi $A = \|a_{ij}\|$ ja $B = \|b_{ij}\|$ <u>summaks</u> (vaheks) nimetatakse maatriksit $C = A \pm B = \|c_{ij}\|$, mille elemendid saadakse maatriksite A ja B vastavate elementide liitmisel (lahutamisel), s. t.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \,. \tag{2.15}$$

Maatriksi $A = \|a_{ij}\|$ <u>korrutiseks skalaariga k</u> nimetatakse maatriksit kA, mille elementideks on arvuga k korrutatud maatriksi A elemendid

$$kA = \|ka_{ij}\| \,. \tag{2.16}$$

N ä i d e 1. Leida maatriks $2A - 3B$, kui

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Arvutame

9

$$2A - 3B = 2 \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{Vmatrix} - 3 \cdot \begin{Vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 10 & -2 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 0 & 12 & 18 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 6 & -2 & -20 \end{Vmatrix} .$$

Kaht maatriksit saab omavahel korrutada ainult siis, kui esimese teguri veergude arv n on võrdne teise teguri ridade arvuga m, s. t. korrutada saab maatrikseid $A_{m \cdot n}$ ja $B_{n \cdot p}$. <u>Kahe maatriksi korrutiseks</u> $C = AB$ nimetatakse $m \cdot p$-maatriksit $C = \| c_{ij} \|$, mille elemendid leitakse järgmiselt:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ij}b_{nj} , \qquad (2.17)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, p) .$$

Näiteks maatriksi C element

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \ldots + a_{1n}b_{n1} .$$

Rea- ja veeruvektori mõistet kasutades võime öelda, et maatriksi $C = AB$ element c_{ij} on võrdne esimese teguri i-nda reavektori ja teise teguri j-nda veeruvektori skalaarkorrutisega.

N ä i d e 2. Leida $C_1 = AB$ ja $C_2 = BA$, kui

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{Vmatrix} , \qquad B = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \\ 1 & 6 \end{Vmatrix} .$$

Arvutame kõigepealt elemendi c_{11}. Selleks kirjutame selguse mõttes välja 1. rea- ja 1. veeruvektori ning korrutame neid skalaarselt:

$$c_{11} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 5 .$$

$$c_{12} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 12 ,$$

$$c_{21} = 3 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -2 ,$$

$$c_{22} = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 14 ,$$

$$C_1 = \begin{Vmatrix} 5 & 12 \\ -2 & 14 \end{Vmatrix} .$$

Samuti leiame, et

$$C_2 = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 10 & 20 & -8 \\ 19 & 30 & -4 \end{Vmatrix} .$$

Kahe maatriksi korrutis ei ole üldjuhul kommutatiivne, s. t. $AB \neq BA$. Selles veendusime juba lahendatud näites 2.

Ruutmaatriksi A korrutamisel ühikmaatriksiga I saame

$$AI = IA = A ,$$

s. t. korrutamisel on ühikmaatriksi osa sama mis reaalarvude puhul arvul 1 (kontrollige eeskirja (2.17) abil!).

Analoogiliselt $0 . A = A . 0 = 0$.
Tehete puhul maatriksitega kehtivad järgmised omadused:

$$A + B = B + A ,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C) ,$$
$$(AB) . C = A . (BC) ,$$
$$(A + B) . C = AC + BC .$$

Nende omaduste õigsuses on kerge veenduda valemite (2.15) ja (2.17) abil.

N ä i d e 3 . Leida maatriksi A korrutis ühikmaatriksiga I :

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -3 \end{Vmatrix} , \qquad I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} .$$

Arvutame

$$AI = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -3 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & -3 \end{Vmatrix} = A.$$

Sama tulemuse annab IA .

5. Determinandi mõiste

Ruutmaatriksile kindla eeskirja järgi vastavusse seatud arvu nimetatakse determinandiks. Selle eeskirja anname allpool. Ruutmaatriksile järguga n vastavat determinanti tähistame edaspidi järgmiselt:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left| a_{ij} \right| . \tag{2.19}$$

Determinandil on n rida ja n veergu. Arv n kannab determinandi järgu nime. Sageli räägitakse n-järku determinandi asemel n-realisest determinandist. Arvud a_{ij} on determinandi elemendid.

Keskkoolis kasutatakse teist järku determinante kahe tundmatuga võrrandisüsteemi lahendamisel. Võrrandisüsteemi

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 ,$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

kordajate determinant esitud kujul

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ja tema arvutuseeskiri on järgmine:

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} . \tag{2.20}$$

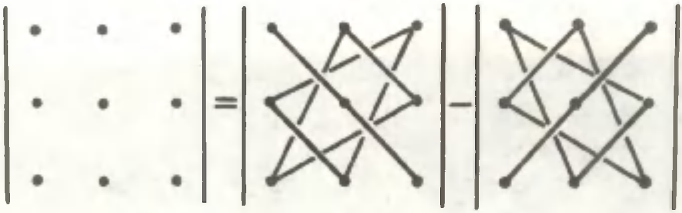
Kõrgemat järku determinantide arvutuseeskiri on keerukam. Esitame siin kolmandat järku determinandi arvutuseeskirja:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}) -$$

$$- (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33}) . \tag{2.21}$$

Skemaatiliselt võib eeskirja anda kujul, kus lõikudega on ühendatud elemendid, mis tulevad omavahel korrutada. Peadiagonaali elementide korrutis ja temaga paralleelsete mittetäielike diagonaalide elementide korrutised üle peadiagonaali asuva elemendiga liidetakse ning nende summast lahutatakse analoogilised korrutised kõrvaldiagonaali sihis.



Joon. 6.

Näeme, et teist ja kolmandat järku ruutmaatriksile vastab teatud eeskirja järgi leitav arv - vastavalt teist ja kolmandat järku determinant.

N ä i d e 1 . Leida determinandi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$ väärtus.

Esmalt leiame korrutiete summa peadiagonaali sihis:

$$1 \cdot 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 7 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot 5 = -62.$$

Kõrvaldiagonaali sihis saame

$$5 \cdot 0 \cdot 2 + 7 \cdot 4 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) \cdot 3 = 37.$$

Determinandi väärtus $D = -62 - 37 = -99$.

Kõrgemat järku determinantide arvutamine taandatakse madalamat järku determinantide arvutamisele. Sellest räägime järgmises punktis.

6. Miinor ja algebraline täiend. Determinandi leidmise eeskiri

Anname mõned täiendavad mõisted.

Vaatleme n-järku determinanti (19). Kustutame determinandist ühe rea järjekorranumbriga i ja ühe veeru järjekorranumbriga j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Järelejäänud elemendid moodustavad $(n-1)$-järku determinandi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \ldots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1} & \ldots \ldots a_{i-1\, j-1} & a_{i-1\, j} & a_{i-1\, j+1} & \ldots a_{i-1\, n} \\ a_{i1} & \ldots \ldots a_{i\, j-1} & a_{ij} & a_{i\, j+1} & \ldots a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots \ldots a_{n\, j-1} & a_{nj} & a_{n\, j+1} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2.22)$$

Kustutatud rea ja veeru lõikekohas asub element a_{ij}.

Determinandi elemendi a_{ij} miinoriks M_{ij} nimetatakse $(n-1)$-järku determinanti, mis tekib lähtedeterminandist i-nda rea ja j-nda veeru kustutamisel.

N ä i d e 1. Leida determinandi

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

elementide a_{11}, a_{23}, a_{33} miinorid.

Esimese rea ja esimese veeru kustutamisel saame miinori M_{11} jne.:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 23; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 51; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15 .$$

Determinandiks (2.19) järguga n nimetatakse järgmise eeskirja järgi leitavat arvu:

$$D = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} + \ldots (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{1+n}M_{1n} , \qquad (2.23)$$

kus M_{1j} $(j = 1, 2, \ldots, n)$ on determinandi esimese rea elementidele vastavad miinorid.

Valemiga (2.23) antud eeskirja nimetatakse ka determinandi arendamiseks esimese rea järgi.

Kaherealise determinandi elemendi a_{11} miinoriks on a_{22} ja elemendi a_{12} miinoriks a_{21}. Eeskirja (2.23) kohaselt $D = a_{11}a_{22} + (-1)^{1+2}a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, mis ühtib valemiga (2.20).

Kolmerealine determinant (2.21) esitub kujul

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad (2.24)$$

mis omakorda pärast teist järku determinantide leidmist ühtib võrduse (2.21) paremal pool oleva avaldisega.

Defineeritud determinandi arvutuseeskirja saab kasutada kõrgemat järku determinantide arvutamiseks madalamat järku determinantide kaudu. Näiteks 5. järku determinandi arvutamisel tuleb leida 4. järku miinorid, igaüht neist saab aga avaldada miinorite kaudu, mis on juba 3. järku determinandid. Viimast oskame juba leida. Praktikas toimub determinandi arvutamine põhimõtteliselt kirjeldatud viisil koos täiendavate lihtsustavate võtete kasutamisega.

N ä i d e 2. Leida 4-realise determinandi D väärtus:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Definitsiooni (2.23) kohaselt $D = 1 \cdot M_{11} - (-3) \cdot M_{12} + 0 \cdot M_{13} - 0 \cdot M_{14}$. Miinorite M_{13} ja M_{14} leidmine pole praegu vajalik, sest nende kordajateks on null.

Arvutame:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -7 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -8; \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -3.$$

Nüüd saame $D = 1 \cdot (-8) + 3 \cdot (-3) = -17$.

Nägime, et nullelementide esinemine determinandis kergendab arvutustööd.

Elemendi a_{ij} <u>algebraliseks täiendiks</u> A_{ij} nimetatakse arvuga $(-1)^{i+j}$ korrutatud miinorit:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} . \qquad (2.25)$$

Kui rea ja veeru järjekorranumbrite summa on paarisarv, siis $A_{ij} = M_{ij}$, kui vastav summa on paarituarv, siis $A_{ij} = -M_{ij}$.

N ä i d e 3 . Leida näites 1 antud determinandi jaoks elementide a_{11}, a_{31}, a_{23} algebralised täiendid.

Vaetavalt definitsioonile (2.25) saame

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 23 ; \quad A_{23} = - M_{23} = 51 ;$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 32 .$$

Valemi (2.23) võib nüüd esitada ka kujul

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} . \qquad (2.26)$$

7. Determinantide omadusi

Loetleme determinantide tähtsamaid omadusi, mis leiavad kasutamist determinantide arvutamisel.

1. Determinandi kahe rea ümbervahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks, absoluutväärtus jääb muutumatuks.

Illustratsiooniks leiame kolmerealise determinandi D_1 valemi (2.24) abil, kui lähtedeterminandis D on vahetatud 1. ja 3. rida:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} + $$

$$+ a_{33} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} .$$

Leides kaherealiste determinantide väärtused ja korrutades vastavate kordajatega, saame pärast liidetavate grupeerimist märkide järgi

$$D_1 = (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{11}a_{23} + a_{33}a_{21}a_{12}) - (a_{31}a_{12}a_{23} +$$

$$+ a_{32}a_{21}a_{13} + a_{33}a_{11}a_{22}) .$$

Tulemuse võrdlemisel avaldisega (2.21) näeme, et $D_1 = -D$. Seega 1. rea vahetamisel mingi reaga muutub determinandi märk. Determinandi 2. ja 3. rea vahetamine on realiseeritav kolme vahetamisega 1. rea abil: algul tõstame 3. rea esimeseks ja 1. rea kolmandaks, seejärel 2. rea esimeseks ja 1. rea kohal seisva esialgse 3. rea teiseks ning lõpuks vahetame 3. rea kohal seisva esialgse 1. rea praeguse 1. rea kohal seisva esialgse 2. reaga. Iga vahetamise käigus muutub determinandi märk ning kokkuvõttes kolmekordse vahetamise tulemusena

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} .$$

2. Determinanti saab arendada mis tahes rea järgi, e.t. kehtib võrdus

$$D = (-1)^{i+1} a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2}M_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in}M_{in} =$$
$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) . \tag{2.27}$$

Viimane võrdus on kirjutatud seost (2.26) arvestades.

Vahetades i-nda rea esimesega ja kasutades valemit (2.23), saame 1. omaduse põhjal tulemuseks $-D$. Seega, kui i-s rida asub oma õigel kohal, saame valemi (2.27) põhjal determinandi väärtuse D.

3. Determinandi väärtus ei muutu, kui tema i-ndale reale liita mingi arvuga k korrutatud muu rida, s. t.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l1} \ldots a_{ln} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l1} \ldots a_{ln} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}+ka_{l1} \ldots a_{in}+ka_{ln} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.28}$$

4. Determinandi mingi rea elementide ühise teguri võib tuua determinandi märgi ette, s. t.

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ ka_{i1} \dots ka_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \dots a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} . \qquad (2.29)$$

5. Kui determinandis on kaks rida võrdsete elementidega või mingi rea elemendid on kõik nullid, siis on determinant võrdne nulliga.

6. Determinandi ühe rea elementide korrutised mingi teise rea algebraliste täienditega annavad summas nulli, s. t.

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \dots a_{kn}A_{in} = 0, \quad \text{kui} \quad i \neq k . \qquad (2.30)$$

Võrduse (2.30) vasak pool on vaadeldav võrduse (2.27) kohaselt sellise determinandi arendisena i-nda rea järgi, mille i-nda rea elemendid on võrdsed k-nda rea elementidega. See on aga determinant kahe võrdse reaga ning 5. omadusest tulenebki (2.30) kehtivus.

7. Determinandi read ja veerud on võrdväärsed. See tähendab, et eespool sõnastatud omadused kehtivad täpselt samuti ka veergude puhul. Näiteks võib determinanti arendada ka j-nda veeru järgi või determinandi väärtus ei muutu ühele veerule mingi arvu kordse muu veeru liitmisel jne.

8. Determinandi arvutamine

Determinandi praktiline arvutamine tugineb eelmises punktis loetletud omadustele.

Kolmanda omaduse põhjal püüame teisendada determinandi elemente nii, et mingisse ritta (veergu) tekiks võimalikult palju nullelemente. Võimaluse korral kasutame ka rea ühise tegur ettetoomist (4. omadus). Seejärel arendame teisendatud determinandi võrduse (2.27) kohaselt selle rea (veeru) järgi, milles on rohkem nullelemente. Niiviisi taandame n-järku determinandi arvutamise (n-1)-järku determinantide arvutamisele. Viimaste arvutamise saame vajaduse korral taandada (n-2)-järku determinantide arvutamisele jne., kuni jõuame 3. või 2. järku determinantideni.

Illustreerime esitatud mõttekäiku näidetega.

N ä i d e 1 . Leida determinandi väärtus:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ 4 & -5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 12 & 0 \end{vmatrix} .$$

Toome esimesest ning viimasest reast determinandi märgi ette vastavalt ühised tegurid 2 ja 3. Siis

$$D = 2.3. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} .$$

Kuna 1. reas on juba üks nullelement, siis teisendame determinanti nii, et 1. ritta jääb ainult üks nullist erinev element. Selleks liidame 2. veerule kahekordse 1. veeru ning lahutame 4. veerust kolmekordse 1. veeru. Saame

$$D = 6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & -5 \\ 3 & 6 & 1 & -7 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} .$$

Nüüd arendame determinandi 1. rea järgi. Kuna 1. rea elemendid on nullid peale elemendi a_{11} , siis valemi (2.26) kohaselt

$$D = 6.1. \begin{vmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 6 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} .$$

Kolmerealises determinandis liidame 1. ja 2. reale vastavalt kuue- ning kolmekordse viimase rea; seejärel arendame determinandi 1. veeru järgi. Saame

$$D = 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 18 & 4 \\ 0 & 25 & 11 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1) \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 18 & 4 \\ 25 & 11 \end{vmatrix} = -6 \cdot 98 = -588.$$

N ä i d e 2 . Leida determinandi väärtus:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -5 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} .$$

Liidame 2. reale 1. ja 4. rea, 3. reale 4. rea ning lahutame 4. ja 5. reast vastavalt 4- ja 2-kordse esimese rea. Siie saame determinandi, kus 2. veerus on nullelemendid peale esimese:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 8 & 0 & 6 & -3 & 11 \\ 6 & 0 & 8 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -5 & 10 & -15 \\ 7 & 0 & -5 & 9 & -4 \end{vmatrix}$$

Arendame determinandi 2. veeru järgi, tuues samaaegselt miinori 3. reast teguri 5 determinandi ette:

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 6 & -3 & 11 \\ 6 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 7 & -5 & 9 & -4 \end{vmatrix} .$$

Siin lahutame 1. reast 3. ja 4. rea summa, 4. reast 2. ja 3. rea summa, seejärel 2. reast 6-kordse 3. rea:

$$D = -5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 12 & -14 & 18 \\ 0 & 14 & -11 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -12 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -5 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & 14 & -11 & 21 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} .$$

Arendame esimese veeru järgi (3-realises determinandis lahutame veel 3. reast 1. rea ja toome 1. veerust ette ühise teguri 2):

$$D = 20 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -7 & 9 \\ 14 & -11 & 21 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 20 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -7 & 9 \\ 14 & -11 & 21 \\ 0 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 40 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 & 9 \\ 7 & -11 & 21 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} .$$

Kuna osa elemente on võrdlemisi suured, siis on otstarbekas kolmerealise determinandi vahetu arvutamise asemel eelnevalt teha teisendusi. Lahutame 3. veerust 3-kordse 1. veeru:

$$D = 40 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 & 0 \\ 7 & -11 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 40 \cdot (-1)^{3+3} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} =$$

$$= 40 \cdot 7 \cdot 16 = 4480 .$$

9. Koordinaatkujul antud vektorite sõltuvuse uurimisest

Olgu antud n-mõõtmelises ruumis m vektorit

$$\vec{X}_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m) .$$

Näitame, kuidas määrata lineaarset sõltuvust antud vektorite vahel ning lineaarselt sõltumatute vektorite maksimaalset arvu nende hulgas.

Võrrutame nulliga antud vektorite lineaarkombinatsiooni

$$k_1\vec{X}_1 + k_2\vec{X}_2 + \ldots + k_m\vec{X}_m = 0 , \qquad (2.31)$$

kus k_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ on esialgu määramata kordajad. Vastavalt lineaartehetele vektoritega kirjutame välja (2.31) tüüpi võrdused antud vektorite vastavate koordinaatide jaoks:

$$\begin{aligned} k_1x_{11} + k_2x_{12} + \ldots + k_mx_{1m} &= 0 , \\ k_2x_{21} + k_2x_{22} + \ldots + k_mx_{2m} &= 0 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_1x_{n1} + k_2x_{n2} + \ldots + k_mx_{nm} &= 0 . \end{aligned} \qquad (2.32)$$

Võrdusi (2.32) vaatleme võrrandisüsteemina otsitavate $k_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ suhtes. Kui süsteemi (2.32) lahendamisel mõni k_i väärtus on nullist erinev, siis on vektorid lineaarselt sõltuvad. Kui süsteem on rahuldatud ainult siis, kui kõik $k_i = 0$, on vektorid lineaarselt sõltumatud. Juhime tähelepanu asjaolule, et süsteemi (2.32) üheks lahendiks on alati ka $k_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. See on süsteemi ainsaks lahendiks ainult siis, kui kõik vaadeldavad vektorid on lineaarselt sõltumatud.

Kui antud vektorite hulk m on suurem vektorite järgust n , siis kindlasti on nende vektorite vahel lineaarne sõltuvus, eest sõltumatute vektorite maksimaalne arv saab olla n (vt. p. 1 § 2), kuid võib olla ka väiksem. Kui $m \leq n$ ja vektorite vahel on lineaarne sõltuvus, siis saab mingi ühe vektori avaldada ülejäänud m-1 vektori lineaarkombinatsioonina. Nende m-1 vektori hulgas võib omakorda olla lineaarselt sõltuvaid ja saame jälle mingi ühe vektori avaldada ülejäänud m-2 vektori lineaarkombinatsioonina. Igal üksikjuhul tuleks lahendada (2.32) tüüpi süsteem vastavalt m-1, m-2 jne. tundmatuga. Nii järjestikuselt jätkates jõuaksime lõpuks olukorrani, kus vektor järjekorranumbriga r+1 avaldub r sõltumatu vektori lineaarkombinatsioonina. Siis saame kõik ülejäänud m-r vektorit avaldada r sõltumatu vektori kaudu.

N ä i d e . Selgitada, kas vektorite $\vec{X}_1 = (1; -3; 0)$, $\vec{X}_2 = (1; 2; 2)$, $\vec{X}_3 = (1; 4; 5; 3)$ vahel on lineaarne sõltuvus.

Moodustame nende vektorite lineaarkombinatsiooni ja võrrutame nulliga:

$$k_1\vec{X}_1 + k_2\vec{X}_2 + k_3\vec{X}_3 = 0$$

ehk koordinaatkujul

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 0 , \\ -3k_1 + 2k_2 + 4,5k_3 &= 0 , \\ 2k_2 + 3k_3 &= 0 . \end{aligned}$$

Süsteemi lahendame järgmiselt: avaldame kolmandast võrrandist otsitava k_2 otsitava k_3 kaudu ning asendame ülejäänud võrrandeisse. Saame

$$\begin{aligned} k_1 - \frac{1}{2} k_3 &= 0 , \\ -3k_1 + \frac{3}{2} k_3 &= 0 . \end{aligned}$$

Need võrrandid on kokkulangevad, sest teise võrrandi jagamisel arvuga -3 saame esimese võrrandi. Sellel süsteemil on lõpmata palju lahendeid. Valime $k_3 = 2$. Siis $k_1 = 1$ ja lähtesüsteemist saame, et $k_2 = -3$. Seega kehtib seos

$$\vec{X}_1 - 3\vec{X}_2 + 2\vec{X}_3 = 0$$

ehk antud vektorid on lineaarselt sõltuvad. Üks vektor avaldub kahe ülejäänu lineaarkombinatsioonina. Näiteks $\vec{X}_1 = 3\vec{X}_2 - 2\vec{X}_3$ või $\vec{X}_2 = \frac{1}{3}\vec{X}_1 + \frac{2}{3}\vec{X}_3$ või $\vec{X}_3 = -\frac{1}{2}\vec{X}_1 + \frac{3}{2}\vec{X}_2$.

Kontrollime veel, kas vektorite $\vec{X}_2$ ja $\vec{X}_3$ vahel on lineaarne sõltuvus. Analoogiliselt eelneva lahenduskäiguga saame

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 &= 0, \\ 2\,l_1 + 4{,}5\,l_2 &= 0, \\ 2\,l_1 + 3\,l_2 &= 0. \end{aligned}$$

Esimesest võrrandist avaldame $l_1 = -l_2$; asendame teise ja saame $2{,}5\,l_2 = 0$, kust $l_2 = 0$. Siis ka $l_1 = 0$. Seega saab null olla ainult triviaalne lineaarkombinatsioon $0.\vec{X}_2 + 0.\vec{X}_3 = 0$ ehk $\vec{X}_2$ ja $\vec{X}_3$ on lineaarselt sõltumatud. Kolmest vaadeldavast vektorist võime kaks valida baasivektoreiks ja üks avaldub nende lineaarkombinatsioonina.

Eespool kirjeldatud moodus on praktiliseks realiseerimiseks tülikas. Lihtsama mooduse esitame järgmises punktis.

10. Maatriksi astak

Maatriksis $A_{m.n} = \|a_{ij}\|$ on iga rida tõlgendatav n-mõõtmelise vektorina (reavektorina)

$$\vec{X}_i = \|a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}\| \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

ja analoogiliselt iga veerg m-mõõtmelise vektorina (veeruvektorina)

$$\vec{Y}_j = \begin{Vmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{Vmatrix} \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Reavektoriteet $\vec{X}_i$ (vastavalt veeruvektoritest $\vec{Y}_j$) võib osa olla lineaarselt sõltumatuid ja ülejäänud avalduvad juba nende lineaarkombinatsioonina. Oluline on teada lineaarselt sõltumatute reavektorite (veeruvektorite) maksimaalset arvu. Maatriksi puhul räägitakse tavaliselt maatriksi ridade (veergude) lineaarsest sõltumatusest ja sõltuvusest.

Oletame, et maatriksis on r esimest rida lineaarselt sõltumatud ja järgmised read neist lineaarselt sõltuvad. Siis on iga rida (reavektor) alates reast $r + 1$ avaldatav r esimese rea kaudu:

$$\vec{X}_{r+1} = k_1 \vec{X}_1 + k_2 \vec{X}_2 + \dots + k_r \vec{X}_r ,$$

$$\vec{X}_{r+2} = l_1 \vec{X}_1 + l_2 \vec{X}_2 + \dots + l_r \vec{X}_r , \qquad (2.33)$$

jne.,

kus kõik kordajad k_i (samuti l_i) ei ole samaaegselt nullid. Iga vektorvõrduse (2.33) asemel saab kirjutada n skalaarset võrdust vektorite vastavate koordinaatide jaoks kujul (2.32).

<u>Maatriksi lineaarselt sõltumatute ridade maksimaalset arvu nimetatakse maatriksi astakuks</u>. Maatriksi astakut tähistame tähega r .

N ä i d e 1. Leida maatriksi A astak, kui

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4{,}5 & 3 \end{Vmatrix} .$$

Käesoleva maatriksi reavektoriteks on parajasti eelmise punkti näites esitatud vektorid. Seal selgus, et kolmest vaadeldud vektorist olid kaks lineaarselt sõltumatud ja üks oli nende kahe lineaarkombinatsioon. Seega on vaadeldava maatriksi A astak $r = 2$.

Valime maatriksist A välja suvalised r rida $i_1, \dots, i_r$ ja r veergu $j_1, \dots, j_r$ ning moodustame neist determinandi

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_r j_1} & \dots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix} ,$$

mida nimetatakse maatriksi <u>r-järku alamdeterminandiks</u>.

N ä i d e 2 . Koostada 1. näite maatriksi jaoks kõik alamdeterminandid.

Esimest järku alamdeterminante on 9: iga maatriksi element omaette võetuna.

Teist järku alamdeterminandid on

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \,; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \,; \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \,;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4{,}5 \end{vmatrix} = 7{,}5; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \,; \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4{,}5 & 3 \end{vmatrix} = -9 \,;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4{,}5 \end{vmatrix} = 2{,}5; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \,; \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4{,}5 & 3 \end{vmatrix} = -3 \,;$$

Kolmandat järku alamdeterminante on vaid üks: maatriksi A determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4{,}5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Kui maatriksi astak on r, siis on temas r sõltumatut rida ja iga ülejäänud rida on r sõltumatu rea lineaarkombinatsioon. Kui sõltumatud on näiteks r esimest rida, siis

$$\overline{X}_{r+1} = k_1\overline{X}_1 + \ldots + k_r\overline{X}_r \,.$$

Moodustame nüüd alamdeterminandi järguga $r + 1$ ja lahutame järjestikuliselt $(r+1)$-ndast reast k_1-kordse 1. rea jne. kuni k_r-kordse r-nda rea. Iga sellise tehte korral determinandi väärtus ei muutu. Teisendatud alamdeterminandis osutub rida $(r+1)$ nullreaks ja siis on $(r+1)$-järku determinandi väärtus null. Analoogiliselt arutledes selgub, et nullid on ka kõik teised $(r+1)$-järku alamdeterminandid ning samuti kõik veelgi kõrgemat järku alamdeterminandid. Selle põhjal võimegi ütelda, et <u>kui maatriksis leidub vähemalt üks nullist erinev r-järku alamdeterminant ja kõik kõrgemat järku alamdeterminandid on nullid, siis maatriksi astak on r</u>.

Maatriksil järguga $m \cdot n$ on kõrgeimat järku alamdeterminandiks determinant järguga $\min(m,n)$ (väikseim arvudest

13

m ja n) ning astak r ei saa ületada seda arvu, s. t. <u>$r \leq \min(m,n)$</u>.

Saab näidata, et maatriksi lineaarselt sõltumatute ridade maksimaalne arv võrdub lineaarselt sõltumatute veergude maksimaalse arvuga.

K o k k u v õ t e . <u>Maatriksi astakuks</u> r nimetatakse maatriksi lineaarselt sõltumatute ridade (veergude) maksimaalset arvu ehk maatriksi nullist erinevate alamdeterminantide kõrgeimat järku (mõlemad definitsioonid on samaväärsed).

Maatriksi astaku leidmine kõigi alamdeterminantide järjestikuse arvutamise teel on tülikas, veelgi tülikam on lineaarselt sõltumatute ridade võrrandisüsteemide lahendamise kaudu. Astaku määramiseks kasutatakse tavaliselt nn. maatriksi elementaarteisendusi, millest räägime järgmises punktis. Seal toome ka näiteid astaku praktilise leidmise kohta.

11. <u>Maatriksi astaku leidmine elementaarteisenduste abil</u>

Maatriksi elementaarteisendusteks nimetatakse 1) maatriksi rea (veeru) korrutamist nullist erineva teguriga k ; 2) ühele reale (veerule) k-kordse teise rea (veeru) liitmist.

Elementaarteisenduste käigus muutuvad maatriksi elemendid, kuid saab näidata, et maatriksi astak jääb muutumatuks. Kahe nimetatud elementaarteisenduse lubatavusest tuleneb, et maatriksi astak ei muutu kahe rea (veeru) vahetamisel või nullelementidest koosneva rea (veeru) ärajätmisel.

Maatriksi astaku määramiseks kasutatakseg i elementaarteisendusi. Praktiliselt toimub maatriksi astaku määramine järgmiselt. Elementaarteisenduste abil teisendatakse maatriksi ridu (veerge) selliselt, et ühel pool maatriksi diagonaali elementidega $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ saaksid maatriksi elemendid nullideks. Sellisele kujule viidud maatriksist saab kergesti välja lugeda astaku r . Selgitame öeldut näidetega.

N ä i d e 1 . Leida maatriksi A astak

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & -5 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & 3 & -4 & 9 & -2 \end{Vmatrix}$$

Teisendame maatriksit nii, et ülevalt vasakust nurgast algavast diagonaalist ülalpool oleksid nullelemendid. Selleks liidame 5. veerule kahekordse 2. veeru, seejärel 2.veeruga viiekordse 3. veeru ja siis lahutame kolmekordsest 3. veerust 1. veeru. Saame

$$\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -17 & -13 & 9 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Edasi liidame 4. veeruga 2. veeru ja 3. veerust lahutame 2. veeru:

$$\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -17 & 4 & -8 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Nüüd liidame 4. veeruga kahekordse 3. veeru ja 5. veerust lahutame 3. veeru:

$$\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -17 & 4 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -17 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Kustutasime 4. ja 5. veeru - järele jääb 4•3-maatriks (elementaarteisendustega teisendatud maatriksite vahele pannakse sageli märk $\sim$). Arvutame ühe 3. järku alamdeterminandi: võtame kolm esimest rida ja kolm veergu. Alamdeterminandi väärtuseks saame -3. Kõrgeima nullist erineva alamdeterminandi järk on 3 ja seega $r(A) = 3$.

N ä i d e 2 . Leida maatriksi astak

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 19 & 11 \end{Vmatrix}.$$

Tekitame nullelemendid peadiagonaalist allapoole. Lahutame 2. ja 3. reast vastavalt kahe- ja kaheksakordse esimese rea, seejärel jagame 2. rida -7-ga ja 3. rida -21-ga ning lahutame lõpuks 3. reast 2. rea. Saame

$$\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -21 & -21 & -21 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Siit nähtub, et astak ei saa ületada kahte ja kuna 2. järku alamdeterminantidest vähemalt üks erineb nullist, siis astak $r(A) = 2$.

Kontrollküsimused

1. Mitu koordinaati on vektoril kuue-, kolme-, ühemõõtmelises ruumis?
2. Kuidas leitakse n-mõõtmeliste vektorite skalaarkorrutis?
3. Kuidas leitakse n-mõõtmelise vektori pikkus?
4. Millal on vektorid lineaarselt sõltuvad? sõltumatud?
5. Kirjutage üldvõrrand hüpertasandile neljamõõtmelises ruumis.
6. Mis on maatriks? Kuidas toimub maatriksi transponeerimine?
7. Kuidas tõlgendada n-mõõtmelist vektorit maatriksina?
8. Millal on kaks maatriksit võrdsed?
9. Kuidas toimub maatriksite liitmine? skalaariga korrutamine?
10. Milliseid maatrikseid saab korrutada? Kuidas leitakse kahe maatriksi korrutis? Kas $AB = BA$?
11. Kuidas arvutatakse kahe- ja kolmerealist determinanti?
12. Mis on determinandi elemendi miinor? algebraline täiend?
13. Kirjeldage determinandi arvutusvõtteid.
14. Näidake, et maatriksi astaku kaks definitsiooni on samaväärsed.
15. Mis on maatriksi elementaarteisendused?

§ 3. LINEAARSETE VÕRRANDISÜSTEEMIDE LAHENDAMINE

1. Lineaarsed võrrandisüsteemid

Olgu antud m võrrandist koosnev võrrandisüsteem n tundmatu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suhtes, kus kõik tundmatud esinevad esimeses astmes ja puuduvad nende korrutised. Sellist süsteemi nimetatakse lineaarseks võrrandisüsteemiks. Sarnaste liikmete koondamisel ja tundmatute rühmitamisel saab sellise süsteemi alati esitada nn. normaalkujul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases} \tag{3.1}$$

Võrrandisüsteemi (3.1) lahendiks nimetatakse tundmatute neid väärtusi, mis võrranditesse paigutamisel muudavad nad samasusteks ehk teiste sõnadega: rahuldavad kõiki antud võrrandeid.

Kui kõik vabaliikmed $b_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, nimetatakse süsteemi homogeenseks, vastasel korral - mittehomogeenseks.

Tundmatute kordajatest moodustatud maatriksit nimetatakse süsteemi maatriksiks A, lisades maatriksile A vabaliikmete veeru, saame süsteemi laiendatud maatriksi L. Tundmatuid võib vaadelda üheveerulise maatriksi X ja vabaliikmeid maatriksi B elementidena. Vastavad maatriksid on välja kirjutatud valemitena (3.2)

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{ma} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad L = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}, \tag{3.2}$$

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix}.$$

Süsteemi (3.1) on mõnikord otstarbekas esitada nn. maatrikskujul. Tähistusi (3.2) arvestades ning maatriksite korrutamise reeglile tuginedes võib süsteemi (3.1) esitada kujul

$$A \cdot X = B \,. \tag{3.3}$$

Seame ülesandeks selgitada, millal süsteem (3.1) on lahenduv, kui palju tal on lahendeid ja kuidas lahendeid leida.

2. <u>Crameri valemid</u>

Vaatleme võrrandisüsteemi, kus nii tundmatute kui võrrandite arv on n. Siis on süsteemi maatriks ruutmaatriks ja tema elementidest moodustatud determinanti nimetatakse <u>süsteemi determinandiks</u>

$$D = |a_{ij}| \,.$$

Olgu süsteemi determinant nullist erinev $D \neq 0$. Leiame süsteemi determinandi j-nda veeru elementide algebralised täiendid $A_{1j}, A_{2j}, \dots A_{nj}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ ning korrutame nendega järjestikuselt süsteemi võrrandeid ja seejärel liidame need. Grupeerides liikmed tundmatute järgi, saame

$$(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \dots + a_{n1}A_{nj})x_1 + \dots + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} +$$
$$+ \dots + a_{nj}A_{nj})x_j + \dots + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \dots + a_{nn}A_{nj})x_n =$$
$$= b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj} \,. \tag{3.4}$$

Determinantide 6. omaduse kohaselt (§ 2, valem(2.30)) on tundmatute kordajateks olevad sulgavaldised võrdsed nulliga peale x_j kordaja. Viimane kujutab aga endast süsteemi determinandi arendist j-nda veeru järgi, s. t.

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = D \,.$$

Võrduse (3.4) paremal pool on süsteemi determinandi arendis j-nda veeru järgi, kui determinandi veerg järjekorranumbriga j on asendatud vabaliikmete veeruga. Tähistame seda determinanti D_j, s. t.

$$D_j = b_1A_{1j} + \ldots + b_nA_{nj} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \ldots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} \ldots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} \ldots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} . \qquad (3.5)$$

Jõuame võrdusteni

$$Dx_j = D_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) .$$

Siit saame süsteemi (3.1) lahendi leidmiseks valemid

$$x_j = \frac{D_j}{D} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) , \qquad (3.6)$$

mida tuntakse <u>Crameri valemite</u> nime all.

K o k k u v õ t e . Crameri valemitega saab lineaarse võrrandisüsteemi lahendi leida siis, kui 1) võrrandite ja tundmatute arv on võrdne; 2) süsteemi determinant on nullist erinev.

N ä i d e . Lahendada võrrandisüsteem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 ,$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3 ,$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 .$$

Leiame süsteemi determinandi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \ -2 = -5 .$$

Asendame süsteemi determinandi veerud järjestikuselt vabaliikmete veeruga ja leiame

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15.$$

Süsteemi lahend on

$$x_1 = \frac{-5}{-5} = 1\,,\quad x_2 = \frac{-10}{-5} = 2\,,\quad x_3 = \frac{-15}{-5} = 3\,.$$

Suurema tundmatute arvuga süsteemi lahendamisel arvutame nõutavad determinandid, arendades neid mingi rea (veeru) järgi.

3. Kroneckeri - Capelli teoreem

Tekib küsimus, kas ja millal on süsteem (3.1) lahenduv. Süsteemi lahenduvuse tingimuse annab Kroneckeri - Capelli teoreem: lineaarne võrrandisüsteem on lahenduv parajasti siis, kui süsteemi maatriksi ja laiendatud maatriksi astakud on võrdsed, s. t. $r(A) = r(L)$. See on nn. astakutingimus.

Tõestame astakutingimuse tarvilikkuse. Selleks oletame, et süsteemil (3.1) on mingi lahend $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$, ... , $x_n = u_n$. Sooritame järgmised elementaarteisendused laiendatud maatriksiga L . Lahutame süsteemi laiendatud maatriksi viimasest (vabaliikmete) veerust järjestikuselt u_1-kordse esimese veeru, u_2-kordse teise veeru jne., lõpuks u_n-kordse n-nda veeru. Viimaseks veeruks saame siis

$$\begin{array}{c} b_1 - a_{11}u_1 - a_{12}u_2 - \ldots - a_{1n}u_n\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_m - a_{m1}u_1 - a_{m2}u_2 - \ldots - a_{mn}u_n\,. \end{array}$$

Saadud avaldised kujutavad endast süsteemi (3.1) võrrandite paremaid pooli, kui kõik liikmed on viidud paremale poole võrdusmärki ja otsitavad x_j on asendatud süsteemi lahendiga u_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Seega võrduvad need avaldised nulliga. Süsteemi laiendatud maatriks asendub pärast sooritatud elementaarteisendusi järgmisega

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{Vmatrix}$$

Selle maatriksi astak (seega ka L astak) võrdub süsteemi maatriksi A astakuga, sest nullveeru ärajätmisel jääb järele maatriks A .

Tõestame nüüd a...ngutingimuse piisavuse. Selleks eeldame, et $r(A) = r(L)$ ja veendume, et siis on süsteemil (3.1) lahend olemas. Kui maatriksi A astak on r, siis on vähemalt üks tema r-järku alamdeterminant D_r nullist erinev. Muudame maatriksite A ja L ridade ning veergude numeratsiooni nii, et nullist erinev determinant D_r asub maatriksi vasakus ülemises nurgas

$$D_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Siis on maatriksi L ridadest esimesed r tükki lineaarselt sõltumatud ja ülejäänud $m-r$ rida avalduvad r esimese rea lineaarkombinatsioonidena. Samuti avalduvad süsteemi (3.1) $m - r$ võrrandit r esimese võrrandi kaudu. Seepärast on vaja selgitada, kas r esimest võrrandit on lahenduvad, sest nende lahend rahuldab ka ülejäänud võrrandeid. Uurime süsteemi

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 , \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{rn} x_n &= b_r . \end{aligned}$$

Kui $r = n$, siis on võrrandite ja tundmatute arv sama, kusjuures süsteemi determinant $D_r \neq 0$. Sellisel süsteemil on olemas üks lahend vastavalt Crameri valemitele (3.6).

Kui $r < n$, siis on tundmatuid rohkem kui võrrandeid. Suurused $x_1, \dots, x_r$ jätame otsitavateks ja ülejäänud tundmatud $x_{r+1}, \dots, x_n$ (nn. vabad tundmatud) viime võrduste paremale poole ning anname neile vabadele tundmatutele mis tahes väärtused. Tundmatud $x_1, \dots, x_r$ leiame juba Crameri valemite järgi.

Veendusime, et astakutingimuse täidetuse korral on süsteemil lahend kindlasti olemas. Teoreem on tõestatud.

K o k k u v õ t e . Kui astakutingimuse kontrollimise käigus selgub, et $r(A) = r(L) = r$, siis on süsteem lahenduv. Lahendite arv sõltub tundmatute arvu n, võrrandite arvu m ja astaku r vahekorrast.

1) Kui $n = m = r$, on süsteemil üks lahend, mida saab leida Crameri valemitega.

2) Kui $m = r < n$ on $n - m$ tundmatut vabad. Süsteemil on lõpmata palju lahendeid, mis sõltuvad vabade tundmatute valikust ja neile omistatud väärtustest.

3) Kui $n = r < m$, s. t. võrrandeid on rohkem kui tundmatuid, on süsteemil üks lahend. Selle leidmiseks valime süsteemi maatriksist mingi r-järku nullist erineva miinori ja sellele vastavad võrrandid. Ülejäänud võrrandid avalduvad nende kaudu ja need võime ära jätta.

4) Kui $r < m \leqslant n$, on süsteemis $n - r$ vaba tundmatut ja süsteemil lõpmata palju lahendeid. Lahendame r võrrandist koosneva süsteemi, mille determinant pole null, viies vabad tundmatud võrduste paremale poole. Ülejäänud $m - r$ võrrandit võime ära jätta.

Illustreerime esitatut näidetega.

4. Näiteid

Eelmise punkti kokkuvõtte esimese juhu kohta on näide esitatud punktis 2.

N ä i d e 1 . Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 2, \\ 11x_1 - 12x_2 + 17x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Kontrollime astakutingimuse täidetust. Süsteemi maatriksit A teisendame järgmiselt: liidame 2. veeruga 3. veeru ja 1. veeruga kahekordse 3. veeru.

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 11 & -12 & 17 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 9 & 1 & 4 \\ 45 & 5 & 17 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 17 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \\ 5 & 17 \end{Vmatrix}.$$

Eelviimases maatriksis on 1. veeru elemente jagatud üheksaga ja kuna 1. ning 2. veerg osutusid ühesugusteks, on üks neist ära jäetud. Nullist erinev on teist järku alamdeterminant ja seega $r(A) = 2$. Nüüd leiame laiendatud maatriksi L astaku. Kahe esimese veeruga teeme samad teisendused nagu maatriksi A puhul. Liidame veel 3. veeru 4. veerule ja jätame ära 1. veeru.

$$L = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ 11 & -12 & 17 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & 4 & 6 \\ 45 & 5 & 17 & 20 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & -0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 17 & 20 \end{Vmatrix} .$$

Leiame saadud maatriksile vastava determinandi:

$$D = (-1)^{1+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 20 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 .$$

Järelikult on $r(L) = 3$. Kuna $r(A) \neq r(L)$, siis on süsteem vastuoluline (lahend puudub).

N ä i d e 2 . Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 , \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 , \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 , \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 &= 6 . \end{aligned}$$

Alustame astakutingimuse kontrollimist. Teisendame maatrikseid A ja L samaaegselt, eraldades vabaliikmete veeru katkendliku joonega.

$$\left\Vert \begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{array} \right\Vert \sim \left\Vert \begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 2 & -7 \\ -2 & -11 & 5 & -24 \end{array} \right\Vert \sim \left\Vert \begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -10 \\ -1 & -3 & 2 & -7 \\ 0 & -5 & 1 & -10 \end{array} \right\Vert \sim$$

$$\left\Vert \begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -7 \\ 0 & -5 & 1 & -10 \end{array} \right\Vert \sim \left\Vert \begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -10 \end{array} \right\Vert .$$

Siin on tehtud järgmised elementaarteisendused. Teine maatriks on saadud lähtemaatriksist, lahutades 1. ja 2. veerust 3. veeru ning 4. veerust kuuekordse 3. veeru. Järgmisel etapil on 2. reale liidetud 3. rida ning 4. reast lahutatud kahekordne 3. rida. Uue maatriksi 2. reast on lahutatud 4. rida. Viimasel etapil on 2. ja 4. veerust lahutatud vastavalt kolme- ja seitsmekordne 1. veerg ning 3. veerule liidetud kahekordne 1. veerg.

Süsteemi teisendatud maatriksis on nullist erinev kolmandat järku alamdeterminant.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 10 .$$

Laiendatud maatriksi neljandat järku determinant on null. Selgus, et $r(A) = r(L) = 3$, s. t. süsteem on lahenduv. Praegu on tegemist eelmise punkti kokkuvõtte 3. juhuga. Võtame süsteemist kolm esimest võrrandit (kontrollige, et neljas avaldub nende kaudu). See süsteem on lahendatud 2.punkti näites, kus saime

$$x_1 = 1 , \quad x_2 = 2 , \quad x_3 = 3 .$$

N ä i d e 3 . Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 , \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 . \end{aligned}$$

Kerge on näha, et $r(A) = r(L) = 2$. Siin on tegemist kokkuvõtte 2. juhuga, sest $m = r = 2 < 4 = n$. Võtame x_3 ja x_4 vabadeks tundmatuteks (võib võtta ka näiteks x_1 ja x_2 või x_1 ja x_3 või ...) ning tähistame nende meelevaldseid väärtusi sümbolitega c_3 ja c_4 . Saame süsteemi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 - 3c_3 - 4c_4 , \\ x_1 - x_2 &= 1 - c_3 + c_4 . \end{aligned}$$

Liitmisvõttega leiame

$$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{5}{3} c_3 - \frac{2}{3} c_4 \ ; \ x_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} c_3 - \frac{5}{3} c_4 .$$

Meelevaldseid vabu tundmatuid sisaldavat lahendit nimetatakse <u>üldlahendiks</u>. Omistades vabadele tundmatutele kindlad väärtused, saame <u>erilahendid</u>. Meie süsteemi üldlahendiks on

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{7}{3} - \frac{5}{3} c_3 - \frac{2}{3} c_4 , \\ x_2 &= \frac{4}{3} - \frac{2}{3} c_3 - \frac{5}{3} c_4 , \\ x_3 &= c_3 , \\ x_4 &= c_4 . \end{aligned}$$

Meelevaldsete konstantide väärtustele $c_3 = 0$, $c_4 = 0$ vastav erilahend on $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = x_4 = 0$.

Analoogiliselt näitega 3 toimub ülesannete lahendamine, kus $r < m < n$ (eespool kirjeldatud 4. juht).

5. <u>Homogeensed võrrandisüsteemid</u>

Homogeense süsteemi laiendatud maatriks B erineb süsteemi maatriksist A ainult täiendava nullveeru poolest, mis astakut ei mõjusta. Seega on aatakutingimus $r(B) = r(A)$ alati täidetud ja <u>homogeensel süsteemil on alati lahend olemas.</u> Tõepoolest, homogeenset süsteemi rahuldab alati null-lahend $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, mida nimetatakse <u>triviaalseks lahendiks</u>.

Kui homogeenses süsteemis on tundmatute ja võrrandite arv sama $n = m$ ning süsteemi determinant $D \neq 0$, siis on süsteemil ühene lahend (vt. punkti 3 lõpus 1. juht) ja selleks ongi triviaalne lahend. Kui süsteemi determinant $D = 0$, siis on süsteemi astak $r < n$. Sel juhul on süsteemil lõpmata palju lahendeid (vt. punkti 3 kokkuvõtte 4. juht), vabu tundmatuid on $n - r$.

N ä i d e 1 . Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 0 , \\ 2x_1 - 5x_2 &= 0 . \end{aligned}$$

Süsteemi determinant $D = -23 \neq 0$. Seega on süsteemil ainult triviaalne lahend $x_1 = x_2 = 0$.

N ä i d e 2 . Lahendada süsteem

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 , \\
5x_1 + x_2 - x_3 &= 0 , \\
12x_1 + x_2 - x_3 &= 0 .
\end{aligned}
$$

Määrame süsteemi maatriksi astaku. Liidame 2. ja 3. reale 1. rea. Jätame siis ära 3. rea, mis võrdub kahekordse teise reaga:

$$
\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 12 & -1 & -1 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 14 & -4 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{Vmatrix} \sim \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{Vmatrix} .
$$

Süsteemi maatriksi astak $r = 2$. Süsteemil on lõpmata palju lahendeid. Võtame kaks esimest võrrandit ning valime x_1 vabaks tundmatuks $x_1 = c_1$. Saame süsteemi

$$
\begin{aligned}
-3x_2 + x_3 &= -2c_1 , \\
x_2 - x_3 &= -5c_1 ,
\end{aligned}
$$

mille lahendame liitmisvõttega. Üldlahend omab kuju

$$
x_1 = c_1 , \quad x_2 = 7/2\, c_1 , \quad x_3 = 17/2\, c_1 .
$$

6. Lineaarsüsteemi determinandivaba lahendamine

Lineaarsüsteemide lahendamiseks on sageli otstarbekas kasutada võtteid, mis esinevad maatriksi astaku leidmisel ja baseeruvad süsteemi laiendatud maatriksi elementaarteisendustel. Siin kasutame elementaarteisendusi ainult (!) ridadega.

Teisendame süsteemi laiendatud maatriksi elemendid allpool diagonaali $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{rr}$ nullideks. Vajaduse korral vahetame omavahel maatriksi ridu. Lõpuks jõuame maatriksini

$$
\left\Vert \begin{array}{ccccc|ccc}
d_{11} & d_{12} & \ldots & \ldots & d_{1r} & d_{1r+1} & \ldots\, d_{1n} & p_1 \\
0 & d_{22} & \ldots & \ldots & d_{2r} & d_{2r+1} & \ldots\, d_{2n} & p_2 \\
0 & 0 & d_{33} & \ldots & d_{3r} & d_{3r+1} & \ldots\, d_{3n} & p_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & d_{rr} & d_{rr+1} & \ldots\, d_{rn} & p_r \\
\hline
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots\, 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots\, 0 & 0
\end{array} \right\Vert . \qquad (3.7)
$$

Kordajad alates veerust $r + 1$ on vabade tundmatute kordajad. Kui astak $r = m$, siis ei teki maatriksi teisendamise käigus alla nullridasid. Maatriksi r-ndale reale vastab võrrand

$$d_{rr}x_r = p_r - d_{rr+1}x_{r+1} - \dots - d_{rn}x_n ,$$

kust leiame tundmatu x_r. Eelviimasele reale vastavasse võrrandisse paneme x_r asemele leitud väärtuse ja leiame x_{r-1}. Nii liigume rida realt ülespoole ja leiame järjest kõik tundmatud. Sellist lineaarsüsteemi lahendusvõtet nimetatakse tundmatute järkjärgulise elimineerimise ehk Gaussi meetodiks. Arvutuskäiku realiseeritakse praktikas üpris mitmeti.

Otstarbekas on maatriksi (3.7) teisendamist isegi jätkata selliselt, et ülespoole peadiagonaali kastiga eraldatud osas tekiksid samuti nullid ja ainult peadiagonaalil oleksid nullist erinevad elemendid. Siis saab kohe igast reast välja kirjutada ühe tundmatu väärtuse. Seda võtet nimetatakse ka tundmatute täieliku elimineerimise meetodiks.

Illustreerime näidetega kumbagi meetodit.

N ä i d e 1. Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= -9 , \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8 , \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5 , \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0 . \end{aligned}$$

Lahendame süsteemi Gaussi meetodil. Paigutame tundmatute kordajad ja vabaliikmed tabelisse ning lisame nn. kontrollveeru, kuhu kanname iga rea elementide summa. Parempoolses lahtris on näidatud sooritatavate elementaarteisenduste iseloom. Arvutuste õigsust kontrollime kontrollveeru abil. Ridade elementidega sooritatavad teisendused teeme ka kontrollveeru elementidega. Saadud tulemus peab ühtima teisenduse tulemusena saadud rea elementide summaga.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ	Teisendus
1	-3	0	-6	-9	-17	
2	1	-5	13	8	7	
0	2	-1	2	-5	-2	
1	4	-7	6	0	4	
1	-3	0	-6	-9	-17	
0	7	-5	13	26	41	(II) - 2(I)
0	2	-1	2	-5	-2	
0	7	-7	12	9	21	(IV) - (I)
1	-3	0	-6	-9	-17	
0	7	-5	13	26	41	
0	0	3/7	-12/7	-87/7	-96/7	(III) - 2/7 (II)
0	0	-2	-1	-17	-20	(IV) - (II)
1	-3	0	-6	-9	-17	
0	7	-5	13	26	41	
0	0	1	-4	-29	-32	7/3 (III)
0	0	-2	-1	-17	-20	
1	-3	0	-6	-9	-17	
0	7	-5	13	26	41	
0	0	1	-4	-29	-32	
0	0	0	-9	-75	-84	(IV)+ 2(III)

Kordajate maatriks on teisendatud diagonaalkujule. Viimasele reale vastab võrrand $-9x_4 = -75$, kust leiame $x_4 = 25/3$. Eelviimasele reale vastab võrrand $x_3 - 4x_4 = -29$, kust leiame $x_3 = -29 + 4x_4 = -29 + 4.25/3 = 13/3$. Nüüd asendame leitud x_3 ja x_4 väärtused rida kõrgemale vastavasse võrrandisse

$$7x_2 - 5x_3 + 13x_4 = 26$$

ja arvutame $x_2 = 1/7\,(26 + 5 \,.\, 13/3 - 13 \,.\, 25/3) = -\,26/3$.

Analoogiliselt saame esimesele reale vastavast võrrandist

$$x_1 = -9 + 3x_2 + 6x_4 = -9 - 3 \,.\, 26/3 + 6 \,.\, 25/3 = 15 .$$

Vastuse esitame kujul

$$x_1 = 15 \,, \quad x_2 = -26/3 \,, \quad x_3 = 13/3 \,, \quad x_4 = 25/3$$

või vektorsümboolikas

$$\bar{X} = (15, -26/3, 13/3, 25/3) \,.$$

Elementaarteisenduste abil teisendasime esimesel etapil 1. veerus nullikś elemendid alates 2. reast, 2. veerus alates 3. reast, 3. veerus alates 4. reast. Liikumine tabelis toimus ülalt vasakult alla paremale. Teisel etapil alustasime liikumist tabeli alumisest paremast nurgast üles vasakule, leides igast reast ühe tundmatu. Tabeli igas veerus allakriipsutatud elemente nimetatakse juhtelementideks ja neile vastavaid veerge juhtveergudeks.

N ä i d e 2 . Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \,, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \,, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2 \,. \end{aligned}$$

Kasutame taas Gaussi meetodit.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ	Teisendus
2	7	3	1	6	19	
3	5	2	2	4	16	
9	4	1	7	2	23	
2	7	3	1	6	19	
3	5	2	2	4	16	
0	-11	-5	1	-10	-25	(III) - 3(II)
2	7	3	1	6	19	
0	-11	-5	1	-10	-25	2.(II)-3.(I)
0	-11	-5	1	-10	-25	
2	7	3	1	6	19	
0	-11	-5	1	-10	-25	
0	0	0	0	0	0	(III) - (II)

Kolmanda võrrandi kõik kordajad teisendusid nullikś, s.t. et seda võrrandit rahuldavad tundmatute mistahes väärtused ja seega ka need väärtused, mis rahuldavad kaht esimest võrrandit. Teisiti öeldes on kolmas võrrand kahe esimese järeldus. Nullrea võime tabelist kustutada. Järelejäänud kaks rida vastavad võrranditele

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 , \\ -11x_2 + 5x_3 + x_4 &= -10 . \end{aligned}$$

Vabu tundmatuid on kaks, valime nendeks x_3 ja x_4 ja tähistame $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$.

Teisest võrrandist leiame, et

$$x_2 = 10/11 - 5/11\ x_3 + 1/11\ x_4 .$$

Asendame x_2 avaldise esimesse võrrandisse ning avaldame sealt x_1 :

$$x_1 = \frac{1}{2}\ 6 - 3x_3 - x_4 - 7(10/11 - 5/11\ x_3 + 1/11\ x_4) =$$
$$= - 2/11 + 1/11\ c_1 - 9/11\ c_2 .$$

Süsteemi üldlahend on järgmine:

$$\begin{aligned} x_1 &= - 2/11 + 1/11\ c_1 - 9/11\ c_2 , \\ x_2 &= 10/11 - 5/11\ c_1 + 1/11\ c_2 , \\ x_3 &= c_1 , \quad x_4 = c_2 . \end{aligned}$$

Võttes näiteks $c_1 = c_2 = 0$, saame erilahendi

$$\vec{X}_1 = (- 2/11,\ 10/11,\ 0,\ 0) ,$$

kui $c_1 = 1$, $o_2 = 0$, saame

$$\vec{X}_2 = (- 1/11,\ 5/11,\ 1,\ 0) .$$

N ä i d e 3 . Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 5 , \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 7x_5 &= 3 , \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \qquad &= 4 , \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 8 . \end{aligned}$$

Lahendame ülesande tundmatute täieliku elimineerimise võttega. Juhime tähelepanu asjaolule, et nullist erinevad kordajad ei pea tingimata seisma peadiagonaalil. Oluline on, et igast reast oleks valitud üks juhtelement.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ	Teisendus
1	2	2	1	3	5	14	
2	-3	-3	1	-7	3	-7	
1	1	1	2	0	4	9	
3	-1	-1	2	-4	8	7	
1	2	2	1	3	5	14	
0	-7	-7	-1	-13	-7	-35	(II)-2(I)
0	-1	-1	1	-3	-1	-5	(III)-(I)
0	-7	-7	-1	-13	-7	-35	(IV)-3(I)
1	3	3	0	6	6	19	(I)-(III)
0	-1	-1	0	-2	-1	-5	$\frac{1}{8}$ [(II)+(III)]
0	-1	-1	1	-3	-1	-5	
0	-1	-1	0	-2	-1	-5	$\frac{1}{8}$ [(IV)+(III)]
1	0	0	0	0	3	4	(I)+3(II)
0	1	1	0	2	1	5	-(II)
0	0	0	1	-1	0	0	(III)-(II)
0	0	0	0	0	0	0	(IV)-(II)

Kustutame 4. rea kui nullrea. Seda oleks võinud teha ka juba eelmisel teisenduste sammul, sest 4. rida ühtis 2. reaga. Järele jäi kolm võrrandit viie tundmatu leidmiseks, neist valime kaks vabadeks tundmatuteks. Üheks vabaks tundmatuks võtame x_5, sest temale vastav veerg sisaldab rohkem kui ühe nullist erineva elemendi. Teiseks vabaks tundmatuks võime valida kas x_2 või x_3. Käesolevas näites tekkis kaks ainult ühe nullist erineva elemendiga veergu ja need asuvad samas reas. Olgu vaba tundmatu x_3. Vabad tundmatud on meelevaldselt valitavad, tähistame neid $x_3 = c_1$, $x_5 = c_2$. Arvutusskeemi viimasest osast (3 viimast rida) saame välja kirjutada süsteemi üldlahendi

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 1 - c_1 - 2c_2, \quad x_3 = c_1, \quad x_4 = c_2, \quad x_5 = c_2$$

ehk $\quad \overline{X} = (3, \; 1 - c_1 - 2c_2, \; c_1, \; c_2, \; c_2)$.

Mõnikord jäetakse märkimata isegi vektori sümbol $\vec{X}$.

Leiame kaks erilahendit, kui 1) $c_1 = c_2 = 0$, 2) $c_1 = 2$, $c_2 = 1$. Tehes vajalikud arvutused, saame erilahendid 1) (3, 1, 0, 0, 0); 2) (3, -3, 2, 1, 1).

N ä i d e 4. Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+2x_2+2x_3} + x_4 - x_5 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 &= 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 \phantom{{}+x_4} - 6x_5 &= 2. \end{aligned}$$

Kasutame lahendamiseks tundmatute täieliku elimineerimise meetodit. Kuna võrrandeid on 4 viie tundmatu leidmiseks, siis võime kohe järeldada, et süsteemi lahenduvuse korral saame vähemalt ühe vaba tundmatu.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ	Teisendus
1	0	0	1	-1	3	4	
1	2	2	1	3	5	14	
0	1	1	1	1	1	5	
1	-3	-3	0	-6	2	-9	
1	0	0	1	-1	3	4	
0	2	2	0	4	2	10	(II)-(I)
0	1	1	1	1	1	5	
0	-3	-3	-1	-5	-1	-13	(IV)-(I)
1	0	0	1	-1	3	4	
0	0	0	-1	1	0	0	$\frac{1}{2}$ [(II) - 2(III)]
0	1	1	1	1	1	5	
0	0	0	1	-1	1	1	$\frac{1}{2}$ [(IV)+3(III)]
1	0	0	0	0	2	3	(I)-(IV)
0	0	0	0	0	1	1	(II)+(IV)
0	1	1	0	2	0	4	(III)-(IV)
0	0	0	1	-1	1	1	

Teises reas teisendusid kõigi tundmatute kordajad nullideks, kuid vabaliige erineb nullist. Jõudsime seega võrrandini

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 2 ,$$

mida ei saa rahuldada tundmatute mistahes väärtuste korral. Tähendab, et lahend puudub ehk süsteem on vastuoluline.

Seega, kui teisenduste tabelis kõik tundmatute kordajad on nullid ja vabaliige nullist erinev, katkestame teisendused lahendi puudumise tõttu (NB! nullrea tekkimisel kustutame selle ja jätkame teisendusi).

Kontrollküsimused

1. Mis on võrrandisüsteemi maatriks? laiendatud maatriks?
2. Millal saab kasutada Crameri valemeid võrrandisüsteemi lahendamiseks?
3. Sõnastage astakutingimus.
4. Olgu süsteemi astakutingimus täidetud. Määrata süsteemi lahendite arv, kui 1) võrrandite arv $m = 5$ ja otsitavate arv $n = 5$ ning süsteemi astak $r = 5$; 2) $m = 5$, $n = 5$, $r = 3$; 3) $n = r = 4$, $m = 3$; 4) $m = n = 4$, $r = 3$.
5. Mis on süsteemi üldlahend? erilahendid?
6. Kas homogeenne süsteem saab olla vastuoluline?
7. Millal homogeenne süsteem omab mittetriviaalse lahendi?
8. Kuidas toimub süsteemi determinandivaba lahendamine?
9. Kuidas saab Gaussi meetodil süsteemi lahendades avastada, et süsteem on vastuoluline?
10. Miks ei või süsteemi lahendamisel teha elementaarteisendusi süsteemi maatriksi veergudega?

§ 4. DIFERENTSIAALVÕRRANDID

1. Diferentsiaalvõrrandi mõiste. Üldlahend ja erilahend

Võrrandit, mis seob sõltumatut muutujat x otsitava funktsiooniga $y = f(x)$ ning selle tuletistega y', y'', ..., $y^{(n)}$, nimetatakse diferentsiaalvõrrandiks. Näiteks võrrandid

$$y' = 2x - 1\,, \tag{1}$$

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0\,, \tag{2}$$

$$y'' = 1 - 2x \tag{3}$$

kujutavad endast diferentsiaalvõrrandeid, kus otsitavaks on funktsioon $y = y(x)$.

Võrrandeid, kus otsitav funktsioon sõltub ühest argumendist x, nimetatakse harilikeks diferentsiaalvõrranditeks. Kui võrrand sisaldab osatuletisi ja otsitavaks on mitme muutuja funktsioon, siis nimetatakse võrrandit osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks. Kuna järgnevalt tuleb juttu ainult harilikest diferentsiaalvõrranditest, siis tekstis eraldi ei rõhutata, et tegemist on harilike diferentsiaalvõrranditega.

Diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse temas sisalduvate tuletiste kõrgeimat järku. Näiteks võrrand (1) on esimest järku ning (2) ja (3) teist järku diferentsiaalvõrrandid. Seega n-järku diferentsiaalvõrrand on esitatav kujul

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0\,. \tag{4}$$

Diferentsiaalvõrrandi lahendiks ehk integraaliks nimetatakse sellist funktsiooni, mis teda rahuldab, s. t. mille asetamine võrrandisse muudab võrrandi samasuseks. Diferentsiaalvõrrandi lahendamist nimetatakse võrrandi integreerimiseks ning tema lahendile vastavat joont diferentsiaalvõrrandi integraalkõveraks.

Öeldust selgub, kuidas kontrollida, kas mingi funktsioon on antud diferentsiaalvõrrandi lahend või mitte. Selleks tuleb leida funktsioonist tuletised ning asetada funktsiooni ja tema tuletiste avaldised diferentsiaalvõrrandisse. Kui võrrand muutub samasuseks, s. t. võrduseks, mis on rahuldatud argumendi kõigi väärtuste korral, siis on meil tegemist võrrandi lahendiga, vastasel korral mitte.

Veendume näiteks, et diferentsiaalvõrrandi (2) lahendiks on funktsioon $y = 2x + x^2$. Leiame kõigepealt tuletised

$$y' = 2 + 2x , \qquad y'' = 2 .$$

Seega

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 2 - \frac{2}{x} (2 + 2x) + \frac{2}{x^2} (2x + x^2) .$$

Asendades selle avaldisega võrrandi (2) vasaku poole, saame

$$2 - \frac{2}{x} (2 + 2x) + \frac{2}{x^2} (2x + x^2) = 0 .$$

Üksikuid liikmeid koondades näeme, et see võrdus kehtib sõltumatult argumendi väärtusest. Järelikult antud funktsioon on tõepoolest võrrandi (2) lahend.

Diferentsiaalvõrrandi lahend ei ole ühene. Näiteks võrrandi (1) lahendiks on funktsioon $y = x^2 - x$, sest tema tuletis on võrdne avaldisega $2x - 1$. Ent selle võrrandi lahendiks on ka funktsioon

$$y = x^2 - x + C , \tag{5}$$

kus C on suvaline konstant. Teist järku võrrandi (3) lahendiks on funktsioon

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 , \tag{6}$$

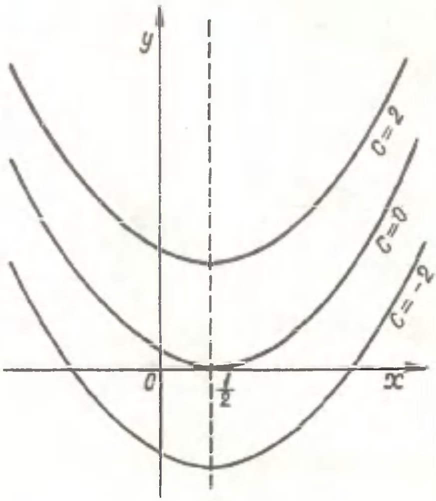
kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid. Funktsioonide (5) ja (6) kohta öeldakse, et need on vastavalt võrrandite (1) ja (3) üldlahendid ehk üldintegraalid.

Esitatud näited lubavad oletada, et võrrandi üldlahendis sisalduvate suvaliste konstantide arv on võrdne võrrandi järguga. Nii see ongi. Diferentsiaalvõrrandi (4), mille järk on n, üldlahend sisaldab n suvalist konstanti. Järelikult saab teda esitada kujul

$$y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

ehk üldisemalt kujul

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 .$$



Joonis 1.

Uurime lähemalt esimest järku diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendit (5). Seos (5) esitab xy-tasandil paraboolide parve, millede lagipunktid asetsevad sirgel $x = 1/2$ (vt. joon. 1). Et leida paraboolide parve (5) hulgast sellist parabooli, mis läbib näiteks punkti A(1, 2), tuleb määrata konstant C. Võttes valemis (5) $x = 1$ ja $y = 2$, saame $C = 2$. Seega punkti A(1, 2) läbib integraalkõver

$$y = x^2 - x + 2 .$$

Seda seost nimetame diferentsiaalvõrrandi (1) erilahendiks.

Esimest järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendist saame erilahendi, kui rahuldame algtingimuse*

$$y(x_0) = y_0 ,$$

* Tõsi küll, nõndanimetatud singulaarseid lahendeid ei ole võimalik saada üldlahendist konstantidele arvuliste väärtuste andmise teel, kuid neid on vaid üksikutel võrranditel.

kus x_0 ja y_0 on etteantud arvud.

Kuna n-järku diferentsiaalvõrrandi üldlahend sisaldab n suvalist konstanti, siis on konstantide määramiseks vaja n tingimust. Tihti esitatakse need kujul

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\ . \qquad (7)$$

Diferentsiaalvõrrandit (4) koos algtingimustega (7) nimetatakse prantsuse matemaatiku Cauchy' /Koši:/ (1789-1857) nime järgi Cauchy' ülesandeks. Põhimõtteliselt võib esitada tingimusi, mis võimaldavad määrata suvalisi konstante, ka teisiti, kasvõi näiteks kujul

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(k)}(x_0) = y_k,\ \ y^{(k+1)}(x_1) =$$
$$= y_{k+1}\ ,\ \dots\ ,\ y^{n}(x_1) = y_n\ ,\ \text{ kus } 1 \leqslant k \leqslant n\ .$$

2. Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand

Diferentsiaalvõrrandit, mis on esitatav kujul

$$f_1(x)\ g_1(y)\ dx + f_2(x)\ g_2(y)\ dy = 0\ , \qquad (1)$$

nimetatakse eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks. Võrrandis (1) on $f_1(x)$ ja $f_2(x)$ ainult argumendi x funktsioonid ning $g_1(y)$ ja $g_2(y)$ muutuja y funktsioonid. Jagades võrrandi (1) mõlemaid pooli avaldisega $g_1(y)\ f_2(x)$, saame

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = 0\ .$$

Seda võrrandit nimetatakse eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks. Integreerides seda liikmeti, leiame võrrandi (1) üldlahendi

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy = C\ .$$

N ä i d e 1. Lahendada diferentsiaalvõrrand*

$$e^y y' = 2x + 1 .$$

Kuna $y' = \frac{dy}{dx}$, siis

$$e^y \frac{dy}{dx} = 2x + 1 .$$

Korrutades viimast võrrandit dx-ga, saame

$$e^y dy - (2x + 1) dx = 0 .$$

Integreerides leiame

$$\int e^y dy - \int (2x + 1) dx = C$$

ehk

$$e^y - x^2 - x = C .$$

Siit

$$e^y = C + x^2 + x$$

ehk

$$y = \text{In}|C + x + x^2| .$$

N ä i d e 2. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{x}{1 + y^2} dx + 2y(2 + x^2)dy = 0$$

üldlahend.

Muutujate eraldamiseks korrutame antud võrrandit avaldisega $\frac{1 + y^2}{2 + x^2}$. Seda tehes saame

$$\frac{x}{2 + x^2} dx + 2y(1 + y^2)dy = 0 .$$

Integreerides viimast võrrandit, leiame üldlahendi kujul

$$\int \frac{x}{2 + x^2} dx + \int 2y(1 + y^2)dy = C$$

---

* Diferentsiaalvõrrandi lahendamise all mõistame edaspidi selle üldlahendi leidmist.

ehk

$$\ln (2 + x^2) + (1 + y^2)^2 = C_1 ,$$

kus $C_1 = 2C$.

N ä i d e 3 . Leida diferentsiaalvõrrandi

$$yy' = xe^{x+y}$$

erilahend algtingimusel $y(0) = -1$.

Peale muutujate eraldamist saab võrrand kuju

$$ye^{-y}dy - x\, e^x dx = 0 .$$

Integreerides leiame üldlahendi

$$(1+y)e^{-y} + (x-1)e^x = C .$$

Et saada üldlahendist otsitavat erilahendit, tuleb rahuldada algtingimus $y(0) = -1$. Algtingimuse rahuldamine tähendab sisuliselt konstandi C määramist. Võttes üldlahendi avaldises $x = 0$ ning $y = -1$, saame

$$(1 - 1)e^1 + (0 - 1)e^0 = C .$$

Seega $C = -1$. Järelikult otsitav erilahend on

$$(1 + y)e^{-y} + (x - 1)e^x + 1 = 0 .$$

N ä i d e 4 . Leida joone võrrand, teades, et selle joone puutuja tõus on graafiku iga punkti korral võrdeline puutepunkti ordinaadi ruuduga. Võrdetegur olgu k .

Olgu otsitava joone võrrand $y = f(x)$. Eelduse kohaselt

$$y' = ky^2 ,$$

kus k on võrdetegur. Seetõttu

$$\frac{dy}{y^2} = k\,dx .$$

Siit saame integreerides

$$-\frac{1}{y} = kx + C$$

ning

$$y = \frac{-1}{C + kx} .$$

Tulemuseks saime murdlineaarse funktsiooni. Järelikult graafikul kujutab üldlahend endast hüperboolide parve.

3. Homogeenne esimest järku diferentsiaalvõrrand

Homogeenseks esimest järku diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis on esitatav kujul

$$y' = f\left(\frac{y}{x} \right) , \qquad (1)$$

kus funktsioon $f\left(\frac{y}{x} \right)$ sõltub muutujate y ja x suhtest (või ka vastupidi). Osutub, et homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks taandub ka võrrand

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 , \qquad (2)$$

kus $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ on ühe ja sama astme homogeensed funktsioonid.

Funktsiooni $F(x, y)$ nimetatakse k-astme homogeenseks funktsiooniks, kui iga x ja y korral kehtib võrdus

$$F(tx, ty) = t^k F(x, y) ,$$

kus t on mingi nullist erinev reaalarv.

Näiteks funktsioonid $F_1(x, y) = 2x - 3y$ ning $F_2(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ on vastavalt esimese ja teise astme homogeensed funktsioonid, sest $F_1(tx, ty) = 2tx - 3ty = t(2x - 3y) = tF_1(x, y)$ ning $F_2(tx, ty) = (tx)^2 - 3txty - 2(ty)^2 = t^2(x^2 - 3xy + 2y^2 = t^2F_2(x, y)$.

Homogeenne diferentsiaalvõrrand taandub eralduvate muutujatega võrrandiks, kui viia läbi muutuja vahetus $\frac{y}{x} = z$ ehk $y = zx$, kus $z = z(x)$ on mingi argumendi x funktsioon. Leiame seosest $y = zx$ tuletise x järgi. Korrutise tuletise arvutamise reegli põhjal

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} . \qquad (3)$$

Asendades võrrandis (1) tuletise valemi (3) abil, saame

$$x\frac{dz}{dx} + z = f(z) .$$

Saadud diferentsiaalvõrrand on muutuja z suhtes eralduvate muutujatega võrrand. Eraldades muutujad, jõuame võrrandini

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x} .$$

Seega

$$\int\frac{dz}{f(z) - z} = \ln|x| + C .$$

Kui viimases valemis viia läbi integreerimine ning asendada muutuja z tagasi suhtega $\frac{y}{x}$, siis saamegi diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendi.

M ä r k u s . Muutujate eraldamisel jagasime võrrandi mõlemaid pooli vahega $f(z) - z$. Seejuures tuleb eeldada, et $f(z) - z \not\equiv 0$, sest nulliga jagamine pole lubatud. Järelikult juhtum $f(z) \equiv z$ vajab eraldi analüüsi. Et sel juhul $f(\frac{y}{x}) \equiv \frac{y}{x}$, siis võrrand (1) saab kuju

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} .$$

Siin võib muutujad eraldada ilma tundmatut z sisse toomata. Tehes seda ning integreerides, saame

$$\ln y = \ln x + \ln C .$$

Siit leiame

$$y = Cx .$$

N ä i d e 1 . Leida diferentsiaalvõrrandi

$$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

üldlahend.

Toome sisse muutuja $z = \frac{y}{x}$. Siis $y' = z + xz'$ ning esialgne võrrand saab kuju

$$z + xz' = z - z^2 .$$

Seega

$$x \frac{dz}{dx} = - z^2$$

ehk

$$- \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x} .$$

Integreerides saame

$$\frac{1}{z} = \ln|x| + C_1 .$$

Integreerimiskonstandi esitame lihtsuse mõttes kujul $C_1 = \ln C$. Seega

$$z = \frac{1}{\ln|C \cdot x|} .$$

Kuna $y = zx$, siis esialgse võrrandi lahend on

$$y = \frac{x}{\ln|Cx|} .$$

N ä i d e 2. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$(y^2 - x^2)dx - 2xy\, dy = 0$$

erilahend, mis rahuldab algtingimust $y(1) = 2$.

Jagades antud võrrandi mõlemaid pooli x^2-ga ning avaldades $\frac{dy}{dx}$, saame

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^2 - 1}{2\frac{y}{x}} .$$

Toome sisse uue muutuja $z = \frac{y}{x}$. Et $y = zx$ ning $y' = z + xz'$, siis saab antud võrrand kuju

$$z + xz' = \frac{z^2 - 1}{2z} .$$

Siit

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - 1 - 2z^2}{2z} .$$

Eraldades muutujad, saame võrrandi

$$- \frac{2z\, dz}{1 + z^2} = \frac{dx}{x} .$$

Võrduse mõlemaid pooli integreerides leiame selle võrrandi üldlahendi

$$-\ln(1+z^2) = \ln|x| + \ln C .$$

Seega

$$\frac{1}{1+z^2} = Cx$$

ning

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = C\,x .$$

Rahuldades algtingimuse $y(1) = 2$ ning viies läbi lihtsustused, võib otsitava erilahendi esitada kujul

$$y^2 + x^2 = 5x .$$

N ä i d e 3 . Integreerida diferentsiaalvõrrand

$$y' = \frac{x-y}{x+y-3} + 1 .$$

Võrrandit $y' = g(x, y)$, kus $g(x, y)$ on kas murdlineaarne avaldis x ja y suhtes või selle funktsioon, s. t.

$$g(x, y) = F\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}\right), \tag{4}$$

saab taandada homogeenseks võrrandiks muutuja vahetusega

$$\begin{cases} x = X + u \\ y = Y + v , \end{cases} \tag{5}$$

kui determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 .^{*}$$

Vastasel juhul, s. t. kui $D = 0$, tuleb teha muutuja vahetus

$$z = a_1x + a_2y .$$

---

* Determinandi definitsiooni kohaselt $D = a_1b_2 - a_2b_1$.

Konstandid u ja v valemites (5) tuleb määrata nii, et muutujatele X ja Y üle minnes on vabaliikmed saadavas murdlineaarses avaldises võrdsed nulliga. Seega funktsiooni F argument valemis (4) on esitatav kujul

$$\frac{A_1X + A_2Y}{B_1X + B_2Y} .$$

Antud ülesande puhul

$$\frac{X + u - (Y + v)}{X + u + Y + v - 3} = \frac{X - Y + (u - v)}{X + Y + (u + v - 3)} ,$$

mistõttu u ja v tuleb valida nii, et

$$u - v = 0 ,$$

$$u + v = 3 .$$

Siit $u = v = 3/2$. Arvestades seda, et $dx = dX$ ning $dy = dY$, saame antud võrrandi esitada kujul

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y} + 1 .$$

Viimane võrrand on muutujate X ja Y suhtes homogeenne võrrand, sest jagades murru lugejat ja nimetajat suurusega X, saame

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1 - \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}} + 1 .$$

Viies läbi muutuja vahetuse

$$Z = \frac{Y}{X} , \qquad \frac{dY}{dX} = Z + X \frac{dZ}{dX} ,$$

jõuame diferentsiaalvõrrandini

$$Z + X \frac{dZ}{dx} = \frac{1 - Z}{1 + Z} + 1 .$$

Eraldades muutujad, saame

$$\frac{1 + Z}{(1 - Z)(2 + Z)} dZ = \frac{dX}{X} .$$

Võrrandi mõlemaid pooli integreerides leiame

$$\ln\left[(1 - Z)^2(2 + Z)\right] = -3 \ln X + \ln C .$$

Seega

$$(1 - Z)^2(2 + Z) = \frac{C}{X^3} .$$

Asendades $Z = X/Y$, saame

$$\frac{(X - Y)^2(2X + Y)}{X^3} = \frac{C}{X^3} .$$

Minnes tagasi muutujatele x, y valemite (5) abil, saame lõpuks

$$(x - y)^2(2x + y - \frac{9}{2}) = C .$$

N ä i d e 4. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 1}{-2x + y + 2}$$

erilahend, mis rahuldab algtingimust $y(0) = -2$.

Antud juhul võrdub determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

nulliga. Seetõttu tuleb teha muutuja vahetus

$$z = 2x - y ,$$

kus muutujat z vaatleme argumendi x funktsioonina. Arvutades funktsiooni z tuletise x järgi, saame

$$\frac{dz}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx} ..$$

Avaldades siit

$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{dz}{dx}$$

ning asendades suurused y' ja z esialgsesse võrrandisse, saame

$$2 - \frac{dz}{dx} = \frac{z + 1}{-z + 2} .$$

Lihtsustades viimast võrrandit, jõuame eralduvate muutujatega võrrandini

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3z - 3}{z - 2} .$$

Eraldades muutujad, saame

$$\int \frac{z - 2}{3z - 3}\, dz = \int dx + C .$$

Pannes tähele, et

$$\frac{z - 2}{3z - 3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{3z - 3}\right) ,$$

saame hõlpsasti leida vajalikud integraalid. Seega

$$\frac{1}{3}\left(z - \ln|z - 1|\right) = x + C .$$

Kuna $z = 2x - y$, siis võime leitud üldlahendi kirjutada kujul

$$2x - y - \ln|2x - y - 1| = 3x + C_1 .$$

Rahuldades algtingimuse, leiame $C_1 = 2$. Järelikult otsitav erilahend on

$$x + y + 2 + \ln|2x - y - 1| = 0 .$$

4. Lineaarne esimest järku diferentsiaalvõrrand

Diferentsiaalvõrrandit nimetatakse lineaarseks, kui temas nii otsitav funktsioon kui ka tuletised esinevad esimeses astmes. Lineaarne esimest järku diferentsiaalvõrrand on esitatav kujul

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x) , \tag{1}$$

kus $P(x)$ ja $Q(x)$ on mingid muutuja x funktsioonid. Kui $Q(x) \equiv 0$, siis nimetatakse võrrandit (1) lineaarseks homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks. Rõhutame, et terminil "homogeenne" on siin teistsugune tähendus kui eelmises paragrahvis.

Võrrandi (1) lahendamiseks teeme asenduse $y = uv$, kus $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ on mingid argumendid x funktsioonid. Siis

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} . \qquad (2)$$

Asendades võrrandis (1) tuletise valemi (2) abil, saame

$$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + P(x)\,uv = Q(x) .$$

Rühmitades liikmeid, kirjutame selle võrrandi kujul

$$u\frac{dv}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right)v = Q(x) .$$

Kuna funktsioonide u ja v kohta ei ole siiani midagi eeldatud, siis võime nõuda, et viimases võrrandis oleks sulgudes seisev avaldis võrdne nulliga, s. t.

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0 \qquad (3)$$

ja

$$u\frac{dv}{dx} = Q(x) . \qquad (4)$$

Võrrand (3) on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand u suhtes. Eraldades muutujad, leiame

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx .$$

Seega

$$\ln|u| = -\int P(x)dx$$

ehk

$$u = e^{-\int P(x)dx} . \qquad (5)$$

Arvestades valemit (5), esitame võrrandi (4) kujul

$$\frac{dv}{dx} = Q(x)\,e^{\int P(x)dx} .$$

Siit leiame integreerides

$$v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C . \qquad (6)$$

Kuna me otsime diferentsiaalvõrrandi (1) lahendit kujul $y = uv$, siis valemite (5) ja (6) põhjal on selleks funktsioon

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Leitud lahendusvalem on meelespidamiseks liiga keeruline. Võrrandite praktilisel lahendamisel korratakse iga kord kas eelnevat mõttekäiku või kasutatakse niinimetatud konstantide varieerimise meetodit.

Konstantide varieerimise meetod seisneb järgnevas. Esialgu lahendatakse võrrandile (1) vastav homogeenne võrrand

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0. \tag{7}$$

Lineaarne homogeenne võrrand (7) on eralduvate muutujatega võrrand. Tema üldintegraal on

$$\ln|y| = e^{-\int P(x)dx} + \ln C$$

ehk

$$y = C\cdot e^{-\int P(x)dx}. \tag{8}$$

Lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (1) lahendit otsitakse kujul (8), kus C loetakse argumendi x funktsiooniks. Seega

$$y = C(x)\, e^{-\int P(x)dx} \tag{9}$$

ning

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}\, e^{-\int P(x)dx} + C(x)\, e^{-\int P(x)dx}(-P(x)). \tag{10}$$

Asendades funktsiooni y ja selle tuletise võrrandisse (1) vastavalt valemite (9) ja (10) abil, saame funktsiooni C(x) leidmiseks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dC(x)}{dx}\, e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x)) + C(x)e^{-\int P(x)dx}.P(x) =$$

$$= Q(x)$$

ehk

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Kui integreerida saadud võrrandit ja panna leitud C(x) valemiese (9), siis saame diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendi, mis ühtib varem leitud lahendiga.

N ä i d e 1 . Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{x^2 + 1} y = x\sqrt{x^2 + 1} .$$

Asendus $y = uv$ annab

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{2x}{x^2+1} uv = x\sqrt{x^2 + 1}$$

ehk

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} - \frac{2x}{x^2+1} u \right) = x\sqrt{x^2 + 1} .$$

Võttes

$$\frac{du}{dx} - \frac{2x}{x^2+1} u = 0$$

ja eraldades muutujad, saame

$$\frac{du}{u} = \frac{2x}{x^2+1} dx .$$

Siit leiame integreerides

$$\ln|u| = \ln(x^2 + 1) ,$$

mistõttu

$$u = x^2 + 1 .$$

Funktsiooni v leiame diferentsiaalvõrrandist

$$u\frac{dv}{dx} = x\sqrt{x^2 + 1} ,$$

mis saab peale u asendamist kuju

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} .$$

Seega

$$v = \sqrt{x^2 + 1} + C$$

ning kuna $y = uv$, siis

$$y = (x^2 + 1)(C + \sqrt{x^2 + 1}) .$$

N ä i d e 2 . Leida diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$$

erilahend, mis rahuldab algtingimust $y(1) = 2$.

Asendades $y = uv$, jõuame võrrandini

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - \frac{uv}{x} = x$$

ehk

$$u \frac{dv}{dx} + v(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}) = x .$$

Siit

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$$

ja

$$u \frac{dv}{dx} = x .$$

Seega

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} ,$$

millest

$$\ln u = \ln x$$

ehk

$$u = x .$$

Võrrand v leidmiseks on antud juhul kujul

$$x \frac{dv}{dx} = x .$$

Jagades võrrandi mõlemaid pooli x-ga ja integreerides, saame

$$v = x + C .$$

Niisiis

$$y = uv = x^2 + Cx .$$

Rahuldades algtingimuse $y(1) = 2$, saame $C = 1$. Seega otsitav erilahend on

$$y = x^2 + x .$$

N ä i d e 3 . Leida diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$$

erilahend, mis rahuldab algtingimust $y(1) = 0$.

Kasutame konstantide varieerimise meetodit. Kõigepealt lahendame vastava homogeense võrrandi

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0 .$$

Eraldades muutujad, saame

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x} .$$

Integreerides leiame

$$\ln y = -2 \ln x + \ln C .$$

Seega homogeense võrrandi lahendiks on

$$y = \frac{C}{x^2} .$$

Esialgse võrrandi lahendit otsime kujul

$$y = \frac{C(x)}{x^2} .$$

Arvutades selle funktsiooni tuletise ja asendades algvõrrandisse, saame

$$\frac{1}{x^2} \frac{dC(x)}{dx} - \frac{2C(x)}{x^3} + \frac{2}{x} \frac{C(x)}{x^2} = x^3 .$$

Peale lihtsustusi jõuame võrrandini

$$\frac{dC(x)}{dx} = x^5 .$$

Siit leiame

$$C(x) = \frac{x^6}{6} + C_1 .$$

Seega üldlahend avaldub kujul

$$y = \frac{1}{x^2} (C_1 + \frac{x^6}{6}) .$$

Otsitava erilahendi leidmiseks on vaja määrata konstant C_1 nii, et on täidetud tingimus $y(1) = 0$. Seega $C_1 = -\frac{1}{6}$ ning otsitav erilahend on

$$y = \frac{1}{6\,x^2}\,(x^6 - 1)\ .$$

5. Teist järku lineaarne konstantsete kordajatega homogeenne diferentsiaalvõrrand

Olgu antud võrrand

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\,\frac{dy}{dx} + by = 0\ , \qquad (1)$$

kus kordajad a ja b on konstandid. Diferentsiaalvõrrandit (1) nimetatakse konstantsete kordajatega lineaarseks homogeenseks teist järku võrrandiks. Enne kui asume leidma võrrandi (1) lahendit, tõestame mõned teoreemid.

T e o r e e m 1 . Lineaarse homogeense võrrandi (1) erilahendite summa on samuti selle võrrandi lahend.

T õ e s t u s . Olgu $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ võrrandi (1) erilahendid. Siis nad mõlemad peavad rahuldama seda võrrandit, s. t.

$$y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x) \equiv 0$$

ja

$$y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x) \equiv 0\ .$$

Liites viimased võrdused, saame

$$y_1''(x) + y_2''(x) + ay_1'(x) + ay_2'(x) + by_1(x) + by_2(x) \equiv 0$$

ehk

$$\left[y_1(x) + y_2(x)\right]'' + a\left[y_1(x) + y_2(x)\right]' + b\left[y_1(x) + y_2(x)\right] \equiv 0.$$

Tähistades $y_* = y_1 + y_2$, võime selle samasuse ümber kirjutada kujul $(y_*)'' + a(y_*)' + by_* = 0$. Siit järeldub, et y_* rahuldab võrrandit (1). Järelikult erilahendite summa $y_1 + y_2$ on tõepoolest võrrandi (1) erilahend.

T e o r e e m 2 . Kui $y_1(x)$ on lineaarse homogeense võrrandi (1) lahend, siis on lahendiks ka $Cy_1(x)$, kus C on suvaline konstant.

T õ e s t u s . Et konstantse teguri võib tuua tuletise märgi ette, s. t.

$$(Cy_1(x))' = Cy_1'(x)$$

ja

$$(Cy_1(x))'' = Cy_1''(x) ,$$

siis

$$[Cy_1(x)]'' + a[Cy_1(x)]' + bCy_1(x) = C[y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)] .$$

Kuna y_1 on võrrandi (1) erilahend, siis nurksulgudes seisev avaldis viimase võrduse paremal poolel on samaselt võrdne nulliga. Järelikult

$$C[y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)] = 0 .$$

Seega $Cy_1(x)$ on tõepoolest lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (1) lahend, kui seda on $y_1(x)$.

J ä r e l d u s . Kui $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on lineaarse homogeense teist järku võrrandi (1) lahendid, siis on lahendiks ka nende erilahendite lineaarne kombinatsioon

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) . \qquad (2)$$

Tõepoolest, seda, et kumbki liidetav on erilahend, väidab teoreem 2, ning et kahe erilahendi summa on võrrandi (1) lahend, teame me teoreemi 1 põhjal.

Tekib küsimus, kas avaldis (2) on diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahend või mitte, kui $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on selle võrrandi suvalised erilahendid. On võimalik tõestada, et kui y_1 ja y_2 on lineaarselt sõltumatud erilahendid, siis on (2) võrrandi (1) üldlahend.

Kaht funktsiooni $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ nimetatakse <u>lineaarselt sõltuvateks</u>, kui leiduvad mingid nullist erinevad reaalarvud C_1 ja C_2 , nii et kehtib samasus

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0 .$$

Funktsioone nimetatakse lineaarselt sõltumatuteks, kui viimati kirjutatud samasus kehtib vaid $C_1 = C_2 = 0$ korral.

Avaldades siit

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = -\frac{C_2}{C_1} ,$$

näeme, et kahe lineaarselt sõltuva funktsiooni suhe peab olema konstantne. Näiteks funktsioonid $y = 3x$ ja $y = 3x + 4$ on lineaarselt sõltumatud, ent funktsioonid $y = 2x$ ja $y = 5x$ on lineaarselt sõltuvad.

Märgime, et ülalöeldu peab paika ka sel juhul, kui kordajad a ja b võrrandis (1) on mitte konstandid, vaid argumendi x funktsioonid.

Toome sisse karakteristliku võrrandi mõiste. Lineaarsele konstantsete kordajatega teist järku võrrandile (1) vastavaks karakteristlikuks võrrandiks nimetatakse ruutvõrrandit

$$k^2 + ak + b = 0 . \tag{3}$$

Diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendi leidmisel tuleb vaadelda eraldi kolme juhtu: 1) karakteristliku võrrandi (3) lahendid k_1 ja k_2 on reaalsed ja erinevad, 2) reaalsed ja ühtivad, 3) kompleksed.

1. Karakteristliku võrrandi lahendid on reaalsed ja erinevad. Olgu karakteristlikul võrrandil (3) reaalarvulised juured k_1 ja k_2. Näitame, et diferentsiaalvõrrandi (1) erilahendid on

$$y_1 = e^{k_1x} \tag{4}$$

ja

$$y_2 = e^{k_2x} . \tag{5}$$

Kontrollime, kas (4) ja (5) rahuldavad võrrandit (1). Et

$$(e^{k_1x})'' + a(e^{k_1x})' + be^{k_1x} = e^{k_1x}(k_1^2 + a k_1 + b) \tag{6}$$

ja

$$(e^{k_2x})'' + a(e^{k_2x})' + be^{k_2x} = e^{k_2x}(k_2^2 + ak_2 + b) \qquad (7)$$

ning

$$k_1^2 + ak_1 + b = 0 , \quad k_2^2 + ak_2 + b = 0 ,$$

siis on võrduste (6) ja (7) paremad pooled võrdsed nulliga sõltumatult argumendi x väärtustest. Seega funktsioonid (4) ja (5) on võrrandi (1) erilahendid.

Kuna nad on lineaarselt sõltumatud erilahendid, sest

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const} ,$$

siis diferentsiaalvõrrandi (1) üldintegraal on esitatav kujul

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} , \qquad (8)$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid.

2. <u>Karakteristliku võrrandi lahendid on võrdsed</u>. Kui võrrandi (3) lahendid k_1 ja k_2 on võrdsed, siis

$$k_1 = k_2 = -\frac{1}{2}a$$

ning

$$a^2 - 4b = 0 .$$

Näitame, et sel juhul on diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendiks funktsioonide

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}ax} \qquad (9)$$

ja

$$y_2 = xe^{-\frac{1}{2}ax} \qquad (10)$$

lineaarne kombinatsioon

$$y = (C_1 + C_2x)\, e^{-\frac{1}{2}ax} . \qquad (11)$$

Tõestame kõigepealt, et (9) ja (10) rahuldavad diferentsiaalvõrrandit (1). Tõepoolest, pannes valemi (9) abil määratud funktsiooni y_1 võrrandisse (1), näeme, et

$$\frac{d}{dx^2}\left(e^{-\frac{1}{2}ax}\right) + a\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{2}ax}\right) + b\,e^{-\frac{1}{2}ax} =$$

$$= \frac{1}{4}a^2 e^{-\frac{1}{2}ax} - a\frac{1}{2}a\,e^{-\frac{1}{2}ax} + b\,e^{-\frac{1}{2}ax} =$$

$$= -\frac{e^{-\frac{1}{2}ax}}{4}(a^2 - 4b) .$$

Et eelduse kohaselt $a^2 - 4b = 0$, siis antud funktsioon rahuldab diferentsiaalvõrrandit (1). Toimides analoogiliselt valemi (10) abil määratud funktsiooniga, jõuame samasuguse tulemuseni järgmiste teisenduste abil:

$$\frac{d}{dx^2}\left(e^{-\frac{1}{2}ax}\cdot x\right) + a\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{2}ax}\cdot x\right) + bxe^{-\frac{1}{2}ax} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[e^{-\frac{1}{2}ax} + x\frac{-a}{2}e^{-\frac{1}{2}ax}\right] + a\left[e^{-\frac{1}{2}ax}\left(1 - \frac{ax}{2}\right)\right] + bxe^{-\frac{1}{2}ax} =$$

$$= -\frac{1}{2}ae^{-\frac{1}{2}ax} - \frac{1}{2}ae^{-\frac{1}{2}ax} + x\frac{a}{4}^2 e^{-\frac{1}{2}ax} + e^{-\frac{1}{2}ax}\left(a - \frac{a^2x}{2}\right) + bxe^{-\frac{1}{2}ax} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}ax}\left[-\frac{a}{2} - \frac{a}{2} + x\frac{a^2}{4} + a - \frac{a^2x}{2} + bx\right] = -xe^{-\frac{1}{2}ax}\left(\frac{a^2}{4} - b\right) = 0 .$$

Seega funktsioonid (9) ja (10) on võrrandi (1) erilahendid. Kuna need erilahendid on lineaarselt sõltumatud, sest

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{xe^{-\frac{1}{2}ax}}{e^{-\frac{1}{2}ax}} = x \neq \text{const} ,$$

siis diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendiks on tõepoolest funktsioon (11).

3. <u>Karakteristliku võrrandi lahendid on komplekssed</u>. Kui $a^2 - 4b < 0$, siis karakteristliku võrrandi (3) lahendid avalduvad kujul

$$k_1 = \alpha + i\beta , \quad k_2 = \alpha - i\beta ,$$

kus α ja β on reaalarvud. Et ruutvõrrandi lahendusvalemi põhjal

$$k_{1,2} = \frac{-a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b},$$

siis

$$\alpha = -\frac{1}{2}a, \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}.$$

Avaldades nendest valemitest a ja b, saame

$$a = -2\alpha, \quad b = \alpha^2 + \beta^2.$$

Näitame, et sel juhul on diferentsiaalvõrrandi (1) erilahenditeks funktsioonid

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \tag{12}$$

ja

$$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{13}$$

Arvutades funktsioonidest (12) ja (13) tuletised, saame

$$\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}\cos\beta x) = e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x),$$

$$\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}\sin\beta x) = e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x).$$

Edasi diferentseerides leiame

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{\alpha x}\cos\beta x) = e^{\alpha x}\left[(\alpha^2 - \beta^2)\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x\right],$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{\alpha x}\sin\beta x) = e^{\alpha x}\left[(\alpha^2 - \beta^2)\sin\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x\right].$$

Asetades funktsiooni (12) ning tema tuletised võrrandisse (1), veendume, et

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{\alpha x}\cos\beta x) + a\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}\cos\beta x) + be^{\alpha x}\cos\beta x =$$

$$= e^{\alpha x}\left[(\alpha^2 - \beta^2)\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x + (\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x)(-2\alpha) +\right.$$

$$\left. + b\cos\beta x\right] = e^{\alpha x}\left[-(\alpha^2 + \beta^2)\cos\beta x + b\cos\beta x\right] = 0,$$

sest $\alpha^2 + \beta^2 = b$. Analoogiliselt funktsiooni (13) puhul

$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{\alpha x}\sin\beta x) + a\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}\sin\beta x) + be^{\alpha x}\sin\beta x =$$

$$= e^{\alpha x}\left[(\alpha^2-\beta^2)\sin\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x - 2\alpha(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) +\right.$$

$$\left.+ b\sin\beta x\right] = e^{\alpha x}\left[-(\alpha^2+\beta^2)\sin\beta x + b\sin\beta x\right] = 0 .$$

Et (12) ja (13) on lineaarselt sõltumatud erilahendid, sest

$$\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = \cot\beta x \neq \text{const} ,$$

siis on diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahend esitatav antud juhul kujul

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) , \qquad (14)$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid.

Seega diferentsiaalvõrrandi üldlahend on kas (8), (11) või (14), vastavalt sellele, kas karakteristliku võrrandi lahendid on reaalsed ja erinevad, võrdsed või kompleksed.

N ä i d e 1 . Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y'' + 4y' + 3y = 0 .$$

Karakteristliku võrrandi

$$k^2 + 4k + 3 = 0$$

lahendid $k_1 = -3$, $k_2 = -1$ on reaalsed ja erinevad. Seega diferentsiaalvõrrandi üldlahend on esitatav kujul

$$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x} .$$

N ä i d e 2 . Leida diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

üldintegraal.

Karakteristlik võrrand on

$$k^2 + 6k + 9 = 0 .$$

Tema lahendid on võrdsed: $k_1 = k_2 = -3$. Järelikult antud diferentsiaalvõrrandi üldintegraal on

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-3x} .$$

N ä i d e 3 . Lahendada võrrand

$$y'' + 6y' + 13y = 0 .$$

Kuna vastava karakteristliku võrrandi juured on kompleksed, ($k_1 = -3 - 2i$, $k_2 = -3 + 2i$), kusjuures $\alpha = -3$, $\beta = 2$, siis diferentsiaalvõrrandi üldlahend omab kuju

$$y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) .$$

6. Konstantsete kordajatega lineaarne mittehomogeenne teist järku diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$y'' + ay' + by = F(x) , \tag{1}$$

kus a ja b on konstandid ning $F(x)$ argumendi x funktsioon.

Osutub, et võrrandi (1) üldlahend on esitatav kujul

$$y = y^* + Y , \tag{2}$$

kus y^* on vastava homogeense võrrandi

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{3}$$

üldlahend ning Y mittehomogeense võrrandi (1) mingi erilahend. Kuna me homogeense võrrandi üldlahendit oskame leida, siis taandub võrrandi (1) integreerimine tema erilahendi leidmisele.

Mõningatel lihtsamatel juhtudel saab erilahendit leida määramata kordajate meetodil. Kui näiteks

$$F(x) = e^{mx} \cdot P_n(x) , \tag{4}$$

kus $P_n(x)$ on n-aetme polünoom, siis võib erilahendit otsida kujul

$$Y = x^r e^{mx} Q_n(x) , \qquad (5)$$

kus $Q_n(x)$ on esialgu tundmatute kordajatega n-astme polünoom. Valemis (5) tuleb võtta $r = 0$, kui m ei ole karakteristliku võrrandi

$$k^2 + ak + b = 0$$

lahend. Kui üks karakteristliku võrrandi juurtest on võrdne m-ga (näiteks $k_1 = m$, $k_2 \neq m$), siis $r = 1$ ning kui $k_1 = k_2 = m$, siis tuleb võtta $r = 2$.

N ä i d e 1 . Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y'' - 3y' + 2y = 4xe^{3x} .$$

Lahendame kõigepealt vastava homogeense võrrandi

$$y'' - 3y' + 2y = 0 .$$

Karakteristliku võrrandi

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

juured on $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Seega homogeense võrrandi üldlahend on esitatav kujul

$$y^* = C_1e^x + C_2e^{2x} .$$

Leiame nüüd mittehomogeense võrrandi erilahendi. Kuna antud juhul $n = 1$, $m = 3$ ja $m = 3$ ei ole karakteristliku võrrandi juur, siis tuleb erilahendit otsida kujul

$$Y = e^{3x}(Ax + B) ,$$

kus A ja B on mingid konstandid.

Et

$$Y' = 3e^{3x}(Ax + B) + Ae^{3x} = e^{3x}(A + 3Ax + 3B) ,$$

$$Y'' = e^{3x}(3A + 9Ax + 9B + 3A) = e^{3x}(6A + 9B + 9Ax) ,$$

siis

$$Y'' - 3Y' + 2Y = e^{3x}(6A + 9B + 9Ax - 3A - 9Ax - 9B + 2Ax + 2B) = e^{3x}(3A + 2B + 2Ax) .$$

Võrdsustades selle avaldise esialgse diferentsiaalvõrrandi parema poolega, saame seose

$$(3A + 2B + 2Ax)e^{3x} = 4xe^{3x} ,$$

mis peab kehtima iga x väärtuse korral. Jagades selle mõlemaid pooli teguriga e^{3x} , jõuame võrduseni, mille mõlemal pool seisavad polünoomid. Seega*

$$3A + 2B = 0 ,$$

$$2A = 4 .$$

Järelikult $A = 2$, $B = -3$ ning erilahend on

$$Y = e^{3x}(2x - 3) .$$

Seetõttu üldlahend avaldub kujul

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{3x}(2x - 3) .$$

N ä i d e 2 . Leida diferentsiaalvõrrandi

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x$$

mingi erilahend.

Karakteristliku võrrandi juured on antud juhul võrdsed. Seejuures on

$$k_1 = k_2 = m = 1 .$$

Seega $m = 1$ on kahekordne karakteristliku võrrandi juur, mistõttu erilahendit tuleb otsida kujul

$$Y = x^2(Ax + B)e^x = (Ax^3 + Bx^2)e^x .$$

Arvutades tuletised

$$Y' = e^x(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx)$$

$$Y'' = e^x(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx + 3Ax^2 + 6Ax + 2Bx + 2B)$$

ning asendades võrrandi vasakusse poolde, saame

---

* Kaks polünoomi $P_n(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ja $Q_n(x) = b_o + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$ on võrdsed siis, kui kõik nende vastavad kordajad on võrdsed, s. t. $a_o = b_o$, $a_1 = b_1$, ... , $a_n = b_n$.

$$Y'' - 2Y' + Y = e^x(Ax^3 + Bx^2 + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax + 2B) +$$
$$+ e^x(-2Ax^3-2Bx^2- 6Ax^2- 4Bx) + e^x(Ax^3 + Bx^2) .$$

Lihtsustades seda avaldist ning võrdsustades ta esialgse diferentsiaalvõrrandi parema poolega, jõuame seoseni

$$(6Ax + 2B)e^x = 6xe^x .$$

Et see võrdus peab kehtima iga x väärtuse korral, siis

$$6A = 6, \quad 2B = 0 .$$

Seega

$$A = 1, \quad B = 0$$

ning erilahend avaldub kujul

$$Y = x^3e^x .$$

N ä i d e 3 . Leida diferentsiaalvõrrandi

$$y'' - 2y' = -4x$$

erilahend, mis rahuldab algtingimusi $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Karakteristliku võrrandi

$$k^2 - 2k = 0$$

lahendid on $k_1 = 0$; $k_2 = 2$. Seega vastava homogeense võrrandi üldlahend avaldub kujul

$$y_* = C_1 + C_2e^{2x} .$$

Kuna antud juhul $m = 0$ on ühekordne karakteristliku võrrandi lahend, siis tuleb erilahendit otsida kujul

$$Y = x(Ax + B).$$

Et

$$Y' = 2Ax + B , \quad Y'' = 2A ,$$

siis

$$Y'' - 2Y' = 2A - 2B - 4Ax ,$$

mistõttu peab kehtima võrdus

$$2A - 2B - 4Ax = -4x .$$

Järelikult saame A ja B leidmiseks võrrandisüsteemi

$$2A - 2B = 0$$
$$-4A = -4 .$$

Siit leiame

$$A = 1 , \quad B = 1 .$$

Nüüd võime välja kirjutada erilahendi kujul

$$Y = x^2 + x .$$

Mittehomogeenee võrrandi üldlahendiks on funktsioon

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + x^2 + x .$$

Algtingimuste rahuldamiseks leiame tuletise

$$y' = 2C_2 e^{2x} + 2x + 1 .$$

Võttes nüüd $y(0) = 0$ ja $y'(0) = -1$, saame üldlahendis sisalduvate suvaliste konstantide määramiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_2 + 1 = -1 . \end{cases}$$

Siit leiame $C_2 = -1$, $C_1 = 1$. Järelikult antud algtingimusi rahuldav mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi erilahend avaldub kujul

$$y = 1 + x + x^2 - e^{2x} .$$

Kontrollküsimused

1. Mis on diferentsiaalvõrrand? Milline on harilik ning milline osatuletistega diferentsiaalvõrrand? Mida mõistetakse võrrandi järgu all?
2. Mis on diferentsiaalvõrrandi üldlahend ning erilahend?
3. Mida kujutab endast diferentsiaalvõrrandi lahend geomeetriliselt?
4. Formuleerige Cauchy' ülesanne.
5. Milline on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand? Mis on muutujate eraldamine?
6. Milline on homogeenne esimest järku diferentsiaalvõrrand? Kuidas seda lahendatakse?
7. Kuidas lahendatakse diferentsiaalvõrrandit $y' = g(x, y)$, kus g on kas murdlineaarne avaldis või selle funktsioon?
8. Milline on lineaarne diferentsiaalvõrrand?
9. Milline on lineaarne esimest järku diferentsiaalvõrrand? Millisel juhul nimetatakse seda homogeenseks ja kuidas seda lahendatakse?
10. Milles seisneb konstantide varieerimise meetod?
11. Milline on teist järku konstantsete kordajatega lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand?
12. Sõnastage teoreemid teist järku konstantsete kordajatega lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi erilahendite summa ning erilahendi ja konstantse teguri korrutise kohta.
13. Kuidas avaldub teist järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend erilahendite kaudu ning millised peavad sel juhul olema erilahendid?
14. Millal on kaks erilahendit lineaarselt sõltumatud ning millal need on lineaarselt sõltuvad?

15. Tooge näiteid lineaarselt sõltuvate ning lineaarselt sõltumatute funktsioonide kohta.

16. Mida kujutab endast karakteristlik võrrand?

17. Milline on teist järku konstantsete kordajatega lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend, kui karakteristliku võrrandi lahendid on

a) reaalsed ja erinevad,
b) võrdsed,
c) kompleksed?

18. Kuidas avaldub konstantsete kordajatega teist järku lineaarse mittehomogeense võrrandi üldlahend?

19. Millisel kujul tuleb otsida mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi erilahendit, kui võrrandi paremal pool on avaldis $e^{mx} \cdot P_n(x)$, kus $m = const$ ja $P_n(x)$ on mingi n-astme polünoom?

20. Millisel juhul on kaks polünoomi võrdsed?

Kirjandus

1. КРЫНСКИЙ Х. Э. Математика для экономистов, М., „Статистика", 1970.
2. ГЛАГОЛЕВ А.А., СОЛНЦЕВА Т.В. Курс высшей математики. М. 1971.
3. МАРКОВИЧ Э. С. Курс вышей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики , М., „Высш. школа", 1972.
4. САХАРНИКОВ Н. А. Высшая математика, Л., Изд. ЛГУ,1973.
5. RÄGO, G. Kõrgem matemaatika II, Tallinn, 1963.
6. SÕRMUS, T., VAINIKKO, G. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Tallinn, „Valgus", 1972.
7. ZAITSEV, I., Kõrgem matemaatika. Tallinn, 1965.
8. PETERSEN, I., ROOS, H., Kõrgema matemaatika ülesannete kogu I, II.

S i s u k o r d

15 kop.