TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

MATEMAATILISE ANALÜÜSI PRAKTIKUM

III

2. vihik

1983

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Matemaatilise analüüsi kateeder

MATEMAATILISE ANALÜÜSI PRAKTIKUM III

2.vihik

TARTU 1983

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nõukogus 21. jaanuaril 1983.a.

Koostanud E. Reimers

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ III.
Тетрадь 2-я.
Составитель Эльмар Р е й м е р с.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, I8.
Vastutav toimetaja E. Jürimäe.
Paljundamisele antud 03.02.1983.
Formaat 60x84/16.
Rotaatoripaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 16,04.
Arvestuspoognaid 12,17. Trükipoognaid 17,25.
Trükiarv 600.
Tell. nr. 150.
Hind 40 kop.
TRÜ trükikoda. ENSV, 202400 Tartu, Pälsoni t. 14.

S I S U K O R D

E E S S Õ N A

Käesolev väljaanne sisaldab näiteid ja ülesandeid matemaatilise analüüsi alalt mitme muutuja funktsioonide integraalarvutuse ulatuses ja on mõeldud matemaatilise analüüsi praktikumi läbiviimiseks prof. G. Kangro õpiku "Matemaatiline analüüs" II (Tallinn, 1968) järgi TRÜ Matemaatikateaduskonna ja Füüsika-Keemiateaduskonna füüsikaosakonna teistel kursustel sügissemestril.

Ülesannete kogu igas osas on antud lühike teoreetiline sissejuhatus, kus on ära toodud põhilised mõisted, valemid ja teoreemid, mida läheb vaja vastava osa ülesannete lahendamisel. Samuti on toodud rohkesti näiteid tüüpiliste lahendusvõtete rakendamise kohta. See teeb ülesannete kogu sõltumatuks matemaatilise analüüsi kursuse õpikutest ja võimaldab praktikumi materjali kasutada ka iseseisvalt õppijail. Ülesannete kogu on sobiv kasutamiseks ka teistes ENSV kõrgemates õppeasutustes, kus matemaatilise analüüsi programmid on väiksema ulatusega.

Kõigile arvutusülesannetele on antud vastused. Tärnikesega (*) märgitud ülesannetele on vastustes antud kas lahendust põhjendav märkus, juhised lahendamiseks või on ära toodud lahenduse põhiosa.

Integreerimise põhivalemid

1) $\int 0\,dx = C.$

2) $\int dx = x + C.$

3) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

5) $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, kui $\alpha \neq -1.$

6) $\int \alpha^{x}\,dx = \frac{\alpha^{x}}{\ln} + C.$

7) $\int e^{x}dx = e^{x} + C.$

8) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

9) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

10) $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

12) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1.$

14) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C_1.$

15) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

16) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

17) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

18) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

I. PARAMEETRIST SÕLTUVAD INTEGRAALID

§ 1. Parameetrist sõltuv Riemanni integraal

Olgu kahe muutuja x ja y funktsioon f määratud ristkülikus

$$R = X \times Y = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\},$$

kus $X = [a,b]$ ja $Y = [c,d]$.

Olgu f kui muutuja x funktsioon integreeruv lõigus X iga $y \in Y$ korral. Siis Riemanni integraal

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx \tag{1}$$

määrab F kui y funktsiooni lõigus Y. Funktsiooni F nimetatakse parameetrist y sõltuvaks integraaliks.

Võrdusega (1) määratud funktsioonil F on järgmised omadused.

Teoreem 1. Kui funktsioon f on pidev ristkülikus R, siis funktsioon F on pidev lõigus Y.

Teoreem 2. Kui f ja tema osatuletis f_y on pidevad ristkülikus R, siis F on diferentseeruv lõigus Y ning selles lõigus kehtib Leibnizi valem

$$\frac{dF}{dy} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx$$

ehk

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x,y)dx . \tag{2}$$

<u>Teoreem 3</u>. Kui f on pidev ristkülikus R, siis

$$\int_c^d F(y)dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy, \qquad (3)$$

kus

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)dy \right\} dx.$$

Arvestades võrdust (1), saab valemi (3) kirjutada kujul

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy. \qquad (4)$$

Seega antud eeldustel võib integreerimisjärjekorda muuta.

<u>Näide 1</u>. Näidata, et funktsioon

$$F(y) = \int_0^1 x \ln^{-1}(1 + xy)dx$$

on pidev igas lõigus $Y = [a,b]$, kus $0<a<b$.

<u>Lahendus.</u> Veendume kõigepealt, et integraal F(y) eksisteerib. Iga $y \in Y$ korral on integraalialune funktsioon

$$f(x,y) = \frac{x}{\ln(1 + xy)}$$

pidev poollõigus $(0,1]$ ja kohal $x = 0$ on tal kõrvaldatav katkevus, sest

$$\lim_{x \to 0+} f(x,y) = \frac{1}{y}.$$

Et integraal ei sõltu integraalialuse funktsiooni väärtusest ühes punktis, siis defineerides iga $y \in Y$ korral lõigus $X = [0,1]$ pideva funktsiooni

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{kui } x \neq 0, \\ 1/y, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

saame, et

$$F(y) = \int_0^1 g(x,y)dx$$

ja et ta eksisteerib lõigus Y. Aga funktsioon g on pidev kogu ristkülikus $R = X \times Y$, siis teoreemi 1 põhjal integraal $F(y)$ on pidev lõigus Y.

Näide 2. Arvutada piirväärtus

$$\lim_{y \to 1-} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - y \sin^2 x}\, dx.$$

Lahendus. Piirväärtuse arvutamiseks valime y muutumispiirkonnaks näiteks lõigu $Y = [0,1]$. Integraalialune funktsioon on pidev ristkülikus $R = X \times Y$, kus $X = [0, \pi/2]$. Seega vaadeldav integraal

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - y \sin^2 x}\, dx$$

eksisteerib iga $y \in Y$ korral ja on teoreemi 1 põhjal pidev selles lõigus Y. Järelikult

$$\lim_{y \to 1-} F(y) = F(1) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/2} |\cos x| dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 1.$$

Näide 3. Kasutades Leibnizi valemit, arvutada integraal

$$\int_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + y \sin x}{1 - y \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x},$$

kui $y^2 < 1$.

Lahendus. Tingimuse $y^2 < 1$ tõttu on $1 \pm y \sin x > 0$ ja integraalialune funktsioon

$$f(x,y) = \frac{\ln(1 + y \sin x) - \ln(1 - y \sin x)}{\sin x}$$

on siis määratud ristkülikus $R = X \times Y$, kus $X = [0, \pi/2]$ ja $Y = (-1,1)$. Funktsiooni f võib hulgal R lugeda ka pidevaks, sest sirgel $x = 0$ on temal kõrvaldatav katkevus, kuna L'Hospitali reegli abil saame

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 \pm y \sin x)}{\sin x} \underset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\pm y}{1 \pm y \sin x} = \pm y,$$

mille tõttu võime võtta

$$f(0,y) = \lim_{x \to 0} \ln \frac{1 + y \sin x}{1 - y \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = 2y.$$

Seega integraal

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} f(x,y)dx$$

on parameetri y funktsioon vahemikus $Y = (-1,1)$. Leibnizi valemi rakendamiseks valime suvalise $\varepsilon \in (0,1)$ ning vaatleme funktsiooni F lõigus $Y_\varepsilon = [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon] \subset Y$. Leiame osatuletise f_y, saame

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+y \sin x} + \dfrac{1}{1-y \sin x} = \dfrac{2}{1-y^2 \sin^2 x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ (2y)' = 2, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Osatuletis f_y on pidev ristkülikus $X \times Y_\varepsilon$, sest

$$\lim_{x \to 0} f_y(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{2}{1 - y^2 \sin^2 x} = 2 = f_y(0,y).$$

Seega on teoreemi 2 eeldused täidetud ja Leibnizi valemi (2) põhjal

$$\frac{dF}{dy} = \int_0^{\pi/2} \frac{2dx}{1 - y^2 \sin^2 x}.$$

Võttes $u = \tan x$, saame

$$F'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{2dx}{\cos^2 x(\cos^{-2} x - y^2 \tan^2 x)} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2du}{1 + u^2 - y^2u^2} = \int_0^{\infty} \frac{2du}{1 + (\sqrt{1 - y^2}\, u)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - y^2}} \arctan(\sqrt{1 - y^2}\, u)\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - y^2}} .$$

Seega integreerides tuletist $F'(y)$ muutuja y järgi, leiame

$$F(y) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1 - y^2}}\, dy = \pi \arcsin y + C,$$

kus C on mingi konstant, mis tuleb veel määrata. Et lähteintegraali põhjal on

$$F(0) = \int_0^{\pi/2} f(x,0)dx = \int_0^{\pi/2} 0\, dx = 0,$$

ja leitud $F(y)$ avaldise põhjal on $F(0) = \pi \arcsin 0 + C = C$, siis $C = 0$ ja järelikult

$$F(y) = \pi \arcsin y,$$

mis ε suvalisuse tõttu kehtib kogu vahemikus $(-1,1)$.

Näide 4. Arvutada integraal

$$J = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin \ln x\, dx,$$

kus $a,b > 0$.

Lahendus. Et juhul $a,b > 0$ kehtib valem

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y\, dy,$$

siis teoreemi 3 põhjal

$$J = \int_0^1 \sin \ln x\, dx \int_a^b x^y\, dy = \int_a^b F(y)dy,$$

kus

$$F(y) = \int_0^1 x^y \sin \ln x \, dx,$$

sest $f(x,y) = x^y \sin \ln x$ võib lugeda pidevaks ristkülikus $[0,1] \times [a,b]$, kuna $a,b > 0$ tõttu on

$$\lim_{x \to 0} f(x,y) = \lim_{x \to 0} o(1)O(1) = 0,$$

ja seega funktsioonil f on sirgel $x = 0$ kõrvaldatav katkevus.

Nüüd, tehes muutuja vahetuse $\ln x = -z$, leiame $x = e^{-z}$ ja

$$F(y) = \int_\infty^0 e^{-yz} \sin(-z)\,(-x)\,dz = -\int_0^\infty e^{-(y+1)z} \sin z \, dz.$$

Kaks korda ositi integreerides saame

$$-F(y) = -e^{-(y+1)z} \cos z \Big|_0^\infty - (y+1) \int_0^\infty e^{-(y+1)z} \cos z \, dz =$$

$$= 1 - (y+1)\Big[e^{-(y+1)z} \sin z \Big|_0^\infty - (y+1) F(y)\Big] =$$

$$= 1 + (y+1)^2 F(y),$$

kust

$$F(y) = -\frac{1}{1 + (y+1)^2}.$$

Järelikult

$$J = -\int_a^b \frac{dy}{1 + (y+1)^2} = -\arctan(y+1)\Big|_a^b =$$

$$= \arctan(a+1) - \arctan(b+1) =$$

$$= \arctan \frac{a-b}{1 + (a+1)(b+1)}.$$

Teoreemidega 1 - 3 analoogilised teoreemid kehtivad ka juhul, kui integraal sõltub mitmest parameetrist, näiteks

$$F(y,z) = \int_a^b f(x,y,z)dx.$$

Siis Leibnizi valemis (2) tuletise $F'(y)$ asemel tuleb vastav osatuletis.

Näide 5. Diferentseerides parameetri järgi, leida integraal

$$F(y,z) = \int_0^{\pi/2} \ln(y \cos^2 x + z \sin^2 x)dx,$$

kus $y,z > 0$.

Lahendus. Et $y,z > 0$, siis funktsioon

$$f(x,y,z) = \ln(y \cos^2 x + z \sin^2 x)$$

on pidev vaadeldavas piirkonnas. Tema osatuletis

$$f_y(x,y,z) = \frac{\cos^2 x}{y \cos^2 x + z \sin^2 x}$$

on ka pidev samas piirkonnas. Teoreemi 2 põhjal võime rakendada Leibnizi valemit, mis annab

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\, dx}{y\cos^2 x + z\sin^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{y + z\tan^2 x} = \int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)(y+zu^2)}.$$

Saadud integraali arvutamiseks lahutame integraalialuse funktsiooni osamurdude summaks.

Olgu

$$\frac{1}{(1 + u^2)(y + zu^2)} = \frac{Au + B}{1 + u^2} + \frac{Cu + D}{y + zu^2},$$

siis $1 = (Au + B)(y + zu^2) + (Cu + D)(1 + u^2)$. Kordajad määrame järgmise skeemi järgi

$$
\begin{array}{c|ll}
u = i & 1 = (Ai + B)(y - z), & A = 0,\ B = \frac{1}{y - z}, \\
u = 0 & 1 = By + D, & D = 1 - \frac{y}{y - z} = \frac{z}{z - y}, \\
u^3 & 0 = Az + C, & C = 0.
\end{array}
$$

Seega

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{1}{y - z} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 + u^2} - \frac{z}{y + zu^2}\right) du = \\
&= \frac{1}{y - z} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 + u^2} - \frac{z}{y}\ \frac{1}{1 + (z/y)u^2}\right) du = \\
&= \frac{1}{y - z} \left(\arctan u - \sqrt{\frac{z}{y}} \arctan \sqrt{\frac{z}{y}}\, u\right)\Big|_0^\infty = \\
&= \frac{1}{y - z}\ \frac{\pi}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{z}{y}}\right) = \frac{\pi}{2}\ \frac{1}{\sqrt{y}(\sqrt{y} + \sqrt{z})}.
\end{aligned}
$$

Järelikult

$$
\begin{aligned}
F(y,z) &= \int \frac{\partial F}{\partial y}\, dy = \frac{\pi}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y}(\sqrt{y} + \sqrt{z})} = \pi \int \frac{d\sqrt{y}}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} = \\
&= \pi \ln(\sqrt{y} + \sqrt{z}) + C(z),
\end{aligned}
$$

kus integreerimiskonstant $C(z)$ võib sõltuda muutujast z. Konstandi $C(z)$ määramiseks arvestame, et lähteintegraali põhjal on

$$
F(z,z) = \int_0^{\pi/2} \ln z\, dx = \frac{\pi}{2} \ln z
$$

ja leitud $F(y,z)$ avaldise põhjal on

$$
F(z,z) = \pi \ln(2\sqrt{z}) + C(z).
$$

Seega saame võrrandi

$$
\pi \ln(2\sqrt{z}) + C(z) = \frac{\pi}{2} \ln z,
$$

kust

$$
C(z) = \frac{\pi}{2} \ln z - \pi \ln(2\sqrt{z}) = \pi(\ln\sqrt{z} - \ln 2 - \ln\sqrt{z}) = -\pi \ln 2.
$$

Järelikult

$$F(y,z) = \pi \ln(\sqrt{y} + \sqrt{z}) - \pi \ln 2 = \pi \ln \frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2} .$$

Ülesanded.

Näidata, et järgmised funktsioonid F on pidevad hulgas Y.

1. $F(y) = \int_0^3 \exp(-x^2\sqrt{y})dx, \qquad Y = [0,1]$

2. $F(y) = \int_1^9 \frac{\cos(xy)}{x} dx, \qquad Y = [-10,10]$

3. $F(y) = \int_{-3}^7 \frac{\sin(xy)}{x} dx, \qquad Y = [-2,100]$

4. $F(y) = \int_1^e \frac{dx}{x^2 \ln(2x+y)}, \qquad Y = [-1,2e]$

5. $F(y) = \int_1^{\pi/2} \ln \sin(x + y)dx, \quad Y = [0, \frac{\pi}{4}]$

6. $F(y) = \int_0^1 \frac{\arcsin(x/y)}{x} dx, \qquad Y = [1,3]$

7*. $F(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x - y)dx, \qquad Y = [0,1]$

8. $F(y) = \int_{-1}^2 \operatorname{sgn}(x + y)dx, \qquad Y = (-\infty, \infty)$

9. Tõestada, et integraal

$$F(y,z) = \int_a^b f(x,y,z)dx$$

on pidev ristkülikus $Q = Y \times Z$, kui funktsioon f on pidev risttahukas $[a,b] \times Q$.

Kasutades ülesannet 9 näidata, et järgmised funktsioonid on pidevad ristkülikus $Q = Y \times Z$.

10. $F(y,z) = \int_1^e \frac{dx}{x^2 \ln(2x + y) + \ln z}$, $Q = [-1,4] \times [1,4]$

11. $F(y,z) = \int_1^{\pi/2} \ln \tan(xy + z)dx$, $Q = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

12. $F(y,z) = \int_0^5 \frac{\arctan(xy/z)}{x} dx$, $Q = [-5,5] \times [1,2]$

Leida järgmised piirväärtused.

13. $\lim\limits_{y \to 0} \int_0^3 x^2 \cos(xy)dx$

14. $\lim\limits_{y \to 0} \int_0^2 x^3 \operatorname{ch}^2(xy)dx$

15. $\lim\limits_{y \to 1} \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + y^2 + \sin \pi y}$

16. $\lim\limits_{z \to 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \operatorname{sh}^2 z}\, dx$

17. $\lim\limits_{z \to 0} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 + xz)^{1/z}}$

18*. $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + (1 + x/n)^n}$

19. $\lim\limits_{y \to 0} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - y \sin^2 x}\, dx$

20. $\lim\limits_{y \to 1-} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - y \sin^2 x}\, dx$

21. $\lim\limits_{t \to 0} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - t^2 \sin^2 x}}$

22. $\lim\limits_{y \to 1} \int_0^{\pi} x^{-1} \sqrt{x^2 + \ln y}\, \sin(xy)dx$

23*. $\lim\limits_{y \to 2+} \int_1^e \frac{1}{x} \arctan \frac{x}{y - 2}\, dx$

24. $\lim\limits_{y \to -3+} \int_{1/2}^{\operatorname{sh} 2} \frac{\operatorname{ch} x}{x} \operatorname{arccot} \frac{x}{y + 3}\, dx$

Arvutada tuletis dF/dy kahel viisil: a) arvutades integraali ja sellest tuletise, b) kasutades Leibnizi valemit.

25. $F(y) = \int_0^1 \arctan \frac{x}{y}\, dx$, kui $y > 0$

26. $F(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2)\,dx$, kui $y > 0$

Leida järgmiste funktsioonide F tuletised $\frac{dF}{dy}$.

27. $F(y) = \int_e^5 \frac{dx}{\ln(xy)}$

28. $F(y) = \int_1^{\pi} x^{-1}\cos(xy^2)\,dx$

29. $F(y) = \int_0^1 (1/x)e^{xy}\,dx$

30. $F(y) = \int_0^2 x^{-1}\arcsin(xy)\,dx$

31. $F(y) = \int_1^2 x^{-1}\arccos(xy)\,dx$

Leida järgmiste funktsioonide F osatuletised F_y ja F_z.

32. $F(y,z) = \int_0^1 x^{-1}\arcsin(xy^2z^3)\,dx$

33. $F(y,z) = \int_0^{\pi} x^{-1}\sin x(y^2 - z)\,dx$

34. $F(y,z) = \int_0^{\ln 2} x^{-1} \exp(-x^2y/z)\,dx$

35. Näidata, et täisarvulise indeksiga n Besseli funktsioon

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi$$

rahuldab Besseli diferentsiaalvõrrandit

$$x^2J_n''(x) + J_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0.$$

Sageli esineb parameetrist sõltuv integraal kujul

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx, \tag{5}$$

kus f on määratud ristkülikus $X \times Y = [a,b] \times [c,d]$ ning rajad α ja β on lõigus Y määratud funktsioonid.

Integraalil (5) on järgmised omadused:

Teoreem 4. Kui f on pidev ristkülikus $X \times Y$ ning funktsioonid α ja β pidevad lõigus Y, siis valemiga (5) määratud funktsioon F on pidev lõigus Y.

Teoreem 5. Kui funktsioonid f ja f_y on pidevad ristkülikus $X \times Y$, funktsioonid α ja β aga diferentseeruvad lõigus Y, siis valemiga (5) määratud funktsioon F on diferentseeruv lõigus Y, kusjuures

$$\frac{dF}{dy} = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx + f(\beta,y)\frac{d\beta}{dy} - f(\alpha,y)\frac{d\alpha}{dy}. \tag{6}$$

Ülesanded

Näidata, et järgmised funktsioonid F on pidevad lõigul Y.

36. $F(y) = \int_{2y}^{\sqrt{y}} x^{-1}\cos(x + y)dx, \qquad Y = [1,4]$

37. $F(y) = \int_{0}^{y^2} x^{-1}\arcsin(x/y)dx, \qquad Y = [1,2]$

38. $F(y) = \int_{-|y|}^{0} x^{-1}\arctan(x/y)dx, \qquad Y = [-100,10]$

Arvutada järgmised piirväärtused.

39. $\lim\limits_{y\to 0} \int\limits_{1}^{3-y} x^2\cos^2(xy)dx$ 40. $\lim\limits_{z\to 0} \int\limits_{z}^{1} x^3 \operatorname{ch}(xz)dx$

41. $\lim\limits_{y\to -1} \int\limits_{1+y}^{2-y^2} \dfrac{dx}{x^2 + 2y^2 + \cos(\pi y)}$

42. $\lim\limits_{y\to 0} \int\limits_{y-2}^{1+y} \sqrt{x^2 + \operatorname{th}^2 y}\, dx$

43. $\lim\limits_{y\to 1-} \int\limits_{\sqrt{1-y}}^{\pi y/2} \sin(x + \arcsin y)dx$

Leida järgmiste funktsioonide tuletised $\frac{dF}{dy}$.

44. $F(y) = \int\limits_{0}^{2+y} x^{-1}\ln(1 + xy)dx$

45. $F(y) = \int\limits_{1-y}^{3+2y} x^{-1} \ln(2 + xy)dx$

46. $F(y) = \int\limits_{-y}^{0} (2/x)\ln(e + xy)dx$ 47. $F(y) = \int\limits_{0}^{2y} x^{-1}\sin(xy)dx$

48. $F(y) = \int\limits_{y}^{y\sqrt{3}} x^{-1}\arctan(x/y)dx$ 49. $F(y) = \int\limits_{1}^{y^2} x^{-1}\cos(xy)dx$

Leida järgmiste funktsioonide F osatuletised F_y ja F_z.

50. $F(y,z) = \int\limits_{0}^{1+z} x^{-1}\ln(1 + xy)dx$

51. $F(y,z) = \int\limits_{0}^{y+z^2} x^{-1}\sin(xz^3)dx$

52. $F(y,z) = \int\limits_{y}^{z} x^{-1}\exp(xyz)dx$

53. $F(y,z) = \int\limits_{1}^{z} \dfrac{x + 1}{x} \cos \dfrac{xy}{z}\, dx$

54. $F(y,z) = \int\limits_{y}^{z} x^{-1}(e^{-yx^2} - e^{-zx^2})dx$

Kasutades Leibnizi valemit, arvutada järgmised integraalid (muidugi põhjendades iga sammu).

55. $F(y) = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + y\cos x)}{\cos x} dx$, kui $|y| < 1$

56. $F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(y\tan x)}{\tan x} dx$

57. $F(y) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2y\cos x + y^2)dx$, kui $|y| < 1$

58*. $F(y) = \int_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2 x)dx$, kui $|y| > 1$

59. $F(y) = \int_0^{\pi/2} \ln(y - \sin^2 x)dx$, kui $y > 1$

Leida integraalid $\int_0^1 F(y)dy$, kui

60. $F(y) = \int_0^{\pi/2} \sin 2x \cdot \cos\sin x \cdot \cos(y\sin x)dx$

61. $F(y) = \int_0^{\pi} \sin 2x \cdot \cos\sin x \cdot \cos(y\sin x)dx$

62. $F(y) = \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos\sqrt{\cos x} \cdot \cos(y\sqrt{\cos x})dx$

63. $F(y) = \int_0^{\pi/2} (\frac{x}{\sin x} - 2\sqrt{1 - y^2\sin^2 x})dx$

Kasutades integreerimist parameetri järgi, leida järgmised integraalid, eeldades, et $b > a > 0$.

64*. $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

65. $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \cos\ln x \, dx$

66*. $\int_0^{\pi/2} \ln \frac{a + b\sin x}{a - b\sin x} \frac{dx}{\sin x}$

§ 2. Tõkestamata funktsiooni parameetrist sõltuv integraal

Olgu kahe muutuja funktsioon f määratud piirkonnas $X \times Y$, kus $X = (a,b)$ ja $a<b$ ning Y on suvaline piirkond. Olgu f mõne $y \in Y$ korral tõkestamata x muutumisel b ümbruses, kuid iga $y \in Y$ korral koondugu integraal

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx. \tag{7}$$

Koonduvat integraali (7) nimetatakse ühtlaselt koonduvaks piirkonnas Y, kui iga arvu $\varepsilon>0$ korral leidub selline arv $\delta = \delta(\varepsilon)$, et kehtib

$$\left| \int_\xi^b f(x,y)dx \right| < \varepsilon, \tag{8}$$

kui $a<b-\delta< \xi <b$, sõltumata parameetrist $y \in Y$.

Analoogiliselt defineeritakse päratu integraali (7) ühtlane koonduvus, kui funktsioon f on tõkestamata x muutumisel punkti a ümbruses. Sel korral koonduvat integraali (7) nimetatakse ühtlaselt koonduvaks piirkonnas Y, kui iga arvu $\varepsilon >0$ korral leidub arv $\delta = \delta(\varepsilon)>0$, et kehtib

$$\left| \int_a^\xi f(x,y)dx \right| < \varepsilon, \tag{9}$$

kui $a< \xi <a+\delta<b$, sõltumata parameetrist $y \in Y$.

Weierstrassi tunnus. Parameetrist sõltuv integraal (7) koondub ühtlaselt ja absoluutselt piirkonnas Y, kui leidub muutuja x funktsioon g, et

$$|f(x,y)| \leqslant g(x), \tag{10}$$

kui $a \leqslant x_0 \leqslant x < b$, sõltumata muutujast $y \in Y$ ja

$$\int_a^b g(x)dx < \infty .$$

Funktsiooni g nimetatakse funktsiooni f <u>majorandiks</u> piirkonnas Y.

Võrdusega (7) määratud funktsioonil F on järgmised omadused.

<u>Teoreem 1</u>. Kui funktsioon f on pidev ristkülikus $X \times Y$ ja päratu integraal (7) koondub ühtlaselt lõigus Y, siis funktsioon F on pidev lõigus Y.

<u>Teoreem 2</u>. Kui osatuletis f_y on pidev ristkülikus $X \times Y$, integraal (7) koondub lõigus Y ja päratu integraal

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx$$

koondub ühtlaselt lõigus Y, siis funktsioon F on diferentseeruv lõigus Y ja kehtib <u>Leibnizi valem</u>

$$\frac{dF}{dy} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx. \tag{11}$$

<u>Teoreem 3</u>. Kui funktsioon f on pidev ristkülikus $X \times Y$ ja päratu integraal (7) koondub ühtlaselt lõigus Y, siis

$$\int_c^d F(y)dy = \int_a^b G(x)dx, \tag{12}$$

kus

$$G(x) = \int_c^d f(x,y)dy. \tag{13}$$

Võrduste (7) ja (13) põhjal võime valemi (12) kirjutada kujul (4), kust on näha. et teoreemi 3 eeldustel võib integreerimisjärjekorda muuta.

Kui valemiga (7) määratud funktsioon F on tõkestamata hulgas $Y_1 = [c,d)$, siis valem (12) kehtib järgmistel rangematel eeldustel.

Teoreem 4. Kui funktsioon f on pidev ja $f(x,y) \geqslant 0$ ristkülikus $X \times Y_1$, integraal (7) koondub ühtlaselt igas lõigus $[c,\delta] \subset Y_1$ ja päratu integraal (13) koondub ühtlaselt igas lõigus $[a,\beta] \subset [a,b)$, siis kehtib valem (12), kui üks tema pooltest koondub.

Näide 6. Leida funktsiooni

$$F(y) = \int_0^2 |\ln x|^y dx$$

määramispiirkond Y.

Lahendus. Integraalialune funktsioon

$$f(x,y) = |\ln x|^y,$$

kui $y \neq 0$, on katkev sirgetel $x = 0$ ja $x = 1$. Kui $y < 0$, siis sirgel $x = 0$ on funktsioonil f kõrvaldatav katkevus, sest sel korral

$$\lim_{x \to 0} |\ln x|^y = 0,$$

kuna

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty.$$

Kui aga $y > 0$, siis esimese võrdluslause põhjal vaadeldav integraal F on koonduv, sest leidub konstant $M_y > 0$ selline, et kehtib võrratus

$$|\ln x|^y \leqslant \frac{M_y}{\sqrt{x}}.$$

Selle näitamiseks arvutame järgmise suhte piirväärtuse (L'Hospitali reegli abil):

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|\ln x|^y}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{(-\ln x)^y}{x^{-1/2}} \underset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{y(-\ln x)^{y-1}(-\frac{1}{x})}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{2y(-\ln x)^{y-1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0.$$

Uurime integraali koonduvust $x = 1$ ümbruses. Asendades $x = 1 + z$ saame

$$\int_1^2 |\ln x|^y \, dx = \int_{-1}^1 \ln^y(1 + z)dz.$$

Nüüd tuleb integraali koonduvust uurida $z = 0$ ümbruses. Et aga $\ln(1 + z)\sim z$, kui $z \to 0$, siis

$$\ln^y(1 + z)\sim z^y,$$

ja seega teise võrdluslause põhjal integraal $F(y)$ koondub, kui $-y<1$, s.o. kui $y>-1$. Järelikult funktsiooni F määramispiirkond on $Y = (-1,\infty)$.

Näide 7. Tõestada, et päratu integraal

$$F(y) = \int_{-1}^1 \cos\frac{y}{x} \arctan\frac{x}{1 + y^2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

on absoluutselt ja ühtlaselt koonduv funktsiooni F määramispiirkonnas.

Lahendus. Integraalialune funktsioon on tõkestamata $x = \pm 1$ ümbruses. Et funktsioon $\cos(y/x)\arctan\frac{x}{1 + y^2}$ on tõkestatud oma määramispiirkonnas ja katkev ainult sirgel $x = 0$, siis integraalialune funktsioon on integreeruv igas vahemikus $(-1 + \delta, 1 - \delta)$ ja võrratustest

$$\left|\cos\frac{y}{x} \arctan\frac{x}{1 + y^2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right| < \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} < \infty$$

saame Weierstrassi tunnuse põhjal, et F on määratud ja integraal on absoluutselt ja ühtlaselt koonduv kogu arvteljel.

Näide 8. Tõestada, et päratu integraal

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^y}$$

on ühtlaselt koonduv hulgal $Y = (-\infty, 2-\sigma]$ iga $0<\sigma<2$ puhul.

Lahendus. Kui $y>0$, siis integraalialune funktsioon

$$f(x,y) = \frac{1}{x^y}\sin\frac{1}{x}$$

on tõkestamata $x = 0$ ümbruses. Juhul, kui $y = 0$, on funktsioon f katkev ainult kohal $x = 0$ ja seega integreeruv, sest $\sin(1/x) = O(1)$. Juhul $y<0$ võib funktsiooni f lugeda pidevaks, sest seose

$$\lim_{x\to 0+} x^{-y}\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} o(1)O(1) = 0$$

tõttu on katkevus kohal $x = 0$ kõrvaldatav. Seega on meil tegemist päratu integraaliga ainult juhul $y>0$. Antud juhul Weierstrassi tunnuse rakendamine ei anna aga tulemust, sest võrratus

$$\left|\sin\frac{1}{x}\frac{1}{x^y}\right| \leqslant \frac{1}{x^{2-\sigma}}$$

kehtib küll iga $x\in[0,1]$ ja $y\in(-\infty,2-\sigma]$ puhul, kuid

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^y} = \infty$$

juhul $y\geqslant 1$. Seepärast rakendame vahetult definitsiooni tingimust (9). Selleks valime suvalise $\xi\in(0,1)$ ja integreerime funktsiooni f ositi (arvestades, et $2-y>0$):

$$\int_0^{\xi} \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^y} = \int_0^{\xi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cdot x^{2-y}dx =$$

$$= x^{2-y}\cos\frac{1}{x}\Big|_{0+}^{\xi} - (2-y)\int_0^{\xi} x^{1-y}\cos\frac{1}{x}dx =$$

$$= \xi^{2-y}\cos\frac{1}{\xi} - (2-y)\int_0^{\xi}\cos\frac{1}{x}\frac{dx}{x^{y-1}}.$$

Viimane paremal poolel seisev integraal on koonduv (isegi absoluutselt), kui $y - 1 < 1$, s.o. kui $y < 2$. Seega

$$\left|\int_0^{\xi}\sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^y}\right| \leqslant \xi^{2-y} + (2-y)\int_0^{\xi}\frac{dx}{x^{y-1}} = 2\xi^{2-y} \leqslant 2\xi^{\sigma} < \varepsilon$$

niipea, kui $0 < \xi^{\sigma} < \frac{\varepsilon}{2}$, ehk $\xi^{-\sigma} > 2/\varepsilon$, kust $\xi < (\varepsilon/2)^{1/\sigma}$. Seega, kui võtame $\delta = (\varepsilon/2)^{1/\sigma} < 1$, saame, et võrratus (9) kehtib, kui $0 < \xi < \delta$, ning vaadeldav integraal on ühtlaselt koonduv.

Näide 9. Näidata, et funktsioon

$$F(y) = \int_0^1 \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^y}$$

on pidev hulgas $Y = (-7, 3/2]$.

Lahendus. Kui $y \leqslant 0$, siis on meil tegemist Riemanni integraaliga ning F on pidev §1 teoreemi 1 põhjal. Juhul $y > 0$ on integraal päratu, kuid näite 8 põhjal on ta ühtlaselt koonduv ja seega F on pidev teoreemi 1 põhjal. Seega on F pidev hulgas Y.

Näide 10. Diferentseerides parameetri $y \in Y = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ järgi, leida integraal

$$F(y) = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\log(1 - x^2y^2)}{x^2\sqrt{2 - x^2}}dx.$$

Lahendus. Integraalialune funktsioon

$$f(x,y) = \frac{\log(1 - x^2y^2)}{x^2\sqrt{2 - x^2}} = \frac{\ln(1 - x^2y^2)}{x^2\sqrt{2 - x^2}\ \ln 10}$$

on iga $y \in Y$ korral tõkestamata $x = \sqrt{2}$ ümbruses, sest kohal $x = 0$ on kõrvaldatav katkevus, kuna

$$\lim_{x \to 0} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 - x^2y^2)}{x^2\ \sqrt{2}} \underset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-x^2y^2}{x^2\sqrt{2}\ \ln 10} =$$

$$= \frac{-y^2}{\sqrt{2}\ \ln 10}.$$

Seega võib lugeda, et f on pidev ristkülikus $X \times Y$, kus $X = [0, \sqrt{2})$, ning järelikult ka igas ristkülikus $X \times Y_\varepsilon$, kus $Y_\varepsilon = [-1/\sqrt{2}+\varepsilon,\ 1/\sqrt{2} - \varepsilon]$ ja $0 < \varepsilon < 1/\sqrt{2}$.

Funktsiooni f osatuletis, kui $x \neq 0$, on

$$f_y(x,y) = \frac{1}{x^2\sqrt{2 - x^2}\ \ln 10} \ \frac{-2x^2y}{1 - x^2y^2} = \frac{-2y}{(1 - x^2y^2)\sqrt{2 - x^2}\ln 10}$$

ning, kui $x = 0$,

$$f_y(0,y) = -\left(\frac{y^2}{\sqrt{2}\ \ln 10}\right)' = \frac{-2y}{\sqrt{2}\ \ln 10}.$$

Seega f_y on pidev ka sirgel $x = 0$, sest

$$\lim_{x \to 0} f_y(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{-2y}{(1 - x^2y^2)\sqrt{2 - x^2}\ \ln 10} = \frac{-2y}{\sqrt{2}\ \ln 10} =$$

$$= f_y(0,y).$$

Kuna ristkülikus $X \times Y_\varepsilon$ kehtib võrratus

$$\left|f_y(x,y)\right| \leqslant \frac{2|y|}{1 - a^2x^2} \ \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}\ \ln 10} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2|y|}{1 - 2a^2} \ \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}\ln 10} \leqslant \frac{2a}{(1 - 2a^2)\ln 10} \ \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}},$$

kus $a = -\varepsilon + 1/\sqrt{2}$, ja

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} < \infty ,$$

siis Weierstrassi tunnuse põhjal päratu integraal

$$\int_0^{\sqrt{2}} f_y(x,y)dx$$

koondub ühtlaselt lõigus Y_ε ja Leibnizi valemi (11) põhjal saame

$$\frac{dF}{dy} = \int_0^{\sqrt{2}} f_y(x,y)dx = \frac{-2y}{\ln 10} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{(1 - x^2y^2)\sqrt{2 - x^2}} = \quad (x=\sqrt{2}\cos\varphi)$$

$$= -\frac{2y}{\ln 10} \int_{\pi/2}^{0} \frac{-\sqrt{2}\sin\varphi\, d\varphi}{(1-2y^2\cos^2\varphi)\sqrt{2}\sin\varphi} = -\frac{2y}{\ln 10} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1-2y^2\cos^2\varphi} =$$

$$= -\frac{2y}{\ln 10} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi/(\cos^2\varphi)}{1/(\cos^2\varphi)-2y^2} = -\frac{2y}{\ln 10} \int_0^{\infty} \frac{d\tan\varphi}{1-2y^2+\tan^2\varphi} =$$

$$= -\frac{2y}{\ln 10} \int_0^{\infty} \frac{dz}{1-2y^2+z^2} = -\frac{2}{\ln 10} \frac{y}{1-2y^2} \int_0^{\infty} \frac{dz}{1+(z/\sqrt{1-2y^2})^2} =$$

$$= -\frac{2}{\ln 10} \frac{y}{\sqrt{1-2y^2}} \arctan \frac{z}{\sqrt{1-2y^2}} \Big|_0^{\infty} = -\frac{\pi}{\ln 10} \frac{y}{\sqrt{1-2y^2}}.$$

Integreerides nüüd parameetri y järgi, saame

$$F(y) = -\frac{\pi}{\ln 10} \int \frac{ydy}{\sqrt{1-2y^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2\ln 10} \int \frac{d(1-2y^2)}{2\sqrt{1-2y^2}} = \frac{\pi}{2\ln 10}\sqrt{1-2y^2} + C,$$

kus C on mingi konstant, mis tuleb veel määrata. Et lähteintegraali põhjal on

$$F(0) = \int_0^{\sqrt{2}} f(x,0)dx = \int_0^{\sqrt{2}} 0\, dx = 0$$

ja leitud F(y) avaldise põhjal on

$$F(0) = \frac{\pi}{2 \ln 10} + C,$$

siis

$$C = -\frac{\pi}{2 \ln 10}$$

ja järelikult

$$F(y) = \frac{\pi}{2 \ln 10} (\sqrt{1 - 2y^2} - 1).$$

Näide 11. Arvestades, et

$$\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1 + x^2y^2},$$

arvutada integraal

$$J = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Lahendus. Kasutades teoreemi 3 võime integreerimisjärjekorra muuta, saame

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \int_0^1 \frac{dy}{1 + x^2y^2} = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2y^2)\sqrt{1 - x^2}}.$$

Integreerimisjärjekorra muutmine on siin lubatud, sest integraalialune funktsioon

$$f(x,y) = \frac{1}{(1 + x^2y^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

on pidev ristkülikus $[0,1) \times [0,1]$ ja integraal

$$F(y) = \int_0^1 f(x,y)dx$$

koondub ühtlaselt lõigus $[0,1]$, mis nähtub võrratustest

$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} < \infty$$

Weierstrassi tunnuse põhjal. Nüüd saame

$$F(y) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} \underset{(x=\cos\varphi)}{=} -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi\,(1+y^2\cos^2\varphi)} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1+y^2\cos^2\varphi} \underset{(z=\frac{\tan\varphi}{y})}{=} \int_0^\infty \frac{y\cos^2\varphi\, dz}{1+y^2\cos^2\varphi} = \int_0^\infty \frac{y\, dz}{1/\cos^2\varphi + y^2}$$

$$= y\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2y^2+y^2} = \frac{y}{1+y^2}\int_0^\infty \frac{dz}{1+y^2z^2/(1+y^2)} =$$

$$= \frac{y}{1+y^2} \arctan \frac{yz}{\sqrt{1+y^2}} \Bigg|_0^\infty \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \frac{\pi}{2}$$

ja seega

$$J = \int_0^1 F(y)dy = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2} \operatorname{arsh} y \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2})\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Ülesanded.

Leida järgmiste funktsioonide F määramispiirkond Y.

67. $F(y) = \int_0^1 \frac{\cos(x-y\sin x)}{\sqrt{1-x}}\,dx$

68. $F(y) = \int_0^1 \frac{\sin(x-y\cos x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$

69. $F(y) = \int_0^2 \frac{\sin(xy)}{x\sqrt{2-x}}\,dx$

70. $F(y) = \int_0^\pi \frac{\sin(x-y\sin x)}{\sqrt{x^3}}\,dx$

71. $F(y) = \int_0^1 \frac{x^y}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

72. $F(y) = \int_0^1 (1-x)^y \cos\frac{1}{1-x}\,dx$

73. $F(y) = \int_0^1 \ln^y(1+x)\,dx$

74.* $F(y) = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^y x}$

75. $F(y) = \int_0^1 \ln^y \frac{1}{1-x}\, dx$

76. $F(y) = \int_{-1}^{1} \ln\left|\frac{1}{1-x}\right|^y dx$

77. $F(y) = \int_0^{\pi/2} \tan^y x\, dx$

78. $F(y) = \int_0^{\pi/2} \cos^{2+y} x \cos(xy)\, dx$

79. $F(y) = \int_0^{\pi/2} \sin^{1-y} x \sin(xy)\, dx$

80. $F(y) = \int_0^1 \frac{x^y \sin(y \ln x)}{\ln x}\, dx$

81. $F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-y^2\sin^2 x}}\, dx$

82*. Näidata, et päratu integraal

$$F(y) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^y}\, dx$$

koondub vahemikus $y < 2$, koondub ühtlaselt piirkonnas $y \leq c < 2$ ja ei koondu ühtlaselt vahemikus $y < 2$.

83*. Näidata, et päratu integraal

$$F(y) = \int_0^1 \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx$$

koondub vahemikus (0,1), kuid ei koondu seal ühtlaselt.

Järgmiste päratute integraalide jaoks leida piirkond Y, kus nad koonduvad absoluutselt ja ühtlaselt.

84. $\int_0^1 \frac{\arctan(x-y)}{\sqrt{1-x}}\, dx$

85. $\int_0^1 \frac{\cos(x-y \sin x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

86. $F(y) = \int_0^1 \ln x \cos(xy)\, dx$

87. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+\operatorname{sgn} y)}$

88. $\int_0^{\pi} \frac{\sin(xy)}{x\sqrt{\pi-x}}\, dx$

89. $\int_1^2 \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\, dx$

90. $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{x^{\sin y}dx}{\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)^2}}$ 91. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin(y\tan x)}{\sqrt{\sin 2x}}dx$

92. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^y)}$

Näidata järgmiste päratute integraalide absoluutset ja ühtlast koonduvust piirkonnas Y.

93. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^y}{\sqrt{4-x^2}}\,dx,$ $Y = (-\ln 2,\ 8)$

94. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x-y}}\,dx,$ $Y = [0,1]$

95. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\cos(x+y)}{\sqrt[3]{x-y}}\,dx,$ $Y = [1,2]$

96. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sin\frac{1}{x}\ \frac{dx}{x^y},$ $Y = (0,\ \frac{7}{8})$

97. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{(1-x)^y}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$ $Y = (-\frac{3}{7},\infty)$

98. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\arccos(xy)}{\sqrt{x-x^{2+y}}}\,dx,$ $Y = [0,1]$

99. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{[x(1-x)]^y}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$ $Y = (-\frac{1}{4},\infty)$

100. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\tan x\,dx}{\sqrt{x^y(1-x)}},$ $Y = (-\infty,\sqrt{\pi}\ )$

101.* $\displaystyle\int_{0}^{1} (1-x)^{y-1}\ln^2 x\,dx,$ $Y = (\frac{1}{10},\infty)$

102.* $\int_0^1 (-x \ln x)^{y-1} dx$, $Y = (\frac{1}{10}, \infty)$

Näidata järgmiste päratute integraalide ühtlast koonduvust piirkonnas Y.

103. $\int_0^1 \cos \frac{1}{x} \frac{dx}{x^y}$, $Y = [0, e - 1]$

104. $\int_0^{\pi} x^y(\pi-x)^y \sin x \, dx$, $Y = (-\sqrt{\pi}, e/\pi)$

105.* $\int_0^1 (1-x^2)^y \cos \frac{1}{1-x} dx$, $Y = [-\sqrt{\pi}, \infty)$

106. $\int_0^1 \ln^y \frac{1}{1-x} dx$, $Y = (-\ln 2, \ln 30)$

107.* $\int_0^1 \frac{\arctan(x+y)}{\sqrt{1-x^y}} dx$, $Y = (\tan \frac{\pi}{180}, \infty)$

108.* $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^y)}{x} dx$, $Y = (\ln 2, \infty)$

109. $\int_0^2 \frac{1}{(2-x)^y} \sin \frac{1}{x-2} dx$, $Y = (0, \sqrt{\pi})$

Näidata järgmiste funktsioonide pidevust.

110. $F(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arccot}(x-y)dx}{\sqrt{1-x}}$

111. $F(y) = \int_0^3 \frac{\sin(xy)}{x\sqrt{3-x}} dx$

112. $F(y) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(2x+1+\operatorname{sgn} y)}$

113. $\begin{cases} F(y) = \int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,\frac{dx}{x^{2+y}} \\ Y = (-\infty,-4) \end{cases}$

116.* $F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(xy)dx}{\sqrt{1-y^2\sin^2 x}}$

114.* $\begin{cases} F(y) = \int_0^{\pi} (-\ln\sin x)^y dx \\ Y = (-\ln 2, \ln\pi) \end{cases}$

117. $F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt[3]{1-y^2\sin^2 x}}$

115. $F(y) = \int_0^1 (\cos xy)\ln x\,dx$

118. $F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(xy)dx}{\sqrt{1-y\sin^2 x}}$

Leida järgmised piirväärtused.

119. $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-y\sin^2 x}}$

122. $\lim\limits_{y\to 1} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2-y^2-\cos\pi y}}$

120. $\lim\limits_{y\to 1} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{y-x+\sin\pi y}}$

123. $\lim\limits_{y\to 1} \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sqrt{1-y\sin^2 x}}$

121. $\lim\limits_{y\to 1} \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\sqrt{y^2-x^2-\sin\pi y}}$

Diferentseerides parameetri y järgi, leida integraalid.

124. $F(y) = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\ln(1-x^2y)}{x^2\sqrt{2-x^2}}\,dx, \quad 0\leqslant y< 1/2$

125. $F(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2y^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad y^2\leqslant 1$

126. $F(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2y^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad y^2\leqslant 1$

127. $F(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2y)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad 0\leqslant y< 1$

128. $F(y) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^2y^2)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad |y| < 1$

129. $F(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(1+y\sin^2 x)dx, \quad y \geqslant -1$

130. $F(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(1+y\cos^2 x)dx, \quad y \geqslant -1$

131. $F(y) = \int\limits_0^1 \frac{\arctan(xy)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$

132. $F(y,z) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(y+z\tan^2 x)dx, \quad z > y > 0$

133.* $F(y,z) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(y^2+z^2\cot^2 x)dx, \quad z \neq 0$

Leida $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \frac{\exp\tan y}{\cos^2 y} F(y)dy$, kui

134. $F(y) = \int\limits_0^{\pi/4} \cos(\sin x \cdot \tan y)dx$

135. $F(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \cos(\sin x \cdot \tan y)\,dx$

Leida $\int\limits_0^1 F(y)dy$ ja $\int\limits_0^2 F(y)dy$, kui

136. $F(y) = \int\limits_0^1 (-\ln x)^y \ln(-\ln x)dx$

137. $F(y) = \int\limits_0^1 (-\ln x)^{2y} \ln(-\ln x)dx$

138. $F(y) = \int_0^1 (-\ln x)^{y+1} \ln(-\ln x)\, dx$

139. Arvestades, et $\int_0^{\pi} \ln \sin x\, dx = -\pi \ln 2$, leida

$$\int_1^2 F(y)dy, \text{ kui } F(y) = \int_0^{\pi} \ln^{y-1} \frac{1}{\sin x} \cdot \ln \ln \frac{1}{\sin x}\, dx .$$

Leida $\int_0^1 F(y)dy$, kui F on elliptiline integraal:

140.* $F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\, dx}{\sqrt{1-y^2 \sin^2 x}}$

141. $F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x\, dx}{x\sqrt{1-y^2 \sin^2 x}}$

142. $F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{y\, dx}{\sqrt{1-y^2 \sin^2 x}}$

143. $F(y) = \int_0^1 \frac{x^2 y\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2 y)}}$

144. $F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-y \sin^2 x}}$

145. $F(y) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2 y}}$

146.* Tõestada, et $0 < y < 1$ korral

$$\int_0^1 \frac{x^{y-1}}{1+x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+y} .$$

§ 3. Lõpmatute rajadega päratud parameetrist sõltuvad integraalid

Olgu kahe muutuja x ja y funktsioon f määratud hulgas $X \times Y$, kus $X = [a, \infty)$ ja $Y = [c,d]$. Kui iga $y \in Y$ korral eksisteerib päratu integraal

$$F(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx, \tag{14}$$

siis see integraal kujutab funktsiooni F hulgas Y, mida nimetatakse parameetrist y sõltuvaks päratuks integraaliks.

Analoogiliselt defineeritakse parameetrist y sõltuv integraal

$$\int_{-\infty}^{a} f(x,y)dx. \tag{15}$$

Mõlema lõpmatu rajaga parameetrist y sõltuv integraal defineeritakse integraalide (14) ja (15) summana.

Päratut integraali (14) nimetatakse ühtlaselt koonduvaks hulgas Y, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub selline arv $N = N(\varepsilon)$, et

$$\left| \int_A^\infty f(x,y)dx \right| < \varepsilon \tag{16}$$

niipea, kui $A > N$ sõltumata parameetrist $y \in Y$.

Weierstrassi tunnus. Integraal (14) koondub ühtlaselt ja absoluutselt piirkonnas Y, kui leidub muutuja x funktsioon g, selline et kehtib võrratus (10) iga $x \geq x_0 \geq a$ puhul sõltumata muutujast $y \in Y$ ning

$$\int_{x_0}^\infty g(x)dx < \infty.$$

Funktsiooni g nimetatakse funktsiooni f <u>majorandiks</u> hulgal Y.

Võrdusega (14) määratud funktsioonil F on järgmised omadused.

<u>Teoreem 1</u>. Kui funktsioon f on pidev hulgas $X \times Y$ ja integraal (14) koondub ühtlaselt lõigus Y, siis funktsioon F on pidev lõigus Y.

<u>Teoreem 2</u>. Kui osatuletis f_y on pidev hulgas $X \times Y$, integraal (14) koondub lõigus Y ja päratu integraal

$$\int_a^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx$$

koondub ühtlaselt lõigus Y, siis funktsioon F on diferentseeruv lõigus Y ja kehtib <u>Leibnizi valem</u>

$$\frac{dF}{dy} = \int_a^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx. \qquad (17)$$

<u>Teoreem 3</u>. Kui funktsioon f on pidev hulgas $X \times Y$ ja integraal (14) koondub ühtlaselt lõigus Y, siis

$$\int_c^d F(y)dy = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Integraali (14) võib vaadelda ka piirkonnas $Y_1 = [c,\infty)$, kus jääb kehtima ka Weierstrassi tunnus. Funktsiooni F integreerimiseks sel korral kehtib järgmine

<u>Teoreem 4</u>. Kui funktsioon f on pidev ja $f(x,y) \geqslant 0$ hulgas $X \times Y_1$, integraal (14) koondub ühtlaselt igas lõigus $[c,d] \subset Y_1$ ja päratu integraal

$$G(x) = \int_c^{\infty} f(x,y)dy \qquad (18)$$

koondub ühtlaselt igas lõigus $[a,b]\subset X$, siis kehtib valem

$$\int_c^\infty F(y)dy = \int_a^\infty G(x)\,dx, \tag{19}$$

kui üks võrduse pooltest koondub.

Võrduste (14) ja (18) tõttu omandab valem (19) kuju

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)dy.$$

Näide 12. Näidata, et integraal

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1 + x^{e+y}}$$

on ühtlaselt koonduv hulgas $Y = [0,\infty)$.

Lahendus. Et integraalialune funktsioon on pidev hulgas $[0,\infty)\times Y$ ja iga $x\geqslant 1$ ja $y\in Y$ puhul on

$$0\leqslant \frac{x}{1 + x^{e+y}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + x^{e+y-1}} \leqslant \frac{1}{x^{e-1}}$$

ning $e - 1 > 1$ tõttu on

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1 + x^{e-1}} < \infty,$$

siis Weierstrassi tunnuse põhjal on vaadeldav integraal ühtlaselt koonduv hulgas Y.

Näide 13. Näidata, et integraal

$$F(y,z) = \int_0^\infty e^{-xy}\,\frac{\sin xz}{x}\,dx$$

on ühtlaselt koonduv hulgas Y iga $z\in Z$ korral, kus $Y=[0,\infty)$ ja $Z = (-\infty,\infty)$, ja hulgas Z iga $y>0$ korral.

Lahendus. Olgu

$$v(x) = \int e^{-xy}\sin xz\, dx.$$

Kaks korda ositi integreerides saame võrrandi $v(x)$ suhtes, kust

$$v(x) = -\frac{e^{-xy}}{y^2+z^2}(y\sin xz + z\cos xz) + C,$$

kus $C = \text{const}$. Seega on $v(x) = O(1)$, s.t. leidub konstant $M>0$, et $|v(x)| \leq M$ iga $x, y \in Y$ (ja $z \in Z$) korral.

Tähistame nüüd

$$F_A(y,z) = \int_A^\infty e^{-xy}\frac{\sin xz}{x}\, dx.$$

Integreerides ositi iga $A \geq 0$ korral, saame

$$F_A(y,z) = \int_A^\infty \frac{1}{x}\, dv = \frac{v(x)}{x}\Big|_A^\infty + \int_A^\infty \frac{v(x)}{x^2}\, dx,$$

kust iga arvu $\varepsilon > 0$ korral saame

$$|F_A(y,z)| \leq \frac{v(A)}{A} + \int_A^\infty \frac{|v(x)|}{x^2}dx \leq \frac{M}{A} + M\int_A^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{2M}{A} < \varepsilon$$

niipea, kui $A > N(\varepsilon) = 2M/\varepsilon$. Kuna $N(\varepsilon)$ ei sõltu muutujast $y \in Y$, siis ühtlase koonduvuse definitsiooni põhjal on päratu integraal F ühtlaselt koonduv hulgas Y. Sama tõestus näitab, et F on ühtlaselt koonduv hulgas Z iga $y > 0$ korral.

Näide 14. Kasutades Leibnizi valemit (17), arvutada integraal

$$F(y,z) = \int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin xz}{x}\, dx,$$

kui $y > 0$ ja $z \in Z = (-\infty, \infty)$.

Lahendus. Integraalialuse funktsiooni loeme pidevaks, sest punktis $x = 0$ on tal kõrvaldatav katkevus. Osatuletis f_y on ka pidev, sest

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(e^{-xy}\frac{\sin xz}{x}) = -e^{-xy}\sin xz.$$

Viimane võrdus f_y pidevuse tõttu kehtib ka juhul $x = 0$ (vt. teoreemi tuletise piirväärtusest).

Kuna iga $y > 0$ korral on

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant e^{-xy} \text{ ja } \int_0^\infty e^{-xy}dx < \infty,$$

siis päratu integraal

$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx = -\int_0^\infty e^{-xy}\sin xz\,dx$$

koondub ühtlaselt hulgas Z iga $y > 0$ korral. Seega teoreemi 2 põhjal on iga $y > 0$ korral

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\int_0^\infty e^{-xy}\sin xz\,dx = -v(x)\Big|_0^\infty = -\frac{z}{y^2 + z^2}.$$

Integreerides $y > 0$ järgi, saame

$$F(y,z) = \int \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = -\frac{1}{z}\int \frac{dy}{(\frac{y}{z})^2 + 1} = \operatorname{arccot}\frac{y}{z} + C(z) =$$

$$= \arctan\frac{z}{y} + C(z).$$

Et $F(y,0) = 0$ ja teiselt poolt ka

$$0 = \arctan 0 + C(z), \text{ siis } C(z) = 0.$$

Seega juhul $y > 0$ on

$$F(y,z) = \arctan\frac{z}{y}.$$

Jääb leida veel $F(0,z)$.

Et näite 13 tõttu on F ühtlaselt koonduv hulgas $Y =$

$= [0,\infty)$ iga z korral, siis on ta pidev ka punktis $y = 0$. Seepärast teoreemi 1 põhjal võib üle minna piirile $y \to 0+$ integraali märgi all ja saame

$$F(0,z) = \int_0^\infty \frac{\sin xz}{x}\,dx = \lim_{y\to 0+} \arctan\frac{z}{y} = \begin{cases} \pi/2, & \text{kui } z>0, \\ 0, & \text{kui } z=0, \\ -\pi/2, & \text{kui } z<0. \end{cases}$$

Sama ülesande võib lahendada ka diferentseerides muutuja z järgi. Nimelt iga $y>0$ korral integraal

$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial z}\,dx = \int_0^\infty e^{-xy}\cos xz\,dx$$

on ühtlaselt koonduv hulgas Z ja osatuletis $\frac{\partial f}{\partial z}$ on pidev hulgas Z, siis Leibnizi valemi järgi

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \int_0^\infty e^{-xy}\cos xz\,dx.$$

Kaks korda ositi integreerides saame $y>0$ korral

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{z}\,e^{-xy}\sin xz\Big|_0^\infty + \frac{y}{z}\int_0^\infty e^{-xy}\sin xz\,dx =$$

$$= \frac{y}{z}\int_0^\infty e^{-xy}\sin xz\,dx = \frac{y}{y^2+z^2},$$

kust, integreerides z järgi, saamegi

$$F(y,z) = \int \frac{y\,dz}{y^2+z^2} = \frac{1}{y}\int \frac{dz}{1+(\frac{z}{y})^2} = \arctan\frac{z}{y} + C_1(y).$$

<u>Näide 15</u>. Arvutada integraal

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx.$$

Lahendus. Piisab vaadelda juhtu $b>a>0$. Arvestame, et juhul $y>0$ on (vt. lk. 42)

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Viimane integraal on ühtlaselt koonduv hulgas $Y = [y_0, \infty)$, kus $y_0 > 0$. Tõepoolest, kohal $x = 0$ on tal kõrvaldatav katkevus ja iga $\varepsilon > 0$ korral kehtib võrratus (16), sest

$$\left|\int_A^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx\right| = \left|-\frac{\cos xy}{xy}\Big|_A^\infty - \frac{1}{y}\int_A^\infty \frac{\cos xy}{x^2}\,dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{Ay} + \frac{1}{y}\int_A^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{Ay} \leq \frac{2}{Ay_0} < \varepsilon,$$

kui $A > \frac{2}{\varepsilon y_0}$, kogu hulgas Y. Et aga

$$\frac{\cos ax - \cos bx}{x} = \int_a^b \sin xy\,dy,$$

siis juhul $b>a>0$ on teoreemi 3 põhjal

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{dx}{x}\int_a^b \sin xy\,dy =$$

$$= \int_a^b dy \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx = \int_a^b \frac{\pi}{2}dy =$$

$$= \frac{\pi}{2}(b-a).$$

Ülesanded.

Näidata järgmiste integraalide absoluutset ja ühtlast koonduvust hulgas Y, kui $a>0$ ning $-\infty < c < d < \infty$.

147. $\int\limits_{2}^{\infty} x^y e^{-2x} dx,$ $\quad Y = [c,d]$

148.* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} dx,$ $\quad Y = [c,d]$

149. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-xy} \sin x \, dx,$ $\quad Y = [a,\infty)$

150. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2 y} dx,$ $\quad Y = [a,\infty)$

151. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-xy} x^2 \cos x \, dx,$ $\quad Y = [a,\infty)$

152. $\int\limits_{1}^{\infty} e^{-xy} \frac{\cos(x+y)}{x^3} dx,$ $\quad Y = [0,\infty)$

153. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{1+(x+y)^2},$ $\quad Y = [0,\infty)$

154. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx,$ $\quad Y = (-\infty,\infty)$

155. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1-e^{-x^2 y}}{x^2} dx,$ $\quad Y = [0,\infty)$

156. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-xy} \frac{1-\cos xy}{x} dx,$ $\quad Y = [a,\infty)$

157. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-xy} \frac{\cos x-\cos xy}{x} dx,$ $\quad Y = [a,\infty)$

158. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx,$ $\quad Y = (0,\infty)$

159. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xy}{1+x^2}\,dx,$ $\quad Y = (-\infty, \infty)$

160. $\int\limits_{-2}^{\infty} e^{-x}\frac{\cos 2x - \cos xy}{x}\,dx,$ $Y = (-\infty, \infty)$

161. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\frac{\sin xy - \sin x}{\sqrt{x}\arctan x}\,dx,$ $\quad Y = (-\infty, \infty)$

162.* $G(x) = \int\limits_{0}^{\infty} x^{a-1}e^{-(1+x)y}y^{a+b-1}\,dy,$ $X = [0, \infty),$ $a \geqslant 1,$ $b \geqslant 0$

163.* $F(y) = \int\limits_{0}^{\infty} x^{a-1}e^{-(1+x)y}y^{a+b-1}\,dx,$ $Y = [0, \infty),$ $a \geqslant 1,$ $b > 1$

Näidata järgmiste integraalide ühtlast koonduvust hulgas Y, kui $a > 0$.

164.* $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^y}\,dx,$ $\quad Y = [0, \infty)$

165. $\int\limits_{1}^{\infty} e^{-xy}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx,$ $Y = [0, \infty)$

166. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-xy}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx,$ $Y = [0, \infty)$

167.* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{|x|}}\,dx,$ $\quad Y = [a, \infty)$

168. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin xy}{1+x^2}\,dx,$ $\quad Y = [a, \infty)$

169. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\cos x^2}{1+x^y}\,dx,$ $\quad Y = (-1, \infty)$

170*. Näidata, et päratu integraal

$$\int_0^\infty \frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\,dx$$

koondub mitteühtlaselt vahemikus $Y = (0,\infty)$.

Näidata järgmiste funktsioonide F pidevust hulgas Y, kui $a > 0$.

171. $F(y) = \int_1^\infty \frac{x\,dx}{2+x^{y+2}}$, $\quad Y = [a,\infty)$

172. $F(y) = \int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$, $Y = [0,\infty)$

173. $F(y) = \int_1^\infty \frac{x\cos(xy)}{1+x^2}\,dx$, $Y = [a,\infty)$

174. $F(y) = \int_0^\infty \frac{x\sin(x+y)}{1+x^2}\,dx$, $Y = (-\infty,\infty)$

175*. $F(y) = \int_0^\infty e^{-(x-y)^2}dx$, $\quad Y = (-\infty,\infty)$

Leida järgmised piirväärtused.

176. $\lim\limits_{y\to 0} \int_{\ln 3}^\infty x^y e^{-2x}dx$

177. $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^\infty \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2}\,dx$

178. $\lim\limits_{y\to -1} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+y^2+\sin\pi y}$

179*. $\lim\limits_{y\to 2} \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx$

180. $\lim\limits_{y\to 4-} \int_2^\infty \frac{\cos x}{x^2}\operatorname{arccot}\frac{x}{4-y}\,dx$

181. $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^\infty e^{-x}\operatorname{ch} xy\,dx$

182*. Tõestada, et $0<y<1$ korral

$$\int_1^\infty \frac{x^{y-1}dx}{1+x} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{n+1-y}.$$

183*. Tõestada, et $0<y<1$ korral

$$\int_0^\infty \frac{x^{y-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{y} + 2y\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2-y^2}.$$

Diferentseerides parameetri y järgi, arvutada järgmised integraalid.

184. $F(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}-e^{x^2y}}{x}\,dx,\ y>0$

185. $F(y) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-xy}}{xe^x}\,dx,\quad y>-1$

186. $F(y) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-x^2y}}{x\exp x^2}\,dx,\quad y>-1$

187. $F(y) = \int_0^\infty \frac{1-\cos xy}{x^2}\,dx,\ y>0$

188. $F(y) = \int_0^\infty \frac{\arctan xy}{x(1+x^2)}\,dx$

189. $F(y) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin xy}{x}\right)^2 dx,$

190. $F(y,z) = \int_0^\infty \frac{e^{-xy}-e^{-xz}}{x}\,dx,\quad y>0,\ z>0$

191. $F(y,z) = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2y}-e^{-x^2z}}{x}\,dx,\ y>0,\ z>0$

192. $F(y,z) = \int_0^\infty \frac{\cos xy - \cos xz}{x}\,dx, \qquad y>0,\ z>0$

193. $F(y,z) = \int_0^\infty \frac{\arctan xy - \arctan xz}{x}\,dx, \quad y>0,\ z>0$

194. $F(y,z) = \int_0^\infty e^{-xy}\,\frac{1-\cos xz}{x}\,dx, \qquad y>0,\ z>0$

195. $F(y,z) = \int_0^\infty e^{-x}\,\frac{\sin xy - \sin xz}{x}\,dx$

196. $F(y,z) = \int_0^\infty e^{-x}\,\frac{\cos xy - \cos xz}{x}\,dx$

197. $F(y,z) = \int_0^\infty \frac{e^{-xy}-e^{-xz}}{x}\sin x\,dx, \quad y>0,\ z>0$

198. $F(y,z) = \int_0^\infty \frac{e^{-xy}-e^{-xz}}{x}\cos x\,dx, \quad y>0,\ z>0$

199. Arvestades, et iga $y>0$ korral on

$$\int_0^\infty e^{-xy}dx = \frac{1}{y},$$

leida integraalid

$$\int_0^\infty e^{-xy}x^{n-1}\,dx \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

200. Kasutades ülesande 192 vastust, arvutada integraal

$$F(y,z) = \int_0^\infty \frac{\sin xy\,\sin xz}{x}\,dx, \quad z>y>0.$$

201. Näidata, et funktsioon

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \frac{dx}{1+x^2}$$

rahuldab diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{d^2F}{dy^2} + F = \frac{1}{y}.$$

Arvutada $\int_0^\infty e^{-x}F(x)dx$, kui

202. $F(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin y)dy$ 203. $F(x) = \int_0^{\pi} \cos(x \sin y)dy$

Arvutada $\int_0^1 F(y)dy$ ja $\int_0^2 F(y)dy$, kui

204. $F(y) = \int_0^\infty e^{-x}x^y \ln x \, dx$

205. $F(y) = \int_0^\infty e^{-x}x^{2y} \ln x \, dx$

206. Arvestades, et

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}\, dy,$$

arvutada $b > a > 0$ korral integraal

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

207*. Arvestades, et juhul $y > 0$ on

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

arvutada integraal

$$\int_0^\infty x^{-3}\left[f(x,b) - f(x,a)\right]dx,$$

kus

$$f(x,y) = \sin xy - xy \cos xy$$

ja $b > a > 0$.

208*. Tõestada (teoreemi 4 kasutamata) järgmine teoreem. Kui funktsioon f on pidev ja $f(x,y) \geqslant 0$ hulgas $X \times Y_1$, kus $X = [a,\infty)$ ja $Y_1 = [c,\infty)$, päratud integraalid (14) ja (18) koonduvad ühtlaselt vastavalt hulkades Y_1 ja X, siis kehtib võrdus (19), kui üks võrduse pooltest koondub.

209*. Arvutada Euler-Poisson'i integraal

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx,$$

lähtudes seosest

$$J^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty xe^{-x^2y^2}\, dy.$$

Kasutades ülesande 209 vastust, leida järgmised integraalid Leibnizi valemi abil, diferentseerides parameetrite $y > 0$ ja $z > 0$ järgi.

210*. $F(y,z) = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2y} - \cos xz}{x^2}\, dx$

211*. $F(y,z) = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2y} - e^{-x^2z}}{x^2}\, dx$

212. Näidata, et integraal

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos xy\, dx$$

rahuldab diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dF}{dy} = -\frac{1}{2}yF$$

ja leida F selle diferentsiaalvõrrandi lahendamise teel.

213. Näidata, et Laplace integraal

$$F(y) = \int_0^{\infty} \exp(-x^2 - \frac{y^2}{x^2})dx$$

rahuldab diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dF}{dy} = -2F$$

ja leida F selle võrrandi lahendamise teel.

214.* Tõestada, et avaldises

$$\int_0^{\infty} x^{a-1}\,dx \int_0^{\infty} e^{-(1+x)y}\,y^{a+b-1}\,dy$$

tohib muuta integreerimisjärjekorda, kui a,b > 1.

215.* Näidata, et tõenäosusintegraali

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} \exp(-y^2)\,dy$$

korral kehtib võrdus

$$\int_0^{\infty} [1 - \Phi(x)]\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

§ 4. Euleri integraalid

Euleri esimest liiki integraaliks ehk beetafunktsiooniks nimetatakse funktsiooni B, mis iga $x>0$ ja $y>0$

korral on määratud valemiga

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1}\, dt.$$

Euleri teist liiki integraaliks ehk gammafunktsiooniks nimetatakse funktsiooni Γ, mis iga $x>0$ korral on määratud valemiga

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Beetafunktsioon on sümmeetriline muutujate x ja y suhtes, s.o. iga $x,y>0$ korral

$$B(x,y) = B(y,x).$$

Kehtivad järgmised taandamisvalemid:

$$B(x,y) = \frac{x - 1}{x + y - 1} B(x - 1,y), \text{ kui } x>1 \text{ ja } y>0, \tag{20}$$

$$\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x), \text{ kui } x>0. \tag{21}$$

Funktsioonide B ja Γ vahel iga $x,y>0$ korral kehtib seos

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}. \tag{22}$$

Kui $0<x<1$, siis kehtivad täiendusvalemid

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \tag{23}$$

$$B(x,1 - x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \tag{24}$$

Kehtib Euler-Gaussi valem

$$\Gamma(x) = \lim_{n} \frac{n^x\, n!}{x(x + 1)\ldots(x + n)}. \tag{25}$$

Ülesanded.

216. Tõestada, et iga $x,y > 0$ korral

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}dt}{(1+t)^{x+y}}. \tag{26}$$

217. Tõestada, et iga $x > 0$ korral

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1}dt. \tag{27}$$

218*. Näidata, et iga $n = 1,2,\ldots$ korral kehtivad valemid

$$B(x,n) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}, \tag{28}$$

ja

$$\Gamma(n+1) = n!, \tag{29}$$

kus loetakse $0! = \Gamma(1) = 1$.

Näide 16. Arvutada integraal

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cdot \cos^4 x \, dx.$$

Lahendus. Tehes muutuja vahetuse $t = \sin^2 x$, saame $\cos x = \sqrt{1-t}$, $dt = 2\sin x \cdot \cos x \, dx$. Valemite (22), (29), (21) ja (23) põhjal

$$J = \int_0^1 t^3(1-t)^2 \frac{dt}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{2}\int_0^1 t^3(1-t)^2 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{5/2}(1-t)^{3/2}dt = \frac{1}{2}B(\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{2}) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(7/2)\Gamma(5/2)}{\Gamma(6)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5!}\,\Gamma^2(\tfrac{5}{2}) = \frac{1}{4\cdot 4!}\left[\frac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2})\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{4\cdot 24}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})\right]^2 = \frac{1}{4\cdot 24}\left(\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\right)^2 = \frac{9\pi}{4\cdot 24\cdot 16} = \frac{3\pi}{4\cdot 8\cdot 16} = \frac{3\pi}{512}.$$

Näide 17. Arvutada integraal

$$J = \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^3}.$$

Lahendus. Tehes muutuja vahetuse $x^3 = t$, saame valemite (26) ja (24) põhjal

$$J = \int_0^\infty \frac{1}{1 + t} \frac{dt}{3x^2} = \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{t^{-2/3}dt}{1 + t} = \frac{1}{3} B(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}/2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Ülesanded.

219. Näidata, et Γ on pidev ja igat järku pidevalt diferentseeruv funktsioon hulgas $(0, \infty)$.

220. Näidata, et B on pidev ja tema igat järku osatuletised on pidevad hulgas $(0, \infty) \times (0, \infty)$.

Arvutada järgmised integraalid.

221. $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$

222. $\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1 + x)^2}\, dx$

223. $\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{1 + x^4}$

224. $\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + x}\, dx$

225. $\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^4}$

226. $\int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

227. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x \cos^9 x\, dx$

228. $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cos^{10} x\, dx$

229. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\, dx$

234. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{1 + x^2}$

230. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$

235. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}\, dx}{1 + x^5}$

231. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$

236. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^4\, dx}{(1 + x)^6}$

232. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{1 - x^4}}$

237. $\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{x}{1 + x}\right)^3 \frac{dx}{\sqrt{1 + x}}$

233. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[6]{1 - x^6}}$

238*. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3 - \cos x}}$

239*. Diferentseerides Leibnizi valemi põhjal võrduse (24) mõlemat poolt, leida integraalid

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{t^{x-1} \ln t}{1 + t}\, dt \text{ ja } \int\limits_0^{\infty} \frac{t^{x-1} \ln^2 t}{1 + t}\, dt,$$

kui $0 < x < 1$.

Kasutades eelmise ülesande 239 vastuseid, arvutada integraalid.

240. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1 + x)\sqrt{x}}\, dx$

242. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln^2 x\, dx}{\sqrt{x}(1 + x)}$

241. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x\, dx}{(1 + x)\sqrt[3]{x}}$

243*. Arendades funktsiooni

$$f(x) = \cos xy,$$

kus $0 < y < 1$, Fourier' ritta ja kasutades ülesande 183 reaks arendust, tõestada täiendusvalem (24).

244*. Täiendusvalemi (23) abil leida integraal

$$\int_0^{\infty} \exp(-x^2)dx.$$

245. Tõestada, et $a > 0$ ja $x > 0$ korral

$$\frac{1}{x^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-xy} y^{a-1} dy. \qquad (30)$$

Kasutades võrdust (30), arvutada järgmised integraalid.

246* $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

247. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$

248. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^3} dx$

249*. $\int_0^{\infty} \sin x^2 \, dx$

250. $\int_0^{\infty} \cos x^2 \, dx$

251*. Kasutades valemit (30) ja võrratust $e^y \geq 1 + y$, tõestada, et $x > 0$ ja $a > 0$ puhul on

$$(a - 1)^x B(x,a) \leq \Gamma(x) \leq (a + x)^x B(x,a).$$

252*. Kasutades valemit (28) ja eelmise ülesande 251 võrratust, tõestada Euler-Gaussi valem (25).

253. Euler-Gaussi valemi (25) ja taandamisvalemi (21) abil tõestada J.Wallis'i valem

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{1}{2n + 1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n - 1)!!}\right]^2.$$

254. Valemi (25) ja taandamisvalemi (21) abil näidata, et Cesàro arvude

$$A_n^x = \frac{(n + x)(n + x - 1)\ldots(1 + x)}{n!}$$

jaoks kehtib asümptootiline valem

$$A_n^x \sim \frac{n^x}{\Gamma(x+1)},$$

kui $x > -1$.

§ 5. Fourier' integraal ja Fourier' teisendus

Olgu funktsioon f määratud piirkonnas $(-\infty, \infty)$ ning integreeruv igas lõigus $[-c, c]$.

Päratu integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{31}$$

Cauchy' peaväärtuseks nimetatakse piirväärtust

$$\lim_{z\to\infty} \int_{-z}^{z} f(x)dx$$

ja kirjutatakse

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{z\to\infty} \int_{-z}^{z} f(x)dx.$$

Kui eksisteerib päratu integraal (31), siis kehtib võrdus

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

s.t., et siis Cauchy' peaväärtus võrdub integraaliga (31).

Iga paarisfunktsiooni f korral kehtib võrdus

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

ja iga paaritu funktsiooni f korral on

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0.$$

Käesolevas paragrahvis tuleb kõikides valemites, kus esineb integraal (31), võtta tema Cauchy' peaväärtus.

Integraali

$$\int_0^{\infty} \left[a(y)\cos yx + b(y)\sin yx\right] dy \tag{32}$$

nimetatakse <u>Fourier'</u> <u>integraaliks</u> funktsioonile f ja kirjutatakse

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} \left[a(y)\cos yx + b(y)\sin yx\right] dy, \tag{33}$$

kui

$$\begin{cases} a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos yx\, dx \\ b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin yx\, dx. \end{cases} \tag{34}$$

Avaldises (33) märgi $\sim$ asemele kirjutatakse võrdusmärk = vaid siis, kui on teada, et integraal (32) koondub väärtuseks f(x). Avaldistest (33) ja (34) on ka näha, et Fourier' integraalil on suur analoogia Fourier' reaga, erinedes viimasest selle poolest, et summa on asendatud integraaliga ja funktsiooni f vaadeldakse piirkonnas $(-\infty,\infty)$.

Kuna cos yx cos yt + sin yx sin yt = cos y(x - t), siis valemite (34) abil võib Fourier integraalile (33) anda kuju

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos y(x - t)dt. \tag{35}$$

Et aga (Euleri valemi põhjal)

$$2 \cos y(x - t) = e^{iy(x-t)} + e^{-iy(x-t)},$$

siis võime integraalile (35) anda omakorda kuju

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iy(x-t)} dt. \tag{36}$$

Avaldist (36) nimetatakse <u>Fourier' integraaliks komplekskujus</u> funktsioonile f.

<u>Erikujulised Fourier' integraalid</u>. Kui f on paarisfunktsioon, siis b(y) = 0 ja valem (33) esitub kujul

$$f(x) \sim \int_{0}^{\infty} a(y) \cos xy \, dy, \tag{37}$$

kus

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos yx \, dx. \tag{38}$$

Valemit (37) nimetatakse <u>Fourier' koosinusintegraaliks</u> funktsioonile f.

Kui f on paaritu funktsioon, siis a(y) = 0 ja valem (33) esitub kujul

$$f(x) \sim \int_{0}^{\infty} b(y) \sin yx \, dx, \tag{39}$$

kus

$$b(y) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(x) \sin yx \, dx. \tag{40}$$

Valemit (39) nimetatakse <u>Fourier' siinusintegraaliks</u> funktsioonile f.

<u>Fourier integraali koonduvustunnus</u>. Kui funktsioon f on absoluutselt integreeruv piirkonnas $(-\infty, \infty)$, siis igas punktis x, kus on olemas lõplikud ühepoolsed tuletised $f'(x+)$ ja $f'(x-)$, koondub funktsiooni f Fourier' integraal väärtuseks

$$S(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Erijuhul, kui funktsioon f on pidev punktis x, siis selles punktis

$$S(x) = f(x).$$

Fourier' teisendus. Eeldame, et funktsioon f rahuldab Fourier' integraali koonduvustunnuse eeldusi, siis (36) asemele võime kirjutada võrduse

$$S(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iy(x-t)}dt,$$

kus $S(x) = f(x)$ igas punktis x, kus funktsioon f on pidev.

Tähistades

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-iyx}dx\,, \qquad (41)$$

võime integraali (36) esitada kujul

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\,e^{iyx}dy. \qquad (42)$$

Valemit (41) nimetatakse Fourier' teisenduseks funktsioonile f ja valemit (42) tema pöördteisenduseks. Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f Fourier' teisendiks.

Paarisfunktsiooni f korral valemid (41) ja (42) esituvad kujul

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos yx\,dx \qquad (43)$$

ja

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F(y)\cos xy\,dy\,. \qquad (44)$$

Valemit (43) nimetatakse Fourier' koosinusteisenduseks funktsioonile f ja valemit (44) tema pöördteisenduseks. Funkteiooni F nimetatakse sel korral funktsiooni f Fourier' koosinusteisendiks.

Paaritu funktsiooni f korral valemid (41) ja (42) esituvad kujul

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\sin yx\, dx \tag{45}$$

ja

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(y)\sin xy\, dy\,. \tag{46}$$

Valemit (45) nimetatakse Fourier' siinusteisenduseks funktsioonile f ja valemit (46) tema pöördteisenduseks. Funktsiooni F nimetatakse sel korral funktsiooni f Fourier' siinusteisendiks.

Kui funktsioon f on antud vaid piirkonnas $[0,\infty)$, siis võime teda lugeda paarisfunktsiooniks (s.o. jätkata teda piirkonnale $(-\infty,0)$ nii, et tekib paarisfunktsioon), ja saame leida temale Fourier' koosinusteisenduse (43). Lugedes aga funktsiooni f paarituks funktsiooniks (s.o. jätkates teda piirkonnale $(-\infty,0]$ nii, et tekib paaritu funktsioon), me saame leida temale Fourier' siinusteisenduse (45). Niisugust jätkamist tegelikult teha ei ole vaja, sest valemites (43) ja (45) esinevad funktsiooni f väärtused vaid antud piirkonnast $[0,\infty)$.

Kui funktsioon f on pidev punktis x, siis valemites (42), (44) ja (46) on $S(x) = f(x)$.

Kui valemis (41) funktsioon $F(y)$ on antud, siis võib seda valemit vaadelda kui võrrandit, kus otsitavaks on funktsioon f(x). Sel korral valem (42) kujutab endast võrrandi (41) lahendusvalemit.

Kuna integraalid (32) ja (34) samuti ka (41) ja (42) ning nende erijuhud on parameetrist sõltuvad integraalid, siis nende arvutamisel võime kasutada kõiki võtteid, mis on antud eespool peatükis I parameetrist sõltuvate integraalide jaoks.

Näide 18. Esitada Fourier' integraalina funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{kui } |x| > 1. \end{cases}$$

Lahendus. Et f on paarisfunktsioon, siis kasutame valemeid (37) ja (38). Vaadeldav funktsioon rahuldab Fourier' integraali koonduvustunnuse eeldusi. Seepärast integraal (37) koondub väärtuseks

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui } |x| \neq 1, \\ 1/2, & \text{kui } |x| = 1. \end{cases}$$

Valemist (38) saame

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos yx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos yx\,dx = \frac{2}{y}\sin y.$$

Seega valem (37) käesoleval juhul annab

$$S(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\cos xy\,dy.$$

Esitame vaadeldava funktsiooni f veel Fourier' integraalina kompleksskujus. Siis kasutame valemit (36). Arvutame seal sisemise integraali peaväärtuse, saame

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iy(x-t)}dt = \int_{-1}^{1} e^{iy(x-t)}dt =$$

$$= -\frac{1}{iy} e^{iy(x-t)} \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{iy} (e^{iy(x-1)} - e^{iy(x+1)}) =$$

$$= \frac{e^{ixy}}{y} \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{i} = \frac{e^{ixy}}{y} 2 \sin y .$$

Paigutades tulemuse valemisse (36), saame vastuseks

$$S(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} e^{ixy}dy.$$

Kui funktsioonil f oleks katkevuspunktides $x = \pm 1$ väärtus puudunud, s.t. kui ta oleks olnud defineeritud võrdusega

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ kui } |x| < 1, \\ 0, \text{ kui } |x| > 1, \end{cases}$$

siis ülesande vastus jääks samaks.

Näide 19. Esitada funktsioon $f(x) = \exp(-x^2/2)$ Fourier' integraalina komplekskujus.

Lahendus. Funktsioon f on absoluutselt integreeruv piirkonnas $(-\infty,\infty)$, sest $|x| \geqslant 1$ korral $\exp(-x^2) \leqslant \exp(-|x|)$. Samuti on f selles piirkonnas pidev ja ka diferentseeruv selles piirkonnas. Fourier integraali koonduvustunnuse eeldused on täidetud ja me võime valemis (36) vastavuse märgi $\sim$ asemel kirjutada võrdusmärgi. Seega

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{iy(x-t)} dt.$$

Arvutame sisemise integraali K(x,y) peaväärtuse. Et funktsioon f on absoluutselt integreeruv piirkonnas $(-\infty,\infty)$, siis iga x ja y korral integraal K(x,y) on absoluutselt koonduv. Seepärast K(x,y) langeb kokku oma peaväärtusega. Saame

$$K(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2+iyx-iyt}\,dt = e^{iyx}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2-iyt}\,dt =$$

$$= e^{iyx}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(t+iy)^2+y^2]/2}\,dt =$$

$$= e^{iyx-y^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+iy)^2/2}\,dt\,.$$

Tähistame viimase integraali J(y) abil ja arvutame ta. Et J(y) on (absoluutselt) koonduv, siis võime teda esitada jada piirväärtusena. Seega

$$J(y) = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} e^{-(t+iy)^2/2}\,dt \underset{(t+iy=z)}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-n+iy}^{n+iy} e^{-z^2/2}\,dz.$$

Integraal J(y) kujutab endast parameetrist y sõltuvat integraali. Diferentseerime teda y järgi. Võrduse paremal poolel võime seda teha piirväärtuse märgi all, sest koonduvus y järgi on ühtlane igas lõigus (vt. G.Kangro, Matemaatiline analüüs, II osa, Tallinn, 1968, lk. 64). Siis valemi (6) põhjal, kuna y on ainult integraali rajades, saame

$$\frac{d}{dy}J(y) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dy}\int_{-n+iy}^{n+iy} e^{-z^2/2}\,dz =$$

$$= i \lim_{n\to\infty} \left[e^{-(n+iy)^2/2} - e^{-(-n+iy)^2/2} \right].$$

Viimase piirväärtuse arvutamiseks kasutame Euleri valemit

$$e^{k+im} = e^k(\cos m + i \sin m),$$

mille abil saame

$$\frac{d}{dy} J(y) = 0.$$

Seega $J(y) = \text{const}$ iga y korral. Konstandi määramiseks arvutame $J(0)$. Ülesande 244 järgi on $J(0) = \sqrt{2\pi}$. Järelikult

$$J(y) = J(0) = \sqrt{2\pi}.$$

Kokkuvõttes oleme saanud

$$K(x,y) = \sqrt{2\pi} \exp^{(iyx-y^2/2)}.$$

Järelikult Fourier' integraal komplekskujus antud funktsioonile f on

$$e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx-y^2/2} \, dy.$$

Ülesanded.

Leida järgmiste integraalide Cauchy' peaväärtused.

255. v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx$

256. v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} x \cos x \, dx$

257. v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4} \, dx$

258. v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\arctan x|}{1+x^2} \, dx.$

Esitada järgmised funktsioonid f Fourier' integraalina.

259. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } |x| < a, \\ 1/2, & \text{kui } |x| = a, \\ 0, & \text{kui } |x| > a \end{cases}$

260. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{kui } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{kui } |x| > a \end{cases}$

261. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } |x| < a, \\ 0, & \text{kui } |x| > a \end{cases}$

262. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{kui } |x| > a \end{cases}$

263. $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{kui } |x| < a, \\ 0, & \text{kui } |x| > a \end{cases}$

264*. $f(x) = \operatorname{sgn}(x - a) - \operatorname{sgn}(x - b)$, kus $b > a$

265*. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{kui } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{kui } x < 0 \end{cases}$

266. $f(x) = \dfrac{a}{a^2 + x^2}$, kus $a > 0$

267. $f(x) = \dfrac{x}{a^2 + x^2}$, kus $a > 0$

268. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kui } |x| \leqslant \pi, \\ 0, & \text{kui } |x| > \pi \end{cases}$

269. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kui } |x| \leqslant \pi/2, \\ 0, & \text{kui } |x| > \pi/2 \end{cases}$

270. $f(x) = e^{-|x|}$

Esitada järgmised funktsioonid Fourier' integraalina komplekskujus.

271. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } |x| \leqslant a, \\ 1/2, & \text{kui } |x| = a, \\ 0, & \text{kui } |x| > a, \end{cases}$

272. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{kui } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{kui } |x| > a \end{cases}$

273. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kui } |x| < a, \\ 0, & \text{kui } |x| > a \end{cases}$

274. $f(x) = \operatorname{sgn}(x - a) - \operatorname{sgn}(x - b)$, kus $b > a$

275. $f(x) = \exp(-x^2)$

276*. $f(x) = x \exp(-x^2)$

Leida Fourier' teisend F järgmistele funktsioonidele f.

277. $f(x) = e^{-a|x|}$, kus $a > 0$

278. $f(x) = xe^{-a|x|}$, kus $a > 0$

279. $f(x) = e^{-x^2/2} \cos ax$

280. Leida funktsiooni

$$f(x) = e^{-ax},$$

kus $a > 0$ ja $x \geqslant 0$, Fourier' koosinusteisend.

281. Leida funktsiooni

$$f(x) = e^{-ax},$$

kus $a > 0$ ja $x \geqslant 0$, Fourier' siinusteisend.

282*. Näidata, et funktsioon

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

langeb kokku oma Fourier' teisendiga.

283*. Leida funktsiooni $f(x) = e^{-x}$, kus $0 < x < \infty$, Fourier' koosinusintegraal.

284*. Leida funktsiooni $f(x) = e^{-x}$, kus $0 < x < \infty$, Fourier' siinusintegraal.

285. Leida funktsioon f, kui

$$\frac{1}{1+y^2} = \int_0^\infty f(x)\cos yx\,dx.$$

286. Leida funktsioon f, kui

$$e^{-y} = \int_0^\infty f(x)\sin yx\,dx, \quad y > 0.$$

II. KORDSED INTEGRAALID

§ 1. Kahekordne integraal

Olgu funktsioon $f(P) = f(x,y)$ määratud tõkestatud mõõtuvas piirkonnas D. Jaotame piirkonna D joontega (mille pindala on 0) mõõtuvateks osapiirkondadeks $D_1, D_2, \dots, D_n$ pindaladega vastavalt $mD_1, \dots, mD_n$. Võtame igas osapiirkonnas suvalise punkti $P_i \in D_i$ ja moodustame summa

$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) mD_i. \tag{1}$$

Summat (1) nimetatakse funktsiooni f integraalsummaks piirkonnas D.

Olgu λ osapiirkondade D_i suurim diameeter. Suurendame nüüd osapiirkondade arvu nende edasise osadeks jaotamise teel, nii et $\lambda \to 0$.

Arvu J nimetatakse funktsiooni f kahekordseks integraaliks üle piirkonna D, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et

$$|J - \sigma(f)| < \varepsilon, \quad \text{kui} \quad \lambda < \delta,$$

sõltumata piirkonna D jaotamisviisist osadeks D_i ja punktide $P_i \in D_i$ valikust. Sel korral öeldakse, et funktsioon f on integreeruv piirkonnas D ja kirjutatakse

$$J = \iint_D f(x,y)\,dxdy. \tag{2}$$

Piirkonda D nimetatakse funktsiooni f **integreerimispiirkonnaks**.

Kehtivad järgmised teoreemid.

I. Integraali (2) olemasoluks on tarvilik, et funktsioon f oleks tõkestatud piirkonnas D.

II. Kinnises piirkonnas D pidev funktsioon on integreeruv selles piirkonnas.

III. Piirkonnas D tõkestatud funktsioon f on integreeruv selles piirkonnas, kui ta on katkev lõplikul arvul joontel, mille pindalad on null.

IV. Integraal (2) ei muutu, kui funktsiooni f väärtusi muuta lõplikus arvus punktides või lõplikul arvul joontel, mille pindalad on null.

Keskväärtusteoreem. Kui f on integreeruv piirkonnas D ja mingite arvude m ja M korral piirkonnas D on $m \leq f(P) \leq M$, siis leidub selline arv μ, kus $m \leq \mu \leq M$, et kehtib võrdus

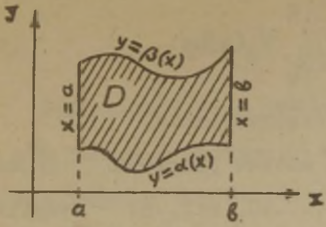
$$\iint_D f(P)dxdy = \mu S_D.$$

Kui funktsioon f on pidev piirkonnas D, siis leidub punkt $Q \in D$, et

$$\mu = f(Q).$$

Kahekordse integraali J arvutamisel kasutatakse järgmisi võtteid.

1) Olgu piirkond D joontrapets, mis on piiratud vasakult sirgega $x = a$, paremalt sirgega $x = b$, alt joonega $y = \alpha(x)$ ja ülalt joonega $y = \beta(x)$ (vt. joon. 1).



Joon.1

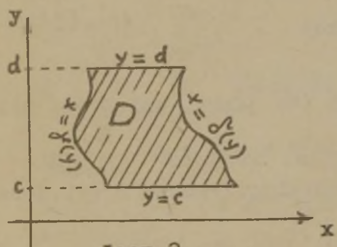
Kui funktsioon f on integreeruv piirkonnas D ja iga $x \in [a,b]$ korral eksisteerib integraal

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(y)} f(x,y)dy,$$

siis

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy. \qquad (3)$$

2) Olgu piirkond D joontrapets, mis on piiratud alt sirgega $y = c$, ülalt sirgega $y = d$, vasakult joonega $x = \psi(y)$ ja paremalt joonega $x = \delta(y)$ (vt. joon. 2).



Joon.2

Kui funktsioon f on integreeruv piirkonnas D ja iga $y \in [c,d]$ korral eksisteerib integraal

$$\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx,$$

siis

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx. \qquad (4)$$

Valemid (3) ja (4) erinevad teine teisest integreerimise järjekorra poolest.

3) Kui funktsioon f on faktoriseeruv, s.o.

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y),$$

ristkülikus $D = [a,b] \times [c,d]$, siis

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy \tag{5}$$

eeldusel, et kõik kolm integraali eksisteerivad.

4) Olgu D suvaline tõkestatud mõõtuv piirkond. Jaotame piirkonna D osapiirkondadeks $D_1,\ldots,D_k$ nii, et osapiirkonnad $D_1,\ldots,D_k$ on juhul 1) ja 2) vaadeldud joontrapetsid, siis

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{k} \iint_{D_i} f(x,y)dxdy. \tag{6}$$

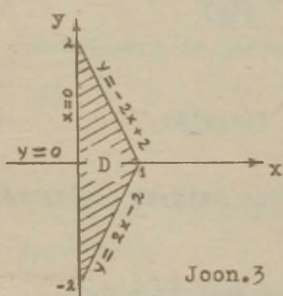
eeldusel, et integraalid paremal eksisteerivad.

<u>Näide 1</u>. Asetada integraalis

$$J = \iint_D f(x,y)dxdy$$

integreerimisrajad valemite (3) ja (4) järgi, kui D on piiratud joontega $x = 0$, $y = 2x - 2$ ja $y = -2x + 2$.

<u>Lahendus</u>. Joonistame integreerimispiirkonna D (vt.joon. 3).



Joon.3

Piirkonda D võib vaadelda kui kõvertrapetsit, mis on vasakult piiratud sirgega $x = 0$, paremalt sirgega $x = 1$, alt sirgega $y = 2x - 2$ ja ülalt sirgega $y = -2x + 2$. Kasutades arvutusvalemit (3), näeme, et $a = 0$, $b = 1$, $\alpha(x) = 2x - 2$, $\beta(x) = -2x + 2$ ja me saame

$$J = \int_0^1 dx \int_{2x-2}^{-2x+2} f(x,y)dy.$$

Piirkonda D võib vaadelda ka kui kõvertrapetsit, mis on alt piiratud sirgega $y = -2$, ülalt sirgega $y = 2$, vasakult sirgega $x = 0$ ja paremalt sirgetega $x = \frac{1}{2}y + 1$ (kui $y \leqslant 0$) ja $x = -\frac{1}{2}y + 1$ (kui $y \geqslant 0$). Kasutades arvutusvalemit (4) näeme, et $c = -2$, $d = 2$, $\gamma(y) = 0$ ja

$$\delta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y + 1, & \text{kui } y \leqslant 0, \\ -\frac{1}{2}y + 1, & \text{kui } y \geqslant 0. \end{cases}$$

Et $\delta(y)$ on määratud kahe erineva avaldisega, siis rajade paigutamiseks valemisse (4) peame piirkonna D jaotama kaheks osaks sirgega $y = 0$. Siis saame vastavalt valemile (5), et

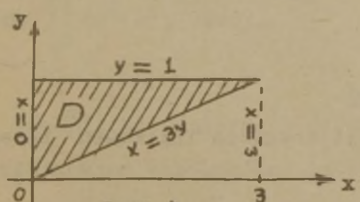
$$J = \int_{-2}^{0} dy \int_0^{1+y/2} f(x,y)dx + \int_0^2 dy \int_0^{1-y/2} f(x,y)dy.$$

<u>Näide 2</u>. Arvutada integraal

$$J = \iint_D \sqrt{x + y}\, dxdy,$$

kus D on piiratud joontega $x = 0$, $x = 3y$ ja $y = 1$.

<u>Lahendus</u>. Joonistame integreerimispiirkonna D (vt. joon. 4). Näeme, et tegemist on joontrapetsiga, mis on piiratud alt sirgega $y = 0$, ülalt sirgega $y = 1$, vasakult sirgega $x = 0$ ja paremalt sirgega $x = 3y$.



Joon.4

10

Kasutame arvutusvalemit (4), siis $c = 0$, $d = 1$, $\gamma(y) = 0$ ja $\delta(y) = 3y$ ning me saame

$$J = \int_0^1 dy \int_0^{3y} \sqrt{x + y}\, dx.$$

Arvutame kõigepealt sisemise integraali

$$\int_0^{3y} \sqrt{x + y}\, dx.$$

Et selles integraalis arvutamisel tuleb lugeda y konstandiks, siis $dx = d(x + y)$ ja me saame

$$\int_0^{3y} \sqrt{x + y}\, dx = \int_0^{3y} (x + y)^{1/2} d(x + y) = \frac{2}{3}(x + y)^{3/2} \Bigg|_{x=0}^{x=3y} =$$

$$= \frac{2}{3}\left[(4y)^{3/2} - y^{3/2}\right] = \frac{14}{3} y^{3/2}.$$

Seega

$$J = \frac{14}{3}\int_0^1 y^{3/2} dy = \frac{14}{3} \cdot \frac{2}{5} y^{5/2} \Bigg|_0^1 = \frac{28}{15}.$$

Vaadeldava integraali arvutamiseks võib kasutada ka valemit (3). Siis $a = 0$, $b = 3$, $\alpha(x) = \frac{1}{3}x$, $\beta(x) = 1$ ja me saame

$$J = \int_0^3 dx \int_{\frac{1}{3}x}^{1} \sqrt{x + y}\, dy.$$

Ülesanded.

287. Integraalsumma (1) abil arvutada ligikaudu integraal

$$\iint_D \sqrt{x + y}\, dxdy,$$

kus

$$D = \{(x,y):\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\},$$

jaotades kolmnurga D sirgetega

$$x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2} \text{ ja } x + y = \frac{1}{2}$$

neljaks võrdseks kolmnurgaks ja võttes punktideks P_i kolmnurkade tipud täisnurkade juures.

288. Integraalsumma (1) abil arvutada ligikaudu integraal

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy,$$

kus

$$D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$

jaotades ringi D osadeks kontsentriliste ringjoontega

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{k}{4}\right)^2,\quad k = 1,2,3,4,$$

ja võttes punktideks P_i kiire $y = x > 0$ lõikepunktid ringjoontega.

Võttes arvudeks m ja M funktsiooni globaalsed ekstreemumid piirkonnas D, hinnata keskväärtusteoreemi põhjal järgmised integraalid:

289. $\iint\limits_D \cos\frac{x^2 - y + 2}{x^2 + y^2 + 1}\,dxdy$, $D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 7\}$

290. $\iint\limits_D (x^2 - y^2)dxdy$, $D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 2x\}$

Joonistada integreerimispiirkond D ning asetada integreerimisrajad kahekordses integraalis valemite (3) ja (4) järgi, kui

291. D on ristkülik tippudega (0,0),(2,0),(0,1),(2,1)

292. D on kolmnurk tippudega (0,0),(2,0),(2,1)

293. D on kolmnurk tippudega (0,0),(2,1),(-2,1)

294. D on kolmnurk tippudega (-1,0),(1,0),(0,1)

295. D on ring $x^2 + y^2 \leqslant 1$

296. D on ellips $9x^2 + 4y^2 \leqslant 36$

297. D on ring $x^2 + y^2 \leqslant y$

298. D on ring $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 4$

299. D on piiratud joontega $y = x^2$, $y = 1$

300. D on piiratud joontega $y = x^2$, $y = x^3$

Joonistada integreerimispiirkond ja muuta integreerimisjärjekord järgmistes integraalides.

301. $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy$

302. $\int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

303. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$

304. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$

305. $\int_{-2}^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} f(x,y)dy$

306. $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

307. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{2-x} f(x,y)dy$

308. $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

309. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int\limits_{0}^{\cos x} f(x,y)dy$ 311. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \int\limits_{0}^{\cos x} f(x,y)dy$

310. $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)dy$

Arvutada järgmised kahekordsed integraalid.

312. $\iint\limits_{D} x\,dxdy$, kus D on kolmnurk tippudega $(0,0),(1,1)$ ja $(0,1)$

313. $\iint\limits_{D} y\,dxdy$, kus D on piiratud joontega $y = 0$, $x = 1$ ja $y = x^2$

314. $\iint\limits_{D} \sin(x + y)dxdy$, kus D on piiratud joontega $y = -x$, $y = 0$ ja $x = \pi$.

315. $\iint\limits_{D} e^{x-y}dxdy$, kus $D = [0,\ln 4] \times [0, \ln 2]$

316. $\iint\limits_{D} \frac{\arctan x \operatorname{arccot} y}{(1 + x^2)(1 + y^2)} dxdy$, kus $D = [0,1] \times [-1,0]$

317.* $\iint\limits_{D} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]\,dxdy$, kus $D = [0,\pi] \times$ $\times [0, \pi/2]$

318. $\iint\limits_{D} e^{x+y}\,dxdy$, kus D on piiratud joontega $y = 0$, $y =$ $= \ln x$ ja $x = \ln 5$

319. $\iint\limits_{D} e^{y/x}dxdy$, kus D on piiratud joontega $x = 1$, $x =$ $= \sqrt{e}$, $y = 0$ ja $y = x$

320. $\iint\limits_D \frac{\ln(x+y)}{x+y}\,dxdy$, kus D on piiratud joontega $x = 0$, $y = e^{-1}$ ja $x + y = 1$

321. $\iint\limits_D x\,dxdy$, kus D on ringide $x^2 + y^2 \leqslant 1$ ja $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$ ühine osa

322. $\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy$, kus D on piiratud joontega $y = x^2$ ja $y^2 = x$

323. $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, kus D on piiratud joontega $y^2 = 4x$ ja $x = 1$

324.* $\iint\limits_D y^2\,dxdy$, kus D on piiratud x-teljega ja tsükloidi

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

kaarega, kus $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ ja $a > 0$

§ 2. Muutujate vahetus kahekordses integraalis

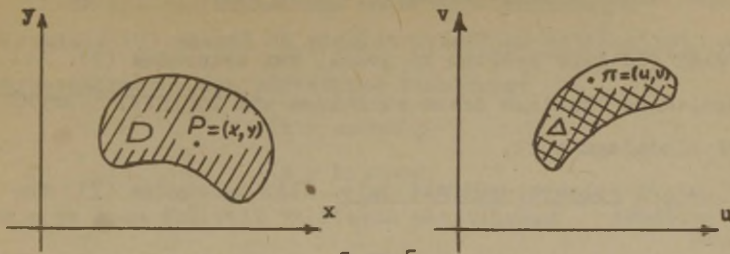
Olgu

$$J = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$$

kus f on pidev funktsioon piirkonnas D. Vaatleme kahest funktsioonist koosnevat süsteemi

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \end{cases} \qquad (7)$$

mis teisendab uv-tasandil asetseva kinnise mõõtuva piirkonna $\triangle$ xy-tasandil asetsevaks piirkonnaks D (vt. joon. 5).



Joon.5

Teisendust (7) nimetatakse <u>regulaarseks</u>, kui:

1) teisendus (7) on üksühene;

2) funktsioonidel (7) on olemas pidevad esimest järku osatuletised piirkonnas Δ ;

3) kogu piirkonnas Δ on jakobiaan

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Kui teisendus (7) on regulaarne, siis ka piirkond D on kinnine ja mõõtuv.

Regulaarne teisendus (7) teisendab piirkonna Δ sisepunktid piirkonna D sisepunktideks ja piirkonna Δ rajajoone piirkonna D rajajooneks ning sileda joone siledaks jooneks.

Regulaarse teisenduse (7) pöördteisendus

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

on ka regulaarne teisendus.

<u>Teoreem</u>. Kui funktsioon f on pidev kinnises mõõtuvas piirkonnas D ja Δ on piirkond, mille regulaarne teisendus (7) teisendab piirkonnaks D, siis kehtib valem

$$J = \iint\limits_{\Delta} f\left[x(u,v), y(u,v)\right] \left|J(u,v)\right| du dv. \tag{8}$$

Valem (8) jääb kehtima ka juhul, kui teisendus (7) ei ole regulaarne lõplikus arvus punktides või lõplikul arvul joontel pindalaga null.

Üleminek polaarkoordinaatidele. Olgu teisendus (7) antud kujul

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \tag{9}$$

kus $r \in [0,\infty)$ ja $\varphi \in [0,2\pi)$ on punkti $P = (x,y)$ polaarkoordinaadid. Siis

$$J(r,\varphi) = r \geqslant 0.$$

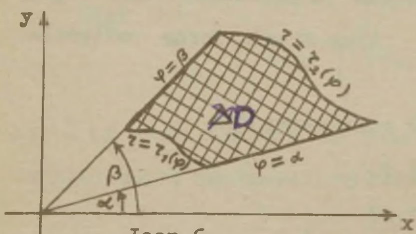
Seega teisendus (9) ei ole regulaarne vaid punktide $(0,\varphi)$ hulgal, mis $r\varphi$-tasandil kujutab sirget ja mis teisendub xy-tasandil koordinaatide alguspunktiks. Järelikult kehtib valem (8), mis omandab kuju

$$J = \iint\limits_{\Delta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi. \tag{10}$$

Kui piirkond Δ^{D} on piiratud (vt. joon. 6) kiirtega $\varphi=\alpha$ ja $\varphi=\beta$ ning kõveratega

$$r = r_1(\varphi) \text{ ja } r = r_2(\varphi),$$

siis valem (10) esitub kujul



Joon.6

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi) r \, dr. \tag{11}$$

Üleminek elliptilistele polaarkoordinaatidele. Sageli teisenduse (9) asemel on kasulik rakendada elliptilisi polaarkoordinaate, mis määratakse süsteemiga

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi, \end{cases} \tag{12}$$

kus a ja b on sobivalt valitavad positiivsed konstandid. Siis

$$J(r, \varphi) = abr$$

ja valemid (10) ja (11) omandavad kuju

$$J = ab\iint_{\Delta} f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi \tag{13}$$

ja

$$J = ab\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)r\,dr. \tag{14}$$

Kui integraalialune funktsioon või piirkonna D rajajoone võrrand sisaldab avaldist $x^2 + y^2$, siis üleminekul polaarkoordinaatidele (9) saame

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Kui aga esinevad avaldised $x^2/a^2 + y^2/b^2$, siis üleminekul elliptilistele polaarkoordinaatidele (12) saame

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2.$$

Üleminek üldistele elliptilistele polaarkoordinaatidele. Paljudel juhtudel arvutused lihtsustuvad, kui rakendada üldisi elliptilisi polaarkoordinaate, mis määratakse süsteemiga

$$\begin{cases} x = ar\cos^s\varphi \\ y = br\sin^s\varphi, \end{cases} \tag{15}$$

kus $a > 0$, $b > 0$ ja s on sobivalt valitavad konstandid. Sel

11

korral jakobiaan

$$J(r,\varphi) = sabr\cos^{s-1}\varphi \sin^{s-1}\varphi .$$

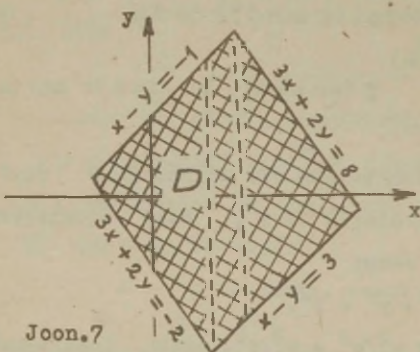
Näide 3. Leida integraal

$$J = \iint\limits_D (3x + 2y - 4)^2 dxdy$$

üle piirkonna

$$D = \{(x,y): -1 \leqslant x - y \leqslant 3;\ -2 \leqslant 3x + 2y \leqslant 8\}.$$

Lahendus. Joonestame piirkonna D (vt. joon. 7). Näeme, et see on rööpkülik. Integraali J leidmiseks on vaja D jaotada kolmeks osaks (nii nagu näidatud punktiirjoontega joonisel 7). Seega J arvutamiseks on vaja arvutada kolm integraali. Arvutuse võib aga lihtsustada, kui teha



Joon.7

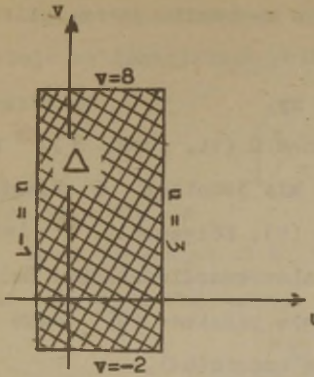
järgmine muutujate vahetus:

$$\begin{cases} x - y = u \\ 3x + 2y = v. \end{cases}$$

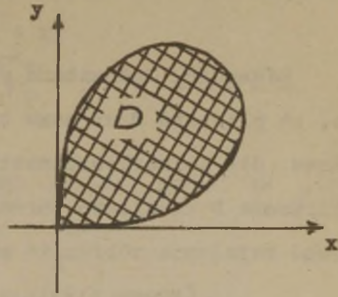
Siis rööpkülik D teisendub ristkülikuks

$$\triangle = \{(u,v): -1 \leqslant u \leqslant 3;\ -2 \leqslant v \leqslant 8\}$$

(vt. joon. 8). Jakobiaani J(u,v) arvutamiseks arvutame osatuletised:



Joon.8



Joon.9

$$\begin{cases} x_u - y_u = 1 \\ 3x_u + 2y_u = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_v - y_v = 0 \\ 3x_v + 2y_v = 1, \end{cases}$$

kust

$$x_u = \frac{2}{5}, \quad y_u = -\frac{3}{5},$$

$$x_v = \frac{1}{5}, \quad y_v = \frac{1}{5}.$$

Seega

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{25}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Valemi (8) järgi saame

$$J = \iint\limits_{\Delta} (v-4)^2 \frac{1}{5} dudv = \frac{1}{5}\int\limits_{-1}^{3} du \int\limits_{-2}^{8} (v-4)^2 dv =$$

$$= \frac{4}{5}\int\limits_{-2}^{8} (v-4)^2 dv = \frac{4}{15}(v-4)^3 \Big|_{-2}^{8} = \frac{4}{15}(4^3+6^3) = \frac{4 \cdot 280}{15} = \frac{224}{3}.$$

<u>Näide 4</u>. Leida integraal

$$J = \iint\limits_{D} x \, dxdy,$$

kus D asetseb xy-tasandil esimeses veerandis ja on piiratud joonega

$$(x + y)^3 = xy.$$

<u>Lahendus.</u> Joonestame piirkonna D (vt. joon. 9). Näeme, et piirkond D on sama tüüpi, mis joonisel 6 . Seepärast lähme üle polaarkoordinaatidele (9). Kõigepealt leiame piirkonna D rajajoone võrrandi polaarkoordinaatides. Selleks teeme rajajoone võrrandis muutujate vahetuse (9). Saame

$$(r\cos\varphi + r\sin\varphi)^3 = r^2\cos\varphi\sin\varphi,$$

kust

$$r = r_2(\varphi),$$

kus

$$r_2(\varphi) = \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{(\cos\varphi + \sin\varphi)^3}.$$

Valemi (11) kohaselt

$$J = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{r_2(\varphi)} r^2\cos\varphi\, dr =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi\, r^3 \Big|_0^{r_2(\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4\varphi \sin^3\varphi}{(\cos\varphi + \sin\varphi)^9}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^3\varphi}{(1 + \tan\varphi)^9} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{z^3}{(1 + z)^9}\, dz = \frac{1}{3}\, B(4,5) =$$

$$= \frac{1}{3}\Gamma(4)\,\Gamma(5)/\,\Gamma(9) = 2!4!/8! = 1/840.$$

Polaarkoordinaatide (9) asemel võib üle minna ka üldistele elliptilistele polaarkoordinaatidele (15) muutujate vahetusega

$$\begin{cases} x = r\cos^2\varphi \\ y = r\sin^2\varphi. \end{cases}$$

Siis $4r = \sin^2 2\varphi$.

Seda ülesannet võib lahendada lihtsal viisil ka järgmise muutujate vahetusega $y/x = v$ ehk

$$\begin{cases} x = u \\ y = uv. \end{cases}$$

Sel korral jakobiaan $J(u,v) = u$ ja rajajoone võrrand tuleb

$$u = \frac{v}{(1+v)^3}.$$

Et $J(u,v) = 0$ vaid ühel joonel $u = 0$, siis võime kasutada muutujate vahetuse valemit (8), mille kohaselt

$$J = \iint_{\Delta} u\,u\,dudv = \int_0^{\infty} dv \int_0^{v/(1+v)^3} u^2du =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\infty} u^3\Big|_0^{v/(1+v)^3} dv = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{v^3}{(1+v)^9}\,dv =$$

$$= \frac{1}{3}B(4,5) = \frac{1}{840}.$$

Ülesanded.

Järgmistes integraalides teha märgitud muutujate vahetus valemi (8) järgi ning asetada rajad saadud integraalis.

325. $\int_1^2 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$, $\begin{cases} x = u \\ y = uv \end{cases}$

326. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy$, $\begin{cases} x = u(1-v) \\ y = uv \end{cases}$

327. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$, $\begin{cases} u = x + y \\ y = uv \end{cases}$

328. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, kus D on piiratud astroidiga $x^{2/3}+y^{2/3}=$ $= 1$; $\begin{cases} x = u\cos^3 v \\ y = u\sin^3 v \end{cases}$

329. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, kus $D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$, $\begin{cases} u = x^2 \\ v = y^2 \end{cases}$

330. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, kus D on piiratud paraboolidega $y = x^2$ ja $y = 2x^2$ ning hüperboolidega $xy = 1$ ja $xy = 2$; $\begin{cases} y = ux^2 \\ v = xy \end{cases}$

Joonistada integreerimispiirkond D ning asetada integraalis (2) integreerimisrajad valemite (11) või (14) järgi, kui

331. $D = \{(x,y):\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$

332. $D = \{(x,y):\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant x \geqslant 0\}$

333. $D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$

334. $D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 2x\}$

335. $D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 4y\}$

336. $D = \{(x,y):\ 4x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 8x,\ x \leqslant y \leqslant 2x\}$

337. $D = \{(x,y):\ 9x^2 + 4y^2 \leqslant 36\}$

338. $D = \{(x,y)\colon 6 \leqslant 2x^2 + 3y^2 \leqslant 24\}$

339. D on vähim segment, mille sirge $x + y = 2$ lõikab välja ringist $x^2 + y^2 \leqslant 4$

340. D on piiratud joonega $(x^2 + y^2/3)^2 = x^2y$

Arvutada järgmised kahekordsed integraalid valemi (8) abil, kui

341. $\iint\limits_D (2x - y)dxdy$, kus D on piiratud sirgetega $x + y = 1$, $x + y = 2$, $2x - y = 1$ ja $2x - y = 3$, võttes

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x - y \end{cases}$$

342. $\iint\limits_D (x + y)dxdy$, kus D on piiratud ringiga $x^2 + y^2 = x + y$, võttes

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

343. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, kus $D = \{(x,y)\colon 0 \leqslant x^2 + y^2 + 2x \leqslant 1\}$, võttes

$$\begin{cases} x + 1 = u\cos v \\ y = u\sin v. \end{cases}$$

344. $\iint\limits_D \exp(x + y)^2dxdy$, kus D on sirgetega $x = 0$, $y = 0$ ja $x + y = 1$ piiratud kolmnurk, võttes

$$\begin{cases} x = u(1 - v) \\ y = uv \end{cases}$$

Arvutada järgmine kahekordne integraal

$$\iint\limits_\Delta r\sin\varphi\, dr\, d\varphi,$$

kui polaarkoordinaatides on

345. $\Delta = \{ (\varphi, r): 0 \leqslant r \leqslant 2, \quad \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi \}$

346. $\Delta = \{ (\varphi, r): 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\varphi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2 \}$

347. $\Delta = \{ (\varphi, r): 1 \leqslant r \leqslant 2 + \cos\varphi \}$

Arvutada järgmine polaarkoordinaatides antud kahekordne integraal

$$\iint\limits_{\Delta} r^2 \sin\varphi \, dr d\varphi ,$$

kui

348. $\Delta = \{ (\varphi, r): 0 \leqslant r \leqslant 1 + \cos\varphi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \}$

349. $\Delta = \{ (\varphi, r): 0 \leqslant r \leqslant 1 + \cos\varphi, \ \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \}$

Joonestada integreerimispiirkond ja arvutada järgmised kahekordsed integraalid, minnes üle polaarkoordinaatidele või elliptilistele polaarkoordinaatidele.

350. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dy$

351. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

352. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dy$

353. $\int\limits_0^{\sqrt{5}} dx \int\limits_0^{2\sqrt{5-x^2}} \sqrt{20 - 4x^2 - y^2} \, dy$

354. $\int\limits_{-1/3}^{1/3} dy \int\limits_{-\sqrt{1-9y^2}}^{\sqrt{1-9y^2}} \sqrt{x^2 + 9y^2} \, dx$

Arvutada järgmised kahekordsed integraalid minnes üle polaarkoordinaatidele või elliptilistele polaarkoordinaatidele.

355. $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$, $D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leq 4\}$

356. $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$, kus D on ring raadiusega 1 ja keskpunktiga (0,0)

357. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$, $D = \{(x,y):\ \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$

358. $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\, dxdy$, $D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

359. $\iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy$, $D = \{(x,y):\ x^2 + (y + 2)^2 \leq 4\}$

360. $\iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}\, dxdy$, $D = \{(x,y):\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$

361. $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$,

$$D = \{(x,y):\ (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2,\ x \geq 0\}$$

362. $\iint\limits_D \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}\, dxdy$, $D = \{(x,y):\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leq 1\}$

363.* $\iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy$, $D = \{(x,y):\ x^4 + y^4 \leq 1\}$

§ 3. Kahekordse integraali rakendusi

Olgu

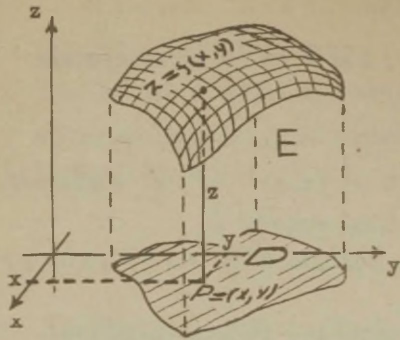
$$J = \iint\limits_D f(x,y)dxdy, \qquad (2)$$

kus f on mõõtuvas kinnises piirkonnas D pidev funktsioon.

1. Kujundi ruumala. Vaatleme keha E, mis on alt piiratud piirkonnaga D, ülalt funktsiooni f graafikuga ja külgedelt püstsilindrilise pinnaga; mis läbib piirkonna D ja

12

funktsiooni f graafiku rajajooni (vt. joon. 10). Keha E on mõõtuv ja tema ruumala V_E arvutatakse valemiga



Joon.10

$$V_E = \iint_D f(x,y)dxdy. \quad (16)$$

Valem (16) annab kahekordse integraali (2) geomeetrilise tõlgenduse.

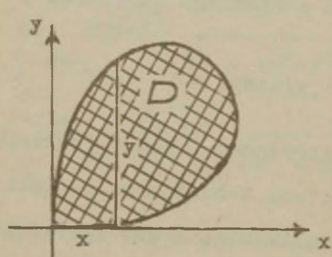
Erijuhul, kui $f(x,y) = 1$ igas punktis $P = (x,y) \in D$, siis integraal (2) kujutab piirkonna D pindala S_D, s.o.

$$S_D = \iint_D dxdy. \quad (17)$$

Näide 5. Arvutada esimeses veerandis asuva kujundi D pindala S_D, kui kujund D on piiratud joonega

$$(x + \frac{y}{5})^3 = xy.$$

Lahendus. Kujund D on esitatud joonisel 11. Kasutame valemit (17). Integraali arvutamiseks teeme muutujate vahetuse



Joon.11

$$\begin{cases} x = u \\ y = 5uv. \end{cases}$$

Siis jakobiaan

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5v & 5u \end{vmatrix} = 5u$$

ja rajajoone võrrand tuleb

$$u = u_1(v), \text{ kus } u_1(v) = \frac{5v}{(1+v)^3}, \quad 0 \leqslant v < \infty ,$$

sest $v = y/x = \tan\alpha$. Et $J(u,v) = 0$ ainult vaid ühel joonel $u = 0$, siis võime kasutada muutujate vahetuse valemit (8). Valemite (17) ja (8) põhjal saame

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_\Delta 5ududv = 5\int_0^\infty dv \int_0^{u_1(v)} udu =$$

$$= \frac{5}{2}\int_0^\infty u^2 \Big|_0^{u_1(v)} dv = \frac{125}{2}\int_0^\infty \frac{v^2\, dv}{(1+v)^6} = \frac{125}{2} B(3,3) =$$

$$= \frac{125}{2}\,\frac{\Gamma^2(3)}{\Gamma(6)} = \frac{125}{2}\,\frac{(2!)^2}{5!} = \frac{25}{12}.$$

Seda näidet saab lahendada ka üleminekuga elliptilistele polaarkoordinaatidele (12), mis antud juhul on

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = 5r\sin\varphi . \end{cases}$$

Sel korral kujundi D rajajoone võrrand on

$$r = r_1(\varphi) = \frac{5\cos\varphi\sin\varphi}{(\cos\varphi + \sin\varphi)^3}, \text{ kus } 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Valemi (14) kohaselt

$$S_D = 5\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{r_1(\varphi)} rdr = \frac{5}{2}\int_0^{\pi/2} r^2 \Big|_0^{r_1(\varphi)} d\varphi =$$

$$= \frac{125}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{(\cos\varphi + \sin\varphi)^6}\, d\varphi = \frac{125}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\varphi}{(1+\tan\varphi)^6}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{125}{2} \int_0^{\infty} \frac{z^2}{(1+z)^6}\, dz = \frac{125}{2} B(3,3) = \frac{125}{12}$$

Näide 6. Leida kujundi pindala, kui kujund on piiratud koordinaattelgedega ja kõveraga

$$\frac{x^3}{81\sqrt{3}} + \frac{y^3}{16\sqrt{2}} = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2},$$

kus $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$.

Lahendus. Lähme üle üldistele elliptilistele koordinaatidele (15), võttes

$$a = 3\sqrt{3} \text{ ja } b = 2\sqrt{2},$$

s.o. teeme muutujate vahetuse

$$\begin{cases} x = 3\sqrt{3}\, r \cos^{s}\varphi \\ y = 2\sqrt{2}\, r \sin^{s}\varphi , \end{cases}$$

mis teisendab joone võrrandi kujule

$$r^3(\cos^{3s}\varphi + \sin^{3s}\varphi) = 9r^2\cos^{2s}\varphi + 4r^2\sin^{2s}\varphi.$$

Näeme, et otstarbekohane on võtta $s = 2/3$, sest siis kohe saame joone võrrandiks

$$r = r(\varphi) = 9\cos^{4/3}\varphi + 4\sin^{4/3}\varphi,$$

kus $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, sest kujund asetseb xy-tasandi esimeses veerandis. Et jakobiaan

$$J(r, \varphi) = \frac{2}{3}\, 3\sqrt{3}\, 2\sqrt{2}\, r \cos^{-1/3}\varphi \sin^{-1/3}\varphi ,$$

siis kujundi pindala on

$$S = 4\sqrt{6} \iint_{\Delta} r \cos^{-1/3}\varphi \sin^{-1/3}\varphi \, dr d\varphi ,$$

kus Δ on piiratud kiirtega $\varphi = 0$ ja $\varphi = \pi/2$ ning joonega $r = r(\varphi)$. Seega

$$S = 4\sqrt{6} \int_0^{\pi/2} \cos^{-1/3}\varphi \sin^{-1/3}\varphi \, d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{6} \int_0^{\pi/2} \cos^{-1/3}\varphi \sin^{-1/3}\varphi\, r^2(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{6}(81J_1 + 36J_2 + 16J_3),$$

kus

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^{7/3}\varphi \sin^{-1/3}\varphi\, d\varphi,$$

$$J_2 = 2\int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi\, d\varphi = 1,$$

$$J_3 = \int_0^{\pi/2} \cos^{-1/3}\varphi \sin^{7/3}\varphi\, d\varphi.$$

Arvutame integraali J_1. Selleks teeme muutuja vahetuse

$$\cos^2\varphi = t,$$

siis

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{2/3}(1 - t)^{-2/3}dt = \frac{1}{2} B(\tfrac{5}{3}, \tfrac{1}{3}) =$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{\Gamma(5/3)\Gamma(1/3)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{3}\Gamma(\tfrac{2}{3})\Gamma(\tfrac{1}{3}) =$$

$$= \frac{\pi}{3\sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Analoogiliselt saame

$$J_3 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

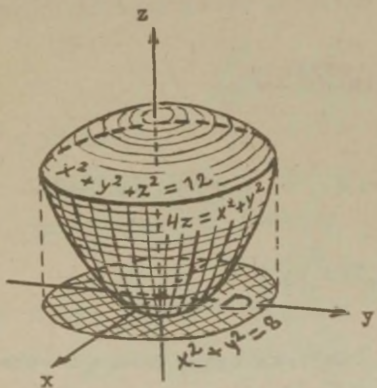
Seega

$$S = 2\sqrt{6}(81\ \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + 36 + 16\ \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}) =$$

$$= \frac{4}{3}\ 388\sqrt{2} + 72\sqrt{6}.$$

Näide 7. Arvutada keha E ruumala V_E, kui E on piiratud pöördparaboloidiga $4z = x^2 + y^2$ ja sfääriga $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

Lahendus. Keha E on kujutatud joonisel 12. Ruumala arvutamiseks kasutame valemit (16). Piirkonna D määramiseks leiame tema rajajoone võrrandi. Selleks elimineerime süsteemist



Joon.12

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases}$$

muutuja z. Saame

$$\left(\frac{x^2+y^2}{4}\right)^2 = 12-(x^2+y^2),$$

kust

$$x^2 + y^2 = 8,$$

mis ongi piirkonna D rajajoon.

Antud juhul keha E sümmeetrilisuse tõttu võime piirkonna D rajajoone leida ka sel teel, et lahendame sama süsteemi z suhtes, siis

$$4z + z^2 = 12,$$

kust saame z = 2. Seega pöördparaboloid ja sfäär lõikuvad kõrgusel z = 2. Järelikult, võttes süsteemi ühes võrrandis z = 2, saame jälle

$$x^2 + y^2 = 8.$$

Keha E ruumala on valemi (16) järgi

$$V_E = \iint\limits_D \sqrt{12 - x^2 - y^2}\, dxdy - \iint\limits_D \frac{x^2 + y^2}{4}\, dxdy,$$

sest esimene integraal annab püstsilindri ruumala, mis on ülalt piiratud antud sfääriga ja alt ringiga D, aga teine integraal kujutab püstsilindri ruumala, mis on ülalt piiratud paraboloidiga ja alt samuti ringiga D. Seega

$$V_E = \iint\limits_D \left(\sqrt{12 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{4}\right) dxdy.$$

Viimase integraali arvutamiseks lähme üle polaarkoordinaatidele

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

kus $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant 2\sqrt{2}$. Siis valemi (13) järgi on

$$V_E = \iint\limits_\Delta \left(\sqrt{12 - r^2} - \frac{r^2}{4}\right) r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{12 - r^2} - \frac{r^2}{4}\right) r\,dr =$$

$$= -\pi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{12 - r^2}\, d(12 - r^2) - 2\pi \frac{r^4}{16}\Big|_0^{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{3}(12 - r^2)^{3/2}\Big|_{2\sqrt{2}}^{0} - 8\pi = \frac{8\pi}{3}(6\sqrt{3} - 5).$$

Et keha E on sümmeetriline xz- ja yz-tasandite suhtes, siis oleks võinud arvutada esimeses oktandis oleva E osa ruumala ja tulemus korrutada neljaga.

Ülesanded.

Leida järgmiste kujundite D pindalad S_D, kui D on piiratud järgmiste kõveratega, kus parameetrid on positiivsed.

364. $x^2 + y^2 = a^2$

365. $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 4$

366. $3x^2 = 25y$, $5y^2 = 9x$

367. $xy = 4$, $x + y = 5$

368. $x + y = 1$, $x + 3y = 1$, $x = y$, $x = 2y$

369. $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6 - x)^3$

370. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

371. $r = a\cos\varphi$, $r = b\cos\varphi$, $b > a > 0$

372. $(x + y)^3 = xy$, kus $x \geq 0$, $y \geq 0$

373. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$

374. $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$

375. $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$

376. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$

377. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, kus $x^2 + y^2 \geq a^2$

378. $(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}) = \frac{xy}{4}$

379. $(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9})^2 = \frac{1}{25}(x^2 + y^2)$

380*. $(\frac{x}{4} + \frac{y}{3})^2 = \frac{x}{4} - \frac{y}{3}$, $y = 0$

381*. $y^2 = 2x$; $y^2 = 3x$, $xy = 1$, $xy = 2$

382. $y = 0$; $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, kus $0 \leq t \leq 2\pi$

383*. $x = 0$, $y = 0$, $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1$

384. $x = 0$, $y = 0$, $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2}$

385. $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^4 = \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2}$, kus $x > 0$, $y > 0$

386. $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})^4 = \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{d^2}$, kus $x > 0$, $y > 0$

387. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x^2}{c^2}$, kus $y > 0$

388. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^6 = \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2}$

389. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^8 = \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2}$

Arvutada järgmiste pindadega piiratud kehade E ruumalad V_E.

390. Tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$ ja $y = 4$ ning pöördparaboloidiga $z = x^2 + y^2 + 1$

391. Tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y = 1$ ning elliptilise paraboloidiga $z = 2x^2 + y^2 + 1$

392. Tasanditega $z = 0$ ja $x + z = 6$ ning silindritega $y = \sqrt{x}$ ja $y = 2\sqrt{x}$

393. Koordinaattasanditega, silindriga $x^2 + y^2 = 1$ ja pinnaga $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, kus $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$

394. Tasanditega $x = 1$, $y = 0$ ja $z = 0$ ning hüperboolse paraboloidiga $z = x^2 - y^2$

395. Tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $2x + 3y = 12$ ning silindriga $y^2 = 2z$

396. Tasanditega $z = 1$ ja $z = 12 - 3x - 4y$ ning elliptilise silindriga $x^2 + 4y^2 = 4$

397. Sfääriga $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ja pöördparaboloidiga $2z = x^2 + y^2$

398. Silindritega $x^2 + y^2 = 1$ ja $x^2 + z^2 = 1$

399. Tasanditega $x + y + z = 4$, $y = 1$ ja $z = 0$ ning silindriga $y = x^2$

400. Pöördparaboloididega $z = 4 - x^2 - y^2$ ja $2z = 2 + x^2 + y^2$

401. Tasandiga $z = 0$, pöördparaboloidiga $z = x^2 + y^2$ ja silindritega $x = x^2 + y^2$ ning $2x = x^2 + y^2$

402. Silindriga $x^2 + y^2 = 3$ ja kahekattese hüperboloidiga $z^2 = x^2 + y^2 + 3$

403. Tasandiga $3x + z = 6$ ja elliptilise paraboloidiga $12x^2 + 3y^2 = 4z$

404. Tasandiga

$$\frac{x}{2} + \frac{z}{16} = 2$$

ja elliptilise paraboloidiga

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{z}{16}$$

405. $z = \cos x \cos y$, $z = 0$, $|x + y| \leqslant \pi/2$, $|x - y| \leqslant \pi/2$

406. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ $(z > 0)$

407. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2. Ruumilise pinna pindala. Olgu antud ruumiline pind T parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v), \end{cases} \qquad (18)$$

kus $\Pi = (u,v) \in \Delta$. Seejuures eeldame, et vastavus piirkonna Δ ja pinna T vahel on üksühene.

Pinda nimetatakse siledaks, kui piirkonnas Δ

1) funktsioonide (18) esimest järku osatuletised on

pidevad;

2) $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, kus

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

Kehtib valem

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

kus

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

Sileda pinna T pindala S_T arvutatakse valemiga

$$S_T = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv \tag{19}$$

ehk

$$S_T = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{EG - F^2}\, dudv. \tag{20}$$

Kui sile pind T on antud ilmutatud võrrandiga

$$z = z(x,y), \text{ kus } P = (x,y) \in D,$$

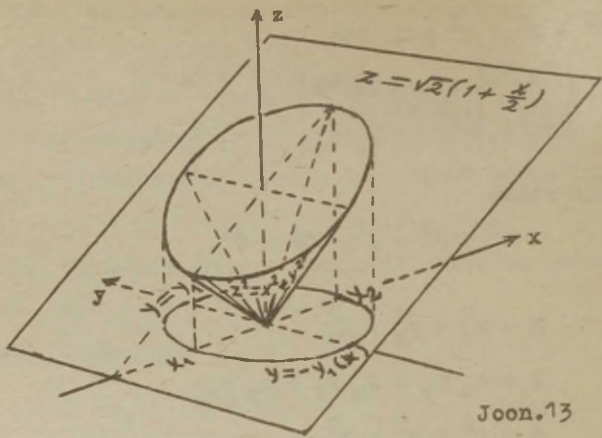
siis

$$S_T = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy. \tag{21}$$

Näide 8. Leida xy-tasandist ülalpool oleva koonuse $z^2 = x^2 + y^2$ selle osa T pindala S_T, mille lõikab välja temast tasand $z = \sqrt{2}(1 + x/2)$.

Lahendus. Pind T on kujutatud joonisel 13. Kasutame valemit (21). Diferentseerides koonuse võrrandit muutuja x järgi saame $2z\, z_x = 2x$, kust

$$z_x = \frac{x}{z}.$$



Joon.13

Analoogiliselt saame

$$z_y = \frac{y}{z}.$$

Seega

$$1 + z_x^2 + z_y^2 = 1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1 + \frac{z^2}{z^2} = 2.$$

Integreerimispiirkonna D määramiseks leiame pinna T projektsiooni xy-tasandile. Selleks elimineerime süsteemist

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{2}(1 + \frac{x}{2}) \end{cases}$$

muutuja z, saame

$$y = \pm y_1(x), \text{ kus } y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8 - (x - 2)^2},$$

mis ongi piirkonna D rajajoon.

Et pind T on sümmeetriline zx-tasandi suhtes, siis piisab arvutada integraal

$$S_T = 2 \iint\limits_{D'} \sqrt{2}\, dxdy,$$

kus D' on see osa piirkonnast D, mis asub xy-tasandi esimeses ja teises veerandis. Seega

$$S_T = 2\int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{y_1(x)} \sqrt{2}\, dy,$$

kus x_1 ja x_2 saame võrrandist $y_1(x) = 0$, mis annab

$$8 - (x - 2)^2 = 0,$$

kust

$$x_2 = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = 2 - 2\sqrt{2}.$$

Järelikult

$$S_T = 2\sqrt{2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8 - (x - 2)^2}\, dx \underset{(x-2=t)}{=}$$

$$= 2\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - t^2}\, dt = 4\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - t^2}\, dt \underset{(t=\sqrt{8}\sin u)}{=}$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{8}\,|\cos u|\sqrt{8}\cos u\, du =$$

$$= 32\int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = 16\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2u)du =$$

$$= 16\,\frac{\pi}{2} = 8\pi\ .$$

Ülesanded.

408. Leida kerapinna $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pindala.

409. Leida tasapinna $6x + 3y + 2z = 12$ selle osa pindala, mis asub esimeses oktandis.

410. Leida pinna $z = xy$ selle osa pindala, mis asub silindri $x^2 + y^2 = 1$ sees.

411. Leida hüperboloidi $z^2 = 2xy$ selle osa pindala, mis asub ülalpool xy-tasandil asetsevast ristkülikust $\{(x,y): 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 6\}$

412*. Leida koonuse $z^2 = x^2 - y^2$ selle osa pindala, mis esimeses oktandis ja on piiratud tasandiga $y + z = 2$.

413. Leida koonuse $z^2 = x^2 + y^2$ selle osa pindala, mille lõikab temast silindriline pind $z^2 = 2y$.

414*. Leida koonuse $x^2 = y^2 + z^2$ selle osa pindala, mis asub silindri $x^2 + y^2 = 2$ sees.

415*. Leida silindritega $x^2 + z^2 = a^2$ ja $y^2 + z^2 = a^2$ piiratud keha pindala.

416*. Leida koonuse $x^2 = y^2 + z^2$ selle osa pindala, mille lõikavad temast välja silinder $x^2 - y^2 = 2$ ja tasandid $y = \pm 3$.

417. Leida silindri $z^2 = 4x$ selle osa pindala, mille lõikab temast välja silinder $y^2 = 4x$ ja tasand $x = 1$.

418. Leida kera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ selle osa pindala, mille lõikab temast silinder $x^2 + y^2 = 16$.

419. Leida kera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ selle osa pindala, mille lõikab temast välja silinder $x^2 + y^2 = 2x$.

420. Leida elliptilise paraboloidi $2x^2 + 3y^2 = 12z$ selle osa pindala. mille lõikab temast välja silinder $4x^2 + 9y^2 = 108$.

421. Leida helikoidi $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h\varphi$ selle osa pindala, kus $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$.

422. Leida rõngaspinna

$$\begin{cases} x = (b + a\sin\Theta)\cos\varphi \\ y = (b + a\sin\Theta)\sin\varphi \\ z = a\cos\Theta \end{cases}$$

$(0 < a \leqslant b)$ selle osa pindala, mis on piiratud meridiaanidega $\varphi = \alpha$ ja $\varphi = \beta$ ning kahe paralleeliga $\Theta = \gamma$ ja $\Theta = \delta$.

3. Tasandilise kujundi mass, masskese ja inertsimomendid. Vaatleme xy-tasandil asetsevat mõõtuvat kujundit D, mille pindtihedus igas punktis $P = (x,y) \in D$ on

$$\rho = \rho(x,y). \tag{22}$$

Kujundi D mass m_D arvutatakse valemiga

$$m_D = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy. \tag{23}$$

Valem (23) annab kahekordse integraali mehaanilise tõlgenduse.

Kujundi D masskeskme C koordinaadid (x_C, y_C) arvutatakse valemitega

$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{m} \iint_D x\,\rho(x,y)\,dxdy \\ y_C = \frac{1}{m} \iint_D y\,\rho(x,y)\,dxdy, \end{cases} \tag{24}$$

kus $m = m_D$ arvutatakse valemiga (23).

Kujundi D inertsimomendid J_x ja J_y vastavalt x- ja y-telje suhtes määratakse valemitega

$$J_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)\,dxdy, \tag{25}$$

ja

$$J_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)\,dxdy. \tag{26}$$

Ülesanded.

423. Leida ringi mass, kui ringi raadius on R ja pindtihedus ρ on igas punktis võrdeline punkti kaugusega ringjoonest.

424. Leida ringi mass, kui ringi raadius on R, ja pindtihedus ρ igas punktis on võrdeline punkti kaugusega ringi keskpunktist ning ringjoonel on a.

425. Leida ruudukujulise plaadi, mille küljepikkus on 2a, mass, kui plaadi materjali tihedus on igas punktis võrdeline punkti kauguse ruuduga diagonaalide lõikepunktist ning ruudu tippudes on võrdne 1.

426. Leida ringrõnga mass, kui rõnga pindtihedus igas punktis on pöördvõrdeline punkti kaugusega rõnga keskpunktist.

427. Leida plaadi mass, kui plaadil on ellipsi kuju ja tema pindtihedus igas punktis on võrdeline punkti kaugusega r ellipsi vähimast poolteljest ning juhul $r = 1$ tihedus võrdub k.

Leida järgmiste homogeensete kujundite masskeskme C koordinaadid, kui kujund on

428. piiratud ellipsiga $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, kus $y > 0$, ja sirgega $y = 0$

429. piiratud sinusoidiga $y = \sin x$ ja sirgetega $x = 0$, $x = \pi/4$ ja $y = 0$

430. ringisektor kesknurgaga α ja ringi raadius on R

431. ringi segment kesknurgaga α ja ringi raadius on R

432. piiratud joontega $ay = x^2$ ja $x + y = 2a$, kus $a > 0$

433. piiratud kardioidiga $r = a(1 + \cos\varphi)$ ja polaarteljega

434. piiratud joonega $(x/a + y/b)^3 = xy/c^2$

435. piiratud x-teljega ja tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ kaarega, kus $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

436. Leida ringi $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ masskeskme C koordinaadid, kui pindtihedus ringi igas punktis (x,y) on võrdeline tema kaugusega punktist $(a,0)$.

437. Leida poolringi $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, kus $x \leqslant 0$, masskeskme C koordinaadid, kui pindtihedus poolringi igas punktis (x,y) on võrdeline tema kauguse ruuduga punktist $(a,0)$.

438*. Leida täisnurkse võrdhaarse kolmnurga masskeskme C koordinaadid, kui pindtihedus kolmnurga igas punktis on võrdeline tema kaugusega hüpotenuusist.

439. Leida täisnurkse kolmnurga masskeskme C koordinaadid, kui kolmnurga kaatetid on a ja b ning pindtihedus kolmnurga igas punktis on võrdeline punkti kauguse ruuduga täisnurga tipust.

Leida järgmiste homogeensete kujundite inertsimomendid J_x ja J_y, kui kujund on piiratud joontega

440. $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$

441. $r = a(1 + \cos\varphi)$ 422. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$

443*. Leida täisnurkse võrdhaarse kolmnurga inertsimoment hüpotenuusi suhtes, kui kolmnurga pindtihedus igas punktis on võrdeline punkti kaugusega hüpotenuusist.

§ 4. Kolmekordne integraal

Olgu funktsioon $f(P) = f(x,y,z)$ määratud tõkestatud mõõtuvas piirkonnas E. Jaotame piirkonna E pindadega (mille ruumalad on null) mõõtuvateks osapiirkondadeks $E_1,\ldots,E_n$, mille ruumalad olgu vastavalt $mE_1,\ldots, mE_n$. Võtame igas osapiirkonnas suvalise punkti $P_i \in E_i$ ja moodustame summa

$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)mE_i. \tag{27}$$

Summat (23) nimetatakse funktsiooni f integraalsummaks piirkonnas E.

Olgu λ osapiirkondade E_i suurim diameeter.

Arvu J nimetatakse funktsiooni f kolmekordseks integraaliks üle piirkonna D, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et

$$|J - \sigma(f)| < \varepsilon, \quad \text{kui } \lambda < \delta,$$

sõltumata D jaotamisviisist osadeks E_i ja punktide $P_i \in E_i$ valikust. Sel korral öeldakse, et funktsioon f on integreeruv piirkonnas E ja kirjutatakse

$$J = \iiint_E f(x,y,z)dxdydz. \tag{28}$$

Piirkonda E nimetatakse funktsiooni f integreerimispiirkonnaks.

Kehtivad järgmised teoreemid:

I Integraali (28) olemasoluks on tarvilik, et funktsioon f oleks tõkestatud piirkonnas E.

II Kinnises piirkonnas E pidev funktsioon on integreeruv selles piirkonnas.

III Piirkonnas E tõkestatud funktsioon on integreeruv selles piirkonnas, kui ta on katkev lõplikul arvul pindadel, mille ruumalad on null.

IV Integraal (28) ei muutu, kui f väärtusi muuta lõplikus arvus punktides, joontes või pindades, mille ruumalad on null.

<u>Keskväärtusteoreem</u>. Kui f on integreeruv piirkonnas E ja mingite arvude m ja M korral piirkonnas E on $m \leqslant f(P) \leqslant M$, siis leidub selline arv μ, kus $m \leqslant \mu \leqslant M$, et kehtib võrdus

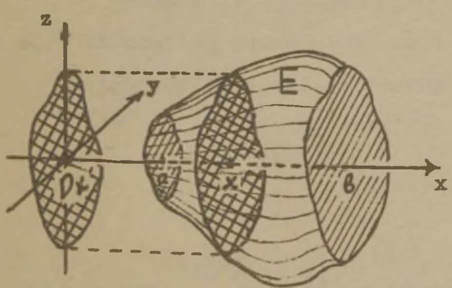
$$\iiint_E f(P)dxdydz = \mu V_E.$$

Kui f on pidev piirkonnas D, siis leidub punkt $Q \in E$, et

$$\mu = f(Q).$$

Kolmekordse integraali J arvutamisel kasutatakse järgmisi võtteid:

1) Olgu piirkond E keha, mis on kahe tasandi x = a ja x = b vahel (vt. joon. 14). Võtame keha lõike kohal x risti x-teljega. Lõikeprojektsioon yz-tasandile olgu mõõtuv kujund D_x.



Joon.14

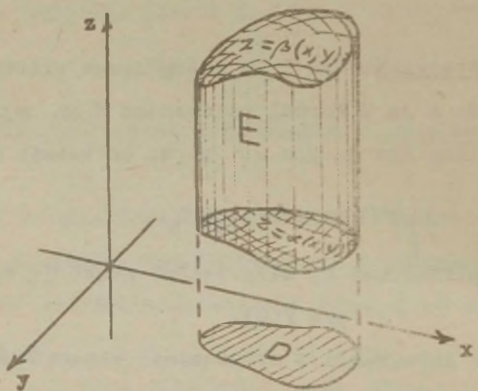
Kui funktsioon f on integreeruv piirkonnas E ja iga $x \in [a,b]$ korral eksisteerib kahekordne integraal

$$\iint_{D_x} f(x,y,z)dydz,$$

siis kehtib võrdus

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \iint_{D_x} f(x,y,z)dydz. \qquad (29)$$

2) Olgu piirkond E kõversilinder, mis on alt piiratud



Joon.15

pinnaga $z = \alpha(x,y)$ ja ülalt pinnaga $z = \beta(x,y)$ ning mille moodustajad on paralleelsed z-teljega (vt. joon. 15). Olgu xy-tasandil E projektsioon D mõõtuv.

Kui funktsioon f on integreeruv piirkonnas E ja iga punkti $P = (x,y) \in D$ korral eksisteerib integraal

$$\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

siis kehtib võrdus

$$\iiint_E f(x,y,z)dzdydz = \iint_D dxdy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (30)$$

3) Kui funktsioon f on faktoriseeruv, s.o.

$$f(x,y,z) = f_1(x)f_2(y)f_3(z),$$

ja on integreeruv risttahukas

$$E = [a,b] \times [c,d] \times [h,k],$$

siis

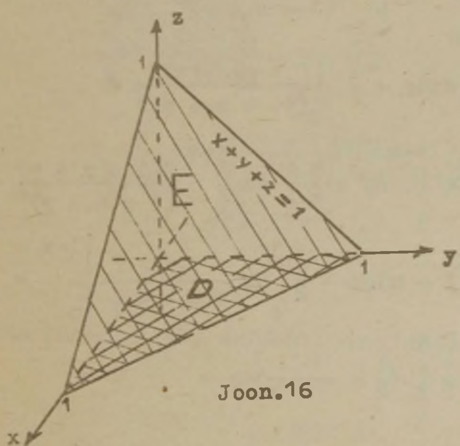
$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy \int_h^k f_3(z)dz. \quad (31)$$

Näide 9. Leida integraal

$$J = \iiint_E \frac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^3},$$

kus E on keha, mis on piiratud tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$.

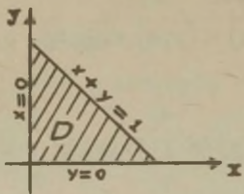
Lahendus. Keha E on kujutatud joonisel 16. Seega piirkonda E võib vaadelda kõversilindrina, mis on alt piiratud pinnaga $z = 0$ ja ülalt pinnaga $z = 1 - x - y$. Seega valemi (30) järgi on



Joon.16

$$J = \iint_D dxdy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + z)^3},$$

kus D on xy-tasandil asetsev kolmnurk, mis on piiratud sirgetega $x = 0$, $y = 0$ ja $x + y = 1$ (vt. joon. 17). Arvestades, et $dz = d(1 + x + y + z)$, saame



Joon.17

$$J = \iint_D dxdy \int_0^{1-x-y} \frac{d(1 + x + y + z)}{(1 + x + y + z)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2} \iint_D dxdy \left. \frac{1}{(1 + x + y + z)^2} \right|_0^{1-x-y} =$$

$$= -\frac{1}{2} \iint_D dxdy \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1 + x + y)^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{8} \iint_D dxdy + \frac{1}{2} \iint_D \frac{dxdy}{(1 + x + y)^2} =$$

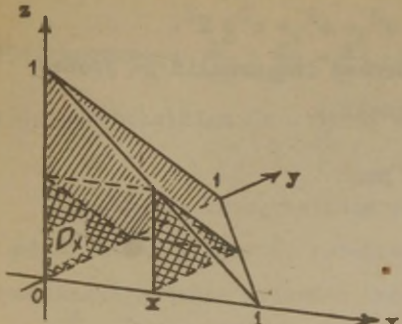
$$= -\frac{1}{8} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy + \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{d(1 + x + y)}{(1 + x + y)^2} =$$

$$= -\frac{1}{8} \int_0^1 (1 - x)dx - \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left. \frac{1}{1 + x + y} \right|_0^{1-x} =$$

$$= -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + x}\right)dx =$$

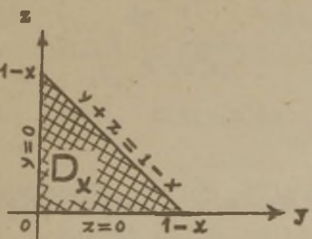
$$= -\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

Antud integraali arvutamiseks võib kasutada ka valemit (29). Selleks kujutame piirkonna E joonisel 18 antud pai-



Joon.18

paigutusega teljestikus. Võtame lõike kohal x risti x-teljega ja projekteerime ta yz-tasandile. Saame piirkonna D_x (vt. joon. 18). Kui x on fikseeritud, siis piirkond D_x on piiratud sirgetega $y = 0$, $z = 0$ ja $y + z = 1 - x$ (vt. joon. 19). Valemi (29) järgi on siis



Joon.19

$$J = \int_0^1 dx \iint_{D_x} \frac{dydz}{(1 + x + y + z)^3} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + z)^3}.$$

Edasine lahenduskäik on sama, mis eespool.

Ülesanded.

444. Kasutades keskväärtusteoreemi, hinnata integraal

$$\iiint_E \frac{dxdydz}{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2},$$

kus E on kera raadiusega R ja $a^2 + b^2 + c^2 > R^2$.

Arvutada järgmised kolmekordsed integraalid ja joonestada nende integreerimispiirkonnad.

445. $\int_0^4 dz \int_0^3 dy \int_0^2 (x^2 + y^2 + z^2)dx$

446. $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^2 (z + 4)dz$

447. $\int_0^2 y\,dy \int_0^3 dx \int_0^{2-y} dz$

448. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} y\,dy \int_{1-x}^{2-2x} dz$

449. $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^2 x\,dx \int_0^3 z^2\,dz$

Joonestada piirkond E ja asetada integreerimisrajad integraalis

$$J = \iiint_E f(x,y,z)dxdydz$$

valemite (29) ja (30) järgi; määrata ning joonestada piirkonnad D_x ja D, kui E on piiratud

450. koordinaattasanditega ja tasandiga

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$

451. silindriga $x^2 + y^2 = 1$, tasandiga $z = 1$ ja asetseb esimeses oktandis

452. pinnaga $z = 1 - x^2 - y^2$ ja tasandiga $z = 0$

453. ellipsoidiga $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

454. koonusega $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ ja tasandiga $z = c$

455. paraboloidiga $(x - 1)^2 + y^2 = z$ ja tasandiga $2x+z = 2$

Järgmistes integraalides muuta integreerimisjärjekord igal võimalikul viisil, kasutades selleks eeskirja integreerimisjärjekorra muutmise kohta kahekordses integraalis.

456. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)dz$

457. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz$

458. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$

459. Tõestada, et iga lõigus $[0,a]$ integreeruva funktsiooni f korral kehtib valem

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y f(z)dz = \frac{1}{2} \int\limits_0^a (a - z)^2 f(z)dz.$$

460. Tõestada, et iga lõigus $[0,2]$ integreeruva funktsiooni f korral kehtib valem

$$2 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x+y} f(z)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 (2 - z^2)f(z)dz + \int\limits_1^2 (2 - z)^2 f(z)dz.$$

Arvutada järgmised kolmekordsed integraalid.

461. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{1-x-y}$, kui

$$E = \{ (x,y,z):\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 2 \leqslant y \leqslant 5,\ 2 \leqslant z \leqslant 4 \}$$

462. $\iiint\limits_E (1 - x)^2 \sqrt{1 - y^2}\, dxdydz$, kui

$$E = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$$

463. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{1 - x - y}$, kui E on piiratud tasandiga $x + y + z = 1$ ja koordinaattasanditega

464. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{(x + y + z + 1)^3}$, kui E on piiratud koordinaattasanditega ning tasanditega $y = 2$ ja $x + z = 3$

465. $\iiint\limits_E xy^2z^3 dxdydz$, kui E on piiratud hüperboolse paraboloidiga $z = xy$ ja tasanditega $x = 1$, $y = x$ ja $z = 0$

466. $\iiint\limits_E (2x + 3y - z)dxdydz$, kui E on koordinaattasanditega ning tasanditega $z = 3$ ja $x + y = 2$ piiratud prisma

467. $\iiint\limits_E xyzdxdydz$, kui

$$E = \{ (x,y,z):\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \}$$

§ 5. Muutujate vahetus kolmekordses integraalis

Olgu

$$J = \iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz, \tag{28}$$

kus f on pidev funktsioon piirkonnas E. Vaatleme kolmest funktsioonist koosnevat süsteemi

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w), \end{cases} \tag{32}$$

mis teisendab uvw-ruumis asetseva kinnise mõõtuva piirkonna Ω xyz-ruumis asetsevaks piirkonnaks E.

Teisendust (32) nimetatakse regulaarseks, kui

1) teisendus (32) on üksühene,

2) funktsioonidel (32) on olemas pidevad esimest järku osatuletised piirkonnas Ω,

3) kogu piirkonnas Ω on jakobiaan

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0.$$

Kui teisendus (32) on regulaarne, siis ka piirkond E on kinnine ja mõõtuv.

Regulaarne teisendus (32) teisendab piirkonna Ω sisepunktid piirkonna E sisepunktideks ja piirkonna Ω rajapinna piirkonna E rajapinnaks ning iga sileda pinna piirkonnas Ω siledaks pinnaks piirkonnas E.

Regulaarse teisenduse (32) pöördteisendus

$$\begin{cases} u = u(x,y,z) \\ v = v(x,y,z) \\ w = w(x,y,z) \end{cases}$$

on ka regulaarne teisendus.

Teoreem. Kui funktsioon f on pidev kinnises mõõtuvas piirkonnas E ja Ω on piirkond, mille regulaarne teisendus (32) teisendab piirkonnaks E, siis kehtib valem

$$J = \iiint\limits_{\Omega} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|J(u,v,w)\right| dudvdw. \qquad (33)$$

Valem (33) jääb kehtima ka juhul, kui teisendus (32) ei ole regulaarne lõplikus arvus punktides, joontes või pindades, mille ruumalad on null.

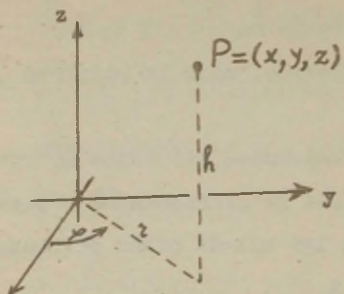
<u>Üleminek silinderkoordinaatidele.</u> Olgu teisendus (28) antud kujul

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h, \end{cases} \qquad (34)$$

kus $r \in [0,\infty)$, $r \in [0,2\pi)$ ja $h \in (-\infty,\infty)$ on punkti $P = (x,y,z)$ silinderkoordinaadid (vt. joon. 20). Siis

$$J(r,\varphi,h) = r \geq 0.$$

Seega teisendus (34) ei ole regulaarne vaid z-teljel asetsevate punktide suhtes (s.o. juhul $r = 0$). Järelikult kehtib valem (33), mis esitub kujul



Joon.20

$$J = \iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h) r\, dr d\varphi dh, \qquad (35)$$

kus Ω on punktide (r,φ,h) hulk, mille süsteem (34) teisendab piirkonnaks E.

<u>Üleminek elliptilistele silinderkoordinaatidele</u>. Sageli teisenduse (34) asemel on kasulik rakendada elliptilisi silinderkoordinaate, mis määratakse süsteemiga

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \\ z = h, \end{cases} \qquad (36)$$

kus $a > 0$ ja $b > 0$ on sobivalt valitavad konstandid. Sel korral

$$J(r,\varphi,h) = abr$$

ja valem (28) omandab kuju

$$J = ab\iiint\limits_{\Omega} f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi, h)r\,dr\,d\varphi\,dh. \qquad (37)$$

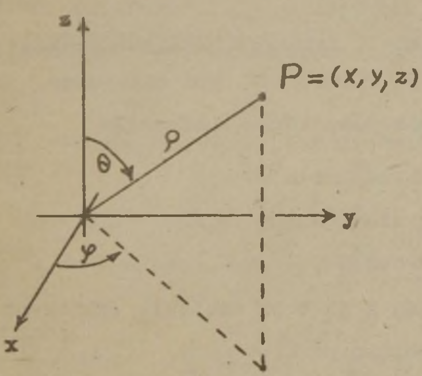
<u>Üleminek sfäärkoordinaatidele</u>. Olgu teisendus (32) antud kujul

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\Theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\Theta \\ z = \rho\cos\Theta, \end{cases} \qquad (38)$$

kus $\rho\in[0,\infty)$, $\varphi\in[0,2\pi)$ ja $\Theta\in[0,\pi]$ on punkti $P = (x,y,z)$ <u>sfäärkoordinaadid</u> (vt. joon. 21). Siis

$$J(\rho,\varphi,\Theta) = \rho^2\sin\Theta \geqslant 0.$$

Seega teisendus (38) ei ole regulaarne vaid z-teljel asetsevate punktide suhtes (s.o. juhtudel $\rho = 0$ või $\Theta = 0$



Joon.21

või $\Theta = \pi$). Järelikult kehtib valem (33), mis omandab kuju

$$J = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\varphi\sin\Theta, \rho\sin\varphi\sin\Theta, \rho\cos\Theta)\rho^2\sin\Theta\, d\rho\, d\varphi\, d\Theta,$$

kus Ω on punktide (ρ, φ, Θ) hulk, mille süsteem (38) teisendab piirkonnaks E.

<u>Üleminek ellipsoidkoordinaatidele</u>. Sageli teisenduse (38) asemel on kasulik rakendada <u>ellipsoidkoordinaate</u>, mis määratakse süsteemiga

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi\sin\Theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\Theta \\ z = c\rho\cos\Theta, \end{cases} \tag{40}$$

kus $a > 0$, $b > 0$ ja $c > 0$ on sobivalt valitavad konstandid. Sel korral

$$J(\rho, \varphi, \Theta) = abc\rho^2\sin\Theta$$

ja valem (33) omandab kuju

$$J = abc\iiint\limits_{\Omega} f(a\rho\cos\varphi\sin\Theta, b\rho\sin\varphi\sin\Theta, c\rho\cos\Theta)\cdot$$
$$\cdot\rho^2\sin\Theta\, d\rho\, d\varphi\, d\Theta. \tag{41}$$

<u>Üleminek üldistele ellipsoidkoordinaatidele</u>. Paljudel juhtudel arvutustöö lihtsustub, kui rakendada üldisi ellipsoidkoordinaate, mis määratakse süsteemiga

$$\begin{cases} x = a\rho\cos^s\varphi\sin^t\Theta \\ y = b\rho\sin^s\varphi\sin^t\Theta \\ z = c\rho\cos^t\Theta, \end{cases} \tag{42}$$

kus $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ ning s ja t on sobivalt valitavad konstandid. Sel korral jakobiaan on

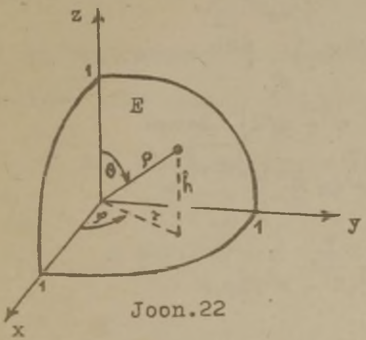
$$J(\rho, \varphi, \Theta) = abcst\, \rho^2 \cos^{s-1}\varphi \sin^{s-1}\varphi \cos^{t-1}\Theta \sin^{2t-1}\Theta.$$

Näide 10. Arvutada integraal

$$J = \iiint_E xyz\, dxdydz,$$

kus keha E asetseb esimeses oktandis ja on piiratud sfääriga $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ja koordinaattasanditega.

Lahendus. Teeme muutujate vahetuse, minnes üle sfäärkoordinaatidele (38). Joonestame keha E (vt. joon. 22), kust näeme, et süsteem (38) kujundab keha E, kui



Joon.22

$$\begin{cases} 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2 \\ 0 \leqslant \Theta \leqslant \pi/2, \end{cases}$$

millega piirkond Ω on määratud. Valemi (39) põhjal saame

$$J = \iiint_{\Omega} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \sin^2\Theta \cos\Theta\, \rho^2 \sin\Theta\, d\rho\, d\varphi\, d\Theta.$$

Nagu näeme, on piirkond Ω risttahukas ja et integraalialune funktsioon on faktoriseeruv, siis valemi (31) põhjal saame

$$J = \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\Theta \cos\Theta\, d\Theta \int_0^1 \rho^5\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\Theta\, d\sin\Theta\, \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{4} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{4} \sin^4\Theta \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}.$$

Antud integraali võib arvutada ka üleminekuga silinderkoordinaatidele (34). Jooniselt 22 näeme, et süsteem (34) kujundab keha E, kui

$$\begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2 \\ 0 \leqslant h \leqslant \sqrt{1 - r^2}, \end{cases}$$

millega piirkond Ω on määratud. Valemi (35) põhjal saame

$$J = \iiint\limits_{\Omega} r\cos\varphi\, r\sin\varphi\, h\, r\,dr\,d\varphi\, dh =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta} r^3\sin 2\varphi\, dr\,d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{1-r^2}} h\,dh\,,$$

kus $\Delta = \{(r,\varphi):\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\}$. Seega

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\varphi\, d\varphi \int\limits_0^1 r^3 dr\, \frac{h^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1-r^2}} =$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 2\varphi\Bigg|_0^{\pi/2} \int\limits_0^1 r^3(1 - r^2)dr =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\,\frac{1}{12} = \frac{1}{48}.$$

__Näide 11.__ Arvutada integraal

$$J = \iiint\limits_E \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz\,,$$

kus E on piiratud ellipsoidiga

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

__Lahendus.__ Selles integraalis on otstarbekohane üle minna ellipsoidkoordinaatidele (40). Keha E on kujundatud, kui

$$\begin{cases} 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \end{cases}$$

millega piirkond Ω on määratud. Arvestades, et

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \rho^2,$$

saame valemi (41) põhjal

$$J = abc \iiint\limits_{\Omega} \rho^2 \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta.$$

Et Ω on risttahukas ja integraalialune funktsioon on faktoriseeruv, siis valemi (31) põhjal

$$J = abc \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho =$$

$$= abc \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\pi abc.$$

Ülesanded.

Kolmekordses integraalis (28) üle minna silinderkoordinaatidele, kui

468. E asub esimeses oktandis ja on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = a^2$ ja tasanditega $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $z = 0$ ja $z = 1$

469. $E = \left\{ (x,y,z): \ x^2 + y^2 \leqslant a^2, \ 0 \leqslant z \leqslant c \right\}$

470. E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 2x$, paraboloidiga $z = x^2 + y^2$ ja tasandiga $z = 0$

471. E on piiratud koonusega $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{c^2}$ ja tasandiga $z = c$

472. E on poolkera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $x \geqslant 0$ osa, mis asub silindri $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ sees

473. E on kerade $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ ja $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leqslant a^2$ ühisosa

Kolmekordses integraalis (28) üle minna sfäärkoordinaatidele, kui

474. E on esimeses oktandis asuva kera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ osa

475. E on poolkera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $x \geqslant 0$

476. E on kogu kera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$

477. E on piiratud sfääriga $x^2 + y^2 + z^2 = z$

478. E on piiratud pöördparaboloidiga $z = x^2 + y^2$ ning tasanditega $x = y$, $x = 1$, $y = 0$ ja $z = 0$

Arvutada järgmised kolmekordsed integraalid, kasutades valemeid (35) või (37).

479. $\iiint\limits_E \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$, kus

$E = \left\{ (x,y,z)\colon 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1,\ -1 \leqslant z \leqslant 1 \right\}$

480. $\iiint\limits_E (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, kus E on piiratud pinnaga

$3(x^2 + y^2) + z^2 = 3a^2$

481*. $\iiint\limits_E ydxdydz$, kus $E = \left\{ (x,y,z)\colon 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x^2 + z^2} \leqslant c \right\}$

482. $\iiint\limits_E (x^2 + y^2)dxdydz$, kus

$E = \left\{ (x,y,z)\colon x^2 + y^2 \leqslant 2z,\ 0 \leqslant z \leqslant 2 \right\}$

483. $\iiint\limits_E (x^2 + y^2)dxdydz$, kus

$E = \left\{ (x,y,z)\colon a^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant b^2,\ z \geqslant 0 \right\}$

484. $\iiint\limits_E z\,dxdydz$, $E = \left\{ (x,y,z):\ 0 \leqslant z = \frac{c}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant c \right\}$

485. $\iiint\limits_E \frac{xzdxdydz}{x^2 + y^2 - a^2}$,

$E = \left\{ (x,y,z):\ 0 \leqslant z \leqslant \frac{c}{a}\ x^2 + y^2 \leqslant c,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \right\}$

486. $\iiint\limits_E (x^2 + z^2)dxdydz$, kui E on piiratud pöördparabolooi-

diga $x^2 + z^2 = 2y$ ja tasandiga $y = 2$

Arvutada järgmised kolmekordsed integraalid, kasutades sfäär- või ellipsoidkoordinaate.

487. $\iiint\limits_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$, kui E on kera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant z$

488. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$, kui E on kera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$

489. $\iiint\limits_E \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, kui E on ellipsoid

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$

490. $\iiint\limits_E \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{4}}\,dxdydz$, kui E on ellipsoid

$6x^2 + 4y^2 + 3z^2 \leqslant 12$

491. $\iiint\limits_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$, kui E on kera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x$

492. $\iiint\limits_E z^2dxdydz$, kui E on kerade $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ ja

$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az$ ühisosa

493. $\iiint\limits_E z\,dxdydz$, kui $E = \left\{ (x,y,z):\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1,\ z \geqslant 0 \right\}$

Järgmistes integraalides üle minna nii silinder- kui ka sfäärkoordinaatidele ja arvutada need integraalid.

494. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^2 dz$

495. $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^3 z\sqrt{x^2+y^2}\, dz$

496. $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz.$

497. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz$

§ 6. Kolmekordse integraali rakendusi

Keha ruumala. Kui E on mõõtuv keha, siis tema ruumala arvutatakse valemiga

$$V_E = \iiint_E dxdydz. \tag{43}$$

Näide 12. Leida keha E ruumala, kui E asetseb esimeses oktandis ja on piiratud koordinaattasanditega ning pinnaga

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{p} + \frac{y}{q},$$

kus a,b,c,p ja q on positiivsed konstandid.

Lahendus. Lähme pinna võrrandis üle üldistele ellipsoidkoordinaatidele (42), saame

$$(\rho\cos^s\varphi\sin^t\theta + \rho\sin^s\varphi\sin^t\theta + \rho\cos^t\theta)^2 =$$

$$= \frac{a}{p}\rho\cos^s\varphi\sin^t\theta + \frac{b}{q}\rho\sin^s\varphi\sin^t\theta,$$

kust

$$\rho\left[(\cos^s\varphi + \sin^s\varphi)\sin^t\theta + \cos^t\theta\right]^2 =$$

$$= \left(\frac{a}{p}\cos^s\varphi + \frac{b}{q}\sin^s\varphi\right)\sin^t\theta.$$

Nagu näeme on otstarbekohane võtta $s = t = 2$, sest siis kohe saame pinna võrrandiks

$$\rho = \left(\frac{a}{p}\cos^2\varphi + \frac{b}{q}\sin^2\varphi\right)\sin^2\theta.$$

Minnes nüüd kolmekordses integraalis üle üldistele ellipsoidkoordinaatidele, saame

$$V_E = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\rho} 4abc\,\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^3\theta\cos\theta\,d\rho =$$

$$= \frac{4}{3}abc\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{a}{p}\cos^2\varphi + \frac{b}{q}\sin^2\varphi\right)^3 d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^9\theta\,d\sin\theta =$$

$$= \frac{abc}{15}\left(\frac{b}{p} - \frac{a}{q}\right)^{-1}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{a}{p}\cos^2\varphi + \frac{b}{q}\sin^2\varphi\right)^3 d\left(\frac{a}{p}\cos^2\varphi + \frac{b}{q}\sin^2\varphi\right) =$$

$$= \frac{abc}{60}\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)\left(\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2}\right).$$

Ülesanded.

Leida keha E ruumala V_E, kui E on piiratud ($a,b,c,d,>0$)

498. Silindritega $z = 9 - y^2$ ja $z = 1 + y^2$ ning tasanditega $x = -1$ ja $x = 5$

499. Paraboloididega $z = x^2 + 2y^2$ ja $z = x^2 + y^2$ ning tasanditega $x = 1$, $y = x$ ja $y = 2x$

500. Silindritega $y = x^2$ ja $3y = 4 - x^2$ ning tasanditega $z = 0$ ja $z = 9$

501. Silindriga $2z = x^2$ ja tasanditega $3x + 2y = 12$, $y = 0$ ning $z = 0$

502. Hüperboolse paraboloidiga $z = xy$ ja tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ ning $x + y = z$

503. Paraboloididega $z = x^2 + y^2$ ja $z = 2x^2 + 2y^2$, silindriga $y = x^2$ ja tasandiga $y = x$

504. Tasanditega $x + y + z = 4$, $x = 3$ ja $y = 2$ ning koordinaattasanditega

505. Paraboloidiga $x^2 + y^2 - z = 1$ ja tasandiga $z = 0$

506*. Pöördparaboloidiga $2z = x^2 + y^2$ ja tasandiga $y + z = 4$

507. Paraboloidiga $z = (x - 1)^2 + y^2$ ja tasandiga $2x + z = 2$

508. Sfääriga $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ja koonusega $x^2 + y^2 = z^2$

509. Koonusega $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja paraboloidiga $x^2 + y^2 = 6 - z$

510. Poolsfääriga $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ja pöördparaboloidiga $x^2 + y^2 = 3z$

511. Paraboloidiga $z = x^2 + y^2$ ja tasandiga $z = x + y$

512. Poolsfääriga $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ja paraboloidiga $x^2 + y^2 = a(a - 2z)$

513. Paraboloidiga $z = x^2 + y^2$ ja koonusega $z^2 = xy$

514. Pinnaga $z = 1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^2$ ja tasandiga $z = 0$

515. Ellipsoidiga $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2 = 1$ ja koonusega $z = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$

516. Pinnaga $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 3x$

517. Pinnaga $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 3xyz$

518. Pinnaga $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$

519. Pinnaga $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2z^4$

520. Pinnaga $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = 6z$

521. Pinnaga $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{9z^2}{x^2 + y^2}$

522. Pinnaga $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})^2 = \frac{x}{d}$

523. Pinnaga $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})^2 = \frac{xyz}{d^3}$

524. Pinnaga $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})^3 = = \frac{xyz}{d^3}$

525. Pinnaga $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

526. Pinnaga $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})^3 = \frac{z^4}{d^4}$

527. Ellipsoidiga $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ja paraboloidiga

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$.

528. Pinnaga $(\frac{x}{a})^{2/3} + (\frac{y}{b})^{2/3} + (\frac{z}{c})^{2/3} = 1$

529. Pinnaga $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$

Leida järgmiste kehade E ruumalad V_E, kui E asub esimeses oktandis ja on piiratud koordinaattasanditega ja järgmiste pindadega (parameetrid a,b,c,p ja q on positiivsed konstandid).

530. $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c})^2 = \frac{z}{p}$

531. $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c})^2 = \frac{x}{p} - \frac{y}{q}$

532. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4=\frac{xyz}{abc}$

533. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{p}$

534. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^6=\frac{xyz}{p}$

535. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{p}-\frac{y}{q}$

536. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\sin\frac{\pi\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}$

<u>Keha mass</u>, <u>raskuskese</u>, <u>inertsimomendid ja potentsiaal</u>. Kui mõõtuva keha E tihedus igas punktis P = (x,y,z) on $\rho = \rho(x,y,z)$, siis keha E <u>mass</u>

$$m_E=\iiint\limits_E \rho(x,y,z)\,dxdydz. \tag{44}$$

Keha E <u>masskeskme</u> $C=(x_C,y_C,z_C)$ koordinaadid arvutatakse valemitega

$$\begin{cases} x_C=\frac{1}{m}\iiint\limits_E x\,\rho(x,y,z)\,dxdydz \\ y_C=\frac{1}{m}\iiint\limits_E y\,\rho(x,y,z)\,dxdydz \\ z_C=\frac{1}{m}\iiint\limits_E z\,\rho(x,y,z)\,dxdydz, \end{cases} \tag{45}$$

kus $m=m_E$ arvutatakse valemiga (44).

Keha E <u>inertsimomendid</u> J_{xy}, J_{yz} ja J_{zx} vastavalt xy-tasandi, yz-tasandi ja zx-tasandi suhtes määratakse integraalidega

$$
\begin{cases}
J_{xy} = \iiint\limits_E z^2 \rho(x,y,z)dxdydz \\
J_{yz} = \iiint\limits_E x^2 \rho(x,y,z)dxdydz \\
J_{zx} = \iiint\limits_E y^2 \rho(x,y,z)dxdydz.
\end{cases}
\tag{46}
$$

Keha E inertsimomendid J_x, J_y ja J_z vastavalt x-telje, y-telje ja z-telje suhtes määratakse valemitega

$$
\begin{cases}
J_x = J_{xy} + J_{xz} \\
J_y = J_{yx} + J_{yz} \\
J_z = J_{zx} + J_{zy}.
\end{cases}
\tag{47}
$$

Üldiselt keha E inertsimoment J_l mingi telje l suhtes määratakse integraaliga

$$
J_l = \iiint\limits_E r^2 \rho(x,y,z)dxdydz, \tag{48}
$$

kus r on punkti (x,y,z) kaugus teljest l.

Keha E inertsimoment koordinaatide alguspunkti suhtes määratakse valemiga

$$
J_o = J_{xy} + J_{yz} + J_{zx}. \tag{49}
$$

Keha E Newtoni potentsiaal $U = U(x,y,z)$ punktis (a,b,c) määratakse integraaliga

$$
U(a,b,c) = \iiint\limits_E \frac{\rho(x,y,z)}{r} dxdydz,
$$

kus $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$.

Ülesanded.

537. Leida kuubi $E = [0,a]^3$ mass, kui kuubi E tihedus igas punktis (x,y,z) on $\rho(x,y,z) = z$.

538. Leida risttahuka $E = [0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ mass, kui E tihedus igas punktis (x,y,z) on $\rho(x,y,z) = x + y + z$.

539. Leida kuubi mass, kui kuubi tihedus igas tema punktis on arvuliselt võrdne punkti kauguste summaga kuubi kolmest tahust, mis läbivad ühte tema tippu.

540. Leida tasanditega $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$ ja $z = 0$ piiratud püramiidi mass, kui püramiidi tihedus igas punktis on võrdeline punkti aplikaadiga.

541. Leida kera E mass, kui kera raadius $R = 3$, tihedus $\rho(x,y,z)$ igas punktis (x,y,z) on proportsionaalne punkti kaugusega kera keskpunktist, kusjuures tihedus ühiku kaugusel kera keskpunktist on 2.

542. Leida kera E mass, kui kera raadius on R ja kera igas punktis (x,y,z) on tihedus

$$\rho(x,y,z) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}.$$

543. Leida keha E mass, kui keha E on piiratud silindriga $x^2 = 2y$ ning tasanditega $y + z = 1$ ning $2y + z = 2$ ja kui tihedus igas tema punktis on arvuliselt võrdne selle punkti ordinaadiga.

544. Leida silindri

$$E = \{(x,y,z)\colon x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ 0 \leqslant z \leqslant c\}$$

mass, kui E tihedus igas tema punktis on võrdeline punkti kauguse ruuduga silindri teljest.

545. Leida keha E mass, kui E on kerade $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ ja $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az$ ühisosa ja tema tihedus igas punktis on võrdeline punkti kaugusega xy-tasandist.

546. Leida sfäärilise kihi

$$a^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4a^2$$

mass, kui kihi tihedus igas punktis on pöördvõrdeline punkti kaugusega punktist (0,0,0).

Leida järgmiste homogeensete kehade masskeskme koordinaadid, kui keha on piiratud järgmiste pindadega, kus parameetrid on positiivsed konstandid.

547. $x + y + z = 4a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

548. $z^2 = xy$, $x = a$, $y = b$, $z = 0$

549. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja asetseb esimeses oktandis

550. $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $z = c$, kus $0 \leqslant c \leqslant a$

551. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$

552. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, kus $z > 0$

553. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$

554. Leida poolkera $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ masskeskme koordinaadid, kui tema tihedus igas punktis on arvuliselt võrdne punkti kaugusega kera keskpunktist.

555. Leida kera segmendi masskeskme koordinaadid, kui tema tihedus igas punktis on võrdeline kaugusega segmendi alusest.

Leida järgmiste homogeensete kehade inertsimomendid koordinaattasandite ja koordinaattelgede suhtes, kui keha on piiratud järgmiste pindadega, kus parameetrid on positiivsed konstandid.

556. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

557. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

558. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},\ z = c$

559. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}$

560. Leida keha inertsimoment z-telje suhtes, kui keha on piiratud tasanditega $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ ja silindriga $z^2 = 6x$ ning tema tihedus igas punktis on võrdeline punkti kaugusega xy-tasandist.

561. Leida kera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ inertsimoment tema diameetri suhtes, kui kera tihedus punktis (x,y,z) on võrdeline punkti kaugusega kera keskpunktist.

562. Leida homogeense keha

$$E = \left\{(x,y,z):\ x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ |z| \leqslant c\right\}$$

inertsimoment sirge $x = y = z$ suhtes.

563. Leida homogeense keha inertsimoment koordinaatide alguspunkti suhtes, kui keha on piiratud pinnaga

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

564. Leida homogeense silindri

$$E = \left\{(x,y,z):\ x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ 0 \leqslant z \leqslant c\right\}$$

Newtoni potentsiaal punktis $(0,0,d)$.

565*. Leida homogeense kera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ Newtoni potentsiaal punktis (a,b,c).

§ 7. Päratud kordsed integraalid

1. Kahekordne intergaal üle lõpmatu piirkonna. Olgu funktsioon f määratud tõkestamata piirkonnas D. Eraldame piirkonnast D tõkestatud mõõtuvate osapiirkondade D_n monotoonse jada

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots \subset D,$$

mis piirprotsessis $n \to \infty$ läheneb piirkonnale D, s.o. iga punkti $P \in D$ korral leidub indeks n, et $P \in D_n$.

Kui iga n korral eksisteerib kahekordne integraal

$$J_n = \iint_{D_n} f(x,y)dxdy \tag{51}$$

ja lõplik piirväärtus

$$J = \lim_{n \to \infty} J_n, \tag{52}$$

mis ei sõltu jada $\{D_n\}$ valikust, siis öeldakse, et funktsioon f on integreeruv lõpmatus piirkonnas D, arvu J nimetatakse funktsiooni f kahekordseks integraaliks lõpmatus piirkonnas D ja tähistatakse

$$J = \iint_D f(x,y)dxdy. \tag{53}$$

Seejuures öeldakse, et integraal (53) on koonduv arvuks J.

Kui piirväärtus (52) ei eksisteeri või sõltub jada D_n valikust või on lõpmatu, siis öeldakse, et integraal (53) üle lõpmata piirkonna D on hajuv.

Järelikult, kui on teada, et integraal (53) koondub, siis piirväärtus (52) ei sõltu jada D_n valikust ja seepärast võime piirväärtuse (52) arvutamiseks valida konkreetse jada $\{D_n\}$ nii, et oleks hõlpsam arvutada integraalid (51).

Integraali (53) koonduvuse uurimiseks kasutatakse järgmisi tunnuseid.

Teoreem 1. Kui $f(x,y) \geqslant 0$ piirkonnas D, siis integraali (53) koonduvuseks arvuks J on tarvilik ja piisav, et vähemalt ühe jada $\{D_n\}$ korral arvjada $\{J_n\}$ oleks koonduv arvuks J.

Teoreem 2. Kui funktsioonid f ja g on integreeruvad igas osapiirkonnas D_n ja

$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant g(x,y)$$

igas punktis $P = (x,y) \in D$, siis integraali

$$\iint_D g(x,y)\,dxdy \tag{54}$$

koonduvusest järeldub integraali (53) koonduvus ja integraali (53) hajuvusest järeldub integraali (54) hajuvus.

Integraali (53) nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui koondub integraal

$$\iint_D |f(x,y)|\,dxdy. \tag{55}$$

Teoreem 3. Kui iga D_n korral integraalid (51) eksisteerivad, siis integraal (53) koondub parajasti siis, kui ta koondub absoluutselt.

Teoreemist 3 järeldub, et integraalide (51) olemasolu korral integraalid (53) ja (55) koonduvad või hajuvad üheaegselt.

2. Kahekordne integraal tõkestamata funktsioonist. Olgu xy-tasandil asetsevas piirkonnas D määratud funktsioon

f, mis on piirkonna D sisepunkti või rajapunkti $P_0 = (x_0, y_0)$ ümbruses tõkestamata. Eraldame piirkonnast D osapiirkonna ω_λ, mis sisaldab punkti P_0 ja mille diameeter on λ, nii et ülejäänud osas $D_\lambda = D \setminus \omega_\lambda$ eksisteerib kahekordne integraal

$$J_\lambda = \iint_{D_\lambda} f(x,y)dxdy. \tag{56}$$

Vaatleme piirprotsessi $\omega_\lambda \to P_0$, s.o. protsessi, kus piirkond ω_λ tõmbub kokku oma punktiks P_0, mida märgime sümboliga $\lambda \to 0$.

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$J = \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda , \tag{57}$$

mis ei sõltu piirkondade ω_λ valikust, siis öeldakse, et funktsioon f on <u>integreeruv</u> piirkonnas D ja arvu J nimetatakse funktsiooni f <u>kahekordseks integraaliks</u> üle piirkonna D ja märgitakse

$$J = \iint_D f(x,y)dxdy. \tag{58}$$

Seejuures öeldakse, et integraal (58) <u>koondub</u>. Muul juhul öeldakse, et integraal (58) <u>hajub</u>.

Kui funktsioon f on tõkestamata piirkonnas D asetseval joonel c, mille pindala on null, siis integraal (58) defineeritakse analoogiliselt. Nimelt võtame piirkonnas D mingi mõõtuva osapiirkonna ω_λ, mis sisaldab joont c, kus λ on suurim kaugustest joone c ja osapiirkonna ω_λ rajajoone punktide vahel. Integraal (58) defineeritakse jälle valemiga (57).

Teoreem 4. Kui $f(x,y) \geqslant 0$ piirkonnas D, siis integraali (58) koonduvuseks arvuks J on tarvilik ja piisav, et vähemalt ühe jada $\{\omega_{\lambda_n}\}$ korral, kus $\lambda_n \to 0$, oleks jada $\{J_{\lambda_n}\}$ koonduv arvuks J.

Teoreem 5. Kui funktsioonid f ja g on integreeruvad igas osapiirkonnas D_λ ja

$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant g(x,y)$$

igas punktis $P = (x,y) \in D$, siis integraali

$$\iint\limits_D g(x,y)dxdy \tag{59}$$

koonduvusest järeldub integraali (58) koonduvus ja integraali (58) hajuvusest integraali (59) hajuvus.

Tõkestamata funktsiooni integraali korral samuti defineeritakse absoluutse koonduvuse mõiste, kusjuures samuti kehtib teoreemile 3 analoogiline teoreem.

Täiesti analoogiliselt päratule kahekordsele integraalile defineeritakse päratud kolmekordsed integraalid. Ka nende korral kehtivad teoreemid 1-5.

Näide 13. Arvutada kahekordne integraal

$$J = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(6 + 2x^2 + 3y^2)^2}$$

kus $D = R^2$.

Lahendus. Integreerimispiirkonnaks on kogu xy-tasand. Et integraalialune funktsioon on pidev, siis integraalid (51) eksisteerivad iga D_n korral. Valime

$$D_n = \left\{(x,y): 2x^2 + 3y^2 \leqslant n^2\right\}.$$

Siis

$$J_n = \iint\limits_{D_n} \frac{dxdy}{(6 + 2x^2 + 3y^2)^2}.$$

Viimase integraali arvutamiseks lähme üle elliptilistele polaarkoordinaatidele

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{\sqrt{2}} \cos\varphi \\ y = \dfrac{r}{\sqrt{3}} \sin\varphi. \end{cases}$$

Saame

$$J_n = \frac{1}{\sqrt{6}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^n \frac{r\,dr}{(6 + r^2)^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{2} \int\limits_0^n \frac{d(6 + r^2)}{(6 + r^2)} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{6}}\left[- \frac{1}{6 + r^2}\right]\Bigg|_0^n = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6 + n^2}\right),$$

kust piirprotsessis $n \to \infty$ saame

$$J = \frac{\pi}{6\sqrt{6}}.$$

Teoreemi 1 põhjal leitud J ongi otsitavaks integraaliks, sest integraalialune funktsioon on positiivne.

<u>Näide 14.</u> Arvutada integraal

$$J = \iint\limits_{D} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - 4x - y}},$$

kus D on rööpkülik $|4x + y| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

<u>Lahendus.</u> Integraalialune funktsioon on positiivne ja tõkestamata sirgel $4x + y = 1$, s.o. sirgel

$$x = \frac{1 - y}{4}.$$

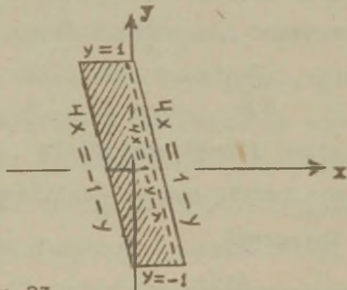
(vt. joon. 23). Vaatleme osapiirkonda $D_\lambda \subset D$, mis on piiratud sirgetega $x = -\frac{1 + y}{4}$ ja $x = \frac{1 - y}{4} - \frac{\lambda}{4}$ ning $y = \pm 1$, kus $\lambda > 0$ on küllalt väike arv. Selles piirkonnas D_λ on integraalialune funktsioon tõkestatud. Arvutusvalemi (4) järgi saame

$$J = \int_{-1}^{1} dy \int_{(-1-y)/4}^{(1-y-\lambda)/4} \frac{dx}{\sqrt{1-4x-y}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dy \sqrt{1-4x-y}\,\Big|_{(-1-y)/4}^{(1-y-\lambda)/4} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (\sqrt{\lambda} - \sqrt{2})dy.$$

Seega minnes piirile integraalimärgi all (vt. ptk.I, §1, teoreem 1), saame



Joon.23

$$J = \lim_{\lambda \to 0+} J_\lambda =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sqrt{2}\, dy =$$

$$= \sqrt{2}.$$

Ülesanded.

Arvutada järgmised päratud kahekordsed integraalid või veenduda nende hajuvuses.

566. $\iint\limits_D \exp(-x^2 - y^2)dxdy$, kus $D = R^2$

567. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2+2)^2}$, kus D on xy-tasandi esimene veerand.

568. $\iint\limits_D (x + y)e^{-x-y}dxdy$, kus D on xy-tasandi esimene veerand.

569. $\iint\limits_D xy \exp(-x^2-y^2)dxdy$, kus D on xy-tasandi esimene veerand.

570. $\iint\limits_D e^{-|x|-|y|}dxdy$, kus $D = R^2$

571. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2}$, kus $D = R^2$

572. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1 + 4x^2 + 9y^2)^{3/2}}$, kus $D = R^2$

573. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 - 2x + y}}$, kus $D = \left\{ (x,y):\ |2x-y| \leqslant 1,\ 0 < y \leqslant 1 \right\}$

574. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, kus $D = \left\{ (x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \right\}$

575. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}}$, kus $D = \left\{ (x,y):\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leqslant 1 \right\}$

576. $\iint\limits_D \exp(-x^2 - y^2) \sin(x^2 + y^2)dxdy$, kus $D = R^2$

577. $\iint\limits_D \exp(-x^2 - y^2)\cos(x^2 + y^2)dxdy$, kus $D = R^2$

578. $\iint\limits_D \exp(-y^2)dxdy$, kus $D = \left\{ (x,y):\ 0 \leqslant x \leqslant y < \infty \right\}$

579. $\iint\limits_D xy^{-2}e^{-y}\sin y\,dxdy$, kus $D = \left\{(x,y):\ 0 \leq 2x \leq y < \infty\right\}$

580. $\iint\limits_D \ln(x^2 + y^2)dxdy$, kus $D = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant a^2\right\}$

581. $\iint\limits_D \frac{\cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\,dxdy$, kus $D = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \leq a^2\right\}$

582*. $\iint\limits_D \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\,dxdy$, kus $D = \left\{(x,y):\ x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0\right\}$

583. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^{\alpha}}$, kus $D = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \geqslant 1\right\}$

584*. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x - y)^{2/3}}$, kus D = $D = \left\{(x,y)\ \ |x| \leqslant 1,\ \ |y| \leqslant 1\right\}$

585. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{(1 - x)(x - y)}}$, kus $D = \left\{(x,y):\ 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\right\}$

586*. $\iint\limits_D \ln\sin(x - y)dxdy$, kus D on piiratud sirgetega

$y = 0$, $y = x$ ja $x = \pi$

587. Tõestada, et

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} \sin(x^2 + y^2)dxdy = \begin{cases} \pi\ , & \text{kui } D_n = \left\{(x,y):\ |x| \leqslant n,\ |y| \leqslant n\right\}, \\ 0\ , & \text{kui } D_n = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 2\pi n\right\}. \end{cases}$$

588. Tõestada, et integraal

$$\iint\limits_D \cos(x^2 + y^2)dxdy,$$

kus $D = R^2$, on hajuv.

589. Olgu

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Tõestada, et kahekordne integraal

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

hajub, kui $D = \{(x,y):\ x,y \geq 1\}$, kuid korduvad integraalid

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty f(x,y)dy \text{ ja } \int_1^\infty dy \int_1^\infty f(x,y)dx$$

koonduvad.

590. Tõestada valem

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$$

$(a,b > 0)$, tehes päratus integraalis

$$\iint\limits_D e^{-x-y}\,x^{b-1}\,y^{a-1}dxdy,$$

kus D on xy-tasandi esimene veerand, muutujate vahetuse $x = u(1-v)$, $y = uv$.

591. Kasutades ülesande 566 vastust, arvutada Poissoni integraal

$$\int_0^\infty \exp(-x^2)dx.$$

Milliste positiivsete parameetrite a,b ja m korral koonduvad järgmised integraalid.

592*. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(|x|^a + |y|^b)^m}$, kus $D = \{(x,y):\ |x|^a + |y|^b \leq 1\}$

593. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(|x|^a + |y|^b)^m}$, kus $D = \{(x,y):\ |x|^a + |y|^b \geq 1\}$

594. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1-|x|^a-|y|^b)^m}$, kus $D = \{(x,y): |x|^a + |y|^b \leq 1\}$

Arvutada järgmised päratud kolmekordsed integraalid või veenduda nende hajuvuses.

595. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^{7/2}}$, kus $E = R^3$

596. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2+4}$, kus $E = R^3$

597. $\iiint\limits_E \frac{xy\,dxdydz}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}$, kus $E = R^3$

598. $\iiint\limits_E \exp(-x^2-y^2-z^2)dxdydz$, kus $E = R^3$

599. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$, kus $E = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2>1\}$

600. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2-6z+9}$,

$E = \{(x,y,z): x^2+y^2+(z-3)^2>1\}$

601. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\ln(x^2+y^2+z^2)}$, kus E on kera $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$

602. $\iiint\limits_E \frac{\ln(x^2+y^2+z^2)dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, kus E on kera $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$

603. $\iiint\limits_E \frac{xyz\,dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$, kus $E = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$

604. $\iiint\limits_E \ln(x^2 + y^2 + 2y + 4 + z^2)dxdydz$, kus E on kera

$x^2 + (y + 2)^2 + z^2 \leq a^2$

Milliste parameetri a väärtuste korral koonduvad järgmised integraalid ja arvutada need.

605. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{(xyz)^a}$, kus $E = [0,1]^3$

606. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^a}$, kus $E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$

607. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^a}$, kus $E = \{(x,y,z,): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

608. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^a}$, kus $E = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

Milliste positiivsete parameetrite a,b ja c väärtuste korral koonduvad järgmised päratud kolmekordsed integraalid.

609. $\iiint\limits_E \frac{\arctan(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^a}$ dxdydz, kus

$E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$

610. $\iiint\limits_E \frac{\operatorname{arccot}(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^a}$ dxdydz, kus

$E = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

611. $\iiint\limits_E \frac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^a}$ dxdydz, kus E on kera

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$

612. $\iiint\limits_E \frac{|\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)|^b}{(x^2 + y^2 + z^2)^a}\,dxdydz$, kus E on kera

$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$

613. $\iiint\limits_E \frac{\arccos^b (x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1)}{(x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1)^a}$, kus E on kera

$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2z$

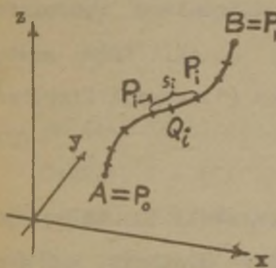
614. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{|x|^a + |y|^b + |z|^c}$, kus $E = \{(x,y,z):\ |x|+|y|+|z|>1\}$

615. $\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{|x + y - z|^a}$, kus E on kuup $[0,1]^3$

III. JOONINTEGRAALID

§ 1. Esimest liiki joonintegraal

Olgu antud pidev ruumiline sirgestuv joon AB, kus A on joone alguspunkt ja B joone lõpp-punkt (vt. joon. 24).



Joon.24

Joonel AB olgu määratud kolme muutuja funktsioon

$$f(P) = f(x,y,z).$$

Jaotame joone AB osadeks punktidega P_i $(i=0,1,\dots,n)$, kus $A = P_0$ ja $B = P_n$. Saadud osakaarte $P_{i-1}P_i$ pikkused olgu s_i; kusjuures kaarepikkust s_i mõõdame alati punktist P_{i-1} punkti P_i poole. Igal osakaarel $P_{i-1}P_i$ võtame suvalise punkti Q_i ja moodustame summa

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(Q_i)s_i.$$

Osakaarte $P_{i-1}P_i$ maksimaalse pikkuse tähistame λ abil.

Arvu J nimetatakse funktsiooni f <u>esimest liiki joonintegraaliks</u> (ehk <u>joonintegraaliks kaare pikkuse järgi</u>) mööda joont AB punktist A punkti B ja kirjutatakse

$$J = \int_{AB} f(x,y,z)ds, \tag{1}$$

kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et

19

$$|J - \sigma| < \varepsilon \quad , \text{ kui } \quad \lambda < \delta,$$

sõltumata joone AB jaotamisviisist osadeks $P_{i-1}P_i$ ja punktide Q_i valikust.

Kui eksisteerib joonintegraal (1), siis öeldakse ka, et funktsioon f on integreeruv joonel AB.

Joonintegraal (1) eksisteerib, kui funktsioon f on pidev joonel AB ja joon AB on sile.

Kui joon AB asetseb xy-tasandil, siis joonintegraali (1) nimetatakse tasapinnaliseks. Tasapinnalise joonintegraali (1) korral võib funktsioon f olla kahe muutuja x ja y funktsioon. Sel korral võime (1) asemel kirjutada

$$J = \int_{AB} f(x,y)ds. \tag{2}$$

Tasapinnaliseks nimetatakse integraali (1) ka sel juhul, kui joon AB on yz- või zx-tasandil. Üldiselt, kui joon AB on ruumiline, siis integraali (1) nimetatakse ruumiliseks joonintegraaliks. Sageli integraalis (1) ja (2) joont AB märgitakse ühe tähega L, eriti kui joon on kinnine.

Esimest liiki joonintegraalide omadused. Joonintegraalil (1) on järgmised omadused.

I. Kehtib võrdus

$$\int_{AB} f(x,y,z)ds = \int_{BA} f(x,y,z)ds,$$

s.t. esimest liiki joonintegraal ei sõltu joone AB läbimise suunast.

II. Kui joon AB koosneb osadest AC ja CB ning funktsioon f on pidev, siis

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_{AC} f(x,y,z)ds + \int\limits_{CB} f(x,y,z)ds$$

s.t. esimest liiki joonintegraal on aditiivne.

III. Kui funktsioonid f ja g on integreeruvad joonel AB, siis (α = const)

a) $$\int\limits_{AB} \alpha f(x,y,z)ds = \alpha \int\limits_{AB} f(x,y,z)ds,$$

b) $$\int\limits_{AB} \left[f(x,y,z) + g(x,y,z)\right] ds = \int\limits_{AB} f(x,y,z)ds + \int\limits_{AB} g(x,y,z)ds,$$

s.t. esimest liiki joonintegraal on lineaarne.

Omadusi I - III kasutatakse joonintegraali (1) arvutamisel. Esimest liiki joonintegraali (1) korral kehtivad ka ülejäänud Riemanni integraali omadused, nagu monotoonsus, absoluutne integreeruvus ja keskväärtusteoreem.

<u>Esimest liiki tasapinnalise joonintegraali arvutamine</u>. Kui joon AB on sile ja funktsioon f on pidev sellel joonel AB, siis tasapinnaline joonintegraal (2) eksisteerib ja tema arvutamiseks võib kasutada järgmisi valemeid, mis taandavad joonintegraali (2) arvutamise teatava määratud integraali arvutamisele.

1) Kui joon AB on antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

kus punktile A vastab parameeter α ja punktile B parameeter β , siis

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big[x(t),y(t)\big]\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt. \qquad (3)$$

2) Kui joon AB on antud ilmutatud võrrandiga

$$y = y(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

kus punktile A vastab $x = a$ ja punktile B vastab $x = b$, siis

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (4)$$

3) Kui joon AB on antud ilmutatud võrrandiga

$$x = x(y), \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

kus punktile A vastab $y = c$ ja punktile B vastab $y = d$, siis

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{c}^{d} f(x(y),y)\sqrt{x_y'^2 + 1}\,dy. \qquad (5)$$

4) Kui joon AB on antud ilmutamata kujul võrrandiga $F(x,y) = 0$, siis kasutame ilmutamata funktsiooni olemasolu teoreemi (vt. Matemaatilise analüüsi praktikum III, vihik 1, Tartu, 1974, lk. 110, Teoreem 1). Kui selle teoreemi tingimused on täidetud, siis saame avaldada joone võrrandi ilmutatud kujul $y = y(x)$ või $x = x(y)$ ning leida tuletise $y'(x)$ või $x'(y)$ ja kasutada arvutusvalemit (4) või (5). Sel korral võib joone võrrandi esitada ka parameetrilisel kujul ja kasutada arvutusvalemit (3).

5) Kui joon AB on antud polaarkoordinaatides võrrandiga

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,$$

kus punktile A vastab $\varphi = \alpha$ ja punktile B vastab $\varphi = \beta$,

siis

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\, d\varphi. \qquad (6)$$

<u>Esimest liiki ruumilise joonintegraali arvutamine</u>. Kui joon AB on sile ja funktsioon f on pidev sellel joonel AB, siis joonintegraal (1) eksisteerib ja tema arvutamiseks võib kasutada järgmisi valemeid, mis taandavad joonintegraali (1) arvutamise teatava määratud integraali arvutamisele.

6) Kui joon AB on antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

kus punktile A vastab $t = \alpha$ ja punktile B vastab $t = \beta$, siis

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt. \qquad (7)$$

7) Kui joon AB on antud ilmutatud kujul võrranditega

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x), \end{cases} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

kus punktile A vastab $x = a$ ja punktile B vastab $x = b$, siis

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x,y(x),z(x))\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx. \qquad (8)$$

8) Kui joon AB on antud ilmutamata kujul võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

siis kasutame võrrandisüsteemiga määratud ilmutamata funktsiooni olemasolu teoreemi (Matemaatilise analüüsi praktikum III, vihik 1, Tartu, 1974, lk. 124, Teoreem 1). Kui selle teoreemi tingimused on täidetud, siis saame leida joone võrrandi ilmutatud kujul

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

ning leida tuletised $y'(x)$ ja $z'(x)$ ja kasutada arvutusvalemit (8). Sel korral võib joone võrrandi esitada ka parameetrilisel kujul ja kasutada arvutusvalemit (7).

9) Kui joon $L = AB$ on kinnine, s.t. $A = B$, siis joonintegraali (1) ja (2) arvutamisel võib integreerimistee alguspunktiks võtta joone iga punkti.

Näide 1. Arvutada joonintegraal

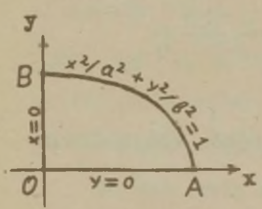
$$J = \int_L xy \, ds,$$

mööda xy-tasandil olevat kinnist joont L, mille moodustavad koordinaatteljed ja esimeses veerandis asetseva ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kaar.

Lahendus. Antud joon on esitatud joonisel 25. Integraali aditiivsuse omaduse põhjal võime kirjutada



Joon.25

$$J = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO} = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{OB}$$

Et mööda lõiku OA on $y = 0$ ja mööda OB on $x = 0$, siis joonintegraali definitsioonist nähtub, et

$$\int\limits_{OA} xy\,ds = \int\limits_{OB} xy\,ds = 0,$$

seega

$$J = \int\limits_{AB} xy\,ds.$$

Viimase integraali arvutamiseks kasutame valemit (3). Parametriseerides ellipsi võrrandi, saame

$$AB: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \pi/2\right],$$

kus punktile $A = (a,0)$ vastab $t = 0$ ja punktile $B = (0,b)$ vastab $t = \pi/2$. Seega eeldused valemi (3) kasutamiseks on täidetud ja valemi (3) põhjal saame

$$J = \int\limits_0^{\pi/2} a\cos t\; b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t\sqrt{a^2\,\frac{1 - \cos 2t}{2} + b^2\,\frac{1 + \cos 2t}{2}}\,dt.$$

Teeme muutujate vahetuse $u = \cos 2t$, siis $du = -2\sin 2t\,dt$, ja saame

$$J = -\frac{ab}{4}\int\limits_1^{-1}\sqrt{a^2\,\frac{1 - u}{2} + b^2\,\frac{1 + u}{2}}\,du =$$

$$= \frac{ab}{4}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2}\,u}\,du =$$

$$= \frac{ab}{4}\,\frac{2}{b^2 - a^2}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2}\,u\right)^{3/2}\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{ab}{3}\,\frac{1}{b^2 - a^2}(b^3 - a^3) = \frac{ab}{3}\,\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

Antud integraali võib arvutada ka valemi (4) järgi. Diferentseerides ellipsi võrrandit x järgi lugedes $y = y(x)$, saame

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} y' = 0,$$

kust

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}.$$

Siin võime eeldada, et $y \neq 0$, sest sellega kõrvaldame joonest AB vaid ühe punkti, mis ei mõjusta integraali. Valemisse (4) asetamiseks arvutame

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{b^4}{a^4} \frac{x^2}{y^2}} = \frac{1}{a^2|y|}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2} =$$

$$= \frac{1}{a^2y}\sqrt{a^4b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + b^4x^2} =$$

$$= \frac{b}{a^2y}\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}.$$

Nüüd valemi (4) põhjal saame

$$J = \frac{b}{a^2}\int_0^a x\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}\, dx =$$

$$= \frac{b}{2a^2}\int_0^a \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}\, d(x^2) =$$

$$= \frac{b}{2a^2} \frac{1}{b^2 - a^2} \frac{2}{3}\left[\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}\right]^3 \Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{b}{3a^2} \frac{1}{b^2 - a^2} (b^3a^3 - a^6) =$$

$$= \frac{ab}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

Näide 2. Arvutada joonintegraal

$$J = \int\limits_L x\sqrt{x^2 - y^2}\, ds$$

mööda lemniskaadi

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

osa, kus $x \geqslant 0$.

Lahendus. Kasutame arvutusvalemit (6). Selleks läheme joone võrrandis üle polaarkoordinaatidele. Siis, arvestades, et $x \geqslant 0$, joone võrrand on

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Diferentseerides viimast võrrandit φ järgi, saame

$$2r\dot{r} = -2a^2 \sin 2\varphi, \quad \dot{r} = -\frac{a^2}{r} \sin 2\varphi$$

ning

$$r^2 + \dot{r}^2 = r^2 + \frac{a^4}{r^2} \sin^2 2\varphi =$$

$$= \frac{1}{r^2}(r^4 + a^4 \sin^2 2\varphi) = \frac{1}{r^2}(a^4 \cos^2 2\varphi + a^4 \sin^2 2\varphi) =$$

$$= \frac{a^4}{r^2}.$$

Seega valemi (6) põhjal, arvestades lemniskaadi võrrandit, saame

$$J = \int\limits_L x\, \frac{x^2+y^2}{a}\, ds = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} r\cos\varphi\, \frac{r^2}{a}\, \frac{a^2}{r}\, d\varphi = a\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2 \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= a^3 \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi \cos\varphi\, d\varphi = a^3 \int\limits_0^{\pi/4} (\cos 3\varphi + \cos\varphi)\, d\varphi =$$

$$= a^3\left(\frac{\sin 3\varphi}{3} + \sin\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = a^3\left(\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{3}\, a^3 \sqrt{2}.$$

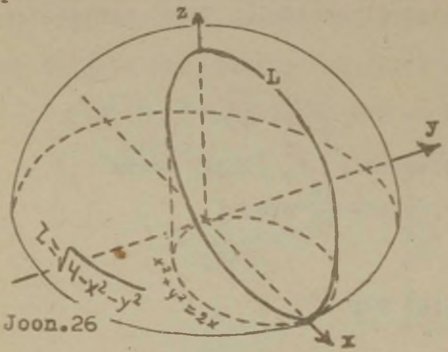
Näide 3. Arvutada integraal

$$J = \int_L z^3\, ds,$$

kus L on silindri $x^2 + y^2 = 2x$ ja poolsfääri $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ lõikejoon (vt. joonis 26).

Lahendus. Kasutame arvutusvalemit (7). Leiame joone L parameetrilised võrrandid. Saame $x^2 - 2x + y^2 = 0$, ehk $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Seega võttes $x - 1 = \cos t$, saame

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$



Joon.26

Et lõikejoon on $2x + z^2 = 4$, siis

$$z^2 = 4 - 2x = 4 - 2(1 + \cos t) = 2(1 - \cos t) = 4\sin^2(t/2).$$

Seega joone L parameetrilisteks võrranditeks on

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2\sin\frac{t}{2}, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Arvutame

$$\dot{x} = -\sin t,\ \dot{y} = \cos t,\ \dot{z} = \cos\frac{t}{2}$$

ja

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + \cos^2(t/2) = 1 + \cos^2(t/2).$$

Valemi (7) põhjal saame nüüd

$$J = \int_0^{2\pi} 8\sin^3\frac{t}{2}\sqrt{1 + \cos^2\frac{t}{2}}\, dt =$$

$$= -16\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sqrt{1+\cos^2\frac{t}{2}}\,d\cos\frac{t}{2} =$$

$$= 16\int_{-1}^{1}(1-u^2)\sqrt{1+u^2}\,du = 32\int_0^1(1-u^2)\sqrt{1+u^2}\,du.$$

Edasi võttes $u = \operatorname{sh} v$, saame $du = \operatorname{ch} v\, dv$ ja tähistades $\operatorname{arsh} 1 = b$ leiame

$$J = 32\int_0^b (1-\operatorname{sh}^2 v)\operatorname{ch}^2 v\, dv = 32\int_0^b\left(\operatorname{ch}^2 v - \frac{1}{4}\operatorname{sh}^2 2v\right)dv =$$

$$= 32\int_0^b\left(\frac{1+\operatorname{ch} 2v}{2} - \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{ch} 4v - 1}{2}\right)dv =$$

$$= 32\left(\frac{5}{8}v + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2v - \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4v\right)\Big|_0^b =$$

$$= 32\left(\frac{5}{8}b + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2b - \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4b\right).$$

Et $\operatorname{sh} b = 1$, siis $\operatorname{ch} b = \sqrt{2}$ ja $\operatorname{sh} 2b = 2\sqrt{2}$. Edasi $\operatorname{ch} 2b = \sqrt{1+8} = 3$ ja $\operatorname{sh} 4b = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3 = 12\sqrt{2}$. Seega

$$J = 32\left(\frac{5}{8}b + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{32}12\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2} + 20b = 4\sqrt{2} + 20\ln(1+\sqrt{2}).$$

Näide 4. Arvutada joonintegraal

$$J = \int_L x^2 ds,$$

kus L on ringjoon, mis on määratud süsteemiga

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Lahendus. Kasutame arvutusvalemit (8). Selleks on vaja leida funktsioonide $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ tuletised. Võrrandsüsteemiga määratud ilmutamata funktsioonide tuletiste leidmise eeskirja kohaselt (vt. Matemaatilise analüüsi praktikum III, vihik 1, Tartu, 1974, lk. 124) diferentseerime süsteemi mõlemat võrrandit x järgi, lugedes $y = y(x)$ ja $z = z(x)$. Siis saame tuletiste y' ja z' määramiseks süsteemi

$$\begin{cases} 2x + 2yy' + 2zz' = 0 \\ 1 + y' + z' = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} yy' + zz' = -x \\ y' + z' = -1, \end{cases}$$

kust leiame

$$y' = \frac{z - x}{y - z}, \quad z' = \frac{x - y}{y - z}.$$

Asendamiseks valemisse (8) arvutame juurealuse avaldise. Saame

$$1 + y'^2 + z'^2 = 1 + \left(\frac{z - x}{y - z}\right)^2 + \left(\frac{x - y}{y - z}\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{(y - z)^2}(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz).$$

Tõstes ruutu süsteemi teise võrrandi, leiame

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 0,$$

kust süsteemi esimese võrrandi põhjal

$$-xy - yz - xz = R^2/2.$$

Seega

$$1 + y'^2 + z'^2 = \frac{2}{(y - z)^2}\left(R^2 + \frac{1}{2}R^2\right) = \frac{3R^2}{(y - z)^2},$$

kust

$$\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} = \frac{R\sqrt{3}}{|y - z|}.$$

Saadud avaldises tuleb veel asendada $|y - z|$ integreerimismuutuja x kaudu. Süsteemi teise võrrandi põhjal

$$y - z = 2y + x,$$

ja seega

$$\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} = \frac{R\sqrt{3}}{|2y + x|}.$$

Muutuja y asendamiseks kasutame nüüd eespool saadud avaldist

$$-xy - (x + y)z = R^2/2.$$

Et $z = -(x + y)$, siis

$$-xy + (x + y)^2 = R^2/2$$

ehk

$$y^2 + xy + x^2 - R^2/2 = 0.$$

Lahendades selle ruutvõrrandi y suhtes, saame

$$y = \frac{1}{2}(-x \pm \sqrt{2R^2 - 3x^2}),$$

kust

$$2y + x = \pm\sqrt{2R^2 - 3x^2}.$$

Et viimases avaldises peab olema $2R^2 - 3x^2 \geqslant 0$, siis integreerimisrajadeks saame $a = -c$ ja $b = c$, kus

$$c = R\sqrt{2/3}.$$

Viimasest avaldisest samuti näeme, et peame arvestama kahte kõverat, sest juure ees on märk $\pm$. Et integraali all esineb vaid $|2y + x|$, siis integraalialused avaldised langevad kokku ja seepärast piisab võtta integraal kahekordselt üle lõigu $[-c, c]$. Seega

$$J = 2R\sqrt{3}\int_{-c}^{c}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{2R^2 - 3x^2}} = 4R\int_{0}^{c}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\frac{2}{3}R^2 - x^2}} = 4R\int_{0}^{c}\frac{x^2dx}{\sqrt{c^2 - x^2}}.$$

Teeme muutuja vahetuse $x = c\sin t$, siis $dx = c\cos t\,dt$

ning

$$J = 4R\int_0^{\pi/2} \frac{c^2\sin^2 t\ c\cos t\, dt}{\sqrt{c^2 - c^2\sin^2 t}} = 4Rc^2\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt =$$

$$= 2Rc^2\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)dt = Rc^2\pi = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Ülesande lahendamiseks võib kasutada ka valemit (7). Selleks leiame integreerimistee L parameetrilised võrrandid. Eespool saime, et

$$2y = -x \pm\sqrt{2R^2 - 3x^2} = -x \pm \sqrt{3}\sqrt{c^2 - x^2}.$$

Valime parameetriks t ja võtame

$$x = c\cos t.$$

Siis

$$y = -\frac{c}{2}(\cos t \mp \sqrt{3}\sin t),$$

ja

$$z = -(x + y) = -c(\cos t - \frac{1}{2}\cos t \pm \sqrt{3}\sin t).$$

Seega saame ringjoone L parameetrilised võrrandid kahel järgmisel kujul:

$$\begin{cases} x = c\cos t \\ y = -\frac{c}{2}(\cos t \mp \sqrt{3}\sin t) \\ z = -\frac{c}{2}(\cos t \pm \sqrt{3}\sin t), \end{cases}$$

kus $t \in [0, 2\pi)$.

Arvutame asendamiseks vajalikud suurused; saame

$$\dot{x} = -c\sin t,\quad \dot{y} = \frac{c}{2}(\sin t \pm \sqrt{3}\cos t),$$

$$\dot{z} = \frac{c}{2}(\sin t \mp \sqrt{3}\cos t),$$

kust

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{c^2}{4}(4\sin^2 t + 2\sin^2 t + 2\cdot 3\cos^2 t) = \frac{6}{4}c^2 = R^2.$$

Seega

$$J = \int_0^{2\pi} c^2\cos^2 t\ R\ dt = \frac{1}{2}Rc^2\int_0^{2\pi}(1 + \cos 2t)dt =$$

$$= \pi R c^2 = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Ülesanded.

Arvutada järgmised esimest liiki joonintegraalid mööda antud joont AB või L.

616*. $\int\limits_{AB} \frac{ds}{x - y}$, AB: $y = \frac{1}{2}x - 2$, $A = (0,-2)$, $B = (4,0)$

617. $\int\limits_{AB} \frac{2x + y}{y}\,ds$, AB: $y = -2x - 1$, $A = (0,-1)$, $B = (1,-3)$

618*. $\int\limits_{AB} \frac{ds}{x}$, AB: $x = 2y + 3$, $A = (3,0)$, $B = (5,1)$

619. $\int\limits_{AB} xy\,ds$, AB: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$ $A=(1,0)$, $B=(0,1)$

620. $\int\limits_{L} \sqrt{y}\,ds$, L: $\begin{cases} x=a(t - \sin t) \\ y=a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

621. $\int\limits_{L} y\,ds$, L: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \pi$

622. $\int\limits_{L} (x + y)ds$, L: $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$

623. $\int\limits_L (x - y)ds$, L: $r = \cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$

624. $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$, L: $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

625*. $\int\limits_L y\, ds$, kus L on parabooli $y^2 = 6x$ kaar, mis on eraldatud parabooliga $x^2 = 6y$

626. $\int\limits_L \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, kus L on punkte (0,0) ja (1,2) ühendav sirglõik

627. $\int\limits_L (x + y)ds$, kui L on kolmnurga ABC kontuur, kus $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ ja $C = (0,1)$

628. $\int\limits_L xy\, ds$, kui L on ristküliku ABCD kontuur, kus $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (4,2)$ ja $D = (0,2)$

629*. $\int\limits_L xy\, ds$, kus L on ruutjoon $|x| + |y| = 1$

630. $\int\limits_L \frac{ds}{y^2}$, kui L on aheljoone $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ osa, kus $a \leqslant y \leqslant a\sqrt{2}$

Kasutades arvutusvalemit (3) arvutada järgmised joonintegraalid.

631. $\int\limits_L (x - y)ds$, L: $x^2 + y^2 = 2x$

632. $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$, L: $x^2 + y^2 = ax$

633. $\int\limits_L (x^{4/3} + y^{4/3})ds$, L: $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$

634.* $\int\limits_L xy\,ds$, L: $x^2 - y^2 = a^2$, $a \leqslant x \leqslant a\,\mathrm{ch}\,1$

635. $\int\limits_L xy\,ds$, L: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Kasutades arvutusvalemit (6) arvutada järgmised joonintegraalid.

636. $\int\limits_L \exp\sqrt{x^2 + y^2}\,ds$, L: $x^2 + y^2 = a^2$

637. $\int\limits_L \arctan\frac{y}{x}\,ds$, kui L on Archimedese spiraali $r = 2\varphi$ osa, kus $0 < r < \pi$

638. $\int\limits_L |y|\,ds$, kui L on lemniskaat $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

639. $\int\limits_L x\,ds$, kui L on logaritmilise spiraali $r = a\exp(2\varphi)$ osa, mis asetseb ringis $r \leqslant a$

Kasutades arvutusvalemit (7) või (8) arvutada järgmised joonintegraalid mööda ruumilist joont L.

640. $\int\limits_L \frac{z^2\,ds}{x^2 + y^2}$, kus L on kruvijoone $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$ esimene keerd

641. $\int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)\,ds$, kus L on kruvijoone $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ esimene keerd

642. $\int\limits_L (x + y)\,ds$, kui L on joone $x = t$, $y = 3t^2/\sqrt{2}$, $z = t^3$ osa, kus $0 \leqslant t \leqslant 1$

643. $\int\limits_L z\,ds$, kus L on koonilise kruvijoone $x = t\cos t$,

$y = t \sin t,\ z = t$ osa, kus $0 \leq t \leq \sqrt{2}$

644. $\int\limits_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2})ds$, kus L on koonilise kruvijoone

$x = t \cos t,\ y = t \sin t,\ z = t$ esimene keerd

645.* $\int\limits_L z^3 ds$, kus L on silindri $x^2 + y^2 = ax$ ja poolsfääri

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ lõikejoon

646.* $\int\limits_L xyz\, ds$, kus L on ringjoone $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

$x^2 + y^2 = R^2/4$ osa, mis asetseb esimeses oktandis

647.* $\int\limits_L (x + y)ds$, kus L on ringjoone $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

$y = x$ osa, mis asetseb esimeses oktandis

648. $\int\limits_L \sqrt{2y^2 + z^2}\, ds$, kus L on ringjoon $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

$y = x$

649. $\int\limits_L z\, ds$, kus L on kõvera $x^2 + y^2 = z^2,\ y^2 = ax$ kaar

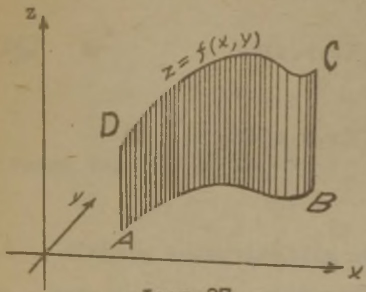
punktist (0,0,0) kuni punktini $(a, a, a\sqrt{2})$.

§ 2. Esimest liiki joonintegraali rakendused

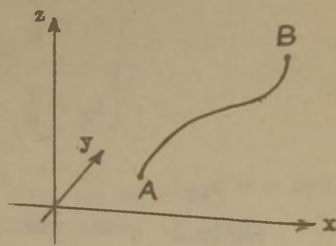
1. Olgu funktsioon $f(x,y) \geq 0$ määratud xy-tasandil asetseval siledal joonel AB. Esimest liiki tasapinnaline joonintegraal (2) geomeetriliselt tähendab joonisel 27 kujutatud vertikaalse silinderpinna ABCD pindala S_{ABCD}, mille alumiseks servaks on joon AB ja ülemiseks servaks funktsiooni f

graafik $z = f(x,y)$. Seega

$$S_{ABCD} = \int_{AB} f(x,y)ds. \qquad (9)$$



Joon.27



Joon.28

2. Olgu joonisel 28 antud joon AB sile. Siis tema pikkus s_{AB} on arvutatav valemiga

$$s_{AB} = \int_{AB} ds. \qquad (10)$$

Kui joon AB asetseb xy-tasandil, siis valem (10) on erijuht valemist (9), kus $f(x,y) = 1$.

3. Olgu sileda joone AB joontihedus $\rho(x,y,z)$ pidev. Siis selle joone AB mass m_{AB} on arvutatav valemiga

$$m_{AB} = \int_{AB} \rho(x,y,z)ds. \qquad (11)$$

4. Olgu sileda joone AB joontihedus $\rho(x,y,z)$ pidev. Siis selle joone AB raskuskeskme

$$C = (x_C,\ y_C,\ z_C)$$

koordinaadid on arvutatavad valemitega

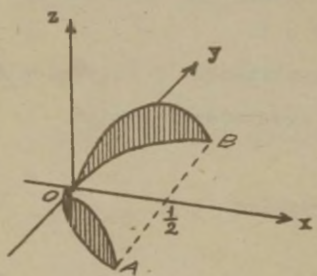
$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{m} \int\limits_{AB} x\,\rho(x,y,z)ds \\ y_C = \frac{1}{m} \int\limits_{AB} y\,\rho(x,y,z)ds \\ z_C = \frac{1}{m} \int\limits_{AB} z\,\rho(x,y,z)ds, \end{cases} \tag{12}$$

kus $m = m_{AB}$.

<u>Näide 5</u>. Leida vertikaalse silinderpinna pindala S, mille alumine serv asetseb xy-tasandil ja ülemine serv on joon

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ z = \sqrt{2x - 4x^2}. \end{cases}$$

<u>Lahendus.</u> Kasutame valemit (9). Leiame joone AB. Et peab olema $2x - 4x^2 \geqslant 0$, siis $0 \leqslant x \leqslant 1/2$. Seega



Joon.29

$$AB:\ y^2 = 2x,\quad x \in \left[0;\tfrac{1}{2}\right].$$

Et z ei sõltu muutujast y ja joon AB on sümmeetriline x-telje suhtes, siis vaadeldav silinderpind on sümmeetriline x-telje suhtes (vt. joon. 29). Seega valemi (9) kohaselt

$$S = 2 \int\limits_{OB} \sqrt{2x - 4x^2}\, ds.$$

Viimase integraali arvutamiseks kasutame valemit (4).

Selleks diferentseerime joone AB võrrandit, saame $2yy' = 2$ kust

$$y' = \frac{1}{y}$$

ja

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{y^2} = 1 + \frac{1}{2x}.$$

Seega valemi (4) kohaselt

$$S = 2\int_0^{1/2} \sqrt{2x - 4x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\,dx =$$

$$= 2\int_0^{1/2} \sqrt{1 - 4x^2}\,dx.$$

Muutuja vahetus $2x = \sin t$ annab

$$S = \int_0^{\pi/2} |\cos t| \cos t\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

Vaadeldava integraali võime arvutada ka valemi (5) abil. Selleks võtame

$$AB:\ x = \frac{1}{2}y^2, \quad y \in [-1,1],$$

saame

$$S = 2\int_{OB} \sqrt{y^2 - y^4}\,ds.$$

Et $x'_y = y$, siis

$$1 + x'^2_y = 1 + y^2$$

ja valemi (5) kohaselt

$$S = 2\int_0^1 \sqrt{y^2 - y^4}\sqrt{1 + y^2}\,dy =$$

$$= 2\int_0^1 |y|\sqrt{1 - y^4}\,dy.$$

Muutuja vahetus $y^4 = t$ annab

$$S = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{-2}\sqrt{1 - t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-1/2}(1 - t)^{1/2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}.$$

Ülesanded.

Arvutada järgmiste vertikaalsete silinderpindade pindalad, mille alumised servad asuvad xy-tasandil ja ülemised servad on määratud antud joontega.

650. $y^2 = x$, $z = \sqrt{x(1 - 4x)}$

651. $x^2 + y^2 = 4$, $2z = x^2 + 4$

652. $9y^2 = 4(x - 1)^3$, $z + \sqrt{x} = 2$

653. $x^2 + y^2 = 1$, $2z = xy$

654. $8y = 3x^2$, $x = 0$, $z = x$, $y = 6$

655. $y = \sqrt{2x}$, $z = y$, $9x = 8$

656. Leida silinderpinna $y = x$ osa pindala, mis asub tasandite $x = 1$, $x = 2$ ja $z = x + y$ vahel.

657. Leida silinderpinna $y^2 = 2x$ pindala, mis asub silindri $z^2 = 2x - 4x^2$ sees.

658. Leida silinderpinna $x^2 + y^2 = 2x$ selle osa pind-

ala, mis asub kera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sees.

Leida järgmiste kaarte pikkused.

659. $y^2 = x^3, \quad x \in [0,5]$

660. $y = \operatorname{ch} x, \quad x \in [0,1]$

661. $\begin{cases} x = \ln(t - 1) \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) + \sqrt{t^2 - 1}, \end{cases} \quad t \in [2, e + 1]$

662. $r = e^{\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$

663. $r = 2\sin^3(\varphi/3)$

664. $\begin{cases} y^2 = 4x \\ 2x = \ln y, \end{cases} \quad y \in [0, e]$

665. $y = 1 - \ln \cos x, \quad x \in [0, \pi/4]$

666. $(-1 + \exp 2^x)e^{2y} = 1 + \exp 2^x, \quad x \in [1,2]$

Leida järgmiste ruumiliste kõverate pikkused punktide A ja B vahel.

667. $\begin{cases} x = 3t \\ y = 3t^2 \\ z = 2t^3, \end{cases} \quad A = (0,0,0), \quad B = (3,3,2)$

668. $\begin{cases} y = 4\arcsin(x/4) \\ z = \ln \dfrac{4 - x}{4 + x}, \end{cases} \quad A = (0,0,0), \quad B = (3,2,1)$

669. $\begin{cases} (x - y)^2 = 3(x + y) \\ 8(x^2 - y^2) = 9z^2, \end{cases} \quad A = (0,0,0), \quad B = (1,2,3)$

670. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ y = x \tan z, \end{cases} \quad A = (0,0,0), \quad B = (1,2,1)$

671. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ch} \arctan(y/x) = 2, \end{cases} \quad A=(2,0,0), \quad B=(1,1,\sqrt{3})$

Leida järgmiste kõverate mass antud joontiheduse $\rho(x,y,z)$ korral.

672. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$, $\rho(x,y) = |y|$

673. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = -t + 2\arctan t, \end{cases}$ $t \in [0,1]$, $\rho(x,y) = ye^{-x}$

674. $2y = x^2$, $x \in [1,2]$, $\rho(x,y) = y/x$

675. $x^2 + y^2/4 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $\rho(x,y) = xy$

676. $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [0,1]$,

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x = 0, \\ 1/y, & \text{kui } x \in (0,1] \end{cases}$$

677. $\begin{cases} x = 6t \\ y = 3t^2 \\ z = 2t^3, \end{cases}$ $t \in [0,1]$, $\rho(x,y,z) = \sqrt{\frac{y}{3}}$

678. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \sqrt{3}\, t, \end{cases}$ $t \in [0,2\pi]$, $\rho(x,y,z) = 1 + z^2$

679. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t, \end{cases}$ $t \in [0,\ln 2]$,

$\rho(x,y,z)$ on igas punktis pöördvõrdeline selle punkti polaarraadiuse ruuduga ning $\rho(1,0,1) = 1$

Leida järgmiste homogeensete kaarte raskuskeskme koordinaadid.

680. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $t \in [0,\pi]$

681. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$, $x \in [0,4]$

682. $y^2 = x^3(8 - x)$

683. $y = \operatorname{ch} x, \quad x \in [-1,1]$

684. $\begin{cases} x = \pi \cos t \\ y = \pi \sin t \\ z = 2t, \end{cases} \quad t \in [0,\pi]$

685. Leida kruvijoone

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t, \end{cases} \quad t \in [0,\pi]$$

mille joontihedus on $\rho(x,y,z) = y$, raskuskeskme koordinaadid.

686. Leida kruvijoone

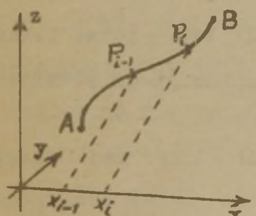
$$\begin{cases} x = \frac{\pi^2}{4} \cos t \\ y = \frac{\pi^2}{4} \sin t \\ z = \frac{3}{2\pi} t, \end{cases} \quad t \in [0,\pi]$$

mille joontihedus on $\rho(x,y,z) = 2z$, raskuskeskme koordinaadid.

§ 3. Teist liiki joonintegraalid

Olgu antud pidev ruumiline sirgestuv joon AB, kus A on joone alguspunkt ja B joone lõpp-punkt (vt. joon. 30). Joonel AB olgu määratud kolme muutuja funktsioon

$$f(P) = f(x,y,z).$$



Joon.30

Jaotame joone AB osadeks punktidega $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 0,1,\ldots,n)$, kus $A = P_0$ ja $B = P_n$. Iga saadud osakaarel

22

$e_i = P_{i-1}P_i$ võtame suvalise punkti Q_i ja moodustame summa

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(Q_i)\Delta x_i,$$

kus $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Sisuliselt Δx_i kujutab endast joone osakaare projektsiooni x-teljele, s.o.

$$\Delta x_i = pr_x e_i.$$

Olgu

$$\lambda = \max_{1\leq i\leq n} \Delta x_i.$$

Arvu J nimetatakse funktsiooni f <u>teist liiki joonintegraaliks</u> (ehk joonintegraaliks kaare projektsioonide järgi x-teljele) mööda joont AB punktist A punkti B ja kirjutatakse

$$J = \int_{AB} f(x,y,z)dx, \qquad (13)$$

kui iga arvu $\varepsilon>0$ korral leidub arv $\delta>0$, et

$$|J - \sigma| < \varepsilon, \text{ kui } \lambda < \delta,$$

sõltumata joone AB jaotamisviisist osadeks e_i ja punktide Q_i valikust.

Moodustades summad

$$\sigma' = \sum_{i=1}^{n} f(Q_i)\Delta y_i, \quad \sigma'' = \sum_{i=1}^{n} f(Q_i)\Delta z_i,$$

me võime samal viisil defineerida veel kaks teist liiki joonintegraali, nimelt kaare projektsioonide järgi y-teljele ja z-teljele, s.o. integraalid

$$J' = \int_{AB} f(x,y,z)dy \qquad (14)$$

ja

$$J = \int_{AB} f(x,y,z)dz. \tag{15}$$

Integraale (13), (14) ja (15) nimetatakse ka joonintegraalideks koordinaatide järgi.

Olgu joonel AB antud kolm funktsiooni $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$ ja $R = R(x,y,z)$ ning eksisteerigu integraalid

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx, \quad \int_{AB} Q(x,y,z)dy, \quad \int_{AB} R(x,y,z)dz. \tag{16}$$

Joonintegraalide (16) summat nimetatakse üldiseks teist liiki joonintegraaliks ja märgitakse sümboliga

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz. \tag{17}$$

Seega

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} P(x,y,z)dx + \int_{AB} Q(x,y,z)dy + \int_{AB} R(x,y,z)dz. \tag{18}$$

Suurust

$$Pdx + Qdy + Rdz \tag{19}$$

integraalis (17) nimetatakse integraalialuseks avaldiseks.

Kui joon AB asetseb xy-tasandil, siis joonintegraale (13), (14), (15) ja (17) nimetatakse tasapinnalisteks. Tasapinnalise teist liiki joonintegraali korral võib integraalialune funktsioon olla vaid kahe muutuja x ja y funktsioon. Sel korral integraalid (13), (14) ja (17) esituvad vastavalt kujul

$$\int_{AB} f(x,y)dx, \quad \int_{AB} f(x,y)dy, \quad \int_{AB} Pdx + Qdy, \tag{20}$$

kus

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} Pdx + \int_{AB} Qdy. \tag{21}$$

Tasapinnalisteks nimetatakse integraale (13), (14),(15) (17) ka sel juhul, kui joon AB on yz- või zx-tasandil. Üldiselt, kui joon AB on ruumiline joon, siis integraale (13), (14), (15) ja (17) nimetatakse ruumilisteks joonintegraalideks. Sageli integraalides (13), (14), (15) ja (17) joont AB märgitakse ühe tähega L, eriti kui joon on kinnine.

Teist liiki joonintegraalide omadused. Joonintegraalil (13) on järgmised omadused (samad omadused on ka integraalidel (14), (15) ja (17)).

I Kehtib võrdus

$$\int_{BA} f(x,y,z)dx = -\int_{AB} f(x,y,z)dx,$$

s.t. teist liiki joonintegraal muudab märki joone AB läbimissuuna muutmisel vastupidiseks.

II Kui sile joon AB koosneb osadest AC ja CB ning funktsioon f on pidev joonel AB, siis

$$\int_{AB} f(x,y,z)dx = \int_{AC} f(x,y,z)dx + \int_{CB} f(x,y,z)dx,$$

s.t. teist liiki joonintegraal on aditiivne.

III Kui funktsioonid f ja g on pidevad siledal joonel AB, siis (α = const)

a) $$\int_{AB} \alpha f(x,y,z)dx = \alpha \int_{AB} f(x,y,z)dx,$$

b) $\displaystyle\int_{AB}\left[f(x,y,z) + g(x,y,z)\right]dx = \int_{AB} f(x,y,z)dx +$

$$+ \int_{AB} g(x,y,z)dx,$$

s.t. teist liiki joonintegraal on lineaarne.

IV. Kui joon AB on risti x-teljega, siis

$$\int_{AB} f(x,y,z)dx = 0.$$

Kui joon AB on risti y-teljega, siis

$$\int_{AB} f(x,y,z)dy = 0,$$

ja kui joon AB on risti z-teljega, siis

$$\int_{AB} f(x,y,z)dz = 0.$$

Omadusi I - IV kasutatakse teist liiki joonintegraalide arvutamisel.

Teist liiki joonintegraalide korral kehtivad ka ülejäänud Riemanni integraali omadused, nagu monotoonsus, absoluutne integreeruvus ja keskväärtusteoreem.

<u>Teist liiki tasapinnalise joonintegraali arvutamine.</u> Kui joon AB on sile ja funktsioon f on pidev joonel AB, siis tasapinnalised joonintegraalid (20) eksisteerivad ja nende arvutamiseks võib kasutada järgmisi valemeid, mis taandavad joonintegraalide arvutamise teatavate määratud integraalide arvutamisele.

1) Kui joon AB on antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

kus punktile A vastab $t = \alpha$ ja punktile B vastab $t = \beta$, siis

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t)]x'(t)dt, \tag{22}$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t)]y'(t)dt. \tag{23}$$

2) Kui joon AB on antud ilmutatud võrrandiga

$$y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

kus punktile A vastab $x = a$ ja punktile B vastab $x = b$, siis

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx = \int\limits_{a}^{b} f[x,y(x)]dx. \tag{24}$$

3) Kui joon AB on antud ilmutatud võrrandiga

$$x = x(y), \quad c \leq y \leq d,$$

kus punktile A vastab $y = c$ ja punktile B vastab $y = d$, siis

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dy = \int\limits_{c}^{d} f[x(y),y]dy. \tag{25}$$

4) Kui joon AB on antud ilmutamata kujul võrrandiga $F(x,y) = 0$, siis toimime analoogiliselt nagu esimest liiki tasapinnalise joonintegraali arvutamisel (vt. lk. 148, punkt 4)).

<u>Teist liiki ruumilise joonintegraali arvutamine</u>. Kui joon AB on sile ja funktsioon f on pidev joonel AB, siis joonintegraalid (13), (14), (15) ja (17) eksisteerivad ja nende arvutamiseks võib kasutada järgmisi valemeid, mis taandavad joonintegraalide arvutamise teatavate määratud integraalide arvutamisele.

5) Kui joon AB on antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t), \; \alpha \leq t \leq \beta,$$

kus punktile A vastab $t = \alpha$ ja punktile B vastab $t = \beta$, siis

$$\int_{AB} f(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]x'(t)dt, \quad (26)$$

$$\int_{AB} f(x,y,z)dy = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]y'(t)dt, \quad (27)$$

$$\int_{AB} f(x,y,z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t),y(t),z(t)]z'(t)dt. \quad (28)$$

6) Kui joon AB on antud ilmutatud kujul võrranditega

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x), \end{cases} \quad a \leq x \leq b,$$

kus punktile A vastab $x = a$ ja punktile B vastab $x = b$, siis minnakse üle parameetrilisele kujule

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \quad a \leq x \leq b \\ z = z(x), \end{cases}$$

ja valemist (26) saame

$$\int_{AB} f(x,y,z)dx = \int_{a}^{b} f[x,y(x),z(x)]dx. \quad (29)$$

Analoogiliselt toimitakse ka juhul, kui joon AB on mingis lõigus antud võrranditega

$$\begin{cases} z = z(y) \\ x = x(y) \end{cases}$$

või

$$\begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z). \end{cases}$$

7) Kui joon AB on antud ilmutamata kujul võrrandisüs-

teemiga

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

siis toimime analoogiliselt nagu esimest liiki ruumilise joonintegraali arvutamisel (vt. lk. 149, punkt 8)).

8) Kui joon $L = AB$ on kinnine, s.t. $A = B$, siis joonintegraalide (13), (14) ja (15) arvutamisel võib integreerimistee alguspunktiks võtta joone iga punkti.

<u>Joonintegraali arvutamine Greeni valemi abil.</u> Kui funktsioonid $P = P(x,y)$ ja $Q = Q(x,y)$ ning nende osatuletised P_y ja Q_x on pidevad kinnises piirkonnas D, mille rajajoon L on ositi sile, siis kehtib valem

$$\int_L Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dxdy, \tag{30}$$

kus joonintegraal võetakse mööda rajajoont L positiivses suunas, s.o. suunas, milles mööda joont L liikudes piirkond D jääb vasakule.

Valemit (30) nimetatakse <u>Greeni valemiks</u>. Tema abil võib mööda kinnist joont võetud teist liiki tasapinnalise joonintegraali arvutamise taandada teatava kahekordse integraali arvutamisele.

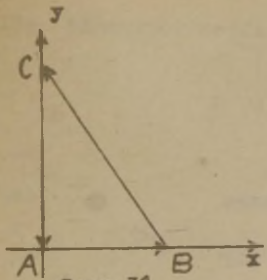
<u>Näide 6</u>. Arvutada joonintegraal

$$J = \int_L (3x^2 + y)dx + xdy,$$

kus joon $L = ABCA$ on moodustatud kolmnurga ABC külgedest, kus $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ ja $C = (0,2)$.

<u>Lahendus.</u> Integreerimistee L on kujutatud joonisel 31,

kus integreerimistee L läbimissuund on märgitud nooltega.



Joon.31

Siin on otstarbekohane jagada integreerimistee kolme ossa vastavalt kolmnurga külgedele. Siis aditiivsuse omaduse põhjal saame

$$J = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} .$$

Arvutame nüüd iga integraali eraldi.

Arvutame kõigepealt integraali mööda lõiku AB, mille võrrand on $y = 0$, kus $0 \leqslant x \leqslant 1$. Et lõik AB on risti y-teljega, siis omaduse IV põhjal on

$$\int\limits_{AB} x\,dy = 0.$$

Kasutades nüüd võrdust (21) ja arvutusvalemit (24), saame

$$\int\limits_{AB} (3x^2 + y)dx + xdy \overset{(21)}{=} \int\limits_{AB} (3x^2 + y)dx + \int\limits_{AB} xdy \overset{(IV)}{=}$$

$$= \int\limits_{AB} (3x^2 + y)dx \overset{(24)}{=} \int\limits_0^1 3x^2dx = 1.$$

Analoogiliselt mööda lõiku CA, mille võrrand on $x=0$, kus $2 \geqslant y \geqslant 0$, saame omaduse IV, võrduse (21) ja arvutusvalemi (25) põhjal, et

$$\int\limits_{CA} (3x^2 + y)dx + xdy \overset{(21)}{=} \int\limits_{CA} (3x^2 + y)dx + \int\limits_{CA} xdy =$$

$$\overset{(IV)}{=} \int\limits_{CA} xdy \overset{(25)}{=} \int\limits_2^0 0dy = 0.$$

Arvutame lõpuks integraali mööda lõiku BC, mille

23

võrrand on $y = -2x + 2$, kus $1 \geqslant x \geqslant 0$. Lugedes muutuja x parameetriks, võime lõigu BC parameetrilised võrrandid esitada kujul

$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ x = x. \end{cases}$$

Siis valemite (22) ja (23) põhjal, saame

$$\int_{BC} \overset{(21)}{=} \int_{BC} (3x^2 + y)dx + \int_{BC} xdy \overset{(22,23)}{=}$$

$$= \int_1^0 (3x^2 - 2x + 2)dx + \int_1^0 x(-2)dx =$$

$$= \int_1^0 (3x^2 - 4x + 2)dx = -1.$$

Viimase integraali arvutamiseks oleks võinud kasutada ka valemeid (24) ja (25).

Kokkuvõttes oleme saanud

$$J = 1 + 0 - 1 = 0.$$

Näide 7. Arvutada joonintegraal

$$J = \int_L y^2dx + z^2dy + x^2dz,$$

kui joon L on poolsfääri $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ja silindri $x^2 + y^2 = 2x$ lõikejoon, mis läbitakse kellaosuti liikumisele vastupidises suunas, kui vaadata x-telje positiivse osa poolt kohast, kus $x > 2$.

Lahendus. Joon L on kujutatud joonisel 26. Tema parameetrilised võrrandid on antud näites 3. Kui parameeter t kasvab lõigus $[0,2\pi]$, siis märgitud kohast x-teljel vaadates liigub joone punkt (x,y,z) kellaosuti liikumisele vastupidises suunas. Seega võime võtta

$$\begin{cases} x = (1 + \cos t) = 2\cos^2 \frac{t}{2} \\ y = \sin t \\ z = 2 \sin \frac{t}{2}, \qquad t \in [0,2\pi] \end{cases}$$

kust

$$\dot{x} = -\sin t,\ \dot{y} = \cos t,\ \dot{z} = \cos(t/2).$$

Seega võime kasutada arvutusvalemeid (26), (27) ja (28). Saame

$$J \overset{(18)}{=} \int_L y^2dx + \int_L z^2dy + \int_L x^2dz \overset{(26-28)}{=}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t(-\sin t)dt + 4\int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cos t\, dt +$$

$$+ \int_0^{2\pi} 4\cos^4 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\, dt.$$

Et esimeses ja kolmandas integraalis on sin t ja cos(t/2) paaritus astmes ja need integraalid on võetud üle lõigu $[0,2\pi]$, siis nad võrduvad nulliga. Seega

$$J = 4\int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cos t\, dt = 2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\cos t\, dt =$$

$$= -2\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = -\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)dt = -2\pi .$$

Ülesanded.

Arvutada järgmised teist liiki joonintegraalid mööda antud joont AB.

687. $\int\limits_{AB} xy\,dx$, AB: $y = \sin x$, $A = (0,0)$, $B = (\pi,0)$

688. $\int\limits_{AB} (x^2 - y^2)dx$, AB: $y = x^2$, $A = (0,0)$, $B = (2,4)$

689.* $\int\limits_{AB} (x^2 - y^2)dy$, AB: $x = \sqrt{y}$, $A = (0,0)$, $B = (2,4)$

690. $\int\limits_{AB} x\,dy$, AB: $3x + 2y - 6 = 0$, $A = (2,0)$, $B = (0,3)$

691.* $\int\limits_{AB} y\,dx$, AB: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

692.* $\int\limits_{AB} x\,dy$, AB: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

Arvutada järgmised üldised teist liiki joonintegraalid.

693. $\int\limits_{L} x\cos y\,dx - y\sin x\,dy$ mööda sirglõiku L punktist (0,0) punktini $(\pi, 2\pi)$.

694. $\int\limits_{L} y\,dx + \operatorname{sh} x\,dy$, kus L on aheljoon $y = \operatorname{ch} x$ punktist (0,1) punktini (ln 2, 5/4).

695. $\int\limits_{L} (xy - y^2)dx + x\,dy$, kus L on parabooli $y = 2x^2$ kaar punktist (0,0) punktini (1,2).

696. $\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, AB: $y = x^2$,
$A = (-1,1)$, $B = (1,1)$

697. $\int\limits_{AB} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, AB: $y = 1 - |1 - x|$,
$A = (0,0)$, $B = (2,0)$

698. $\int\limits_{AB} (2 - y)dx + x\,dy$, AB: $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$

$A = (0,0)$, $B = (2\pi, 0)$

699. $\int\limits_{AB} y^2dx + x^2dy$, kus AB on ellipsi $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ ülemine pool, $A = (a,0)$

700. $\int\limits_{AB} \dfrac{y^2dx - x^2dy}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, AB: $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$

$A = (1,0)$, $B = (0,1)$

Arvutada järgmised teist liiki joonintegraalid mööda antud kinnist kõverat L positiivses suunas, s.o. kellaosuti liikumisele vastassuunas.

701.* $\int\limits_{L} x\,dy$, kus L on kontuur, mille moodustavad kolmnurga ABC küljed, kui $A = (0,0)$, $B = (3,0)$ ja $C = (0,2)$

702. $\int\limits_{L} (x^2 + y^2)dx$, kus L on ristkülik, mille moodustavad sirged $x = 1$, $x = 5$, $y = 1$ ja $y = 3$

703. $\int\limits_{L} y\,dx - x\,dy$, kus L on ellips $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$

704. $\int\limits_{L} y\,dx + x\,dy$, kus L on kontuur, mille moodustavad ringjoone kaar $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, kui $0 \leq t \leq \pi/2$, ja koordinaatteljed

705. $\int\limits_{L} \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, kus L on ringjoon $x = a \cos t$, $y = a \sin t$

706. $\int\limits_{L} 2x\,dx - (x + 2y)dy$ mööda kolmnurga ABC kontuuri L,

kus $A = (-1,0)$, $B = (2,0)$ ja $C = (0,2)$

707. $\int\limits_L y\cos x\,dx + \sin x\,dy$ mööda kolmnurga ABC kontuuri L, kus $A = (-1,0)$, $B = (2,0)$ ja $C = (0,2)$

708. $\int\limits_L 2x(y - 1)dx + x^2dy$, kus L on moodustatud joontest $y = x^2$ ja $y = 9$

709. $\int\limits_L (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, kus L on ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

710. $\int\limits_L \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, kus L on ringjoon $x^2 + y^2 = a^2$

711. $\int\limits_L dx - \arctan\frac{y}{x}\,dy$, kus L on moodustatud joontest $y = x^2$ ja $y = x$

712. $\int\limits_L \frac{xy}{x^2 + y^2}(y\,dx - x\,dy)$, kus L on lemniskaadi $r^2 = \cos 2\varphi$ parem pool

Arvutada järgmised teist liiki ruumilised joonintegraalid.

713. $\int\limits_{AB} x\,dx + y\,dy + z\,dz$ mööda sirglõiku AB, kus $A = (1,1,1)$ ja $B = (2,3,4)$

714. $\int\limits_L y\,dx + z\,dy + z\,dz$, kus L on murdjoon ABCD ning $A = (0,0,0)$, $B = (a,0,0)$, $C = (a,a,0)$, $D = (a,a,a)$

715. $\int\limits_{AB} (y^2 - z^2)dx + 2yz\,dy - x^2dz$,

$$AB: \begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

716. $\int\limits_{AB} y\,dx + z\,dy + x\,dz$, $AB: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = t, \end{cases}$

717. $\int\limits_{AB} yz\,dx + z\sqrt{1 - y^2}\,dy + xy\,dz$, $AB: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t/\pi, \end{cases}$

kui punktis A joon lõikub tasandiga $z = 0$ ja punktis B tasandiga $z = 2$

718. $\int\limits_{AB} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$ mööda sirglõiku AB, mis ühendab punkte $A = (1,1,1)$ ja $B = (4,4,4)$

719. $\int\limits_{L} y^2dx + z^2dy + x^2dz$, kui joon L on poolsfääri $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ja silindri $x^2 + y^2 = ax$ lõikejoon, mis läbitakse positiivses suunas, kui vaadata x-telje positiivse osa poolt kohast, kus $x > a$

Greeni valemi abil teisendada järgmised joonintegraalid kahekordseks integraaliks, kui joon L piirab piirkonda D tasandil $z = 0$.

720. $\int\limits_{L} (2xy - y)dx + x^2dy$

721. $\int\limits_{L} (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$

722. $\int\limits_{L} (e^{xy} + 2x\cos y)dx + (e^{xy} - x^2\sin y)dy$

723. $\int\limits_{L} 4y\,\mathrm{sh}^2x\,dx + (2x + \mathrm{sh}\,2x)dy$

724. $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, dx + (xy + \ln y + \operatorname{arsh} \frac{x}{y})y\, dy$

Greeni valemi abil arvutada järgmised joonintegraalid, kui joon L läbitakse positiivses suunas.

725. $\int\limits_L (1 - x^2)y\, dx + (1 + y^2)x\, dy$, L: $x^2 + y^2 = a^2$

726. $\int\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, L: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

727. $\int\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, L: $x^2 + y^2 = ax$

728. $\int\limits_L y^2dx + (x + y)^2dy$, kus L on kolmnurga ABC kontuur tippudega A = (a,0), B = (a,a), C = (0,a)

729. $\int\limits_L x^2y\, dx - xy^2\, dy$, L: $x^2 + y^2 = a^2$

730. $\int\limits_L 2e^x\sin^2(y/2)dx - (y - \sin y)dy$, kus L on moodustatud kõveratest $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ ja $y = \sin x$

§ 4. Integreerimisteest sõltumatud joonintegraalid

Tasapinnaline juhtum. Sidusat tasapinnalist piirkonda D nimetatakse ühelisidusaks, kui piirkonnas D iga kinnise joone poolt ümbritsetud piirkond sisaldab ainult D punkte.

Olgu funktsioonid $P = P(x,y)$ ja $Q = Q(x,y)$ määratud ühelisidusas lahtises piirkonnas D. Vaatleme selles piirkonnas D teist liiki joonintegraali

$$J = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy, \qquad (31)$$

kus otspunktid $A, B \in D$.

Joonintegraali (31) nimetatakse piirkonnas D <u>integreerimisteest sõltumatuks</u>, kui ta sõltub ainult punktide A ja B asukohast piirkonnas D ja ei sõltu integreerimisteeks võetavast joonest AB piirkonnas D. Sel korral kirjutatakse

$$J = \int_A^B P dx + Q dy.$$

Analoogiliselt defineeritakse ka integreerimisteest sõltumatu ruumiline teist liiki joonintegraal.

Olgu funktsioonid P ja Q ning nende osatuletised P_y ja Q_x pidevad piirkonnas D. Siis kehtivad järgmised teoreemid.

I. Joonintegraal (31) on piirkonnas D integreerimisteest sõltumatu parajasti siis, kui piirkonnas D integraalialune diferentsiaalavaldis

$$P dx + Q dy \tag{32}$$

on täisdiferentsiaal mingile funktsioonile.

II. Avaldis (32) on piirkonnas D täisdiferentsiaal mingile funktsioonile parajasti siis, kui

$$P_y = Q_x \tag{33}$$

piirkonnas D.

III. Kui piirkonnas D avaldis (32) on täisdiferentsiaal mingile funktsioonile $U = U(x,y)$, siis kehtib Newton-Leibnizi valem joonintegraalile (31), s.o.

$$\int_A^B P dx + Q dy = U(B) - U(A). \tag{34}$$

IV. Piirkonnas D mööda iga kinnist joont L on

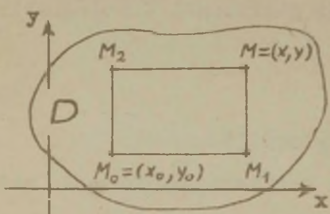
$$\int_L Pdx + Qdy = 0 \tag{35}$$

parajasti siis, kui integraalialune avaldis (32) on täisdiferentsiaal mingile funktsioonile.

Sõnastatud teoreemides on oluline, et osatuletised P_y ja Q_x oleksid pidevad piirkonnas D. Vastasel juhul, näit. teoreemis IV, tingimus (35) ei kehti.

<u>Funktsiooni U = U(x,y) määramine tema täisdiferentsiaali järgi</u>. Valemi (34) kasutamiseks on vaja leida funktsioon U, mille täisdiferentsiaal (32) on antud. Seda võib teha kolmel järgmisel viisil.

<u>Meetod I.</u> Kui punktid $M_0 = (x_0,y_0)$ ja $M = (x,y)$ ning murdjoon M_0M_1M (vt. joon.32) asetsevad piirkonnas D, siis funktsioon U, mille täisdiferentsiaal on (32), on arvutatav valemiga



Joon.32

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C, \tag{36}$$

kus C on suvaline konstant.

Kui aga punktid M_0 ja M ning murdjoon M_0M_2M asetsevad piirkonnas D, siis

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C. \tag{37}$$

Punkt M_0 valitakse nii, et eeldused murdjoonte M_0M_1M

või M_0M_2M kohta oleksid täidetud. Punkti M_0 valikuga saab tihti integraalide (36) ja (37) arvutamist lihtsustada.

Meetod II. Otseselt funktsiooni U leidmiseks ilma valmis valemeid (36) ja (37) kasutamata toimitakse järgmiselt.

Kuna $dU = U_x dx + U_y dy$, siis avaldises (32) on

$$U_x = P.$$

Seega, lugedes y konstantseks, saame

$$U(x,y) = \int P(x,y)dx = F(x,y) + a(y), \tag{38}$$

kus F on funktsiooni P algfunktsioon ja a(y) on integreerimiskonstant, mis võib sõltuda muutujast y. Jääb määrata suurus a(y). Selleks diferentseerime saadud avaldist (38) muutuja y järgi ja arvestame, et avaldises (32) on $Q = U_y$, saame

$$U_y = F_y + a'(y) = Q,$$

millest avaldame a'(y). Siis integreerides leiame

$$a(y) = \int a'(y)dy + C.$$

Seega

$$U(x,y) = F(x,y) + \int a'(y)dy + C.$$

Meetod III. Avaldises $dU = Pdx + Qdy$ on

$$U_x = P, \quad U_y = Q.$$

Integreerides esimest võrdust x järgi ja teist y järgi, saame kaks järgmist avaldist funktsioonile U:

$$U = \int Pdx + a(y), \text{ lugedes } y = \text{const},$$

$$U = \int Qdy + b(x), \text{ lugedes } x = \text{const},$$

kus a(y) ja b(x) on integreerimiskonstandid. Võtame nüüd esimese U avaldise ja lisame temale liikme a(y) asemele teisest U avaldisest ainult muutujast y sõltuvad liikmed, siis saamegi otsitava funktsiooni U. Analoogiliselt, lisades teisele U avaldisele b(x) asemele esimesest U avaldisest ainult muutujast x sõltuvad liikmed, saame jällegi otsitava funktsiooni U.

Integreerimisteest sõltumatu tasapinnalise joonintegraali arvutamine. Sellise joonintegraali arvutamiseks kasutatakse valemit (34), milleks tuleb eelnevalt leida funktsioon U. Kui funktsiooni U on võimalik leida valemi (36) või (37) järgi, siis arvutustööd saab lihtsustada järgmisel viisil.

Olgu valemis (36) konstant $C = U(x_0,y_0)$, siis

$$U(x,y) - U(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$$

ja seega, võttes $A = (x_0,y_0)$ ja $B = (x,y)$, võime valemi (34) kirjutada kujul

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy. \quad (39)$$

Analoogiliselt saame valemi (37) abil

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy. \quad (40)$$

Näide 8. Leida funktsioon $U = U(x,y)$, kui

$$dU = (3x^2y^2 + \cos x)dx + (2x^3y - \frac{1}{y})dy.$$

Lahendus. Antud funktsioonide

$$P = 3x^2y^2 + \cos x, \quad Q = 2x^3y - \frac{1}{y}$$

kerral kehtib võrdus (33) kõikjal peale x-telje $y = 0$. Seega antud avaldis dU on tõepoolest täisdiferentsiaal funktsioonile U piirkonnas $D = \{(x,y): y \neq 0\}$.

Leiame funktsiooni U meetodiga I, näiteks valemi (36) abil. Siis peame piirkonna D jaotama kahte ossa: D_1, kus $y>0$, ja D_2, kus $y<0$, sest kogu piirkonna D ulatuses me ei saa murdjoonte kohta eeldusi täita. Piirkonnas D_1 saame valemi (36) järgi, kus arvutuste lihtsustamiseks võtame $x_0 = 0$ ja $y_0=1$, et

$$U(x,y) = \int_0^x (3x^2 + \cos x)dx + \int_1^y (2x^3y - \frac{1}{y})dy + C_1$$

$$= x^3 + \sin x + x^3y^2 - \ln|y| - x^3 + C_1.$$

Seega piirkonnas D_1 on

$$U(x,y) = x^3y^2 + \sin x - \ln y + C_1.$$

Piirkonnas D_2 saame valemi (36) järgi, võttes $x_0 = 0$ ja $y_0 = -1$, et

$$U(x,y) = x^3y^2 + \sin x - \ln|y| + C_2.$$

Näeme, et mõlemas piirkonnas tuleb üks ja seesama funktsioon U, milles erinevus on vaid konstandis. Võttes mõlemas saadud avaldises konstandid võrdseks, oleme saanud $U(x,y)$ kogu piirkonnas D:

$$U(x,y) = x^3y^2 + \sin x - \ln|y| + C,$$

kus C on suvaline konstant.

Leiame funktsiooni U veel meetodiga II. Selleks võtame

$$U_x = P = 3x^2y^2 + \cos x,$$

siis

$$U = \int (3x^2y^2 + \cos x)dx = x^3y^2 + \sin x + a(y).$$

Diferentseerime saadud avaldist y järgi ja võrdustame tulemuse suurusega Q, saame

$$2x^3y + a'(y) = 2x^3y - \frac{1}{y},$$

kust

$$a'(y) = -\frac{1}{y}.$$

Seega

$$a(y) = -\ln|y| + C.$$

Järelikult oleme saanud sama vastuse

$$U(x,y) = x^3y^2 + \sin x - \ln|y| + C,$$

kus $y \neq 0$.

Leiame funktsiooni U ka meetodiga III. Siis meil on

$$U_x = 3x^2y^2 + \cos x, \quad U_y = 2x^3y - \frac{1}{y}.$$

Integreerides esimest avaldist x järgi ja teist y järgi, saame

$$U = x^3y^2 + \sin x + a(y),$$
$$U = x^3y^2 - \ln|y| + b(x).$$

Võtame lähteks esimese U avaldise. Paigutame temasse $a(y)$ asemele teisest U avaldisest ainult muutujast y sõltuvad liikmed, milleks on vaid liige $-\ln|y|$. Seega võib lugeda $a(y) = -\ln y + C$, kus C on suvaline konstant. Järelikult otsitav funktsioon U on

$$U = x^3y^2 + \sin x - \ln|y| + C.$$

Sama tulemuse saame, kui lähtume U teisest avaldisest.

Ülesanded.

Näidata, millised järgmistest joonintegraalidest on integreerimisteest L sõltumatud ja millised on sõltuvad.

731. $\int\limits_L (4x + 2y)dx + (2x - 6y)dy$

732. $\int\limits_L (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$

733. $\int\limits_L y\,dx - x\,dy$

734. $\int\limits_L (3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy$

735. $\int\limits_L (3xy - 2y^2 + 4y)dx + (2x^2 - 3xy + 4x)dy$

736. $\int\limits_L \operatorname{sh}(x + y)dx - \operatorname{ch}(x - y)dy$

737. $\int\limits_L \left(\frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dx + 2xy\,dy$

Näidata, et iga diferentseeruva funktsiooni f korral järgmised joonintegraalid võrduvad nulliga, kui L on kinnine kõver.

738. $\int\limits_L f(x)dx + \operatorname{th} y\,dy$

739. $\int\limits_L f(xy)(y\,dx + x\,dy)$

740. $\int\limits_L x^{-2}f(y/x)(x\,dy - y\,dx)$

741. $\int\limits_L \left[f(x + y) + f(x - y)\right] (dx + dy)$

Leida funktsioonid $U = U(x,y)$ nende täisdiferentsiaalide dU järgi.

742. $dU = (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy$

743. $dU = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

744. $dU = \dfrac{(x + 2y)dx + y\,dy}{(x + y)^2}$

745. $dU = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{ydx - xdy}{x^2}$

746. $dU = (e^{2y} - 5y^3e^x)dx + (2x\,e^{2y} - 15y^2e^x)dy$

747. $dU = (12x^2y + y^{-2})dx + (4x^3 - 2x\,y^{-3})dy$

748. $dU = (2x\cos y - y^2\sin x)dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy$

749. $(1 + x^2)^2dU = 2x(1 - e^y)dx + (1 + x^2)e^ydy$

750. $(x + y)^3\,dU = (x^2 + 2xy + 5y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy$

751. $dU = \sin(x + y)(dx + dy)$

752. $dU = e^{xy}\left[(1 + xy)dx + x^2dy\right]$

753. $dU = (\mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}\,y)dx + (x\,\mathrm{sh}\,y + 1)dy$

Leida järgmised integreerimisteest sõltumatud joonintegraalid.

754. $\displaystyle\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} y\,dx + x\,dy$

755. $\int\limits_{(0,1)}^{(1,2)} 2x\, y^{-3}\, dx - (3x^2 - y^2)y^{-4}dy$

756. $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} x^{-2}(y\, dx - x\, dy)$

757. $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$

758. $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} (1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x})dx + (\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x})dy$

759. $\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy\, dx + x^2\, dy$

760*. Tõestada, et joonintegraal

$$\int\limits_{L} \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2} = 2\pi,$$

kui L on suvaline kinnine kõver, mis ümbritseb punkti (0,0).

761. Arvutada joonintegraal

$$\int\limits_{L} \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + 9y^2}$$

üle ringjoone L: $x^2 + y^2 = a^2$.

Ruumiline juhtum. Samasugused tulemused, mis on eespool sõnastatud tasapinnalise joonintegraali (31) kohta, kehtivad ka ruumilise joonintegraali korral.

Olgu antud ruumiline piirkond E. Sidusat piirkonda E nimetatakse ühelisidusaks, kui piirkonnas E iga kinnise pinna poolt ümbritsetud ruumiosa sisaldab ainult E punkte.

Olgu funktsioonid $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$ ja $R =$

$= R(x,y,z)$ määratud ühelisidusas lahtises piirkonnas E. Vaatleme selles piirkonnas E teist liiki joonintegraali

$$J = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz, \tag{41}$$

kus $A,B \in E$. Kui integraal (41) ei sõltu integreerimisteest, siis kirjtatakse

$$J = \int_A^B Pdx + Qdy + Rdz.$$

Olgu funktsioonid P,Q ja R ning nende osatuletised pidevad piirkonnas E. Siis kehtivad järgmised teoreemid.

I'. Joonintegraal (41) on piirkonnas E integreerimisteest sõltumatu parajasti siis, kui piirkonnas E integraalialune avaldis

$$Pdx + Qdy + Rdz \tag{42}$$

on täisdiferentsiaal mingile funktsioonile.

II'. Avaldis (42) on piirkonnas E täisdiferentsiaal mingile funktsioonile parajasti siis, kui

$$P_y = Q_x, \quad Q_z = R_y, \quad R_x = P_z \tag{43}$$

piirkonnas E.

III'. Kui piirkonnas E avaldis (42) on täisdiferentsiaal mingile funktsioonile $U = U(x,y,z)$, siis kehtib Newton-Leibnizi valem joonintegraalile (41), s.o.

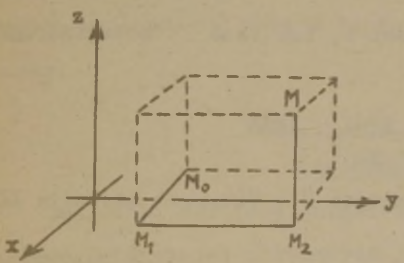
$$\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz = U(B) - U(A). \tag{44}$$

IV'. Piirkonnas E mööda iga kinnist joont L on

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{45}$$

parajasti siis, kui integraalialune avaldis (42) on täisdiferentsiaal mingile funktsioonile.

Funktsiooni $U = U(x,y,z)$ määramine tema täisdiferentsiaali järgi. Valemi (44) kasutamiseks on vaja leida funktsioon U, mille täisdiferentsiaal (42) on antud. Funktsioon U leitakse analoogiliste meetoditega nagu tasapinnalisel juhul. Neist lihtsaim on järgmine meetod. Kui punktid $M_0 = (x_0,y_0,z_0)$ ja $M = (x,y,z)$ ning murdjoon $M_0M_1M_2M$ (vt. joon. 33). asetsevad piirkonnas E, siis funktsioon U, mille täisdiferentsiaal on (42), on arvutatav valemiga



Joon.33

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz. \tag{46}$$

Punkt $M_0 = (x_0,y_0z_0)$ valitakse ka siin nii, et eeldused murdjoone $M_0M_1M_2M$ kohta oleksid täidetud ja integraalide (46) arvutamine oleks võimalikult lihtsam. Analoogilised valemid saame, kui teised joonisel 33 olevad murdjooned asetsevad piirkonnas E.

Ruumilise integreerimisteest sõltumatu joonintegraali arvutamine. Sellise joonintegraali arvutamiseks kasutatakse valemit (44), milleks tuleb eelnevalt leida funktsioon U.

Kui funktsioon U on võimalik leida valemi (46) järgi, siis analoogiliselt nagu tasapinnalisel juhul saame arvutamiseks valemi

$$\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz. \quad (47)$$

Näide 9. Leida funktsioon U, kui tema täisdiferentsiaal on

$$dU = \frac{xzdy + xydz - yzdx}{(x - yz)^2}.$$

Lahendus. Leiame funktsiooni $U = U(x,y,z)$ meetodis III antud võttega. Meil on

$$P = \frac{-yz}{(x - yz)^2}, \quad Q = \frac{xz}{(x - yz)^2}, \quad R = \frac{xy}{(x - yz)^2}.$$

Integreerides neid funktsioone vastavalt x,y ja z järgi, saame funktsiooni U jaoks kolm avaldist

$$U = \int\frac{-yzdx}{(x - yz)^2} + a(y,z) = \frac{yz}{x - yz} + a(y,z),$$

$$U = \int\frac{xzdy}{(x - yz)^2} + b(x,z) = \frac{x}{x - yz} + b(x,z),$$

$$U = \int\frac{xydz}{(x - yz)^2} + c(x,y) = \frac{x}{x - yz} + c(x,y),$$

kus $a(y,z)$, $b(x,z)$ ja $c(x,y)$ on integreerimiskonstandid. Võtame, näiteks, esimese avaldise U ja paigutame sinna konstandi $a(y,z)$ asemele ülejäänud kahest U avaldisest ainult muutujatest y ja z sõltuvad liikmed. Kuna selliseid liikmeid ei ole, siis olemegi saanud

$$U = \frac{yz}{x - yz} + C,$$

kus C on suvaline konstant.

Funktsioonile U võib anda ka teise kuju järgmise teisendusega

$$U = \frac{yz}{x - yz} + \frac{x - yz}{x - yz} + C - 1 = \frac{x}{x - yz} + D,$$

kus D = C - 1 on suvaline konstant. Viimase võime ka kohe saada, kui lähteks võtame teise või kolmanda avaldise U jaoks.

Ülesanded.

Näidata, millised järgmistest joonintegraalidest L on integreerimisteest sõltumatud ja millised on sõltuvad.

762. $\int\limits_L \ln(x + y)dx + \arcsin z\, dy + e^{x+y}dz$

763. $\int\limits_L z \cos y\, dx - z\, x \sin y\, dy + x(1 + \cos y)dz$

764. $\int\limits_L \frac{yz}{\sqrt{x}} dx + 2z\sqrt{x}\, dy + 2y\sqrt{x}\, dz$

765. $\int\limits_L \frac{x\, dx + y\, dy + z\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Leida funktsioonid U = U(x,y,z) nende täisdiferentsiaalide dU järgi.

766. $dU = \frac{dx + dy + dz}{x + y + z}$

767. $dU = \frac{yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz}{1 + x^2y^2z^2}$

768. $dU = \dfrac{yz\,dx - xz\,dy - xy\,dz}{(x - yz)^2}$

769. $dU = \dfrac{z\,dx - 3z\,du - (x - 3y - z^3)dz}{z^2}$

Leida järgmised integreerimisteest sõltumatud joonintegraalid.

770. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} x\,dx + y\,dy + z\,dz$

771. $\displaystyle\int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} x\,dx - y^2\,dy + z\,dz$

772. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,dx + y^2\,dy - z^3\,dz$

773. $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

774. $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

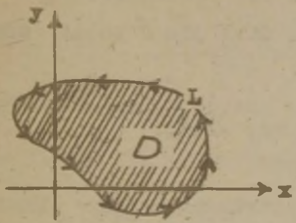
775. $\displaystyle\int_{(-1,2,2)}^{(0,3,4)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

776. $\displaystyle\int_{(0,1,2)}^{(7,2,3)} \frac{yz\,dx - xz\,dy - xy\,dz}{(x - yz)^2}$

777. $\displaystyle\int_{(0,0,1)}^{(3,1,5)} \frac{dx - 3dy}{z} + \frac{3y - x + z^3}{z^2}\,dz$

§ 5. Teist liiki jooneintegraalide rakendused

Tasaste pindade pindala arvutamine. Olgu xy-tasandil asetseva piirkonna D rajajoon L ositi sile (vt. joon. 34).



Joon.34

Siis, nagu nähtub Greeni valemist, võib piirkonna D pindala S_D arvutada järgmiste valemite abil (joon L läbitakse positiivses suunas):

$$S_D = \int_L x\,dy, \tag{48}$$

$$S_D = -\int_L y\,dx. \tag{49}$$

Valemite (48) ja (49) kokkuliitmisel saame praktiliselt kasutamiseks enam sobiva valemi

$$S_D = \frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx. \tag{50}$$

Viimast valemit (50) sageli sümboolselt esitatakse kujul

$$S_D = \frac{1}{2}\int_L x^2\,d\,\frac{y}{x}. \tag{51}$$

Kui joon AB on antud parameetriliste võrranditega kujul

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = tx, \end{cases} \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

siis valem (51) teisendub kujule

$$S_D = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta x^2\,dt. \tag{52}$$

Töö arvutamine. Liikugu masspunkt massiga m piki joont

AB punktist A punktini B jõu

$$\vec{F} = (P,Q,R)$$

toimel, kus

$$P = P(x,y,z), \quad Q = Q(x,y,z), \quad R = R(x,y,z)$$

on pidevad funktsioonid joonel AB. Siis jõu $\vec{F}$ poolt tehtud kogu töö W on arvutatav valemiga

$$W = m \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz. \tag{53}$$

Kui jõud $\vec{F}$ on määratud mingi piirkonna E igas punktis ja integraalis (53) integraalialune avaldis on täisdiferentsiaal funktsioonile $U = U(x,y,z)$, siis valemi (44) põhjal jõu $\vec{F}$ poolt tehtud töö

$$W = m\left[U(B) - U(A)\right], \tag{54}$$

s.t. tehtud töö W ei sõltu vaadeldaval juhul masspunkti liikumisteest AB, vaid sõltub ainult masspunkti algasukohast A ja lõppasukohast B.

Näide 10. Leida xy-tasandil asetseva kujundi pindala S, kui see kujund on piiratud joonega

$$x^3 + y^3 = x^2 + y^2$$

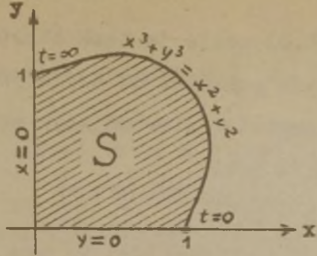
ja koordinaattelgedega.

Lahendus. Leiame joone parameetrilised võrrandid. Selleks võtame $y = tx$, siis

$$x^3 + t^3x^3 = x^2 + t^2x^2,$$

kust saame (vt. joon. 35)

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 + t^2}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{t(1 + t^2)}{1 + t^3}, \end{cases} \quad t \in [0, \infty).$$



Joon.35

Pindala arvutamiseks kasutame valemit (52), sest $y/x = t$, kus $0 \leqslant t < \infty$. Seega

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2}\,dt \underset{(t^3=u)}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(1+u^{2/3})^2\,du}{(1+u)^2\,3u^{2/3}} =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{1+2u^{2/3}+u^{4/3}}{(1+u)^2\,u^{2/3}}\,du =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{u^{-2/3}+2+u^{2/3}}{(1+u)^2}\,du =$$

$$= \frac{1}{6}\left[B(\tfrac{1}{3},\tfrac{5}{3}) + 2B(1,1) + B(\tfrac{5}{3},\tfrac{1}{3})\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[B(1,1) + B(\tfrac{1}{3},\tfrac{5}{3})\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(2)} + \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(5/3)}{\Gamma(2)}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 + \Gamma(1/3)\cdot\frac{2}{3}\cdot\Gamma(2/3)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{\pi}{\sin(\pi/3)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4\pi}{3\cdot\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}\,.$$

Näide 11. Olgu xy-tasandil igas punktis M(x,y) jõud $\vec{F}$

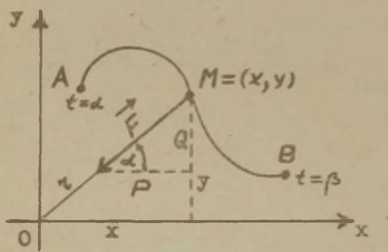
suunatud punkti $O = (0,0)$ poole ja tema suurus olgu $1/r$, kus r on punkti M kaugus punktist O. Leida jõu $\vec{F}$ poolt tehtud töö W, mis kulub punkti M nihutamiseks mööda joont

$$AB: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

punktist A, kus $t = \alpha$, kuni punktini B, kus $t = \beta$.

<u>Lahendus.</u> Punkti M kaugus punktist O on

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Joon.36

Leiame jõu $\vec{F} = (P,Q)$ koordinaadid P ja Q. Saame (vt. joon. 36)

$$\frac{P}{F} = \cos\alpha = \frac{-x}{r},$$

$$\frac{Q}{F} = \sin\alpha = \frac{-y}{r},$$

kust

$$P = -\frac{x}{r^2}, \quad Q = -\frac{y}{r^2},$$

s.t.

$$\vec{F} = \left(-\frac{x}{r^2}, -\frac{y}{r^2}\right).$$

Valemi (53) järgi on (loeme $m = 1$)

$$W = \int_{AB} -\frac{x}{r^2}\,dx - \frac{y}{r^2}\,dy.$$

Arvutades viimase integraali arvutusvalemite (22) ja (23) järgi, saame

$$W = -\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t)}{x^2(t) + y^2(t)}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln[x^2(t) + y^2(t)]\Big|_\alpha^\beta = -\frac{1}{2}\ln r^2\Big|_\alpha^\beta = -\ln r\Big|_\alpha^\beta.$$

Tähistame $r_A = d(O,A)$ ja $r_B = d(O,B)$, siis

$$W = \ln(r_A/r_B).$$

Seega antud juhul töö sõltub ainult punktide A ja B asukohast ning ei sõltu liikumistee AB valikust. See tuleb sellest, et integraalialune avaldis on täisdiferentsiaal funktsioonile

$$U = -\ln r = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

mille võime leida eelmises paragrahvis antud meetoditega. Seega vaadeldava ülesande lahendamisel oleks võinud kasutada ka valemit (54), mis kohe annab

$$W = -\ln r_B - (-\ln r_A) = \ln(r_A/r_B).$$

Ülesanded.

Leida järgmiste tasandiliste kujundite pindalad, mis on piiratud antud kõveratega.

778*. Ellipsiga $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

779. Astroidiga $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$

780. Kardioidiga $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$

781. Kõveratega $y = x^2$ ja $x = y^2$

782. Kõveratega $y = x^2$, $8xy = 1$ ja $x = y^2$, kus $2x \leq 1$

783*. Parabooliga $(x + y)^2 = ax$ ja x-teljega, $a > 0$

784. Joone $(x + y)^3 = 2xy$ silmusega

785. Joone $(x + y)^4 = 3x^2y$ silmusega

786*. Joone $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = 9xy$ silmusega

787*. Bernoulli lemniskaadiga $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$

788*. Leida nelinurga ABCD pindala, kui $A = (6,1)$, $B = (4,5)$, $C = (1,6)$ ja $D = (-1,1)$.

789. Olgu xy-tasandil määratud jõud $\vec{F}$ suunatud igas punktis $M = (x,y)$ punkti $O = (0,0)$ poole ja tema suurus F olgu võrdne punkti M kaugusega punktist O. Leida jõu $\vec{F}$ poolt tehtud töö W, mis on kulunud ühikmassiga punkti nihutamiseks mööda parabooli $y^2 = 8x$ kaart punktist $(2,4)$ kuni punktini $(4, 4\sqrt{2})$.

790. Konstantse suurusega F jõud on xy-tasandi igas punktis x-telje suunaline. Leida selle jõu poolt tehtud töö W, mis kulub ühikmassiga punkti nihutamiseks mööda ringjoont $x^2 + y^2 = a^2$ negatiivses suunas punktist $(0,a)$ kuni punktini $(a,0)$.

791. Jõud $\vec{F}$ on suunatud xy-tasandi igas punktis $M = (x,y)$ punkti $O = (0,0)$ poole ja tema suurus on võrdne punkti M kaugusega punktist O. Leida jõu $\vec{F}$ poolt tehtud töö W, mis kulub punkti, mille mass on m, ümberpaigutamiseks punktist A punkti B.

792. Igas xy-tasandi punktis mõjub jõud $\vec{F}$, mille projektsioonid koordinaattelgedele on

$$P = xy, \quad Q = x + y.$$

Leida jõu $\vec{F}$ poolt tehtud töö W punkti, mille mass on m, nihkumisel punktist $O = (0,0)$ punkti $B = (1,1)$:

a) mööda sirget $y = x$;

b) mööda parabooli $y = x^2$;

c) mööda murdjoont OAB, kus OA on paralleelne x-teljega ja AB paralleelne y-teljega;

d) mööda murdjoont OAB, kus OA on paralleelne y-teljega ja AB on paralleelne x-teljega.

793. Leida jõu $\vec{F} = (2xy, x^2)$ poolt tehtud töö W punkti (massiga m) nihkumisel punktist $A = (1,0)$ punkti $B(0,3)$, veendudes eelnevalt, et selle jõu poolt tehtud töö sõltub ainult punktide A ja B asukohast ja ei sõltu tee kujust.

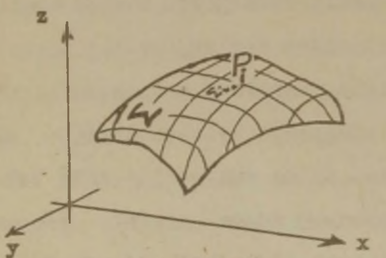
794. Jõud, mille suurus igas punktis $M = (x,y,z)$ on pöördvõrdeline selle punkti M kaugusega xy-tasandist, on suunatud punkti $O = (0,0)$ poole. Leida selle jõu poolt tehtud töö punkti (massiga m) nihkumisel mööda sirget $x = at$, $y = bt$, $z = ct$ punktist $A = (a,b,c)$ punkti $B = (2a,2b,2c)$.

795. Näidata, et väljas, mille igas punktis $M(x,y,z)$ mõjub jõud $\vec{F} = (2xy + y^2\sin x + z,\ x^2 - 2y\cos x,\ 1+x+z^2\sin z)$ materiaalse punkti nihkumisel jõu poolt tehtud töö ei sõltu punkti liikumisteest.

IV. PINDINTEGRAALID

§ 1. Esimest liiki pindintegraalid

Olgu antud sile või siledatest tükkidest koosnev pind Σ (vt. joon. 37). Pinnal Σ olgu määratud kolme muutuja funktsioon



Joon.37

$$f(P) = f(x,y,z).$$

Jaotame pinna Σ suvaliselt n osaks Σ_i ositi siledate joonte abil. Saadud pinna osad Σ_i on mõõtuvad ja nende pindalad olgu S_i. Igal pinna osal Σ_i võtame vabalt punkti P_i ja moodustame summa

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)S_i .$$

Pinna osade Σ_i suurima diameetri tähistame λ abil.

Arvu J nimetatakse funktsiooni f esimest liiki pindintegraaliks (ehk pindintegraaliks pindala järgi) mööda pinda Σ ja kirjutatakse

$$J = \iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS, \qquad (1)$$

kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et

$$|J - \sigma| < \varepsilon , \text{ kui } \lambda < \delta ,$$

sõltumata pinna Σ jaotamisviisist osadeks Σ_i ja punktide $P_i \in \Sigma_i$ valikust.

Kui eksisteerib pindintegraal (1), siis öeldakse ka, et funktsioon f on integreeruv pinnal Σ.

Kui pind Σ asetseb xy-tasandil, siis pindintegraal (1) kujutab endast tavalist kahekordset integraali. Sama on ka siis, kui pind asetseb yz- või zx-tasandil.

Esimest liiki pindintegraalil on samad omadused, mis on kahekordsel integraalil, s.t. pindintegraal (1) on aditiivne, lineaarne jne.

<u>Esimest liiki pindintegraali arvutamine</u>. Kui pind Σ on sile ja funktsioon f on pidev sellel pinnal Σ, siis pindintegraal (1) eksisteerib ja tema arvutamiseks võib kasutada järgmisi valemeid, mis taandavad pindintegraali (1) arvutamise teatava kahekordse integraali arvutamisele.

1) Kui pind Σ on antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad (u,v) \in \Delta, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

siis

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS =$$
$$= \iint\limits_{\Delta} f\left[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\right] \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv, \quad (2)$$

kus (vt. lk. 99)

$$\begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{cases}$$

2) Kui pind Σ on antud ilmutatud võrrandiga

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

siis

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D} f\left[x,y,z(x,y)\right] \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy. \qquad (3)$$

Valemis (3) piirkond D kujutab endast sisuliselt pinna Σ projektsiooni xy-tasandile.

3) Kui pind Σ on antud ilmutamata kujul võrrandiga $F(x,y,z) = 0$, siis kasutame vastavat ilmutamata funktsiooni olemasolu teoreemi (vt. Matemaatilise analüüsi praktikum III, vihik I, Tartu, 1974, lk. 112, Teoreem 2). Kui selle teoreemi tingimused on täidetud, siis saame avaldada pinna võrrandi ilmutatud kujul

$$z = z(x,y),$$

leida tema osatuletised z_x ja z_y ning kasutada arvutusvalemit (3). Sel korral võib pinna võrrandi esitada ka parameetrilisel kujul ja kasutada arvutusvalemit (2).

Valemitele (2) ja (3) analoogilised valemid saame ka, kui pind Σ on antud ilmutatud võrranditega $x = x(y,z)$ või $y = y(z,x)$.

<u>Esimest liiki pindintegraali rakendused</u>. Esimest liiki pindintegraali abil võib arvutada pinna pindala ja materiaalsete pindade masse, inertsimomente ning raskuskeskmete koordinaate.

1) Sileda pinna Σ pindala S_{Σ} on arvutatav valemiga

$$S_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} dS. \qquad (4)$$

Arvutusvalemite (2) ja (3) abil teisendub see valem (4) vastavalt valemiteks (21) ja (22), mis juba olid meil eespool II peatükis.

2) Olgu materiaalsel pinnal Σ pindtihedus määratud funktsiooniga $\rho = \rho(x,y,z)$ pinna igas punktis (x,y,z). Siis pinna Σ mass m_Σ on arvutatav valemiga

$$m_\Sigma = \iint_\Sigma \rho(x,y,z)dS. \tag{5}$$

3) Materiaalse pinna Σ inertsimomendid koordinaattelgede suhtes on arvutatavad valemitega

$$\begin{cases} J_x = \iint_\Sigma (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dS \\ J_y = \iint_\Sigma (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dS \\ J_z = \iint_\Sigma (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dS, \end{cases} \tag{6}$$

kus $\rho = \rho(x,y,z)$ on pinna Σ pindtihedus.

4) Materiaalse pinna Σ raskuskeskme (x_C, y_C, z_C) koordinaadid on arvutatavad valemitega

$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{m}\iint_\Sigma x \ \rho(x,y,z)\ dS \\ y_C = \frac{1}{m}\iint_\Sigma y \ \rho(x,y,z)\ dS \\ z_C = \frac{1}{m}\iint_\Sigma z \ \rho(x,y,z)\ dS, \end{cases} \tag{7}$$

kus $m = m_\Sigma$ arvutatakse valemiga (5) ja $\rho = \rho(x,y,z)$ on pinna Σ pindtihedus.

Näide 1. Arvutada esimest liiki pindintegraal

$$J = \iint_\Sigma x\ dS,$$

kus Σ on sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ osa esimeses oktandis.

Lahendus. Kasutame arvutusvalemit (3) mille kohaselt

$$J = \iint_D x\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy,$$

kus D on pinna Σ projektsioon xy-tasandile. Leiame osatuletised z_x ja z_y. Et pind Σ on antud ilmutamata kujul, siis diferentseerides tema võrrandit x ja y järgi, saame

$$2x + 2zz_x = 0, \quad 2y + 2zz_y = 0,$$

kust

$$z_x = -x/z, \quad z_y = -y/z.$$

Järelikult

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} = \frac{1}{|z|}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} =$$

$$= \frac{a}{|z|} = \frac{a}{z},$$

kus absoluutväärtuse jätsime ära, sest pind Σ asub esimeses oktandis.

Seega

$$J = a\iint_D \frac{x}{z}\, dxdy.$$

Viimase integraali arvutamiseks lähme üle polaarkoordinaatidele. Saame $z^2 = a^2 - r^2$ ja

$$J = a\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a \frac{r\cos\varphi}{z}\, rdr =$$

$$= a\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^a \frac{r^2dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = a\int_0^a \frac{r^2dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Tehes muutuja vahetuse $r^2 = a^2u$, saame $2rdr = a^2du$ ja

$$J = \frac{a}{2}\int_0^1 \frac{a\sqrt{u}\;a^2du}{\sqrt{a^2 - a^2u}} = \frac{a^3}{2}\int_0^1 u^{1/2}(1 - u)^{-1/2}du =$$

$$= \frac{a^3}{2}B(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}) = \frac{a^3}{2}\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(2)} = \frac{a^3}{4}\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi a^3}{4}.$$

Vaadeldud muutuja vahetuse asemel võib teha ka asenduse $r = a\sin u$, siis

$$J = a\int_0^{\pi/2} \frac{a^2\sin^2 u\; a\cos u\, du}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 u}} = a^3\int_0^{\pi/2} \sin^2 u\, du =$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^{\pi/2}(1 - \cos 2u)du = \frac{\pi a^3}{4}.$$

Näide 2. Arvutada esimest liiki pindintegraal

$$J = \iint_{\Sigma} h^{-n}dS,$$

kus Σ on sfäär $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $h = h(x,y,z)$ on sfääri punkti (x,y,z) kaugus punktist $(0,0,c)$, $c > a$ ja n on suvaline arv.

Lahendus. Leiame funktsiooni h, saame

$$h^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - c)^2 = a^2 + c^2 - 2cz.$$

Integraali J arvutamiseks kasutame arvutusvalemit (2). Seepärast esitame pinna Σ võrrandi parameetrilisel kujul minnes üle sfäärilistele koordinaatidele, saame

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi & \\ y = a\sin\theta\sin\varphi & \theta\in[0,\pi], \\ z = a\cos\theta & \varphi\in[0,2\pi). \end{cases}$$

Siis

$$EG - F^2 = a^4\sin^2\theta$$

$$h^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta.$$

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{a^2 \sin\theta \, d\theta}{(a^2 + c^2 - 2ac \cos\theta)^{n/2}} =$$

$$= \frac{2\pi a^2}{2ac} \int_0^{\pi} \frac{d(a^2 + c^2 - 2ac \cos\theta)}{(a^2 + c^2 - 2ac \cos\theta)^{n/2}}.$$

Kui $n = 2$, siis $c > a$ tõttu on

$$J = \frac{\pi a}{c} \ln (a^2 + c^2 - 2ac \cos\theta) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi a}{c} \ln \frac{a^2 + c^2 + 2ac}{a^2 + c^2 - 2ac} = \frac{2\pi a}{c} \ln \frac{c + a}{c - a}.$$

Kui aga $n \neq 2$, siis $c > a$ tõttu on

$$J = \frac{\pi a}{c} \frac{1}{1 - n/2} (a^2 + c^2 - 2ac \cos\theta)^{1-n/2} \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2\pi a}{c(2 - n)} \left[(c + a)^{2-n} - (c - a)^{2-n}\right] =$$

$$= \frac{2\pi a}{c(n - 2)} \left[(c - a)^{2-n} - (c + a)^{2-n}\right] =$$

$$= \frac{2\pi a}{c(n - 2)} \left[\frac{1}{(c - a)^{n-2}} - \frac{1}{(c + a)^{n-2}}\right].$$

Näide 3. Leida pinna Σ mass, kui Σ on hüperboolse paraboloidi $z = xy$ see osa, mille lõikab välja silinder $x^2 + y^2 = a^2$, ja pindtihedus ρ igas punktis on pöördvõrdeline selle punkti kaugusega z-teljest.

Lahendus. Vaadeldaval juhul

$$\rho = \rho(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

kus k on võrdetegur. Valemi (5) põhjal on

$$m_{\Sigma} = k \iint_{\Sigma} \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Saadud pindintegraali arvutamiseks kasutame valemit (3).

Selleks arvutame

$$z_x = y, \quad z_y = x, \quad 1 + z_x^2 + z_y^2 = 1 + y^2 + x^2.$$

Siis valemi (3) järgi

$$m_\Sigma = k\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy,$$

kus D on pinna Σ projektsioon xy-tasandil. Nüüd, minnes üle polaarkoordinaatidele ja tähistades b = arsha, saame

$$m_\Sigma = k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\sqrt{1 + r^2}}{r}\, rdr = 2\pi k\int_0^a \sqrt{1 + r^2}\, dr \underset{(r=shu)}{=}$$

$$= 2\pi k\int_0^b ch^2u\, du = \pi k \int_0^b (1 + ch2u)du = \pi k(b + \frac{1}{2}\, sh\, 2b) =$$

$$= \pi k(b + shb\, chb) = \pi k\left[\ln(a + \sqrt{1 + a^2}) + a\sqrt{1 + a^2}\right] =$$

$$= \pi k\left[a\sqrt{1 + a^2} + \ln(a + \sqrt{1 + a^2})\right].$$

Ülesanded.

Arvutada järgmised esimest liiki pindintegraalid.

796. $\iint\limits_\Sigma (6x + 4y + 3z)dS$, kus Σ on tasandi

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$

osa, mis asetseb esimeses oktandis

797. $\iint\limits_\Sigma (6x + 4y + 3z)dS$, kus Σ on tasandi $x + 2y + 3z = 6$ osa, mis asetseb esimeses oktandis

798. $\iint\limits_\Sigma xyzdS$, kus Σ on tasandi $x + y + z = 1$ osa, mis asetseb esimeses oktandis

799. $\iint\limits_\Sigma ydS$, kus Σ on poolsfäär $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

800. $\iint\limits_{\Sigma} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dS$. kus Σ on ühiksfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ülemine pool

801. $\iint\limits_{\Sigma} (1 + x)dS$, kus Σ on sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ osa, mis asetseb esimeses oktandis

802. $\iint\limits_{\Sigma} x^2y^2dS$, kus Σ on sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ülemine pool

803. $\iint\limits_{\Sigma} (y + z + \sqrt{a^2 - x^2})dS$, kus Σ on silindri $x^2 + y^2 = a^2$ osa, mis asetseb tasandite $z = 0$ ja $z = a/\pi$ vahel

804. $\iint\limits_{\Sigma} \frac{dS}{h}$, kus Σ on hüperboolse paraboloidi $z = xy$ osa, mille eraldab silinder $x^2 + y^2 = a^2$, ja h on pinna Σ punkti kaugus z-teljest

805. $\iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2)dS$, kus Σ on keha $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1$ rajapind

806. $\iint\limits_{\Sigma} (x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)dS$, kus Σ on pind, mille eraldab koonusest $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ silinder $x^2 + y^2 = 2x$

Leida järgmiste pindade pindalad.

807. Koonuse $z^2 = 2xy$ osa, mis asetseb esimeses oktandis tasandite $x = 2$ ja $y = 4$ vahel

808. Sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ osa, mis asetseb silindri $x^2 + y^2 = ax$ sees

809. Silindri $x^2 + y^2 = ax$ osa, mis asetseb sfääris $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

810. Silindri $y^2 + z^2 = a^2$ osa, mis asetseb silindri $x^2 + y^2 = a^2$ sees

Leida järgmiste materiaalsete pindade mass.

811. Kuubi $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ pind, mille pind-

tihedus punktis $M(x,y,z)$ on võrdne xyz

812. Poolsfäär raadiusega a, mille pindtihedus igas punktis on võrdne selle punkti kaugusega raadiusest, mis on risti poolsfääri alusega

813. Silindri $x^2 + y^2 = a^2$ osa, mis asetseb tasandite $z = 0$ ja $z = c$ vahel, kui pindtihedus igas punktis on pöördvõrdeline selle punkti kauguse ruuduga koordinaatide alguspunktist

Leida järgmiste materiaalsete pindade inertsimomendid märgitud suunas.

814. Koonuse $x^2 + y^2 = z^2$ osa, kus $0<z<1$; aplikaattelje suhtes

815. Sfäär $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; diameetri suhtes

816. Paraboloidi $x^2 + y^2 = 2az$ osa, kus $0<z<a$; aplikaattelje suhtes

Leida järgmiste materiaalsete pindade raskuskeskmed.

817. Homogeense sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ osa, kus $x>0$, $y>0$, $z>0$

818. Homogeense sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ segment, kus $b<z<a$

819. Homogeense paraboloidi $y^2 + z^2 = 10x$ osa, mis on eraldatud tasandiga $x = 10$

820. Homogeense helikoidi $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$ osa, kus $0<u<b$, $0<v<\pi$

821*. Poolsfäär $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, mille pindtihedus igas punktis on võrdne selle punkti kaugusega raadiusest, mis on risti poolsfääri alusega

822. Poolsfäär $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, mille pindtihedus igas punktis on võrdne selle punkti kauguse ruuduga raadiusest, mis on risti poolsfääri alusega

§ 2. Teist liiki pindintegraalid

Siledat pinda nimetatakse kahe küljega ehk kahepoolseks pinnaks, kui pinna normaali nihutamisel pinnal mis tahes kontuuri mööda ta suund lähtepunkti tagasijõudmisel jääb endiseks. Kui aga leidub kinnine kontuur, mille läbimisel normaal omandab vastupidise suuna, siis seda pinda nimetatakse ühe küljega ehk ühepoolseks pinnaks.

Sile pind Σ, mille määravad parameetrilised võrrandid

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad (u,v) \in \Delta, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

on alati kahe küljega pind. Seejuures selle pinna Σ külge, mille määrab pinna normaal

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

kus

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{cases} \qquad (8)$$

ja

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}, \qquad (9)$$

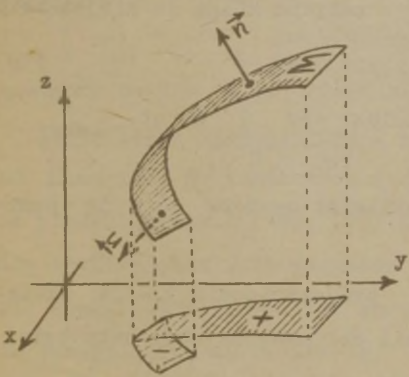
nimetatakse pinna positiivseks küljeks. Pinna Σ teist külge nimetatakse siis pinna negatiivseks küljeks.

Erijuhul, kui pind Σ on antud võrrandiga

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

siis tema positiivseks küljeks on pinna ülemine külg ja negatiivseks küljeks tema alumine külg.

Olgu antud sile või siledatest tükkidest koosnev kahe küljega pind Σ. Valime sel pinnal Σ ühe külje, märkides selle pinna normaali $\vec{n}$ abil (vt. joon. 38). Projekteerime pinna Σ xy-tasandile. Saadud projektsiooni pindala puhul arvestame märki järgmisel viisil. Seal, kus pinna normaal $\vec{n}$ moodustab teravnurga z-teljega, võtame projektsiooni pindala + märgiga, s.o. positiivsena, ja seal, kus normaal $\vec{n}$ moodustab z-teljega nürinurga, võtame projektsiooni pindala − märgiga, s.o. negatiivsena.



Joon.38

Olgu pinnal Σ määratud kolme muutuja funktsioon

$$f(P) = f(x,y,z).$$

Jaotame pinna Σ suvalisel viisil n osaks Σ_i ositi siledate joonte abil ja igal osal võtame vabalt punkti $P_i \in \Sigma_i$ ning moodustame summa

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)S'_i,$$

kus S'_i on pinna osade Σ_i projektsioonide pindalad xy-tasandil, mis on varustatud märgiga + või - ülalpool antud viisil. Pinna osade Σ_i suurima diameetri tähistame λ abil.

Arvu J nimetatakse funktsiooni f <u>teist liiki pindintegraaliks</u> (ehk pindintegraaliks pinna projektsioonide järgi xy-tasandile) mööda pinna Σ valitud külge ja kirjutatakse

$$J = \iint_{\Sigma} f(x,y,z)dxdy, \tag{10}$$

kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$, et

$$|J - \sigma| < \varepsilon, \quad \text{kui } \lambda < \delta,$$

sõltumata pinna Σ jaotamisviisist osadeks Σ_i ja punktide $P_i \in \Sigma_i$ valikust.

Võttes pinna osade Σ_i projektsioonid yz- ja zx-tasandile, me võime samal viisil defineerida veel kaks teist liiki pindintegraali

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dydz \tag{11}$$

ja

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dzdx. \tag{12}$$

Olgu pinnal Σ määratud kolm funktsiooni $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$ ja $R=R(x,y,z)$ ning eksisteerigu integraalid

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dxdy, \quad \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dydz, \quad \iint_{\Sigma} R(x,y,z)dzdx. \tag{13}$$

Pindintegraalide (13) summat nimetatakse <u>üldiseks teist</u>

liiki pindintegraaliks ja märgitakse sümboliga

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdxdy + Qdydz + Rdzdx. \qquad (14)$$

Sel korral suurust

$$Pdxdy + Qdydz + Rdzdx$$

nimetatakse integraalialuseks avaldiseks.

Teist liiki pindintegraalidel on samad omadused, mis on kahekordsel integraalil, s.t. teist liiki pindintegraalid on aditiivsed, lineaarsed jne.

Kui pind Σ on risti xy-tasandiga, siis integraali (10) definitsiooni kohaselt on

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dxdy = 0.$$

Samasugune omadus on ka integraalidel (11) ja (12).

Teist liiki pindintegraali arvutamine. Kui kahepoolne pind Σ on sile ja funktsioon f on pidev sellel pinnal Σ, siis pindintegraalid (10), (11) ja (12) eksisteerivad ja nende arvutamiseks võib kasutada järgmisi valemeid, mis taandavad nende pindintegraalide arvutamise teatavate kahekordsete integraalide arvutamisele.

1) Olgu pind Σ antud võrrandiga

$$z = z(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

siis pindintegraal (10) arvutatakse valemiga

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_{D} f\left[x,y,z(x,y)\right] dxdy, \qquad (15)$$

kus paremal integraali ees võetakse märk +, kui integreerimiseks on valitud pinna Σ positiivne, s.o. ülemine külg, ja märk − , kui integreerimiseks on valitud pinna Σ negatiivne, s.o. alumine külg.

Samasugused valemid kehtivad ka pindintegraalide (11) ja (12) arvutamiseks. Kui pind Σ on antud võrrandiga

$$x = x(y,z), \quad (y,z) \in D,$$

siis

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dydz = \pm \iint_{D} f\left[x(y,z),y,z\right] dydz, \qquad (16)$$

ja kui pind Σ on antud võrrandiga

$$y = y(z,x), \quad (z,x) \in D,$$

siis

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dzdx = \pm \iint_{D} f\left[x,y(z,x),z\right] dzdx. \qquad (17)$$

Valemites (16) ja (17) paremal integraalide ees võetakse märk +, kui integreerimiseks on valitud pinna positiivne külg, ja märk − , kui integreerimiseks on valitud pinna negatiivne külg.

2) Olgu pind Σ antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad (u,v) \in \Delta, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

siis

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dxdy = \pm \iint_{\Delta} f\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right] C\, dudv, \qquad (18)$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dydz = \pm \iint_{\Delta} f\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right] A\, dudv, \qquad (19)$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dzdx = \pm \iint_{\Delta} f\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right] B\, dudv, \qquad (20)$$

kus A, B ja C on antud võrdustega (9). Valemites (18), (19) ja (20) paremal integraalide ees tuleb võtta märk +, kui integreerimiseks on valitud pinna Σ positiivne külg, ja märk - , kui integreerimiseks on valitud pinna Σ negatiivne külg.

3) Teist liiki pindintegraali arvutamist võib taandada esimest liiki pindintegraali arvutamisele järgmise seose abil:

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \\ = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS, \qquad (21)$$

kus $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ on integreerimiseks v valitud pinna külje normaal.

4) Kui pind Σ on antud ilmutamata kujul võrrandiga $F(x,y,z) = 0$, siis toimime analoogiliselt nagu esimest liiki pindintegraali korral.

Näide 4. Arvutada pindintegraal

$$J = \iint\limits_{\Sigma} x^2y^2zdxdy,$$

kus Σ on kera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ alumise poole positiivne külg.

Lahendus. Kasutame arvutusvalemit (15). Selleks avaldame pinna Σ võrrandi ilmutatud kujul, saame

$$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Integreerida tuleb mööda selle pinna ülemist külge. Seepärast arvutusvalemis (15) tuleb paremal integraali ees võtta märk +. Piirkonnaks D on ring $x^2 + y^2 \leq a^2$. Seega

$$J = \iint\limits_{D} x^2y^2 (-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2})dxdy.$$

Viimase kahekordse integraali arvutamiseks lähme üle polaarkoordinaatidele. Saame

$$J = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\cos^2\varphi\, r^2\sin^2\varphi \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi\, d\varphi \int_0^a r^5 \sqrt{a^2 - r^2}\, dr.$$

Teeme muutuja vahetuse $r = a\sin t$, siis

$$J = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2}\, d\varphi \int_0^{\pi/2} a^5\sin^5 t\, a\,|\cos t|\, a\cos t dt =$$

$$= \frac{1}{8}\, 2\pi a^7 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t)^2\cos^2 t\, d\cos t =$$

$$= \frac{\pi a^7}{4}\int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - 2\cos^4 t + \cos^6 t) d\cos t =$$

$$= \frac{\pi a^7}{4}\left(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{2}{5}\cos^5 t + \frac{1}{7}\cos^7 t\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{\pi a^7}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) = -\frac{2\pi a^7}{105}.$$

Näide 5. Arvutada integraal

$$J = \iint_{\Sigma} yzdxdy + xzdydz + xydzdx,$$

mööda keha pinna Σ väliskülge, kui keha asetseb esimeses oktandis ja on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = a^2$ ning tasanditega $x = 0$, $y = 0$ $z = 0$ ja $z = h$.

Lahendus. Pind Σ on kujutatud joonisel 39. Jaotame pinna Σ osadeks I,II,III,IV ja V järgmisel viisil:

I on tasandi $z = h$ osa,

II on tasandi $y = 0$ osa,

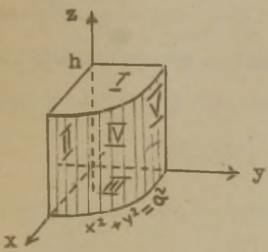
III on tasandi $z = 0$ osa,

IV on tasandi $x = 0$ osa,

V on silindri $x^2 + y^2 = a^2$ osa.

Arvutame integraali J mööda pinna Σ iga osa eraldi.

Mööda osa I on $z = h$, kust $dz = 0$. Seepärast integraalis J jääb ainult esimene liidetav ja me saame kasutada arvutusvalemit (15) märgiga +, sest integreerida tuleb mööda osa I ülemist külge. Seega



Joon.39

$$J_1 = \iint\limits_{I} yzdxdy \underset{(15)}{=} \iint\limits_{III} yh\,dxdy = h\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^a r^2 \sin\varphi\, dr =$$

$$= \frac{1}{3} a^3 h.$$

Integraal J mööda pinna osasid II, III ja IV on ilmselt võrdne nulliga, sest nendel pinna osadel on integraalialune avaldis võrdne nulliga.

Jääb veel arvutada integraal J mööda pinna osa V. Sellel pinna osal on esimene liidetav võrdne nulliga, sest pinna osa V on risti xy-tasandiga. Seepärast

$$J_5 = \iint\limits_{V} xzdydz + xydzdx.$$

Arvutame integraali kummagi osa eraldi. Arvutusvalemi (16) põhjal

$$\iint\limits_{V} xzdydz = + \iint\limits_{IV} \sqrt{a^2 - y^2}\, zdydz = \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\, dy \int\limits_0^h zdz =$$

$$= \frac{1}{2} h^2 \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\, dy \underset{(y=a\sin t)}{=} \frac{1}{2} h^2a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{4} a^2h^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)dt = \frac{1}{8}\pi a^2h^2.$$

Arvutusvalemi (17) põhjal

$$\iint_V xydzdx = \iint_{II} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dzdx = \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx \int_0^h dz =$$

$$= -\frac{1}{2} h \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, d(a^2 - x^2) = \frac{1}{3} a^3h.$$

Seega

$$J_5 = \frac{1}{8}\pi a^2h^2 + \frac{1}{3}a^3h.$$

Järelikult, arvestades teist liiki pindintegraali aditiivsust, saame vastuseks

$$J = J_1 + J_5 = \frac{1}{3} a^3h + \frac{1}{8}\pi a^2h^2 + \frac{1}{3} a^3h =$$

$$= \frac{1}{24} a^2h(16a + 3\pi h).$$

Näide 6. Leida integraal

$$J = \iint_\Sigma \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}$$

mööda ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

väliskülge.

Lahendus. Selle integraali J arvutamiseks lähme üle esimest liiki pindintegraalile valemi (21) abil. Saame

$$J = \iint_\Sigma \left(\frac{1}{x}\cos\alpha + \frac{1}{y}\cos\beta + \frac{1}{z}\cos\gamma\right)dS,$$

kus $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$ on ellipsoidi välisnormaali suunakoosinused. Nende arvutamiseks võib kasutada valemeid (8). Kuna aga ellipsoid on antud võrrandiga ilmutamata kujul, siis tema normaali suunakoosinuste leidmiseks on otstarbekohane kasutada normaali võrrandit sel kujul antud pinna jaoks (vt. Matemaatilise analüüsi praktikum III, vihik 1. Tartu, 1974, pt. III, § 1). Selleks tähistame

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

siis, arvestades, et pinna normaal

$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z),$$

saame

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{|\vec{n}|}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{|\vec{n}|}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{|\vec{n}|},$$

kus $F_x = 2x/a^2$, $F_y = 2y/b^2$, $F_z = 2z/c^2$ ja

$$|\vec{n}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Seega

$$J = \iint_{\Sigma} \left(\frac{1}{x}\frac{2x}{a^2} + \frac{1}{y}\frac{2y}{b^2} + \frac{1}{z}\frac{2z}{c^2}\right)\frac{1}{|\vec{n}|}\,dS =$$

$$= \iint_{\Sigma} \frac{2k}{|\vec{n}|}\,dS,$$

kus

$$k = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Võttes valemis (21) funktsioonid $P = Q = 0$ ja

$$R = \frac{2k}{|\vec{n}|\cos\gamma},$$

näeme, et

$$J = \iint\limits_{\Sigma} \frac{2k}{|\vec{n}|\cos\gamma}\, dxdy.$$

Eespool juba saime, et

$$|\vec{n}|\cos\gamma = F_z = 2z/c^2,$$

siis lõplikult

$$J = kc^2 \iint\limits_{\Sigma} \frac{dxdy}{z}.$$

Sellega integraali J arvutamine taandus lihtsama teist liiki pindintegraali arvutamisele.

Viimase integraali arvutamiseks kasutame arvutusvalemit (15). Et integreerida tuleb ellipsoidi kogu välispinda Σ mööda, siis peame valemis (15) märki arvestama järgmisel viisil. Ellipsoidi ülemist poolt mööda integreerides tuleb valemis (15) paremal integraali ees võtta märk + ja alumist poolt mööda integreerides aga märk − . Et aga integreerimisel mööda alumist ellipsoidi poolt ka z muudab märki, siis integraal mööda ellipsoidi alumist poolt sümmeetria tõttu langeb kokku integraaliga mööda ellipsoidi ülemist poolt. Järelikult

$$J = 2kc^2 \iint\limits_{D} \frac{dxdy}{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}},$$

kus D on piirkond $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant 1$. Viimase integraali arvutamiseks lähme üle elliptilistele polaarkoordinaatidele

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi, \end{cases}$$

saame

$$J = 2kcab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{2rdr}{2\sqrt{1-r^2}} =$$

$$= 4\pi\, abck = 4\pi\, abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Antud integraali J võib arvutada ka vahetult, arvestades, et ta on pindintegraalide

$$J_1 = \iint_\Sigma \frac{dydz}{x}, \quad J_2 = \iint_\Sigma \frac{dzdx}{y}, \quad J_3 = \iint_\Sigma \frac{dxdy}{z}$$

summa. Arvutades integraali J_3 eespool antud viisil, saame

$$J_3 = \frac{4\pi\, ab}{c}.$$

Sümmeetria tõttu, siis

$$J_2 = \frac{4\pi\, ca}{b}, \quad J_1 = \frac{4\pi\, bc}{a}.$$

Seega

$$J = 4\pi\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) = 4\pi\, abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Ülesanded.

Arvutada järgmised teist liiki pindintegraalid.

823. $\iint_\Sigma x^2y^2z\,dxdy$, kus Σ on sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ülemise poole negatiivne külg.

824. $\iint_\Sigma z^2\,dxdy$, kus Σ on ellipsoidi $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$ väline külg.

825. $\iint_\Sigma z^2\,dxdy$, kus Σ on ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ sisemine külg.

826. $\iint_\Sigma \sqrt[4]{x^2 + y^2}\,dxdy$, kus Σ on ringi $x^2 + y^2 \leq a^2$

alumine külg.

827. $\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$, kus Σ on tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$ ja $z = 1$ piiratud kuubi positiivne külg

828. $\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$, kus Σ on sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ väline külg

829. $\iint\limits_{\Sigma} xzdxdy + xydydz + yzdzdx$, kus Σ on tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$ moodustatud püramiidi väline külg

830. $\iint\limits_{\Sigma} 2dxdy + ydzdx - x^2zdydz$, kus Σ on ellipsoidi $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ osa väline külg, mis asetseb esimeses oktandis

831. $\iint\limits_{\Sigma} y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydxdz$, kus Σ on pinna väline külg, mis asetseb esimeses oktandis ja on moodustatud pöördparaboloidi $z = x^2 + y^2$, silindri $x^2 + y^2 = 1$ ja koordinaattasanditest

§ 3. Ostrogradski-Gaussi ja Stokes'i valemid

Olgu funktsioonid

$$P = P(x,y,z),\ Q = Q(x,y,z),\ R = R(x,y,z)$$

määratud tõkestatud ruumilises piirkonnas E, mille rajapind on Σ.

1. Ostrogradski-Gaussi valem. Olgu piirkond E kinnine ja tema rajapind Σ ositi sile. Kui funktsioonid P, Q ja R ning nende osatuletised P_x, Q_y ja R_z on pidevad piir-

konnas E, siis kehtib valem

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_{E} (P_x + Q_y + R_z)dxdydz, \tag{22}$$

kus pindintegraal on võetud mööda pinna Σ väliskülge.

Valemit (22) nimetatakse Ostrogradski-Gaussi valemiks. Ta seob suvalise teist liiki pindintegraali mööda kinnist pinda Σ teatava kolmekordse integraaliga.

Ostrogradski-Gaussi valemit kasutatakse pindintegraalide arvutamisel kolmekordse integraali abil ning mitmesuguste kujundite ruumalade arvutamisel.

Kui funktsioonid P, Q ja R täidavad piirkonnas E tingimust

$$P_x + Q_y + R_z = 1, \tag{23}$$

siis piirkonna E ruumala V_E on arvutatav valemiga

$$V_E = \iint\limits_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \tag{24}$$

Viimasest valemist (23) erijuhuna saame järgmised valemid:

$$V_E = \iint\limits_{\Sigma} xdydz, \tag{25}$$

$$V_E = \iint\limits_{\Sigma} ydzdx, \tag{26}$$

$$V_E = \iint\limits_{\Sigma} zdxdy, \tag{27}$$

$$V_E = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy. \tag{28}$$

2. Stokes'i valem. Olgu lõplik kahepoolne pind Σ ositi sile ja tema rajajoon L ka ositi sile. Kui funktsioonid P, Q ja R ning nende esimesed osatuletised on pidevad rajajoonel L, siis kehtib valem

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} (R_y - Q_z)dydz + (P_z - R_x)dzdx + (Q_x - P_y)dxdy, \tag{29}$$

kus joonintegraal on võetud mööda joont L positiivses suunas pinna Σ külje suhtes, mida mööda integreeritakse.

Valemit (29) nimetatakse <u>Stokes'i valemiks</u>. Ta seob teist liiki joonintegraali mööda kinnist joont L teatava teist liiki pindintegraaliga.

Valemi (21) põhjal võib Stokes'i valemi kirjutada sümboolselt ka kujul

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \tag{30}$$

Stokes'i valemit kasutatakse joonintegraalide arvutamisel pindintegraali abil.

Ülesanded.

832. Teisendada kolmekordseks integraaliks pindintegraal

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy,$$

mis on võetud mööda kinnise sileda pinna Σ väliskülge.

833.* Teisendada kolmekordseks integraaliks pindintegraal

$$\iint\limits_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\, dS,$$

mis on võetud mööda kinnist siledat pinda Σ.

834.* Leida pindintegraal

$$\iint_{\Sigma} \left[x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right] dS,$$

mööda mingi lõpliku keha E siledat pinda Σ, kui E ruumala on V.

Arvutada Ostrogradski-Gaussi valemi (22) abil järgmised pindintegraalid.

835. $$\iint_{\Sigma} 4x^3 dydz + 4y^3 dzdx - 6z^4 dxdy$$

mööda keha E välispinda Σ, kui E on piiratud pindadega $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ ja $z = h$

836. $$\iint_{\Sigma} (y + z)dydz + (z - x)dzdx + xydxdy$$

mööda kinnise sileda pinna Σ väliskülge

837. $$\iint_{\Sigma} u_x dydz + u_y dzdx + u_z dxdy$$

mööda kinnist siledat pinda Σ teades, et funktsioon u rahuldab Laplace'i võrrandit $\Delta u = 0$, kus $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ on Laplace'i operaator

838. $$\iint_{\Sigma} u_y dydz + u_x dzdx + (x + y)dxdy$$

mööda kinnist siledat pinda Σ teades, et funktsiooni u teised osatuletised on pidevad ja ta rahuldab võrrandit $u_{xy} = 0$

839. Arvutada ülesandes 833 antud integraal, kui Σ on sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ välispind.

840. Arvutada näites 5 antud pindintegraal Ostrogradski-Gaussi valemi abil.

841. Arvutada ülesandes 827 antud pindintegraal Ostrogradski-Gaussi valemi abil.

842. Arvutada ülesandes 828 antud pindintegraal Ostrogradski-Gaussi valemi abil.

843. Arvutada ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

ruumala valemi (27) abil.

844*. Leida keha E ruumala, kui E on piiratud pindadega $z = c$, $z = -c$ ja

$$\begin{cases} x = a\cos u \cos v + b\sin u \sin v \\ y = a\cos u \sin v - b\sin u \cos v \\ z = c\sin u. \end{cases}$$

845. Leida keha E ruumala, kui E on piiratud pindadega $x = 0$, $z = 0$ ja

$$\begin{cases} x = u\sin v \\ y = u\sin v \\ z = -u + 3\cos v, \end{cases}$$

kus $u \geqslant 0$.

846. Tõestada, et pinnaga Σ piiratud keha E ruumala V_E on arvutatav valemiga

$$V_E = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS.$$

847*. Olgu koonus piiratud sileda koonilise pinnaga $F(x,y,z) = 0$ ja tasandiga $Ax + By + Cz + D = 0$. Tõestada, et koonuse ruumala on

$$V = \frac{1}{3} Sh,$$

kus S on koonuse põhja pindala ja h on tema kõrgus.

848. Teisendada Stokes'i valemi (29) abil joonintegraal

$$\int_L (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz,$$

mis on võetud mööda kinnist kontuuri L, pindintegraaliks mööda mingit pinda Σ, mille rajajooneks on L.

Arvutada Stokes'i valemi (29) abil järgmised joonintegraalid.

849. $\int_L x^2dx + y^3dy + chzdz,$

kus L on kinnine kontuur

850. $\int_L x^2y^3dx + y^2dy + zdz,$

kus L on ringjoon $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, võttes pinnaks Σ poolsfääri $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ja integreerides mööda pinna Σ ülemist külge

851*. $\int_L e^x dx + z(x^2 + y^2)^{3/2}dy + yz^3dz,$

kus L on pindade $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$ lõikejoon, mis läbitakse suunas $\overrightarrow{OA}$, kus $O = (0,0,0)$ ja $A = (0,1,1)$

852. $\int_L (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz,$

kus L on ringjoon $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$

853. $\int_L (2x + y)dx - 2ydy + zdz,$

kui L koosneb kolmnurga ABC külgedest, kus $A = (0,-1,0)$, $B = (0,2,0)$ ja $C = (2,0,0)$, võttes pinnaks Σ kolmnurga ABC

30

854. $\int\limits_L 8y\sqrt{(1 - x^2 - z^2)^3}\,dx + xy^3dy + \cos z\,dz,$

kus L on ellipsoidi $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ lõikejoon ACBA koordinaattasanditega esimeses oktandis, kus $A = (1,0,0)$, $B = (0,2,0)$ ja $C = (0,0,1)$

855. $\int\limits_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz,$

kus L on ellips $x^2 + y^2 = 1,\ x + z = 1$

856. $\int\limits_L xdx + (x + y)dy + (x + y + z)dz$, kus L on kõver

$$\begin{cases} x = a \sin t \\ y = a \cos t \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \\ z = a(\sin t + \cos t), \end{cases}$$

857. $\int\limits_L y^2z^2dx + x^2z^2dy + x^2y^2dz$, kus L on kinnine kõver

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \cos 2t \\ z = a \cos 3t, \end{cases}$$

mis läbitakse muutuja t kasvamise suunas

858. Millistel tingimustel kehtib võrdus

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

iga kinnise kõvera L korral?

V. VÄLJATEOORIA ELEMENDID

§ 1. Skalaarväli, vektorväli ja gradient

Skalaarväljaks $u = u(P)$ nimetatakse tasapinnalist või ruumilist piirkonda E, kui selle piirkonna igas punktis P on määratud üks reaalarv $u(P)$.

Skalaarväli u defineeritakse xy-tasandil kahe muutuja funktsiooni $u = u(x,y)$ abil ja ruumis kolme muutuja funktsiooni $u = u(x,y,z)$ abil. Esimesel juhul skalaarvälja nimetatakse tasapinnaliseks ja teisel juhul ruumiliseks.

Funktsiooni u nimetatakse väljafunktsiooniks. Kui funktsioon u on diferentseeruv, siis skalaarvälja u nimetatakse diferentseeruvaks.

Tasapinnalises skalaarväljas $u = u(x,y)$ jooni $u(x,y) = C$, kus $C = \text{const}$, nimetatakse nivoojoonteks. Ruumilises skalaarväljas $u = u(x,y,z)$ pindu $u(x,y,z) = C$ nimetatakse nivoopindadeks. Nivoojoone või -pinna punktides on seega väljafunktsiooni u väärtused võrdsed.

Ruumilises skalaarväljas u iga punkti P_0 läbib ainult üks nivoopind $u(x,y,z) = C$, kus $C = u(P_0)$; seejuures nivoopinnad omavahel ei lõiku. Sama kehtib ka nivoojoonte korral.

Diferentseeruvas skalaarväljas u vektorit

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad (1)$$

nimetatakse skalaarvälja u __gradiendiks__ punktis $P = (x,y,z)$. Vektori (1) tähistamiseks kasutatakse ka sümboolset vektorit

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}),$$

mida nimetatakse __nablaks__. Vektori ∇ abil kirjutatakse

$$\text{grad } u = \nabla u.$$

Vektor grad u on nivoojoone või nivoopinna normaal.

Funktsiooni

$$u = u(x,y,z)$$

Laplace'i operaatorit

$$\triangle u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

võib kirjutada vektori ∇ abil kujul

$$\triangle u = \nabla \cdot \nabla u.$$

__Vektorväljaks__ $\vec{A}$ nimetatakse tasapinnalist või ruumilist piirkonda E, kui selle piirkonna igas punktis P on määratud üks vektor $\vec{A}(P)$.

Vektorväli $\vec{A}$ defineeritakse xy-tasandil vektorfunktsiooni

$$\vec{A} = (A_x, A_y)$$

abil ja ruumis vektorfunktsiooni

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

abil, kus

$$A_x = A_x(P), \quad A_y = A_y(P), \quad A_z = A_z(P)$$

on piirkonnas E määratud funktsioonid. Esimesel juhul vektorvälja nimetatakse __tasapinnaliseks__ ja teisel juhul __ruumiliseks__. Kui vektorfunktsioon $\vec{A}$ on diferentseeruv, siis vektorvälja $\vec{A}$ nimetatakse diferentseeruvaks.

Diferentseeruv skalaarväli u tekitab piirkonnas E vektorvälja grad u, mida nimetatakse u gradiendi väljaks.

Vektorväljas $\vec{A}$ jooni, mille igas punktis puutuja siht langeb ühte vektori $\vec{A}$ sihiga selles punktis nimetatakse vektorjoonteks.

Vektorjooned on diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$

lahendid.

Ülesanded.

Leida järgmistes skalaarväljades nivoojooned või nivoopinnad, mis läbivad punkti P_o, ja määrata gradient selles punktis P_o.

859. $u = x + y, \quad P_o = (1,0)$

860. $u = x + y, \quad P_o = (1,-1)$

861. $u = x^2 + y^2, \quad P_o = (1,2)$

862. $u = x^2 + y^2, \quad P_o = (0,-1)$

863. $u = 2y/x^2, \quad P_o = (-2,2)$

864. $u = 2y/x^2, \quad P_o = (-1,0)$

865. $u = x^2 + y^2 - z^2, \quad P_o = (1,1,1)$

866. $u = 4z \arctan \frac{y}{x}, \quad P_o = (1,1,1)$

867. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 8)}$,
$P_o = (9,12,28)$

868. Leida grad u ja tema pikkus, kui

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

869. Skalaarväljas $u = x^2 + y^2 - z^2$ leida gradu sellel nivoo pinnal, mis läbib punkti (0,0,0).

870. Millistes punktides $|\text{grad } u| = 1$, kui $u=\ln(1/r)$, kus $r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$?

871. Näidata, et funktsioon $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ rahuldab seost $u + 2 \ln|\nabla u| = \ln 4$.

872. Leida skalaarvälja u gradiendi väli, kui

$$u = \frac{1}{r^2},$$

kus $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

873. Olgu $u = z^2 + \ln(x + 1/y)$. Leida punktid, kus grad $u = (1,-16/9,0)$.

874. Olgu $u = (x^2 + y^2)^{3/2} + \sqrt{5}\, z$. Leida punktid, milles u gradiendi pikkus on 3.

Leida vektorjooned järgmistes vektorväljades A.

875. $\vec{A} = (x,y,2z)$

876. $\vec{A} = (y,x,z)$

877. $\vec{A} = (xz, yz, -xy)$

878. $\vec{A} = (-x^2, xy - 2z^2, xz)$

879. $\vec{A} = (y + z, x + z, x + y)$

Tõestada järgmised valemid, kus C = const ning f,u ja v on diferentseeruvad funktsioonid.

880. $\text{grad}(u + C) = \text{grad } u$

881. $\text{grad } Cu = C \text{ grad } u$

882. $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$

883. $\operatorname{grad} uv = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$

884. $\operatorname{grad} \frac{u}{v} = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$, kus $v \neq 0$

885. $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$

886. Olgu x,y ja z diferentseeruvad parameetri t funktsioonid. Tõestada, et iga diferentseeruva funktsiooni f korral kehtib võrdus

$$df(x,y,z) = \operatorname{grad} f \cdot d\vec{r},$$

kus vektor $\vec{r} = (x,y,z)$.

887. Olgu $z = z(u,v)$, $u = u(x,y)$ ja $v = v(x,y)$ diferentseeruvad funktsioonid. Näidata, et

$$\operatorname{grad} z = z_u \operatorname{grad} u + z_v \operatorname{grad} v.$$

888. Näidata, et funktsiooni $u = xy \sin z + zy \sin x$ korral kehtib võrdus $\nabla u = -\nabla \triangle u$.

889. Tõestada valem

$$\triangle(u,v) = u\triangle v + v\triangle u + 2\nabla u \cdot \nabla v,$$

kus u ja v on kaks korda diferentseeruvad funktsioonid.

§ 2. Tuletis antud suunas.

Olgu piirkonnas E antud funktsioon

$$u = u(P)$$

ning telg l, mis läbib punkti P_0 ja mille suund on määratud ühikvektoriga

$$\vec{m} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Võtame teljel l punkti $P = (x,y,z)$, mis asetseb punktist

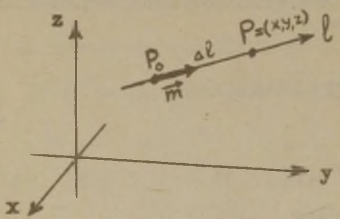
P_0 kaugusel Δl vektoriga $\vec{m}$ määratud suunas.

Piirväärtust

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{P \to P_0} \frac{u(P) - u(P_0)}{\Delta l} \qquad (2)$$

nimetatakse funktsiooni u tuletiseks suunas l punktis P_0.

Tuletis (2) iseloomustab funktsiooni u muutumise kiirust telje l suunas. Kui u on väljafunktsiooniks, siis tuletist (2) nimetatakse skalaarvälja u tuletiseks suunas l punktis P_0.



Joon.40

Kui funktsioon u on diferentseeruv punktis P, siis tuletis (2) eksisteerib punktis P igas suunas l ja on arvutatav valemiga

$$\frac{\partial u(P)}{\partial l} = \frac{\partial u(P)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(P)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(P)}{\partial z}\cos\gamma . \qquad (3)$$

Erijuhul, kui l tähendab x-, y- või z-telge, siis tuletis (2) ühtib vastavalt funktsiooni u osatuletistega u_x, u_y ja u_z.

Funktsiooni u tuletis suunas l on maksimaalne ja võrdub grad u pikkusega, kui telg l langeb ühte grad u suunaga.

Ülesanded.

Leida järgmiste funktsioonide u tuletised antud ühikvektori $\vec{m}$ suunas punktis P_0.

890. $u = xy + yz + 2$, $\vec{m} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_0 = (2,0,2)$

891. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\vec{m} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $P_0 = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$

Leida järgmiste funktsioonide u tuletised antud vektori $\vec{k}$ suunas punktis P_0.

892. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{k} = (4,-3)$ $P_0 = (3,4)$

893. $u = xy + yz + 1$, $\vec{k} = (12,-3,-4)$, $P_0 = (0,-2,-1)$

894. Leida funktsiooni $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ tuletised punktis $P_0 = (3,4)$ koordinaattasandi esimese veerandi nurgapoolitaja suunas ja punkti P_0 raadiusvektori suunas.

895. Leida funktsiooni $u = xyz$ tuletis punktis $P_0 = (1,-2,2)$ selle punkti raadiusvektori suunas.

896*. Leida punktid, milles funktsiooni $u=e^x(x-y^3+3y)$ tuletis igas suunas on null.

897. Leida skalaarvälja $u = u(x,y,z)$ tuletis välja $v = v(x,y,z)$ gradiendi suunas.

898. Millises suunas funktsioon $u = x \sin z - y \cos z$ punktis (0,0,0) muutub kõige kiiremini.

899. Millises suunas peab liikuma punkt $P=(x,y,z,)$, läbides punkti $P_0 = (-1,1,-1)$, et funktsioon

$$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

kasvaks maksimaalse kiirusega?

§ 3. Vektori voog ja divergents

Olgu ruumilises piirkonnas E määratud vektorväli

$$\vec{A}(P) = (A_x(P), A_y(P), A_z(P)).$$

Asetsegu selles vektorväljas ositi sile kaheküljega pind Σ. Olgu pinna Σ üks külg määratud ühiknormaaliga

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Vektori $\vec{A}$ vooks läbi pinna Σ antud suunas $\vec{n}$ nimetatakse pindintegraali

$$W_\Sigma = \iint_\Sigma (A_x\cos\alpha + A_y\cos\beta + A_z\cos\gamma)dS. \qquad (4)$$

Kui pind Σ on ositi sile ja funktsioonid A_x, A_y ning A_z on pidevad pinnal Σ, siis vektori A voog (4) eksisteerib.

Tähistatakse

$$A_n = A_x\cos\alpha + A_y\cos\beta + A_z\cos\gamma = \vec{A}\cdot\vec{n},$$

mille tõttu voo avaldise (4) võib esitada kujul

$$W_\Sigma = \iint_\Sigma A_n dS = \iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}\, dS. \qquad (5)$$

Olgu Σ rajapinnaks piirkonnale E ja normaal $\vec{n}$ määraku pinna Σ väliskülge.

Piirväärtust

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{E\to P}\frac{W_\Sigma}{V_E} \qquad (6)$$

nimetatakse vektori $\vec{A}$ divergentsiks punktis P.

Kui vektori $\vec{A}$ koordinaadid A_x, A_y ja A_z ja nende osatuletised on pidevad funktsioonid piirkonnas E, siis divergents (6) eksisteerib ja kehtib valem

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \qquad (7)$$

Valemit (7) kasutatakse div $\vec{A}$ arvutamiseks. Kasutades Hamiltoni sümboolset vektorit nabla, võime valemi (7) kirjutada kujul

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}. \qquad (8)$$

Kui sile pind Σ on keha E rajapind ja pidevalt diferentseeruva vektori $\vec{A}$ voog on võetud pinna E välisnormaali $\vec{n}$ suunas, siis Ostrogradski-Gaussi valemi võime kirjutada kujul

$$\iint_{\Sigma} A_n \, dS = \iiint_{E} \operatorname{div} \vec{A} \, dxdydz. \qquad (9)$$

Valemi (9) põhjal vektori $\vec{A}$ voog läbi piirkonna E rajapinna Σ tema välisnormaali $\vec{n}$ suunas on võrdne vektori $\vec{A}$ divergentsi integraaliga üle piirkonna E.

Välja $\vec{A}$, mille igas punktis on $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, nimetatakse <u>solenoidaalseks</u> ehk <u>solenoidväljaks</u>. Valemist (9) on näha, et solenoidväljas vektori $\vec{A}$ voog läbi iga kinnise pinna on võrdne nulliga. Seepärast solenoidvälja nimetatakse ka <u>allikavabaks</u> väljaks.

Vektorväli $\vec{A}$ tekitab piirkonnas E skalaarvälja $\operatorname{div}\vec{A}$.

Ülesanded.

Leida järgmiste vektorite $\vec{A}$ divergentsid.

900. $\vec{A} = (x,y,z)$

901. $\vec{A} = (x + y + z)^{-2/3}(1,1,1)$

902. $\vec{A} = e^{xy}(-x, y, xyz)$

Leida järgmiste vektorite $\vec{A}$ divergentsid antud punktis P_0.

903. $\vec{A} = (xy^2, x^2y, z^3)$, $P_0 = (1,-1,3)$

904. $\vec{A} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(x,y,z)$, $P_0 = (-1,2,-2)$

Näidata, et järgmised vektorväljad on solenoidväljad.

905. $\vec{A} = e^{xy}(y,-x,xy)$

906. $\vec{A} = yz(4x,-y,-z)$

907. $\vec{A} = r(\vec{C}\times\vec{r})$, kus $\vec{C}$ on konstantne vektor ning $\vec{r} = (x,y,z)$ ja $r = |\vec{r}|$

Tõestada järgmised valemid, kus $\vec{A}$ ja $\vec{B}$ on diferentseeruvad vektorid, $\vec{C}$ on konstantne vektor, u ja v on diferentseeruvad funktsioonid ning $\vec{r} = (x,y,z)$ ja $r = |\vec{r}|$.

908. $\operatorname{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{div}\vec{A} + \operatorname{div}\vec{B}$

909. $\operatorname{div}(u\,\vec{C}) = \vec{C}\cdot\nabla u$

910. $\operatorname{div}(u\vec{A}) = \vec{A}\,\nabla u + u\operatorname{div}\vec{A}$

911. $\operatorname{div}\nabla u = \Delta u$

912. $\operatorname{div}(u\nabla u) = u\Delta u + |\nabla u|^2$

913. $\operatorname{div}(u\nabla v) = u\Delta v + \nabla u\cdot\nabla v$

914. Tõestada, et $2\operatorname{div}(\vec{r}\times\vec{A}) = \operatorname{div}\vec{B}$, kui $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{A} = (y,z,x)$ ja $\vec{B} = (x^2,y^2,z^2)$.

915. Leida vektori $\vec{A} = (x,y,z)$ voog koordinaatide alguspunkti poolt läbi tasandi $x + y + z = 1$ osa, mis asetseb esimeses oktandis.

916. Leida vektori $\vec{A} = (xy,\ y + z,\ x + 2z)$ voog koordinaatide alguspunkti poolt läbi tasandi $2x + y + z = 2$ osa, mis asetseb esimeses oktandis.

917. Leida vektori $\vec{A} = (x,y,z)$ voog keha $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$ seest.

918. Leida vektori $\vec{A} = (yz, xz, xy)$ voog läbi silindri $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$ külgpinna tema välisnormaali suunas.

919. Leida vektori $\vec{A} = (x, y, z)$ voog läbi koonuse $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$ külgpinna tema välisnormaali suunas.

920. Leida vektori $\vec{A} = (x, y, z)$ voog keha $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$ sisse.

921. Leida vektori $\vec{A} = (x, y, z)$ voog läbi pinna $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ tema välisnormaali suunas.

922. Leida vektori $\vec{A} = \vec{r}/|r|^3$, kus $\vec{r} = (x, y, z)$, voog kinnise pinna Σ seest, mis ümbritseb punkti $(0,0,0)$.

923. Leida vektori $\vec{A} = (x, -y^2, x^2+z^2-1)$ voog ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

seest.

924. Leida vektori $\vec{A} = (x^3, y^3, z^3)$ voog koonilise keha $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$ seest.

§ 4. Vektori tsirkulatsioon ja roetor

Olgu ruumilises piirkonnas E määratud vektorväli

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z),$$

kus $A_x = A_x(P)$, $A_y = A_y(P)$ ja $A_z = A_z(P)$ on piirkonnas E pidevalt diferentseeruvad funktsioonid. Ositi sile joon L asetsegu piirkonnas E.

Joonintegraali

$$\int_L A_L ds = \int_L A_x dx + A_y dy + A_z dz \tag{10}$$

nimetatakse vektori $\vec{A}$ __lineaarseks integraaliks__ mööda joont L. Kui joon L on kinnine, siis integraali (10) nimetatakse vektori $\vec{A}$ __tsirkulatsiooniks__ mööda joont L.

Vektorit

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \qquad (11)$$

nimetatakse vektori $\vec{A}$ __rootoriks__.

Sümboolselt võime kirjutada valemid

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \qquad (12)$$

kus $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ on vastavalt x-, y- ja z-telje ühikvektorid. Valemit (12) kasutatakse rot $\vec{A}$ leidmiseks.

Vektorväli $\vec{A}$ tekitab piirkonnas E vektorvälja rot $\vec{A}$.

Vektorvälja $\vec{A}$, mille igas punktis on rot $\vec{A} = 0$, nimetatakse __keerisevabaks__ väljaks.

Vektorvälja $\vec{A}$ nimetatakse __potensiaalseks__, kui leidub diferentseeruv funktsioon u, et

$$\vec{A} = \mathrm{grad}\,u.$$

Sel korral funktsiooni u nimetatakse vektorvälja $\vec{A}$ __potentsiaaliks__.

Selleks, et vektorväli $\vec{A}$ üheli sidusas piirkonnas E oleks potentsiaalne on tarvilik ja piisav, et ta oleks keerisevaba, s.o.

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}. \qquad (13)$$

Vektorvälja A potentsiaal u määratakse võrrandist

$$du = A_x dx + A_y dy + A_z dz. \qquad (14)$$

Kui joon L on pinna Σ rajajooneks, siis Stokes'i valemi võime kirjutada kujul

$$\int_L A_L ds = \iint_\Sigma \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS, \qquad (15)$$

kus $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ on pinna Σ selle külje ühiknormaal, mille suhtes joon L integreerimisel läbitakse positiivses suunas. Valem (15) avaldab vektori $\vec{A}$ tsirkulatsiooni vektori $\vec{A}$ rootori kaudu.

Ülesanded.

Leida järgmiste vektorite $\vec{A}$ rootorid.

925. $\vec{A} = (x, -z^2, y^2)$

926. $\vec{A} = (yz, xz, xy)$

927. $\vec{A} = (x^2, -z \cos^2 x, y \sin^2 x)$

928. $A = (xyz, x + y + z, -x^2y^2)$

Leida järgmiste vektorite $\vec{A}$ rootorid märgitud punktis P_0.

929. $\vec{A} = (xz, -y^2, xy)$, $P_0 = (0,1,2)$

930. $\vec{A} = (x^2, 2\cos^2 x, y \sin^2 x)$ $P_0 = (0,1,2)$

Tõestada järgmised valemid, kus $\vec{A}$ ja $\vec{B}$ on diferentseeruvad vektorid, $\vec{C}$ on konstantne vektor, u on diferentseeruv funktsioon, λ ja μ on konstandid ning $\vec{r} = (x,y,z)$ ja $r = |\vec{r}|$.

931. $\operatorname{rot}(\lambda \vec{A} + \mu B) = \lambda \operatorname{rot} \vec{A} + \mu \operatorname{rot} \vec{B}$

932. $\operatorname{rot}(u\vec{C}) = \operatorname{grad} u \times \vec{C}$

933. $\operatorname{rot}(u\vec{A}) = u \operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{grad} u \times \vec{A}$

934. $\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \operatorname{rot}\vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot}\vec{B}$

935. $r \operatorname{rot}[u(r)\vec{C}] = u'(r)\, \vec{r} \times \vec{C}$

Näidata, et järgmised vektorväljad $\vec{A}$ on keerisevabad.

936. $\vec{A} = (x,y,z)$

937. $\vec{A} = \operatorname{grad} u$, kus funktsiooni u osatuletised on diferentseeruvad.

938. Näidata, et iga diferentseeruva vektori A korral vektorväli $\operatorname{rot}\vec{A}$ on solenoidaalne.

Näidata, et järgmised vektorväljad $\vec{A}$ on potentsiaalsed ja leida nende potentsiaalid u.

939. $\vec{A} = (x,y,z)$

940. $\vec{A} = (yz, zx, xy)$

941. $\vec{A} = (y + z, x + z, x + y)$

942. Tõestada, et kui vektorväli $\vec{A}$ on potentsiaalne ja solenoidaalne, siis $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0$ ja et sel korral välja potentsiaal u rahuldab Laplace'i võrrandit

$$\Delta u = 0.$$

Leida järgmiste vektorite $\vec{A}$ tsirkulatsioon mööda antud kontuuri L, kus $a = \text{const}$.

943. $\vec{A} = (0,x,0)$, $L: x = a\cos t,\ y = a \sin t,\ z = 0$

944. $\vec{A} = (x^2y^3, 1, z)$, $L: x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0$

945. $\vec{A} = (x - z, x+y, -2z)$, L on kolmnurga ABC kontuur tippudega $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ ja $C = (0,0,1)$

946. $\vec{A} = (x^3 + y, y^3+x, 0)$, $L: x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0$

947. $\vec{A} = (x,y,z)$, L on joon $ABOA$, kus AB on kruvijoon $x = a\cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$ ning BO ja OA on sirglõigud, kusjuures $O = (0,0,0)$, $A = (a,0,0)$ ja $B = (a,0,2\pi a)$

948. Näidata, et kui vektorväli $\vec{A}$ on potentsiaalne, siis vektori $\vec{A}$ tsirkulatsioon selles väljas mööda iga kinnist joont L on võrdne nulliga.

V A S T U S E D

I peatükk

§ 1.

7. Integraal jaotada kaheks osaks sõltuvalt avaldise $\mathrm{sgn}(x-y)$ märgist. 13. 9. 14. 4. 15. $\arctan 2 - \arctan 1 = \mathrm{arccot}\, 3$. 16. 1. 17. $1 + \ln 2 - \ln(1 + e)$. 18. 1. Teoreemi 1 kasutamiseks teha muutuja vahetus $y = 1/n$, siis saab kasutada teoreemi 1 näiteks lõigus $Y = [0,1]$. 19. $\pi/2$. 20. 2. 21. $\pi/2$. 22. 2. 23. $\pi/2$. Teha muutuja vahetus $z = y - 2$. 24. 0. 25. $\ln(y/\sqrt{1 + y^2})$. 26. $2\mathrm{arccot}\, y$.

27. $-y^{-1}\int_e^5 \ln^{-2}(xy)dx$. 28. $2y^{-1}(\cos\pi y^2 - \cos y^2)$.

29. $(e^y - 1)/y$. 30. $y^{-1}\arcsin 2y$.

31. $y^{-1}(\arcsin y - \arcsin 2y)$. 32. $F_y = 2y^{-1}\arcsin(y^2z^3)$, $F_z = 3z^{-1}\arcsin(y^2z^3)$. 33. $F_y = 2y(y^2 - z)^{-1}\sin\pi(y^2 - z)$, $F_z = (z - y^2)^{-1}\sin\pi(y^2 - z)$. 34. $F_y = (2y)^{-1}(4^{-y/z} - 1)$, $F_z = -(2z)^{-1}(4^{-y/z} - 1)$. 39. 26/3. 40. 1/4. 41. $\pi/4$.

42. 2,5. 43. 1. 44. $4(1 + y)y^{-1}(2 + y)^{-1}\ln|1 + y|$.

45. $\frac{3 + 4y}{y(3 + 2y)}\ln(2 + 3y + 2y^2) - \frac{1 - 2y}{y(1 - y)}\ln(2 + y - y^2)$.

46. $2y^{-1}[1 - 2\ln(e - y^2)]$. 47. $2y^{-1}\sin 2y^2$. 48. 0.

49. $y^{-1}(3\cos y^3 - \cos y)$. 50. $F_y = y^{-1}\ln|1 + y + yz|$, $F_z = F_y + (1 + z)^{-1}\ln(1 + y + yz)$. 51. $F_y = (y + z^2)^{-1} \cdot \sin(yz^3 + z^5)$, $F_z = (3y + 5z^2)(y + z^2)^{-1} z^{-1}\sin(yz^3 + z^5)$.

52. $F_y = y^{-1}[\exp(yz^2) - 2\exp(y^2z)]$, $F_z = z^{-1} \cdot [2\exp(yz^2) - \exp(y^2z)]$. 53. $F_y = \frac{z + 1}{y}\cos y - \frac{2}{y}\cos\frac{y}{z} -$

$-\frac{z}{y^2}(\sin y - \sin \frac{y}{z})$, $F_z = \frac{1}{y}(\sin y - \sin \frac{y}{z}) + \frac{2}{z} \cos \frac{y}{z}$.

54. $2yF_y = 3(e^{-y^2 z} - e^{-y^3})$, $2zF_z = 3(e^{-yz^2} - e^{-z^3})$.

55. $\pi \arcsin y$. 56. $(\pi/2)\operatorname{sgn} y \ln(1 + |y|)$. 57. 0.

58. $\pi \ln[(|y| + \sqrt{y^2 - 1})/2]$. Olgu $|y| = z$ siis võime tähistada $F(y) = G(z)$, saame

$$G'(z) = \int_0^{\pi/2} \frac{2z\,dx}{z^2 - \sin^2 x} = \int_0^{\infty} \frac{2z\,du}{z^2 + (z^2 - 1)u^2} = \frac{\pi}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

Integreerides selle tuletise ja tähistades $z = 1/v$, leiame $G(z) = \pi \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) + C = -\pi \ln v + \pi \ln(1 + \sqrt{1 - v^2}) + C$. Teisest küljest antud integraalist vahetult saame, et

$$G(z) = \int_0^{\pi/2} \ln[z^2(1 - z^{-2}\sin^2 x)]\,dx =$$

$$= \pi \ln z + \int_0^{\pi/2} \ln(1 - z^{-2}\sin^2 x)\,dx = \quad (v = 1/z)$$

$$= -\pi \ln v + \int_0^{\pi/2} \ln(1 - v^2 \sin^2 x)\,dx.$$

Seega saadud kahest $G(z)$ avaldisest näeme, et peab olema

$$C = \int_0^{\pi/2} \ln(1 - v^2\sin^2 x)\,dx - \pi \ln(1 + \sqrt{1 - v^2}).$$ Võttes viimases avaldises $v = 0$, saame $C = -\pi \ln 2$.

59. $\pi \ln[(\sqrt{y} + \sqrt{y - 1})/2]$. 60. $\sin^2 1$. 61. 0. 62. $\sin^2 1$.

63. -1. 64. $\ln \frac{b + 1}{a + 1}$. Vaata näide 4. 65. $\frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + 2b + 2}{a^2 + 2a + 2}$.

66. $\pi \arcsin \frac{b}{a}$. Tõestada ja kasutada võrdust

$$\frac{1}{\sin x} \ln \frac{a + b \sin x}{a - b \sin x} = 2ab \int_0^1 \frac{dy}{a^2 - b^2 y^2 \sin^2 x}.$$

§ 2.

67. $(-\infty, \infty)$. 68. $(-\infty, \infty)$. 69. $(-\infty, \infty)$. 70. $(-\infty, \infty)$.

71. $(-1, \infty)$. 72. $(-1, \infty)$. 73. $(-1, \infty)$. 74. $(-\infty, 1)$. Integ-

graal lahutada kaheks integraaliks, jagades integreerimispiirkonna pooleks. 75. $(-1,\infty)$. 76. $(-1,\infty)$. 77. $(-1,1)$. 78. $(-3,\infty)$. 79. $(-\infty,3)$. 80. $(-1,\infty)$. 81. $[-1,1]$.
82. Olgu $y<2$. Kuna $x^{-1}\sin x \to 1$ protsessis $x\to 0$, siis leidub arv $\xi>0$ selline, et $x^{-1}\sin x\geqslant 1/2$ vahemikus $0<x\leqslant\xi$. Seepärast võrratus (9) ei kehti, kuna

$$\int_0^\xi \frac{\sin x}{x^y}\,dx \geqslant \frac{1}{2}\int_0^\xi \frac{dx}{x^{y-1}} = \frac{1}{2(2-y)}\,\xi^{2-y} \to \infty,$$

kui $y\to 2-$. 83. Alumise raja $x = 0$ ümbruses on integraalialune funktsioon tõkestamata, kui $y\to 0$. Päratu integraali ühtlase koonduvuse definitsiooni rakendamiseks uurime hinnangu (9) kehtivust, saame

$$\left|\int_0^\xi \frac{x^3 - xy^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx\right| = \left|\frac{y^2}{y^2+\xi^2} - 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{y^2+\xi^2}{y^2}\right| < \varepsilon,$$

mis peab kehtima $0<\xi<\delta$ korral sõltumata muutujast $y\in(0,1)$. Võttes aga $\xi = y$, saame

$$\frac{1}{2}(1-\ln 2) < \varepsilon,$$

mis ε suvalisuse tõttu ei saa kehtida. 84. $(-\infty,\infty)$. 85. $(-\infty,\infty)$. 86. $(-\infty,\infty)$. 87. $[0,\infty)$. 88. $(-\infty,\infty)$. 89. $(-\infty,\infty)$. 90. $(-\infty,\infty)$. 91. $(-\infty,\infty)$. 92. $(-\infty,\infty)$. 101. Kasutada hinnangut $\ln x = O(x^{-1/4})$ protsessis $x\to 0+$. 102. Vt. ülesande 101 juhendit. Kasutada ka hinnangut $\ln x = O(1)(1-x)^{1/4}$ protsessis $x\to 1-$. 105. Võrratuse (8) näitamiseks integreerida ositi, võttes $u = (1-x)^{2+y}\cdot(1+x)^y$ ja $dv = (1-x)^{-2}\cos(1-x)^{-1}dx$. 107. Valida majorandiks funktsioon $g(x) = (\pi/2)(1-x^a)^{-1/2}$, kus $a = \tan(\pi/180)$. 108. Arvestada, et $\ln(1-x^y) =$

$= o[(1-x^y)^{-1/2}] = O(1)(1-x^a)^{-1/2}$ protsessis $x \to 1-$, kus $a = \ln 2$. 114. Arvestada, et $F(y) = 2\int_0^{\pi/2} (-\ln \sin x)^y dx$ ning iga $0<a<1$ ja $b>0$ korral on $(-\ln \sin x)^b = O(x^{-a})$ protsessis $x \to 0+$, sest selles protsessis $\frac{(-\ln \sin x)^b}{x^{-a}} = (\frac{x}{\sin x})^a \sin^a x(-\ln \sin x)^y = o(1)$. 116. Valida majorandiks funktsioon $g(x) = (1 - a^2\sin^2 x)^{-1/2}$, kus $0<a<1$.

124. $(\pi/2)(\sqrt{1-2y}-1)$. 125. $-\pi(1-\sqrt{1-y^2})$. 126. $\pi \ln[(1 + \sqrt{1-y^2})/2]$. 127. $\pi \ln (1+\sqrt{1-y})/2$. 128. $-\arcsin^2 y$. 129. $\pi \ln (1+\sqrt{1+y})/2$. 130. $\pi \ln[(1+\sqrt{1+y})/2]$. 131. $-\frac{\pi}{2}$ arshy. 132. $\pi \ln(\sqrt{y}+\sqrt{z})$. 133. $\pi \ln(|y| + |z|)$. Arvutada F_z, eeldades esialgu, et $y \geq 0$ ja $z>0$.

134. $\frac{1}{2}\arctan\sqrt{2}$. 135. $\pi/\sqrt{8}$. 136. 0 ja 1. 137. 1/2 ja 10,5. 138. 1 ja -7. 139. $\pi(\ln 2 - 1)$. 140. 1. Kasutada teoreemi 4 või teoreemi 3, vahetades osadega x ja y ning valida $X = [0, \pi/2]$ ja $Y = [0,1)$. 141. 2. 142. 1.

143. $\pi/2 - 1$. 144. 2. 145. 2. 146. Lähtuda päratu integraali definitsioonist ning näidata ja arvestada, et rida $x^{y-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n+y-1} = \frac{x^{y-1}}{1+x}$ on ühtlaselt koonduv (muutuja x suhtes) igas lõigus $[0,1-\varepsilon] \subset [0,1]$ ja rida $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(1-\varepsilon)^{n+a}}{n+a}$ on ühtlaselt koonduv (muutuja ε suhtes) lõigus $[0,1]$.

§ 3.

148. Majorandiks võib võtta $g(x) = \exp[-(|x| - b)^2]$, kui $|x| \geq b = \max(|c|, |d|)$. Arvestada, et $(x-y)^2 \geq$ $\geq (|x|-|y|)^2 \geq (|x| - b)^2$. 162. Majorant otsida juhul $y \geq 1$.

163. Vaadeldes integraalialust funktsiooni muutuja y funktsioonina, veenduda, et punktis $y_0 = (a + b - 1)(1 + x)^{-1}$ on temal globaalne maksimum. Viimase abil saame majorandiks $Mx^{a-1}(1 + x)^{1-a-b}$, kus $M = \text{const}$. 164. Võrratuse (16) näitamiseks integreerida ositi, valides $dv = x \sin x^2 dx$. Seejuures arvestada, et $v(x) = O(1)$, avaldis $u(x) = (x + x^{1+y})^{-1}$ kahaneb ja seepärast $u'(x) \leqslant 0$. 167. Integraali (16) hindamiseks teha temas muutuja vahetus $xy = z$. 170. Kasutada ülesande 167 lahendust ning valida $A = 1/y$ ja eeldada, et $y \to 0+$. 175. Teha muutuja vahetus $x - y = z$. 176. 1/18. 177. $\pi^2/8$. 178. $\pi/4$. 179. $\pi/2$. Vt. näide 14. 180. 0. 181. 1. 182. Muutuja vahetusega $x = 1/u$ taandada ülesandele 146. 183. Kasutada ülesandeid 146 ja 182. 184. $0{,}5 \ln y$.
185. $\ln(y + 1)$. 186. $0{,}5 \ln(y + 1)$. 187. $\pi y/2$.
188. $0{,}5\pi \operatorname{sgn} y \cdot \ln(1 + |y|)$. 189. $\pi|y|/2$. 190. $\ln(z/y)$.
191. $0{,}5\ln(z/y)$. 192. $\ln(z/y)$. 193. $0{,}5\pi \ln(y/z)$.
194. $0{,}5\ln(1 + z^2/y^2)$. 195. $\arctan y - \arctan z$.
196. $0{,}5 \ln[(1 + y^2)/(1 + z^2)]$. 197. $\arctan z - \arctan y$.
198. $0{,}5 \ln[(1 + z^2)/(1 + y^2)]$. 199. $(n - 1)!y^{-n}$.
200. $0{,}5 \ln[(z + y)/z - y)]$. 202. $\pi/(2\sqrt{2})$. 203. $\pi/\sqrt{2}$.
204. 0 ja -3. 205. $-3/2$ ja $10{,}5$. 206. $\ln(b/a)$.
207. $\pi(b^2 - a^2)/4$. Vt. näide 15. 208. Oletame, et koondub näiteks parempoolne integraal. Et integraal (14) koondub ühtlaselt hulgas Y_1, siis iga $C > c$ korral teoreemi 3 põhjal ja päratu integraali monotoonsuse omaduse põhjal on

$$\int_c^C F(y)dy = \int_a^\infty dx \int_c^C f(x,y)dy \leqslant \int_a^\infty G(x)dx = O(1),$$

kust järeldub, et tõestatava võrduse (19) vasakpoolne integraal ka koondub ning kehtib võrratus

$$\int_c^{\infty} F(y)dy \leqslant \int_a^{\infty} G(x)dx.$$

Järelikult kehtib ka vastupidine võrratus. 209. $\sqrt{\pi}/2$. Kasutada teoreemi 4 või ülesannet 208. Antud juhul $G(x) = \int_0^{\infty} xe^{-x^2(1+y^2)}dy$. Viimase integraali ühtlase koonduvuse näitamiseks võib kasutada järgmist Dini teoreemi (vt. Ильин В. А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа, II. M., 1973, lk. 275): Kui funktsioon $f(x,y) \geqslant 0$ ja integraaliga (18) määratud funktsioon G on pidev piirkonnas X, siis integraal (18) koondub ühtlaselt piirkonnas X.
210. $\pi z/2 - \sqrt{\pi y}$. Arvutades F_y ja F_z, saame peale integreerimist võrduse $F(y,z) = -\sqrt{\pi y} + C(z) = \pi z/2 + C_1(y)$, kust arvutame C(z). 211. $\sqrt{\pi}(\sqrt{z} - \sqrt{y})$. Kasutada ülesande 210 lahendust. 212. $F(y) = 0{,}5\sqrt{\pi}\ \exp(-y^2/4)$. 213. $F(y) = 0{,}5\sqrt{\pi}\ \exp(-2y)$. 214. Kasutada ülesandeid 162, 163 ja 208. 215. Integraal arvutada ositi integreerimisega, arvestades, et ülesande 209 vastuse põhjal on $x[1 - \Phi(x)] = o(1)$, kui $x \to \infty$. 218. Kasutada valemit (20).

§ 4.

221. $\pi/8$. 222. $\pi/(2\sqrt{2})$. 223. $\pi/(2\sqrt{2})$. 224. ∞. 225. $\pi\sqrt{2}/4$. 226. π. 227. 1/112. 228. $35\pi/2097152$. 229. $\pi\sqrt{2}/2$. 230. $\pi\sqrt{2}/2$. 231. $2\pi\sqrt{3}/9$. 232. $\pi\sqrt{2}/4$. 233. $\pi/3$. 234. $\pi\sqrt{3}/3$. 235. $\pi\sqrt{2}/5$. 236. 1/5. 237. 32/35. 238. $(4\sqrt{\pi})^{-1}\ \Gamma^2(1/4)$. Teha muutuja vahetus

$\cos x = 1 - 2t^{1/2}$. 239. $-\pi^2 \cos \pi x \sin^{-2} \pi x$ ja $\pi^3(1 + \cos^2 \pi x)\sin^{-3} \pi x$. Kasutada valemit (26). 240. 0. 241. $2\pi^2/3$. 242. π^3. 243. $\frac{\pi}{\sin \pi y} \cos xy = \frac{1}{y} + 2y \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2 - y^2}$. 244. $\sqrt{\pi}/2$. Teha muutuja vahetus $x^2 = t$. 246. $\pi/2$. Integreerimisjärjekorra muutmise põhjendamiseks valime $0 < z \leqslant 1/2$ ja näitame, et integraal

$$\int_0^{1/z} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{\infty} y \, dy \int_0^{1/z} e^{-xy} \sin^2 x \, dx$$

on ühtlaselt koonduv z suhtes lõigul $[0,1/2]$, kuna punktis $z = 0$ võime lugeda $\exp(-y/z) = 0$. Seega tohib teoreemi 1 põhjal minna piirile integraali märgi all, kui $z \to 0+$. 247. $\pi/4$. 248. $\ln 2$. 249. $\sqrt{2\pi}/4$. Teha muutuja vahetus $x^2 = t$. 250. $\sqrt{2\pi}/4$. 251. Võtta valemis (30) parameetri a asemele x ning parempoolse võrratuse saamiseks x asemele $a + x$, vasakpoolse võrratuse saamiseks aga x asemele $a-1$. 252. Kasutada valemit (28). 253. Valemis (25) võtta $x=1/2$.

§ 5.

255. π. 256. 0. 257. 0. 258. $\pi^2/4$. 259. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{y} \sin ay \cos xy \, dy$. 260. $S(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{y}(1 - \cos ay) \cdot \sin xy \, dy$, kus $S(x) = f(x)$, kui $|x| \neq a$, ning $S(a) = 1/2$ ja $S(-a) = -1/2$. 261. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} y^{-2}(\sin ay - ay \cos ay) \cdot \sin xy \, dy$, kus $|x| \neq a$. 262. $S(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} y^{-2}(\sin ay - ay \cos ay) \sin xy \, dy$, kus $S(x) = f(x)$,

kui $|x| \neq a$, ning $S(a) = 1/2$ ja $S(-a) = -1/2$. 263. $f(x) =$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty y^{-2}(\cos ay + ay \sin ay - 1)\cos xy\, dy$, kus $|x| \neq a$.

264. $S(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{y}[\sin(x - a)y - \sin(x - b)y]dy$, kus $S(x) =$
$= f(x)$, kui $x \neq a,b$ ning $S(a) = S(b) = 1$. Kasutada valemit (35). 265. $S(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (1 + y^2)^{-1}(\cos xy + y \sin xy)dy$,

kus $S(x) = f(x)$, kui $x \neq 0$, ja $S(0) = 1/2$. Kasutada valemit (35). 266. $f(x) = \int_0^\infty e^{-ay}\cos xy\, dy$. 267. $f(x) =$
$= \int_0^\infty e^{-ay}\sin xy\, dy$. 268. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \pi y}{1-y^2}\sin xy\, dy$.

269. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1-y^2}\cos\frac{\pi y}{2}\cos xy\, dy$. 270. $f(x) =$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\cos xy\, dy$. 271. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ay}{y}e^{ixy}\, dy$.

272. $S(x) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ay-1}{y}e^{ixy}\, dy$, kus $S(x) = f(x)$, kui $|x| \neq a$, ning $S(a) = 1/2$ ja $S(-a) = -1/2$. 273. $f(x) =$
$= \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^\infty y^{-2}(\sin ay - ay \cos ay)e^{ixy}$, kui $|x| \neq a$.

274. $S(x) = \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{y}[e^{-iby} - e^{-iay}]e^{ixy}\, dy$, kus $S(x) = f(x)$,
kui $x \neq a,b$ ning $S(a) = S(b) = 1$. 275. $f(x) =$
$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty \exp(iyx - y^2/4)dy$. 276. $f(x) =$
$= \frac{-i}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty y\exp(iyx - y^2/4)dy$. Kasutada ülesande 275 lahendust. 277. $F(y) = \sqrt{2/\pi}\, a/(y^2+a^2)$. 278. $F(y) = -i\sqrt{8/\pi}\cdot$
$\cdot\, a\, y\, /(y^2 + a^2)$. 279. $F(y) = \exp[-(y^2+ a^2)/2]$ ch ay.

280. $F(y) = \sqrt{2/\pi}\; a/(y^2 + a^2)$. 281. $F(y) = \sqrt{2/\pi}\; y/(a^2+y^2)$.
282. Kasutada näites 19 saadud tulemust. 283. $f(x) =$
$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (1 + y^2)^{-1} \cos xy\, dy$. Kasutada ülesande 280 vastust. 284. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty y(1 + y^2)^{-1} \sin xy\, dy$. Kasutada ülesande 281 vastust. 285. $f(x) = e^{-x}$, $x \geqslant 0$.
286. $f(x) = \frac{2}{\pi}\, x/(1 + x^2)$, $x \geqslant 0$.

II peatükk

§ 1.

287. $(1 + \sqrt{2})/8 \approx 0{,}301$. 288. $85\,\pi/128 \approx 2{,}085$.
289. $-7\pi \leqslant J \leqslant 7\pi$. 290. $-\pi/2 < J < 4\pi$.

291. $$\int_0^2 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^2 f(x,y)dx.$$

292. $$\int_0^2 dx \int_0^{x/2} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{2y}^2 f(x,y)dx.$$

293. $$\int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x,y)dx + \int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x,y)dy =$$
$$= \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$$ (vastus $\int_{-2}^2 dx \int_{|x|/2}^1 f(x,y)dy$ on ka õige, kuid integraali praktiliseks arvutamiseks sobimatu).

294. $$\int_{-1}^0 dx \int_0^{1+x} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy =$$
$$= \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f(x,y)dx .$$

295. $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx.$

296. $\int_{-2}^{2} dx \int_{-3\sqrt{1-x^2/4}}^{3\sqrt{1-x^2/4}} f(x,y)dy = \int_{-3}^{3} dy \int_{-2\sqrt{1-y^2/9}}^{2\sqrt{1-y^2/9}} f(x,y)dx.$

297. $\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{1/2-\sqrt{1/4-x^2}}^{1/2+\sqrt{1/4-x^2}} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx.$

298. $\int_{0}^{4} dx \int_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy = \int_{1}^{5} dy \int_{2-\sqrt{4-(y-3)^2}}^{2+\sqrt{4-(y-3)^2}} f(x,y)dx.$

299. $\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$

300. $\int_{0}^{1} dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx.$

301. $\int_{0}^{1} dy \int_{y}^{1} f(x,y)dx.$ 302. $\int_{0}^{1} dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

303. $\int_{0}^{1} dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx.$

304. $\int_{0}^{2} dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_{2}^{4} dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx.$

305. $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_{0}^{3} dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{1-y} f(x,y)dx.$

306. $\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

307. $\int_0^1 dy \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx.$

308. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy.$ 309. $\int_0^1 dy \int_{-\arccos y}^{\arccos y} f(x,y)dx.$

310. $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx.$

311. $\int_0^1 dy \int_{-\arccos y}^{\arccos y} f(x,y)dx.$

312. 1/6. 313. 1/10. 314. π. 315. 3/2. 316. $5\pi^4/32^2$.

317. 4. Teisendada korrutiseks. 318. $5 \ln 5 - 10 + e$.

319. $(e - 1)^2/2$. 320. $2 - 3e^{-1}$. 321. $-\sqrt{3}/4 + \pi/3$.

322. 33/140. 323. 32/21. 324. $35\pi a^4/12$. Lahendus:

$$\iint_D y^2 dxdy = \int_0^{2\pi a} dx \int_0^y y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi a} y^3 dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^3(1 - \cos t)^3 a(1 - \cos t)dt = \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^4 dt.$$

§ 2.

325. $\int_1^2 u\,du \int_2^3 f(u,uv)dv.$

326. $\int_0^1 u\,du \int_0^1 f(u - uv, uv)\,dv + \int_1^2 u\,du \int_{1-1/u}^{1/u} f(u-uv, uv)\,dv.$

327. $\int_{1/2}^{2/3} dv \int_{0}^{3/(1-v)} f(u - uv, uv)u\, du.$

328. $\frac{3}{4}\int_{0}^{1} \sin^2 2v\, dv \int_{0}^{2\pi} f(u \cos^3 v, u \sin^3 v)u\, du.$

329. $\frac{1}{4}\int_{0}^{4} du \int_{0}^{4-u} f(\sqrt{u}, \sqrt{v}) \frac{dv}{\sqrt{uv}}.$

330. $\frac{1}{3}\int_{1}^{2} \frac{du}{u} \int_{1}^{2} f(\sqrt[3]{v/u}, \sqrt[3]{uv^2})dv.$

331. $\int_{0}^{\pi/2} d\varphi \int_{1}^{2} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi)r dr.$

332. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_{1}^{2} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi)r dr.$

333. $\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{a} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi)r dr.$

334. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{2\cos\varphi} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi)r dr.$

335. $\int_{0}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{4\sin\varphi} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi)r dr.$

336. $\int_{\pi/4}^{\arctan 2} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi)r dr.$

337. $6\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{1} f(2r \cos\varphi, 3r \sin\varphi)r dr.$

338. $\sqrt{6}\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{1}^{2} f(\sqrt{3}\, r \cos\varphi, \sqrt{2}\, r \sin\varphi)\, r dr.$

339. $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\sqrt{2}/\cos(\varphi - \pi/4)}^{2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$

340. $\sqrt{3}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}\cos^2\varphi \sin\varphi} f(r\cos\varphi, \sqrt{3}\, r\sin\varphi)\, r dr.$

341. $4/3$. 342. $\pi/2$. 343. $5\pi/2$. 344. $(e-1)/2$.
345. 2. 346. $2/3$. 347. 0. 348. $4/3$. 349. $-4/3$. 350. $4\pi/3$.
351. 1. 352. $\pi/3$. 353. $10\sqrt{5}\pi/3$. 354. $2\pi/9$.
355. $16\pi/3$. 356. $2\pi/3$. 357. $-6\pi^2$. 358. $\pi^2/16$.
359. 24π. 360. 4π. 361. $[\pi/3 - (16\sqrt{2} - 20)/9]/2$.
362. 3π. 363. $\pi/\sqrt{2}$. Minna üle polaarkoordinaatidele ja arvestada sümmeetriat. Siis

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\rho} r^3 dr = \int_0^{\pi/2} \rho^4 d\varphi =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4} du = \int_0^{\infty} \frac{1+\sqrt{t}}{1+t} \frac{dt}{4\sqrt[4]{t^3}} = \frac{1}{4}[B(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}) + B(\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4})],$$

kus $\rho = (\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^{-1/4}$ ja $u = \tan\varphi$.

§ 3.

364. πa^2. 365. $12 - 9/\ln 4$. 366. 5. 367. $15/2 - 8\ln 2$. 368. $7/120$. 369. 38,4. 370. πab.
371. $\pi(b^2 - a^2)/4$. 372. $1/60$. 373. a^2. 374. $5\pi a^2/8$.
375. $3\pi/4$. 376. $2a^2$. 377. $(3\sqrt{3} - \pi)a^2/3$. 378. $3/4$.
379. $39\pi/25$. 380. 1. Teha muutujate vahetus $4x + 3y = 12u$, $4x - 3y = 12v$. 381. $\ln(3/2)/3$. Teha muutujate vahetus $xy = u$, $y^2/x = v$. 382. $3\pi a^2$. 383. $ab/70$. Üle minna üldistele elliptilistele polaarkoordinaatidele,

võttes s = 8. 384. $\frac{ab}{3}\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{c^4} + \frac{b^4}{d^4}\right) + \frac{a^2b^2}{c^2d^2}\right]$.

385. $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{d^2}\right)$. 386. $\frac{a^4bd(ad + 2bc)}{6c^2(ad + bc)^2}$. 387. $a^5b/(10c^4)$.

388. $\frac{21\pi ab}{256}\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{d^2}\right)$. 389. $\frac{ab}{42}\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{d^2}\right)$. 390. 560/3.

391. 3/4. 392. $48\sqrt{6}/5$. 393. $\pi(8 - 3\sqrt{3})/6$. 394. 1/6.
395. 16. 396. 22π. 397. $\pi(6\sqrt{3} \mp 5)/3$. 398. 16/3.
399. 68/15. 400. 3π. 401. $45\pi/32$. 402. $4\pi(2\sqrt{6} - 3)$.
403. $243\pi/16$. 404. 243π. 405. π. 406. $\pi abc(2 - \sqrt{2})/3$.
407. $4\pi abc(2\sqrt{2} - 1)/3$. 408. $4\pi a^2$. 409. 14.
410. $2\pi(2\sqrt{2} - 1)/3$. 411. 36. 412. $2\sqrt{2}$. Integreerimispiirkond võtta yz-tasandil. 413. $2\sqrt{2}\pi$. 414. 4π. Integreerimispiirkond võtta yz-tasandil. 415. $16a^2$. Integreerimispiirkond võtta zx-tasandil. 416. 48. Integreerimispiirkond võtta yz-tasandil. 417. $16(\sqrt{8} - 1)/3$. 418. 40π.
419. $8(\pi - 2)$. 420. 28π. 421. $\pi a\sqrt{a^2 + h^2} + \pi h^2 \ln[(a + \sqrt{a^2 + h^2})/h]$. 422. $a(\beta - \alpha)[b(\delta - \gamma) + a(\sin\delta - \sin\gamma)]$. 423. $\pi R^3k/3$, kus k on võrdetegur.
424. $2\pi aR^2/3$. 425. $4a^2/3$. 426. $2k\pi \ln(b/a)$, kus k on võrdetegur ning b ja a on rõnga välis- ja siseraadiused.
427. $4a^2bk/3$, kus $a > b$ on ellipsi pooltelejed.
428. $(0, 4b/(3\pi))$. 429. $x_C = (1 - \pi/4)(1 + \sqrt{2})$, $y_C = (\pi/2 - 1)(2 + \sqrt{2})/8$. 430. Raskuskese asub nurga α poolitajal kaugusel $4R\sin(\alpha/2)/(3\alpha)$ ringi keskpunktist.
431. Raskuskese asub nurga α poolitajal kaugusel $4\sin^3(\alpha/2)/[3(\alpha - \sin\alpha)]$ ringi keskpunktist. 432. $x_C = -a/2$, $y_C = 8a/5$. 433. $x_C = 5a/6$, $y_C = 16a/(9\pi)$.

434. $x_C = a^2b/(14c)$, $y_C = ab^2/(14c)$. 435. $x_C = \pi a$, $y_C = 5a/6$. 436. $x_C = -a/5$, $y_C = 0$.
437. $x_C = -(64 + 15\pi)a/(80 + 40\pi)$, $y_C = 0$. 438. Masskese asub kolmnurgas hüpotenuusi keskristsirgel täisnurksest tipust kaugusel kolmveerandit hüpotenuusi pikkusest. Võtta x-telg pikki hüpotenuusi ja y-telg läbi täisnurga tipu.
439. $5x_C = a(3a^2 + b^2)/(a^2 + b^2)$, $5y_C = b(a^2 + 3b^2)/(a^2+b^2)$, kui kaatetid pikkustega a ja b asetsevad vastavalt x- ja y-teljel. 440. $J_x = J_y = (1 - 5\pi/16)a^4$. 441. $J_x = 21\pi a^4/32$, $J_y = 49\pi a^4/32$. 442. $4J_x = 4J_y = 3\pi a^4/\sqrt{2}$.
443. $J_x = ka^5/10$, kus k on võrdetegur. Koordinaatteljed paigutada nii nagu ülesandes 438.

§ 4.

444. $4\pi R^3/(3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \gamma R)$, kus $|\gamma| < 3$.
445. 232. 446. 40/3. 447. 4. 448. 1/12. 449. 30.

450. $\int_0^2 dx \iint_{D_x} f(x,y,z)dydz = \iint_D dxdy \int_0^{4-2x-4y/3} f(x,y,z)dz$, kus

$D_x = \{(y,z):\ y/3 + z/4 \leqslant 1 - x/2\}$, $D = \{(x,y): x/2 + y/3 \leqslant 1\}$.

451. $\int_0^1 dx \iint_{D_x} f(x,y,z)dydz = \iint_D dxdy \int_0^1 f(x,y,z)dz$, kus

$D_x = \{(y,z):\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - x^2},\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$,
$D = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

452. $\int_{-1}^1 dx \iint_{D_x} f(x,y,z)dydz = \iint_D dxdy \int_0^{1-x^2-y^2} f(x,y,z)dz$,

kus $D_x = \left\{(y,z):\ 0 \leqslant y^2 + z \leqslant 1 - x^2,\ z \geqslant 0\right\}$,

$D = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$.

453. $\displaystyle\int_{-a}^{a} dx \iint_{D_x} f(x,y,z)dydz = \iint_{D} dxdy \int_{-w}^{w} f(x,y,z)dz$, kus

$w = c\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2}\ /(ab)$,

$D_x = \left\{(y,z):\ y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqslant 1 - x^2/a^2\right\}$,

$D = \left\{(x,y):\ x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant 1\right\}$.

454. $\displaystyle\int_{-a}^{a} dx \iint_{D_x} f(x,y,z)dydz = \iint_{D} dxdy \int_{w}^{c} f(x,y,z)dz$, kus

$w = c\sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2}$,

$D_x = \left\{(y,z):\ z^2/c^2 - y^2/b^2 \geqslant x^2/a^2,\ 0 \leqslant z \leqslant c\right\}$,

$D = \left\{(x,y):\ w^2 \leqslant c^2\right\}$.

455. $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \iint_{D_x} f(x,y,z)dydz = \iint_{D} dxdy \int_{(x-1)^2+y^2}^{2-2x} f(x,y,z)dz$,

kus $D_x = \left\{(y,z):\ z - y^2 \geqslant (x - 1)^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 2 - 2x\right\}$,

$D = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$.

456. $\displaystyle\int_{0}^{1} dx \left\{\int_{0}^{x} dz \int_{0}^{1-x} f(x,y,z)dy + \int_{x}^{1} dz \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy\right\} =$

$\displaystyle= \int_{0}^{1} dz \left\{\int_{0}^{z} dy \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx + \int_{z}^{1} dy \int_{0}^{1-y} f(x,y,z)dx\right\}$.

457. $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{1} dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f\, dy = \int_{0}^{1} dz \int_{-z}^{z} dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f\, dx$.

458. $\displaystyle\int_{0}^{1} dx \left\{\int_{0}^{x^2} dz \int_{0}^{1} f(x,y,z)dy + \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^{1} f(x,y,z)dy\right\} =$

$$= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx + \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x,y,z)dx \right\} +$$

$$+ \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx.$$

461. $10\ln(4/5)$. 462. $4\pi/3$. 463. $1/2$. 464. $(4\ln 2 - 1)/8$. 465. $1/364$. 466. 11. 467. $1/48$.

§ 5.

468. $$\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^a rdr \int_0^1 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)dh.$$

469. $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a rdr \int_0^c f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)dh.$$

470. $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} rdr \int_0^{r^2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)dh.$$

471. $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^c dh \int_0^{h/c} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)rdr.$$

472. $$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rdr \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)dh.$$

473. $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{3}/2} rdr \int_{a-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)dh.$$

474.
$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_0^a f(r\cos\varphi \sin\theta, r\sin\varphi \sin\theta, r\cos\theta)r^2dr.$$

475.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{a} f(r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)\, r^2 dr.$$

476.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{a} f(r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)\, r^2 dr.$$

477.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)\, r^2 dr.$$

478.

$$\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\arctan(1/\cos\varphi)} \sin\theta\, d\theta \int_{\cot\theta/\sin\theta}^{1/(\cos\varphi\sin\theta)} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\, r^2 dr.$$

479. $\pi\left[3\sqrt{10} - \sqrt{2} - 8 + \ln(\sqrt{2} - 1) - \ln(\sqrt{10} - 3)\right]$. 480. $4\pi a^5/\sqrt{3}$. 481. $\pi c^4/4$. Valemites (34) vahetada osadega y ja z ning kasutada valemit (35). 482. $16\pi/3$. 483. $4\pi(b^5 - a^5)/15$. 484. $\pi a^2c^2/4$. 485. $ac^2/16$. 486. $16\pi/3$. 487. $\pi/10$. 488. $2\pi/3$. 489. $4\pi abc/5$. 490. $6\pi^2$. 491. $\pi/10$. 492. $59\pi a^5/480$. 493. $\pi abc^2/4$. 494. π. 495. 8. 496. $4\pi a^5/15$. 497. $\pi/8$.

§ 6.

498. 64. 499. 7/12. 500. 16. 501. 16. 502. 7/24. 503. 3/35. 504. 55/6. 505. $\pi/2$. 506. $81\pi/4$. Kasutada valemit (30), kus kahekordse integraali arvutamiseks teha muutujate vahetus $x = r\cos\varphi$, $y + 1 = r\sin\varphi$. 507. $\pi/2$.

508. π. 509. $32\pi/3$. 510. $19\pi/6$. 511. $\pi/8$. Kasutada valemit (30), kus kahekordse integraali arvutamiseks teha muutujate vahetus $x + 1/2 = r\cos\varphi$, $y + 1/2 = r\sin\varphi$.
512. $5\pi a^3/12$. 513. $\pi/96$. 514. $2\pi ab/3$. 515. $\pi ab(2-\sqrt{2})/3$.
516. π. 517. $3/40$. 518. $1/2$. 519. $4\pi a^3/21$. 520. π^2.
521. 4π. 522. $\pi a^2bc/(3d)$. 523. $(abc)^4/(360d^9)$.
524. $(abc)^2/(6d^3)$. 525. $\pi^2abc/4$. 526. $4abc^7/(21d^6)$.
527. $5\pi abc(3-\sqrt{5})/12$. 528. $4\pi abc/35$. 529. $abc/90$.
530. $abc^4/(60p^3)$. 531. $abc\,pq(a/p)^4/(60aq + 60bp)$.
532. $abc/554400$. 533. $abcp(5c + 4p)(c + p)^{-2}/60$.
534. $(abc)^2/(360p)$. 535. $abcpq(a/p)^4/(64aq + 64bp)$.
536. $abc/(3\pi)$. 537. $a^4/2$. 538. $abc(a + b + c)/2$.
539. $3a^4/2$. 540. $a^4/24$. 541. 162π. 542. $\pi^2R^4/4$.
543. $8\sqrt{2}/35$. 544. $k\pi a^4c/2$, kus k on võrdetegur.
545. $k\pi a^4/12$, kus k on võrdetegur. 546. $6k\pi a^2$, kus k on võrdetegur. 547. (a,a,a). 548. $(3a/5, 3b/5, 9\sqrt{ab}/32)$.
549. $(3a/8,3a/8,3a/8)$. 550. $x_C = y_C = 0$, $z_C = 3(a + c)^2 : (8a + 4c)$. 551. $(0,0,3c/4)$. 552. $x_C = y_C = 0$, $z_C = 3c(2 + \sqrt{2})/16$. 553. $(3a/28,3b/28,3c/28)$. 554. $(0,0,2a/5)$.
555. $x_C = y_C = 0$, $z_C = (20a^2 - 15ad + 3d^2)/(20a - 5d)$, kus a on kera raadius ja d on segmendi kõrgus. 556. $J_{xy} = abc^3/60$, $J_{yz} = a^3bc/60$, $J_{zx} = ab^3c/60$. 557. $J_{xy} = 4\pi abc^3/15$, $J_{yz} = 4\pi a^3bc/15$, $J_{zx} = 4\pi ab^3c/15$.
558. $J_{xy} = \pi abc^3/15$, $J_{yz} = \pi a^3bc/20$, $J_{zx} = \pi ab^3c/20$.
559. $J_{xy} = 2abc^3(15\pi - 16)/225$, $J_{yz} = 2a^3bc(105\pi - 92)/1575$, $J_{zx} = 2ab^3c(105\pi - 272)/1575$. 560. $14k$, kus k on võrdetegur. 561. $4ma^2/9$, kus $m = k\pi a^4$ on kera mass ja k on võr-

detegur. 562. $J_1 = m(a^2 + 2c^2/3)$, kus $m = 2\pi\rho a^2 c$ on silindri mass ja ρ on tema tihedus. 563. $J_0 = \pi^2 a^5 \rho/8$, kus ρ on keha tihedus. 564. $\pi\rho[p\sqrt{a^2+p^2} + d\sqrt{a^2+d^2} - p|p| - d|d| + a^2\ln(p + \sqrt{a^2+p^2}) - a^2\ln(\sqrt{a^2+d^2} - d)]$, kus $p = c - d$. 565. $U = 2\pi\rho(R^2 - d^2/3)$, kui $d \leq R$, ning $U = 4\pi\rho R^3/(3d)$, kui $d > R$, kus $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ja ρ on keha tihedus. Paigutada z-telg läbi punkti (a,b,c).

§ 7.

566. π. 567. $\pi/8$. 568. 2. 569. 1/4. 570. 4. 571. ∞. 572. $\pi/3$. 573. $\sqrt{2}$. 574. 2π. 575. 2π. 576. $\pi/2$. 577. $\pi/2$. 578. 1/2. 579. 1/16. 580. $\pi a^2(2\ln a - 1)$. 581. Hajub. 582. $\pi^2/8$. Kasutada ülesande 179 vastust. 583. $\pi/(\alpha - 1)$, kui $\alpha > 1$, ja ∞, kui $\alpha \leq 1$. 584. 9/2. Jaotada integraal kaheks päratuks integraaliks üle piirkondade $D_1 = \{(x,y):\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y < x\}$ ja $D_2 = \{(x,y):\ 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\}$. 585. π. 586. $-\pi^2\ln 2/2$. Teha muutujate vahetus $2x = u + v$, $2y = u - v$. 591. $\sqrt{\pi}/2$. 592. $1/a + 1/b > m$. Kasutada muutujate vahetust $|x| = r^{2/a}\cos^{2/a}\varphi$, $|y| = r^{2/b}\sin^{2/b}\varphi$. 593. $1/a + 1/b < m$. 594. $m < 1$. 595. 8/15. 596. ∞. 597. $\pi/16$. 598. $\pi\sqrt{\pi}$. 599. $4\pi/3$. 600. ∞. 601. Hajub. 602. $8\pi a(\ln a - 1)$. 603. Hajub. 604. $8\pi a^3(\ln a - 1/3)/3$. 605. $(1 - a)^{-3}$, $a < 1$. 606. $4\pi/(2a - 3)$, $a > 3/2$. 607. $4\pi/(3 - 2a)$, $a < 3/2$. 608. $2\pi B(3/2, 1 - a)$, $a < 1$. 609. $a > 3/2$. 610. $a < 3/2$. 611. $a < 5/2$. 612. $a - b < 3/2$. 613. $a < 3/2$. 614. $1/a + 1/b + 1/c < 1$. 615. $a < 1$.

III peatükk

§ 1.

616. $\sqrt{5}\ln 2$. Arvutamiseks kasutada valemit (4). 617. $\sqrt{5}\ln 3$. 618. $\sqrt{5}\ln(5/3)/2$. Kasutada valemit (5). 619. $1/2$. 620. $2\pi a\sqrt{2a}$. 621. $16a^2/3$. 622. $a^2\sqrt{2}$. 623. $(\pi - 2)/4$. 624. $[(1 + 4\pi^2)^{3/2} - 1]/3$. 625. $3(5\sqrt{5} - 1)$. Kasutada valemit (4) või (5). Valemi (4) kasutamisel arvestada, et $yy' = 3$, mistõttu $y ds = y\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{y^2 + (yy')^2}\,dx = \sqrt{y^2 + 9}\,dx = \sqrt{6x + 9}\,dx$. 626. $\ln(\sqrt{5} + 3) - \ln 2$. 627. $1 + \sqrt{2}$. 628. 24. 629. 0. Kasutada valemeid (4) ja (5). 630. $\pi/(4a)$. 631. $\pi + 2$. 632. $a^2\sqrt{2}$. 633. 2^9. 634. $a^3(\operatorname{ch}^{3/2} 2 - 1)/6$. Võtta $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$. 635. 0. 636. $2\pi a e^a$. 637. $[(\pi^2 + 4)^{3/2} - 8]/12$. 638. $2a^2(2 - \sqrt{2})$. 639. $4\sqrt{5}\,a^2/17$. 640. $8a\pi^3\sqrt{2}/3$. 641. $2\pi(3a^2 + 4\pi^2 b^2)\sqrt{a^2 + b^2}/3$. 642. $(56\sqrt{7} - 1)/54$. 643. $(8 - 2\sqrt{2})/3$. 644. $2\sqrt{2}[(1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1]/3$. 645. $a^4(7 + 13\sqrt{2})/16$. Kuna a on sfääri raadius, siis $a > 0$ ja seepärast $x > 0$. 646. $R^4\sqrt{3}/32$. 647. $R^2\sqrt{2}$. Kasutades valemit (8), tuleb integreerida x järgi kohast $R/\sqrt{2}$ kuni kohani 0. Kasutades valemit (7), võib valida $x = y = (R/\sqrt{2})\cos t$. 648. $2\pi a^2$. 649. $a^2\sqrt{2}\,[100\sqrt{38} - 72 - 17\ln(25 + 4\sqrt{38}) - 17\ln 17]/512$.

§ 2.

650. π. 651. 12π. 625. $11/3$. 653. 1. 654. $16(10\sqrt{10} - 1)/27$. 655. $98/81$. 656. $23/6$. 657. $\pi/2$.

$$II = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma_2} \frac{Ax + By + Cz}{|\vec{n}|}\,dS = \frac{-D}{3|\vec{n}|}\,S = \frac{1}{3}\,Sh.$$

848. $2\iint\limits_{\Sigma}(y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy$. 849. 0.
850. $-\pi a^6/8$. 851. -14. Pinnaks Σ võtta pinna $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ osa, mis on piiratud joonega L. 852. 0.
853. -3. 854. $32/5$. 855. $\pm 4\pi$. 856. $-\pi a^2$. 857. 0.
858. Tarvilik ja piisav on, et $P_y = Q_x$, $P_z = R_x$ ja $Q_z = R_y$ eeldusel, et need osatuletised ja funktsioonid P,Q ja R on pidevad.

V peatükk

§ 1.

859. $x + y = 1$, $(1,1)$. 860. $x + y = 0$, $(1,1)$.
861. $x^2 + y^2 = 5$, $(2,4)$. 862. $x^2 + y^2 = 1$, $(0,-2)$.
863. $2y = x^2$, $(1,1/2)$. 864. $y = 0$, $(0,2)$. 865. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $(2,2,-2)$. 866. $4z \arctan(y/x) = \pi$, $(-2,2,\pi)$.
867. $\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 8)^2} = 64$, $\operatorname{grad} u = (9,12,28)\,64/975$. 868. $u \operatorname{grad} u = (x,y,z)$, $|\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{2}\,z$. 869. $\operatorname{grad} u = (2x,2y,-2z)$, kus $z^2 = x^2 + y^2$. 870. Punktides, kus $r = 1$. 872. $\operatorname{grad} u = -2r^{-4}(x,y,z)$. 873. $(-1/3,\ 3/4,\ 0)$, $(7/3,\ -3/4,\ 0)$.
874. Punktid, mis asuvad silindril $x^2 + y^2 = 2/3$.
875. $y = ax$, $z = bx^2$. 876. $x^2 - y^2 = a$, $x + y = bz$.
877. $x = ay$, $xy + z^2 = b$. 878. $xz = a$, $xy + z^2 = b$.
879. $x - y = a(y - z)$, $(x + y + z)(x - y)^2 = b$.

§ 2.

890. -2. 891. $-1/9$. 892. 0. 893. -1. 894. $7\sqrt{2}/10$,

1. 895. −4/3. 896. (−3,1),(1,−1). Valemi (3) järgi tuleb leida punktid, kus $u_x = u_y = u_z = 0$. 897. grad u · grad v / /|grad v|. 898. z-telje negatiivses suunas. 899. Vektori (2,0,−2) suunas.

§ 3.

900. 3. 901. $-2(x + y + z)^{-5/3}$. 902. xye^{xy}. 903. 29. 904. 2/3. 915. 1/2. 916. 10/3. 917. $3\pi a^2 h$. 918. 0. 919. 0. 920. $-\pi h^3$. 921. π. 922. 4π. 923. $4\pi abc/3$. 924. $9\pi h^5/10$.

§ 4.

925. $(2y + 2z,0,0)$. 926. 0. 927. $(1,-y \sin 2x, z \sin 2x)$. 928. $(-1 - 2x^2 y, xy + 2xy^2, 1 - xz)$. 929. $(4,-1,0)$. 930. $(-1,0,0)$. 939. $u = x + y + z + C$. 940. $u = xyz + C$. 941. $u = xy + xz + yz + C$. 943. $\pm\pi a^2$. 944. $\pm\pi a^6/8$. 945. 1/2. 946. $\pm 2\pi a^2$. 947. 0.

40 kop.