TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Julia Martsinkevitš

Radon–Nikodými omadus

Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja: dotsent Märt Põldvere

Tartu 2014

Radon–Nikodými omadus

Magistritöö

Julia Martsinkevitš

Lühikokkuvõte. Magistritöös kirjutatakse lahti mõned klassikalised baastulemused Radon–Nikodými omadusega Banachi ruumide kohta. Töös on käsitletud Radon–Nikodými omaduse samaväärsust pidevate lineaarsete operaatorite (Rieszi mõttes) esituvusega, separaableid kaasruume, vektorväärtustega funktsiooni tingliku ootuse olemasolu, martingaalide koonduvuse põhiteoreemi ning Banachi ruumi Radon–Nikodými omaduse samaväärsust selle ruumi tõkestatud alamhulkade hambuvusega. Muuhulgas tõestatakse, et Banachi ruumi tõkestatud alamhulk on hambuv parajasti siis, kui tal leidub kui tahes väikese diameetriga viilusid. Töö põhiliseks allikmaterjaliks on J. Diesteli ja J. J. Uhli, Jr., monograafia *Vector Measures* (Amer. Math. Soc., 1977).

Märksõnad. Radon–Nikodými omadus, vektormõõt, Bochneri integraal, tinglik ootus, martingaal, hambuvus, viil.

Radon–Nikodým Property

Master's Thesis

Julia Martsinkevitš

Abstract. The objective of this master's thesis is to present detailed proofs of some classical results of Banach spaces with the Radon–Nikodým property. In the thesis we prove that Banach space X has Radon–Nikodým property with respect to (Ω, Σ, μ) if and only if each operator $T \in \mathcal{L}(L_1(\mu), X)$ is Riesz representable. We show that conditional expectation is defined for all Bochner integrable functions and prove using martingale mean convergence theorem that the space X has the Radon–Nikodým property if and only if every bounded subset of X is dentable. Moreover, we show that a bounded subset of X is dentable if and only if it has slices of arbitrarily small diameter. Also we shall see that separable dual spaces have the Radon–Nikodým property. All basic results of this thesis are taken from the monograph *Vector Measures* (Amer. Math. Soc., 1977) by J. Diestel and J. J. Uhl, Jr.

Key words. Radon–Nikodým property, vector measure, Bochner integral, conditional expectation, martingale, dentability, slice.

Sissejuhatus

Olgu (Ω, Σ, μ) lõpliku mõõduga ruum ning olgu $\mathbb{K}$ üks korpustest $\mathbb{R}$ või $\mathbb{C}$.

Käesoleva magistritöö lähtepunktiks on klassikaline Radon–Nikodými teoreem.

Radon–Nikodými teoreem. *Kui $\nu\colon\ \Sigma \to \mathbb{K}$ on μ-pidev arvmõõt (st lõplik märgiga mõõt või kompleksmõõt), siis leidub funktsioon $g \in L_1(\mu)$ nii, et ν on määramata integraal funktsioonist g, st*

$$\nu(E) = \int_E g\, d\mu \qquad \textit{iga } E \in \Sigma \textit{ korral.}$$

Loomulik on küsida, kas see teoreem jääb kehtima, kui seal vaadelda ν rollis Banachi ruumi X väärtustega loenduvalt aditiivseid hulgafunktsioone ning nõuda, et funktsioon $g\colon\ \Omega \to X$ oleks Bochneri mõttes integreeruv. (Bochneri integraal on Lebesgue'i integraali üldistus Banachi ruumi väärtustega funktsioonile.) Osutub, et Radon–Nikodými teoreemi sellise üldistuse kehtivus sõltub ruumist X. Banachi ruume, mille puhul selline Radon–Nikodými teoreemi üldistus kehtib, nimetatakse Radon–Nikodými omadusega ruumideks.

Töö eesmärk on kirjutada lahti mõned klassikalised baastulemused Radon–Nikodými omadusega Banachi ruumide kohta. Väitekiri tugineb põhiliselt J. Diesteli ja J. J. Uhli, Jr., monograafiale [DU].

Magistritöö koosneb kuuest paragrahvist.

Esimeses paragrahvis on välja toodud vajalikud mõisted ja tulemused vektormõõtude kohta. Lisaks vaadatakse läbi vajaminevad eelteadmised reaalmuutuja funktsioonide teooriast (nt Hölderi võrratus, L_p-ruumide sisalduvusteoreem) ning Banachi ruumide teooriast (Hahn–Banachi eraldamisteoreem, Goldstine'i teoreem, Banach–Alaoglu teoreem).

Teise paragrahvi esimeses punktis tuuakse sisse tugevalt, nõrgalt ja Boreli mõttes μ-mõõtuva funktsiooni mõisted ning tõestatakse Pettise mõõtuvusteoreem, mis selgitab erinevate mõõtuvustüüpide vahekordi. Teine ja kolmas punkt on pühendatud Bochneri integraalile ning selle tähtsamatele omadustele.

Radon–Nikodými omadust hakatakse käsitlema kolmandas paragrahvis, kus on ka tõestatud selle töö üks põhitulemustest, mis väidab, et Banachi ruumil X on

Radon–Nikodými omadus ruumi (Ω, Σ, μ) suhtes parajasti siis, kui iga pidev lineaarne operaator $T\colon L_1(\mu) \to X$ on Rieszi mõttes esituv. Üheks näiteks Radon–Nikodými omadusega Banachi ruumidest on separaablid kaasruumid – selles veendutakse paragrahvi viimases punktis.

Edasiseks Radon–Nikodými omaduse uurimiseks vajame me martingaali mõistet, milleks omakorda vajame tingliku ootuse mõistet. Neljandas paragrahvis defineeritakse tinglik ootus, veendutakse, et igal funktsioonil $f \in L_1(\mu)$ eksisteerib tinglik ootus, kusjuures ta on üheselt määratud, ning seejärel näidatakse, et igal funktsioonil $f \in L_1(\mu, X)$ eksisteerib tinglik ootus (mis on üheselt määratud). Viiendas paragrahvis tuuakse sisse martingaali mõiste, kirjeldatakse koonduvaid martingaale ruumis $L_p(\mu, X)$ ($1 \leqslant p < \infty$) ning tõestatakse martingaalide koonduvuse põhiteoreem.

Osutub, et Radon–Nikodými omadus on Banachi ruumi geomeetriline omadus; just selle aspekti väljaselgitamisega tegeleb töö kuues paragrahv. Siin tõestatakse magistritöö teine põhitulemus, mille kohaselt Banachi ruumil on Radon–Nikodými omadus parajasti siis, kui tema iga tõkestatud alamhulk on hambuv. Muuhulgas demonstreeritakse, kuidas on seotud mittetühja tõkestatud hulga hambuvus selle viiludega. Nimelt, ruumi X tõkestatud alamhulk on hambuv parajasti siis, kui tal leidub kui tahes väikese diameetriga viilusid. Tõkestatud hulk on hambuv parajasti siis, kui tema kumera katte sulund on hambuv. Seda fakti silmas pidades, saab näidata, et ruumil X on Radon–Nikodými omadus parajasti siis, kui tema iga kinnine kumer tõkestatud alamhulk on hambuv.

Töös on kasutatud järgmisi tähistusi.

Kui X on normeeritud ruum ning $x \in X$ ja $r > 0$, siis sümbolid $B_X(x, r)$ ja $\overline{B}_X(x, r)$ tähistavad vastavalt lahtist ja kinnist kera ruumis X keskpunktiga x ja raadiusega r; kui ruumi X roll on kontekstist selge, siis me kirjutame $B_X(x, r)$ ja $\overline{B}_X(x, r)$ asemel ka lihtsalt vastavalt $B(x, r)$ ja $\overline{B}(x, r)$, st

$$\begin{aligned} B(x, r) : &= B_X(x, r) := \{y \in X\colon \ \|y - x\| < r\}, \\ \overline{B}(x, r) : &= \overline{B}_X(x, r) := \{y \in X\colon \ \|y - x\| \leqslant r\}. \end{aligned}$$

Ruumi X alamhulga D kumerat katet tähistame sümboliga $\operatorname{co} D$, st

$$\operatorname{co} D := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j \colon \; n \in \mathbb{N}, \, x_1, \ldots, x_n \in D, \, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1], \, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\}$$

ja kumera katte sulundit sümboliga $\overline{\operatorname{co}} \, D$

$$\overline{\operatorname{co}} \, D := \overline{\operatorname{co} D}.$$

Kui Y on mingi teine normeeritud ruum (üle sama korpuse $\mathbb{K}$, mis X), siis pidevate lineaarsete operaatorite $X \to Y$ normeeritud ruumi tähistame me sümboliga $\mathcal{L}(X, Y)$.

Mis tahes hulga Ω korral tähistab sümbol $\mathcal{P}(\Omega)$ hulga Ω kõigi alamhulkade kogumit. Kui (Ω, Σ, μ) on mõõduga ruum ja $A \in \Sigma$, siis

$$\mathcal{P}_\Sigma(A) := \mathcal{P}(A) \cap \Sigma = \{E \in \Sigma \colon \; E \subset A\},$$
$$\mathcal{P}_\mu^+(A) := \{E \in \Sigma \colon \; E \subset A, \, \mu(E) > 0\}.$$

1 Vajalikke eelteadmisi

Kõikjal selles paragrahvis on X Banachi ruum, (Ω, Σ, μ) täieliku lõpliku mõõduga ruum ning $\mathfrak{A}$ hulga Ω alamhulkade algebra.

1.1 Abitulemusi reaalmuutuja funktsioonide teooriast

Definitsioon 1.1. Hulgafunktsiooni $\nu\colon\ \Sigma \to \mathbb{K}$, mis rahuldab tingimust

$$E_n \in \Sigma,\ n \in \mathbb{N},\ E_n \cap E_m = \emptyset,\ n \neq m \quad \Longrightarrow \quad F\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n)$$

ehk, teisisõnu, loenduvalt aditiivset hulgafunktsiooni $\Sigma \to \mathbb{K}$ nimetame *arvmõõduks.* Arvmõõtu $\Sigma \to \mathbb{R}$ nimetame *reaalmõõduks.* Arvmõõtu $\Sigma \to \mathbb{C}$ nimetatakse *kompleksmõõduks.*

Definitsioon 1.2. Öeldakse, et arvmõõt $\nu\colon\ \Sigma \to \mathbb{K}$ on *absoluutselt pidev mõõdu μ suhtes* (ehk lihtsalt *μ-pidev*), kui

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \nu(E) = 0,$$

st iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et

$$\mu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\nu(E)| < \varepsilon.$$

Teoreem 1.1 (vrd [F, lk 89, teoreem 3.5])**.** *Olgu $\nu\colon\ \Sigma \to \mathbb{K}$ arvmõõt. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *arvmõõt ν on μ-pidev;*

(ii) *arvmõõdu ν täisvariatsioon $|\nu|$ on μ-pidev;*

(iii) $E \in \Sigma$, $\mu(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(E) = 0.$

Lemma 1.2. *Olgu $\nu\colon\ \Sigma \to [0, \infty)$ μ-pidev mõõt. Siis leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, kusjuures iga $n \in \mathbb{N}$ korral*

$$(n-1)\mu(E) \leqslant \nu(E) \leqslant n\mu(E) \qquad \textit{iga } E \in \mathcal{P}_\Sigma(E_n) \textit{ korral.} \tag{1.1}$$

Esitame lemmale 1.2 kaks erinevat tõestust. Neist teine toetub reaalmõõdu Hahni lahutusele, esimene aga Radon–Nikodými teoreemile ning järgnevale lausele (mida kasutame ka paragrahvis 4 tingliku ootuse uurimisel), täpsemalt tema väitele (a).

Lause 1.3. *Olgu $f, g\colon\ \Omega \to \mathbb{K}$ μ-integreeruvad funktsioonid.*

(a) *Kui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ja*

$$\int_E f\,d\mu \geqslant 0 \quad \textit{iga } E \in \Sigma \textit{ korral,} \tag{1.2}$$

siis $f \geqslant 0$ μ-peaaegu kõikjal.

(b) *Kui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ja*

$$\int_E f\,d\mu \geqslant \int_E g\,d\mu \quad \textit{iga } E \in \Sigma \textit{ korral,} \tag{1.3}$$

siis $f \geqslant g$ μ-peaaegu kõikjal.

(c) *Kui*

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \geqslant \left|\int_E g\,d\mu\right| \quad \textit{iga } E \in \Sigma \textit{ korral,} \tag{1.4}$$

siis $|f| \geqslant |g|$ μ-peaaegu kõikjal.

Lause 1.3 tõestus kasutab järgnevat lauset.

Lause 1.4. *Olgu μ-integreeruv funktsioon $h\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ ja hulk $E \in \Sigma$, $\mu(E) > 0$, sellised, et*

$$h(\omega) > 0 \quad \textit{iga } \omega \in E \textit{ korral.}$$

Siis

$$\int_E h\,d\mu > 0.$$

Tõestus. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral $E_n := \left\{\omega \in E\colon\ h(\omega) > \frac{1}{n}\right\}$; siis $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, kusjuures $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$; seega $\mu(E_n) \underset{n}{\to} \mu(E) > 0$; järelikult mingi $n \in \mathbb{N}$ korral $\mu(E_n) > 0$. Aga nüüd

$$\int_E h\,d\mu \geqslant \int_{E_n} h\,d\mu \geqslant \int_{E_n} \frac{1}{n}\,d\mu = \frac{1}{n}\,\mu(E_n) > 0.$$

■

Lause 1.3 tõestus. (a). Kehtigu (1.2). Oletame vastuväiteliselt, et $\mu(A) > 0$, kus $A := \{\omega \in \Omega\colon\ f(\omega) < 0\} = \{\omega \in \Omega\colon\ -f(\omega) > 0\}$; siis lause 1.4 põhjal $\int_A (-f)\,d\mu > 0$ ehk $\int_A f\,d\mu < 0$, mis on vastuolus eeldusega.

(b). Kehtigu (1.3). Siis iga $E \in \Sigma$ korral $\int_E (f - g)\, d\mu \geqslant 0$, järelikult väite (a) põhjal $f - g \geqslant 0$ μ-peaaegu kõikjal ehk, teisisõnu, $f \geqslant g$ μ-peaaegu kõikjal.

(c). Kehtigu (1.4). Olgu arvmõõdud $\nu, \rho\colon\ \Sigma \to \mathbb{K}$ vastavalt määramata integraalid funktsioonidest f ja g, st

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu \quad \text{ja} \quad \rho(E) = \int_E g\, d\mu, \qquad E \in \Sigma.$$

Väite (b) põhjal piisab lause tõestuseks näidata, et

$$\int_E |f|\, d\mu \geqslant \int_E |g|\, d\mu \quad \text{iga } E \in \Sigma \text{ korral}$$

ehk

$$|\nu|(E) \geqslant |\rho|(E) \quad \text{iga } E \in \Sigma \text{ korral.}$$

Olgu $E \in \Sigma$ suvaline ning olgu $n \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatud hulgad $E_1, \dots, E_n \in \Sigma$ sellised, et $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$. Siis

$$\sum_{i=1}^{n} |\rho(E_i)| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{E_i} g\, d\mu \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{E_i} f\, d\mu \right| = \sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)| \leqslant |\nu|(E),$$

järelikult $|\rho|(E) \leqslant |\nu|(E)$, nagu soovitud. ■

Lemma 1.2 esimene tõestus. Radon–Nikodými teoreemi põhjal leidub μ-integreeruv funktsioon $h\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ nii, et

$$\nu(E) = \int_E h\, d\mu \quad \text{iga } E \in \Sigma \text{ korral.}$$

Lause 1.3, (a), põhjal võime üldisust kitsendamata eeldada, et h on mittenegatiivne. Tähistades iga $n \in \mathbb{N}$ korral $E_n := \{\omega \in \Omega : n - 1 \leqslant h(\omega) < n\}$, kehtib (1.1), sest mis tahes $E \in \mathcal{P}_\Sigma(E_n)$ korral

$$(n-1)\mu(E) = \int_E (n-1)\, d\mu \leqslant \int_E h\, d\mu = \nu(E) = \int_E h\, d\mu \leqslant \int_E n\, d\mu = n\mu(E).$$

■

Lemma 1.2 teine tõestus. Olgu $\Omega = P_n \cup N_n$ reaalmõõtude $\nu - n\mu$, $n \in \mathbb{N}$, Hahni lahutused, st $P_n \in \Sigma$ on positiivne ja $N_n \in \Sigma$ on negatiivne hulk (reaalmõõdu $\nu - n\mu$

suhtes) ning $P_n \cap N_n = \emptyset$. Ilmselt

$$P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots \qquad \text{ja} \qquad N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \dots,$$

kusjuures

$$\Omega = \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\Big) \qquad \text{ja} \qquad \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n\Big) \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\Big) = \emptyset.$$

Tähistades

$$E_1 := N_1 \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \qquad \text{ja} \qquad E_n := N_n \setminus N_{n-1} = N_n \cap P_{n-1}, \quad \text{kui } n \geqslant 2,$$

on hulgad $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, paarikaupa lõikumatud ja $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Seejuures, kui $n \geqslant 2$ ja $E \in \mathcal{P}_\Sigma(E_n)$, siis

$$\nu(E) \leqslant n\mu(E) \qquad \text{ja} \qquad \nu(E) \geqslant (n-1)\mu(E).$$

Kui $E \in \mathcal{P}_\Sigma\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n\Big)$, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\nu(E) \geqslant n\mu(E)$, järelikult mõõdu ν lõplikkuse tõttu $\mu(E) = 0$, mõõdu ν μ-pidevuse tõttu $\nu(E) = 0$. Kui $E \subset N_1$, siis $\nu(E) \leqslant \mu(E)$, seega mis tahes $E \in \mathcal{P}_\Sigma(E_1)$ korral

$$0 \leqslant \nu(E) = \nu\Big(E \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n\Big) + \nu(E \cap N_1) = \nu(E \cap N_1) \leqslant \mu(E \cap N_1) \leqslant \mu(E).$$

■

Lemma 1.5 ("ammendamislemma"; [DU, lk 70, lemma 4])**.** *Rahuldagu kogum $\mathcal{A} \subset \Sigma$ tingimusi*

(1) $\mathcal{A} \supset \{B \in \Sigma\colon\ \mu(B) = 0\}$*;*

(2) $B \in \mathcal{A},\ \Sigma \ni C \subset B \quad \Longrightarrow \quad C \in \mathcal{A}$*;*

(3) $B_1, B_2 \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad B_1 \cup B_2 \in \mathcal{A}$*;*

(4) *iga hulga $A \in \Sigma$, $\mu(A) > 0$, korral leidub hulk $B \in \mathcal{P}_\mu^+(A) \cap \mathcal{A}$.*

Siis leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $E_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Tõestus. Tähistame $c := \sup\{\mu(B)\colon\ B \in \mathcal{A}\}$. Valime hulgad $B_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $\lim\limits_n \mu(B_n) = c$. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral $A_n := \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$, siis tingimuse (3) põhjal $A_n \in \mathcal{A}$, kusjuures $A_n \subset A_{n+1}$, ning $\lim\limits_n \mu(A_n) = c$. Näitame, et $\mu\Big(\Omega \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = 0$. Oletame vastuväiteliselt, et $\mu\Big(\Omega \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) > 0$. Siis tingimuse (4) põhjal leidub hulk $B \in \mathcal{A}$, $\mu(B) > 0$, nii, et $B \subset \Omega \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Tingimuse (3) põhjal $B \cup A_n \in \mathcal{A}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ning

$$\lim_n \mu(B \cup A_n) = \lim_n \big(\mu(B) + \mu(A_n)\big) = \mu(B) + c > c,$$

mis on vastuolus arvu c definitsiooniga. Tingimuse (1) põhjal $\Omega \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Tähistades

$$E_0 := \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad E_1 := A_1 \quad \text{ja} \quad E_n := A_n \setminus A_{n-1},\ n \geqslant 2,$$

saame, et hulgad $E_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on paarikaupa lõikumatud ja $\Omega = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$. ■

Lemma 1.6. *Kui $\Sigma = \sigma(\mathfrak{A})$, siis iga $E \in \Sigma$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub hulk $D \in \mathfrak{A}$ nii, et $\mu(E \triangle D) < \varepsilon$, kus*

$$E \triangle D := (E \setminus D) \cup (D \setminus E) = (E \cup D) \setminus (E \cap D)$$

on hulkade E ja D sümmeetriline vahe.

Tõestus. Olgu $\Sigma = \sigma(\mathfrak{A})$. Kuna μ on lõplik, siis mõõt $\mu|_{\mathfrak{A}}$ on samuti lõplik; seega mõõdu $\mu|_{\mathfrak{A}}$ Carathéodory–Hahni jätk on tema ainus jätk σ-algebrale Σ; järelikult μ on oma ahendi $\mu|_{\mathfrak{A}}$ Carathéodory–Hahni jätk, st iga $E \in \Sigma$ korral

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(D_j)\colon\ D_j \in \mathfrak{A},\ j \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \supset E\Big\} \\ &= \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(D_j)\colon\ D_j \in \mathfrak{A},\ j \in \mathbb{N},\ D_i \cap D_j = \emptyset,\ i \neq j,\ \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \supset E\Big\}.\end{aligned}$$

Olgu $E \in \Sigma$ ja $\varepsilon > 0$. Siis leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $D_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, nii, et $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_j \supset E$ ja

$$\mu(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(D_j) < \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Valime $n \in \mathbb{N}$ nii, et $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \mu(D_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ ja tähistame $D := \bigcup\limits_{j=1}^{n} D_j \in \mathfrak{A}$. Sel juhul

$$\begin{aligned}\mu(E \triangle D) &= \mu(E \setminus D) + \mu(D \setminus E) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \setminus D\Big) + \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \setminus E\Big) \\ &= \mu\Big(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} D_j\Big) + \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j\Big) - \mu(E) \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu(D_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(D_j) - \mu(E) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Teoreem 1.7 (Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreem)**.** *Olgu funktsioonid* $f_n \in L_1(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, *ja funktsioon* $f\colon\ \Omega \to \mathbb{K}$ *sellised, et*

(1) $f_n \underset{n}{\to} f$ *peaaegu kõikjal;*

(2) *leidub Lebesgue'i mõttes integreeruv funktsioon* $g\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ *nii, et iga* $n \in \mathbb{N}$ *korral* $|f_n| \leqslant g$ *peaaegu kõikjal.*

Siis $f \in L_1(\mu)$, *kusjuures*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Lemma 1.8 (Hölderi võrratus; vt nt [F, lk 182, Hölderi võrratus 6.2])**.** *Olgu* $p, q \in [1, \infty]$ *kaaseksponendid, st* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(seejuures juhtudel* $p = 1$ *ja* $p = \infty$ *loeme vastavalt* $q = \infty$ *ja* $q = 1$*). Kui* $f \in L_p(\mu)$ *ja* $g \in L_q(\mu)$, *siis* $fg \in L_1(\mu)$, *kusjuures*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Teoreem 1.9 (vt nt [Вул, lk 261, teoreem X.1.1])**.** *Olgu* $\infty > s > r \geqslant 1$. *Siis*

$L_s(\mu) \subset L_r(\mu)$, kusjuures iga $f \in L_s(\mu)$ korral

$$\|f\|_r \leqslant \mu(\Omega)^{\frac{s-r}{rs}} \|f\|_s. \tag{1.5}$$

Tõestus. Tähistame $p := \frac{s}{r}$, sel juhul arvu p kaaseksponent on $q := \frac{s}{s-r}$. Olgu $f \in L_s(\mu)$; siis $|f|^r \in L_p(\mu)$. Kuna $\mu(\Omega) < \infty$, siis $1 \in L_q(\mu)$; seega Hölderi võrratuse põhjal $|f|^r \in L_1(\mu)$, millest järeldub, et $f \in L_r(\mu)$. Jällegi Hölderi võrratuse põhjal

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^r \, d\mu &= \big\||f|^r \cdot 1\big\|_1 \leqslant \big\||f|^r\big\|_p \big\|1\big\|_q = \left(\int_\Omega |f|^{rp} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega 1^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |f|^s \, d\mu\right)^{\frac{r}{s}} = \mu(\Omega)^{\frac{s-r}{s}} \left(\int_\Omega |f|^s \, d\mu\right)^{\frac{r}{s}}.\end{aligned}$$

Võttes viimase võrratuse mõlemad pooled astmesse $\frac{1}{r}$, saame võrratuse (1.5). ∎

1.2 Vektormõõdud

Selles punktis esitame edaspidi vajaminevad definitsioonid ja tulemused vektormõõtude kohta.

Definitsioon 1.3. Öeldakse, et hulgafunktsioon $F\colon \mathfrak{A} \to X$ on *lõplikult aditiivne vektormõõt* ehk lihtsalt *vektormõõt*, kui

$$E_1, E_2 \in \mathfrak{A}, E_1 \cap E_2 = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad F(E_1 \cup E_2) = F(E_1) + F(E_2).$$

Definitsioon 1.4. Öeldakse, et vektormõõt $F\colon \mathfrak{A} \to X$ on *loenduvalt aditiivne*, kui

$$E_n \in \mathfrak{A}, n \in \mathbb{N}, E_n \cap E_m = \emptyset, n \neq m, \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{A} \quad \Longrightarrow \quad F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n).$$

Definitsioon 1.5. Olgu $E \in \mathfrak{A}$. Kogumit $\{E_1, \dots, E_m\}$, kus $m \in \mathbb{N}$ ja $E_1, \dots, E_m \in \mathfrak{A}$ on paarikaupa lõikumatud hulgad, mille ühend $\bigcup_{i=1}^{m} E_i = E$, nimetatakse hulga E *lõplikuks $\mathfrak{A}$-mõõtuvaks tükelduseks* (ehk lihtsalt $\mathfrak{A}$-*mõõtuvaks tükelduseks* ehk lihtsalt *tükelduseks*). Kui algebra $\mathfrak{A}$ roll on kontekstist selge, siis nimetatakse $\mathfrak{A}$-mõõtuvaid tükeldusi ka lihtsalt *mõõtuvateks tükeldusteks.*

Definitsioon 1.6. Vektormõõdu $F\colon \mathfrak{A} \to X$ *variatsiooniks* nimetatakse hulgafunktsiooni $|F|\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$, mis on defineeritud võrdusega

$$|F|(E) = \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \|F(A)\|, \quad E \in \mathfrak{A},$$

kus $\sup$ võetakse üle hulga E kõigi lõplike mõõtuvate tükelduste π.

Kui $|F|(\Omega) < \infty$, siis öeldakse, et F on *tõkestatud variatsiooniga* vektormõõt.

Vahetult on kontrollitav, et vektormõõdu $F\colon \mathfrak{A} \to X$ variatsioon $|F|$ on aditiivne ning seega ka monotoonne hulgafunktsioon.

Lause 1.10. *Olgu $F\colon \mathfrak{A} \to X$ vektormõõt. Siis*

$$\|F(E)\| \leqslant |F|(E) \quad \textit{iga } E \in \mathfrak{A} \textit{ korral.} \tag{1.6}$$

Tõestus. Olgu $E \in \mathfrak{A}$ ning olgu hulgad $E_1, \dots, E_m \in \mathfrak{A}$ $(m \in \mathbb{N})$ sellised, et $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$, ning $\bigcup_{i=1}^{m} E_i = E$. Siis

$$\|F(E)\| = \left\| F\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{m} F(E_i)\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \|F(E_i)\| \leqslant |F|(E).$$

■

Lause 1.11. *Olgu $F\colon \mathfrak{A} \to X$ tõkestatud variatsiooniga vektormõõt. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *F on loenduvalt aditiivne;*

(ii) *$|F|$ on loenduvalt aditiivne.*

Tõestus. (i)⇒(ii). Eeldame, et F on loenduvalt aditiivne. Olgu $E_n \in \mathfrak{A}$, $n \in \mathbb{N}$, sellised paarikaupa lõikumatud hulgad, et $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{A}$, ning olgu π hulga $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ suvaline mõõtuv tükeldus. Kuna

$$\begin{aligned}
\sum_{A\in\pi} \|F(A)\| &= \sum_{A\in\pi} \left\| F\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right\| = \sum_{A\in\pi} \left\| F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n)\right)\right\| \\
&= \sum_{A\in\pi} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} F(A \cap E_n)\right\| \leqslant \sum_{A\in\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \|F(A \cap E_n)\| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{A\in\pi} \|F(A \cap E_n)\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |F|(E_n),
\end{aligned}$$

siis $|F|\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |F|(E_n)$.

Variatsiooni $|F|$ on aditiivsuse ja monotoonsuse tõttu iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\sum_{k=1}^{n} |F|(E_k) = |F|\Big(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\Big) \leqslant |F|\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big),$$

järelikult $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |F|(E_n) \leqslant |F|\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Big)$ ning kokkuvõttes $|F|\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |F|(E_n)$. Seega variatsioon $|F|$ on loenduvalt aditiivne.

(ii)⇒(i). Eeldame, et $|F|$ on loenduvalt aditiivne. Olgu $E_n \in \mathfrak{A}$, $n \in \mathbb{N}$, sellised paarikaupa lõikumatud hulgad, et $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{A}$. Siis võrratuse (1.6) põhjal

$$\begin{aligned}\Big\|F\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) - \sum_{n=1}^{m} F(E_n)\Big\| &= \Big\|F\Big(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n\Big)\Big\| \\ &\leqslant |F|\Big(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=m+1}^{\infty} |F|(E_n) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

sest koonduva rea jääkliige koondub nulliks (kuna F on tõkestatud variatsiooniga, siis $|F|$ on lõplik mõõt ning seega $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |F|(E_n) = |F|\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Big) < \infty$). Järelikult $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F(E_n) = F\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Big)$; niisiis vektormõõt F on loenduvalt aditiivne. ■

Definitsioon 1.7. Olgu $\nu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ mõõt. Vektormõõtu $F\colon \mathfrak{A} \to X$ nimetatakse *ν-pidevaks*, kui

$$\lim_{\nu(E)\to 0} F(E) = 0,$$

st iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \mathfrak{A},\ \nu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|F(E)\| < \varepsilon.$$

Kehtib teoreemi 1.1 järgmine üldistus.

Lause 1.12. *Olgu $F\colon \Sigma \to X$ tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *F on μ-pidev;*

(ii) *$|F|$ on μ-pidev;*

(iii) $E \in \Sigma,\, \mu(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad F(E) = 0.$

Tõestus. (i)⇒(iii). Olgu F μ-pidev ning olgu $E \in \Sigma$ selline, et $\mu(E) = 0$. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Selleks, et $F(E) = 0$ (ja implikatsiooni tõestuseks) piisab näidata, et $\|F(E)\| < \varepsilon$. Vektormõõdu F μ-pidevuse tõttu leidub $\delta > 0$ nii, et

$$D \in \Sigma,\, \mu(D) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|F(D)\| < \varepsilon.$$

Kuna $\mu(E) = 0 < \delta$, siis $\|F(E)\| < \varepsilon$, nagu soovitud.

(iii)⇒(ii). Kehtigu (iii) ning olgu $E \in \Sigma$ selline, et $\mu(E) = 0$. Lause 1.11 põhjal on variatsioon $|F|$ mõõt; kuna F on tõkestatud variatsiooniga, siis $|F|$ on lõplik mõõt; seega teoreemi 1.1 põhjal piisab variatsiooni $|F|$ μ-pidevuseks näidata, et $|F|(E) = 0$. Olgu π hulga E suvaline mõõtuv tükeldus. Siis iga $A \in \pi$ korral $\mu(A) = 0$, seega eelduse (iii) põhjal ka $F(A) = 0$, järelikult $\sum\limits_{A\in\pi} \|F(A)\| = 0$. Siit järeldub, et $|F|(E) = 0$, nagu soovitud.

(ii)⇒(i) on võrratuse (1.6) tõttu ilmne. ■

Märkus 1.1. Saab näidata, et samaväärsus (i)⇔(iii) lauses 1.12 kehtib ka ilma eelduseta variatsiooni $|F|$ tõkestatusest (vt Pettise teoreemi [DU, lk 10, teoreem 1]).

Lause 1.13. *Olgu $\nu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ lõplik mõõt. Siis ν-pidev vektormõõt $F\colon \mathfrak{A} \to X$ on loenduvalt aditiivne.*

Tõestus. Olgu $E_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, paarikaupa lõikumatud, kusjuures $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathfrak{A}$. Tähistame $E := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$. Peame näitama, et $\sum\limits_{j=1}^{\infty} F(E_j) = F(E)$ ehk $\sum\limits_{j=1}^{n} F(E_j) \underset{n}{\to} F(E)$. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral $E_n := \bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j$. Nüüd vektormõõdu F loenduvaks aditiivsuseks piisab näidata, et $F(E \setminus E_n) \underset{n}{\to} 0$, sest sel juhul $F(E_n) \underset{n}{\to} F(E)$ ehk $\sum\limits_{j=1}^{n} F(E_j) = F\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j\Big) \underset{n}{\to} F(E)$.

Kuna $E \setminus E_1 \supset E \setminus E_2 \supset E \setminus E_3 \dots$ ja $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E \setminus E_n = \emptyset$, siis mõõdu ν lõplikuse tõttu $\nu(E \setminus E_n) \underset{n}{\to} \nu(\emptyset) = 0$ ning seega $F(E \setminus E_n) \underset{n}{\to} 0$ (sest F on ν-pidev). ■

Selle punkti lõpetuseks tõestame järgneva nõrgendatud versiooni Carathéodory–Hahn–Kluvaneki jätkamisteoreemist [DU, lk 27, teoreem 2].

Teoreem 1.14. *Olgu* $\Sigma = \sigma(\mathfrak{A})$ *ning olgu* $F\colon\ \mathfrak{A} \to X$ $\mu|_{\mathfrak{A}}$*-pidev vektormõõt. Siis vektormõõdul* F *leidub üheselt määratud loenduvalt aditiivne jätk* σ*-algebrale* Σ*. See jätk on* μ*-pidev. Seejuures,* $|G|\Big|_{\mathfrak{A}} = |F|$*. Seega, kui* F *on tõkestatud variatsiooniga, siis ka* G *on tõkestatud variatsiooniga, kusjuures* $|G|(\Omega) = |F|(\Omega)$*.*

Teoreemi 1.14 tõestus kasutab pseudomeetrilise ruumi mõistet.

Definitsioon 1.8. Olgu $\Pi \neq \emptyset$ mingi hulk. Funktsiooni $\rho\colon\ \Pi \times \Pi \to [0, \infty)$ nimetatakse *pseudomeetrikaks* (hulgas Π), kui mis tahes $a, b, c \in \Pi$ korral

1° $\rho(a, a) = 0$;

2° $\rho(a, b) = \rho(b, a)$;

3° $\rho(a, c) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, c)$.

Sel juhul öeldakse, et Π on *pseudomeetriline ruum* (pseudomeetrika ρ suhtes).

Tingimusi 1°, 2° ja 3° nimetatakse *pseudomeetrika aksioomideks.*

Viitamaks, et Π on pseudomeetriline ruum kauguse ρ suhtes, kirjutatakse: (Π, ρ) on pseudomeetriline ruum.

Järgnevas kasutatavad pseudomeetrilise ruumiga seotud mõisted – koonduvus, alamruum ja kõikjal tihedus – defineeritakse analoogiliselt meetrilise ruumi juhuga.

Lemma 1.15. *Olgu* (Π, ρ) *pseudomeetriline ruum, olgu* Π_0 *ruumi* Π *kõikjal tihe alamruum ning olgu funktsioon* $f\colon\ \Pi_0 \to X$ *ühtlaselt pidev, st iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub* $\delta > 0$ *nii, et*

$$a, b \in \Pi_0,\ \rho(a, b) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(a) - f(b)\| < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Siis funktsioon $g\colon\ \Pi \to X$*,*

$$g(a) = \lim_n f(a_n), \quad a \in \Pi,\ \text{kus } a_n \in \Pi_0,\ n \in \mathbb{N}, \text{ on sellised, et } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a,$$

on funktsiooni f *ühtlaselt pidev jätk ning ühtlasi ka funktsiooni* f *ainus pidev jätk* $\Pi \to X$*.*

Tõestus. Kõigepealt veendume, et funktsioon g on korrektselt defineeritud ehk, täpsemalt, g ei sõltu jada (a_n) valikust. Olgu $a \in \Pi$ ning olgu jadad (a_n) ja (b_n) sellised, et $a_n \underset{n}{\to} a$ ja $b_n \underset{n}{\to} a$. Tähistame

$$c := \lim_n f(a_n) \quad \text{ja} \quad d := \lim_n f(b_n)$$

ning näitame, et $c = d$. Võrduseks $c = d$ piisab näidata, et iga $\varepsilon > 0$ korral $\|c-d\| < \varepsilon$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna $f(a_n) \underset{n}{\to} c$ ja $f(b_n) \underset{n}{\to} d$, siis leiduvad indeksid $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N_1 \quad \Longrightarrow \quad \|f(a_n) - c\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ning

$$n \geqslant N_2 \quad \Longrightarrow \quad \|f(b_n) - d\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Vastavalt tingimusele (1.7) leidub $\delta > 0$ nii, et

$$x, y \in \Pi_0,\ \rho(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Seega, arvestades, et $\rho(a_n, b_n) \underset{n}{\to} 0$, leidub indeks $N_3 \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N_3 \quad \Longrightarrow \quad \rho(a_n, b_n) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(a_n) - f(b_n)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Olgu $N := \max\{N_1, N_2, N_3\}$; nüüd, kui $n \geqslant N$, siis

$$\|c - d\| \leqslant \|c - f(a_n)\| + \|f(a_n) - f(b_n)\| + \|f(b_n) - d\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ning arvu ε suvalisuse tõttu $\|c - d\| = 0$, millest järeldub, et $c = d$.

Näitame, et funktsioon g on funktsiooni f jätk. Olgu $a \in \Pi_0$ suvaline. Peame näitma, et $g(a) = f(a)$. Olgu iga $n \in \mathbb{N}$ korral $a_n = a$, siis ilmselt $a_n \underset{n}{\to} a$ ning seega $g(a) = \lim\limits_n f(a_n) = f(a)$.

Näitame, et funktsioon g on ühtlaselt pidev. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna funktsioon f on ühtlaselt pidev, siis leidub $\delta > 0$ nii, et iga $c, d \in \Pi_0$ korral

$$\rho(c, d) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(c) - f(d)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Olgu $a, b \in \Pi$ sellised, et $\rho(a, b) < \delta$, ning olgu $a_n, b_n \in \Pi_0$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $a_n \underset{n}{\to} a$ ja $b_n \underset{n}{\to} b$. Seega $f(a_n) \underset{n}{\to} g(a)$ ja $f(b_n) \underset{n}{\to} g(b)$. Valime $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\rho(a_N, a) < \frac{\delta - \rho(a,b)}{2} \quad \text{ja} \quad \rho(b_N, b) < \frac{\delta - \rho(a,b)}{2}$$

ning

$$\|f(a_N) - g(a)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{ja} \quad \|f(b_N) - g(b)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Siis

$$\rho(a_N, b_N) \leqslant \rho(a_N, a) + \rho(a, b) + \rho(b, b_N) < \frac{\delta - \rho(a, b)}{2} + \rho(a, b) + \frac{\delta - \rho(a, b)}{2} = \delta,$$

millest järeldub, et $\|f(a_N) - f(b_N)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ (sest f on ühtlaselt pidev). Järelikult

$$\|g(a) - g(b)\| \leqslant \|g(a) - f(a_N)\| + \|f(a_N) - f(b_N)\| + \|f(b_N) - g(b)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

seega funktsioon g on ühtlaselt pidev.

Tõestuse lõpetuseks näitame, et g on funktsiooni f ainus pidev jätk $\Pi \to X$. Selleks olgu $g, h\colon \Pi \to X$ funktsiooni f pidevad jätkud ning olgu $a \in \Pi$ suvaline. Siis leiduvad elemendid $a_n \in \Pi_0$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $a_n \underset{n}{\to} a$. Funktsioonide g ja h pidevuse tõttu

$$g(a) = g(\lim_n a_n) = \lim_n g(a_n) = \lim_n f(a_n) = \lim_n h(a_n) = h(\lim_n a_n) = h(a).$$

Kuna $a \in \Pi$ on suvaline, siis $g = h$. ■

Lemma 1.16. (a) *Funktsioon* $\rho\colon \Sigma \times \Sigma \to [0, \infty)$,

$$\rho(E_1, E_2) = \mu(E_1 \triangle E_2), \quad E_1, E_2 \in \Sigma,$$

on pseudomeetrika.

(b) *Kui* $\Sigma = \sigma(\mathfrak{A})$, *siis alamruum* $(\mathfrak{A}, \rho)$ *on kõikjal tihe ruumis* (Σ, ρ).

(c) *Olgu* $F\colon \mathfrak{A} \to X$ *vektormõõt. Tähistame ruumi* (Σ, ρ) *alamruumi* $(\mathfrak{A}, \rho)$ *sümboliga* $\mathfrak{A}_\mu$ *ja defineerime funktsiooni*

$$\widehat{F}\colon \mathfrak{A}_\mu \ni E \mapsto F(E) \in X.$$

Siis F *on* μ*-pidev parajasti siis, kui* $\widehat{F}$ *on ühtlaselt pidev.*

Tõestus. (a). Kontrollime pseudomeetrika aksioomide kehtivust.

1°. Olgu $E \in \Sigma$; siis

$$\rho(E, E) = \mu(E \triangle E) = \mu(\emptyset) = 0.$$

2°. Olgu $E_1, E_2 \in \Sigma$; siis

$$\rho(E_1, E_2) = \mu(E_1 \triangle E_2) = \mu(E_2 \triangle E_1) = \rho(E_2, E_1).$$

3°. Olgu $E_1, E_2, E_3 \in \Sigma$; siis, arvestades, et kõikide $A, B, C \in \Sigma$ korral $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$,

$$\begin{aligned}
\rho(E_1, E_3) = \mu(E_1 \triangle E_3) &= \mu\big((E_1 \setminus E_3) \cup (E_3 \setminus E_1)\big) = \mu(E_1 \setminus E_3) + \mu(E_3 \setminus E_1) \\
&\leqslant \mu\big((E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_3)\big) + \mu\big((E_3 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)\big) \\
&\leqslant \mu(E_1 \setminus E_2) + \mu(E_2 \setminus E_3) + \mu(E_3 \setminus E_2) + \mu(E_2 \setminus E_1) \\
&= \mu\big((E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)\big) + \mu\big((E_2 \setminus E_3) \cup (E_3 \setminus E_2)\big) \\
&= \mu(E_1 \triangle E_2) + \mu(E_2 \triangle E_3) = \rho(E_1, E_2) + \rho(E_2, E_3).
\end{aligned}$$

Märkus 1.2. Alternatiivne võimalus pseudomeetrika aksioomide kontrollimiseks olnuks panna tähele, et kõikide $E_1, E_2 \in \Sigma$ korral

$$\rho(E_1, E_2) = \mu(E_i \triangle E_2) = \|\chi_{E_1} - \chi_{E_2}\|_1.$$

(b). Olgu $E \in \Sigma$ ja $\varepsilon > 0$; siis vastavalt lemmale 1.6 leidub hulk $D \in \mathfrak{A}$ nii, et

$$\rho(E, D) = \mu(E \triangle D) < \varepsilon.$$

(c). *Tarvilikkus.* Olgu vektormõõt F μ-pidev. Näitame, et funktsioon $\widehat{F}$ on ühtlaselt pidev. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kuna vektormõõt F on μ-pidev, siis leidub $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \mathfrak{A},\ \mu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|F(E)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seega, kui $E_1, E_2 \in \mathfrak{A}$ on sellised, et $\rho(E_1, E_2) = \mu(E_1 \triangle E_2) < \delta$, siis,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{F}(E_1) - \widehat{F}(E_2)\| &= \|F(E_1) - F(E_2)\| \\
&\leqslant \|F(E_1) - F(E_1 \cap E_2)\| + \|F(E_1 \cap E_2) - F(E_2)\| \\
&\leqslant \|F\big(E_1 \setminus (E_1 \cap E_2)\big)\| + \|F\big(E_2 \setminus (E_1 \cap E_2)\big)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

sest $E_1 \setminus (E_1 \cap E_2) \subset E_1 \triangle E_2$ ja $E_2 \setminus (E_1 \cap E_2) \subset E_1 \triangle E_2$ ning seega

$$\mu\big(E_1 \setminus (E_1 \cap E_2)\big) \leqslant \mu(E_1 \triangle E_2) < \delta \quad \text{ja} \quad \mu\big(E_2 \setminus (E_1 \cap E_2)\big) \leqslant \mu(E_1 \triangle E_2) < \delta.$$

Piisavus. Olgu funktsioon $\widehat{F}$ ühtlaselt pidev. Näitame, et vektormõõt F on μ-pidev. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Olgu $E \in \mathfrak{A}$; kuna $\widehat{F}$ on ühtlaselt pidev, siis leidub $\delta > 0$ nii, et

$$\rho(E_1, E_2) = \mu(E_1 \triangle E_2) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|F(E_1) - F(E_2)\| < \varepsilon.$$

Seega, kui $\mu(E) = \mu(E \triangle \emptyset) < \delta$, siis

$$\|F(E)\| = \|F(E) - F(\emptyset)\| < \varepsilon,$$

järelikult vektormõõt F on μ-pidev. ■

Nüüd oleme valmis tõestama teoreemi 1.14.

Teoreemi 1.14 tõestus. Tähistame sümbolitega Σ_μ ja $\mathfrak{A}_\mu$ vastavalt meetrilist ruumi (Σ, ρ) ja tema alamruumi $(\mathfrak{A}, \rho)$ lemmast 1.16. Lemma 1.16, (b), põhjal on alamruum $\mathfrak{A}_\mu$ kõikjal tihe ruumis Σ_μ, seega lemma 1.15 põhjal leidub lemma 1.16 väite (c) funktsioonil $\widehat{F}\colon\ \mathfrak{A}_\mu \ni E \mapsto F(E) \in X$ ühtlaselt pidev jätk $\widehat{G}\colon\ \Sigma_\mu \to X$.

Paneme tähele, et vektormõõt $G\colon\ \Sigma \ni E \mapsto \widehat{G}(E) \in X$ on vektormõõdu F jätk, sest iga $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$G(E) = \widehat{G}(E) = \widehat{F}(E) = F(E).$$

Seejuures G on μ-pidev (lemma 1.16, (c), põhjal) ning loenduvalt aditiivne (lause 1.13 põhjal).

Olgu $H\colon\ \Sigma \to X$ vektormõõdu F loenduvalt aditiivne jätk. Jätku G ühesuseks jääb näidata, et $H = G$, st $H(E) = G(E)$ iga $E \in \Sigma$ korral. Olgu $E \in \Sigma$. Võrduseks $H(E) = G(E)$ piisab näidata, et $x^*H(E) = x^*G(E)$ iga $x^* \in X^*$ korral. Olgu $x^* \in X^*$. Siis x^*G ja x^*H on mõõdu x^*F jätkud σ-algebrale Σ. Kuna x^*F on lõplik, siis tal leidub täpselt üks jätk σ-algebrale $\sigma(\mathfrak{A}) = \Sigma$, järelikult $x^*H = x^*G$ ning seega $x^*H(E) = x^*G(E)$, nagu soovitud.

Näitame nüüd, et $|G|\Big|_{\mathfrak{A}} = |F|$. Olgu $D \in \mathfrak{A}$. Kuna G on vektormõõdu F jätk, siis ilmselt $|F|(D) \leqslant |G|(D)$. Jääb näidata, et $|G|(D) \leqslant |F|(D)$. Selleks, fikseerides vabalt hulga D lõpliku Σ-mõõtuva tükelduse $\{E_1, \dots, E_n\}$ ja arvu $\varepsilon > 0$, piisab näidata, et

$$\sum_{i=1}^{n} \|G(E_i)\| \leqslant |F|(D) + 3\varepsilon.$$

Kuna vektormõõt G on μ-pidev, siis leidub $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \Sigma,\ \mu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|G(E)\| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Lemma 1.6 põhjal leiduvad $D_1, \dots, D_n \in \mathfrak{A}$ nii, et

$$\mu(E_i \triangle D_i) < \frac{\delta}{n} \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, n\} \text{ korral.}$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $D_1, \dots, D_n \subset D$. Iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $E_i \setminus D_i \subset E_i \triangle D_i$ ja $D_i \setminus E_i \subset E_i \triangle D_i$, järelikult

$$\mu(E_i \setminus D_i) \leqslant \mu(E_i \triangle D_i) < \frac{\delta}{n} < \delta \quad \text{ja} \quad \mu(D_i \setminus E_i) \leqslant \mu(E_i \triangle D_i) < \frac{\delta}{n} < \delta,$$

seega

$$\begin{aligned}
\Big| \|G(E_i)\| - \|F(D_i\| \Big| &\leqslant \|G(E_i) - F(D_i)\| = \|G(E_i) - G(D_i)\| \\
&= \|G(E_i \setminus D_i) - G(D_i \setminus E_i)\| \\
&\leqslant \|G(E_i \setminus D_i)\| + \|G(D_i \setminus E_i)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{n} = \frac{2\varepsilon}{n}
\end{aligned}$$

ning järelikult

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \|G(E_i)\| - \sum_{i=1}^{n} \|F(D_i)\| \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Big| \|G(E_i)\| - \|F(D_i\| \Big| < 2\varepsilon.$$

Tähistame iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$C_i := \bigcup_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} D_j \qquad \text{ja} \qquad B_i := D_i \setminus C_i;$$

siis hulgad $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{A}$ on paarikaupa lõikumatud.

Olgu $i \in \{1, \ldots, n\}$ suvaline. Paneme tähele, et

$$D_i \cap C_i \subset \bigcup_{j=1}^{n} (D_j \setminus E_j). \tag{1.8}$$

Tõepoolest, kui $\omega \in D_i \cap C_i$, siis $\omega \in D_i \cap C_i$ mingi $j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq i$, korral. Kui $\omega \in E_i$, siis $\omega \notin E_j$, seega $\omega \in D_j \setminus E_j$. Kui aga $\omega \notin E_i$, siis $\omega \in D_j \setminus E_j$. Sisalduvusest (1.8) järeldub, et

$$\mu(D_i \cap C_i) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mu(D_j \setminus E_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mu(D_j \triangle E_j) < \delta,$$

seega $\|F(D_i \cap C_i)\| < \frac{\varepsilon}{n}$ ning järelikult

$$\begin{aligned} \Big| \|F(D_i)\| - \|F(B_i\| \Big| &\leqslant \|F(D_i) - F(D_i \setminus C_i)\| = \|F(D_i) - F(D_i \setminus C_i)\| \\ &= \|F(D_i \cap C_i)\| < \frac{\varepsilon}{n}. \end{aligned}$$

Eelnevast järeldub, et

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \|F(D_i)\| - \sum_{i=1}^{n} \|F(B_i)\| \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Big| \|F(D_i)\| - \|F(B_i\| \Big| < \varepsilon.$$

Kokkuvõttes saame nüüd (arvestades, et hulgad $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{A}$ on paarikaupa lõikumatud), et

$$\sum_{i=1}^{n} \|G(E_i)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|F(D_i)\| + 2\varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|F(B_i)\| + 3\varepsilon \leqslant |F|(D) + 3\varepsilon.$$

■

1.3 Lisateadmisi Banachi ruumide kohta

Teoreem 1.17 (Hahn–Banachi eraldamisteoreem; vt nt [M, lk 180, teoreem 2.2.28]). *Olgu K ja D lõikumatud ruumi X mittetühjad kinnised kumerad alamhulgad, kusjuures hulk K on kompaktne. Siis leidub funktsionaal $x^* \in X^*$ nii, et*

$$\min \operatorname{Re} x^*(K) > \sup \operatorname{Re} x^*(D).$$

Definitsioon 1.9. Kaasruumi X^* topoloogiat, milles punkti $x^* \in X^*$ ümbruste baasi moodustavad hulgad

$$\big\{z^* \in X^*\colon\ |z^*(x_i) - x^*(x_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\big\}, \quad \varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in X,$$

nimetatakse *$*$-nõrgaks topoloogiaks.*

Lihtne on näha, et ruumi X^* $*$-nõrk topoloogia on lineaarne topoloogia. Pere (x^*_α) koonduvus elemendiks x^* selles topoloogias tähendab, et

$$x^*_\alpha(x) \underset{\alpha}{\longrightarrow} x^*(x) \qquad \text{iga } x \in X \text{ korral;}$$

seda koonduvust tähistatakse

$$x^*_\alpha \xrightarrow[\alpha]{w^*} x^*.$$

Kehtivad järgmised tulemused.

Teoreem 1.18 (Goldstine'i teoreem; vt nt [M, lk 232, teoreem 2.6.26])**.** *Olgu $j_X\colon X \to X^{**}$ loomulik sisestus. Siis $\overline{j_X(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$, kus B_X ja $B_{X^{**}}$ on vastavalt ruumide X ja X^{**} kinnised ühikkerad.*

Teoreem 1.19 (Banach–Alaoglu teoreem; vt nt [M, lk 229, teoreem 2.6.18])**.** *Kaasruumi X^* kinnine ühikkera B_{X^*} on $*$-nõrgalt kompaktne.*

Lause 1.20. *Olgu kaasruum X^* separaabel. Siis*

(a) *ruum X on separaabel;*

(b) *iga $x^{**} \in X^{**}$ korral leidub ruumi X elementide jada (x_n) nii, et $\|x_n\| \leqslant \|x^{**}\|$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ja $x_n \xrightarrow[n]{w^*} x^{**}$.*

Tõestus. (a). Olgu $\{x^*_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ kõikjal tihe hulk kaasruumis X^*. Kuna $\|x^*_n\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |x^*_n(x)|$, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral valime elemendi $x_n \in X$ nii, et $\|x_n\| = 1$ ja $|x^*_n(x_n)| \geqslant \frac{\|x^*_n\|}{2}$. Tähistame $Y := \operatorname{span}\{x_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ ning näitame, et hulk Y on kõikjal tihe ruumis X, st $\overline{Y} = X$. Oletame vastuväiteliselt, et $x \in X \setminus \overline{Y}$. Kuna $\overline{Y}$ on ruumi X kinnine alamruum, siis leidub $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ nii, et $x^*|_{\overline{Y}} = 0$. Seega iga $n \in \mathbb{N}$ korral $x^*(x_n) = 0$ ja

$$\frac{\|x^*_n\|}{2} \leqslant |x^*_n(x_n)| = |x^*_n(x_n) - x^*(x_n)| \leqslant \|x^*_n - x^*\|\|x_n\| = \|x^*_n - x^*\|.$$

Teiselt poolt, kui $n \in \mathbb{N}$ on selline, et $\|x_n^* - x^*\| < \frac{\|x^*\|}{3}$, siis

$$\frac{\|x^*\|}{3} > \|x_n^* - x^*\| \geqslant \|x^*\| - \|x_n^*\|,$$

millest

$$\|x_n^*\| > \frac{2}{3}\|x^*\| > 2\|x_n^* - x^*\| \geqslant 2\frac{\|x_n^*\|}{2} = \|x_n^*\|,$$

vastuolu. Järelikult ruum X on separaabel.

(b). Olgu $x^{**} \in X^{**}$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\|x^{**}\| = 1$. Olgu $\{x_j^*\colon\ j \in \mathbb{N}\}$ loenduv kõikjal tihe hulk kaasruumis X^*. Goldstine'i teoreemi 1.18 põhjal leidub pere (x_α) ühikkeras B_X nii, et $x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{w^*} x^{**}$. Valime iga $n \in \mathbb{N}$ korral indeksi α_n nii, et

$$|x^{**}(x_j^*) - x_j^*(x_{\alpha_n})| < \frac{1}{n} \qquad \text{iga } j \in \{1, \ldots, n\} \text{ korral.}$$

Tähistame $x_n := x_{\alpha_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Näitame, et $x_n \xrightarrow[n]{w^*} x^{**}$. Olgu $\varepsilon > 0$. Paneme tähele, et iga $x^* \in X^*$ ja iga $j, n \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned}
|x_n(x^*) - x^{**}(x^*)| &\leqslant |x_n(x^*) - x_n(x_j^*)| + |x_n(x_j^*) - x^{**}(x_j^*)| + |x^{**}(x_j^*) - x^{**}(x^*)| \\
&\leqslant \|x_n\|\|x^* - x_j^*\| + |x_n(x_j^*) - x^{**}(x_j^*)| + \|x^{**}\|\|x_j^* - x^*\| \\
&\leqslant \|x^* - x_j^*\| + |x_n(x_j^*) - x^{**}(x_j^*)| + \|x_j^* - x^*\|.
\end{aligned}$$

Valime $j \in \mathbb{N}$ nii, et $\|x^* - x_j^*\| < \varepsilon$ ning $\frac{1}{j} < \varepsilon$. Kui nüüd $n \geqslant j$ (st $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{j}$), siis

$$\begin{aligned}
|x_n(x^*) - x^{**}(x^*)| &\leqslant \|x^* - x_j^*\| + |x_n(x_j^*) - x^{**}(x_j^*)| + \|x_j^* - x^*\| \\
&< \varepsilon + \frac{1}{n} + \varepsilon < 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

järelikult $x_n \xrightarrow[n]{w^*} x^{**}$. Muuhulgas, iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\|x_n\| = \|x_{\alpha_n}\| \leqslant 1 = \|x^{**}\|.$$

$\blacksquare$

2 Vektorväärtustega funktsioonide integreerimine

Kõikjal selles paragrahvis on X Banachi ruum ja (Ω, Σ, μ) täieliku lõpliku mõõduga ruum.

2.1 Mõõtuvad vektorväärtustega funktsioonid

Definitsioon 2.1. Funktsiooni $f\colon\ \Omega \to X$ nimetatakse *lihtfunktsiooniks*, kui leiduvad arv $m \in \mathbb{N}$, elemendid $x_1, \ldots, x_m \in X$ ja hulgad $A_1, \ldots, A_m \in \Sigma$ nii, et

$$f = \sum_{i=1}^{m} \chi_{A_i} x_i, \tag{2.1}$$

kus

$$\chi_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kui } \omega \in A_i, \\ 0, & \text{kui } \omega \notin A_i, \end{cases}$$

on hulga A_i *karakteristlik funktsioon.*

Paneme tähele, et lihtfunktsiooni esitus kujul (2.1) ei ole üheselt määratud. Lihtfunktsiooni $f\colon\ \Omega \to X$ esitust (2.1), kus hulgad $A_1, \ldots, A_m$ on paarikaupa lõikumatud, nimetatakse funktsiooni f *kanooniliseks esituseks*. Juhime tähelepanu sellele, et lihtfunktsiooni kanooniline esitus pole samuti üheselt määratud. Mõnikord on aga otstarbekas opereerida lihtfunktsiooni f sellise esitusega, mis on üheselt määratud – *standardesitusega*. Lihtfunktsiooni $f\colon\ \Omega \to X$ esitust (2.1), kus

(1) $A_1, \ldots, A_m \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, kui $i \neq j$, ning $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i = \Omega$;

(2) $x_i \neq x_j$, kui $i \neq j$,

nimetatakse funktsiooni f *standardesituseks*.

Funktsiooni $f\colon\ \Omega \to X$ korral defineeritakse funktsioon $\|f\|\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ eeskirjaga

$$\|f\|(\omega) = \|f(\omega)\|, \quad \omega \in \Omega.$$

Definitsioon 2.2. Funktsiooni $f\colon\ \Omega \to X$ nimetatakse *tugevalt μ-mõõtuvaks* ehk lihtsalt *μ-mõõtuvaks*, kui leidub lihtfunktsioonide jada (f_n), mis koondub funktsiooniks f μ-peaaegu kõikjal, st $\lim\limits_n \|f_n - f\| = 0$ μ-peaaegu kõikjal.

Definitsioon 2.3. Funktsiooni $f\colon \Omega \to X$ nimetatakse *nõrgalt μ-mõõtuvaks (ehk skalaarselt μ-mõõtuvaks)*, kui funktsioon x^*f on μ-mõõtuv iga $x^* \in X^*$ korral.

Definitsioon 2.4. Funktsiooni $f\colon \Omega \to X$ nimetatakse *Boreli mõttes μ-mõõtuvaks*, kui $f^{-1}(A) \in \Sigma$ iga Boreli hulga $A \subset X$ korral.

Märgime, et funktsioon $f\colon \Omega \to X$ on Boreli mõttes μ-mõõtuv parajasti siis, kui $f^{-1}(O) \in \Sigma$ iga lahtise alamhulga $O \subset X$ korral.

Definitsioon 2.5. Öeldakse, et funktsioon $f\colon \Omega \to X$ on *μ-oluliselt separaabel-väärtuseline*, kui eksisteerib hulk $E \in \Sigma$ nii, et $\mu(\Omega \setminus E) = 0$ ja $f(E)$ sisaldub ruumi X mingis separaablis alamruumis Y. Sellisel juhul öeldakse, et $f(\Omega)$ sisaldub μ-oluliselt alamruumis Y.

Kui mõõdu μ roll on kontekstist selge, siis ütleme μ-mõõtuva ja μ-oluliselt separaabel-väärtuselise funktsiooni kohta lihtsalt vastavalt mõõtuv ja oluliselt separaabel-väärtuselise funktsioon.

Edasises kasutame korduvalt järgnevat abitulemust.

Lause 2.1. *Kui funktsioon $f\colon \Omega \to X$ on mõõtuv, siis ka funktsioon $\|f\|\colon \Omega \to \mathbb{R}$ on mõõtuv.*

Tõestus. Kuna funktsioon f on mõõtuv, siis leidub lihtfunktsioonide jada (f_n) nii, et $\lim\limits_n \|f_n - f\| = 0$ peaaegu kõikjal. Kuna $\big|\|f_n\| - \|f\|\big| \leqslant \|f_n - f\|$, siis $\lim\limits_n \big|\|f_n\| - \|f\|\big| = 0$ peaaegu kõikjal, kusjuures $\|f_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, on lihtfunktsioonid. Järelikult funktsioon $\|f\|$ on mõõtuv. ■

Teoreem 2.2 (Pettise mõõtuvusteoreem; [R, lk 26, lause 2.15])**.** *Olgu $f\colon \Omega \to X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *f on mõõtuv;*

(ii) *f on nõrgalt mõõtuv ja oluliselt separaabel-väärtuseline;*

(iii) *f on Boreli mõttes mõõtuv ja oluliselt separaabel-väärtuseline.*

Tõestus. (i)$\Rightarrow$(ii). Eeldame, et funktsioon f on mõõtuv. Olgu (f_n) lihtfunktsioonide jada, mis koondub peaaegu kõikjal funktsiooniks f. Näitame, et f on nõrgalt mõõtuv. Olgu $x^* \in X^*$ suvaline funktsionaal, siis x^*f_n on lihtfunktsioon iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Tõepoolest, kuna f_n on lihtfunktsioon, siis leiduvad elemendid $x_1^n, x_2^n, \dots, x_{m_n}^n \in$

X ja hulgad $A_1^n, A_2^n, \dots, A_{m_n}^n \in \Sigma$ ($m_n \in \mathbb{N}$) nii, et $f_n = \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{A_i^n} x_i^n$. Kuna iga $\omega \in \Omega$ korral

$$(x^* f_n)(\omega) = x^*(f_n(\omega)) = x^*\Big(\sum_{i=1}^{m_n} \chi_{A_i^n}(\omega) x_i^n\Big) = \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{A_i^n}(\omega) x^*(x_i^n) =$$
$$= \Big(\sum_{i=1}^{m_n} \chi_{A_i^n} x^*(x_i^n)\Big)(\omega),$$

siis $x^* f_n = \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{A_i^n} x^*(x_i^n)$, järelikult $x^* f_n$ on lihtfunktsioon. Kuna

$$\|x^* f_n - x^* f\| = \|x^*(f_n - f)\| \leqslant \|x^*\| \|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{peaaegu kõikjal,}$$

siis lihtfunktsioonide jada $(x^* f_n)$ koondub peaaegu kõikjal funktsiooniks $x^* f$. Seega $x^* f$ on mõõtuv ning järelikult funktsioon f on nõrgalt mõõtuv. Funktsioon f on oluliselt separaabel-väärtuseline, sest $Y := \overline{\operatorname{span}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_1^n, \dots, x_{m_n}^n\}$ on separaabel ja $f(\Omega)$ sisaldub oluliselt alamruumis Y. Tõepoolest, olgu $E \in \Sigma$, $\mu(\Omega \setminus E) = 0$, selline, et $\lim_n f_n(\omega) = f(\omega)$ iga $\omega \in E$ korral. Piisab veenduda, et $f(E) \subset Y$. Olgu $x \in f(E)$ suvaline. Siis $x = f(\omega)$, mingi $\omega \in E$ korral. Seega $Y \ni f_n(\omega) \xrightarrow[n]{} f(\omega) = x$. Kuna Y on kinnine, siis $x \in Y$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Eeldame, et funktsioon f on nõrgalt mõõtuv ja oluliselt separaabel-väärtuseline, st leiduvad hulk $E \in \Sigma$, $\mu(\Omega \setminus E) = 0$, ja ruumi X separaabel alamruum Y nii, et $f(E) \subset Y$. Kui me defineerime funktsiooni $g\colon \Omega \to X$, $g|_E = f|_E$, $g|_{\Omega\setminus E} = 0$, siis $g(\Omega) \subset Y$; kuna $f = g$ μ-peaaegu kõikjal, siis ruumi (Ω, Σ, μ) täielikkuse tõttu f on tugevalt mõõtuv (nõrgalt mõõtuv, Boreli mõttes mõõtuv) parajasti siis, kui g on mõõtuv (nõrgalt mõõtuv, Boreli mõttes mõõtuv). Seega me võime üldisust kitsendamata eeldada, et $f(\Omega) \subset Y$. Aga nüüd me võime üldisust kitsendamata eeldada, et X on separaabel, sest kuna $f(\Omega) \subset Y$, siis $f\colon \Omega \to X$ on tugevalt mõõtuv (nõrgalt mõõtuv, Boreli mõttes mõõtuv) parajasti siis, kui ta on tugevalt mõõtuv (nõrgalt mõõtuv, Boreli mõttes mõõtuv) tõlgendatuna funktsioonina $f\colon \Omega \to Y$.

Funktsiooni f Boreli mõttes mõõtuvuseks piisab näidata, et $f^{-1}(O) \in \Sigma$. Kuna mittetühi lahtine hulk separaablis meetrilises ruumis esitub kinniste kerade loenduva ühendina, siis $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ mingite kinniste kerade B_j, $j \in \mathbb{N}$, korral ruumis X.

Järelikult

$$f^{-1}(O) = f^{-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\Big) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(B_j).$$

Seega piisab implikatsiooni tõestuseks näidata, et, fikseerides vabalt kinnise kera $B = \overline{B}(a,r)$ ruumis X, kehtib $f^{-1}(B) \in \Sigma$. Selleks valime $x_n^* \in S_{X^*}$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x)|$ iga $x \in X$ korral. Sellised x_n^*, $n \in \mathbb{N}$, eksisteerivad. Tõepoolest, olgu $\{x_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ kõikjal tihe hulk ruumis X. Hahn–Banachi teoreemi põhjal leiduvad $x_n^* \in S_{X^*}$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $x_n^*(x_n) = \|x_n\|$. Kui $x \in X$, siis leidub jada (x_n) nii, et $\lim\limits_n x_n = x$. Sel juhul

$$\|x\| = \lim_n \|x_n\| = \lim_n x_n^*(x_n) \leqslant \sup_n |x_n^*(x)| \leqslant \sup_n \|x_n^*\|\|x\| = \|x\|.$$

Nüüd

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega\colon\ \|f(\omega) - a\| \leqslant r\} = \{\omega \in \Omega\colon\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^* f(\omega) - x_n^*(a)| \leqslant r\}.$$

Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral on funktsioon

$$\Omega \ni \omega \longmapsto |x_n^* f(\omega) - x_n^*(a)| \in \mathbb{R}$$

mõõtuv, siis ka funktsioon

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^* f(\omega) - x_n^*(a)| \in \mathbb{R}$$

on mõõtuv, seega hulk $\{\omega \in \Omega\colon\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n^* f(\omega) - x_n^*(a)| \leqslant r\}$ on mõõtuv, st $f^{-1}(B) \in \Sigma$. Sellega on näidatud, et f on Boreli mõttes mõõtuv.

(iii)$\Rightarrow$(i). Eeldame, et funktsioon f on Boreli mõttes mõõtuv ja $f(\Omega)$ sisaldub oluliselt separaablis alamruumis $Y \subset X$, st mingi $E \in \Sigma$, $\mu(\Omega \setminus E) = 0$, korral $f(E) \subset Y$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $f(\Omega) \subset Y$, sest kui defineerida funktsioon $g\colon\ \Omega \to X$, $g|_E = f|_E$, $g|_{\Omega\setminus E} = 0$, siis $g(\Omega) \subset Y$; kuna $f = g$ μ-peaaegu kõikjal, siis ruumi (Ω, Σ, μ) täielikkuse tõttu f on tugevalt mõõtuv (nõrgalt mõõtuv, Boreli mõttes mõõtuv) parajasti siis, kui g on mõõtuv (nõrgalt mõõtuv, Boreli mõttes mõõtuv).

Olgu $\{y_k\}$ ruumi Y loenduv kõikjal tihe alamhulk. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $Y \subset$

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B(y_k, \frac{1}{n})$. Kuna f on Boreli mõttes mõõtuv, siis $E_k^n := f^{-1}\Big(B(y_k, \frac{1}{n})\Big) \in \Sigma$, $n, k \in \mathbb{N}$. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$F_1^n := E_1^n \qquad \text{ja} \qquad F_k^n := E_k^n \setminus (E_1^n \cup \dots \cup E_{k-1}^n), \quad \text{kui } k > 1;$$

siis hulgad F_k^n, $k \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud ja mõõtuvad, kusjuures $\Omega \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k^n$. Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral $g_n := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \chi_{F_k^n} y_k$; siis $\|f(\omega) - g_n(\omega)\| < \frac{1}{n}$ iga $\omega \in \Omega$ korral. Seega jada (g_n) koondub ühtlaselt funktsiooniks f hulgas Ω. Iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks valime $m_n \in \mathbb{N}$ nii, et $\mu\Big(\bigcup\limits_{k=m_n+1}^{\infty} F_k^n\Big) \leqslant \frac{1}{2^n}$ ja defineerime $h_n := \sum\limits_{k=1}^{m_n} \chi_{F_k^n} y_k$; siis $\|f(\omega) - h_n(\omega)\| < \frac{1}{n}$ iga $\omega \in \Omega \setminus C_n$ korral, kus $C_n := \bigcup\limits_{k=m_n+1}^{\infty} F_k^n$. Olgu $C := \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} C_n$; siis

$$\mu(C) = \lim_m \mu\Big(\bigcup_{n=m}^{\infty} C_n\Big) \leqslant \lim_m \sum_{n=m}^{\infty} \mu(C_n) \leqslant \lim_m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Muuhulgas, kui $\omega \in \Omega \setminus C = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=m}^{\infty} (\Omega \setminus C_n)$, siis leidub $m \in \mathbb{N}$ nii, et $\omega \in \Omega \setminus C_n$ iga $n \geqslant m$ korral. Järelikult iga $n \geqslant m$ korral $\|f(\omega) - h_n(\omega)\| < \frac{1}{n}$; seega $h_n \underset{n}{\to} f$ hulgas $\Omega \setminus C$, millest järeldub, et funktsioon f on mõõtuv. ■

2.2 Bochneri integraal

Järgnevalt defineerime *Bochneri integraali,* mida tuntakse ka *Dunfordi ja Schwartzi integraali* või *Dunfordi esimese integraali* nime all. Bochneri integraal on Lebesgue'i integraali üldistus.

Definitsioon 2.6. Olgu $f\colon\ \Omega \to X$ lihtfunktsioon kanoonilise esitusega $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{E_i} x_i$. *Bochneri integraal* funktsioonist f üle hulga $E \in \Sigma$ (mõõdu μ järgi) defineeritakse võrdusega

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap E) x_i.$$

Paneme tähele, et $\int_E f\, d\mu = \int_\Omega f \chi_E\, d\mu$.

Lemma 2.3. *Olgu $f\colon\ \Omega \to X$ lihtfunktsioon. Siis mis tahes hulga $E \in \Sigma$ korral*

$$\left\| \int_E f \, d\mu \right\| \leqslant \int_E \|f\| \, d\mu.$$

Tõestus. Olgu $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{E_i} x_i$ funktsiooni f kanooniline esitus. Siis $\|f\| = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{E_i} \|x_i\|$ on funktsiooni $\|f\|$ kanooniline esitus, seega iga $E \in \Sigma$ korral

$$\left\| \int_E f \, d\mu \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap E) x_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap E) \|x_i\| = \int_E \|f\| \, d\mu.$$

■

Definitsioon 2.7. Öeldakse, et mõõtuv funktsioon $f\colon\ \Omega \to X$ on *Bochneri mõttes integreeruv*, kui leidub lihtfunktsioonide jada (f_n) nii, et

$$\lim_n \int_\Omega \|f_n - f\| \, d\mu = 0.$$

Sellisel juhul defineeritakse *Bochneri integraal* funktsioonist f üle hulga $E \in \Sigma$ (mõõdu μ järgi) võrdusega

$$\int_E f \, d\mu = \lim_n \int_E f_n \, d\mu. \tag{2.2}$$

Näitame, et definitsioon 2.7 on korrektne, st piirväärtus (2.2) eksisteerib ja ei sõltu jada (f_n) valikust.

Olgu (f_n) suvaline lihtfunktsioonide jada, mille korral $\lim\limits_n \int_\Omega \|f_n - f\| \, d\mu = 0$. Veendume, et $\left(\int_E f_n \, d\mu \right)$ on Cauchy jada ruumis X. Lemma 2.3 põhjal

$$\begin{aligned}
\left\| \int_E f_n \, d\mu - \int_E f_m \, d\mu \right\| &= \left\| \int_E (f_n - f_m) \, d\mu \right\| \leqslant \int_E \|f_n - f_m\| \, d\mu \\
&= \int_E \|(f_n - f) + (f - f_m)\| \, d\mu \\
&\leqslant \int_E \|f_n - f\| \, d\mu + \int_E \|f - f_m\| \, d\mu \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Ruumi X täielikkuse tõttu jada $\left(\int_E f_n \, d\mu \right)$ koondub, seega piirväärtus (2.2) eksisteerib.

Näitame, et piirväärtus (2.2) ei sõltu jada (f_n) valikust. Olgu lihtfunktsioonide jadad (f_n) ja (g_n) sellised, et $\lim\limits_n \int_\Omega \|f_n - f\|\,d\mu = 0$ ja $\lim\limits_n \int_\Omega \|g_n - f\|\,d\mu = 0$. Peame näitama, et $\lim\limits_n \int_E f_n\,d\mu = \lim\limits_n \int_E g_n\,d\mu$. Kasutades lemmat 2.3, saame

$$\begin{aligned}\left\| \int_E f_n\,d\mu - \int_E g_n\,d\mu \right\| &= \left\| \int_E (f_n - g_n)\,d\mu \right\| \leqslant \int_E \|f_n - g_n\|\,d\mu \\ &= \int_E \|(f_n - f) + (f - g_n)\|\,d\mu \\ &\leqslant \int_E \|f_n - f\|\,d\mu + \int_E \|f - g_n\|\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

seega $\lim\limits_n \int_E f_n\,d\mu = \lim\limits_n \int_E g_n\,d\mu$. Järelikult definitsioon 2.7 on korrektne.

Järgnevalt tõestame ühe tarvilikku ja piisava tingimuse mõõtuva funktsiooni f integreeruvuseks (Bochneri mõttes).

Teoreem 2.4. *Olgu funktsioon $f\colon\ \Omega \to X$ mõõtuv. Funktsioon f on Bochneri mõttes integreeruv parajasti siis, kui $\displaystyle\int_\Omega \|f\|\,d\mu < \infty$.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu funktsioon f Bochneri mõttes integreeruv ja olgu (f_n) lihtfunktsioonide jada, mille korral $\lim\limits_n \int_\Omega \|f_n - f\|\,d\mu = 0$. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\int_\Omega \|f\|\,d\mu = \int_\Omega \|(f - f_n) + f_n\|\,d\mu \leqslant \int_\Omega \|f - f_n\|\,d\mu + \int_\Omega \|f_n\|\,d\mu < \infty.$$

Piisavus. Eeldame, et $\int_\Omega \|f\|\,d\mu < \infty$. Olgu (f_n) lihtfunktsioonide jada, mis koondub peaaegu kõikjal funktsiooniks f. Tähistame

$$g_n(\omega) := \begin{cases} f_n(\omega), & \text{kui } \|f_n(\omega)\| < 2\|f(\omega)\|, \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases}$$

Funktsioonid g_n, $n \in \mathbb{N}$, on lihtfunktsioonid ning $g_n \underset{n}{\to} f$ peaaegu kõikjal. Tõepoolest, olgu $E \in \Sigma$ selline, et $\mu(\Omega \setminus E) = 0$ ja $f_n(\omega) \underset{n}{\to} f(\omega)$ iga $\omega \in E$ korral. Olgu $\omega \in E$. Kui $f(\omega) = 0$, siis $g_n(\omega) = 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, seega $g_n(\omega) \underset{n}{\to} f(\omega)$. Vaatleme nüüd juhtu, kus $\|f(\omega)\| > 0$. Kuna $\|f_n(\omega)\| \underset{n}{\to} \|f(\omega)\|$, siis leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et $n \geqslant N$ korral $\|f_n(\omega)\| < 2\|f(\omega)\|$. Teisisõnu, $g_n(\omega) = f_n(\omega)$, kui $n \geqslant N$. Järelikult $\lim\limits_n g_n(\omega) = \lim\limits_n f_n(\omega) = f(\omega)$. Seega $g_n \underset{n}{\to} f$ peaaegu kõikjal. Peale selle iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\|g_n - f\| \leqslant \|g_n\| + \|f\| \leqslant 2\|f\| + \|f\| = 3\|f\|.$$

Kuna $\|f\|$ on Lebesgue'i mõttes integreeruv, siis ka funktsioon $3\|f\|$ on Lebesgue'i mõttes integreeruv ning Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreemi 1.7 põhjal $\lim_n \int_\Omega \|g_n - f\|\, d\mu = 0$. Seega funktsioon f on Bochneri mõttes integreeruv. ■

Lause 2.5. *Olgu funktsioon $f\colon\ \Omega \to X$ Bochneri mõttes integreeruv. Siis*

$$\left\| \int_\Omega f\, d\mu \right\| \leqslant \int_\Omega \|f\|\, d\mu.$$

Tõestus. Olgu (f_n) lihtfunktsioonide jada, mille korral $\lim_n \int_\Omega \|f_n - f\|\, d\mu = 0$; siis ka $\int_\Omega f\, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n\, d\mu$. Osajadale üle minnes võime eeldada, et $f_n \xrightarrow[n]{} f$ peaaegu kõikjal, seega ka $\|f_n\| \xrightarrow[n]{} \|f\|$ peaaegu kõikjal. Arvestades, et

$$\int_\Omega \big| \|f_n\| - \|f\| \big|\, d\mu \leqslant \int_\Omega \|f_n - f\|\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

saame lemma 2.3 põhjal

$$\begin{aligned} \left\| \int_\Omega f\, d\mu \right\| &= \left\| \lim_n \int_\Omega f_n\, d\mu \right\| = \lim_n \left\| \int_\Omega f_n\, d\mu \right\| \\ &\leqslant \lim_n \int_\Omega \|f_n\|\, d\mu = \int_\Omega \|f\|\, d\mu. \end{aligned}$$

■

Näitame, et pideva lineaarse operaatoriga võib minna Bochneri integraali märgi alla.

Teoreem 2.6. *Olgu $f\colon\ \Omega \to X$ Bochneri mõttes integreeruv funktsioon, olgu Y Banachi ruum ning olgu $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Siis funktsioon $Tf\colon\ \Omega \to Y$ on Bochneri mõttes integreeruv, kusjuures*

$$\int_\Omega Tf\, d\mu = T\Big(\int_\Omega f\, d\mu \Big).$$

Tõestus. Olgu (f_n) lihtfunktsioonide jada, mille korral $\lim_n \int_\Omega \|f_n - f\|\, d\mu = 0$; siis ka $\int_\Omega f\, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n\, d\mu$. Osajadale üle minnes võime eeldada, et $f_n \xrightarrow[n]{} f$ peaaegu kõikjal. Siis (Tf_n) on lihtfunktsioonide jada, mis koondub funktsiooniks Tf peaaegu kõikjal, sest

$$\|Tf_n - Tf\| = \|T(f_n - f)\| \leqslant \|T\|\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{peaaegu kõikjal.}$$

Seega funktsioon Tf on mõõtuv. Olgu $f_n = \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{E_i^n} x_i^n$ funktsioonide f_n, $n \in \mathbb{N}$, kanoonilised esitused, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\int_\Omega Tf_n \, d\mu = \sum_{i=1}^{m_n} \mu(E_i^n) T x_i^n = T\Big(\sum_{i=1}^{m_n} \mu(E_i^n) x_i^n \Big) = T\Big(\int_\Omega f_n \, d\mu \Big). \tag{2.3}$$

Kuna

$$\int\limits_\Omega \|Tf_n - Tf\| \, d\mu \leqslant \int\limits_\Omega \|T\| \|f_n - f\| \, d\mu = \|T\| \int\limits_\Omega \|f_n - f\| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

siis Tf on Bochneri mõttes integreeruv ning, kasutades võrdust (2.3) ja operaatori T pidevust, saame

$$\begin{aligned} \int_\Omega Tf \, d\mu &= \lim_n \int_\Omega Tf_n \, d\mu = \lim_n T\Big(\int_\Omega f_n \, d\mu \Big) \\ &= T\Big(\lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu \Big) = T\Big(\int_\Omega f \, d\mu \Big). \end{aligned}$$

■

2.3 Määramata Bochneri integraal

Teoreem 2.7. *Olgu funktsioon $f\colon \Omega \to X$ Bochneri mõttes integreeruv. Siis*

(a) $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} \int_E f \, d\mu = 0$*;*

(b) *kui $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, kusjuures $E_i \cap E_j = \emptyset$, kui $i \neq j$, ning $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, siis*

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu, \tag{2.4}$$

kusjuures rida $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu$ koondub absoluutselt;

(c) *vektormõõt*

$$F := \int_{(\cdot)} f \, d\mu : \quad \Sigma \ni E \longmapsto \int_E f \, d\mu \in X \tag{2.5}$$

on tõkestatud variatsiooniga, kusjuures

$$|F|(E) = \int_E \|f\| \, d\mu \qquad \textit{iga } E \in \Sigma \textit{ korral.} \tag{2.6}$$

Vektormõõtu (2.5) nimetatakse *määramata integraaliks* funktsioonist f. Teoreem 2.7 ütleb muuhulgas, et määramata integraal Bochneri mõttes integreeruvast funktsioonist on μ-pidev tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt.

Tõestus. (a). Teame, et $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} \int_E |h| \, d\mu = 0$ iga $h \in L_1(\mu)$ korral (sest teoreemi 1.1 samaväärsuse (i)⇔(iii) põhjal on määramata integraal $\Sigma \ni E \mapsto \int_E |h| \, d\mu$ μ-pidev mõõt), seega lausest 2.5 ja teoreemist 2.4 järeldub, et

$$0 \leqslant \left\| \int_E f \, d\mu \right\| \leqslant \int_E \|f\| \, d\mu \xrightarrow[\mu(E)\to 0]{} 0.$$

Seega $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} \int_E f \, d\mu = 0$.

(b). Olgu $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, paarikaupa lõikumatud hulgad, mille ühend $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Kõigepealt veendume, et rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu$ koondub absoluutselt. Lause 2.5 põhjal $\left\| \int_{E_n} f \, d\mu \right\| \leqslant \int_{E_n} \|f\| \, d\mu$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Kuna Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi kohaselt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \|f\| \, d\mu = \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n} \|f\| \, d\mu$, siis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \int_{E_n} f \, d\mu \right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \|f\| \, d\mu = \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n} \|f\| \, d\mu \leqslant \int_{\Omega} \|f\| \, d\mu < \infty.$$

Järelikult rida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \, d\mu$ on absoluutselt koonduv.

Näitame, et kehtib võrdus (2.4). Kuna Bochneri integraal on aditiivne, siis Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreemi põhjal

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n} f\,d\mu - \sum_{n=1}^{m} \int_{E_n} f\,d\mu \right\| &= \left\| \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n} f\,d\mu - \int_{\bigcup\limits_{n=1}^{m} E_n} f\,d\mu \right\| \\
&= \left\| \int_{\bigcup\limits_{n=m+1}^{\infty} E_n} f\,d\mu \right\| \leqslant \int_{\bigcup\limits_{n=m+1}^{\infty} E_n} \|f\|\,d\mu \\
&= \int_{\Omega} \|f\| \chi_{\bigcup\limits_{n=m+1}^{\infty} E_n}\,d\mu \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,
\end{aligned}
$$

sest $\|f\|\chi_{\bigcup\limits_{n=m+1}^{\infty} E_n} \xrightarrow[m]{} 0$. Järelikult (2.4) kehtib.

Märkus 2.1. Alternatiivne võimalus võrduse (2.4) tõestuseks on märkida, et määramata Bochneri integraal on μ-pidev vektormõõt ja kasutada lauset 1.13, mille kohaselt μ-pidev vektormõõt on loenduvalt aditiivne.

(c). Paneme tähele, et kui π on hulga $E \in \Sigma$ mingi tükeldus, siis

$$
\sum_{A\in\pi} \|F(A)\| = \sum_{A\in\pi} \left\| \int_A f\,d\mu \right\| \leqslant \sum_{A\in\pi} \int_A \|f\|\,d\mu = \int_E \|f\|\,d\mu.
$$

Järelikult $|F|(E) \leqslant \int_E \|f\|\,d\mu$. Teoreemi 2.4 põhjal on vektormõõt F tõkestatud variatsiooniga.

Võrratuse $|F|(E) \geqslant \int_E \|f\|\,d\mu$ tõestuseks vaatleme kõigepealt juhtu, kus f on lihtfunktsioon standardesitusega $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i} x_i$. Olgu $\pi := \{E \cap A_1, \ldots, E \cap A_n\}$; siis

$$
\sum_{A\in\pi} \left\| \int_A f\,d\mu \right\| = \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{E\cap A_i} f\,d\mu \right\| = \sum_{i=1}^{n} \mu(E\cap A_i)\|x_i\| = \int_E \|f\|\,d\mu.
$$

Seega $|F|(E) \geqslant \int_E \|f\|\,d\mu$ ning kehtib võrdus (2.6).

Olgu nüüd funktsioon f suvaline, olgu $\varepsilon > 0$ ning olgu $g\colon \Omega \to X$ selline Bochneri mõttes integreeruv funktsioon, et $\int_\Omega \|f - g\|\,d\mu < \varepsilon$. Siis ka

$$
\begin{aligned}
\left| \int_E \|f\|\,d\mu - \int_E \|g\|\,d\mu \right| &= \left| \int_E \big(\|f\| - \|g\|\big)\,d\mu \right| \leqslant \int_E \big|\|f\| - \|g\|\big|\,d\mu \\
&\leqslant \int_E \|f - g\|\,d\mu < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Defineerime vektormõõdu $G := \int_{(\cdot)} g\,d\mu$. Kui π on hulga E mingi tükeldus, siis

$$\begin{aligned}\left|\sum_{A\in\pi}\|F(A)\| - \sum_{A\in\pi}\|G(A)\|\right| &= \left|\sum_{A\in\pi}\left\|\int_A f\,d\mu\right\| - \sum_{A\in\pi}\left\|\int_A g\,d\mu\right\|\right|\\ &= \left|\sum_{A\in\pi}\Big(\left\|\int_A f\,d\mu\right\| - \left\|\int_A g\,d\mu\right\|\Big)\right|\\ &\leqslant \sum_{A\in\pi}\left\|\int_A f\,d\mu - \int_A g\,d\mu\right\| = \sum_{A\in\pi}\left\|\int_A (f-g)\,d\mu\right\|\\ &\leqslant \sum_{A\in\pi}\int_A \|f-g\|\,d\mu = \int_E \|f-g\|\,d\mu < \varepsilon,\end{aligned}$$

seega

$$\sum_{A\in\pi}\|F(A)\| < \sum_{A\in\pi}\|G(A)\| + \varepsilon \leqslant |G|(E) + \varepsilon$$

ning järelikult $|F|(E) \leqslant |G|(E)+\varepsilon$. Analoogiliselt saame, et $|G|(E) \leqslant |F|(E)+\varepsilon$. Seega

$$\big||F|(E) - |G|(E)\big| < \varepsilon.$$

Valides Bochneri mõttes integreeruva funktsiooni g rolli lihtfunktsiooni, mis rahuldab tingimust $\int_\Omega \|f-g\|\,d\mu < \varepsilon$, saame

$$\begin{aligned}\left||F|(E) - \int_E \|f\|\,d\mu\right| &= \left||F|(E) - |G|(E) + \int_E \|g\|\,d\mu - \int_E \|f\|\,d\mu\right|\\ &\leqslant \big||F|(E) - |G|(E)\big| + \left|\int_E \|g\|\,d\mu - \int_E \|f\|\,d\mu\right| < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Kuna $\varepsilon > 0$ on suvaline, siis $|F|(E) = \int_E \|f\|\,d\mu$, nagu soovitud. ■

Lause 2.8. *Olgu $f, g \in L_1(\mu, X)$, kusjuures*

$$\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu \quad \textit{iga } E \in \Sigma \textit{ korral.}$$

Siis $f = g$ μ-peaaegu kõikjal.

Tõestus. Defineerime vektormõõdu $F(E) = \int_E (f-g)\,d\mu$, $E \in \Sigma$. Siis iga $E \in \Sigma$ korral $F(E) = 0$ ning järelikult iga $E \in \Sigma$ korral $|F|(E) = 0$. Sel juhul teoreemi 2.7, (c), põhjal

$$0 = |F|(\Omega) = \int_\Omega \|f-g\|\,d\mu$$

ning seega $\|f-g\|=0$ μ-peaaegu kõikjal ehk, teisisõnu, $f=g$ μ-peaaegu kõikjal. ■

2.4 Lebesgue–Bochneri ruumid $L_p(\mu, X)$

Kõigi Bochneri mõttes integreeruvate funktsioonide $f\colon\ \Omega \to X$ ruumi tähistatakse sümboliga $L_1(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ või lihtsalt $L_1(\mu, X)$. Siis $L_1(\mu, X)$ on vektorruum loomulike tehete suhtes. Kui ruumis $L_1(\mu, X)$ lugeda kaks funktsiooni võrdseks, kui nad on võrdsed peaaegu kõikjal, siis $L_1(\mu, X)$ on Banachi ruum järgmise normi suhtes:

$$\|f\|_1 := \int_\Omega \|f\|\, d\mu, \quad f \in L_1(\mu, X).$$

Üldisemalt, kui $1 \leqslant p < \infty$, siis sümboliga $L_p(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ või lihtsalt $L_p(\mu, X)$ tähistatakse selliste μ-mõõtuvate funktsioonide $f\colon\ \Omega \to X$ klassi, mille korral

$$\int_\Omega \|f\|^p\, d\mu < \infty.$$

Niisiis, $L_p(\mu, X) = \big\{f\colon\ \Omega \to X,\ \|f\| \in L_p(\mu)\big\}$. Paneme tähele, et $L_p(\mu, X)$ on vektorruum loomulike tehete suhtes. Kui ruumis $L_p(\mu, X)$ lugeda kaks funktsiooni võrdseks, kui nad on võrdsed peaaegu kõikjal, siis $L_p(\mu, X)$ on Banachi ruum järgmise normi suhtes:

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega \|f\|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L_p(\mu, X).$$

Me ütleme et μ-mõõtuv funktsioon $f\colon\ \Omega \to X$ on *μ-oluliselt tõkestatud* (ehk lihtsalt *oluliselt tõkestatud,* kui mõõdu μ roll on kontekstist selge), kui

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup} \|f\| < \infty,$$

kus

$$\begin{aligned}
\operatorname{ess\,sup} \|f\| &= \inf\Big\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{\omega : \|f(\omega)\| > a\}) = 0\Big\} \\
&= \min\Big\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{\omega : \|f(\omega)\| > a\}) = 0\Big\} \\
&= \min\Big\{a \in \mathbb{R} : \|f\| \leqslant a \text{ peaaegu kõikjal}\Big\}.
\end{aligned}$$

Kõigi μ-*oluliselt tõkestatud* μ-mõõtuvate funktsioonide klassi tähistatakse sümboliga $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ (ehk, lühidalt, $L_\infty(\mu, X)$). Juhime tähelepanu, et klass $L_\infty(\mu, X)$ koosneb funktsioonidest, mis on väljaspool mingit nullmõõduga hulka tõkestatud. Märgime, et $L_\infty(\mu, X)$ on vektorruum loomulike tehete suhtes; kui ruumis $L_\infty(\mu, X)$ lugeda kaks funktsiooni võrdseks, kui nad on võrdsed peaaegu kõikjal, siis $L_\infty(\mu, X)$ on Banachi ruum normi $\|\cdot\|_\infty$ suhtes.

Banachi ruume $L_p(\mu, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, nimetatakse *Lebesgue–Bochneri ruumideks.* Lebesgue–Bochneri ruumid on ruumide $L_p(\mu)$ loomulik üldistus. Märgime, et kui $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, siis

$$L_\infty(\mu, X) \subset L_q(\mu, X) \subset L_p(\mu, X) \subset L_1(\mu, X).$$

3 Radon–Nikodými omadus

Kõikjal selles paragrahvis on X Banachi ruum ja (Ω, Σ, μ) täieliku lõpliku mõõduga ruum.

Sissejuhatuses me defineerisime Radon–Nikodými omaduse matemaatiliselt väga lõdvalt: me ütlesime, et Banachi ruumil X on Radon–Nikodými omadus, kui X-väärtustega loenduvalt aditiivsete hulgafunktsioonide jaoks kehtib klassikalise Radon–Nikodými teoreemi loomulik üldistus. Järgnevalt anname Radon–Nikodými omadusele matemaatiliselt range definitsiooni.

Definitsioon 3.1. Öeldakse, et Banachi ruumil X on *Radon–Nikodými omadus ruumi* (Ω, Σ, μ) *suhtes*[1], kui iga μ-pideva tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivse vektormõõdu $G\colon\ \Sigma \to X$ korral eksisteerib funktsioon $g \in L_1(\mu, X)$ nii, et

$$G(E) = \int_E g\,d\mu \quad \text{iga } E \in \Sigma \text{ korral} \tag{3.1}$$

(st G on määramata Bochneri integraal funktsioonist g).

Öeldakse, et Banachi ruumil X on *Radon–Nikodými omadus*, kui ruumil X on Radon–Nikodými omadus iga täieliku lõpliku mõõduga ruumi suhtes.

3.1 Radon–Nikodými omadus ja Rieszi mõttes esituvad operaatorid ruumis $L_1(\mu)$

Reaalmuutuja funktsioonide teooriast tuntud Rieszi esitusteoreem kirjeldab Banachi ruumi $L_1(\mu)$ kaasruumi $L_1(\mu)^*$.

Teoreem 3.1 (Rieszi esitusteoreem)**.** *Iga* $\Phi \in L_1(\mu)^*$ *korral leidub üheselt määratud* $g \in L_\infty(\mu)$ *nii, et*

$$\Phi(f) = \int_\Omega fg\,d\mu \quad \textit{iga } f \in L_1(\mu) \textit{ korral.}$$

Seejuures $\|\Phi\| = \|g\|_\infty$.

Sisuliselt ütleb Rieszi esitusteoreem, et kaasruum $L_1(\mu)^*$ on kanooniliselt isomeetriliselt isomorfne ruumiga $L_\infty(\mu)$ – need ruumid on loomulikul viisil samastatavad.

[1]Kõneldes ruumi X Radon–Niodými omadusest mittetäieliku mõõduga ruumi suhtes, mõistame me ruumi X Radon–Nikodými omadust selle ruumi täieldi suhtes.

Radon–Nikodými teoreem ja Rieszi esitusteoreem on teineteisega tihedalt seotud – neid võib tõestada teineteisest sõltumatult, kuid neid on mugav teineteisest järeldada. Selles punktis näitame, et nende teoreemide loomulikud üldistused vastavalt (μ-pidevate tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivsete) vektormõõtude $\Sigma \to X$ esitusest ja (pidevate lineaarsete) operaatorite $L_1(\mu) \to X$ esitusest on samal moel seotud – nad kas mõlemad kehtivad või ei kehti kumbki.

Kõigepealt formaliseerime, mida me mõistame Rieszi esitusteoreemi nimetatud üldistuse kehtivuse all.

Definitsioon 3.2. Öeldakse, et operaator $T \in \mathcal{L}(L_1(\mu), X)$ on *Rieszi mõttes esituv* (ehk lihtsalt *esituv*), kui leidub funktsioon $g \in L_\infty(\mu, X)$ nii, et

$$Tf = \int_\Omega fg \, d\mu \qquad \text{iga } f \in L_1(\mu) \text{ korral.} \tag{3.2}$$

Selle punkti eesmärk on tõestada, et ruumil X on Radon–Nikodými omadus ruumi (Ω, Σ, μ) suhtes parajasti siis, kui iga operaator $T \in \mathcal{L}(L_1(\mu), X)$ on esituv. "Tarvilikkus" selles väites järeldub vahetult järgnevast lemmast.

Lemma 3.2. *Olgu $T \in \mathcal{L}(L_1(\mu), X)$. Defineerime vektormõõdu $G\colon \Sigma \to X$ võrdusega*

$$G(E) = T(\chi_E), \quad E \in \Sigma.$$

(a) *G on μ-pidev tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt.*

(b) *Järgmised väited on samaväärsed:*

  (i) *T on esituv;*

  (ii) *leidub funktsioon $g \in L_1(\mu, X)$ nii, et kehtib* (3.1).

Sel juhul funktsioon $g \in L_\infty(\mu, X)$, kusjuures $\|g\|_\infty = \|T\|$, ja kehtib (3.2).

Tõestus. (a). Kõigepealt paneme tähele, et kui $E \in \Sigma$, siis

$$\|G(E)\| \leqslant \|T\|\mu(E), \tag{3.3}$$

sest

$$\|G(E)\| = \|T(\chi_E)\| \leqslant \|T\|\|\chi_E\|_1 = \|T\| \int_\Omega |\chi_E| \, d\mu = \|T\| \int_\Omega \chi_E \, d\mu = \|T\|\mu(E).$$

Siit järeldub, et G on μ-pidev, sest

$$\|G(E)\| \leqslant \|T\|\mu(E) \xrightarrow[\mu(E)\to 0]{} 0.$$

Näitame, et vektormõõt G on tõkestatud variatsiooniga. Võrratuse (3.3) põhjal vektormõõdu G variatsioon $|G|$ rahuldab iga $E \in \Sigma$ korral tingimust

$$|G|(E) \leqslant \|T\|\mu(E), \tag{3.4}$$

sest kui $\{E_1, \ldots, E_n\}$ on hulga E mõõtuv tükeldus, siis

$$\sum_{i=1}^{n} \|G(E_i)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|T\|\mu(E_i) = \|T\| \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \|T\|\mu(E).$$

Seega G on tõkestatud variatsiooniga. Vektormõõt G on ka loenduvalt aditiivne. Tõepoolest, kui $E_i \in \Sigma$, $i \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud hulgad, siis

$$0 \leqslant \left\| G\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) - \sum_{i=1}^{n} G(E_i) \right\| = \left\| G\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i\right) \right\| \leqslant \|T\|\mu\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Seega $G\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} G(E_i)$; järelikult G on loenduvalt aditiivne.

(b). (i)⇒(ii). Eeldame, et operaator T on esituv. Definitsiooni 3.2 kohaselt leidub funktsioon $g \in L_\infty(\mu, X)$ nii, et kehtib (3.2). Seega kui $E \in \Sigma$, siis

$$G(E) = T(\chi_E) = \int_\Omega \chi_E g \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$$

(ii)⇒(i). Olgu funktsioon $g \in L_1(\mu, X)$ selline, et iga $E \in \Sigma$ korral

$$G(E) = T(\chi_E) = \int_E g \, d\mu.$$

Kuna teoreemi 2.7 väite (c) kohaselt iga $E \in \Sigma$ korral $|G|(E) = \int_E \|g\| \, d\mu$, siis $\|g\| \leqslant \|T\|$ peaaegu kõikjal. Tõepoolest, tähistame $E := \{\omega \in \Omega : \|g(\omega)\| > \|T\|\}$; siis $E \in \Sigma$. Oletame vastuväiteliselt, et $\mu(E) > 0$. Sel juhul lause 1.4 põhjal

$$|G|(E) = \int_E \|g\| \, d\mu > \int_E \|T\| \, d\mu = \|T\|\mu(E),$$

mis on vastuolus võrratusega (3.4); niisiis $g \in L_\infty(\mu, X)$ ning $\|g\|_\infty \leqslant \|T\|$.

Paneme tähele, et operaator

$$S\colon\ L_1(\mu) \ni f \longmapsto \int_\Omega fg\,d\mu \in X$$

on pidev ja lineaarne. Tõepoolest, kui $f, h \in L_1(\mu)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, siis

$$\begin{aligned} S(\lambda f + h) &= \int_\Omega (\lambda f + h)g\,d\mu = \int_\Omega (\lambda(fg) + hg)\,d\mu \\ &= \lambda \int_\Omega fg\,d\mu + \int_\Omega hg\,d\mu = \lambda Sf + Sh, \end{aligned}$$

seega operaator S on lineaarne. Näitame, et S on tõkestatud. Olgu $f \in L_1(\mu)$ suvaline; siis

$$\|Sf\| = \left\| \int_\Omega fg\,d\mu \right\| \leqslant \int_\Omega \|fg\|\,d\mu \leqslant \int_\Omega |f|\|g\|_\infty\,d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Seega $S \in \mathcal{L}(L_1(\mu), X)$, kusjuures $\|S\| \leqslant \|g\|_\infty$.

Näitame, et iga lihtfunktsiooni $f \in L_1(\mu)$ korral $Sf = Tf$. Olgu $f \in L_1(\mu)$ lihtfunktsioon kanoonilise esitusega $f = \sum\limits_{i=1}^m \chi_{A_i}\alpha_i$. Siis

$$\begin{aligned} Sf &= \int_\Omega fg\,d\mu = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^m \chi_{A_i}\alpha_i \Big) g\,d\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_\Omega \chi_{A_i} g\,d\mu \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{A_i} g\,d\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i T(\chi_{A_i}) = T\Big(\sum_{i=1}^m \chi_{A_i}\alpha_i \Big) = Tf. \end{aligned}$$

Siit järeldub, et $T = S$ ruumi $L_1(\mu)$ kõikjal tihedal alamruumil (lihtfunktsioonide alamruumil), järelikult $T = S$ ja kehtib (3.2). Seega operaator T on esituv. Muuhulgas $\|T\| = \|S\| \leqslant \|g\|_\infty$ ning kokkuvõttes $\|T\| = \|g\|_\infty$. ■

Nüüd oleme valmis tõestama selle punkti põhiteoreemi, mis annab tarviliku ja piisava tingimuse Radon–Nikodými omaduse olemasoluks Banachi ruumil X.

Teoreem 3.3. *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruumil X on Radon–Nikodými omadus ruumi (Ω, Σ, μ) suhtes;*

(ii) *iga operaator $T \in \mathcal{L}(L_1(\mu), X)$ on esituv.*

Tõestus. (i)$\Rightarrow$(ii) järeldub vahetult lemmast 3.2.

(ii)$\Rightarrow$(i). Eeldame, et iga operaator $T \in \mathcal{L}(L_1(\mu), X)$ on esituv. Olgu $G\colon \Sigma \to X$ suvaline μ-pidev tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt. Lause 1.12 põhjal on variatsioon $|F|$ μ-pidev, seega lause 1.11 põhjal on F loenduvalt aditiivne, järelikult Lemma 1.2 kohaselt leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, kusjuures iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$(n-1)\mu(E) \leqslant |G|(E) \leqslant n\mu(E) \qquad \text{iga } E \in \mathcal{P}_\Sigma(E_n) \text{ korral.}$$

Fikseerime $n \in \mathbb{N}$. Defineerime ruumi $L_1(\mu)$ lihtfunktsioonide alamruumil X-väärtustega operaatori S_n võrdusega

$$S_n f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i G(A_i \cap E_n),$$

kus $f = \sum\limits_{i=1}^{m} \chi_{A_i}\alpha_i$ on lihtfunktsiooni $f \in L_1(\mu)$ kanooniline esitus. Ilmselt on S_n lineaarne. Kuna

$$\begin{aligned}\|S_n f\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i G(A_i \cap E_n) \right\| &\leqslant \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i||G|(A_i \cap E_n) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| n\mu(A_i \cap E_n) \leqslant n\|f\|_1,\end{aligned}$$

siis S_n on ka tõkestatud. Kuna lihtfunktsioonide alamruum on kõikjal tihe ruumis $L_1(\mu)$, siis leidub operaatoril S_n (üheselt määratud) jätk $T_n \in \mathcal{L}(L_1(\mu), X)$. Eelduse kohaselt leidub funktsioon $g_n \in L_\infty(\mu, X)$ nii, et

$$T_n f = \int_\Omega f g_n \, d\mu \quad \text{iga } f \in L_1(\mu) \text{ korral.}$$

Seejuures iga $E \in \Sigma$ korral

$$G(E \cap E_n) = S_n \chi_{E \cap E_n} = T_n \chi_{E \cap E_n} = \int_{E \cap E_n} g_n \, d\mu.$$

Defineerime funktsiooni $g\colon\ \Omega \to X$ võrdusega

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} g_n$$

Siis g on μ-mõõtuv, sest $g_n, n \in \mathbb{N}$, on μ-mõõtuvad; veelgi enam, $g \in L_1(\mu, X)$, sest

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|g\|\,d\mu &= \int_\Omega \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} g_n \Big\|\,d\mu = \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} \|g_n\|\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega \chi_{E_n} \|g_n\|\,d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \|g_n\|\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |G|(E_n) = |G|\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = |G|(\Omega) < \infty;\end{aligned}$$

seejuures iga $E \in \Sigma$ korral

$$\begin{aligned}G(E) &= G\Big(E \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)\Big) = G\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap E_n)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} G(E \cap E_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E\cap E_n} g_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E\cap E_n} g\,d\mu = \int_E g\,d\mu.\end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud, et ruumil X on Radon–Nikodými omadus ruumi (Ω, Σ, μ) suhtes. ∎

3.2 Üks “Radon–Nikodými teoreem”

Järgnev lemma, mida me vajame töö viimases paragrahvis teoreemi 6.1 tõestamisel, on sisult “Radon–Nikodými tüüpi teoreem” – ta annab piisavad tingimused selleks, et vektormõõt oleks määramata integraal mingist Bochneri mõttes integreeruvast funktsioonist.

Lemma 3.4 ([DU, lk 135, lemma 6])**.** *Olgu $F\colon\ \Sigma \to X$ μ-pidev tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt. Kui iga $\varepsilon > 0$ ja iga $A \in \mathcal{P}_\mu^+(\Omega)$ korral leidub hulk $B \in \mathcal{P}_\mu^+(A)$ nii, et*

$$\operatorname{diam}\Big\{\frac{F(E)}{\mu(E)}\colon\ E \in \mathcal{P}_\mu^+(B)\Big\} \leqslant \varepsilon, \tag{3.5}$$

siis leidub funktsioon $f \in L_1(\mu, X)$ nii, et

$$F(E) = \int_E f\, d\mu \quad \textit{iga } E \in \Sigma \textit{ korral.}$$

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. “Ammendamislemma” 1.5 põhjal leidub ülimalt loenduv mittetühi indeksite hulk J ja paarikaupa lõikumatud hulgad $E_i \in \mathcal{P}_\mu^+(\Omega)$, $i \in J$, nii, et

$$\mu\Big(\Omega \setminus \bigcup_{i \in J} E_i\Big) = 0,$$

ja iga $i \in J$ korral $\operatorname{diam}\Big\{\frac{F(E)}{\mu(E)}\colon\ E \in \mathcal{P}_\mu^+(E_i)\Big\} \leqslant \varepsilon$. Tõepoolest, tähistame

$$\mathfrak{B}_0 := \{B \in \Sigma\colon\ \mu(B) = 0\}, \qquad \mathfrak{B} := \{B \in \mathcal{P}_\mu^+(\Omega)\colon\ \text{kehtib (3.5)}\}$$

ja

$$\mathcal{A} := \Big\{\bigcup_{j=1}^n B_j\colon\ n \in \mathbb{N},\ B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{B},\ B_j \cap B_k = \emptyset,\ j \neq k\Big\},$$

st $\mathcal{A}$ on kogumi $\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{B}$ paarikaupa lõikumatute hulkade lõplike ühendite kogum. Vahetult on kontrollitav, et $\mathcal{A}$ rahuldab “ammendamislemma” 1.5 eeldusi, järelikult Ω esitub kogumi $\mathcal{A}$ paarikaupa lõikumatute hulkade loenduva ühendina, aga selline ühend esitub paarikaupa lõikumatute hulkade ühendina $E_0 \cup \bigcup_{i \in J} E_i$, kus $\mu(E_0) = 0$, indeksite hulk J on mittetühi ja ülimalt loenduv ning $E_i \in \mathfrak{B}$, iga $i \in J$ korral.

Defineerime funktsiooni $f_\varepsilon\colon\ \Omega \to X$ võrdusega

$$f_\varepsilon = \sum_{i \in J} \chi_{E_i} \frac{F(E_i)}{\mu(E_i)}.$$

Funktsioon f_ε on Bochneri mõttes integreeruv, sest monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|f_\varepsilon\|\,d\mu &= \int_\Omega \left\| \sum_{i\in J} \chi_{E_i} \frac{F(E_i)}{\mu(E_i)} \right\| d\mu = \int_\Omega \sum_{i\in J} \chi_{E_i} \frac{\|F(E_i)\|}{\mu(E_i)}\,d\mu \\ &= \sum_{i\in J} \int_\Omega \chi_{E_i} \frac{\|F(E_i)\|}{\mu(E_i)}\,d\mu = \sum_{i\in J} \frac{\|F(E_i)\|}{\mu(E_i)} \int_\Omega \chi_{E_i}\,d\mu \\ &= \sum_{i\in J} \frac{\|F(E_i)\|}{\mu(E_i)}\,\mu(E_i) = \sum_{i\in J} \|F(E_i)\| \leqslant |F|(\Omega) < \infty.\end{aligned}$$

Defineerime vektormõõdu $F_\varepsilon := \int_{(\cdot)} f_\varepsilon\,d\mu$; siis hulga Ω mis tahes lõpliku mõõtuva tükelduse π korral, arvestades, et μ-pidev vektormõõt F on μ-nullhulkadel null,

$$\begin{aligned}\sum_{E\in\pi} \|F(E) - F_\varepsilon(E)\| &= \sum_{E\in\pi} \left\| F(E) - \int_E f_\varepsilon\,d\mu \right\| \\ &= \sum_{E\in\pi} \left\| \sum_{i\in J} F(E\cap E_i) - \sum_{i\in J} \mu(E\cap E_i) \frac{F(E_i)}{\mu(E_i)} \right\| \\ &\leqslant \sum_{E\in\pi} \sum_{i\in J} \left\| F(E\cap E_i) - \mu(E\cap E_i) \frac{F(E_i)}{\mu(E_i)} \right\| \\ &= \sum_{E\in\pi} \sum_{i\in J} \left\| \frac{F(E\cap E_i)}{\mu(E\cap E_i)} - \frac{F(E_i)}{\mu(E_i)} \right\| \mu(E\cap E_i) \\ &\leqslant \sum_{E\in\pi} \sum_{i\in J} \varepsilon\,\mu(E\cap E_i) = \varepsilon\mu(\Omega),\end{aligned}$$

seega $|F - F_\varepsilon|(\Omega) \leqslant \varepsilon\mu(\Omega)$.

Teoreemi 2.7 põhjal

$$\int_\Omega \|f_\varepsilon - f_\delta\|\,d\mu = |F_\varepsilon - F_\delta|(\Omega) \leqslant |F_\varepsilon - F|(\Omega) + |F - F_\delta|(\Omega) \leqslant (\varepsilon+\delta)\mu(\Omega) \xrightarrow[\varepsilon,\delta\to 0]{} 0;$$

niisiis $\left(f_{\frac{1}{n}}\right)_{n=1}^\infty$ on Cauchy jada ruumis $L_1(\mu, X)$. Olgu $f \in L_1(\mu, X)$ selle jada piirväärtus ruumis $L_1(\mu, X)$, st $\left\|f_{\frac{1}{n}} - f\right\|_1 \underset{n}{\to} 0$; siis iga $E \in \Sigma$ korral, arvestades, et $\left\|F(E) - F_{\frac{1}{n}}(E)\right\| \leqslant \left|F - F_{\frac{1}{n}}\right|(E) \underset{n}{\to} 0$,

$$F(E) = \lim_n F_{\frac{1}{n}}(E) = \lim_n \int_E f_{\frac{1}{n}}\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

■

3.3 Separaablitel kaasruumidel on Radon–Nikodými omadus

Selles punktis on meie eesmärk tõestada, et *separaablitel kaasruumidel on Radon–Nikodými omadus.* Selleks on otstarbekas eelnevalt tõestada järgnevad abitulemused. Kõikjal selles punktis järgime me kokkulepet, et

$$\frac{0}{0} = 0.$$

Lihtne on veenduda, et hulga $E \in \Sigma$ kõikvõimalikud mõõtuvad tükeldused moodustavad suunatud hulga loomuliku järjestuse $\preccurlyeq$ suhtes: kui $\pi_1 := \{E_1, \dots, E_m\}$ ja π_2 on hulga E lõplikud mõõtuvad tükeldused, siis $\pi_1 \preccurlyeq \pi_2$ tähendab, et tükeldus π_2 koosneb tükelduse π_1 hulkade tükeldustest, st mingite $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ korral $\pi_2 = \big\{E^i_j\colon\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n_i\big\}$, kus iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral $E_i = \bigcup\limits_{j=1}^{n_i} E^i_j$.

Lemma 3.5 ([DU, lk 67, lemma 1]). *Vastavalt hulga Ω igale lõplikule mõõtuvale tükeldusele π defineerime operaatori*

$$E_\pi\colon\ L_1(\mu, X) \ni f \longmapsto \sum_{A\in\pi} \chi_A \frac{\int_A f\, d\mu}{\mu(A)} \in L_1(\mu, X).$$

Siis

(a) *operaator E_π on pidev ja lineaarne, kusjuures $\|E_\pi\| \leqslant 1$;*

(b) *$E_\pi\big(L_\infty(\mu, X)\big) \subset L_\infty(\mu, X)$; operaator $E_\pi|_{L_\infty(\mu,X)}\colon\ L_\infty(\mu, X) \to L_\infty(\mu, X)$ on pidev ja lineaarne, kusjuures tema norm on $\leqslant 1$;*

(c) *vaadeldes hulga Ω kõigi lõplike mõõtuvate tükelduste hulka järjestatuna loomulikul viisil,*

- *$\|E_\pi f - f\|_1 \underset{\pi}{\to} 0$ iga $f \in L_1(\mu, X)$ korral;*
- *$\|E_\pi f - f\|_\infty \underset{\pi}{\to} 0$ iga $f \in L_\infty(\mu, X)$ korral, mille kujutishulk $f(\Omega)$ on ruumi X (normi topoloogias) suhteliselt kompaktne alamhulk.*

Tõestus. (a). Ilmselt operaator E_π on lineaarne. Iga $f \in L_1(\mu, X)$ korral

$$\begin{aligned}
\|E_\pi f\|_1 &= \left\| \sum_{A\in\pi} \chi_A \frac{\int_A f\,d\mu}{\mu(A)} \right\|_1 = \int_\Omega \left\| \sum_{A\in\pi} \chi_A \frac{\int_A f\,d\mu}{\mu(A)} \right\| d\mu \\
&= \int_\Omega \sum_{A\in\pi} \left\| \chi_A \frac{\int_A f\,d\mu}{\mu(A)} \right\| d\mu = \int \sum_{A\in\pi} \chi_A \frac{\left\|\int_A f\,d\mu\right\|}{\mu(A)}\, d\mu \\
&= \sum_{A\in\pi} \frac{\left\|\int_A f\,d\mu\right\|}{\mu(A)} \int_\Omega \chi_A\,d\mu = \sum_{A\in\pi} \frac{\left\|\int_A f\,d\mu\right\|}{\mu(A)}\, \mu(A) \\
&= \sum_{A\in\pi} \left\| \int_A f\,d\mu \right\| \leqslant \sum_{A\in\pi} \int_A \|f\|\,d\mu = \int_\Omega \|f\|\,d\mu = \|f\|_1,
\end{aligned}$$

seega E_π on ka pidev, kusjuures $\|E_\pi\| \leqslant 1$.

(b). Paneme tähele, et kui $f \in L_\infty(\mu, X)$, siis

$$\|E_\pi f\|_\infty = \max_{A\in\pi} \frac{\left\|\int_A f\,d\mu\right\|}{\mu(A)}.$$

Iga $A \in \Sigma$ korral $\left\| \int_A f\,d\mu \right\| \leqslant \int_A \|f\|\,d\mu \leqslant \|f\|_\infty\, \mu(A)$, seega $\|E_\pi f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ ning järelikult vaadeldava operaatori norm on $\leqslant 1$.

(c). Olgu $f \in L_1(\mu, X)$ lihtfunktsioon standardesitusega $f = \sum\limits_{i=1}^m \chi_{E_i} x_i$. Siis $\pi_0 := \{E_1, \dots, E_m\}$ on hulga Ω tükeldus. Kui $\pi \succcurlyeq \pi_0$, st mingite $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ korral $\pi = \left\{E_j^i \colon\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n_i\right\}$, kus iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral $E_i = \bigcup\limits_{j=1}^{n_i} E_j^i$, siis

$$\begin{aligned}
E_\pi f &= \sum_{A\in\pi} \chi_A \frac{\int_A f\,d\mu}{\mu(A)} = \sum_{A\in\pi} \chi_A \frac{\sum\limits_{i=1}^m \mu(E_i \cap A) x_i}{\mu(A)} \\
&= \sum_{A\in\pi} \chi_A \sum_{i=1}^m \frac{\mu(E_i \cap A)}{\mu(A)} x_i = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} \chi_{E_j^k} \sum_{i=1}^m \frac{\mu(E_i \cap E_j^k)}{\mu(E_j^k)} x_i \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} \chi_{E_j^k} \frac{\mu(E_k \cap E_j^k)}{\mu(E_j^k)} x_k = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{n_k} \chi_{E_j^k} \frac{\mu(E_j^k)}{\mu(E_j^k)} x_k \\
&= \sum_{k=1}^m \chi_{\bigcup\limits_{j=1}^{n_k} E_j^k} x_k = \sum_{k=1}^m \chi_{E_k} x_k = f.
\end{aligned}$$

Järelikult $E_\pi f \underset{\pi}{\to} f$ iga lihtfunktsiooni $f \in L_1(\mu, X)$ korral.

Olgu $f \in L_1(\mu, X)$ ja $\varepsilon > 0$. Kuna lihtfunktsioonide alamruum on kõikjal tihe ruumis $L_1(\mu, X)$, siis leidub lihtfunktsioon $g \in L_1(\mu, X)$ nii, et $\|g - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Ülaltõestatu põhjal leidub hulga Ω mõõtuv tükeldus π_0 nii, et $E_\pi g = g$, kui $\pi \succcurlyeq \pi_0$. Kuna $\|E_\pi\| \leqslant 1$ iga mõõtuva tükelduse π korral, siis $\pi \succcurlyeq \pi_0$ korral

$$\begin{aligned}\|E_\pi f - f\|_1 &= \|E_\pi f - E_\pi g + g - f\|_1 \leqslant \|E_\pi f - E_\pi g\|_1 + \|g - f\|_1 \\ &\leqslant \|E_\pi\| \|f - g\|_1 + \|g - f\|_1 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Seega $E_\pi f \underset{\pi}{\to} f$ ruumis $L_1(\mu, X)$ iga $f \in L_1(\mu, X)$ korral.

Olgu nüüd funktsiooni $f \in L_\infty(\mu, X)$ kujutishulk $f(\Omega)$ ruumi X suhteliselt kompaktne alamhulk ning olgu $\varepsilon > 0$. Siis Hausdorffi teoreemi põhjal leidub hulgal $f(\Omega)$ lõplik $\frac{\varepsilon}{4}$-võrk $\{z_1, \ldots, z_m\}$ ($m \in \mathbb{N}$). Tähistame

$$B_1 := B(z_1, \varepsilon) \qquad \text{ja} \qquad B_i := B(z_i, \varepsilon) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j, \quad \text{kui } i \in \{2, \ldots, m\};$$

siis $B_1, \ldots, B_m$ on ruumi X paarikaupa lõikumatud Boreli mõttes mõõtuvad alamhulgad, kusjuures $f(\Omega) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$ ja iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $\operatorname{diam} B_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; seejuures me võime eeldada, et hulgad $B_1, \ldots, B_m$ on mittetühjad. Iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral valime mingi $x_i \in B_i$ ja tähistame $A_i := f^{-1}(B_i)$ (siis $\{A_1, \ldots, A_m\}$ on hulga Ω tükeldus) ning $g := \sum\limits_{i=1}^{m} \chi_{A_i} x_i \in L_\infty(\mu, X)$. Paneme tähele, et $\|g - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Tõepoolest, olgu $\omega \in \Omega$ suvaline; siis mingi $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral $\omega \in A_i$ ning järelikult $f(\omega) \in B_i$ ja $g(\omega) = x_i$. Kuna $x_i \in B_i$, siis

$$\|g(\omega) - f(\omega)\| = \|x_i - f(\omega)\| \leqslant \operatorname{diam} B_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

seega $\|g - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Kuna g on lihtfunktsioon, siis leidub hulga Ω mõõtuv tükeldus π_0 nii, et $E_\pi g = g$, kui $\pi \succcurlyeq \pi_0$. Nüüd, kui $\pi \succcurlyeq \pi_0$, siis

$$\begin{aligned}\|E_\pi f - f\|_\infty &= \|E_\pi f - E_\pi g + g - f\|_\infty \leqslant \|E_\pi f - E_\pi g\|_\infty + \|g - f\|_\infty \\ &\leqslant \|E_\pi\| \|f - g\|_\infty + \|g - f\|_\infty \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

järelikult $E_\pi f \underset{\pi}{\to} f$ ruumis $L_\infty(\mu, X)$, ■

Järgnev lemma ütleb, et kui eelnevas teoreemis $X = \mathbb{K}$, siis operaator E_π on "enesekaasne". (Märgime, et käesolevas töös me seda lemmat ei kasuta.)

Lemma 3.6. *Olgu π hulga Ω lõplik mõõtuv tükeldus ning olgu $E_\pi\colon\ L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ operaator lemmast 3.5, kus $X = \mathbb{K}$, st*

$$E_\pi f = \sum_{A\in\pi} \frac{\int_A f\,d\mu}{\mu(A)}\,\chi_A, \quad f \in L_1(\mu).$$

Siis iga $g \in L_\infty(\mu)$ korral (tõlgendades funktsioone ruumist $L_\infty(\mu)$ sobival juhul loomulikul viisil kaasruumi $L_1(\mu)^*$ elementidena)

$$E_\pi^* g = \sum_{A\in\pi} \frac{\int_A g\,d\mu}{\mu(A)}\,\chi_A \ (= E_\pi g). \tag{3.6}$$

Tõestus. Olgu $f \in L_1(\mu)$ ja $g \in L_1(\mu)^*$, siis (tõlgendades funktsiooni $g \in L_\infty(\mu)$ sobival juhul loomulikul viisil kaasruumi $L_1(\mu)^*$ elemendina)

$$\begin{aligned}
E_\pi^* g(f) &= g(E_\pi f) = g\Big(\sum_{A\in\pi} \frac{\int_A f\,d\mu}{\mu(A)}\,\chi_A\Big) = \sum_{A\in\pi} \frac{\int_A f\,d\mu}{\mu(A)}\,g(\chi_A) \\
&= \sum_{A\in\pi} \frac{\int_A f\,d\mu}{\mu(A)} \int \chi_A g\,d\mu = \sum_{A\in\pi} \frac{\int_A f\,d\mu}{\mu(A)} \int_A g\,d\mu = \sum_{A\in\pi} \frac{\int_A g\,d\mu}{\mu(A)} \int_A f\,d\mu \\
&= \sum_{A\in\pi} \frac{\int_A g\,d\mu}{\mu(A)} \int_\Omega \chi_A f\,d\mu = \int_\Omega \sum_{A\in\pi} \frac{\int_A g\,d\mu}{\mu(A)}\,\chi_A\,f\,d\mu \\
&= \int_\Omega f\,E_\pi g\,d\mu,
\end{aligned}$$

seega Rieszi esitusteoreemi 3.1 põhjal (tõlgendades funktsiooni $E_\pi g \in L_\infty(\mu)$ sobival juhul loomulikul viisil kaasruumi $L_1(\mu)^*$ elemendina) kehtib (3.6). ■

Lemma 3.7. *Olgu $T \in \mathcal{L}\big(L_1(\mu), X\big)$. Vastavalt hulga Ω igale lõplikule mõõtuvale tükeldusele π defineerime funktsiooni*

$$g_\pi := \sum_{A\in\pi} \chi_A \frac{T\chi_A}{\mu(A)}\colon\ \Omega \longrightarrow X.$$

Iga $x^* \in X^*$ korral olgu g_{x^*} ruumi $L_\infty(\mu)$ (Rieszi esitusteoreemi põhjal üheselt *määratud) element, mis rahuldab tingimust*

$$x^*Tf = \int_\Omega f g_{x^*}\, d\mu \quad \textit{iga } f \in L_1(\mu) \textit{ korral.}$$

Siis mis tahes $x^* \in X^*$ ja hulga Ω lõpliku mõõtuva tükelduse π korral

$$x^* g_\pi = E_\pi g_{x^*},$$

kus $E_\pi\colon\ L_\infty(\mu) \to L_\infty(\mu)$ on operaator lemmast 3.5, (b)*, kus $X = \mathbb{K}$.*

Tõestus. Olgu $x^* \in X^*$ ning olgu π hulga Ω lõplik mõõtuv tükeldus; siis iga $f \in L_1(\mu)$ korral

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\, x^* g_\pi\, d\mu &= \int_\Omega f\, x^*\Big(\sum_{A\in\pi} \chi_A \frac{T\chi_A}{\mu(A)}\Big)\, d\mu = \int_\Omega f \sum_{A\in\pi} \frac{x^*T\chi_A}{\mu(A)} \chi_A\, d\mu \\
&= \int_\Omega f \sum_{A\in\pi} \frac{\int_\Omega \chi_A\, g_{x^*}\, d\mu}{\mu(A)} \chi_A\, d\mu = \int_\Omega f \sum_{A\in\pi} \frac{\int_A g_{x^*}\, d\mu}{\mu(A)} \chi_A\, d\mu \\
&= \int_\Omega f\, E_\pi g_{x^*}\, d\mu,
\end{aligned}$$

seega Rieszi esitusteoreemi 3.1 põhjal $x^* g_\pi = E_\pi g_{x^*}$. ∎

Lemma 3.8. *Olgu kaasruum X^* separaabel ning olgu $T \in \mathcal{L}\big(L_1(\mu), X^*\big)$. Siis leidub tõkestatud funktsioon $g\colon\ \Omega \to X^*$ nii, et iga $x \in X$ korral on funktsioon xg mõõtuv, kusjuures*

$$(Tf)(x) = \int_\Omega f\, xg\, d\mu \quad \textit{iga } f \in L_1(\mu) \textit{ korral.} \tag{3.7}$$

Märkus 3.1. Lemmas 3.8 esinevat funktsiooni $xg\colon\ \Omega \to \mathbb{K}$ tõlgendame järgmiselt:

$$xg(\omega) = \big(g(\omega)\big)(x), \quad \omega \in \Omega.$$

Märkus 3.2. Toetudes liftingute teooriale, saab näidata, et lemma 3.8 kehtib ka ilma eelduseta kaasruumi X^* separaabluse kohta (vt [T, lk 74, lause 7-1-2]). Standardne allikas liftingute teooria põhitulemustele viitamiseks on A. Ionescu-Tulcea ja C. Ionescu-Tulcea monograafia [IT^2].

Lemma 3.8 tõestus. Iga $x \in X$ korral olgu g_x ruumi $L_\infty(\mu)$ (Rieszi esitusteoreemi põhjal üheselt määratud) element, mis rahuldab tingimust

$$(Tf)(x) = \int_\Omega f g_x \, d\mu \quad \text{iga } f \in L_1(\mu) \text{ korral.}$$

Defineerime vastavalt igale hulga Ω lõplikule mõõtuvale tükeldusele π funktsiooni

$$g_\pi := \sum_{A\in\pi} \chi_A \frac{T\chi_A}{\mu(A)} \colon\ \Omega \longrightarrow X^*,$$

ja operaatori

$$E_\pi \colon\ L_1(\mu, X^*) \ni f \longmapsto \sum_{A\in\pi} \chi_A \frac{\int_A f \, d\mu}{\mu(A)} \in L_1(\mu, X^*)$$

(st g_π ja E_π on funktsioon ja operaator vastavalt lemmadest 3.7 ja 3.5, kus ruumi X rollis on kaasruum X^*). Lemmade 3.7 ja 3.5 põhjal

$$\|xg_\pi - g_x\|_\infty = \|E_\pi g_x - g_x\|_\infty \xrightarrow[\pi]{} 0 \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Kaasruumi X^* separaabluse tõttu on ka ruum X lause 1.20 põhjal separaabel, seega leidub (loenduv) kõikjal tihe alamhulk $C := \{x_i \colon\ i \in \mathbb{N}\} \subset X$. Hulga C loenduvuse tõttu leidub kasvav tükelduste jada (π_n) nii, et

$$\|x_i g_{\pi_n} - g_{x_i}\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{iga } i \in \mathbb{N} \text{ korral.} \tag{3.8}$$

Tõepoolest, valides iga $n \in \mathbb{N}$ korral π_n nii, et

$$\|x_i g_{\pi_n} - g_{x_i}\|_\infty < \frac{1}{n} \qquad \text{iga } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ korral,}$$

saame tükelduste jada (π_n), kusjuures kehtib (3.8). Kuna kõikide $i, n \in \mathbb{N}$ korral

$$|x_i g_{\pi_n}(\omega) - g_{x_i}(\omega)| \leqslant \|x_i g_{\pi_n} - g_{x_i}\|_\infty \quad \text{peaaegu kõikide } \omega \in \Omega \text{ korral,}$$

siis leidub nullmõõduga hulk N nii, et iga $i \in \mathbb{N}$ korral

$$x_i g_{\pi_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} g_{x_i} \quad \text{väljaspool hulka } N.$$

Paneme tähele, et iga tükelduse π ja iga $\omega \in \Omega$ korral $g_\pi(\omega) \in \overline{B}_{X^*}\big(0, \|T\|\big)$ (siin me võime üldisust kitsendamata eeldada, et $T \neq 0$), sest kui $A \in \pi$ on selline, et $\omega \in A$, siis

$$\|g_\pi(\omega)\| = \left\| \frac{T\chi_A}{\mu(A)} \right\| = \frac{\|T\chi_A\|}{\mu(A)} \leqslant \frac{\|T\| \, \|\chi_A\|_1}{\mu(A)} = \frac{\|T\| \, \mu(A)}{\mu(A)} \leqslant \|T\|.$$

Banach–Alaoglu teoreemi 1.19 põhjal on $\overline{B}_{X^*}\big(0, \|T\|\big)$ kaasruumi X^* $*$-nõrgas topoloogias kompaktne, seega iga $\omega \in \Omega$ korral leidub jadal $\big(g_{\pi_n}(\omega)\big)$ $*$-nõrgalt koonduv osapere. Nüüd me saame defineerida funktsiooni $g\colon\ \Omega \to X^*$ järgmiselt: iga $\omega \in \Omega$ korral $g(\omega)$ on jada $\big(g_{\pi_n}(\omega)\big)$ mingi $*$-nõrgalt koonduva osapere piirväärtus. Siis g on tõkestatud funktsioon, sest $g(\Omega) \subset \overline{B}_{X^*}\big(0, \|T\|\big)$. Seejuures iga $i \in \mathbb{N}$ korral

$$x_i g = g_{x_i} \quad \text{väljaspool (nullmõõduga) hulka } N. \tag{3.9}$$

Tõepoolest, olgu $i \in \mathbb{N}$ ja olgu $\omega \in \Omega \setminus N$. Siis leidub jada $\big(g_{\pi_n}(\omega)\big)$ osapere $\big(g_{\pi_{n_\alpha}}(\omega)\big)$ nii, et $g_{\pi_{n_\alpha}}(\omega) \xrightarrow[\alpha]{w^*} g(\omega)$, aga nüüd

$$x_i g(\omega) = \lim_\alpha x_i g_{\pi_{n_\alpha}}(\omega) = \lim_n x_i g_{\pi_n}(\omega) = g_{x_i}(\omega).$$

Võrdustes (3.9) järeldub, et iga $i \in \mathbb{N}$ korral on funktsioon $x_i g$ mõõtuv, kusjuures iga $f \in L_1(\mu)$ korral

$$(Tf)(x_i) = \int_\Omega f g_{x_i} \, d\mu = \int_\Omega f \, x_i g \, d\mu.$$

Jääb näidata, et iga $x \in X$ korral on funktsioon xg mõõtuv, kusjuures kehtib (3.7). Olgu $x \in X$. Kuna hulk C on kõikjal tihe ruumis X, siis leidub hulga C elementide jada (z_i) nii, et $z_i \underset{i}{\to} x$. Funktsiooni xg mõõtuvus järeldub nüüd sellest, et $z_i g \underset{i}{\to} xg$ (punktiviisi), sest mõõtuvate funktsioonide jada (punktiviisi) piirväärtus on mõõtuv. Nüüd mis tahes $f \in L_1(\mu)$ korral

$$(Tf)(x) = \lim_i (Tf)(z_i) = \lim_i \int_\Omega f \, z_i g \, d\mu = \int_\Omega f \, xg \, d\mu.$$

nagu soovitud. Viimase võrdusteahela viimane võrdus kehtib Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreemi põhjal, sest, esiteks, $f \, z_i g \underset{i}{\to} f \, xg$ punktiviisi ning, teiseks, kuna jada (z_i) koondub, siis leidub $M \geqslant 0$ nii, et iga $i \in \mathbb{N}$ korral $\|z_i\| \leqslant M$

ning seega iga $\omega \in \Omega$ korral

$$|f(\omega)\, z_i g(\omega)| = |f(\omega)|\, |z_i g(\omega)| \leqslant |f(\omega)|\, \|z_i\|\, \|g(\omega)\| \leqslant M\|T\|\, |f(\omega)|,$$

kusjuures $M\|T\|\, |f| \in L_1(\mu)$. ■

Nüüd me oleme valmis tõestama selle punkti põhiteoreemi.

Teoreem 3.9 (Dunford–Pettis; [DU, lk 79, teoreem 1]). *Separaablitel kaasruumidel on Radon–Nikodými omadus.*

Tõestus. Olgu kaasruum X^* separaabel. Olgu $T \in \mathcal{L}\big(L_1(\mu), X^*\big)$ ning olgu $g\colon \Omega \to X^*$ funktsioon lemmast 3.8. Selleks, et kaasruumil X^* oleks Radon–Nikodými omadus, piisab teoreemi 3.3 põhjal näidata, et $g \in L_\infty(\mu, X^*)$, kusjuures

$$Tf = \int_\Omega fg\, d\mu \quad \text{iga } f \in L_1(\mu) \text{ korral.} \tag{3.10}$$

Kõigepealt näitame, et funktsioon g on nõrgalt mõõtuv. Olgu $x^{**} \in X^{**}$. Lause 1.20 põhjal leidub ruumi X elementide jada (x_n) nii, et $x_n \xrightarrow[n]{w^*} x^{**}$, seega iga $\omega \in \Omega$ korral $x_n(g(\omega)) \underset{n}{\to} x^{**}(g(\omega))$, st $x_n g \underset{n}{\to} x^{**}g$ punktiviisi. Lemma 3.8 põhjal on funktsioonid $x_n g$, $n \in \mathbb{N}$, mõõtuvad, järelikult on ka funktsioon $x^{**}g$ mõõtuv (sest mõõtuvate funktsioonide jada punktiviisi piirväärtus on mõõtuv); seega g on nõrgalt mõõtuv. Kuna funktsioon g on separaabel-väärtuseline, siis vastavalt Pettise mõõtuvusteoreemile 2.2 on funktsioon g mõõtuv. Funktsiooni g tõkestatuse tõttu $g \in L_\infty(\mu, X^*)$ ning seega ka $g \in L_1(\mu, X^*)$.

Võrduse (3.7) ja teoreemi 2.6 põhjal iga $f \in L_1(\mu)$ ja iga $x \in X$ korral

$$(Tf)(x) = \int_\Omega f\, xg\, d\mu = x\Big(\int_\Omega fg\, d\mu\Big),$$

järelikult kehtib (3.10). ■

4 Tinglik ootus

Kõikjal selles paragrahvis on X Banachi ruum ja (Ω, Σ, μ) täieliku lõpliku mõõduga ruum.

Definitsioon 4.1. Öeldakse, et σ-algebra $\mathfrak{B}$ on σ-algebra Σ *alam-σ-algebra*, kui $\mathfrak{B} \subset \Sigma$.

Kui $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu, X)$ ja $\mathfrak{B}$ on Σ alam-σ-algebra, siis funktsiooni f nimetatakse $\mathfrak{B}$-*mõõtuvaks*, kui $f \in L_1(\Omega, \mathfrak{B}, \mu|_{\mathfrak{B}}, X)$.

Järgnev lause aitab selgitada $\mathfrak{B}$-mõõtuva funktsiooni mõistet.

Lause 4.1. *Olgu $\mathfrak{B}$ σ-algebra Σ alam-σ-algebra. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $f \in L_1(\mu, X)$, *kusjuures f on $\mu|_{\mathfrak{B}}$-mõõtuv;*

(ii) $f \in L_1(\Omega, \mathfrak{B}, \mu|_{\mathfrak{B}}, X) =: L_1(\mu|_{\mathfrak{B}}, X)$.

Seejuures

$$\int_E f\, d\mu|_{\mathfrak{B}} = \int_E f\, d\mu \quad \textit{iga } E \in \mathfrak{B} \textit{ korral.} \tag{4.1}$$

Märkus 4.1. Järgnevas tõestuses kasutame korduvalt lihtsastikontrollitavat ja hästituntud fakti, et lause 4.1 kehtib, kui $X = \mathbb{K}$.

Lause 4.1 tõestus. (i)$\Rightarrow$(ii). Eeldame, et funktsioon $f \in L_1(\mu, X)$ on $\mu|_{\mathfrak{B}}$-mõõtuv. Lause 2.1 põhjal siis ka funktsioon $\|f\|$ on $\mu|_{\mathfrak{B}}$-mõõtuv; kuna teoreemi 2.4 põhjal $\|f\| \in L_1(\mu)$, siis lause 4.1 kehtivuse tõttu eeldusel $X = \mathbb{R}$ ka $\|f\| \in L_1(\mu|_{\mathfrak{B}})$, seega (jälle teoreemi 2.4 põhjal) $f \in L_1(\Omega, \mathfrak{B}, \mu|_{\mathfrak{B}}, X)$.

Esitame implikatsioonile (ii)$\Rightarrow$(i) ja valemile (4.1) kaks erinevat tõestust. Neist esimene kasutab Bochneri integraali definitsiooni, teine – teoreemi 2.4, teoreemi piisavast arvust funktsionaalidest ja teoreemi 2.6 (juhul, kus $Y = \mathbb{K}$). Mõlemad tõestused kasutavad lause 4.1 kehtivust eeldusel, et $X = \mathbb{K}$.

IMPLIKATSIOONI (ii)$\Rightarrow$(i) JA VALEMI (4.1) ESIMENE TÕESTUS. Kõigepealt vaatleme juhtu, kus $f \in L_1(\mu|_{\mathfrak{B}}, X)$ on lihtfunktsioon kanoonilise esitusega $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{E_i} x_i$; siis f on $\mathfrak{B}$-mõõtuv ning ilmselt ka $f \in L_1(\mu, X)$, kusjuures iga $E \in \mathfrak{B}$ korral

$$\int_E f\, d\mu|_{\mathfrak{B}} = \sum_{i=1}^{n} \mu|_{\mathfrak{B}}(E_i \cap E)\, x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap E)\, x_i = \int_E f\, d\mu.$$

Olgu nüüd $f \in L_1(\mu|_{\mathfrak{B}}, X)$ suvaline. Vastavalt definitsioonile 2.7 on funktsioon f $\mu|_{\mathfrak{B}}$-mõõtuv (niisiis ühtlasi ka μ-mõõtuv), seega leidub $\mathfrak{B}$-mõõtuvate (ning ühtlasi ka Σ-mõõtuvate) lihtfunktsioonide jada (f_n) nii, et

$$0 = \lim_n \int_\Omega \|f_n - f\| \, d\mu|_{\mathfrak{B}} = \lim_n \int_\Omega \|f_n - f\| \, d\mu$$

(siin viimane võrdus järeldub lause 4.1 kehtivusest juhul, kui $X = \mathbb{R}$). Definitsiooni 2.7 põhjal $f \in L_1(\mu, X)$; seejuures valemi (4.1) kehtivuse tõttu $\mathfrak{B}$-mõõtuvate lihtfunktsioonide jaoks

$$\int_E f \, d\mu|_{\mathfrak{B}} = \lim_n \int_E f_n \, d\mu|_{\mathfrak{B}} = \lim_n \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

IMPLIKATSIOONI (ii)$\Rightarrow$(i) JA VALEMI (4.1) TEINE TÕESTUS. Eeldame, et $f \in L_1(\mu|_{\mathfrak{B}}, X)$. Siis f on $\mu|_{\mathfrak{B}}$-mõõtuv (ning ühtlasi ka μ-mõõtuv). Lause 2.1 põhjal ka funktsioon $\|f\|$ on $\mu|_{\mathfrak{B}}$-mõõtuv, kusjuures teoreemi 2.4 põhjal $\|f\| \in L_1(\mu|_{\mathfrak{B}})$. Lause 4.1 kehtivusest juhul, kui $X = \mathbb{R}$, järeldub nüüd, et $\|f\| \in L_1(\mu)$, seega (jälle teoreemi 2.4 põhjal) $f \in L_1(\mu, X)$.

Olgu $E \in \mathfrak{B}$ ning olgu $x^* \in X^*$. Valemi (4.1) tõestuseks piisab teoreemi põhjal piisavast arvust funktsionaalidest näidata, et $x^*\Big(\int_E f \, d\mu|_{\mathfrak{B}}\Big) = x^*\Big(\int_E f \, d\mu\Big)$. Teoreemist 2.6 (kus $Y = \mathbb{K}$) ning valemi (4.1) kehtivusest juhul, kui $X = \mathbb{K}$, järeldub, et

$$x^*\left(\int_E f \, d\mu|_{\mathfrak{B}}\right) = \int_E x^* f \, d\mu|_{\mathfrak{B}} = \int_E x^* f \, d\mu = x^*\left(\int_E f \, d\mu\right).$$

$\blacksquare$

Definitsioon 4.2. Olgu $\mathfrak{B}$ σ-algebra Σ alam-σ-algebra ja $f \in L_1(\mu, X)$. Öeldakse, et funktsioon $g \in L_1(\mu, X)$ on funktsiooni f *tinglik ootus* (alam-σ-algebra $\mathfrak{B}$ suhtes), kui g on $\mathfrak{B}$-mõõtuv ja

$$\int_E g \, d\mu = \int_E f \, d\mu \quad \text{iga } E \in \mathfrak{B} \text{ korral.}$$

Sel juhul funktsiooni g tähistatakse sümboliga $E(f|\mathfrak{B})$.

Tinglik ootus $E(f|\mathfrak{B})$ on üheselt määratud (eeldusel, et ta eksisteerib). Tõepoolest, olgu $g, h \in L_1(\mu, X)$ funktsiooni $f \in L_1(\mu, X)$ tinglikud ootused (alam-

σ-algebra $\mathfrak{B}$ suhtes); siis $g, h \in L_1(\mu|_{\mathfrak{B}}, X)$, kusjuures iga $E \in \mathfrak{B}$ korral

$$\int_E g\,d\mu = \int_E f\,d\mu = \int_E h\,d\mu.$$

Lause 2.8 põhjal $g = h$ $\mu|_{\mathfrak{B}}$-peaaegu kõikjal.

Näitame, et iga funktsiooni $f \in L_1(\mu, X)$ korral leidub tinglik ootus $E(f|\mathfrak{B})$. Selleks kasutame järgnevat lemmat, mis kirjeldab tinglikku ootust $E(f|\mathfrak{B})$ juhul, kui $f \in L_1(\mu)$.

Lemma 4.2. *Olgu $\mathfrak{B}$ σ-algebra Σ alam-σ-algebra ning olgu $f \in L_1(\mu)$. Siis*

(a) *eksisteerib tinglik ootus $E(f|\mathfrak{B})$;*

(b) *kui f on $\mathfrak{B}$-mõõtuv, siis $E(f|\mathfrak{B}) = f$;*

(c) *mis tahes $g \in L_1(\mu)$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$ korral*

$$E(\alpha f + g|\mathfrak{B}) = \alpha E(f|\mathfrak{B}) + E(g|\mathfrak{B});$$

(d) *kui $L_1(\mu)$ on reaalne ruum ning $f \geqslant 0$, siis $E(f|\mathfrak{B}) \geqslant 0$ ($\mu|_{\mathfrak{B}}$-peaaegu kõikjal);*

(e) *kui $L_1(\mu)$ on reaalne ruum ning $g \in L_1(\mu)$ ning $f \leqslant g$, siis $E(f|\mathfrak{B}) \leqslant E(g|\mathfrak{B})$ ($\mu|_{\mathfrak{B}}$-peaaegu kõikjal);*

(f) *$|E(f|\mathfrak{B})| \leqslant \big(|f|\big|\mathfrak{B}\big)$;*

(g) (Jenseni võrratus) *kui $L_1(\mu)$ on reaalne ruum ning $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kumer funktsioon, mille korral $\phi \circ f \in L_1(\mu)$, siis*

$$\phi \circ E(f|\mathfrak{B}) \leqslant E(\phi \circ f|\mathfrak{B}); \tag{4.2}$$

(h) *kui $f \in L_p(\mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, siis*

$$\|E(f|\mathfrak{B})\|_p \leqslant \|f\|_p;$$

muuhulgas, $E(\cdot\,|\mathfrak{B})$ on pidev lineaarne projektor ruumis $L_p(\mu)$.

Tõestus. (a). Defineerime arvmõõdu $\lambda\colon\ \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ võrdusega

$$\lambda(A) = \int_A f\,d\mu, \quad A \in \mathfrak{B}.$$

Sellisel viisil defineeritud arvmõõt λ on $\mu|_{\mathfrak{B}}$-pidev (see järeldub teoreemist 1.1, sest kui hulk $A \in \mathfrak{B}$ on selline, et $\mu|_{\mathfrak{B}}(A) = 0$, siis ka $\mu(A) = 0$ ning seega $\lambda(A) = \int_A f\,d\mu = 0$). Radon–Nikodými teoreemi põhjal leidub funktsioon $g \in L_1(\mu|_{\mathfrak{B}})$ nii, et

$$\lambda(A) = \int_A g\,d\mu \quad \text{iga } A \in \mathfrak{B} \text{ korral,}$$

aga nüüd iga $A \in \mathfrak{B}$ korral $\int_A g\,d\mu = \int_A f\,d\mu$, st $g = E(f|\mathfrak{B})$.

(b) järeldub vahetult tingliku ootuse definitsioonist.

(c). Olgu $g \in L_1(\mu)$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$; siis ka $\alpha f + g \in L_1(\mu)$ ning iga $E \in \mathfrak{B}$ korral

$$\begin{aligned}\int_E (\alpha f + g)\,d\mu &= \alpha \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu = \alpha \int_E E(f|\mathfrak{B})\,d\mu + \int_E E(g|\mathfrak{B})\,d\mu \\ &= \int_E \Big(\alpha E(f|\mathfrak{B}) + E(g|\mathfrak{B})\Big)\,d\mu.\end{aligned}$$

Seega $E(\alpha f + g|\mathfrak{B}) = \alpha E(f|\mathfrak{B}) + E(g|\mathfrak{B})$.

(d). Olgu $L_1(\mu)$ reaalne ruum ning olgu $f \geqslant 0$. Siis iga $E \in \mathfrak{B}$ korral

$$\int_E E(f|\mathfrak{B})\,d\mu|_{\mathfrak{B}} = \int_E E(f|\mathfrak{B})\,d\mu = \int_E f\,d\mu \geqslant 0,$$

järelikult lause 1.3, (a), põhjal $E(f|\mathfrak{B}) \geqslant 0$ $\mu|_{\mathfrak{B}}$-peaaegu kõikjal.

(e) järeldub vahetult väidetest (d) ja (c).

(f). Iga $E \in \mathfrak{B}$ korral

$$\left|\int_E E(f|\mathfrak{B})\,d\mu\right| = \left|\int_E f\,d\mu\right| \leqslant \int_E |f|\,d\mu = \int_E E\big(|f|\big|\mathfrak{B}\big)\,d\mu,$$

seega soovitud võrdus järeldub lausest 1.3, (c).

(g). Olgu $L_1(\mu)$ reaalne ruum ning olgu $\phi\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kumer funktsioon, mille korral $\phi \circ f \in L_1(\mu)$. Kui $t \longmapsto at + b$ on funktsiooni ϕ graafiku tugisirge (st $at + b \leqslant \phi(t)$ iga $t \in \mathbb{R}$ korral ja $at_0 + b = \phi(t_0)$ mingi $t_0 \in \mathbb{R}$ korral), siis väidete (c) ja (e) põhjal (arvestades, et (b) põhjal $E(b|\mathfrak{B}) = b$)

$$aE(f|\mathfrak{B}) + b = E(af|\mathfrak{B}) + E(b|\mathfrak{B}) = E(af + b|\mathfrak{B}) \leqslant E(\phi \circ f|\mathfrak{B}).$$

Fikseerime vabalt $\omega \in \Omega$ ja tähistame $t_0 := E(f|\mathfrak{B})(\omega)$. Siis leiduvad $a, b \in \mathbb{R}$ nii, et $\phi(t_0) = at_0 + b$ ja $at + b \leqslant \phi(t)$ iga $t \in \mathbb{R}$ korral ning järelikult

$$\Big(\phi \circ E(f|\mathfrak{B})\Big)(\omega) = \phi(t_0) = at_0 + b = aE(f|\mathfrak{B})(\omega) + b \leqslant E(\phi \circ f|\mathfrak{B})(\omega),$$

seega kehtib võrratus (4.2).

(h). Olgu $f \in L_p(\mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Paneme tähele, et funktsioon $\phi(t) = |t|^p$, $t \in \mathbb{R}$, on kumer ning seega väite (f) ja Jenseni võrratuse põhjal

$$\big|E(f|\mathfrak{B})\big|^p \leqslant E\big(|f|\big|\mathfrak{B}\big)^p = \Big|E\big(|f|\big|\mathfrak{B}\big)\Big|^p \leqslant E\big(|f|^p\big|\mathfrak{B}\big).$$

Kuna $\Omega \in \mathfrak{B}$, siis

$$\int_\Omega \big|E(f|\mathfrak{B})\big|^p \, d\mu \leqslant \int_\Omega E\big(|f|^p\big|\mathfrak{B}\big) \, d\mu = \int_\Omega |f|^p \, d\mu$$

ning järelikult $\|E(f|\mathfrak{B})\|_p \leqslant \|f\|_p$. Seega $E(f|\mathfrak{B}) \in L_p(\mu)$.

Väite (c) põhjal on operaator $E(\cdot\,|\mathfrak{B})\colon\ L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ lineaarne. Paneme tähele, et iga $f \in L_p(\mu)$ korral $E\big(E(f|\mathfrak{B})\big|\mathfrak{B}\big) = E(f|\mathfrak{B})$, järelikult operaator $E(\cdot\,|\mathfrak{B})$ on pidev lineaarne projektor ruumis $L_p(\mu)$. ∎

Teoreem 4.3. *Olgu $\mathfrak{B}$ σ-algebra Σ alam-σ-algebra. Igal funktsioonil $f \in L_1(\mu, X)$ leidub tinglik ootus $E(f|\mathfrak{B})$. Kui $f \in L_p(\mu, X)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, siis*

$$\|E(f|\mathfrak{B})\|_p \leqslant \|f\|_p.$$

Muuhulgas, $E(\cdot\,|\mathfrak{B})$ on (pidev lineaarne) projektor ruumis $L_p(\mu, X)$.

Tõestus. Olgu $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{E_i} x_i$ lihtfunktsiooni $f \in L_p(\mu, X)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ kanooniline esitus. Paneme tähele, et

$$E(f|\mathfrak{B}) = \sum_{i=1}^{n} E(\chi_{E_i}|\mathfrak{B}) x_i,$$

kus $E(\chi_{E_i}|\mathfrak{B})$ on funktsiooni $\chi_{E_i} \in L_p(\mu)$ tinglik ootus, mille olemasolu on tõestatud lemmas 4.2. Tõepoolest, funktsioon $\sum\limits_{i=1}^{n} E(\chi_{E_i}|\mathfrak{B})x_i$ on $\mathfrak{B}$-mõõtuv, kusjuures iga $E \in \mathfrak{B}$ korral

$$\begin{aligned}\int_E \left(\sum_{i=1}^{n} E(\chi_{E_i}|\mathfrak{B})x_i\right) d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \int_E E(\chi_{E_i}|\mathfrak{B})x_i \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_E E(\chi_{E_i}|\mathfrak{B}) \, d\mu\right) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_E \chi_{E_i} \, d\mu\right) x_i = \int_E \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i} x_i\right) d\mu = \int_E f \, d\mu.\end{aligned}$$

Vaatleme operaatorit

$$T_0 \colon \mathcal{B}_0^p(\Sigma, X) \ni f \longmapsto E(f|\mathfrak{B}) \in L_p(\mu|_{\mathfrak{B}}, X),$$

kus $\mathcal{B}_0^p(\Sigma, X)$ on ruumi $L_p(\mu, X)$ (Σ-mõõtuvate) lihtfunktsioonide (kõikjal tihe) alamruum. Operaator T_0 on lineaarne. Tõepoolest, kui $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{E_i} x_i$ ja $g = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{E_i} y_i$ on lihtfunktsioonide f ja g kanoonilised esitused ning $\alpha \in \mathbb{R}$, siis funktsiooni $\alpha f + g$ kanooniline esitus on $\alpha f + g = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(\alpha x_i + y_i)$, järelikult

$$\begin{aligned}T_0(\alpha f + g) = E(\alpha f + g|\mathfrak{B}) &= \sum_{i=1}^{n} E(\chi_{E_i}|\mathfrak{B})(\alpha x_i + y_i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} E(\chi_{E_i}|\mathfrak{B})x_i + \sum_{i=1}^{n} E(\chi_{E_i}|\mathfrak{B})y_i \\ &= \alpha E(f|\mathfrak{B}) + E(g|\mathfrak{B}) = \alpha T_0 f + T_0 g.\end{aligned}$$

Lemma 4.2 põhjal

$$\begin{aligned}
\|E(f|\mathfrak{B})\|_p &= \left(\int_\Omega \|E(f|\mathfrak{B})\|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega \left\|\sum_{i=1}^n E(\chi_{E_i}|\mathfrak{B})x_i\right\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \big|E(\chi_{E_i}|\mathfrak{B})\big|\|x_i\|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n E(\chi_{E_i}|\mathfrak{B})\|x_i\|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega E\left(\sum_{i=1}^n \chi_{E_i}\|x_i\| \Big| \mathfrak{B}\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|E\left(\sum_{i=1}^n \chi_{E_i}\|x_i\| \Big| \mathfrak{B}\right)\right\|_p \\
&\leqslant \left\|\sum_{i=1}^n \chi_{E_i}\|x_i\|\right\|_p = \big\|\|f\|\big\|_p = \left(\int_\Omega \|f\|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p.
\end{aligned}$$

Kuna lihtfunktsioonide alamruum on kõikjal tihe ruumis $L_p(\mu, X)$, siis leidub operaatoril T_0 (üheselt määratud) pidev lineaarne jätk $T\colon L_p(\mu, X) \to L_p(\mu|_{\mathfrak{B}}, X)$. Näitame, et operaatori T_0 jätk T on tinglik ootus. Olgu $f \in L_p(\mu, X)$. Näitame, et $Tf = E(f|\mathfrak{B})$, st iga $E \in \mathfrak{B}$ korral $\int_E Tf \, d\mu = \int_E f \, d\mu$. Kui $f_n \in \mathcal{B}_0^p(\Sigma, X)$, $n \in \mathbb{N}$, on sellised, et $f_n \underset{n}{\to} f$ ruumis $L_p(\mu, X)$, siis $Tf_n \underset{n}{\to} Tf$ ruumis $L_p(\mu|_{\mathfrak{B}}, X)$, seega iga $E \in \mathfrak{B}$ korral

$$\begin{aligned}
\left\|\int_E Tf_n \, d\mu - \int_E Tf \, d\mu\right\| &\leqslant \int_E \|Tf_n - Tf\| \, d\mu \leqslant \int_E \|T\|\|f_n - f\| \, d\mu \\
&= \|T\| \int_\Omega \|f_n - f\| \, d\mu = \|T\|\|f_n - f\|_1 \\
&\leqslant \|T\|\mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}} \|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

(viimane võrratus järeldub teoreemist 1.9), järelikult $\int_E Tf_n \, d\mu \underset{n}{\to} \int_E Tf \, d\mu$; samuti $\int_E f_n \, d\mu \underset{n}{\to} \int_E f \, d\mu$. Seega iga $E \in \mathfrak{B}$ korral

$$\int_E Tf \, d\mu = \lim_n \int_E Tf_n \, d\mu = \lim_n \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu;$$

niisiis $T = E(\cdot\,|\mathfrak{B})$. Tõlgendades operaatorit $E(\cdot\,|\mathfrak{B})$ operaatorina $L_p(\mu, X) \to L_p(\mu, X)$, on $E(\cdot\,|\mathfrak{B})$ ilmselt projektor. ■

Järgnevat lauset, mis üldistab lemma 4.2 väidet (c), vajame me järgmises paragrahvis martingaalide koonduvuse põhiteoreemi 5.4 tõestamisel.

Lause 4.4. *Olgu* $f \in L_1(\mu, X)$ *ning olgu* $\mathfrak{B}$ σ*-algebra* Σ *alam-*σ*-algebra. Siis*

$$\|E(f|\mathfrak{B})\| \leqslant E\big(\|f\|\big|\mathfrak{B}\big) \quad \mu|_{\mathfrak{B}}\text{-peaaegu kõikjal.} \tag{4.3}$$

Tõestus. Defineerime vektormõõdu $F\colon\ \mathfrak{B} \to X$ ja mõõdu $\nu\colon\ \mathfrak{B} \to [0, \infty)$ vastavalt võrdustega

$$F(E) = \int_E E(f|\mathfrak{B})\, d\mu \quad \text{ja} \quad \nu(E) = \int_E E\big(\|f\|\big|\mathfrak{B}\big)\, d\mu, \qquad E \in \mathfrak{B},$$

st F ja ν on määramata integraalid vastavalt funktsioonidest $E(f|\mathfrak{B})$ ja $E(\|f\|\big|\mathfrak{B})$. Olgu $E \in \mathfrak{B}$ suvaline. Siis hulga E mis tahes $\mathfrak{B}$-mõõtuva tükelduse π korral

$$\begin{aligned}\sum_{A\in\pi} \|F(A)\| &= \sum_{A\in\pi}\left\|\int_A E(f|\mathfrak{B})\, d\mu\right\| = \sum_{A\in\pi}\left\|\int_A f\, d\mu\right\| \\ &\leqslant \sum_{A\in\pi}\int_A \|f\|\, d\mu = \sum_{A\in\pi}\int_A E\big(\|f\|\big|\mathfrak{B}\big)\, d\mu = \sum_{A\in\pi}\nu(A) = \nu(E),\end{aligned}$$

seega $|F|(E) \leqslant \nu(E)$ ehk, teoreemi 2.7, (c), põhjal

$$\int_E \|E(f|\mathfrak{B})\|\, d\mu \leqslant \int_E E\big(\|f\|\big|\mathfrak{B}\big)\, d\mu.$$

Võrratus (4.3) järeldub nüüd lausest 1.3, (b). ∎

5 Martingaalid. Koonduvusteoreemid

Selles paragrahvis defineerime martingaali ja tõestame martingaali koonduvusega samaväärsed tingimused.

Kõikjal selles paragrahvis X on Banachi ruum ja (Ω, Σ, μ) täieliku lõpliku mõõduga ruum.

Definitsioon 5.1. Olgu T suunatud hulk ning olgu $(\mathfrak{B}_\tau)_{\tau \in T}$ σ-algebra Σ alam-σ-algebrate mittekahanev pere, st $\mathfrak{B}_{\tau_1} \subset \mathfrak{B}_{\tau_2}$, kui $\tau_1 \leqslant \tau_2, \tau_1, \tau_2 \in T$. Öeldakse, et ruumi $L_p(\mu, X)$, $1 \leqslant p < \infty$, elementide pere $(f_\tau)_{\tau \in T}$ on *martingaal*, kui

$$E(f_\tau | \mathfrak{B}_{\tau_1}) = f_{\tau_1} \quad \text{iga } \tau \geqslant \tau_1 \text{ korral.}$$

Ülaldefineeritud martingaali tähistame sümboliga $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau \in T}$. Kui suunatud hulgaks T on naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$, siis tähistame martingaali sümboliga $(f_n, \mathfrak{B}_n)$.

Toome mõned näited martingaalide kohta.

Näide 5.1 **([DU, lk 123, näide 6]).** Olgu $(\mathfrak{B}_\tau)_{\tau \in T}$ σ-algebra Σ alam-σ-algebrate mittekahanev pere ja $f \in L_p(\mu, X)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Siis $\Big(E(f|\mathfrak{B}_\tau), \mathfrak{B}_\tau\Big)_{\tau \in T}$ on martingaal.

Näide 5.2 **([DU, lk 124, näide 7]).** *Lõpmatu puu* J ruumis X on jada (x_n) ruumis X omadusega

$$x_n = \frac{x_{2n} + x_{2n+1}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vaatleme puud $J = (x_n)$ kui martingaali ruumis $L_1\big([0,1), X\big)$; selleks olgu μ Lebesgue'i mõõt ja

$$f_1 = x_1 \chi_{[0,1)}, \quad f_2 = x_2 \chi_{[0,\frac{1}{2})} + x_3 \chi_{[\frac{1}{2},1)} \quad \text{jne,}$$

st, üldiselt,

$$f_k = \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k - 1} x_i \chi_{I_{k,i}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

kus

$$I_{k,i} = \Big[\frac{i - 2^{k-1}}{2^{k-1}}, \frac{i - 2^{k-1} + 1}{2^{k-1}}\Big), \quad i = 2^{k-1}, 2^{k-1} + 1, \ldots, 2^k - 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Kuna $x_1 = \dfrac{x_2 + x_3}{2}$, siis

$$\int_{[0,1)} f_1 \, d\mu = \int_{[0,1)} f_2 \, d\mu.$$

Analoogiliselt saame, et iga $k \in \mathbb{N}$ ja iga $i = 2^{k-1}, 2^{k-1}+1, \ldots, 2^k - 1$ korral

$$\int_{I_{k,i}} f_{k+1} \, d\mu = \int_{I_{k,i}} f_k \, d\mu.$$

Kui $\mathfrak{B}_1 := \{\emptyset, [0,1)\}$ ja iga $k \in \mathbb{N}$ korral on

$$\mathfrak{B}_k := \sigma\Big(\big\{I_{k,i} \colon \ i = 2^{k-1}, 2^{k-1}+1, \ldots, 2^k - 1\big\}\Big)$$

(kogumi $\big\{I_{k,i} \colon \ i = 2^{k-1}, 2^{k-1}+1, \ldots, 2^k - 1\big\}$ poolt genereeritud σ-algebra), siis $(f_k, \mathfrak{B}_k)$ on martingaal ruumis $L_1\big([0,1), X\big)$.

Vaatleme nüüd puud ruumis $L_1[0,1)$. Olgu

$$x_1 = \chi_{[0,1)}, \quad x_2 = 2\chi_{[0,\frac{1}{2})}, \quad x_3 = 2\chi_{[\frac{1}{2}1)} \quad \text{jne,}$$

st, üldiselt,

$$x_i = 2^{k-1}\chi_{I_{k,i}}, \quad \text{kus } i = 2^{k-1}, 2^{k-1}+1, \ldots, 2^k - 1,\ k \in \mathbb{N},$$

ja poollõigud $I_{k,i}$ on nagu ülal kirjeldatud. Paneme tähele, et

$$\|x_1 - x_2\| = \int_{[0,1)} \Big|\chi_{[0,1)} - 2\chi_{[0,\frac{1}{2})}\Big| \, d\mu = \int_{[0,1)} 1 \, d\mu = 1.$$

Analoogiliselt saame, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\|x_n - x_{2n}\| = \|x_n - x_{2n+1}\| = 1.$$

Moodustame martingaali $(f_n, \mathfrak{B}_n)$ ruumis $L_1\big([0,1), L_1[0,1)\big)$ samal põhimõttel nagu näite esimeses osas. Kuna $\|x_k\| = 1$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral, siis $\|f_n(t)\|_{L_1} = 1$ iga $t \in [0,1)$ korral, seejuures $\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\|_{L_1} = 1$ iga $t \in [0,1)$ korral (sest kui $t \in I_{n,i}$, siis $f_n(t) = x_i$ ja $f_{n+1}(t) = x_{2i}$ või $f_{n+1}(t) = x_{2i+1}$). Järelikult on funktsioonid $f_n, n \in \mathbb{N}$, ühtlaselt tõkestatud ruumis $L_1\big([0,1), L_1[0,1)\big)$ ja

$\|f_n - f_{n+1}\|_{L_1} = 1$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Seega martingaal $(f_n, \mathfrak{B}_n)$ ei koondu ruumis $L_1\big([0,1), L_1[0,1)\big)$.

Lause 5.1. *Olgu $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ martingaal ruumis $L_p(\mu, X)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Siis iga $E \in \bigcup\limits_\tau \mathfrak{B}_\tau$ korral eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_\tau \displaystyle\int_E f_\tau\, d\mu$. Täpsemalt, kui $\tau_0 \in T$ on selline, et $E \in \mathfrak{B}_{\tau_0}$, siis*

$$\int_E f_\tau\, d\mu = \int_E f_{\tau_0}\, d\mu \qquad \text{iga } \tau \geqslant \tau_0 \text{ korral.}$$

Tõestus. Olgu $E \in \bigcup\limits_\tau \mathfrak{B}_\tau$ ning olgu $\tau_0 \in T$ selline, et $E \in \mathfrak{B}_{\tau_0}$. Kuna $(\mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ on σ-algebra Σ alam-σ-algebrate mittekahanev pere, siis iga $\tau \geqslant \tau_0$ korral $E \in \mathfrak{B}_\tau$ ning seega

$$\int_E f_\tau\, d\mu = \int_E E(f_\tau|\mathfrak{B}_{\tau_0})\, d\mu = \int_E f_{\tau_0}\, d\mu.$$

■

Teoreem 5.2. *Olgu $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ martingaal ruumis $L_p(\mu, X)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ koondub ruumis $L_p(\mu, X)$;*

(ii) *leidub funktsioon $f \in L_p(\mu, X)$ nii, et*

$$\lim_\tau \int_E f_\tau\, d\mu = \int_E f\, d\mu \qquad \text{iga } E \in \bigcup_\tau \mathfrak{B}_\tau \text{ korral;} \tag{5.1}$$

(iii) *leidub funktsioon $f \in L_p(\mu, X)$ nii, et*

$$E(f|\mathfrak{B}_\tau) = f_\tau \qquad \text{iga } \tau \in T \text{ korral.} \tag{5.2}$$

Implikatsiooni (iii)⇒(i) tõestus kasutab järgnevat lemmat.

Lemma 5.3. *Olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ algebra, kusjuures $\Sigma = \sigma(\mathfrak{A})$, ning olgu $1 \leqslant p < \infty$. Siis iga $f \in L_p(\mu, X)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub lihtfunktsioon $f_\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^n \chi_{E_i} x_i$, kus $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$ ja $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{A}$, nii, et $\|f_\varepsilon - f\|_p < \varepsilon$.*

Tõestus. Olgu $f \in L_p(\mu, X)$ ja $\varepsilon > 0$. Kuna lihtfunktsioonide alamruum on kõikjal tihe ruumis $L_p(\mu, X)$, siis leidub lihtfunktsioon $g = \sum\limits_{i=1}^n \chi_{D_i} x_i$, kus $n \in \mathbb{N}$,

$x_1, \ldots, x_n \in X$ ja $D_1, \ldots, D_n \in \Sigma$, nii, et $\|g - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Üldisust kitsendamata võime me eeldada, et $x_1, \ldots, x_n \neq 0$. Lemma 1.6 põhjal leiduvad hulgad $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{A}$ nii, et iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $\mu(E_i \triangle D_i) < \left(\frac{\varepsilon}{2n\|x_i\|}\right)^p$. Tähistades $f_\varepsilon := \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{E_i} x_i$, saame

$$\begin{aligned}
\|f_\varepsilon - g\|_p &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i} x_i - \sum_{i=1}^{n} \chi_{D_i} x_i \right\|_p = \left\| \sum_{i=1}^{n} (\chi_{E_i} - \chi_{D_i}) x_i \right\|_p \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \big\| (\chi_{E_i} - \chi_{D_i})\, x_i \big\|_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega \big\| (\chi_{E_i} - \chi_{D_i})\, x_i \big\|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega |\chi_{E_i} - \chi_{D_i}|^p \, \|x_i\|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega |\chi_{E_i \triangle D_i}|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \|x_i\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega \chi_{E_i \triangle D_i} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \|x_i\| = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \triangle D_i)^{\frac{1}{p}} \|x_i\| \\
&< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2n\|x_i\|} \|x_i\| = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

ning seega

$$\|f_\varepsilon - f\|_p \leqslant \|f_\varepsilon - g\|_p + \|g - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Teoreemi 5.2 tõestus. (i)⇒(ii). Eeldame, et $f_\tau \underset{\tau}{\to} f$ ruumis $L_p(\mu, X)$, st $\lim\limits_{\tau} \|f_\tau - f\|_p = 0$. Siis mis tahes $E \in \Sigma$ korral teoreemi 1.9 põhjal

$$\begin{aligned}
\left\| \int_E f_\tau \, d\mu - \int_E f \, d\mu \right\| &\leqslant \int_E \|f_\tau - f\| \, d\mu \leqslant \int_\Omega \|f_\tau - f\| \, d\mu = \|f_\tau - f\|_1 \\
&\leqslant \mu(\Omega)^{\frac{p-1}{p}} \|f_\tau - f\|_p \xrightarrow[\tau \in T]{} 0,
\end{aligned}$$

seega $\lim\limits_{\tau} \int_E f_\tau \, d\mu = \int_E f \, d\mu$.

(ii)⇒(iii). Rahuldagu funktsioon $f \in L_p(\mu, X)$ tingimust (5.1) ning olgu $\tau_0 \in T$. Mis tahes $E \in \mathfrak{B}_{\tau_0}$ korral lause 5.1 põhjal

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{\tau} \int_E f_\tau \, d\mu = \int_E f_{\tau_0} \, d\mu,$$

seega $E(f | \mathfrak{B}_{\tau_0}) = f_{\tau_0}$; niisiis (5.2) kehtib.

(iii)$\Rightarrow$(i). Rahuldagu funktsioon $f \in L_p(\mu, X)$ tingimust (5.2). Tähistame $\mathfrak{B}_\infty := \sigma\Big(\bigcup\limits_\tau \mathfrak{B}_\tau\Big)$ (kogumi $\bigcup\limits_\tau \mathfrak{B}_\tau$ poolt genereeritud σ-algebra) ja $f_\infty := E(f|\mathfrak{B}_\infty)$. Näitame, et $\lim\limits_\tau \|f_\tau - f_\infty\|_p = 0$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\mathfrak{B}_\infty = \Sigma$.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna $\bigcup\limits_\tau \mathfrak{B}_\tau$ on algebra (sest $(\mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ on mittekahanev pere), kusjuures $\sigma\Big(\bigcup\limits_\tau \mathfrak{B}_\tau\Big) = \Sigma$, siis lemma 5.3 põhjal leidub lihtfunktsioon $f_\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{E_i} x_i$, kus $x_1, \dots, x_n \in X$ ja $E_1, \dots, E_n \in \bigcup\limits_\tau \mathfrak{B}_\tau$, nii, et $\|f_\varepsilon - f_\infty\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Kuna $(\mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ on mittekahanev pere, siis leidub indeks $\tau_0 \in T$ nii, et $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{B}_{\tau_0}$. Seega f_ε on $\mathfrak{B}_\tau$-mõõtuv iga $\tau \geqslant \tau_0$ korral ning

$$E(f_\varepsilon|\mathfrak{B}_\tau) = f_\varepsilon \quad \text{iga}\, \tau \geqslant \tau_0 \,\text{korral.}$$

Kui $\tau \geqslant \tau_0$, siis teoreemi 4.3 põhjal, arvestades, et $f_\varepsilon = E(f_\varepsilon|\mathfrak{B}_\tau)$ ja $f_\tau = E(f_\infty|\mathfrak{B}_\tau)$,

$$\begin{aligned}\|f_\tau - f_\infty\|_p &\leqslant \|f_\tau - f_\varepsilon\|_p + \|f_\varepsilon - f_\infty\|_p = \|E(f_\varepsilon - f_\infty|\mathfrak{B}_\tau)\|_p + \|f_\varepsilon - f_\infty\|_p \\ &\leqslant 2\|f_\varepsilon - f_\infty\|_p < 2\,\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Seega martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ koondub ruumis $L_p(\mu, X)$. ■

Definitsioon 5.2. Öeldakse, et martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ ruumis $L_1(\mu, X)$ on *ühtlaselt integreeruv*, kui

$$\int_E \|f_\tau\|\,d\mu \xrightarrow[E\in\mathfrak{B}_\tau,\ \mu(E)\to 0]{} 0 \quad \text{ühtlaselt } \tau \in T \text{ suhtes,}$$

st iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et

$$\tau \in T,\ E \in \mathfrak{B}_\tau,\ \mu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_E \|f_\tau\|\,d\mu < \varepsilon. \tag{5.3}$$

Näide 5.3. Martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ ruumis $L_1(\mu, X)$, mis on normi $\|\cdot\|_\infty$ järgi tõkestatud, st $M := \sup\limits_\tau \|f_\tau\|_\infty < \infty$, on ühtlaselt integreeruv. Tõepoolest, kui $\varepsilon > 0$ ning $E \in \bigcup\limits_\tau \mathfrak{B}_\tau$ on selline, et $\mu(E) < \frac{\varepsilon}{M}$, siis iga $\tau \in T$, $E \in \mathfrak{B}_\tau$, korral $\int_E \|f_\tau\|\,d\mu \leqslant M\mu(E) < \varepsilon$.

Teoreem 5.4 (martingaalide koonduvuse põhiteoreem; [DU, lk 126, järeldus 4]). *Olgu ruumil X Radon–Nikodými omadus, olgu $1 \leqslant p < \infty$ ning olgu $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ martingaal ruumis $L_p(\mu, X)$. Siis martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ koondub ruumis $L_p(\mu, X)$*

parajasti siis, kui

(1) $p = 1$, $\sup_\tau \|f_\tau\|_1 < \infty$ *ja martingaal* $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ *on ühtlaselt integreeruv*

või

(2) $1 < p < \infty$ *ja* $\sup_\tau \|f_\tau\|_p < \infty$.

Tõestus. Tarvilikkus. Koondugu martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ ruumis $L_p(\mu, X)$. Siis teoreemi 5.2 põhjal leidub funktsioon $f \in L_p(\mu, X)$, mis rahuldab tingimust (5.2). Aga nüüd iga $\tau \in T$ korral teoreemi 4.3 põhjal

$$\|f_\tau\|_p = \|E(f|\mathfrak{B}_\tau)\|_p \leqslant \|f\|_p < \infty,$$

seega $\sup_\tau \|f_\tau\|_p < \infty$.

Eeldame nüüd, et $p = 1$, ja näitame, et martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ on ühtlaselt integreeruv ruumis $L_1(\mu, X)$. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Paneme tähele, et mis tahes $\tau \in T$ ja $E \in \mathfrak{B}_\tau$ korral lause 4.4 põhjal

$$\int_E \|f_\tau\|\, d\mu = \int_E \|E(f|\mathfrak{B}_\tau)\|\, d\mu \leqslant \int_E E\big(\|f\|\big|\mathfrak{B}_\tau\big)\, d\mu = \int_E \|f\|\, d\mu.$$

Kuna integreeruva funktsiooni $\|f\|$ määramata integraal $\Sigma \ni E \mapsto \int_E \|f\|\, d\mu \in \mathbb{R}$ on μ-pidev mõõt (see järeldub lihtsasti teoreemi 1.1 samaväärsusest (i)$\Leftrightarrow$(iii)), siis leidub $\delta > 0$ nii, et kui

$$E \in \Sigma,\ \mu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_E \|f\|\, d\mu < \varepsilon.$$

Aga nüüd kehtib ka implikatsioon (5.3), seega martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ on ühtlaselt integreeruv.

Piisavus. (1). Eeldame, et $\sup_\tau \|f_\tau\|_1 < \infty$ ja martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ (ruumis $L_1(\mu, X)$) on ühtlaselt integreeruv. Näitame, et martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau\in T}$ koondub ruumis $L_1(\mu, X)$. Selleks defineerime vektormõõdu $F\colon \bigcup_\tau \mathfrak{B}_\tau \to X$ (rõhutame, et $\bigcup_\tau \mathfrak{B}_\tau$ on algebra),

$$F(E) := \lim_\tau \int_E f_\tau\, d\mu, \quad E \in \bigcup_\tau \mathfrak{B}_\tau$$

(siin piirväärtus $\lim\limits_{\tau} \int_E f_\tau \, d\mu$ eksisteerib lause 5.1 põhjal). Paneme tähele, et vektormõõt F on tõkestatud variatsiooniga, μ-pidev ja loenduvalt aditiivne. Tõepoolest, kui $\pi \subset \bigcup\limits_{\tau} \mathfrak{B}_\tau$ on hulga Ω lõplik mõõtuv tükeldus, siis leidub indeks $\tau_0 \in T$ nii, et $\pi \subset \mathfrak{B}_{\tau_0}$, seega lause 5.1 põhjal

$$\begin{aligned}\sum_{E \in \pi} \|F(E)\| &= \sum_{E \in \pi} \left\| \lim_{\tau} \int_E f_\tau \, d\mu \right\| = \sum_{E \in \pi} \left\| \int_E f_{\tau_0} \, d\mu \right\| \\ &\leqslant \sum_{E \in \pi} \int_E \|f_\tau\| \, d\mu = \int_\Omega \|f_{\tau_0}\| \, d\mu \leqslant \sup_{\tau} \|f_\tau\|_1 < \infty;\end{aligned}$$

järelikult vektormõõt F on tõkestatud variatsiooniga. Veendume, et F on μ-pidev. Olgu $\varepsilon > 0$. Mis tahes $E \in \bigcup\limits_{\tau} \mathfrak{B}_\tau$ korral, valides $\tau_0 \in T$ nii, et $E \in B_{\tau_0}$, saame lause 5.1 põhjal, et

$$\|F(E)\| = \left\| \lim_{\tau} \int_E f_\tau \, d\mu \right\| = \left\| \int_E f_{\tau_0} \, d\mu \right\| \leqslant \int_E \|f_{\tau_0}\| \, d\mu. \tag{5.4}$$

Martingaali $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau \in T}$ ühtlase integreeruvuse tõttu leidub $\delta > 0$ nii, et kehtib implikatsioon (5.3). Seega, kui $\mu(E) < \delta$, siis (5.4) põhjal $\|F(E)\| < \delta$; niisiis, vektormõõt F on μ-pidev ning lause 1.13 põhjal ka loenduvalt aditiivne.

Teoreemi 1.14 põhjal leidub vektormõõdul F (üheselt määratud) μ-pidev tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne jätk $G\colon \Sigma_0 \to X$, kus Σ_0 on kogumi $\bigcup\limits_{\tau} \mathfrak{B}_\tau$ poolt genereeritud σ-algebra. Kuna ruumil X on Radon–Nikodými omadus, siis leidub funktsioon $f \in L_1(\mu|_{\Sigma_0}, X)$ nii, et $G(E) = \int_E f \, d\mu$ iga $E \in \Sigma_0$ korral. Nüüd iga $E \in \bigcup\limits_{\tau} \mathfrak{B}_\tau$ korral

$$\lim_{\tau} \int_E f_\tau \, d\mu = F(E) = G(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Teoreemi 5.2 põhjal martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau \in T}$ koondub ruumis $L_1(\mu, X)$.

(2). Olgu $1 < p < \infty$ ning olgu $M := \sup\limits_{\tau} \|f_\tau\|_p < \infty$. Näitame, et martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau \in T}$ on tõkestatud ruumis $L_1(\mu, X)$ ja ühtlaselt integreeruv.

Hölderi võrratuse põhjal

$$\|f_\tau\|_1 \leqslant \|f_\tau\|_p \, \|1\|_q = \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} \|f_\tau\|_p \leqslant M \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

(q on p kaaseksponent), seega $\sup\limits_{\tau} \|f_\tau\|_1 < \infty$.

Näitame, et martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau \in T}$ on ühtlaselt integreeruv. Olgu $\varepsilon > 0$. Paneme tähele, et Hölderi võrratuse põhjal mis tahes $\tau \in T$ ja $E \in \mathfrak{B}_\tau$ korral

$$\int_E \|f_\tau\| \, d\mu \leqslant \left(\int_E \|f_\tau\|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E 1^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f_\tau\|_p \, \mu(E)^{\frac{1}{q}} \leqslant M\mu(E)^{\frac{1}{q}}$$

(q on p kaaseksponent). Seega, kui $\mu(E) < \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^q$ ja $E \in \mathfrak{B}_\tau$, siis $\int_E \|f_\tau\| \, d\mu < \varepsilon$ ning järelikult martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau \in T}$ on ühtlaselt integreeruv.

"Piisavuse" tõestuse osa (1) põhjal leidub funktsioon $f \in L_1(\mu, X)$ nii, et $\lim\limits_{\tau} \|f_\tau - f\|_1 = 0$. Teoreemi 5.2 (implikatsiooni (i)$\Rightarrow$(ii) tõestuse) põhjal iga $E \in \bigcup\limits_{\tau} \mathfrak{B}_\tau$ korral

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{\tau} \int_E f_\tau \, d\mu = F(E).$$

Näitame, et $f \in L_p(\mu, X)$. Olgu (τ_n) selline indeksite jada, et $\lim\limits_{n} \|f_{\tau_n} - f\|_1 = 0$ ja $\lim\limits_{n} f_{\tau_n} = f$ μ-peaaegu kõikjal. Vastavalt Fatou lemmale

$$\int_\Omega \|f\|^p \, d\mu \leqslant \liminf_{n} \int_\Omega \|f_{\tau_n}\|^p \, d\mu \leqslant \sup_{\tau} \|f_\tau\|_p^p < \infty.$$

Seega $f \in L_p(\mu, X)$ ning teoreemi 5.2 põhjal martingaal $(f_\tau, \mathfrak{B}_\tau)_{\tau \in T}$ koondub ruumis $L_p(\mu, X)$. ■

Märkus 5.1. Teoreemi 5.4 tõestusest näeme, et, tähistades $\Sigma_0 := \sigma\Big(\bigcup\limits_{\tau} \mathfrak{B}_\tau\Big)$, jääb teoreemi väide kehtima, kui ruumi X Radon–Nikodými omaduse asemel eeldada, et ruumil X on Radon–Nikodými omadus ruumi $(\Omega, \Sigma_0, \mu|_{\Sigma_0})$ suhtes.

Märkus 5.2. Teoreemi 5.4 põhjal piisab tõestamaks, et ruumil X ei ole Radon–Nikodými omadust, konstrueerida tõkestatud ühtlaselt integreeruv mittekoonduv martingaal ruumis $L_1\big([0,1), X\big)$. Selleks piisab konstrueerida martingaal $(f_n, \mathfrak{B}_n)$ ruumis $L_1\big([0,1), X\big)$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

(1) $\sup\limits_{n} \|f_n\|_\infty < \infty$;

(2) $\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\| \geqslant \varepsilon$ mingi $\varepsilon > 0$ ning kõikide $n \in \mathbb{N}$ ja $t \in [0,1)$ korral,

sest selline martingaal on ilmselt tõkestatud, ühtlaselt integreeruv ja mittekoonduv.

6 Radon–Nikodými omadus kui Banachi ruumi geomeetriline omadus

Banachi ruumi Radon–Nikodými omaduse definitsioon kasutab selle ruumi väliseid objekte (lõpliku mõõduga ruumi). Selle paragrahvi põhiteoreemid kirjeldavad Banachi ruumi Radon–Nikodými omadust ainuüksi selle ruumi enda sisemise geomeetria terminites. Niisiis, Radon–Nikodými omadus on Banachi ruumi geomeetriline omadus.

Kõikjal selles paragrahvis on X Banachi ruum ja (Ω, Σ, μ) lõpliku mõõduga ruum.

6.1 Hambuvus ja Radon–Nikodými omadus

Definitsioon 6.1. Ruumi X alamhulga D *jadaliselt kumeraks katteks* nimetatakse hulka

$$\operatorname{sco} D := \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\, x_j \colon\ \lambda_j \in [0,1],\ x_j \in D,\ j \in \mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Märgime, et

(a) $\operatorname{sco} D \subset \overline{\operatorname{co}}\, D$;

(b) üldjuhul $\overline{\operatorname{co}}\, D \not\subset \operatorname{sco} D$.

Märkus 6.1. Saab (ja pole raske) näidata, et kui $D = \{x_n \colon\ n \in \mathbb{N}\}$, kus elemendid $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, on sellised, et $x_n \underset{n}{\to} 0$, siis $\operatorname{sco} D = \overline{\operatorname{co}}\, D$.

Väite (a) põhjenduseks märgime, et kui $x \in \operatorname{sco} D$, st $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j\, x_j$, kus $\lambda_j \in [0,1]$, $x_j \in D$, $j \in \mathbb{N}$, ja $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j = 1$, siis, tähistades iga $n \in \mathbb{N}$ korral $y_n := \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_j + \Big(\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \Big) x_1 \in \operatorname{co} D$, kehtib $y_n \underset{n}{\to} x$, seega $x \in \overline{\operatorname{co}}\, D$.

Järgnev näide põhjendab väite (b).

Näide 6.1 ([DU, lk 135, näide 5])**.** Olgu D reaalse ruumi $L_\infty[0,1]$ kinnine ühikkera. Näitame, et $\chi_{[0,1]} \in \overline{\operatorname{co}}\big(D \setminus B(\chi_{[0,1]}, \frac{1}{2})\big)$, kuid $\chi_{[0,1]} \notin \operatorname{sco}\big(D \setminus B(\chi_{[0,1]}, \frac{1}{2})\big)$.

Fikseerime vabalt $m \in \mathbb{N}$ ning valime paarikaupa lõikumatud rangelt positiivse mõõduga paarikaupa lõikumatud hulgad $E_1, \dots, E_m \subset [0,1]$. Tähistame iga $j \in \{1, \dots, m\}$ korral $f_j := \chi_{[0,1] \setminus E_j} = \chi_{[0,1]} - \chi_{E_j}$; siis

$$\big\|\chi_{[0,1]} - f_j\big\|_\infty = \big\|\chi_{E_j}\big\|_\infty = 1 > \frac{1}{2},$$

seega $f_j \in D \setminus B(\chi_{[0,1]}, \frac{1}{2})$. Seejuures

$$\begin{aligned}\left\|\chi_{[0,1]} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{m} f_j\right\|_\infty &= \left\|\chi_{[0,1]} - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \big(\chi_{[0,1]} - \chi_{E_j}\big)\right\|_\infty \\ &= \left\|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m \chi_{E_j}\right\|_\infty = \frac{1}{m}\big\|\chi_{\bigcup_{j=1}^m E_j}\big\|_\infty = \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

Kuna arvu $\frac{1}{m}$ saame valida kui tahes väikese, siis $\chi_{[0,1]} \in \overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus B(\chi_{[0,1]}, \frac{1}{2})\big)$.

Teiselt poolt, kui $\chi_{[0,1]} = \sum\limits_{j=1}^\infty \lambda_j f_j$, kus $\lambda_j \in (0,1]$, $\|f_j\|_\infty \leqslant 1$, $j \in \mathbb{N}$, ja $\sum\limits_{j=1}^\infty \lambda_j = 1$, siis iga $j \in \mathbb{N}$ korral $f_j = 1 = \chi_{[0,1]}$ peaaegu kõikjal. Tõepoolest, olgu $i \in \mathbb{N}$. Oletame vastuväiteliselt, et $f_i < 1$ mingis positiivse mõõduga hulgas A. Tähistades iga $n \in \mathbb{N}$ korral $A_n := \big\{\omega \in A\colon\ f_i(\omega) < 1 - \frac{1}{n}\big\}$, kehtivad $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ ja $A = \bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n$, seega $\mu(A_n) \underset{n}{\to} \mu(A) > 0$, järelikult mingi $n \in \mathbb{N}$ korral $\mu(A_n) > 0$. Nüüd iga $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant i$, ja iga $\omega \in A_n$ korral

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\omega) = \sum_{j \in \{1,\dots,k\} \setminus \{i\}} \lambda_j f_j(\omega) + \lambda_i f_i(\omega) < \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} \lambda_j + \lambda_i\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j - \frac{\lambda_i}{n} = 1 - \frac{\lambda_i}{n},$$

seega ka

$$\left|\chi_{[0,1]}(\omega) - \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\omega)\right| = 1 - \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(\omega) > \frac{\lambda_i}{n}$$

ning järelikult

$$\left\|\chi_{[0,1]} - \sum_{j=1}^k \lambda_j f_j\right\|_\infty > \frac{\lambda_i}{n},$$

mis on vastuolus eeldusega, et $\chi_{[0,1]} = \sum\limits_{j=1}^\infty \lambda_j f_j$. Niisiis, iga $j \in \mathbb{N}$ korral $f_j = 1 = \chi_{[0,1]}$ peaaegu kõikjal ning järelikult $\chi_{[0,1]} \notin \mathrm{sco}\big(D \setminus B(\chi_{[0,1]}, \frac{1}{2})\big)$.

Definitsioon 6.2. Olgu $D \subset X$. Öeldakse, et hulk D on

- *σ-hambuv,* kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $x \in D$ nii, et $x \notin \operatorname{sco}\big(D \setminus B(x, \varepsilon)\big)$;
- *hambuv,* kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $x \in D$ nii, et $x \notin \overline{\operatorname{co}}\big(D \setminus B(x, \varepsilon)\big)$.

Vahetult definitsioonist on selge, et iga hambuv hulk on ka σ-hambuv.

Käesoleva punkti põhiteoreem on

Teoreem 6.1 (Rieffel–Maynard–Huff–Davis–Phelps; [DU, lk 136, teoreem 7])**.** *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruumil X on Radon–Nikodými omadus;*

(ii) *ruumi X iga tõkestatud alamhulk on hambuv;*

(iii) *ruumi X iga tõkestatud alamhulk on σ-hambuv.*

Järgnevast teoreemist 6.2 järeldub lihtsasti teoreemi 6.1 implikatsioon (i)$\Rightarrow$(iii). Kuigi teoreemi 6.1 tõestuse seisukohalt ei oma see implikatsioon tähtsust (sest teoreemist 6.4 allpool järeldub teoreemi 6.1 implikatsioon (i)$\Rightarrow$(ii) ning implikatsioon (ii)$\Rightarrow$(iii) järeldub faktist, et iga hambuv hulk on σ-hambuv), pakub teoreemi 6.2 tõestus siiski ka iseseisvat huvi, sest ta näitab, kuidas Banachi ruumi X tõkestatud alamhulk D, mis pole σ-hambuv, indutseerib loomulikul viisil D-väärtuselise (ning seega L_∞-normi suhtes tõkestatud) L_1-normi suhtes mittekoonduva martingaali ruumis $L_1\big([0,1), X\big)$.

Teoreem 6.2 (Maynard; [DU, lk 132, teoreem 2])**.** *Kui X sisaldab tõkestatud alamhulga D, mis ei ole σ-hambuv, siis leiduvad $\varepsilon > 0$ ja martingaal $(f_n, \mathfrak{B}_n)$ ruumis $L_1\big([0,1), X\big)$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral*

$$f_n\big([0,1)\big) \subset D \qquad \textit{ja} \qquad \|f_n(t) - f_{n+1}(t)\| \geqslant \varepsilon \quad \textit{iga } t \in [0,1) \textit{ korral.}$$

Järeldus 6.3. *Kui Banachi ruum sisaldab tõkestatud mitte-σ-hambuvat alamhulka, siis sellel Banachi ruumil ei ole Radon–Nikodými omadust.*

Tõestus. Olgu D ruumi X tõkestatud mitte-σ-hambuv alamhulk. Teoreemi 6.2 põhjal leiduvad $\varepsilon > 0$ ja martingaal $(f_n, \mathfrak{B}_n)$ ruumis $L_1\big([0,1), X\big)$ nii, et $f_n\big([0,1)\big) \subset D$ ja $\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\| \geqslant \varepsilon$ iga $n \in \mathbb{N}$ ja iga $t \in [0,1)$ korral. Martingaal $(f_n, \mathfrak{B}_n)$ on ühtlaselt integreeruv ja mittekoonduv ning seega märkuse 5.2 põhjal ei ole ruumil X Radon–Nikodými omadust. ■

Teoreemi 6.2 tõestus. Olgu D ruumi X tõkestatud alamhulk, mis ei ole σ-hambuv. Siis leidub $\varepsilon > 0$ nii, et iga $x \in D$ on esitatav kujul

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) x_j(x), \tag{6.1}$$

kus iga $j \in \mathbb{N}$ korral $x_j(x) \in D$, $\|x - x_j(x)\| \geqslant \varepsilon$, $\alpha_j(x) \in [0,1]$ ning $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) = 1$.

Paneme kõigepealt tähele, et

(•) *kui $J := [a,b) \subset [0,1)$ ja $x \in D$, siis leiduvad paarikaupa lõikumatud (vasakult kinnised) poollõigud $I_j \subset J$, $j \in \mathbb{N}$, nii, et $J = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j$ ja*

$$\int_J \chi_J \, x \, dm = (b-a)\, x = \int_J \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{I_j} \, x_j(x) \, dm$$

(sümbol m tähistab siin Lebesgue'i mõõtu).

Tõepoolest, kui tähistada $\alpha_0(x) := 0$ ja

$$I_j := \left[a + (b-a) \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i(x) \, , \, a + (b-a) \sum_{i=0}^{j} \alpha_i(x) \right), \quad j \in \mathbb{N},$$

siis iga $j \in \mathbb{N}$ korral $m(I_j) = (b-a)\, \alpha_j(x)$ ning seega

$$\begin{aligned} \int_J \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{I_j} \, x_j(x) \, dm &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_J \chi_{I_j} \, x_j(x) \, dm = \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) \, x_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (b-a) \alpha_j(x) \, x_j(x) = (b-a) \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) \, x_j(x) \\ &= (b-a)\, x = \int_J \chi_J \, x \, dm. \end{aligned}$$

Konstrueerime nüüd soovitud omadustega martingaali ruumis $L_1\big([0,1), X\big)$. Fikseerime vabalt $x \in D$ ning defineerime $f_1 := \chi_{[0,1)} \, x$ ja $\mathfrak{B}_1 := \big\{\emptyset, [0,1)\big\}$. Defineerime $f_2 := \sum\limits_{j=1}^{\infty} \chi_{I_j} \, x_j(x)$ ja $\mathfrak{B}_2 := \sigma\big(\{I_j \colon\ j \in \mathbb{N}\}\big)$ (kogumi $\{I_j \colon\ j \in \mathbb{N}\}$ poolt genereeritud (poollõigu $[0,1)$ alamhulkade) σ-algebra), kus I_j, $j \in \mathbb{N}$, on poollõigud väitest (•), kus $J = [0,1)$.

Edasi toimime järgmiselt. Kui mingi $n \in \mathbb{N}$ korral on antud funktsioon $f_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \chi_{I_k}\, x_k$, kus I_k, $k \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud (vasakult kinnised) poollõigud, mille ühend $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k = [0,1)$, siis väitele (•) toetudes valime iga $k \in \mathbb{N}$ korral paarikaupa lõikumatud (vasakult kinnised) poollõigud I_j^k, $j \in \mathbb{N}$, nii, et $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j^k = I_k$ ja

$$\int_{I_k} \chi_{I_k}\, x_k\, dm = (b-a)\, x_k = \int_J \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{I_j^k}\, x_j(x_k)\, dm$$

ning defineerime $f_{n+1} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \chi_{I_j^k}\, x_j(x_k)$ ja $\mathfrak{B}_{n+1} := \sigma\big(\{I_j^k\colon\ k, j \in \mathbb{N}\}\big)$. Sel viisil saadav jada $(f_n, \mathfrak{B}_n)$ on martingaal, millel on soovitud omadused. ■

Järgnevast teoreemist 6.4, mis tugevdab teoreemi 6.2 ning mille tõestus on teoreemi 6.2 tõestuse modifikatsioon, järeldub teoreemi 6.1 implikatsioon (i)⇒(ii). Teoreemi 6.4 tõestus näitab, kuidas Banachi ruumi X tõkestatud alamhulk D, mis pole hambuv, indutseerib loomulikul viisil L_∞-normi suhtes tõkestatud, kuid L_1-normi suhtes mittekoonduva martingaali ruumis $L_1\big([0,1), X\big)$.

Teoreem 6.4 (Huff–Davis–Phelps; [DU, lk 133, teoreem 4])**.** *Kui Banachi ruum sisaldab tõkestatud mittehambuva alamhulga, siis sellel Banachi ruumil ei ole Radon–Nikodými omadust.*

Tõestus. Sisaldagu ruum X tõkestatud mittehambuva alamhulga D. Siis leidub $\varepsilon > 0$ nii, et iga $x \in D$ korral $x \in \overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus B(x,\varepsilon)\big)$. Näitame, et leiduvad poollõigu $[0,1)$ tükeldused $\pi_n = \{I_1, \dots, I_{K_n}\}$ ($K_n \in \mathbb{N}$) vasakult kinnisteks poollõikudeks ja funktsioonid $f_n \in L_1\big([0,1), X\big)$, $n \in \mathbb{N}$, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

(1) iga f_n on esitatav kujul $f_n = \sum\limits_{k=1}^{K_n} \chi_{I_k} x_k$, kus $x_1, \dots, x_{K_n} \in D$;

(2) π_{n+1} on saadud tükelduse π_n peenendamisel nii, et tükelduse π_n iga poollõik on tükelduse π_{n+1} mingite poollõikude lõplik ühend;

(3) poollõigu $[0,1)$ Boreli σ-algebra on $\sigma\big(\{\pi_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}\big)$;

(4) $\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\| \geqslant \varepsilon$ iga $n \in \mathbb{N}$ ja iga $t \in [0,1)$ korral;

(5) $\left\|\int_{I_k} (f_m - f_n)\, d\mu\right\| < \dfrac{\mu(I_k)}{2^n}$ iga $n \in \mathbb{N}$, iga $m \geqslant n$ ja iga $I_k \in \pi_n$ korral (siin μ tähistab Lebesgue'i mõõtu).

Paneme tähele, et kui tingimusi (1)–(5) rahuldavad funktsioonid f_n, $n \in \mathbb{N}$, tõepoolest leiduvad, siis tingimuse (5) põhjal jada $\left(\int_{I_k} f_n \, d\mu\right)$ koondub iga $I_k \in \bigcup\limits_n \pi_n$ korral, seega leidub piirväärtus $\lim\limits_n \int_{I_k} f_n \, d\mu =: F(I_k)$. Tähistame

$$g_n := \sum_{k=1}^{K_n} \chi_{I_k} \frac{F(I_k)}{\mu(I_k)}$$

(siin me järgime kokkulepet, et $\frac{0}{0} = 0$) ja ja $\mathfrak{B}_n := \sigma\big(\{I_k \in \pi_n \colon \ k \in \mathbb{N}\}\big)$; siis $(g_n, \mathfrak{B}_n)$ on martingaal ruumis $L_1\big([0,1), X\big)$. Kuna D on tõkestatud, siis iga $I_k \in \bigcup\limits_n \pi_n$ korral

$$\left\| \frac{F(I_k)}{\mu(I_k)} \right\| = \frac{\left\| \lim\limits_n \displaystyle\int_{I_k} f_n \, d\mu \right\|}{\mu(I_k)} \leqslant M,$$

kus $M \geqslant 0$ on selline, et $\|x\| \leqslant M$ iga $x \in D$ korral. Seega $\sup\limits_{t \in [0,1), n \in \mathbb{N}} \|g_n(t)\| \leqslant M$ ning järelikult martingaal $(g_n, \mathfrak{B}_n)$ on tõkestatud ja ühtlaselt integreeruv. Tingimuse (5) põhjal

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1)} \|f_n - g_n\| \, d\mu &= \int_{[0,1)} \left\| \sum_{k=1}^{K_n} \chi_{I_k} x_k - \sum_{k=1}^{K_n} \frac{F(I_k)}{\mu(I_k)} \chi_{I_k} \right\| d\mu \\
&\leqslant \int_{[0,1)} \sum_{k=1}^{K_n} |\chi_{I_k}| \left\| x_k - \frac{F(I_k)}{\mu(I_k)} \right\| d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{K_n} \left\| x_k - \frac{F(I_k)}{\mu(I_k)} \right\| \int_{[0,1)} \chi_{I_k} \, d\mu = \sum_{k=1}^{K_n} \left\| x_k - \frac{F(I_k)}{\mu(I_k)} \right\| \mu(I_k) \\
&= \sum_{k=1}^{K_n} \|\mu(I_k) x_k - F(I_k)\| = \sum_{k=1}^{K_n} \left\| \int_{I_k} f_n \, d\mu - \lim_m \int_{I_k} f_m \, d\mu \right\| \\
&= \lim_m \sum_{k=1}^{K_n} \left\| \int_{I_k} (f_n - f_m) \, d\mu \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{K_n} \frac{\mu(I_k)}{2^n} = \frac{1}{2^n} \mu\big([0,1)\big) = \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Seega $(f_n - g_n)$ on Cauchy jada ruumis $L_1\big([0,1), X\big)$. Tingimuse (4) põhjal ei ole (f_n) Cauchy jada ruumis $L_1\big([0,1), X\big)$, järelikult ka (g_n) ei ole Cauchy jada ruumis $L_1\big([0,1), X\big)$, niisiis tõkestatud ja ühtlaselt integreeruv martingaal $(g_n, \mathfrak{B}_n)$ ei koondu. Vastavalt märkusele 5.2 ei ole ruumil X Radon–Nikodými omadust.

Jääb veenduda tingimusi (1)–(5) rahuldavate funktsioonide $f_n \in L_1\big([0,1), X\big)$

ja poollõigu $[0,1)$ tükelduste π_n, $n \in \mathbb{N}$, olemasolus. Paneme tähele, et iga $\delta > 0$ ja iga $x \in D$ korral leiduvad $N \in \mathbb{N}$, reaalarvud $\alpha_1(x), \dots, \alpha_N(x) > 0$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j(x) = 1$, ning elemendid $x_1(x), \dots, x_N(x) \in D \setminus B(x, \varepsilon)$ nii, et

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x) x_j(x) \right\| < \delta. \tag{6.2}$$

Konstrueerime nüüd soovitud omadustega funktsioonid f_n ja tükeldused π_n, $n \in \mathbb{N}$. Fikseerime vabalt $x \in D$ ning defineerime $f_1 := \chi_{[0,1)} x$ ja $\pi_1 := \{[0,1)\}$. Edasi toimine järgmiselt. Kui mingi $n \in \mathbb{N}$ korral on antud funktsioon $f_n = \sum\limits_{k=1}^{K_n} \chi_{I_k} x_k$, kus $K_n \in \mathbb{N}$, $I_1, \dots, I_{K_n}$ on paarikaupa lõikumatud (vasakult kinnised) poollõigud, mille ühend $\bigcup\limits_{k=1}^{N_k} I_k = [0,1)$, ja $\pi_n := \{I_1, \dots, I_{K_n}\}$ siis valime iga $k \in \{1, \dots, K_n\}$ korral $N_k \in \mathbb{N}$, reaalarvud $\alpha_1(x_k), \dots, \alpha_{N_k}(x_k) > 0$, $\sum\limits_{j=1}^{N_k} \alpha_j(x_k) = 1$, ja elemendid $x_1(x_k), \dots, x_{N_k}(x_k) \in D \setminus B(x_k, \varepsilon)$ vastavalt tingimusele (6.2), kus $\delta = \frac{1}{2^n}$, st iga $k \in \{1, \dots, N_k\}$ korral

$$\left\| x_k - \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_j(x_k) x_j(x_k) \right\| < \frac{1}{2^n}. \tag{6.3}$$

Järgmise sammuna defineerime funktsiooni f_{n+1} analoogiliselt teoreemi 6.2 tõestusega ja tükelduse $\pi_{n+1} := \left\{ I_j^k \colon \ k \in \{1, \dots, K_n\},\ j \in \{1, \dots, N_k\} \right\}$. Täpsemalt, kui $k \in \{1, \dots, K_n\}$ ning $I_k = [a, b)$, siis, tähistades $\alpha_0(x_k) = 0$, defineerime

$$I_j^k := \left[a + (b-a) \sum_{i=0}^{j-1} \alpha_i(x_k)\, ,\ a + (b-a) \sum_{i=0}^{j} \alpha_i(x_k) \right), \quad j \in \{1, \dots, N_k\},$$

ja $f_{n+1} := \sum\limits_{k=1}^{K_n} \sum\limits_{j=}^{N_k} \chi_{I_j^k} x_j(x_k)$. Sellisel viisil saadud funktsioonid f_n, $n \in \mathbb{N}$, rahuldavad tingimusi (1) ja (4) ning saadud tükeldused π_n, $n \in \mathbb{N}$, tingimust (2).

Paneme tähele, et iga $I_k \in \pi_n$ korral

$$\begin{aligned}\left\|\int_{I_k} (f_n - f_{n+1})\, d\mu\right\| &= \left\|\mu(I_k)x_k - \sum_{j=1}^{N_k} \mu(I_j^k) x_j(x_k)\right\| \\ &= \left\|x_k - \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\mu(I_j^k)}{\mu(I_k)} x_j(x_k)\right\| \mu(I_k) \\ &= \left\|x_k - \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_j(x_k) x_j(x_k)\right\| \mu(I_k) < \frac{\mu(I_k)}{2^n}.\end{aligned}$$

Seega on täidetud tingimus (5). Tingimuses (6.3) saame valida iga $k \in \{1, \ldots, K_n\}$ korral reaalarvud $\alpha_1(x_k), \ldots, \alpha_{N_k}(x_k) < \frac{1}{2^n}$. See asjaolu garanteerib tingimuse (3) täidetuse. ■

Nüüd saame tõestada teoreemi 6.1.

Teoreemi 6.1 tõestus. (i)⇒(ii) järeldub teoreemist 6.4.

(ii)⇒(iii) on ilmne, sest iga hambuv alamhulk on ka σ-hambuv.

(iii)⇒(i). Olgu (Ω, Σ, μ) lõpliku mõõduga ruum ning olgu $F\colon \Sigma \to X$ μ-pidev tõkestatud variatsiooniga loenduvalt aditiivne vektormõõt. Tähistame iga $A \in \mathcal{P}_\mu^+(\Omega)$ korral

$$D(A) := \left\{\frac{F(E)}{\mu(E)}\colon\ E \in \mathcal{P}_\mu^+(A)\right\}.$$

Olgu $A \in \mathcal{P}_\mu^+(\Omega)$ ning olgu $\varepsilon > 0$. Lemma 3.4 põhjal piisab implikatsiooni tõestuseks näidata, et leidub hulk $B \in \mathcal{P}_\mu^+(A)$, mille korral $\operatorname{diam} D(B) \leqslant 2\varepsilon$.

Selleks paneme tähele, et leidub mõõtuv hulk $A' \in \mathcal{P}_\mu^+(A)$ nii, et $D(A')$ on tõkestatud. Tõepoolest, lemma 1.2 põhjal esitub Ω loenduva ühendina $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, kus iga $j \in \mathbb{N}$ korral $A_j \in \Sigma$ ning hulk $\left\{\frac{|F|(E)}{\mu(E)}\colon\ E \in \mathcal{P}_\mu^+(A_j)\right\}$ on tõkestatud. Aga nüüd, kuna, $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap A_j$, siis mingi indeksi $j \in \mathbb{N}$ korral $\mu(A \cap A_j) > 0$, niisiis me võime võtta $A' = A \cap A_j$, sest iga $E \in \mathcal{P}_\mu^+(\Omega)$, korral $\frac{\|F(E)\|}{\mu(E)} \leqslant \frac{|F|(E)}{\mu(E)}$, ning järelikult on hulk $D(A')$ tõkestatud.

Eelduse põhjal on hulk $D(A')$ σ-hambuv, seega leidub hulk $C \in \mathcal{P}_\mu^+(A')$, mis rahuldab tingimust

$$\frac{F(C)}{\mu(C)} \notin \overline{\mathrm{co}}^s \left\{\frac{F(E)}{\mu(E)}\colon\ E \in \mathcal{P}_\mu^+(A'),\ \left\|\frac{F(E)}{\mu(E)} - \frac{F(C)}{\mu(C)}\right\| \geqslant \varepsilon\right\}. \tag{6.4}$$

Oletame vastuväiteliselt, et iga $B \in \mathcal{P}_\mu^+(A)$ korral $\operatorname{diam} D(B) > 2\varepsilon$. Paneme tähele, et

- iga $B \in \mathcal{P}_\mu^+(A)$ korral leidub hulk $E \in \mathcal{P}_\mu^+(B)$ nii, et

$$\left\| \frac{F(E)}{\mu(E)} - \frac{F(C)}{\mu(C)} \right\| \geqslant \varepsilon,$$

  sest vastasel juhul mis tahes $E_1, E_2 \in \mathcal{P}_\mu^+(B)$ korral

$$\left\| \frac{F(E_1)}{\mu(E_1)} - \frac{F(E_2)}{\mu(E_2)} \right\| \leqslant \left\| \frac{F(E_1)}{\mu(E_1)} - \frac{F(C)}{\mu(C)} \right\| + \left\| \frac{F(C)}{\mu(C)} - \frac{F(E_2)}{\mu(E_2)} \right\| < 2\varepsilon$$

  ning seega $\operatorname{diam} D(B) \leqslant 2\varepsilon$, mis on vastuolus tehtud eeldusega;

- kui hulgad $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{P}_\mu^+(C)$ ($n \in \mathbb{N}$) on paarikaupa lõikumatud, kusjuures iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral $\left\| \frac{F(C_j)}{\mu(C_j)} - \frac{F(C)}{\mu(C)} \right\| \geqslant \varepsilon$, siis $\mu\big(C \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} C_j\big) > 0$, sest vastasel korral (arvestades, et F on μ-pidev) oleks $F\big(C \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} C_j\big) = 0$, seega $F(C) = \sum\limits_{j=1}^{n} F(C_j)$ ning järelikult

$$\frac{F(C)}{\mu(C)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu(C_j)}{\mu(C)} \frac{F(C_j)}{\mu(C_j)},$$

  mis on vastuolus tingimusega (6.4).

Seega, tähistades $C_0 := \emptyset$, saame induktiivselt valida paarikaupa lõikumatud hulgad $C_j \in \mathcal{P}_\mu^+(C)$, $j \in \mathbb{N}$, nii, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral $\left\| \frac{F(C_j)}{\mu(C_j)} - \frac{F(C)}{\mu(C)} \right\| \geqslant \varepsilon$ ja

$$\mu(C_j) \geqslant \frac{1}{2} \sup \left\{ \mu(E) \colon \ \Sigma \ni E \subset C \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1} C_i, \ \left\| \frac{F(E)}{\mu(E)} - \frac{F(C)}{\mu(C)} \right\| \geqslant \varepsilon \right\}.$$

Implikatsiooni tõestuseks piisab nüüd näidata, et

$$\frac{F(C)}{\mu(C)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu(C_j)}{\mu(C)} \frac{F(C_j)}{\mu(C_j)}, \tag{6.5}$$

sest see võrdus on vastuolus tingimusega (6.4). Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\frac{F(C)}{\mu(C)} -$

$\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\mu(C_j)}{\mu(C)} \frac{F(C_j)}{\mu(C_j)} = \frac{F\big(C\setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} C_j\big)}{\mu(C)}$, siis piisab võrduse (6.5) tõestuseks näidata, et $F\big(C \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} C_j\big) \underset{n}{\to} 0$, milleks omakorda (arvestades, et F on μ-pidev) piisab näidata, et $\mu\big(C \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} C_j\big) \underset{n}{\to} 0$, st $\mu\big(C \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j\big) = 0$. Selleks paneme kõigepealt tähele, et $\mu(C_j) \underset{n}{\to} 0$ (sest $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(C_j) = \mu\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j\Big) \leqslant \mu(C) < \infty$ ning koonduva rea jääkliige koondub nulliks). Oletame vastuväiteliselt, et $\mu\big(C \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j\big) > 0$; siis leidub $B \in \mathcal{P}_\mu^+\big(C \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j\big)$ nii, et $\left\| \frac{F(B)}{\mu(B)} - \frac{F(C)}{\mu(C)} \right\| \geqslant \varepsilon$. Valides indeksi $j \in \mathbb{N}$ nii, et $\mu(C_j) < \frac{1}{2}\mu(B)$, saame

$$\begin{aligned}\mu(B) &\leqslant \sup \left\{ \mu(E) \colon \ \Sigma \ni E \in \mathcal{P}_\mu^+\Big(C \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1} C_i\Big), \ \left\| \frac{F(E)}{\mu(E)} - \frac{F(C)}{\mu(C)} \right\| \geqslant \varepsilon \right\} \\ &\leqslant 2\mu(C_j) < \mu(B),\end{aligned}$$

vastuolu. ■

6.2 Hambuvus ja viilud

Definitsioon 6.3. Olgu $D \subset X$ tõkestatud hulk ning olgu $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$, ja $\alpha > 0$. Hulka

$$S(x^*, \alpha, D) = \{x \in D\colon \ \operatorname{Re} x^*(x) > \sup \operatorname{Re} x^*(D) - \alpha\},$$

nimetatakse hulga D *viiluks*.

Lause 6.5. *Olgu D ruumi X tõkestatud mittetühi alamhulk. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *hulk D on hambuv;*

(ii) *hulgal D leidub kui tahes väikese diameetriga viilusid.*

Tõestus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et X on reaalne ruum.

(i)⇒(ii). Olgu D hambuv ning olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Siis leidub $x \in D$ nii, et $x \notin \overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus B(x, \varepsilon)\big)$. Hahn–Banachi eraldamisteoreemi põhjal leiduvad $x^* \in X^*$ ja

$\alpha > 0$ nii, et

$$x^*(x) - \alpha > \sup x^*\big(\overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus B(x,\varepsilon)\big)\big).$$

Tähistame $\beta := \sup x^*(D) - x^*(x) + \alpha$; siis $\beta \geqslant \alpha$ ja

$$x^*(x) = \sup x^*(D) + \alpha - \beta > \sup x^*(D) - \beta.$$

Seega $x \in S(x^*, \beta, D)$. Näitame, et $S(x^*, \beta, D) \subset B(x, \varepsilon)$. Olgu $y \in S(x^*, \beta, D)$ suvaline ning oletame vastuväiteliselt, et $y \notin B(x, \varepsilon)$. Sel juhul $y \in D \setminus B(x, \varepsilon)$, seega

$$\begin{aligned} x^*(y) &\leqslant \sup x^*\big(D \setminus B(x,\varepsilon)\big) \leqslant \sup x^*\big(\overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus B(x,\varepsilon)\big)\big) \\ &< x^*(x) - \alpha = \sup x^*(D) - \beta < x^*(y), \end{aligned}$$

vastuolu. Järelikult $y \in B(x, \varepsilon)$ ning $\operatorname{diam} S(x^*, \beta, D) < 2\varepsilon$.

(ii)⇒(i). Fikseerime $\varepsilon > 0$ ning olgu hulga D viil $S(x^*, \alpha, D)$ selline, et $\operatorname{diam} S(x^*, \alpha, D) < \varepsilon$. Olgu $x \in S(x^*, \alpha, D)$ suvaline; siis $S(x^*, \alpha, D) \subset B(x, \varepsilon)$. Seega

$$\begin{aligned} D \setminus B(x,\varepsilon) \subset D \setminus S(x^*, \alpha, D) &= \{y \in D\colon\ x^*(y) \leqslant \sup x^*(D) - \alpha\} \\ &= \{y \in \overline{\mathrm{co}}\, D\colon\ x^*(y) \leqslant \sup x^*(D) - \alpha\} =: E \end{aligned}$$

Kuna hulk E on kinnine ja kumer, siis $\overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus B(x,\varepsilon)\big) \subset E$. Järelikult $x \notin \overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus B(x,\varepsilon)\big)$, mida oligi vaja hulga D hambuvuseks näidata. ■

Lemma 6.6. *Olgu $D \subset X$ tõkestatud hulk ning olgu $x^* \in X^*$. Siis*

$$\sup x^*(D) = \sup x^*(\mathrm{co}\, D) = \sup x^*(\overline{\mathrm{co}}\, D).$$

Tõestus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et X on reaalne ruum.

Kuna $D \subset \mathrm{co}\, D \subset \overline{\mathrm{co}}\, D$, siis $\sup x^*(D) \leqslant \sup x^*(\mathrm{co}\, D) \leqslant \sup x^*(\overline{\mathrm{co}}\, D)$, seega jääb näidata, et $\sup x^*(\overline{\mathrm{co}}\, D) \leqslant \sup x^*(D)$. Selleks piisab näidata, et iga $x \in \overline{\mathrm{co}}\, D$ korral $x^*(x) \leqslant \sup x^*(D)$. Olgu $x \in \overline{\mathrm{co}}\, D$ suvaline. Siis leidub hulga $\mathrm{co}\, D$ elementide jada (x_n) nii, et $x_n \underset{n}{\to} x$. Kuna $x_n \in \mathrm{co}\, D$, $n \in \mathbb{N}$, siis $x_n = \sum\limits_{j=1}^{m_n} \lambda_j^n x_j^n$, kus $m_n \in \mathbb{N}$, $x_j^n \in D$, $\lambda_j^n \in [0,1]$, $j \in \{1, \ldots, m_n\}$, $\sum\limits_{j=1}^{m_n} \lambda_j^n = 1$. Funktsionaali x^*

pidevuse ja lineaarsuse tõttu

$$
\begin{aligned}
x^*(x) = x^*(\lim_n x_n) = \lim_n x^*(x_n) = \lim_n x^* \left(\sum_{j=1}^{m_n} \lambda_j^n x_j^n \right) = \lim_n \sum_{j=1}^{m_n} \lambda_j^n x^*(x_j^n) \\
\leqslant \lim_n \sum_{j=1}^{m_n} \lambda_j^n \sup x^*(D) = \sup x^*(D) \lim_n \sum_{j=1}^{m_n} \lambda_j^n = \sup x^*(D).
\end{aligned}
$$

■

Lemma 6.7. *Olgu $D \subset X$ tõkestatud hulk ning olgu $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ ja $\alpha > 0$. Siis*

$$
\operatorname{diam} S(x^*, \alpha, D) = \operatorname{diam} S(x^*, \alpha, \overline{D}). \tag{6.6}
$$

Tõestus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et X on reaalne ruum.

Kuna $D \subset \overline{D}$, siis $\operatorname{diam} S(x^*, \alpha, D) \leqslant \operatorname{diam} S(x^*, \alpha, \overline{D})$. Näitame, et

$$
\operatorname{diam} S(x^*, \alpha, D) \geqslant \operatorname{diam} S(x^*, \alpha, \overline{D}).
$$

Olgu $x, y \in S(x^*, \alpha, \overline{D})$ ning olgu $x_n, y_n \in D$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $x_n \underset{n}{\to} x$ ja $y_n \underset{n}{\to} y$. Siis funktsionaali x^* pidevuse tõttu $x^*(x_n) \underset{n}{\to} x^*(x)$ ja $x^*(y_n) \underset{n}{\to} x^*(y)$. Kuna

$$
x^*(x) > \sup x^*(\overline{D}) - \alpha \geqslant \sup x^*(D) - \alpha
$$

ja

$$
x^*(y) > \sup x^*(\overline{D}) - \alpha \geqslant \sup x^*(D) - \alpha,
$$

siis leiduvad indeksid $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ nii, et $x^*(x_n) > \sup x^*(D) - \alpha$, kui $n \geqslant N_1$, ning $x^*(y_n) > \sup x^*(D) - \alpha$, kui $n \geqslant N_2$. Võttes $N := \max\{N_1, N_2\}$, saame, et $x_n, y_n \in S(x^*, \alpha, D)$, kui $n \geqslant N$. Seega

$$
\|x - y\| = \lim_n \|x_n - y_n\| \leqslant \operatorname{diam} S(x^*, \alpha, D),
$$

järelikult $\operatorname{diam} S(x^*, \alpha, \overline{D}) \leqslant \operatorname{diam} S(x^*, \alpha, D)$ ning kokkuvõttes kehtib võrdus (6.6). ■

Teoreem 6.8. *Olgu $D \subset X$ tõkestatud hulk. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *D on hambuv;*

(ii) *$\overline{\operatorname{co}}\, D$ on hambuv.*

Tõestus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et X on reaalne ruum.

(i)$\Rightarrow$(ii). Olgu hulk D hambuv ning olgu $\varepsilon > 0$. Lause 6.5 kohaselt leidub viil $S(x^*, \alpha, D)$ nii, et $\operatorname{diam} S(x^*, \alpha, D) < \varepsilon$. Lemma 6.7 põhjal piisab näidata, et sobiva $\delta > 0$ korral $\operatorname{diam} S(x^*, \delta\alpha, \operatorname{co} D) \leqslant 2\varepsilon$. Olgu $\delta > 0$ suvaline ning olug $x, y \in S(x^*, \delta\alpha, \operatorname{co} D)$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ ja $y = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j y_j$ mingite $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in D$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, korral. Tähistame

$$d := \sup x^*(D) = \sup x^*(\operatorname{co} D), \quad M := \sup_{x \in D} \|x\|$$

ja

$$J := \big\{ j \in \{1, \ldots, n\} \colon\ x^*(x_j), x^*(y_j) > d - \alpha \big\}.$$

Nüüd

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \right\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \|x_j - y_j\| \\
&= \sum_{j \in J} \lambda_j \|x_j - y_j\| + \sum_{j \notin J} \lambda_j \|x_j - y_j\| < \varepsilon \sum_{j \in J} \lambda_j + \sum_{j \notin J} \lambda_j \big(\|x_j\| + \|y_j\| \big) \\
&\leqslant \varepsilon + 2M \sum_{j \notin J} \lambda_j.
\end{aligned}$$

Tähistame $J_x := \big\{ j \in \{1, \ldots, n\} \colon\ x^*(x_j) > d - \alpha \big\}$ ja $\lambda := \sum\limits_{j \notin J_x} \lambda_j$; siis

$$\begin{aligned}
x^*(x) &= x^* \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x^*(x_j) = \sum_{j \in J_x} \lambda_j x^*(x_j) + \sum_{j \notin J_x} \lambda_j x^*(x_j) \\
&\leqslant (1 - \lambda) d + \lambda (d - \alpha) = d - \lambda\alpha.
\end{aligned}$$

Kuna $x^*(x) > d - \delta\alpha$, siis $d - \delta\alpha < d - \lambda\alpha$ ehk $\lambda < \delta$. Siit järeldub, et $\sum\limits_{j \notin J} \lambda_j < 2\delta$. Võttes $\delta = \frac{\varepsilon}{4M}$, saame, et

$$\|x - y\| < \varepsilon + 2M \sum_{j \notin J} \lambda_j < \varepsilon + 4M\delta = 2\varepsilon,$$

järelikult $\operatorname{diam} S(x^*, \delta\alpha, \operatorname{co} D) \leqslant 2\varepsilon$, nagu soovitud.

Esitame implikatsioonile (ii)⇒(i) kaks erinevat tõestust. Esimene neist kasutab hambuva hulga definitsiooni ja teine – lauset 6.5.

IMPLIKATSIOONI (ii)⇒(i) ESIMENE TÕESTUS. Olgu hulk $\overline{\mathrm{co}}\, D$ hambuv ning olgu $\varepsilon > 0$. Vastavalt definitsioonile 6.2 leidub $x \in \overline{\mathrm{co}}\, D$ nii, et $x \notin \overline{\mathrm{co}}\big((\overline{\mathrm{co}}\, D) \setminus B(x, \frac{\varepsilon}{2})\big) =: Q$. Paneme tähele, et $D \setminus Q \neq \emptyset$. Tõepoolest, oletades, et $D \subset Q$, saame hulga Q kumeruse ja kinnisuse tõttu, et $\overline{\mathrm{co}}\, D \subset Q$. Seega jõuame vastuoluni, sest $x \in \overline{\mathrm{co}}\, D$, kuid $x \notin Q$.

Olgu $d \in D \setminus Q$. Teoreem on tõestatud, kui näitame, et $d \notin \overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus B(d, \varepsilon)\big)$. Selleks paneme tähele, et $d \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$; vastasel korral $d \in D \setminus B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset (\overline{\mathrm{co}}\, D) \setminus B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset Q$, see on aga võimatu, sest $d \notin Q$. Eelnevast arutelust järeldub, et $D \setminus Q \subset B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Näitame, et kehtib sisalduvus $D \setminus B(d, \varepsilon) \subset Q$. Oletame vastuväiteliselt, et $d_0 \in D \setminus B(d, \varepsilon)$, kuid $d_0 \notin Q$, st $d_0 \in D \setminus Q$ ning $\|d_0 - d\| \geqslant \varepsilon$. Kuna $d_0, d \in D \setminus Q$, siis

$$\|d_0 - d\| \leqslant \|d_0 - x\| + \|x - d\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

vastuolu. Kuna Q on kinnine ja kumer, siis $\overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus B(d, \varepsilon)\big) \subset Q$. Järelikult $d \notin \overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus B(d, \varepsilon)\big)$, sest $d \notin Q$.

IMPLIKATSIOONI (ii)⇒(i) TEINE TÕESTUS. Olgu hulk $\overline{\mathrm{co}}\, D$ hambuv. Hulga D hambuvuseks piisab lause 6.5 põhjal näidata, et hulgal D leidub kui tahes väikese diameetriga viilusid. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna $\overline{\mathrm{co}}\, D$ on hambuv (märgime, et hulga D tõkestatuse tõttu on ka hulk $\overline{\mathrm{co}}\, D$ tõkestatud), siis vastavalt lausele 6.5 leidub viil $S(x^*, \alpha, \overline{\mathrm{co}}\, D)$ nii, et $\operatorname{diam} S(x^*, \alpha, \overline{\mathrm{co}}\, D) < \varepsilon$. Näitame, et $S(x^*, \alpha, D) \subset S(x^*, \alpha, \overline{\mathrm{co}}\, D)$. Olgu $x \in S(x^*, \alpha, D)$, st $x \in D$ ja $x^*(x) > \sup x^*(D) - \alpha$. Siis $x \in \overline{\mathrm{co}}\, D$ ning lemma 6.6 põhjal

$$x^*(x) > \sup x^*(D) - \alpha = \sup x^*(\overline{\mathrm{co}}\, D) - \alpha,$$

järelikult $x \in S(x^*, \alpha, \overline{\mathrm{co}}\, D)$. Nüüd saame, et

$$\operatorname{diam} S(x^*, \alpha, D) \leqslant \operatorname{diam} S(x^*, \alpha, \overline{\mathrm{co}}\, D) < \varepsilon,$$

niisiis, hulk D on hambuv. ■

Järeldus 6.9. *Ruumil X on Radon–Nikodými omadus parajasti siis, kui tema iga kinnine kumer tõkestatud alamhulk on hambuv.*

Tõestus. *Tarvilikkus* järeldub teoreemi 6.1 implikatsioonist (i)⇒(ii).

Piisavus. Olgu ruumi X iga kinnine kumer tõkestatud alamhulk hambuv ning olgu $D \subset X$ suvaline tõkestatud hulk. Kuna $\overline{\mathrm{co}}\, D$ on kinnine kumer tõkestatud hulk, siis eelduse põhjal on ta hambuv. Vastavalt teoreemile 6.8 on ka hulk D hambuv. Seega teoreemi 6.1 põhjal on ruumil X Radon–Nikodými omadus. ■

Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmise tulemuse.

Teoreem 6.10. *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruumil X on Radon–Nikodými omadus;*

(ii) *ruumi X iga tõkestatud alamhulk on hambuv;*

(iii) *ruumi X iga kinnine kumer tõkestatud alamhulk on hambuv;*

(iv) *ruumi X igal tõkestatud alamhulgal leidub kui tahes väikese diameetriga viilusid;*

(v) *ruumi X igal kinnisel kumeral tõkestatud alamhulgal leidub kui tahes väikese diameetriga viilusid.*

Tõestus. (i)⇔(ii) on tõestatud teoreemis 6.1.

(i)⇔(iii) on järeldus 6.9.

(ii)⇔(iv) on lause 6.5.

(iii)⇔(v) järeldub lausest 6.5. ■

Kirjandus

[DU] J. Diestel, J. J. Uhl, Jr., *Vector Measures*, Math. Surveys, vol. 15, Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[F] G. B. Folland, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications,* Second Edition, Pure and Applied Mathematics (New York), A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York, 1999.

[IT^2] A. Ionescu Tulcea, C. Ionescu Tulcea, *Topics in the Theory of Lifting,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 48, Springer, Berlin – New York, 1999.

[M] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 183, Springer, New York, 1998.

[R] R. A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer, London, 2002.

[T] M. Talagrand, *Pettis integral and measure theory*, Mem. Amer. Math. Soc. **51** (1984), no. 307.

[Вул] Б. З. Вулих, *Краткий курс теории функций вещественной переменной*, Наука, Москва, 1965.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina _______________ Julia Martsinkevitš___________________________________
(autori nimi)

(sünnikuupäev: _______________ 25.04.1990 ________________________________)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

_______________ Radon–Nikodými omadus ________________________________,
(lõputöö pealkiri)

mille juhendaja on _______________ Märt Põldvere ___________________________,
(juhendaja nimi)

1.1.reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2.üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, _______________ 03.06.2014_____________________________ *(kuupäev)*