TARTU ÜLIKOOL

Olaf Prinits

EESTI KOOLIMATEMAATIKA AJALUGU

Kolmas osa

Tartu 1994

TARTU ÜLIKOOL

Olaf Prinits

EESTI KOOLIMATEMAATIKA AJALUGU

Kolmas osa

Tartu 1994

Olaf Prinits
EESTI KOOLIMATEMAATIKA AJALUGU
Kolmas osa
Tartu Ülikool
EE2400 Tartu, Ülikooli 18
Korrektor L. Jago
22,14. 21,75. T. 61. 750
TÜ trükikoda. EE2400 Tartu, Tiigi 78

AASTATEL 1918–1950 KASUTUSEL OLNUD MATEMAATIKA KOOLIRAAMATUD

III osa

SISSEJUHATUS

Raamatu esimeses osas käsitlesime eesti lastele matemaatika õpetamise esmapüüdlusi juba XIX sajandi algusaastail. Tutvusime eestikeelse aritmeetikaõpetuse esimeste katsetustega ning võisime huviga jälgida ärkamisaja suurürituste mõju uute õpikute, sealhulgas matemaatikaraamatute, koostamisele. Rudolf Gottfried Kallase, Joosep Kapi, Jakob Tülgi ja Juhan Kurriku kirjutatud aritmeetika, geomeetria ja algebra kooliraamatutel on silmapaistev koht meie matemaatika õpetamise arenguloos. XIX sajandi lõpu venestusperiood lämmatas emakeelse õpetuse.

Raamatu teises osas jälgisime eestikeelse matemaatikaõpetuse uut hoogsat tõusu. Võimalus õpetada eesti keeles ka keskkoolis oli terminoloogia koostamise stiimuliks ja tingis isegi matemaatikakongressi korraldamise. Uus eestikeelsete aritmeetika kooliraamatute koostamise laine juhtis küll suurel määral kasutama vene- ja saksakeelseid eeskujusid, kuid autorite kindel vastuseis kriitikanooltele näitas nende kujunevaid isiklikke seisukohti ning oli tagatiseks uute trükkide väljaandmisel. Eesti Vabariigis sai matemaatika õpetamise korraldus kindla organisatsioonilise aluse. Arvesse võeti matemaatika koolikursuse ülesehitamise rahvusvahelised püüdlused, neile lisati omapoolsed arvamused ja nii tegi matemaatikaõpetus Eesti koolis läbi kaks suuremat hüpet. Alustati tsaariaegse kooli programmidele tuginedes. Matemaatika Õpetamise Komisjoni (asutati 1924) töö tulemusena sooritatigi esimene hüpe: jõuti õppekavadeni, milles peegeldus sajandi alguse rahvusvahelise reformi taotlusi. Uutele õppekavadele lisatud seletuskirjad andsid tunnistust uuest matemaatika koolikursuse ülesehituse tasemest. Uute püüdluste hälliks ja arendajaks said matemaatika-, füüsika ja kosmograafiaõpetajate kongressid. Uute püüdluste hulka tuleb arvata ka töökooli printsiibi juurutamine matemaatikaõpetusse. Nii näiteks ilmusid kahekümnendate aastate lõpul G. Rägo tööraamatud, aastatel 1934–1936 kulmineerus aga töövihikute kasutamine koolis. Töökooli printsiibi peamiseks juurutajaks oli Johannes Käis.

Teine hüpe toimus 1937. aastal. Selleks aastaks jõudis lõpuni koolireform, millega alustati 1934. a. Nüüd kehtestati standardõpikute nõue ning kutsuti kokku Matemaatika Õpetamise Komisjoni uus koosseis. Töötati välja uus matemaatika õppekava, milles paljuski loobuti eelmise õppekava uuenduslikest seisukohtadest. See protsess jätkus neljakümnendatel aastatel ja kui 1948. aastal mindi üle üleliidulistele programmidele ja õpikutele, siis oli jõutud peaaegu samasse kohta tagasi, kust kahekümnendatel aastatel alustati.

Seega jaguneb matemaatika õpetamise areng aastatel 1918–1950 kahte oluliselt erinevasse perioodi. Aastaid 1918–1936 võib nimetada *matemaatika koolikursuse sisu ja matemaatika õpetamise uuendamise perioodiks*, aastaid 1937–1950 *matemaatikaõpetuse standardiseerimise perioodiks*. Vastavalt sellele jaotusele tutvume ja analüüsime "Eesti koolimatemaatika ajaloo" III osas matemaatikaalast koolikirjandust. Alustame kronoloogilise ülevaatega kummalgi perioodil ilmunud matemaatika kooliraamatutest ja artiklitest. Seejärel aga süüvime silmapaistvamatesse matemaatikaõpikutesse, tõstes esile mõne ainelõigu käsitlusi. Eraldi on vaatluse alla võetud aritmeetika, algebra, geomeetria, matemaatilise analüüsi ja analüütilise geomeetria ning tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika käsitlused mitme autori raamatuis. Aineosade või õpikute käsitluse lõpus esitatakse andmeid õpikute autorite elu ja tegevuse kohta. Kahjuks on biograafilised andmed küllaltki lünklikud. Autoreid, kelle raamatuid ei ole lähemalt käsitletud, tutvustatakse joonealustes viidetes.

Käesolevas raamatus on neli peatükki.

1. Kronoloogiline ülevaade matemaatika kooliraamatutest ja matemaatika õpetamise küsimusi käsitlevatest artiklitest aastatel 1918–1936.

2. Kronoloogiline ülevaade matemaatika standardõpikuist ja matemaatika õpetamise küsimusi käsitlevatest artiklitest aastatel 1937–1950.

3. Algkooli matemaatika kooliraamatud. Aritmeetika käsitlusi kesk- ja kutsekoolide õpikuis.

4. Keskkoolide ja gümnaasiumide matemaatikaõpikud ja ülesannetekogud.

Viimases peatükis käsitletakse esmalt algebra ja geomeetria kooliraamatuid. Seejärel on aga vaatluse all kas eraldi raamatud või peatükid algebra ja geomeetria raamatuist, kus käsitletakse matemaatilise analüüsi ja analüütilise geomeetria ning tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika teemasid.

Selle raamatu lõpus toodud kirjanduse loetelu jaguneb kolme ossa: 1) artiklid ja arvustused, 2) õpikud ja ülesannetekogud ning 3) töövihikud, testid, kontrolltööde kogumikud. Vastavalt sellele jaotusele on tektis viite numbri ees kas täht A, Õ või T.

Käesoleva "Eesti koolimatemaatika ajaloo" III osa käsikirjaga tutvusid ja jagasid autorile kasulikke soovitusi dotsendid Lea Lepmann ja Jaan Reimand Tartu Ülikoolist ning tookordse Eesti Hariduse Arengukeskuse matemaatika kabineti juhataja Helgi Uudelepp. Neile kuulub autori tänu!

1. ÜLEVAADE MATEMAATIKA ÕPETAMISE UUENDAMISE PERIOODIL (1918–1936) ILMUNUD KOOLIRAAMATUTEST JA ARTIKLITEST

Selgituseks

Esimese Eesti Vabariigis välja antud matemaatika kooliraamatute ja ajakirjanduses avaldatud artiklite tutvustuse esitame kronoloogilisena. Sellest saab ülevaate õppekirjanduse olemasolust, konkurentsist õppekirjanduse turul, koolireformidega kaasnenud muudatustest õppekirjanduse väljaandmisel ning haridusministeeriumi ja Matemaatika Õpetamise Komisjoni tegevuse mõjust uute õpikute koostamisele ja väljaandmisele. Igal aastal ilmunud raamatute kohta esitatakse loetelu esiteks algkoolide ning teiseks kutse- ja keskkoolide ning gümnaasiumide kohta. Paraku need loetelud ei ole täiuslikud, s.t. et autoril ei ole õnnestunud kindlaks teha absoluutselt kõiki ilmunud matemaatikaraamatuid või nende kordustrükke.

Äratavad tähelepanu algkooli alternatiivsete õpikute hulk kahekümnendatel aastatel ja ka hiljemgi (vt. [A, 102]), kahekümnendate aastate algul avaldatud algebraraamatute konkurents, tööraamatute ja eriti töövihikute massiline kasutuselevõtt kolmekümnendate aastate keskel ning 1934. aastal alanud koolireformiga kaasnenud probleemid õppekirjanduse väljaandmisel (vt. ka [A, 13] ja [A, 14]).

1.1. Matemaatika kooliraamatutest ja artiklitest aastatel 1918–1920

Aastatel 1918–1920 toimus Eesti Vabadussõda. 1918. a. veebruarist kuni novembrini valitsesid siin Saksa okupatsioonivõimud. Seejärel kuulutati Narvas välja Eesti Töörahva Kommuun. Põhjalikumalt saadi Eesti hariduspoliitika rajamist alustada pärast rahu sõlmimist Nõukogude Venemaaga 1920. aasta algul. Tingimustele vastavalt ilmus neil aastail väga vähe kooliraamatuid. Teame, et 1918. a. ilmus A. Marfeldti ja R. Tiitso kooliraamatu "Rehkenduse ülesannete kogu" 4. trükk ja 1919. a. A. Bilowi ülesannetekogu I ja

II osa 3. trükk ning 1920. a. I ja II osa neljas, III osa kolmas trükk (vt. ka II, lk. 12 ja 17).

Õppeaasta 1918/19 kohta pakub selgitavat materjali J. Torgi toimetatud "Kooliõpetaja kalender-käsiraamat" [A, 146], mis ilmus saksa okupatsiooni ajal. Peale kalendri sisaldab käsiraamat 1x1-tabeli kuni tehteni 20x20, tuuakse raskus-, pikkus-, pinna-, ruumi-, vilja-, vedeliku- ja apteegis kasutatavad raskusmõõdud. Kaugusmõõtude tabelis leiame meile vähetuntud ühikuid. Seal võrreldakse kilomeetrit (1), verstaga (0,937), mere penikoormaga (0,540), Šveitsi tunniga (0,208), geograafilise ehk Saksa penikoormaga (0,133) ning Rootsi penikoormaga (0,094). Käsiraamatust leiame veel lühikese oskussõnastiku matemaatika, maateaduse, keemia ja arstiteaduse vene-, saksa- ja eestikeelsete terminitega. Koolimatemaatika ajaloo seisukohalt on huvipakkuv eestikeelse koolikirjanduse ülevaade, millest on välja jäetud need raamatud, mida enam müügil ei olnud. Matemaatikaraamatute hulgas olid kõik J. Kurriku ja J. Tülgi õpikud (vt. I, lk. 81 ja 88). Tutvustatakse neidki raamatuid, mis olid sel ajal trükis, aga ka neid, mis olid veel koostamisel. Matemaatikaraamatute kohta saame teada, et ilmumas on O. Perli "Aritmeetika" 2. trükk (vt. [Õ, 179]), T. Ussisoo* "Kujutav geomeetria" (vt. [Õ, 252]) ning et J. Depmanil on koostamisel "Geomeetria algõpetus" ja "Füüsika algõpetus", F.V. Mikkelsaarel "Geomeetria algõpetus" (vt. [Õ, 145–149]), M. Okasel "Arvlemisõpetus" (vt. [Õ, 171]), O. Perlil "Geomeetria" (vt. [Õ, 181, 186, 187]) ning D. Rootsmannil "Algebra ülesannete kogu" (vt. [Õ, 204, 205]). Järgnevast tekstist selgub õige pea, et kõik need raamatud ilmusidki, välja arvatud J. Depmani omad, viimane jäi teatavasti elama Nõukogude Venemaale.

J. Torgi kalender-käsiraamatus on esitatud veel rahvakoolide ning kõrgemate ja keskkoolide töö korraldamise määrused. Nähakse ette, et õpetus toimub Preisi õppekavade järgi, et kesk- ja kõrgkoolides on õppekeeleks saksa keel, rahvakoolides emakeel. On isegi öeldud, et "kui üks rahvuslik vähemus nõnda väike on, et tema jaoks iseäralise avaliku kooli asutamist võimalikuks ei peeta, sääl tuleb õpetusandmist avalikus koolis nõnda korraldada, et ka rahvuslikust vähemusest pärit olevaile lapsile emakeelne õpetus osaks saab". Sealjuures oli aga saksa keele tunde 1. klassis ette nähtud 6

---

* Ussisoo, Theodor (1878–1959) sündis Paides. Ta õppis Roosna vallakoolis, Tallinna kreiskoolis, Tallinna raudteetehnikakoolis, Leipzigi kunsttööstus- ja tehnikakoolis, kus omandas puutöömeistri (1910) ja sisearhitekti (1913) kutse. Töötas õpetajana mitmetes Tallinna koolides. Oli Riigi Tööstuskooli juhataja.

ja alates 2. klassist 10 tundi nädalas.

Tartu rahu sõlmimise järel elu normaliseerus. See tõi 1920. a. kaasa ka kooliraamatute väljaandmise, sealhulgas matemaatika õpperaamatute koostamise elavnemise. Kinnituseks alljärgnev 1920. a. ilmunud algkoolide matemaatikaraamatute loetelu*:

A. Behrsing**, T. Ussisoo "Laste geomeetria";

J. Koppel "Metoodiline matemaatika õpperaamat. I anne – algaste";

A. Kõiv*** "Aritmeetilised ülesanded algkoolidele. I, II, III kooliaasta " (samal aastal ilmus ka selle raamatu teine trükk);

H. Veidermann "Väike arvaja. I. õppeaasta". Selle raamatu juurde kuulusid sama autori metoodilised juhised pealkirja all ""Väike arvaja" juhataja".

Eestikeelsete matemaatikaraamatute autorite hulgas on väga vähe naisi. Selles mõttes on tähelepanuväärne, et juba esimeste eestikeelsete raamatute autorite hulgas oli üks nendest – Herta Veidermann.

Õpikute kirjutamist või uute trükkide avaldamist jätkasid 1920. aastal ka XX sajandi esimestest aastakümnetest juba tuttavad autorid ja nii lisandusid loetletud raamatutele veel järgmised:

A. Perli "Arvud elust. Vihik I–II. 3. ja 4. õppeaasta";

O. Perli "Aritmeetiliste ülesannete kogu 6-nda õppeaasta jaoks";

V. Pravdin, R. Mühlmann "Rehkendamise ülesannete kogu rahva alguskoolidele. Esimene jagu. 5. trükk";

F.V. Mikkelsaar "Geomeetria rahvakoolidele. 3. õppeaasta" ning juba nimetatud

---

* Raamatu lõpul toodud õpikute loetelus autorite järgi leiame nii raamatu ilmumisaasta kui ka ilmumiskoha.

** Behrsing, Arthur Alfred (1873–1929) sündis Lätimaal, Velene kihelkonnas. Õppis Riia gümnaasiumis ja aastatel 1893–1897 Tartu Ülikoolis teoloogiat. Oli 1897–1907 koduõpetajaks Eestis ja Saksamaal, õpetajaks Tallinna Hansa koolis (1907–1914), Toomkoolis (1914–1921), Viljandi Saksa Eragümnaasiumi juhataja (1921–1927), Võru Õpetajate Seminari õpetaja (1927–1929). Suri 1929. a. ootamatult välisreisi ajal Kölnis.

*** Kõiv, August (1886–?) sündis Mõnistes. Õppis sealses vallakoolis (1897–1901), Ritsiku kirikukoolis (1901–1902), Tsooru ministeeriumikoolis (1902–1903), Taheva vallakoolis (1903–1904), Valga linnakoolis (1904–1906) ning sealsetel pedagoogilistel kursustel (1906–1907). Töötas köster-kooliõpetajana Kaukaasias Maruhha eesti asunduses (1907–1910). Jätkas õppimist Tiflisi Õpetajate Instituudis (1910–1914), oli samas gümnaasiumiõpetajaks (1914–1918). Seejärel asus elama Eestisse. Oli õpetajaks Valgas (1918–1920), koolinõunikuks Valgas (1920–1934), Petseris (1934–1936) ning seejärel uuesti Valgas.

A. Bilow "Aritmeetiliste ülesannete kogu keskkoolidele. I, II ja III jagu".

Keskkooliõpikute puudujäägi leevendamiseks anti sel aastal mimeograafilises paljunduses välja järgmised raamatud (konspektid):

O. Sulla "Planimeetria I";
J. Lang "Planimeetria II";
E. Kilkson "Stereomeetria I";
V. Nano "Stereomeetria II";
H. Jürman "Algebra II";
K. Maasik "Algebra III";
J. Lang "Algebra IV".

"Trigonomeetria ja trigonomeetriliste ülesannete kogu"*.

Lisaks neile ilmusid sel aastal trükis ka mõned keskkooliõpikud ja ülesannetekogud:

T. Koik "Elementaarne algebra. Õpperaamat koolidele ja iseõppijaile";
V. Nano "Trigonomeetria õpperaamat keskkoolidele";
V. Päss "Algebra ülesannete kogu I";
D. Rootsmann "Algebraline analüüs ülesandeis koolidele ja iseõppijaile I ja II";
Nathing-Perli "Ruumi algõpetus II";
T. Ussisoo "Projektsioon-joonestamine (Õpik kutsekoolidele)".

Esitatud loetelust ilmneb, et juba 1920. aastal olid Eesti koolid suhteliselt hästi varustatud algkooli aritmeetika- ja keskkooli algebraraamatutega.

Veel avaldati 1920. a. A. Veikmanni "Tabelid protsentide väljaarvamiseks", mis olid koostatud kapitali juurdekasvu leidmiseks. Ulatusliku artikli "Matemaatika õpetamise uuendusvoolud" avaldas ajakirjas "Kasvatus" J. Prümmel [A, 104]. Selles tutvustati sajandi algul rahvusvaheliselt levinud reformiliikumise ideed. Ta tõi esile matemaatika õpetamise praktilised, hariduslikud ja kasvatuslikud eesmärgid ning tutvustas keskkooli matemaatikakursuse uuendamisnõudeid. Oleme neid ideid tutvustanud selle raamatu II osas (vt. II, 2.1.). Samas ajakirjas ilmus veel V. Pässi kirjutis "Logaritmide tabelite üle" [A, 105], milles rõhutati eestikeelsete tabelite kasutuselevõtu vajalikkust. U. Kurvits oma artiklis "Algkool ja koolikohustus"

* Selles raamatus ei ole autori nime toodud. On põhjust arvata, et autoriks on Villem Nano. Andmed puuduvad ka raamatu "Algebra I" kohta.

[A,51] juhtis tähelepanu sellele, et õpetajad ei tunne geomeetria eelkursust, ja ka asjaolule, et meetermõõdustikku tegelikkuses veel ei tarvitata.

Chr. Brüller oma arvustuses F.V. Mikkelsaare 1. õppeaasta geomeetria raamatu kohta ei ole rahul selle aine laiaulatusliku õpetamisega väljal ning ei toeta seal kasutatud termineid,nagu siir, sõõr, liitmine, lahutamine. A. Perlile heidetakse aga ette, et ta on oma raamatus säilitanud Kisseljovide ja Vereštšaginite "surnud vaimu" ning seda, et tema ülesannete andmed pärinevad kõik tsaari-Venemaalt aastatest 1837–1917. Ülesanded andmetega Eestist puuduvad aga üldse.

Oleme suutnud kindlaks teha 29 matemaatika kooliraamatu, 2 artikli, 1 arvustuse (D. Rootsmanni ja F.V. Mikkelsaare ja A. Perli õpikute kohta) ja ühtede tabelite* ilmumise 1920. aastal.

1.2. Matemaatika kooliraamatutest ja artiklitest 1921. a.

V. Pässi soovitus koostada eestikeelseid tabeleid leidis juba 1921. a. elavat vastukaja. Ilmusid koguni kolmed logaritmide tabelid. Need olid kokku seadnud J. Hansen, V. Päss ja J. Sarv.

Algkooli jaoks laiendas J. Koppel sel aastal oma metoodilist raamatut ülesannetekoguga ning F.V. Mikkelsaar avaldas esimese eestikeelse geomeetria metoodika raamatu. Sajandi esimestest aastakümnetest tuntud autorite A. Marfeldti, F.V. Mikkelsaare ja A. Perli kõrval alustasid matemaatikaraamatute turgu rikastama H. Treffneri gümnaasiumi õpetajad Karl Rudolf Veski ja Jüri Grünthal.

Algkoolile ilmusid järgmised raamatud:

J. Koppel "Ülesannetekogu metoodilise matemaatika õpperaamatu juure";

A. Marfeldt "Aritmeetika ülesannetekogu. I ja II õppeaasta";

F.V. Mikkelsaar "Geomeetria algkoolidele. 1. osa. II trükk";

F.V. Mikkelsaar "Geomeetria metoodika";

A. Perli "Arvud elust. III vihk, 5. õppeaasta";

A. Perli "Arvud elust. 1. ja 2. õppeaasta";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika. I õppeaasta";

---

* Andmed matemaatilise kirjanduse kohta siin ja edaspidi tuginevad V. Reino diplomitööle [A, 114], millele lisanduvad mõned autori täiendused. On aga põhjust arvata, et neis andmetes on ikkagi lünki. Seetõttu ei saa kokkuvõtte arve siin ja edaspidi võtta täpsetena.

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetiliste ülesannete kogu. II õppeaasta";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika. III õppeaasta";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika. IV õppeaasta".

Keskkoolidele ilmusid 1921. a. järgmised matemaatikaraamatud:

O. Perli "Aritmeetika õpperaamat. 3. trükk";

G. Rägo "Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned";

N. Shaposhnikov, N. Valtsev "Algebraliste ülesannete kogu. I ja II jagu. K.R. Veski ja J. Grünthali tõlkes".

Lisaks ilmusid eraldi veel tehnikumidele:

P. Madisson, T. Ussisoo "Planimeetria";

P. Madisson "Stereomeetria";

G. Mootse "Praktiline perspektiivi õpetus. I ja II vihk";

T. Ussisoo "Geomeetriline joonestamine. II trükk".

Veel anti 1921. a. välja "Tehnika käsiraamat", mis sisaldas matemaatika, mehaanika ja ainete tehnoloogia küsimusi. Matemaatika osa oli koostanud Johannes Kiivet. Temaatiliselt hõlmas see käsiraamat matemaatikat enam kui ükski teine vaadeldaval perioodil ilmunud kooliraamat.

Kahekümnendate aastate algul avaldati nii nagu esimese kümnendi teisel poolelgi (vt. II, 1.2.) matemaatikaraamatute kohta hoogsalt arvustusi. 1921. a. ilmusid ajakirjas "Kasvatus" P. Madissoni ja T. Ussisoo "Planimeetria" [A, 28], V. Pässi "Algebra ülesannete kogu I" [A, 38], D. Rootsmanni "Algebralise analüüsi I ja II" [A, 169] ning G. Rägo "Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijoonte" [A, 168] arvustused. Need olid põhiliselt positiivsed. D. Rootsmannile heideti siiski ette liigset teoretiseerimist ja algebralistele tehetele mitteküllaldase tähelepanu osutamist. Vastuses õigustab autor oma käsitlust programmi puudumisega ja väitega, et algebra kursus ei pea algusest peale piirduma võimalikult tehniliste oskustega. Prof. K. Väisälä esitab aga G. Rägole mõningaid soovitusi sisu muutmiseks ning juhib tähelepanu mõnedele vigadele.

Sel aastal avaldati trükis ka prof. G. Rägo Tartu Ülikoolis peetud esiloeng "Mis on matemaatika ja milles on tema väärtus" [A, 124]. Seda loengut refereerime lühidalt oma raamatu IV osas.

Arvatavasti ilmus 1921. a. kokku 20 matemaatika kooliraamatut, kolmed tabelid, 1 artikkel (loeng) ja 5 arvustust.

1.3. Matemaatika kooliraamatutest ja artiklitest 1922. aastal

1922. a. jätkasid algkooliõpikute kirjutamist Viljandi linnapeaks saanud A. Maramaa (Marfeldt), haridusministeeriumi juhtivaks töötajaks tõusnud F.V. Mikkelsaar, samuti K.R. Veski ja J. Grünthal. A. Maramaalt ilmusid ülesannetekogud III ja IV klassile, F.V. Mikkelsaarelt geomeetriaraamatute kordustrükid, K.R. Veskilt ja J. Grünthalilt aritmeetika kooliraamatud juba kõigile algkooliklassidele. Raamatu "Väike arvaja" II klassile oli koostanud H. Veidermann koos hilisema Tallinna koolinõuniku Christian Brülleriga.

Algkooli vanematele klassidele ilmus geomeetriaõpik A. Maramaa vennalt, keemik Jaan Maramaalt. Keskkoolidele andis Tallinna reaalgümnaasiumi õpetaja Paul Ederberg välja kaks algebraraamatut, ühe 7.–8., teise 8.–9. õppeaasta jaoks. Ilmus kaks stereomeetriaõpikut. Ühe neist oli koostanud hilisem matemaatikadoktor Edgar Krahn, teise K.R. Veski ja J. Grünthal. G. Rägo jätkas 1922. a. kõrgema matemaatika käsitlemist matemaatilise analüüsi õpikus, E. Krahn avaldas G. Rägo raamatutega konkureeriva A. Wildbretti raamatu tõlke "Analüütiline geomeetria ja diferentsiaalarvutus".

Esitame nüüd 1922. a. ilmunud matemaatikaraamatute loetelu.

1. Algkoolidele:

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. III õppeaasta. 2. trükk";

A. Marfeldt "Aritmeetika ülesannete kogu. IV õppeaasta";

J. Maramaa "Geomeetria algkooli kõrgematele klassidele";

F.V. Mikkelsaar "Geomeetria algkoolidele. 1. osa. III trükk";

F.V. Mikkelsaar "Geomeetria algkoolidele. 2. osa. II trükk";

M. Okas "Arvlemisõpetus. Esimene osa. Täisarvud";

H. Veidermann, Chr. Brüller "Väike arvaja. II õppeaasta";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika. I õppeaasta. Teine, täiendatud trükk";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetiliste ülesannete kogu. Teine trükk";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika. III õppeaasta. Teine trükk";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika. IV õppeaasta. Teine trükk";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika. V õppeaasta";

K.R. Veski, J. Grünthal "Artimeetika ühes algebra eelkursusega. VI õppeaasta".

2. **Keskkoolile:**

P. Ederberg "Täis- ning murdavaldused ja esimese astme võrrandid. Algebra ülesannete kogu ja kokkuvõtlik käsiraamat VII ja VIII õppeaasta jaoks";

P. Ederberg "Juured ja ruutvõrrandid. Algebra ülesannete kogu VIII ja IX õppeaasta jaoks";

E. Krahn "Stereomeetria ühes kujutava geomeetriaga";

G. Rägo "Matemaatilise analüüsi elemendid. Õpperaamat ja ülesanded";

K.R. Veski, J. Grünthal "Stereomeetria";

A. Wildbrett "Analüütilise geomeetria ja diferentsiaalarvamise põhijooned. Eestistanud E. Krahn".

1922. a. ilmusid veel V. Pässi logaritmide tabelite teine trükk [Õ, 192] ja matemaatikasõnastiku oluliselt täiendatud kolmas trükk [Õ, 136].

Ajakirjanduses, eelkõige ajakirjas "Kasvatus" hakati 1922. a. avaldama ka populaarteaduslikke ja teaduslikke artikleid. Nii kirjutas J. Kiivet suurte arvude nimetustest nii Prantsuse-Vene kui ka Inglise-Saksa süsteemis [A, 40]. E. Ritso* avaldas põhilise osa oma magistritööst pealkirja all "Jooni õpetajate ettevalmistamisest vanas Tartu Ülikoolis" [A, 116]; J. Sarv tutvustas ajakirjas "Loodus" Einsteini teooriat [A, 131]. Ajakirjas "Kasvatus" anti kolmanda üleriikliku matemaatika-, füüsika- ja kosmograafiaõpetajate kongressi ülevaade [A, 44].

Ilmusid G. Rägo esimeste eestikeelsete kõrgema matemaatika õpikute "Matemaatilise analüüsi elemendid" [A, 82] ja "Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned" arvustused [A, 23]. V. Nano tegi mõned märkused fraseoloogia kohta ning lõpetab järgmiste sõnadega: "... teose üle lehviv filosoofiline vaim ning tema enese elavus ja värskus on omadused, mis sunnivad prof. G. Rägo "Matemaatilise analüüsi elemente" hindama kui väärtuslikku toodet üleilmlikus koolikirjanduses".

Kritiseeriti veel H. Veidermanni ja Chr. Brülleri 1. ja 2. õppeaasta raamatuid "Väike arvaja" [A, 39], K.R. Veski ja J. Grünthali

---

* Ella Ritso (1894–1973), üks esimesi Eesti naismagistreid matemaatika erialal. Sündis Paistus ja on sinna ka maetud. Õppis Viljandi ja Pärnu tütarlastegümnaasiumides ning Tartu Ülikoolis matemaatikat. Magistritöö "Matemaatika õpetamisest Tartu Ülikoolis Saksa ja Vene ajal" valmis 1926. a. prof. G. Rägo juhendamisel. Oli matemaatikaõpetaja Petseris, Otepääl, Türil, Jõgeval ja mujal. On avaldanud ajakirjas "Kasvatus" pedagoogilis-metoodilisi artikleid.

I–III klassi aritmeetikaraamatuid [A, 157], J. Koppeli metoodilist matemaatika õpperaamatut [A, 143] ning V. Nano trigonomeetriaõpikut [A, 173]. Viimases heidetakse autorile ette, et valemite tuletamisel on liialt vähe konkreetsust, et esitatud astronoomiaülesanded on kooli jaoks liiga rasked ning, et autor on liialt vähe tuttav didaktika ja metoodikaalase kirjandusega,aga samuti eestikeelse terminoloogiaga.

Teadaolevatel andmetel avaldati 1922. aastal trükis 20 matemaatika kooliraamatut, 6 arvustust, 4 artiklit, ühed tabelid ning matemaatikasõnastiku kolmas trükk.

1.4. Matemaatika kooliraamatutest ja artiklitest 1923. aastal

1923. a. jätkasid juba tuntud autorid A. Maramaa, F.V. Mikkelsaar, K.R. Veski ja J. Grünthal suuremahuliselt oma algkooliraamatute väljaandmist. Peale nende ilmus G. Kuldvere raamat "Meie kodupaik allikana arvuteaduse õpetamiseks" [Õ, 95].

Keskkoolidele jätkas O. Perli geomeetriaraamatute avaldamist pealkirja all "Ruumi algõpetus". Tallinna Tehnikumi inspektor V. Päss andis välja lisaks oma 1920. a. ilmunud algebraraamatu esimesele osale teise osa, K.R. Veski ja J. Grünthali tõlkes ilmus veel kord N. Shaposhnikovi ja N. Valtsevi algebra ülesannete kogu. Veel jõudsid kooli K.R. Veski "Planimeetria", sama autori ja J. Verendeli stereomeetria ülesannete kogu ning V. Nano trigonomeetriaõpiku teine trükk. Avaldati veel "Kantjala mõõtude tabel" metsamaterjali massi väljaarvutamiseks, P. Rapka "Meetermõõdustik" [Õ, 193] ning H. Treufeldti "Mõõtude käsiraamat" [Õ, 249]. Matemaatikaüliõpilastele anti välja J. Sarve loengute põhjal koostatud "Analüütiline geomeetria". J. Sarv jätkas ka sel aastal artiklite avaldamist. Ta kirjutas Blaise Pascalist [A, 130] ja valguse raskusest [A, 133], H. Jaakson aga lõpmatuse mõistest [A, 25].

Arvustusi sel aastal ei avaldatud. J. Koppel vastas ainult oma raamatu kriitikale [A, 48].

Järgnevalt loetleme teadaolevad 1923. a. ilmunud matemaatika kooliraamatud.

1. Algkoolile:

J. Koppel "Ülesannete kogu metoodilise matemaatika õpperaamatu juurde";

G. Kuldvere "Meie kodupaik allikana arvuteaduse õpetamiseks";

J. Maramaa "Geomeetria algkooli kõrgematele klassidele. Teine parandatud trükk";

A. Maramaa (A. Marfeldt) "Aritmeetika ülesannete kogu. II õppeaasta. Teine parandatud ja täiendatud trükk";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. IV õppeaasta. Teine parandatud trükk";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. V õppeaasta";

F.V. Mikkelsaar "Geomeetria algkoolidele. 2. osa. III trükk";

F.V. Mikkelsaar "Geomeetria alg- ja täienduskoolidele. Kordamis- ning täienduskursus. VI, VII ja VIII õppeaastale";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika. I õppeaasta. Kolmas trükk";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetiliste ülesannete kogu. II õppeaasta. Kolmas trükk";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika. III õppeaasta. III trükk";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika. IV õppeaasta. III trükk";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika, geomeetria ja algebra. VI õppeaasta. Teine täiendatud trükk".

2. Keskkoolile:

V. Nano "Tasapinnaline trigonomeetria ja sfäärilise trigonomeetria alged. Teine trükk";

O. Perli "Ruumi algõpetus. I anne. Teine ümbertöötatud trükk";

V. Päss "Algebra ülesannete kogu II. Teooria ja ülesanded (X ja XI õppeaasta jaoks)";

N. Shaposhnikov, N. Valtsev "Algebraliste ülesannete kogu. I jagu. Ümber töötanud ja täiendanud K.R. Veski ja J. Grünthal. Teine trükk";

K.R. Veski "Planimeetria. Keskkoolikursus";

K.R. Veski, J. Verendel "Stereomeetriliste ülesannete kogu. Keskkoolikursus".

Üldse ilmus 1923. aastal 20 matemaatika kooliraamatut, kolmed tabelid, 3 artiklit ja avaldati ühe arvustuse vastus.

1.5. Matemaatika kooliraamatutest ja artiklitest 1924. a.

1924. a. ilmusid Chr. Brülleri, A. Maramaa, F.V. Mikkelsaare, K.R. Veski ja J. Grünthali algkooliõpikute järjekordsed trükid. Uus autorite kollektiiv (K. Treffner, J. ja E. Kuulbergid, O. Perli, E. Martinson) alustas samuti algkooli matemaatikaõpikute "Elavad arvud" väljaandmist, suurendades veelgi algkooli matemaatikaraamatute konkurentsi. Viimast õpikut täiendas J. Kuulbergi poolt trükis avaldatud metoodiline veste "Kuidas "ükskordüks" Ilmarile vaevata meelde jäi" [Õ, 97]. H. Veidermanni surma tõttu 1923. a. jätkas raamatute "Väike arvaja" väljaandmist Chr. Brüller üksinda.

A. Maramaa andis II–IV klassile välja eraldi geomeetriaraamatud. See tekst oli siiski juba varem avaldatud ka tema vastavate klasside aritmeetikaraamatutes. F.V. Mikkelsaar täiendas oma geomeetriaraamatuid aritmeetikaosaga. Esile tuleb tõsta A. Maramaa ja J. Kuulbergi poolt õpetaja jaoks välja antud metoodikaraamatuid. Üheltpoolt olid väärtuslikud seal toodud metoodilised juhised, teiseltpoolt kindlustasid autorid sellega oma raamatute kasutatavust.

Keskkoolid said täienduseks P. Ederbergi algebraülesannete kogu II osa, K.R. Veski koos A. Raudsepaga andis välja planimeetriaülesannete kogu ning koos J. Grünthaliga stereomeetriaõpiku 2. trüki.

1924. a. ilmusid järgmised matemaatikaõpikud.

1. Algkoolidele:

Chr. Brüller "Väike arvaja. III ja IV õppeaasta. I osa";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. I õppeaasta. Õpilase raamat. 2. ümbertöötatud trükk";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. I õppeaasta. Käsiraamat õpetajale";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. II õppeaasta. 3. trükk";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. III õppeaasta. 3. parandatud ja täiendatud trükk";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. IV õppeaasta. 3. trükk";

A. Maramaa "Geomeetria. Algkooli II õppeaasta";

A. Maramaa "Geomeetria. Algkooli III õppeaasta";

A. Maramaa "Geomeetria. Algkooli IV õppeaasta";

F.V. Mikkelsaar "Geomeetria algkoolidele. III osa. 2. parandatud trükk";

F.V. Mikkelsaar "Algkooli matemaatika. I õppeaasta";

K. Treffner, J. ja E. Kuulbergid, O. Perli, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. I õppeaasta";

K. Treffner, J. ja E. Kuulbergid, O. Perli, E. Martinson "Metoodilised näpunäited "Elavate arvude" tarvitajaile";

H. Veidermann, Chr. Brüller "Väike arvaja. II õppeaasta. Teine, parandatud ja täiendatud trükk";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika ja geomeetria. V õppeaasta";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika ühes algebra eelkursusega. VI õppeaasta. Teine täiendatud trükk".

2. Keskkoolidele:

H. Blaubrück "N. Shaposhnikovi ja N. Valtsevi algebraliste ülesannete kogu II jao VII, VIII ja X(XI) osade ülesannete täielikud lahendused";

P. Ederberg "Algebra ülesannete kogu ja kokkuvõtlik käsiraamat III (keskkooli IV ja V klassi jaoks)";

K.R. Veski, A. Raudsepp "Planimeetriliste ülesannete kogu keskkoolidele, algkooli täiendusklassidele ja iseõppijaile";

K.R. Veski, J. Grünthal "Stereomeetria. Teine muudetud trükk".

Ajakirjas "Kasvatus" arutles J. Kuulberg ulatuslikus artiklis [A, 52] algkooli matemaatika õppekavade üle. Ta heidab kavakoostajaile ette, et nad on laskunud liigsetesse metoodilistesse üksikasjadesse ja sellega piiranud õpetajate vabadust. Soovitatud tööprintsiibi rakendamine osutub kavade ülepaisutamise ja vajalike tingimuste puudumise tõttu mittetäidetavaks. Üldõpetuse nõuded takerduvad aga õppekavade kooskõlastamatuse taha.

Kolmandal matemaatika-, füüsika- ja kosmograafiaõpetajate kongressil 1922. a. vastu võetud otsus koostöö arendamiseks ajakirjaga "Loodus" oli tulemusi andnud. Juba 1922. ja ka 1923. a. ilmusid seal Eesti juhtivate matemaatikute populaarteaduslikud artiklid. Nüüd, 1924. a. avaldas ajakiri neljanda kongressi ülevaate [A, 77] ning J. Nuudi sellel kongressil peetud ettekande "Geomeetria üldhariduslise õppeainena koolis" [A, 84]. Samas ajakirjas avaldati veel J. Sarve artikkel "Geomeetria ehk ruumiteadus" [A, 132].

Üliõpilastele ilmus trükis J. Sarve raamat "Analüütilise geomeetria algkursus".

Negatiivse arvustuse K.R. Veski ja J. Grünthali aritmeetikaraamatute kohta avaldas P. Kolts [A, 46]. Retsensent seab kahtluse alla suurima ühisteguri (Eukleidese algoritmi) leidmise ja kolmlause ülesannete lahendamise vajalikkuse aritmeetika algkursuses.

Teadaolevalt rikastas 1924. aasta eestikeelset matemaatikakirjandust 22 õpiku ja ülesannetekoguga, 4 artikli ja 1 arvustusega.

1.6. Matemaatika kooliraamatuid ja artikleid 1925. aastal

1925. a. jätkasid ilmumist Chr. Brülleri, A. Maramaa, F.V. Mikkelsaare, K.R. Veski ja J. Grünthali ning eelmisel aastal tegevust alustanud autorite kollektiivi algkoolide matemaatikaraamatud. Herta Veidermanni asemel alustas Chr. Brülleriga koostööd Adeele Oengo-Johanson. Keskkoolis kasutamiseks anti sellel aastal välja isegi kolmed tabelid (J. Mülberg, V. Päss ja ühed autorita) [Õ, 156, 192, 276]. Juba eelmisel aastal ennast arvustajana tutvustanud P. Kolts jätkas sama tegevust ning avaldas ajakirjas "Kasvatus" artikli "Mõõdud ja mitmenimelised arvud algkooli matemaatikas" [A, 47] ning I klassi õpiku "Elavad arvud" arvustuse [A, 45]. Ta rõhutas, et kuigi kongressidel seatakse uusi sihte, ilmuvad raamatud juba eluvõõraste ja võõrsilt laenatud ülesannetega. Näiteks toob ta veduri kiiruse 34 versta 287 sülda 1 jalg 4 tolli 8 liini tunnis. Sellega koos soovitab ta muuseumi saata ka teised vananenud mõõdud, nagu penikoorem, perkovits, solotnik, dool, vaat jt. Arvustades raamatut "Elavad arvud", loeb ta ülesannete kokkuseadmist jutukesteks huvitavaks, kuid ei pea õigeks nende toomist õpikus. Ta nõudis terminite "arvkuju" ja "arvpilt" eristamist ning kiitis autorite printsiipi "parem põhjalikult vähem kui pealiskaudselt palju".

1925. aastal ilmusid ka Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjoni Toimetuste 1. ja 2. number. Nagu varasemast juba teada, avaldati neis uus algkooli matemaatika õppekava projekt [II, lk. 86] ning matemaatika sümboolika [II, lk. 136].

Loetleme nüüd 1925. a. ilmunud matemaatika kooliraamatud.

1. Algkoolile:

Chr. Brüller, A. Oengo-Johanson "Väike arvaja. III ja IV õppeaasta. II osa";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. V ja VI õppeaasta";

F.V. Mikkelsaar "Algkooli matemaatika. I õppeaasta. Lühendatud väljaanne õpilastele";

K. Treffner, J. ja E. Kuulbergid, O. Perli, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. II õppeaasta";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika ja geomeetria. IV õppeaasta. Neljas trükk";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika ja geomeetria. V õppeaasta. Neljas trükk".

2. Keskkoolile 1925. a. matemaatikaraamatuid ei ilmunud.

Kokku avaldati 1925. aastal 6 õpikut, 2 MÕK-i Toimetiste numbrit, kolmed logaritmide tabelid (neist ühed viiekohalised), 1 artikkel ja 1 arvustus.

1.7. Matemaatika kooliraamatuid ja artikleid 1926. aastal

1926. a. jätkus Chr. Brülleri, A. Maramaa, F.V. Mikkelsaare ning K.R. Veski ja J. Grünthali algkooli matemaatikaraamatute konkurents. Keskkoolidele ilmus O. Pärli "Ruumi algõpetus ülesandeid" II osa, ilmus ka N. Šapošnikovi ja N. Valtsevi ülesannetekogu 3. trükk. E. Lindenberg avaldas geomeetria ja trigonomeetria valemite kogu [Õ, 118], A. Kudder kasvatamise abitabeli arvelauale kuni korrutiseni 10000x10000 [Õ, 94]. Lugejateni jõudis Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjoni Toimetuste kolmas number "Keskkooli matemaatika õppekava projekt" [II, lk. 115].

Eelmisel aastal avaldatud algkooli matemaatika õppekava arvustasid ajakirjas "Kasvatus" Chr. Brüller [A, 3] ja J. Unt [A, 152]. Samas ajakirjas ilmusid veel matemaatikadoktoriks tõusnud Edgar Krahni venna Arved Krahni artikkel "Ligikaudne arvestamine" [A, 49] ning H. Summeri kirjutis "Matemaatika õpetus ja tegelik elu" [A, 139].

1926. aastal ilmusid järgmised õpikud.

1. Algkoolile:

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannetekogu. I õppeaasta. Õpilase raamat. Kolmas trükk";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. II õppeaasta. Neljas trükk";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. III õppeaasta. Neljas trükk";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. IV õppeaasta. Neljas trükk";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. V ja VI õppeaasta. Teine trükk";

F.V. Mikkelsaar "Algkooli matemaatika. 2. õppeaasta";

F.V. Mikkelsaar "Algkooli matemaatika. 3. õppeaasta";

H. Veidermann "Väike arvaja. I õppeaasta. A. Oengo-Johanson ja Chr. Brüller teiseks trükiks ümber töötanud";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika ja geomeetria. III õppeaasta. Neljas trükk";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika ja geomeetria. IV õppeaasta. Viies trükk";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika ja geomeetria. V õppeaasta. Viies trükk".

2. Keskkoolile:

O. Pärli "Ruumi algõpetus ülesandeis. II anne";

N. Shaposhnikov, N. Valtsev "Algebraliste ülesannete kogu. I jagu. Ümber töötanud ja täiendanud K.R. Veski ja J. Grünthal. Kolmas trükk".

Üldse ilmus 1926. aastal 13 matemaatika kooliraamatut, MÕK-i Toimetuste kolmas number, ühed tabelid, 1 valemite kogu ja 4 artiklit. Arvustusi sel aastal ei avaldatud.

1.8. Matemaatika kooliraamatuid ja artikleid 1927. aastal

1927. a. ilmusid jällegi Chr. Brülleri, A. Maramaa ja F.V. Mikkelsaare algkooli matemaatika kooliraamatud. Oma esimesed keskkooliõpikud andis sellel aastal välja hilisem Tallinna kõrgkoolide matemaatikaprofessor ja kateedrijuhataja A. Borkvell. Need olid "Stereomeetria" ja "Matemaatilise analüüsi põhimõisted ja rakendused". Peale nende raamatute ilmus ka tema koostatud tabelite ja valemite kogu. Tabelid ilmusid sel aastal veel J. Mülbergilt ja V. Pässilt. Jätkus O. Pärli raamatu "Ruumi algõpetus" väljaandmine keskkoolile, seekord kolmas osa. Sellel aastal ilmus Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjoni Toimetuste neljas number "Matemaatika sõnastiku täiendused ja muudatused..." [II, lk. 135]. Ajakirjas "Kasvatus" jätkus diskussioon algkooli õppekava projekti ümber [A, 155, 156], ajakirjas "Loodus" ilmus E. Krahni kriitiline arvustus A. Borkvelli matemaatilise analüüsi õpiku kohta [A, 50].

Järgnevalt esitame 1927. a. ilmunud matemaatikaraamatute loetelu.

1. Algkoolile:

Chr. Brüller, A. Oengo-Johanson "Väike arvutaja. V õppeaasta";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. I õppeaasta. Õpilase raamat. Neljas trükk";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. Geomeetria. III ja IV õppeaasta. Viies muutmata trükk";

A. ja J. Maramaa "Geomeetria. V ja VI õppeaasta";

F.V. Mikkelsaar "Algkooli matemaatika. 4. õppeaasta".

2. Keskkoolile:

A. Borkvell "Matemaatilise analüüsi põhimõisted ja rakendused. Õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele";

A. Borkvell "Stereomeetria. Õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele";

O. Pärli "Ruumi algõpetus. III anne. Stereomeetria".

Kokku ilmus 1927. aastal 8 matemaatika kooliraamatut, MÕK-i Toimetuste neljas number, kolmed logaritmide tabelid, 2 arvamust algkooli matemaatika õppekava kohta ning 1 arvustus.

1.9. Matemaatika kooliraamatuid ja artikleid 1928. aastal

1928. a. ilmusid A. Maramaa, F.V. Mikkelsaare ja jälle ka K. Treffneri jt. matemaatika kooliraamatud. K.R. Veskilt ja J. Grünthalilt ilmus sel aastal nende viimane matemaatika kooliraamat. J. Grünthal oli lõpetanud Tartu Ülikooli arstiteaduskonna ning siirdus ennast täiendama välismaale. Keskkooliõpikud ilmusid O. Koolilt ja G. Rägolt. Viimane alustas MÕK-i poolt välja töötatud keskkooli õppekava ja selle seletuskirja põhimõtete realiseerimist keskkooli matemaatika tööraamatute seeria avaldamisega. Ilmusid V. Nõgese ja A. Tamme mõõtude käsiraamatud meetermõõtude ja endiste vene mõõtude seoste kohta [Õ, 169, 239] ning algkooli [II, lk. 89] ja keskkooli [II, lk. 122] õppekavad. Füüsika Õpetamise Komisjoni Toimetuste neljandas numbris avaldati protokollilised ülevaated ülemaalistest matemaatika-, füüsika- ja kosmograafiaõpetajate kongressidest ajavahemikul 1917–1927 [II, lk. 52]. Ajakirjas "Loodus" ilmus G. Rägo keskkooli esimese klassi matemaatika tööraamatu kriitiline arvustus [A, 98]. See näitas, et uued suunad matemaatikaõpetuses polnud kõigile meeltmööda.

1928. a. ilmusid järgmised matemaatika kooliraamatud.

1. Algkoolile:

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. II õppeaasta. Viies muutmata trükk";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. V ja VI õppeaasta. Kolmas trükk";

A. Maramaa "Algkooli matemaatika õppetöö kavad. A. Maramaa matemaatika õpperaamatute juurde";

F.V. Mikkelsaar "Algkooli matemaatika. 5. õppeaasta";

K. Treffner, J. ja E. Kuulbergid, O. Perli, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. III õppeaasta";

K.R. Veski, J. Grünthal "Aritmeetika, geomeetria ja algebra. VI õppeaasta. Kolmas trükk".

2. Keskkoolile:

O. Kool "Trigonomeetrilisi planimeetria ülesandeid. Keskkooli kursus";

O. Kool "Analüütilise geomeetria põhijooni ja ülesandeid. Gümnaasiumi humanitaarharu kursus";

G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Algebra I klassi kursus";

G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Algebra II klassi kursus".

Üldse avaldati 1928. aastal 10 matemaatika kooliraamatut, kahed mõõtühikute tabelid, 2 õppekava ja 1 arvustus.

1.10. Matemaatika kooliraamatuid ja artikleid 1929. aastal

1929. a. jätkus endiselt A. Maramaa, F.V. Mikkelsaare, autorite kollektiivi K. Treffner jt. (eemale oli jäänud O. Pärli) algkooli ning G. Rägo, A. Borkvelli ja O. Kooli keskkooli matemaatikaraamatute ilmumine. Kutsekooli nõudmisi arvestasid N. Puura kaubandusaritmeetika, L. Sapotzki kujutava geomeetria ja T. Ussisoo geomeetriaraamatud. Ilmus veel J. Kuulbergi "Algkooli matemaatika metoodika" [Õ, 96], K. Vahtberg avaldas protsentide tabelid kapitali juurdekasvu arvutamiseks [Õ, 255]. Ajakirjas "Kasvatus" ilmus E. Ritso artikkel "Soove matemaatika õpetamise suhtes algkoolides" [A, 118] ning ajakirjas "Loodus" J. Grünthali positiivne arvustus G. Rägo matemaatika tööraamatutele [A, 19]. E. Ritso soovitas koolis õpetada pisut ka prof. G. Rägo poolt propageeritud lühendatud arvutamist, eitas tõestamise otstarbekust algkoolis ning juhtis tähelepanu sakslaste püüdlustele õpilaste aktiivsuse ja isetegevuse arendamiseks.

Esitame nüüd 1929. a. ilmunud matemaatika kooliraamatute loetelu.

1. Algkoolile:

J. Kuulberg "Algkooli matemaatika metoodika. II (Geomeetria)";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. I õppeaasta. Õpilase raamat. Viies muutmata trükk";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannete kogu. Geomeetria. III ja IV õppeaasta. Kuues muutmata trükk";

F.V. Mikkelsaar "Algkooli matemaatika. 2. õppeaasta. II trükk";

F.V. Mikkelsaar "Algkooli matemaatika. 3. õppeaasta. 2. trükk";

F.V. Mikkelsaar "Algkooli matemaatika. 4. õppeaasta. 2. trükk (muudetud)";

F.V. Mikkelsaar "Algkooli matemaatika. 5. õppeaasta. II trükk";

F.V. Mikkelsaar "Algkooli matemaatika. 6. õppeaasta";

K. Treffner, J. ja E. Kuulberg, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. IV õppeaasta".

2. Keskkoolile:

A. Borkvell "Logaritmiline liineal";

A. Borkvell "Trigonomeetria. Õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele";

O. Kool "Trigonomeetrilisi stereomeetria ülesandeid";

G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Algebra 3. klassi kursus";

L. Sapotzki "Kujutava geomeetria ja konstruktiivse perspektiivi algõpetus XII tabeliga. I anne".

3. Ainult kutsekoolile:

N. Puura "Kaubandusaritmeetika";

T. Ussisoo "Geomeetriliste pind- ja ruumalade arvutamine".

Kokku ilmus 1929. aastal 16 matemaatika kooliraamatut, ühed tabelid, 1 artikkel ja 1 arvustus.

1.11. Matemaatika kooliraamatuid ja artikleid 1930. aastal

1930. a. jätkus A. Maramaa ja F.V. Mikkelsaare algkooli matemaatikaraamatute avaldamine. Endisest autorite kollektiivist K. Treffner, J. ja E. Kuulbergid, O. Pärli ja E. Martinson olid nüüd eemale jäänud K. Treffner ja O. Pärli. Kolmeliikmelisena jätkas see kollektiiv oma raamatute "Elavad arvud" väljaandmist veel palju aastaid.

Keskkoolile ilmusid A. Borkvelli, O. Pärli ja G. Rägo raamatud, kaitseväe staap andis välja polügonomeetria ja logaritmide tabelid [Õ, 182]. Ilmusid uued keskkooli matemaatika õppekavad [II, lk. 118] ning E. Moss avaldas kaubandusaritmeetika raamatu. J. Nuudi esimene raamat oli populaarteaduslik: "Millest kõneleb Einsteini relatiivsuse õpetus" [O, 168].

Ajakirjas "Kasvatus" ilmus E. Ritso artikkel "Neli põhitehet algebraliste arvudega" [A, 117], ajakirjades "Kasvatus" ja "Loodusvaatleja" arvustati L. Sapotzki kujutava geomeetria raamatut [A, 86] ning J. Nuudi raamatut relatiivsusteooriast [A, 72].

1930. a. ilmusid järgmised matemaatikaraamatud.

1. Algkoolile:

J. Kuulberg, E. Kuulberg, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. V õppeaasta";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli I õppeaasta. Kuues trükk";

A. Maramaa "Aritmeetika ülesannetekogu. Algkooli II õppeaasta. Kuues trükk";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli III õppeaasta. Seitsmes trükk";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli IV õppeaasta. Seitsmes trükk";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli V õppeaasta. Neljas trükk";

F.V. Mikkelsaar "Algkooli matemaatika. 6. õppeaasta. Toimetanud G. Rägo".

2. Keskkoolile:

A. Borkvell "Analüütiline geomeetria. Õpperaamat keskkoolidele";

O. Pärli "Ruumi algõpetus. I ja II anne. 3. trükk";

G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Algebra. 1. klassi kursus. 2. trükk";

G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Analüüsi alged. 4. klassi kursus".

3. Kutsekoolile:

E. Moss "Kaubandusaritmeetika harjutustega. I".

1930. aastal ilmus kokku 12 matemaatika kooliraamatut, keskkooli õppekavad, 1 populaarteaduslik raamat, ühed tabelid, 1 artikkel ja 2 arvustust.

1.12. Matemaatika kooliraamatuid ja artikleid 1931. aastast

1931. a. ei ilmunud enam F.V. Mikkelsaare raamatuid. Juba eelmisel aastal ilmunud õpiku oli toimetanud G. Rägo, kes avaldas seal ka järelehüüde F.V. Mikkelsaare surma puhul. Endiselt olid kasutusel A. Maramaa ning J. ja E. Kuulbergide ja E. Martinsoni algkooli matemaatikaraamatud. Keskkoolile jätkas raamatute kirjutamist O. Pärli, kutsekoolile E. Moss, T. Ussisoo ja A. Tooms. Sellel aastal alustas J. Käis oma metoodiliste tõekspidamiste juurutamist matemaatika õpetamisel. Tema raamatus "Uusi teid algõpetuses" antakse juhiseid matemaatika õpetamiseks liitklassis [Õ, 108]. Seda raamatut hindas positiivselt E. Martinson* "Õpetajate Lehes" ja pidas vajalikuks, et õpetajad kasutaksid J. Käisi antud juhatusi [A, 74]. Samas ajalehes soovitas F. Klement** artiklis "Märkmeid keskkooli päevaküsimustest" [A, 43] õpetada tütarlastele matemaatikat lihtsama kava järgi. Ajakirjas "Loodusvaatleja" tutvustas R. Livländer*** kaardistamist, triangulatsiooni ning astronoomilisi vaatlusi [A, 71]. Samas ajakirjas tõi G. Vilberg (hiljem Vilbaste****) bio-

---

* Eesti kooli ajaloos on olnud kaks silmapaistvat E. Martinsoni. Sünnimetatu on Ernst Martinson, a-st 1935 Enn Murdmaa (1874–1957), kes lõpetas Tartu Õpetajate Seminari 1894. a., töötas õpetajana mitmetes Virumaa ja Tallinna koolides, oli 1918–1921 tegev kooliosakonna juhatajana Haridusministeeriumis ning 1921–1940 Tallinna 21. algkooli ja 1944–1946 Tallinna 21. Mittetäieliku Keskkooli direktor. Aastatel 1923–1940 (vaheaegadega) oli Eesti Õpetajate Liidu ja 1937–1938 Õpetajate Koja esimees. Toimetas ajakirju "Kasvatus" ja "Noorusmaa".

Teine E. Martinson oli Elmar Araste (vt. lk. 99).

** Friedrich Klement (1891–?) kauaaegne Otepää ja Valga gümnaasiumide direktor (vt. "Haridus", 1991, nr. 8).

*** Livländer, Robert-Johannes (1903–1944), eesti astronoom ja geodeet. Lõpetas Tartu Ülikooli matemaatika-loodusteaduskonna (1925), täiendas ennast Potsdami Ülikoolis (1929). Töötas Tartu Tähetornis (1922–1935). Oli õppejõud Tartu Ülikoolis (1935–1936), Tallinna Tehnikaülikoolis (1936–1944) ning Tallinna Tehnikaülikooli rektor (1941–1944). Hukkus Läänemerel teel Saksamaale.

**** Vilbaste (aastani 1935 Vilberg), Gustav (1885–1967), eesti botaanik. Õppis Tartu ja Viini ülikoolides, lõpetas viimase dr. phil. nat. kraadiga 1927. a. Töötas kooliõpetajana ja ajakirjanikuna. A-st 1936 esimene Eesgraafilisi andmeid Jaan Sarvest [A, 167]. "Õpetajate Leht" avaldas veel ülevaate matemaatikaõpetajate nõupidamisest [A, 119], kus leiti, et algkooli viimastes klassides peab matemaatika nädalatundide arv olema vähemalt 5 ning et õpetamisel tuleb pöörata rohkem tähelepanu peastarvutamisele, graafikute lugemisele, ülesannete lahendamise ratsionaalsusele ja õpetamise produktiivsusele. E. Ritso tutvustas aga ajakirjas "Kasvatus" oma magistritööd artiklis "Jooni õpetajate ettevalmistamisest vanas Tartu Ülikoolis" [A, 116].

1931. a. ilmunud matemaatika kooliraamatute loetelu on järgmine.

1. Algkoolile:

J. Käis "Uusi teid algõpetuses. Metoodiline käsiraamat liitklassidele. Töökavad";

J. Kuulberg, E. Kuulberg, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. I õppeaasta. Teine, parandatud trükk";

J. Kuulberg, E. Kuulberg, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. II õppeaasta. Teine, parandatud trükk";

J. Kuulberg, E. Kuulberg, E. Martinson "Elavad arvud. VI õppeaasta";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli I õppeaasta. Seitsmes trükk";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli II õppeaasta. Seitsmes trükk";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli III õppeaasta. Kaheksas trükk";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli IV õppeaasta. Kaheksas trükk".

2. Keskkoolile:

O. Pärli "Algebra ülesannete kogu. Keskkooli I klassile".

3. Kutsekoolile:

E. Moss "Kaubandusaritmeetika harjutistega. II";

---

ti looduskaitseinspektor, toimetas ajakirja "Loodusvaatleja" (1930–1938), oli ENSV Riikliku Loodusteaduste Muuseumi botaanikaosakonna juhataja (1945–1950).

A. Tooms "Arvjoonised";

T. Ussisoo "Geomeetriline joonestamine. Kolmas trükk".

Kokku avaldati 1931. aastal 12 matemaatika kooliraamatut, 3 artiklit ja 1 arvustus.

1.13. Matemaatika kooliraamatuid ja artikleid 1932. aastal

1932. a. olid algkoolis endiselt kasutusel A. Maramaa ning autorite kollektiivi J. Kuulbergi jt. matemaatikaraamatud. Hakati juurutama töökooli printsiipi. Esmakordselt võeti tarvitusele J. Käisi koostatud arvutusvihikud I ja II klassile. Keskkoolile ilmusid O. Kooli ja J. Nuudi geomeetria- ning G. Rägo algebraraamatud. Kutsekoolile anti välja J. Jaaksoni põllumajandusliku aritmeetika ülesannete kogu ja eraldi ka nende ülesannete lahendused. Täienduskoolile avaldati matemaatika ja arvepidamise kava. Uues kordustrükis ilmusid V. Pässi logaritmide tabelid. "Õpetajate Leht" tõi ära A. Emmo artikli "Vajame uusi kooliraamatuid" [A, 15], kus autor ei ole nõus J. Käisi harjutusvihikute kasutuselevõtuga. Julius Grüntal avaldas samas lehes J. Käisi raamatu "Uusi teid algõpetuses" [A, 20] arvustuse, pidades seda vajalikuks metoodiliseks juhendiks. Ajakirjas "Kasvatus" ilmus J. Kiiveti arvustus J. Jaaksoni ülesannetekogu kohta [A, 37]. Ta pidas ülesannetekogu sobivaks, kuid soovitas pöörata rohkem tähelepanu ligikaudsele arvutamisele.

Esitame nüüd 1932. a. ilmunud matemaatika kooliraamatute loetelu.

1. **Algkoolile:**

A. Budkovsky, J. Käis "Õpilase matemaatika töövihk. 3. õppeaasta. 1. vihk. Sügisest – jõuluni";

A. Budkovsky, J. Käis "Õpilase matemaatika töövihk. 4. õppeaasta. 1. vihk. Sügisest – jõuluni";

J. Kuulberg, E. Kuulberg, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. I õppeaasta. 3. muutmata trükk";

J. Kuulberg, E. Kuulberg, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. IV õppeaasta. Teine ümbertöötatud trükk";

J. Käis "Uusi teid algõpetuses. Metoodiline käsiraamat. Teine jagu. I osa. 1.–2. õppeaasta töö üldõpetusena individuaalse tööviisi rakendusega";

J. Käis "Uusi teid algõpetuses. Metoodiline käsiraamat. Teine jagu. II osa";

J. Käis "Õpilase arvutusvihk. 1. õppeaasta. Sügisest – jõuluni";

J. Käis "Õpilase arvutusvihk. 2. õppeaasta. Sügisest – jõuluni";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli II õppeaasta. Kaheksas trükk";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli III õppeaasta. 9. trükk";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli VI õppeaasta. Viies trükk".

2. Keskkoolile:

O. Kool "Stereomeetria ülesanded täielikkude lahendustega I";

J. Nuut "Geomeetria keskkoolidele I";

J. Nuut "Geomeetria keskkoolidele II";

G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Analüüsi alged. Statistika alged. 5. klassi kursus";

3. Kutsekoolile:

J. Jaakson "Põllumajanduslik aritmeetika ülesandeis";

J. Jaakson "Põllumajanduslik aritmeetika ülesandeis. Ülesannete lahendused".

1932. aastal ilmus 11 matemaatika kooliraamatut, kahed metoodilised juhised, 2 arvutusvihikut, ühed õppekavad ja 3 arvustust.

1.14. Matemaatika kooliraamatuid ja artikleid 1933. aastal

1933. a. ilmusid raamatute seerias "Uusi teid algõpetuses" J. Käisi uued metoodilised soovitused töökooli printsiibi rakendamise kohta. Koos A. Budkovskyga andis J. Käis välja matemaatika töövihikud III ja IV klassile. Algkooli matemaatikaõpikud ilmusid A. Maramaalt, autorite kollektiivilt J. Kuulberg jt., ka Chr. Brüller ja A. Oengo-Johanson avaldasid uue I klassi raamatu, nüüd nime all "Väike arvutaja". Keskkoolidele ilmusid O. Pärli algebra- ja J. Nuudi geomeetriaraamatud. J. Lang ja D. Rootsmann tutvustasid eraldi raamatus ulatuslikult Isaac Newtoni elu ja tööd. Selle raamatu kohta ilmus ajakirjas "Kasvatus" E. Aaderi positiivne arvustus [A, 1].

1933. a. rikastas matemaatikaalast koolikirjandust järgmiste raamatute ja töövihikutega.

1. Algkoolile:

A. Budkovsky, J. Käis "Õpilase matemaatika töövihk. 3. õppeaasta. 2. vihk. Jõulust – kevadpühadeni";

A. Budkovsky, J. Käis "Õpilase matemaatika töövihk. 4. õppeaasta. 2. vihk. Jõulust – kevadpühadeni";

J. Kuulberg, E. Kuulberg, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. I õppeaasta. Neljas trükk";

J. Kuulberg, E. Kuulberg, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. II õppeaasta. Kolmas muutmata trükk";

J. Käis "Uusi teid algõpetuses. Metoodiline käsiraamat. Kolmas jagu. 3.–4. õppeaasta töö keskustuse põhimõttel individuaalse tööviisi rakendamisega. I osa";

J. Käis "Uusi teid algõpetuses. Metoodiline käsiraamat. Kolmas jagu. 3.–4. õppeaasta töö keskustuse põhimõttel individuaalse tööviisi rakendamisega. II osa";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli I õppeaasta. Kaheksas trükk";

A. Oengo-Johanson, Chr. Brüller "Väike arvutaja. I õppeaasta".

2. Keskkoolile:

J. Nuut "Geomeetria keskkoolidele III. Stereomeetria ja trigonomeetria";

O. Pärli "Algebra ülesannete kogu II. Keskkooli II klassile".

Üldse avaldati 1933. a. 10 matemaatika kooliraamatut, 1 populaarteaduslik raamat Isaac Newtonist ja 1 arvustus.

1.15. Matemaatika kooliraamatuid ja artikleid 1934. aastal

1934. a. jätkas J. Käis metoodiliste soovituste avaldamist V ja VI klassile oma raamatute seerias "Uusi teid algõpetuses", samuti jätkus töövihikute avaldamine nii J. Käisi poolt üksi (I kl.) kui ka koos A. Budkovskyga (III ja IV kl.). Töövihikute autorina debüteeris sel aastal E. Limberg (hiljem A. Lehis) (V ja VI kl.), kes koos J. Käisiga andis välja veel arvutuskaardid individuaalseks tööks. Algkooliõpikute väljaandmist jätkasid A. Maramaa ning autorite kollektiiv J. Kuulberg jt. Sel aastal hakkasid tööraamatute nime all ilmuma A. Kasvandi ja J. Langi õpikud "Väike matemaatik".

Koos kooliraamatuga anti välja ka sinna juurde kuuluvad metoodilised juhendid ning ülesannete lahendused. Niisiis hakkas algkooli matemaatikaraamatute konkurents jällegi suurenema.

Nimetus *keskkool* omandas 1934. a. sügisest alates uue tähenduse, nimelt alustas tööd viie õppeaastaga progümnaasium, kuhu võeti vastu IV klassi lõpetanud. Progümnaasiumi, samuti VI klassi lõpetanutele õppimise jätkamiseks avatud kolme õppeaastaga reaalkoole hakatigi nüüd nimetama keskkoolideks. Nii võib sel aastal ilmunud raamatute pealkirjade nimetusel *keskkool* olla kahesugune tähendus, kas uus või endine, s.o. 6-klassilisele algkoolile baseeruv 5-klassiline kool.

Sel aastal oli Julius Grüntal koostanud käsikirja keskkoolile aritmeetikakursuse kordamiseks. Seoses koolireformiga see aga trükis ei ilmunud. 1934. a. välja antud G. Rägo I klassi tööraamatu ülesannete selgitused ja lahendused ning tema II klassi tööraamat kannavad endise keskkooli nimetust. J. Kuulberg andis koos J. Nuudiga välja raamatu "Matemaatika kursus keskkoolidele I", mis oli mõeldud uuele keskkoolile. See raamat on küllalt sarnane varem ilmunud raamatuga "Elavad arvud V klassile".

Ajakirjas "Kasvatus" avaldati Chr. Brülleri artikkel õpilaste vigade analüüsist. Selles juhiti tähelepanu asjaolule, et vigade puhul pole nii oluline nende arv, kui iseloom, laad ja kuju. Ta esitab ka soovitusi vigade vältimiseks [A, 8]. Ajakirjas "Kooliuuenduslane" avaldas J. Käis ulatusliku artikli "Rohkem eluligidust õppetöösse" [A, 57]. Samas ajakirjas avaldas V. Ortlich (hiljem V. Ordlik) J. Käisi ja A. Budkovsky töövihikute arvustuse, tõstes esile õppetöö individualiseerimise võimalust [A, 94] ning keegi R.R. kirjutas seal töövihikute kasutamise vajalikkusest [A, 122].

Töövihikute ilmuma hakkamise tõttu on 1934. aastal ilmunud matemaatika õppevahendite loetelu pikem.

1. Algkoolile:

A. Budkovsky, J. Käis "Õpilase matemaatika töövihk. 3. õppeaasta. 1. vihk: sügisest – jõuluni. 2. trükk";

A. Budkovsky, J. Käis "Õpilase matemaatika töövihk. 3. õppeaasta. 2. vihk. 2. trükk";

A. Budkovsky, J. Käis "Õpilase matemaatika töövihk. 4. õppeaasta. 3. vihk";

A. Kasvand, J. Lang "Väike matemaatik. Tööraamat algkooli VI klassile";

A. Kasvand, J. Lang "Juhatusi õpetajale "Väike matemaatik" V ja VI käsitlemiseks";

A. Kasvand, J. Lang "Lahendid V õppeaasta tööraamatule "Väike matemaatik" V";

A. Kasvand, J. Lang "Lahendid VI õppeaasta tööraamatule "Väike matemaatik" VI";

J. Kuulberg, E. Kuulberg, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. V õppeaasta. Teine, ümbertöötatud trükk";

J. Käis "Õpilase arvutusvihk. 1. õppeaasta: jõulust – kevadeni";

J. Käis "Õpilase arvutusvihk. 1. õppeaasta: kevadpühadest – õppeaasta lõpuni";

J. Käis "Õpilase arvutusvihk. 2. õppeaasta: sügisest – jõuluni. 2. trükk";

J. Käis "Õpilase arvutusvihk. 2. õppeaasta: jõulust – kevadeni";

J. Käis "Õpilase arvutusvihk. 2. õppeaasta: kevadpühadest – õppeaasta lõpuni";

E. Limberg "Matemaatika. Uusi teid algõpetuses. Metoodiline käsiraamat. Neljas jagu. 5.–6. õppeaasta töö keskustuse põhimõttel individuaalse tööviisi rakendusega. 2. osa";

E. Limberg "Matemaatika-töövihk. 5. õppeaasta. 1. vihk";

E. Limberg "Matemaatika-töövihk. 5. õppeaasta. 2. vihk";

E. Limberg "Matemaatika-töövihk. 6. õppeaasta. 1. vihk";

E. Limberg "Matemaatika-töövihk. 6. õppeaasta. 2. vihk";

E. Limberg "Uusi teid algõpetuses. Matemaatika. Tööjuhatusi individuaalseks tööks. 6. õppeaasta";

E. Limberg, J. Käis "Arvutuskaardid individuaalseks tööks. 3. õppeaasta";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli IV õppeaasta. Üheksas parandatud trükk";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli VI õppeaasta. Kuues parandatud trükk".

2. Keskkoolile:

H.J.K. "Ülesannete täielised selgitused ja lahendused G. Rägo "Matemaatika tööraamatu algebra I klassi kursusele"";

J. Kuulberg, J. Nuut "Matemaatika kursus keskkoolidele I. 5. õppeaasta";

G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Algebra. 2. osa".

1934. a. ilmus trükis 6 matemaatikaõpikut, 6 töövihikut, 6 metoodilist juhendit ning ühed arvutuskaardid.

1.16. Matemaatika kooliraamatuid ja artikleid 1935. aastal

1935. a. oli töövihikute massilise väljaandmise aasta. Autorite kollektiiv Chr. Brüller, H. Brüller, E. Pavelson, P. Parts, J. Unt, E. Etverk andis välja matemaatika töövihikud I–VI klassile, esimesele 8, teisele, kolmandale ja neljandale igale 10, viiendale ja kuuendale kummalegi 12 vihikut. Iga klassi töövihikutel on autorite loetelu järjestus erisugune. Ilmumist jätkasid ka J. Käisi, A. Budkovsky ja E. Limbergi koostatud töövihikud. Autorite kollektiiv E. Etverk, R. Matiisen, O. Paas ja K. Ratassepp andis välja matemaatika harjutusvihikud keskkooli (s.o. progümnaasiumi) I–V klassile, igale klassile 5 vihikut. G. Rägo andis nii alg- kui ka keskkoolide jaoks välja ühe harjutusvihiku. Lisaks ilmusid ilma autori nimeta veel ühed töövihikud kõigile algkooliklassidele. Kokku ilmus sel aastal 134 matemaatika töövihikut.

Vaatamata töövihikute massilisele levikule ilmusid ka õpikud.

Algkoolile anti välja A. Maramaa, J. Kuulbergi jt. ning A. Kasvandi ja J. Langi raamatud. Viimased lisasid oma raamatutele veel kontrolltööde kogumikud ning metoodilised juhised [Ö, 63, 64]. Peale nimetatu kirjutas veel ühed matemaatika tööraamatud algkooli I–III klassile A. Perandi, pealkirjaga "Uutel teedel". Lisaks raamatuile ilmusid algkoolile veel J. Kuulbergi ja J. Torgi koostatud testid II–VI klassile ning J. Käisi ja E. Limbergi koostatud arvutuskaardid individuaalseks tööks. Keskkoolile anti välja G. Rägo, J. Kuulbergi ja J. Nuudi ning Viljandi koolidirektori T. Koigi raamatud.

Ilmusid uuesti V. Pässi logaritmide tabelid ning sel aastal ilma autori nimeta välja antud harjutusvihikute juurde vastuste võti. R. Taba arvustas ajalehes "Õpetajate Leht" A. Kasvandi, J. Langi I–IV klassi matemaatikaraamatuid [A, 141]. Arvustus oli positiivne. Ajakiri "Kooliuuenduslane" avaldas ilma autori nimeta artiklid "Kergemalt raskemale" [A, 36] ja "Lõbusast arvutamisest" [A, 73]. Samas ilmusid veel V. Ordliku kirjutis "Mõnda matemaatika töövihikutest ja arvutuskaartidest" [A, 93] ja A. Udrase artikkel "Rakendusülesannete lahendusskeeme" [A, 151]. Ajakirjas "Eesti Kool" ilmus J. Nuudi pikem ülevaade üliõpilaste matemaatikaalastest oskustest pealkirjaga " Ülikoolis korraldatud kontrolltööde tulemuste kvantitatiivne analüüs" [A, 85]. Viimast artiklit refereeritakse meie raamatu IV osas.

Et 1935. a. ilmus 134 matemaatika töövihikut, siis nende kõigi loetlemine ükshaaval muutuks ebaülevaatlikuks. Järgnevas ilmunud raamatute loetelus on seepärast ühele klassile mõeldud töövihikud kokku võetud.

1. Algkoolile:

Chr. Brüller, H. Brüller, P. Parts, J. Unt, E. Etverk
"Matemaatika vihik nr. 1–8. Algkooli I klassile",
"Matemaatika vihik nr. 1–10. Algkooli II klassile",
"Matemaatika vihik nr. 1–10. Algkooli III klassile",
"Matemaatika vihik nr. 1–10. Algkooli IV klassile",
"Matemaatika vihik nr. 1–12. Algkooli V klassile",
"Matemaatika vihik nr. 1–12. Algkooli VI klassile";
E. Etverk, R. Matiisen, O. Paas, K. Ratassepp
"Matemaatika keskkoolis. I klassi harjutusvihik nr. 1–5",
"Matemaatika keskkoolis. II klassi harjutusvihik nr. 1–5",
"Matemaatika keskkoolis. III klassi harjutusvihik nr. 1–5",
"Matemaatika keskkoolis. IV klassi harjutusvihik nr. 1–5";
A. Kasvand, J. Lang
"Väike matemaatik. Tööraamat algkooli I klassile",
"Väike matemaatik. Tööraamat algkooli II klassile",
"Väike matemaatik. Tööraamat algkooli III klassile",
"Väike matemaatik. Tööraamat algkooli IV klassile",
"Väike matemaatik. Tööraamat algkooli V klassile";

A. Kasvand, J. Lang "Juhatusi õpetajale "Väike matemaatik" I, II, III ja IV käsitlemiseks",

A. Kasvand, J. Lang
"Kontrolltööd. A–B. nr. 1–8. III kl.",
"Kontrolltööd. A–B. nr. 1–8. IV kl.",
"Kontrolltööd. A–B. nr. 1–8. V kl.";
J. Kuulberg, E. Kuulberg, E. Martinson

"Elavad arvud, Matemaatika õpperaamat algkoolidele. I õppeaasta. Viies muutmata trükk",

"Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. II õppeaasta. 4. trükk",

"Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. IV õppeaasta. Kolmas trükk",

"Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. V õppeaasta. Kolmas trükk";

J. Kuulberg, J. Tork "Matemaatika teste. II–VI õppeaasta";
J. Käis "Arvutuskaardid individuaalseks tööks. 1. õppeaasta",
"Arvutuskaardid individuaalseks tööks. 2. õppeaasta";

J. Käis "Õpilase arvutusvihk. 1. õppeaasta. Sügisest – jõuluni. Teine trükk";

J. Käis. Sama,* kolmas trükk,

J. Käis "Õpilase arvutusvihk. 1. õppeaasta: jõulust – kevadeni. 2. trükk",

J. Käis "Õpilase arvutusvihk. 1. õppeaasta. Kevadpühadest – õppetöö lõpuni. 2. trükk",

J. Käis. Sama, 2. õppeaasta. Sügisest – jõuluni. Kolmas trükk,

J. Käis. Sama, 2. õppeaasta. Jõulust – kevadeni. Teine trükk,

J. Käis. Sama, 2. õppeaasta. Kevadpühadest – õppetöö lõpuni. Teine trükk;

J. Käis, A. Budkovsky "Õpilase matemaatika-töövihk. 3. õppeaasta. 2. vihk. Jõulust – kevadpühadeni. 2. trükk",

J. Käis, A. Budkovsky "Õpilase matemaatika-töövihk. 2. õppeaasta. 1. vihk: sügisest – jõuluni, 2. trükk";

E. Limberg, J. Käis "Arvutuskaardid individuaalseks tööks. 4. õppeaasta";

E. Limberg "Matemaatika töövihik. 5. õppeaasta. 3. vihik",

Sama. 6. õppeaasta. 3. vihik;

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli II õppeaasta. Üheksas trükk",

A. Maramaa. Sama, algkooli III õppeaasta. Kümnes trükk,

A. Maramaa. Sama, algkooli V õppeaasta. Kuues trükk.

Matemaatika vihik. I õppeaasta I–X,
II õppeaasta I–X,
III õppeaasta I–X,
IV õppeaasta I–X,
V õppeaasta I–X,
VI õppeaasta I–X;

A. Perandi "Uutel teedel. Tööraamat algkoolidele. I õppeaasta",

A. Perandi. Sama, III õppeaasta;

G. Rägo "Matemaatika harjutusvihik algkoolidele. VI klassi kursus".

2. Keskkoolile ja kutsekoolile:

T. Koik "Matemaatika õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele. Keskkooli II klassi kursus";

G. Rägo "Matemaatika harjutusvihik keskkoolidele. Algebra. III klassi kursus";

J. Jostoff, A. Koido "Arvutusõpetus arvutusraamil".

---

* *Sama* tähendab, et pealkiri on sama, mis eelmisel töövihikul või raamatul.

Kokku ilmus 1935. aastal seega 18 matemaatika kooliraamatut, 134 töövihikut, kuued metoodilised juhendid, kahed arvutuskaardid, ühed logaritmide tabelid, 4 artiklit ja 1 arvustus.

1.17. Matemaatikaõpikuid ja artikleid 1936. aastal

1936. a. jätkati algkoolis J. Käisi, A. Budkovsky ja E. Limbergi töövihikute ning J. Kuulbergi jt., A. Maramaa, A. Perandi ning A. Kasvandi ja J. Langi raamatute kasutamist. Keskkoolile ilmusid veel mõned E. Etvergi jt. töövihikud. T. Koigi ja G. Rägo keskkooliraamatute kõrvale tuli nüüd E. Etvergi esimene raamat "Geomeetria". Silmapaistva panuse progümnaasiumide varustamiseks õpikutega tegi autorite kollektiiv A. Borkvell, A. Kasvand, F. Laarens, K. Maasik, O. Paas ja A. Vihman. Nad andsid 1936. a. välja raamatud "Keskkooli aritmeetika I ja II", "Keskkooli algebra I–II" ning "Keskkooli geomeetria I–III", sinna juurde veel kontrolltööde kogumikud. Seoses õpilaste edasiminekuga keskkooli kas pärast algkooli IV või VI klassi lõpetamist anti välja kogumikud "Eksamiülesanded I ja II" [T, 43, 44]. Sellel aastal ilmusid V. Pässi tabelite kõrval K. Ratassepa koostatud logaritmide tabelid [Õ, 197].

"Õpetajate Leht" avaldas artikli "Ebaterveid nähtusi kooliraamatute turul" [A, 12]. Sealõeldut arvestades hakatigi alates järgnevatest õppeaastatest üle minema standardõpikutele. Ajakiri "Kooliuuenduslane" avaldas O. Kalli kirjutise "Mõnda arvusüsteemi läbi töötamisest algastmel" [A, 29] ja A. Peerna artikli "Ruutjuurimine täpsusega 0,1" [A, 96]. Ajakirjas "Eesti Kool" avaldati J. Mohrfeldti artikkel "Matemaatilised sümbolid põhimõttelisest vaatepunktist" [A, 81], kus arutletakse kongruentsuse ja võrdsuse mõistete üle ning soovitatakse juure väärtust lugeda ainult positiivseks.

Esitame nüüd 1936. aastal ilmunud matemaatika kooliraamatute ja töövihikute loetelu.

1. Algkoolile:

"Eksamiülesandeid I. Esitatud matemaatika alal algkooli 4. klassi lõpetanuile vastuvõtukatseil keskkooli I klassi";

"Eksamiülesandeid II. Esitatud matemaatika alal algkooli 6. klassi lõpetanuile vastuvõtukatseil keskkooli III klassi";

J. Grüntal "Matemaatika test. 2. trükk";

A. Kasvand, J. Lang "Väike matemaatik. Tööraamat algkooli II klassile. 2. trükk";

A. Kasvand, J. Lang "Väike matemaatik. Tööraamat algkooli IV klassile. Teine trükk";

J. Kuulberg, E. Kuulberg, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. I õppeaasta. Kuues, muutmata trükk";

J. Kuulberg, E. Kuulberg, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. II õppeaasta. Viies, muutmata trükk";

J. Käis "Õpilase arvutusvihik. 1. õppeaasta. 2. vihik: jõulust – kevadeni. 3. trükk";

J. Käis "Õpilase arvutusvihik. 1. õppeaasta. 3. vihik: kevadpühadest – õppetöö lõpuni. 3. trükk";

J. Käis, A. Budkovsky "Õpilase matemaatika-töövihk. 3. õppeaasta. 1. vihk. 3. trükk";

E. Limberg "Matemaatika-töövihik. 6. õppeaasta. 1. vihik: sügisest – jõuluni. Teine trükk";

A. Maramaa "Matemaatika ülesannetekogu. Algkooli I õppeaasta. Üheksas trükk";

"Matemaatika vihik I–V. I õppeaasta. Teine trükk";

A. Perandi "Uutel teedel. Matemaatika tööraamat algkoolidele. II õppeaasta".

2. Keskkoolile:

A. Borkvell, A. Kasvand, F. Laarens, K. Maasik, O. Paas, A. Vihman

"Keskkooli aritmeetika I–II. Õpperaamat I ja II klassile",
"Keskkooli aritmeetika I. Õpperaamat II klassile",
"Keskkooli algebra I. Õpperaamat II ja III klassile",
"Keskkooli algebra II. Õpperaamat IV ja V klassile",
"Keskkooli geomeetria I. Õpperaamat III klassile",
"Keskkooli geomeetria II. Õpperaamat IV klassile",
"Keskkooli geomeetria III. Õpperaamat V klassile",
"Kontrolltööd keskkoolile I (aritmeetika)";

E. Etverk "Geomeetria. Õpperaamat III klassile",
E. Etverk "Geomeetria. Õpperaamat IV klassile";

E. Etverk, R. Matiisen, K. Ratassepp "Matemaatika keskkoolis. II klassi harjutusvihik nr. 3 ja 4. Teine trükk";

E. Etverk, R. Matiisen, K. Ratassepp Sama. V klassi harjutusvihik nr. 1–4;

T. Koik "Matemaatika õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele. Algebra ja geomeetria. III kl. kursus";

G. Rägo "Matemaatika tööraamat uuele keskkoolile. Algebra ülesannetekogu I osa";

G. Rägo. Sama, II osa,

G. Rägo "Matemaatika tööraamat uuele keskkoolile. Algebra ülesannetekogu".

Kokku ilmus 1936. aastal 19 matemaatika kooliraamatut, 1 testide ja 2 eksamiülesannete kogu, ühed kontrolltööd, 14 töövihikut ja 4 artiklit.

Kokkuvõte

Matemaatika õpetamiseks eesti keeles vajati emakeelseid matemaatikaraamatuid. Matemaatika algõpetuse jaoks oli sajandi algul koostanud raamatuid mitu koolimeest (vt. II, 1.2.). Vabariigi algaastail võiski oodata eelkõige nende meeste aktiivset osalemist õpikute koostamisel olemasolevat kogemust ära kasutades. Nii tegelikult oligi. Juba 1907. a. debüteerinud August Marfeldt, kes aastast 1922 kandis Maramaa nime, kujuneski kõige viljakamaks algkoolide aritmeetika- ja geomeetriaraamatute koostajaks. Tema koostatud õpikuid ilmus koos kordustrükkidega u. 50 (sinna hulka kuuluvad ka kaks koos venna Jaan Maramaaga välja antud raamatut). Teine juba tsaariajal matemaatikaõpikuid kirjutanud mees oli Friedrich Vollrad Mikkelsaar. Temalt ilmusid esialgu geomeetriaraamatud algkooli III–V klassile. Aastatel 1925–1930 andis ta aga välja algkooli kõigi klasside matemaatikaraamatud. Need jõudsid ilmuda kahes trükis. Seega on tema panus koolimatemaatika arengusse Eestis u. 18 kooliraamatut.

Veel olid tsaariajal õpikuid kirjutanud vennad August ja Oskar Perli. Esimene neist andis aastatel 1920 ja 1921 välja algkooli III–V klassile oma raamatu "Arvud elust", mis oli varem juba vene keeles ilmunud. Oskar Perli oli 1912. a. välja andnud õpiku, mis oli mahukam kõigist enne seda kirjutatud eestikeelsetest matemaatikaraamatutest. Temast sai hiljem keskkooliõpikute autor, 1920. a. andis välja ka ühe kuuenda klassi raamatu.

Koolide inspektorina vastavalt Valgas ja Saaremaal töötanud A. Kõiv ja J. Koppel andsid samuti 1920. aastal välja esimeste klasside aritmeetikaraamatud.

Viljakateks autoriteks kujunesid Karl Rudolf Veski ja Jüri Grünthal, kes aastatel 1921–1928 andsid välja koos kordustrükkidega u. 25 algkooli matemaatikaraamatut.

Alates aastast 1924 hakkas algkooli matemaatikaraamatuid välja andma suurem autorite kollektiiv, kuhu esialgu kuulusid Konstantin Treffner, Johannes Kuulberg, Elisabeth Kuulberg, Elmar Martinson ja Oskar Pärli. Esimene ja viimane neist jäid sellest kollektiivist hiljem eemale, kuid teised jätkasid nende raamatute väljaandmist ning kordustrükkide ettevalmistamist veel isegi neljakümnendatel aastatel. Vaadeldaval perioodil 1918–1936 ilmus sellelt autorite kollektiivilt koos kordustrükkidega u. 20 algkooli matemaatikaraamatut.

Alates 1934. aastast lisandusid algkooliraamatute autorite hulka August Kasvand ja Juhan Lang, kelle raamatuid samuti kasutati veel neljakümnendatel aastatel. Vaadeldaval perioodil jõudsid nad koos kordustrükkidega välja anda ligi 10 raamatut.

Aastatel 1920–1927 ilmus I–V klassi jaoks veel üks aritmeetikaraamat, mille väljaandmist alustas H. Veidermann, hiljem lisandusid siia autoritena Chr. Brüller ja A. Oengo-Johanson. Neilt ilmus arvatavasti 8 raamatut.

Klasside kaupa võttes ilmus aastatel 1920–1936 kõige rohkem esimese klassi raamatuid (u. 30) ning kõige vähem kuuenda klassi raamatuid (u. 16). Teiste klasside raamatute arv oli 22–25.

Lisaks õpikutele hakati koolides alates aastast 1931 kasutama töövihikuid. Pioneeriks oli siin Johannes Käis, kes koos oma kolleegidega endisest Võru Õpetajate Seminarist Anette Budkovsky ja Ervin Limbergiga (Arvo Lehis) suutis vaadeldava perioodi lõpuks välja anda töövihikud kõigile klassidele isegi kolmes trükis. Neid töövihikuid kasutati veel hiljemgi. Erakordselt palju ilmus töövihikuid 1935. aastal, kui neid andis välja algkoolidele kolm autorite kollektiivi ja keskkoolidele üks kollektiiv. Neile lisandusid veel G. Rägo töövihikud, üks algkooli kuuendale, teine keskkooli kolmandale klassile.

Tähelepanuvääriv on matemaatika õpetamise metoodika raamatute, õpetaja väljaannete, testide ja kontrolltööde kogumike ilmumine.

Keskkooli matemaatikaõpikute koostamiseks ei kujunenud vaadeldaval perioodil välja selliseid kollektiive nagu algkooliraamatute puhul. Alles perioodi lõpuaastal tekkis üks selline kollektiiv – Albert Borkvell, August Kasvand, Felix Laarens, Karl Maasik, Oskar Paas ja Arnold Vihman –, kes kindlustas kõik uue keskkooli, s.o. progümnaasiumi klassid vajalike matemaatikaraamatutega. Analoogiliselt algkooliga võime kollektiivi tekkimisest kõnelda 1935. aastal keskkooli töövihikute väljaandmisel. Siin olid tegevad Elmar Etverk, Robert Matiisen (hiljem Meresmaa), Oskar Paas ja Kalev Ratassepp. Perioodi algul kujunes samuti kollektiiv, kes, arvestades suurt eestikeelsete matemaatikaraamatute vajadust, andis need välja mimeograafilises paljunduses. Sellesse kollektiivi kuulusid Juhan Lang, Oskar Sulla, Ernst Kilkson, Hans Jürman, Karl Maasik ja arvatavasti ka Villem Nano. Leidus aga ka mitu matemaatikaõpetajat, kes asudes ise õpikuid kirjutama,ruttasid raamatute puudumist ületama. Selliste autoritena nimetame David Rootsmanni (hiljem Taavet Rootsmäe), Viktor Pässi, Theodor Koiki ja Paul Ederbergi. Aktiivselt tegutses keskkooliraamatute väljaandmisel ka Rudolf Veski. Koos Jüri Grünthali, Jaan Verendeli ja Aleksander Raudsepaga tõlkis ja koostas ta ajavahemikus 1920–1926 keskkoolidele nii algebra- kui geomeetriaraamatuid. Aktiivseks autoriks oli ka Oskar Perli (hiljem Pärli), kes kuni 1930. aastani andis välja isegi kolm trükki oma geomeetriaraamatutest. Tähelepanuväärne on muidugi Matemaatika Õpetamise Komisjoni liikmete Gerhard Rägo, Jüri Nuudi ja Albert Borkvelli panus matemaatika koolikirjanduse rikastamisse. Seejuures G. Rägo ja J. Nuut arvestasid peamiselt nende enda koostatud keskkooli õppekava nõudeid. A. Borkvell avaldas oma raamatud eelkõige sõjakooli nõudeid silmas pidades. Asudes autorite kollektiivi etteotsa keskkoolide raamatute väljaandmiseks astus ta sellega vastu G. Rägo uuendustele.

Keskkooli matemaatikaraamatute ilmumine oli kõige intensiivsem 1920. aastal, kui ilmus 13 õpikut. 1921. aastal vähenes nende arv 6-ni ning kuni 1935. aastani oli see arv 0-st (1925. a.) 7-ni (1923. a.). Uus tõus oli perioodi lõpuaastal, kui keskkoolid kindlustati neile vajalike õpikutega. Siis ilmus 12 õpikut.

2. MATEMAATIKA STANDARDISEERITUD KOOLIRAAMATUIST JA ARTIKLITEST AASTATEL 1937–1950

Aastal 1937 kehtestati Eestis standardõpikutele ülemineku nõue. Piiranguid õpikute kasutamisel oli tehtud varemgi. Juba kahekümnendatel aastatel töötas haridusministeeriumi juures komisjon, kes tunnistas trükis ilmunud kooliraamatuid koolis kasutamiseks soovitatavaks või mittesoovitatavaks. Kolmekümnendatel aastatel pandi õpikute vahele eraldi lehekesi tekstiga: "Haridusministeeriumi poolt koolides kasutamiseks lubatud". 1937. aastal kehtestatud nõue oli rangem. Tööle asus Matemaatika Õpetamise Komisjoni uus koosseis, kes määras ka standardõpikute autorid. Keskkoolidele ja gümnaasiumidele koostatigi täiesti uued standardõpikud ja standardülesannetekogud. Algkooliosas konkureerisid standardõpiku nimetusele varem kasutusel olnud õpikud "Elavad arvud" ja "Väike matemaatik". I–III klassi standardõpikuks said "Elavad arvud" ning IV klassile "Väike matemaatik". V ja VI klassile ilmusid uued A. Kasvandi, J. Langi ja O. Paasi raamatud "Matemaatika õpik", milles oli kasutatud suurel määral vastavate klasside endiste õpikute "Väike matemaatik" teksti. Neid raamatuid kasutati ka progümnaasiumi I ja II klassis. Keskkooli (progümnaasiumi) jaoks koostasid J. Grüntal ja G. Rägo eraldi algebraõpiku (ilmus 1938) ning G. Rägo ja A. Vihman selle juurde kuuluva ülesannetekogu (ilmus samuti 1938. a.). Nende raamatute koostamisel kasutati G. Rägo varasemaid tööraamatuid. 1937. a. ja 1940. a. ilmusid küll mõnest autorite kollektiivi A. Borkvell jt. koostatud keskkooli algebra- ja geomeetriaraamatust kordustrükid. 1937. a. oli nende raamatute kasutamine loomulik, sest uued standardõpikud ei olnud veel ilmunud. 1940. a. ilmusid aga nendelt autoritelt, A. Borkvell jt., ainult geomeetriaraamatud. On põhjust arvata, et standardõpikuks olid keskkoolis siiski E. Etvergi geomeetria õpperaamatud III–V klassile.

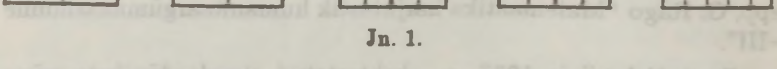
Gümnaasiumiklasside standardõpikuks sai 1939. a. ilmunud E. Etverki, G. Rägo "Matemaatika õpik humanitaargümnaasiumile" ning 1938. ja 1939. aastal välja antud ülesannetekogud: K. Ratassepp, G. Rägo "Matemaatika harjutustik humanitaargümnaasiumile I–III".

Eesti Vabariigis 1937. a. kehtestatud standardõpikute nõue jäi püsima ja süvenes Saksa okupatsiooni aastail ning Nõukogude Eestis. Neljakümnendate aastate lõpul algas üleminek üleliidulistele standardõpikutele. Et käesolevas töös on vaatluse alla võetud ainult originaalõpikud, siis üleliidulisi õpikuid siin ei käsitleta. Asudes tutvuma aastatel 1937–1950 meie koolides kasutusel olnud standardõpikutega, anname siingi esmalt kronoloogilise ülevaate nimetatud aastatel ilmunud matemaatika kooliraamatute ja artiklite kohta.

2.1. 1937. a. ilmunud õpikud ja artiklid

Ilmumist jätkasid eelmisel aastal kasutusele tulnud õpikute seeriad. Anti välja A. Borkvelli jt. keskkooli algebraõpikute kordustrükid ning geomeetriaõpiku I osa. Neile tulid juurde kontrolltööde kogumikud keskkoolile. E. Etvergi III ja IV klassi geomeetriõpikutele lisandus nüüd V klassi raamat. Algkoolide I–III klassile ilmusid J. Kuulbergi, E. Kuulbergi ja E. Martinsoni raamatu "Elavad arvud" kordustrükid. Anti uuesti välja ka J. Käisi ja A. Budkovsky töövihikud. Omanäolise raamatu pealkirjaga "Arvud elust" andis välja M. Meos, nimetades seda õpetaja käsiraamatuks matemaatika õpetamiseks ilma ülesannetekoguta. Tartu Kommertskooli väljaandel ilmus E.A. Mossi õpik "Kaubandusaritmeetika". Uues trükis anti välja K. Ratassepa matemaatilised tabelid. Kõrgkoolide, eeskätt Tallinna Tehnikaülikooli nõudeid pidas silmas A. Borkvelli õpik "Tasapinnalise ja ruumilise analüütilise geomeetria põhijooni". Müntide ja mõõtude arengut Eestis tutvustas E. Tenderi koostatud raamat [Õ, 242].

Ajakirjas "Kooliuuenduslane" avaldati artikkel "Matemaatikast algklassides" [A, 78], kus anti juhtnööre, kuidas õpetada numbreid kirjutama, kella tundma ning eristama mõisteid *vorra* ja *korda* ning kuidas kasutada otstarbekalt näitlikustamist. Numbrite kirjutama õpetamise probleeme käsitles samas ajakirjas ka V. Ordlik artiklis "Kirjutamise algõpetusest" [A, 90]. Ta ei poolda kiirustamist numbrite kirjutama õpetamisel ega numbrite kirjutama õpetamist nende kuju raskusjärjestuses. V. Ordliku teises artiklis "Murrumõiste kujundamisest" [A, 92] soovitatakse kasutada kokkumurtavaid murrulehti, millel võivad olla ka sisselõiked (vt. jn. 1).



Jn. 1.

Ajakirjas "Eesti Kool" avaldati Soome koolinõuniku N. Kallio kirjutis "Jooni Soome koolide matemaatika ja füüsika õpetusest"

[A, 30]. Sellel teemal esines ta VI matemaatika-füüsika- ja kosmograafiakongressil. Samas ajakirjas ongi toodud ka selle kongressi lühike ülevaade [II, lk. 68–70]. Peale nende kirjutiste esitas J. Sütt artiklis "Geomeetria praktiliste tööde korraldamine" [A, 140] soovitusi mõõtmistöödeks maastikul. 1937. a. avaldati trükis ka uus algkooli matemaatika õppekava [II, lk. 90].

Esitame nüüd 1937. a. ilmunud matemaatika kooliraamatute loetelu.

1. Algkoolile:

"Matemaatika õppekavad. Algkooli õppekavad". Lk. 46–50;

A. Budkovsky, Joh. Käis "Õpilase matemaatika töövihk. 4. õppeaasta. 3. vihk. 2. trükk";

J. Kuulberg, E. Kuulberg, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. I õppeaasta. Seitsmes muutmata trükk";

"Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. II õppeaasta. Kuues, muutmata trükk";

"Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. III õppeaasta. Kolmas, muutmata trükk";

Joh. Käis "Õpilase arvutusvihk. 2. õppeaasta. Jõulust – kevadeni. 3. trükk";

M. Meos "Arvud elust. Käsiraamat õpetajaile matemaatika õpetamiseks ilma ülesannetekoguta. I õppeaasta".

2. Kesk- ja kutsekoolile ning kõrgkoolile:

A. Borkvell, A. Kasvand, F. Laarens, K. Maasik, O. Paas, A. Vihman "Keskkooli algebra I. Õpperaamat II ja III klassile. 2. trükk";

A. Borkvell jt. "Algebra II. Õpperaamat progümnaasiumi IV ja V klassile ja reaalkooli II ja III klassile";

A. Borkvell jt. "Keskkooli geomeetria I. Õpperaamat III klassile";

A. Borkvell jt. "Kontrolltöid keskkoolile I (aritmeetika)";

A. Borkvell jt. "Kontrolltöid keskkoolile II (aritmeetika ja algebra)";

A. Borkvell jt. "Kontrolltöid keskkoolile III (algebra)";

A. Borkvell jt. "Kontrolltöid keskkoolile IV (algebra)";

A. Borkvell "Tasapinnalise ja ruumilise analüütilise geomeetria põhijooni";

E. Etverk "Geomeetria õpperaamat V klassile";

E. Moss "Kaubandusaritmeetika I. Harjutustega",

E. Moss "Kaubandusaritmeetika II. Harjutustega";
K. Ratassepp "Matemaatilised tabelid".

Kokku avaldati 1937. aastal 10 matemaatika kooliraamatut, ühed õppekavad, 4 kontrolltööde kogumikku, 2 töövihikut, ühed tabelid ja 6 artiklit.

2.2. 1938. a. ilmunud õpikuid ja artikleid

Standardõpikutena anti algkooli I–III klassile välja juba korduvalt nimetatud J. Kuulbergi, E. Kuulbergi, E. Martinsoni "Elavad arvud" ning V ja VI klassile A. Kasvandi, J. Langi, O. Paasi "Matemaatika õpik". IV–VI klassi jaoks ilmusid kontrolltööde kogumikud. Algklassidele anti uuesti välja A. Budkovsky ja J. Käisi töövihikud. Kutsekoolide jaoks ilmus 1938. a. mitu kaubandusartimeetika raamatut. Õpikute väljaandmist jätkas E. Moss. Tartu Kommertskooli väljaandel ilmus tema kaubandusaritmeetika raamatu II osa juba 2. trükis. Tartus andis paljundusbüroo "Rex" välja veel E. Järvelo koostatud kaubandusaritmeetika ülesannete kogu. Tartu Ülikooli Matemaatika Instituudi paljundusel sai kättesaadavaks O. Rünga poolt avaldamiseks ette valmistatud Tartu Ülikooli õppejõu A. Humala kaubandusaritmeetika loengute konspekt. Keskkooli ja gümnaasiumi jaoks ilmusid standardõpikute ja -ülesannetekogudena J. Grüntali ja G. Rägo koostatud algebraõpik ning G. Rägo ja A. Vihmani algebra harjutustik keskkoolile. 1938. aastal ilmus veel Th. Ussisoo "Geomeetriline joonestamine".

Ajakiri "Kooliuuenduslane" avaldas mitu kirjutist matemaatika algõpetuse kohta. Nii kirjutas J.H. Kadastik* artikli "Mõnda ükskord-ühe õpetamisest" [A, 27], kus ta soovitab kasutada mängukaartidega sarnanevaid arvutuskaarte. V. Ordlik põhjendas oma artiklis "Miks eelistan matemaatika töövihke?" [A, 91] töövihikute eeliseid õpikute ees ja avaldas lootust, et kui viie aasta pärast ikka veel kehtib standardõpikute süsteem, siis on arvatavasti kasutusel standardtöövihikud. V. Ploom oma artiklis "Arvutusülesannete lahendamine jooniste abil" [A, 99] näitas jooniste otstarbekust aritmeetiliste ülesannete lahendamisel. O. Tunin selgitas artiklis "Matemaatika seoses tööõpetuse ja joonistamisega" [A, 147] mõõtmise vajalikkust mõõtude tundmaõppimisel. Arvude tundmaõppimist ja arvutamist esimese

---

* Kadastik, Johannes Heinrich (1883–1959). Töötas õpetajana alates 1903. aastast. Oli koolijuhatajaks Virumaa Peetri-Risti algkoolis (1908–1910), Peterburi Eesti Seltsi algkoolis (1913–1914), Vaimastvere algkoolis (1924–1941), Saadjärve algkoolis ja mittetäielikus keskkoolis (1941–1947).

kümne piires käsitles J. Udikas kirjutises "Esimesi samme matemaatikas" [A, 150]. Ajakirjas "Eesti Kool" tutvustas A. Kasvand V ja VI klassi standardõpikuid [A, 32] ning "Õpetajate Lehes" ilmunud K. Brülleri arvustuses hinnati neid õpikuid vastuvõetavaks [A, 103]. A. Kasvandi artiklist tõstame esile tema metoodilisi soovitusi harilike murdude korrutamise ja kera pindala õpetamiseks. Samuti soovitust tehete puhul nimega arvudega sooritada tehted vastavate nimeta arvudega ning vastusele lisada nimetus sulgudes.

Erandiks olid 1938. a. Rakveres välja antud H. Jaansoni raamatud "Algebra ülesanded ja lahendused I ja II". Standardõpikute nõude kehtimise tõttu ei olnud need raamatud ette nähtud koolidele, vaid kasutamiseks iseseisval õppimisel. Selle soodustamiseks oli neis raamatuis antud ka ülesannete lahendused ja vastused.

1938. a. ilmunud matemaatika kooliraamatute loetelu on järgmine.

1. Algkoolile:

Algkooli, keskkooli ja gümnaasiumi õppekavad;

A. Budkovsky, Joh. Käis "Õpilase matemaatika-töövihk. 4. õppeaasta. 1. vihk: sügisest – jõuluni. Kolmas trükk";

A. Kasvand, J. Lang "Kontrolltöid matemaatikas. 4. õppeaasta", "Kontrolltöid matemaatikas. 5. õppeaasta", "Kontrolltöid matemaatikas. 6. õppeaasta";

A. Kasvand, Joh. Lang, O. Paas "Matemaatika õpik. 5. õppeaasta" ja "Matemaatika õpik. 6. õppeaasta";

J. Kuulberg, E. Kuulberg, E. Martinson "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. I õppeaasta. Kaheksas muutmata trükk";

J. Kuulberg jt. "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. II õppeaasta. Seitsmes, muutmata trükk",

J. Kuulberg jt. "Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. III õppeaasta. Neljas trükk";

Joh. Käis "Õpilase arvutusvihk. 1. õppeaasta. 1A ja 1B vihk. Neljas trükk ",

J. Käis "Õpilase arvutusvihk. 1. õppeaasta. 2. vihk. 4. trükk",

J. Käis "Õpilase arvutusvihk. 1. õppeaasta. 3. vihk. 4. trükk",

Joh. Käis "Õpilase arvutusvihk. 2. õppeaasta. 1. vihk. Sügisest – jõuluni. 4. trükk",

Joh. Käis "Õpilase arvutusvihk. 2. õppeaasta. 3. vihk. 3. trükk";

Joh. Käis "Õpilase matemaatika-töövihk iseseisvaks tööks. 3. õppeaasta. 3. vihk".

2. Kesk- ja kutsekoolile:

J. Grüntal, G. Rägo "Algebra õpik keskkoolile";
H. Jaanson "Algebra ülesanded ja lahendused. I",
H. Jaanson "Algebra ülesanded ja lahendused. II";
E. Järvelo "Ülesanded kaubandusaritmeetikas",
E. Moss "Kaubandusaritmeetika II. Harjutustega. Teine, parandatud trükk";
K. Ratassepp, G. Rägo "Matemaatika harjutustik gümnaasiumile. I klassi kursus",
K. Ratassepp, G. Rägo "Matemaatika harjutustik gümnaasiumile. II klassi kursus";
G.Rägo, A. Vihman "Algebra harjutustik keskkoolile";
O. Rünk "Kaubandusaritmeetika";
Th. Ussisoo "Geomeetriline joonestamine. Neljas trükk".

Kokku ilmus 1938. aastal 15 matemaatika kooliraamatut, ühed õppekavad, 3 kontrolltööde kogumikku, 5 töövihikut ja 7 artiklit, neist üks arvustus.

2.3. 1939. aastal ilmunud õpikutest ja artiklitest

Standardõpikute tsükli lõpetasid sel aastal E. Etverk ja G. Rägo matemaatikaõpikuga humanitaargümnaasiumile ning K. Ratassepp ja G. Rägo matemaatika harjutustiku III osaga humanitaargümnaasiumile. Neist esimesest avaldati üks osa veel eraldi pealkirja all "Matemaatika õpik humanitaargümnaasiumile. III klassi kursus". Jätkuvalt ilmusid esimestele klassidele A. Budkovsky ja J. Käisi töövihikud.

Ajakirjas "Kasvatus" arenes diskussioon standardõpikute otstarbekohasusest ja välja antud 5. ja 6. klassi õpikute õnnestumisest. Kahes artiklis puudutas neid küsimusi Chr. Brüller [A, 6]. Õpikute autorid kirjutavad talle samas ajakirjas kriitikat tagasilükkava vastuse. Chr. Brüller arvas, et standardõpikud ei saa pikemaaegse kasutuseloleku tõttu kajastada kaasaega ja olla kooskõlas elu tegelikkusega. Ta pidas lubamatuks kasutada viimase nõudega vastuolus olevaid andmeid, nagu $4\frac{7}{12}$ krooni või $3\frac{5}{8}$ meetrit. Ülearuseks luges Chr. Brüller vähima ühiskordse leidmist, mida tegelikul arvutamisel ei kasutata. Sobimatu oli Chr. Brülleri arvates ka see, et raamatus on esitatud kõik andmed, reeglid ja juhised ning ka ülesannete vastused. Oma vastuses õigustavad autorid oma seisukohti. Seejärel kutsus Chr. Brüller autoreid temaga ühinema standardõpikute kasutamise vastu [A, 35]. Ajakirjas "Kooliuuenduslane" arendas J. Käis töökooli põhimõtete propageerimist, tutvustades sobivaid arvutusmänge ning võimalusi individualiseeritud õpetuse läbiviimiseks [A, 53]. Neile lisandub ajakirjas "Kasvatus" tema kirjutis "Töövihikud otstarbeka õpetuse vahendina, eriti matemaatikas" [A, 58]. Kõrvuti standardõpikute kasutuselevõtu suhtes avaldatud eriarvamustega oli neil aastail teine vaidlusalune küsimus töövihikute kasutamine. Selles artiklis tõrjub J. Käis oponentide väiteid, nagu õpetaks töövihikud õpilasi raamatuid määrima, ei võimaldaks iseseisvat tegevust ning soodustaks mahakirjutamise levikut.

Koos J. Käisiga avaldab ajakirjas "Kooliuuenduslane" artikli "Korrutustabelis esinevate korrutusjuhtude reastamine raskuse järjekorras" E. Raidmaa [A, 106]. Selles järjestatakse kõik 1x1-ülesanded vastavate testide tulemustele tuginedes lahendatuse sageduse järjekorras. Veel on samas ajakirjas avaldatud R. Taba artikkel "Paar pisinäidet vähendatud mõõdu mõiste süvendamiseks algkooli IV klassis" [A, 142], kus märgitakse ühistöö rakendamise võimalusi ning tuuakse joonise järgi tõeliste mõõdete arvutamise näide.

Ajakirjas "Eesti Kool" tutvustati matemaatika, füüsika ja kosmograafiaõpetajate VII kongressil esitatud ettekandeid [II, lk. 70–71]. Üks nendest, nimelt H. Rebassoo "Kümnendsüsteemi ajalooline areng" avaldati samas ajakirjas eraldi artiklina [A, 113].

Ajakirjas "Varamu" ilmus prof. J. Nuudi artikkel "Eksaktteaduste kriisist" [A, 83], kus ta käsitles paralleelide probleemi, mitteeukleidilist geomeetriat, aja relatiivset mõistmist ja kvantide teooriat. Seal toob ta esile maatriksarvutuse kasutamise vajalikkuse teaduse arendamisel.

Samas ajakirjas on avaldatud veel prof. G. Rägo artikkel "Keskkooli- ja gümnaasiumiõpetajate ettevalmistamisest" [A, 123], kus tutvustatakse õpetajate ettevalmistamist Tartu Ülikoolis ning esitatakse sinna juurde uuendamisettepanekuid. Prof. G. Rägo oli sel ajal teatavasti Tartu Ülikooli juures töötava didaktilis-metoodilise seminari juhataja.

1939. a. ilmunud matemaatika kooliraamatute nimestik on järgmine.

1. Algkoolile:

Joh. Käis, A. Budkovsky "Matemaatika töövihk. 3. õppeaasta. 2. vihk. Kolmas trükk",

Joh. Käis, A. Budkovsky "Matemaatika töövihk. 4. õppeaasta. 2. vihk. Kolmas trükk", Joh. Käis, A. Budkovsky "Matemaatika töövihk. 4. õppeaasta. 3. vihk. 3. trükk".

2. Kesk- ja kutsekoolile:

E. Etverk, G. Rägo "Matemaatika õpik humanitaargümnaasiumile";

E. Etverk, G. Rägo "Matemaatika õpik humanitaargümnaasiumile. III klassi kursus";

K. Ratassepp, G. Rägo "Matemaatika harjutustik humanitaargümnaasiumile. III klassi kursus".

Kokku ilmus 1939. a. ainult neli matemaatika kooliraamatut, 3 töövihikut, see-eest aga 13 artiklit, neist 3 arvustust.

2.4. 1940. aastal ilmunud õpikuid ja artikleid

Sel aastal ilmusid A. Borkvelli jt. kirjutatud õpikute "Keskkooli geomeetria I ja III" uustrükid. Esimene neist ilmus sel aastal isegi kaks korda: üks kord enne ja teine kord pärast juunipööret. I–IV klassile anti välja "Elavad arvud". Pärast juunipööret ilmusid ka raamatud "Väike matemaatik" I–IV. Endiselt jätkus A. Budkovsky ja J. Käisi töövihikute väljaandmine esimestele klassidele. J. Käisilt ilmus veel eraldi raamatukene "Matemaatika algõpetusest", kus jagatakse metoodilisi soovitusi arvude loendamiseks, arvu mõiste kujundamiseks, ülesannete koostamiseks ja lahendamiseks, tutvustatakse arvutamisvigade psühholoogilisi põhjusi ning arvutamisel esinevaid raskusi. Ajalehes "Õpetajate Leht" ilmus ilma autori nimeta artikkel "Kas jälle standardõpikud?" [A, 31] ning M. Raua artikkel "Kas raamat või töövihik matemaatika õpetamisel" [A, 110]. Esimeses pooldatakse töövihikuid, teises jõutakse järeldusele, et töövihik ei suuda asendada raamatut ja võib eksisteerida ainult raamatu kõrval. Samas ajalehes vastab sellele artiklile J. Käis, eelistades ikkagi töövihikuid [A, 56]. J. Lang on samas ajalehes tutvustanud trükis avaldatud eksamiülesandeid ning esitanud nõuded, mida need ülesanded peavad rahuldama [A, 63]. Ajakirjas "Eesti Kool" analüüsis P. Valgemäe keskkooli sisseastumiseksamil tehtud vigu [A, 153]. Samas ajakirjas tõi O. Rünk artiklis "Keelelisi ja terminoloogilisi küsimusi koolimatemaatikas" [A, 126] esile õpetajate kõnes esinevaid keelelisi vigu. Ta juhib tähelepanu sõnade *järelikult*, *järelduma* ja *sarnane* tarvitamisele, peab sõna *kongruents* eestikeelse vastena parimaks sõna *ühtivus* ning soovitab selle tähistamiseks sümbolit $\ominus$.

Harilike ja kümnendmurdude ning protsentide ja ajaarvamisülesannete lahendamise juhendeid andis M. Meos ajakirjas "Eesti Kool" avaldatud kirjutises "Mõningaid metoodilisi võtteid matemaatika õpetamisel 5. ja 6. õppeaastal" [A, 80]. Muuhulgas rõhutas ta, et murdude liitmisel ja lahutamisel on nimetaja sama, mis nimetus täisarvu juures ning et 1 % ei ole sajandik, vaid "1 sajast".

Ajakirjades "Kasvatus" ja "Eesti Kool" esines Chr. Brüller, juhtides artiklis "Arvutamisest" [A, 7] tähelepanu peastarvutamise tähtsusele ning artiklis "Aritmeetiliste ülesannete liike ja tüüpe" [A, 4] jaotas ta ülesandeid liht- ja liitülesanneteks, peast- ja kirjalikeks ülesanneteks, arvutamis- ja mõõtmisülesanneteks, arv- ja tekstülesanneteks, aritmeetilisteks ja algebralisteks ülesanneteks. Suurimat tähelepanu omistas ta aga liigitusele elulised ja eluvõõrad ülesanded ning nende erisusele ruumilises ja psühholoogilises mõttes.

Prof. A. Humalalt ilmus 1940. a. eelkõige majandusteaduskonna üliõpilastele määratud õpik "Finantsmatemaatika".

Pärast Eestis toimunud juunipööret avaldati A. Borkvelli õpik "Sfääriline trigonomeetria" ning J. Lang tutvustas ajakirjas "Nõukogude Kool" matemaatika õpetamise korraldust Nõukogude Liidus: artiklid "Eksamite korraldus Nõukogude Vene koolis" [A, 63] ja "Töökorralduse juhtnööre Nõukogude Vene (VNFSV) alg- ja keskkoolis" [A, 64]. Esimeses artiklis toodi eksamite loetelu ja ulatus ning teises esitati näidisena üks tööplaan ja ühe tunni konspekt.

Ajakirjas "Nõukogude Kool" ilmusid 1940. aastal veel E. Oissaare artikkel "Õpilase töö hindamisest" [A, 87] ning O. Rünga artikkel "Komistusi matemaatika tunnis" [A, 127]. E. Oissaar tutvustas õpilaste teadmiste kontrollimise ja hindamise juhtnööre ning O. Rünk jätkas vigade analüüsi, jälgides seekord õpilaste vigu.

1940/41. õppeaastal kasutati koolides põhiliselt varem väljaantud standardõpikuid ja -ülesannetekogusid. Algklassides pääsesid nüüd konkureerima nii "Elavad arvud" kui "Väike matemaatik".

1940. a. ilmusid järgmised matemaatika kooliraamatud.

1. Algkoolile:

A. Borkvell, Joh. Käis "Õpilase matemaatika-töövihk. 3. õppeaasta. 1. vihk sügisest jõuluni. 4. trükk";

J. Kallak, E. Kallak, E. Araste "Elavad arvud. Matemaatika õpik algkoolidele. 1. õppeaasta. 9. ümbertöötatud trükk";

J. Kallak, E. Kallak, E. Araste "Elavad arvud. Matemaatika õpik algkoolidele. 2. õppeaasta. 8. ümbertöötatud trükk";

J. Kallak, E. Kallak, E. Araste "Elavad arvud. Matemaatika õpik algkoolidele. 3. õppeaasta. 5. ümbertöötatud trükk";

J. Kallak, E. Kallak, E. Araste "Elavad arvud. Matemaatika õpik algkoolidele. 4. õppeaasta. 4. ümbertöötatud trükk";

A. Kasvand, J. Lang "Väike matemaatik. I. 3. ümbertöötatud trükk";

A. Kasvand, J. Lang "Väike matemaatik. II. 3. ümbertöötatud trükk";

A. Kasvand, J. Lang "Väike matemaatik. III. 3. ümbertöötatud trükk";

A. Kasvand, J. Lang "Väike matemaatik. IV. Kolmas ümbertöötatud trükk";

Joh. Käis "Matemaatika algõpetus";

Joh. Käis "Õpilase arvutusvihk. 1. õppeaasta 1A ja 1B vihk. 5. trükk";

Joh. Käis "Õpilase arvutusvihk. 2. õppeaasta. 1–3 vihk. 4. trükk".

2. Kesk- ja kõrgkoolile:

A. Borkvell, A. Kasvand, F. Laarens, K. Maasik, A. Vihman "Keskkooli geomeetria I";

A. Borkvell jt. "Keskkooli geomeetria. Õpperaamat III klassile. 2. trükk";

A. Borkvell "Sfääriline trigonomeetria";

A. Humal "Finantsmatemaatika",

A. Humal "Keskkooli õppekavad";

K. Ratassepp "Matemaatilised tabelid. 2. parandatud trükk".

Kokku ilmus 1940. aastal 12 matemaatika õpikut, 1 metoodiline käsiraamat, 5 töövihikut, 1 õppekava ja 15 artiklit.

2.5. 1941. aastal ilmunud õpikuid ja artikleid

Õppeaasta 1941/42 oli sõjaajal ning uute õpikute väljaandmiseni ei jõutud. Kasutusel olid põhiliselt varem ilmunud õpikud ja ülesannetekogud. Algkoolis oli "Elavate arvude" asemel kasutusele võetud A. Kasvandi, J. Langi "Väike matemaatik", ainult III klassi jaoks oli välja antud täiendusvihik, autoriteks A. Kasvand, J. Kallak ja J. Lang.

K. Ratassepp ja A. Vihman jõudsid tõlkida N. Rõbkini õpiku "Tasapinnaline trigonomeetria", mis ilmus samuti 1941. a. Veel jõudis müüki A. Borkvelli kõrgkooliõpik "Harilikud diferentsiaalvõrrandid".

Ajakirjas "Nõukogude Kool" jätkas O. Rünk oma poleemikat artiklis "Arvutustehnilisi küsimusi", juhtides tähelepanu peastarvutamisele, ühikute märkimisele ja arvutusskeemidele [A, 125]. Samasse valdkonda kuulub selles ajakirjas avaldatud J. Langi artikkel "Arvutusskeemid vajavad revisjoni" [A, 62], soovitades mitmekohaliste arvude korrutamisel kirjutada tegurid üksteise alla.

Ajalehes "Nõukogude Õpetaja" ilmus F. Gonobolini artikli "Õpitu süstemaatilisest kordamisest" eestikeelne tõlge [A, 16].

1941. aastal ilmusid järgmised matemaatika kooliraamatud.

1. Algkoolile:

A. Kasvand, J. Lang "Väike matemaatik. Tööraamat algkoolile. III klass. 4. ümbertöötatud trükk";

A. Kasvand, J. Kallak, J. Lang "Matemaatika täiendusvihik. III klassile".

Kesk- ja kõrgkoolile:

A. Borkvell "Harilikud diferentsiaalvõrrandid";

K. Ratassepp "Matemaatilised tabelid. 3. trükk";

N.A. Rõbkin "Tasapinnaline trigonomeetria. Keskkooli IX ja X klassile"'

Kokku ilmus 1941. aastal enne sõda 4 matemaatikaraamatut, ühed tabelid ja 3 artiklit.

2.6. Aastatel 1942–1944 ilmunud matemaatikaõpikuist

1942. a. välja antud "Algkooli õppekavad" ühtisid matemaatikaosas täpselt 1938. a. õppekavaga. 1943. a. ilmunud "Gümnaasiumi õppekavad" nägid ette säilitada mõnes gümnaasiumis progümnaasiumi esimesed klassid gümnaasiumi I ja II eelklassi nime all. Matemaatika õppekavas olid sisse viidud mõned muudatused. Trigonomeetriakursus jaotus nüüd gümnaasiumi III ja IV klassi vahel, IV klassi geomeetria õppekava oli ümber sõnastatud, V klassis oli välja jäetud nii analüütilise geomeetria kui ka matemaatilise analüüsi teemasid.

Saksa okupatsiooni aastail ilmusid algkooli jaoks peamiselt kordustrükid varem välja antud matemaatika kooliraamatutest. Neid oli kohandatud vastavalt programmimuudatustele ja uutele rahaühikutele. Nii võeti I ja II klassis kasutusele J. ja E. Kallaku ning

E. Araste raamatud "Elavad arvud". Anti välja A. Kasvandi ja J. Langi raamatud "Väike matemaatik" III ja IV klassile. V ja VI klassi jaoks ilmusid A. Kasvandi, J. Langi, O. Paasi raamatud "Matemaatika õpik". Teatavasti võeti need raamatud kasutusele alles kolmekümnendate aastate lõpul standardõpikutena.

Gümnaasiumiõpikute peatoimetajaks nimetati Oskar Silde. Gümnaasiumi I ja II klassile ilmusid A. Vihmani algebra- ja E. Etvergi koostatud geomeetriaõpikud. Nende raamatute koostamisel tuginesid autorid oma kolmekümnendate aastate lõpul ilmunud standardõpikutele. Gümnaasiumi III klassi jaoks kirjutas uue algebraraamatu Karl Maasik ning sama klassi trigonomeetriaõpiku Kalev Ratassepp. Gümnaasiumi IV klassis võeti kasutusele K. Ratassepa algebra- ka trigonomeetriaõpik ning E. Etvergi stereomeetriaõpik. Gümnaasiumi lõpuklassis oli kasutusel G. Rägo koostatud matemaatikaõpik.

Õppeaasta 1944/45 algas Eesti NSV-s sõjaolude tõttu alles kas novembris või detsembris. Uute õpikute ja artiklite väljaandmiseni jõutigi alles 1945. aastal.

Aastatel 1942–1944 ilmusid järgmised matemaatika kooliraamatud.

1. Algkoolile:

Algkooli õppekavad.

J. Kallak, E. Kallak, E. Araste "Elavad arvud. I. 10. trükk 1942, 11. trükk 1943";

J. Kallak, E. Kallak, E. Araste "Elavad arvud. II. 10. trükk 1942, 11. trükk 1943";

A. Kasvand, J. Lang "Väike matemaatik. III. 4. trükk 1942, 5. trükk 1943";

A. Kasvand, J. Lang "Väike matemaatik IV. 4. trükk 1942, 5. trükk 1943";

A. Kasvand, J. Lang, O. Paas "Matemaatika õpik V klassile. 2. trükk 1942, 3. trükk 1943";

A. Kasvand, J. Lang, O. Paas "Matemaatika õpik VI klassile. 2. trükk 1942, 3. trükk 1943".

2. Kesk- ja kutsekoolile:

Gümnaasiumi õppekavad, 1943;

E. Etverk "Geomeetria õpik gümnaasiumi I klassile". Tartu, 1942;

E. Etverk "Geomeetria õpik gümnaasiumi II klassile". Tartu, 1942;

E. Etverk "Stereomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile". Tartu, 1943;

K. Maasik "Algebra õpik gümnaasiumi III klassile". 1942;

K. Ratassepp "Algebra ja trigonomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile. 1. trükk 1942, 2. trükk 1943";

K. Ratassepp "Matemaatilised tabelid. 4. trükk 1942";

K. Ratassepp "Trigonomeetria õpik gümnaasiumi III klassile. 1. trükk 1942, 2. trükk 1943";

L. Ruumet, G. Rägo "Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu III ja IV klassile, 1944";

L. Ruumet "Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu V klassile";

G. Rägo "Matemaatika õpik gümnaasiumi V klassile";

Th. Ussisoo "Geomeetriline joonestamine. 5. trükk 1942".

Kokku ilmus aastatel 1942–1944 24 matemaatika kooliraamatut ja kahed programmid.

2.7. 1945. aastal ilmunud matemaatika kooliraamatuist ja artiklitest

Esialgu jätkati matemaatika õpetamist Eesti NSV koolis varem kasutuselolnud õpikute baasil. Ilmus uus matemaatikaprogramm. Muutus koolisüsteem. Algkooli asendas 7 õppeaastaga mittetäielik keskkool. Kool, kus olid klassid I–XI või VIII–XI, nimetati keskkooliks. Matemaatikaõpikuid avaldasid 1945. aastal A. Kasvand ja J. Lang ning A. Vihman mittetäielikule keskkoolile ning E. Etverk ja G. Rägo keskkooli vanematele klassidele. Ilmusid nii nagu 1940. aastalgi ajaleht "Nõukogude Õpetaja" ja ajakiri "Nõukogude Kool". 1945. a. ilmus neis kummaski üks artikkel matemaatika õpetamise kohta. Autori nimeta artiklis "Ükskordüks – matemaatika põhialus" [A, 170] anti juhiseid ükskordühe õpetamiseks I ja II klassis. M. Salum käsitles aga tol ajal veel aktuaalset teemat "Sõjaasjandus matemaatika tundides" [A, 128], kus esitas vastava tekstiga näiteülesandeid nii aritmeetikast, algebrast kui ka geomeetriast.

1945. aastal ilmusid järgmised matemaatika kooliraamatud.

Üldharidusliku keskkooli õppekava 1944/45. õppeaastaks;

Keskkooli õppekavad. Matemaatika. Füüsika. Astronoomia.

1. Mittetäielikule keskkoolile:

A. Kasvand "Matemaatika täiendusvihk – III klassile";

A. Kasvand, J. Lang "Väike matemaatik. Tööraamat algkooli III klassile. 6. muudetud trükk";

A. Kasvand, J. Lang "Väike matemaatik. Tööraamat algkooli IV klassile. 6. trükk";

A. Vihman "Matemaatika õpik VI klassile";

A. Vihman "Matemaatika õpik VII klassile".

2. Keskkooli vanemale astmele:

E. Etverk "Geomeetria. Keskkooli VIII klassile";

E. Etverk "Geomeetria. Keskkooli IX klassile";

E. Etverk "Stereomeetria. Keskkooli XI klassile";

K. Ratassepp "Algebra. Keskkooli IX klassile";

K. Ratassepp "Matemaatilised tabelid. 5. muutmata trükk";

G. Rägo "Matemaatika õpik. Keskkooli XI klassile".

Kokku ilmus 1945. aastal 9 matemaatika kooliraamatut, ühed tabelid ja 2 matemaatikaprogrammi.

2.8. 1946. aastal ilmunud matemaatika kooliraamatud ja artiklid

Sel aastal alustati matemaatika kooliraamatute autorite koosseisu puhastamisega. Kõigepealt loobuti Eesti Vabariigi teenekate koolimeeste A. Kasvandi ja J. Langi raamatutest "Väike matemaatik". Uue õpiku III klassile koostas B. Rea, IV klassile A. Lehis ning V klassile O. Rünk ja H. Roos. Uue VI klassi õpiku andis juba 1945. aastal välja A. Vihman. Keskkooli vanemate klasside õpikute koostamisel suurenes A. Vihmani osa. 1946. a. ilmusid esimesed sõjajärgsed matemaatikaõpikud ka üliõpilastele. Tallinna Polütehnilise Instituudi õppejõud A. Humal, O. Rünk ja A. Garšnek andsid välja kujutava geomeetria õpiku I osa ning A. Garšneki tõlkes ilmus I. Privalovi õpik "Analüütiline geomeetria". Professor Jaan Sarve teadusartikkel "Punktarvutus analüütilises geomeetrias" avaldati Tartu Riikliku Ülikooli toimetistes (Matem. Teadused 1, 1946).

1946. aastal kasvas ajakirjanduses märgatavalt matemaatika õpetamist käsitlevate artiklite arv. Viktor Ordlik tutvustas ajakirjas "Nõukogude Kool" aritmeetika ülesannete lahendamist nii analüütiliselt kui sünteetilise võtte abil, rõhutas kontrolli vajalikkust, eriti koduste ülesannete puhul ning selgitas vihikute korrashoidu [A, 89]. A. Lehis ja A. Kasvand olid mõlemad oma artikli pealkirjaks pannud "Matemaatika metoodikast". Esimeses artiklis [A, 65] oli peatähelepanu osutatud uue aine esitamisele tunnis, tekstülesannete lahendamise metoodikale ja murdudele. Teises artiklis [A, 34] käsitleti korrutamist ja jagamist II klassis, puudutati ka murdude õpetamist ning kontrolli vajalikkust. A. Kasvandilt ilmus veel teinegi artikkel, milles jagati soovitusi korrutamise ja jagamise õpetamiseks esimese saja piires, kasutades tikke ja arvutustabeleid [A, 33]. Arvutamisõpetuse esimestest sammudest kirjutas K. Siim [A, 134] ning omavalmistatud õppevahendeid tutvustas K. Anton [A, 88]. Pisut vanemate õpilaste õpetamist pidas silmas M. Salum, kirjutades artikli "Võrrandite käsitlus VI–VII klassis" [A, 129]. 1946. aastal jõuti ka esimese artiklini nn. ideoloogilise kasvatustöö korraldamiseks matemaatika õpetamisel: A. Voore ja A. Rõõm avaldasid kirjutise "Neljanda viisaastaku seaduse rakendamisvõimalusi kooli õppe- ja kasvatustöös, eriti matemaatika tundides" [A, 158].

1946. aastal ilmusid järgmised matemaatika kooliraamatud.

Keskkooli õppekavad. Matemaatika. Füüsika. Astronoomia.

1. Mittetäielikule keskkoolile:

A. Kasvand "Matemaatika täiendusvihk – III klassile. II trükk";

A. Lehis "Matemaatika õpik. IV klassile. 1. ja 2. vihk";

B. Rea "Aritmeetika III klassile. 1. ja 2. vihk";

O. Rünk, H. Roos "Matemaatika õpik ja harjutustik. 5. õppeaasta";

A. Vihman "Matemaatika õpik. VI klassile. II muudetud trükk";

A. Vihman "Matemaatika õpik. VII klassile. II trükk".

2. Keskkooli vanematele klassidele:

E. Etverk "Geomeetria keskkooli VIII klassile. 2. trükk";

E. Etverk "Geomeetria keskkooli IX klassile. 2. trükk";

E. Etverk "Stereomeetria keskkooli XI klassile. 2. trükk";

K. Ratassepp "Matemaatilised tabelid. 6. trükk";

K. Ratassepp "Algebra. Keskkooli X klassile";

G. Rägo "Analüütiline geomeetria ja algebra. Keskkooli XI klassile";

A. Vihman "Algebra õpik VIII klassile";

A. Vihman "Algebra õpik IX klassile".

3. Kõrgkoolile:

I.I. Privalov "Analüütiline geomeetria. 1. trükk";

O. Rünk, A. Humal, A. Garšnek "Kujutav geomeetria. I osa".

Kokku avaldati 1946. aastal 15 matemaatikaõpikut, ühed tabelid, 1 programm ning 11 artiklit.

2.9. 1947. aastal ilmunud matemaatika kooliraamatud ja artiklid

Jätkub matemaatikaraamatute ilmumine nii üldhariduskoolile kui ka kõrgkoolile. E. Etvergi kõrval oli IX klassi geomeetriõpiku autoriks saanud TPI õppejõud B. Tiikma. Juurde tuli kutsekooli õpik. Juba varem ilmunud J. Jaki raamatu alusel ilmub J. Jaki ja K. Ratassepa "Matemaatika metallistidele". Endiselt ilmub suhteliselt palju artikleid matemaatika õpetamisest. Aktuaalseks olid muutunud matemaatika küpsuseksamite tulemused. Algebra küpsustöid analüüsis küll ainult Vändra keskkooli baasil sealne kooliõpetaja E. Pillikse [A, 97]. Nii algebra kui ka geomeetria küpsustöid analüüsis põhjalikult tollane Vabariigi Õpetajate Täiendusinstituudi metoodik A. Vihman [A, 159; A, 161]. Endiselt oli päevakorras õppevahendite valmistamine. Seda teemat käsitles K. Siim [A, 135]. Peastarvutamise meetodeid tutvustas A. Lints [A, 70], eesrindlike õpetajate tööd J. Heinpalu [A, 21] ning kuidas õpetada I ja II klassi õpilasi ülesandeid lahendama – E. Ratassepp [A, 108]. Uut laadi oli TRÜ professori H. Jaaksoni artikkel, kes tutvustas kaugõppe korraldust ülikoolis [A, 24], samuti Leningradi professori J. Depmani kirjutis "Leningradi matemaatikaõpetajad Euleri haual", mis tegelikult on tema seal haual peetud kõne tekst [A, 10]. Esmakordselt pärast 1941. aastat jõuti tõlkeartikli avaldamiseni. V. Pomagiba artiklis selgitatakse, kuidas võidelda õpilaste mahajäämusega matemaatikas [A, 101]. Eraldi raamatukesena ilmub P. Kardi tõlkes P. Aleksandrovi raamat Lobatševskist.

1947. aastal ilmusid järgmised matemaatika kooliraamatud.

1. Mittetäielikule keskkoolile:

J. Kallak "Aritmeetika I klassile";

J. Kallak "Aritmeetika II klassile";

A. Lehis "Matemaatika õpik IV klassile. I vihk. 2. parandatud ja täiendatud trükk";

B. Rea "Aritmeetika. III klassile. I vihk. 2. trükk";

B. Rea "Aritmeetika. III klassile. II vihk. 2. trükk".

2. Keskkooli vanematele klassidele:

K. Ratassepp "Algebra. Keskkooli X klassile. III täiendatud trükk";

K. Ratassepp "Trigonomeetria. Keskkooli X klassile";
A. Vihman "Algebra õpik. VIII klassile. I vihk. 2. trükk";
A. Vihman "Algebra õpik VIII klassile. II vihk. 2. parandatud trükk".

3. Kõrg- ja kutsekoolile:

P.S. Aleksandrov "Suur vene matemaatik Lobatševski";
A. Humal "Funktsioonide vahe graafiline integreerimine";
A. Humal "Ruutvõrrandi geomeetriline lahendamine";
(Mõlemad ilmusid TPI Toimetustes. Seeria A nr. 27.)
A. Humal, O. Rünk, A. Garšnek "Kujutav geomeetria. II osa";
J. Jakk, K. Ratassepp "Matemaatika metallistidele".

Kokku ilmus 1947. aastal 14 matemaatikaraamatut, 11 artiklit ja 1 programm.

2.10. 1948. aastal ilmunud matemaatika kooliraamatuist ja artikleist

Aasta-aastalt suurenes tõlkeraamatute arv. 1948. aastal tõlkis F. Kauba eesti keelde J. Perelmanni matemaatilisi jutustusi ja keerdülesandeid sisaldava raamatu "Elav matemaatika"; A. Kasvand tõlkis A. Ptšolko õpetajatele mõeldud algkooli aritmeetika õpetamise metoodika raamatu ning veel tõlgiti eesti keelde N. Tarassovi tehnikumidele mõeldud kõrgema matemaatika kursus. Kõrgkoolile kirjutatud matemaatikaraamatute hulk täienes TRÜ prof. G. Kangro kirjutatud kõrgema algebra kursuse I osaga ning prof. G. Rägo poolt rakendusteaduskondade üliõpilastele mõeldud õpikuga "Kõrgem matemaatika". Üldhariduskoolile ilmusid mitme juba kasutusel olnud õpiku kordustrükid. Artikleid avaldati endiselt küllalt arvukalt. Johannes Käis, kes sõjajärgseil aastail töötas Hariduse Rahvakomissariaadis koolivalitsuse juhatajana, ei avaldanud sel perioodil oma matemaatika töövihikuid. Temalt ilmus ajalehes "Nõukogude Õpetaja" kirjutis õpilase edukuse hindamise kohta matemaatikas [A, 59]. Ta tõstis siin esile sellekohaseid norme ning selgitas, kuidas hinnata ülesannete lahendamist ja teoreemide tõestamist. Samas ajalehes avaldas sõjajärgsete aastate silmapaistev Tallinna koolijuht A. Tiki 2 artiklit [A, 144, 145]. Ühes tõi ta esile õpilaste tüüpilisi vigu matemaatikaülesannete lahendamisel ning analüüsis neid konkreetsete, koolipraktikast võetud näidetele tuginedes. Teises analüüsis ta õpilaste vigu ühe kooli VII klasside eksamitööde põhjal. Õpilaste vigu puudutas oma artiklis ka A. Vihman [A, 166], juhtides õpetajate tähelepanu vigade märkimisele õpilaste kirjalikes töödes. Teises metoodilises artiklis avaldas A. Vihman soovitusi arvutuskäikude üleskirjutamiseks ning esitas sinna juurde mõned näidisskeemid [A, 163]. Kasutades Tallinna 20. Keskkooli kaheksandate klasside õpilaste vihikuid, tegi nimeta autor kokkuvõtte vihikute korrashoiust, seletustest, vigade parandustest ja muustki ning pahandas õpetajatega nende pealiskaudse suhtumise pärast vihikute parandamisse [A, 172]. P. Siret tegi kokkuvõtte Rapla keskkooli abiturientide matemaatika kirjalikust ja suulisest eksamist ning jäi õpilaste teadmiste ja oskustega rahule [A, 138]. Ka sel aastal abistas I klassi õpetajat K. Siim, selgitades arvude 1–10 õpetamist [A, 136].

Esitame nüüd 1948. a. ilmunud matemaatikaõpikute loetelu.

Alg- ja keskkooli programmid. Matemaatika 1948/49. õppeaastaks.

1. Mittetäielikule keskkoolile:

A. Lehis "Matemaatika õpik IV klassile. II vihk. 2. parandatud trükk";

A. Ptšolko "Algkooli aritmeetika õpetamise metoodika. Käsiraamat õpetajale";

J.I. Perelman "Elav matemaatika";

B. Rea "Aritmeetika III klassile. II vihk. 2. trükk";

O. Rünk, H. Roos "Matemaatika õpik ja harjutustik. 5. õppeaasta. I vihk. 2. parandatud trükk";

O. Rünk, H. Roos "Matemaatika õpik ja harjutustik. 5. õppeaasta, II vihk";

A. Vihman "Matemaatika õpik VI klassile".

2. Keskkooli vanematele klassidele:

E. Etverk "Geomeetria. Keskkooli VIII klassile. 3. täiendatud trükk";

E. Etverk, B. Tiikma "Geomeetria. Keskkooli IX klassile. 2. täiendatud trükk";

K. Ratassepp "Matemaatilised tabelid. 7. trükk";

G. Rägo "Analüütiline geomeetria ja algebra, Keskkooli XI klassile. 2. trükk";

A. Vihman "Algebra õpik IX klassile. III parandatud ja täiendatud trükk".

3. Kutse- ja kõrgkoolile:

G. Kangro "Kõrgem algebra. I osa";

N. Tarassov "Kõrgema matemaatika kursus tehnikumidele".

Kokku ilmus 1948. aastal 11 matemaatikaõpikut, 1 metoodikakäsiraamat, 1 meelelahutuslik ülesannetekogu, ühed tabelid, 1 programm ja 8 artiklit.

2.11. 1949. aastal ilmunud matemaatika kooliraamatutest ja artiklitest

Õppeaastaks 1949/50 ei ilmunud enam ühtki üldhariduskooli matemaatikaõpikut meie oma autorilt. Viimastest mitu oli hakanud tõlkima venekeelseid õpikuid eesti keelde. Kommentaare me nende õpikute kohta ei avalda, küll aga esitame nad õpikute loetelus. Eesti autorid figureerisid siiski mõnel kõrgkooliõpikul. Artiklite arv püsis aga endiselt püsavalt suur, nüüd oli autorite hulgas ka vene õppekeelega koolide õpetajaid. Nii kirjutas Tallinna 32. keskkooli õpetaja F. Tšutšina "Kuidas organiseerida vanemate klasside matemaatikaringi" [A, 149] ning "Kuidas õpetada ruutvõrrandite lahendamist" [A, 148]. Tallinna 19. Keskkooli õpetaja P. Pahiot analüüsis selle kooli abiturientide eksami tulemusi [A, 95]. Tõlgitud artikliks oli ajakirjas "Nõukogude Kool" avaldatud A. Dobrotini kirjutis, milles tutvustati murdude korrutamise ja jagamise õpetamise metoodikat [A, 11]. Väike-Maarja Keskkooli õpetaja A. Kivistu avaldas 2 artiklit. Ühes tunnistas ta sobimatuks õpetada koolis harjutusi, mis avalduvad üldjuhul järgmiselt: m:n:p [A, 41]. Teises analüüsis ta proovimisvõtte kasutamist võrrandi koostamisel [A, 42]. P. Känd kiitis Märjamaa Keskkooli matemaatikaõpetajaid kirjaliku eksami tulemuste põhjal [A, 59], E. Roosalu propageeris peastarvutamist [A, 120] ning P. Siret andis ülevaate Tallinnas toimunud esimesest ulatuslikumast sõjajärgsest matemaatikaõpetajate kokkutulekust [A, 137]. Lisaks nimetatutele tutvustas H. Vana matemaatika õpetamiseks liitklassis vajalikke plaane [A, 154] ning A. Vihman tutvustas tehete tulemuste kontrollimist arvu 9 abil [A, 165].

1949. aastal ilmunud matemaatika kooliraamatute loetelu on järgmine.

Alg- ja keskkoolide programmid. Matemaatika. Füüsika. Astronoomia.

1. Aritmeetika kooliraamatud:

N.N. Nikitin, G.B. Poljak, L.N. Volodina "Aritmeetika ülesannete ja harjutuste kogu. I klassile";

N.N. Nikitin jt. "Aritmeetika ülesannete ja harjutuste kogu II klassile";

N.N. Nikitin jt. "Aritmeetika ülesannete ja harjutuste kogu III klassile";

N.N. Nikitin jt. "Aritmeetika ülesannete ja harjutuste kogu IV klassile";

E. Berezanskaja "Aritmeetika ülesannete kogu V ja VI klassile";

A.P. Kisseljov "Aritmeetika õpik V ja VI klassile";

B.A. Tulinov ja J.F. Tšekmarjov "Aritmeetika. Pedagoogilistele koolidele".

2. Algebra kooliraamatud:

S. Bronštein "Algebra ja selle õpetamine seitsmeklassilises koolis. Abiraamat õpetajale";

A.P. Kisseljov "Algebra õpik seitsmeklassilisele koolile ja keskkoolile. VI–VIII klassile";

A.P. Kisseljov "Algebra õpik keskkoolile. VIII–XI klassile";

N.A. Šaposnikov, N.K. Valtsev "Algebra ülesannete kogu keskkoolile. VI–VIII klassile";

N.A. Šaposnikov, N.K. Valtsev "Algebra ülesannete kogu. Keskkooli VIII–X klassile".

3. Geomeetria kooliraamatud:

A.P. Kisseljov "Geomeetria. Planimeetria. VIII ja IX klassile. N.A. Glagolevi toimetatud ja täiendatud";

A.P. Kisseljov "Geomeetria. Stereomeetria. Keskkooli IX ja X klassile";

N.A. Rõbkin "Geomeetria ülesannete kogu keskkoolile. Planimeetria. VI–IX klassile";

N.A. Rõbkin "Geomeetria ülesannete kogu keskkoolile. Stereomeetria. X ja XI klassile";

M. Võgodski "Geomeetria VI ja VII klassile".

4. Trigonomeetria kooliraamatud:

N.A. Rõbkin "Tasapinnaline trigonomeetria keskkoolile. X klassile";

N.A. Rõbkin "Trigonomeetria ülesannete kogu ühes trigonomeetria rakendust nõudvate geomeetriliste ülesannetega keskkoolile. X klassile".

V. Bradis "Neljakohalised matemaatilised tabelid keskkoolile".

5. Kõrgkooliõpikud:

A. Borkvell "Analüütiline geomeetria. Õpik ENSV kõrgematele õppeasutustele";

O. Rünk, A. Humal, A. Garšnek "Kujutav geomeetria. III osa".

Teatavasti algasid sajandi algul matemaatika emakeelse õpetamise püüdlused. Koos võimaluste avardumisega ilmusid ka vajalikud õpikud. Nüüd, 1950. aastaks saabus olukord, kus emakeelne õpetus oli küll lubatud, kuid õpetada ei võinud oma autorite õpikute järgi. See periood ei kestnud aga kaua. Juba 1958. aastal alustati oma autorite katseõpikute väljaandmist. Nende autoriteks olid siinsest ülevaatest juba hästi tuntuks saanud A. Kasvand, J. Kallak, A. Lehis, E. Etverk ja A. Vihman. 1965. aastast alates õpetati eesti õppekeelega koolides matemaatikat jälle oma autorite koostatud õpikute järgi.

Kokkuvõte aastatel 1937–1950 kasutusel olnud matemaatikaõpikuist ja artiklitest

Üleminek standardõpikutele tähendas, et koolides jäi igas klassis kasutusele ainult üks lubatuks tunnistatud matemaatika kooliraamat, mis sisaldas just parajasti nii palju materjali, kui kinnitatud programm ette nägi ja selles mahus, mida peeti normiks (standardiks). Algkooliosas olid Eesti koolis kasutusel olnud mitme autorite kollektiivi ja ka üksikautori kirjutatud raamatud, mis kordustrükkide ilmumisega olid tõestanud, et neid kasutati küllalt laialdaselt, mis kinnitas ühtlasi nende raamatute küllaltki head kvaliteeti. Seega võis arvata, et algkoolis, eriti aga tema esimeses neljas klassis, ei olnud olulisi raskusi ka olemasolevate kooliraamatute hulgast standardõpikute leidmisega. Konkureerima jäid siin kahe autorite kollektiivi raamatud: J. ja E. Kallaku ning E. Araste "Elavad arvud" ja A. Kasvandi, J. Langi "Väike matemaatik". Küsimus lahendati sõbralikult. I–III klassile jäeti standardõpikuks "Elavad arvud", IV klassile "Väike matemaatik", V–VI klassis oli A. Kasvandi ja

J. Langi kõrval kolmandaks autoriks O. Paas. Kuigi nende raamatud ei erinenud oluliselt õpikutest "Väike matemaatik V ja VI", anti nad välja nüüd ka uue nimetusega "Matemaatika õpik". Need said V ja VI klassis ainulubatud õpikuiks. Keskkooli, s.o. progümnaasiumi esimeste klasside osas ei jõutud hästi kokkuleppele, kas sinna sobivad V ja VI klassi matemaatikaraamatud või peavad olema oma õpikud. Autorite kollektiiv A. Borkvell jt. oli progümnaasiumide jaoks alles 1936. a. välja andnud nii aritmeetika-, algebra- kui ka geomeetriaõpikud. Th. Koik oli sedasama teinud kokkuvõetuna ühte raamatusse nii II kui ka III klassi jaoks. Algebra õpetamiseks oli oma tööraamatuid kohandanud selle kooli jaoks G. Rägo. J. Kuulberg ja J. Nuut olid välja andnud keskkooli esimeste klasside matemaatikaraamatuid, autorite kollektiiv E. Etverk jt. oli keskkooli kõikide klasside jaoks koostanud matemaatika töövihikud. Seega oli progümnaasiumi standardõpikute kandidaate väga palju, kuid siin ei olnud ühtki nii ulatuslikult praktikas kontrollitud õpikute komplekti kui algkoolis. Matemaatika Õpetamise Komisjon lahendas küsimuse otsusega koostada keskkoolile algebra õpik ja ülesannetekogu. Autorid valiti komisjoni koosseisust. Õpiku koostasid J. Grüntal ja G. Rägo ning ülesannetekogu G. Rägo ja A. Vihman. Ilmselt olid I ja II klassis kasutusel ka A. Kasvandi, J. Langi ja O. Paasi õpikud ning III–V klassini ilmselt A. Borkvelli jt. raamatud "Keskkooli geomeetria", mille I osa ilmus uues trükis veel 1940. aastal. Võib muidugi arvata, et koolides kasutati ka E. Etvergi geomeetriaraamatuid, mis olid ilmunud 1936. ja 1937. aastal.

Matemaatika õpetamiseks gümnaasiumides koostasid kõigi kolme klassi peale kokku ühe õpiku E. Etverk ja G. Rägo. See sisaldas nii algebra, trigonomeetria kui ka matemaatilise analüüsi küsimusi. K. Ratassepp ja G. Rägo andsid selle kõrval välja iga klassi jaoks eraldi ülesannetekogu.

Algkoolile koostatud matemaatika standardõpikud jäid koolides kasutusele ka õppeaastal 1940/1941 ja 1941–1944. Et aga kaotati progümnaasium ja keskkoolis 12. õppeaasta, siis kadus vajadus keskkooli algebraõpiku ja ülesannetekogu ning gümnaasiumi matemaatikaõpiku ja ülesannetekogude järele.

1940 /1941. õppeaastal, seoses nõukogude võimu kehtestamisega Eestis, muudeti kooli struktuuri. Lakkasid olemast progümnaasium, reaalkool ja gümnaasium. Kogu üldhariduskool läks üle klasside numeratsioonile I–XII. 1941. aasta kevadel lõpetasid keskkooli nii XI kui XII klass. 1940. aastal jõuti välja anda mõne varemkasutatud õpiku ümbertöötlused.

Ilmselt valmistuti juba siis üle minema Nõukogude Liidus kehtivaile programmidele ja õpikuile. Alustati ka nende õpikute tõlkimisega. Ilmuda jõudis siiski ainult N. Rõbkini trigonomeetriaõpik.

Saksa okupatsiooni aastail 1941–1944 muutus koolistruktuur selliseks nagu kahekümnendatel aastatel: 6-klassiline algkool ja seejärel 5-klassiline gümnaasium. Matemaatikaraamatuist olid kasutusel algkooli I ja II klassis "Elavad arvud", III–IV klassis "Väike matemaatik" ning V ja VI klassis A. Kasvandi, J. Langi, O. Paasi "Matemaatika õpik". Gümnaasiumi I ja II klassile oli A. Vihman koostanud algebraõpikud ning siin kasutati ka E. Etvergi geomeetriaõpikuid. III klassis tuli kasutusele Karl Maasiku algebra- ja K. Ratassepa trigonomeetriaõpik, IV klassis K. Ratassepa algebra- ja trigonomeetria- ning E. Etvergi stereomeetriaõpik. Reaalgümnaasiumide III ja IV klassis oli lisaõpikuna kasutusel veel Leonti Ruumeti ja Gerhard Rägo koostatud täiendusõpik. Gümnaasiumi lõpuklassis õpiti G. Rägo õpiku järgi, reaalgümnaasiumis oli kasutusel veel L. Ruumeti täiendusõpik. Seega rikastus Saksa okupatsiooni aastail matemaatikaõpikute autorite pere K. Maasiku ja L. Ruumetiga. Esimene oli küll varemgi koolikirjanduse väljaandmisega seotud. 1920. aastal oli ta kirjutanud ühe algebra raamatu (vt. lk. 10 ja 153). Matemaatikaõpikute kirjastamisel neil aastail oli iseärasuseks veel see, et kõigi gümnaasiumiõpikute peatoimetajaks oli Oskar Silde, kes neil aastail töötas Tallinna Õpetajate Seminari inspektorina.

Nõukogude Eesti koolis, 1944. a., muutus koolistruktuur jälle. Nüüd hakati nimetama kooli, kus töötasid I–IV klass, algkooliks; kus I–VII klass, mittetäielikuks keskkooliks ja koole klassidega I–XI keskkooliks. Seega kadus range algkooli ja keskkooli eristamine ning tekkisid koolid, kus õppisid lapsed alates I klassist kuni XI klassini. Koolikohustus tõsteti VII klassini. Võimukandjatele osutusid kooliõpikute autoritena peatselt vastuvõetamatuks A. Kasvand, J. Lang ja O. Paas. 1945. aastal oli raamatu "Väike matemaatik" kasutamine veel lubatud, kuid järgmiseks õppeaastaks olid III klassis kasutusel B. Rea, IV klassis A. Lehise V klassis O. Rünga ja H. Roosi ning VI ja VII klassis A. Vihmani õpikud. Nendel aastatel toimus matemaatikatundide arvu järkjärguline suurenemine ning matemaatikaprogrammi nõuete lähendamine üleliidulistele, kuni 1949./1950. õppeaastal mindigi täielikult üle Nõukogude Liidus kehtivale matemaatikaprogrammile ja seal kasutatavaile õpikutele.

Võtame lühidalt kokku ajakirjanduses aastail 1937-1950 avaldatud artiklid. Iseloomustame neid eraldi aastail 1937–1940, 1941–1944 ja 1945–1950. Esimesel perioodil olid arutluse all aktuaalsed küsimused. Üks nendest oli Johannes Käisi propageeritud töökooli printsiibi juurutamine, mida innukalt toetas näiteks Viktor Ordlik. Teine aktuaalne küsimus aastatel 1937–1940 oli standardõpikute kehtestamine. Avaldati nii poolt- kui vastuarvamusi. On põhjust arvata, et aastatel 1941–1944 matemaatika õpetamise kohta artikleid ei ilmunud. Kolmanda perioodi artiklite juures aktuaalseid põhiprobleeme ilmsiks ei tule. Rohkem kirjutatakse näitlikustamisest ja õpilaste teadmiste kontrollimisest. Täheldatav on õpetaja kui loova isiku vähesem austamine, mis ilmneb temale rohkete metoodiliste soovituste jagamises.

Järgnevaks ülesandeks on lähem tutvumine aastatel 1918–1948 ilmunud õpikutega. Algkooliõpikutega tutvume autorite kaupa, keskkooliõpikutega ainevaldkondade järgi. Käesoleva töö raamid ei näe ette nende õpikute täielikku analüüsi. Siin esitatav tahab esile tuua mõndagi omanäolist nende õpikute sisust ja juhtida tähelepanu küllaltki ulatuslikule ja huvitavale metoodilisele pärandile meie koolimatemaatika arenguloos.

3. ALGKOOLI MATEMAATIKA KOOLIRAAMATUD. ARITMEETIKA KÄSITLUSI KESK- JA KUTSEKOOLI ÕPIKUIS

Käesolevas peatükis tutvustatakse algkoolile kirjutatud matemaatikaõpikuid ja ülesannetekogusid. Et algkoolis on ulatuslikuma aritmeetika kursuse kõrval õpetatud ka propedeutilist geomeetriat, siis sisaldab see peatükk mõningaid näiteid nii aritmeetika kui ka geomeetria teemade huvipakkuvamatest käsitlustest. Lisaks algkooli õpikutele on samasse peatükki lülitatud keskkooli (progümnaasiumi) ja kutsekooli matemaatika kooliraamatute aritmeetika käsitluste tutvustamine. Vastavalt öeldule sisaldab käesolev peatükk järgmised alateemad.

1. August Maramaa ja Jaan Maramaa matemaatika kooliraamatud.
2. Friedrich Vollrad Mikkelsaare matemaatika kooliraamatud.
3. Karl Rudolf Veski ja Jüri Grünthali matemaatika kooliraamatud.
4. Herta Veidermanni, Adeele Oengo-Johansoni ja Christian Brülleri raamatud "Väike arvaja" ja "Väike arvutaja".
5. Johannes Kuulbergi, Elisabeth Kuulbergi, Elmar Martinsoni, Konstantin Treffneri ja Oskar Perli raamatud "Elavad arvud".
6. Töökooli põhimõtete elluviimine matemaatika algõpetuses Johannes Käisi ja tema kolleegide poolt.
7. Matemaatika töövihikud.
8. August Kasvandi ja Juhan Langi raamatud "Väike matemaatik".
9. Teisi aastatel 1920–1937 ilmunud algkooli matemaatikaraamatuid (J. Koppel, A. Perli, A. Perandi ja M. Meos).
10. Keskkooli aritmeetikaõpikuid (O. Perli, A. Borkvell jt.).
11. Aritmeetika erialalistes matemaatikaõpikutes (Ed. Moss, N. Puura, J. Jaakson, J. Jakk, E. Järvela, A. Mutt).
12. I–VI klassi matemaatikaõpikuist aastatel 1941–1950.
13. Eestikeelsetest matemaatika kooliraamatutest Nõukogude Venemaal aastatel 1920–1940.

3.1. August Maramaa algkooli matemaatika kooliraamatud. Jaan Maramaa õpikud

Juba sajandi algul aritmeetikaõpikuid kirjutanud August Maramaa (kuni 1922. a. Marfeldt) (1881–1941) oli üks viljakamaid autoreid ka Eesti Vabariigis (1918–1940). Tema raamatud "Aritmeetika ülesannete kogu" ilmusid aastatel 1921–1925 eraldi I–VI klassile. Alates 1930. aastast jätkus nende raamatute uute trükkide väljaandmine pealkirjaga "Matemaatika ülesannete kogu". Viimased raamatud sellest seeriast anti välja 1935. aastal. Järgnenud standardõpikute kehtestamise perioodil jäeti A. Maramaa raamatud kõrvale.

A. Maramaa pani erilist rõhku ka geomeetria õpetamisele algkoolis. Vastavad raamatud "Geomeetria" II–IV klassile avaldas ta 1924. aastal. A. Maramaa vend Jaan Maramaa (1891–1986) andis 1922. a. välja õpiku "Geomeetria algkooli kõrgematele klassidele", sellest raamatust anti 1923. a. välja ka 2. trükk. Vennad A. ja J. Maramaa koos andsid 1927. a. välja õpiku "Geomeetria V ja VI õppeaasta". Kolmekümnendatel aastatel ilmunud raamatud "Matemaatika ülesannete kogu" hõlmasid juba nii aritmeetika- kui ka geomeetriaõpetuse. A. Maramaa pidas neid oma varasemate õpikute kordustrükkideks. Nii ilmusidki A. Maramaa õpikud ajavahemikus 1921–1935 kuni kümnes trükis. Näiteks ilmus 1933. a. I kl. õpikust 8. trükk, 1935. a. II kl. õpikust 9. trükk ja III kl. õpikust 10. trükk, 1934. a. IV klassi õpikust 9. trükk, 1935. a. V kl. õpikust 6. trükk ja 1934. a. VI kl. õpikust 6. trükk.

A. Maramaa õpikute stiil erineb oluliselt teiste samal perioodil algkoolile matemaatikaraamatuid kirjutanud autorite, nagu F.V. Mikkelsaar, K.R. Veski ja J. Grünthal, H. Veidermann jt.,omast. A. Maramaa Viljandis trükitud raamatud torkavad silma formaalsema õpetamismaneeriga ning materjali suurema ulatusega. 1928. a. ilmunud raamatukeses "Algkooli matemaatika õppetöö kavad", kus kõigi klasside aine oli vastavalt A. Maramaa õpikutele tundide viisi jaotatud, on eessõnas õppekavade kohta märgitud järgmist: "Vähendamine on võimalik, ka suurendamine, sest olen töökava koostamisel pidanud silmas keskmist kooli ja töökavasse võtnud mitmes kohas vähe rohkem, kui nõuab õppekava. See paistab silma iseäranes geomeetria osas. Töö suurendamine, kui õpilaste areng ja kooli tasapind seda lubab, ma ütleks veel koguni, nõuab, on otse loomulik, sest iga õppekava on miinimumkava: kui ta rohkem tahab olla kui miinimum, siis peab see kavas eneses nimetatud olema".

A. Maramaa I klassi õpikus puuduvad joonised, sest "pildikestega töötamine on ühekülgne ja võimaldab lastel tööst kõrvale jääda". Küll aga annab A. Maramaa lastele ülesandeks ise joonistada, lõigata, kleepida. Iga uue arvu tundmaõppimisega käib kaasas joonistamisülesanne, nagu "Joonista 1 puu hulga okstega!", "Joonista 2 ruuduga aken!", "Joonista 3 pulgaga redel!" jm.

Arve 1–10 kujutatakse täppide abil. Suhteliselt ruttu minnakse edasi arvude 1–100 kirjutamise juurde. Tehete õpetamisel on A. Maramaal oma stiil. Näiteks hakatakse antud arvule esmalt juurde liitma ühtesid, siis juba kahtesid jne. Liitmist ja lahutamist, samuti korrutamist ja jagamist õpetatakse koos. I klassis tutvustatakse murde $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ ja esitatakse isegi segaarve. Korrutamist õpitakse tundma ühe ja sama arvu korduva liitmise teel ning jagamist ühe ja sama arvu korduva lahutamise teel. I klassis kasutatakse aritmeetiliste tehete ülesannetes otsitava arvu jaoks tühimikke, II klassis võetakse otsitava arvu tähisena kasutusele täht x. A. Maramaa pühendas veel küllalt suurt tähelepanu endistele vene mõõtühikutele, mis tol ajal rahva hulgas veel laialdaselt kasutamist leidsid. Nii toimubki esimene tutvus mõõtudega järgmiselt: "Küünar on 21 tolli ja raamat paberit on 24 poognat".

III klassi raamatus on vene mõõtude süsteem esitatud juba küllalt täielikult. Sealt leiame nii pikkusmõõdud, vedelikumõõdud kui ka paberimõõdud. A. Maramaa õpikud sisaldavad suhteliselt palju formaalseid sõnalisi harjutusülesandeid. Toome näiteid.

"Liidetavad on 24 ja 8; 5 ja 9; 35, 8 ja 8. Leia summa!"

"Sea igast numbripaarist 2 ja 5, 7 ja 3, 6 ja 7, 9 ja 1, 4 ja 8, 3 ja 5, 5 ja 8, kaks kahekohalist arvu ja leia nende vahe!"

"Eha korrutas 7 tundmata arvuga ja sai 35 163,59. Leia tundmata arv!"

Vaadeldavais kooliraamatuis pannakse küllaldast rõhku peastarvutamisele. Õpilasi õhutatakse aga ka kiiremini arvutama selleks esitatud kiirarvutamise ülesannete kaudu. Näiteks kuulub II klassi raamatust nende hulka järgmine ülesanne.

"Leida terve arv, kui $\frac{2}{7}$ arvust on 12! Saadud tervest arvust võta $\frac{5}{7}$. See arv, mis leitud, on $\frac{5}{9}$ otsitavast arvust. Kui suur on otsitav arv?"

III klassis õpetatakse mõistma ajaühikuid näiteks järgmise huvitava ülesandega.

"Lugeda 60 sekundit! Käia 2 sammu sekundis! Käia 120 sammu minutis! Pidada hinge kinni $\frac{1}{4}$ minutit, $\frac{1}{2}$ minutit! Hoidke käed 1 minut püsti!"

A. Maramaa raamatuist leiame ka ülesandeid, mis tuletavad meelde raamatupidamise tabeleid. Näiteks

$$+\begin{array}{r} 32475 + 9696 + 17356 \\ 6625 + 8078 + 54542 \\ 986 + 1944 + 14027 \\ \underline{58266 + 7654 + 9119} \end{array} \qquad \text{või} \qquad -\begin{array}{r} 927365 - 837475 \\ \underline{708466 - 696296} \end{array}$$

III klassis tutvustatakse kümnendmurde esialgu kümnendarvu nime all ning õpitakse nendega tehteid sooritama. Protsendi tutvustamisel tuuakse näiteid, kuidas leida arvust 1 %. Kuidas leida arvust 2 % või 75 %, tuleb juba õpilasel enesel nuputada. Samuti ei ole toodud näidet, kuidas leida, mitu protsenti on üks arv teisest.

IV klassi kursus süvendab suurel määral III klassi kursust. Nii leiame siitki ülesandeid harilike murdudega, kümnendmurdudega ja protsentidega. Täiesti uue ainena käsitletakse aga tehteid mitme nimega arvudega. Näiteks on antud lahendada isegi ülesandeid, nagu

298 sülda 4 jalga 8 tolli : 4 jalga 8 tolli.

Mõõtude süsteem täieneb siin viljamõõtudega. IV klassis jõutakse isegi geomeetriliste kehade pindala ja ruumala arvutamise ülesanneteni. Siinjuures vajab rõhutamist, et geomeetria õpetamisel lähtus A. Maramaa ruumikujundite vaatlemisest.

V ja VI klassi raamatutes jõutakse aritmeetiliste tehetega mitmeid sulge sisaldavate ülesanneteni, nagu

$$\{99 \cdot [200 - (89 + 9{,}75)] - 6789\} : (37500{,}375 : 100{,}001).$$

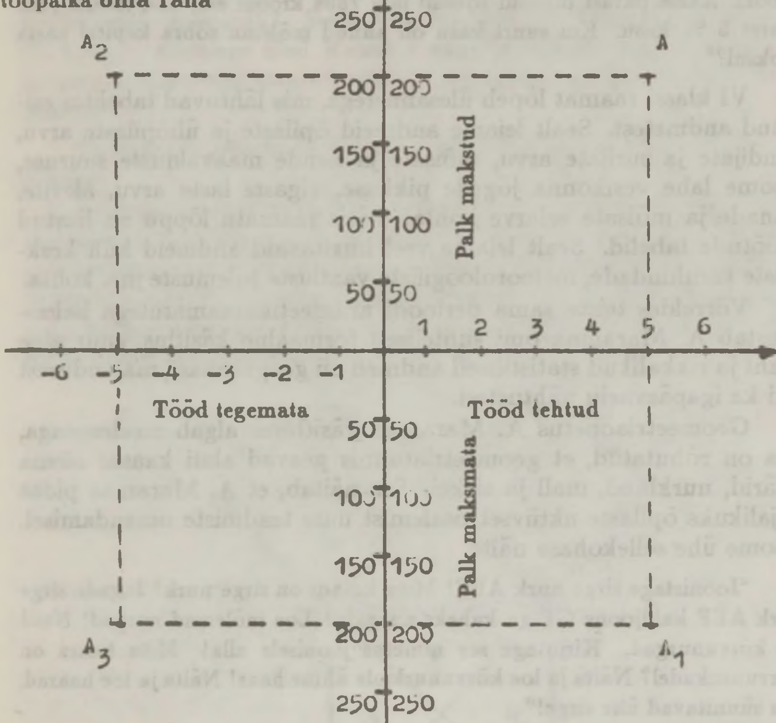
Arvude jaguvuse tunnuste juurde jõudmine toimub siin aga jällegi väga vähe suunatult. Näiteks nõutakse kirjutada antud arvude hulgast (45-st 2–5-kohalisest arvust) välja kõik 4-ga jaguvad arvud ja sellele järgneb kohe nõue kirjutada 5 kolme-, 5 nelja-, 5 viie-, 5 kuue- ja 5 seitsmekohalist 4-ga jaguvat arvu.

Siin käsitletakse astendamist ja ka ruutjuure leidmist, kuid juurimismärki seejuures ei kasutata. Kasutusele võetakse koordinaatteljed ning nende abil leitakse huvitavalt kahe suunaga arvu korrutise märk (vt. jn. 2).

Edasi leiame VI klassi raamatust lineaarvõrrandite ja lineaarvõrrandisüsteemide koostamise ülesandeid. Järgneb veel peatükk, Peremees palkas päevilise, kes 2 krooni päevas palka saab. Arvutage allantud tabelülesanded kirjalikult ja märkige vastused täppide A, A_1, A_2 ja A_3 juurde.

3) Peremehel on 5 tegemata päeva tööpalk töölisele ette välja makstud. Mitu krooni on peremehel käesoleva töö eest taskus tööpalka **oma raha**

1) Tööline on teinud 5 päeva ja palk on tal käes. Mitu krooni on **töölisel** kõnesoleva töö eest taskus tööpalka **oma raha**



4) Peremehel on töölisele 5 tegemata päeva eest palk maksmata. Mitu krooni on **peremehel** käesoleva töö eest taskus tööpalka **oma raha**

2) Tööline on teinud 5 päeva, palk on aga saamata. Mitu krooni on **töölisel** kõnesoleva töö eest taskus tööpalka **oma raha**

Järgnevad ülesanded korrutada ülalantud tabeli alusel:

$2 \cdot 50$ $\quad 3 \cdot -200$ $\quad -2250$ $\quad -3 \cdot -350$

Jn. 2.

kus käsitletakse suuruste olenevust ja võrdelist jagamist. Siit leiame sajandi alguse matemaatikaõpetusele veel küllalt omaseid liitkolmlause, segude ja võrdelise jagamise ülesandeid. Näiteks:

"8 töölist, töötades 8 tundi päevas, said töö valmis 12 päevaga. Mitme päevaga oleks sama töö valmis saanud 6 töölist, töötades 10 tundi päevas?"

"Kaks sõpra ostsid kahepeale talu. Üks andis 45 % talu hinnast, teine puuduva osa. Esimesel aastal andis talu 721,10 krooni renti, kulu oli 307,50 krooni. Aasta pärast müüsid sõbrad talu 7896 krooni eest ära, saades selle juures 5 % kasu. Kui suurt kasu oli annud mõlema sõbra kapital aasta jooksul?"

VI klassi raamat lõpeb ülesannetega, mis lähtuvad tabelites esitatud andmetest. Sealt leiame andmeid õpilaste ja üliõpilaste arvu, sündijate ja surijate arvu, mõisate ja nende maavalduste suuruse, Soome lahe vesikonna jõgede pikkuse, vigaste laste arvu, alevite, linnade ja mõisate eelarve kohta. Päris raamatu lõppu on lisatud mõõtude tabelid. Sealt leiame veel huvitavaid andmeid küll keskmiste turuhindade, meteoroloogiliste vaatluste tulemuste jne. kohta.

Võrreldes teiste sama perioodi aritmeetikaraamatutega iseloomustab A. Maramaa omi suhteliselt formaalne käsitlus, suur aine maht ja rikkalikud statistilised andmed nii geograafiast, majandusest kui ka igapäevaelu nähtustest.

Geomeetriaõpetus A. Maramaa käsitluses algab meelespeaga, kus on rõhutatud, et geomeetriatunnis peavad alati kaasas olema käärid, nurklaud, mall ja sirkel. See näitab, et A. Maramaa pidas vajalikuks õpilaste aktiivset osalemist uute teadmiste omandamisel. Toome ühe sellekohase näite.

"Joonistage sirge nurk AEF! Mitu kraadi on sirge nurk? Jagada sirge nurk AEF kaldjoone GE-ga kaheks nurgaks! Loe mõlemad nurgad! Need on kõrvunurgad. Kirjutage see nimetus joonisele alla! Mitu haara on kõrvunurkadel? Näita ja loe kõrvunurkade ühine haar! Näita ja loe haarad, mis sünnitavad ühe sirge!"

Pindala ja ruumala ülesannete lahendamiseks tuuakse ära pindalamõõdud ja ruumalamõõdud. Et astme mõistet ei tunta, siis antakse vastavad nimetused sõnades. Näiteks:

1 kuupm = 10 · 10 · 10 kuupdm = 1000 kuupdm;

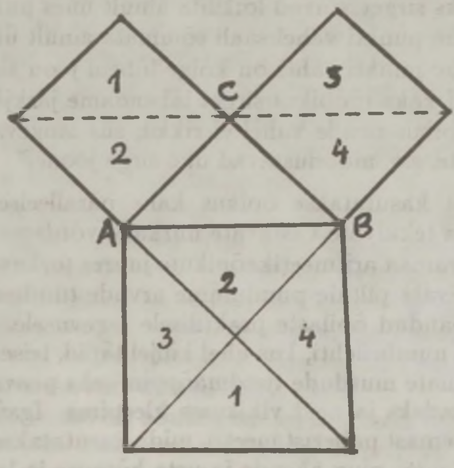
1 kuuparssin = 16 · 16 · 16 kuupverssokit = 4096 kuupverssokit.

Pindalade valemite tuletamisel kasutatakse tükeldamisvõtet. Esitame siin A. Maramaa juhised trapetsi pindala valemi leidmiseks.

"Joonistage trapets, mille alumine alus on 8, ülemine 5 sm, kõrgus 4 sm pikk. Tõmmake trapetsi pahemast tipust alumisele alusele kõrgus! Leidke parema haara keskpunkt, ja ühendage teda pahema ülemise tipuga! Lõigake trapets välja! Lõigake ta joont mööda, mis ühendab trapetsi tippu parema haara keskpunktiga kaheks! Seadke saadud osadest kolmnurk! Kui pikk on selle kolmnurga alus? kõrgus? Mis on selle kolmnurga aluseks? Arvutage selle kolmnurga pindala! Kirjutage üles! (Millega võrdub kolmnurga pindala?) Muundage kolmnurk tagasi trapetsiks! Kumb on oma pindala poolest suurem või vähem, kas trapets või tema osadest kokkuseatud kolmnurk? Seega siis, kui suur on selle trapetsi pindala? (26 ruutsm) Kirjutage üles! Katsume nüüd leida, kuidas arvutada trapetsi kõrguse ja aluste abil trapetsi pindala! Seega siis: millega võrdub trapetsi pindala?"

Toodud näide on õpetajale eeskujuks teema käsitlemisel ka praegu.

Pythagorase teoreemi põhjendamisel on A. Maramaa, nagu mõned teisedki sama perioodi autorid lähtunud võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast. Sel juhul on nii hüpotenuusile kui ka kaatetitele ehitatud ruudud tükeldatavad antud võrdhaarse täisnurkse kolmnurgaga kongruentseteks kolmnurkadeks (vt. jn. 3) ja teoreemi kehtivus on jooniselt kergesti loetav.



Jn. 3.

Teoreemi üldistamiseks antakse ülesanne:

"Joonista täisnurkne kolmnurk *EDF*, mille kaatet *a* on 3 sm, kaatet *b*

4 sm! Siis on hüpotenuus c 5 sm. Joonista kaatetitele ja hüpotenuusile ruudud! Jaga ruutude küljed sentimeetriteks ja tõmba läbi lõikepunktide rööpjooned ruutude külgedele! Tõesta, et kaatetitele joonistatud ruutude summa võrdub hüpotenuusile joonistatud ruuduga. Valemi näol: $a^2 + b^2 = c^2$."

Seega toimub siin tõestus ruutude loendamise teel.

A. Maramaa pidas vajalikuks, et VI klassis tutvuksid õpilased ka geomeetria aksiomaatilise ülesehitusega.

Tuuakse näiteid lausetest, mille kehtivus on selge ilma tõestamata, ja lausetest, mille kehtivus vajab tõestamist. Vastavate näidete järel fikseeritakse 10 aksioomi.

"1. Kui kaks suurust on võrdsed kolmandaga, siis on nad võrdsed ka teineteisega.

2. Kui võrdsed suurused liita võrdsete suurustega, siis saab võrdsed suurused (võrdsed summad).

3. Kui võrdseist suurustest lahutada võrdsed suurused, siis saab võrdsed suurused (võrdsed vahed).

4. Terve on suurem oma üksikutest osadest.

5. Terve on kõigi oma osade summa.

6. Võrdsed suurused võib asendada teineteisega.

7. Kaks sirget võivad lõikuda ainult ühes punktis.

8. Kahe punkti vahel saab tõmmata ainult ühe sirge.

9. Kahe punkti vahel on kõige lühem joon sirge joon.

10. Kui kaks rööbikut sirget lähendame järkjärgult nii teineteisele, et rööbikus nende vahel ei rikku, siis langevad need rööbikud viimaks ühte, s.o. moodustavad ühe sirge joone."

Viimast kasutatakse õpikus kahe paralleelse sirge lõikumisel kolmandaga tekkivate vastavate nurkade võrdsuse tõestamiseks.

A. Maramaa aritmeetikaõpikute juures torkavad silma suur kiri ja illustreerivate piltide puudumine arvude tundmaõppimisel. Suurt rõhku on pandud õpilaste praktilisele tegevusele. Õpilased peavad valmistama numbrilehti, kus ühel küljel täpid, teisel aga vastav number. Lihtsamate murdude tundmaõppimiseks peavad õpilased lõikama ringi osadeks ja neid vihikusse kleepima. Igaüks peab lõikama endale paksemast paberist meetri, mida kasutatakse näiteks klassitoa pikkuse ja laiuse ning akende ja uste kõrguse ja laiuse mõõtmiseks. A. Maramaa arvestas õpilaste lugemisoskusega ja seetõttu tema raamatuis esialgu tekstülesanded puudusid. III klassi õpikus tutvustati lihtsamate võrrandite lahendamist kaalude abil. Ülesanded jagunesid ikka peastarvutamise ja kirjalikult lahendatavaiks ülesandeiks.

Geomeetriraamatuis torkab silma püüd õpilasi ise uute tulemuste juurde juhtida.

Jaan Maramaa õpik oli koostatud V ja VI klassi õpilastele geomeetria kordamiseks, kusjuures selles raamatus on kõik laused antud koos tõestusega.

Algtõdedena on J. Maramaa fikseerinud eespool loetletud A. Maramaa kümnest aksioomist esimesed kuus. Raamatus käsitletakse nii planimeetria kui ka stereomeetria küsimusi. Lõpuks lisatakse veel teemad "Koordinaadid ja graafilised kujutused" ning "Mõned praktilise geomeetria küsimuste lahendused".

* * *

Lõpetame August ja ka Jaan Maramaa koolimatemaatikaalase pärandi tutvustamise ning lisame veel andmeid nende elust ja tegevusest.

August Maramaa (kuni 1922. a. Marfeldt) (1881–1942) sündis 6. aprillil 1881. a. Tartumaal Rõngu kihelkonnas Aakre vallas talurentniku pojana. Õppis 1891–1893 Astuvere külakoolis, 1893–1895 Aakres vene õigeusu abikoolis. 1895–1897 Rõngu Tilga vene õigeusu kirikukoolis ja 1897–1902 Tartu Õpetajate Seminaris.

Töötas 1902–1904 Viljandimaa Vastemõisa 2-klassilise ministeeriumikooli õpetajana ja seejärel kuni 1906. aastani sama kooli juhatajana. 1906–1907 oli K. Wilhelmsoni 3. järgu era-algkooli õpetaja Viljandis, 1907–1913 Tõrva kroonukooli juhataja ning seejärel kuni aastani 1919 Viljandi kroonukooli juhataja. Viimasel ametikohal töötamist takistas Esimene maailmasõda, millest ka A. Maramaal tuli 1914–1917 osa võtta. Aastatel 1919–1921 oli A. Maramaa Viljandi linnapea, seejärel pöördus veel kord tagasi koolitööle, olles 1922–1927 Viljandi linna II (*resp.* V) algkooli õpetaja. 1927–1939 oli A. Maramaa jällegi Viljandi linnapea. Seejärel töötas lühemat aega Tallinnas Kopli kinnisvarade valitsuse juhatajana. Pärast juunipööret 1940. aastal asus tööle õpetajana Vigalas, kust jaanuaris 1941 arreteeriti. A. Maramaa suri Siberis 1942. aastal.

Et August Maramaa oli nõukogude võimu poolt represseeritud, siis ei olnud temast ka kaua aastaid midagi kirjutatud. Siiski juba enne Eesti taasiseseisvumist asuti tema tegevuse ja pärandi uurimise juurde. 9. nov. 1991. a. korraldati Viljandis August Maramaa mälestusaktus tema 110. sünniaastapäeva puhul. Seal esinesid tookordsed Viljandi linnajuhid Heiki Raudla ja Ülo Stöör, A. Maramaa tütrepoeg pastor Eenok Haamer, käesoleva raamatu autor jt.

August Maramaa elu ja tegevust tutvustavad järgmised artiklid.

T. Luik ja A. Raidsalu. Eesti Vabariigi aegsed Viljandi linnapead. "Sakala" kalender. 1991. lk. 52–57.

M. Haamer. Mõnda August Maramaa eluloost. Haridus, 1991, 4, 56.

O. Prinits. Alternatiivsed matemaatika kooliraamatud Eesti Vabariigi koolis. Haridus, 1992, 5, 42–45.

Linnapea August Maramaa. Sirp ja Vasar, 1988, nr. 46.

Jaan Maramaa (30.VII 1891–6.II 1986), August Maramaa vend. Õppis aastatel 1908–1912 Tartu Õpetajate Seminaris ning töötas seejärel õpetajana 1912–1915 Keerdi algkoolis ja Somevere ministeeriumikoolis ning 1915–1918 Petrogradis Eesti Jaani kiriku koolis. Petrogradis sooritas ta eksternina reaalkooli lõpueksamid. 1919. a. immatrikuleeriti J. Maramaa E.V. Tartu Ülikooli esimese üliõpilasena (matrikkel nr. 1). Ülikooli lõpetas ta keemiamagistrina 1925. a. Ülikoolis õppimise aastail oli ta matemaatikaõpetajaks Tartu Linna 11. ja 6. algkoolis. Aastatel 1925–1944 oli ta keemia- ja kaubatundmise õpetajaks Tartu Kommerts- ja Kaubanduskoolis. Aastatel 1946–1950 oli J. Maramaa Tartu Riikliku Ülikooli orgaanilise keemia kateedri vanemõpetaja. 1948. a. kinnitati tema keemiakandidaadi kraad. Aastatel 1950–1954 oli ta represseeritud, seejärel kuni surmani elas pensionärina Peedul.

Eluloolised andmed Jaan Maramaa kohta on saadud tema pojalt prof. Sulev Maramaalt.

3.2. Friedrich Vollrad Mikkelsaare matemaatika kooliraamatud

Viljakaks algkooli matemaatika õpikute autoriks oli Friedrich Vollrad Mikkelsaar. Tema "Geomeetria rahvakoolidele" ilmus juba 1920. aastal, hiljem kandis raamat nimetust "Geomeetria algkoolidele". See raamat ilmus kolmes osas ja kuni kolmes trükis. Viimased väljaanded on 1924. aastast. 1924–1930 ilmusid tema raamatud nimetuse all "Algkooli matemaatika", sisaldades nii aritmeetika- kui geomeetriaõpetust. Need raamatud ilmusid eraldi I–VI klassini ja anti välja kahes trükis. F.V. Mikkelsaar kirjutas veel "Geomeetria metoodika", mis ilmus juba 1921. aastal.

Esimene F.V. Mikkelsaare geomeetriõpik ilmus venekeelsena Valgas aga juba 1916. aastal. Seejärel oli seda raamatut Kaug-

Idas välja antud mitmes trükis, kusjuures autorit oli peetud kuulsaks saksa töökooli pedagoogiks.

Aritmeetika algõpetuses on F.V. Mikkelsaar kasutanud jutustavat vormi. Nii selgub sealt, kuidas väikemees Tõnn õpib vanemate õdede-vendade kõrval ära arvutamise. Igapäevastest situatsioonidest kasvab lapse jaoks kas mingi uue arvu, mõiste või tehte tundmaõppimise vajadus. Liitmist ja lahutamist kuni arvuni *6* õpitakse täringumängu abil, mõõdulindilt õpitakse tundma arve, mis on suuremad kui *10*, õues mängides saadakse tuttavaks "rõhtsate joontega", sünnipäeval õpitakse kuupäevi jne.

Huvitav on F.V. Mikkelsaare käsitluses aritmeetika- ja geomeetriõpetuse läbipõimumine. Nii tutvustatakse esmalt arve 0–4, seejärel kolm- ja nelinurka ning sirgjoont. Kui võetakse juurde arv *5*, asutakse liitma ja lahutama *5* piires. Kui tutvutakse arvuga *6*, seostub see kuubi tahkude arvuga. Arvudega *7–10* käivad koos kõik neli aritmeetilist tehet. Et panna lapsi ise mõtlema ja arendada nende isetegevust, seatake nad tihti küsimuste ette nagu "Mis nüüd?" või "Mis me arvame?" Sealsamas nõutakse joonistamist, lõikamist jne. Iseseisva töö tulemusi kasutatakse uute ülesannete püstitamiseks. Kui lapsed on mõõtnud sammudega klassiruumi pikkuse ja laiuse, siis järgnevad küsimused "Kui palju oli pikkus?", "Kellel oli kõige suurem arv?"; "Kellel kõige väiksem?", "Kellel on kõige pikem samm?"; "Kellel on kõige lühem samm?" "Missugune võiks olla sammude arv, kui klassiruumi pikkust mõõdaks Kalevipoeg või päkapikumees?" II klassi õpiku ehitas F.V. Mikkelsaar üles järgneva jutuna. Veel on huvitav, et kõrvu jagamismärgiga võetakse kasutusele murrukriips. Rohkesti pakutakse ülesandeid peast lahendamiseks. Selleks tutvustatakse ka vajalikke lahendamisvõtteid. Näiteks: "Et 9 korda 8 võtta, võta esiti 10 korda, saad 80..." "Tean, tean, ..." pahvatas Tõnn, "siis tarvis see 8 tagasi võtta, mis ülearu oli ... jääb 72. Tänan! Nii ongi kergem!" Ka III klassi õpikus on Tõnn õpilastele abiks aine õppimisel.

Algkooli IV–VI klassi raamatud on oma ülesehituselt traditsioonilisemad, kuid sisaldavad ka mõndagi autoripärast. Uut ainet tutvustatakse ikka vastavate ülesannete kaudu. Suurt rõhku pannakse peastarvutamisele. Palju ruumi kulub neis raamatuis ka geomeetria osale, kus jällegi on aine omandamisel tähtsal kohal õpilaste isetegevus. Algkooli viimaste klasside õpikuis võetakse kasutusele täht arvu tähisena, tuttavaks saab täht ka kui muutuja.

Toome mõned konkreetsed näited autori käsitlustest nimetatud õpikutes.

IV klassi raamatus on arvu koostise paremaks tundmaõppimiseks kasutatud ülesandeid, nagu

$$
\begin{array}{r} 90000 \\ 9000 \\ +\quad 900 \\ 90 \\ 9 \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 99260 \\ -\ 9000 \\ \hline \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 77777 \\ -\ 770 \\ \hline \end{array}
$$

Miljoniga tutvumine toimub järgmise vestluse abil:

"– Kuule, Maie, üks väike tütarlaps on võitnud 100 000 marka. Ta on vist küll kõige õnnelikum inimene ilmas?

– Ei tea ... Mõni on ju võitnud veel kümme korda niipalju.

– Kümme korda 100 000 marka ...? Kui palju see siis võib olla ...? Aga las ma katsun ise järele.

– Kuule, see on ju tuhat tuhat marka?

– Just ... Ainult öeldakse teisiti, see on miljon."

Murruga korrutamise juurde minnakse, lähtudes definitsioonist. "Kahe arvu korrutises on niipalju üht arvu (korrutatavat), kui palju näitab teine arv (korrutaja)."

Ja vastavalt sellele antakse ülesanded:

"Võtke $1\frac{1}{2}$ tosinat!"

"Võtke $2\frac{1}{2}$ tuhandet!"

"Võtke $\frac{3}{4}$ sadat!"

"Kui palju on $1\frac{1}{2}$ ja 12 korrutis?"

"Mis tähendab 12-t korrutada $1\frac{1}{2}$-ga!"

V klassi raamatust leiame ülesanded, kus ka küsimus tuleb õpilasel enesel seada.

"Neiu Väljaots luges läbi esimesel päeval $\frac{2}{5}$ raamatust, teisel päeval $\frac{3}{8}$. Arvutage!"

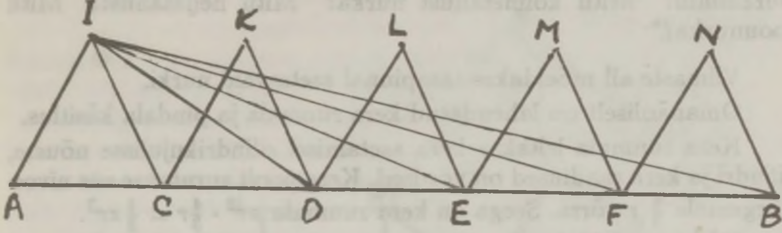
Selles raamatus on eraldi tehtena välja toodud tüvimurdude lahutamine:

"Et lahutada murrud, milledel lugeja 1, kirjutame vahe lugejaks murdude nimetajate vahe, nimetajaks aga murdude nimetajate korrutise

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{6-3}{3 \cdot 6} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}."$$

Toodud näite korral ei soovitata aga seda reeglit kasutada, vaid väljendada need murrud ühesugustes osades ja lahutada nii, nagu lahutatakse ühesuguste nimetajatega murde.

Huvitavalt on tuletatud korrapärase hulknurga pindala valem.



Jn. 4.

"Lõigake korrapärane hulknurk kolmnurkadeks ja seadke need kolmnurgad kõik ühele sirgjoonele AB ritta (vt. jn. 4). Nüüd kujutleme, et me muudame kolmnurga CKD temaga võrdpindseks kolmnurgaks CID-ks, kolmnurga DLE – kolmnurgaks DJE-ks, kolmnurga EMF – kolmnurgaks EJF-ks ja kolmnurga FNB – kolmnurgaks FJB-ks. Seega on kõik kolmnurgad muundatud ainsaks kolmnurgaks AJB, mille pindala on võrdne hulknurga pindalaga."

Mõttepingutust pakkus õpilastele ilmselt järgmine ülesanne:

"Pali põhjas on kaks auku, ühe läbi jookseb täis pali tühjaks 4 minutiga, teise läbi 5 minutiga. Pali oli $\frac{3}{4}$ võrra täidetud veega, kui avati mõlemad augud. Mitme minutiga jooksis pali tühjaks?"

VI klassi õpikus, püramiidi käsitlemise juures tutvustatakse ka ruuminurka.

"Pöörake tähelepanu nelinurkse püramiidi tipule! Mitu tahku koondub sellesse tippu? Neli tahku, mis ühte punkti koondunud, tekitavad neljatahuse nurga.

Neljatahusel nurgal on neli tahku, neli serva ja üks tipp.

Mitu tahku koonduvad nelinurkse püramiidi teistesse tippudesse?

Mitmetahuseid nurki on veel peale neljatahuse nelinurksel püramiidil?

Kuidas tekib kolmetahuline nurk?

Kas leidub varem tundmaõpitud kehadel kolmetahuseid nurki?

Otsige ümbritsevatelt asjadelt kolmetahuseid nurki!"

Tutvustatakse ka kahetahulist nurka, mis tekib kahe tasapinna lõikamisel. Seejärel antakse ülesanne:

"Nagu võite tähele panna, sünnib kahe tasapinna lõikumine alati piki sirgjoont. Näidake prismadel, püramiididel, teistel kehadel kahetahuseid nurki! Mitu kahetahust nurka leidub nelinurksel püramiidil? Mitu kolmetahust nurka? Mitu neljatahust? Mitu joonnurka?"

Viimaste all mõeldakse tasapinnal asetsevaid nurki.

Omanäoliselt on lahendatud kera ruumala ja pindala käsitlus.

Kera ruumala leitakse kera asetamisel silindrikujulisse nõusse, silindri ja kera raadiused on võrdsed. Kera poolt surutakse vee nivoo kõrgemale $\frac{4}{3}$ r võrra. Seega on kera ruumala $\pi r^2 \cdot \frac{4}{3}r = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Nüüd vaadeldakse kera koosnevana "otsatust hulgast väikestest püramiididest, mille kõigi tipud on kera keskpunktis koos, kuna nende põhjad moodustavad kera pinna". Nende püramiidide ruumalade summa on $\frac{1}{3}r$, korrutatud kera pindalaga. Seega

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}r \cdot \text{kera pindala}.$$

Siit saadaksegi, et kera pindala on $4\pi r^2$.

Pisut erinevalt teistest autoritest on F.V. Mikkelsaar käsitlenud ka Pythagorase teoreemi. Ta alustab kolmnurgaga, mille küljed on 3, 4 ja 5 ning nendele ehitatud ruutude pindalade vahel leitakse seos $3^2 + 4^2 = 5^2$.

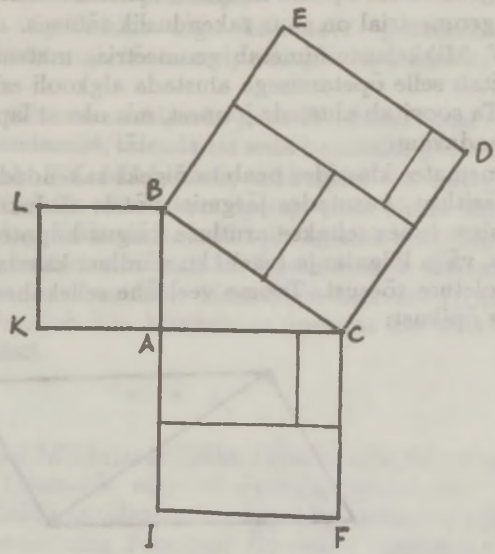
Seejärel lastakse joonistada teine täisnurkne kolmnurk, mõõta küljed ja leida nende ruudud ning veenduda vastava seose kehtivuses. Seejärel esitatakse järgmine geomeetriline tõestus:

"Kujutage paberilehele mingisugune täisnurkne kolmnurk ABC, kujutage tema hüpotenuusile BC ruut $BEDC$ (jn. 5), ühele kaatetile AC ruut $ACFI$ ja teisele ruut $ABLK$! Nüüd lõigake kõik ruudud välja! Paigutage ruut $ABLK$ ruut $BEDC$-le ja lõigake välja, ülejäägiga katsuge katta ruudu $ACFI$ pindala, lõigates ülejääki sündsateks tükkideks."

Veel soovitatakse kontrollida paksemale paberile või papile joonistatud täisnurkse kolmnurga kaatetitele ehitatud ruutude summa ja hüpotenuusile ehitatud ruudu pindala võrdsust kaalude abil.

VI klassi õpikus käsitletakse ka sirge ja tasapinna ning kahe tasapinna vastastikuseid asendeid. Katseliselt näidatakse kahe ristsirge teoreemi kehtivust. Esile tuuakse tasapinna määratus kahe lõikuva sirgega ning kolme mitte ühel sirgel asetseva punktiga.

Raamatu "Geomeetria metoodika" [Õ, 128] on F.V. Mikkelsaar jaotanud kolme ossa: geomeetria ja selle õpetamise ajaloost, üldine geomeetria metoodika ning lisandused.



Jn. 5.

Ajaloolises osas tutvustatakse geomeetria arengut alates kaljujoonistest ja Eukleidese "Elementidest". Rõhutatakse muutusi geomeetria õpetamisel, mis said eriti aktuaalseks pärast seda, kui 19. sajandi lõpul hakati ka rahvakoolides geomeetriat õpetama. Tutvustatakse geneetilist meetodit, töökooli ideed ja utilitaarset meetodit.

Raamatu II osas jaotatakse geomeetria õpetus kahte liiki: kujulugu ja kujuõpetus. Esimene on kirjeldav, kus tulemustele jõutakse peamiselt vaatluse teel, teises osas jõutakse geomeetriliste tõdedeni loogiliste tõestuste ja järeldustega.

Esiletõstmist väärivad sellest raamatust veel geomeetria õpetamise motiivid:

1) geomeetria õpetab vaatlema, ette kujutama, süvendab ruumitaju, tutvustab geomeetrilisi kujundeid;

2) geomeetria arendab mõtlemisoskust, õpetab eraldama olulist mitteolulisest;

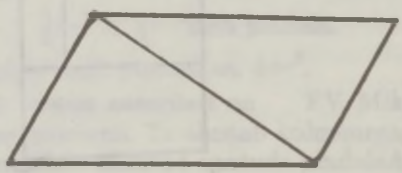
3) geomeetrial on üldine kasvatuslik ja hariduslik tähtsus. Ta arendab loovat mõtlemist, tööarmastust, tahtejõudu, korraarmastust ja ilutunnet;

4) geomeetria õpetab nähtuste-vahelisi seoseid avastama;

5) geomeetrial on suur rakenduslik tähtsus.

F.V. Mikkelsaar nimetab geomeetriat matemaatika kodulooks ja soovitab selle õpetamisega alustada algkooli esimestest klassidest alates. Ta soovitab alustada joonest, mis olevat lapsele kõige lihtsam ja arusaadavam.

Vanemates klassides peab ta õigeks rakendada teoreemide näitlikku käsitlust, kasutades järgmist võtet: deduktiivse tõestuse elemente sisse tuues tehakse arutluse käigus hüpotees; seejärel – joonistades, välja lõigates ja tegelikku võrdlust kasutades kontrollitakse tehtud oletuse tõesust. Toome veel ühe sellekohase näite F.V. Mikkelsaare õpikust:



Jn. 6.

"Tõmmake parallelogrammis nurkjoon (diagonaal) (jn. 6). Võrrelge seejuures tekkivate kolmnurkade külgi paaristikku. Missugused peavad need kolmnurgad isekeskis olema?

Joonistage paberilehele parallelogramm ja lõigake ta välja.

Tõmmake siis diagonaal ja lõigake parallelogramm kolmnurkadeks. Paigutage kolmnurgad võrdlemiseks üksteise pääle.

Kas on etteaimatud omadus nendel kolmnurkadel tõesti olemas?

Diagonaal jagab parallelogrammi kaheks ühesuuruseks kolmnurgaks. Siit on näha, et parallelogrammi vastasnurgad on ühesuurused".

Kokkuvõttes seab F.V. Mikkelsaar geomeetria õpetamisele järgmised põhinõuded:

1) geomeetria õpetamine olgu loomukohane: ta vastaku aine iseloomule, loomulikule teadmiste omandamise käigule (analüüs –

sũntees – abstraktsioon – sũstematiseerimine – rakendamine), lapse loomule ning koolioludele;

2) geomeetria õpetamine olgu näitlik ja praktiline;

3) õpetamine toimugu hũpeteta ja olgu tarviliselt kestev;

4) arvestatagu huvitatuse printsiipi;

5) geomeetria õpetamine olgu kasvatav: geomeetria abil saab arendada võimistungi, tõetunnet, tahtejõudu, ilumeelt, korraarmastust.

Nende nõuete täitumise eelduseks peab F.V. Mikkelsaar laboratoorse meetodi rakendamist, täiendades seda heuristilis-geneetilisega.

Lõpuks selgitab F.V. Mikkelsaar, missugune on õpetaja roll geomeetria õpetamisel. Ta rõhutab, et õpetaja peab olema niisugune isik "kelle mõju kedagi ei kitsenda, kuid kelle ligiolek kõiki julgustab, kõigi usku enese võimisesse tiivustab. Õpetamine ja kasvatamine on kunst. Õpetaja on kunstnik. Kunstniku tegevust ei saa ette kirjutada". Seega hindab F.V. Mikkelsaar õpetajat kui oma töösse loovalt suhtuvat isikut.

* * *

Friedrich Vollrad Mikkelsaar (1886–1930) sündis Võrumaal Urvaste kihelkonnas Linnamäe algkooli õpetaja perekonnas. Õppis Võru linnakoolis, Tallinnas täienduskursustel, kus omandas algkooliõpetaja kutsetunnistuse ning Peterburi Õpetajate Instituudis, mille lõpetas 1909. aastal. Töötas ühe aasta Jaunjelgavas (1909–1910), seejärel Haapsalu linnakooli juures pedagoogilistel kursustel (1910–1913), Valga kõrgema algkooli õpetajana (1913–1917). 1917. aastal valiti ta Tartu 2. rajooni rahvakoolide inspektoriks ning 1918. a. haridusministeeriumi maakoolinõunikuks ja ministeeriumi asjade valitsejaks, hiljem sai temast haridusministri abi. Ta osales aktiivselt Eesti kooliuuendusliikumises. Samal ajal andis ta välja oma matemaatikaraamatuid algkoolidele. Ajalehes "Päevaleht" (1924, nr. 201) avaldatud artiklis "Päikesepaisteline matemaatika aabits" on kirjutatud F.V. Mikkelsaare raamatute kohta järgmist: "Olen tuttav paljude Saksa koolimeeste matemaatika õpperaamatutega, kuid sellist elavust, mitmekesist põnevust, kuid peaasi, niisugust hinge ei ole ma kusagil märganud". F.V. Mikkelsaar oli kahekümnendatel aastatel Eesti silmapaistev haridusjuht ning kooliuuenduste elluviija. Muuhulgas on ta kirjutanud ka näidendi "Laviin" (1922), milles propageeris karskust.

F.V. Mikkelsaare elu ja tegevust uuris juba kuuekümnendatel aastatel Aleksander Elango juhendamisel Viktor Viilup, ning dotsent A. Elango initsiatiivil toimus 1986. a. Tartu Õpetajate Seminaris F.V. Mikkelsaare 100. sünniaastapäevale pühendatud konverents. Nii leiamegi täiendavaid andmeid F.V. Mikkelsaare elu ja tegevuse kohta järgmistest artiklitest:

V. Viilup. Friedrich Vollrad Mikkelsaar ja tema osa kodanliku Eesti kooliuuendusliikumises. Nõukogude pedagoogika ja kool V. Tartu, 1969.

A. Kits, A. Elango. Friedrich Vollrad Mikkelsaare osa eesti kooli kujunemisel. Haridus, 1991, 4, 52.

3.3. Karl Rudolf Veski ja Jüri Grünthali aritmeetikaõpikud

H. Treffneri Gümnaasiumi matemaatikaõpetajad K.R. Veski ja J. Grünthal alustasid oma tegevust matemaatika kooliõpikute väljaandmisel 1921. aastal algkooli matemaatikaõpikutega. Nendelt autoritelt ilmusid ka venekeelsete N. Shaposhnikovi, N. Valtsevi algebra ülesannete kogu I ja II jao tõlked ja koos mõnede teiste autoritega andis K.R. Veski välja järgmised geomeetriaraamatud:

K.R. Veski "Planimeetria", Tartu, 1923;

K.R. Veski, J. Verendel "Stereomeetriliste ülesannete kogu", Tartu, 1923;

K.R. Veski, A. Raudsepp "Planimeetriliste ülesannete kogu", Tartu, 1924

ning koos Jüri Grünthaliga

K.R. Veski, J. Grünthal "Stereomeetria", Tartu, 1923.

Siinkohal võtame vaatluse alla ainult algkooli aritmeetika õpperaamatud. Teiste raamatute juurde tuleme hiljem.

I klassi raamatus alustatakse järjest arvudega 1–10, kusjuures igat arvu tutvustab parajasti üks pilt. Edasi esitatakse need ja ka arvud 11–20 punktikeste abil. Järgnevad liitmine ja lahutamine esmalt arvudega 1–10 ja seejärel 1–20 piires. Juba siin võetakse kasutusele sulud ning otsitava arvu tähisena täht x. Näiteks leiame sealt ülesanded

$$10 - x + 4 - 4 + 4 = 10 \text{ või } 20 - 8 - (16 : x) = 14.$$

Esimese klassi raamatust leiame ka murrud ja isegi segaarvud. Nii nõutakse seal lahendada ülesandeid, nagu $3\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ või $13\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$.

II klassi raamatus on sirgjoone käsitlemise juures toodud pilt rivis seisvate lastega ning joonise alla on kirjutatud "Joondu!" Seejärel küsitakse: "Kuidas vaadatakse, kas rida on sirge?" Ringjoone tutvustamisel autor eksib pisut, andes järgmise ülesande:

"Kirjutage tahvlile kaks punkti. Hoidke nende punktide vahel nöör?" Teatavasti kujutab see vabalt langev nöör nn. aheljoont, mitte ringjoone kaart, nagu autorid õigeks peavad.

II klassis õpitakse tundma ka pikkusmõõte, nagu *süld, arssin, küünar, jalg, versok*, samuti mõisteid *püstloodissiht, kaldsiht* ning *vaaderpass* ja *keskpäeva-joon*.

Murdude käsitlemisel jõutakse ülesanneteni, kus tuleb leida osa tervest. Ei nõuta ainult korrutamistabeli tundmist, vaid selle kõrval ka jagamistabelit. Lõpuks saadakse juba II klassis tuttavaks rooma numbritega.

III klassi õpikus tutvustatakse kirjalikku liitmist ja lahutamist ning antakse sinna juurde üksikasjalikud selgitused, millest arusaamine õpilastele arvatavasti raskusi valmistas. Loeme:

"Et lahutada mistahes arvud teineteisest, võib lahutatava järguühelised kirjutada vähendatava samanimeliste järguüheliste alla. Lahutatava alla tuleb tõmmata joon, mille alla kirjutatakse vahe.

Vahe saamiseks tuleb vähendatava järguühelistest lahutada lahutatava vastavad järguühikud.

Kui vähendatava järguüheline on lahutatava järguühelisest vähem, siis tuleb vähendatava järguühelist suurendada 10-ne võrra ja summast lahutada lahutatava järguüheline, 10-ne saame, kui pahemal pool seisvast järguühelisest võtame 1 (mida punktiga vastava numbri kohal võib tähistada), mis alamateks järguühelisteks muudetult annab 10. Sellega on siis ka pahemal pool seisev järguüheline 1 võrra vähendatud."

Samasugused pikad selgitused leiame ka kümnendmurdude liitmise ja lahutamise juurest.

Juba III klassi raamatus leidub omaette paragrahv "Võrrandid", kus antakse ka lihtsaid võrrandi koostamise ülesandeid.

Protsent ei ole selles õpikus defineeritud kui sajandik, vaid kui sajandik osa mingisugusest suurusest. Seega ei esitata ka võrdust 1 % = 0,01.

11*

Geomeetria osas tutvustatakse ringjoont ja nurki. Tippnurkade võrdsust põhjendatakse nende väljalõikamise ja teineteise peale asetamise teel.

III klassis tutvuvad õpilased veel kolmnurkade kongruentsuslausetega. Neid põhjendatakse jällegi väljalõikamise abil. Tutvutakse ka nelinurgaga, pinna arvutamisega ning nähakse ette mõõtmisi väljas.

IV klassi õpikus jõutakse isegi astmete ja juurteni. Lahendada tuleb näiteks järgmine ülesanne:

"Leida avaldise arvsuurus.

$$x \cdot \sqrt{x^2 - 8y} + y \cdot \sqrt{x^2 + 8y},$$

kui $x = 5$ ja $y = 3$".

Selles raamatus antakse lihtsamate kujundite pindala valemid. Trapetsi pindala saadakse kahe kolmnurga pindala summana. Ringi pindala valemini jõutakse korrapärase hulknurga pindala kaudu, lõigates ära algul korrapärase kuusnurga tipud, siis kaheteistnurga tipud jne., ning küsitakse: "Missuguse kujundi saate viimaks?" IV klassi raamatust leiame veel kehade tutvustamise ning nende pindala ja ruumala arvutamise.

V klassi õpikus selgitatakse arvu 4-ga jagamise tunnust järgmiselt: "Et $100 = 4 \cdot 25$, siis on arusaadav, et iga sajalistest koosnev arv jagub niihästi 4-ga kui ka 25-ga. Arvu jagatavus oleneb siis ainult arvust, mille moodustavad kümnelised ja ühelised.

Järelikult: Arv jagub 4-ga, kui arvu kaks viimast numbrit on nullid või moodustavad arvu, mis jagub 4-ga."

Selles raamatus esitatakse näite abil Eukleidese algoritm suurima ühisteguri leidmiseks.

Murruga korrutamine defineeritakse kui aritmeetiline tehe, mille abil leitakse korrutatavast niisugune osa, mida näitab korrutaja.

Võrrete käsitlemisel defineeritakse pidev võrre. See on võrre, mille mõlemad keskmised või mõlemad äärmised liikmed on isekeskis võrdsed ning seejärel "Pideva võrde korduvat liiget nimetatakse kahe ülejäänud liikme geomeetriliseks keskmiseks." Veidi hiljem antakse aritmeetilise keskmise mõiste.

Geomeetria osas kasutatakse tõestamisel ka geomeetrilisi teisendusi. Toome ühe näite.

"Rööpküliku üht poolt ümber sümmeetria keskpunkti (nurkjoonte diagonaalide lõikepunkt) 180° võrra pöörates üks pool katab teist. Siit võime rööpküliku omaduste suhtes teha mõned järeldused: 1) nurkjoon jagab rööpküliku kaheks ühtivaks kolmnurgaks; 2) rööpküliku vastasküljed ja vastasnurgad on võrdsed."

Pythagorase lause tõestatakse siingi võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast lähtudes, nii nagu seda oli teinud August Maramaa. Seejärel võetakse täisnurkne kolmnurk külgedega 3, 4 ja 5 ühikut. Neile ehitatakse ruudud, mis omakorda tükeldadakse ühikruutudeks. Nii jõutakse seoseni $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Ringjoone pikkuse leidmisel tuginetakse juba Archimedese tähelepanekule, mille kohaselt iga ringjoone pikkuse ja tema läbimõõdu vahel on kindel seos. Ringi pindala leidmine tugineb siin korrapärase hulknurga pindala arvutamisele. Selles õpikus tõestatakse veel kolmnurkade sarnasuse laused ning õpetatakse tegema mõõtmisi maastikul.

VI klassi õpiku pealkirjaks on pandud "Aritmeetika, geomeetria ja algebra".

Alustataksegi algebralisest sümboolikast. Defineeritakse eraldi täisarvuline ja murdarvuline kordaja ning õpitakse üksliikmeid ja hulkliikmeid liitma ja lahutama.

Relatiivsete arvude korrutamist selgitatakse näitega, kus nullpunkt on Jänese silla kohal. Emajõe voolu suund on positiivne ja seega kaugused sillast allpool positiivsed, ülespoole negatiivsed.

Selles õpikus tutvustatakse veel logaritmi mõistet. Näiteks:

$$\lg_5 125 = 3, \text{ sest } 3^5 = 125.$$

Funktsiooni mõistet defineeritakse järgmiselt:

"Suurust, mis teiste suuruste muutuvusest oleneb, nimetatakse olenevaks suuruseks ehk funktsiooniks, kuna seda muutuvat suurust, millest oleneb funktsioon, nimetatakse põhisuuruseks ehk argumendiks. Sidusust argumendi ja funktsiooni vahel nimetatakse funktsionaalseks sidususeks".

Selles raamatus leiavad veel käsitlemist võrrandite graafiline lahendamine ja ilmselt viimasena eestikeelseist kooliraamatuist ka liitkolmlause ülesanded. Et see mõiste lugejale liialt võõraks ei jääks, siis lisame, et liitkolmlauseks nimetatakse sellist ülesannete liiki, kus antud 5-le, 7-le, 9-le jne. arvule leitakse vastavalt 6., 8., 10. jne. antud arvudega võrdeline arv. Toome K.R. Veski ja J. Grünthali raamatust ka ühe näite taolise ülesande ja selle lahenduse kohta.

"Ülesanne: 25 kangrut kudusid 32 päeva jooksul 120 arssinat linast riiet, mis on 1 arssin $5\frac{1}{3}$ verssokit lai, kusjuures töö kestis iga päev $8\frac{1}{3}$ tundi.

Mitme päevaga koovad 40 kangrut 320 arssinat riiet, kui riide laius oleks 0,75 arssinat ja töö kestaks iga päev ainult 4 tundi 10 minutit?

Lahendus:

$$x = \frac{32 \cdot 25 \cdot 320 \cdot \frac{3}{4} \cdot 8\frac{1}{3}}{40 \cdot 120 \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{6}} \text{ päeva} = 60 \text{ päeva.''}$$

Selles raamatus esitatakse veel ülesandeid liht- ja liitprotsentide leidmiseks, samuti segude ja sulatiste ning võrdelise ja "vastuvõrdelise" jagamise kohta. Nii osutub K.R. Veski ja J. Grünthali aritmeetikakursus võrreldavaks varem ilmunud A. Bilovi ja O. Perli aritmeetika käsitlustega.

Algebra osas jõutakse VI klassi raamatus lineaarvõrrandisüsteemide lahendamiseni liitmisvõtte abil ja ka graafiliselt.

Geomeetria osas käsitletakse isegi sirgete ja tasandite vastastikuseid asendeid ning lahendatakse konstruktsiooniülesandeid. Näiteks nõutakse:

"Läbi sirgjoone punkti tõmmata sellele sirgjoonele risttasapind" või "Tasapinna punktist tõmmata sellele tasapinnale ristjoon".

Silindri ja koonuse pindala ja ruumala valemid saadakse sisuliselt jälle piirprotsessi abil väga paljude tahkudega prisma ja püramiidi ruumala valemeid kasutades. Tutvustatakse ka Cavalieri põhilauset, kuid seda valemite tuletamiseks ei kasutata. Nii tuletatakse kera ruumala valem, vaadeldes kera "suure hulga püramiidide ruumalade koguna".

K.R. Veski ja J. Grünthali õpikud erinevad teiste autorite õpikutest tunduvalt suurema teoreetilise materjali hulga poolest. Mõistete ja definitsioonide esiletoomiseks kasutatakse rohkesti rasvases trükis teksti.

* * *

Karl Rudolf Veski (1883–1953) sündis Tartumaal Kudina vallas. Õppis Vaidavere algkoolis ja Maarja-Magdaleena kihelkonnakoolis. Oli õpetajaks Kavastu-Koosa algkoolis, Hiiumaa Rahvaharidusseltsi kõrgemas algkoolis, H. Treffneri eragümnaasiumis ja Tartu Õpetajate Seminaris. Karl Veski organiseeris 1912., 1916. ja 1917. a. suvel algkooliõpetajate ettevalmistamise kursuse ja kahekümnendatel aastatel asus koos H. Treffneri gümnaasiumi õpetaja Jüri Grünthaliga täitma lünka eestikeelses matemaatikaalases koolikirjanduses venekeelsete õpikute ja ülesannetekogude tõlkimise ja ümbertöötamise teel. Ta oli tuntud keelemehe prof. Johannes Voldemar Veski vend.

Pärast õpetajate seminaride reformi kolmekümnendate aastate algul tuli tal erihariduse puudumise tõttu loobuda õpetajaametist. Ta jätkas aga edukalt majanduse alal.

Jüri Grünthal, aastast 1934 Haldre, sündis 1896. a. Järvamaal Koigi vallas. Õppis Koigi vallakoolis, Paide linnakoolis ja selle juures töötanud 2-aastastel pedagoogilistel kursustel. 1917. a. lõpetas Pihkva Õpetajate Instituudi ja hakkas samal aastal tööle õpetajana venekeelses Järva-Jaani kõrgemas algkoolis. Kui see kool evakueerus ja tema asemel avati eestikeelne kõrgem algkool, sai Jüri Grünthalist selle kooli juhataja. 1918. a. siirdus ta matemaatika- ja füüsikaõpetajaks Paide poeglaste reaalgümnaasiumisse. 1920. a. valiti ta H. Treffneri gümnaasiumi matemaatikaõpetajaks. Tema nime leiame 1919–1921 töötanud ajutiste keskkooli matemaatika-füüsikaõpetajate ettevalmistamise kursuste osavõtjate nimekirjast. Juba enne Tartusse tööle asumist oli temast aga saanud Tartu Ülikooli arstiteaduskonna üliõpilane. H. Treffneri gümnaasiumis töötas ta õpetajana 2 aastat. Samal ajal hakkas koos Tartu Õpetajate Seminari matemaatika metoodika õpetaja Karl Rudolf Veskiga välja andma matemaatika kooliraamatuid. Arstiteaduskonna lõpetas Jüri Grünthal 1924. aastal *cum laude* ning ta suunati üheks aastaks Austriasse ja Saksamaale röntgenoloogiat õppima. 1931. a. kaitses ta samas valdkonnas oma doktoriväitekirja ning temast sai Tartu Ülikooli arstiteaduskonna silmapaistev professor ja kateedri juhataja. Ta asutas ülikooli juures 1939. a. radioloogia instituudi ja kliiniku ning 1946. a. onkoloogiadispanseri. 1948. a. vabastati ta kateedrijuhataja ülesannetest ning 1949. a. ta suri.

3.4. Aritmeetikaraamatud "Väike arvaja" ja "Väike arvutaja"

Kahekümnendate ja kolmekümnendate aastate üheks aktiivsemaks haridustegelaseks ja nõuandjaks matemaatika õpetamise küsimustes oli Christian Brüller. Ta liitus esialgu Herta Veidermanniga ja hiljem Adeele Oengo-Johansoniga algkooli matemaatikaraamatute "Väike arvaja" ja "Väike arvutaja" väljaandmiseks. Teeme põgusa tutvuse nendegi raamatutega.

I klassi raamatu "Väike arvaja" avaldas 1920. a. H. Veidermann üksi. Selle raamatu oli autor koostanud 11 põhimõtte kohaselt. Ta väitis, et laps omandab arvu ja lihtsamate tehete mõiste kõige paremini konkreetsete näidete abil, siis on õige arve 1–10 tutvustada niisuguste jooniste ja märkide abil, mis laste tähelepanu juhivad esemete arvulisele vahekorrale: Lähtumist täppidest kokkuseatud arvkujudest ei pea autor õigeks. Veel on autori põhimõtteks, et lapsed õpivad arve igakülgselt paremini tundma, kui esimese kümne piires liitmise ja lahutamise tehte kõrval kohe ka korrutamist ja jagamist õpetatakse. Nii peavadki H. Veidermanni raamatu kohaselt lapsed näiteks arvu 8 tundmaõppimist lõpetades lahendama ülesandeid, nagu $6 : 3 + 5 - 4$ või $2 \cdot 4 - 7 + 4$.

Esimesele kümnele järgnevad kohe murrud $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{5}$. Neid tutvustatakse õuna lõikamise, ringi sektoriteks ja ristküliku osadeks jagamise teel. Arvude 1–20 tundmaõppimisel võetakse siiski ka täpid kasutusele, kusjuures juhitakse laste tähelepanu sellele, et liitmisel täiendatakse esimene liidetav kuni 10-ni ja siis lisatakse ülejäänu. Näiteks selgitab tehet $7 + 6$ järgmine joonis:

● ●	o o
● ●	o
● ●	
● o	
o o	

Seejärel tutvustatakse uusi murde: $\frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ ja $\frac{1}{10}$. Pärast järgnevat tutvumist täiskümnelistega kuni sajani antakse raamatus peast lahendada ahelülesandeid. Esitame ühe neist ülesandeist:

$$\begin{array}{r} 90 : 9 \\ \times\ 10 \\ -\ 30 \\ :\ 7 \\ \times\ 5 \\ +\ 30 \\ -\ 40 \\ \times\ 2 \end{array}$$

1933. a. ilmunud õpiku “Väike arvutaja I” autoriteks on A. Oengo-Johanson ja Chr. Brüller. See oli raamatu “Väike arvaja” põhjalikult ümbertöötatud väljaanne.

Uus raamat algab piltidega ja pärast tutvumist arvudega 1–4 õpitakse neid liitma, lahutama, korrutama ja jagama. Arvude võrdlemiseks võetakse kohe kasutusele ka sõnaühendid ... *enam kui, vähem kui, ... raskem kui* ... jne.

Arvude kooslust tutvustatakse rahadega ja teiste vahenditega. Näiteks on raamatusse joonistatud viis ühesendilist raha ja küsitakse: "Missuguse ühe raha saate nende vastu?" "Lõika paberist 6 ruutu!" "Lõika niisugune täht!" (Ette on joonistatud kuusnurk). "Otsi välja doominod, millel 7 silma!" "8 last asetada kahele kelgule!" Siia juurde laula: "Küll on kena kelguga...". "Mitu täppi (tippu) on kuubil?"

Edasi on ülesannetest kokku pandud jutukesi, nagu "Mis emal kõik on tagavaraks", "Arno ja Leida kodus", "Õuest ja aiast".

Selles raamatus on omaette teemaks ka "tosin". Tutvustatakse lihtsamaid harilikke murde. Veel leiame sellest raamatust ülesandeid tikkudega kujundite ehitamiseks ning mõistatusi ja nalja-ülesandeid. Toome mõne näite:

"Hommikul käib neljaga, päeval kahega, õhtul kolmega";
"Neli kandjat, neli andjat, kaks koeratõrjujat, üks parmupiits"
või siis
"Aias on õunapuu, selle otsas 4 õuna. Aeda läksid õpetaja oma prouaga ja köster oma tütrega. Igaüks võtab ühe õuna ja üks jääb veel puu otsa. Kuidas see on?"

1922. a. ilmunud "Väike arvaja" II õppeaasta raamatu autoriteks on H. Veidermann ja Chr. Brüller. Eessõnast loeme autorite seisukoha, et "metoodika on algkooli matemaatika õpperaamatu ja ülesannete kogu kohta ka niisuguse nõude üles seadnud, et üksikud matemaatika osad peavad olema üksteisega ühendatud üheks tervikuks". Seda nõuet ongi autorid selles raamatus silmas pidanud. Eessõnas kirjutatakse:

"Aritmeetika osasse on sisse põimitud algebra harjutused, peaasjalikult sümboolika omandamiseks ja võrranditega tutvumiseks ning tema lõppu juurde lisatud "Algtehted geomeetriast"."

Nii leiamegi sellest raamatust ülesandeid, nagu

"Leida x, kui teada on, et: a) $x+8=30$; b) $x+3=50$; d) $x+9=40$; e) $x+4=90$."

Hiljem leiame ülesandeid, nagu: $x+35-25=60$; $7x+3=31$ ja $\frac{3}{4}x=15$.

Geomeetria osas jõutakse isegi kahe- ja kolmetahuliste nurkade tutvustamiseni:

"Vaatleme oma kuupi. Mis tekkisid neil kohtadel, kus teie kolm ehk kaks tahku isekeskis kokku murdsite? Kuidas võiks meie seejärel need nurgad nimetada?"

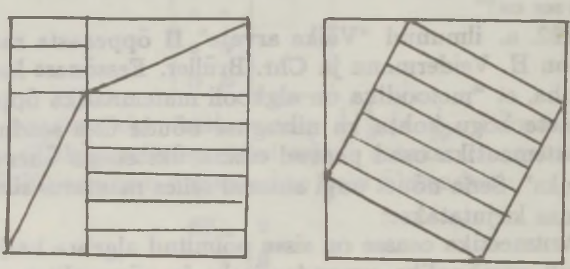
Veidi hiljem jõutakse järeldusele, et kuubi kahetahused nurgad on täisnurgad.

Selles II klassi raamatus käsitletakse veel nn. täisnurkset ja kaldnurkset rööptahukat, korrapärast (kuusnurkset ja kolmnurkset) prismat, püramiidi ja tüvipüramiidi.

1924. a. Herta Veidermann suri. Raamatu "Väike arvaja" väljaandmine aga jätkus. III ja IV õppeaasta raamatu kirjutasid Chr. Brüller ja A. Oengo-Johanson. See ilmus kahes osas: I – 1924. a. ja II – 1925. a.

Ka selle raamatu eessõnas on rõhutatud, et rakendatakse ühendamise printsiipi. Nii näiteks ei ole siin nimega arvude ega harilike ja kümnendnurdude käsitlemist eraldatud omaette metoodilisteks üksusteks. Ka geomeetria aine ei ole esitatud omaette, vaid nagu raamatus öeldakse: "ülesanded nurkadega tegutsemise ning pinna ja ruumi arvamise alalt rakendatakse sündsal juhisel arvutuse oskuse süvendamise teenistusse."

"Väike arvutaja" V õppeaasta jaoks ilmus 1927. aastal. Autoriteks olid jällegi Chr. Brüller ja A. Oengo-Johanson. Sellest raamatust oleme valinud tutvustamiseks mõned Pythagorase teoreemi geomeetrilised põhjendused, mis selguvad juurdelisatud joonistelt (vt. jn. 7 ja 8).

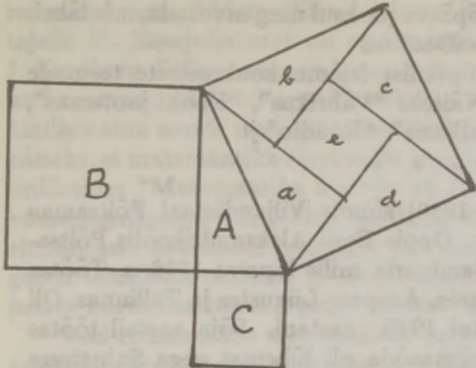


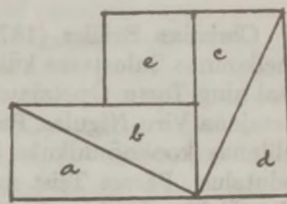
Jn. 7

Murdude käsitlemist ilmestab siin nootide kasutamine. Nende tutvustamisel on jõutud muusikateooriassegi. Näiteks esitatakse nootides naturaalne ehk loomulik mollheliredel, viisiline ehk meloodiline heliredel ning kõlaline ehk harmooniline duur-heliredel. Ülesandeks on aga määrata nendes toonide vahed ja need kokku liita. Lõpuks kästakse neid helireddeleid ka laulda.

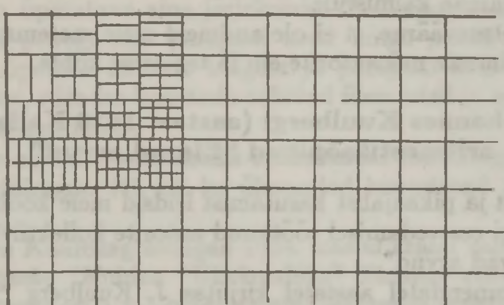
Murdude õpetamiseks tuuakse ära Pestalozzi tabelid. Olgu needki siinkohal esitatud (vt. jn. 9).

Harilike murdude korrutamise reegli saamiseks nõutakse selles raamatus jälgida siingi esitatud arvutamiskäiku, milles osa põhjendustest on jäetud õpilase teha.





Jn. 8.



Jn. 9.

"Jälgi arvutamiskäiku $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} =$

$1 \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{4 \cdot 7}$ (4 korda vähem $\frac{5}{7}$-st. Mispärast?

$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7}$ (3 korda suurem kui $\frac{5}{4 \cdot 7}$. Mispärast?)"

Vastavalt raamatu eessõnas märgitud koostamise põhimõtetele, leiame murdude käsitlemise juures ülesandeid ka algebraliste murdude kohta.

Ilma täiendavate selgitusteta või vajalike teoreemide sõnastusteta jõutakse siin isegi juurimise ja astendamise ülesanneteni. Tutvustame siinkohal neist mõnda:

$$\sqrt{\frac{16}{49}},\ \left(\frac{4 \cdot 5 \cdot 3}{7 \cdot 11}\right)^2 \quad \text{ning} \quad \sqrt{\frac{2^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2}{2^2 \cdot 13^2}}.$$

Õpilasele antakse seoses diagrammide joonistamisega ülesanne kirjeldada ka oma tegevust ööpäeva jooksul ning arvutada, mis läheb vanematele maksma lapse koolitamine.

Ka vanemate klasside õpikuist leiame konkreetsete teemade alla koondatud ülesandeid. Näiteks "Vabrikus", "Kooki jaotamas", "Pesukaupluses", "Kõpust Tallinna", "Raadio" jt.

* * *

Christian Brüller (1877–1950) sündis Viljandimaal Põltsamaa kihelkonnas Sulustvere külas. Õppis Eesti Aleksandrikoolis Põltsamaal ning Tartu Õpetajate Seminaris, mille lõpetas 1896. a. Töötas õpetajana Viru-Nigulas, Palmses, Aaspere-Liigustes ja Tallinnas. Oli Tallinnas koolinõunikuks kuni 1940. aastani. Sõja aastail töötas kodutalus. Pärast Teist maailmasõda oli lühemat aega Sulustvere Mittetäieliku Keskkooli direktoriks. Suri sealsamas 1950. a. On maetud Põltsamaa kalmistule.

On kahetsusväärne, et ei ole andmeid meie matemaatika kooliraamatute esimeste naisautorite elu ja tegevuse kohta.

3.5. Johannes Kuulbergi (aastast 1936 Kallak) jt. aritmeetikaõpikud "Elavad arvud"

Laialdast ja pikaajalist kasutamist leidsid meie koolides Johannes Kuulbergi eestvedamisel töötanud autorite kollektiivi koostatud õpikud "Elavad arvud".

Kahekümnendatel aastatel kirjutas J. Kuulberg "Elavad arvud I" juurde metoodilised juhised ning "Algkooli matemaatika metoodika", mis näitavad tema juhtivat osa mitte ainult selles autorite kollektiivis, vaid üldse metoodilise mõtte arendamisel Eestis.

Kolmekümnendatel aastatel andis ta koos Jüri Nuudiga välja progümnaasiumi õpikuid: "Matemaatika kursus keskkoolidele I" (1934) ja "Matemaatika kursus keskkoolidele II" (1935) ning koos Juhan Torgiga "Matemaatika teste II–VI klassini" (1935).

Johannes Kuulberg, pärast eestistamist 1936. aastal Juhan Kallak, tegutses matemaatika õpikute autorina ka veel kuuekümnendatel aastatel.

"Elavad arvud" koostanud autorite kollektiivi kuulusid Konstantin Treffner, Johannes Kuulberg, Elisabeth Kuulberg, Ernst Martinson ning Oskar Perli. K. Treffner ja O. Perli osalesid selles kollektiivis ainult aastatel 1924–1929, s.o. II–IV klassi raamatute esimese trüki väljatöötamisel.

Johannes Kuulberg koostas "Elavad arvud I" juurde metoodilised juhised. Need ilmusid 1924. a. kõigi autorite nime all eraldi raamatukesena "Metoodilised näpunäited "Elavate arvude" tarvitajaile I". Sissejuhatuses on aga märgitud, et teksti on koostanud J. Kuulberg. Selles avanevad uue, aritmeetikaraamatute turule jõudnud raamatu "Elavad arvud" autorite põhiseisukohad, mis peaksid kindlustama nende raamatute laialdase kasutamise. Seal rõhutatakse näiteks, et matemaatika õpetamise eesmärgiks ei ole arvutamisoskuse drillimine: "Matemaatika hooleks on jäänud arendada lapse vaimuvõimeid, nägema ning õieti hindama teda ümbritsevate asjade ja elunähtuste kvantitatiivseid, s.o. arvulisi omadusi ja suhteid. Igasugused tehnilised oskused ja mehaanilised võtted omandatakse sealjuures kõrvalsaadustena palju vähema aja- ja jõukuluga kui enne."

Veel rõhutatakse metoodilistes juhendites, et väikeste laste õpetamisel peab matemaatika, niisama kui kõigi teistegi ainete õpetamine olema tihedalt seotud kodulooga. Rõhutatakse, et õpperaamat ei määra õpetatava aine järjekorda. Veel märgitakse, et õpiku ülesandeid ei pruugi olla parajasti need kõige paremad. Õpetaja, lähtudes õpetuse üldisest käigust ja parajasti kõne all olevast koduloo-ainest, võib ise koostada sobivad ülesanded ja seda isegi iga matemaatikatunni jaoks.

"Elavate arvude" suuremaks iseärasuseks loetaksegi tema tihedat sidet kodulooga. Nii on ka ülesanded koondatud kodulooliste teemade alla.

Johannes Kuulberg avaldas 1924. aastal eraldi raamatukesena metoodilise veste "Kuidas "Ükskordüks" Ilmarile vaevata meelde jäi". Selle aluseks on 1 x 1 omandamine järgmises järjestuses: ühega korrutamine, ühe korrutamine, kahega korrutamine, kolmega korrutamine, kahe korrutamine (siin selgub kommutatiivsuse omadus) "edasi kolme, kümne, kümnega, viie viiega, nelja, kuue, seitsme, kaheksa ja üheksa korrutamine. Ilmarile jagab selles vestes soovitusi tema vend. Nende soovituste kohaselt omandatakse viie korrutamine järgmiste ülesannete abil:

$$\begin{aligned}
4 \cdot 5 &= 10 + 10 = 20 \\
5 \cdot 5 &= 20 + 5 = 25 \\
6 \cdot 5 &= 20 + 10 = 30 \\
7 \cdot 5 &= 20 + 15 = 35 \\
10 \cdot 5 &= 5 \cdot 10 = 50 \\
9 \cdot 5 &= 50 - 5 = 45 \\
8 \cdot 5 &= 50 - 10 = 40."
\end{aligned}$$

Oluline on siinjuures nii ülesannete järjestus kui ka soovitatud lahenduskäik. Paneme tähele, et lahendustes püütakse ikka kasutada juba õpitut.

Tutvume nüüd Johannes Kuulbergi metoodikaraamatuga "Algkooli matemaatika metoodika II. Geomeetria". Respekteerimistvääriv on tema arvamus, mille kohaselt juba III klassi õpilane peab alustama geomeetria õppimist, sest "ühelt poolt on õpilastel selleks ajaks kogutud juba küllaldane hulk geomeetrilist tooresmaterjali, teiselt poolt on neil käepärast küllalt avar arvu piirkond – seega kõik eeldused ka mõõtmisküsimuste uurimiseks".

Edasi fikseerib autor geomeetria õpetamise eesmärgi ning näitab kätte selle saavutamise tee. Ta kirjutab: "...et geomeetria õpetamise sihiks on tutvustada lapsi neid ümbritsevate reaalsete esemete ruumiliste omadustega ja ruumiliste vahekordadega, siis on loomulikult ka õppematerjaliks, mille kallal töötades kõnesolev aine peab püüdma saavutada oma õpetamise sihti, last ümbritsevad reaalsed esemed ise".

Käsitlusviisi suhtes on J. Kuulberg arvamusel, et "alles kujunemisel olev loogiline mõtlemine ei pea meile olema tõele jõudmise abinõuks, mitte aksiomaatilis-deduktiivset teed ei tule tarvitada tõe tuletamiseks, vaid selleks olgu intuitsioon – tõe maksvusesse uskuma panev silmanähtavuse jõud, olgu vaatlus ja katse".

Vaidlusalusele küsimusele, missuguse kujundiga peab alustama geomeetria õpetust, vastab J. Kuulberg: "Ei tule alustada ei joonega ega kehaga, vaid need mõlemad ja peale selle ka veel pinnad, nii siis kõik kolm asjaliiki korraga peavad kohe algusest peale saama küllaldase tähelepanu osaliseks".

Selles raamatus antakse üksikasjalikud metoodilised juhised geomeetriliste kujundite tutvustamiseks III–VI klassini.

Matemaatikaraamatud "Elavad arvud" võeti õpetajaskonna poolt hästi vastu. Seda kinnitab suur kordustrükkide arv. Nii ilmus 1940. a. I klassi raamatust 9. trükk, II klassi raamatust 8. trükk, III klassi raamatust 5. trükk jne. "Elavad arvud I–III" olid kasutusel ka aastatel 1941–1944 ning kahe esimese klassi raamatud kuni 1948. aastani.

Nende kooliraamatute populaarsusele aitas kaasa, nagu juba nimetatud, ülesannete esitamine väikeste koduloolise teemaga jutukeste vormis. I klassi raamatus, liitmisel ja lahutamisel esimese kümne piires, on nende jutukeste pealkirjadeks näiteks "Õuntest", "Puuraiumisest", "Pääsukestest", "Tulikahju", "Notsudest", "Õhtusöögil" jne. Seda meetodit on kasutatud kõigi klasside raamatutes. V klassi raamatu kordamisülesanded alluvad näiteks teemadele "Maaparandusest", "Põlevkivitoodangust Eestis 1920–27", "Sõnnikust", "Majaehitamine", "Tööviljakusest", "Alkoholist ja tubakast".

Tutvustame nüüd paari sellist "jutukest". I klassi raamatu näiteks võtame jutukese "Sünnipäev".

"1. Hansu õel Lillil on sünnipäev. Kingituste laual on sünnipäeva kook, mille ümber põleb 11 küünalt, 8 küünalt on valged, teised punased. Arvuta.

2. Hans kinkis Lillile 8 värvipliiatsit. Lillil oli varemini 6 pliiatsit. Mis arvutame siin.

3. Lilli oli sünnipäeva-võõraks 12 kooliõde kutsunud. Neist oli juba tulnud 5. Mitu kooliõde peab veel tulema?

4. Sünnipäeva kook lõigati 18-ks tükiks. Kohvi juures söödi 14 tükki ära. Mitu tükki on veel järel?"

Jutukene teemaga "Marju ostmas" on võetud III klassi õpikust.

"1. Ema ostis 256 sendi eest karusmarju, makstes 32 senti liitrist. Mis võime nüüd arvutada?

2. Sõstraid ostis ema 114 sendi eest, makstes liitrist 18 senti. Arvuta.

3. Mitu liitrit pohli saab 117 sendi eest, kui liitrist nõutakse 13 senti?

4. Mitu liitrit kirsse saab 216, 300, 324, 378, 450 sendi eest, kui kirsiliiter maksab 54 senti?"

IV klassi raamatust esitame jutukese teemaga "Loomapidamisest Eestis".

"1. 1927. aastal peeti meie kodumaal veiseid 633 870, hobuseid aga 404 340 võrra vähem. Arvuta.

2. Lambaid peeti 437 120 võrra rohkem kui hobuseid. Mis arvutame siin?

3. Sigu peeti 312 290 võrra vähem kui lambaid. Kui palju peeti sigu?

4. Ümmarda 1927. a. meie kodumaal peetud hobuste, veiste, lammaste ja sigade arvud kümneteks tuhandeteks ja leia nende ümmarguste arvude summa. Siis leia vastavate ümmardamata arvude summa ja võrdle mõlemaid tulemusi.

5. Kujuta millimeeterpaberil vastavas pikkuses tulpadena 1927. a. meie kodumaal peetud hobuste, veiste, lammaste ja sigade arvud kas puudujäägiga või liiaga selle järgi, kuidas viga on väiksem."

Kõigile jutukestele järgnesid tavaliselt veel harjutusülesanded.

Geomeetria küsimused tulevad sisse III klassist alates. Näiteks õpitakse III klassis joonlaua ja kolmnurga abil tõmbama rööpjooni. Vaadeldavais õpikuis on järjekindlalt läbi viidud põhimõte, et geomeetriaõpetus peab algama ruumi vaatlemisest. IV klassis alustatakse risttahukast sel teel, et vaadeldakse klassiruumi, tutvutakse ristküliku mõistega ning valmistatakse risttahuka pinnalaotus. Analoogiliselt on samas klassis vaatluse all veel kuup ja ruut. Pikkuste mõõtmiseks kasutatakse esmalt kaksiksammu ja meetripuud ning arutletakse, kuidas saab taskukella abil mõõta käidud tee pikkust. Pärast tutvumist rist- ja rööpseisuga ning püst- ja rõhtsuunaga asutakse maastikul nurkristi (ekkeri) ja mõõtpaela abil tähistama etteantud pikkusega ja laiusega ristkülikuid.

IV klassis murdude õppimisel esitatakse ülesandeid ka osa leidmiseks tervest ja terve leidmiseks osa järgi. Lähtutakse järgmistest ülesannetest:

"Ülol oli 375 senti. Ta ostis raamatu ja maksis selle eest $\frac{2}{3}$ oma rahast. Mis võime siin arvutada?"

"Uno kulutas noa ostmiseks $\frac{2}{3}$ oma rahast. Mitu senti jäi tal üle, kui nuga maksis 80 senti?"

IV klassi raamatus tutvustatakse pindala ja ruumala kaudset mõõtmist. Et algebra elemente ei ole veel käsitletud, siis siin valemeid ei esitata. Neid asendavad vastavad laused. Huvipakkuvalt on käsitletud teemat "Ristküliku pindala olenevus mõõtmisvigadest", kus piltlikult näidatakse ka mõõtmisvigadest tingitud suuremat või väiksemat ristkülikut.

Tutvustatavate aritmeetiliste tehete komponentide nimetuste hulgas leiame veel korrutaja ja korrutatava, millede kasutamisest hiljem loobuti. Raamatu lõpus esitatakse kokkuvõtvalt need 24 lauset, mida lapsed on selles klassis õppinud. Siia kuuluvad aritmeetiliste tehete omadused ning eeskirjad geomeetriliste kujundite ja kehade pindala ja ruumala arvutamiseks. Kehade vaatlus jätkub IV klassis veel kolmnurkse püstprismaga ning sealt jõutakse ka täisnurkse kolmnurgani.

V klassi raamatust tõstame esile näidetele tuginevat jaguvuse tunnuste käsitlemist. Näiteks jõutakse siin 4-ga jaguvuse tunnuseni järgmiselt:

"Kirjuta rida arve, mis lõpevad kahe nulliga. Katsu neid jagada 4-ga. Mis sa said? Mõtle järele, miks see nii on?

Kirjuta rida kahekohalisi arve, mis jaguvad jäägita 4-ga. Siis kirjuta igaühel neist ette üks või mitu ükspuhas missugust numbrit ja katsu ka saadud uusi jagada 4-ga. Mis sa näed?

Mis võime seega öelda kõigist arvudest, mis kas lõpevad kahe nulliga või mille kaks viimast numbrit moodustavad arvu, mis jagub jäägita 4-ga? Katsu järele, kas on see ikka nii!"

Murdude õpetamist jätkatakse siin murruga korrutamise ja jagamise tehetega. Soovitava eeskirjani jõutakse ristkülikuid kasutades järgmiselt:

"Joonesta millimeeterpaberile 4 ristkülikut, kõik 4 cm pikkused, kuid esimene 3, teine 2, kolmas 1 ja neljas $\frac{1}{2}$ cm laiune. Leia nende kõikide pindalad.

Missuguse tehte abil leiame ristküliku pikkuse ja laiuse järgi tema pindala?"

Geomeetria osa jätkub siin endise põhimõtte järgi: enne ruumiline keha ja seejärel tema tahuks olev tasandiline kujund. Siin alustatakse rööptahuka ja rööpkülikuga, seejärel tulevad trapetsikujulise põhjaga püstprisma ja trapets, korrapärane prisma ja korrapärane hulknurk ning silinder ja ringjoon ning ringjoone pikkuse ja ringi pindala arvutamine.

Ka VI klassis jätkub geomeetriliste kehadega tutvumine. Vaatluse all on korrapärane püramiid, koonus ja kera ning nende kehade pindala ja ruumala. Pindala leitakse esimesel kahel kehal pinnalaotuse kaudu. Poolkera pind kaetakse aga nööriga ja nööri pikkuse abil määratakse poolkera pindala. Ruumalad leitakse katseliselt. Püramiidi ja koonuse puhul võrreldakse nende mahtu vastava prisma või silindri mahuga. Kera vajutatakse aga vette ja ruumala määratakse ülevoolanud vee mahu järgi. VI klassis jõutakse ka algebra elementideni. Võetakse kasutusele täht arvu tähisena, tutvustatakse suuruste olenevust ja selle graafilist kujutamist. Matemaatilise suuruse mõiste omandamiseks on antud huvitav ülesanne, kus antud sõnade reast tuleb eraldada need, mis väljendavad matemaatilisi suurusi. Etteantud sõnadeks on *aeg, uhkus, laius, sügavus, armastus, lootus, pindala, kiirus, hind, kadedus, heldus, värv* jne.

Suuruste olenevuse mõiste kinnistamiseks kasutatakse aga näiteks järgmist ülesannet:

"Kui teekäija asus teele, oli ta 168 cm pikk ja kaalus 65 kg. Tal oli kaasa 25 kr. raha ja kraadiklaas näitas $+12^\circ$ R. Ta jõudis tunnis edasi keskmiselt 5 km. Kõndinud peatuseta 4 tundi, ta istus puhkama. Mitu kilomeetrit oli ta selle ajaga edasi jõudnud, kui pikk ja kui raske oli ta nüüd, mitu krooni oli tal raha kaasas ja mis näitas kraadiklaas?

Missuguste matemaatiliste suuruste väärtused olid nimetatud eelmises ülesandes. Missugused neist suurustest on üksteisest paarikaupa olenevad ja missugused ei ole seda mitte?"

Raamatus tutvustati ka võrdelist, pöördvõrdelist, ruut- ja kuupolenevust ning lineaarset (sirgjoonelist) olenevust. Viimane neist on defineeritud juurdekasvude kaudu järgmiselt: "Kui ühe suuruse mistahes väärtuse juurdekasv kutsub esile võrdelise juurdekasvu teise suuruse vastavas väärtuses, siis nimetatakse seesugust olenevust lineaarseks".

Ulatuslikult käsitletakse VI klassi raamatus rahandusülesandeid. Pythagorase lauset ja kujundite sarnasust selgitatakse geomeetriliselt. Pythagorase lause kehtivuses veendumiseks tükeldatakse vastavaid ruutusid, kasutatakse ka voltimist. Sarnasuse puhul täiendatakse antud ristkülikut või kolmnurka teiste samasugustega ning leitakse nii sarnaste kujundite pindalade ja külgede vaheline olenevus.

Küllalt suurt rõhku on pandud VI klassi õpikus veel mõõtmistele maastikul. Tutvustatakse plaanistamist kolmnurkade, nurkristi ning kompassi abil. Huvitav on arutlus seoses mõõtmisvigadega. Näiteks, kuidas muutusid kolmnurga küljed, kui eksisime nurga mõõtmisel 1° võrra. Mõõdetakse kaudselt kõrgusi ja kaugusi. Uuritakse ka sirgete ja tasandite vastastikuseid asendeid. Antakse mõiste *kaldlõigu tõus*: "Kaldlõigu kõrguse suhet tema projektsioonisse nimetatakse kaldlõigu tõusuks".

Johannes Kuulberg andis koos Juhan Torgiga välja veel testid kõigi algkooliklasside jaoks. Igas testis oli 20 ülesannet. Neist kas 8-s või 9-s esimeses olid aritmeetilised tehted täis- ja murdarvudega. Iga testi lehe vasakpoolne serv oli ärarebitav, seal olid peal ülesannete vastused.

* * *

Tutvustame nüüd raamatute "Elavad arvud" autoreid.

Juhan Kallak (varem Johannes Kuulberg) (1892–1965) sündis Purdi vallas Järvamaal. Lõpetas 1912. a. Tallinnas pedagoogilised kursused ja omandas algkooliõpetaja kutse. Seejärel töötas ta õpetajana Võsul ja Vihulas. 1921. a. sooritas ta eksamid keskkooli kursuse ulatuses ja astus Tartu Ülikooli zooloogiat õppima. Töö Tartu Õpetajate Seminari algkoolis, ülemaalises matemaatika õpetamise komisjonis ((II, lk. 74), õpikute koostamine ja lastenäidendite kirjutamine ei andnud talle aga mahti ülikooli lõpetamiseks. Seminaride töö ümberkorraldamise järel 1932. aastal töötas J. Kallak Tartu algkoolides õpetajana ja juhatajana. 1940. a. omistati talle kesk- ja kutsekooliõpetaja kutse. 1948. a. asus J. Kallak tööle Tartu Õpetajate Instituudi harjutuskoolis ning 1950. a. sai temast selle kooli õppealajuhataja. 1957. a. siirdus J. Kallak pensionile. Aastatel 1957–1965 osales J. Kallak vabariikliku matemaatika ainekomisjoni töös. Ta oli koos A. Kasvandi ja A. Lehisega ka 1958. a. ilmunud V klassi matemaatikaõpiku autoriks.

J. Kallak suri Tallinnas 1965. a. ja on maetud sealsele Pärnamäe kalmistule.

Elisabeth Kallak (1889–1976) sündis Virumaal Karulas. Õppis

Aaspere 2-kl. ministeeriumikoolis. Lõpetas Peterburis Pokrovskaja-nim. naisgümnaasiumi. Oli samas kodukooliõpetaja. Töötas õpetajana Vihula 2-kl. ministeeriumikoolis (1909–1922) ning Tartu Õpetajate Seminari algkoolis (1922–1932).

Konstantin Treffner (1885–1978) sündis Viljandimaal Koorkülas. Ta lõpetas H. Treffneri gümnaasiumi 1905. a. Oli seejärel 1905–1913 sama õppeasutuse internaadi kasvatajaks ja matemaatika õpetajaks. Õppis 1914–1917 Tartu Ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonnas. 1. aug. 1914 määrati ta ka H. Treffneri gümnaasiumi direktoriks. Sellel ametikohal töötas kuni 1940. aastani. Ajavahemikus 19.11.1919–2.08.1920 oli Eesti Vabariigi haridusministriks. Matemaatika-füüsikaõpetaja kutse kinnitati 1922. a. Oli mitme komisjoni, kursuse ja nõukogu juhatajaks, ka I–VII matemaatika- ja füüsikaõpetajate kongressi juhatuses.

Elmar Araste (kuni 1936. a. Martinson) (1894–1981) sündis Tartumaal Mäksa vallas. Lõpetas 1913. a. Tartu Õpetajate Seminari algkooliõpetaja kutsega. 1941. a. omandas mittetäieliku keskkooli loodusteaduse-, maateaduse- ning matemaatika-füüsikaõpetaja kutse. Töötas õpetajana Rakvere Haridusseltsi koolis (1913–1915), Rakvere linna algkoolis (1917–1918), Tartu linna kõrgemas tütarlaste koolis (1919–1920), oli Tartu Õpetajate Seminari Harjutuskooli juhataja (1920–1937 ja 1943–1944), Tallinna Õpetajate Seminari Harjutuskooli juhataja (1937–1942), Tartu Õpetajate Seminari ja seejärel Tartu Õpetajate Instituudi õpetaja (1944–1951), Mehikoorma 7-kl. kooli õpetaja (1951–1957). Kohakaasluse korras oli näitleja teatris "Vanemuine" (1920–1928), Tartu 3. keskkooli õpetaja (1946–1948) ja Tartu Riikliku Ülikooli õppejõud (1950–1951). 1957. a. jäi pensionile. Peale matemaatikaraamatute "Elavad arvud" on kirjutanud veel maateaduse õpikuid ning metoodilisi õppevahendeid bioloogia õpetamiseks.

Oskar Perli (aastast 1926 Pärli) (1875–1939) sündis Võrumaal Viitinas Järve kooli õpetaja pojana. Lõpetas Tartu Meesgümnaasiumi 1897. a. ja Tartu Ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonna 1901. a. Töötas õpetajana Tallinna Naisgümnaasiumis (1901–1902), Kubani Aleksandri reaalkoolis (1902–1908), Urjupina reaalkoolis (1908–1909), Rostovi (Doni ä.) kommertskoolis (1909–1916), Tallinna Peetri reaalkoolis (1916–1920), oli 1918–1919 ka Tallinna 1. Poeglaste gümnaasiumi juhataja ning 1920–1939 H. Treffneri gümnaasiumi matemaatikaõpetaja.

3.6. Töökooli põhimõtete elluviimine matemaatika algõpetuses Johannes Käisi juhtimisel

Kolmekümnendatel aastatel rikastus aritmeetikaõpetus eesti koolis uue tööviisiga. Õpikute kõrval (asemel) võeti kasutusele töövihikud. See õpetussuund oli tuntud töökooli printsiibi üks väljunditest. Järgnevalt tutvume selle suuna juurutamisega meie algkoolis ja osaliselt keskkooliski (V–IX õppeaasta).

Juba XIX sajandil Lääne-Euroopas tekkinud pedagoogiline liikumine, milles nõuti õpilaste ealiste ja individuaalsete iseärasuste arvestamist ning isetegevuse ulatuslikku rakendamist, sai tuntuks töökooli liikumise nime all. Eestisse jõudis see eelkõige Johannes Käisi entusiastliku tegevuse tagajärjel. Ta ei olnud nõus tavalise levinud tööga klassis, kus kõik lapsed asetati ühele tasemele, neile jagati võrdselt ja nõuti võrdselt. Ta pidas vajalikuks, et iga laps saaks õppida koolis ainet, mis on talle jõukohane ja meelepärane ning huvitav.

Et püsivamad on need teadmised, mis õpilase enese poolt on läbi töötatud, siis propageeris J. Käis õppetöö individualiseerimist. Ta eristas isetegevust ja iseseisvat tööd. Iseseisva töö korral lahendab õpilane ilma õpetaja või kaasõpilaste abita õpetaja antud ülesannet. Isetegevuse puhul õpilane kas valib endale ülesande õpetaja antud mitme ülesande hulgast või leiab koguni ise endale ülesande. Nii seadiski J. Käis individualiseeritud õppeviisiks järgmised nõuded:

1) juhatada õpilasele küllaldaselt iseseisvat, isetegevat tööd;
2) võimaldada tööülesannete valikut;
3) arvestada õpilase võimeid, kalduvusi ja huvisid;
4) suurendada õpilaste individuaalse töö kaudu klassi ühistöö viljakust ja väärtust.

3.6.1. Johannes Käisi seisukohti aritmeetika algõpetuse kohta

Aritmeetika algõpetuse kohta on J. Käis avaldanud mitu artiklit (vt. [A, 53]–[A, 58]) ning kirjutanud raamatu "Matemaatika algõpetusest" [Õ, 107]. Neile tuginebki järgnev kokkuvõte.

Üldõpetuse printsiibi elluviimine oli vaadeldaval perioodil meie koolis aktuaalselt päevakorral. Joh. Käis aga avaldas arvamust, et matemaatikat algklassides võib ja isegi on soovitatav õpetada eraldi üldõpetusest.

Loendamise harjutamiseks pidas ta vajalikuks, et kasutatakse niisugust materjali, mille loendamise tarvidus on lapsele mõistetav. Seetõttu ei ole õige tugineda piltidele ja liigselt aega kulutavatele joonistele. Ka sõrmed pole otstarbekohased. Veel hoiatab J. Käis, et loendamist ei samastataks ühekaupa liitmisega, nagu soovitas näiteks M. Meos (vt. lk. 128). Ühekaupa liitmine ei ole enne võimalik, kui pole omandatud suuremaks liidetavaks oleva arvu mõiste.

J. Käis tutvustas erisuguseid soovitatud järjestusi numbrite kirjutama õpetamiseks, tutvustas sealhulgas ka ettepanekut alustada numbrite kirjutama õpetamist rooma numbritega. Ülesannete tekstide suhtes nõudis J. Käis, et need olgu loomulikud ja tegelikkusele vastavad. Selles mõttes ei pidanud ta õigeks sõnastada ülesannet järgmiselt: "Ratsamehi on Unol 5, Leol aga 3 rohkem. Mitu ratsameest on Leol?" Siit järeldub ju, et Leol on mänguasjad juba loendatud ja seega nende arv teada. Seepärast oleks õigem järgmine sõnastus: "Ratsamehi on langenud Leol 3, Unol aga 5. Mitu ratsameest on Unol rohkem langenud kui Leol?"

Õpilastele esitatavas ülesandes peab J. Käisi arvates olema ka loomulik arvutamise põhjus. Selles mõttes ei sobi ülesanne: "Bussis oli 15 inimest. Esimeses peatuses lahkus 3, teises 2 ja kolmandas 4 inimest. Mitu inimest jäi veel bussi?" Siin ei ole vajadust arvutamiseks, sest vastuse leidmiseks loendatakse bussi jäänud inimesed lihtsalt üle. Õigemaks peab ta järgmist teksti: "Bussis on 5 vaba istekohta. Peatuses tahab veel peale tulla 8 inimest. Mitu inimest ei mahu bussi?"

Arvestades õpilaste vähest kirjutamisoskust, ei tule ülesannete lahendamisel esimestes klassides nõuda sinna juurde kirjalikke selgitusi.

Erilist tähelepanu osutas Joh. Käis individuaalsele tööle ka matemaatika õpetamisel. Selleks koostaski ta töövihikud I ja II klassile, koos A. Budkovskyga ka III ja IV klassile. Ta propageeris ja koostas arvutuskaarte. Ta väitis: "Arvutamisoskuse kindel omandamine nõuab väga palju harjutust. Kui see töö on üksluine, siis muutub ta tüütavaks ja soovitud tulemused saavutatakse hoopis suurema ajaja jõukuluga kui vaheldusrikka ja meeldiva tegevusega."

Veel rõhutas J. Käis, et tuleb osata vahet teha õpilase vigade ja eksimuste vahel. Vead nõuavad drilli, kuid eksimuste vastu võitlemiseks peavad olema hoopis teised vahendid.

Huvi tõstmiseks arvutamise vastu soovitas J. Käis kasutada rohkesti ülesandeid lõbusaks arvutamiseks. Näiteks arvude omandamiseks esitas ta ülesande: "Kolmest tikust ja ühest murtud tikust on laotud arv 411. Paigutada tikke ümber nii, et iga kord saaks uue arvu, mis on eelmisest väiksem." (Lahendus: 141, 114, 4–1, $\frac{1}{4}$) või "Missugused arvud nende ümberpööramisel ei muutu" (Lahendus: 69, 96, $\frac{6}{9}$). Mõeldud arvude mõistatamiseks esitas ta järgmisi ülesandeid: "Mõtle arv, korruta see 9-ga. Kustutada korrutises üks number (mitte 0 ega 9) ja ütle ülejäänud numbrid üksteise järel. Ma ütlen, mis number on kustutatud." (Korrutise ristsumma jagub 9-ga.) Mõeldud arvu n mõistatamiseks soovitas J. Käis näiteks järgmisi arvutusi:

$$\left(\frac{2n+4}{2} \cdot 8 - 12\right) : 4 - 1 = 2n$$

$$[(n \cdot 5 + 2)4 + 3] \cdot 5 + 7 = 100n + 62,$$

kui n on ühekohaline arv, siis sajalised näitavad mõeldud arvu.

Esitame J. Käisi soovitatud ülesannetest veel ühe naljaülesande ja ühe geomeetriaülesande.

"Räägitakse, et õpetajal ja õpilastel pole mingit tööd: öösi õpetust ei ole, seega on pool ööpäeva vaba, aastast jääks veel 183 päeva. Aga pärast lõunat õpetust ei ole, pool päeva on vaba, seega väheneb töö aeg veelgi poole võrra ja jääb $91\frac{1}{2}$ päeva. Kuid aastas on 52 pühapäeva ja koolivaheaega isegi üle 40 päeva. Nii siis ei jää ühtki tööpäeva!"

"Ämblik istub neljanurgelise toa ülemises nurgas ja tahab kõige lühemat teed mööda ronida alumisse vastasnurka. Missugune on see tee?"

Joh. Käis pooldas aine läbitöötamist fusiooni põhimõttel, s.t., et tähtsamad ainelõigud, nagu arvusüsteem, põhitehted, murrud, protsendid, ajaarvutus, geomeetria elemendid oleksid üksteisega läbi põimitud ja esineksid korduvalt, mis võimaldaks aine süvendamist ja paremat omandamist. Veel rõhutas ta omakontrolli järjekindlat rakendamist III klassi teisest poolaastast alates. Iga 5. töötund pidis aga jääma uuest ainest vabaks, kus korratakse, tehakse lõbusaid arvutusi ja viimistletakse varemõpitut.

3.6.2. Töökooli ideede rakendamisest matemaatika õpetamisel algkoolis. E. Limbergi soovitusi

Johannes Käisi propageeritud töökooli ideid rakendasid ja arendasid edasi Võru Seminaris õpetajatena töötanud Anette Budkovsky, Karl Greenberg ja Ervin Limberg (hiljem Arvo Lehis).

I ja II klassi töövihikute autoriks oli Johannes Käis üksinda, III ja IV klassi töövihikud koostas ta koos A. Budkovskyga, V ja VI klassi töövihikud koostas aga E. Limberg (A. Lehis).

J. Käisi ideede rakendamist tema kolleegide poolt tõendab veel mitu artiklit Võru Seminari aastaraamatus "Teel töökoolile" ning metoodiliste artiklite kogumikus "Uusi teid algõpetuses".

Nii avaldas Anette Budkovsky artikli "Korrutustabeli läbitöötamine", Karl Greenberg aga "Aritmeetika õpetamise metoodika". Viimane, ulatuslik 78-leheküljeline artikkel oli J. Kuulbergi ja F.V. Mikkelsaare matemaatika õpetamise metoodikate kõrval juba kolmas kahekümnendatel aastatel avaldatud algkooli matemaatikaõpetajat abistav käsitlus. K. Greenberg avaldas veel üksikasjalikud kirjeldused V klassi teema "Silinder" käsitlemiseks nelja tunni jooksul ning IV klassi teema "Kaldtahksammas" käsitlemiseks kaheteistkümne tunni jooksul.

Ervin Limberg avaldas artiklid "3.–4. ning 5.–6. õppeaasta töö keskustuse põhimõttel individuaalse tööviisi rakendamisega". Tutvume nüüd mõnede E. Limbergi nõuannetega.

Suurtest arvudest parema ettekujutuse saamiseks soovitas ta konkretiseerida arv 1 kas pikkus-, raha-, pindala- või mõne muu ühikuna. Sel juhul on võimalik suurtest arvudest paremat ettekujutust luua näiteks järgmiste ülesannetega:

"Kui pikk on 1 000 000 sendisest koostatud rida?"

"Määrata, kui suur viljahunnik saab 1 000 000 nisuterast?"

"Määrata, mitme hobusekoormaga veame ära 1 000 000 g?"

III klassi ajaarvutusülesannete puhul soovitas ta kasutada ka otseselt kalendrit. Peastarvutamise arendamiseks propageeris ta aga kiirarvutamist ning selle elustamiseks mitmesugust arvtabelite kasutamist.

Mõõtude ja geomeetriliste kujundite ning samuti kehade käsitlemisel pidas ta vajalikuks, et ei piirdutaks nende näitamisega, vaid õpilased peavad kindlasti katsuma, vaatama, siis hindama kaalu, pikkust, pindala, ruumala ning seejärel mõõtmise teel oma hinnanguid kontrollima.

E. Limberg jagas juhtnööre, kuidas valmistada tasapinnalisi ja ruumilisi vahendeid õppetöö näitlikustamiseks. Näiteks soovitas ta murru mõiste süvendamiseks ja murdude taandamise õpetamiseks "murrukettaid", kolmnurga nurkade summa leidmiseks aga kleepida vihikusse kolmnurk nii, et tema nurki on võimalik kokku murda, kehade tutvustamiseks valmistada savist mudeleid jne.

Väga oluliseks pidas E. Limberg kujundite õiget näitamist. Ta kirjutas: "Punkti näitamiseks peatutagu kepi või pliiatsi otsaga kõnesoleval punktil.

Sirglõigu, serva või sirge näitamisel liikugu kepi või pliiatsi ots ühest sirglõigu (serva, sirge) otsast teiseni.

Kolmnurga, nelinurga või tahu näitamisel liikugu kepi või pliiatsi ots ühest tipust alates mööda kuju piiravat joont kuni lähtekohani tagasi. Neid kujusid võiks näidata ka nii, et käega, pliiatsiga või kepiga kaetakse ülalt alla liikudes vastav pinna osa."

Iseseisvuse arendamiseks ja arvutustehnika omandamiseks soovitas E. Limberg anda õpilastele ülesanded mitmes rühmas, et tagada lahendamise iseseisvust. Üht ja sama ülesannet lahendades on naabri mõju naabrile väga suur ja hakatakse maha kirjutama. Selle põhjuseks on:

"a) erinev töötempo – aeglane arvutamine (ei taheta teistest maha jääda);

b) usu puudus enesesse (võib-olla, et tee on õige, kuid et naaber teisiti arvutab, ja ta on parem arvutaja, siis on temal kaasõpilase arvates kindlasti õieti lahendatud);

c) tehtud arvutusviga (õpilane on teinud arvutusvea, ja et teistega ühtaegu ülesannet lõpetada, selleks kirjutatakse kogu lahendus maha);

d) laiskus (mahakirjutamine on kergem);"

Vihikute kontrollimiseks seatakse järgmised nõuded:

"a) Vihikud vaadatagu sisuliselt vähemasti 1 kord 10 päeva jooksul läbi;

b) Kodused ja klassis tehtud tööd vaadatagu iga päev üle, et kindlaks teha:

1) kas töö on tehtud,

2) kuidas töö on tehtud (korralikult, hooletult jne.).

Ergutuseks võib vahel mõnd paremat vihikut teistele näidata."

Veel on E. Limberg rõhutanud õpilaste töö kontrollimise nõuet ning laialdast peastarvutuse rakendamise nõuet [A, 65–A, 69].

3.6.3. Märkmeid Karl Greenbergi aritmeetika õpetamise metoodikast

K. Greenbergi arvates on matemaatika õppimise suhtes teatud vaenuliku hoiaku põhjustajateks: 1) nõue töötada püsivalt ja järjekindlalt; 2) ekslik arvamus, nagu võiksid matemaatikat õppida ainult need, kellel on selleks andi; 3) muljed endisaegsest abstraktsest ja mehhaanilisest õpetamisest. Seetõttu peabki ta vajalikuks rajada matemaatika õpetus uutele alustele.

Matemaatika õpetamise ülesanneteks peaksid K. Greenbergi arvates olema: loogilise mõtlemise, vaatlusvõime ja suuruste hindamisvõime koolitamine.

Oluline on õpetada lapsi leidma elust matemaatilisi probleeme ning kasvatada nende tahtejõudu. K. Greenberg tõstab esile eetiliste ja esteetiliste ülesannete olemasolu matemaatika õpetamisel. Eetilisteks väärtusteks peab ta lapse viimist veendumusele, et maailmas on olemas ka "kõikumatu" tõde, näiteks mõõdukus. Esteetiline kasvatus tagatakse aga ilusate joonistega; algebraliselt väljendatud matemaatiliste põhiseaduste täpse ja otstarbekohase kirjutusviisiga; lühidate, täpsete ja selgete tõestustega; graafilise kujutamisega jne. Veel tõstis K. Greenberg esile matemaatika õpetamise ülesandeid (eesmärke) teiste õppeainete suhtes. Üldiselt tuntud seoste kõrval on nimetatud matemaatika kaasabi emakeele õpetamisele "sellega, et ta õpetab õpilasi loogiliselt mõtlema ja omi mõtteid väljendama täpses ja selges keeles" ning "loodusteadustele kergendab tööd sellega, et aitab mõista loodusnähtusi".

Näitlikustamisel soovitatakse arvestada, et kõige väärtuslikum näitlikustamise abinõu on elu ise ning kunstlikult valmistatud abinõudel on hoopis madalam väärtus. Erinevalt mitmest teisest autorist peab K. Greenberg arvude tundmaõppimise parimaks vahendiks sõrmi.

Kui J. Käis arvas, et matemaatika algõpetus võiks jääda üldõpetusest välja, siis K. Greenberg on vastupidisel arvamisel. Arvude kirjutamist soovitas ta alustada rooma numbritest. Aritmeetika algõpetuses ta ei soovita kasutada küsimis-kostmismeetodit, sest "... mitte õpetaja ei pea ainet pakkuma ja arendama õpilast oma seletuste abil, vaid õpilane ise oma isetegevuse abil peab arendama ennast ja kasvatama oma vaimlisi võimeid. Õpetaja ülesandeks on virgutada."

Veel rõhutas K. Greenberg, et õpetamine on kunst, "kunstiloovale tööle aga ettekirjutusi ei või olla, seepärast mitte skeem ja šabloon, mis surmavad laste huvi, vaid – vaba looming, mis äratab lapse töõhimu ja karastab töötahet."

Suurt tähelepanu osutas K. Greenberg aritmeetika algõpetuse käsitlusviisidele. Neist oli meil juttu juba varem (vt. II, lk. 8), kuid siin on vastav jaotus pisut erinev:

"a) arvud üks-teise järel õpitakse vaatluse teel: seda viisi nimetatakse monograafiliseks ehk Grube meetodiks, ka arvkujumeetodiks, vaatlusmeetodiks ning analüütiliseks meetodiks;

b) rea- ehk loendamismeetod, kus arvutamise aluseks on tehtud arvurida;

c) süsteemmeetod, kus arvutamise aluseks on tehtud süsteem, isegi esimeses kümnes [A, 17, A, 18]."

* * *

Johannes Käis (1885–1950) sündis Põlva lähedal Rosma koolimajas. Ta õppis Mammaste külas Põlva köstrikoolis, Võru linnakoolis ning Peterburi Õpetajate Instituudis. Majanduslikel põhjustel katkestas seal õpingud ning sooritanud Pihkvas kreiskooliõpetaja kutseeksamid, hakkas tööle õpetajana. Ta töötas Lemsalus, Volmaris, Riia Aleksandri Gümnaasiumis. 1917. a. lõpetas ta eksternina Peterburi Ülikooli loodusteaduse osakonna. Riia Aleksandri Gümnaasiumi evakueerimise tõttu Võrru ja Saranskisse töötas J. Käis 1917. a. ka nendes linnades. 1918. a. valiti ta Vologda Õpetajate Instituudi direktoriks ning 1919. a. jätkas ta tööd Pihkva Rahvahariduse Instituudi lektorina. 1920. a. tuli J. Käis tagasi Eestisse. Siin töötas ta algul riigikoolinõunikuna ja aastatel 1921–1930 Võru Õpetajate Seminari juhatajana. Seal andis ta välja kooliuuenduslikku materjali aastaraamatus "Teel töökoolile". Pärast Võru Seminari sulgemist töötas J. Käis Paldiski ühisreaalgümnaasiumi direktorina, seejärel Eesti Õpetajate Liidu teadussekretärina, kus andis välja rea metoodilisi käsiraamatuid "Uusi ideid algõpetuses" ning kogumiku "Loenguid ja kokkuvõtteid", mis sisaldab materjali kooliuuenduse mitmesugustes küsimustes. Kolmekümnendatel aastatel osales ta aktiivselt töövihikute väljaandmisel.

Nõukogude Eestis töötas J. Käis Haridusministeeriumis juhtivatel kohtadel ja toimetas ajakirja "Nõukogude Kool". 1950. a. hakati tema töid kritiseerima, ta läks puhkusele. J. Käis suri 29. juunil infarkti tagajärjel ja maeti Põlva kalmistule.

Johannes Käisi elu ja tegevust on dots. A. Elango juhendamisel uurinud Ühiskondliku Pedagoogika Uurimise Instituudi Eesti kooli ja pedagoogilise mõtte ajaloo sektsiooni liikmed K. Laane, V. Birk, A. Nurk, A. Vallner, A. Udras, R. Liiv, A. Ivask, M.-I. Pedajas ja K. Praakli (vt. Nõukogude Pedagoogika ja Kool V, Tartu, 1969). J. Käisi kooliuuenduslikku liikumist on eriti tema õpilased, nagu V. Ordlik, F. Eisen jt., väga kiitnud. Mitmed haridustegelased olid aga talle ka oponentideks. Eesti Vabariigi nimekas koolinõunik Märt Raud oma mälestusteraamatus "Eesti kool aegade voolus II", Stockholm, 1965 on näiteks kirjutanud, et üldõpetust kasutati välismaal ainult 6–7-aastaste laste juures. Ta oli arvamusel, et see meetod Eesti koolide 8–10-aastastele lastele ei sobi. Individuaalse tööviisi puudusteks pidas M. Raud õppetöö muutumist klassis ainult kirjutamiseks ja vaikseks töötamiseks ning õpilaste erineva võimekuse puhul kordamisvõimaluste puudumises. Ometi lõpetas M. Raud oma hinnangu J. Käisi kohta järgmiste sõnadega: "Jättes kõrvale J. Käisi ühekülgsuse ja liialduse kooliuuenduste propageerimisel, peab tunnistama, et tema mõju pedagoogilise mõtte arengule oli suur. Teda võib pidada Eesti kõige viljakamaks pedagoogiliseks kirjanikuks ning suurepäraseks loodusõpetuse populariseerijaks. Ta korraldas õpetajate kongresse ja oli neil väsimatu kõneleja. Ta lõi pedagoogide keskel oma kooli, keda püsivalt õhutas aktiivsusele".

Arvo Lehis (kuni 1935 Ervin Limberg) (1899–1973) sündis Saaluse vallas Võrumaal. Õppis Rõuges ja Petrogradis ning kõrgema hariduse omandas Tartu ülikoolis. Töötas õpetajana Võru, Rakvere ja Tartu Õpetajate Seminaris. On olnud õpetajaks Tartu üldhariduskoolides, Tartu koolide inspektor ja Tartu Kaugõppekooli direktor. A. Lehise metoodikaalastele tõekspidamistele on suurt mõju avaldanud Johannes Käisi tegevus. A. Lehis on mitme matemaatikaõpiku autor. 1958. a. osales ta veel autorina V klassi õpiku koostamisel (kaasautorid A. Kasvand ja J. Kallak). Ta on avaldanud mitu artiklit ajakirjas "Nõukogude Kool" ja ajalehes "Nõukogude Õpetaja": "Matemaatika metoodikast" (1946), "Kuidas organiseerin kordamist 7. klassi matemaatikas" (1951), "Geomeetria kursuse lastepärasest käsitlusest 6. klassis" (1956). A. Lehis suri Tartus 1973. aastal ja maeti Ropka-Tamme kalmistule.

Arvo Lehise elu ja tegevust on uurinud tema tütretütar, H. Treffneri gümnaasiumi õppealajuhataja Aime Punga, kes üliõpilasena kirjutas prof. K. Velskeri juhendamisel diplomitöö teemal "Matemaatikaõpetaja Arvo Lehise elust ja tegevusest".

Anette Budkovsky (3.05.1891 Leevil – ?). Lõpetas Võru tütarlaste progümnaasiumi (1909) ja omandas samas algkooliõpetaja kutse (1910). Töötas Võru linna algkoolis õpetajana (1910–1912) ja koolijuhatajana (1912–1922). Järgnes Võru Õpetajate Seminari Harjutuskooli juhataja ametikoht (1922–1930). Ta jätkas tööd õpetajana Räpina algkoolis. Aastatel 1928 ja 1929 käis välismaal ennast täiendamas. Teenistusvahekordade korraldamise seaduse nõudel (mõlemad abikaasad ei võinud õpetajana töötada) lahkus ametist.

A. Budkovsky abikaasa Vitold Budkovsky oli Võru gümnaasiumi matemaatikaõpetaja. Abielulahutuse järel võis A. Budkovsky õpetajatööd jätkata. 1935/36. õa. oli ta õpetajaks Kurenurme algkoolis ning seejärel Leevi algkoolis. A. Budkovsky oli aastast 1926 tegev Naiskodukaitse alal, a-st 1929 Naiskodukaitse Võrumaa ringkonna esinaine. Tema teeneid hinnati Valgeristi, Kotkaristi ja Teenetemärgiga.

Osales aktiivselt Joh. Käisi juhitud kooliuuendusliikumises.

Karl Greenberg (20.10.1874 Inju külas, Küti vallas Virumaal – ?). Isa oli õpetaja, kes oli oma hariduse saanud Kuuda seminaris. Esialgu õppis kodus ning seejärel Rakvere linnakoolis (1885–1891). Omandas samas algkooliõpetaja kutse (1891). Jätkas õpinguid H. Treffneri gümnaasiumis (1903–1904) ning sooritas seejärel kohe gümnaasiumi küpsuseksamid eksternina. Seejärel õppis Tartu Ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonnas (1904–1910). Õppimine oli vahepeal katkestatud 1905. a. revolutsiooni sündmuste tõttu. Sai kohe õpetaja koha Poneveži reaalkoolis (1910–1914), siis Orenburgi (1914–1917) ning Irkutski kadetikorpuses (1917–1920). Seejärel oli Irkutski I astme ja siis II astme kooli juhataja ning Irkutski Ülikooli töölisfakulteedi matemaatikaõpetaja (1920–1922). K. Greenberg opteerus Eestisse. Oli Võru Õpetajate Seminari matemaatika- ja selle õpetamise metoodika õpetaja (1922–1928), Petserimaa koolinõunik (1928–1934), kust siirdus pensionile. Elas Petseris oma majas ja osales aktiivselt Petseri Eesti Haridusseltsi ja Noorkotkaste organisatsioonis, olles viimases malevavanemaks.

3.7. Matemaatika töövihikud

Töökooli printsiibi juurutamine Eesti koolis tõi endaga kaasa rohkearvulise töövihikute kasutamise. Mitmel juhul jäi töövihikute koostamine ainult ühekordseks tegevuseks, s.t. kordustrükke ei ilmunud. Erandi moodustas Johannes Käisi eestvedamisel töötanud kollektiiv. Nende töövihikuid kasutati kümne aasta jooksul (1931–1940) ja nendest ilmus 2–5 trükki. Tutvume nüüd lähemalt kõigi algkooli jaoks koostatud töövihikutega. Anname ülevaate ka keskkooli töövihikutest, sest meie töö liigenduse järgi ei ole võimalik neid üksikute matemaatikadistsipliinide vahel jaotada.

3.7.1. Metoodiliste väljaannete “Uusi teid algõpetuses” lisadena välja antud matemaatika töövihikud

Joh. Käisi, A. Budkovsky ja E. Limbergi töö selle töövihikute seeria väljaandmisel jaotus järgmiselt: I ja II klassi omad koostas Joh. Käis [T, 1, 2], III ja IV klassile seadsid töövihikud kokku Joh. Käis ja A. Budkovsky [T, 3, 4] ning V ja VI klassi töövihikute autoriks oli E. Limberg [T, 5, 6]. Autorid nimetasid neid väljaandeid “Matemaatika töövihk” (mitte vihik). Kõik klassid said kolm töövihku: 1. vihk: sügisest-jõuludeni, 2. vihk jõuludest-kevadpühadeni, 3. vihk kevadpühadest-õppetöö lõpuni.

Iga vihk sisaldas 45–54 lehte. Igal lehel oli ristküliku või ruuduga märgistatud koht õpilase nime, kuupäeva ja õigete lahenduste arvu märkimiseks. Õpilase nimi oli vajalik sellepärast, et kõik lehed olid vihust väljarebitavad. Seega ei kasutatud neid töövihikuid tervikuna, vaid õpilastele jagati välja üksikud lehed. Esikaane siseküljel oli rasvaselt trükitud märge, et “tühjad leheküljed on õpilasele iseseisvaks tööks”. Esimeste klasside töövihkudes ongi tekst ainult lehe esiküljel. Vanemate klasside puhul on siiski kasutatud ka lehtede tagakülgi. Kõigi vihkude lõppu on aga jäetud mõned tühjad lehed. Kõik töövihud sisaldavad lehti pealkirjaga “Kontrolltöö”. Ülesandeid ei ole seal aga ette antud. Ainult pealkirjaga lehti on jäetud ka laboratoorsete tööde protokollimiseks. Selliseks pealkirjaks on näiteks “Tööd väljas”.

Johannes Käis on esimese klassi töövihikutes formaalsete tehete sooritamise püüdnud lastele lähemale tuua, pannes ülesannetele pealkirju, nagu “Hiirekesed aidas”, “Ostan jõuluküünlaid”, “Lapsed jooksevad klassist õue” jt. II klassi vihikutes tuuakse vastavalt teemale ka mõned tekstülesanded. Järgnevatele formaalsetele ülesannetele peavad lapsed vastavalt neile eeskujudele juba ise tekste juurde mõtlema. Seda soosivad etteantud teemad, nagu “Kooli ühiskaupluses”, “Pereema töõst” jt.

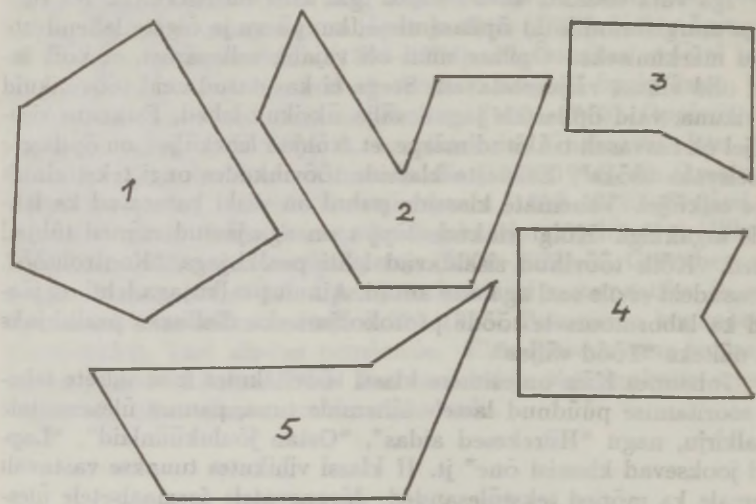
E. Limbergi töövihikutest tõstame esile huvitavalt valitud ülesandeid pindala ja ruumala arvutamiseks. Toome näitena 5. õppeaasta 2. vihust (lk. 27) pindala arvutamise kohta esitatud teksti ja joonised (vt. lk. 110).

Töövihikute kõrvale koostasid J. Käis ja E. Limberg I–IV klassi õpilastele arvutuskaardid [T, 7–10], mis võimaldasid tunde huvitavamaks muuta ja võimaldasid arendada individualiseeritud tööd. Esitame järgnevalt ka ühe arvutuskaardi näidise (vt. lk. 111).

VÄLJAVÕTE E. LIMBERGI V KLASSI TÖÖVIHUST

Pindala arvutamine

1) Hindan silma järgi siin antud kujundite pindala cm^2-tes veaga alla 0,5 cm^2. Pärast jaotan need tuttavaiks kujundeiks (ristkülik, kolmnurk, rööpkülik, trapets), joonistan nende kõrguse ja aluse, mõõdan neid veaga alla 0,05 cm ja arvutan selle lehe teisel küljel kujundite pindala. Saadud arvud kirjutan tabelisse ja ka vastavale kujundile. Lõpuks arvutan vea suurust.



Jn. 10

Kujundi nr.	Pindala silma järgi	Pindala mõõtmisel ja arvutamisel	Hindamisviga
1.	.... cm^2	.... cm^2	..... cm^2 rohkem-vähem
2.	.... cm^2	.... cm^2	..... cm^2 rohkem-vähem
3.	.... cm^2	.... cm^2	..... cm^2 rohkem-vähem
4.	.... cm^2	.... cm^2	..... cm^2 rohkem-vähem
5.	.... cm^2	.... cm^2	..... cm^2 rohkem-vähem

ARVUTUSKAARDI NÄIDIS

II õppeaasta

Arvutuskaart nr. 46
individuaalseks tööks
7-me korrutamine
(Vt. "Õpilase arvutusvihik" II, leht 5 jj.)

1)	$3 \cdot 7 + 4 =$	2)	$4 \cdot 7 + 2 =$
	$5 \cdot 7 + 5 =$		$7 \cdot 7 + 1 =$
	$6 \cdot 7 + 3 =$		$9 \cdot 7 + 2 =$
	$8 \cdot 7 + 4 =$		$10 \cdot 7 + 10 =$
	$2 \cdot 7 + 6 =$		$1 \cdot 7 + 3 =$
3)	$4 \cdot 7 - 3 =$	4)	$1 \cdot 7 - 2 =$
	$6 \cdot 7 - 2 =$		$3 \cdot 7 - 1 =$
	$9 \cdot 7 - 3 =$		$2 \cdot 7 - 4 =$
	$8 \cdot 7 - 6 =$		$10 \cdot 7 - 10 =$
	$5 \cdot 7 - 5 =$		$4 \cdot 7 - 3 =$
5)	$8 \cdot 7 + 6 =$	6)	$9 \cdot 7 + 5 =$
	$8 \cdot 7 - 6 =$		$9 \cdot 7 - 5 =$
	$6 \cdot 7 - 4 =$		$7 \cdot 7 - 8 =$
	$6 \cdot 7 + 4 =$		$7 \cdot 7 + 8 =$
7)	$5 \cdot 7 + \quad = 41$	8)	$8 \cdot 7 - \quad = 47$
	$5 \cdot 7 - \quad = 29$		$8 \cdot 7 + \quad = 65$
	$4 \cdot 7 + \quad = 32$		$9 \cdot 7 + \quad = 67$
	$4 \cdot 7 - \quad = 24$		$9 \cdot 7 - \quad = 59$

3.7.2. Christian Brülleri, Heino Brülleri, Erich Pavelsoni, Paul Partsi, J. Undi ja Elmar Etvergi koostatud "Matemaatika vihikud"

Võrreldes J. Käisi jt. koostatud töövihikutega on selle autorite kollektiivi poolt välja antud töövihikud pisut õhemad à *ca* 32 lehekülge. Vihikute arv on aga oluliselt suurem. Nii ilmus I klassile 8, II–IV klassile 10 ja V–VI klassile 12 vihikut.

Vihikute kaaned olid siin õhukesest paberist. Paarituarvuliste klasside puhul olid kaaned kollast, paarisarvuliste klasside puhul hallikassinist värvi. Erinevate klasside vihikuid eristas veel esikaanel toodud joonis. Kaanel oli ette nähtud koht kooli ja õpilase nime märkimiseks. Esikaane siseküljel olid ära toodud kõigi selle klassi töövihikute teemad. Seal oli trükitud ka märge "HSM Kooliraamatute Komisjoni poolt koolidele lubatud". Tagakaane siseküljelt leiame mõnedes vihikutes normkirja tabelid, teistes aga mõõtude tabeli. Viimaste juurest loeme:

"Kaalu- ja mõõduühikute aluseks on meil "Kaalu- ja mõõduseaduse" järgi meeter ja kilogramm. Mõlemad mõõdud on valmistatud kahes eksemplaris vastupidavast ja muutumatust materjalist ja hoitakse alal – üks eksemplar proovikojas Tallinnas, teine Tartu ülikoolis. Iga 5 aasta järele võrreldakse neid omavahel ja iga 25 aasta järele rahvusvahelises kaalude ja mõõtude büroos Pariisis olevate mõõtude algtüüpidega".

Töövihikus esitatud mõõtude hulgas on aga mõned, mida tänapäeval kas üldse ei kasutata, või kasutatakse väga harva. Need on:

1 **standart**	= 4,672 m^3
1 **kvintaal**	= 100 kg
1 tonn	= 10 **topelttsentnerit**
1 **topelttsentner**	= 100 kg

Töövihikud sisaldavad peamiselt harjutusülesandeid, on ka lühitekste. Näitena tutvustame V klassi vihikust nr. 4 isenimeliste murdude liitmise ja lahutamise õpetamist (lk. 9).

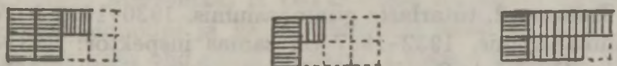
* * *

Lisame mõned märkmed nende töövihikute autorite kohta
Christian Brüller, vt. lk. 92.
Heino Brüller (1909–?), , eelmise poeg, emigreerus Rootsi.
Erich Pavelson, Chr. Brülleri tütremees.

VÄLJAVÕTE CHR. BRÜLLERI JT. VIHIKUST NR. 4 V KLASSI MATEMAATIKA

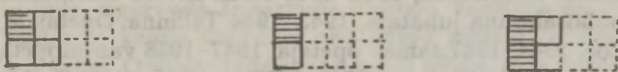
Isenimeliste murdude liitmine ja lahutamine

Liidan ja lahutan murde nagu joonisel näidatud



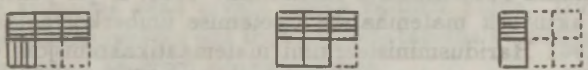
44. $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} =$ $\qquad$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$ $\qquad$ $+ \quad =$

Jn. 11



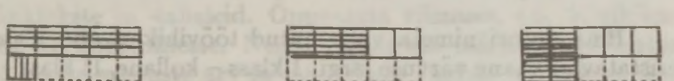
45. $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} =$ $\qquad$ $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} =$ $\qquad$ $- \quad =$

Jn. 12



46. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} =$ $\qquad$ $\frac{5}{6} - \frac{1}{2} =$ $\qquad$ $- \quad =$

Jn. 13



47. $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} =$ $\qquad$ $\frac{1}{2} - \frac{3}{10} =$ $\qquad$ $- \quad =$

Jn. 14

48. Õpilane luges raamatukogust võetud raamatust esimesel päeval $\frac{1}{2}$ ja teisel $\frac{1}{4}$. Kui palju luges ta kahel päeval kokku?

49. Tõnis ütles endal olevat $\frac{3}{4}$ kr. ja Jüri $\frac{1}{2}$ kr. Kellel ja kui palju oli rohkem?

Paul Parts (1902–?) sündis Valgas. Õppis sealses venekeelses eragümnaasiumis ning Tartu Ülikoolis matemaatikat 1920.–1925. a.

Elmar Etverk (1899–1977) sündis Virumaal Vihula vallas. Õppis Vihula ministeeriumikoolis ja Rakvere reaalgümnaasiumis, mille lõpetas 1920. a. 1922–1928 oli Tartu Ülikooli matemaatika-loodusteaduskonna üliõpilane. Töötas 1920–1921 Vihula algkoolis õpetajana ning 1921–1922 samas koolijuhatajana. Aastatel 1926–1927 ja 1928–1930 oli õpetajaks H. Kubu eragümnaasiumis, 1928–1931 Tallinna 2. tütarlaste gümnaasiumis, 1930–1932 J. Westholmi eragümnaasiumis, 1932–1937 oli samas inspektor; 1937–1939 oli Tallinna Õpetajate Seminari ja Pedagoogiumi direktor, 1939 koolide peainspektor Haridusministeeriumis, 1939–1940 J. Westholmi eragümnaasiumi direktor, 1940–1941 direktori kt. Tallinna 7. Keskkoolis, 1941 koolide inspektor Tallinna linna koolivalitsuses ja õpetaja Tallinna 2. Keskkoolis, 1941–1943 oli E. Etverk Haridusministeeriumi kooliosakonna juhataja, 1943–1944 Tallinna Õpetajate Seminari direktor, 1944–1947 samas õpetaja, 1947–1948 vanemõpetaja Tallinna Õpetajate Instituudis, 1948–1950 vanemõpetaja Tartu Riiklikus Ülikoolis, 1950–1952 Tallinna IV Keskkooli raamatupidaja, 1952–1959 Tallinna IV Keskkooli õpetaja. 1959–1960 Tallinna Pedagoogilises Instituudis vanemõpetaja, 1960–1968 vanemõpetaja ja dotsendi kt. Tallinna Polütehnilises Instituudis. 1968. a. jäi pensionile. Tegutses aktiivselt matemaatika õpetamise ümberkorraldamises. Oli 1957–1961 Haridusministeeriumi matemaatikakomisjoni esimees ja seejärel kuni surmani sama komisjoni liige. Oli ligi 25 matemaatikaõpiku ja 30 töövihiku kaasautor.

3.7.3. Autorita töövihikute seeria

Ilma autori nimeta välja antud töövihikud olid klasside järgi eristatavad kaane värvuse järgi: I klass – kollane, II klass – roheline, III klass – pruun, IV klass – sinine, V klass – punane, VI klass – lilla. Nii esi- kui tagakaas olid kujundatud ühesuguste rõõmsailmeliste piltidega. Pealkirjaks oli nii nagu J. Käisi jt. töövihkudel: "Matemaatika vihk". Kaante sisekülgedele siin teksti paigutatud ei olnud.

Nendes vihikutes esitati nii harjutusülesandeid, lünktekste kui ka tekstülesandeid. Viimaste puhul märgiti teksti järgi veel "Lahendan". Õpilaste mobiliseerimiseks kasutati märkusi: "Pean meeles" ja "Tuletan meelde". Näiteks: "Pean meeles: aar = 100 m^2. Aari lühend on a" või "Tuletan meelde: Arvu leidmine ta murdosa järgi toimub ..... teel". Arvukalt on neis töövihkudes peastarvutamisülesandeid. Näitena esitame III klassi töövihikust, kuidas omandada tehteid positiivsete täisarvudega (vt. lk. 116).

3.7.4. Töövihikutest "Matemaatika keskkoolis"

Need Julius Grüntali toimetamisel ning Elmar Etvergi, Robert Matiiseni (hiljem Meresmaa) ja Oskar Paasi koostatud töövihikud olid progümnaasiumides ja ka reaalkoolides laialt kasutusel. Iga klassi töövihiku kaas olid siingi eri värvi: I klass – sinine, II klass – roosa, III – oranž, IV – roheline ja V – hall. Klasside numbrid vastasid seega progümnaasiumi omadele. Esikaanel oli peale vihiku nimetuse ja numbri veel ristkülik, millesse õpilane kirjutas oma nime. Esikaane siseküljele trükiti õpilastele vajaminevaid tabeleid. Sealt leiame murdude, algarvude, täisarvude ruutude, välisraha ühikute jt. tabelid. Tagumise kaane siseküljel olid antud juhised õpilastele ja töötulemuste tabel. Õpilaste tähelepanu juhiti sellele, et ta parandaks eksimused kohe, kui ta need avastab. Sealjuures soovitati enda poolt avastatud vead kriipsutada alla ühe, teiste poolt avastatud vead kahe kriipsuga. Töötulemuste tabelis nähti ette märkida iga lehekülje kohta õigete vastuste arv ja nõutud vastuste arv. Selle tabeli täitmisel lubati ühe kriipsuga vead arvata õigete vastuste hulka. Töövihiku kasutamise lõpetamisel sai aga töötulemuste tabelist avaldada õigete vastuste protsendi ka kogu vihiku ulatuses.

Töövihikute sisuks oli suurel määral teatud ühetüübiliste ülesannete lahendamise drillimine. Näiteks: ruutjuure arvutamine, lineaarvõrrandite lahendamine, avaldiste teisendamine jne. Oli esitatud ka lünktekste ja -tabeleid. Õppeaasta viimases, s.o. 5. vihikus oli esitatud ka kontrollteste. Nende lõppu tuli märkida töö kestus minutites, õigete vastuste arv ja mitu õiget vastust on saadud ühe minuti kohta, nn. saavutis. Edasi tuli lisada klassi parima ja halvima töö saavutis ning leida ka klassi keskmine saavutis. Lõpuks pidi lisama veel oma eksimused selles testis.

Töövihiku iga lehekülje ülemises paremas nurgas oli ristkülik, kuhu märgiti kuupäev ja alumises paremas nurgas ruut õigete vastuste arvu märkimiseks.

Nende töövihikute tutvustamiseks esitame näitena IV klassi harjutusvihikust nr. 5 ruuttrinoomi tegureiks lahutamise õpetuse (vt. lk. 117).

VÄLJAVÕTE III KLASSI TÖÖVIHIKUST

85. Korrutan iga rõhtreas oleva arvuga iga püstreas olevat arvu ja korrutise kirjutan ridade lõikeruutu

	6	4	0	5	7
14					
8					
13					
12					
7					

86. Jagan iga püstreas oleva arvu iga rõhtreas oleva arvuga ja jagatise (jäägi korral ühes sulgudesse asetatud jäägiga) kirjutan ridade lõikeruutu:

	19	8	20	7	14
76					
56					
100					
42					
70					

Näide.

24 – 96 : 16 + 8 · 7 = 74
Selle arvutan peast nii: 96 : 16 = 6
24 – 6 = 18
8 · 7 = 56
18 + 56 = 74

VÄLJAVÕTE E. ETVERGI JT. KESKKOOLI IV KLASSI HARJUTUSVIHIKUST NR. 5

Ruuttrinoomi tegureiks lahutamine.

1. **Kui ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid on x_1 ja x_2, siis $x_1 + x_2 = -p$ ja ..... $= q$ ehk $p = -(x_1 + x_2)$ ja $q=$ ..... Asetades ruuttrinoomisse $x^2 + px + q$ koefitsientide p ja q asemele need lahendite avaldised, saame:**

   $$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x^2)x + \text{.....} = x^2 - x_1x - \text{.....} + \text{.....} =$$
   $$= x(x - x_1) - \text{.....} = (x - x_1) \cdot (\text{.....})$$

2. **Selleks, et hõlpsasti lahutada tegureiks ruuttrinoom $x^2 - 6x + 8$, lahendame võrrandi $x^2 - 6x + 8 = 0$: $x = 3 + \sqrt{9} - 8 = 3 \pm 1$; $x_1 = 4$; $x_2 =$ ..... Siis $x^2 - 6x + 8 = x^2 - (4 + \text{.....})x + 8 =$ $= x^2 - 4x - \text{.....} + 8 = x(x - 4) - \text{.....} = (x - 4) \cdot (\text{.....})$**

3. 3. **Teoreem: Kui x_1 ja x_2 on ruutvõrrandi $x_2 + px + q = 0$ lahendid, siis $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (\text{.....})$**

4. **Lahenda võrrandid:**

   $x^2 - 10x + 21 = 0$
   $x^2 - 16x + 15 = 0$
   $u^2 + 6u + 8 = 0$
   $v^2 + 36v + 128 = 0$

   Lahuta tegureiks ruuttrinoomid:

   $x^2 - 10x + 21$
   $x^2 - 16x + 15$
   $u^2 + 6u + 8$
   $v^2 + 36v + 128$

3.7.5. Gerhard Rägo töövihikud

Professor Gerhard Rägo avaldas 1935. aastal 2 töövihikut: "Matemaatika harjutusvihik keskkoolidele" ja "Matemaatika harjutusvihik algkoolidele".

Esimene oli koostatud progümnaasiumi III klassi (7. õppeaasta) algebrakursuse ja teine algkooli VI klassi kursuse oskusliku külje arendamiseks. Nende harjutusvihikute eesmärgiks ei olnud autor seadnud õpetamist, vaid harjutamist ja kontrollimist. Nii leiamegi neist vihikutest kordamistöid, harjutustöid ja kontrolltöid. Esimeses nimetatud vihikutest oli neid töid vastavalt 4, 25 ja 8 ning teises 12, 12 ja 7. Ka nendes vihikutes on lehed väljarebitavad. Kõigi nende tööde puhul on autor huvitavalt lahendanud erinevate variantide koostamise probleemi. Ülesannetes jäetakse üks andmetest lahtiseks, kusjuures vastava võtme kaudu saab õpetaja anda parajasti niipalju variante, kui ta soovib. Lisame siinkohal ühe sellekohase näite, kust selgub nii võtme kasutamine kui ka harjutuse ülesehitus (vt. lk. 119).

3.8. August Kasvandi ja Juhan Langi algkooli matemaatikaraamatud "Väike matemaatik"

Kolmekümnendate aastate algul hakkasid algkooli matemaatikaalast koolikirjandust rikastama August Kasvand ja Juhan Lang õpikute seeriaga "Väike matemaatik". A. Kasvandi ja J. Langi käsitluses toimub arvudega 1–10 tutvumine vastavate punktkujutuste kaudu ning seejärel õpitakse nende arvudega liitmist ja lahutamist. See algab 1 liitmise ja lahutamisega, siis 2 liitmise ja lahutamisega. Nende ülesannete juures jõutakse ka järeldusele, et "liitmisel võib järjekorda muuta". I klassi raamatus on mõneti sarnaselt näiteks J. Kuulbergi jt. käsitlusega kasutatud ühe teema alla paigutatud ülesandeid. Nende teemade hulgast nimetame "Lennupäev", "Hoiukarp", "Tänaval", "Mäng tinasõduritega" jne.

Liitmist sooritatakse ka kahe joonlaua skaalade, nn. arvutusmasina abil. Seda võtet täiendatakse nn. sirkli abil (vt. jn. 15). Selleks valitakse ühe joonlaua skaalal üks liidetav ja selle kohale asetatakse teist liidetavat esindava sirkli külje või diagonaali üks ots. Joonlaualt teise otsa kohalt saadakse vastus.

II klassi raamatus süvendatakse arvude tundmist. Selleks ka-

Väljavõte G. Rägo töövihikust

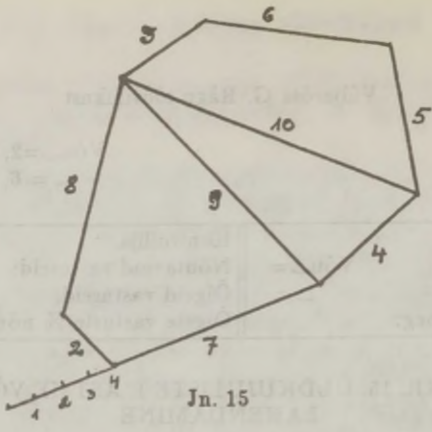
Võti⌣=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
_ = 6, 7, 8, 9, 2, 3, 4, 5.

Nimi:	Kontrollija:
Rühm: Võti⌣=	Nõutavaid vastuseid:
Päev: _ =	Õigeid vastuseid:
Õpetaja lubatud aeg:	Õigete vastuste % nõutavaist:

HARJUTUS NR. 15. ÜLDKUJULISTE 1. ASTME VÕRRANDITE LAHENDAMINE

Eelmärkus. Võrranditel lahendid anna, kui see on võimalik, täpselt; kui see mitte võimalik pole, siis kümnendmurrus peenusega 0,01.

A		B	
* 7N + 3=59 7N=56 N=8	** 37 - 9x=10 27=9x x=3	* 5Q - 7=48 5Q=55 Q=	**8=25 - 17z 17z=17 z=1
1. 3a+⌣=11 a=	9. 5x+⌣=12 z=	1. 2x+⌣=11 x=	9. 7v+1⌣=1⌣ y=
2. _+5e=33 e=	10. 8-_w=5 w=	2. 16=_+5u u=	10. 5s-1_=14 s=
3. 7n-⌣=4 n=	11. 8=9d-⌣4 d=	3. 27-⌣r=12 r=	11. 1 -4p=9 p=
4. 8-⌣k=8 k=	12. _t+13=48 t=	4. 7a-⌣4=60 a=	12. 1⌣=81-⌣ l=
5. 1=_t-48 t=	13. 11=31-1⌣g g=	5. 6+⌣3k=6 k=	13. 3+8i=5 i=
6. ⌣=9-2g g=	14. ⌣m+15=15 m=	6. 11g-3=⌣9 g=	14. 1⌣=6b+1 b=
7. 5u-⌣3=12 u=	15. 3f-_7=4 f=	7. 52-_d=7 d=	15. _h+14=41 h=
8. _z+11=83 z=	16. 200-⌣3a=31 a=	8. 2n-1=1⌣ n=	16. 2⌣-6q=1 q=



Jn. 15

sutatakse näiteks ka järgmist harjutust "Kirjuta lõpuni järgmised arvude read:

0, 2, 4, ..., 20, 18, ..., 0
2, 5, 8, ..., 20, 17, ..., 2.

Arvutamise juures tehakse mõningaid arvutamist hõlbustavaid tähelepanekuid. Nii märgitakse, et mitme lahutatava korral ei olene vahe lahutatavate järjekorrast. Veel jõutakse järeldusele, et arvu korrutamisel 6-ga võib arvu enne korrutada 3-ga ja siis saadud korrutise veel 2-ga.

III klassi õpikus tõstetakse veel kord esile, et "summa suurus ei olene mitte sellest, missuguses järjekorras me arve liidame". Nüüd sisaldab see väide endas peale liitmise kommutatiivsuse ka liitmise assotsiatiivsuse omaduse, sest ülesannetes on siin rohkem kui kaks liidetavat.

Selles klassis alustatakse ka matemaatika õppimise elustamist naljaülesannetega ja ülesannetega, mis nõuavad erilist mõtteteravust. Näiteks on siin esitatud järgmine ülesanne:

"Kuidas lahutada kahest kümnest 99 nii, et järele jääks veel 11?"

Murdude tutvustamisel on autorid eelistanud joonlõikudele pinnatükke.

Kirjalikku korrutamist ja jagamist käsitletakse III klassi õpikus, kuid IV klassis tullakse selle juurde tagasi ka selgituste tasemel. Näiteks:

$$
\begin{array}{r}
\underline{245 \cdot 148 = 36260} \\
200 \cdot 148 = 29600 \\
40 \cdot 148 = 5920 \\
\underline{5 \cdot 148 = 740} \\
36260
\end{array}
$$

Siin tutvutakse osakorrutiste esitamisega ka vastupidises järjekorras.

Täisarvude korrutamise juurest minnakse kohe kümnendmurdude korrutamise juurde. Seega vaadeldakse siin kümnendmurde kui kümnendsüsteemi arve. Samuti tehakse jagamise puhul.

Geomeetria teemade puhul eelistatakse, vastupidi mõne varem tutvustatud autori seisukohale, enne käsitleda ristkülikut ja hiljem risttahukat. Nii tutvustavad A. Kasvand ja J. Lang ristkülikut juba III klassis ning risttahukat IV klassis. Risttahukat defineeritakse kehana, mida piiravad igast küljest ristkülikud.

Nimetame veel mõned huvitavamad faktid IV klassi raamatust.

Protsent on siin õpikus defineeritud kui sajandik:

$$0{,}01 = 1 \text{ sajandik} = 1 \text{ protsent} = 1\ \%.$$

Harilike murdude tutvustamist alustatakse ristkülikukujulise paberi voltimisega. Nii saadakse pooled, neljandikud, kaheksandikud.

Murdude käsitlemist rikastatakse nootidega, kasutades selleks järgmist ülesannet:

"Kui täisnoodi (𝅝) pikkus on 4 veerandnooti, siis poolnoodi (𝅗𝅥) pikkus on 2 veerandnooti; veerandnoodi (♩) pikkus on ..... kaheksandik nooti, kaheksandiknoodi (♪) pikkus on ....."

Või edasi:

"Mitu ♪ vastab ♩-le? Mitu 𝅘𝅥𝅯 vastab ♪-le? Missuguse noodi pikkusega koos annab ♩ kaks veerandit."

Teine geomeetria teema "Täisnurkne kolmetahuline püstprisma ja täisnurkne kolmnurk" algab siiski keha vaatlemisest ja seejärel osutatakse erilist tähelepanu põhitahule. Tutvutakse ka võrdhaarse ja võrdkülgse kolmnurgaga.

V klassi õpikus süvendatakse IV klassis omandatud teadmisi ja oskusi nii protsentarvutuses kui ka arvutamises harilike murdudega. Erilist tähelepanu on pandud peastarvutamisülesannetele.

Esitame mõned tähelepanekud sellest raamatust.

Paberi voltimisel saadud murde hakatakse sama paberi kaasabil teisendama samanimelisteks. Ulatuslikult täiendatakse siin geomeetrilisi teadmisi. Vaatluse alla võetakse nelinurgad, prisma, kera, silinder ja ring.

Nelinurkade käsitlemise käigus selgitatakse siin mõõtmiste ligikaudsust ja leitakse ristküliku pindala arvutamisel tehtava vea ülemmäär.

Kui juba IV klassis joonistati tulp- ja ristkülikdiagramme, siis nüüd V klassis lisanduvad neile ruut-, kuup- ja sektordiagrammid.

Pindala valemite leidmiseks lähtutakse teadaolevast ristküliku pindala valemist ja selle abil juhitakse õpilased siit järjest ruudu, rööpküliku, kolmnurga, trapetsi ja ringi pindala valemite juurde. Analoogiliselt leitakse, lähtudes risttahukast, teiste kehade pindala ja ruumala valemid.

VI klassi õpikusse on suurel määral koondunud geomeetriaõpetus. Erandiks on ainult rahanduslikud arvutused, kus leitakse hoiusumma ja laen, tutvutakse veksliga jne. Geomeetria osas käsitletakse sirgete ja tasandite vastastikuseid asendeid. Püramiidi ja koonuse pindala valemid saadakse pinnalaotuse abil, ruumalad aga liiva kallamisega vastavasse prismasse või silindrisse. Analoogiliselt leitakse ka kera ruumala. Selleks võetakse õõnes poolkera ja õõnes silinder, mille põhja raadius on võrdne poolkera raadiusega ja mille kõrgus on võrdne kera raadiuse kahekordsega. Ümbervalamisel selgub, et üks kolmandik niisuguse silindri ruumalast võrdub poolkera ruumalaga.

VI klassi õpikust leiame veel Pythagorase teoreemi ja kolmnurkade sarnasuse käsitluse. Pythagorase teoreemini jõutakse katseliselt, kus iga õpilane joonistab täisnurkse kolmnurga, mõõdab selle kaatetid ja hüpotenuusi ning arvutamise teel leiab ligikaudse võrduse. Need võrdused üldistatakse seejärel teoreemiks.

Kolmnurkade sarnasust rakendatakse selles raamatus ka plaanistamisel.

* * *

August Kasvand (1890–1980) sündis Võrumaal Erastvere vallas. Ta omandas algkooliõpetaja kutse Võrus 1910. aastal ning matemaatikaõpetaja kutse Pärnus 1913. a. Ta on töötanud õpetajana Nüplis, Otepääl, Võrus ja Tartus. Tartu ülikooli matemaatika-loodusteaduskonna lõpetas ta 1933. a. ning töötas seejärel Tartu linna tütarlaste gümnaasiumis ja Tartu I Keskkoolis. Alates 1944. a. oli A. Kasvand õpetaja Tartu Õpetajate Seminaris ning aastatel 1947–1957 Tartu Õpetajate Instituudi füüsika-matemaatika kateedri juhataja. 1957. a. läks A. Kasvand pensionile. Pensionipõlves tegeles ta Tartu Õpetajate Instituudi ajaloo küsimustega. Kui 1958. a. hakati välja andma originaalõpikuid, sai temast V klassi õpiku kaasautor (koos A. Lehise ja J. Kallakuga). A. Kasvand on avaldanud ajakirjas "Nõukogude Kool" ja ajalehes "Nõukogude Õpetaja" mitu artiklit matemaatika õpetamise küsimustes, nagu "Korrutamine ja jagamine saja piires" (1946), "Matemaatika metoodikast" (1946), "Matemaatika õpetamine vajab ümberkorraldamist" (1957), "Kas matemaatika raudvara on vaja fikseerida" (1963).

Juhan Lang (1888–1977) sündis Tartumaal Sootaga vallas taluperes. Lõpetas Tartu linnakooli ning omandas seejärel Valga linnakooli juures korraldatud kursustel algkooliõpetaja kutse. Gümnaasiumi lõpueksamid sooritas Riias 1909. a. ning lõpetas Tartu ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonna 1914. a. Töötas õpetajana Valgas ja Tartus. Aastatel 1919–1928 oli Tartu Poeglaste Gümnaasiumi direktor, seejärel Tartu koolinõunik ning 1939. a. sügisest lühemat aega Haridusministeeriumi peainspektor. Saksa okupatsiooni aastail ei lubatud tal pedagoogina töötada. Aastatel 1941 ja 1944–1957 oli Tartu ülikooli üldfüüsika kateedri dotsent. On koostanud kaasautorina mitu füüsika-, kosmograafia-, loodusteaduse- ja matemaatikaõpikut.

J. Langi 100. sünniaastapäeval avati tema sünnikohas mälestuskivi.

Täiendavalt võib nende autorite elu ja tegevuse kohta lugeda järgmistest artiklitest:

I. Piir. 100 aastat Juhan Langi sünnist. Edasi, 2.IX 1988.

O. Prinits. Tartu nimekaid koolimatemaatikuid. Koolimatemaatika II. Tartu, 1975, 3–6.

O. Prinits. August Kasvandit mälestades. Koolimatemaatika VII. Tartu, 1980, 44–45.

E. Jõgi. August Kasvandi elutööst. Koolimatemaatika XVII. Tartu, 1990, 37–38.

3.9. Teisi aastatel 1920–1940 ilmunud algkooli matemaatikaraamatuid

Lisaks juba tutvustatud ja Eesti algkoolides laialt kasutatud matemaatikaraamatutele võtame siin vaatluse alla mõned väiksema levikuga, kuid ikkagi huvitavad õpikud. Nende autoreiks olid J. Koppel, A. Perli ja A. Perandi ning täiesti radikaalselt uue õpetamisviisi pooldaja M. Meos. Ükski nendest autoritest ei andnud välja raamatuid algkooli kõigi klasside jaoks, kuid mitu nende esitatud metoodilist lahendust on küllalt omanäolised ja vajavad seetõttu tutvustamist.

3.9.1. J. Koppeli seisukohti aritmeetika õpetamiseks

J. Koppeli "Metoodiline matemaatika õperaamat", mis ilmus 1920. aastal, oli esimeseks Eesti Vabariigis ilmunud metoodiliseks käsiraamatuks. Huvipakkuvad on mõned autori peanõuded, "mida matemaatika õpetamisel kunagi ei tohi unustada". Need on järgmised:

"õppijat tuleb nõnda talutada, et ta teatava juhise ise leiab" ja

"tarvis õpilasi uute matemaatiliste valemitega tegelikult lasta kokkupõrgata nii, et teooria kasvaks praktilistest tarvetest välja, muidu näib ta kuivana ja otstarbetuna".

J. Koppeli seisukohtadest tõstame esile veel järgmisi.

1. "Ei pea mitte õppijalt kategooriliselt nõudma, et ta näituseks kasvatuse näidiku (tabel) pääst peaks teadma, niipea kui sellest paragraafist üle on mindud, kus see näidik esineb. Näidik on selleks, et teda arvamise juures tarvitada, küll ta sageda tarvitamise tõttu isegi mõne aasta jooksul meele jääb."

2. "Materjali kogupiir ei tohi õpetamisel kuidagi õpeaastaga köidetud olla, ainult edasijõudmine on mõõduandev..."

J. Koppel koostas oma metoodilise matemaatika õpperaamatu juurde ka "Ülesannete kogu". Selle raamatu eessõnas arutleb ta peastarvutamise vajalikkuse üle, hoiatades sellega liialdamise eest: "Üleüldiselt on mõte valitsemas, et õpilased päästrehkenduses tugevad oleksid. Laita see asi ei ole. Kuid ma ei usu, et see nõue igas vanaduses ja igal arendamisastmel läbiviidav on. Päästrehkendus on rehkenduse ülem aste, tema kõige lahundlikum (abstraktsem) osa, ta nõuab tugevat kujutlusvõimet. Viimane võib tekkida ainult pikkamisi ja reaalsete kujude põhjalikul vaatlemisel. Püüe õpilasi päästrehkenduses tugevaks teha ei tohi neile kammitsaks saada. Sel ajal, kui õpilane päästarvutamises kümne piiris opereerib, võib ta konkreetsete (asjandlikkude) hulkadega või nende sümboolidega (kirjutatud arvudega) õige suures piiris opereerida."

Nii ongi ülesannete kogus kõrvuti näiteks järgmised tulbad:

128 + 4 =	308 + 484 =
208 + 4 =	404 + 298 =
314 + 8 =	580 + 340 =
494 + 8 =	278 + 544 =

Õieti on selles raamatus juba tehete õppimise algus omanäoline, sest alles pärast kümneliste ja sajalistega tutvumist minnakse tehete juurde. Ja nii järgnevad ülesandele 1 + 1 = 2 kohe järgmised: 21 + 1 = 22, 31 + 1 = 32, 101 + 1 = 102, 231 + 1 = 232.

3.9.2. August Perli "Arvud elust"

August Perli oli oma venekeelse ülesannetekogu välja andnud juba 1916. aastal. 1921. aastal ilmusid sellest raamatust eesti keelde tõlgituna I ja II vihik. Neist esimene oli mõeldud I ja II klassile ning teine III ja IV klassile.

Aritmeetika algõpetust on selles käsitluses alustatud tsükliga 1–5. Selles ulatuses õpitakse arve liitma ja lahutama. Sinna juurde kuuluvad ka tekstülesanded. Järgmine tsükkel on 1–10, kus esialgu samuti liidetakse ja lahutatakse ning seejärel õpetatakse esimese kümne piires ka korrutama ja jagama. Edasi jätkub arvuvalla laiendamine 100-ni, seejärel tutvutakse lihtsamate murdudega ning täisarvudega kuni 1000-ni.

Raamatuid "Arvud elust" on autor iseloomustanud järgmiselt: "Käesoleva ülesannete kogu eri- ja tähtsam tundemärk on ülesannete sisu. Sisuliselt peavad ülesanded mitte üksi rehkenduse puhta vormaalsetele nõuetele vastama – arvulist materjaali omandada, – vaid ka mitmekülgset huvi ümbruse vastu äratama, selle läbi mõistuse arenemise, tahtevõimu kindlustamise ja südame harimise abinõuks saades. Ainult reaalsest elust võetud sisuga ülesannetel on see eesmärk kätte saadav."

Seda sihti silmas pidades ongi autor raamatusse võtnud ülesandeid andmetega mitmest elu valdkonnast, küll majandusest, geograafiast, loodusteadusest. Näited pärinevad aga kõik Venemaalt, mõned ka Soomest. Raamatut eesti keelde tõlkides ei olnud autor leidnud mahti kohalikke näiteid sisse tuua. Seda heitsid autorile ette ka raamatu arvustajad.

Eriti ägeda kriitika A. Perli raamatute kohta kirjutas J. Sarv (vt. IV, lk. 38).

* * *

August Perli (1871–?), Oskar Pärli vend. Õppis Tartu Õpetajate Seminaris (1887–1891). Töötas õpetajana Rõuge kihelkonnakoolis (1891–1895), Sangaste kihelkonnakoolis (1895–1898), oli koduõpetajaks Peterburis (1898–1901), õiendas seal matemaatika ja saksa keele õpetaja kutseeksamid. Seejärel töötas õpetajana Moskvas Peeter-Pauli koolis (1901–1918), kuulas samal ajal loenguid kõrgemast matemaatikast Šanjavski-nimelises ülikoolis. Eestisse naases 1918. a. lõpul. Lühiaegselt töötas Võru gümnaasiumis matemaatikaõpetajana. 1919. a. asus elama Tallinna. Oli kaubandus-tööstusministeeriumi sekretäriks (1919–1922), seejärel tegev kaubanduse erasektoris. 1925 alustas tööd õpetajana Tallinna Õpetajate Seminaris ja selle Harjutuskoolis.

Gustav Mootse (1885–1957) sündis Tartumaal Kastre-Võnnu vallas. Õppis Tartu reaalkoolis (1899–1903), Peterburi Stieglitzi kunstikoolis (1904–1909), Leipzigi graafilise kunsti akadeemias (1926–1927). Töötas joonistamise õpetajana Põltsamaa reaalgümnaasiumis (1919–1922), Rakvere Õpetajate Seminaris (1922–1924), Viljandi keskkoolides (1928–?).

Johannes Kiivet (1879–1967) sündis Järvamaal, Vaali vallas. Õppis Põltsamaal Eesti Aleksandri linnakoolis ja H. Treffneri gümnaasiumis ning Peterburi Ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonnas (1907–1913). Oli õpetajaks Järva- ja Virumaa koolides (1895–1902), Peterburi kubermangus Eesti asunduses Teškovos (1902–1906), gümnaasiumi õpetajaks Vologda kubermangus (1913–1917). Seejärel töötas Tallinnas. Oli Prantsuse lütseumi direktor (1922–1924). Aastast 1923 töötas Haridusministeeriumis kutsehariduse nõunikuna (1923–1927), koolide peainspektorina (1927–1930), haridusnõunikuna (1930–1937) kutsehariduse peainspektorina (1937–1938), kutseosakonna abidirektorina (1938–?).

3.9.3. Adolf Perandi "Uutel teedel"

Nagu juba teame, tõi töökooli ideede levik kolmekümnendate aastate keskel meie koolidesse töövihikud. A. Perandi koostatud omapärase käsitlusega I–III klassi matemaatikaraamatud, mis ilmusid 1935. ja 1936. aastal, on nimetatud tööraamatuteks.

Tutvume mõne käsitluse iseärasusega nendes raamatutes.

Alustatakse piltide vaatlemisega, kust loendatakse eri suurusega rühmi (loomad, aknad, inimesed jne.). Seejuures numbrite kirjutamisega ei tegelda. Isegi liitmise või lahutamise tehte mõistega tutvutakse enne kui arvude kirjutamisega. Esimesed tehted on järgmised:

□ □ □ + □ = □ □ □ □   ○ ○ ⊖ = ○ ○

Jn. 16

Arvud 1, 2 ja 3 võetakse vaatluse alla koos. Mitmesuguste esemete vahendusel selgitatakse arvu 3 kooslust. Alles raamatu 19. leheküljel jõutakse arvu 1 kirjutamiseni. Arvudele 1, 2 ja 3 järgneb arv 0. Liitmise ja lahutamise juures kasutatakse eraldi pealkirju, nagu "9-le juurde enne 1", "11-st enne ära 1", "17 enne ära 7" jt. Neile järgnevad ilma küsimuseta ülesanded, nagu "Bussis on 11 reisijat, neist 2 lahkus".

Formaalseid arvutamistulpi on konkretiseeritud pealkirjade abil ning õpilaste fantaasiale tuginedes. Kasutatakse pealkirju, nagu "Heade õpilaste arv klassis kasvab", "Vaguneid haagitakse rongile otsa ja küljest ära" jt.

Tuuakse aga ka ülesandeid, kus andmed esitatakse mitmes variandis. Toome näiteid.

"Ühel päeval müüs kaupmees suhkrut kahekilostes pakkides kokku 18 (14, 20, 16, 12, 8) kilo. Mitu kahekilost pakki ta müüs?" või "Asi maksis enne 12 (14, 16, 11, 13, 15) senti, nüüd aga saab sama asja 3 (5, 4) sendi võrra odavamalt. Kui palju tuleb asja eest maksta nüüd?"

A. Perandi raamatute seerias on kirjalikud liitmis- ja lahutamisülesanded viidud alles III klassi raamatu lõppu. Peastarvutamise edendamiseks on soovitatud arvude täiendamise võtet, ülesande mitut moodi lahendamist või siis ülesande lahendamise selgitamist. Näiteks on ülesannet 940–437 lahendatud nelja moodi:

$$\begin{aligned} 940 - 437 &= 903 - 400 \\ &= 540 - 37 \\ &= 3 + 500 \\ &= 63 + 440 \end{aligned}$$

Ka nende etteantud lahenduste selgitamine nõuab parasjagu mõtteteravust.

III klassi raamatus esitatakse jällegi väga palju alaülesandeid sisaldavaid harjutusi. Näiteks on tabeli peas öeldud "Ostetud asjade arv: 2, 3." Tabelis on toodud asja hind sentides. Neid hindu on aga 133 tükki. Neid kõiki tuleb siis korrutada 2-ga ja 3-ga.

III klassis alustatakse murdude õpetamist, kusjuures tutvustatakse kohe ka segaarve. Näiteks on pärast tutvumist poolega esitatud jällegi üks andmehulkadega ülesanne:

"Ema tõi turule $18\frac{1}{2}$ (24, $36\frac{1}{2}$, 19, $27\frac{1}{2}$, $41\frac{1}{2}$, $23\frac{1}{2}$) liitrit piima, sellest müüs ta algul kohe ära $\frac{1}{2}$ ($2\frac{1}{2}$, 7, $9\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{2}$, 15, $16\frac{1}{2}$) liitrit. Mitu liitrit piima jäi emal veel müüa?"

Kümnendmurde tutvustatakse komaga kirjutatud arvudena ja see toimub koos mõõtude tundmaõppimisega.

III klassi õpikus on tutvustatud risttahukat. Selle keha vaatlemisel õpitakse tundma ristkülikut kui tema tahku.

Ristküliku pindala arvutamiseni jõutakse järgmise ülesande abil:

"Joonistage 5 cm pikkune ja 3 cm laiune ristkülik! Korrutage tema pikkuse ja laiuse mõõtarve teineteisega!

Kui suur on korrutis?

Nüüd katke ristküliku pindala paberist välja lõigatud ruutsentimeetritega! Mitu neid sinna peale mahub?

Niisiis: ristküliku pindalas, mille pikkus on 5 cm ja laius 3 cm, on just nii palju ruutsentimeetreid, kui palju ühelisi tema pikkuse ja laiuse mõõtarvude korrutises."

Analoogiliselt ristküliku pindala leidmisega jõutakse ka risttahuka ruumala arvutamiseni.

Samas raamatus õpetatakse mõõtmiseks kasutama nurkristi, sihitikke, loodlauda ja vaaderpassi.

3.9.4. Märt Meos "Arvud elust"

M. Meos on oma matemaatikaõpetajatele kirjutatud raamatule "Arvud elust", mis ilmus 1937. a., lisanud alapealkirja "Käsiraamat matemaatika õpetamiseks ilma ülesannetekoguta." Selle, mõneti uuendusliku õpetamisviisi õigustuseks püstitab autor nõude, et koolis lahendatavate ülesannete andmed peavad kõik vastama tegelikkusele. Toetust oma seisukohale leiab autor Joh. Kuulbergi vastavast märkusest raamatule "Elavad arvud" kirjutatud metoodilises juhendis (vt. lk. 93). M. Meos tugineb aga tähtsamatelegi autoriteetidele, nagu Pestalozzi, kes olevat öelnud: "Kes lahutab matemaatikast tõelikkuse, see lahutab selle, mis Jumal on ühte pannud." Ja nii ta rõhutabki üldises nõudes ülesannete kohta, et "need peavad olema lapse ümbrusest, lapse huvipiirkonnast ja tõeoludele vastavad. Luule ja muinasjutukoht ei ole matemaatikatunnis".

M. Meos soovitab matemaatikaõpetust alustada laste teadmiste ja oskustega tutvumisega. Seejärel peavad tulema loendamisülesanded, kus loendatavad objektid on laste lähimast ümbrusest – klassist, õuest, kodust. Järgnevad loendamismängud. Numbrite kirjutama õppimisel peetakse vajalikuks rühmitada need kirjutamise raskuse järgi rühmadesse:

1) 1, 4, 7, 0, 6; 2) 9, 3, 8; 3) 2, 5.

Edasi tulevad ülesanded kõigi arvude kohta nende loomulikus järjekorras, järgmises sõnastuses: mida on vaid üks (kaks, kolm jne.) a) klassis, b) õues, c) koduteel, d) kodus, e) taevas? Mida on veel ainult üks? Oodatavaid vastuseid: "Isal oli 2 hobust, ostis ühe juurde"; "Laudas oli 5 lehma, üks müüdi ära"; või siis näiteks ülesannetega konkreetseks tegevuseks: "Astu seina juurest 5 sammu ette. Astu veel üks samm" jne.

Nii on autor kogu I klassi matemaatikakursuse juurde lisanud rea näiteid, kuidas leida tegelikkusest sobivaid ülesandeid kõigi õpetatavate tehete kohta.

* * *

Mart Meos (1881–1966) sündis Viljandimaal Tarvastu vallas. Õppis Tarvastu-Kuressaare vallakoolis, Tarvastu kihelkonnakoolis ning Tartu Õpetajate Seminaris (1897–1901). Töötas õpetajana Vana-Liiva ministeeriumikoolis (1901–1902), oli koolijuhatajaks Kärstna ministeeriumikoolis (1902–1907) ja Väike-Maarja kihelkonnakoolis (1907–1919) ning Virumaa koolinõunikuks (1919–1932). Oli aktiivne ühiskonnategelane. Avaldas brošüürid "Meie kool" (1922) ja "Kooliaed" (1928).

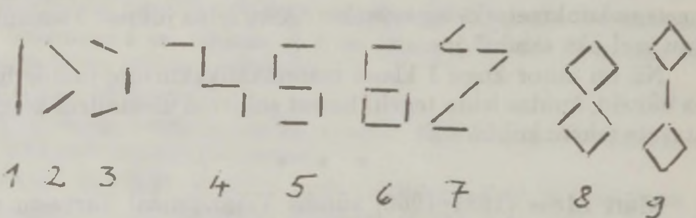
3.10. Keskkooli aritmeetikaõpikud

Võtame vaatluse alla O. Perli juba 1912. a. ilmunud "Aritmeetika õpperaamatu keskkoolidele", mille kolmas trükk ilmus veel 1921. a. Osaliselt oleme seda raamatut tutvustanud varemgi (vt. II, lk. 19). 1936. a. avaldas autorite kollektiiv A. Borkvell jt. kaheosalise "Keskkooli aritmeetika", mis võeti kasutusele tolleaegsete progümnaasiumide esimestes klassides. Põgusalt teeme tutvust mõne kutsekoolidele kirjutatud matemaatika raamatuga, nagu N. Puura ja Ed. Mossi kaubandusaritmeetika, J. Jaaksoni põllumajandusaritmeetika ja mõne teisegagi.

3.10.1. Oskar Perli "Aritmeetika õperaamat keskkoolidele"

Siin alustatakse alusmõistete – arv, ühik, liitmine jne. – tutvustamisest. Järgneb suurte arvude lugema õpetamine. Teatavasti on levinud kaks erinevat suurte arvude lugemise viisi. Nii on ühel juhul tuhat miljonit biljon, teisel juhul aga miljon miljonit on biljon. O. Perli kasutas neist esimest lugemisviisi. Nii näiteks õpetati selles raamatus, et tuhat triljonit on üks kvadriljon, tuhat kvadriljonit on üks kvintiljon jne.

Selgitatakse, et hindude numbrid, mis heebrealaste kaudu araablasteni ja sealt Hispaania kaudu Euroopasse jõudsid, on koostatud vastavast arvust lõikudest



Jn. 17

Õpetatakse ka rooma numbreid ja nende abil suuri arve üles kirjutama. Näiteks:

20 199 = XX_mCXCIX (*m* – *mille* – tuhat),

2 647 225 = ${}_mII_mDCXLVII_mCCXXV$ (*m m* – *miles milia* – 1000 korda 1000).

Kui jõutakse kirjaliku korrutamiseni, siis õpetatakse seda tuginedes distributiivsuse seadusele. Näiteks:

$$19\,407 \cdot 2368 = 19\,407 \cdot (2000 + 300 + 60 + 8) =$$
$$= 19\,407 \cdot 2000 + 19\,407 \cdot 300 + 19\,407 \cdot 60 + 19\,407 \cdot 8.$$

Vastuse saamise lihtsustamiseks kirjutatakse seejärel üksikud liidetavad kui nn. erakasvatused üksteise alla järgmiselt:

$$\begin{array}{rcrcr}
19\,407 & \cdot & 2\,000 & = & 38\,814\,000 \\
19\,407 & \cdot & 300 & = & 5\,822\,100 \\
19\,407 & \cdot & 60 & = & 1\,164\,420 \\
19\,407 & \cdot & 8 & = & 155\,256 \\
\hline
19\,407 & \cdot & 2\,368 & = & 45\,955\,776
\end{array}$$

O. Perli raamatust leiame ka arvutamise lihtsustamise võtteid. Toome siinkohal näitena lihtsustatud korrutamise arvudega 11 ja 37.

$26 \cdot 11 = 286$; $2 + 6 < 11$; $8\underline{5} \cdot 11 = 93\underline{5}$; $8 + 5 > 11$;

$\underline{4}2\ 51\underline{8}$	$4 + 2 = 6$	$\underline{3}\ 58\underline{7}$	$3 + 5 = 8$
$\times\ 11$	$2 + 5 = 7$	$\times\ 11$	$5 + 8 = 13 > 11$
$\underline{4}67\ 69\underline{8}$	$5 + 1 = 6$	$\underline{3}9\ 45\underline{7}$	$8 + 7 = 15 > 11$
	$1 + 8 = 9$		

Toodud näidetest ilmneb, et 11-ga korrutamisel on korrutise viimane number võrdne korrutatava arvu viimase numbriga. Selle ette saadakse numbrid korrutatava arvu numbreid järjest ettepoole kahekaupa liites.

Et $3 \cdot 37 = 111$, siis 37-ga korrutamisel kasutatakse järgmisi lahenduskäike:

1) Olgu ülesandeks $24 \cdot 37$. Et $3 \cdot 37 = 111$ ja $24 : 3 = 8$, siis $24 \cdot 37 = 8 \cdot 111 = 888$;

2) Olgu ülesandeks $19 \cdot 37$. Et $19 : 3 = 6$ (jääk 1), siis $19 \cdot 37 = 6 \cdot 111 + 37 = 703$.

Liitmis-, lahutamis-, korrutamis- ja jagamistehte järel tutvustatakse selles raamatus ka astendamist ja juurimist. On toodud isegi reeglid võrdsete alustega astmete korrutamiseks ja jagamiseks ning astme astendamiseks. Omapäraselt on tutvustatud arvu ruudu leidmist:

$85^2 = (80 + 5)(80 + 5)$
$= 8 \cdot 8$ sajalist $+\ 2 \cdot 5 \cdot 8$ kümnelist $+\ 5 \cdot 5$ ühelist
$= 8 \cdot 8$ " $+\ 10 \cdot 8$ " $+\ 25$ "
$= 8 \cdot 8$ " $+$ 8 sajalist $+\ 25$ "
$=$ 8 sajalist võetud $(8 + 1)$ kord $+$ 25 ühelist.

Seega, $85^2 = 8 \cdot 9.\ 100 + 25 = 7200 + 25 = 7225$.

Arvude jaguvust käsitledes antakse ka 11-ga jaguvuse tunnus järgmises sõnastuses: "Et teada saada, kas arv 11-ga jagatav on, arvame tema paaris kohtadel seisvad numbrid üheks summaks ja paarita kohtadel seisvad numbrid teiseks summaks kokku. Ühest summast arvame teise summa maha. Kui vahe 11-ga jagatav ehk 0 on, siis on arv 11-ga jagatav."

Näiteks arv 92 334 jagub 11-ga, sest $9 + 3 + 4 = 16$, $2 + 3 = 5$, $16 - 5 = 11$ ja 11 jagub 11-ga. $92\ 334 : 11 = 8394$.

Antud arvude suurima ühisteguri leidmiseks tutvustatakse järkjärgulise jagamise võtet, mille omandamiseks aga tuleb järgnev tekst hoolikalt läbi lugeda: "Kui suurem arv kahest antud arvust vähemaga jagatav ei ole, siis on nende kõige suuremaks ühiseks jagajaks seesama arv, mis vähema arvu ja jäänuse, mis suurema arvu jagamisel vähemaga üle jääb, kõige suuremaks ühiseks jagajaks on." Näitena tutvustatakse arvude 348, 580, 754 ja 899 suurima ühisteguri leidmist:

	1	1	2
580	348	232	116
348	232	232	
232	116	0	

	6	2
754	116	58
696	116	
58	0	

	15	
899	58	29
870	58	
29	0	

Antud arvude suurimaks ühisteguriks on 29.

Püüame seda skeemi lahti mõtestada.

Esmalt kirjutatakse kaks antud arvudest üksteise kõrvale nii, et suurem arv asub vasakul. Näites on nendeks 580 ja 348. Et 348 läheb 580 sisse üks kord, siis kirjutatakse $1 \cdot 348 = 348$ 580 alla ja lahutatakse. Saadud jääk 232 kirjutatakse 348 kõrvale. Seejärel jagatakse samuti arve 348 ja 232 ning lõpuks arve 232 ja 116. Viimane jääk 116 on arvude 580 ja 348 suurim ühistegur. Edasi leitakse arvude 754 ja 116 suurim ühistegur – 58. Lõpuks leitakse arvude 899 ja 58 suurim ühistegur, mis on 29. See arv on ka kõigi antud arvude suurim ühistegur.

Näiteks arvude 675 ja 750 vähima ühiskordse leidmiseks kasutatakse aga järgmist skeemi:

750	1	
657		
75	675	9
	675	

$$750 : 75 = 10$$
$$675 \cdot 10 = 6750$$

Nii saadakse, et arvude 675 ja 750 "väikseim ühine mitmekordne" on 6750.

Seegi skeem vajab hoolikat läbimõtlemist.

Murdude käsitlemise juures on rõhutatud, et murdude kokkuarvamise juures on nimetajal seesama tähendus, mis nimetusel nimega arvude kokkuarvamise juures. Selgitatakse, et murru nimetaja pole midagi muud, kui "üksuse üksikute jagude nimi".

Korrutamistehet defineerib O. Perli arvule 1 taandamise kaudu. Nii tähendab ülesanne $15 \cdot \frac{3}{8}$, et "arvust 15 tuleb uus arv leida nii, nagu $\frac{3}{8}$ on saadud arvust 1. See toimub aga nii, et 1 terve tuleb jagada kaheksaks ühesuuruseks jaoks ja siis võtta kolm niisugust jagu. Seega tuleb antud ülesande lahendamiseks arv 15 jagada kaheksaks ühesuuruseks jaoks ($\frac{15}{8}$) ja võtta siis kolm niisugust jagu".

Murdude jagamist, näiteks $\frac{4}{7} : \frac{3}{5}$, selgitatakse aga järgmiselt: "Et $\frac{4}{7}$ antud teguri $\frac{3}{5}$-ku ja otsitava jaondi kaswatus on, siis on $\frac{3}{5}$-kku otsitawast arwust $\frac{4}{7}$.

$\frac{3}{5} \cdot x = \frac{4}{7}$; $\frac{1}{5} \cdot x = \frac{4}{7 \cdot 3}$; ehk $1x$ ehk $\frac{5}{5} \cdot x = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 3}$.

Järelikult on $\frac{4}{7} : \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 3}$".

O. Perli raamatus tutvustatakse veel ruut- ja kuupjuure leidmist, pisut kümnendmurde. Peale aritmeetiliste tehete õpetatakse kümnendmurde ümardama ning perioodilisi kümnendmurde harilikeks murdudeks teisendama. Veel leiavad selles raamatus käsitlemist suhted, võrded, nn. kolmliikme arvamised, protsendid, rahakasu, segude ja sulamite ülesanded.

O. Perli raamatus on lisaks aritmeetikaküsimustele käsitletud veel järgmisi geomeetria ja algebra teemasid: "Pinna ja ruumimõõtmine" ning "Vahekord ja võrrandid". Geomeetria mõistetest on tutvustatud sirget *(ógevjoon)*, kiirt, sirglõiku *(ógevjoone jupp)*, nurka ja selle liike. Hulknurgaks nimetatakse tasapinna osa, mis on igalt poolt õgevjoontega ümberpiiratud, ning hulknurka, mille kõik nurgad on täisnurgad, nimetatakse täisnelinurgaks. Antakse viimase, s.o. ristküliku pindala leidmise eeskiri. Ruumikujundeist tutvustatakse risttahukat (neljakandiline tulp), mille ruumala *(kantsisu)* mõõtarv on tema, "mõõdangute mõõtarvude kasvatis".

Algebraosa piirdub tundmatu kasutamisega otsitava arvu tähenduses. Siin antakse esmalt mõisted *aritmeetiline* ja *geomeetriline vahekord*. Esimese all mõistetakse kahe arvu vahet, teise all kahe arvu jagatist. Seejärel defineeritakse, et "võrrand on kahe samasuguse vahekorra ühesuurus". Antakse ka aritmeetilise keskmise *(jaond-keskarv)* ning geomeetrilise keskmise *(juur-keskarv)* mõiste. Veel tutvustatakse võrdelisi suurusi: "Kui meie ühe suuruse kahest arvulisest väärtusest ja neile vastavatest teise suuruse arvulistest väärtustest võrrandi võime saada, siis on nende kahe suuruse vahel elus side – võrrandiline side ja suuruseid endid nimetatakse võrrandilisteks suurusteks." Viimased liigitatakse *perivórrandilisteks* ja *vastuvórrandilisteks*, s.o. võrdelisteks ja pöördvõrdelisteks suurusteks. Tähte kasutatakse kolmlauseülesannete lahendamisel. Toome ühe näite, kus tundmatuid kasutatakse liitkolmlause-ülesande lahendamisel.

"Ülesanne. Kui nädalas on 6 tööpäeva ja iga tööpäev 10 tundi pikk, siis koovad 12 kangrut 6 nädalaga 50 kangast, mis kõik on 48 küünart pikad. Kui aga nädalas oleks 5 tööpäeva ja iga tööpäev kestaks 12 tundi, siis mitu kangast kooksid 36 kangrut 4 nädalaga, kui iga kanga pikkus oleks 40 küünart?

Lahendus.

1. Kui nädal 6 tööpäeva, siis jõutakse 50 kangast kududa
" " 5 " " " y " "

$$\frac{y}{50} = \frac{5}{6}$$

2. Kui päevas 10 tundi tööd teha, siis jõuaks y kangast kududa
" " 12 " " " " " z " "

$$\frac{z}{y} = \frac{12}{10}$$

3. Kui iga kangas 40 küünart pikk, siis jõuaks z kangast kududa
" " " 48 " " " " u " "

$$\frac{u}{z} = \frac{48}{40}$$

4. 12 kangrut kudusid u kangast
36 " " v " $\frac{v}{u} = \frac{36}{12}$

5. 6 nädalaga jõutakse v kangast kududa
4 " " x " " $\frac{x}{v} = \frac{4}{6}$

Saadud võrrandid kasvatame liikme kaupa üksteisega

$$\frac{y \cdot z \cdot u \cdot v \cdot x}{50 \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v \cdot} = \frac{5 \cdot 12 \cdot 48 \cdot 36 \cdot 4}{6 \cdot 10 \cdot 40 \cdot 12 \cdot 6}$$

$$\frac{x}{50} = \frac{5 \cdot 12 \cdot 48 \cdot 36 \cdot 4}{6 \cdot 10 \cdot 40 \cdot 12 \cdot 6}$$

$$x = \frac{50 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 48 \cdot 36 \cdot 4}{6 \cdot 10 \cdot 40 \cdot 12 \cdot 6 \cdot} = 120 \text{ (kangrut).”}$$

O. Perli raamatu populaarsust tõstsid sinna juurde lisatud palad meetermõõdustikust ja kuude nimetuste tekkimisest. Veel leiame sellest raamatust C.F. Gaussi valemi lihavõttepühade kuupäeva kindlaksmääramiseks:

aastaarvu jagamisel 19-ga saadav jääk olgu a,
aastaarvu jagamisel 4-ga saadav jääk olgu b ja
aastaarvu jagamisel 7-ga saadav jääk olgu c;
jagatise $\frac{19a + 15}{30}$ jääk olgu d ja
jagatise $\frac{2b + 4c + 6d + 6}{7}$ jääk olgu e.

Lihavõttepühade esimeseks päevaks on kas $(22 + d + r)$. märts või, kui saadav arv on suurem kui 31, siis $(d + e + 9)$. aprill.

Artiklist “Meetermõõdustik” olgu toodud järgmine katke:

“1792 mõõdeti Arago, Biot, Delambre ja Mechaini juhatusel üks jagu Parisi meridianist - Dünkirchenist kuni Formentera saarni - ära ja selle järele rehkendati meridiani pikkus põhjanabast kuni ekvaatorini endistes Prantsuse mõõtudes - tuase'des - välja. Saadud arvust võeti üks kümnemiljondik jagu ja selle järele tehti platina ja iridiumi sulamist mõõt. 10-al detsembril 1800 kuulutati kümnemiljondik Parisi meridiani verandist, millele "meeter" nimeks anti, seaduslikuks mõõduks.

Veel ligi 40 aastat tarvitati meetri kõrval ka teisi mõõtusid, aga 1-sest jaanuarist 1840 saadik sai Prantsusmaal meetermõõdustik ainukeseks seaduslikuks mõõtude süsteemiks. Sellest ajast on ta üle terve haritud ilma laiali lagunenud."

Nagu teada, ei olnud O. Perli raamatu ilmumise ajal Venemaal veel meetermõõdustikku kehtestatud.

Aja arvamise ülesannete juures on aga toodud ülevaade sellestki, kuidas kuud on omale nimed saanud. Seegi katkend võiks lugejale huvi pakkuda.

"Roomlaste kalendril oli esialgu ainult 10 kuud ja aastat algasivad nemad märtsi kuuga. See esimene kuu oli sõjajumalale Marsile pühendatud ja kandis tema nime – Marsikuu "Martius". Teine kuu sai oma nime sellest, et tema jooksul "puu pungad puhkevad", lahti lõõvad, sest ladinakeeli tähendab puhkema, lahti lõõma – aperire, sellest nimi "Aprilis". Kolmas kuu oli lillede jumalannale Mayale pühendatud, sellest nimi "Majus". Neljas kuu oli peajumalannale, Jupiteri abikaasale Junole pühendatud ja kandis tema nime "Junius". Teisi kuusid loeti korda mööda: viies kuu – Quintilis, kuues kuu – Sextilis, seitsmes kuu – Septembris, kaheksas kuu – Octobris, üheksas kuu – Novembris, kümnes kuu – Decembris. Kui kuningas Numa Pompilius kalendrit parandada laskis, lisas tema veel kaks kuud juurde. Ühte neist nimetas ta jumala Januse auks jaanuariks, teist sellel kuul pühitsetavate puhastamise pühade "februalia" järele veebruariks. Pärast poole nimetati viies kuu "Quintilis" Julius Caesari auks juulikuuks ja kuues kuu "Sextilis" keiser Oktavianus Augustuse auks augustikuuks."

* * *

Andmeid Oskar Pärli elu ja tegevuse kohta leiab lugeja leheküljelt 93.

3.10.2. Albert Borkvelli, August Kasvandi, Felix Laarensi, Karl Maasiku, Arnold Vihmani ja Oskar Paasi "Keskkooli aritmeetika õpperaamat" I ja II osa

See raamat oli kirjutatud progümnaasiumi I ja II klassi, s.o. 5. ja 6. õppeaasta õpilastele. Seepärast on ka siin käsitletud aine sama, mis eespool käsitletud algkooli V ja VI klassi õpikutes.

Autorid on I osa eessõnas põhjendanud, miks nad võtsid endale ülesande kirjutada kogu progümnaasiumile nii aritmeetika-, algebra- kui ka geomeetriaõpikud: "Kuigi meie koolikirjanduses on ilmunud küllaltki matemaatika õpi- ja tööraamatuid ja nende hulgas mitmeid iseenesest isegi häid, kuid meie praeguste olude ja nõuete kohaseid nende hulgas siiski veel ei ole.

Autorite arvates peab kaasaegses kooli matemaatikaraamatus olema suuremal hulgal töö- ja harjutusmaterjali ühes kokkuvõtlikkude selgitustega ja juhenditega õpilaste virgutamiseks tööle ja nende eneste kontrolli võimaldamiseks tegeliku õppetöö kestes."

Autorid lubavad "esitada teoreetilised arutlused lühidalt ja selgelt, anda rohkesti metoodiliselt õigesti järjestatud töö- ja harjutusmaterjali, esitada eeskujulikke lahendusi, luua side varemõpituga, kasutada tööviise, mis vastavad õpilaste arenemisastmele".

Vastavalt lubadusele alustataksegi "Keskkooli aritmeetika õpperaamatut" sideme loomisega varemõpituga. Kõigepealt korratakse aritmeetilisi tehteid, rõhutades eriti komponentide ja resultaadi vahelisi seoseid, nagu

"Kui vähendame üht liidetavat mingi arvu võrra, siis väheneb summa sama arvu võrra" või

"Kui suurendame üht tegurit ja vähendame teist tegurit mingi arv korda, siis jääb korrutise suurus muutumatuks".

Neid omadusi kasutatakse peastarvutamise oskuse süvendamiseks ja arvutamist lihtsustavate võtete omandamiseks.

Näiteks:

$6{,}96 + 27{,}8 = 7 + 27{,}8 - 0{,}04 = 34{,}8 - 0{,}04 = 34{,}76;$

$65{,}3 - 26{,}9 = 65{,}3 - 30 + 3{,}1 = 35{,}3 + 3{,}1 = 38{,}4;$

$9 \cdot 4{,}8 = 10 \cdot 4{,}8 - 4{,}8 = 48 - 4{,}8 = 43{,}2;$

$0{,}125 \cdot 48{,}8 = 48{,}8 : 8 = 6{,}1;$

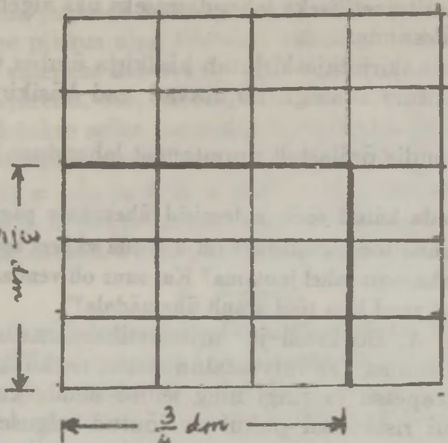
$7{,}6 : 0{,}5 = (2 \cdot 7{,}6) : (2 \cdot 0{,}5) = 15{,}2 \cdot 1 = 15{,}2.$

Tutvustatakse ka arvude ja arvutamistulemuste ümardamist.

Aritmeetikaraamatus käsitletakse mõningaid lihtsamaid geomeetrilisi kujundeid, nagu nurka ja selle mõõtmist. Antakse ringjoone ja ringi definitsioon. Kera seostatakse maakeraga ning nõutakse isegi järgmise ülesande lahendamist:

"Kui kaugel Tallinnast asub põhjanaba, kui Tallinna geograafiline laius on 59°? Kui kaugel on Tallinnast ekvaator?"

Geomeetria teadmisi kasutatakse harilike murdude käsitlemise juures. Seal on korrutamist murruga selgitatud järgmise geomeetrilise arutlusega:



Jn. 18

"Joonisel (vt. jn. 18) on kujutatud ruutdetsimeeter, millest osa on viirutatud. See osa on ristkülik, mille pikkus on $\frac{3}{4}$ dm ja laius $\frac{3}{5}$ dm. Et ristküliku pindala võrdub ta pikkuse ja laiuse korrutisega, siis peab selle ristküliku pindala olema $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5}$ dm^2 suur. Korrutise leiame joonise abil järgmiselt: kogu ruut jaguneb $4 \cdot 5$, s.o. 20-neks isekeskis pindvõrdseks ristkülikuks, joonitud ristkülik sisaldab väikesi ristkülikuid $3 \cdot 3$, s.o. 9. Seega on viirutatud ristküliku pindala $\frac{9}{20}$ dm^2. Järelikult $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$."

Jagamist murruga selgitatakse aga aritmeetiliselt järgmise ülesandega:

"Ema ostis poest $\frac{3}{4}$ kg lambaliha ja maksis selle eest $\frac{9}{20}$ kr. Kui kallis oli kg seda liha?

Lahendus: Ühe kg liha hinna leiame, kui kogu liha hinna jagame liha kilogrammide arvuga.

Seega maksis kg lambaliha $\frac{9}{20} : \frac{3}{4}$ krooni.

Ühe kg liha hinna leiame järgmiselt:

$\frac{3}{4}$ kg liha maksis $\frac{9}{20}$ kr, siis $\frac{1}{4}$ kg liha maksis 3 korda vähem, s.t. $\frac{9}{20 \cdot 3}$ kr. ja 1 kg liha maksis 4 korda rohkem, s.o. $\frac{9 \cdot 4}{20 \cdot 3} = \frac{3}{5}$ kr."

Toodud näide kinnitab väidet, et juba tol ajal oldi raskustes harilike murdude rakendamiseks tegelikkusele vastavate ülesannete leidmisega. Mõneti ootamatu on, et harilike murdude käsitlemise lõpul antakse aritmeetiliseks lahendamiseks üks algebrast tuntud nn. kraani tüüpi ülesanne:

"Üks masinakirjutaja kirjutab käsikirja ümber 6 tunniga, teine 8 tunniga. Mitme tunniga kirjutavad nad käsikirja ümber koos töötades?"

Küllap nõudis õpilastelt nuputamist lahenduse leidmine selliselegi ülesandele:

"Kaks venda käisid tööl ja teenisid ühesuguse päevapalgaga kokku $82\frac{1}{2}$ kr. Ühe venna tööpäevade arv oli 4 korda vähem teise omast. Kuidas pidid vennad raha omavahel jaotama? Kui suur oli vendade päevapalk, kui vähem töötanud vend käis tööl ainult ühe nädala?"

Ka selles A. Borkvelli jt. aritmeetikaraamatus on käsitletud geomeetria küsimusi. On tutvustatud ruutu, ristkülikut, rööpkülikut, kolmnurka, trapetsit ja ringi ning leitud nende kujundite pindala valemeid. Kui ristküliku puhul on jõutud selgusele, et ristküliku pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega, siis valem esitatakse sõnaliselt ja sealt edasi juba täheliselt.

"Seda võime lühemalt väljendada järgmiselt:

Pindala = alus · kõrgus.

Seda viimast on võimalik veel lühemalt väljendada, kirjutades ainult selles esinevate sõnade asemel tähed, mille tagajärjel saame:

$P = a \cdot h$."

Kujundite pindala valemid saadakse ikka tuntud kujundite pindala kaudu, kasutades peamiselt tükeldamise või täiendamise võtet.

Mõneti erinev teistest käsitlustest on siin trapetsi pindala tuletamine. Selleks lõigatakse välja antud trapetsiga kongruentne trapets, pööratakse see ringi ja asetatakse antud trapetsi vastu nii, et tekib rööpkülik, mille alus võrdub trapetsi aluste summaga ja kõrgus on võrdne trapetsi kõrgusega.

Kehadest õpitakse tundma risttahukat, kuupi, püstprismat, püramiidi, silindrit ja koonust. Nende pinnalaotuste abil jõutakse nende külg- ja täispindala arvutamiseni.

Järgnevas protsentarvutuse peatükis antakse protsendi mõiste kui $\frac{1}{100}$ tervest ning vaadeldakse eraldi kolme protsendiülesande tüüpi: protsendi leidmine arvust, arvu leidmine antud protsendi järgi ja kahe arvu suuruse võrdlemine protsentides. Tutvustatakse ka promilli mõistet.

Raamatu II osa, mis on mõeldud 6. õppeaastaks, algab kordamise ja täiendamisega. Uue osa algul tutvustatakse tahksamba (püstprisma) ruumala arvutamist, lähtudes risttahukast. Õpiku iseärasuseks on seegi, et ta sisaldab peatüki pealkirjaga " Ühtlane liikumine". See teema jaguneb kolmeks osaks. Esmalt leitakse vastavate ülesannetega tee pikkus ning jõutakse valemini $s = vt$. Nüüd avaldatakse sellest valemist kas v või t ja jõutakse 2. osa, s.o. keskmise kiiruse ning seejärel 3. osa, s.o. liikumise kestuse arvutamiseni.

Veel käsitletakse selles raamatus hoiusumma ja intressi arvutamist. Seda alustatakse uuesti protsendist, lähtudes aga nüüd võrdusest $1\ \% = 0{,}01 = \frac{1}{100}$ ja $5\ \% = 0{,}05 = \frac{5}{100}$. Jääb mulje, et I osa protsentarvutus ja II osa hoiusumma ja intressi arvutamine on erinevate autorite kirjutatud. Selles peatükis tuuakse välja intressivalem

$$i = \frac{k \cdot p \cdot t}{100},$$

kust on kergesti väljaloetavad selles esinevate muutujate vahelised seosed. Kui ülejäänud muutujad on konstandid, siis intress ja kapital või siis intress ja hoiuaeg on võrdelised, kapital ja hoiuaeg aga pöördvõrdelised suurused. Esitatakse ka neile seostele vastavad graafikud.

* * *

Albert Borkvell (1890–1963) sündis Virumaal Palmse vallas. Õppis 1906–1909 H. Treffneri eragümnaasiumis, küpsuseksamid sooritas Tallinna Aleksandri gümnaasiumi juures 1915. a. Õppis esialgu Peterburi ülikoolis ning 1922. a. lõpetas Tartu Ülikooli matemaatikamagistrina. Teist korda lõpetas Tartu Ülikooli 1929. a. juristina. Töötas pärast 1922. aastat Tallinnas Kõrgemas Sõjakoolis ja Tallinna Ühisgümnaasiumis. Aastatel 1927–1931 oli Narva Ühisgümnaasiumis inspektor ja seejärel direktor. 1931–1936 oli Haridusministeeriumi Koolivalitsuse abidirektor, aastatel 1936–1952 töötas professorina Tallinna Tehnikaülikoolis ning aastatel 1947–1960 oli esialgu Tallinna Õpetajate Instituudi ja seejärel Tallinna Pedagoogilise Instituudi kateedrijuhataja, professor.

August Kasvand (vt. lk. 122).

Feliks Laarens (1897–?) sündis Käsmus. Lõpetas 1918. a. Narva gümnaasiumi. Töötas lühemat aega Käsmu merekoolis matemaatikaõpetajana ning seejärel 1920–1924 õppis Tartu Ülikooli matemaatika-loodusteaduskonnas. Töötas õpetajana Tartus.

Karl Maasik (1889–1957) sündis Viljandimaal Patküla vallas. Õppis kohalikus külakoolis, Helme kihelkonnakoolis, Valga Progümnaasiumis ning lõpetas Tartu Aleksandri Gümnaasiumi 1910. a. Seejärel õppis Tartu Ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonnas (1910–1916). Töötas 1916–1918 ametnikuna Ülevenemaalises Semstvote Liidus, 1918-1919 Tõrva Reaalgümnaasiumi juhatajana, 1919–1930 Tartu Reaalgümnaasiumi matemaatika- ja füüsikaõpetajana, 1930–

1940 Tartu Poeglaste Gümnaasiumi ja Tartu Tehnikumi inspektorina, 1940–1950 Tartu 1. keskkooli direktorina. 1919–1920 oli ka Tartu Õpetajate Seminari õpetaja ning 1946. a. TRÜ Ettevalmistusosakonna lektor.

Oskar Paas (1900–1990) sündis Kogula vallas. Õppis Tallinna linna I reaalkoolis ja Tartu Ülikoolis 1920–1926. Lõpetas mehhaanika eriharu. Töötas Koeru algkoolis õpetajana. Lõpetas 1930. a. ka didaktilis-metoodilise seminari. Seejärel oli õpetaja Tartu Õpetajate Seminaris, Tallinna Gustav Adolfi Gümnaasiumis ning koolinõunik. Emigreerus 1944. a.

Arnold Vihman (1899–1975) sündis Virumaal Simuna vallas. Õppis Rahkla külakoolis, Simuna algkoolis ning lõpetas Rakvere reaalgümnaasiumi 1920. aastal. Samal aastal astus ülikooli. Õppis seal 1920–1922 ja 1927–1930 ning lõpetas ülikooli *cum laude* matemaatika-füüsika-astronoomiaõpetaja kutsega. Töötas õpingute vaheajal matemaatikaõpetajana Väike-Maarja Ühisgümnaasiumis, pärast lõpetamist aga Paide ja Rakvere Gümnaasiumis ning alates 1935. aastast Tallinna Tütarlaste Kommertskoolis. Pärast sõda oli ta Arve- ja Plaanindustehnikumi õpetaja ning 1946. a. sai temast Vabariikliku Õpetajate Täiendusinstituudis metoodik. Kui 1947. a. nimetati Tallinna Õpetajate Seminar Tallinna Õpetajate Instituudiks, asus A. Vihman seal tööle õppejõuna ning jätkas seal ka pärast 1952. aastat, kui see õppeasutus nimetati Tallinna Pedagoogiliseks Instituudiks. A. Vihman oli matemaatikaõpikute autor, tõlkija, õpetajate täienduskursuste lektor.

3.11. Aritmeetika erialalistes (kaubandus, põllumajandus jt.) õpikuis

Kolmekümnendatel aastatel olid mitmes kutsekoolis kasutusel oma erialalised aritmeetikaraamatud:

Ed. Moss "Kaubandusaritmeetika I ja II" 1937. ja 1938. a.;
N. Puura "Kaubandusaritmeetika", 1929;
J. Jaakson "Põllumajanduslik aritmeetika ülesandeis", 1932;
J. Jakk "Üldise ametirehkenduse õpik", 1940;
E. Järvela "Ülesandeid kaubandusaritmeetikast", 1938;
A. Mutt "Matemaatika tööstuskoolidele". 1940.*

* Peale loetletud raamatute ilmus veel E. Albergi "Majandusmatemaatika".

Muidugi sisaldavad need raamatud rohkesti ainet tavalisest aritmeetikakursusest. Nii saamegi teada, et tehted täisarvudega ja murdudega, protsentarvutus, samuti kolmlaused, ligikaudne arvutamine, segude arvutamine ja keskmise arvutamine on nendeski kursustes vajalikud.

A. Muti tööstuskoolidele kirjutatud raamat vastab küll enam keskkooliõpikutele, sisaldades põhiliselt algebra- ja geomeetria- ning trigonomeetriaõpetust.

Teeme nüüd põgusa sissevaate teistesse siin loetletud raamatutesse.

E. Järvelo kaubandusaritmeetika raamatus on toodud Tartu Ülikooli kaubandusaritmeetika praktikumis lahendatud ülesanded. Sinna juurde lisatud teoreetilised arutlused pärinevad aga A. Humala vastavatest loengutest. Nii erineb selles raamatus käsitletud aine oluliselt tavalisest aritmeetikakursusest.

J. Jakk oma ametirehkendustes tugineb aga kindlalt kooliaritmeetikale. Ta nõuab aga lisaks tavalisele aritmeetikaosale, et oleks omandatud ka suur 1 x 1, s.o. korrutamistabel, ulatuses kuni 20 x 20. Huvitav on selle raamatu temaatiline ülesehitus. Õpiku alapealkirjadeks on "Õpilane ja õppevahekord"; "Õpilane käitises"; "Õpilane oma valduse valitsejana"; "Riik, kogukond ja rahvamajandus"; "Kaupade ost ja müük"; "Kulude arvutamine" ning "Oskustööline perekonnapeana".

J. Jaaksoni põllumajandusaritmeetika raamatust leiame väga ulatusliku aritmeetika käsitluse. Lisaks eespool loetletud traditsioonilisele temaatikale leidub selles raamatus veel peatükk "Veksli oodustamine". Kõik see materjal kuulub üldossa. Eriosas leiab õpitud (korratud) aritmeetikakursus mitmesugust rakendamist. Nii esitatakse arvutusi taimekasvatuse alalt. See hõlmab teemasid, nagu mullatundmine, maaparandus, mullaharimine, väetamine ja väetised, seeme ja külv, hoolitsemine ja koristamine ning saak. Arvutused loomakasvatuse alalt viivad aga aritmeetika rakendamisele järgmistel aladel: söötmine, piimakarja söötmine, noorkarja kasvatamine ja veiste nuumamine, piimamajandus, sigadepidamine, tööhobuste söötmine. Kolmas teemade ring on talukäitisõpetuse alalt. Siia kuuluvad järgmised alateemad: põllumajanduslik kapital, tööjõud, põllutööriistad ja masinad, talumajapidamise tasuvus. Lisadena on sellesse raamatusse paigutatud mõõtude tabel, andmed mitmesuguste põllumajandussaaduste ja väetiste tähtsamate taimetoiteolluste sisalduse ning harilikumate söötade koosseisu ja toodangu väärtuse kohta.

Aritmeetikaõpetuse seisukohalt esitab huvitavat materjali N. Puura oma kaubandusaritmeetika õpikus. Ta toob nn. arvutuskergenduste näiteid. Esitame neist mõned ka siinkohal.

"1) Kui korrutajas sisaldub number 1, siis korrutatav on ühtlasi number 1-he osakorrutiseks:

$$\begin{array}{r} 354 \text{ x } 71 \\ \underline{24\,78} \\ 25\,134 \end{array}$$

2) Korrutamine 12, 13 ja 14-ga sünnib nagu korrutamine ühekohaliste arvudega:

$\underline{2354 \text{ x } 12}$ 12 x 4 = 48; kirjutame 8 ühte

28248 12 x 5 = 60; 60 + 4 = 64 kümmet jne.

3) Korrutamine 11 ja 111-ga.

$$\begin{array}{r} 5678 \text{ x } 11 \\ \underline{5678} \\ 62458 \end{array}$$

4) Korrutamine 5; 50; 0,5 ja 0,05-ga.

677 x 5 = 6770 : 2 = 3385

7248 x 0,05 = 724,8 : 2 = 362,4

5) Korrutamine 125; 1250; 12,5; 1,25; 0,125 ja 0,0125-ga.

12,8 x 0,0125 = 1,28 : 8 = 0,16

6) Korrutamine ühe teguri lahutamise teel

a) korrutamine 75-ga

Et 75 = 100 - 25, siis korrutad algul 100-ga ja korrutisest lahutad ühe neljandiku osa sellest korrutisest:

8317,325 x 75 = 831732,5

$$-\frac{1}{4} = \frac{207933{,}125}{623799{,}375}$$

b) korrutamine 15-ga

c) korrutamine 27,5-ga

Et 27,5 = 25 + 2,5, siis

27,5 x 426 = 10650 (25 korda)

$$+\ \frac{1}{10} = \underline{\ 1065\ } (2{,}5 \text{ korda})$$

11715

d) korrutamine 25,25-ga."

Analoogiliselt soovitatakse veel korrutada arvudega 37,5 $(25 + \frac{25}{2})$, 62,5 $(50 + \frac{50}{4})$, 87,5 $(100 - \frac{100}{8})$ ning arvudega 112,5; 22,5; 95; 4,5 ja 7,5.

Tutvustatakse veel korrutamist itaalia moodi, mis seisneb selles, et korrutaja lahutatakse niisugusteks osadeks, millest iga järgnev moodustab teatud osa ühest eelnevast või on kordne sellega. Näiteks:

$$634 \times 46 \qquad 46 = 40 + 4 + 2$$

$$\begin{array}{l} 634 \times 40 = 25360 \\ 634 \times \ \ 4 = \ \ 2536 \\ 634 \times \ \ 2 = \ \ 1268 \\ \hline 634 \times 46 = 29164 \end{array}$$

Analoogilised soovitused on N. Puura raamatus ka jagamise kohta.

Protsendiülesannete juures rõhutatakse, et need sisaldavad kolme üksust: ***puhasväärtus, protsenditaks ja protsendiväärtus.*** Niipea kui neist kolmest üksusest kaks on teada, saab leida kolmanda.

Raamatu põhiosaks on intressiarvutus, kus lisaks spetsiaalsetele diskontoarvutustele, kaubaarvutustele, kontokorrendi arvutustele jne. on põhjalikult tutvustatud ka mitmesuguseid mõõdu- ja kaalusüsteeme. Lisaks meetermõõdustikule ja vanadele vene mõõtudele on seal toodud veel inglise mõõdud ja Põhja-Ameerika Ühendriikide mõõdud ning on lisatud vastav võrdlustabel.

Ed. Mossi kaubandusaritmeetika raamat algab huvitava sissejuhatusega. Seal rõhutatakse, et "kui matemaatika peamisi nõudeid on otstarbekohane täpsus ja elegantsus, siis seda enam maksab see kaubandusaritmeetika kohta – saavutada tingimata õigeid resultaate võimalikult väikese aja- ja jõukuluga, võimalikult väikese tehete arvuga". Peastarvutamise tähtsust on esile tõstetud järgmise väitega: "kaubandusaritmeetikas on möödapääsmatuks vajaduseks, et iga sellega teotsev isik peab, kus vähegi võimalik, arvutama peast, tarvitades ainult hädatarvilikke üleskirjutisi".

Vastavalt nendele nõuetele on Ed. Mossi raamatu algusosas suurt tähelepanu pööratud aritmeetilistele tehetele. Lisamegi siin N. Puura õpikust esile toodud võtetele mõned Ed. Mossi soovitused.

Täisarvude lahutamisel soovitab ta kasutada ka täiendamisviisi ning liitmisel ja lahutamisel ümardamisviisi. Tutvustame neid viise näidetega.

Täiendamisviis:
$$\begin{array}{r} 5000 \\ -\ 2782 \\ \hline 2218 \end{array}$$

Mõttekäik: $2 + 8 = 10, \quad 8 + 1 = 10 - 1 = 9,$
$7 + 2 = 10 - 1 = 9, \quad (1 + 2) + 2 = 5$

Ümardamisviis:
$$6547 + 2989 = 6547 + (3000 - 11) = (6547 + 3000) - 11 = 9536$$

Korrutamisel soovitab Ed. Moss, et mitte ainult arvudega 12 ja 13, vaid ka arvudega 14, 16 ja 17 korrutataks nagu ühekohalise arvuga ning jagamisel arvudega 2–19 piirdutagu samuti ainult andmete ja vastuse väljakirjutamisega. Jagamisel soovitatakse veel jagaja teguriteks lahutamist. Näiteks toome ülesande, kus jagaja 81 lahutatakse teguriteks $9 \cdot 9$ ning antud arv jagatakse esmalt 9-ga ja saadud jagatis veel kord 9-ga:

$$\begin{array}{ll} :9 & \underline{28431 : 81} \\ :9 & \underline{3159} \\ & \quad 351 \end{array}$$

Huvipakkuvad on veel mõned Ed. Mossi soovitused tehete sooritamiseks segaarvudega. Toome mõned sellekohased näited.

1) $6\frac{3}{7} - 3\frac{6}{7} = 2\frac{4}{7}$. Mõttekäik: täisosa $(6 - 1) - 3 = 5 - 3 = 2$;

murdosa $(1 - \frac{6}{7}) + \frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.

2) $8\frac{7}{12} \cdot 832 \qquad = (\frac{7}{12} + 8) \cdot 832$

$$\begin{array}{rr} & \underline{\quad \times 7} \\ :12) & \underline{5824} \\ & 485\frac{1}{3} \\ + & \underline{6656} \\ & 7141\frac{1}{3} \end{array}$$

3) $684\frac{1}{2} : 7 = 97\frac{11}{14}$ Mõttekäik: $684 : 7 = 97$, jääk 5

$(5 + \frac{1}{2}) : 7 = \frac{11}{14}$.

Protsentarvutuse käsitlemisel esitatakse protsendi valem kujul

$$\% = \frac{a \cdot p}{100},$$

kus a on antud arv, p – protsendimäär ja $\%$ – p protsenti arvust a.

Ed. Mossi kaubandusaritmeetika raamatud sisaldavad põhiliselt muidugi kaubandusarvutusi, nagu diskonto deviiside arvutamine jne. Nii nagu eelmistegi raamatute puhul me nende teemade juures ei peatu.

* * *

Eduard Moss (1886–1962) sündis Tartus. Õppis siinses kõrgemas algkoolis ning sooritas 1915. a. küpsuseksamid Tartu Aleksandri gümnaasiumi juures. Astus Tartu Ülikooli 1916. a. ja uuesti 1919. a., lõpetas 1924. a.

Töötas õpetajana Tartu Kaubanduskoolis (1919–1944), Tartu Õhtualgkoolis (1921–1927), Tartu 3. Progümnaasiumis (1932–1940), Tartu 3. Reaalkoolis (1938–1940), Tartu 6. Keskkoolis (1940–1941), Tartu 3. Keskkoolis (1944–1945). Veel töötas ta sõjajärgsel perioodil Tartu Majandustehnikumis, Arve- ja Plaanindustehnikumis, Ehitustehnikumis, Tartu 2. Keskkoolis ja Tartu 1. Töölisnoorte Keskkoolis. Jäi pensionile 1956. aastal.

Jaan Jaakson (1900–1986) sündis Viljandimaal Uue-Võidu vallas. Õppis Saarepeedi vallakoolis (1908–1910), Tartu Aleksandri Gümnaasiumis (1910–1918) ning lõpetas 1927. a. Tartu Ülikooli õigusteaduskonna *cum laude*.

Töötas õpetajana Viljandi Poeglaste Gümnaasiumis ja Tartu Tehnika Ühisgümnaasiumis (1923–1925) ning Olustvere Põllutöökeskkoolis (1926–1934).

Hiljem tegutses talupidajana isatalus, raamatupidajana Viljandi asutustes. 1962. a. jäi pensionile. Maetud Viljandisse.

3.12. I–VI klassi matemaatikaõpikuist aastatel 1941–1950

Standardõpikutele üleminek kolmekümnendate aastate lõpul lõi küllalt kindla aluse matemaatika kooliraamatute väljaandmiseks ka sõja ajal ja esimestel sõjajärgsetel aastatel. Nii kasutati aastatel 1941–1944 eesti algkoolides praktiliselt samu matemaatikaõpikuid, mis 1939 /40. õppeaastal. Ülesannete tekstides oli muudetud rahaühikud. Temaatilised muudatused tulid mõnevõrra rohkem ilmsiks gümnaasiumis (vt. II, lk. 162–179).

Aastatel 1941–1944 olid eesti algkoolides kasutusel järgmised õpikud:

Juhan Kallak, Elisabeth Kallak, Elmar Araste. "Elavad arvud. Matemaatika õpik algkoolidele. I õppeaasta". (10. tr. – 1942, 11. tr. – 1943);

Juhan Kallak, Elisabeth Kallak, Elmar Araste. "Elavad arvud. Matemaatika õpik algkoolidele. II õppeaasta". (11. tr. – 1942);

August Kasvand, Juhan Lang. "Väike matemaatik. Tööraamat algkooli III klassile". (4 tr. – 1942, 5. tr. – 1943);

August Kasvand, Juhan Lang. "Väike matemaatik. Tööraamat algkooli IV klassile". (4. tr. – 1942, 5. tr. – 1943);

August Kasvand, Juhan Lang, Oskar Paas. "Matemaatika õpik. 5. õppeaasta". (2. tr. – 1942, 3. tr. – 1943);

August Kasvand, Juhan Lang, Oskar Paas. "Matemaatika õpik. 6. õppeaasta". (2. tr. – 1942, 3. tr. – 1943).

Et kõik need raamatud olid juba varem ilmunud, siis aine käsitluses siin ka olulisi muudatusi ei ole.

Sõjajärgsetel aastatel muutus kooli struktuur järgmiseks: 7-klassiline mittetäielik keskkool ning 11-klassiline keskkool (vt. jn.).

Mittetäielik keskkool

I II III IV V VI VII VIII IX X XI

Keskkool

Matemaatikaõpikute koostamisest jäid nüüd eemale August Kasvand, Juhan Lang ja Oskar Paas. Juhan Kallak jäi üksinda esimeste klasside õpikute autoriks. Aastatel 1945–1949 olid mittetäielikus keskkoolis kasutusel järgmised matemaatikaõpikud:

Juhan Kallak. "Aritmeetika I klassile";
Juhan Kallak. "Aritmeetika II klassile";
Boris Rea. "Aritmeetika III klassile";
Arvo Lehis. "Aritmeetika IV klassile";
Ott Rünk, Hilda Roos. "Matemaatika õpik V klassile";
Arnold Vihman. "Matemaatika õpik VI klassile";
Arnold Vihman. "Matemaatika õpik VII klassile".

J. Kallak, A. Vihman ja A. Lehis olid õpikute või töövihikute autoritena tuttavad juba varasemast perioodist ning O. Rünk oli ennast tutvustanud metoodiliste artiklitega pedagoogilises ajakirjanduses. H. Roos ja B. Rea olid uued autorid.

I ja II klassi raamatud olid peaaegu koopiad varem kasutatud raamatuist "Elavad arvud". Teeme nüüd tutvust uute käsitlustega alates III klassist.

B. Rea III klassi raamatust leiame aritmeetiliste tehete kordamise osas mõneti uuenduslike nõudmistega ülesandeid. Nähakse ette nende lahendamine enne peast ja siis kirjalikult. Selleski õpikus on täht x kasutusel otsitava arvu sümbolina ülesannetes, nagu

$$384 - x = 128 \text{ või } x - 240 = 176.$$

Tekstist tõstetakse esile mõningaid lauseid sel teel, et nende ette kirjutatakse "Pean meeles". Näiteks: "Pean meeles: kõigepealt täidan need tehted, mis on sulgudes!" Samuti on kasutatud märgusõna "Juhis". Näiteks: "Juhis: Kui sulgusid ei ole ja on tarvis ainult liita ja lahutada, siis teha tehteid antud järjekorras". Mõni neist juhistest oli õpilastele arvatavasti rakesti mõistetav. Näiteks: "Juhis: Kui mõne liidetava viimane number on 8 või 9, on peast arvutamisel kasulik seda liidetavat ümardada täiskümneteni, siis liita, ja lahutada saadud summast ümardamisel juurde lisatud ühelised".

Sellest õpikust leiame mõne ülesande, kus nagu J. Kallaku ülesanneteski oli küsimuse püstitamine jäetud õpilasele. Näiteks: "Siirupivabrikule osteti ühel päeval 124 630 kg kartuleid, teisel päeval ületati see norm 582 kg võrra. Mida arvutada (2 küsimust)?"

Leidub aga ka läbikaalumata ülesandeid. Näiteks: "N. Eestis peeti enne sõda ümmarguselt 229 500 hobust ja 773 800 veist. Mida arvutada?"

Hobuste ja veiste arvu võrdlemisel pole ju erilist mõtet. O. Rünga ja H. Roosi kirjutatud V klassi raamat torkab silma standardõpikutele iseloomuliku teoreetilise kallakuga. Õpikus on rohkesti mõisteid, mille definitsioonid on poolpaksus šriftis. Näiteks on järjest defineeritud mõisted *loendamine, loetelu, järjekord, järjestamine, nimistu*. Poolpaksus šriftis on toodud ka tehete sooritamise reeglid, mis eelkõige täpsust silmas pidades on muutunud raskekujuliseks. Näiteks:

"Kümnendmurdude jagamisel korrutatakse enne jagatavat ja jagajat niisuguse ühikarvuga, et jagaja muutub täisarvuks; jagatises pannakse koma, kui jagatava ühelised on jagatud (s.t. kui jagatise järgmise koha saamiseks üheliste jääk peenendatakse kümnendikeks)."

Huvitav on selleski õpikus jälgida 4-ga jaguvuse tunnuse ja harilike murdude korrutamise käsitlust. 4-ga jaguvuse tunnuseni jõutakse järgmiselt:

"Lähtume sellest, et 100 jagub kindlasti neljaga. Tõesti $100 : 4 = 25$. Siis on aga ka $100 + 100$ ehk 200 jaguv neljaga (esimese seaduse põhjal), samuti $200 + 100$ ehk 300 jne. Selgub, et iga arv, mis lõpeb kahe nulliga, on jaguv neljaga.

Kui arv ei lõpe kahe nulliga, siis esitame summana nii, et esimene liidetav lõpeb kahe nulliga: $5742 = 5700 + 42$. Esimene liidetav jagub siis kindlasti neljaga. Eespool sõnastatud seaduse põhjal otsustab nüüd summa jagumise neljaga see, kas teine liidetav jagub neljaga või mitte. Seega neljaga jagumise tunnus on järgmine: arv on jaguv neljaga, kui tema kirjutise kaks viimast numbrit kujutavad neljaga jaguvat arvu (või on mõlemad nullid)."

Murdude korrutamise eeskirjani jõutakse induktiivselt, tuginedes ülesandele "Üks meeter kummipaela maksab $\frac{3}{5}$ rubla. Mis maksab $\frac{7}{10}$ meetrit seda paela?"

Arutletakse, et kui 1 m maksab $\frac{3}{5}$ rubla, 2 m maksab siis $2 \cdot \frac{3}{5}$ rubla, 3 m maksab $3 \cdot \frac{3}{5}$ rubla ja järelikult $\frac{7}{10}$ m maksab $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{5}$ rubla. Nüüd leitakse, et $\frac{1}{10}$ m paela maksab $\frac{3}{5} : 10 = \frac{3}{5 \cdot 10} = \frac{3}{10 \cdot 5}$ rubla ning

$\frac{7}{10}$ m paela maksab $7 \cdot \frac{3}{10 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 5} = \frac{21}{50}$ rubla.
Seejärel antaksegi harilike murdude korrutamise reegel.

Nagu näeme, pole autorid siingi suutnud leida tegelikkusele vastavate andmetega ülesannet. Ei maksa ju näiteks keegi kummipaela eest $\frac{21}{50}$ rubla, vaid 42 kopikat.

See raamat sisaldab ka nuputamisülesandeid, nagu

$$\begin{array}{l} \mathrm{xxxxx} : \mathrm{xx} = 901 \text{ (jääk 1)} \\ \underline{\mathrm{xxx}} \\ \quad \mathrm{xx} \\ \quad \underline{\mathrm{xx}} \\ \quad\; 1 \end{array}$$

Lahutamiseks antakse aga ka ülesandeid, nagu

$$\begin{array}{r} 16723 \\ - \left\{ \begin{array}{l} 2641 \\ 3078 \end{array} \right. \\ \hline \end{array}$$

Siin arvud 2641 ja 3078 tuleb enne liita ja saadud summa arvust 16 723 lahutada.

Et algõpetus pikenes sõjajärgsel perioodil 7-klassiliseks, siis tutvume siin põgusalt ka A. Vihmani koostatud VI ja VII klassi raamatutega.

Et A. Vihman oli üks algebra standardõpikute autoreid kolmekümnendate aastate lõpul, siis on sealne käsitlusviis nüüd üle kantud nendesse raamatutesse.

VI klassi raamat [Õ, 218] on põhiliselt algebra algõpetus, ainult *ca* $\frac{1}{5}$ õpiku mahust on geomeetria. Algebra osas tutvustatakse mitmesuguseid statistilisi andmeid ning jaotatakse saadud graafikud diagrammideks ja kulgkõverateks.

Geomeetria osas leitakse silindri ruumala prisma ruumalana: "Kui korrapärasel neljatahulisel prismal külgservad niiviisi ära lõikame, et uuesti tekkivad tahud on jälle võrdsed, siis saame korrapärase kaheksatahulise prisma. Kui sellel prismal servad samal viisil ära lõikame, saame kuueteistkümnetahulise prisma. Servade mahalõikamist võime teostada kaalikast, naerist, kartulist või muust tehtud prismal.

Kuueteistkümnetahuline prisma ei erine palju silindrist, seepärast ei erine ka tema ruumala kuigi palju silindri ruumalast.

Kui servade lõikamist üha jätkata, siis jääb erinevus prisma ja silindri vahel veel vähem märgatavaks.

Seepärast arvutatakse silindri ruumala nii, nagu arvutatakse prisma ruumala."

VII klassi raamatust toome näitena algebraliste murdude jagamise käsitluse, mis ei ole õpikutes sageli kasutusel:

"Olgu antud kaks arvu a ja b. Ütlust: "Jagada arv a arvuga b" mõistame nõudena leida niisugune arv x, mis korrutamisel jagajaga b annaks jagatava a, sümbolites $b \cdot x = a$.

Võtame lähemale vaatlusele juhu, et jagaja b on murd, näiteks

$$\frac{m}{n} \cdot x = a.$$

Jagades selle mõlemad pooled arvuga m, saame

$$\frac{1}{n} \cdot x = \frac{a}{m},$$

ja korrutades arvuga n, saame

$$x = \frac{a \cdot n}{m} \text{ ehk } x = a \cdot \frac{n}{m}."$$

Veel märgime, et lineaarvõrrandisüsteemide lahendamisel näidatakse lahendumatute süsteemide olemasolu. Jõutakse selgusele, et sel juhul süsteemi võrrandid on kas vasturääkivad või ekvivalentsed.

Harvaesinev on ka A. Vihmani valitud tee kera ruumala valemini jõudmiseks. Eesmärgini jõutakse, asetades ühele kaalukausile poolkera ja teisele koonuse, mille põhi võrdub kera suurringiga ja kõrgus kera raadiusega. Osutub, et see poolkera on kaks korda raskem kui koonus. Samasugune vahekord peab siis kehtima ka ruumalade kohta.

* * *

Ott Rünk (kuni 1937. a. Otto Tief) (1914–1968) sündis Tallinnas. Lõpetas Tallinna I reaalkooli ja seejärel 1938. a. Tartu Ülikooli matemaatikaosakonna. Alustas tööd 1937. a. Tartu Ülikooli Matemaatika Instituudi abijõuna ning pärast ülikooli lõpetamist kuni 1944. a. oli matemaatikaõpetajaks mitmes Tallinna keskkoolis. 1944. a. sügisest kuni surmani oli Tallinna Polütehnilise Instituudi õppejõud, kus aastatel 1947–1952 oli graafika kateedri juhataja. 1956. a. valmis tal prof. A. Humala juhendamisel väitekiri "Perspektiivaksonomeetria fundamentaalülesanne". 1961. a. omistati talle dotsendi kutse. O. Rünk osales aktiivselt Haridusministeeriumi matemaatikakomisjoni töös ja on üks 1978. a. ilmunud matemaatika oskussõnastiku autoreid.

Hilda Roos (1906–1990) sündis Tallinnas. Õppis aastatel 1926–1931 Tartu Ülikoolis matemaatikat. Töötas õpetajana Narvas, Rakveres ja Tallinnas H. Kubu tütarlaste eragümnaasiumis ning Tallinna Õpetajate Seminaris. Töötas alates 1944. aastast Tallinna Polütehnilises Instituudis, esialgu assistendina, a-st 1962 dotsendina. Kaitses

1967. a. kandidaadiväitekirja teemal "Irratsionaalarv koolimatemaatikas" (juhendaja prof. A. Humal). Mõningaid siinnimetatud autoreid oleme juba varem tutvustanud:

Juhan Kallak (vt. lk. 98); Arvo Lehis (vt. lk. 107); Arnold Vihman (vt. lk. 140).

3.13. Eestikeelsetest matemaatika kooliraamatutest aastatel 1920–1940 Nõukogude Venemaal

Teatavasti jäi pärast Eesti Vabariigi väljakuulutamist rohkesti eestlasi elama Nõukogude Venemaale ja nende lastele organiseeriti samuti emakeelset õpetamist. Kasutatud matemaatikaõpikute kohta on suhteliselt vähe andmeid. On teada, et sealsetes koolides kasutati tõlkeõpikuid:

J. Popov "Aritmeetika. Viies õppeaasta". Leningrad, 1933;

A. Kisseljov "Algebra keskkooli õpperaamat. 6. ja 7. õppeaastad" Leningrad, 1933;

J.O. Gurevitš ja R.V. Gangus "Geomeetria alged. 5. õppeaasta". Leningrad, 1933;

N.S. Popov "Aritmeetika õpperaamat algkoolidele. 1. õppeaasta." Leningrad, 1933;

sama autori raamatud ka II, III ja IV klassile, mis ilmunud samuti Leningradis 1933;

S. Zentšenko ja V. Emanov "Elu ja teadmised arvudes. Rehkenduse ülesannete kogu I astme maakoolidele 2., 3. ja 4. õppeaasta jaoks".

Nende raamatute tõlkijateks olid J. Karu, J. Depman ja A. Vallner. Ilmusid ka mõned originaalõpikud:

A. Vallner "Aritmeetika". Peterburi, 1922;

J. Karu "Matemaatika I astme töökooli esimeses grupis". Leningrad, 1929;

J. Karu ja E. Põõgelmann "Matemaatika tööraamat I astme kooli esimesele grupile. I õppeaasta". Leningrad, 1931;

J. Depman "Matemaatika algõpetus täiskasvanud iseõppijatele. I osa". Leningrad, 1930.

* * *

Nimetatud autoreist olid juba 1917. a. toimunud esimesel eesti matemaatika kongressil (II, lk. 38) aktiivselt tegevad A. Vallner ja J. Depman.

Artur Vallner (1887–1939), poliitika ja haridustegelane. Lõpetas 1912. a. Peterburi Ülikooli ja töötas samas keskkooliõpetajana.

Töötas Nõukogude Venemaal Eesti Pedagoogilises Instituudis, Eesti Pedagoogilises Tehnikumis, juhatas eesti töölisfakulteeti, õhtukooli ning 1. ja 2. astme eesti kooli. Osales ajakirja "Haridustöö" toimetamisel. Oli hiljem Leningradi Ülikooli pedagoogikaprofessor, A. Herzeni nim. Pedagoogilise Instituudi ühiskonnateaduste fakulteedi õppejõud ja dekaan. 1937. a. vangistati.

Jaan Depman (1885–1970) sündis Viljandimaal Tarvastu vallas. Lõpetas Tartu Õpetajate Seminari 1904. a. Töötas õpetajana Toilas ja Iisakus. Sooritas 1907. a. Peterburi II gümnaasiumi juures küpsuseksamid, astus Peterburi Ülikooli matemaatikat õppima. Lõpetas ülikooli 1912. a. Oli õpetaja Jamburgi kommertskoolis, Smolenski, Petrogradi ja Vjatka õpetajate instituutides. Viimases omistati talle 1922. a. professorikutse. Alates 1924. a. elas Leningradis, kus töötas professorina Leningradi Ülikoolis ja Herzeni nim. Pedagoogilises Instituudis. Peamiseks uurimisalaks oli matemaatika ajalugu.

3.14. Mõõtude tabel

Aritmeetika kooliraamatute osa lõpetamiseks esitame vanade vene mõõtude tabeli. Neid mõõte oleme osaliselt tutvustanud ka eelmistes osades. Et neid kasutati aga peaaegu kõigis siin tutvustatud õpikuis, kuid domineerima hakkasid siiski kümnendsüsteemile tuginevad mõõdud, siis esitame mõõtude tabeli nii, et näitame ära nende suuruse ka kümnendsüsteemi mõõtudes. Eeskujuks on H. Treufeldti "Mõõtude käsiraamat".

Pikkusmõõdud

1 penikoorem = 7 versta = 7,46753 km
1 verst = 500 sülda = 1,06679 km
1 süld = 3 arssinat = 7 jalga = 2,1335808 m
1 arssin = 16 verssokit = 28 tolli = 71,11936 cm
1 verssok = 4,44496 cm
1 jalg = 12 tolli = 30,4797264 cm
1 toll = 10 liini = 2,5399772 cm
1 küünar = 21 tolli = 53,3395212 cm
1 lõunaeesti maamõõdu küünar = 2 jalga = 60,9594528 cm

Põllupinna mõõdud

1 tiin = 2400 ruutsülda = 2,94 riia vakamaad = 6 tallinna vakamaad = 1,09252014 ha

1 tallinna tündrimaa = 1200 ruutsülda = 3 tallinna vakamaad = 1,47 riia vakamaad = 0,54626 ha

1 tallinna vakamaa = 400 ruutsülda = 0,167 tiinu = 0,49 riia vakamaad = 0,18208669 ha

1 riia tündrimaa = 35 kapamaad = 1,4 riia vakamaad = 0,52026 ha

1 riia vakamaa = 25 kapamaad = 0,371605 ha

1 kapp = 1600 ruutjalga = 400 ruutküünart = 148,6422 m^2

1 ruutküünar = 4 ruutjalga = 3716,05488 cm^2

Vedelikumõõdud

1 vaat = 40 pange = 491,97092 l

1 pang = 10 toopi = 12,299273 l

1 toop = 4 kortlit = 75 kanttolli = 1,2299273 l

Viljamõõdud

1 setvert = 8 setverikku = 3 riia vakka = 6 tallinna vakka = 209,90759 l

1 setverik = 8 karnitsat = 26,2384491 l

1 karnits = 2,67 toopi = 200 kanttolli = 3,279 l

1 riia tünder = 2 riia vakka 12 külimittu = 108 toopi = 132,832 l

1 riia vakk = 6 külimittu = 54 toopi = 4000 kanttolli = 66,41607 l

1 tallinna sälitus = 24 tündrit = 72 vakka

1 tallinna vakk = 3 külimittu = 36 toopi = 2700 kanttolli = 44,2774 l

Raskusmõõdud

1 tonn = 61,045876 puuda = 1015,5 kg

1 kaal = 10 puuda = 163,811229 kg

1 puud = 2 punda (leisikut) = 40 naela = 16,3811229 kg

1 leisik (pund) = 20 naela = 8,1905 kg

1 nael = 32 loodi = 16 solotnikut = 409,528 g

1 lood = 3 solotnikut = 12,797 g

1 solotnik = 96 dooli = 4,265 g

1 apteegi nael = 84 solotnikut = 358,32 g

4. KESKKOOLI JA GÜMNAASIUMI MATEMAATIKAÕPIKUD JA ÜLESANNETEKOGUD

Selles peatükis tulevad vaatluse alla Eesti keskkoolides aastatel 1918–1950 kasutusel olnud algebra-, geomeetria-, trigonomeetria-, matemaatilise analüüsi ning analüütilise geomeetria õpikud ja ülesannetekogud. Nagu õppeplaanidega tutvumisel selgus, ei olnud seal eraldi märgitud aineid algebra või geomeetria, vaid tunnid olid ikka ette nähtud matemaatikale. Vastavalt õppekavadele jagunes aga õpetatav aine ikka kahe või kolme matemaatilise distsipliini vahel. Iga distsipliin moodustas teatud süsteemikindlusega ülesehitatud kursuse. Seepärast koostati ja trükiti eraldi algebra, geomeetria, trigonomeetria, matemaatilise analüüsi ja analüütilise geomeetria kooliraamatuid. Standardõpikute koostamise perioodil, kui eraldi hakkasid ilmuma õpikud ja ülesannetekogud, koostati aga näiteks kogu gümnaasiumikursust hõlmav matemaatikaõpik. Siin oli ühtede ja samade kaante vahele pandud mitme matemaatilise distsipliini koolikursus.

Aritmeetikaõpikuid koostas entusiastliku järjepidevusega mitu autorite kollektiivi ja üksikautorit. Keskkooli ja gümnaasiumi matemaatikaraamatute koostamine oli vähem korrapärane. See oli tingitud keskkooliõpilaste oluliselt väiksemast arvust, võrreldes algkooliõpilaste arvuga, mis tähendas ka keskkoolide matemaatikaõpikute oluliselt väiksemat nõudlust. Isegi kahe konkureeriva õpiku olemasolu oli majanduslikult riskantne mõlema õpiku autoritele. Selliseid riskiaastaid siiski oli. Nii kiirustas kahekümnendate aastate algul algebraõpikuid koostama hulk autoreid (H. Jürman, K. Maasik, J. Lang, Th. Koik, V. Pass, D. Rootsmann, P. Ederberg). N. Sapošnikovi ja N. Valtsevi ülesannetekogu tõlkisid K.R. Veski ja J. Grünthal. Samal perioodil ilmus ka mitu geomeetriaraamatut (Nathing-Perli, V. Nano, J. Lang, E. Kilkson, O. Sulla, P. Madisson ja Th. Ussisoo, E. Krahn). Üldse on tähelepanuväärne, kui kiiresti täideti kahekümnendate aastate algul eestikeelsete matemaatikaõpikute vaakum ja, nagu juba märgitud, paraja ülejäägiga. Kui eelnevale lisada N. Nano koostatud trigonomeetria- ning G. Rägo matemaatilise analüüsi analüütilise geomeetria raamatud, siis võib öelda, et 1920. aastate algul oli keskkool 2–3 aastaga õpikutega täielikult varustatud. Lisaks nimetatuile veel kirjutas J. Kiivet ulatusliku, kuid konspektiivse kõrgema matemaatika kursuse, mis ilmus 1920. aastal välja antud "Tehnika käsiraamatus".

Hiljem nii suuri õpikute kuhjumisi enam ei olnud.

Käesolevas peatükis esitatakse mõningaid huvitavamaid ainelõike aastatel 1918–1950 meie koolides kasutusel olnud algebra, geomeetria, trigonomeetria ning analüütilise geomeetria ja matemaatilise analüüsi õpikutest. Viimaste ainelõikude käsitlusi, samuti nagu tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika peatükke leiame aga sageli just algebra õpikutest. Käesolev peatükk jaotubki selle loetelu alusel järgmiselt.

4.1. Algebra kooliraamatud.

4.2. Geomeetria kooliraamatud.

4.3. Trigonomeetria käsitlusi.

4.4. Analüütilise geomeetria ja matemaatilise analüüsi käsitlusi.

4.5. Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika käsitlusi.

4.1. Algebra kooliraamatud

Algavas peatükis anname arvatavasti täieliku ülevaate ajavahemikus 1918–1950 Eesti koolides kasutusel olnud algebraõpikuist ja ülesannetekogudest. Mitme matemaatikaõpetaja püüdlused noore Eesti Vabariigi koolide varustamiseks algebra kooliraamatutega kahekümnendate aastate algul, Matemaatika Õpetamise Komisjoni taotlused matemaatika, sealhulgas algebra õpetamise uuendamiseks, töökooli printsiibi levik ning standardõpikute kehtestamise nõue – kõik need on mõjutanud aine käsitlust õpikuis. Järgnevas saame tuttavaks algebra teemade käsitluse pärandiga teadaolevate algebra kooliraamatute kaasabil. Alustame nende raamatute loeteluga.

1. 1920. a. mimeograafilises paljunduses avaldatud õpikud:

H. Jürman "Algebra II";

K. Maasik "Algebra III";

J. Lang "Algebra IV".

2. Algebra käsitlus David Rootsmani (hiljem T. Rootsmäe) õpikuis:

D. Rootsman "Algebraline analüüs ülesandeis koolidele ja iseõppijaile I". Tallinn, 1920;

D. Rootsman "Algebraline analüüs ülesandeis koolidele ja iseõppijaile II". Tallinn, 1920.

3. Algebra käsitlus Viktor Pässi ülesannetekogudes:

V. Päss "Algebra ülesannete kogu I". Tallinn, 1920;

V. Päss "Algebra ülesannete kogu II. Teooria ja ülesanded (X ja XI õppeaasta jaoks)". Tallinn, 1923.

4. Algebra käsitlus Paul Ederbergi õpikutes:

P. Ederberg "Täis- ning murdavaldised ja esimese astme võrrandid. Algebra ülesannete kogu ja kokkuvõtlik käsiraamat VII ja VIII õppeaasta jaoks". Tallinn, 1922;

P. Ederberg "Juured ja ruutvõrrandid. Algebra ülesannete kogu VIII ja IX õppeaasta jaoks". Tallinn, 1922;

P. Ederberg "Algebra ülesannetekogu ja kokkuvõtlik käsiraamat III". (Keskkooli IV ja V klassi jaoks). Tallinn, 1924.

5. Algebra käsitlemisest Oskar Pärli ülesannete kogudes:

O. Pärli "Algebra ülesannete kogu. Keskkooli I klassile". Tartu, 1931;

O. Pärli "Algebra ülesannete kogu II. Keskkooli II klassile". Tartu, 1933.

6. Algebra õpetus Gerhard Rägo matemaatika tööraamatutes:

G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Algebra I klassi kursus". Tartus, 1928;

G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Algebra II klassi kursus". Tartus, 1928;

G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Algebra III klassi kursus". Tartus, 1929;

G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskoolidele. Analüüsi alged. 4. klassi kursus". Tartus, 1930;

G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Analüüsi alged. Statistika alged. 5. klassi kursus". Tartu, 1932.

7. Algebra käsitlus Albert Borkvelli, August Kasvandi, Feliks Laarensi, Karl Maasiku, Oskar Paasi ja Arnold Vihmani õpikutes:

A. Borkvell jt. "Keskkooli algebra I. Õpperaamat II ja III klassile". Tartu, 1936;

A. Borkvell "Keskkooli algebra II. Õpperaamat IV ja V klassile". Tartu, 1936.

8. Algebra käsitlus Theodor Koigi raamatutes:

Th. Koik "Elementaarne algebra". Viljandi, 1920;

Th. Koik "Matemaatika õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele I. Algebra". Viljandis, 1935;

Th. Koik "Matemaatika õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele II. Algebra ja geomeetria. II kl. kursus". Viljandis, 1936.

9. Mõned tähelepanekud H. Jaansoni algebra ülesannetekogudest:

H. Jaanson "Algebra ülesanded ja lahendused I". Rakveres, 1938;

H. Jaanson "Algebra ülesanded ja lahendused II". Rakveres, 1938.

10. Algebra standardõpikuist aastatel 1938–1940:

J. Grüntal, G. Rägo "Algebra õpik keskkoolile". Tartu–Tallinn, 1938;

G. Rägo, A. Vihman "Algebra harjutustik keskkoolile". Tartu–Tallinn, 1938;

E. Etverk, G. Rägo "Matemaatika õpik humanitaargümnaasiumile". Tartu–Tallinn, 1939;

K. Ratassepp, G. Rägo "Matemaatika harjutustik humanitaargümnaasiumile. I klassi kursus". Tallinn–Tartu, 1938;

K. Ratassepp, G. Rägo "Matemaatika harjutustik humanitaargümnaasiumile. III klassi kursus". Tallinn–Tartu, 1939.

11. Algebra standardõpikuist aastatel 1941–1944:

A. Vihman "Algebra õpik gümnaasiumi I klassile";

A. Vihman "Algebra õpik gümnaasiumi II klassile";

K. Maasik "Algebra õpik gümnaasiumi III klassile";

K. Ratassepp "Algebra ja trigonomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile".

12. Algebra standardõpikuist aastatel 1945–1949:

A. Vihman "Algebra õpik VIII klassile";

A. Vihman "Algebra õpik IX klassile";

K. Ratassepp "Algebra õpik X klassile".

4.1.1. Algebra käsitlusest 1920. a. mimeograafilises* paljunduses välja antud konspektides

Eestikeelsele õpetamisele üleminek keskkoolis nõudis emakeelse õppekirjanduse kiiret väljaandmist. Võeti kasutusele ka mimeograafiline paljundus. Sel viisil avaldati ka algebrakonspektid.

Algebrakonspekti 1. osa kohta andmed puuduvad.

Konspekti 2. osa kirjutas H. Jürman. Selles käsitleti astmeid ja juuri.

---

* Kr. *mimeomai* 'jäljendan' + *grapho* 'kirjutan'; vahapaberile kirjutatud teksti eriline paljundamise viis vastava seadeldise – mimeograafi abil.

Erinev teiste eestikeelsete algebraõpikutega võrreldes on astendamise definitsiooni sõnastus, mille siinkohal konspekti 2. osa tutvustamiseks esitame:

"Tehe, mille abil üks antud arv (a) korratakse tegurina nii mitu korda, mitu üht on teises antud arvus (n), nimetatakse astme arvamiseks."

Konspekti 3. osa koostas K. Maasik. Selles käsitletakse ruut- ja kõrgema astme võrrandite lahendamist.

Erinevalt hilisematest käsitlustest ei tutvustata siin ruutvõrrandi lahendite omadust mitte taandatud, vaid üldkujulise võrrandi juures. Vastava teoreemi sõnastus on järgmine:

"Kvadraatekvatsiooni juurte summa võrdub murrule, mille lugejaks on esimese astmelise otsitava koefitsient, võetud vastupidise märgiga, juurte kasvatis aga võrdub murrule, mille lugejaks on vabaliige, ja nimetajaks on teiseastmelise otsitava koefitsient."

Ruutvõrrandite lahendamise juures omistatakse selles konspektis eraldi tähelepanu juhule, kus ruutliikme kordaja a läheneb nullile. Selleks leitakse ruutvõrrandite $\frac{1}{1000}x^2 + 2x - 3 = 0$ ja $\frac{1}{1000000}x^2 + 2x - 3 = 0$ lahendeid. Esimese võrrandi lahendeiks saadakse $x_1 = 1{,}49...$ ja $x_2 = -2001{,}49...$ ning teise võrrandi lahendeiks $x_1 = 1{,}499...$ ja $x_2 = -2000001{,}49...$ Seega, üks lahend läheneb võrrandi $2x - 3 = 0$ lahendile, kuid teine lahend kasvab tõkestamatult. Viimane tõsiasi on loetav ka lahendite omadusest: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Ka lineaarvõrrandi $bx + c = 0$ puhul analüüsitakse juhtu, kus kordaja b läheneb nullile ning sel juhul võivad antud võrrandi lahenditeks olla kas $-\frac{c}{b}$, ∞ või $\frac{0}{0}$.

Juurvõrrandite lahendamise juurde asumisel tõestatakse kaks järgmist teoreemi:

"Kui ekvatsiooni mõlemate osade üks ja sama aste võtta, siis saame uue ekvatsiooni, millel peale antud ekvatsiooni juurte veel kõrvaljuured võivad olla."

"Kui mõlemist ekvatsiooni osadest võtta ühe ja sama astmeline juur ainult ühe märgiga, siis võib ekvatsioon mõned oma juurtest kaotada."

Selles konspektis käsitletakse veel kõrgema astme võrrandite lahendamist ning avaldiste $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ lihtsustamist.

Konspekti 4. osa koostas J. Lang, sisuks progressioonide, logaritmide, ühendite ja Newtoni binoomi käsitlus.

Selle konspekti iseärasustest väärib märkimist, et progressioonide üldliikme valemid esitatakse teoreemidena ja need tõestatakse täieliku induktsiooni meetodiga.

* * *

Kõik siinnimetatud konspektide autorid Hans Jürman, Karl Maasik ja Juhan Lang olid tol ajal õpetajad, hiljem direktorid Tartu koolides.

4.1.2. Algebra käsitlus David Rootsmani (hiljem Taavet Rootsmäe) õpikuis

D. Rootsmann andis välja kaks algebraraamatut, neist "Algebraline analüüs ülesandeis koolidele ja iseõppijaile I" algab algebralise sümboolika kasutuselevõtuga. Siin saab ka teada, mis on algebraline avaldis ja mis on algebraline suurus. Need defineeritakse järgmiselt:

"Mõne ülesande lahendamise viisi tähendamine kirjatähtede ja tehete märkide abil kutsutakse algebraliseks kirjutuseks ehk avalduseks, sagedamini – vormuliks."

"Mõni täht, mis esineb üksinda ehk vormulis teiste tähtedega ühenduses, kutsutakse algebraliseks suuruseks, ..." ehk "Algebraline suurus on mõne tähe ehk ka vormuli arvsuuruste kogu."

Arvude geomeetriliseks kujutamiseks kasutatakse sirgjoont, mida nimetatakse arvjooneks. Selle iseloomustamiseks tuuakse joone kolm järgmist omadust:

"1° Iga täis- ja murdarvule vastab arvjoonel üksainus punkt. Nähtavasti vastab ka mõnda punkti üks ainus arv.

2° Arvjoon on niisama otsatu, nagu loomulike arvude rida.

3° Iga arvjoone punkt kujutab seda suuremat arvu, mida kaugemal ta on algusest."

Järgnevalt esitatakse nelja aritmeetilise tehte omadused ning tutvustatakse ka astendamist ja juurimist.

Ka võrduse ja võrratuse juurde kuuluvad vastavad omadused. Võrratuse puhul on need järgmised:

"Kui $a > b$, siis on

1) $a + n > b + n$;

2) $a - n > b - n$, $a > n$, $b > n$;

3) $n - a < n - b$, $a < n$, $b < n$;

4) $an > bn$;

5) $\frac{a}{n} > \frac{b}{n}$;

6) $\frac{n}{a} < \frac{n}{b}$."

Siin tuleb lisada, et negatiivseid arve veel ei tunta.

Üks paragrahv vaadeldavas D. Rootsmanni raamatus kannab pealkirja “Algebraline diktaat ja õigekirjutus”. Siin jagatakse kasulikke õpetusi avaldiste õigeks lugemiseks ja teksti järgi avaldiste üleskirjutamiseks.

Tehete juures üks- ja hulkliikmetega antakse järgmine huvitava sisuga vana aja ülesanne:

“Mõistata, missugusel seltskonna liikmeist, kellede arv kümnest vähem, on sõrmus ja missuguses sõrmes. Selleks on tarvis mõttes nummerdada isikud ja sõrmed, näit. pahema käe pöidlast algades ja parema käe omaga lõpetades. Selle järel palutakse isiku järjenumber kahega kasvatada, teosele juurde lisada neli, summa viiega kasvatada ja veel juurde lisada sõrme number, milles sõrmus. Kui saadud summas, mida palutakse teatada, lahutada 20, siis tuleb arv, mille kümnete number tähendab isikut ja ühtede number – sõrme.

Seletada mõistatus algebralise vormuli abil ja näidata, kuidas teisendada vormulit juhul, kui 1) isikute arv on kümnest enam ja kui 2) sõrmus on kümnendas sõrmes.”

Relatiivsete ehk suhteliste arvude käsitlemisel, kui jõutakse korrutamiseni, antakse järgmine märkide seadus: “Mõnda arvu negatiivse arvuga kasvatada, tähendab teda selle arvu absoluutsuurusega kasvatada, ja saadud teose märk teha vastaseks.”

Algebralise murru käsitlemisel ja tehete tundmaõppimisel tutvustatakse ka nn. mitmekordseid murde ning antakse ülesandeid järgmiste ahelmurdude väärtuse leidmiseks:

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2}}; \qquad \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}; \qquad \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}.$$

Kui jõutakse võrdelise ja pöördvõrdelise sõltuvuseni, siis tutvustatakse lugejat arvude väljadega; päriproportsionaalsuse puhul on üks selline väli esitatud kujul

$$\begin{array}{cccc} \underline{5}; & 8; & 13; & \underline{18} \\ 10; & \underline{16}; & 26; & 36 \\ 3\frac{1}{3}; & 5\frac{1}{3}; & 8\frac{2}{3}; & 12, \end{array}$$

mille juurde on lisatud: “Niisugust “arvude välja” võiks igasse nelja külge lõpmata jätkata. Arvude välja teadmiseks on tarvis võtta: 1) üks ainus rida; ehk 2) igas vertikaalses veerus (nõnda, et ükski rida vahele ei jää, nagu alla kriipsutatud) vähemalt üks ainus arv ja teada proportsionaalsuse koeffitsiendid.”

Siin antakse ka seosed $y = kx$ ja $y = \frac{k}{x}$.

Raamatus on võrde $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ juurde esitatud rida "tuletatud proportsioone":

1) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$; 2) $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$;

3) $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$; 4) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$;

5) $\frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; 6) $\frac{10a+b}{10b+a} = \frac{10c+d}{10d+c}$.

Tõestatakse veel teoreem:

"Kui $\frac{a}{A} > \frac{b}{B} > \frac{c}{C}$, siis on 1) $\frac{a}{A} > \frac{a+b+c}{A+B+C} > \frac{c}{C}$ ja

2) $\frac{a}{A} > \frac{ax+by+cz}{Ax+By+Cz} > \frac{c}{C}$."

Raamat lõpeb esimese astme võrrandite lahendamisega. Sellest osast esitame paar võrrandi koostamise ülesannet:

"Ladus oli kuuse-, haava- ja kasepuid, kokku 44 sülda. Haavapuid oli 5 korda vähem kui kuusepuid ja kasepuid oli kolmandik sellest, kui palju kuusepuid oli enam kui haavapuid. Kui palju oli iga liiki puid?"

"Kaks õhulaeva tõuseb Stokholmis üles. Esimene neist jõudis Helsingi, mis Stokholmist 396 km kaugel, teine, mille kiirus oli $\frac{3}{5}$ esimese omast, jõudis Tallinna, mis Stokholmist 360 km kaugel, ja tarvitas selleks 1,7 tundi enam kui esimene. Missugused olid õhulaevade kiirused tunnis?"

D. Rootsmanni teise raamatu "Algebraline analüüs ülesandeis ja iseõppijaile II" algul on toodud autori arvamus ülesannete vastuste etteandmise kohta: "Näib ülearune anda raamatus võrranduse lahendused kostustena niisuguseil korril, kus iseseisev kontroll on võimalik. Võrranduse lahenduse järelkatse ei huvitaks enam pärast seda, kui õpilane on kostuse raamatust leidnud. Järelkatsumiseks peitub ka veel tähtis eetiline ja kasvatav moment, sisendav põhjalikkust ja eneseusaldust. Elus ei ole meie ülesandeil kostused kunagi teada – ise peame neid leidma ja kontrollima."

Teise raamatu esimeseks peatükiks on trükitud uuesti esimese raamatu viimane peatükk, s.o. esimese astme võrrandite lahendamine.

Sealt jätkatakse võrrandisüsteemide lahendamisega. Tutvustatakse lineaarvõrrandisüsteemi lahendamise võtteid (liitmisvõte, asendamisvõte). Ülesannetes minnakse ka enam kui kahe tundmatuga võrrandisüsteemide juurde. Toome näiteks järgmise viie tundmatuga viiest võrrandist koosneva võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 625x + 125y + 25z + 5u + v = 975 \\ 256x + 65y + 16z + 4u + v = 453 \\ 81x + 27y + 9z + 3u + v = 179 \\ 16x + 8y + 4z + 2u + v = 58 \\ x + y + z + u + v = 15 \end{cases}$$

Esitame ka paar selliste tekstülesannete näidet, mis rohkem nuputamist vajavad:

"Kolm masinat A, B ja C töötavad. Olles tegevad ühel ajal, suudavad lõpule viia selle töö A ja B 12, B ja C 30 ning A ja C 15 päeva jooksul. Mitme päeva jooksul suudaks töö lõpetada iga masin eraldi ja kõik üheskoos?"

""Kui vana Teie olete?" Ma olen nüüd niisama vana, kui vana olite Teie sel ajal, kui mina olin nii vana, kui vana olete Teie praegu; kui Teie aga saate nii vanaks, nagu mina praegu, siis puudub minul 20 aastat, et olla 2 korda vanem, kui Teie praegu. Kui vana on kumbki?

Mõneti omanäoline on selles õpikus tabelite ja graafikute käsitlemise hulgas antud aritmeetilise keskmise leidmise skeem. Esitame selle ka siinkohal:

"Laua pikkuse neljakordsel mõõtmisel saadi järgmised väärtused:

$$a_1 = 1387{,}3 = 1386 + 1{,}3 = a_0 + d_1$$
$$a_2 = 1386{,}9 = 1386 + 0{,}9 = a_0 + d_2$$
$$a_3 = 1387{,}2 = 1386 + 1{,}2 = a_0 + d_3$$
$$a_4 = 1387{,}0 = 1386 + 1{,}0 = a_0 + d_4$$

Keskmine väärtus $a_m = \frac{\sum_1^4 a_i}{4} = a_0 + \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}{4} =$

$$= a_0 + \frac{\sum_1^4 d_i}{4} = 1386 + \frac{4{,}4}{4} = 1386 + 1{,}1 = 1387{,}2."$$

Mõõtmistulemuste hälbed leitud keskmise suhtes antakse sümboli "Δ" abil. Nii on

$$\Delta_1 = a_1 - a_m = +0{,}2 \qquad \Delta_2 = a_2 - a_m = -0{,}2$$
$$\Delta_3 = a_3 - a_m = +0{,}1 \qquad \Delta_4 = a_4 - a_m = -0{,}1"$$

Lineaarfunktsiooni tutvustamist valmistatakse ette mitme harjutusega. Tehakse silmamõõtmise harjutusi, võrreldakse suurusi joonlõikude abil, kujutatakse graafiliselt empiirilisi funktsioone. Tuuakse temperatuuri ja sõiduplaani graafikud, tutvustatakse "treppkõverat" ja "registeerimiskõverat".

Lineaarfunktsiooni käsitlus algab punkti koordinaatide ning sirgjoone võrrandi tutvustamisega. Alustatakse oma kujult lihtsamatega. Seega esitatakse nad järjekorras:

$$y = a,\ x = b,\ y = 0,\ x = 0,\ y = ax,\ y = ax + b,\ Ax + By = C.$$

Ülesande kaudu tehakse kindlaks selle funktsiooni omadusi. Näiteks.

"1) Tõendada, et kõik punktid, millede koordinaadid rahuldavad võrrandust $y = kx + m$, asetsevad sirgjoonel.

2) Missugune on parameetrite (jäädavate) k ja m geomeetriline tähendus?"

Lineaarfunktsiooni uurimine viib ka selle funktsiooni "iseäraliste väärtuste" juurde.

Vaatluse alla tulevad määramatust sisaldavad avaldised. Raamatust loeme:

"Kuid, et võrdus lugeda maksvaks tähtede iga väärtuse kohta, selleks on tarvis tema pahem külg lugeda arvu suuruseks, mille annab võrduse parem külg, kui tähtede asemele seada arv, mis muudab määramatuks võrduse pahema külje. Niisugune arv kutsutakse murru peaväärtuseks sel korral, kui murru lugeja ja nimetaja muutuvad nullideks. Peaväärtuse tuletamine nimetatakse ebamäärase kuju avaldamiseks."

Lõpuks toimub veel esimese astme võrrandite uurimine järgmise ülesande kaudu:

"Missugused peaksid olema a ja b väärtused võrranduses $ax = b$, et oleks 1) $x > 0$, 2) $x < 0$, 3) x mõni täisarv, 4) $x=0$, 5) $x = \infty$, 6) $x = \frac{0}{0}$?"

* * *

Taavet Rootsmäe (1936. aastani David Rootsmann) (1885–1959). Õppis H. Treffneri Gümnaasiumis ja Tartu Ülikoolis, mille lõpetas 1913. aastal. Töötas õpetajana Tallinnas ning alates 1919. aastast oli Tartu Ülikooli astronoomiaprofessor. Kuni 1948. aastani oli ta Tartu Tähetorni direktor ning aastail 1944–1959 astronoomia kateedri juhataja (vt. ka IV, lk. lk. 71).

Täiendavalt loe näiteks:

O. Prinits. Professor Taavet Rootsmäe koolimatemaatikuna . Koolimatemaatika XII, Tartu, 1985, lk. 6–8.

4.1.3. Algebra käsitlus Viktor Pässi ülesannetekogudes

V. Päss nimetab oma raamatuid algebra-ülesannete kogudeks, kuid ülesannete kõrval leidub seal ka teoreetilisi selgitusi ning arutlusi.

Esimene raamat "Algebra ülesannete kogu I" algab koordinaatide mõistest. Seejärel esitatakse funktsiooni mõiste, mille definitsiooni siinkohal ka esitame: "Sagedasti on kaks muutuvat suurust teineteisega mõnesuguse reegli abil nõnda seotud, et igale ühe suuruse vabalt valitud tähendusele vastab teise suuruse kindel tähendus, ehk teiste sõnadega, üks muutuv suurus oleneb teisest. Niisugusel juhtumil nimetatakse üht olenevalt muutuvaks suuruseks ja teist vabalt muudetavaks."

Järgneb suuruste graafiline kujutamine. Diagrammide joonestamiseks antakse mitmesuguseid tabeleid küll mägede kõrguste, jõgede pikkuste, metallide tiheduste jms. kohta.

Võrrandite graafiline lahendamine hõlmab nii lineaarvõrrandi, lineaarvõrrandite süsteemi kui ka ruutvõrrandi graafilise lahendamise. Viimasel juhul taandatakse ülesanne süsteemi

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -(ax + b) \end{cases}$$

graafilisele lahendamisele.

Logaritmide tutvustamine torkab silma sinnajuurde kuuluvate omadustega. Neid on kokku isegi 13. Piirdume siinkohal neist ainult mõne tutvustamisega:

1) ainult positiivsetel arvudel on logaritmid;
2) arvu kasvamisega kasvab ka tema logaritm;
3) kui arv on väiksem kui 1, siis on tema logaritm negatiivne;
4) kui arv on suurem kui 1, siis on tema logaritm positiivne;
5) ühe logaritm on null;
6) aluse logaritm on üks.

Logaritmide omaduste pikk loetelu võib mõnele lugejale tuttav olla möödunud sajandil välja antud, kuid veel XX sajandi viiekümnendatel aastatel Eesti NSV koolides kasutusel olnud Kisseljovi algebraõpikust.

Sellele loetelule lisanduvad aga veel tehetega ning logaritmi täisosa ja murdosa muutumisega seotud omadused.

Edasi esitatakse ülesandeid aritmeetilise ja geomeetrilise jada kohta. Jäädvustame neist paar näidet ka siin.

"Jalakäija kõndis esimesel päeval 20 kilomeetrit, teisel 23 kilomeetrit, kolmandal 26 kilomeetrit jne. Seitsme päeva pärast saadeti temale ratsamees järele, kes iga päev $82\frac{1}{2}$ kilomeetrit sõitis. Mitme päeva pärast jõudis ratsamees jalakäijale järele?"

"On 6 arvu, millest esimesed neli sünnitavad geomeetrilise rea ja viimased neli aritmeetilise rea. Aritmeetilise rea vahe on 10 korda suurem kui geomeetrilise rea tegur ja 5-es arv on 6 korda suurem kui teine. Missugused on need arvud?"

Veel on selles õpikus käsitletud liitprotsente ja tähtajalisi makse. Näiteks on seal esitatud kaks valemit t aasta jooksul koguneva kapitali k arvutamiseks.

Esiteks, kui iga aasta algul pannakse hoiule a marka q protsendiga, siis

$$k = aq\frac{q^t - 1}{q - 1},$$

ja teiseks, kui iga aasta lõpul pannakse hoiule a marka q protsendiga, siis

$$k = a\frac{q^t - 1}{q - 1}.$$

Veel leiame sellest raamatust ühendite arvu valemid, Newtoni binoomi ja ülesandeid tõenäosuse arvutamiseks. Kombinatsioonide arvu valemi juures on esile toodud ka omadusi, nagu

$$K_n^m + K_n^{m+1} = K_{n+1}^{m+1}.$$

Newtoni binoom on esitatud üldkujul järgmiselt:

$$(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + K_{n+1}^1 a^n b + K_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \dots$$
$$\dots + K_{n+1}^n ab^n + b^{n+1}.$$

On esitatud ka binoomkordajate tabel, nn. Pascali kolmnurk.

Tõenäosuse arvutamise kohta toome siinkohal jällegi paar ülesannet. Nende kaudu jõuame selgusele, kui kaugele tõenäosusteooria elementide tundmises pidid õpilased jõudma.

"Kastis on segatud 21 loosi, milledest 7 loosi on võitudega ja ülejäänud 14 on tühjad. Nendest loosidest tõmmatakse juhuslikult 2 tükki välja. Kui suur on tõenäolikkus selles, et mõlemad tõmmatud loosid võitudega on?"

"Kastis on 12 loosi, milledest 5 on võitudega aga 7 on tühjad. Nendest loosidest tõmmatakse juhuslikult 5 tükki välja. Kui suur on tõenäolikkus selles, et tõmmatud 5-st loosist 2 loosi võitudega oleks?"

Huvipakkuv on esimese raamatu lõppsõna, millest siinkohal ka ühe väljavõtte esitame:

"Selle ülesannete kogu kokkuseadmise juures on silmas peetud seda sihti, missuguses sammub praegusel ajal meie seltskond ja kool, ehk missuguses nad vähemalt sammuma peaksid, nimelt, vähema teoretiseerimisega rohkem tegelikult läbi viia. Selles mõttes on sesse ülesannete kogusse võetud niisugused osad, mis puudusid endistes vene keskkooli õppekavades, kuid millel on küllalt suur praktiline tähtsus, nagu funktsiooni mõiste, geomeetriline kujutamine, geomeetriline võrrandite lahendamine ja tõenäitlikkuse õpetus, aga välja on jäetud ahelmurrud – asi, millel on peaaegu ainult teoreetiline tähendus."

V. Pässi teise raamatu "Algebra ülesannete kogu II" eessõnas on märgitud, et see raamat sisaldab "kõrgema analüüsi põhimõisteid niisuguses ulatuses, kui seda nõuab keskkooli kava."

Et matemaatilise analüüsi küsimuste käsitlusi vaatleme hiljem eraldi, siis nende juures me praegu siin ei peatu.

Selles raamatus leidub aga eraldi kompleksarvude peatükk, kus tutvustatakse nii kompleksarvu algebralist kui ka trigonomeetrilist kuju ning õpetatakse nendega ka tehteid sooritama.

Veel käsitletakse siin võrrandite lahendamist. Algebraline võrrand esitatakse üldkujul

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

ning jällegi tuuakse ära rida tema omadusi. Tutvume nendega.

"1. Igal võrrandil on vähemalt üks reaalne ehk kompleksjuur.

2. Iga võrrandi polünoom $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ jaguneb ilma ülejäägita avaldusega $x - x_1$, kus x_1 tähendab selle võrrandi üht juurt.

3. Iga n-astme võrrandi polünoom laguneb n esimese astme teguriks.

4. Iga n-astme võrrandil on n ja ainult n juurt.

5. Korraldud n-astme võrrandi juures on:

1) koeffitsient a_1 kõikide juurte summa võetud vastupidise märgiga;

2) koeffitsient a_2 on kõikidest juurtest kahekaupa kombineeritud korrutiste summa, a_3 on kõikidest juurtest kolmekaupa kombineeritud korrutiste summa võetud vastupidise märgiga jne. ja lõpuks vabaliige on kõikide juurte kasvatis kas oma ehk vastupidise märgiga, selle järele, kas n on paaris- või paaritu arv."

Nendest lausetest tehakse omakorda veel kuus järeldust. Näiteks tõstetakse esile, kui puudub liige x^{n-1}-ga, siis on võrrandi juurte summa null jt.

Õpitakse tundma ka võrrandite ligikaudse lahendamise meetodeid: *regula falsi*'t ja Newtoni meetodit ning lõpuks lahendatakse veel kuupvõrrandeid Cardano valemite abil. Et teistes algebra kooliraamatuis võrrandite käsitlemisel nii kaugele ei jõuta, siis esitame need valemid ka siinkohal.

Kui $y^3 + Ay + B = 0$,

siis

$$y = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} + \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{B}{2} - \sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3}}$$

V. Pässi raamatu põhjalikkusele vastavalt analüüsitakse ka, kuidas sõltuvad lahendid diskriminandi $\left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{3}\right)^3$ märgist.

Lõpuks esitatakse mõned stereomeetrilise sisuga kuupvõrrandi koostamise ülesanded. Siinkohal neistki kaks näidet:

"Püstsilindri ja püstkoonuse mahud ja üldpinnad on vastavalt võrdsed. Leida silindri kõrgus ja aluse raadius, kui koonuse külgjoon $k = 13$ *sm* ja aluse raadius on 5 sm."

"Keras, mille raadius on 5 sm, on kujutatud silinder, mille maht on kaks korda väiksem kera mahust. Kui suur on silindri kõrgus?"

* * *

Viktor Päss (1892–1956) sündis Valgamaal Jõgeveste vallas. Lõpetas 1912. a. Tartu Aleksandri gümnaasiumi ja 1918. a. Tartu Ülikooli matemaatika-loodusteaduskonna. Oli õpetajaks Võru Tütarlaste gümnaasiumis (1917), Tartu Tütarlaste gümnaasiumis (1918). Seejärel siirdus Tallinna. Oli õpetajaks Tallinna Õpetajate Seminaris ja Tallinna Tehnikumis. Viimases sai ta esialgu inspektoriks ja seejärel juhatajaks. 1934. aastal nimetati ta Prantsuse Lütseumi direktoriks. Aastatel 1941–1944 oli ta Jakob Westholmi nim. Gümnaasiumi direktor. Alates 1944. aastast oli füüsikaõpetajaks Tallinna 7. keskkoolis ja seejärel Tallinna Polütehnilises Instituudis füüsikalaborant. Küüditati 1949. a. Naasis Eestisse 1956. a. ja peatselt suri.

Lähemalt võib V. Pässi kohta lugeda järgmistest artiklitest:

J. Tuisk. Viktor Päss. Haridus, 1992, 5, 46–48.

O. Prinits. Eesti koolimatemaatika rajajaid. Haridus, 1993, 1, 53–57.

4.1.4. Algebra käsitlus Paul Ederbergi õpikutes

P. Ederberg kirjutas kolm algebraõpikut.

Esimene neist kannab pealkirja "Täis- ja murdavaldised ja esimese astme võrrandid" ning oli ette nähtud VII ja VIII õppeaasta jaoks.

See õpik algab algebraliste avaldiste tutvustamisega, nende arvulise väärtuse leidmisega. Suuremat tähelepanu omistatakse monoomidele ja polünoomidele ning nende liitmisele ja lahutamisele.

Negatiivsete arvude liitmiseks ja lahutamiseks esitatavatest harjutusülesannetest enamik on seotud geograafiliste koordinaatidega. Seal selgitatakse näiteks, et "Ühel meridiaanil asuvatel punktidel on samal ajal keskpäev; kui punkt on teise punktiga võrreldes 15° lääne poole, on temal lõuna 1 tund hiljem, kui 15° ida poole – 1 tund varem." On toodud ka tabel mitme linna geograafiliste pikkuste kohta ajaühikutes, nagu Tartu $-1^h46^m,9$; Pärnu $-1^h38^m,0$; New York $+4^h51^m,4$. Toome esitatud ülesannetest ka ühe näite:

"Tartu ja Johannesburg Lõuna-Aafrikas asuvad peaaegu ühel meridiaanil. Tartu geograafiline laius on $+58°23'$ (põhjapoolne), Johannesburgil $-26°11'$ (lõunapoolne). Kui kaugel on need linnad teineteisest, kui $1° = 111$ km?"

Huvitav on, et siin soovitatakse polünoome liita ja lahutada nii, et sarnased liikmed kirjutatakse üksteise alla.

Positiivsete ja negatiivsete arvude korrutamise küsimus lahendatakse formaalselt: "Uurimine näitab, et negatiivsete arvude kasvatamisel tuleb märkide suhtes käia eelmise juhise järgi, nimelt ühesuguste märkidega liikmed annavad kasvatamisel kasvatuse ees märgi "+" (pluss), vastasmärkidega liikmed "–" (miinus)".

Kahe arvu summa ja kahe arvu vahe ruudu valemid tuletatakse aga P. Ederbergi raamatus geomeetriliselt. Teiste abivalemite suhtes soovitatakse seda õpilastel analoogiliselt ise teha. Nende valemite baasil antakse ka mõned soovitused peastarvutamiseks. Näiteks

$$83^2 = (80+3)^2 = 6400 + 9 + 480 = 6889.$$

Soovitatakse tugineda võrdusele

$$(a+b)(a+c) = a(a+10) + bc, \text{ kui } b+c = 10.$$

Kahekümnendatel aastatel õpetati koolis ka polünoomi jagamist polünoomiga. Vaadeldavas õpikus soovitati seda teha järgmise skeemi järgi:

$$
\begin{array}{lr|l}
 & 6x^4 + 11x^3 - 51x^2 + 68x - 32 & 3x^2 - 5x + 4 \\
\cline{3-3}
 & \underline{\mp 6x^4 \pm 10x^3 \mp 8x^2} \qquad\qquad\qquad & 2x^2 + 7x - 8 \\
\text{1-ne jääk} & 21x^3 - 59x^2 + 68x - 32 & \\
 & \underline{\mp 21x^3 \pm 35x^2 \mp 28x} \qquad & \\
\text{2-ne jääk} & -24x^2 + 40x - 32 & \\
 & \underline{\mp 24x^2 \mp 40x \pm 32} &
\end{array}
$$

Tõstatakse ka küsimus monoomi jagamiseks polünoomiga ning soovitatakse esitada see ülesanne murrukujus. Nii, et

$$a : (b + c - d) = \frac{a}{b + c - d}.$$

Edasi käsitletakse polünoomide teguriteks lahutamist ning jõutakse näiteks ka binoomi $a^5 - a$ teguriteks lahutamiseni.

Tehted algebraliste murdudega lõpevad lisaga, kus laiendatakse astme mõistet. Tutvustatakse astendajaga 0 ja negatiivse astendajaga astmeid. Antakse nende defineerimiseks ka selgitus. Näiteks põhjendatakse võrduse $a^0 = 1$ kehtivust järgmiselt.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Oletame:} & a^5 : a^5 = a^{5-5} = a^0 \\
\text{On teada:} & \underline{a^5 : a^5 = 1} \\
\text{Järelikult:} & \quad a^0 = 1
\end{array}
$$

Lineaarvõrrandite ja lineaarvõrrandisüsteemide lahendamisvõtete tundmaõppimise järel antakse hulk ülesandeid ka võrrandi või võrrandisüsteemi koostamiseks. Toome mõne näite sellistest ülesannetest, mis praegustes õpikuis puuduvad.

"Maamees sõitis kell 7 hommikul Riisiperest Haapsalu poole tehes iga tund 8 km. Kell $\frac{1}{4}$11 sõitis temast mööda auto ka Haapsalu poole, kiirusega 30 km tunnis, peatas Haapsalus 2 tundi ja sõitis siis tagasi, kusjuures tema 3 km Haapsalust eemal maameest kohtas. Mitu kilomeetrit on Riisiperest Haapsalusse?"

"Kolm kapitali, mille kogusumma on 200 tuhat marka, olid hoiule antud vastavalt $3\frac{1}{2}$, 4 ja $4\frac{1}{2}$ protsendiga ja tõid kasu aastas kogusummas 8100 marka. Kui kapitalid kannaksid vastavalt $4\frac{1}{2}$, 4 ja $3\frac{1}{2}$ protsenti oleksid aastaintressid 300 marka vähem. Kui suured olid kapitalid?"

Lahendamiseks antud võrrandisüsteemide hulgas leiame samuti selliseid, mis XX sajandi lõpukümnendi õpilastele jäävad tundmatuks. Esitame paar näidet:

$$\begin{cases} \frac{x-y-1}{x+y-1} = \frac{a+1}{a-1} \\ \frac{x-y-1}{x+y+1} = \frac{b+1}{b-1} \end{cases} \quad ja \quad \begin{cases} x-y+z+t=26 \\ x+y-z+t=22 \\ x+y+z-t=20 \\ -x+y+z+t=28 \end{cases}$$

P. Ederbergi esimeses algebraraamatus tutvustatakse veel punkti koordinaate ning graafikute esitamist. Diagrammide joonestamiseks on antud tabelid küll keskmiste temperatuuride, keskmise pilvituse, keskmise sademete hulga, lumesajupäevade jne. kohta.

Lineaarfunktsiooni defineerimise aluseks on tema geomeetriline esitusviis:

"Funktsiooni tüüp $y = mx + n$ esitab sirgjoont, kus juures x-i koefitsient m määrab sirge kallakuse ehk kalde x-telje vastu ja liige n näitab kus punktis sirge y-telge lõikab."

Edasi rõhutatakse, et ka iga ilmutamata esimese astme funktsioon $ax + by = c$ esitab sirgjoont. Geomeetrilise aspekti rõhutamise tõttu on loomulik, et lineaarvõrrandeid õpitakse lahendama graafiliselt. Näitena esitatakse graafiline raudtee sõiduplaan.

P. Ederbergi teise algebraraamatu "Juured ja ruutvõrrandid" eessõnas toonitatakse, et need raamatud "on mõeldud kõige pealt abiks õpilasele klassis läbimindud kursuse süvendamisele".

Alustatakse astmete ja juurtega. Vastavatele tehete põhiseadustele järgnevad ülesanded, kust leiame ka mittetraditsioonilisi, nagu

$$\sqrt{50^2 - 48^2} \quad \text{või} \quad \sqrt{9a^2 - 18ab + 9b^2}.$$

Selles raamatus esitatakse funktsiooni definitsioon järgmiselt: "Kui kaks suurust on niisuguses olenevuses, et ühe suuruse muutumisega ka teine suurus muutub, siis öeldakse, et teine suurus on esimese suuruse funktsioon."

Niisugune küllalt "lahe" definitsioon võimaldab arvata funktsioonid $y = \sqrt{x}$ ja $y^2 = x$ üheks ja samaks funktsiooniks ning funktsiooni $y = x^2$ neist erinevaks "ainult oma seisukoha poolest".

Veel käsitletakse selles raamatus irratsionaalseid avaldisi ning selgitatakse irratsionaalsuse kaotamist murru nimetajas. Viimase vajalikkust selgitatakse arvuliste näidetega.

Kompleksarvude peatükk algab imaginaararvu tutvustava näitega $\sqrt{-5} = \sqrt{5 \cdot (-1)} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{5}i$. Kompleksarv defineeritakse avaldisena, kus reaalarv on liidetud imaginaararvuga.

Ruutvõrrandite lahendamise juurde minekul soovitatakse kõigepealt koostada ruutarvude tabel, tuginedes omadusele, et järjestikustest arvudest saadud ruutude vahed sünnitavad aritmeetilise rea, mille vahe on 2. Tuuakse näide $5^2 - 4^2 = 9$; $6^2 - 5^2 = 11$; $7^2 - 6^2 = 13$ jne. ning seejärel ka tõestatakse selle omaduse kehtivus.

Pärast ruutvõrrandite lahendamist õpitakse lahendama ruutvõrrandisüsteeme, ka selliseid, kus mõlemad võrrandid on ruutvõrrandid ning rakendatakse abitundmatu võtet. Näiteks:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 44 \\ y^2 - 5xy = 56 \end{cases}$$

Tehakse asendus, mille järel võrrandid saavad kuju

$$\begin{cases} x^2(3 + 2t^2) = 44 \\ x^2(t^2 - 5t) = 56 \end{cases}$$

Võrrandite vastavate poolte läbijagamisel saadakse nüüd võrrand t suhtes. Leitud t väärtuste $-\frac{21}{17}$ ja -2 abil jõutakse nüüd antud võrrandisüsteemi lahenditeni:

$$x_1 = \frac{+34}{\sqrt{159}}; \quad y_1 = \pm\frac{42}{\sqrt{159}}; \quad \text{ja} \quad x_2 = \pm 2; \quad y_2 = \pm 4.$$

Veel õpetatakse selles õpikus lahendama juurvõrrandeid ning murrulise astendajaga astet, graafiliselt lahendama ruutvõrrandit ja ruutvõrrandisüsteemi, esitama arve kümnendsüsteemi erinevates süsteemides ning lahendama kõrgema astme võrrandeid.

Teise astme võrrandisüsteemide lahendamiseks graafiliselt tehakse aga tutvust ka teist järku joontega: ringi, ellipsi, hüperbooli ja täisnurkse hüperbooli ning nende võrranditega.

Toome paar näidet ka selle raamatu tekstülesannetest.

"Kaks töölist A ja B olid kahesuguse palgaga ühekauaks tööle palgatud. A puudus 2 päeva ja sai 2000 marka, B puudus 3 päeva ja sai 1820 marka. Kui A oleks puudunud 3 päeva ja B 2 päeva, oleks B 330 marka enam saanud kui A. Mitmeks päevaks olid nemad palgatud?"

"Mööda täisnurga külge liiguvad tipu poole kaks keha A ja B. A kaugus tipust on 22 m, B kaugus 10 m. Kahe sekundi pärast on nende kaugus otsejoonel teineteisest 17 m, nelja sekundi pärast 10 m. Kui suure kiirusega liiguvad mõlemad kehad?"

P. Ederbergi kolmas raamat "Algebra ülesannete kogu ja kokkuvõtlik käsiraamat" sisaldab ulatusliku logaritmide käsitluse, kusjuures tehteid logaritmidega on õpetatud kui tehteid astendajatega. Toome näite.

$$42{,}59 \cdot 6{,}083 = 10^{1{,}6293} \cdot 10^{0{,}7841} = 10^{1{,}6293+0{,}7841} = 10^{2{,}4134} = 259{,}1.$$

Veel on selles õpikus käsitletud eksponent- ja logaritmvõrrandeid ning aritmeetilist ja geomeetrilist rida. Seejuures leiab rõhutamist aritmeetilise rea seos lineaarfunktsiooniga.

Edasi selgitatakse aga, et funktsiooni $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ väärtused moodustavad teist järku, funktsiooni $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ väärtused kolmandat järku aritmeetilise rea.

Selles õpikus õpetatakse veel arvutama arvutuslükatil, kasutama liitprotsente ja leidma kombinatsioonide, permutatsioonide ja variatsioonide arvu. Edasi järgneb selles õpikus tõenäosusteooria elementide tutvustamine. Sellesse ainevaldkonda kuuluvate teemade käsitlus on kokku võetud omaette peatükis (vt. lk. 300).

* * *

Paul Ederberg (1889–1945) sündis Saaremaal Kaarma kirikuõpetaja perekonnas. Õppis Kuressaare koolides, Tartu Gümnaasiumis (1902–1907), Tartu Ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonnas (1907–1912) ning omandas samas keskkooli matemaatika-, füüsika- ja kosmograafiaõpetaja kutse (1913). Töötas õpetajana Rzhevis, Miitavis (Jelgava), Tartus ja Volmaris (Valmiera) ning aastatel 1919–1939 Tallinna reaalkoolis. Asus 1939. a. ümber Saksamaale. Jätkas õpetajatööd Posenis ja Sudeedimaal Lütmeritzis. Võeti 1945. a. venelaste ja tšehhide poolt kinni ja paigutati interneerimislaagrisse. Edasi teated puuduvad.

Paul Ederbergi hüüdnimeks Tallinna reaalkoolis oli "Pudi" ja tema nimega on seotud seal koolis tänaseni tuntud "pudirida". (vt. "Reaali teine raamat". New York ja Toronto, 1991).

4.1.5. Algebra käsitlemisest Oskar Pärli ülesannetekogudes

Eespool juba aritmeetikaraamatu autorina tutvustatud O. Pärli kirjutas kolmekümnendate aastate algul keskkooli esimestele klassidele ka algebraülesannete kogu. Neist esimese raamatu algul, kui on tutvustatud tähte arvu tähisena, torkavad silma ülesannete komplektid, igas 3–6 ülesannet, mis kõik lahenduvad ühtemoodi, s.t. on võimalik nende ülesannete lahenduskäiku üldistada, esitades vastava lahendivalemi.

Esitame näitena ühe sellise ülesannete komplekti.

"a) Kass võib soodsatel elutingimustel kuni 10 aastat vanaks saada, see teeb välja $\frac{2}{5}$ lõvi elupikkusest. Kui vanaks võib saada lõvi?

b) Veisel on üldse 32 hammast, see teeb välja $\frac{8}{11}$ osa sea hammaste arvust. Mitu hammast on seal?

c) Emajõe pikkus Pühajärvest Võrtsjärveni on $\frac{3}{7}$ osa Emajõe kogupikkusest ehk 78 km. Kui pikk on Emajõgi?

d) Eestimaa kõrgeim mägi Suur Munamägi on 310 m kõrge. See kõrgus on $\frac{31}{135}$ osa Soomemaa kõrgeima mäe Halda kõrgusest. Kui kõrge on Halda?

e) Eelmised ülesanded üldista."

Seejärel lahendatakse ülesandeid üldkujul, s.t. täheliste andmetega ja lastakse nii saadud valemi abil leida otsitava arvulist väärtust etteantud andmete järgi. Toome siingi näite.

"Põltsamaalt Paide poole lähtus jalakäija käies keskmise kiirusega a km tunnis. Paidest Põltsamaa poole lähtus t tunni pärast teine jalakäija käies keskmise kiirusega b km tunnis. Põltsamaa – Paide vahe on maanteed mööda 39 km. Kui kaugel Põltsamaast kohtuvad jalakäijad? $a = 5\frac{1}{2}$, $b = 4\frac{3}{4}$, $t = 1\frac{1}{3}$."

Valemi kohta öeldakse, et see on käsk, eeskiri, missugused tehted, millises järjekorras tulevad teostada, et saada avalduse suurust.

Edasi vaadeldakse tähte muutuva suuruse tähisena. Vastava näitena olgu esitatud järgmine ülesanne:

"Õpilane pidi pähe õppima deklameerimiseks luuletuse. Alguses jõudis ta pähe õppida esimese m_1 minuti jooksul r_1 rida, lõpuks suutis ta m_2 minuti jooksul pähe õppida viimased r_2 rida. Mitme rea võrra minutis õppis ta värske mälu juures kiiremini kui väsinud mälu juures?"

Seejärel tutvustatakse suuruste võrdelist, pöördvõrdelist ja lineaarset olenevust. Ka nende olenevuste kohta on O. Pärli esitanud huvitava sisuga ülesandeid.

Tutvustame neidki.

"Agronoom Hünerson ütleb: Siga on kõige kokkuhoidlikum lihameister – ta teeb 3-st kuni 6-st naelast teraviljast 1 naela liha; lammas 8-st kuni 10-st naelast ja sarvloom 12-st kuni 14-st naelast. Selle järele saab a kg teraviljast mitu kilogrammi a) sealiha z? b) lambaliha l? c) loomaliha t?"

"Oma tarvidusi piirates suudab eesti põllutööline tagavaraks panna e krooni kuus, austraalia põllutööline – a krooni. Mitu aastat t peab kumbki nendest töötama, et korjata 3000 krooni, mis tarvis läheb iseseisva talupidamise asutamiseks? e muutugu 5-st kuni 15-ni, a muutugu 15-st kuni 40-ni."

"Pika otsimise järele sai keskkooli lõpetanud neiu koha, palgaga 1 kr. päevas, ka pühapäeviti, koha sobitajale pidi ta aga ühekordselt maksma 10 kr. Kui suur oli neiu teenistus x päeva jooksul? $(x > 10)$."

Järgnevalt tulevad võrrandi graafilise lahendamise ülesanded. Kõige esmalt antakse aga seletused:

"a) Võrrand on käsk, on nõue, et funktsioonil olgu teatud kindel väärtus;

b) Võrrand on funktsiooni arvutamise küsimuse ümberpööramine: antud funktsiooni mõeldava arvutamise tulemus, otsitakse põhimuutuja niisugust väärtust, millega tulemus kujuneb niisuguseks nagu ta on antud;

c) Sel puhul nimetatakse põhimuutujat "tundmatuks", tema otsitavat väärtust võrrandi "lahendiks" ja selle "lahendi" leidmist nimetatakse võrrandi "lahendamiseks";

d) Funktsiooni väärtust arvutatakse, võrrandit lahendatakse."

Relatiivsete arvude liitmise ja lahutamise juurest toome ühe huvipakkuva sisuga ülesande:

"Eesti parimaid heliloojaid Rudolf Tobias sündis a. 1873. Norra helilooja Grieg oli temast 30 a. vanem; Griegist 32 a. vanem oli ungari helilooja Liszt Férenc; Lisztist 2 a. noorem oli tema väimees saksa helilooja Richard Wagner; Wagnerist 27 a. noorem oli vene helilooja Peeter Ćaikovski; Ćaikovskist 31 a. vanem oli soome helilooja Frederik Pacius; Paciusest 39 a. vanem oli Ludvig van Beethoven; Beethovenist 113 a. hiljem sündis eesti helilooja Peeter Süda. Mis aastal sündis Peeter Süda?"

Et selgitada, kuidas toimub relatiivsete arvude korrutamine, selleks lahendatakse järgmine ülesanne.

"Raudteerong sõidab keskmise kiirusega v km tunnis Aravete ülesõidukohast põhja poole. Antud momendil on vedur just ülesõidukohal. Kui kaugel Aravete ülesõidukohast on rong t tunni pärast?

Sisuliselt arvutada, teha tabel ja graafik ning leida relatiivsete arvude korrutamise juhis, võttes

a) $v = +30$ ja t muutub -4-st kuni $+4$-ni;

b) $v = -30$ ja t muutub -4-st kuni $+4$-ni."

Edasi järgnevad võrrandid, mis lahendatakse arvutamise teel. Sealt leiame ülesandeid ka aritmeetilise jada kohta.

Toome ka nendest ülesandeist mõne näite.

"Peremees kohtas popsi, keda ta tundis tubli töömehena, kuid ka alkoholi sõbrana. Kibeda heinaaja pärast palkas peremees ta tööle tingimusega, et maksab priisöögi juures 2 krooni päevas, kuid iga viidetud päeva eest võtab $1\frac{1}{2}$ krooni. Kahe nädala pärast oli töö lõpetatud ja tööline sai 17 krooni. Mitu päeva oli tööline tööl?"

O. Pärli teises algebraülesannete kogus alustatakse täisavaldiste teisendamisega. Defineeritakse, et "summat ja vahet nimetatakse ühise nimega hulkliikmeks; teisi avaldisi nimetatakse üksliikmeks."

Abivalemid tuletatakse algebraliselt, kuid soovitatakse need tuletada ka graafiliselt.

Arvude ja avaldiste teguriteks lahutamisel võetakse analoogiliselt algarvu mõistega kasutusele algavaldise mõiste.

Tehted murdudega defineeritakse formaalselt. Näiteks, "murruga korrutamiseks nimetatakse arvu jagamist murru nimetajaga ja tulemuse korrutamist murru lugejaga." Kui mõlemad tegurid on murrud, siis tehakse järgmised teisendused:

$$\frac{l_1}{n_1} \cdot \frac{l_2}{n_2} = [(l_1 : n_1) : n_2] \cdot l_2 = [l_1 : (n_1 \cdot n_2)] \cdot l_2 =$$
$$=(l_1 \cdot l_2) : (n_1 n_2) = \frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}.$$

Võrrandite lahendamiseks tõestatakse laused, millele tugineb võrrandite lahendamine. Ühe neist lausetest esitame siingi:

"Korrutades võrrandi mõlemaid pooli muutuvat suurust sisaldava avaldisega, võidakse sisse tuua uued lahendid, mis ei kuulu esialgselt antud võrrandi lahendite hulka. Neid uusi lahendeid nimetatakse kõrvalisteks lahenditeks."

Võrrandite koostamiseks esitatakse jällegi ühetüübilised ülesanded tsüklitena.

Lahendatakse lineaarvõrrandeid, lineaarvõrrandisüsteeme ja ruutvõrrandeid ning tutvutakse nende graafilise lahendamisega. Siin ruutvõrrandid $x^2 + px + q = 0$ asendatakse sel juhul süsteemiga

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -px - q \end{cases}$$

Esitatud tekstülesannetest on enam huvi pakkuv järgmine:

"Kui maakera oleks täiesti sileda kera kujuline ja oleks võimalik tema ekvaatori ümber panna pingule tõmmatud nööri, mis oleks ekvaatorist 10 m võrra pikem ja seisaks maapinnast igal pool ühekaugusel, kas oleks siis võimalik hiirel või kassil selle nööri alt läbi pugeda?"

Ruutfunktsiooni tundmaõppimisel nõutakse, et õpilane ise selgitaks parabooli $y = x^2 + px + q$ asendit koordinaatteljestikus sõltuvalt p ja q märgist.

"Tõestada, et funktsiooni a) $y = x^2 + px + q$ b) $y = -x^2 + px + q$ arenemiskäigu kujuks on parabool, mis on nihkunud esialgsest asendist kas paremale või vasakule poole, olenedes p märgist ja kerkinud või vajunud. Millest oleneb kerkimine või vajumine?"

Ruutjuure arvutamiseks antakse algoritmi kõrval ka Heroni võte. Seda võtet on hiljem meie matemaatikaõpikuis tutvustanud ka Aksel Telgmaa.

4.1.6. Algebraõpetus Gerhard Rägo matemaatika tööraamatutes

Uuenduslikke mõtteid matemaatika koolikursuse arendamiseks oli G. Rägo realiseerinud juba Matemaatika Õpetamise Komisjoni juhtides, eriti uusi õppekavu koostades.

Professor Gerhard Rägol olid aga kujunenud oma arvamused ka kooliraamatu suhtes. Neid asuski ta realiseerima "Matemaatika tööraamatutes". Eelkõige juhiti neis raamatuis õpilane kas näidete või juhiste abil ise tulemust avastama.

Neid raamatuid on viis. Iga raamat jaguneb peatükkideks ja iga peatükk harjutisteks. Isikupärase käsitlusviisi tutvustamiseks peatume veidi pikemalt I klassi tööraamatu juures.

Esimene raamat algab algebralise sümboolika algete tutvustamisega. Seda tehakse õige põhjalikult kaheksas harjutises. Eeskirjade ja valemite esitamist tähtede abil nimetatakse siin esitamiseks matemaatilises kiirkirjas. Nii ongi esimeste harjutiste pealkirjadeks "Mõnede tõsiasjade avaldamine matemaatilises kiirkirjas" ja "Mõnede eeskirjade ja arvutamisreeglite avaldamine matemaatilises kiirkirjas". Esimeses harjutises näidatakse mitmesuguste geomeetriliste ja aritmeetiliste seoste avaldamist.

"Kuubi serva pikkus on a cm. Kui pikka lõiku oleks tarvis, et temast saaks parajasti murda kõik kuubi servad?"

"Kui võrdsetest suurustest lahutame võrdsed suurused, siis tekivad jällegi võrdsed suurused." Avalda lause matemaatilises kiirkirjas.

Teises harjutises esitatakse näiteid, millele tuginedes tuleb esitada üldine eeskiri.

"Murdude liitmise ja lahutamise viis on näha järgmistest näidetest:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2\cdot 4 + 3\cdot 2}{3\cdot 4} \qquad \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3\cdot 3 - 2\cdot 4}{4\cdot 3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{1\cdot 5 + 4\cdot 2}{2\cdot 5} \qquad \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{4\cdot 2 - 1\cdot 5}{5\cdot 2}$$

Täienda näidete veerud uute näidetega ja avalda murdude liitmise ja lahutamise üldine eeskiri, võttes murdude tähisteks $\frac{a}{m}$ ja $\frac{b}{n}$."

Kolmandas harjutises esitatakse arve üldkujul.

"1-ne, 2-ne, 3-mas, 4-as, 5-es ... paarituarv on vastavalt: 1 3 5 7 9 ... Missugune on n-es paarituarv?"

Neljandas harjutises tuuakse näiteid ülesannete lahendamiseks üldkujul.

"Segakoolis on a poeglast ja b tütarlast. Mitu protsenti kogu õpilastest moodustavad poeglapsed? Mitu tütarlapsed?"

Viiendas harjutises tuleb esitada valemeid kaudsel teel määratavate suuruste arvutamiseks.

"Põranda mõõtmed on a ja b meetrit. Kui pikk riba linoleumi kulub põranda katteks, kui linoleumiriba laius on c meetrit."

Kuues harjutis on matemaatilis-kiirkirjalise diktaadi järgi valemite kirjutamise ning matemaatilise kiirkirja, s.o. valemite lugemise harjutamiseks.

"Märgi arvu a poole ja arvu b kolmandiku vahe."

"Trepiastme laius l määratakse ehitistel vastavalt astme kõrgusele k valemi järgi

$$l = 24 - 2k, \quad 5,5 < k < 7,$$

kusjuures mõõdud on tollides. Sõnasta astme laiuse valemis avaldatud eeskiri." või

"Suurema ringi raadius on R, väiksema oma r. Mis tähendus on suurusel $\pi R^2 - 3\pi r^2$? Tee valemi mõtet selgitav joonis."

Seitsmendas harjutises antakse täiendavaid ülesandeid algebraliste sümbolite kohta.

"Vaadi ruumala arvutatakse valemi järgi:

$$V \approx \pi \cdot \frac{2D^2 + d^2}{12} \cdot h,$$

kus D on vaadi kesklõike (punni kohal võetud) läbimõõt, d vaadi otsa läbimõõt, h vaadi pikkus.

Sõnasta eeskiri, mille järgi arvutatakse vaadi ruumala.

Kõige suurem vaat maailmas asub Heidelbergi lossi keldris. Tema mõõtmed on meetrites: $D = 6,4; d = 5, h = 8,5$.

Mitu 0,75-liitrilist pudelit võiks selle vaadi veiniga täita? Kui palju maksab see vaaditäis veini, kui arvata veini hinnaks 2,5 krooni liiter?"

Kaheksandas harjutises õpitakse avaldisi koondama. Esialgu koondatakse teatud rahaühikutes antud väärtusi, ja seejärel arvuliste kordajatega sarnaseid tähelisi avaldisi. Näiteks:

$$10\ Smk + 23\ kr - 7,6\ Smk - 11,4\ kr,$$

Smk – Soome mark, kr – kroon.

$$5ab - 1,9ab + 2,1ab - 3,5.$$

Ka kõik järgmised peatükid on jaotatud harjutisteks. Edaspidi piirdume näidete toomisega peatükkide lõikes.

Esimese astme võrrandite lahendamise tundmaõppimiseks tuleb kõigepealt leida lahendus küsimusele: Missuguste etteantud sümboli (kas x, või y, või z, või u) väärtuste puhul on etteantud võrdused maksvad? Edasi jõutakse teksti järgi võrranditeni, nagu

$$x + 2x = 1200, \quad 4x + 3x = 56,$$

ning õpilane saab ülesande: "Lahenda need võrrandid!"

Järgnevalt esitatakse analoogilisi võrdusi ja ülesandeks seatakse vastava teksti koostamine.

Võrrandi koostamiseks antud ülesannetest esitame näitena järgmise pisut nuputamist vajava ülesande:

"Õpilane naljahammas vastas küsimusele, kui vana ta praegu on, nõnda: "Kui kaks korda nii vanaks saan kui praegu, olen just algkooli astumise kohustusliku vanaduse võrra täisealisuse piirist üle." Kui vana oli õpilane?"

Arvutamise põhiseadusteni jõutakse jällegi ülesannete abil, mille lõppu on lisatud lause: "Avalda oma kaalutluste tulemus kiirkirjas." Näiteks:

"Isa päevane teenistus oli i krooni, ema oma e krooni. Olgu kuu tööpäevade hulga tähiseks h. Arvuta vanemate kuuteenistus kahel viisil. Kumb arvutamisviis annab suurema saaduse?"

Selle peatüki lõpus antakse mitu arvutusmõistatust. Toome siitki näite:

"Võta mingi neljakohaline arv. Kustuta viimane koht; ülejäänud arvus kustuta uuesti viimane koht; saaduses kustuta jälle viimane koht. Kõik nõnda saadud kolm arvu liida, korruta summa 9-ga ja ütle saadus. Peale selle anna veel mõeldud arvu numbrite summa."

Olgu öeldud saadus s ja numbrite summa t. "Kunstnik" saab siis mõeldud arvu lihtsalt liites arvud s ja t.

Kontrolli seda paari näite puhul ja näita siis üldiselt, et asi on ikka nõnda.

Kui jõutakse diagrammide joonestamiseni, antakse kõigepealt eelmärkusena järgmised juhised:

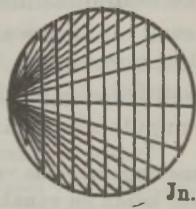
"1° hinda tarvitadaoleva joonislehe mõõte;
2° hinda kujutamisele tulevate arvude suurust;
3° vali kohaselt kujutamise mõõtkava;
4° kaalu kujutamise täpsust;
5° ümmarda tarbe korral kujutamisele tulevad arvud.

Peale graafilise töö lõpetamist kirjelda saadud joonise järgi seal kujutatud nähtus."

Mõned näited ka ülesannetest, kus neid õpetussõnu tuleb silmas pidada.

"1922. a. korjatud andmed näitasid, et keskkooli ei saadud lõpetada puuduliku edasijõudmise tõttu

võõrkeeltes	20	korral	sajast
matemaatikas	44	"	"
emakeeles	44	"	"
käsitöös ja joonist.	1	"	"
maateaduses	10	"	"
loodusteaduses	13	"	"
ajaloos	5	"	"



Jn. 19.

Esitame andmed graafiliselt 1° sammasdiagrammis; 2° sektordiagrammis."

"Joonesta ring (näit. raadiusega 5 cm). Jaga tema rõhtus läbimõõt 12 osaks, püstita igas jagamistäpis kõõl (jn. 19) ühenda viimase lõpud läbimõõdu algusega, mõõda tekkiva võrdhaarse kolmnurga tipunurk ja määra kolmnurga pindala. Saadused korralda tabeliks.

Kujuta kolmnurga pindala käik tipunurga suuruse muutumisel 0°-ist kuni 180°-ni. Tarbe korral tasanda mõõtmissaadused. Missuguse nurga puhul on kolmnurga pindala kõige suurem?"

Raamatus esitatakse ka valmis graafikuid, mille järgi tuleb kirjeldada nähtuskäiku.

Positiivsete ja negatiivsete arvude tutvustamist alustatakse mitme konkreetse vastassuunalise suuruse esitamisega. Tuuakse näiteid võitude ja kaotuste suurustest, sündinute ja surnute arvudest, sissevedu ja väljavedu iseloomustavatest arvudest, töötatööliste ja vabade töökohtade arvudest, veepinna seisu üle või alla normaalset kõrgust näitavatest arvudest jne.

Liitmise ja lahutamise tehete juurde jõutakse tekstülesannete abil. Toome ühe näite.

"Õhusoojuse tõusule $4,5^\circ$ võrra enne kõuevihma ja rahesadu järgnes temperatuuri langus $7,3^\circ$ võrra saju ajal. Kui suur on temperatuuri kogumuutus?"

Murdude korrutamise eeskiri defineeritakse järgmiselt: "Korrutada täisarv b täisarvuga a tähendab tuletada arvust b uus arv sellesama eeskirja järgi, mille järgi a on tuletatud arvust 1." See laiendatakse esialgu juhule, kus a on murdarv $\frac{p}{q}$ (s.o. $\underbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}}_{p \text{ korda}}$), ja siit juhule, kus ka b on murdarv $\frac{m}{n}$.

See korrutamise definitsioon laiendatakse ka negatiivsete tegurite juhule.

Ülesannetes tutvustatakse aritmeetilise keskmise leidmiseks nn. *esialgse keskmise võtet.* Selle rakendamiseks esitatakse näiteks järgmine ülesanne:

"Linna-apteegi kassa-aruanne näitas 6-el nädalapäeval sissetulekuna kroonides

e.	t.	k.	n.	r.	l.
125	119	128	118	121	127

Kui suur oli päevane sissetulek?

Määra see keskmine esiti otseselt, siis "esialgse keskmise võtet" kasutades."

Veel on esimeses raamatus käsitletud võrdelist, pöördvõrdelist ja lineaarset olenevust. Kõiki neid tutvustatakse vastavate ülesannete abil. Esitame neist kaks.

"Kell läheb päevas 6 minuti võrra ette. Näidaku kell kesköõl 1. kuupäeval õiget aega. Mis paranduse peab lisama kella lugemisele kesköõl 2., 3., 4., ..., 10. kuupäeval?

Kujuta paranduse käik graafiliselt.

Missuguse paranduse pidi lisandama kella lugemile õige aja saamiseks eelkäiva kuu viimasel, eelviimasel, eeleelviimasel päeval?

Kus asetsevad need parandused diagrammis?"

"Üks vana eeskiri ütleb: "Abiellujate vanadused olgu niisugused, et peigmehe 10-ne võrra rohkendatud aastate arv oleks pruudi aastate arvu kahekordne." Anna abiellujate vanaduse side valemina, tabelina ja graafikuna."

Vastavalt fusiooni põhimõttele seostatakse aritmeetilise jada käsitlus lineaarse olenevusega.

"Pidusöögi koguhind H koosneb üldistest ettevalmistuskuludest 25 krooni ja iga osavõtja kohta tulevatest söögi- ja joogikuludest 3 krooni. Anna H väärtus N osavõtja puhul.

Koosta H väärtuste rida N-ni muutudes 3-st kuni 10-ni. Kuidas kujuneb tulpkujutuse viisil H käik arvu N muutudes?"

Aritmeetilise jada üldliikme ja summa valemeid ei tuletata. Küll on aga esitatud ülesanded, mis nende valemite juurde viivad.

"Avalda iga rea puhul n-ndal kohal seisev liige (rea üldliige) koha numbri kaudu:

7, 9, 11, 13, 15 ... jt."

"Leia eespool toodud näidete puhul 20, 12, 7, 25, 15, 10, 8 ja 12 liikme summa."

Esimene raamat lõpeb kahe lineaarvõrrandi ühislahendi leidmisega graafilisel teel. Ettevalmistuseks sellele on ülesanded, kus etteantud lineaarfunktsiooni või selle pöördfunktsiooni väärtusi tuleb leida argumendi etteantud väärtuste korral. Vastavate väärtuspaaride abil aga tuleb joonistada vastavad sirged.

G. Rägo järgmiste tööraamatute kohta teeme ainult mõned märkused.

II klassi raamat, kus käsitletakse polünoome, murde, lineaarvõrrandeid ja ruutolenevust, torkab silma tõestusülesannete suure arvu poolest. Esitame mõne näite.

"Näita, et iga täisarvu ruut on ühe võrra suurem kui kahe temaga kõrvutiseisva täisarvu korrutis."

"Olgu arvu N numbrid ühelistest alates $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$. Moodustame paarituarvulistel kohtadel seisvate numbrite summa

$$S_1 = a_0 + a_2 + ...$$

ja paarisarvulistel kohtadel seisvate numbrite summa

$$S_2 = a_1 + a_3 + ...$$

Tõesta väide: Kui arv $S_2 - S_1$ on jaguv 11-ga, siis on seda ka arv N ja vastupidi."

Ruutolenevuse ja selle pöördfunktsiooni käsitlemisel esitatakse mitmeid sisuliselt huvipakkuvaid valemeid, nagu

"Teraskõis, mille läbimõõt on d tolli, kannab katkemiskindlat koormat kuni K tonni, kus $K = 7,11\ d^2$."

"Auto mootori "hobujõudude" arv H määratakse ligikaudselt kehtiva valemi põhjal $H = 0,4\ nd^2$, kus n on silindrite arv ja d on nende seesmine läbimõõt tollides."

"Silmapiiri raadiuse r sidet vaatekoha kõrgusega h näitab ligikaudu kehtiv valem $r = 2,5\sqrt{h}$."

"Tõmbe suurust vabriku korstnas mõõdetakse seal valitseva õhu- ja suitsuvoolu kiirusega. Seda kiirust arvutatakse valemi järgi $v = c\sqrt{h}$, kus c on arvuline tegur ja h korstna kõrgus."

Seoses ruutolenevuse pöördega antakse ka keskmise ruutvea valem ja rakendatakse seda mitmes ülesandes.

Ruutvõrrandite lahendamist õpetatakse esmalt graafiliselt võrrandisüsteemi $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -px - q \end{cases}$ abil. Seejärel tehakse seda võrrandi $x^2 + px + q = 0$ vasaku poole täisruuduks teisendamise teel. Järgneb selle võrrandi eelnev teisendamine asenduse $x = X - \frac{p}{2}$ abil. Lõpuks võetakse kasutusele lahendi valemid.

Raamatu lõpus on esitatud mitu väärtõestust, nn. sofismi järelemõtlemiseks. Toome kaks näidet:

"Väide: 4 = 5. Tõestus: On tõsi, et 16 − 36 = 25 − 45, samuti, et $16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}$. Siit"

$$(4 - \tfrac{9}{2})^2 = (5 - \tfrac{9}{2})^2, \text{ ehk } 4 - \tfrac{9}{2} = 5 - \tfrac{9}{2}, \text{ ehk } 4=5"$$

"Väide 2 = 4. Tõestus: Olgu $x-1=2$; siis on $(x-1)\cdot(x-5)= = 2(x-5)$, siis $x^2-6x+5=2x-10$. Et $x-7=x-7$, siis saame lahutades $x^2-7x+12=x-3$, ja jagades vahega $x-3$, jõuame võrrandini $x-4=1$, s.t. $x=5$.

Asetades selle arvu oletatud lähtevõrdusesse, saame $5-1=2$, s.t. $2=4$."

G. Rägo III klassi tööraamatus [Õ, 171] on käsitletud kuupolenevust, veel kord polünoome (2. tsükkel), ligikaudset arvutamist, juuravaldisi, eksponentolenevust ja logaritme.

Kuupolenevuse käsitlemisel esitatakse mitu tabelit ning ülesandeks on määrata, kas seal esitatud arvupaaride vahelist olenevust saab vaadelda kui lineaar-, ruut- või kuupolenevust. Pärast üldise astmelise olenevusega tutvumist rakendatakse astme mõistet selleks, et tutvustada arvude esitamist ka teistes arvusüsteemides.

Selles raamatus võetakse kasutusele täieliku induktsiooni meetod, mida rakendatakse mitme valemi kehtivuse tõestamiseks. Küsitakse ka, kas näiteks valemid $N=n^2+n+17, N=n^2+n+41$ või $N=2n^2+29$ on algarvude valemid. Lihtne kontroll näitab, et see nii siiski pole.

Ligikaudse arvutamise juures õpitakse ka vigu hindama. Näiteks teades, et kahe liidetava a ja b absoluutsed vead on α ja β ning relatiivne viga $\frac{\alpha}{a}<\frac{\beta}{b}$, tuleb näidata, et

$$\frac{\alpha}{a}<\frac{\alpha+\beta}{a+b}<\frac{\beta}{b}.$$

Suurt tähelepanu on omistatud lühendatud arvutamisele ning antakse mitmeid ligikaudseid valemeid, nagu

$$(1+\alpha)^2\approx 1+2\alpha;\quad \sqrt{1+2\alpha}\approx 1+\alpha;$$
$$(1+\alpha)^3\approx 1+3\alpha;\quad \sqrt[3]{1+3\alpha}\approx 1+\alpha,$$

mis kehtivad, kui α on väga väike arv.

Juuravaldiste käsitlemisel on jällegi mitu ülesannet, kus tuleb näidata ligikaudse võrduse kehtivust.

G. Rägo IV ja V klassi tööraamatuid tutvustame hiljem vastavalt matemaatilise analüüsi elementide ning tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elementide käsitluste juures (vt. lk. 268, 297 ja 301).

* * *

Gerhard Rägo (1892–1968) sündis Võrumaal Pindi vallas. Õppis Räpina kirikukoolis ja Tartu Reaalkoolis. Küpsuseksamid sooritas 1908. a. Tartu Aleksandri gümnaasiumis. Lõpetas 1913. a. Tartu Ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonna kandidaadikraadiga.

Täiendas ennast Göttingeni Ülikoolis ning aastatel 1915–1920 töötas Novotšerkasski Polütehnilise Instituudi õppejõuna. 1920. a. omistati talle seal professori kutse. Aastatel 1920–1941 ja 1944–1968 oli Tartu Ülikooli professor.

Prof. G. Rägo elu ja tegevuse kohta on rohkesti materjali meie raamatu II ja IV osas.

4.1.7. Algebra käsitlus Albert Borkvelli, August Kasvandi, Felix Laarensi, Karl Maasiku, Oskar Paasi ja Arnold Vihmani õpikutes

Autorite kollektiiv eesotsas magister A. Borkvelliga koostas uuele keskkoolile (progümnaasiumile) uued matemaatika raamatud, nende hulgas kaks algebra raamatut.

Tutvume nende raamatute mõnede iseärasustega.

Esimene raamat algab tähe kasutamisega arvu tähisena. Siin defineeritakse valem kui eeskiri, mis näitab, missugused tehted ja missuguses järjekorras tuleb sooritada, et leida otsitav väärtus.

Tutvustades astme mõistet, lisatakse sinna kohe, et "a^1 on lihtsalt a".

Negatiivsete arvude vajalikkust selgitatakse formaalselt. Antakse järgmine põhjendus: "Selleks, et lahutamine oleks mõeldav ka niisugusel korral, kui vähendaja on suurem kui vähendatav, asetatakse jäägis selle arvu ette, mis näitab, kui palju on vähendaja arv vähendatava ühikute arvust suurem, märk "–"."

Relatiivsete arvude liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise puhul tuuakse eraldi välja kõik võimalikud juhud ja nõutakse nende täpset meelespidamist. Näiteks liitmise puhul on need juhud järgmised:

$$\begin{aligned}(+a) + (+b) &= a + b\\ (+a) + (-b) &= a - b\\ (-a) + (+b) &= -a + b\\ (-a) + (-b) &= -a - b\end{aligned}$$

Kahe relatiivse arvu korrutise märgi küsimus lahendatakse siingi liikumisülesandega, kus rong sõidab Valga–Tartu–Tapa liinil. Kõik võimalikud juhud vaadeldakse läbi eraldi ülesannetena.

Jagamise korral määratakse jagatise märk, tuginedes korrutamise juhtudele. Näiteks:

$$(-ab) : (-a) = +b, \quad \textit{sest}\ (-a) \cdot (+b) = (-ab).$$

Sulgude kasutamist avaldistes põhjendatakse sooviga sooritada avaldises tehteid mitte antud, vaid mõnes teises järjekorras.

Üksliige ja hulkliige on selles raamatus defineeritud pisut erinevalt eelmistest siin varem esitatud definitsioonidest:

"Kui avaldise viimane tehe ei ole mitte liitmine ega lahutamine, vaid mõni keskmise või kõrgema järgu tehe, siis nimetatakse seesugust avaldist üksliikmeks ehk monoomiks."

"Avaldisi, milles on kaks või enam üksliikmeid, nimetatakse hulkliikmeks ehk polünoomiks".

Võrdus ja võrratus defineeritakse võrdusmärgi ja võrratusmärgi abil. Näiteks toome võrduse definitsiooni:

"Kui kaks avaldist annavad pärast tehete läbiviimist ühesugused tulemused, siis võib neid avaldisi ühendada võrdusmärgiga ja me saame siis võrduse."

Esimese astme võrrandite juures peatutakse selles õpikus kaks korda. Mõlemal juhul antakse punktide kaupa eeskiri, kuidas võrrandit lahendada. Esimeses kontsentris on neid nõudeid ainult neli: viia tundmatud liikmed vasakule ja tuntud liikmed paremale poole, koondada, jagada võrrandi mõlemad pooled tundmatu kordajaga ja kontrollida tulemust. Teises kontsentris on neid nõudmisi aga üheksa. Nüüd alustatakse nimetajatest vabastamise ja sulgude avamisega ning jõutakse jällegi tulemuse kontrollimiseni.

Lisaks abivalemitele antakse selles õpikus veel soovitatud valemitena hulkliikmete korrutamist lühendavaid võrdusi, nagu:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \text{ jt.}$$

Hulkliikmete korrutamist kui ka jagamist soovitatakse teha arvude juurest tuntud skeemide järgi:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
x^3 & - & 6ax^2 & + & 12a^2x & - & 8a^3 & & \\
 & & x^2 & - & 4ax & + & 4a^2 & & \\
\hline
x^5 & - & 6ax^4 & + & 12a^2x^3 & - & 8a^3x^2 & & \\
 & - & 4ax^4 & + & 24a^2x^3 & - & 48a^3z^2 & + & 32a^4x \\
 & & & + & 4a^2x^3 & - & 24a^3x^2 & + & 48a^4x \quad - \quad 32a^5 \\
\hline
x^5 & - & 10ax^4 & + & 40a^2z^3 & - & 80z^3z^2 & + & 80a^4z \quad - \quad 32a^5
\end{array}$$

Hulkliikmete jagamise näite esitasime P. Ederbergi raamatute tutvustamise juures (vt. lk. 168).

Algebralist murdu defineeritakse kahe algebralise avaldise jagatistena. Eraldi lausetena tuuakse välja reeglid märgi vahetamise kohta. Näiteks: "Murru väärtus ei muutu, kui murru ühe liikme – kas lugeja või nimetaja – ja murru enese ees vahetada märk vastupidiseks."

Lineaarvõrrandite lahendamise teise kontsentri ees tutvustatakse lineaarset funktsiooni ja lineaarvõrrandi graafilist lahendamist.

Võrrandite koostamise kohta märgitakse, et selle jaoks pole üldist reeglit ja võimalik on anda ainult üksikuid juhtnööre. Need sõnastatakse järgmiselt:

"Kõigepealt valime võimalikult otstarbekohaselt tundmatute suuruste hulgast ühe ja tähistame ta harilikult tähega x. Selle järel katsume ühte ja sama ülesandes esinevat suurust väljendada kahel viisil: tuntud ja tundmatu suuruse kaudu. Ühendades saadud avaldised võrdusmärgiga saame nõutud võrrandi."

Seda soovitust on rakendatud näiteülesannete juures, millest ühe ka siinkohal esitame.

"A alevist R raudteejaama on 16 km. Jalakäija tarvitab selle maa käimiseks 3 tundi 20 minutit. Pool tundi pärast jalakäija lahkumist alevist A sõitis samas sihis välja rattasõitja ja jõudis jalakäijale 24 minutiga järele. Missugune oli rattasõitja kiirus?

Olgu rattasõitja poolt sõidetud kilomeetrite arv tunnis x. Et jalakäija kui ka rattasõitja poolt kuni kohtumiseni käidud kilomeetrite arv on ühesugune, asume selle suuruse väljendamisele kahel viisil:

	rattasõitja	jalakäija
kiirus km-tund	x	$\frac{16}{3\frac{1}{3}} = \frac{16\cdot 3}{10} = 4,8$
aeg tundides	$\frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0,4$	$\frac{54}{60} = \frac{9}{10} = 0,9$
käidud tee pikkus	0,4x	$0,9 \cdot 4,8$

Seega saame võrrandi $0,4x = 0,9 \cdot 4,8$."

Võrrandi koostamiseks antud ülesannetest lisame ka paar huvitavamat näidet.

"Mõeldud neljakohalise arvu viimane number on 7. Kustutame lõpust viimase numbri ja kirjutame ta arvu ette. Saadud arvu vähendame 5 võrra ja jagame selle järel 10-ga. Jagatisele liidame 17 ja uue tulemuse korrutame 2-ga. Niiviisi saadud arv on 103 võrra suurem mõeldud arvust. Leida mõeldud arv."

"Segati esimest sorti kohvi, mille hind on 4 kr. kilo, teist sorti kohviga, mille hind oli 3.20 kr. kilo. Kõrvetamisel oli kadu 16 %. Kõrvetatud kohvi müüdi hinnaga 5 kr. kilo, kusjuures saadi kasu 35.60 krooni. Kui palju segati kummagi sorti kohvi, kui teist sorti oli 14 kilo rohkem?"

Autorite kollektiivi A. Borkvelli jt. teine algebraraamat "Keskkooli algebra II" algab ruutolenevuse ja ruutjuure tutvustamisega. Ruutjuur defineeritakse kaheselt: $\sqrt{36} = \pm 6$.

Ruutjuure algoritmi tutvustamine valmistatakse ette ülesandega: "Leiame ruutjuure arvust 4489. Juur on kahekohaline arv, s.t. koosneb kümnelistest ja ühelistest." Lahenduskäik on kokkuvõtlikult järgmine:

Oletades, et see arv on $10y + x$, peab kehtima võrdus $(10y+x)^2 = 4489$ ehk $100y^2 + 20xy + x^2 = 4489$. Siit järeldub, et $100y^2 < 4489$ ehk $y^2 < 44,89$. Seega, kõige suurem võimalik y-i väärtus on 6.

Kui $y = 6$, siis $100 \cdot 6^2 + 20 \cdot 6x + x^2 = 4489$ ehk $x(120+x) = 889$, ja siit $x < \frac{889}{120}$. Järelikult $x = 7$ või väiksem sellest.

Kui $x = 7$, siis võrrand $x(120 + x) = 889$ on rahuldatud. Seega otsitav arv on 67."

Edasi selgitatakse arvu $\sqrt{18}$ abil, et eksisteerib arve, mis pole täis- ega murdarvud. Irratsionaalarvu defineeritakse kui ruutjuurt arvust, mis pole täisruut.

Ruutvõrrandite lahendamist alustatakse mittetäielikest võrranditest. Graafilisel lahendamisel määratakse vastava parabooli ja x-telje lõikepunktid.

Ruutvõrrandite ja hiljem ka lineaarvõrrandisüsteemide lahendamiseks antakse ühe numbri all 2–3 analoogilist ülesannet. Nad kõik lahenduvad ühe ja sama skeemi järgi. Ruutvõrrandite juures leidub näiteks selline ülesannete paar:

"a) Õpilaspere peoks müüdi kahesuguse hinnaga 230 piletit. Õpilaspilet maksis 20 senti vähem kui külalispilet. Õpilaspiletite müügist saadi 58 krooni, külalispiletite müügist 54 krooni. Kui kallid olid piletid?"

"b) Pühadeks osteti apelsine ja sidruneid kokku 25 tükki. Apelsin maksis 8 senti rohkem kui sidrun. Apelsinide eest maksti 4 kr. ja sidrunite eest 60 senti. Kui palju maksis apelsin?"

Hulkliikmete teguriteks lahutamise juures vaadeldakse eraldi kolmliikme ja neliliikme teguriteks lahutamist. Lisaks tuntud valemile $x^2 + (m + n)x + mn = (x + m)(x + n)$ antakse veel valem $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$ ja selle kohta tuuakse näide:

"Lahutame teguriteks kolmliikme $10x^2 + 29x + 21$.

x^2 koeffitsient on $2 \cdot 5$

vabaliige on $3 \cdot 7$.

x esimese astme koeffitsient peab olema $2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 29$.

Järelikult $10x^2 + 29x + 21 = (2x + 3)(5x + 7)$."

Lineaarsete võrrandisüsteemide juurde jõutakse lähtudes ühest kahe tundmatuga lineaarsest võrrandist. Selle kohta selgitatakse, et "üks võrrand kahe tundmatuga on määramatu; ta võimaldab lõpmata palju lahendipaare"."

Võrrandisüsteeme lahendatakse nii liitmis-, võrdlemis- kui ka asendusvõttega.

Astmete ja juurte käsitlemisel jõutakse siin ka juure juurimiseni.

Lahendamiseks on antud juurvõrrandeid. Selgituses ei ole pööratud tähelepanu võõrlahendite tekkimise võimalusele.

Astme mõistet laiendatakse nii negatiivse kui ka murrulise astendajaga astmetega.

Küllalt ulatuslik on logaritmide käsitlus. Alustatakse ülesandega, kus kasutatakse astendajaid arvutamise lihtsustamiseks. Selleks on antud arvu 2 astmete tabel, mille abil lahendatakse ülesandeid, nagu

$$32 \cdot 256, \quad 4096 : 256, \quad (\tfrac{1}{8})^3 \quad \text{ja} \quad \sqrt[3]{4096}.$$

Näiteks $32 \cdot 256 = 2^5 \cdot 2^8 = 2^{13} = 8192$.

Seejärel märgitakse aga, et sellel tabelil on siiski praktiliselt väga väike tähtsus. Vaja oleks tabelit, mis sisaldaks ka arvud 2 ja 4, 4 ja 8 jne. vahel. Siit jõutaksegi logaritmi mõiste juurde.

Veel käsitletakse selles raamatus aritmeetilist ja geomeetrilist jada. Traditsioonilistele definitsioonidele ja valemite tuletamistele on lisatud üldliikmete valemite üldistused:

$$a_n = a_k + (n-k)d \quad \text{ja} \quad a_n = a_k q^{n-k}.$$

Lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea summa valemit kasutatakse perioodiliste kümnendmurdude esitamiseks harilike murdudena.

Küllalt ulatuslik on õpiku lõpus toodud protsentide rakendamine hoiusumma, veksli ja liitprotsentide arvutamiseks. Valemid lõppkapitali K_t arvutamiseks algkapitali k, protsendi p ja aastate arvu t kaudu on antud nii liht- kui liitprotsendilise kasvu korral:

$$K_t = k(1 + \tfrac{pt}{100}) \quad \text{ja} \quad K_t = k(1 + \tfrac{p}{100})^t.$$

Kui aga iga aasta algul makstakse juurde k krooni, siis on t aasta lõpuks p liitprotsendiga kogutud kapital

$$K_t = kq\tfrac{q^t - 1}{q - 1}, \quad \text{kus} \quad q = 1 + \tfrac{p}{100}.$$

Lisame mõned selles peatükis antud ülesanded.

“1922. aasta rahvaloenduse andmete järgi oli Eesti Vabariigis 1 107 059, 1934. aasta rahvaloenduse andmete järgi aga 1 126 413 elanikku.

Arvuta!

a) Kui suur on Eesti Vabariigi elanike aastane juurdekasvu protsent?

b) Kui suur on Eesti Vabariigi elanike arv 1950. aastal, kui rahvaarv kasvab edaspidi niisamuti nagu siiamaani?

c) Kui suur peaks olema Eesti Vabariigi elanikkude arvu aastane juurdekasvu protsent, et Eestis oleks 1975. aastal 2 000 000 elanikku?”

“16-aastane õpilane paneb talle kingitud raha 250 krooni aasta alul panka hoiule ja lisab iga aasta sellele summale juurde 12 krooni. Kui suure kapitali on ta endale kogunud 25-daks eluaastaks, kui pank maksab 5,5 liitprotsenti?"

* * *

Kõiki käsitletud raamatu autoreid on tutvustatud eespool (vt. lk. 122, 139 ja 140).

4.1.8. Algebra käsitlus Theodor Koigi raamatutes

Oma esimese algebraraamatu avaldas T. Koik juba 1920. a., teise, koos geomeetria osaga keskkooli I ja II klassile vastavalt 1935. ja 1936. aastal.

1920. a. ilmunud "Elementaarne algebra" on vägagi detailne algebra õpik, kus ülesanded puuduvad. On vaid näited. Selle raamatu eessõnast loeme, et see on esimene pärast J. Kurriku "Arvuvalda". Õpiku struktuuri kohta on seal öeldud järgmist: "Aine korraldamisel selgus, et on soovitav seda teha kontsentriliselt, mille pärast tuli märksa kõrvale kalduda meil seni tarvitusel olnud algebra korralduskavadest. Minu arvamise järele on vaja õpilasi algebraga tutvustamisel vabastada neid esialgu kõige selle õppimisest, mis puhtformaalse iseloomuga, või mis neis ei ärata huvi sellepärast, et seda kohe ei saa tarvitada."

Raamatus käsitletakse järgmisi teemasid: algebralised arvud ja tehted, murrud, proportsionaalsus ja proportsioonid, arvlaused, koordinaadid ja graafilised kujutused, esimese astme arvlaused, arvlaused kahe ja enam tundmatuga, algteguriteks lahutamine.

Niisiis käsitletakse siin algebrakursust kuni lineaarvõrrandisüsteemide lahendamiseni, nende hulgas ka kolme ja nelja tundmatuga süsteemid.

Toome mõned selle raamatu teksti näited.

Õpiku alguses tuuakse teavet ajaloost: "Aastatuhandeid tagasi elas Niiluse kallastel rahvas, egiptlased, kelle ehitustööd ja mälestusmärgid seisavad tänapäevani ja kõnelevad meile igavikku kadunud sündmustest. Sealt vanalt kultuurimaalt on leitud Ahmese papüürus – kõige vanem matemaatika õpperaamat, kirjutatud hieroglüüfidega, milles meie leiame ka algelemendid algebrast. See dokument, Ahmese papüürus, hoitakse Londonis Briti Muuseumis, Rhindi kogus alal, mispärast teda nimetatakse ka Rhindi papüüruseks. Rhindi papüürus on egiptlase Ahmese kirjutatud aastate 2000 ja 1700 vahel enne Kr. ja kannab pealkirja "Õpetus kõigi salajaste asjade teadasaamiseks".

Õpikus toodud põhjalike seletuste näiteks olgu toodud järgmine katkend: "Seega oleme siis leidnud, et

$$(a+b-c)(d-e)=ad+bd-cd-ae-be+ce.$$

Võrdleme selle ühtivuse paremat poolt pahemaga, et leida juhtlauset. Märke meie esialgu tähele ei pane. Esimesed kolm liiget ab, bd, cd saame, kui teisest polünoomist võtame esimese liikme d ja kasvatame ta kõikide esimese polünoomi liigetega. Järgmised kolm liiget ae, be, ce leiame, kui võtame teisest polünoomist teise liikme ja kasvatame ta jällegi kõikide esimese polünoomi liigetega. Märkide kohta võime öelda: Kui kasvatame arvu, mille ees seisab +, arvuga, mille ees ka märk +, siis ilmub kasvatus plussiga, niisama saaks kasvatise ees +, kui mõlemi kasvatatava arvu ees seisab märk –. Kui arvu ees märki ei ole, käime temaga ümber, nagu oleks tema ees +. Siis aga, kui ühe teguri ees on +, teise ees –, tuleb kasvatise ette panna märk –."

Õpikus käsitletava aine hulgas on lineaarvõrrandisüsteemide lahendamisel kasutatud nn. Bezout' viisi, mida üheski teises algebra raamatus me ei kohta. Vaatleme näidet.

"(a) $8x-15y=-30$
(b) $2x+3y=15$

Kasvatame esimese arvlause (a) arvuga u; u on esialgu määramata arv. Resultaat on:

$$8xu-15yu=-30u$$

Arvame saadud arvlause teise arvlausega (b) kokku. (Arvlause võiks ka maha arvata.)

$$8xu-15yu+2x+3y=-30u+15.$$

Võtame ühise teguri x-i ja y-i neis liigetes, kus see võimalik (võib ka numbriga kirjutatud tegurid kaasa võtta) klambrite ette. (Vaata algteguriteks lahutamine.)

$$(B)\quad 2x(4u+1)-3y(5u-1)=-30u+15.$$

Et u on meil täitsa määramata arv, siis võime u niisuguseks arvuks lugeda, mis $2x$-i koeffitsiendi $4u+1$ muudab nulliks. Et seda u tähendust leida, paneme

$$4u+1=0, \qquad \text{kust saame } u=-\tfrac{1}{4}\,.$$

Kui nüüd panna arvlausesse $(B)u=-\frac{1}{4}$, siis saame

$$-3y(-\tfrac{5}{4}-1)=\tfrac{30}{4}+15,$$

see on arvlause ühe tundmatuga, mida oskame lahendada. Sellest arvlausest leiame:

$$\tfrac{15}{4}y + 3y = \tfrac{30}{4} + 15, \text{ ehk } 15y + 12y = 30 + 60,$$
$$\text{ehk } 27y = 90, \ y = 3\tfrac{1}{3}.$$

x-i leidmiseks võiksime arvlauses $(B)u$ niisuguseks arvuks lugeda, mis $3y$ koeffitsiendi teeb nulliks."

T. Koigi uue keskkooli esimese raamatu sissejuhatuses on märgitud, et "käesolev vihik sisaldab õppematerjali algebrast ainult niipalju, kui on vajaline selle aine kindlaks omandamiseks. Harjutused ja ülesanded on mõeldud koduste õppeülesannetena, kuna nende raamatusse asetamine paisutaks seda tarbetult."

Raamat algab liitmis-, lahutamis-, korrutamis- ja jagamistehte ning nende omaduste käsitlemisega. Võetakse kasutusele täht arvu tähisena ja need omadused esitatakse valemitena.

Selles raamatus on monoome ja polünoome defineeritud järgmiselt: "Kui sulgudeta algebraline avaldis ei sisalda ühtegi liitmis- või lahutamistehet, siis nimetatakse seda avaldist monoomiks."

"Avaldisi, mis koosnevad märkidega pluss või miinus seotud monoomidest, nimetatakse polünoomiks."

Kui jõutakse võrranditeni, siis antakse järgmised võrrandi koostamise juhised:

"1. Ülesanne tähelepanelikult läbi lugeda, et tekiks selge kujutlus andmete ja otsitava arvu olu kohta.

2. Tähistada otsitav arv või temaga seotud arv mõne tähega ning lisada juurde sõnades mõõtühik.

3. Katsuda siduda otsitav arv teiste arvudega, mis ülesandes antud, kasutades selleks ülesande tingimusi.

4. Saadud lihtsate avaldistega läbi viia järelkatse, kui järelkatse tee avaldistega on raskesti avastatav, siis võtta selle avastamiseks esiteks juhusliselt mõni numbriline arv. Seesugune järelkatse peab andma kaks võrdset avaldist, mis moodustavad võrrandi.

5. Võrrandisse mitte kirjutada ühikuid, kuid pidada silmas, et ühe ning sama suuruse väärtused oleksid avaldatud ühesuguseis ühikuis.

6. Lahendada võrrand ja kui lahend on nimeline arv, siis kirjuta ühiku nimetus lahendi juurde.

7. Saadud lahendiga teha järelkatse.

Seejuures on rõhutatud, et järelkatse tuleb teha ülesandega, mitte võrrandiga, sest viimane võib olla valesti koostatud.

Relatiivsete arvude käsitlemise juures väärib tähelepanu, kuidas jõutakse relatiivsete arvude korrutamise reeglini. Seda tehakse ülesande abil, kus jälgitakse jalgratturi sõitu Rakverest Tallinna või Narva poole (jn. 20)

Jn. 20.

ning tulemused fikseeritakse tabelina. Aluseks on valem $K = k \cdot a$, kus K – kaugus, k – kiirus ja a – aeg.

Olgu	Kaugus Rakverest	
I $K = +200 \frac{m}{min}$ $a = +3\ min$	$K = (+3) \cdot (+200)\ m$	$K = +600\ m$ Põhjus: Sõitja on Rakverest Tallinna pool, seega kaugus on positiivne
II $K = +200 \frac{m}{min}$ $a = -4\ min$	$K = (-4) \cdot (+200)\ m$	$K = -800\ m$ Põhjus: Sõitja on Rakverest Narva pool, seega on kaugus negatiivne

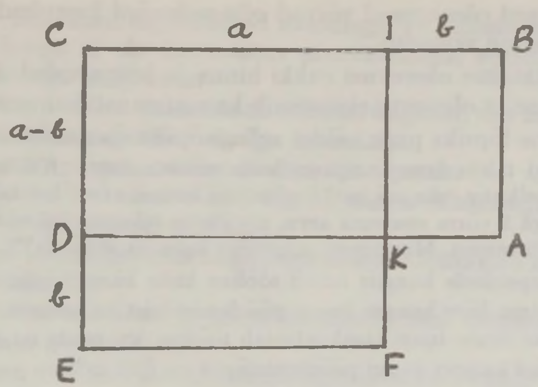
T. Koigi keskkooli II klassi raamatu [Õ, 85] algebra osa algab peatükiga *tehted astmetega*. Siin on valemite juures esitatud sõnastused antud võimalikult täpselt. Näiteks:

"Astme aste on aste, mille astendatavaks on endine arv ja astendajaks astendajate korrutis."

Pärast tehteid monoomide ja polünoomidega käsitletakse mõningaid "tähelepanu väärivaid korrutisi". Siin tuletatakse abivalemid. Tõestuskäigud esitatakse nii algebraliselt kui ka geomeetriliselt. Pisut originaalne võrreldes teiste õpikutega on siiski valemi $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ geomeetriline tõestus, mis seondatakse algebralisega. Jooniselt 21 näeme, et "$ABCD$pind. = $CEFI$pind. – – $DEFK$pind.+$KABI$pind. ehk $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + (a-b)b$." Avaldist teisendades saame, et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Arvude jaguvuse käsitlemisel tõestatakse, et igat kordarvu saab kujutada algarvude korrutisena. Tõestuskäik on järgmine:

"Olgu m kordarv ja üks tema algarvulisist jagajaist k_1, kuna jagatis olgu n, siis $\frac{m}{k_1} = n$ ehk $m = k_1 n$ (1). Arv n võib omakorda



Jn. 21.

olla kordarv, mille üks algarvulistest jagajatest olgu k_2 ja n jagatis k_2-ga olgu p, siis $\frac{n}{k_2} = p$ ehk $n = k_2 p$ (2). Tähistanud p algarvulise jagaja tähega k_3 ja eeldanud, et p ja k_3 jagatis on ise algarv k_4, leiame, et $\frac{p}{k_3} = k_4$ ehk $p = k_3 k_4$ (3). Korrutades võrdused (1), (2) ja (3), s.t. vasakud pooled isekeskis ja paremad pooled isekeskis ning seome mõlemad pooled märgiga =:

$$m \cdot n \cdot p = k_1 \cdot n \cdot k_2 \cdot p \cdot k_3 \cdot k_4 \quad (4)$$

Jaganud võrduse (4) mõlemad pooled np-ga, saame

$$m = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4."$$

Näidatakse veel, et muid algarvulisi jagajaid arvul m olla ei saa.

Murdude korrutamise valemi jaoks esitatakse järgmine tõestus.

$$\text{“}\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q} \quad (1)$$

Korrutame selle võrduse pooled avaldisega nq.

Vasak pool	Parem pool
$(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q})nq = (\frac{m}{n} \cdot n)(\frac{p}{q} \cdot q) = mp$	$\frac{mp}{nq} \cdot nq = mp$

Kuna mõlemad tulemused on võrdsed, siis on võrdus (1) õige.”

Punkti koordinaate esitatakse selles raamatus kas sümboliga $M(2 \mid 4)$ või sümboliga $M \equiv (2 \mid 4)$.

Punkti koordinaatide tutvustamisele järgneb selgitus funktsiooni mõiste vajalikkusest:

“Matemaatika lihtsamaid ülesandeid on uurida olenevust suuruste vahel. Muidugi ei saa matemaatika anda ülevaadet iga olenevuse kohta, sest olenevused võivad olla sedavõrd keerukad, et seaduse avastamine on võimatu."

Selgitatakse olenevust rukki hinna ja hulga vahel. Seejärel aga rõhutatakse, et olenevus eksisteerib ka matemaatiliste avaldiste vahel.

Toome lõpuks paar näidet sellegi õpiku ülesannetest.

"Keegi tahtis arvu ruutjuurt leida proovimisega. Kui ta selleks tegi esimese järelkatse, siis sai ta 75 võrra väiksema arvu, kui ta pidi saama; võttis ta aga 3 võrra suurema arvu, siis ületas tulemus 156 võrra selle arvu, mille ta pidi saama. Missuguste arvudega katsetas arvutaja?"

"Kahepoolsele kangile surub tööline kahe käega ühtlaselt, kokku 40 kilogrammiga; käte kaugus kangi pöörlemistäpist on vastavalt 1,75 ja 2,25 meetrit. Kui suure tungi tasakaalustab tööline, kui teada on, et selle tungi rakendustäpi kaugus kangi pöörlemistäpist on 0,75 m?"

* * *

Theodor Koik (1888–1941) sündis Türil. Lõpetas 1916. a. Tartu Ülikooli matemaatika-füüsikateaduskonna, oli aastatel 1913–1918 Viljandi Eesti Haridusseltsi Tütarlaste Gümnaasiumi õpetaja ja ühtlasi 1918–1919 Viljandi linna sekretär. 1918–1919 oli T. Koik Viljandi Maavalitsuse Haridusosakonna juhataja ning 1920–1940 Viljandi Poeglaste Gümnaasiumi direktor. 1940. a. viidi ta üle Paide gümnaasiumi direktoriks ja sealt küüditati 1941. a. Siberisse.

4.1.9. Mõned tähelepanekud H. Jaansoni algebra ülesannetekogudest

Teatavasti mindi Eesti koolis alates 1937. aastast üle standardõpikutele. Rakveres 1938. a. välja antud ülesannetekogu eessõnas märgib autor järgmist: "Tulles vastu paljude iseseisvalt õppivate noorte soovidele, olen püüdnud koostada seesuguse harjutuskogu algebrast, mis võimaldab kergendada tööd eeskätt nendele, kes on sunnitud seda rasket ainet kordama ja teises järjekorras nendele, kes leiavad eneses tahtmist ja hakkamist süveneda nimetatud ainesse iseseisvalt, kõrvalabita."

Neid eesmärke silmas pidades on autor koostanud ülesannetekogu, kus ei puudu ka teoreetilised selgitused. Fikseeritakse õppeteemad, tuuakse esile vajalikud reeglid ning lisatakse vajaduse korral mõned märkused.

Raamatud [Õ, 53 ja 54] sisaldavad kokku neli osa: I – Algebra eesmärk. Arvude tähistamine tähtedega. Matemaatiliste tõekspidamiste tähistamine. Sarnased ülesanded. Valem. II – Relatiivsed arvud. III – Algelised algebralised avaldised. IV Monoomid ja polünoomid. Seega ei ole tutvustatav ainevaldkond, võrreldes kooli algebra kursusega kuigi suur.

Näidetena nendest raamatutest esitame selgitusi, mis on algebra, ning reegli, kuidas negatiivse arvuga korrutada.

"Algebra on matemaatiline teadus, mis õpetab:

a) tähiste ehk sümbolite abil üleskirjutama mitmesuguseid matemaatilisi tehteid ja tõekspidamisi;

b) antud sündmustikust välja lugema selles leiduvaid matemaatilisi tõekspidamisi;

d) muutma tähistest ja arvudest koosnevaid avaldisi teisteks samaväärseteks avaldisteks;

e) leidma sarnaste ülesannete lahendust valemi kujul."

Seega piirdub siin antav algebra kirjeldus ka ainult selle algebrakursuse osaga, mida käsitletakse neis raamatuis.

Nüüd tutvustatakse negatiivse arvuga korrutamise reeglit, mis erineb teistes vaadeldud õpikutes toodud eeskirjast. See on sõnastatud järgmiselt:

"Juhul, kui positiivne või negatiivne arv tuleb korrutamisele negatiivse korrutajaga ..., tuleb võtta teatavaks, et nimetatud korrutamine tähendab algebras tingivalt veidi teistsugust tehet ja nimelt, et mitte korrutatav arv ise, vaid temaga võrdne ja vastupidine arv tuleb liidetavana korrata niimitu korda, mitu ühelist sisaldub korrutaja abisuuruses:

$(+4)\cdot(-5)$ tähendab, et tuleb võtta mitte $(+4)$ vaid (-4) liidetavana 5 korda."

Nendes raamatutes esitatud ülesannetele antakse seal ka vastused ja mitmele ülesandele kogu lahenduskäik.

4.1.10. Algebra standardõpikutest

Haridusministeeriumi kooliosakonna otsuse kohaselt alustati kolmekümnendate aastate teisel poolel kooliõpikute standardiseerimist.

1937. a. tööle asunud Matemaatika Õpetamise Komisjon (vt. II, 2.3) koostas keskkooli (autorid J. Grüntal ja G. Rägo) ning humanitaargümnaasiumi (autorid E. Etverk ja G. Rägo) algebraõpikud. Nende juurde kuulusid ülesannetekogud, mis avaldati harjutustikkude nime all (autorid keskkooli harjutustikul G. Rägo ja A. Vihman ning gümnaasiumi harjutustikel K. Ratassepp ja G. Rägo). Mitmed neist autoreist jätkasid standardõpikute väljaandmist aastatel

1941–1944 ja 1945–1948. Neil aastail ei antud välja eraldi õpikuid ja ülesannetekogusid, vaid kogu materjal esitati ühes raamatus. Samuti tulid ilmsiks mõned väikesed muudatused õpikuis programmide muutmise tõttu (vt. II, 4.2). Üldiselt lakooniline, ilma eriliste autoripoolsete ainealaste või metoodiliste uuendusteta kooliraamat, mis tuli meie kooli 1937. a., jäigi sinna püsima.

Vaatamata sellele, et autorite osas oli ühel või teisel ajavahemikul muudatusi, ei ole seetõttu nimetamisväärselt muutunud õpikute tekst. Järgnevas tabelis on esitatud algebraõpikute autoreid.

Kooli-aasta	Matemaatika kooliraamatute autorid õppeaastatel					
	7.	8.	9.	10.	11.	12.
1937/38–1940/41	G. Rägo J. Grüntal A. Vihman	G. Rägo J. Grüntal A. Vihman	G. Rägo J. Grüntal A. Vihman	G. Rägo E. Etverk K. Ratassepp	G. Rägo E. Etverk K. Ratassepp	G. Rägo E. Etverk K. Ratassepp
1941/42–1943/44	A. Vihman	A. Vihman	K. Maasik K. Ratassepp L. Ruumet G. Rägo	K. Ratassepp L. Ruumet G. Rägo	G. Rägo L. Ruumet	–
1944/45–1948/49	A. Vihman	A. Vihman	A. Vihman L. Ruumet	K. Ratassepp	G. Rägo	–

Järgnevas piirdume peamiselt tähelepanekutega kolmekümnendatel aastatel välja antud kooliraamatutest.

1. Algebra käsitlusest keskkooli õpikus.

Vastavalt programmile sisaldab J. Grüntali ja G. Rägo õpik järgmised peatükid: algebralise sümboolika alged; arvutamise põhiseadused; positiivsed ja negatiivsed arvud; täisavaldised; võrrand; arvutamise abivalemid; arvude ja üksliikmete jaguvus; algebraline murd (esimene tsükkel); ruutjuur, kuupjuur; ruutvõrrand, algebraline murd (teine tsükkel); võrrand-süsteem.

Peatume mõne märkusega peamiselt samade teemade juures, mida on eespoolgi algebra kooliraamatutes esile tõstetud.

Relatiivsete arvude korrutamise juurde minnakse järgmise ülesande kaudu: "Kell jääb 5 sekundit tunni kohta järele, seega tema käigu parandus +5 sekundit tunni kohta. Keskpäeval kell näitas parajasti õiget aega. Missuguse paranduse peab lisandama kella hilisemale näitamisele, ütleme kell +4, et saada õiget aega?"

Edasi selgitatakse, missugust parandust on vaja teha kell −4. Seejärel vaadeldakse samu juhte tingimusel, kui kell käib tunnis 5 sekundit ette. Nii jõutaksegi märkide reeglini relatiivsete arvude korrutamisel.

Et relatiivsete arvude hulka arvatakse ka arv *null*, siis on üksikasjalikult analüüsitud tehted nulliga. Nii näiteks selgitatakse, mis tähendab $a \cdot 0$, kui a on täisarv ning mis tähendab sama korrutis, kui a on murdarv.

Selleks, et saada tähendust kirjutisele $0 \cdot a$, eeldatakse, et kommutatiivsuse seadus kehtib, ning $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

Võrduse ja võrratuse põhiomadused esitatakse siingi aksioomidena. Näiteks olgu toodud liitmisaksioom: "Kui kahe võrdse arvuga liita üks ja sama arv, saame võrdsed tulemused."

Arvutamise abivalemite kehtivust näidatakse ainult algebraliselt. Selles õpikus puuduvad vastavad joonised.

Jaguvustunnuste käsitlemise eel tõestatakse järgmised laused:

"1. Kui kumbki kahest liidetavast jagub mõne arvuga, siis jagub sellega ka nende summa.

2. Kui üks liidetavatest jagub mõne arvuga, teine aga annab selle arvuga jagamisel jäägi, siis liidetavate summa annab selle arvuga jagamisel sama jäägi."

Esimesele lausele tugineb näiteks 4-ga jaguvuse tunnuse selgitamine arvkujust $N = 100s + (10k + u)$ lähtudes ning mõlemale lausele tugineb 9-ga jaguvuse tunnuse põhjendus arvkujust

$$N = n_1 + 10n_2 + 100n_3 + \ ...$$

ehk

$$N = n_1 + (9n_2 + n_2) = (99n_3 + n_3) + \ ...$$

ehk

$$N = (9n_2 + 99n_3 + \ ...) + (n_1 + n_2 + n_3 + \ ...)$$

lähtudes.

Murruga korrutamist selgitatakse põhimõtteliselt samuti, nagu eespool juba mõne õpiku puhul on tutvustatud.

"Kui 1 kg kaupa maksab A krooni, siis

t (täisarv) kg kaupa maksab $t \cdot A$ krooni

$\frac{1}{n}$ kg kaupa maksab n korda vähem, seega $\frac{A}{n}$ krooni

$\frac{m}{n}$ kg kaupa maksab m korda enam, seega $\frac{m \cdot A}{n}$ krooni.

Niisiis juhul $t \cdot A$ korrutatakse arvu A täisarvuga t ja juhul $\frac{m \cdot A}{n}$ leitakse arvust A kui tervikust osa $\frac{m}{n}$. "Et mõlemad küsimused on oma laadilt samased, siis on loomulik nimetada ühe ja sama nimega ka toiminguid nende lahendamiseks. Sel kaalutlusel nimetame osa $\frac{m}{n}$ leidmist arvust A kui tervikust arvu A korrutamiseks murruga $\frac{m}{n}$."

Ruutjuure tutvustamisel tehakse kindlaks, et $\sqrt{A} = a$ ja $\sqrt{A} = -a$. Seejärel aga lisatakse:

"Tahtes ka sümbolit $\sqrt{A}$ mõista ühesainsas tähenduses, lepime kokku tähistada sellega ikka vaid võrrandi $x^2 = A$ positiivset lahendit."

Ruutjuure algoritmi tundmaõppimise eel esitatakse veel järgmine ruutjuure ligikaudse väärtuse arvutamise meetod, kus parandus leitakse eeldusel, et argumendi ja funktsiooni kasvud on võrdelised. Niisiis täpsustatakse ruutjuure väärtust lineaarse interpolatsiooni abil. Tutvustame seda võtet näite abil.

"Leia ruutjuur arvust 350.

Lahendus: Arv 350 asetseb 324 ja 361 vahel. Järelikult otsitav ruutjuur asetseb 18 ja 19 vahel. Võime teda kirjutada kujul $18 + a$, vaadeldes arvu a parandusena, mis tuleb lisada arvule 18 ruutjuure õige väärtuse saamiseks. Ülevaate kergendamiseks kirjutame abitabeli:

x	$y = x^2$
18	324
$18+a$	$350 = 324 + 26$
19	361

Näeme: x-i kasvades a võrra kasvab y 26 võrra, x-i kasvades 1 võrra y kasvab 37 võrra. Kui x- ja y- kasvud oleksid võrdelised, siis oleks

$$\frac{a}{1} = \frac{26}{37}$$

Tegelikult on see vaid ligikaudu nõnda; seepärast

$$\frac{a}{1} \approx \frac{26}{37} \approx 0,7$$

ja seega parandatud x-i väärtus on 18,7."

Seda võtet korratakse ja leitakse, et $\sqrt{350} \approx 18,708$.

Ruutvõrrandite lahendamist alustatakse mittetäielikest ruutvõrranditest. Võrrandi $ax^2 + c = 0$ lahendusmeetod kantakse üle võrrandile $(x+m)^2 = n$. Sellele võrrandi kujule on aga viidav taandatud ruutvõrrand $x^2 + px + q = 0$ ning üldkujulise ruutvõrrandi lahendamine taandatakse taandatud ruutvõrrandi lahendamisele. Muidugi leitakse ka ruutvõrrandi lahendivalemid.

Keskkooli algebraõpiku lõpus on esitatud mõningaid huvitavaid andmeid nii algebra nimetuse tekkeloost kui algebra sümbolite ja tehtemärkide kujunemisest.

Lisame siia mõned näited ülesannetekogust.

"Veskiomanik ehitas veski juurde elektrijaama. Voolu juhtimiseks sealt oma tallu tuli tal ehitada liin; selleks oli muretsetud poste kohale just niipalju, et saaks ehitada liini postivahedega 40 meetrit. Veskiomanik ehitas aga liini postivahedega 45 meetrit ja nii jäi tal 4 posti üle. Kui kaugel oli jõujaam talust?"

"Arvutusvahendite vabrikule läheb valmis arvutusmasin maksma 400 krooni. Vabrik müüb neid masinaid x %-se kasuga kontoritarvete ärile. See laseb masinad müügile 576 krooniga, saades omakorda x% kasu. Kui suur on x?"

"Näita, et $(a+\frac{1}{2})^2 = a(a+1)+\frac{1}{4}$.

Seda valemit sobivalt rakendades arvuta järgmiste avaldiste väärtused:

$$(5\tfrac{1}{2})^2;\quad (13\tfrac{1}{2})^2;\quad 8\tfrac{1}{2})^2;\quad 19{,}5^2;\quad 7{,}5^2;\quad 40{,}5^2."$$

Harjutustiku lõpus antakse 20 kordamistöö ülesanded. Esitame neist ühe näitena.

"Töö nr. 15.

" 1. Arvuta avaldise $\frac{a(b^2-c^2)}{b(a^2-c^2)}$ numbriline väärtus, kui $a = 31{,}4$; $b = 28{,}5$ ja $c = 11{,}8$. Saadus anna sajandikeni.

2. Anna avaldisele $\frac{2\sqrt{5c}\sqrt{12c}}{3c\sqrt{15}}$ võimalikult lihtne kuju.

3. Lahenda võrrand $\frac{2}{7}\{\frac{5}{12}[\frac{7}{8}(\frac{3x}{4}+5)-10]+3\} = 8$.

4. Kui suur peab olema kordaja a võrrandis $3a^2x^2-2ax+a-42 = 0$, et võrrand omaks lahendit 2?

5. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga ümbermõõt on p. Anna valem selle kolmnurga pindala arvutamiseks."

2. Algebra käsitlusest gümnaasiumi õpikus.

Matemaatikaõpik humanitaargümnaasiumile, mille koostasid E. Etverk ja G. Rägo, sisaldab teemasid algebrast, trigonomeetriast, analüütilisest geomeetriast, matemaatilisest analüüsist ning lõpuks veel täiendavaid peatükke. Siin tutvustatakse selle õpiku algebra osa, kuhu kuuluvad järgmised peatükid: aste ja juur, logaritm, read ja rahandusmatemaatika küsimusi ning täiendavaid peatükke: arvu mõiste laiendamine ja arvutamine ligikaudsete andmetega, vaatlusandmete käsitlemine ja konstruktsioonülesanded.

Juurte käsitlemisel, kui on kindlaks tehtud, et negatiivsetel arvudel ei ole paarisarvuliste juurijatega juuri, tehakse järgmine märkus:

"Et oleks võimalik kõnelda arvu nii paarisarvuliste kui ka paaritu-arvuliste juurijatega juurtest erandeid tegemata, selleks eeldame, et juuritav on ikka positiivne arv."

Samuti rõhutatakse siin, et sümbolit $\sqrt[n]{a}$ mõistetakse ikka positiivse arvuna.

Logaritmide käsitlemisel esitatakse näide logaritmi arvutamiseks. Näiteks otsitakse logaritmi arvule 3 kujus

$$x = \alpha + \frac{\beta}{10} + \frac{\gamma}{100} + \dots$$

Proovimise teel tehakse kindlaks, et $\alpha = 0$, siis võrrandi

$$10^{\frac{\beta}{10} + \frac{\gamma}{100} + \dots} = 3$$

mõlema poole astendamisel 10-ga saadakse võrrand

$$10^{\beta + \frac{\gamma}{10} + \dots} = 59\ 049$$

Nüüd saab proovides kindlaks teha, et $\beta = 4$ ja nii jätkates saadakse, et $log\ 3 = 0,47...$

Aritmeetilise ja geomeetrilise rea üldliikme valemid leitakse selles õpikus analoogiale tuginedes.

Rahandusmatemaatika küsimuste käsitlemisel tuletatakse valem kapitali kasvamiseks lihtintressil:

$$K = k(1 + \frac{np}{36000}),$$

kus K on kapitali lõppväärtus n päeva pärast, k on algkapital, mis kannab aastas p % intressi.

Kui nüüd otsitavaks osutub k, siis

$$k \approx \frac{K}{1 + \frac{np}{36000}}.$$

Siin, tuginedes tõsiasjale, et $\frac{np}{36000}$ on väike arv (mitte suurem kui 0,08), siis kasutades valemit

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + \frac{a^2}{1+a} \quad \text{ehk} \quad \frac{1}{1+a} \approx 1 - a$$

saadakse algkapitali kindlaksmääramiseks ligikaudne valem

$$k \approx K(1 - \frac{np}{36000}).$$

Ülesanded algebra osa kohta leiduvad G. Rägo ja K. Ratassepa harjutustikus gümnaasiumi I klassile.

Harjutustikus ei peeta rangelt kinni õpikus fikseeritud seisukohast käsitleda ainult positiivsete juuritavatega juuri. Nii leiduvad siin ülesanded nagu $\sqrt[5]{-1024}$ või $\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}$, mis on muidugi juure definitsiooni abil kergesti lahendatavad. Ülesannete hulgas on ka juurvõrrandid, millede lahendamist õpikus ei käsitleta.

Tutvustame nüüd mõnd ülesannet ridade kohta.

"Aritmeetilise rea esimene liige on $n^2 - n + 1$ ja rea vahe on 2. Näita, et siis n liikme summa on n^3. Kasuta seda tõestuseks, et $1^3 = 1$, $2^3 = 3 + 5$, $3^3 = 7 + 9 + 11$ jne."

"Näita, et geomeetrilise rea liikmete logaritmid moodustavad aritmeetilise rea."

Täiendaváte peatükkide hulgas on "Arvu mõiste arendamine". Loomulike (naturaal-) arvude ja lihtühiku juurest jõutakse kümnendsüsteemist erinevate arvusüsteemide juurde ning käsitletakse ka arvude üleviimist ühest süsteemist teise.

Arvu esitamiseks kümnendsüsteemis soovitatakse kasutada vastavat skeemi. Seda tutvustab järgmine näide, kus arv $(5041)_7$ tuleb esitada kümnendsüsteemis.

$$\begin{array}{cccc} 5 & 0 & 4 & 1 \\ & 35 & 245 & 1743 \\ \hline 5 & 35 & 249 & 1744 \end{array}$$

ja seega $(5041)_7 = (1744)_{10}$.

Tutvustatakse ka aritmeetilisi tehteid teistes arvusüsteemides.

Arvu mõiste laiendamisel tuginetakse permanentsiprintsiibile, mille kohaselt "arvutamise põhiseadused, mille alusel toimuvad tehted loomulikkude arvudega, jäävad püsima ka tehete puhul uute arvudega". Arvude laiendamine ulatub kuni reaalarvudeni *(incl.)*.

Peatükis "Arvutamine ligikaudsete andmetega" tutvustatakse nii absoluutset kui relatiivset viga ja nende ülemmäära leidmist.

Tuginedes tõsiasjale, et väikeste arvude naturaalarvulise astendaja astmed, kus astendaja on 2 või rohkem, on veelgi väiksemad arvud, esitatakse mitu ligikaudset valemit, nagu

$$(1+\alpha)(1+\beta) \approx 1 + \alpha + \beta$$

$$\tfrac{1}{1+\alpha} \approx 1 - \alpha \qquad \tfrac{1+\alpha}{1+\beta} \approx 1 + \alpha - \beta \qquad (1+\alpha)^2 \approx 1 + 2\alpha$$

$$(1+\alpha)^3 \approx 1 + 3\alpha \qquad \sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \tfrac{\alpha}{2} \qquad \sqrt[3]{1+\alpha} \approx 1 + \tfrac{\alpha}{3}$$

Arvutamistulemustele absoluutse vea ülemmäära hindamiseks tuletatakse aga valemid

$$\triangle(a+b) = \triangle a + \triangle b \qquad \triangle(a-b) = \triangle a + \triangle b$$

$$\triangle(ab) = a \cdot \triangle b + b \cdot \triangle a \qquad \triangle\left(\tfrac{a}{b}\right) = \tfrac{a\cdot\triangle b + b\cdot\triangle a}{b^2}.$$

Korrutise ja jagatise relatiivse vea ülemmäära jaoks saadakse valem

$$\frac{\Delta(ab)}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \qquad \frac{\Delta(\frac{a}{b})}{\frac{a}{b}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}.$$

Peatükis "Vaatlusandmete käsitlemine" seletatakse kõigepealt, et aritmeetiline keskmine on mõõdetava juhusliku suuruse tõenäoseimaks väärtuseks.

Vaatlusandmete tabelite põhjal tuletatud seadusi nimetatakse empiirilisteks. Tabeli väärtuspaaridele vastavate punktide asendi kaudu püütakse aga leida vastavate suuruste vahelist funktsionaalset olenevust. Kui punktide asend on ligikaudu sirgjooneline, on põhjust arvata, et otsitavaks funktsiooniks on lineaarne funktsioon. Paljudel juhtudel on aga selleks astmefunktsioon $y = ax^n$, kus n võib olla mistahes ratsionaalarv.

Viimases peatükis "Konstruktsioonülesanded" tutvustatakse tähtsamaid konstruktsiooniülesannete lahendamise võtteid. Esitatakse rida konstruktsioonide näiteid:

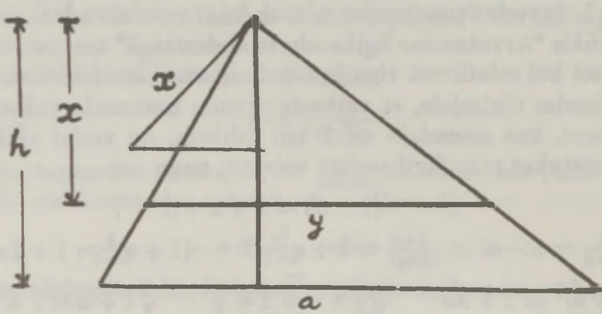
"Joonestada täisnurkne kolmnurk hüpotenuusi c ja sellele ehitatud kõrguse h järgi";

"Joonestada kolmnurk kahe külje ja kolmanda külje poolitaja järgi"

Samuti esitatakse siin mitmete valemite konstruktsioonid.

Toome ühe näite.

"Ülesanne. Antud on kolmnurga alus a ja kõrgus h. Joonesta selles kolmnurgas alusega paralleelne lõik, mis poolitab kolmnurga pindala.



Jn. 22.

Lahendus. Olgu otsitava lõigu kaugus kolmnurga tipust x ja selle lõigu pikkus y (jn. 22). Kolmnurkade sarnasusest järeldub siis, et

$$\frac{y}{a} = \frac{x}{h} \quad \text{ehk} \quad y = \frac{ax}{h}.$$

Et lõik y peab poolitama antud kolmnurga pindala, siis

$$\frac{xy}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ah}{2} \quad \text{ehk} \quad \frac{x \cdot \frac{ax}{h} = 1}{2ah} \quad \text{ehk} \quad 2x^2 = h^2$$

Tulemusest nähtub, et lõik x on võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaatetiks, mille hüpotenuusiks on h."

* * *

Siin käsitletud algebra standardõpikute autoreist oleme enamiku elu ja tegevust juba tutvustanud. Nii leiame vastavaid märkmeid G. Rägo kohta lk. 181, E. Etvergi kohta lk. 114 ja A. Vihmani kohta lk. 140.

Julius Grüntal (1890–1939) sündis Tallinnas. Õppis samas Katariina-nimelises linnakoolis ja Nikolai gümnaasiumis. Küpsuseksamid õiendas Moskvas 1910. a. ning Moskva Ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonna lõpetas 1917. a. Neil aastail töötas ta 3 aastat Moskva Ülikooli Psühholoogia Instituudis ning õpetajatööga tegi algust 1913. a. Zõbini kommertskoolis. 1917–1922 oli gümnaasiumiõpetaja Pensa kubermangus Tšembari linnas. Aastal 1922 asus tööle Tallinna linna II Tütarlaste Gümnaasiumis matemaatikaõpetajana ja 1925 samas inspektorina. 1928. a. nimetati ta Tallinna linna koolinõunikuks kutse- ja keskkoolide alal, 1934. a. Haridusministeeriumi koolinõunikuks ning 1938. a. Haridusministeeriumi koolide peainspektoriks.

Täiendavalt loe: Julius Grüntal *in memoriam.* "Eesti kool" 1939, 4, 203–205.

4.1.11. Algebra standardõpikuist aastatel 1941–1944

Sõjaolud ning suurriikide Saksamaa ja Nõukogude Liidu võimu kehtestamine Eestis ei toonud matemaatika õpetusse esialgu kardinaalseid muudatusi. Õnneks ei tabanud nendel keerulistel aastatel meie koolimatemaatikuid – õpikute autoreid raskemad repressioonid, neile ei saanud saatuslikuks sõjafrondi mitmekordne liikumine läbi Eesti territooriumi ega õhurünnakud Tallinnale ja Tartule. Nii jätkasidki 1937. a. Matemaatika Õpetamise Komisjoni koondunud matemaatikutest mitmed aktiivset tegevust matemaatika kooliraamatute koostamisel ka neil ajul.

Aastatel 1941–1944 olid meie koolides kasutusel A. Vihmani K. Maasiku ja K. Ratassepa algebraraamatud. Et kõik nimetatud isikud kuulusid viimasesse Matemaatika Õpetamise Komisjoni, siis kasutasid nad kõik oma õpikute koostamisel 1938. aasta algebra standardõpikut ja -ülesannete kogu. Nii näiteks kasutas A. Vihman ka J. Grüntali ja G. Rägo matemaatikaõpiku teksti, K. Maasik nii selle õpiku kui ka G. Rägo ja A. Vihmani ülesannetekogu teksti,

K. Ratassepp aga E. Etvergi ja G. Rägo poolt gümnaasiumile kirjutatud õpiku teksti. Seega ei olnud uued isikud ise nüüd väljaantud standardkooliraamatute autoriteks. Ilmselt pidi siin olema omavaheline kokkulepe, sest vastasel korral oleks uusi autoreid juba tol ajal süüdistatud plagieerimises. Et varasem tekst oli nüüd kasutusel ka uutes õpikutes (muudetud oli ainult rahaühikuid), siis ei ole põhjust käesolevas töös juba esitatud standardõpikute ja -ülesannetekogude tutvustamist korrata.

4.1.12. Algebra standardõpikuist aastatel 1945–1950

Aastatel 1945–1949 kasutati koolides veel Eesti autorite õpikuid. Nii ilmusid jällegi A. Vihmani ja K. Ratassepa algebra õpikud. Loomulikult kasutasid autorid nüüd oma eelmise õpiku teksti, s.t. et ka nüüd jätkati suurel määral algebra õpetamist kolmekümnendate aastate lõpul väljatöötatud õpikute järgi. Nüüd olid aga margad ja pennid asendatud rublade ja kopikatega. Mõningate programmi muudatuste tõttu leidub õpikutes ka uusi tekstilõike. Olulist täiendust nad aga eelöeldule ei lisa. Seega ei too algebraõpikud aastatel 1941–1949 aine käsitluses midagi silmapaistvat juurde. Õpikute sisu muutub aga juba järgmisel, s.o. 1949/50. õppeaastal, kui meie koolidesse ilmuvad üleliiduliste õpikute tõlked. Nende ainekäsitluste juures aga käesolevas raamatus ei peatuta.

4.2. Geomeetria kooliraamatud

Geomeetria elementaarsema osa, propedeutilise kursuse käsitlus kuulus algkooli matemaatikakursusesse ja seda on põgusalt eespool, 3. peatükis ka tutvustatud.

Kooligeomeetria süstemaatilist käsitlust on meie koolide õpilastele oma õpikute kaudu tutvustanud Oskar Pärli, Paul Madisson, Edgar Krahn, Karl Rudolf Veski ja Jüri Grünthal, Albert Borkvell, Jüri Nuut, autorite kollektiiv Albert Borkvell, August Kasvand, Felix Laarens, Karl Maasik, Oskar Paas ja Arnold Vihman, edasi Theodor Koik ja Elmar Etverk. Autorite järgi ongi geomeetriaõpikute käsitlus käesolevas paragrahvis jaotatud alaosadeks. Iga autori õpikute tutvustamisel on esile toodud fragmentaarselt mõned huvitavamad vähemtuntud definitsioonid, tõestused ja ülesanded. Esitame siin käesoleva paragrahvi alaosade ning nende juurde kuuluvate õpikute täpsed peakirjad:

1. Geomeetria käsitlus Oskar Pärli õpikuis:

O. Pärli "Ruumi algõpetus I". 1. trükk 1919 (autorid Perli–Nathing), 2. trükk Tallinnas, 1923, 3. trükk Tartus, 1930;

O. Pärli "Ruumi algõpetus ülesandeis II". 1. trükk 1920 (autorid A. Nathing – O. Perli), 2. trükk Tartus, 1926, 3. trükk Tartus, 1930;

O. Pärli "Ruumi algõpetus III. Stereomeetria'. Tartus, 1927.

2. Geomeetria käsitlus Paul Madissoni geomeetriaõpikuis:

P. Madisson, Th. Ussisoo "Planimeetria". Tallinn, 1921;

P. Madisson "Stereomeetria". Tallinn, 1921.

3. Stereomeetria käsitlus Edgar Krahni õpikus:

E. Krahn "Stereomeetria ühes kujutava geomeetriaga". Tallinnas, 1922.

4. Karl Rudolf Veski jt. geomeetria kooliraamatud.

K.R. Veski, J. Grünthal "Planimeetria (K.N. Raševski järele)". Tartu, 1923;

K.R. Veski, J. Grünthal "Stereomeetria (K.N. Raševski järele)". Tartu, 1922, 2. tr. 1924;

K.R. Veski, A. Raudsepp "Planimeetria ülesannete kogu". Tartu, 1924;

K.R. Veski, J. Verendel "Stereomeetriliste ülesannete kogu". Tartu, 1923.

5. Stereomeetria käsitlus Albert Borkvelli õpikus:

A. Borkvell "Stereomeetria. Õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele". Tartu, 1927.

6. Geomeetria käsitlusest Jüri Nuudi õpikuis:

J. Nuut "Geomeetria keskkoolidele I. (Esimese klassi kursus)". Tartu, 1932;

J. Nuut "Geomeetria keskkoolidele II. (Teise klassi kursus)". Tartu, 1932;

J. Nuut "Geomeetria keskkoolidele III. Stereomeetria ja trigonomeetria. (III, IV ja V klassi kursus.)" Tartu, 1933.

7. Geomeetria käsitlus autorite kollektiivi A. Borkvelli, A. Kasvandi, F. Laarensi, K. Maasiku, O. Paasi ja A. Vihmani õpikutes:

A. Borkvell jt. "Keskkooli geomeetria I. Õpperaamat III klassile". Tartu, 1936, 2. trükk, 1937, 3. trükk, 1940.

A. Borkvell jt. "Keskkooli geomeetria II. Õpperaamat IV klassile". Tartu, 1936;

A. Borkvell jt. "Keskkooli geomeetria III. Õpperaamat V klassile". Tartu, 1936, 2. trükk, 1940.

8. Geomeetria käsitlus Theodor Koigi õpikus:

Th. Koik "Matemaatika õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele II. Algebra ja geomeetria. III kl. kursus". Viljandis, 1936.

9. Geomeetria käsitlusest Elmar Etvergi õpikuis:

E. Etverk "Geomeetria. Õpperaamat III klassile". Tallinn, 1936;

E. Etverk "Geomeetria. Õpperaamat IV klassile". Tallinn, 1936;

E. Etverk "Geomeetria õpperaamat V klassile". Tallinn, 1937;

E. Etverk "Geomeetria õpik gümnaasiumi I klassile". Tartu, 1942;

E. Etverk "Geomeetria õpik gümnaasiumi II klassile". Tartu, 1942;

E. Etverk "Stereomeetria õpik gümnaasiumi III klassile". Tartu, 1943;

E. Etverk "Geomeetria. Keskkooli VIII klassile". 1945, 1946, 1948, 3. täiendatud trükk;

E. Etverk "Geomeetria. Keskkooli IX klassile". 1945, 1946;

E. Etverk "Stereomeetria. Keskkooli XI klassile". 1945, 1946;

E. Etverk, B. Tiikma "Geomeetria. Keskkooli IX klassile". 1946, 1948, 2. täiendatud trükk.

4.2.1. Geomeetria käsitlus Oskar Pärli õpikuis

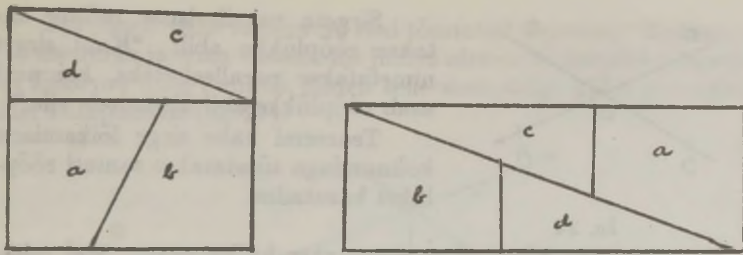
Eespool juba aritmeetika ja algebra kooliraamatute autorina tuttavaks saanud Oskar Pärli andis välja kolmeosalise geomeetriaõpetuse "Ruumi algõpetus".

Esimese raamatu eessõnas juhitakse lugeja tähelepanu sellele, et paralleeljoonte käsitlus selles õpikus põhineb rööplükkel ja mitte sümmeetrial. Samuti märgitakse, et dir. J. Sütt on raamatusse lisanud 20 praktilist ülesannet.

Alustatakse näitega ruudu tükeldamisest ja selle osade kokkupanemisest ristkülikuks, kusjuures nende pindalad on ootamatult mittevõrdsed – vastavalt 64 ja 65 pinnaühikut (jn. 23). See näide illustreerib silmanägemise puudulikkust ning seepärast lisataksegi, et "meie kõige teravamaks ja täpsemaks abiriistaks on meie mõistus". Temale baseerub põhimõistele, definitsioonidele, aksioomidele ja teoreemidele tuginev geomeetria käsitlus.

O. Pärli fikseerib esialgu 9 järgmist aksioomi:

1. Ühe suuruse asemele võidakse panna temaga võrdne suurus.



Jn. 23.

2. Kui kahest suurusest on kumbki eraldi võrdne kolmandaga, siis on nad võrdsed isekeskis.

3. Tervik on suurem kui ükski tema osa.

4. Tervik on kõigi oma osade summa.

5. Kui võrdsed suurused liita võrdsete suurustega, siis saame võrdsed suurused.

6. Kui võrdsetest suurustest lahutada võrdsed suurused, siis jäävad järele võrdsed suurused.

7. Kui võrdsed suurused liita võrratute suurustega, siis saame võrratud suurused, nimelt see summa on suurem, milles üks liidetav on suurem.

8. Kui võrratutest suurustest lahutada võrdsed suurused, siis on jäägid võrratud, nimelt kus enam oli, seal jääb ka enam järele.

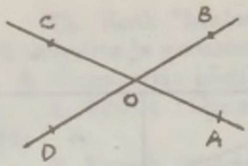
9. Kui võrdsetest suurustest lahutada võrratud suurused, siis on jäägid võrratud; seal jääb enam järele, kust vähem ära võeti.

Tutvustatakse nii "otseteoreemi", "ümberpöördud teoreemi", "otseteoreemi vastasteoreemi" ja "ümberpöördud teoreemi vastasteoreemi", millest nagu selgub, on viimane esimese järeldus ning kolmas teise järeldus.

Asudes sirgete ja nurkade käsitlemisele, täiendatakse aksioome lausega "Läbi kahe punkti on mõeldav üksainus sirge joon" ehk "Sirglõik on kõige lühem tee kahe sirge vahel".

Nurka defineeritakse pöördena: "Kui kaks kiirt lähtuvad ühest punktist, siis nimetatakse nendest kiirtest moodustatud nurgaks seda pöörde suurust, mille abil võib üht kiirt viia teise kiire asendisse".

Tippnurkade võrdsus järeldubki sellest definitsioonist, sest seesama pööre, mis *OB* viib kiire *OA* asendisse, viib ka *OD* kiire *OC* asendisse (jn. 24).



Jn. 24

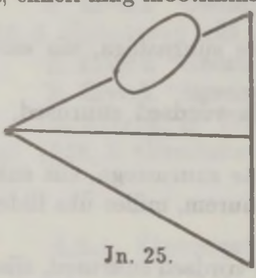
Sirgete paralleelsuse mõiste antakse rööplükke abil: "Kaht sirget nimetatakse paralleelseteks, kui neid saab rööplükke abil ühtimisele viia."

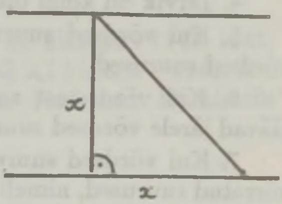
Teoreemi kahe sirge lõikamisest kolmandaga tõestatakse samuti rööplüket kasutades.

Kolmnurkade käsitlemist alustatakse hulknurgast. Seal esitataksegi ilmselt J. Süti maastikul mõõtmise ülesandeid. Toome neist mõned näited.

"Looduses sihitikkude abil valitud nurk jagada pooleks mõõdulindi abil."

"Mõõta looduses ligipääsmatu punkti kaugus sihi pööramise teel nurkriista, ekkeri ning mõõtrihma abil" (jn. 25).


Jn. 25.



Jn. 26.

"Mõõta jõe laius sihi pööramise teel 90° võrra" (vt. jn. 26).

Maastikul mõõtmise ülesandeid antakse ka kolmnurkade kongruentsuse (ühtivuse) käsitlemisel.

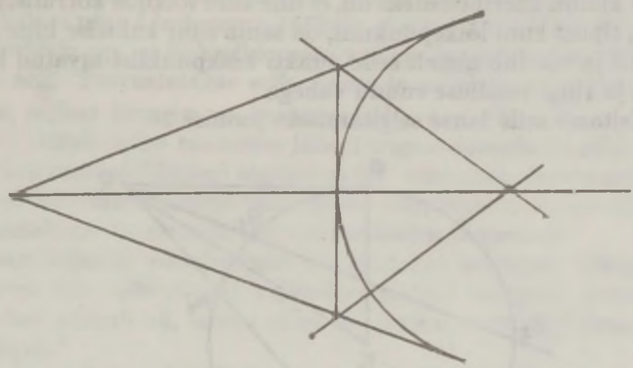
Küllalt rõhutatult on selles õpikus esitatud konstrueerimisülesanded. Nii näiteks tuleb konstrueerida kolmnurk, kui on antud külg b, külje a poolitaja m_a ja nendevaheline nurk. Konstrueerimisele järgneb ka põhjendus.

Nelinurkade peatükis tõestatakse teoreem hulknurga välisnurkade summa kohta pöörde abil, vaadates hulknurka kui kinnist murdjoont, mida mööda liigub punkt.

Selles raamatus on tutvustatud ka sümmeetriat. Korrapäraseid hulknurki defineeritaksegi sümmeetria abil järgmiselt: "Hulknurka nimetatakse korrapäraseks, kui tal on nii mitme kordne kesksümmeetria, kui mitu külge tal on."

Ringjoone käsitlemisel võetakse vaatluse alla ka kontsentrilised ja ekstsentrilised ringjooned ning tutvustatakse nende välimisi ja sisemisi ühiseid puutujaid.

Suhteliselt vähe tuntud on seal tõestatud teoreem: "Kolmnurga ühe sisenurga ja tema vastaskülje juures olevate välisnurkade poolitajad lõikuvad ühes punktis, nimelt selle vastaskülje külge joonistatud ringi keskpunktis (jn. 27)."



Jn. 27.

O. Pärli teine raamat "Ruumi algõpetus II" algab sirglõikude mõõtmisest. Selgitatakse ühismõõduga ja ühismõõduta lõikude olemasolu. Näiteks selgub, et ruudu diagonaalil ja küljel puudub ühismõõt.

Pindalade mõõtmisel tõestatakse esmalt ristküliku pindala valem ning seejärel rööpküliku, kolmnurga ja trapetsi pindala valemid.

Kui jõutakse ringi sisse ja ümber joonestatud korrapäraste hulknurkadeni, siis tõestatakse, et ringi puutujahulknurk võrdub selle hulknurga poole ümbermõõdu ja raadiuse korrutisega. Edasi tõestatakse Eukleidese ja Pythagorase teoreemid.

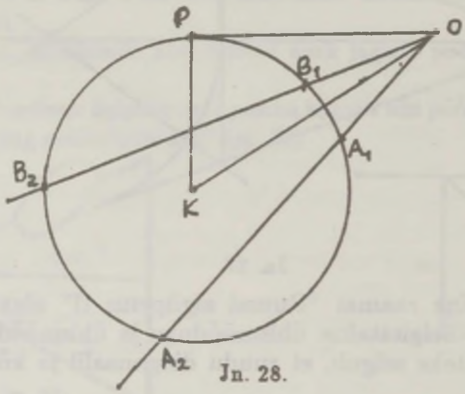
Küllalt suurt tähelepanu on omistatud kiirte lausetele. Neid tutvustatakse ka üldkujul. Esimese kiirtelause esimene osa on järgmine: "Rööpsirgete parv jagab kiirte kimbu võrdelisteks lõikudeks" ja sama lause teise osa sõnastus on: "Kiirte kimp lõikab ära rööpsirgete parvest lõigud nii, et kahe kiire vahel olevad lõigud on võrdelised kiirte lõikudega, arvatud kimbu tipust kuni vastava rööpsirgeni". Veel esitatakse lause, et "Kolmnurgas sama tipu juures oleva sise- ja välisnurga poolitajad jagavad vastaskülje harmooniliselt."

Selles raamatus esitatakse trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid.

Hulknurkade sarnasuse ja kolmnurkade sarnasuslausete järgi antakse hulknurkade sarnasusasendi mõiste: "Hulknurgad on sarnasusasendis, kui nende küljed on paarikaupa paralleelsed ja vastavate tippude ühendussirged lähevad läbi ühe punkti. Seda punkti nimetatakse sarnasuspunktiks."

Teine kiirte lause esitatakse järgmises sõnastuses: "Ringjoon lõikab kimbu kiired osadeks nii, et ühe kiire lõikude korrutis, arvatud kimbu tipust kuni lõikepunktini, on sama suur kui teise kiire lõikude korrutis ja võrdub nimelt selle punkti keskpunktist arvatud kauguse ruudu ja ringi raadiuse ruudu vahega."

Esitame selle lause selgitamiseks joonise 28.



Jn. 28.

Sealt näeme, et

$$OA_1 \cdot OA_2 = OB_1 \cdot OB_2 = OK^2 - PK^2 (= OP^2).$$

Tutvustatakse ka kuldlõiget.

Järgnevas arendatakse täisnurksete ja kaldnurksete kolmnurkade lahendamise teel trigonomeetriliste funktsioonide rakendamise oskusi.

Korrapäraste hulknurkade käsitlemisel avaldatakse kõõlhulknurga ja puutujahulknurga külgede kahendamise valemid. Kõõlhulknurga puhul on see valem järgmine

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2Rr_n} \text{ ja } \underset{n \geq 1}{a_{3\cdot 2^n}} = R\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}_{n-2}},$$

kus R on ümberringjoone raadius ja r_n on n-nurga apoteem.

Ringjoone pikkuse ja ringi pindala valemi tuletamise juures tutvustatakse ringjoone sirgestamise ja ringi ruutimise küsimusi, s.t.

kuidas konstrueerida sirglõik, mille pikkus võrduks antud ringjoone pikkusega ja kuidas konstrueerida antud ringiga pindvõrdne ruut. Ülesanded taanduvad lõigu konstrueerimisele, mille pikkus on π. Siin tehakse teatavaks, et Lambert näitas 1761. aastal, et π on irratsionaalarv ning Lindemann 1882. a., et π on transtsendentne arv. Sellest järeldub aga, et lõik pikkusega π ei ole konstrueeritav sirkli ja joonlaua abil. Tutvustatakse selle ülesande mõningaid ligikaudseid lahendusi, millest lihtsaim on konstrueerida $\pi \approx \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Edasi jätkub selles raamatus jällegi trigonomeetria käsitlus.

O. Pärli raamat "Ruumi algõpetus III" tutvustab stereomeetriat. Sellest käsitlusest äratab tähelepanu rööplükkele olulise tähelepanu omistamine ka ruumis. See defineeritakse järgmiselt:

"Ruumikujundi rööplükkeks nimetatakse niisugust liikumist, mille juures üks selle ruumi kujundiga seotud tasapind iseennast mööda edasi nihkub nii, et üks sellel tasapinnal asuv sirge iseennast mööda liigub."

Tuuakse esile ka rööplükke omadused. Need on järgmised:

"1. Kui meil teada on liikuva kujundi üheainsa punkti koht, siis on ka kõigi teiste punktide kohad meil teada.

2. Ruumikujundi rööplükkel kujutab liikuva kujundi iga punkt sirge, mida me võime vaadata kui liugumissirget; seepärast on olemas lõpmata palju liikumatuid liugumissirgeid ja igaüht mööda nihkub edasi liikuv liugumissirge.

3. Iga tasapind, millel asub liugumissirge, liugub iseennast mööda, näiteks tõstetooli ukse tasapind.

4. Kaks liugumissirget on rööbikud.

5. Liugumissirgega mitterööbik sirge moodustab omal rööplükkel tasapinna.

6. Kõik liikuva kujundi punktid nihkuvad rööplükkel sama pikkuse lõigu võrra edasi."

Selles raamatus on käsitletud ka kujundite sümmeetriat ruumis. Kehade defineerimisel lähtutakse vastavate pindade ja ruumide defineerimisest. Näiteks lähtudes silinderpindadest defineeritakse silinderruum kui silinderpinnaga piiratud ruumi osa ning silinderruumi lõikamisel kahe paralleelse tasapinnaga saadakse silinder.

O. Pärli geomeetria käsitlus on väga mahukas. Ilmselt on ta kasutanud eeskujuna tsaariaegse reaalgümnaasiumi geomeetri kursust.

* * *

Oskar Pärli elukäiku tutvustasime lk-l 99.

4.2.2. Geomeetria käsitlusest Paul Madissoni geomeetriaõpikuis

P. Madisson tehnikumiõpetajana pidas õpikute koostamisel silmas eelkõige selle kooli vajadusi. Ta kirjutabki raamatu eessõnas "Raamat on mõeldud eelkõige tehnika-, põllutöö- ja teiste kursuste õpilastele. On katsutud kõik vähem-tähtis välja jätta ja on ainult kõige tarvilikumad teoreemid toodud."

Selle õpiku algul ei rõhutata aksioomide olemasolu, vaid tõstetakse esile näiteks järgmised laused märksõnaga "Meelespidamiseks": "Kahe punkti vahel võib ainult ühe sirgjoone tõmmata", "Kahe punkti vahel on sirgjoon kõige lühem tee". Teoreemiks nimetatakse aga tõde, mis selgub meile pikemate loogiliste arutluste ja järelduste abil. Lisatakse, et teoreem jaguneb kolme ossa: oletus, väide ja tõestus.

Siiski rõhutatakse veel, et teoreemi tõestamisel võib "järgmiste sagedaste tarvitatavate tõsiasjade peale põhjendada". Ja need tõsiasjad on:

"1) Kui kaks suurust üksikult võetud võrduvad kolmandale suurusele, siis võrduvad nad teineteisele" ja

"2) Kui $a = b$, siis $a + c = b + c$ ja $a \cdot c = b \cdot c$"

Kolmnurkade käsitlemisel tutvustatakse ühtivust ja sümmeetriat. Viimast selgitatakse järgmiselt: "Oletame nüüd, et ühe kujundi osad järgnevad vastupidises korras teise kujundi osadele. Niisugust kujundite seisukohta nimetatakse sümmeetriliseks seisukorraks." Sellele lisatakse, et peegelpilt on oma kujundiga sümmeetrilises seisukorras.

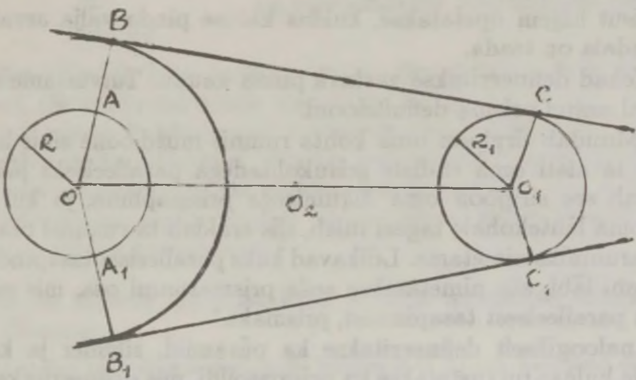
Kolmnurkade kongruentsuslausetele lisatakse ka järeldused. Näiteks "külg – nurk – külg"- tunnusest järeldatakse, et "sarikkolmnurgas jagab võrdsete külgede vahel olev bisektor selle nurga vastaskülje pooleks ja on temale perpendikulaarne". Veel järeldatakse seal, et "igas kolmnurgas on võrdsete külgede vastas võrdsed nurgad ja ümberpöördult – võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed".

Nelinurkade käsitlus on traditsioonilisele vastupidine. Alustatakse trapetsist, järgnevad rööpkülik, romb, ristkülik ja ruut.

Pindala leidmist alustatakse aga ristkülikust ja selgitatakse ristküliku pindala valemi kehtivust ka murdarvuliste mõõtmete korral.

Pythagorase teoreemi käsitlus on samasugune kui mõnedes aritmeetikaõpikutes juba tundma õppisime. Algul selgitatakse seose olemasolu täisnurkse kolmnurga juures, mille küljed on 3, 4 ja 5 ühikut. Otsitav seos leitakse väikeste ruutude loendamisega. Seejärel veendutakse selle seose kehtivuses võrdhaarses täisnurkses kolmnurgas ning lõpuks mistahes täisnurkses kolmnurgas.

Teema, mida P. Madissoni õpikus käsitletakse, kuid teistes siin tutvustavates õpikutes puudub, on "Kahe ringi vastastikused asendid". Vaatleme siinkohal ülesannet, kus kahele ühist punkti mitteomavale ringjoonele tuleb konstrueerida ühine välimine puutuja (jn. 29).



Jn. 29.

"Antud on ringid keskpunktidega O ja O_1 ning raadiustega R ja R_1. Ühendame O ja O_1 joonlõiguga ja joonestame nende keskpunktist O_2 abiringi, mille raadius $OO_2 = O_2O_1$. Nüüd võtame antud ringide raadiuste vahe ja joonistame keskpunktist O ühiskeskse ringi, mis lõikub abiringiga punktides A ja A_1. Ühendame punktid O ja A ning O ja A_1 ja pikendame need ühendajad kuni uute lõikepunktideni B ja B_1. Nüüd tõmbame punktist O_1 joonlõigud O_1C ja O_1C_1, mis joonlõikudele OB ja OB_1 vastavalt paralleelsed. Ühendame punktid B ja C ning B_1 ja C_1, siis on need joonlõigud BC ja B_1C_1 antud ringide riivajad."

Sirgjoone ja tasapinna mõisteid tutvustatakse järgmiste kirjeldustega:

"Kui punkt ruumis ilma sihi muutmata liigub, siis sünnib sirgjoon." "Kui sirgjoon kõigi oma punktidega ehk ühe oma punkti ümber ruumis teise sirgjoone sihis liigub, siis sünnib tasapind."

Kiivsirgeid nimetatakse selles õpikus ebaõnnestunult ristuvateks.

Kaldjoone ja tasapinna käsitlemisel tutvustatakse ka projektsiooni mõistet ning esitatakse järgmised omadused:

"On väljaspool tasapinda asuvast punktist tõmmatud tasapinnale perpendikulaarjoon ja kaldjooned, siis:

1) on perpendikulaarjoon igast kaldlõigust lühem;

2) kaldjooned, mille projektsioonid on võrdsed on ka ise võrdsed;

3) pikemale projektsioonile vastab pikem kaldjoon;

4) iga kaldjoone projektsioon võrdub kaldjoone pikkuse ja kaldenurga koosinuse kasvatisega."

Pisut hiljem õpetatakse, kuidas katuse pinda välja arvata, kui lae pindala on teada.

Kehad defineeritakse vastava pinna kaudu. Tutvustame siinkohal seal antud prisma definitsiooni.

"Muudab sirgjoon oma kohta ruumis murdjoone sihis liikudes nii, et ta alati oma endiste seisukohtadega paralleelseks jääb, siis sünnitab see sirgjoon oma liikumisega prismapinna, ja kui ta lõpuks oma lähtekohale tagasi tuleb, siis eraldab ta ruumist osa, mida prismaruumiks nimetame. Lõikavad kaks paralleelset tasapinda prismaruumi läbi, siis nimetatakse seda prismaruumi osa, mis piiratud kahest paralleelsest tasapinnast, prismaks."

Analoogiliselt defineeritakse ka püramiid, silinder ja koonus. Kehade hulgas tutvustatakse ka prismatoiidi, mis defineeritakse järgmiselt: "On geomeetrilise keha alusteks kahe paralleelse tasapinna osad, mis aga kongruentsed ega taolised ei pruugi olla ja külgpinna sünnitavad kolm- ja nelinurgad, siis nimetatakse niisugust keha tasapindseks prismatoiidiks."

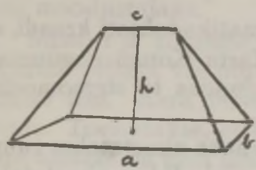
Selgub, et kõik tundmaõpitud kehad peale kera on prismatoiidi erikujud.

Keraga tutvumisel õpitakse tundma ka sfäärilist kaks- ja kolmnurka.

Selles õpikus käsitletakse kehade kongruentsust, taolisust ja võrdmahtsust. Viimane tugineb Cavalieri printsiibile. Kehade kongruentsust ja taolisust, s.t. sarnasust on defineeritud järgmiselt: "Kehad on kongruentsed, kui neid üksteise sisse võid panna, et nad ühte langevad kõikide oma vastavate osadega. Taolised on nad siis, kui kõik nende vastavad servad proportsionaalsed, vastavad tahud taolised kujundid ja vastavad kahetahulised nurgad võrdsed on."

Lahendatakse pindala ja ruumala arvutamise ülesandeid ka niisuguste prismade puhul, mis on läbi lõigatud põhjadega mitteparalleelse tasapinnaga. Veel leiame selles õpikus ülesandeid õõnessilindri kohta. Tuuakse ka vastavad valemid. Prismatoiidi mahu arvutamiseks tuletatakse valem

$M_{prist.} = \frac{h}{6}(P_a + P_{\ddot{u}} + 4P_k)$, kus P_a ja $P_{\ddot{u}}$ on aluspinnad ning P_k kesklõike pindala, h aga prismatoiidi kõrgus.



Jn. 30

Sellest valemist leitakse ka kiilu maht (jn. 30):

$$M_{kiil} = \frac{h \cdot b}{2}\left(\frac{2a+c}{3}\right) \text{ ja kui } c = a, \text{ siis}$$
$$M_{kiil} = \frac{h \cdot b \cdot a}{2}.$$

Kehade mahtude ja pindalade käsitlemisel tutvustatakse Archimedese lauset:

"On silindri, kera ja koonuse raadiused võrdsed ja kõrgused võrdsed, siis suhtuvad nende mahud nii kui 3 : 2 : 1."

Veel leiame P. Madissoni raamatust Guldini laused:

"Pöördkeha külgpind võrdub kujutavjoone enese pikkuse ja selle joone raskuspunkti tee pikkuse kasvatusega."

"Pöördkeha maht võrdub kujutavpinna enese ja selle pinna raskuspunkti tee kasvatusega."

Nende lausete rakendamiseks antakse lahendada näiteks järgmine ülesanne:

"Laseme kera segamendi, mille kõrgus $h = 27$ cm, kerapind ees $+4°C$, vette, siis vajub ta nii sügavale, et lagipunkt asub 21 cm sügavusel veepinna all; vastupidi vette lastult jääks sama punkt 12 cm veepinnast kõrgemale. Leida segamendi maht ja aine erikaal."

P. Madissoni stereomeetriaõpiku eessõnas tuuakse väljavõte *cand. math.* J. Kiiveti arvamusest selle õpiku kohta. Seal on öeldud: "Autor on oma tööd hoolega teinud, ja kõigeti tublit stereomeetria õpperaamatut võib igas koolis julgesti tarvitada."

* * *

Paul Madisson (1883–?) sündis Valgamaal Leebiku vallas. Õppis samas vallakoolis, Helme kihelkonnakoolis, Kolga ministeeriumikoolis. Lõpetas pedagoogilised kursused Paide linnakooli juures 1905. a. Õppis Peterburi rahvaülikooli polütehnilistel kursustel 1910–1914 ja 1918. Töötas õpetajana Soosaare, Lahmuse ja Vigala-Peru vallakoolides ning Peterburi Eesti Haridusseltsi II jaoskonna koolis (1908–1918). Oli Eesti Vabariigi Haridusministeerumi kooliosakonna sekretär (1921–1923) ning seejärel Riigi Ühistehnikagümnaasiumi õpetaja.

4.2.3. Stereomeetria käsitlus Edgar Krahni õpikus

Üks esimesi eestlasi, kes kaitses matemaatikadoktori kraadi, oli E. Krahn. Tema põhitöökohaks oli aga Tartu Kommertsgümnaasium ning sealseid vajadusi arvestades kujundas ta stereomeetria kooliraamatu.

Õpik algab keha ja pinna mõistest. Kehaks nimetatakse ruumi osa, pinnaks ruumi kahe osa vahel olevat piiri. Edasi nimetatakse pinda tasapinnaks juhul, kui sirgjoon, millel on pinnaga kaks ühist punkti, asub kõigi oma punktidega sellel pinnal. Siit järeldatakse, et tasapinnal võib läbi iga tema punkti igas sihis sirgjooni tõmmata ja kui sellele lisandub juba teadaolev tõsiasi, et sirgjoon on lõpmatu joon, siis järeldub siit, et tasapind on piiramatu pind.

Seejärel rõhutatakse, et käsitledes kehi, me vaatleme ainult piiratud osa lõpmatust kehapinnast. Vaheküsimustega sunnib autor lugejat teksti hoolikalt lugema. Näiteks, kui läbi sirgjoone kujutatakse tasapind ja teda hakatakse pöörama sirgjoone kui telje ümber, siis küsitakse lugejalt: "Mitu seisu võib saada seejuures tasapind?" Antakse ka vastus.

Kui nüüd tahetakse näidata, et sirgjoone ja väljaspool sirgjoont asuva punktiga on määratud tasapind, siis kujutatakse läbi sirgjoone tasapind ja hakatakse seda pöörama, kuni ta läheb läbi antud punkti. Tasapinda määravate juhtudega tutvumise järel on antud ülesanne: "Seleta, mispärast on uksel kaks hinge ja mispärast meie saame teda ühe riiviga kinni panna?"

Vastastikuste asendilausete hulgas on esimeseks tõestatavaks lauseks: "Kaks lõikuvat ja tasapinnaga T paralleelset sirgjoont a ja b määravad tasapinnaga T paralleelse tasapinna S."

Kehade käsitlemisel defineeritakse silinder ja koonus vastavaid pindu kasutades, kuid tahkkehad defineeritakse tahkude järgi. Näiteks: "Prismaks nimetatakse niisugust tahkkeha, mille kaks tahku on hulknurgad paralleelsete külgedega ja teised tahud parallelogrammid."

Silindri definitsioon on aga järgmine: "Keha, mis on piiratud silindrilise pinnaga ja kahe paralleelse tasapinnaga nimetatakse silindriks."

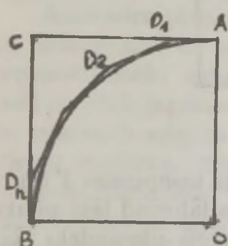
Kehade pindalade leidmise eeskirju esitatakse taandatult tasapinnalisele kujundile. Näiteks:

"Prisma külgpind võrdub niisuguse parallelogrammi pinnaga, mille aluseks on prisma perpendikulaarse lõike ümbermõõt ja kõrguseks prisma külgserv."

"Püsttüvikoonuse külgpind võrdub trapetsi pinnaga, mille alused võrduvad tüvikoonuse alusringide pikkustega ja kõrgus tüvikoonuse moodustajaga."

Silindri ja koonuse külgpindala valemini jõutakse vastava korrapärase prisma või püramiidi külgtahkude arvu piiramatu suurendamise teel. Kera pindala valemini jõutakse vöö pindala valemi kaudu. Tõestatakse, et kera vöö pind võrdub silindri külgpinnaga, mille aluseks on kera suurring ja kõrguseks kera vöö kõrgus. Seejärel antaksegi kera pindala valem: "Kera pind võrdub suure ringjoone pikkuse ja kera läbimõõdu kasvatisega".

Viimase lause tõestamiseks joonestatakse ümber ringi veerandi ruut ja murdjoon (jn. 31) nii, et selle äärmised lõigud oleksid vastavalt paralleelsed OA ja OB-ga.



Jn. 31

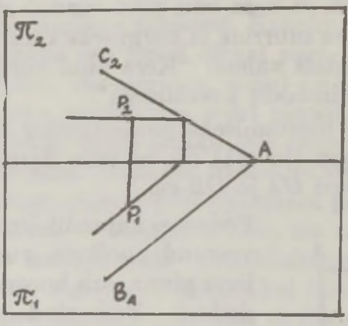
Pöörates kujundit ümber OA, tekitab ringi veerand poolkera, ruut silindri ja murdjoon pinna, mis koosneb tüvikoonuse pindadest. Vöö pindala leidmisel on näidatud, et nende tüvikoonuste pindalade summa võrdub selle silindri külgpindalaga. Kui murdjoone külgede arvu muuta nüüd kuitahes suureks ja selle iga lõik kuitahes väikseks, siis murdjoone poolt kujutatud pind läheneb poolkera pinnale. Seega on poolkera pindala võrdne silindri külgpindalaga ja terve kera pindala võrdub siis niisuguse silindri külgpindalaga, mille põhja raadiuseks on kera raadius ja kõrguseks kera läbimõõt, s.t.

$$P = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi r^2.$$

Palju ruumi on E. Krahn oma raamatus pühendanud kujutavale geomeetriale. Sealt leiame tuntumaid teemasid, nagu tsentraalprojektsioon, paralleelprojektsioon, kehade paralleelprojektsioon. Vähem tuntud on aga näiteks püstprojektsiooni kasutus.

Toome sellest osast ühe näite. Antakse kõigepealt järgmine selgitus:

"Kui sirgjoon AB asub tasapinnas T ja on seejuures paralleelne projektsiooni tasapinnaga π_1, siis on tema teine projektsioon paralleelne teljega ja esimene projektsioon paralleelne esimese jälgjoonega. Kujutavat joont AB nimetatakse sel juhul tasapinna T esimeseks peajooneks. Sirgjoon, mis asub tasapinnas T ja on paralleelne projektsioonitasapinnaga π_2, nimetatakse tasapinna teiseks peajooneks; tema esimene projektsioon on paralleelne teljega ja teine teise jälgjoonega." Vaatleme nüüd veel ülesannet, mis tugineb eelöeldule (vt. ka joonist 32):



Jn. 32.

"On antud tasapinna T jälgjooned AB_1 ja AC_2 ja tasapinnas T asuva punkti P projektsioon P_1. Leia peajooned, mis lähevad läbi punkti P". Joonisel on esimene peajoon esitatud. Lugeja ülesandeks jääb sinna kujutada teine peajoon.

Kujutava geomeetria ülesannetega minnakse kuni joonise loomuliku kuju leidmiseni tema projektsioonide abil.

Õpiku lõpus käsitletakse ruumala mõõtmist. See algab risttahuka ruumalast, kui mõõtmed on

1) täisarvulised;

2) murdarvulised ja

3) irratsionaalarvud.

Cavalieri põhilause abil tõestatakse, et iga prisma ruumala võrdub aluspinna ja kõrguse korrutisega ning et "kera maht võrdub keha mahuga, mille saame, kui silindrist, mille aluse raadius ja kõrgus võrduvad kera raadiusega, lõikame välja koonuse samasuure aluse ja samasuure kõrgusega". Lõpuks tutvustatakse Simpsoni valemit nii pindala kui ruumala ligikaudseks arvutamiseks. Käsitletakse veel mitmetahulisi nurki ja Euleri lauset tahkkehadest ($t - s + h = 2$, kus t on kumera tahkkeha tippude arv, s tema servade arv ja h tema tahkude arv) ning korrapäraseid tahkkehi.

* * *

Edgar Krahn (1894–1961) sündis Tartumaal Laiuse vallas. Õppis 1904–1912 Tartu Aleksandri Gümnaasiumis ning 1912–1917 Tartu Ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonnas. 1918 omistati samas matemaatikakandidaadi kraad. 1922–1925 ja 1928 oli ennast täiendamas Saksamaal Göttingeni Ülikoolis, seal valmis 1926. a. ka doktoriväitekiri. Töötas matemaatikaõpetajana. (Lähemalt vt. IV osa).

4.2.4. Karl Rudolf Veski jt. geomeetriaraamatud

K.R. Veski koos J. Grünthaliga andsid peale oma algkooli matemaatikaraamatute välja ka geomeetriaõpikud "Planimeetria" ja "Stereomeetria", mis olid küll rohkem K. Raševski venekeelsete raamatute tõlked. Tutvustame mõningaid nende õpikute iseärasusi.

Alustades planimeetriakursust põhimõistete ja definitsioonidega, märgitakse, et geomeetrilisi kehi, pindu ja jooni nimetatakse geomeetrilisteks suurusteks. Nende hulka ei kuulu punktid, sest "neil puudub jagatavuse omadus". Teoreemiks nimetatakse aga "tõde, mis saab selgeks pärast tõestamist". Sirgjoone all mõistetakse esialgu sirglõiku. Aksioomiga "sirglõiku võib mõlemale poole lõpmatuseni pikendada" jagunevad sirglõigud lõplikeks ja lõpmatuteks. Puudub kiire mõiste. Nii nimetatakse nurgaks "joonist, mille moodustavad kaks ühest ja samast punktist välja minevat sirget". Veel antakse lähisnurkade mõiste järgmises sõnastuses: "Kui kahel nurgal on ühine tipp A, ühine külg AC ja kui need nurgad asuvad teine teisel pool ühist külge, siis nimetatakse neid nurki lähisnurkadeks." Lähisnurkade erijuhuks on kõrvunurgad, s.o. kui kahe lähisnurga välimised küljed asuvad ühel sirgjoonel, ja kui kõrvunurgad on võrdsed, siis nad on täisnurgad. Näidatakse ka, et kahe kõrvunurga poolitajad on vastamisi risti ja tippnurkade poolitajad moodustavad ühe sirge.

Huvipakkuv on selles raamatus ristküliku pindala valemi tuletamine. Selleks näidatakse, et "võrdsete alustega püstkülikute pindalad suhtuvad nõnda kui nende kõrgused", samuti et "võrdsete kõrgustega püstkülikute pindalad suhtuvad nõnda kui nende alused" ja siis juba, et "kahe püstküliku pindalad suhtuvad nõnda kui nende aluste ja kõrguste korrutised". Siit jõutaksegi ristküliku (püstküliku) pindala valemini.

Veel on selles raamatus käsitletud Pythagorase teoreemi üldistusi. Need on "Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile konstrueeritud hulknurk võrdub kaatetitele konstrueeritud temaga sarnaste hulknurkade summaga" ja "Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile konstrueeritud ringi pindala võrdub selle kolmnurga kaatetitele konstrueeritud ringide pindalade summaga."

Stereomeetriaõpikust tõstame esile ruumisnurga küllalt laialdast käsitlust, risttahuka ruumala valemi analoogilist tuletamist planimeetriakursuses esitatud ristküliku pindala valemi tuletamisega ning sarnaste kehade käsitlemist.

Ruumisnurkade osas esitatakse kolmetahuliste nurkade ühtivuse tunnused. Neid on neli: "Kaks kolmetahulist nurka on ühtivad, kui nende

1) vastavalt ühtivate ja ühtmoodu asetatud kahe tasanurga vahel asuvad ühtivad kahetahulised nurgad;

2) vastavalt ühtivate ja ühtmoodu asetatud kahe kahetahkse nurga vahel asuvad ühtivad tasanurgad;

3) tasanurgad on ühtivad ja ühtmoodu asetatud;

4) kahetahulised nurgad on ühtivad ja ühtmoodu asetatud."

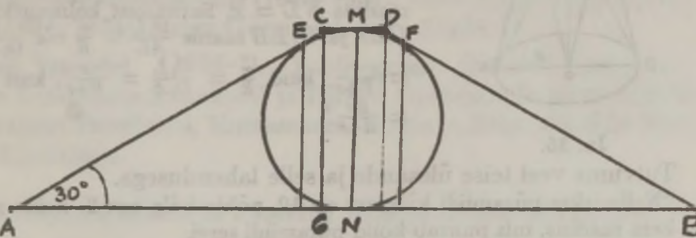
Ka hulktahukate sarnasuse defineerimisel kasutatakse ruumisnurga mõistet. See definitsioon on järgmine: "Kaht hulktahukat nimetatakse sarnasteks, kui nende keha- ehk ruumisnurgad on vastavalt ühtivad, tahud on vastavalt sarnased ja ühtlaselt asetatud." Siit järeldub aga, et sarnaste hulktahukate vastavad kahetahused nurgad ühtivad ja on ühtlaselt asetatud, samuti, et vastavad servad on võrdelised. Silindrite ja koonuste sarnasus on määratud neid kehi pöörlemise teel moodustavate ristkülikute või kolmnurkade sarnasusega.

Huvipakkuv on korrapärase hulktahuka (hulktahu) definitsioon, mis samuti tugineb ruumisnurkadele: "Hulktahku, mille kõik ruumisnurgad on ühtivad ja mille kõik tahud on ühtivad korrapärased hulknurgad, nimetatakse korrapäraseks."

Risttahuka ruumala valemi saamiseks tõestatakse eelnevalt, et kahe võrdsete põhjadega risttahuka (täisnurkse rööptahuka) ruumalad suhtuvad nii nagu nende kõrgused; samuti, et võrdsete kõrgustega risttahukad suhtuvad nii nagu nende põhjade pindalad ning et erisuguste põhjadega ja kõrgustega risttahukate ruumalad suhtuvad nii nagu nende põhjade pindalade ja kõrguste korrutised.

Planimeetriaülesannete kogu koostas K.R. Veski koos A. Raudsepaga. Selles esitatakse 718 ülesannet koos vastustega ja ka mõnede ülesannete lahendused. Esitatud on kolmnurga lahendamise ülesanded, kus nõutakse rakendada trigonomeetriliste funktsioonide logaritmide tabeleid. See ülesannetekogu sisaldab mõningaid tänapäeval mittelahendatavaid ülesandeid. Toome nende kohta paar näidet koos raamatus antud lahendustega.

"Ringi ümber on joonestatud võrdhaarne trapets nurgaga $A = 30°$. Keskjoon võrdub 1 m. Leida ringi raadius.



Jn. 33.

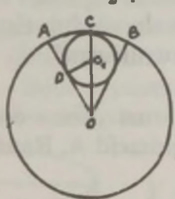
Lahendus. Keskjoon $K = \frac{AB+CD}{2} = 1$ m (jn. 33). $CG = MN = h = 2r$ on trapetsi kõrgus, kuid täisnurkses $\triangle CAG$, kus $\sphericalangle A = 30°$ võrdub CG kui kaatet hüpotenuusi poolega, s.o. $CG = \frac{AC}{2}$. Arvesse võttes, et $CM = CE$, $DM = DF$, $AC = AN$, $BF = BN$, leiame, et $AB + CD = 2AC$. Kuna $AC = 2CG$, siis saame asemele pannes: $AB + CD = 4CG$, nii et lõpuks leiame $\frac{4CG}{2} = 1$ m, seega $2CG = 2 \cdot 2r = 1$ m, kust järeldub: $r = \frac{1}{4}m = 25$ cm."

Vaatleme veel teist ülesannet.

"Sektori kesknurk $= 60°$, raadius $= R$. Määrata sektorisse joonestatud ringi raadius.

Lahendus. Ühendame O punktiga O_1 ja punktiga D.

$\angle OO_1D = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = 30°$. O_1D on otsitav raadius (jn. 34).



Jn. 34.

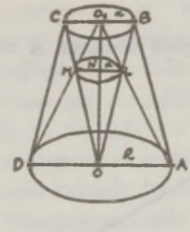
Täisnurkses $\triangle$-s O_1DO on kaatet O_1D vastu $30°$-list nurka, seega hüpotenuusist kaks korda vähem, s.t. $O_1D = \frac{OO_1}{2}$; $OO_1 = 2O_1D$; $O_1C = O_1D$; $OC = OO_1 + O_1C = 2O_1D + O_1D = 3O_1D = R$, kust otsitav raadius $r = \frac{R}{3}$."

Stereomeetriaülesannete kogu koostas K.R. Veski koos J. Verendeliga. Selles kogus on 742 ülesannet, millel kõigil on antud vastused ja mõnel ka lahendused. Toome siingi paar näidet viimaste hulgast.

"Tüvikoonuse põhjade raadiused on R ja r. Kumbki põhi on põhjaks koonusele, mille tipp asub teise põhja keskpunktis.

Leida selle ringi raadius, mis on saadud koonuste lõikumisel.

Lahendus. $ABCD$ on antud tüvikoonus (jn. 35). AO_1D ja BOC on koonused. Lõike raadius $NL = x$. Sarnastest kolmnurkadest OLA ja O_1LB saame $\frac{O_1L}{AL} = \frac{r}{R}$ või $\frac{O_1L}{O_1A} = \frac{r}{R+r}$, kuid $\frac{x}{R} = \frac{O_1L}{O_1A} = \frac{r}{R+r}$, kust $x = \frac{Rr}{R+r}$."

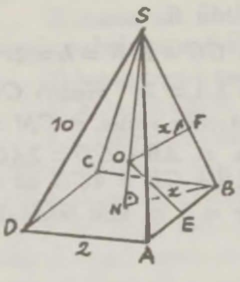


Jn. 35.

Tutvume veel teise ülesande ja selle lahendusega.

"Nelinurkse püramiidi külgserv on 10, põhja külg aga 2. Leida niisuguse kera raadius, mis puutub kõiki püramiidi servi.

Lahendus. $SABCD$ on antud püramiid (jn. 36), O – otsitava kera keskpunkt, OF, OE – kera kaugused (x), SN – püramiidi kõrgus. Täisnurksete kolmnurkade SBN ja SOF sarnasusest saame: $NB : OF = SB : SO$, s.o. $\sqrt{2} : x = 10 : SO$, kust $SO = 5x\sqrt{2}$; $ON = SN - OS = (7 - 5x) \cdot \sqrt{2}$. x-i leidmiseks seame võrrandi kokku: $OE^2 - NE^2 = ON^2$, s.o. $x^2 - 1 = 2(7 - 5x)^2$, siit saame x-i jaoks 2 vastust: $\frac{9}{7}$ ja $\frac{11}{7}$.



Jn. 36.

Märkus. Üks x-i väärtus vastab sellele juhusele kui kera keskpunkt asub püramiidi kõrgusel, teine – kui ta asub kõrguse pikendusel allpool põhja."

Selles ülesannetekogus on toodud ülesandeid ka tüviprismade kohta. Näiteks:

"Tõestada, et kolmnurkse tüviprisma ruumala võrdub ristlõike pindala ja kolme serva aritmeetilise keskmise korrutisega."

* * *

Karl Rudolf Veski ja Jüri Grünthali tegevust oleme eespool tutvustanud (vt. lk. 86 ja lk. 87). Nüüd lisame andmeid A. Raudsepa ja J. Verendeli kohta.

Aleksander Raudsepp (1884–?), koolitegelane. Sündis Tartumaal Aru vallas. Lõpetas Tartu Õpetajate Seminari 1905. a. ja Tartu Ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonna 1915. a. Töötas õpetajana Kodavere kihelkonnakoolis, Kokora Torila ministeeriumikoolis, Pärnu linnakoolis. Pärast ülikooli lõpetamist oli õpetaja Viljandi Haridusseltsi Poeglaste Gümnaasiumis (1918), direktoriks Võru Rahvahariduse Seltsi Gümnaasiumis (1918–1920), Tartu

ENKST gümnaasiumis (1920–1921) ja samas õpetajaks (1921–1923) ning samal ajal ka Tartu Maavalitsuse Haridusosakonna juhatajaks, Tartumaa koolinõunikuks (1923–1928), ning edasi jälle direktoriks Tartu Tehnikagümnaasiumis (1928–1931), Tartu Poeglaste Gümnaasiumis (1931–1934), Valga Gümnaasiumis (1934–?).

Jaan Verendel (1896–?), koolitegelane. Sündis Muhu saarel. Lõpetas Kuressaare linnakooli ja Pihkva Õpetajate Instituudi. Töötas õpetajana Peterburis, Kuressaares, Tartus ja Riias. Oli Riia Eesti Algkooli juhataja.

4.2.5. Stereomeetria käsitlus Albert Borkvelli õpikus

Ligi kümme aastat enne, kui A. Borkvell koos kolleegidega andis välja keskkooli aritmeetika, algebra ja geomeetria raamatud progümnaasiumi jaoks, ilmus tema stereomeetriaõpik. Selle eessõnas ütleb autor, et "raamatus käsitletud materjal on nõnda korraldatud, et ta peaks aitama arendada õpilastes ilma suurema jõupingutuseta ruumilist mõtlemis- ja kujutlemisvõimet".

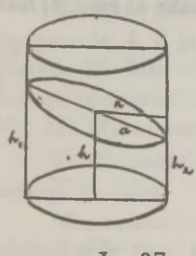
Stereomeetria õppimise ülesandeks peab autor ruumiliste kujundite kuju tundmaõppimist, nende asendi uurimist ja suuruse arvutamist.

Vaadeldes kahe sirge vastastikuseid asendeid ruumis, nimetab ta sirgeid, millel pole ühist punkti ja mis ei ole ka paralleelsed, nii nagu P. Madissongi ristuvateks sirgeteks. Lõigu ja lõigu pikkuse tähistamiseks kasutatakse selles õpikus mitmesuguseid sümboleid, nagu AB ja $\overline{AB}$.

Esimeseks tõestatavaks lauseks on sirge ja tasandi ristseisu tunnus, kahe ristsirge teoreem.

Kehade käsitlemisel võetakse ka selles õpikus vaatluse alla prismad ja silindrid, mis on lõigatud põhjaga mitteparalleelse tasapinnaga. Sellise prisma osa ruumala leitakse, kui põhja pindala korrutatakse külgservade aritmeetilise keskmisega. Näiteks

$$V = P \cdot \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4}.$$



Jn. 37.

Silindri puhul on lõikepind ellips (jn. 37). Selle pindala leitakse põhja pindala ja kaldenurga koosinuse kaudu:

$$S_e = \frac{S_a}{\cos\alpha} = \frac{\pi r^2}{\frac{r}{a}} = \pi ar.$$

Selle ellipsi pikem telg on $2a$ ja lühem $2b$. Et siin $b = r$, siis ellipsi pindala valemiks saame $S_e = \pi ab$. Vaadeldava keha külgpindala avaldub valemina:

$$S_k = 2\pi r \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} = 2\pi rh,$$

täispindala valemina

$$S_t = \pi r(2h + r + a)$$

ja ruumala valemina

$$V = \pi r^2 h.$$

Analoogiliselt arutletakse korrapärase n-nurkse püramiidi külgpindala tuletamisel. Ka seal jagatakse põhja pindala külgtahu kaldenurga koosinusega. Nii saadakse, et külgpindala $S_k = \frac{P}{\cos\alpha}$ ja siit täispindala

$$S_t = \frac{P}{\cos\alpha} + P = \frac{P \cdot 1 + \cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2P cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Kera käsitlemisele järgneb selles õpikus veel tutvumine rõngaga: "Keha, mille moodustab kera, pöörlemisel ümber telje, mille kaugus kera keskpunktist on suurem või sama kui kera raadius, nimetatakse rõngaks." Leitakse selle keha pindala ja ruumala valemid:

$S = \pi r^2(R_1^2 - R_2^2)$ ja $V = \frac{\pi^2}{4}(R_1^2 - R_2^2)(R_1 - R_2)$.

Toome lõpuks mõned ülesannete näited sellest õpikust:

"Laevamasti otsade läbimõõdud on 42 cm ja 24 cm ning pikkus on 21 m. Palju läheb maksma masti värvimine, kui 1 kg värvi maksab 54 marka ja iga m^2 värvimiseks kulub 0,2 kg värvi?"

"Kasepakk on ühest otsast viltu läbi saetud; paku üks pikkus on 60 cm, teine pikkus on 42 cm ja ta ümbermõõt 1,2 m. Leida paku a) pind, b) maht ja c) raskus."

* * *

Albert Borkvelli on tutvustatud lk. 139.

4.2.6. Geomeetria käsitlusest Jüri Nuudi õpikuis

Töökooli printsiibi austajana on J. Nuut esitanud ainet nii, et võimalikult paljude asjade üle tuleb õpilasel enesel mõelda, – küsimustele vastust otsida ja põhjendada. Ta andis välja kolm geomeetriaraamatut.

Juba esimeses raamatus sirglõigu ja selle pikkuse tutvustamisel püstitab ta näiteks järgmised küsimused:

"Punktis A põleb lamp, punktis B asetseb silm, vaadates lambi poole; kuidas takistada silma, et ta lampi siiski ei näeks?"

"Kas kaugus kahe linna vahel saab olla kuitahes suur? Milline on linnadevahelise kauguse ülemmäär kilomeetrites, kui a) kaugust mõõta mööda maapinda, b) kaugust mõõta sirglõigulise ühenduse kaudu?"

"Sirkli abil saab leida 3 punkti nõnda, et nende omavahelised kaugused on võrdsed; näita kuidas. Kas leidub ka 4 punkti, mille omavahelised kaugused on võrdsed; näiteks võrdsed tuletiku pikkusega? Kas leidub ka 5 säärast punkti?"

Esialgu püstitatakse lauseid, küsides: "Kas on õige?" Näiteks: "Kas on õige, et kolmnurga kõige pikem külg on ikkagi lühem, kui kahe teise külje summa?" või "Kas on õige, et kahe kõrvunurga summa on 180°?"

Kui ollakse jõudnud matemaatilise lause mõisteni, siis järgnevad laused algavad juba sõnaga "Kontrollime ...", sest matemaatiliseks lauseks nimetatakse matemaatilise sisuga õige väite lühikest ja tabavat sõnastust. Esimene lause, mille õigsust kontrollitakse, on "Tippnurgad on kongruentsed".

Seejärel selgitatakse aksioomide, teoreemide, algmõistete ning definitsioonide tähendust ning edaspidi kasutatakse lausete õigsuse näitamise alguses mõnikord ka sõna "Tõestus". Lause ees sõna *teoreem* ei kasutata.

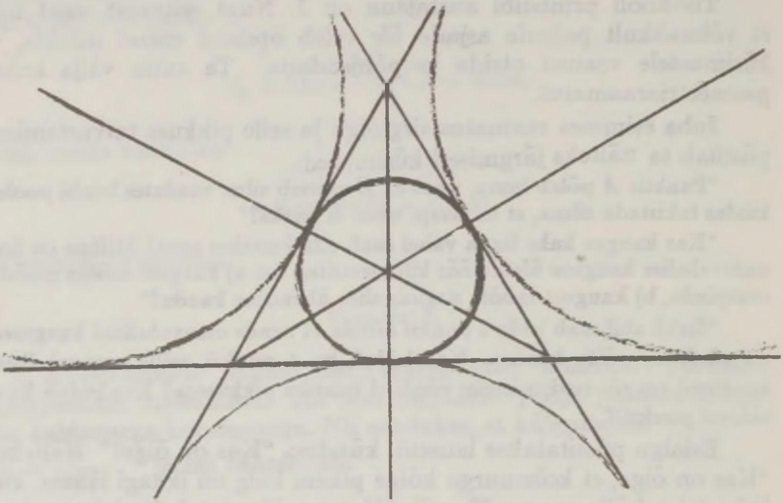
Sümmeetria ja kongruentsuse käsitlusest tutvustame jällegi üht ülesannet:

"Joonista mõni kolmnurk ABC. Konstrueeri sirkli ja joonlaua abil tipupaaride A, B ja B, C sümmeetria teljed. Lõikugu need teljed teatavas punktis M. Mis võib siis öelda kauguste MA, MB, MC kohta? Täienda joonist veel tipupaari C, A sümmeetriateljega. Kas viimane peab minema läbi M? Miks nimelt?"

Traditsiooniliste teemade kõrval tutvustatakse kolmnurga puuteringi mõistet.

"On võimalik ringi ka nõnda joonistada, et tasapinnal antud 3 sirget oleksid selle ringi puutujateks, kui need 3 sirget moodustavad kolmnurga.

Seda ringi nimetatakse kolmnurga puuteringiks. Antud kolmnurga puhul saaks joonestada 4 puuteringi (jn. 38).



Jn. 38

Nende nelja hulgast on üks ühtlasi kolmnurga igale sisenurgale sisse joonistatud ringiks. Selle ringi keskkoht peab asetsema iga sisenurga poolitajasirgel, miks? Neid poolitajasirgeid kutsutakse kolmnurga nurgapoolitajateks. Kolmnurga 3 nurgapoolitajat lõikuvad kõik ühes punktis, missuguses nimelt?

J. Nuut tutvustab oma esimeses õpikus ka liikumisteisendusi: "Kongruentsete kujundite ülekandmist tasapinna ühelt kohalt teisele võib teostada tasapinna liikumise teel, andes jooniselehele teise asendi, võime sellele lehele joonistatud kujundi paigutada kuhu soovime." Erikujulised liikumised on tasapinna kummutamine (peegeldus) ja tasapinna pööramine kindla punkti ümber.

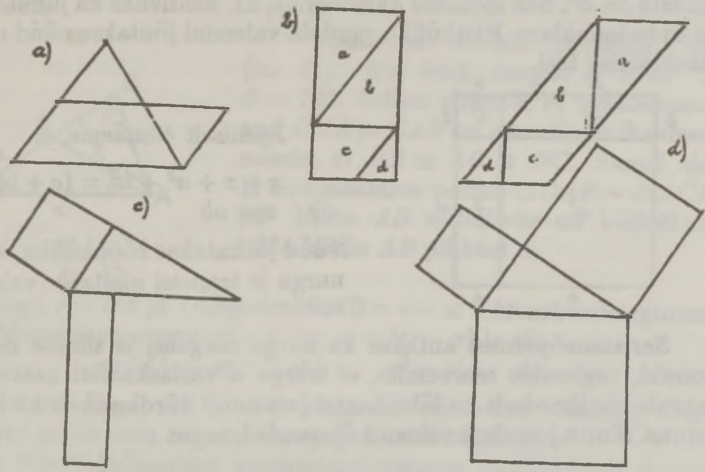
Juba paralleelide õpetuses antakse kiivsirgete mõiste järgmise ülesande kaudu:

"Mitu sirget saame läbi M tõmmata nõnda, et neil ei oleks lõikepunkti sirgega s, kui loobume nõudest, et need sirged asetseksid sirgega s ühel tasapinnal?"

Sellele ülesandele järgneb definitsioon: "Kui sirged ei lõiku sel põhjusel, et nad ei asetse ühel tasapinnal, siis kutsutakse neid kiivsirgeteks."

Tuuakse esile, et lauset "Läbimõõdule toetuv piirdenurk on täis-nurk" nimetatakse Thalese lauseks ning selle rakendamiseks antakse näiteks järgmine ülesanne:

"Puutuja tõmbamiseks ringile punktist P väljaspool ringi, tuleb leida puutepunkt, s.o. säärane punkt M ringil , kus sirge PM seisaks risti M juurde viiva raadiusega. Rakenda Thalese lauset selle punkti M leidmiseks."



Jn. 39.

J. Nuudi teine geomeetriaraamat algab hulknurga ruutimise käsitlusega. Probleemiks seatakse, kuidas otsustada, kumma antud kahest hulknurgast pindala on suurem. Kui seda teha kaalude abil, siis võib tulemus olla ebatäpne. J. Nuut seab hulknurga ruutimise, sisuliselt üksikute hulknurkade pindala omavahelise võrdlemise, kava järgmiselt:

1. Veenduda, et hulknurki saab alati tükeldada kolmnurkadeks.

2. Näidata, et kolmnurka saab alati pinnatruult teisendada parallelogrammiks (jn. 39a).

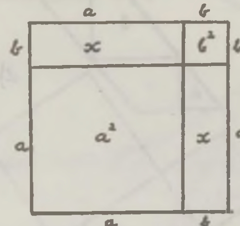
3. Näidata, et parallelogrammi saab alati pinnatruult teisendada ristkülikuks (jn. 39b).

4. Näidata, et ristkülikut saab alati pinnatruult teisendada ruuduks (jn. 39c).

5. Näidata, et kahest ruudust saab alati moodustada kolmanda, mis pindalalt võrdne kahe esimese ruudu pindala summaga (jn. 39d).

Nii jõutakse siin ka Eukleidese ja Pythagorase teoreemide geomeetriliste tõestusteni.

Tegelikult toimub ruutimine sel teel, et teisendatakse n-nurk temaga võrdseks (pinnalt) $(n-1)$-nurgaks jne. kuni kolmnurgani ning kolmnurk teisendatakse ruuduks. Seejärel selgitatakse, et ruudu pindala on a^2. See loetakse aksioomiks, s.t. kehtivaks ka juhul, kui a on irratsionaalarv. Ristküliku pindala valemini jõutakse nüüd ruudu tükeldamise teel.



Jn. 40.

Jooniselt 40 näeme, et

$$x + x + a^2 + b^2 = (a+b)^2$$ ja

siit $x = ab$

Nüüd jätkatakse rööpküliku, kolmnurga ja trapetsi pindala valemite esitamisega.

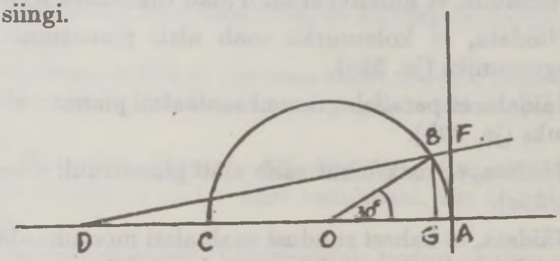
Sarnasusõpetuses antakse ka nurga tangensi ja siinuse definitsioonid, tuginedes teoreemile, et nurga α vastaskaateti kasvamisel kasvab võrdkordselt ka lähiskaatet ja samuti võrdkordselt ka hüpotenuus. Sinna juurde kuuluvad ülesanded, nagu:

"Mis on suurem, kas $\sin\alpha$ või $\tan\alpha$ (ühe ja sama nurga korral)?"

"Kas leidub säärane nurk α, millele vastav $\sin\alpha$ on suurem kui 1?"

Sarnasusõpetuse peatükis tõestatakse õpikutes suhteliselt harva esitatav teoreem "Kolmnurga nurga sisepoolitaja ja välispoolitaja on teineteisega risti".

Veel käsitletakse raamatu II osas ringi mõõtmist. Siin tutvustatakse ringjoone sirgestamise ligikaudseid konstruktsioone. Esitame neist kaks siingi.

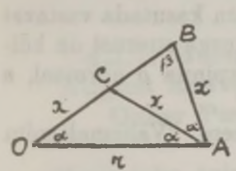


Jn. 41.

"Määrame ringjoonel 30°-se kaare AB (jn. 41). Olgu $DCOA$ selle ringi läbimõõdu sirge ja AF ringi puutuja. O olgu ringi keskkoht. Võtame OD pikkuseks ringi läbimõõdu suuruse. Sirge DB lõikab puutujat punktis F. Lõigu AF 12 kordne kujutab siis ringjoone pikkust."

Teine konstruktsioon on 36° kaare ehk $\frac{1}{10}$ ringjoone pikkuse leidmiseks.

"Tõmbame $\angle OAB$ poolitaja AC (jn. 42). Siis kõik nurgad $\alpha = 36°$ ja $\beta = 72°$. Sellest järgneb, et osakolmnurgad OCA ja CAB on samuti võrdhaarsed, nõnda, et $AB \equiv AC \equiv OC$. Samal ajal II sarnasuslause põhjal $\triangle OAB \sim \triangle ACB$. 36° kaare AB leidmiseks on küllaldane leida kõõlu AB pikkust x.



Jn. 42.

Tähistagu $r = OA$ ja $OC = x$, siis $CB = r - x$. Võttes võrdetegurina k järeldame sarnasusest, et $r = kx$, $x = k(r - x)$ ja siit

$$x = \frac{r}{x}(r - x) \qquad \text{ehk} \qquad x^2 = r(r - x).$$

OC on lõigu OB ja CB keskmine võrdeline. Säärast lõigu jagamist kahte ossa nimetatakse jagamiseks kuldlõikes."

J. Nuudi kolmandas geomeetriaraamatus on käsitletud stereomeetria ja trigonomeetria küsimusi. Viimaseid tutvustame hiljem eraldi (vt. lk. 254). Siin vaatleme J. Nuudi stereomeetria käsitluse mõningaid iseärasusi.

Kursuse algul rõhutatakse mudelite kasutamise ja nende joonisel kujutamise vajalikkust ning tutvustatakse selliste jooniste valmistamist.

Aksioomile "Kui sirgel joonel kaks punkti asetsevad teataval tasapinnal, siis asetsevad seal ka selle sirge kõik teised punktid" järgneb jällegi mõtlemist ja ruumikujutlust arendav ülesanne: "Kas on õige, et ringjoon asetseb tasapinnal, kui selle kaks punkti asetsevad sellel tasapinnal?"

Esitades seejärel aksioomi "Tasapinda määravad kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti", jõutakse järeldusele, et kahe erineva tasapinna lõikejoon ei saa kunagi olla kõver, vaid peab olema sirge.

Edasi tutvustatakse aksioomi "Kui kahel tasapinnal on üks ühine punkt, siis leidub mõlemal tasapinnal veel teisigi ühiseid punkte" ning järeldatakse, et "kui kahel tasapinnal üldse leidub ühine punkt, siis lõikuvad need tasapinnad mööda sirget joont." Nõutakse selle lause üksikasjalikku põhjendamist. Esimene tõestusena vormistatud arutlus selles raamatus on antud lausele "Läbi punkti ei saa panna rohkem kui üht tasapinda, mis oleks rööbiti seda punkti mitte sisaldava teise kindla tasapinnaga."

Tasapinna normaali mõiste omandamist kindlustatakse näiteks ülesandega:

"Jõulupuu ülesseadja abiline kontrollib silmaga, seistes ise paigal, kas puu on püstasendis. Kas on mõeldav, et sellest kontrollist hoolimata puu siiski seisab viltu?"

Kahetahulise nurga mõõtmiseks ei soovitata kasutada vastavat joonnurka, vaid märgitakse, et "kahetahulise nurga suurust on kõige lihtsam mõõta normaalide abil: on m tasapinna α normaal, n tasapinna β normaal, siis loetakse $\angle\alpha\beta = \angle mn$".

Kehadega tutvust tehes püstitatakse probleem: "Vähemalt mitu tippu, tahku, serva peab olema tahkkehal".

Prisma defineeritakse, erinevalt teistest siin käsitletud õpikutest, projektsiooni mõiste abil:

"Võetud hulknurk, tema projektsioon ja projektivate kiirte lõigud hulknurga tippudest projektsiooni tippudeni moodustavad koos ühe tahkkeha servade kogu. Säärast keha nimetatakse prismaks ehk sambaks."

Analoogiliselt defineeritakse püramiid kui projektivad kiired lähtuvad "keskkohast". Samalaadselt defineeritakse ka silinder ja koonus.

Risttahuka ruumala valemi tuletamisel veendutakse esmalt, et selle nn. bloki ruumala on võrdeline iga mõõtmega, kui teised mõõtmed ei muutu, ning sellest järeldub, et risttahuka ruumala $V = kabc$. Võrdetegur k määratakse kuupühikust, kus $1 = k \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ ja siit $k = 1$ ning seega $V = abc$.

Püramiidi ruumala valemi tuletamisel kasutatakse integraali. Selgitatakse, et $V = \int_o^h y(x)dx$, kus $y(x)$ on kõrgusel x asetseva põhjaga paralleelse lõike pindala. Püramiidi ühel ja samal tahul asetsevate lõigete küljed on võrdelised lõigete tasapindade kaugustega x püramiidi tipust. Hulknurga pindala $y(x)$ on võrdeline külje ruuduga, järelikult $y(x) = k \cdot x^2$. Võrdetegur k määratakse juhust, kus $x = h$. Siis $y(h)$ on võrdne püramiidi põhja suurusega. Järelikult $P = k \cdot h^2$ ehk $k = \frac{P}{h^2}$ ja seega $V = \int_o^h \frac{P}{h^2} x^2 dx = \frac{1}{3} Ph$.

Antakse ka pöördkeha ruumala valem ja selle abil leitakse koonuse ja kera ruumala.

Kehade pindalade käsitlemisel arvatakse aksioomiks, et juhtudel, kui kõver pind laotub tasapinnale, siis sellel pinnal tõmmatud joonte pikkused ja ka pinnaosade pindalad ei muutu. Küsitakse seejuures ka, missuguse kuju omab silindri pinnale joonestatud kruvijoon silindri pinnalaotusel?

Tutvustatakse veel sfäärilist geomeetriat ning jõutakse sfäärilise trigonomeetria valemiteni. Õpiku lõpul selgitatakse mitte-eukleidilise geomeetria olemasolu.

* * *

Jüri Nuuti tutvustame lk. 309.

4.2.7. Geomeetria käsitlus Albert Borkvelli, August Kasvandi, Felix Laarensi, Karl Maasiku, Oskar Paasi ja Arnold Vihmani õpikutes

Oleme juba tutvunud pealkirjas loetletud autorite kollektiivi poolt kirjutatud aritmeetika (vt. lk. 135) ja algebra (vt. lk. 182) õpikutega. Neile lisanduvad nüüd kolm geomeetria kooliraamatut.

Esimene raamat algab eessõnaga, milles autorid avaldavad tunnustussõnu oma õpiku kohta: "Terve keskkooli geomeetria kursus (Geomeetria I, II ja III) sisaldab konspektiivse teoreetilise kursuse selles ulatuses, mis peaks praegune keskkool sellel alal pakkuma oma kasvandikkudele. Neis raamatuis käsitletud õppematerjal on korraldatud nõnda, et õpilane ka iseseisvalt, ilma õpetaja juhatuseta võiks esitatud ainepalu lugeda, neid mõista ja omandada. Esitatud materjal peaks õpilastel võimaldama ilma suurema jõupingutuseta tasapinnaliste kui ka ruumiliste kujundite õiget ettekujutamist ja nendest arusaamist, peaks seega aitama arendada õpilastes nende ruumilist mõtlemis- ja kujutlemisvõimet."

Geomeetria käsitluse algus erineb teiste siin vaatluse all olevate õpikute omast. Pärast punkti, sirgjoone ja tasapinna tutvustamist tullakse tahkkeha juurde ning õpikusse joonestatud tahkkehade kohta lastakse täita tabel, millest järeldub Euleri lause tippude, servade ja tahkude arvu kohta.

Mõiste defineerimisel selgitatakse, et "enamasti valmib uue mõiste definitsioon nõnda, et öeldakse asjast, mis ta on, ja lisatakse siis lähemaks seletuseks juurde tema omadused, missugune ta on. Ka siia juurde esitatakse tabel, kuhu antud mõistete kohta tuleb fikseerida, mis ta on ja missugune ta on.

Et selgitada tõestamise vajalikkust, analüüsitakse eelkõige, kuivõrd on silmanägemise järgi võimalik otsustusi langetada. Õpikus on tehtud silmanägemise järgi mõned otsustused, nagu "kõrvunurkade summa on sirge nurk ehk 180°" ja "mida suurem on nurk, seda väiksem on tema kõrvunurk", mis on õiged. Nüüd esitatakse aga õpikus mitmed joonised, kus silmanägemine vaatajat tõepoolest petta võib. Kahtluse alla seatakse ka niisugused otsustused, mis tuginevad mõõtmisel. Järeldatakse, et "katselise kontrolliga seotud raskused langevad ära, kui õnnestub näidata, et uuritav väide on varemini tunnustatud tõdede järeldus, teiste sõnadega, kui meil õnnestub tõestada, et väide on kehtiv."

Esimeseks tõestatavaks lauseks on: "Tippnurgad on kongruentsed." Siin lisatakse ka tõestuse vormistamise soovitus.

"Käesoleval juhul teeme nii:

Eeldus: α ja β on tippnurgad.
Väide: $\alpha = \beta$
Tõestus:

$$\begin{array}{r}
\alpha + \gamma = 180^\circ \\
\underline{\beta + \gamma = 180^\circ} \\
\alpha + \gamma = \beta + \gamma \\
\underline{-\gamma \qquad -\gamma} \\
\alpha = \beta
\end{array}$$"

Edasi tutvustatakse, mis on aksioomid ehk põhilaused ja mis on teoreemid. Aksioomidena esitatakse 10 väidet. Teoreemi puhul selgitatakse, et "eeldus esineb enamasti kõrval- või kiillausena, kuna väide esineb pealausena. Õpilastele antakse rida lauseid ja nad peavad otsustama, missugused on definitsioonid, missugused teoreemid.

Selles õpikus on tugevalt rõhutatud sümmeetria osatähtsust. Hulk väiteid tõestataksegi sümmeetria abil.

Lõikude, nurkade ja kujundite puhul ei kõnelda siin võrdsusest, vaid kongruentsusest. Näiteks: "Ristkülik on kongruentsete nurkadega rööpkülik."

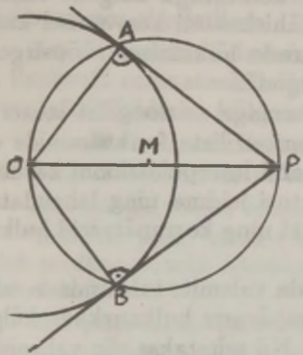
Rohkesti on õpikus ülesandeid tõestamiseks. Toome paar näidet:

"Kui võrdhaarse kolmnurga tipu juures olev nurk on 36°, siis jagab alusnurga poolitaja selle kolmnurga kaheks võrdhaarseks kolmnurgaks".

"Kolmnurga külgede keskpunkte ühendavad sirglõigud jagavad kolmnurga neljaks kongruentseks kolmnurgaks."

Küllaldast tähelepanu on omistatud konstruktsiooniülesannetele. Ülesanne, mis nõuab väljaspool ringi olevast punktist ringjoonele puutujat konstrueerida, lahendatakse järgmiselt (jn. 43):

"Antud punkti P ühendame antud ringjoone keskpunktiga O. Sirglõigu OP jagame pooleks, saame punkti M. M ümber joonestame raadiusega $MO \equiv MP$ ringjoone, mis lõikab antud ringjoont punktides A ja B. PA ja PB on puutujad, sest PAO ja PBO on täisnurgad, kui diameetrile toetuvad piirdenurgad."



Jn. 43.

A. Borkvelli jt. teises geomeetriaraamatus alustatakse hulknurga pindala käsitlemist. Selgitatakse, mis vahe on sõnadel pind ja pindala: "Kuubi tahud näiteks asetsevad kuues eri pinnas, mille osadeks need tahud on, kuid kõigi kuue tahu pindalad on ühesuurused."

Ka siin tehakse nüüd läbi hulknurga teisendamine temaga pindvõrdseks ruuduks, nimetades seda hulknurga ruutimiseks ehk kvadratuuriks.

Lisaks pinna ja pindala mõistele lisandub nüüd pindala mõõtarv, mis näitab, "mitu korda on mõõtarv pindala mõõtühikust suurem". Alustatakse ruudu pindala valemi tuletamist täisarvulise pikkusega külje puhul, näidatakse, et sama valem kehtib murdarvulise pikkusega külje puhul ja loetakse kehtivaks ka siis, kui külje pikkus avaldub irratsionaalarvuna, põhjendusega, et sel juhul saab ju anda külje pikkusele ligikaudse murdarvulise väärtuse nii suure täpsusega kui vajalik.

Tükeldamismeetodit kasutades leitakse teiste tuntud hulknurkade pindalade valemid. Ebakorrapärase hulknurga pindala arvutamine seostatakse mõõtmisega maastikul.

Lisame paar selle autori kollektiivi esitatud huvitavamat ülesannet hulknurga pindala leidmise kohta.

"Kui võrdkülgse kolmnurga külgi enese pikkuse võrra järgemööda pikendada ja otsapunktid omavahel ühendada, siis tekib võrdkülgne kolmnurk, mille pindala on esialgse kolmnurga pindalast 7 korda suurem."

"Kui ruudu külgi järgemööda enese pikkuse võrra pikendada ja otsapunktid järgemööda ühendada, siis tekib ruut, mille pindala on esialgse ruudu pindalast 5 korda suurem."

Hulknurkade sarnasuse teema juurde minnes rõhutatakse, et tuleb vahet teha joonsuurenduse ja pindsuurenduse vahel. Näiteks kui haritav põllumaa suurenes kahekordseks, siis on see pindsuurendus, kui mikroskoop suurendab 1000 korda, siis on see joonsuurendus.

Sarnasust kasutatakse täisnurkse kolmnurga külgede vaheliste seoste leidmisel. Näiteks: "Nurga α lähiskaateti kasvamisel kasvab ka vastaskaatet" või "Nurkade haarade lõikamisel rööpsirgetega tekivad võrdeliste külgedega kolmnurgad".

Esimest siinnimetatud lauset ja temaga analoogilist lauset hüpotenuusi kohta kasutatakse trigonomeetriliste funktsioonide defineerimiseks. Siin õpetatakse tabelite abil interpolatsiooni kasutades trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi leidma ning lahendatakse täisnurkseid ja võrdhaarseid kolmnurki ning korrapäraseid hulknurki.

Ringjoone pikkuse ja ringi pindala valemite tuletamisele eelneb ringi sisse- ja ümberjoonestatud korrapäraste hulknurkade külgede pikkuste avaldamine raadiuse kaudu. Nii esitatakse siin valemid:

$$a_{2n} = r\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4r^2}}} \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{a_n}{\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4r^2}}},$$

kus a_n ja b_n on vastavalt sissejoonestatud korrapärase hulknurga ja ümberjoonestatud korrapärase hulknurga küljed.

A. Borkvelli jt. kolmandas geomeetriaraamatus tutvustatakse stereomeetriaülesannet ning sirge ja tasapinnaga tutvumisel rõhutatakse ka, et ruumis võib läbi ühe punkti kujutada määramata palju sirgeid ning läbi ühe sirge on võimalik kujutada määramata palju tasapindu. Esimeseks teoreemiks on siingi kahe ristsirge teoreem, s.o., et sirge on risti tasapinnaga, kui ta on risti tasapinnal asetseva ja lõikepunktist läbimineva kahe sirgega.

Kahe tasapinna vastastikuste asendite tutvustamisel vaadeldakse ka n-tasapinna lõikumist, mis võimaldab tutvuda n-tahuse nurga mõistega.

Lähemalt selgitatakse tsentraalprojektsiooni ja paralleelprojektsiooni mõistet, samuti normaalprojektsiooni ja kaldprojektsiooni mõistet. Tuletatakse seos kaldkolmnurga ja tema projektsiooni pindala vahel: $P = S\cos\alpha$ ning geomeetriliste kehade kujutamist kaldprojektsiooni abil.

Prismat defineeritakse tahkkehana, mille kaks tahku on ühtivad ja rööbikud hulknurgad, teised tahud aga parallelogrammid. Prisma ruumala leidmist alustatakse risttahukast. Kui täisarvuliste mõõtmete korral on valem leitud, siis jätkatakse järgmiselt: "On aga mõõtmed murdarvulised, näit. $a = 5,2$ dm ja $c = 4,8$ dm ning $b = 3,6$ dm, siis arusaadavalt ei saa me kuupdetsimeetritega seda risttahuka ruumala otseselt mõõta. Seepärast valime ruumala mõõtühikuks väiksema mõõtühiku, nimelt kuupsentimeetri ..." Ja nii saadakse jälle endine valem. Irratsionaalarvuliste mõõtmete küsimust siin ei püstitata.

Ka püramiidi definitsioon on traditsiooniline ning siin nagu A. Borkvelli raamatuski näidatakse korrapärase n-nurkse püramiidi külgpindala leidmist külgpinna kaldenurga koosinuse abil.

Ka teiste kehade käsitlemine sarnaneb juba tutvustatud A. Borkvelli stereomectriaraamatu tekstiga.

Tutvustame mõnd ülesannet sellestki õpikust.

"Kui paks peaks olema 1 m läbimõõduga alumiiniumkera, et ta ühendatult raudkeraga, mille ümbermõõt on 50 cm, oleks vees tasakaalus? Ujuks poolest saadik vees?"

"Kui palju terast kulub 75 mm kahuritoru valmistamiseks, kui toru pikkus on 1,8 m ja otste läbimõõdud 16,4 cm ja 22,6 cm?"

* * *

Siin käsitletud geomeetriaõpikute autoreid oleme tutvustanud eespool (vt. lk. 99, 139 ja 140).

4.2.8. Geomeetria käsitlus Theodor Koigi õpikus

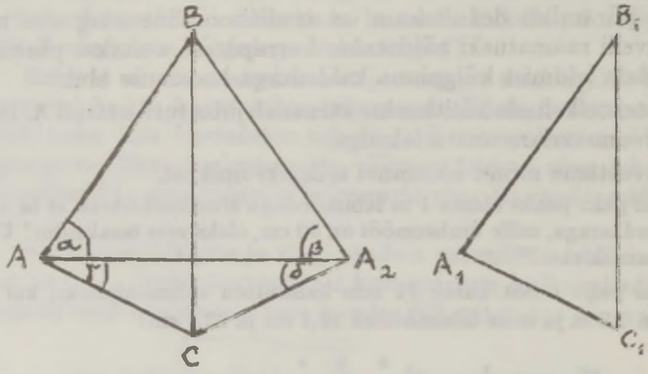
T. Koigi raamatus "Matemaatika õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele II" on peale algebra käsitluse, millega tutvusime eespool (vt. lk. 187) esitatud ka planimeetria kursus. Lähtutakse järgmistest geomeetria ja looduse seostest:

"Looduslikud asjad ehk "kehad" on oma kujult kas korrapärased või korrapäratud. Esimeste hulka kuuluvad õied, seemneterad, kristallid jne. Teiste hulka harilikud põllukivid, mullatükid, puud jne. Korrapärastel kehadel paneme tähele tasaseid pindu, sirgeid servi. Nende servade sirgust kujutab hästi pinguletõmmatud peen traat või niit. Mõttes võime traati või niiti peenendada niivõrd, et jämeduse küsimus üldse ära langeb."

Nii jõutakse sirge mõisteni. Lihtsamate kujunditena nimetatakse täppi ja sirglõiku. Esitatakse tuntud aksioomid sirge kohta.

Kui jõutakse nurkadeni, siis näidatakse loogilise arutluse teel, et tippnurgad on võrdsed. Sellele lisandub märkus: "Oleme esitanud siin ühe matemaatilise lause tõestuse. Milleks on seda tarvis? Kas ei saaks paberist nurga α väljalõikamisega ja γ-le asetamisega sedasama kätte? Tee seda! Arvusta sellise talitamisviisi nõrku külgi!"

Tõestused T. Koigi raamatus on vormistatud kindla skeemi järgi kahte veergu, kus vasakul on väide ja paremal põhjendus. Esitame näitena kolmnurkade kongruentsuslause tõestuse kolme külje järgi.



Jn. 44.

"Eeldus: Kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ (vt. jn. 44)
$AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$; $BC = B_1C_1$.

Väide: $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

Tõestus: Pöörame kolmnurga $A_1B_1C_1$ ümber külje B_1C_1 ja paigutame ta siis esimese kolmnurga külge nii, et

1) tipp B_1 ühtiks tipuga B;

2) külg B_1C_1 läheks mööda külge BC.

Siis tipp C_1 ühtib tipuga C, sest küljed B_1C_1 ja BC on eelduse põhjal võrdsed. Kolmnurk $A_1B_1C_1$ võtab asendi A_2BC. Ühendame tipu A_2 tipuga A.

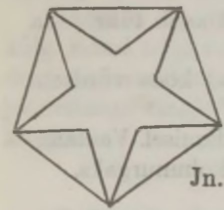
1. $\triangle AA_2C$ on võrdhaarne	$AC = A_1C_1 = A_2C$ eeldus
2. $\triangle ABA_2$ on võrdhaarne	$AB = A_1B_1 = A_2B$ eeldus
3. $\alpha = \beta$	§14, D
4. $\gamma = \sigma$	§14, D
5. $\alpha + \gamma = \beta + \sigma$ ehk $\widehat{BAC} = \widehat{BA_2C}$	Liites võrdused 3 ja 4
6. $\triangle ABC \equiv \triangle A_2BC$	§ 22
7. $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$	$\triangle A_2BC$ on teisale paigutatud $\triangle A_1B_1C_1$."

Veel käsitletakse siin ringjoont, paralleelseid sirgeid, kolmnurki ja hulknurki. Viimaseid jaotatakse lihtis ja mittelihtis hulknurkadeks.

Lähemalt käsitletakse nelinurki.

Esitame sellestki raamatust ühe ülesande.

"Tõesta, et korrapärase viisnurga diagonaalid lõikudes annavad jällegi korrapärase viisnurga!"



Jn. 45.

"Eelmise ülesande joonisel kustutada mõlemad korrapärased viisnurgad. Mis jääb üle? Arvuta selle kujundi nurgad. See kujund kannab nimetust pentagramm ja oli pütaagorlaste juures tuntud tervise sümbolina." (Jn. 45.)

* * *

Theodor Koigi elukäiku tutvustasime eespool (vt. lk. 192).

4.2.9. Geomeetria käsitlusest Elmar Etvergi õpikuis

E. Etverk koostas kolmest raamatust koosneva keskkooli geomeetriakursuse.

Esimest raamatut alustab ta keha iseloomustava kuju, suuruse ja asendi tutvustamisega. Siit jõutakse pinna, joone ja punkti mõisteni. Tõstetakse esile, et punkt näitab kohta ruumis, joon on punkti liikumise jälg, pind on joone liikumise jälg ja keha on pinna liikumise jälg. Et nii sirge kui ka tasapind "ei lõpe kuski", siis järeldub sellest, et kehas ühelt teda lõikava tasapinna poolelt ei pääse teisele poole ilma tasapinda läbimata ning tasapinnal ühelt poolt temal asuvast sirgest ei pääse teisele poole ilma sirget lõikamata. Selles õpikus käsitletakse veel kujundite sümmeetriat. Leitakse kahe punkti, nurga ja võrdhaarse kolmnurga sümmeetriatelg ning uuritakse sümmeetriat ka ringjoonel.

Paralleelsete sirgete teoreemidele järgneb lähem tutvumine kolmnurkadega ja nende kongruentsuse tunnuste tõestamine ning rakendamine.

Käsitletakse veel trapetsit, rööpkülikut ja erikujulisi rööpkülikuid, kus siis esitatakse ka mõningad huvitavad tõestamisülesanded. Toome paar näidet.

"Tõesta, et ristküliku külgede keskpunktid on rombi tippudeks ja rombi külgede keskpunktid on ristküliku tippudeks."

Ringjoone käsitluse juurest lisame järgmise ülesande:

"Ringjoone kaks paralleelset puutujat lõikuvad kolmanda puutujaga punktides A ja B. Tõesta, et kolmnurk ABO on täisnurkne, kus O on ringjoone keskpunkt."

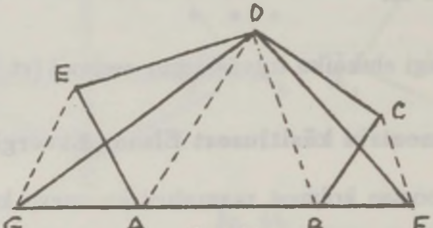
Teist raamatut alustab E. Etverk hulknurga pindalast. Fikseeritakse järgmised pindvõrdsuse aksioomid:

"1. Võrdsed hulknurgad, s.t. hulknurgad, mis pealepaigutamisel ühtivad, on pindvõrdsed.

2. Kaks hulknurka on pindvõrdsed, kui neid saab tükeldada vastavalt pindvõrdseteks osadeks.

3. Kaks hulknurka on pindvõrdsed, kui nad koos võrdsete hulknurkadega moodustavad võrdsed hulknurgad."

Neid aksioome rakendatakse hulknurga teisendamisel. Vaatame siingi viisnurga teisendamist temaga pindvõrdseks kolmnurgaks.



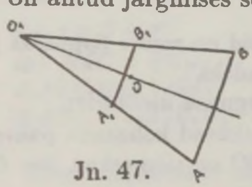
Jn. 46.

"Eraldame viisnurgast $ABCDE$ (jn. 46) diagonaaliga DB kolmnurga ja leiame selle rööpsirge ja külje AB pikenduse lõikepunkti F. Selle punkti ühendamisel punktiga D saame nelinurga $AFDE$, mis on pindvõrdne antud viisnurgaga $ABCDE$. Kui saadud nelinurgast endisel viisil eraldame kolmnurga ADE ja asendame selle kolmnurgaga ADG, siis saame kolmnurga FDG, mis on pindvõrdne viisnurgaga $ABCDE$."

Esitatakse ka põhjendus.

Edasi näidatakse, kuidas teisendada kolmnurka temaga pindvõrdseks ristkülikuks ja ristkülikut temaga pindvõrdseks ruuduks (vt. J. Nuudi geomeetria käsitlust).

Huviäratav on selles raamatus pärast pindala mõõtmise käsitlemist ning enne ringjoone pikkuse ja ringi pindala valemite juurde minemist korrapärase $2n$-nurga joonestamise õpetus, kus $2n$-nurga ümbermõõt peab jääma samaks kui n-nurga ümbermõõt. See ülesanne on antud järgmises sõnastuses:



Jn. 47.

"AB on korrapärase n-nurga külg ja punkt O on selle hulknurga keskpunkt (jn. 47). Joonestada sama suure ümbermõõduga korrapärane $2n$-nurga külg- ja keskpunkt."

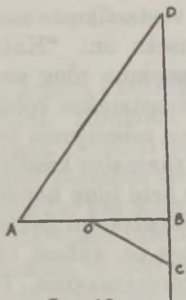
Toome siinkohal ka selle ülesande lahenduse.

"Joonestame sirglõigu AB keskristsirge ja leiame selle lõikepunkti O_1 antud hulknurga ümber joonestatud ringjoonega. Ühendame punkti O_1 punktidega A ja B, poolitame need sirglõigud ja ühendame need keskpunktid A_1 ning B_1. Saadud sirglõik A_1B_1 ongi korrapärase $2n$-nurga külg."

Järgneb tõestus, et saadud lõik AB on tõepoolest $2n$-nurga külg. Edasi selgitatakse, et korrapärase $2n$-nurga ümber joonestatud ringjoone raadius on sama suure ümbermõõduga n-nurga ümber joonestatud ringjoone raadiuse ja $2n$-nurga apoteemi geomeetriline keskmine:

$$r_{2n} = \sqrt{r_n \cdot h_{2n}}$$

E. Etverk tutvustab samuti nagu J. Nuutki ringjoone ligikaudset sirgestamist. Käsitlus ise on aga pisut erinev. Tutvustame seda.



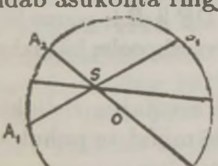
Jn. 48.

"Läbi diameetri AB otspunkti B joonestame puutuja ja keskpunkti O juurde ehitame nurga $\widehat{BOC}=30^\circ$ (jn. 48). Selle kesknurga teine haar lõikab puutujat punktis C. Puutujal CB leiame punkti D nii, et $CD = 3r$. Punktide A ja D ühendamisel saame sirglõigu, mille pikkus ligikaudu võrdub poolringjoone pikkusega."

Järgneb arutlus, kust selgub, et

$$AD = r\sqrt{13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3{,}14153r.$$

Sarnasuse rakenduste juures, kus käsitletakse teoreemi ringjoone lõikajast, antakse ka punkti potentsi mõiste. Vastava teoreemi kohaselt punkti S läbiva lõikaja osade korrutis $A_1S \cdot B_1S$ ei muutu, kui lõikaja pöördub punkti S ümber, kuid muutub, kui punkt S muudab asukohta ringjoone suhtes (jn. 49).



Jn. 49.

Seda lõikaja osade korrutist nimetatakse punkti S potentsiks ringjoone suhtes. Kui võtta lõikaja, mis läbib keskpunkti O ja tähistada lõigu OS pikkust a-ga, siis potents

$$p = (a + r)(a - r) = a^2 - r^2.$$

Selle raamatu lõpul käsitletakse täisnurkse kolmnurga lahendamist. Tutvustatakse ka nurgafunktsioone ja nende muutumist $0° - 90°$. Õpetatakse kasutama trigonomeetriliste funktsioonide tabeleid ning lahendama lisaks täisnurksele kolmnurgale veel võrdhaarset kolmnurka ja korrapärast hulknurka.

Raamatu lõpust leiame veel ülesande, kus antakse kuldlõike mõiste:

"Jaota arvutamise teel 6 cm pikkune lõik kuldlõikes, s.t. nii, et selle suurem osa oleks terve lõigu ja selle väiksema osa keskmine võrdeline."

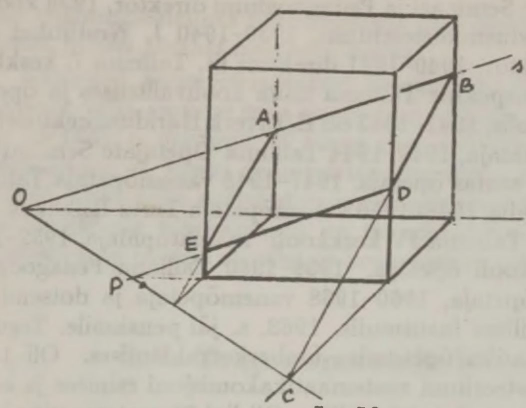
E. Etvergi kolmandas geomeetriaraamatus käsitletakse stereomeetriat.

Siin jõutakse tasapinna määramisviiside juurde pärast kahe sirgjoone vastastikuste asendite ja kahe tasapinna vastastikuste asendite tundmaõppimist. Esimeseks tõestatavaks lauseks on: "Kahe tasapinna lõikejoon on sirge". Pärast kahe tasapinna ning sirge ja tasapinna paralleelsuse tunnuste tõestamist tutvustatakse kolme tasapinna vastastikuseid asendeid ning selgitatakse, missuguses asendis võivad olla kolme tasapinna lõikesirged. Selles raamatus käsitletakse veel sirge ja tasapinna lõikumist, tutvustatakse kehi ning nende joonestamist. Viimasega seoses õpitakse tundma tsentraalprojektsiooni ja paralleelprojektsiooni. Matemaatikaõpetuses on vähem tuntud E. Etvergi esitatud kehade joonestamine kaldprojektsioonis. Teistes eestikeelsetes geomeetriaraamatutes seda tutvustatud ei ole. Vaatleme siinkohal üht näidet.

"Ülesanne: antud on risttahukas kaldprojektsioonis; joonestada selle keha lõige tasapinnaga, millest on antud lõikejoon püsttasapinnaga ja üks punkt risttahuka põhja tasapinnast.

Olgu s lõiketasapinna ja püsttasapinna lõikejoon ja P lõiketasapinna üks punkt põhitasapinnal (jn. 50). Et risttahuka tagumine tahk on vastu püsttasapinda, siis sirglõik AB on lõiketasapinna ja risttahuka tagumise tahu lõikejoon. Edasi leiame punkti C, milles lõikuvad lõiketasapinna ja põhitasapinna lõikejoon PQ ja risttahuka üks põhiserv või selle pikendus. Selles punktis lõikuvad lõiketasapind, parempoolse tahu tasapind ja risttahuka põhja tasapind. Ühendades punktid B ja C, saame lõiketasapinna ja parempoolse tahu lõikejoone BD. Joonestades $DE \parallel BA$, saame lõikejoone esitahuga ja ühendades E A-ga – lõikejoone vasakpoolse külgtahuga. Rööpkülik $ABDE$ ongi otsitav lõige."

Kehade pindala ja ruumala käsitlemisel arvatakse risttahuka ruumala valem kehtivaks ka irratsionaalarvude möödete puhul, sest



Jn. 50.

valem kehtib ükskõik kui täpsete selle irratsionaalarvu lähisväärtuste korral. Ruumala valemite tuletamisel kasutatakse ka Cavalieri aksioomi. Silindri ja koonuse ruumala antakse vastavalt sissejoonestatud korrapärase prisma ja korrapärase püramiidi ruumala piirväärtusena, kui külgtahkude arvu piiramatult suurendatakse. Kera ruumala valem tuletatakse Cavalieri aksioomi abil, võrreldes poolkera ruumala silindri ja koonuse ruumalade vahega, kui nende kehade põhjade raadiused ja kõrgused võrduvad poolkera raadiusega. Kera pindala valem saadakse lausest: "Kera ruumala võrdub pindala ja raadiuse ühe kolmandiku korrutisega".

Toome mõne näite E. Etvergi kolmanda õpiku ülesannetest.

"Silindri sisse, mille põhja läbimõõt ja kõrgus on võrdsed, on joonestatud võimalikult suur kera ja koonus. Leia nimetatud kolme keha suhted."

"Silindrikujuline metallitükk, mille põhja läbimõõt ja kõrgus on võrdsed, valatakse keraks. Mitu korda suureneb või väheneb ta pindala?"

* * *

Elmar Etverk (1899–1977) sündis Virumaal Vihula vallas. Õppis Vihula ministeeriumikoolis ja Rakvere reaalgümnaasiumis, mille lõpetas 1920. a. 1922–1928 oli Tartu Ülikooli matemaatika-loodusteaduskonna üliõpilane. Töötas 1920–1921 Vihula algkoolis õpetajana ning 1921–1922 samas koolijuhatajana. Aastatel 1926–1927 ja 1928–1930 oli õpetajaks H. Kubu eragümnaasiumis, 1928–1931 Tallinna 2. tütarlaste gümnaasiumis, 1930–1932 J. Westholmi eragümnaasiumis, 1932–1937 oli samas inspektor; 1937–1939 oli

Tallinna Õpetajate Seminari ja Pedagoogiumi direktor, 1939 koolide peainspektor Haridusministeeriumis, 1939–1940 J. Westholmi eragümnaasiumi direktor, 1940–1941 direktori kt. Tallinna 7. keskkoolis, 1941 koolide inspektor Tallinna linna koolivalitsuses ja õpetaja Tallinna 2. keskkoolis, 1941–1943 oli E. Etverk Haridusdirektooriumi kooliosakonna juhataja, 1943–1944 Tallinna Õpetajate Seminari direktor, 1944–1947 samas õpetaja, 1947–1948 vanemõpetaja Tallinna Õpetajate Instituudis, 1948–1950 vanemõpetaja Tartu Riiklikus Ülikoolis, 1950–1952 Tallinna IV keskkooli raamatupidaja, 1952–1959 Tallinna IV keskkooli õpetaja, 1959–1960 Tallinna Pedagoogilise Instituudi vanemõpetaja, 1960–1968 vanemõpetaja ja dotsendi kt. Tallinna Polütehnilises Instituudis. 1968. a. jäi pensionile. Tegutses aktiivselt matemaatika õpetamise ümberkorraldamises. Oli 1957-1961 Haridusministeeriumi matemaatikakomisjoni esimees ja seejärel kuni surmani sama komisjoni liige. Oli ligi 25 matemaatikaõpiku ja 30 töövihiku kaasautor.

1979. a. Rakveres toimunud VI vabariiklikest matemaatikaõpetajate päevadest osavõtjad istutasid tema mälestuseks pärna tema sünnikodu õuele Virumaal Salatse külas.

4.2.10. Geomeetria kooliraamatutest neljakümnendatel aastatel

Eespool oleme kirjeldanud algebra standardõpikute arengu iseärasusi, kus sama teksti autoriks osutusid erinevad inimesed. Geomeetria osas jäi aga õpikute väljaandmise õigus ainult Elmar Etvergi kätte. Neljakümnendate aastate algul väljaantud geomeetriaraamatute trükiks ettevalmistamisel tegi ta põhjaliku töö. Üheltpoolt on autor arvestanud programmi muudatustega, teiseltpoolt on ta püüdnud oma teksti paremaks muuta. Näiteks saab oluliselt põhjalikuma käsitluse ringjoone pikkuse ja ringi pindala käsitlus. Tutvume sellega.

Kui õpiku esimeses väljaandes tehti ainult kindlaks, et korrapärase kõõlhulknurga ümbermõõt kasvab selle tippude arvu kahekordistamisel ja korrapärase puutujahulknurga ümbermõõt kahaneb selle tippude arvu kahekordistamisel, siis teises väljaandes seatakse eesmärgiks arvutada kahekordistatud tippude arvuga korrapärase hulknurga külje pikkus a_{2n} esialgse korrapärase n-nurga apoteemi h_n kaudu. Selleks tõestatakse teoreem: ringjoone sisse joonestatud korrapärase $2n$-nurga külg on ringjoone läbimõõdu ning raadiuse ja korrapärase n-nurga apoteemi vahe geomeetriline keskmine, s.t. $a_{2n} = \sqrt{2r(r-h_n)}$. Ära on jäänud täisnurkse kolmnurga lahendamine trigonomeetriliste funktsioonide abil, samuti ei kasutata enam mõistet *punkti potents ringjoone suhtes.*

Esimesed geomeetriaõpikud Nõukogude Eesti koolis oli aga E. Etverk välja andnud juba ainult õige väikeste muudatustega. Näiteks on 1945. a. ilmunud IX klassi geomeetriaõpik 1942. a. ilmunud gümnaasiumi II klassi geomeetriaõpiku täpne koopia. Kui võrrelda 1941–1944 välja antud stereomeetriakursusi E. Etvergi varasema käsitlusega, siis märkame, et on muudetud vaid mõnede teemade järjestust ning juurde on võetud korrapäraste tahkkehade käsitlus.

4.3. Trigonomeetria käsitlusi

Eesti Vabariigi koolis aastatel 1918–1940 õpetati trigonomeetriat geomeetria osana. Nii leiamegi triogonomeetria käsitlusi A. Nathingi – O. Perli, Jüri Nuudi ja Elmar Etvergi geomeetriaraamatuist ning E. Etvergi, Gerhard Rägo 1939. a. ilmunud gümnaasiumi matemaatika standardõpikust. On avaldatud ka mõned iseseisvad trigonomeetriaõpikud. Neid on kirjutanud Villem Nano, Albert Borkvell ja Kalev Ratassepp. 1941. a. ilmus eestikeelses tõlkes N. Rõbkini trigonomeetriaõpik, mida kasutati Eesti NSV koolides ka viiekümnendatel aastatel. Selle raamatu tutvustamine ei kuulu aga käesoleva töö ülesannete hulka.

Alustatav, trigonomeetria käsitlusi tutvustav paragrahv jaguneb alateemadeks. Iga alateema kohta on allpool antud vastavate raamatute loetelu.

1. Esimene eestikeelne trigonomeetriakonspekt:

"Trigonomeetria (konspekt) ja trigonomeetriliste ülesannete kogu", 1920.

2. Esimesest eestikeelsest trigonomeetriaõpikust:

V. Nano "Trigonomeetria õpperaamat keskkoolidele". Tallinnas 1920;

V. Nano "Tasapinnaline trigonomeetria ja sfäärilise trigonomeetria alged". Teine trükk. Tallinn, 1923.

3. Oskar Pärli trigonomeetria käsitlus:

O. Pärli "Ruumi algõpetus II". 1. trükk (autorid A. Nathing ja O. Perli) 1920, 2. trükk Tartus, 1926, 3. trükk Tartus, 1930.

4. Trigonomeetria käsitlus Albert Borkvelli trigonomeetriaõpikus:

A. Borkvell "Trigonomeetria. Õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele". Tartus, 1929.

5. Trigonomeetria käsitlus Jüri Nuudi geomeetria õpikus:

J. Nuut "Geomeetria keskkoolidele III". Tartu, 1933.

6. Trigonomeetria rakendamine planimeetria- ja stereomeetriaülesannetes Oskar Kooli käsitluses:

O. Kool "Trigonomeetrilisi planimeetria ülesandeid". Tartus, 1928;

O. Kool "Trigonomeetrilisi stereomeetria ülesandeid". Tartus, 1929.

7. Trigonomeetria käsitlus 1939. a. ilmunud Elmar Etvergi ja Gerhard Rägo koostatud matemaatika standardõpikus:

E. Etverk, G. Rägo "Matemaatika õpik humanitaargümnaasiumile". Tartu-Tallinn, 1939.

8. Trigonomeetria 1941–1949 ilmunud standardõpikuis Kalev Ratassepa ning Leonti Ruumeti ja Gerhard Rägo käsitluses:

K. Ratassepp "Trigonomeetria õpik gümnaasiumi III klassile". 1. tr. Tartu, 1942, 2. tr. 1943;

K. Ratassepp "Algebra ja trigonomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile". 1. tr. Tartu, 1942, 2. tr. 1943;

K. Ratassepp "Trigonomeetria keskkooli X klassile. Tallinn, 1947;

L. Ruumet, G. Rägo "Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu III ja IV klassile"". Tartu, 1944.

4.3.1. Esimene eestikeelne trigonomeetriakonspekt

Esimene eestikeelne trigonomeetriakursus avaldati 1920. aastal mimeograafilises paljunduses. See oli ühe vene- või saksakeelse õpiku baasil koostatud konspekt. Arvatavasti seetõttu ei ole sellel 28-leheküljelisel väljaandel "Trigonomeetria (konspekt) ja trigonomeetriliste ülesannete kogu" märgitud autori nime. See konspekt sisaldab aga mahuka kursuse. Käsitlemist leiavad nii täisnurkse kolmnurga *(täiskolmnurga)* kui ka üldise kolmnurga lahendamine. On tutvustatud isegi sellist kolmnurkade lahendamist, kus antud on näiteks $a - b = d, c$ ja γ või $a + b + c = m, a$ ja β. Selles konspektis tutvustatakse veel trigonomeetriliste (goniomeetriliste) võrrandite lahendamist ning seda ka abinurga võtte abil. Näiteks lahendatakse võrrandit

$$a \sin x + b \cos x = c$$

järgmiselt. Jagame võrrandi mõlemad pooled a-ga ja asendame $\frac{b}{a} = \tan\varphi$, kus φ on siis abinurk, saame

$$\sin x \cos\varphi + \sin\varphi \cos x = \frac{c}{a} \cos\varphi$$

ehk $\quad \sin(x+\varphi) = \frac{c}{a} \cos\varphi.$

Siit leitakse nüüd $x+\varphi$ ja x, arvestades, et $\tan\varphi = \frac{b}{a}$.

4.3.2. Esimesest eestikeelsest trigonomeetriaõpikust

Kui 1920. aastal hakati eesti koolide jaoks välja töötama õppekavu, nimetati Villem Nano matemaatika õppekavade komisjoni esimeheks, kusjuures komisjoni koosseisus olid tol ajal juba professorid David Rootsmann, Jaan Sarv, Gerhard Rägo, Kalle Väisälä ja dotsendid Hermann Jaakson ja Wassili Kupffer.

Nagu teame, sai V. Nanost siiski koolimees. Et ta tegi seda tööd hästi, on tunnistanud nii tema õpilased ja kolleegid kui ka inspektorid ja koolinõunikud. Nii näiteks kirjutas riigikoolinõunik Johannes Aavik 1939. a. oma aruandes järgmist: "Dir. Villem Nano võime kooli juhtida ja korras hoida on hää; ta on intelligentne ja avara pilguga."

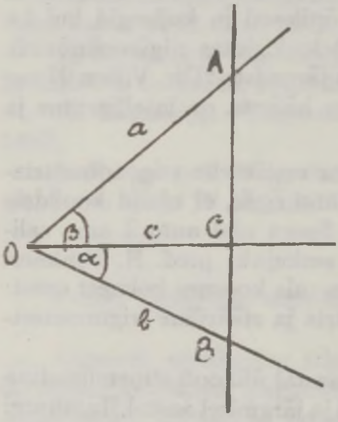
Teeme nüüd põgusa tutvuse esimese eestikeelse trigonomeetriaõpikuga. 1920. aastal, kui ilmus V. Nano õpik, ei olnud koolidele välja töötatud detailseid programme. Seega olid autoril aine valikul suhteliselt vabad käed. Ta valis eeskujuks prof. H. Fenkneri trigonomeetriakursuse ja koostas õpiku, mis koosnes kolmest osast: tasapinnaline trigonomeetria, gonimeetria ja sfääriline trigonomeetria.

Teatavasti suunati V. Nano 1921. aastal ülikooli stipendiaadina ennast täiendama Göttingeni Ülikooli ja järgmisel aastal Hamburgi Ülikooli juurde. Soovitud edu diferentsiaalgeomeetrias ta ei saavutanud, küll aga valmistas seal tõenäoliselt ette oma trigonomeetriaõpiku 2. trüki, tehes õpiku ülesehituses mitu muudatust, mis olid tingitud üheltpoolt matemaatika raamkava väljatöötamisest eesti koolide jaoks ja teiseltpoolt veel suhteliselt noore autori tõekspidamiste täpsustumisest. Uues väljaandes anti suurem osatähtsus graafikutele. Nii tuli õpilastel koostada siinus- ja tangensfunktsioonide tabelid, mõõtes vastavad pikkused funktsiooni graafikult. Viimane konstrueeriti trigonomeetrilise ringi vastavate lõikude abil. Juurde võeti ka funktsioon $y = a \sin(bx + c)$, s.o. harmoonilist võnkumist kirjeldava funktsiooni graafik. Õpetati funktsioonide graafikuid liitma, mis võimaldab esitada õpilastele lahendamiseks näiteks järgmise ülesande: "Põhitoonile ja tema kahele esimesele ülemtoonile vastaku võnkumine

$$s = \sin\ t + \tfrac{1}{3}\ \sin\ 2t + \tfrac{1}{6}\ \sin\ 3t.$$

Kujutada graafiliselt osavõnkumised ja leida nende graafilise liitmise teel üldvõnkumise graafiline kujutis."

Nurkade summa trigonomeetriliste funktsioonide valemite tuletamisel kasutas V. Nano võtet, mida rakendas hiljem ka J. Nuut. Õpiku eessõnas kirjutas V. Nano selle käsitlusviisi kohta järgmist: "Nurkade summa siinuse ja koosinuse tuletamist tarvitusel olevais õpperaamatuis ei saa otstarbekohaseks pidada: abijoonte paljus võtab tõenduselt ülevaatlikkuse, juhuste hulk, mida kõiki on tarvis eraldi vaadelda, teeb tõenduse väsitavaks; loodan, et siin antud igivanal tõendusel, mis nõuab ainult ühe abijoone tõmbamist, oma paremused ei puudu."



Jn. 51.

Esitame selle V. Nano soovitatud tõestuse siinkohalgi (jn. 51): Joonestame nurkade α ja β summa ja tõmbame ristjoone AB nende ühisele küljele OC. Tähistame nurkade küljed tähtedega a, b, c. Kolmnurga OAB pind $S = \frac{1}{2}ab\ \sin\ (\alpha+\beta)$.

$\triangle AOC$ pind $= \frac{1}{2}ac\ \sin\ \beta$,

$\triangle COB$ pind $= \frac{1}{2}cb\ \sin\ \alpha$,

tähendab $\quad \frac{1}{2}ab\ \sin\ (\alpha+\beta) =$
$= \frac{1}{2}cb\ \sin\ \alpha + \frac{1}{2}ac\ \sin\ \beta$;
asetades parema poole esimesse ossa $c = a\ \cos\ \beta$ ja teise $c = b\ \cos\ \alpha$ ning jagades ühise teguriga $\frac{1}{2}ab$, saame

$$\sin\ (\alpha+\beta) = \sin\ \alpha \cos\ \beta + \cos\ \alpha\ \sin\ \beta.$$

Edasi selgitatakse selle valemi tuletamist juhul, kui üks nurkadest peaks olema 90° (siis see võte ei ole rakendatav), ja juhul, kui üks või mõlemad nurgad on suuremad kui 90°.

Oma raamatu 2. trükis loobus V. Nano mõiste *radiaan* kasutamisest põhjendusega, et "absoluutmõõt on nimeta arv, ja temale nimetuse andmine takistaks arusaamist".

Eriline austus oli V. Nanol sfäärilise trigonomeetria vastu, kuigi selle osa maht 2. trükis oli vähenenud: 27-lt leheküljelt 1. trükis 9 leheküljeni 2. trükis. Sfäärilise trigonomeetria tutvustamist matemaatika õppekava ette ei näinud, kuid V. Nano õigustab vastavate teemade säilitamist õpikus (ja küllap põhjendatult) järgmiselt: "Kauguse arvutamine maapinnal ja taevakehade ööpäevase liikumise määramine tohiksid siiski olla niivõrd huvitavad, et õigustada nende jätmist õpperaamatusse."

Tänuväärseks materjaliks V. Nano õpikus on vastav ajalooline ülevaade, mille ta on üle võtnud F. Bützbergeri raamatust "Trigonometrie".

Veel märgime, et V. Nano on pidanud vajalikuks ka sentikraadi tutvustamist ja vastavate ülesannete lahendamist. Teatavasti ei ole ponnistused viia nurgamõõtmist üle kümnendsüsteemile veel tänasenigi realiseerunud. Mõistete hulka rikastavad sfäärilise trigonomeetria mõisted, nagu *sfääriline kaksnurk, sfääriline kolmnurk* jne.

Valemite hulgast leiame selliseid, mis tänapäeva koolikursusest on välja jäänud. Nende hulka kuuluvad tangenslaused

$$tg\ \tfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\tfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \text{ja} \quad \tfrac{a+b}{a-b} = \frac{tg\ \frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\ \frac{\alpha-\beta}{2}};$$

Moleweidi laused

$$\tfrac{a+b}{c} = \frac{\cos\ \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\ \frac{\gamma}{2}}, \quad \tfrac{a-b}{c} = \frac{\sin\ \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\ \frac{\gamma}{2}};$$

Valemid, mis seovad kolmnurga nurkade trigonomeetrilisi funktsioone, nagu

$$\sin\ \alpha + \sin\ \beta + \sin\ \gamma = 4\ \cos\ \tfrac{\alpha}{2}\ \cos\ \tfrac{\beta}{2}\ \cos\ \tfrac{\gamma}{2}$$

$$\tan\ \alpha + \tan\ \beta + \tan\ \gamma = \tan\ \alpha \cdot tan\ \beta \cdot \tan\ \gamma$$

ja ka ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid trigonomeetrilises kujus:

$$x_1 = -\sqrt{q}\ \tan\ \tfrac{\varphi}{2}$$

$$x_2 = -\sqrt{q}\ cot\ \tfrac{\varphi}{2}, \text{ kus } \tfrac{4q}{p^2} = \sin^2\ \varphi, \quad q > 0 \text{ ja } \tfrac{p^2}{4} - q > 0$$

Teoreemide eristamine valemite tuletamisest on muidugi raske, kuid V. Nano käsitlustes kuuluvad teoreemide hulka peamiselt seosed sfäärilises kolmnurgas.

Ülesanded on põhiliselt harjutusülesanded, kuid eristada võib geomeetrilisi, füüsikalisi, astronoomilisi ja tõestusülesandeid. Geomeetriaülesannetest osa kuulub topograafia valdkonda.

Toome mõned ülesannete näited V. Nano trigonomeetriaõpikuist:

"Näidata, et

$$2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + 1 = 0."$$

"Kaks jõudu $P_1 = 12$ kg ja $P_2 = 7$ kg mõjutavad ühte täppi ja sünnitavad omavahel täisnurga. Kui suur on resultatiivjõud ja mis sihis mõjub?"

"Merkuuri suurim nurk-kaugus Päikeselt on $27°42'$. Kui kaugel on Merkuur selles asendis Päikesest, kui Maa kaugus Päikeselt on 149,5 miljonit km?"

Olgu veel lisatud, et V. Nano on mõnel juhul ühe valemi või teoreemi tõestamiseks esitanud ka kaks tõestusviisi, näiteks siinuslausele. Samuti on huvitav märkida, et ta tutvustab ka $\sin x$ ja $\cos x$ reaksarendusi:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 6\cdot 7} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 6} + \ldots$$

Viimaseid kasutab ta $\sin x$ ja $\cos x$ liginemiskõverate tutvustamiseks.

Tänapäeval me tõestame koolis, et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

V. Nano selgitas väikeste nurkade funktsioone vahe $x - \sin x$ kaudu. Selleks kasutas ta analoogilist mõttekäiku meil praegu esitatavaga ja sai võrratuste ahela $\sin x < x < \tan x$.

Edasi kulgeb tema mõttekäik aga järgmiselt:

Tuginedes viimasele võrratuste ahelale $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$.

Et $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, siis $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

Edasi, korrutades võrratuse $\tan x > x$ mõlemaid pooli $\cos x$-ga, saame $\sin x > x \cos x$ ehk kasutades eelmist võrratust:

$$\sin x > x - \frac{x^3}{2} \quad \text{ja süt} \quad x - \sin x < \frac{x^3}{2}.$$

Sellest võrratusest selgub, millise vea võime teha, võttes $\sin x$ asemele lihtsalt x. Näiteks kui $x = 1° = 0,017453$, siis $\frac{x^3}{2} = 0,00000205$, mis ütleb, et ka $\sin 1° = 0,017453$.

* * *

Villem Nano (1893–1965) sündis Võrumaal Vana-Nursi vallas. Õppis Nursi vallakoolis (1901–1903), Rõuge kihelkonnakoolis (1903–1906), Tartu Aleksandri Kroonugümnaasiumis (1907–1913), mille lõpetas kuldmedaliga. Tartu Ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonna lõpetas 1918. a.

Töötas Rakvere Linna Naisgümnaasiumi õpetajana (1917–1918), Virumaa Reaalgümnaasiumi direktorina (1918–1919). 1919. a. suvel oli lektoriks Tartu Ülikooli juures toimunud suvekursustel keskkooliõpetajate ettevalmistamiseks. Samal aastal organiseeris Tallinna Õpetajate Seminari avamise ja oli selle esimene direktor. 1920. a. täitis H. Treffneri Gümnaasiumi direktori kohuseid. Oli 1919–1920 ja 1921–1923 Tartu Ülikooli stipendiaat. Käis ennast täiendamas ka Göttingeni ja Hamburgi Ülikoolis. 1923–1924 oli Tartu Ülikoolis õppeülesande täitja ja üliõpilaskonna esinduse esimees, 1923–1928 oli Tartu Kommertsgümnaasiumi direktor. 1928–1931 Narva Ühisgümnaasiumi inspektor ja 1931–1944 direktor, 1944–1958 oli õpetaja Pärnu 1. ja Pärnu 2. ja Töölisnoorte Keskkoolis. V. Nano on maetud Tallinna Metsakalmistule.

4.3.3. Oskar Pärli trigonomeetriakäsitlus õpikus "Ruumi algõpetus II"

Trigonomeetriliste funktsioonide defineerimiseni jõuab O. Pärli, tuginedes teoreemile: "Kui muutub projekteeritav, aga ei muutu tema kallakus, siis ei muutu ka 1) projektsiooni ja projekteeritava vahekord, 2) projekteerija ja projekteeritava vahekord ja 3) projekteerija ja projektsiooni vahekord."

Selle teoreemi tõestusele järgnevadki definitsioonid, näiteks

"Projekteerija vahekord projekteeritavaga nimetatakse kallaku siinuseks ja kirjutatakse: $\frac{BC}{AD} = \sin A$."

Iseendast mõistetavalt seostatakse kallaku mõiste nurgaga: "Kui kallakuks võtame nurga $\angle B$, ..."

Seosed täisnurkses kolmnurgas antakse siin omanäoliselt: "I Kateet on hüpotenuusi kasvatis 1) oma vastasnurga siinusega, ehk 2) oma lähisnurga cosinusega. II Kateet on teise kateedi kasvatis 3) oma vastasnurga tangensiga, ehk 4) oma lähisnurga cotangensiga." Siit järeldatakse, et "projektsioon on projekteeritava kasvatis kallakuse cosinusega."

Õpikus on toodud trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste tabelid vahemikus $0° - 45°$.

Trigonomeetriliste funktsioonide üldistamisel antakse siinuse ja tangensi definitsioonid järgmiselt:

"Nurga α sinus on see vahekord, mida annab liikuvat raadiust esimese diameetri peale projekteerija perpendikulaar ja raadius."

"Nurga α tangens on see vahekord, mida annab esimese riivaja lõik, arvatud riivaspunktist kuni lõikumiseni liikuva raadiuse ehk diameetri pikendusega, ja raadius."

Pärast taandamisvalemite (redutseerimisvalemite) tutvustamist käsitletakse selles õpikus hulknurkade sarnasust ning võrdelisi lõike täisnurkses kolmnurgas ja ringis.

Seejärel tuletatakse trigonomeetria põhiseosed ning tõestatakse kahe nurga summa ja vahe valemid. Tõestus jaguneb siin kolme ossa. Esiteks vaadeldakse juhtu, kus $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$ ja $\alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$. Teiseks tõestatakse, et kui kahe nurga siinuse ja koosinuse valemid on õiged mingi kahe nurga m ja n jaoks, siis jäävad nad õigeks ka siis, kui üht nurka suurendatakse $90°$ võrra. Kolmandaks näidatakse, et kui α ja β on negatiivsed nurgad, mille absoluutväärtus on ükskõik kui suur, siis võime ikka leida nii suured täisarvud p ja q, et $p \cdot 360° + \alpha$ ja $q \cdot 360° + \beta$ oleksid positiivsed. Seega kehtivad need valemid iga α ja β korral.

Üldise kolmnurga lahendamiseks tõestatakse siinus- ja koosinuslause. Esimene neist on erinev teistes õpikutes kasutatud tõestustest. Esitame selle ka siinkohal.

"Üleüldsuse pärast võtame nürinurkse kolmnurga ABC, kujundame kolmnurga ümber ringi ja tsentrist tõmbame külgedele perpendikulaarsed raadiused OM, OM_1, OM_2; OM_3 on OM_2 pikendus, nii et diameeter $M_2M_3 \perp AB$.

Jooniselt 52 on näha, et

$$\frac{BP}{OM} = \frac{a/2}{R} = \frac{a}{2R} = \sin\ MOB = \sin\ \frac{BOC}{2} = \sin\ A."$$

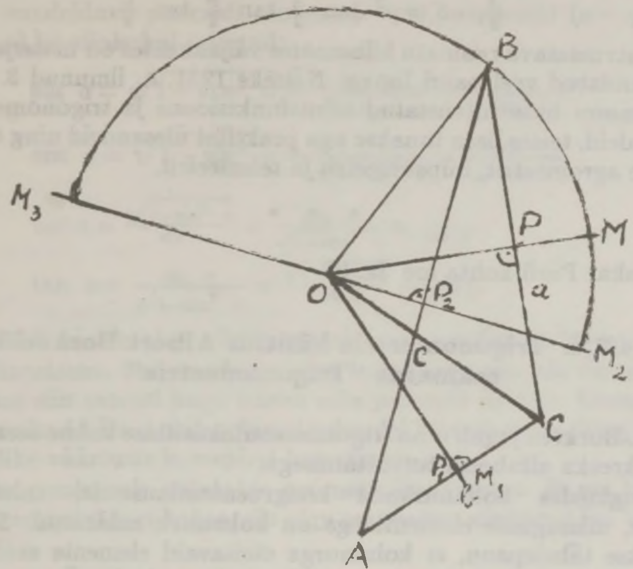
Analoogiliselt näidatakse, et

$$\frac{CP_1}{OM_1} = \sin\ B$$

ja $\frac{BP_2}{OM_2} = \sin\ BOM_2 = \sin\ (180° - BOM_3) = \sin\ BOM_3 = \sin\ C.$

Ja nendest tulemustest järeldubki siinuslause.

Siinuslause abil tuletatakse tangenslause ja koosinuslause abil tõestatakse, et rööpküliku kõigi külgede ruutude summa on võrdne diagonaalide ruutude summaga.



Jn. 52.

O. Pärli käsitluses avaldatakse kolmnurga külgede kaudu ka mediaan

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

ja kõrgus $h_b = \sqrt{\frac{4b^2c^2-(c^2+b^2-a^2)}{4b^2}} = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Nurkade $30°, 45°$ ja $60°$ trigonomeetriliste funktsioonide väärtused leitakse, tuginedes järgmisele teoreemile: "Pingjoone (kõõlu) vahekord raadiusega on sellele pingjoonele vastava tsentrinurga poole kahekordne sinus."

Seega näiteks

$$\frac{a}{R} = 2\sin\frac{60°}{2} \Rightarrow \frac{R}{R} = 2\sin 30° \Rightarrow 1 = 2\sin 30° \Rightarrow \sin 30° = \frac{1}{2};$$

$$\frac{a}{R} = 2\sin\frac{90°}{2} \Rightarrow \frac{R\sqrt{2}}{R} = 2\sin 45° \Rightarrow \sqrt{2} =$$
$$= 2\sin 45° \Rightarrow \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Kolmnurga pindala valemeid esitatakse siin rohkem kui hilisemates trigonomeetriaõpikutes. Siit leiame näiteks valemid

$S = p(p-a)\ \tan\frac{A}{2}, \quad S = p^2\ \tan\frac{A}{2}\ \tan\frac{B}{2}\ \tan\frac{C}{2}.$

Tutvustatava raamatu hilisemates väljaannetes on materjali hulka täiendatud veel paari lisaga. Näiteks 1931. a. ilmunud 3. trükis on esimeses lisas tutvustatud arkusfunktsioone ja trigonomeetrilisi võrrandeid, teises lisas tuuakse aga praktilisi ülesandeid ning tutvustatakse agromeetrit, hüpsomeetrit ja telemeetrit.

* * *

Oskar Pärli kohta loe lk. 99.

4.3.4. Trigonomeetria käsitlus Albert Borkvelli raamatus "Trigonomeetria"

A. Borkvell jagab oma trigonomeetriakäsitluse kolme ossa. I osa algab kreeka alfabeedi tutvustamisega.

Tuginedes kolmnurkade kongruentsuslausetele, tuletatakse meelde, missuguste elementidega on kolmnurk määratud. Seejärel juhitakse tähelepanu, et kolmnurga otsitavaid elemente saab leida konstruktsiooni abil. Seda nimetatakse kolmnurkade geomeetriliseks ehk graafiliseks lahendamiseks. Arvutamise teel kolmnurga elementide väärtuse leidmist nimetatakse aga trigonomeetriliseks meetodiks.

Selles raamatus defineeritakse sarnaste kolmnurkade vastavate külgede jagatise võrdusele tuginedes kuut trigonomeetrilist funktsiooni: siinus, koosinus, tangens, kootangens, seekans ja koosekans. Selgitatakse, et sõna *sinus* on arvatavasti tekkinud ladinakeelsest sõnast *semi inscripta*, lühidalt *s. ins*, mis tähendab "pool kõõlu".

Piirdutakse edaspidi nelja funktsiooniga. Jälgitakse nende funktsioonide muutumist vahemikus 0° kuni 90° ning esitatakse ka nende graafikud samas ulatuses. Edasi leitakse nende funktsioonide väärtused 45°, 30° ja 60° korral. Järgnevalt tutvustatakse üksikasjalikult trigonomeetriliste funktsioonide ja nende logaritmide leidmist tabelitest. Täisnurkse kolmnurga lahendamiseks antakse üldised valemid kaatetite leidmiseks nii hüpotenuusi ja ühe teravnurga kui ka teise kaateti ja ühe teravnurga kaudu.

Järgnevalt esitatakse näiteid kahe lahendusega. Ühel juhul rakendatakse trigonomeetriliste funktsioonide loomulikke väärtusi, teisel juhul nende logaritme. Samal viisil tutvustatakse ka sarikkolmnurga (võrdhaarse kolmnurga) lahendamist.

A. Borkvelli trigonomeetriaraamatu II osas tutvustatakse põhivalemeid ning antakse valemid ühe trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse leidmiseks teiste trigonomeetriliste funktsioonide kaudu. Et teistes vaadeldava perioodi raamatuis neid valemeid ei esitata, siis olgu nad ka siinkohal esitatud:

$$\sin\ \alpha = \sqrt{1-\cos^2\ \alpha} = \frac{\tan\ \alpha}{\sqrt{1+\tan^2\ \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\ \alpha}}$$

$$\cos\ \alpha = \sqrt{1-\sin^2\ \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\ \alpha}} = \frac{\cot\ \alpha}{\sqrt{1+\cot^2\ \alpha}}$$

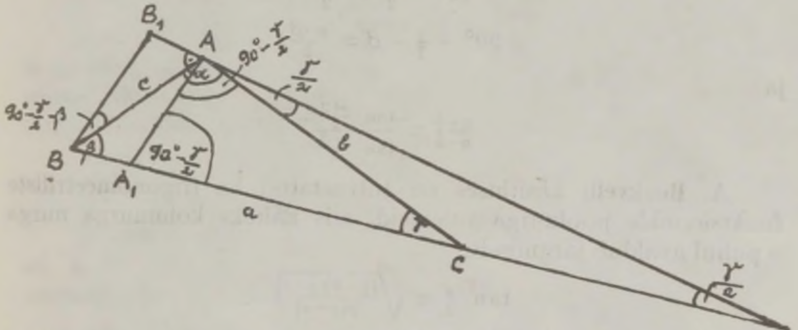
$$\cot\ \alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\ \alpha}}{\sin\ \alpha} = \frac{\cos\ \alpha}{\sqrt{1-\cos^2\ \alpha}} = \frac{1}{\tan\ \alpha}$$

$$\tan\ \alpha = \frac{\sin\ \alpha}{\sqrt{1-\sin^2\ \alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\ \alpha}}{\cos\ \alpha} = \frac{1}{\cot\ \alpha}.$$

Eraldi käsitletakse nürinurga trigonomeetrilisi funktsioone.

Siinuslause, koosinuslause ning kolmnurga pindala valemid tuletatakse siin samuti nagu teistes selle perioodi õpikuis. Lisanduvad aga detailsed näited, mis sobivail juhtudel lahendatakse jällegi eraldi loomulike väärtuste ja seejärel logaritmide abil.

Tangenslausele esitatakse geomeetriline tõestus. Et me ka seda teistes raamatutes ei kohta, siis olgu see tõestus siinkohal ära toodud.



Jn. 53.

"Võtame kolmnurga $\triangle ABC$ (jn. 53), milles $a > b$. Pikendame kolmnurga külge a punktini C_1 nõnda, et $CC_1 = b$. Ühendame punkti C_1 kolmnurga tipuga A, saame sarikkolmnurga $\triangle ACC_1$, mille nurk tipus C on võrdne $180° - \gamma$ ning võrdsed nurgad tippudes A ja C_1.

$$\frac{180°-(180°-\gamma)}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Tõmbame tipust A perpendikulaari AA_1 nõnda, et $AA_1 \perp AC_1$. Tipust B tõmbame joonele AA_1 paralleeljoone kuni C_1A pikenduseni, s.o.

punktini B_1. Saame kaks sarnast täisnurkset kolmnurka $\triangle AA_1C_1$ ja $\triangle BB_1C_1$, mille nurgad tippudes A_1 ja b on $90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.

Kolmnurk $\triangle AA_1C$ on sarikkolmnurk, sest ta nurk tipus A on samuti $90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, seega $CA = CA_1$ ja

$$BC_1 = a + b$$
$$BA_1 = a - b.$$

Sarnastest kolmnurkadest $\triangle AA_1C_1$ ja $\triangle BB_1C_1$ võime kirjutada proportsionaalsete osade suhted:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{C_1B_1}{AB_1};$$

jagame parempoolse osa lugeja ja nimetaja BB_1-ga, saame

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{C_1B_1}{BB_1}}{\frac{AB_1}{BB_1}} = \frac{\tan\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)}{\tan\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \beta\right)}.$$

Et

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{180^\circ - (\alpha+\beta)}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

siis

$$90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \beta = \frac{\alpha-\beta}{2},$$

ja

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}."$$

A. Borkvelli käsitluses on tutvustatud ka trigonomeetriliste funktsioonide poolnurga valemeid, mis näiteks kolmnurga nurga α puhul avaldub järgmiselt:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Edasi antakse hulk ülesandeid (50) kolmnurkade lahendamiseks. Nende hulgast leiame ka näiteks järgmise:

"Miinilaev võtab merel ristleja peilingi $22^\circ 20'$ ja kauguse 2,42 meremiili. Miinilaev sõidab kursiga $67^\circ 15'$ ja kiirusega 14,7 sõlme, võtab 20 minuti pärast sama ristleja peilingi 100° ja kauguse 1,76 meremiili. Missuguse kursi ja kiirusega sõidab ristleja?"

A. Borkvelli trigonomeetriakäsitluse III osa algab nurga mõiste laiendamisega ning nurgafunktsioonide esitamiseks kasutatakse mõisteid *siinusjoon, koosinusjoon, tangensjoon* ja *kootangensjoon*. Nende suhe ringi raadiusega defineeribki vastava trigonomeetrilise funktsiooni. Tuuakse ära tabel, kus on näidatud trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste muutumisvahemikud kõigis veerandites.

Taandamisvalemeid tutvustatakse siin nii $180^\circ, 270^\circ$ kui ka 360° juurest ning jõutakse järgmiste võrdusteni:

$$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = -\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin(360^\circ - \alpha) = \\ = \sin(360^\circ + \alpha);$$

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = -\cos(90^\circ + \alpha) = -\cos(270^\circ - \alpha) = \\ = \cos(270^\circ + \alpha).$$

Analoogilised võrduste ahelad esitatakse kõigi funktsioonide kohta.

Pärast perioodilisuse mõiste tutvustamist esitatakse nurgafunktsioonide graafikud juba üldisel juhul.

Kahe nurga summa siinuse ja koosinuse valem tuletatakse juhtudel 1°, kus $\alpha + \beta < 90^\circ$; 2°, kus $\alpha < 90^\circ, \beta < 90^\circ$ ja $\alpha + \beta > 90^\circ$, ja 3°, kus α ja β on kuitahes suured positiivsed nurgad.

Kahe nurga vahe siinuse tuletamine toimub järgmiselt:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha - \beta + k \cdot 360^\circ) = \sin[\alpha + (k \cdot 360^\circ - \beta)] = \\ = \sin\alpha \cdot \cos(k \cdot 360^\circ - \beta) + \cos\alpha \, \mathit{sin}\,(k \cdot 360^\circ - \beta) = \\ = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \mathit{sin}\,\beta.$$

Analoogiliselt tuletatakse ka valem $\cos(\alpha - \beta)$ jaoks. Kahekordse ja poolnurga funktsioonide valemite tuletamise järel jaotatakse nurgafunktsioonide summa ja vahe teisendamise juurde. Tuletatakse veel eraldi Mollveidi I ja II lause, s.o. valemid:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \quad \text{ning} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Erinevalt teistest vaadeldava perioodi trigonomeetriaõpikutest on A. Borkvell osutanud pisut tähelepanu ka trigonomeetrilistele võrranditele. Esitatakse ainult näidetena võrrandite

$$8\sin x \cdot \cos x = 3, \ \sin^2 x - \cos 2x = 0 \text{ ja } \tan x - 2\cot x = 1$$

lahendused ning ülesannetena esitatakse veel 18 võrrandit. Lõpuks tutvustatakse nurga absoluutmõõtu $\varphi \approx 57{,}3^\circ$, mida nimetatakse radiaaniks, ning leitakse, et a°-le vastab nimeta arv $\frac{a\pi}{180} = \frac{a}{\frac{180}{\pi}} = \frac{a}{\varrho}$ ehk $arc\,a = \frac{a}{\varrho}$.

* * *

Albert Borkvelli elust ja tegevusest loe lk. 139.

4.3.5. Trigonomeetria käsitlus Jüri Nuudi õpikus "Geomeetria keskkoolidele III"

J. Nuut on trigonomeetria teemad jaotanud kahte peatükki: "Trigonomeetria arvutamise alged" ja "Täiendavaid küsimusi trigonomeetria alalt".

Esimeses peatükis on uute mõistete ja valemite sissetoomist motiveeritud. Näiteks, kui on selgitatud, mis on otsene ja kaudne mõõtmine, jätkatakse järgmiselt:

"Kauguste ja nurkade kaudseks mõõtmiseks moodustatakse mõttes kolmnurgad, mille tipud asetseksid parajatel kohtadel; neis kolmnurkades mõõdetakse siis otseselt kättesaadavad elemendid ja arvutatakse otsitavad elemendid. Säärast arvutamistoimingut nimetatakse kolmnurkade lahendamiseks."

Geomeetria eriosa, kus käsitletakse kolmnurkade lahendamise eeskirju, kannab trigonomeetria nime. Et iga kolmnurk on kõrgussirge abil lahutatav kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, siis on tähtis eeskätt õppida täisnurkse kolmnurga lahendamise võtteid.

Edasi tuletatakse meelde varem teadaolevad seosed täisnurkses kolmnurgas: $a^2 + b^2 = c^2$ ja $\alpha + \beta = 90°$. Kui on aga vaja leida nurga järgi külge või külgede järgi nurka, siis selgub, et need valemid sihile ei vii. Seejärel meenutatakse, et sarnasusõpetusest on teada, et $\frac{a}{c} = \alpha$ funktsioon. Nüüd antakse sellele funktsioonile erinimetus *siinusfunktsioon*, ehk lihtsalt *siinus* ning seega $\frac{a}{c} = \sin\ \alpha$.

Seejärel juhitakse tähelepanu asjaolule, et kui α on tuntud, siis on ka $\sin \alpha$ tuntud, sest "siinuse väärtused on juba ammu arvutatud ja vastavates tabelites kokku võetud." Juhitakse veel tähelepanu võimalusele leida siinuse väärtusi vastavalt graafikult, kui täpsuse nõue ei ole suurem kui kaks kümnendkohta. Seejärel õpetatakse siinuse väärtusi leidma tabelist ka interpoleerimise teel.

Teiste trigonomeetriliste funktsioonidega tutvumise vajalikkust põhjendatakse võimalusega vabaneda Pythagorase teoreemi rakendamise vajadusest. Kolmnurkade lahendamine on ju siinusfunktsiooni abil põhimõtteliselt igal juhul teostatav. Et kolmnurga lahendusvõtted nõuavad peamiselt korrutamisi ja jagamisi, siis on loomulik, et võetakse kasutusele trigonomeetriliste funktsioonide logaritmide tabelid.

Kui tahetakse lahendada üldist kolmnurka, siis võivad kolmnurgas esineda nürinurgad ja seetõttu laiendatakse trigonomeetriliste funktsioonide mõisteid ka nürinurkse argumendiga juhtudele. Siin ei otsita mingeid põhjendusi, vaid öeldakse: "On osutunud otstarbekohaseks lugeda nürinurga α siinuse väärtuseks kõrvunurga (mis siis ju kindlasti teravnurk) siinust:

$$\sin\ \alpha = \sin\ \gamma = \sin\ (180^\circ - \alpha)$$

ning koosinuse puhul

$$\cos\ \alpha = -\cos\ \gamma = -\cos\ (180^\circ - \alpha)."$$

Et trigonomeetriliste funktsioonide määramispiirkonna laiendamisel nende omadused peavad kehtima jääma, siis

$$\tan\ \alpha = \frac{\sin\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \frac{\sin\ (180^\circ - \alpha)}{-\cos\ (180^\circ - \alpha)} = -\tan\ (180^\circ - \alpha).$$

Siinuslause tuletatakse, kasutades kolmnurga kõrgusi. Seejärel aga nenditakse, et kui kolmnurgal on antud 2 külge ja nendevaheline nurk või 3 külge, siis siinuslause põhjal ei saa ühe tundmatuga võrrandit ja tuletatakse koosinuslause, tuginedes terav- ja nürinurga vastaskülgede ruutude valemitele.

Esimese peatüki lõpul märgitakse, et trigonomeetriliste funktsioonide rakendusvald ei piirdu üksnes kolmnurkade lahendamisega, vaid neid kasutatakse loodusnähtuste kirjeldamisel, akustikas, optikas, raadiotehnikas ja mujal. See väide saab omakorda trigonomeetriliste funktsioonide defineerimise aluseks ühikringi abil. Nüüd selgub, et näiteks "cos α on säärane funktsioon, mis ei muutu, kui argumendile anda ainult vastupidine märk. Sama omadus on ka astmelisel funktsioonil n, niipea kui n on paarisarv. Neid funktsioone nimetatakse paarisfunktsioonideks."

Analoogiliselt jõutakse ka paaritu funktsiooni mõiste juurde. Antakse ka perioodilise funktsiooni mõiste. Taandamisvalemid nurkadele $90^\circ + \alpha$ ja $180^\circ - \alpha$ loetakse välja graafikuilt. Lõpuks tutvustatakse veel nurga absoluutmõõtu.

Teises peatükis tuletatakse või antakse ülesandeks tuletada kõik tuntud trigonomeetriavalemid, sealhulgas ka tangenslause, Heroni valem ja siseringjoone raadiuse valemid.

Küllalt palju ruumi on ka J. Nuut andnud sfäärilise kolmnurga lahendamisele. Siin tuletatakse

koosinuslause: $\cos\ c = \cos\ a \cdot \cos\ b + \sin\ a \cdot \sin\ b \cdot \cos\ \gamma$,

millest järeldub

Pythagorase lause: $\cos\ c = \cos\ a \cdot \cos\ b$, samuti

siinuslause: $\frac{\sin\ a}{\sin\ \alpha} = \frac{\sin\ b}{\sin\ \beta} = \frac{\sin\ c}{\sin\ \gamma}$.

J. Nuudi trigonomeetriakäsitluses on ülesanded otseselt seotud käsitletava ainega. Näiteks antakse trigonomeetriliste funktsioonide defineerimise järel täisnurkses kolmnurgas ülesanne: "Sõnasta ülalantud trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid kasutades sõnu "vastaskaatet", "lähiskaatet" ja "hüpotenuus"". Õige pea järgnevad ülesanded: "Veendu, et sin α ja tan α peavad teravnurga α kasvamisel kasvama" ja "Veendu, et teravnurga tangens on suurem kui sama nurga siinus".

Perioodilise funktsiooni defineerimisele järgneb ülesanne: "Veendu, et 360° on sin α ja cos α kõige väiksem periood." Nurga absoluutmõõdu tutvustamisele aga järgneb ülesanne: "Näita, et täisnurga absoluutmõõduks on arv $\frac{\pi}{2}$."

Raamatu lõpus on lisana esitatud 20 trigonomeetria arvutamisülesannet. Tutvustame neist mõnda.

"Kella tunniosuti pikkus on 3,4 cm ja minutiosuti pikkus on 5,2 cm. Kui suur on osutite kaugus teineteisest, kui kell näitab 4^h37^m?"

"Määrata kaardi järgi kolmnurga Tapa-Pärnu-Tartu ja Tartu-Narva-Tapa külgede pikkused. Arvuta saadud andmete najal kaugus Pärnu-Narva. Kontrolli lõpptulemust kaardi järgi."

"Veduriratas raadiusega 85 cm on veerenud täpselt 25 meetri võrra edasi. Kui kõrgel asetseb nüüd ratta piirdejoone see punkt, mis veeremise algmomendil puutus kokku rööpaga? Kui kaugel asetseb see punkt oma algasukohast?"

4.3.6. Trigonomeetria rakendamine planimeetria ja stereomeetria ülesannetes Oskar Kooli käsitluses

Aastatel 1928 ja 1929 ilmusid O. Kooli raamatud, kus esimeses esitati 120, teises 210 geomeetriaülesannet, mille lahendamiseks tuli kasutada trigonomeetrilisi funktsioone ja trigonomeetria valemeid. Huvipakkuvad on esimese raamatu alguses autori poolt terminoloogia kohta tehtud märkused. Ta väidab, et õigem on nimetada 90°-st nurka püstnurgaks, mitte täisnurgaks, sest viimane mõiste seostub täispöörde mõistega, mis on 360°. Samuti ei ole autor nõus, et seda nurka nimetatakse *õigeks nurgaks*, nagu mõned autorid on seda teinud, sest siin segab jälle *õige joon* ehk *sirgjoon* ja *sirgnurk* on 180°. Samuti kutsub autor korrigeerima nimetust *ristsumma*, mõeldes terminile ristjoon. Autor on ülesannete lahendamisel kasutanud nii neljakohaliste kui ka viiekohaliste logaritmide tabeleid ja vastavalt sellele antakse kõigile ülesandeile kaks vastust. Veel kasutatakse ülesannete lahendamiseks mõningaid valemeid, mida tänapäeval enam ei rõhutata. Nende valemite üleskirjutamisel kasutame O. Kooli sümboolikat:

$$sn\ (45^\circ - \alpha) = cs\ (45^\circ + \alpha),$$
$$cs\ (45^\circ - \alpha) = sn\ (45^\circ + \alpha),$$
$$1 \pm sn\ \alpha = 2\ cs^2\ (45^\circ \pm \tfrac{\alpha}{2}),$$
$$1 + tg\ \alpha = \frac{sn\ (45^\circ + \alpha)}{cs\ 45^\circ \cdot cs\ \alpha}.$$

Esimesest raamatust oleme näideteks valinud järgmised ülesanded.

"Võrrandi $3x - \frac{2}{x} = 5$ positiivses juures on sama palju ühelisi kui püstkolmnurga kaatetis. Selle kaateti vastasnurk rahuldab võrrandit $sn\ \alpha - cs^2\ \alpha = 0,44$. Leida (ilma logaritmide tabelita) teine kaatet, hüpotenuus ja pind". [1,5; 2,5; 1,5]

"Kolmnurga külje a lähisnurgad rahuldavad võrrandit $sn\ (a + x) = cs\ a + sn\ a \cdot sn\ x$, kusjuures nurk a on teada. Leia kolmnurga pind". $[\frac{1}{2}a^2\ tg\ a]$.

"Kahe kontsentrilise ringi raadiused on R ja r. Vähemale neist on tõmmatud kaks puutujat vahelnurgaga α. Leida nelinurga pind, mille tippudeks puutujate lõikepunktid suurema ringjoonega". $[4r\sqrt{R^2 - r^2}\ cs^2\ \frac{\alpha}{2}]$.

Lisame nüüd näidetena paar ülesannet ka teisest raamatust.

"Kahe paralleelse tasapinna vahel asetsevate sirglõikude projektsioonid ühel tasapinnal suhtuvad nagu 9 : 4; nurgad sirglõikude ja tasapinna vahel suhtuvad nagu 1 : 2. Leida need nurgad". $[tg\ x = \frac{1}{3};\ \ tg\ 2x = \frac{3}{4},\ x = 18^\circ 26']$

"Romboeedri (rööptahukas, mille tahud on võrdsed rombid) tahud on võrdsed rombid teravnurgaga $\alpha (< 60^\circ)$ ja küljega a. Avaldada selle keha maht, kui kahe tipu juures on ainult teravnurgad $a = 5,2$ cm, $\alpha = 49^\circ 40'$". $[2a^3\ sn\ \frac{\alpha}{2}\sqrt{sn\ \frac{3}{2}\alpha \cdot sn\ \frac{\alpha}{2}} = 75{,}133\ \text{cm}^3]$.

"Romb ja temaga pindvõrdne ruut pöörlevad oma külgede ümber. Avaldada pöördkehade pindalade suhe" $[\pi : 2]$.

Mõlemas raamatus on autor avaldanud erinevate maade küpsuseksamite ülesandeid. Esitame nende hulgast ka mõned näited.

"Kaks jõudu $P = 72$ kg ja $Q = 58$ kg on rakendatud keha ühte punkti, nurk nende vahel $\alpha = 72^\circ 30' 44''$. Leida jõudude resultant". (Venemaa) $[105,15\ kg]$.

"Nelinurga küljed suhtuvad nagu 2 : 3 : 5 : 4, aga nende ruutude summa on 486; peale selle on teada, et esimene külg lõikab teist nurgi 105°. Leida nelinurga küljed, nurgad ja pind" (Austria) [96, 51].

"Lahenda võrrandite süsteem: $tg\ x \cdot tg\ z = 2$, $tg\ y \cdot tg\ z = 18$, $x + y + z = 180^\circ$." (Saksamaa) $[x = 26^\circ 34', y = 77^\circ 28', z = 75^\circ 58']$

"Ruudu pind, mis on kujundatud ümber koonuse põhja on Q. Leida selle koonuse maht, teades, et moodustaja ja põhja vaheline nurk on φ. Q=36; $\varphi = 58°42'17''$." (Eesti) $[\frac{\pi}{24} Q \cdot \sqrt{Q} \cdot tg\, \varphi]$.

4.3.7. Trigonomeetria 1939. aasta standardõpikus Elmar Etvergi ja Gerhard Rägo käsitluses

Matemaatika standardõpik oli koostatud humanitaargümnaasiumile. Trigonomeetriakursusest sisaldas ta järgmised põhiteemad: täisnurkse kolmnurga lahendamine, nurgafunktsioonide muutumine ja kolmnurkade lahendamine.

Siinses käsitluses põhjendatakse trigonomeetria õppimist kolmnurga lahendamiseks vajalike seoste puudumisega senistes teadmistes. Trigonomeetriaülesandeks arvatakse:

1) kolmnurga elementide vaheliste seoste arvutamine;

2) nende seoste rakendamine kolmnurga antud elementide järgi otsitavate elementide leidmiseks.

Alustatakse sarnaste täisnurksete kolmnurkade vastavate külgede suhete võrdsusest ning defineeritakse teravnurga siinus vastaskaateti ja hüpotenuusi suhtena. Selgitatakse, et siinuse väärtused on lõigus 0-st 1-ni, ja näidatakse, et ka vastupidi, iga positiivne harilik murd on ühe teravnurga siinus. Edasi leitakse siinuse väärtused nurkade $45°, 30°$ ja $60°$ korral ning tutvustatakse siinuste tabelit ja interpoleerimist tabeli kasutamisel. Seejärel rakendatakse siinust täisnurkse kolmnurga lahendamisel. Kõigi võimalike juhtude kohta lahendatakse ka näidisülesanne. Siinse käsitluse iseärasuseks ongi see, et üht funktsiooni käsitletakse defineerimisest kuni täisnurkse kolmnurga lahendamiseni ja alles seejärel defineeritakse järgmine funktsioon.

Põhimõtteliselt samasugune on ka teiste teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide käsitlus. Lõpuks tutvustatakse täisnurkse kolmnurga, võrdhaarse kolmnurga ning korrapärase hulknurga lahendamist, kasutades kõiki nelja trigonomeetrilist funktsiooni.

Trigonomeetriliste funktsioonide laiendamine mistahes nurgale toimub esimese diameetri, liikuva raadiuse, projektija ja projektsiooni mõistete abil. Selgitatakse, millal on projektija või projektsioon positiivne, millal negatiivne, ning tuginedes ühikringile konstrueeritakse nende funktsioonide graafikud. Taandamisvalemid võetakse kasutusele nurkade $180° - \alpha, 180° + \alpha, 360° - \alpha$ ja $-\alpha$ puhul. Selgitatakse ka perioodilisuse mõistet.

Kolmnurkade lahendamiseks õpitakse tundma siinuslauset ja selle abil nõutakse õpilastelt näiteks kolmnurga sisenurga poolitaja omaduse tõestamist. Siinuslause rakendamiseks esitatakse ka vastavad valemid:

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b}, \quad r = \frac{a}{2 \sin \alpha}, \quad a = 2r \sin \alpha.$$

Nii siinus- kui koosinuslause tõestus on selles käsitluses täpselt samasugune kui J. Nuudilgi. Siin on aga esmalt toodud vastav lause ja siis esitatud selle tõestus.

Koosinuslause rakendamisel kasutatakse valemeid, nagu

$$\cos \alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Tuletatakse kolmnurga pindala valemid (ka Heroni valem) ning tutvustatakse üldise kolmnurga lahendamist, kusjuures lahendused esitatakse algul ka üldkujul.

Standardõpiku juurde kuulus K. Ratassepa ja G. Rägo koostatud ülesannetekogu. Esitame sealt paar näidet.

"Kui kaugele silmast peab asetama kroonise mündi, et ta paistaks niisama suures nurgas kui Kuu? Kroonise mündi läbimõõt on 25 mm ja Kuud näeb nurgas $31'$."

"Rõhtsalt maapinnalt mõõtes leiame kirikutorni tipu kõrvunurga suuruseks φ; tõustes h meetrit üle eelmise vaatekoha, leiame torni aluse alangunurga suuruseks ψ. Näita, et torni kõrgus on $h \tan \varphi \cot \psi$."

"Fotoaparaadi jalg koosneb kolmest ühest punktist lähtuvast ühe ja sama pikkusega vardast. Seisku jalg rõhtsal tasapinnal ja moodustagu iga kaks kõrvuseisvat jala varrast nurga $48°$. Missuguse nurga moodustavad aparaadi jala vardad rõhttasapinnaga?"

* * *

Nii Elmar Etvergi kui ka Gerhard Rägo elu ja tegevust oleme juba tutvustanud (vt. lk. 114 ja lk. 181).

4.3.8. Trigonomeetria käsitlusest 1942–1949 ilmunud standardõpikuis

Vaadeldava perioodi algul avaldati trigonomeetria peatükke Kalev Ratassepa õpikuis ning Leonti Ruumeti ja Gerhard Rägo täiendusõpikus gümnaasiumi reaalharule.

Kalev Ratassepa III klassi õpikus esitatav tekst osutub tuttavaks Elmar Etvergi ja Gerhard Rägo standardõpikust. Autor on lisanud ainult tabelite kasutamise õpetusi ning ülesandeid.

Toome näitena mõned seal esitatud tekstülesanded.

"Olgu teatavas kohas põlevkivikihi kaldenurk rõhttasapinna suhtes 20°. Esinegu vertikaalses puuraugus põlevkivi 4 m paksuselt. Kui paks on põlevkivikiht?"

"Kaldpind moodustab rõhttasapinnaga 32°-se nurga. Kui suure tungiga saab tasakaalustada kaldpinnal asetsevat 56,4 kilogrammist koormat?"

K. Ratassepa gümnaasiumi IV klassi raamatus põhjendatakse algul trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste logaritmide tabelite vajalikkust ning rakendatakse neid täisnurkse kolmnurga lahendamisel. Sellele järgnev tekst kolmnurkade lahendamisest alates siinus- ja koosinuslausetest on jällegi võetud 1939. a. standardõpikust. On endastmõistetav, et K. Ratassepp on neis õpikuis esitanud ülesandeid standardõpiku juurde kuulunud harjutustikust.

K. Ratassepa trigonomeetriakäsitlus, mida iseloomustab rohke näidete kasutamine, lõpeb trigonomeetria rakendamisega stereomeetriaülesannete juures. Viimaste kohta aga näiteid ei tooda. Sfäärilist geomeetriat ega sfäärilist trigonomeetriat selles õpikus ei tutvustata. Raamat lõpeb siiski ülesannetega, nagu

"Oletades, et Tallinn ja Stokholm asetsevad ligikaudu ühel ja samal paralleelil, mille geograafiline laius on $59°23\frac{1}{2}'$ ja teades, et Tallinna idapikkus on $25°06°$ ja Stokholmi idapikkus on $18°04'$, leia, kui pikk on Tallinna ja Stokholmi vaheline paralleelikaar."

"Kui kiiresti liigub Tallinn maakera pöörlemisel?"

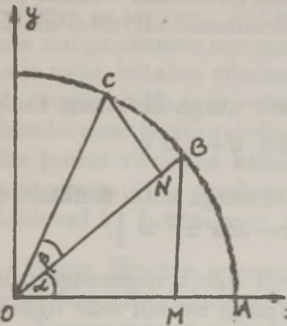
Vastavalt programmile oli gümnaasiumi reaalharus ette nähtud veel täiendav trigonomeetriakursus, mis hõlmas järgmisi küsimusi: nurga absoluutühik, kahe nurga summa ja vahe siinus, koosinus ja tangens, kahekordse ja poolnurga valemid, siinuste ja koosinuste summa ja vahe korrutiseks teisendamine, goniomeetrilised võrrandid, ka sfääriline kolmnurk ning sfäärilise trigonomeetria siinus- ja koosinuslause.

Need teemad esitati gümnaasumi reaalharu täiendusõpikus, mille koostasid L. Ruumet ja G. Rägo. Sellest õpikust tõstame esile kahe teema käsitlust. Esiteks on huvipakkuv kahe nurga summa ja vahe trigonomeetriliste funktsioonide valemite tuletamine, mis tugineb järgmistele lõigu ja murdjoone projektsioonidega seotud teoreemidele:

"Lõigu projektsioon mingile suunaga sirgele võrdub lõigu pikkuse ja lõigu ning sirge vahelise nurga koosinuse korrutisega."

"Murdjoone resultantlõigu projektsioon mingile suunaga sirgele on võrdne murdjoone küllõikude projektsioonide summaga."

Vaatleme valemi $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ tõestust.



Jn. 54.

Olgu nii nurk α kui ka β teravnurgad. Kujutame nurga α ühikringis (jn. 54), võttes tema esimeseks haaraks rõhtdiameetri OA, ja nurga β, võttes selle esimeseks haaraks nurga α teise haara; siis $\widehat{AOB} = \alpha$, $\widehat{BOC} = \beta$ ja $\widehat{AOC} = \alpha + \beta$. Joonestame nurkade α ja β siinuslõigud MB ja NC ja vaatleme murdjoont $OMBNC$. Tema resultantlõiguks on OC.

Projektides murdjoone ja selle resultandi püstdiameetrile, saame murdjoone projektsiooni teoreemi järgi, et

$$OC proj. = OM proj. + MB proj. + BN proj. + NC proj.$$

ja edasi lõigu projektsiooni teoreemi järgi, et

$$OC \cdot \cos\,[90^\circ - (\alpha + \beta)] =$$
$$= OM \cdot \cos\ 90^\circ + MB \cdot \cos\ 0^\circ + BN \cdot \cos\,(90^\circ + \alpha) + NC \cdot \cos\ \alpha.$$

Nagu näeme joonisest, on

$OC = 1,\ OM = \cos\ \alpha,\ MB = \sin\ \alpha,\ BN = 1 - \cos\ \beta$ ja $NC = \sin\ \beta$,

saadud võrduses esinevaid koosinusi aga saab kujutada lihtsamini, nimelt:

$$\cos\,[90^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin\,(\alpha + \beta),\quad \cos\ 90^\circ = 0,\quad \cos\ 0^\circ = 1$$
ja $\cos\,(90^\circ + \alpha) = -\sin\ \alpha$.

Seega

$$1 \cdot \sin\,(\alpha+\beta) = \cos\ \alpha \cdot 0 + \sin\ \alpha \cdot 1 + (1 - \cos\ \beta) \cdot (-\sin\ \alpha) + \sin\ \beta\ \cos\ \alpha$$

ehk, peale koondamist,

$$\sin\,(\alpha + \beta) = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta + \sin\ \beta\ \cos\ \alpha.$$

Teiseks tõstame esile trigonomeetriliste võrrandite käsitlemist. Kõigis kahekümnendatel ja kolmekümnendatel aastatel kirjutatud trigonomeetriakursustes see osa kas üldse puudus või oli seal ainult nende lahendamise põgus tutvustus.

Vaadeldavas õpikus on aga, nähtavasti Saksamaa koolide programmide mõjutusel, nende võrrandite lahendamist tutvustatud. Käsitletud võrranditüübid on järgmised:

1) võrrandid, mis sisaldavad tundmatu nurga ühtainust funktsiooni, näiteks $cot\ x = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $3\ \sin^2\ u - 2\ \sin\ u + 1 = 0$;

2) võrrandid, mis sisaldavad tundmatu nurga mitut funktsiooni, näiteks $4\ \tan\ x + 3\ cot\ x - 1 = 0$, $(\sin\ x - \cos\ x)^2 = \frac{1}{2}$.

3) võrrandid, mis sisaldavad üht või mitut trigonomeetrilist funktsiooni, mille argument on kas tundmatu ise või selle lineaaravaldis, näiteks $\tan\ (x + 30°) = \tan\ 2x$, $\sin\ (x + 45°) +$
$+ \cos\ (x + 60°) = 1$.

Kõigile näidisülesannetele, mis raamatus on lahendatud, on leitud üldised vastused. Seejuures ei kasutata etteantud üldiseid valemeid, vaid saadud lahenditele lisatakse vastav perioodi kordne. Näiteks jõutakse võrrandi $(\sin\ x + \cos\ x)^2 = \sqrt{2}$ lahendamisel võrrandini $\sin\ 2x = \sqrt{2} - 1$ ehk $\sin\ 2x = 0,4142$. Tabelite järgi vastab sellele siinuse väärtusele nurk $24°28'$, järelikult ka nurk $180° - 24°28'$ ehk $155°32'$. Seega

$$2x_1 = 24°28' + n \cdot 360° \quad \text{ja} \quad 2x_2 = 155°32' + n \cdot 360°$$

ehk
$$x_1 = 12°14' + n \cdot 180° \quad \text{ja} \quad x_2 = 77°46' + n \cdot 180°.$$

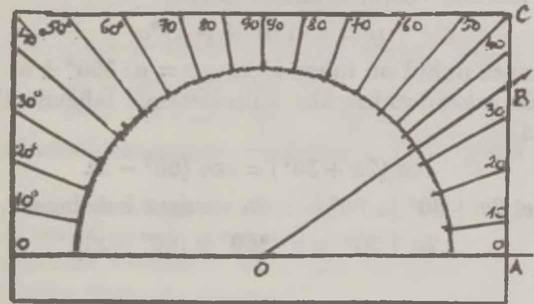
Trigonomeetrilistele võrranditele lahendi kontrollimise nõuet ei esitata.

Sfäärilise geomeetria ja trigonomeetria tutvustamine algab sfäärilisest kolmnurgast, kus määratakse sfäärilise trigonomeetria ülesanne – kauguste, nurkade ja pindalade määramine kera pinnal. Tutvustatakse mitmesuguseid sfääri nurki ning antakse sfäärilise kolmnurga mõiste. Esitatakse sfäärilise trigonomeetria siinus- ja koosinuslaused ning rakendatakse neid mitmesuguste ülesannete lahendamisel. Näiteks maakera pinnal asetseva kahe koha vahelise kauguse leidmine, kui nende kohtade geograafilised koordinaadid on antud, või millises sihis peab lendama lennuk välja kohast *A*, et lühimat teed mööda jõuda kohta *B*.

K. Ratassepp avaldas trigonomeetriaõpiku ka 1947. a. Enamik õpikust ühtis varasema trigonomeetriakäsitlusega, mis avaldati 1942. ja 1943. a. ilmunud õpikuis. Arvestades programmi täienemist, on sellesse aga juurde võetud teemad, nagu kahe nurga summa siinus, koosinus ja tangens, kahekordse nurga siinus, koosinus ja tangens, kahe nurga siinuste summa ja vahe ning kahe nurga koosinuste summa ja vahe, leitakse võrdsete siinustega, võrdsete koosinustega, võrdsete tangensitega ja võrdsete kootangensitega nurkade üldavaldised, lahendatakse gonimeetrilisi võrrandeid ning kolmnurkade lahendamise juures võetakse kasutusele lisaks siinus- ja koosinusteoreemile ka tangens- ning poolnurgateoreem. Osa neist teemadest on küll käsitletud ka L. Ruumeti, G. Rägo õpikus.

Seega lähenes trigonomeetriakursus juba 1947. a. oma sisult üleliidulise programmi nõuetele.

Toome mõned näited ka selle õpiku ainekäsitlusest.



Jn. 55.

Täisnurkse kolmnurga elementide arvutamisel nurga tangensi abil võetakse kasutusele nn. tangensjoonlaud (vt. jn. 55). Nimetus tuleb sellest, et lõigud AB ja AC selle malli serval on võrdelised vastavate nurkade tangensitega.

Kahe nurga summa siinuse ja koosinuse käsitlus tugineb murdjoone ja selle sulgeja (resultandi) projektsioonide vahelisele seosele. Nii oli tehtud ka L. Ruumeti ja G. Rägo raamatus.

Kui viimati nimetatud raamatus gonimeetriliste võrrandite lahendamine jagunes kindlate võrranditüüpide lahendamisele, siis K. Ratassepa käsitluses selgitatakse juba enne gonimeetriliste võrrandite käsitlemist, kuidas avaldub võrdsete siinuste, koosinuste, tangensite ja kootangensitega nurkade üldavaldis. Siinuste puhul on vastav aine esitus järgmine.

Kõigi nurkade üldavaldist, mille siinused on võrdsed mingi nurga α siinusega, tähistatakse tähega φ. Siis on

$$\sin\varphi = \sin\alpha \qquad \text{ehk} \qquad \sin\varphi - \sin\alpha = 0.$$

Nüüd rakendatakse õpitud valemit kahe nurga siinuste vahe kohta ja saadakse, et

$$2\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}\cdot \sin\frac{\varphi-\alpha}{2} = 0$$

ja siit

$$\text{kas} \qquad \cos\frac{\varphi+\alpha}{2} = 0 \qquad \text{või} \qquad \sin\frac{\varphi-\alpha}{2} = 0.$$

Esimesel juhul $\frac{\varphi+\alpha}{2} = (2k+1)\cdot 90^\circ$ ja teisel juhul $\frac{\varphi-\alpha}{2} = 2k\cdot 90^\circ$ ja siit jõutakse tulemusteni

$$\varphi = (2k+1)\cdot 180^\circ - \alpha \qquad \text{või} \qquad \varphi = 2k\cdot 180^\circ + \alpha$$

ning need valemid võetakse kokku üheks:

$$\varphi = n\cdot 180^\circ + (-1)^n\alpha.$$

Koosinuse puhul on tulemuseks $\varphi = n\cdot 360^\circ \pm \alpha.$

Viimast rakendatakse ühe näiteülesande lahendamisel. Selleks on võrrand

$$\cos(2x+30^\circ) = \cos(60^\circ - x).$$

Et nurkadel $2x+30^\circ$ ja $60^\circ - x$ on võrdsed koosinused, siis

$$2x+30^\circ = n\cdot 360^\circ \pm (60^\circ - x);$$

niisiis, kas

$$2x+30^\circ = n\cdot 360^\circ + (60^\circ - x) \quad \text{või} \quad 2x+30^\circ = n\cdot 360^\circ - 60^\circ + x.$$

Nendest võrdustest saadakse antud võrrandi üldlahenditeks

$$x_1 = n\cdot 120^\circ + 30^\circ \qquad \text{ja} \qquad x_2 = n\cdot 360^\circ - 90^\circ.$$

Veel õpetatakse K. Ratassepa raamatus abinurga võtte abil lahendama võrrandeid

$$a\cos x + b\sin x = c,$$

kus a, b ja c on nullist erinevad reaalarvud. Selle võtte kohaselt tähistatakse $\frac{a}{b} = \tan t$ ning antud võrrand on esitatav kujul

$$\tan t\cdot\cos x + \sin x = \frac{c}{b}.$$

Et aga $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$, siis $\sin t\cdot\cos t + \cos t\cdot\sin t = \frac{c}{b}\cdot\cos t$

ehk $\sin(x+t) = \frac{c}{b}\cdot\cos t.$

Seega leitakse kõigepealt abinurk t, siis $\cos t$ ja $\frac{c}{b}\cdot\cos t$ ning seejärel avaldatakse nurk $x+t$ ja lõpuks otsitav nurk x.

Veel lahendatakse K. Ratassepa trigonomeetriaõpikus gonimeetrilisi võrrandeid logaritmide abil. Näitena tuuakse võrrand

$$197 \cdot \cos x + 27,1 \cdot \sin x = 116,3.$$

Siin leitakse võrrandist $\tan t = \frac{197}{27,1}$ logaritmimise teel t ja seejärel jätkatakse nagu eelmises ülesandes. Lahendus esitatakse järgmise skeemi kujul:

$$\begin{array}{lcl|lcl}
\log 197 & = & 2{,}2945 & \log\cos t & = & \bar{1}{,}1363 \\
\log 27{,}1 & = & 1{,}4330 & \log 116{,}3 & = & 2{,}0656 \\
\hline
\log\tan t & = & 0{,}8615 & & & 1{,}2019 \\
t & = & 82^\circ 10' & \log 27{,}1 & = & 1{,}4330 \\
\hline
 & & & \log\sin(x+t) & = & \bar{1}{,}7689 \\
 & & & x+t & = & 35^\circ 58'
\end{array}$$

Nüüd $\quad x + t = n \cdot 180^\circ + (-1)^n 35^\circ 58'$

ja siit $\quad x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n 35^\circ 58' - 82^\circ 10'$

ehk $\quad x_1 = 2k \cdot 180^\circ - 46^\circ 12',$

$\quad x_2 = (2k+1) \cdot 180^\circ - 118^\circ 08'.$

Esitatud tekstülesannetest võiksid huvi pakkuda näiteks järgmised.

"Täisnurkses kolmnurgas on üks külg teise kahe külje geomeetriline keskmine. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad?"

"Kui suured on võrdhaarse kolmnurga nurgad, kui alusnurga siinus võrdub kahekordse tipunurga siinusega?"

* * *

Siin nimetatud autoreist on meile juba tuttavad Gerhard Rägo ja Kalev Ratassepp (vt. lk. 181 ja lk. 309).

Esitame mõningad andmed ka Leonti Ruumeti elu ja tegevuse kohta.

Leonti Ruumet (varem Grumm) (1898–?) sündis Saaremaal Lümanda vallas Koimlas. Lõpetas Kuressaare meesgümnaasiumi 1917. a. Jätkas õpinguid esialgu Peterburi Ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonnas ning jätkas õpinguid alates 1921. aastast väikeste vaheaegadega Tartu Ülikoolis. Lõpetas ülikooli 1930. aastal. Töötas õpetajana esialgu Käsmu merekoolis, hiljem Tallinna koolides. Osales aastatel 1937–1939 Eesti Matemaatika Õpetamise Komisjoni töös. Emigreerus 1944. a. esialgu Saksamaale, kus töötas Eesti põgenike laste matemaatikaõpetajana, hiljem elas Ameerikas. Töötas matemaatikaprofessorina New Yorgis. Suri seal 1980. aastatel.

4.4. Analüütilise geomeetria ja matemaatilise analüüsi käsitlusi

Analüütilise geomeetria ja matemaatilise analüüsi elementide koolis õpetamise nõue tõstatati akuutselt päevakorrale esimeses koolimatemaatika sisu uuendamist taotlevas rahvusvahelises reformiliikumises, mida oleme eespool tutvustanud (vt. II, 2.1.). Eesti Vabariigi esimestel aastatel kehtestatud matemaatikaprogrammid olid napisõnalised ning autoritel olid suhteliselt vabad käed aine valikuks oma õpikusse. Teame, et esimesed ulatuslikumad analüütilise geomeetria ja matemaatilise analüüsi käsitlused avaldas kahekümnendate aastate algul professor Gerhard Rägo. Rohkesti esitas kõrgema matemaatika valemeid 1921. a. ilmunud "Tehnika käsiraamatus" Johannes Kiivet. Küllalt mahuka analüüsikursuse paigutas oma algebraõpikusse Viktor Päss. Paul Ederberg tutvustas oma algebraõpikus analüütilise geomeetria elemente. Eraldi kirjutasid kõne all olevate ainete õpikuid veel Albert Borkvell ja Jaan Sarv, pidades silmas kas kesk- või kõrgkooli huve. Edgar Krahn tõlkis eesti keelde A. Wildbreti analüütilise geomeetria õpiku. Huvitava lahenduse said nimetatud ainete käsitlused kolmekümnendate aastate algul G. Rägo tööraamatutes ning 1939. a. ilmunud E. Etvergi ja G. Rägo matemaatika humanitaargümnaasiumi standardõpikus.

Käesolevas paragrahvis tutvustame järgmisi matemaatilise analüüsi ja analüütilise geomeetria käsitlusi.

1. Gerhard Rägo matemaatilise analüüsi õpik:

G. Rägo "Matemaatilise analüüsi elemendid. Õpperaamat ja ülesanded". Tartu, 1922.

2. Gerhard Rägo analüütilise geomeetria õpik:

G. Rägo "Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned. Elementaarne õpperaamat ja ülesanded". Tartu, 1921.

3. Kõrgema matemaatika elemendid Joh. Kiiveti käsiraamatus:

J. Kiivet "Tehnika käsiraamat. Matemaatika, mehaanika ja ainete tehnoloogia". Tallinnas, 1921.

4. Analüütilise geomeetria ja matemaatilise analüüsi elemendid E. Krahni tõlgitud A. Wildbreti õpikus:

A. Wildbrett "Analüütilise geomeetria ja diferentsiaalarvamise põhijooned". Tallinnas, 1922.

5. Jaan Sarve analüütilise geomeetria käsitlusest:

J. Sarv "Analüütilise geomeetria algkursus". Tartu, 1924.

6. Analüütilise geomeetria elemendid Paul Ederbergi algebraõpikus:

P. Ederberg "Täis- ning murdavaldused ja esimese astme võrrandid. Algebra ülesannete kogu ja kokkuvõtlik käsiraamat VII ja VIII õppeaasta jaoks". Talinnas, 1922;

P. Ederberg "Juured ja ruutvõrrandid. Algebra ülesannete kogu VIII ja IX õppeaasta jaoks". Tallinnas, 1922.

7. Matemaatilise analüüsi elemendid Viktor Pässi algebraõpikus:

V. Päss "Algebra ülesannete kogu II. Teooria ja ülesanded (X ja XI õppeaasta jaoks)". Tallinn, 1923.

8. Matemaatilise analüüsi elemendid Gerhard Rägo tööraamatutes:

G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Analüüsi alged. 4. klassi kursus". Tartus, 1930;

G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Analüüsi alged. Statistika alged. 5. klassi kursus". Tartus, 1932.

9. Analüütilise geomeetria elemendid Oskar Kooli käsitluses:

O. Kool "Analüütilise geomeetria põhijooni ja ülesandeid. Gümnaasiumi humanitaarharu kursus". Tartu, 1928.

10. Albert Borkvelli analüütilise geomeetria õpikud:

A. Borkvell "Analüütiline geomeetria. Õpperaamat keskkoolidele". Tartus, 1930;

A. Borkvell "Tasapinnalise ja ruumilise analüütilise geomeetria põhijooni". Tartus, 1937;

A. Borkvell "Analüütiline geomeetria". Tartu, 1949.

11. Albert Borkvelli matemaatilise analüüsi õpik:

A. Borkvell "Matemaatilise analüüsi põhimõisted ja rakendused". Tartu, 1927.

12. Matemaatilise analüüsi ja analüütilise geomeetria elemendid esimestes standardõpikutes:

E. Etverk, G. Rägo "Matemaatika õpik humanitaargümnaasiumile". Tartu-Tallinn, 1939;

K. Ratassepp, G. Rägo "Matemaatika harjutustik humanitaargümnaasiumile". Tartu-Tallinn, 1938.

13. Matemaatilise analüüsi ja analüütilise geomeetria elemendid neljakümnendate aastate standardõpikutes:

G. Rägo "Matemaatika õpik gümnaasiumi V klassile". Tartu, 1942;

G. Rägo "Matemaatika õpik keskkooli XI klassile". Tallinn, 1945.

4.4.1. Gerhard Rägo matemaatilise analüüsi õpik

Esimene eestikeelne matemaatilise analüüsi käsitlus kuulub G. Rägole. Tema raamat "Matemaatilise analüüsi elemendid" algab funktsionaalse olenevuse mõiste ja funktsioonide graafilise kujutamise tutvustamisega. Funktsionaalse olenevuse mõiste juurde jõutakse kehade vaba langemist jälgides. Katse tulemused esitatakse tabelina, graafikuna ja analüütilisel kujul. Need "väljendavad igaüks omal viisil üht ja sama mõtet: katse ajavahemikus vastab igale ajamomendile t üks ja ainult üks, sellele ajale omane kindel käidud tee pikkus s. Seda vastavusmõtet me väljendame lauses: tee pikkus s oleneb ajast t." Siit jõutakse funktsiooni üldise definitsioonini: "On kaks suurust – nimetame neid u ja v – niisuguses vahekorras, et igale esimese väärtusele $u_1, u_2, u_3, ..., u$ vastab üks ja ainult üks temale omane teise suuruse kindel väärtus: $v_1, v_2, v_3, ..., v$, siis nimetatakse seda teist v esimese u funktsooniks."

Matemaatilise analüüsi põhimõistetena esitatakse lõplikud ja lõpmata kasvavad ning lõpmata vähenevad suurused. Tutvustatakse funktsiooni piiri mõistet. Sealjuures rõhutatakse, et "tähtsamaid matemaatilise analüüsi ja täpse loodusteaduse mõisteid pole võimalik defineerida kui teatud funktsioonide väärtusi, küll aga kui piirisid, milledele need väärtused antud tingimustel lähenevad". Funktsiooni pidevuse mõiste tutvustamise järel selgitatakse, et "Terve uuema aja loodusteadus põhjenes usul, et looduses ei sünni hüppeid. See usk võimaldas matemaatilise analüüsi tarvitamist loodusnähtuste uurimise võimsama tööriistana ja sai selle tõttu tähtsamaks teguriks eksaktse loodusteaduse arenemisel." Veidi edasi loeme aga: "Ilmavaate ajajärk, mis loodusnähtuste pidevuse usu peale rajatud, näib lõpu poole jõudvat, andes maad uuele, praegu nii võimsalt kasvavale teadusele ja ilmavaatele, mis oletuse peale rajatud: kõik sündimine on katkev, loodusnähtuste pidevus on ainult näiv."

Lähtudes sirge tõusu uurimisest, jõutakse ühtlaselt kulgevate ja ositi ühtlaselt kulgevate nähtuste ja nende muutumise kiiruse juurde. Viimasele tuginedes jõutakse mitteühtlaselt kulgevate nähtuste kiiruse avaldamiseni järgmiselt: "Mitteühtlase liikumise kiirus aja-momendil t on piir, millele läheneb kiirus mõeldud ositi ühtlases liikumises, kui momendile t järgnev ühtlusvahemik $\triangle t$ lõpmata läheneb nullile." Sama definitsioon antakse ka keskmise kiiruse mõiste kaudu. Pärast puutuja mõiste defineerimist muutuva "siduja" piirsirgena ning kiiruskõvera graafilist tuletamist teekõverast jõutakse funktsiooni tuletise mõisteni: "Funktsiooni tuletis mõnel rippumatu muutuja väärtusel on piir, millele läheneb suhe funktsiooni kasvust *r.m.* kasvuga, mis järgneb nimetatud *r.m.* väärtusele, selle *r.m.* kasvu lõpmatul vähenemisel." (*r.m.* 'rippumatu muutuja'.)

Käsitletakse ka liitfunktsiooni (funktsiooni funktsioon) tuletist. Ulatuslikult rakendatakse funktsiooni tuletist funktsiooni muutumise uurimiseks. Huvitavalt on sõnastatud näidetena lahendatud funktsiooni maksimumi või miinimumi leidmise ülesanded. Näiteks:

"Kolm tänavat piiravad kolmnurkset tükki maad. Sellele tahetakse nii suur maja püstkülikuse alusega ehitada, kui iganes võimalik. Kuidas peab aluse mõõdud valitama?"

"Telgi katteks on tarvitada antud riidepind s. Kuidas peab valima telgi mõõdud, et tema mahutus oleks maksimaalne?"

Integreerimise juurde jõutakse pindfunktsiooni ja selle tuletise ning põõrdkeha mahtfunktsiooni ja selle tuletise kaudu. Integraali mõistet rakendataksegi esmalt tasapinnaliste pinnatükkide pindala ja põõrdkehade ruumala arvutamiseks. Siin saadakse üks vähetuntud tulemus: paraboloid jagab silndri, millesse ta on kujundatud, kaheks võrdseks osaks. Need ülesanded lahendatakse kõik algfunktsiooni mõistele tuginedes, integraalimärki kasutamata. Tutvustatakse ka graafilist integreerimist.

Edasi käsitletakse funktsiooni teist tuletist ning rakendatakse seda funktsiooni graafiku iseloomustamiseks. Esitatakse joone kõveruse mõiste ning leitakse kõveruskeskkoha koordinaate.

Pärast tutvumist põõrdfunktsiooni mõistega tutvustatakse arkusfunktsioonide integreerimisvalemeid ning õpetatakse ositi integreerima.

Eksponentfunktsiooni juurde jõutakse, jälgides kapitali liitprotsendilist kasvamist. Eksponentfunktsiooni defineeritakse avaldisena e^t ehk e^{at}, logaritmfunktsiooni aga defineeritakse kui selle põõrdfunktsiooni. Leitakse nende funktsioonide tuletised ja esitatakse nendega seotud integreerimisvalemid. Eksponentfunktsiooni rakendusena tutvustatakse orgaanilise kasvamise seadust. Selle käigus käsitletakse sooja keha jahtumist, valguse tugevuse kustumist neelavas keskkonnas ning rihma hõõrumist rattal.

Raamat lõpeb funktsioonide ligikaudse avaldamisega polünoomide abil ning integraali ligikaudse arvutamisega, milleks tutvustatakse loendamis-, püstkülik-, trapets- ja paraboolvalemit.

* * *

Autori elu ja tegevuse kohta leiame andmeid lk-l 181.

4.4.2. Gerhard Rägo analüütilise geomeetria õpik

G. Rägo kirjutas ka esimese eestikeelse analüütilise geomeetria raamatu.

See raamat oli mõeldud küll keskkoolis kasutamiseks, kuid autor on siia paigutanud ka materjali, mis võimaldas teda kasutada ülikooliski. Väärtuslikud on autori pöördumises lugeja poole antud soovitused, kus esteetilise külje rõhutamise ja kontrolli nõude kõrval on öeldud: "Selle raamatu lugemisel ei tule mitte püüda niipalju ainete äraõppimisele, kui endale täie selguse muretsemisele esitatud mõttekäigust."

Analüütilise geomeetria ülesande määramiseks alustatakse vaatlustulemuste protokollimisel saadud andmete graafilise kujundamisega. Punkti koordinaatide tutvustamisel esitatakse nii rist- kui kaldkoordinaadid kui ka polaarkoordinaadid. Samuti lahendatakse siin kahe punkti vahelise kauguse leidmise, lõigu etteantud suhtes jaotamise ning kolmnurga raskuskeskme määramise ülesanded.

Ka siin defineeritakse funktsiooni ühesena: "Kui kaks suurust – nimetame neid x ja y – on niisuguses vahekorras, et igale esimese suuruse väärtusele vastab üks ja ainult üks teise väärtus, siis on see teine y esimese x-i funktsioon."

Kõvera võrrand esitatakse nii ristkoordinaatides, polaarkoordinaatides kui ka parameetrilisel kujul.

Sirge võrrandi käsitlemisel seatakse ülesandeks näidata, et iga "esimeseastmelise" võrrandi $AX + BY + C = 0$ kuju on sirge. Seda näitamist alustatakse võrranditest $x = a, y = b, y = mx, y = mx + b$. Seejärel leitakse sirge võrrand telglõikudes ja sirge normaalvõrrand. Lahendatakse mõned ülesanded geomeetrilistest kohtadest (näiteks: leida antud kahe sirge nurgapoolitaja võrrand; missugune on täpi geomeetriline koht, kust antud lõik $2a$ paistab nurgas 45°). Sirge võrrandi rakendusena tutvustatakse lineaarset interpoleerimist ja ruutvõrrandi nomogrammi.

Teist järku joonte käsitlemisel selgitatakse nende konstrueerimise võimalusi. Pärast ellipsi, hüperbooli ja parabooli võrrandite tuletamist selgitatakse nende joonte tekkimist koonuse ja tasandi lõikumisel.

Joone puutuja käsitlemisel antakse esmalt funktsiooni tuletise definitsioon ja seda kasutatakse soovitud võrrandi leidmiseks. Teist järku joonte tutvustamisel esitatakse ka diameetrite võrrandid ning õpitakse üldist teist järku võrrandit uurima.

Raamatus on küllalt palju ülesandeid. Nende vastuseid ei ole õpikus toodud.

4.4.3. Kõrgema matemaatika elemendid "Tehnika käsiraamatus"

Prof. G. Rägo aitas oma raamatutega "Matemaatilise analüüsi elemendid" ja "Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned" kaasa matemaatika õpetamisele ka Tartu Ülikoolis. Tallinna Tehnikumi vajadusi arvestades otsustas Eesti Tehnika Selts aga välja anda viis käsiraamatut. Esimesse neist oli kontsentreeritud matemaatika, mehaanika ja ainete tehnoloogia; teise masinaehituse; kolmandasse elektrotehnika; neljandasse laevaehituse ning viiendasse inseneriehituse ja arhitektuuri põhivara.

Esimese osa koostas ja toimetas Tallinna Tehnikumi dotsent ja dekaan *cand. math.* Johannes Kiivet. Selle käsiraamatu matemaatikaosa hõlmas järgmisi üldteemasid: aritmeetika ja algebra, trigonomeetria, diferentsiaal- ja integraalarvutus ning analüütiline geomeetria. Kõigis aineosades esitati valemeid ja näiteid, mis hiljem on arvatud kõrgema matemaatika osadeks. Nii leiame astmete ja juurte valemite hulgas ka järgmised reaksarendused:

$$\tfrac{1}{1\pm x} = (1 \pm x)^{-1} = 1 \pm +x + x^2 \pm x^3 + x^4 \pm x^5 + ...;$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 \pm \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2\cdot 4}x^2 \pm \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - ...$$

ja Euleri valemi

$$(\cos\ x + \sin\ x)^{in} = \cos\ nx + i\ \sin\ nx.$$

Logaritmide juures on tutvustatud nii kümnendlogaritmi (lg) kui ka naturaallogaritmi (lgn) mõistet ning antud ka neid siduvad valemid, nagu

$$lg\ x = lg\ e \cdot\ lgn\ x; \qquad lgn\ x = lgn\ 10\ lg\ x.$$

Determinantide puhul näidatakse, kuidas kolmerealine determinant on esitatav kahereaiste kaudu ja neljarealine kolmerealiste kaudu. Samuti rakendatakse determinanti lineaarvõrrandisüsteemide lahendamisel. Sealhulgas esitatakse süsteemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

lahend ka determinantides

$$x : y : z = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ruutvõrrandite lahendamiseks juhul, kui kordajad on suured arvud, on soovitatud järgmist goniomeetrilist lahendamisviisi:

1) $x^2 \pm px - q = 0$, kus $p > 0$ ja $q > 0$ puhul leitakse teravnurk φ võrdusest $tg\,\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, ja siis $x_1 = \pm\sqrt{q}\; tg\,\frac{\varphi}{2}$, $x_2 = \pm\sqrt{q}\; ctg\,\frac{\varphi}{2}$ (– või + vastavalt p märgile);

2) $x^2 \pm px + q = 0$, kus $p > 0$ ja $q > 0$. Siin leitakse φ võrdusest $\sin\,\varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ ja sel juhul $x_1 = \pm\sqrt{q}\; tg\,\frac{\varphi}{2}$, $x_2 = \pm\sqrt{q}\; ctg\,\frac{\varphi}{2}$.

Kui aga $\sin\,\varphi > 1$, siis on juured imaginaarsed:

$$x = \sqrt{q}(\cos\,\varphi \pm i\,\sin\,\varphi),$$

kus $\cos\,\varphi = \pm\frac{p}{2\sqrt{q}}$, $\quad 0° < \varphi < 180°$.

Kuupvõrrandi lahendamiseks esitatakse Cardano valemid.

Veel kuuluvad aritmeetika- ja algebraossa kombinatoorika elemendid, rentrendi ja tähtajaliste maksude arvamine ning read. Nende teemade juurest tõstame samuti esile mõnda valemit.

Permutatsioonide arvu valem esitatakse ka korduvate elementide olemasolu korral:

$$P_n = \frac{n!}{p!\,q!\,r!\ldots w!},$$

Ridade juures tutvustatakse lisaks tavalise aritmeetilise rea summa valemile ka 2., 3. ja 4. "järjekorra" aritmeetiliste ridade summa valemeid. Näiteks:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Esitatakse ka "eksponentsiaal- ja logaritmide" ridu, nagu

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

ning trigonomeetrilisi ja tsüklomeetrilisi ridu, nagu

$$\arctan\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$

Trigonomeetriaosas on "Tehnika käsiraamatus" toodud kõik tuntud trigonomeetriavalemid ning antud ka seosed nii täisnurkse kui "vildakkolmnurga" arvutamiseks. Sinna juurde kuuluvad veel sfäärilise kolmnurga arvutamise valemid.

Diferentsiaal- ja integraalarvutuse osas esitatakse esmalt diferentseerimisvalemid, seejärel aga kohe Maclaurini ja Taylori read. Edasi tutvustatakse määramatuid avaldisi, leitakse funktsioonide maksimumi ja miinimumi ning õpetatakse ratsionaalseid murde esitama osamurdude summana. Integreerimise puhul antakse kõik tuntumad integreerimisvõtted.

Veel tutvustatakse selles peatükis I ja II järku diferentsiaalvõrrandite lahendamist.

Analüütilise geomeetria peatükis on samuti ohtrasti valemeid, kuid piirdutakse tasapinnalise geomeetriaga. Näiteks on parabooli $y^2 = 2px$ juures antud ka järgmised valemid ja võrrandid:

- tulipunkti F kaugus tipust A: $AF = \frac{p}{2}$;
- riivaja võrrand: $\eta y = p(\xi + x)$;
- normaali võrrand: $\eta - y = \frac{y}{p}(\xi - x)$;
- kõverusraadius: $\sigma = \frac{(p+2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}$;
- evolüüt: $27py^2 = 8(x - p)^3$ (semikuupne parabool);
- kaare pikkus: $l = \frac{p}{2}\{\sqrt{\frac{2x}{p}(1 + \frac{2x}{p})} + lgn\,(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}})\}$.

Nagu esitatud valemitest selgub, oli matemaatikakursus Tallinna Tehnikumis vägagi soliidne. Johannes Kiiveti koostatud käsiraamat piirdub küll ainult valemite esitamisega, kuid on põhjust arvata, et matemaatikatundides valemeid siiski ka tuletati.

4.4.4. Analüütilise geomeetria ja matemaatilise analüüsi elemendid E. Krahni tõlgitud A. Wildbreti õpikus

Et tegemist on tõlkeõpikuga, mida kasutati põhiliselt ülikoolis, siis piirdume ainult selle raamatu sisu lühikese tutvustamisega. Käsitletakse tasapinnalise analüütilise geomeetria ja diferentsiaalarvutuse elemente. Esimeses osas on vaatluse all sirge, ringjoon ja koonuslõiked, teises osas funktsiooni piirväärtus ning tuletis. Raamatu huvitavust suurendavad kolm vastava temaatika ajaloolist arengut tutvustavat artiklit, samuti ülevaatlikud kahevärvilised joonised. Rohkesti on ülesandeid.

4.4.5. Jaan Sarve analüütilise geomeetria käsitlusest

J. Sarv kirjutas oma analüütilise geomeetria raamatu ülikooli professorina ja nii oli ka see raamat mõeldud ülikoolis kasutamiseks. Esimene eestlasest matemaatikaprofessori ainekäsitlus on aga täiesti omanäoline. Piirdumegi siin ainult selle omanäolisuse olemuse tutvustamisega.

Kursus jaotatakse ühe-, kahe- ja kolmemõõtmeliseks. H. Grassmanni eeskujul arvab J. Sarv, et "on mitmeti mõnus lugeda ka kirjutist AB või P_1P_2 punktide korrutiseks", milles tegurite vahetamisel muutub aga märk. J. Sarv kasutabki oma raamatus sellist punktide korrutist.

Huvipakkuv on nn. bilineaarse võrrandi käsitlus. J. Sarv kirjutab: "See on võrrand kahe tundmatuga, mis on kummagi tundmatu kohta üksikult esimese astme võrrandiks, aga saab teise astme võrrandiks ühe tundmatuga siis, kui need kaks tundmatut saavad sarnaseks teine teisega." Bilineaarne võrrand esitatakse kujul $(mx' + n)x + px' + q = 0$, kus x ja x' on tundmatud. Ühemõõtmelises analüütilises geomeetrias käsitletakse veel teise astme võrrandit ühe tundmatuga, Cartesiuse koordinaatide teisendamist, kaugustejagatiskoordinaate, ristjagatiskoordinaate. Kahemõõtmeline analüütiline geomeetria sisaldab ka ühemõõtmelise ning kolmemõõtmeline nii ühe- kui kahemõõtmelise analüütilise geomeetria.

* * *

Esitame lühidalt mõned andmed J. Sarve elu ja tegevuse kohta.
Jaan Sarv (1877–1954) sündis Võrumaal Mõniste vallas. Ta õppis Saru ja Mõniste külakoolis ning Marienburgi (Alūksne) kirikukoolis. Edasi õppis peamiselt iseseisvalt ja lõpetas H. Treffneri gümnaasiumi 1899. aastal. Tartu Ülikooli füüsikamatemaatikateaduskonnas õppis väikeste vaheaegadega 1899–1907. Töötas õpetajana Põltsamaal, Vitebski kubermangus Veližis ning Tartus Eesti Noorsoo Kasvatuse Seltsi Tütarlaste Eragümnaasiumis. Aastal 1918 kutsuti ta Tartu Ülikooli tööd korraldama. 1919. a. nimetati ta professori kt-ks, oma doktoritöö matemaatika aluste kohta kaitses ta 1931. a. Sõjajärgses Tartu Riiklikus Ülikoolis oli ta geomeetria kateedri juhataja. Raamatu IV osas on prof. Jaan Sarve elu ja tegevust tutvustatud põhjalikumalt.

4.4.6. Analüütilise geomeetria elemendid Paul Ederbergi õpikutes

Paul Ederberg on oma esimeses algebraraamatus (vt. lk. 167) käsitlenud lineaarfunktsiooni graafilist esitust ning rakendanud seda esimese astme võrrandi graafiliseks lahendamiseks, teises raamatus aga teise astme funktsiooni graafilist esitust ja rakendanud seda ruutvõrrandisüsteemide graafiliseks lahendamiseks. Seega ei sisalda need õpikud süstemaatilist analüütilise geomeetria kursust, kuid erinevalt teistest algebraõpikutest võetakse siin vaatluse alla ka ellips ja hüperbool ning kasutatakse teist järku joonte üldvõrrandit.

Lineaarfunktsioon esitatakse kujul $y = mx + n$ ja öeldakse, et see esitab sirgjoont, kusjuures x-i kordaja määrab selle sirge kalde x-telje suhtes ning liige b näitab, kus punktis see sirge lõikab y-telge. Seejärel veendutakse, et iga võrrand kujus $ax + by = c$ on esitatav kujul $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, s.t. esitab sirgjoont.

Lineaarvõrrandi graafiliseks lahendamiseks antakse juhis, mille kohaselt esmalt teisendatakse võrrandi parem pool nulliks, siis võrrutatakse vasak pool y-ga, esitatakse saadud lineaarfunktsiooni graafik ja selle sirge ning x-telje lõikepunkti abstsiss ongi otsitavaks lahendiks.

VIII ja IX klassi õpikus on paragrahv pealkirjaga "Teise astme funktsiooni graafiline esitamine", kus esitatakse ringjoone, ellipsi, hüperbooli võrrandid, kõik kolmes eri kujus.

Ringjoone puhul kasutatakse järgmisi võrrandikujusid:

a) $x^2 + y^2 = 16;$
b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16;$
c) $2x^2 + 2y^2 - 10x - 6y - 1 = 0.$

Ellipsi jaoks on aga antud järgmised võrrandid:

a) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1;$
b) $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1;$
c) $16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y - 111 = 0.$

Hüperbool esitatakse ellipsi võrranditele analoogiliste võrranditega:

a) $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1;$
b) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1;$
c) $25x^2 - 9y^2 - 50x - 36y - 236 = 0,$

kuid seejärel lisatakse nn. täisnurkse hüperbooli võrrandid:

a) $x^2 - y^2 = m^2$; seejuures märgitakse: "Analüütiline geomeetria tõestab, et hüperbool $xy = 4$ on täisnurkse hüperbooliga $x^2 - y^2 = 8$ identiline, ainult koordinaatteljed on 45° vastu päeva pööratud";

b) $(x-2)(y+3) = 4$;

c) $xy + 2x - 3y - 10 = 0$.

Seejärel on ette nähtud ruutvõrrandisüsteemide, nagu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0, \\ 2x - y - 9 = 0 \end{cases}$$

graafiline lahendamine.

4.4.7. Matemaatilise analüüsi elemendid Viktor Pässi esituses

Viktor Päss on oma X ja XI õppeaasta jaoks kirjutatud õpiku (vt. lk. 165) eessõnas märkinud, et see raamat "sisaldab eneses kõrgema analüüsi põhimõisteid niisuguses ulatuses kui seda nõuab keskkooli kava". Õpikus on esitatud küllaltki ulatuslik matemaatilise analüüsi kursus – mahukaim, mis eestikeelsetes matemaatika kooliõpikutes avaldatud.

Alustatakse lõpmatult suurenevate, lõpmatult vähenevate ja lõplikult muutuvate suurustega. Lõpmatult vähenevale suurusele on antud järgmine definitsioon: "Lõpmatu väheneváks suuruseks nimetatakse niisugust muutuvat suurust, mille absoluutväärtus muutudes võib saada ja jääda väiksemaks igast kui tahes väikesest jäädavast suurusest." Jada piirväärtuse mõiste defineeritakse lõpmatult väheneva suuruse kaudu: "Kui muutuva suuruse x väärtus muutudes ligineb jäädavale a nõnda, et vahe $a - x$ on lõpmata vähenev suurus, siis nimetatakse jäädavat suurust a muutuva suuruse x piiriks." Antakse eraldi kolm tarvilikku piirväärtust:

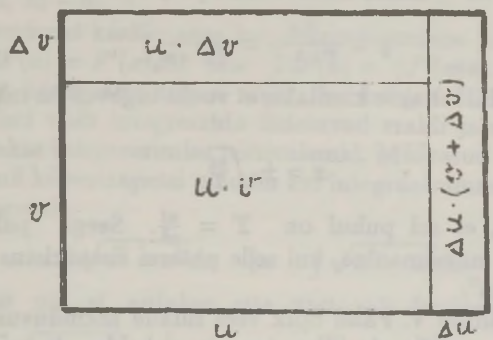
$$\lim_{x_1 \to x} \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = n \cdot x^{n-1}, \ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \ \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

Järgnevalt tutvutakse algebraliste ja transtsendentsete funktsioonidega. Algebralised funktsioonid omakorda jaotatakse ratsionaalseteks ja irratsionaalseteks. Samuti õpitakse tundma liit- ja pöördfunktsiooni, perioodilist funktsiooni ja tsüklomeetrilisi funktsioone. Funktsiooni pidevus defineeritakse võrdusega

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(x+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x-\varepsilon).$$

Funktsiooni tuletise mõiste juurde jõutakse kõvera lõikaja piirseisu uurimise teel. Korrutise tuletise valemini jõutakse aga geomeetrilist selgitust kasutades järgmiselt:

"Olgu antud, et $y = u \cdot v$, kus eraldi $u = f(x)$ ja $v = \varphi(x)$. Kujutame niisuguse püstküliku, mille külgedeks oleksid funktsioonid u ja v, siis on selle püstküliku pindala $y = u \cdot v$ (jn. 56).



Jn. 56.

Kui suurendame selle püstküliku külgi vastavate kasvude $\triangle u$ ja $\triangle v$ võrra, siis suureneb ka püstküliku pindala vastava kasvu $\triangle y$ võrra. Nagu joonisest näha, võime pindala kasvu võtta kahe püstküliku pindala summana, nõnda et

$$\triangle y = u \cdot \triangle v + (v + \triangle v) \cdot \triangle u.$$

Jagades need võrduse mõlemad pooled argumendi kasvuga, saame

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = u \cdot \frac{\triangle v}{\triangle x} + (v + \triangle v) \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x}.$$

Kui nüüd mõtleme $\triangle x$ lõpmata väheneva suurusena, siis on funktsioonide u, v ja y pidevuse puhul ka $\triangle u, \triangle v$ ja $\triangle y$ lõpmata vähenevad ja

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}; \quad \lim_{\triangle x\to 0} u \cdot \frac{\triangle y}{\triangle x} = u \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{ja} \quad \lim_{\triangle x\to 0} (v + \triangle v) \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle v\to 0} (v + \triangle v) \cdot \lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} = v \cdot \frac{du}{dx}, \quad \text{mille tõttu} \quad \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}."$$

Käsitletakse ka liitfunktsiooni ja transtsendentsete funktsioonide tuletisi. Toimub funktsioonide uurimine tuletise abil.

Toome ühe näite ekstreemumülesannete lahendustest.

"On vaja n ühesugust Galvani elementi ühendada patareiks nõnda, et antud välistakistuse T juures voolu tugevus võimalikult suur saaks.

Olgu iga üksiku elemendi elektromotooriline jõud e volti, aga sisetakistus t oomi. Kui jagame kõik n elementi rühmadeks, võttes iga rühma x elementi ja ühendame rühmades elemendid paralleelselt, siis on iga rühma elektromotooriline jõud samuti kui üksiku elemendi juures e volti, aga sisetakistus on $\frac{t}{x}$ oomi. Ühendades rühmad omavahel põigiti ja silmas pidades, et rühmade arv on $\frac{n}{x}$, saame oomi seaduse põhjal patareil voolu tugevuse

$$y = \frac{\frac{n}{x}\cdot e}{T+\frac{n}{x}\cdot\frac{t}{x}} = \frac{nex}{Tx^2+nt}."$$

Tuletise abil tehakse kindlaks, et voolu tugevus on maksimaalne, kui

$$x = \pm\sqrt{\frac{nt}{T}},$$

mis tähendab, et sel puhul on $T = \frac{nt}{x^2}$. Seega "patarei voolu tugevus oleks maksimaalne, kui selle patarei sisetakistus on võrdne välistakistusega".

Edasi sisaldab V. Pässi õpik veel ridade koonduvuse uurimist. Tutvustatakse positiivsete liikmetega ja vahelduvate märkidega ridu, samuti astmeridu. Selgitatakse koonduva ja laieneva rea mõistet. Antakse d'Alemberti koonduvustunnus positiivsete liikmetega ridade jaoks ja vahelduvate märkidega rea koonduvuse küsimus lahendatakse temale vastava positiivsete liikmetega rea koonduvuse kaudu. Leitakse astmeridade koonduvusvahemikke ning esitatakse funktsioonide reaksarendusi, tuginedes järgmistele lausetele:

"Kui mingisugune funktsioon arendub astmeliseks reaks, mis on koonduv argumendi vahemikus $-a < x < a$, siis ei ole võimalik teda selle argumendi vahemikus teistsuguseks reaks arendada."

"Kui kaks koonduvat astmelist rida on võrdsed, siis peavad ka võrdsed olema ühenimeliste argumendi astmete koefitsiendid."

Esitame ühe raamatus toodud näite funktsiooni astmeritta arendamise kohta.

$\frac{1+2x-4x^2}{1-3x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ...$

$1 + 2x - 4x^2 =$

$= a_0 + (a_1 - 3a_0)x + (a_2 - 3a_1)x^2 + (a_3 - 3a_2)x^3 + (a_4 - 3a_3)x^4 + ...$

Kui nüüd $x = 0$, siis $a_0 = 1$.

Võttes kummastki viimase võrduse poolest tuletise, saadakse, et

$$a_1 - 3a_0 = 2 \Rightarrow a_1 = 5, \text{ sest } a_0 = 1.$$

Edasi võetakse jälle võrduse mõlemast poolest tuletis ja nii saadakse, et

$$a_2 - 3a_1 = -4 \Rightarrow a_2 = 11.$$

Nii seda protsessi jätkates saadakse tulemuseks, et

$$\frac{1+2x-4x^2}{1-3x} = 1 + 5x + 11x^2 + 33x^3 + 99x^4 + \dots$$

Edasi tutvustatakse selles õpikus määramatuse avaldisi: $\frac{o}{o}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $o \cdot \infty$, $\infty - \infty$.

Integreerimist käsitletakse kui diferentseerimise pöördtehet: kui $f(x)dx = dF(x) = F'(x)dx$, siis $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x)$. Selgitatakse, et konstantse teguri võib tuua integraali ette, et summa integreerimisel võib integreerida liidetavad eraldi ja siis tulemused liita. Esitatakse integreerimise põhivalemid. Määratud integraali tutvustatakse nii kõvertrapetsi pindala kui integraalsumma piirväärtuse kaudu. Integraale

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad \text{ja} \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$$

lahendatakse nii, et antakse ette vastavalt funktsioonid

$$y = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad \text{ja}$$
$$y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

ning nende diferentseerimise kaudu jõutakse selgusele, missugused on antud integreeritavate funktsioonide algfunktsioonid. Integraali abil leitakse ellipsi pindala valem ning hüperbooli kaarega piiratud kõvertrapetsi pindala valem. Viimasel juhul vajatakse integraali $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$.

* * *

Viktor Pässi elu ja tegevust oleme tutvustanud lk-l 166.

4.4.8. Matemaatilise analüüsi elemendid Gerhard Rägo tööraamatutes

Funktsiooni mõiste leiab G. Rägo tööraamatutes laialt kasutamist. Sellega alustatakse juba I klassi raamatus, kus käsitletakse võrdelist ja pöördvõrdelist ning lineaarset olenevust, II klassi raamatus järgneb ruutolenevus, III klassi raamatus kuup- ja eksponentolenevus. Seal antakse ka logaritmi mõiste, kuid logaritmfunktsiooni ei käsitleta. IV klassi tööraamatu alapealkirjaks on aga "Analüüsi alged" ja V klassi raamatul "Analüüsi alged. Statistika alged".

Esimese kolme klassi tööraamatutega oleme põgusalt tutvunud juba algebra käsitlusi analüüsides (vt. lk. 175–181).

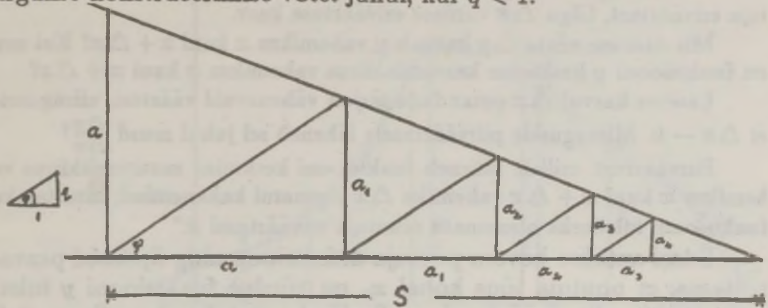
Esitame nüüd IV ja V klassi tööraamatute liigenduse. See annab võimaluse jälgida autori taotlusi piirväärtuse, tuletise ja integraali mõiste tutvustamisel. Esimene peatükk "Funktsiooni mõiste" koosneb viiest harjutusest: I. Funktsiooni mõiste. Funktsiooni käigu graafiline kujutamine; II. Funktsiooni avaldis. Funktsiooni tähis; III. Funktsiooni piiri mõiste lõpmata kahaneva geomeetrilise rea näitel; IV. Funktsiooni piiri mõiste: järg; V. Funktsiooni pidevuse mõiste. Teine peatükk "Tuletise mõiste" jaguneb kuueks harjutuseks: VI. Ühtlaselt arenevate nähtuskäikude kiirus; VII. Täiendavaid ülesandeid ühtlaselt arenevate nähtuskäikude kohta; VIII. Üldine kiiruse mõiste; IX. Kõvera puutuja mõiste; X. Vea arvutamise põhivalemi rakendusi; XI. Tuletise mõiste rakendamine funktsiooni käigu uurimisel. Tuletise mõistet rakendatakse ka kolmandas peatükis "Polünoomide numbriline lahendamine", mis koosneb kolmest harjutusest: XII. Horneri skeem; XIII. Numbriliste võrrandite lahendamine järkjärgulise lähenemise teel: lineaarse interpolatsiooni võte; XIV. Numbriliste võrrandite lahendamine järkjärgulise lähendamise teel: Newtoni võte.

V klassi raamatus on kolm matemaatilise analüüsi valdkonda kuuluvat peatükki. Esimene peatükk "Funktsiooni 2. tuletis" koosneb viiest harjutisest: I. Nähtuse käigu kiirenduse mõiste; II. Tuletise mõiste rakendusi; III. Tuletisi kaudsel olenemisel; IV. Täiendavaid ülesandeid tuletise mõiste rakendamiseks; V. Funktsiooni käigu uurimise ülesandeid. Teine peatükk "Integraali mõiste" jaguneb samuti viieks harjutiseks: VI. Ligikaudseid valemeid pindalade ja ruumalade määramiseks; VII. Piiri mõiste rakendusi pindalade ja ruumalade arvutamisel; VIII. Nähtuse käigu määramine teadaolevast kiiruskäigust; IX. Integraali mõiste; X. Integraali mõiste rakendusi. Kolmas peatükk "Siinusfunktsiooni ja logaritmfunktsiooni tuletised" sisaldab neli harjutist: XII. Siinusfunktsiooni tuletis; XIII. Trigonomeetriliste funktsioonide tuletiste rakendusi; XIV. Logaritmfunktsiooni ja eksponentfunktsiooni tuletis; XV. Vea hindamise küsimusi.

Tutvume ainekäsitluse iseärasustega nendes raamatutes.

Funktsiooni mõistet süvendatakse mitme andmetabeli ja graafiku esitamisega, samuti antakse siin tõkestamatult kasvava ja nullile läheneva suuruse mõiste. Vaatleme näitena üht ülesannet.

On antud joonis, mis näitab üht geomeetrilise rea liikmete järkjärgulise konstrueerimise võtet juhul, kui $q < 1$.



Jn. 57.

Edasi järgnevad ülesanded ja küsimused.

"Põhjenda võte. Näita joonisel geomeetrilise rea osasummad:

$S_1 = a$

$S_2 = a + a_1$

$S_3 = a + a_1 + a_2$

...

Nende osasummade üldavaldis on:

$$S_n = a + a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Need osasummad moodustavad jada kasvavaid arve. Miks? Kas toimub funktsiooni $S(n) = S_n$ kasvamine tõkestamata? Kui ei, siis kus esineb joonisel $S(n)$ kasvamise tõke? Olgu selle tõkke tähiseks S. Kui lähedale tulevad joonisel osasummad S_n tõkkele S, kui aga sammude jadas $S_1, S_2, S_3, ...$ minna küllalt kaugele? Mis tähenduses tuleb mõista kirjutist $S_n \to S$, kui $n \to \infty$?"

Nüüd tehakse kokkuvõte ja lisatakse üks täiendav ülesanne.

"Suurust S nimetatakse lõpmata kahaneva geomeetrilise rea summaks. Ta on piir, millele lähenevad osasummad S_n järgumärgi n piiramata kasvamisel. Vastavalt sellele kirjutame $S = \lim_{n \to \infty} S_n$. Avalda joonisest S väärtus andmeil a ja q, kasutades sarnaseid kolmnurki."

Tuletise mõistet valmistatakse ette ühtlaselt kulgevate nähtuskäikude kiiruse määramisega. Seda alustatakse trepi järskuse kindlakstegemisega. Selgub, et see on "iseliiki mõiste", mis on võrdeline trepi astme kõrgusega ja pöördvõrdeline trepi astme laiusega. Üldise kiiruse mõiste juurde jõutakse aga ebaühtlaselt tõusva trepi keskmise järskuse mõiste kaudu. Funktsiooni tuletise mõiste valmistatakse ette funktsiooni $y = x^2$ muutumist jälgides. Tuletise definitsiooni valmistab nüüd ette lühike arutlus, millest küsimuste kaudu kutsutakse osa võtma ka õpilased. Õpiku tekst on siin järgmine:

"Tähendagu x edaspidises mõttekäigus mingit kindlat olenematu muutuja eriväärtust. Olgu $\triangle x$ viimase eriväärtuse kasv.

Mis suuruse võrra $\triangle y$ kasvab y vahemikus x kuni $x + \triangle x$? Kui suur on funktsiooni y keskmine kasvamiskiirus vahemikus x kuni $x + \triangle x$?

Laseme kasvul $\triangle x$ omandada järjest vähenevaid väärtusi, niisuguseid, et $\triangle x \to 0$. Missugusele piirväärtusele läheneb sel juhul murd $\frac{\triangle y}{\triangle x}$?

Piirväärtust, millele läheneb funktsiooni keskmine muutumiskiirus vahemikus x kuni $x + \triangle x$ vahemiku $\triangle x$ lõpmatul kahanemisel, nimetatakse funktsiooni tuletiseks olenematu muutuja eriväärtusel x."

Edasi antakse kõvera puutuja definitsioon ning õpilased peavad näitama, et puutuja tõus kohal x_0 on võrdne funktsiooni y tuletisega argumendi eriväärtusel x_0. Seejärel esitatakse ka selle puutuja võrrand.

Huvipakkuv on graafilise diferentseerimise tutvustamine järgmise ülesande abil:

"Joonis 58 näitab auto liikumiskäiku: joonise ülemine osa annab kauguse s aja t funktsioonina, joonise alumine osa näitab auto liikumise kiiruskäiku. Seleta ja põhjenda võte, mille abil on alumine joonise osa ehitatud ülemisest lähtudes."

Funktsiooni tuletist rakendatakse G. Rägo käsitluses vea arvutamisel, kasutades valemit $f(x + \triangle x) - f(x) \approx \triangle x \cdot f'(x)$, ning funktsiooni käigu uurimisel.

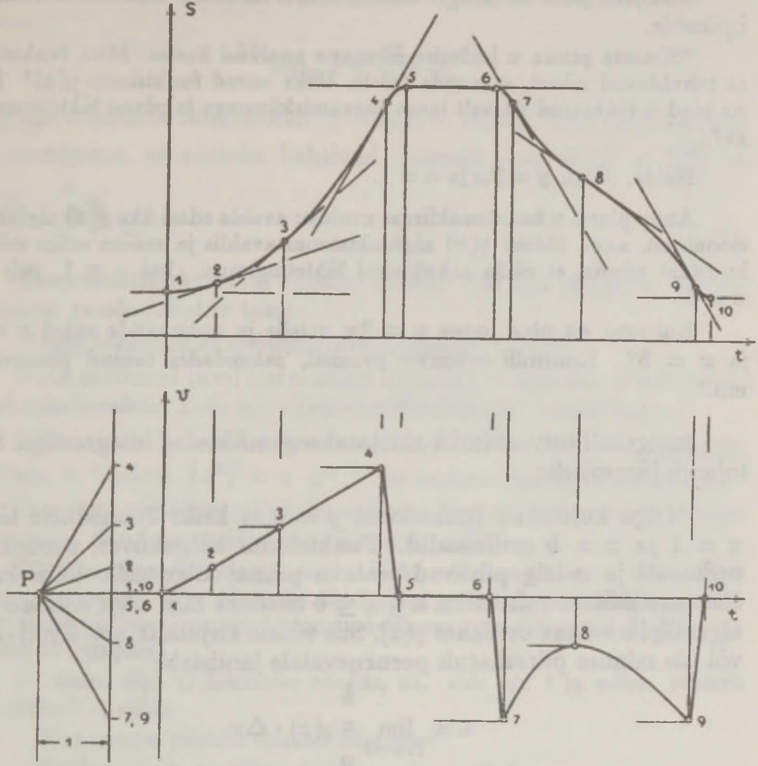
Polünoomide numbrilisel käsitlemisel õpitakse tundma Horneri skeemi ja võrrandite ligikaudset lahendamist järkjärgulise lähendamise teel lineaarse interpolatsiooni ning Newtoni võttega. Viimases leiab rakendamist jällegi funktsiooni tuletis.

Funktsiooni teise tuletise juurde jõutakse keskmise kiirenduse piirväärtuse kaudu, kui ajavahemik lõpmatult väheneb. Seejärel tutvustatakse liitfunktsiooni tuletist ning antakse lisaülesandeid funktsiooni tuletise rakendamiseks. Nendest ülesannetest esitame ka siin paar näidet.

"Kahest ühesuurusest ringitaolisest plekk-kestast raadiusega r cm ehitatakse kaksikkoonus ujuvaks poiks. Missugused sektorid peab välja lõikama plekk-kestadest, et poi ruumala saaks maksimaalne?"

"Olgu galvaanilise elemendi klemmide potentsiaalide vahe e volti, elemendi seesmine takistus r oomi. Missuguse välistakistuse R puhul on ahelas tekkinud soojushulk maksimaalne?"

Integraali käsitlemist alustatakse ligikaudsete valemite rakendamisega pindala ja ruumala leidmiseks. Seejärel rakendatakse piirväärtuse mõistet, mis võimaldab pindala ja ruumala leida täpsemini. Vaatleme üht näidet.



Jn. 58.

"Olgu antud parabool $y^2 = 2px$. Pöörelgu see ümber x-telje. Vaatleme ruumala V, mille piirab tekkiv pöördpind ja tasapind risti x-teljega täpis $x = h$. Selle V arvutamiseks jaga lõik h n ossa, ehita saadud vahemikkudel kui kõrgustel, silindrid, avalda nende silindrite ruumalad, moodusta nende summa ja leia selle summa piirväärtus eeldusel, et $n \to \infty$.

Missuguse osa see pöördparaboloidi segment moodustab silindrist, millel on sama alus ja kõrgus?"

Juba enne integraali mõiste andmist leitakse kõveraalune pindala ja pöördkeha ruumala. Esimesel juhul on mõttekäik järgmine.

Kõigepealt näidatakse, et $u' = y$, kus $y = y(x)$ on antud funktsioon ja $u = u(x)$ selle funktsiooni graafiku alune pindala, kui kohal a on fikseeritud kõvertrapetsi üks ja kohal x teine alus. Lisaks võrdusele $u' = y(x)$ eeldatakse, et $u = 0$, kui $x = a$.

Jätkame jälle G. Rägo tekstiga, mis sisaldab ridamisi küsimusi õpilasele.

"Sõnasta pinna u leidmise ülesanne analüüsi keeles. Mitu funktsiooni rahuldavad nõuet, et nende tuletis oleks antud funktsioon $y(x)$? Kas on pind u määratud üheselt tema kasvamiskiirusega ja pinna lähtesuurusega?

Näide. Olgu $y = 2x$ ja $a = 1$.

Anna pinna u kasvamiskiiruse avaldis; avalda edasi üks $y(x)$ algfunktsioonidest, anna üldine $y(x)$ algfunktsiooni avaldis ja määra selles esinev konstant nõnda, et oleks rahuldatud lähtetingimus: kui $x = 1$, siis on $u = 0$.

Kui suur on pind joone $y = 2x$, x-telje ja ordinaatide vahel $x = 1$ ja $x = 5$? Kontrolli tulemust joonisel, rakendades tuntud pinnavalemit."

Integraali tutvustamist alustataksegi määratud integraaliga. See toimub järgmiselt:

"Olgu kujutatud funktsiooni $y = y(x)$ käik. Joonistame täpes $x = 1$ ja $x = b$ ordinaadid. Funktsiooni käigukõver, need kaks ordinaati ja x-telg piiravad teatava pinna; olgu selle tähiseks u. Jaotame mõttes vahemiku $a \leq x \leq b$ osadeks $\triangle x$; olgu säärase osa algustäpile vastav ordinaat $y(x)$. Siis võime kirjutada $u \approx \mathrm{S}y(x) \cdot \triangle x$, või üle minnes piiramatult peenenevatele jaotistele:

$$u = \lim_{\triangle x \to 0} \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}\, y(x) \cdot \triangle x.$$

Viimast sümbolit kirjutatakse lühemalt kujul

$$\int_a^b y(x)dx."$$

Lähtudes määratud integraali geomeetrilisest tähendusest jäetakse õpilasele tõestada määratud integraali omadused.

Määramata integraali tutvustatakse kui algfunktsioonide üldavaldise tähistust.

Logaritmfunktsiooni ei ole eelmistes õpikutes käsitletud. Nüüd, kui seatakse ülesandeks leida selle funktsiooni tuletis, lahendatakse logaritmfunktsiooni tutvustamine väga lihtsalt, tähistades arvu x kümnendlogaritmi tähega y. Funktsiooni $y = log\ x$ tuletise leidmise kāik on raamatus esitatud. Õpilasele on aga jäetud näidata, et kehtib valem

$$log_a\ x = \frac{log_{10}\ x}{log_{10}\ a}$$

ning siis avaldada funktsiooni $y = log_a\ x$ tuletis. Veel peab õpilane ise veenduma, et näiteks kehtivad valemid $[log\ u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ ja $\int\limits_c^{cN} \frac{dx}{x} = \int\limits_1^N \frac{dx}{x}$.

Eksponentfunktsiooni tuletise juurde viib aga järgmine õpilast tulemuse poole juhatav tekst:

"Olgu tegemist eksponentfunktsiooniga $y = a^x$.

Võta mõlemal pool naturaalne logaritm ja rakenda sellele logaritmi tuletisvalem. Leia siit eksponentfunktsiooni tuletisvalem."

Edasi tuleb õpilastel valemile $x^n = e^{\log\ x^n} = e^{n\ \log\ x}$ tuginedes näidata, et "valem $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ on maksev igasuguse n-i puhul".

Parajaks pähkliks oli õpilastele ka harmoonilise võnkumisega tutvumine. See toimus järgmise ülesande abil:

"Tiirelgu täpp P ühtlaselt ringi mööda, mille raadius on a. Tehku täpp N tiiru sekundis. Olgu täpp aja algul ringi ja rõhtdiameetri lõikepunktis. Olgu ringil tiirleva täpi projektsioon püstdiameetrile tähistatud Q. Võta see diameeter x-teljeks.

1° Anna täpi Q liikumise seadus, s.t. side aja t ja sellele vastava koordinaadi x vahel.

Missugustes piirides toimub liikumine?

Kuidas esineb graafilises kujutuses $t - x$-side?

Käsitletavat liikumist nimetatakse harmooniliseks liikumiseks.

2° Määra liikumise kiirus. Seleta üksikasjaliselt, kuidas kiirus muutub ajaga.

3° Määra liikumise kiirendus. Avalda see täpi Q asendi ja tasakaalukoha vahelise kauguse abil.

4° Olgu liikuva täpi mass m. Missuguse jõu mõjul täpp Q liiguks seletatud viisil?"

Polünoomide rakendamiseks arvutusvahendina tutvutakse esmalt Newtoni binoomiga ja seejärel esitatakse mitmetele funktsioonidele lähispolünoome.

Näiteks $\frac{x}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$ ja seega on polünoomid $1 + x$, $1 + x + x^2$, $1 + x + x^2 + x^3$ jne. funktsiooni $\frac{x}{1-x}$ lähispolünoomideks.

Lähispolünoome kasutatakse mitme funktsiooni ligikaudsete arvuliste väärtuste leidmiseks. Näiteks teades, et $\sqrt{x+1} \approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$, avaldatakse

$$\sqrt{65} = \sqrt{64+1} = \sqrt{64(1+\tfrac{1}{64})} = 8\sqrt{1+\tfrac{1}{64}} = 8(1+\tfrac{1}{128}-\tfrac{1}{32768}).$$

Selles raamatus tutvustatakse veel nähtuse tõenäosuse mõistet, tõenäosuste liitmis- ja lahutamislauset ning kindlustusmatemaatika algeid. Seda temaatikat käsitleme aga järgmises paragrahvis.

* * *

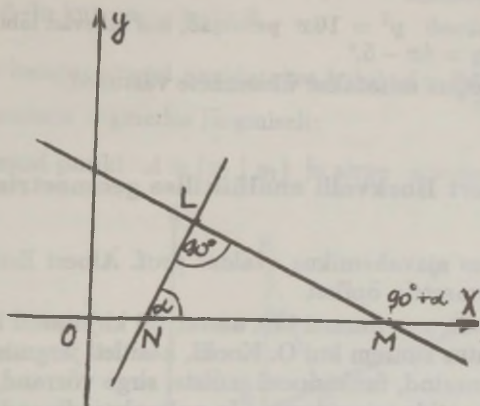
Gerhard Rägo tegevust on käsitletud lk-l 181.

4.4.9. Analüütilise geomeetria elemendid Oskar Kooli käsitluses

Vastavalt MÕK-i koostatud keskkooli matemaatika õppekava projektile käsitles Oskar Kool oma väikeses raamatus järgmisi teemasid: koordinaatidest, kolmnurga pindala, funktsioonidest, sirgjoonte võrrandid, põhiülesanded sirgjoontest, koonuslõiked.

Autor on kasutatavas terminoloogias arvestanud 1922. a. ilmunud "Matemaatika sõnastikku" ühe erandiga. Täisnurkset kolmnurka nimetab ta püstkolmnurgaks, pidades täisnurgaks täispööret.

Analüütilise geomeetria ülesandeks arvab autor õpetada, kuidas käsitleda geomeetrilisi kujundeid algebra abil. Koordinaatide mõistega tutvutakse kõigepealt sirgel ja siis tasandil. Esimesel juhul ei ole kahe punkti vahelise kauguse määramiseks kasutatud absoluutväärtuse mõistet, vaid kõneldakse "lõigu pikkusest märgiga". Punkti koordinaadid nii sirgel kui tasandil esitatakse ikka koos märgiga, näiteks (+3; −2). Edasi tõstame esile, et funktsioon on O. Koolil defineeritud mitmesena. Väidetakse, et suuruste funktsionaalset olenevust on paljudel juhtudel võimalik avaldada võrrandiga. Siit jõutakse kohe kõvera võrrandi mõiste juurde. Sirge võrrandi tutvustamist alustatakse juhtudest $x = a, y = b, x = 0, y = 0$. Seejärel tuleb nn. algusest läbiminev sirge $y = kx$ ja siis algusest mitteläbiminev sirge $y = kx + m$. Järgnevad võrrand telglõikudes, normaal- ja üldvõrrand ning selgitatakse, kuidas toimub üldvõrrandi normimine. Edasi lahendatakse kaks põhiülesannet seoses sirgjoonega: 1) sirge võrrandi leidmine, kui on teada sirge kaks punkti ning 2) kahe sirge "lõiketäpi" koordinaatide leidmine. Veel leitakse üldvõrranditega antud sirgete rööpseisu tingimus ning tuletatakse valem kahe sirge vahelise nurga leidmiseks. Mõneti erinev traditsioonilisest käsitlusest on kahe sirge ristseisu tingimuse leidmine, mida siinkohal tutvustame.



Jn. 59.

"Olgu sirgete NL ja ML (jn. 59) võrrandid $y = kx + m$ ja $y = kx_1 + m_1$, $\angle MNL = \alpha$ ja $\angle MLN = 90°$, järelikult $\angle XML =$ $= 90° + \alpha$ ja $k = tg\ \alpha$ ning $k_1 = tg\ (90° + \alpha)$. Korrutame nurkkoeffitsiendid $k \cdot k_1 = tg\ \alpha \cdot tg\ (90° + \alpha) = -tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = -1$,

s.o. $kk_1 = -1$ ja $k_1 = -\frac{1}{k}$."

Punkti kaugus sirgest leitakse algul ilma normaalvõrrandit esitamata ning seejärel ka normaalvõrrandi abil.

Veel käsitletakse koonuslõikeid, kusjuures enne väidetakse, et ringjoont, ellipsit, hüperbooli ja parabooli nimetatakse koonuslõigeteks, ning alles seejärel selgitatakse joonisel, kuidas koonuslõiked saadakse. Teist järku joonte võrrandite tuletamise kõrval pannakse erilist rõhku ka nende joonte joonestamisele mitmel eri viisil. Näiteks tutvustatakse parabooli joonestamist ka järgmise kirjeldusega:

"Kinnitame nööri ühe otsa fookusesse ja teise püstkolmnurgakujulise joonlaua teravnurga tippu. Surume pliiatsiga nööri vastu üht kaatetit, mis olgu pöördud x-telje poole ja mille pikkus võrdugu nööri pikkusega, ja lükkame teist kaatetit mööda juhtjoont edasi. Pliiatsi ots joonistab siis parabooli osa."

Lisame O. Kooli raamatust ka mõned ülesanded.

"Kolmnurga külgede võrrandite $x + y = 3, x = 0$ ja $y = -2x + 1$ järgi leida kõrguste võrrandid."

"Missugune sirge läheb läbi kõvera $16x^2 + 25y^2 = 400$ täpi, mille abstsiss $x = +3$, paralleelselt sirgega $y = -\frac{3}{5}x - 9$? Tõendada, et otsitav sirge on kõvera puutuja."

"Leida parabooli $y^2 = 10x$ puutujad, mis lähevad läbi tema lõiketäppide sirgega $y = 4x - 5$."

Raamatu lõpus esitatakse ülesannete vastused.

4.4.10. Albert Borkvelli analüütilise geomeetria õpikud

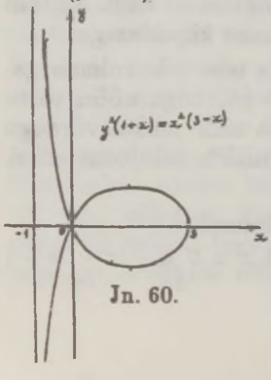
Vaadeldavas ajavahemikus avaldas prof. Albert Borkvell kolm analüütilise geomeetria õpikut.

Esimene neist, mis ilmus 1930. aastal, oli kirjutatud keskkoolile. Siin oli aine ulatus suurem kui O. Koolil, käsitleti järgmisi teemasid: koordinaatide meetod, funktsiooni mõiste, sirge võrrand, teist järku jooned, koordinaatide teisendamine ja polaarkoordinaadid.

Selle õpiku materjalist toome esile funktsiooni mõiste ja sirge võrrandi käsitlemist, punkti kauguse leidmist antud sirgest ning ellipsi joonestamist.

Funktsiooni mõisteni jõutakse kahe tundmatuga võrrandi juurest, millel on lõpmata palju lahendeid, s.t. mõlemal tundmatul võib olla lõpmata palju väärtusi. Nii jõutakse võrrandilt $2x^2 + y - 4 = 0$ võrrandini $y = 4 - 2x^2$ ning selle abil koostatakse väärtuste tabel.

Funktsiooni käigu graafiliseks kujutamiseks koostatakse tabelid funktsioonidele $y = x^3$, $y = log x$ ja $y^2(1 + x) = x^2(3 - x)$. Saadud tabelitele tuginedes joonestatakse graafikud. Viimasel juhul ei rõhutata aga funktsiooni väärtuste ühesust, ning graafikuks saadakse silmus (jn. 60).



Jn. 60.

Sirge võrrandi käsitlemisel on järjestus mõneti erinev O. Kooli järjestusest. Siin lähtutakse võrrandist $y = mx + b$ ning edasi tulevad $Ax + By + C = 0$, $y = mx$, $y = x$, $y = -x$, $y = 0$, $x = 0, x = a$, $y = b$.

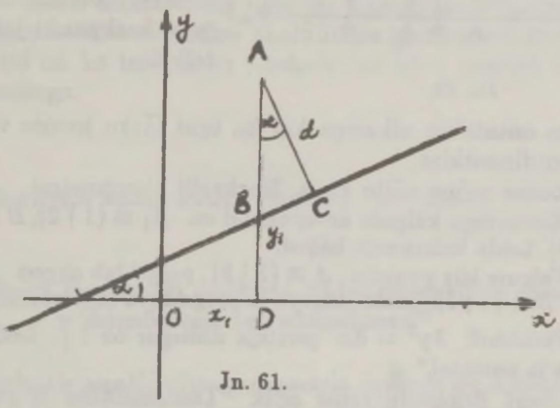
Kahe sirge $y = m_1x + b_1$ ja $y = m_2x + b_2$ lõikepunkti koordinaadid leitakse kujul

$$x = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \quad \text{ja} \quad y = \frac{b_2 m_1 - b_1 m_2}{m_1 - m_2}$$

ning nende juures selgitatakse lõikepunkti olemasolu, kui $m_1 - m_2 \neq 0$ ja kui $m_1 - m_2 = 0$.

Punkti kaugus sirgest avaldatakse kujul $d = \frac{y_1 - (mx_1 + b)}{\sqrt{1+m^2}}$. Selleni jõutakse joonisele tuginedes järgmiselt:

"On antud punkt $A \equiv (x_1 \mid y_1)$ ja sirge $y = mx + b$ (jn. 61).



Jn. 61.

Et leida kaugust d avaldame selle kolmnurgast ABC:

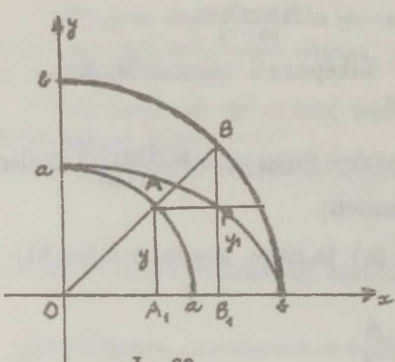
$$d = \overline{AB} \cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Et $\overline{AB} = \overline{AD} - \overline{BD} = y_1 - \overline{BD}$ ning $\overline{BD} = mx_1 + b$, siis

$$\overline{AB} = y_1 - (mx_1 + b) \quad \text{ning} \quad d = \frac{y_1 - (mx_1 + b)}{\sqrt{1+m^2}}."$$

Teist järku joonte käsitlemisel on lisaks võrrandite tuletamisele jällegi rõhutatud nende joonte joonestamist. Ellipsi puhul on neid võtteid koguni kolm. O. Kooli käsitluses puudus neist järgmine.

Joonestatakse kaks kontsentrilist ringjoont, üks raadiusega a ja teine raadiusega b ning läbi ühise keskpunkti tõmmatakse sirged. Sirge ja väiksema ringjoone lõikepunktist tõmmatakse horisontaalne lõik kuni suurema ringjooneni, siis sama sirge lõikepunktist suurema ringjoonega tõmmatakse ristlõik sellele horisontaallõigule. Saadud punkt on ellipsi punkt. Vastav põhjendus selgub jooniselt 62.



Jn. 62.

Olgu $P(x;y)$. Et $\frac{y}{y_1} = \frac{a}{b}$ ja siit $y = \frac{a}{b}y_1$ ning $y_1 = \sqrt{b^2 - x^2}$, siis $y = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - x^2}$.

Edasi käsitletakse A. Borkvelli raamatus koordinaatide teisendusvalemeid. Neid kasutatakse üldise kahe tundmatuga teise astme võrrandi lihtsustamiseks. Leitakse teist järku kõvera keskpunkt ja sümmeetriateljed. Lõpuks esitatakse nii sirge kui ka teist järku joonte võrrandid polaarkoordinaatides.

Toome mõne näite ka A. Borkvelli ülesannetest.

"Kolmnurga külgede keskpunktid on $A_1 \equiv (1 \mid 2), B \equiv (7 \mid 4), C \equiv (3 \mid -4)$. Leida kolmnurga küljed."

"Valguse kiir punktist $A \equiv (2 \mid 3)$ peegeldub sirgest $x + y + 1 = 0$ punkti $B \equiv (1 \mid 1)$. Leida langeva ja peegelduva kiire võrrand."

"Parabooli $3y^2 = 8x$ puutuja sihitegur on $1\frac{1}{3}$. Leida puutepunkt, puutuja ja normaal."

Albert Borkvelli teine õpik "Tasapinnalise ja ruumilise analüütilise geomeetria põhijooni" ilmus 1937. aastal ja tugines autori üheaastasele õpetamiskogemusele Tallinna Tehnikainstituudis. Seega oli raamatu kasutajana eelkõige silmas peetud üliõpilast. Eessõnas on märgitud, et selles raamatus "on loobutud pikkadest formaalsetest arutlustest, tõestustest ja mõttekäikudest kergemini mõistetava intuitiivse selgituse kasuks ja seega püütud igati kergendada teose läbitöötamist..." Tasapinnalist ja ruumilist osa pole hoitud lahus, vaid neid on "... käsitletud peaaegu rööbiti". See õpik sisaldab järgmisi peatükke: determinandid, koordinaatide süsteemid, sirge tasapinnal, tasapind, sirge ruumis, ringjoon. ellips, hüperbool, parabool, teise astme võrrandi uurimine ja teist järku pinnad.

Aine esituses on rõhutatud tähelepanuväärset analoogiat tasandil oleva sirge käsitluse ja ruumis oleva tasandi käsitluse vahel. Mõlemad vastavad peatükid algavad selles raamatus normaalvõrrandi tuletamisega, millele järgneb üldvõrrand ja seejärel võrrand telglõikudes. Edasi tuletatakse kahe punktiga määratud sirge võrrand ja analoogiliselt kolme punktiga määratud tasandi võrrand. Järgnevalt käsitletakse nurka kahe sirge ja kahe tasandi vahel, edasi aga sirgete lõikumist ja tasandite lõikumist ning punkti kaugust sirgest ja vastavalt punkti kaugust tasandist.

Vektoreid selles õpikus ei kasutata. Esitatud on rohkesti harjutusülesandeid. On antud ka ülesannete vastused ja valemite kogu.

Albert Borkvellilt ilmus ka veel 1949. a. õpik "Analüütiline geomeetria", kus võrreldes eelmise õpikuga on temaatikat laiendatud. Determinantide rakendamiseks on seal käsitletud põhjalikult lineaarsete (ka homogeensete) võrrandisüsteemide lahendamist, on sisse toodud vektori mõiste ning omaette peatükina vektorarvutus. Vektoreid rakendatakse ruumilise analüütilise geomeetria käsitlemisel. Laiendatud on ka teist järku pindade osa koos vastava üldvõrrandi käsitlemisega.

* * *

Albert Borkvelli kohta leiame andmed lk-l 139.

4.4.11. Albert Borkvelli õpikust "Matemaatilise analüüsi põhimõisted ja rakendused"

Lisaks kolmele analüütilise geomeetria õpikule on Albert Borkvell avaldanud ka mahuka matemaatilise analüüsi kursuse.

See 216-leheküljeline õpik oli mõeldud kasutamiseks nii keskkooli humanitaar- kui ka reaalharus, tehnikagümnaasiumis, sõjakooli spetsiaalklassides, merekadettide klassis ja merekoolis ning käsiraamatuna Tallinna Tehnikumis ja Vabariigi kõrgemas sõjakoolis. Vastavalt nendele kasutamiseesmärkidele käsitletakse õpikus järgmisi teemasid: funktsionaalne olenevus, funktsioonide diferentsimine, funktsioonide integreerimine, korrutis- ja murdfunktsioonid, transtsendentsed funktsioonid, joone kõverus, tuletise mõte mehaanikas, read ją nende rakendused, funktsioonide osaline ja täieline muutumine ning diferentsiaalvõrrandid.

Materjali paigutus raamatus on mõneti omanäoline. Nii on näiteks peatükis "Korrutis- ja murdfunktsioonid" käsitletud korrutisfunktsiooni tuletist, ósiti integreerimist ja murdfunktsiooni tuletist.

Transtsendentsete funktsioonide peatükis teema "Logaritmfunktsioon" all käsitletakse logaritmfunktsiooni tuletist ja integraali $\int \ln x\, dx$ ning esitatakse rida näiteid integraalidest, mille algfunktsioon sisaldab logaritmi. Näiteks

$$\int_0^a \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = ln\sqrt{2}, \quad \int \frac{2x-5}{x^2-5x+3dx} = ln(x^2-5x+3)+C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = ln(\tan \tfrac{x}{2}) + C \text{ jt.}$$

Funktsiooni defineeritakse selles õpikus mitmesena: "Muutuv suurus y nimetatakse muutuva suuruse x-i funktsiooniks vahemikus a-st kuni b-ni, kui igale üksikule x-i väärtusele selles vahemikus vastab üks või rohkem y-i väärtust."

Funktsioonid liigitatakse algebralisteks ja transtsendentseteks, esimesed omakorda ratsionaalseteks ja irratsionaalseteks. Ratsionaalsed funktsioonid jaotatakse veel täis- ja murdratsionaalseteks ning murdratsionaalsed lihtratsionaalseteks ja liigratsionaalseteks funktsioonideks.

Funktsiooni graafilise kujutamise juures esitatakse kumer ja nõgus kõverjoon ning nende juures selgitatakse maksimumpunkti, miinimumpunkti ja käänupunkti mõistet.

Funktsiooni tuletise mõiste juurde jõutakse jagatise $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ja selle piirväärtuse $\lim\limits_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ nn. diferentsiaaljagatise $\frac{dy}{dx}$ kaudu.

Diferentsiaaljagatise kaudu selgitatakse juba funktsiooni kasvamist ja kahanemist. Kui funktsioon $y = f(x)$ on pidev, siis diferentsiaaljagatis $\frac{dy}{dx}$ on ka x-i funktsioon, mida hakatakse tähistama kujul $f'(x)$. Seda väidet kritiseeriti tookordses arvustuses, sest tuletise olemasoluks on vajalik mitte ainult pidevus, vaid ka funktsiooni diferentseeruvus.

Astmefunktsiooni tuletis leitakse eraldi positiivse täisarvulise, negatiivse täisarvulise ja murrulise astendaja korral. Tõestatakse ka lause: "Funktsiooni konstantsed liikmed kaovad differentsimisel ära."

Õpitakse veel diferentseerima liitfunktsioone ning leidma kõrgenat järku tuletisi. Seejärel jõutakse funktsiooni uurimiseni tuletise abil. Siin nimetatakse tingimust $\frac{dy}{dx} = 0$ maksimumi ja miinimumi üldtunnuseks, mis on tarvilik, kuid mitte piisav. Teise tuletise kaudu avaldatakse maksimumi ja miinimumi eritunnused.

Funktsiooni $f(x)$ integraaliks nimetatakse funktsiooni $F(x)$, mille tuletis $F'(x)$ on võrdne antud funktsiooniga $f(x)$. Veidi hiljem antakse $F(x)$ asemel $F(x) + c$, mida nimetatakse üldiseks integraaliks.

Integraali $\int \sqrt{r^2 - x^2}dx$ nimetatakse ringintegraaliks ja seda lahendatakse asendusega $x = r \sin \alpha$.

Kõverjoone kaare pikkuse arvutamist nimetatakse rektifikatsiooniks ning tuletatakse vastav valem: $s = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx$. Pöördpindade suuruse leidmist nimetatakse komplanatsiooniks ning ka siin tuletatakse vastav valem: $P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx$.

Joone kõveruse käsitlemisel leitakse kõverusraadiuse ja joone kõveruse avaldised etteantud punktis A.

Tuletise mõiste rakendustena mehaanikast tuuakse esile mõisteid ***punkti kiirus*** ning ***nurkkiirus antud momendil***. Teise tuletise kaudu õpitakse tundma materiaalse keha kiirendust ja nurkkiirendust antud momendil.

Ridade käsitlemisel antakse lõpliku ja lõpmatu rea ning koonduva ja hajuva rea mõisted. Tutvustatakse ka harmoonilist rida. Rea koonduvuse küsimust selgitatakse lõpmatu geomeetrilise rea abil. Esitatakse Taylori ja Mac-Laureni read. Viimase abil arendatakse ritta funktsioonid $e^x, \sin\ x, ln^{(1+r)}$. Taylori rea abil tuletatakse Newtoni valem võrrandi ligikaudseks lahendamiseks ning otsitakse avaldise määramatule kujule $\frac{0}{0}$, tõelist väärtust.

Funktsioonide osalist ja täielist muutumist selgitatakse osatuletiste, täistuletiste ja täisdiferentsiaali abil.

Diferentsiaalvõrranditest lahendatakse eralduvate muutujatega võrrandite järel veel homogeenseid ja homogeenseks taanduvaid diferentsiaalvõrrandeid. 1. järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks kasutatakse veel Bernoulli meetodit.

Raamatus on rikkalikult esitatud näiteid ning ülesandeid. Viimaste vastused on toodud raamatu lõpus.

Viimastelt lehekülgedelt leiame raamatus tuletatud valemite kogu ning logaritmide ja trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste tabelid.

4.4.12. Analüütilise geomeetria ja matemaatilise analüüsi elemendid esimestes standardõpikuis

Elmar Etvergi ja Gerhard Rägo matemaatika standardõpik sisaldab nii analüütilise geomeetria kui ka matemaatilise analüüsi küsimusi. Alustame esimestest.

Analüütilist geomeetriat alustatakse sirgel asetseva punkti asukoha määramisest, sirgel asetseva lõigu pikkuse leidmisest ja lõigu keskpunkti koordinaatide määramisest selle lõigu otspunktide abstsisside kaudu. Seejärel määratakse punkti asukoht tasandil. Punkti koordinaate märgitakse järgmiselt:

$$\text{sirgel } P \equiv (x), \quad \text{tasandil } P \equiv (x \mid y).$$

Seejärel leitakse tasandil asetseva sirglõigu keskpunkti koordinaadid ning sirglõigu pikkus tema otspunktide koordinaatide kaudu.

Sirgjoone käsitlemist alustatakse tõusunurga ja tõusu mõistest ning selgitatakse, missuguste andmetega on sirgjoon määratud. Leitud juhud on siis ka sirgjoone võrrandi mitme erikuju esitamise aluseks. Alustatakse algordinaadi ja tõusuga määratud sirgjoonest. Sellele saadakse võrrandiks $y = mx + b$, vaadeldakse erijuhte $y = mx, y = b$ ja $x = a$ ning tehakse kokkuvõte, et kuidas ka sirge asetseb koordinaatide telgede suhtes, ikka on tema võrrandil kas kuju $x = a$ või kuju $y = mx + b$. Edasi järgnevad võrrandid $y = x, y = -x, y - y_0 = m(x - x_0)$, $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Seejärel näidatakse, et rööbikute sirgete tõusud on võrdsed, ristuvate sirgete tõusude korrutis võrdub aga (-1)-ga. Tõestatakse ka nende teoreemide pöördteoreemid. Sirgjoone käsitlus lõpeb kahe sirgjoone lõikepunktide koordinaatide leidmisega.

Ringjoone võrrand leitakse esialgu kujul $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ning sellest erijuhuna $x^2 + y^2 = r^2$. Seejärel veendutakse, et iga x ja y suhtes üldine teise astme võrrand, milles puudub liige muutujate korrutisega ja milles muutujate ruutude kordajad on võrdsed, on kas ringjoone võrrand või temale ei vasta ühtki geomeetrilist kujundit. Leitakse ka ringjoone ja sirgjoone lõikepunktide koordinaadid.

Ellipsi definitsiooniga antakse sisuliselt praktiline reegel ellipsi joonestamiseks kahe nõela, kinnise niidi ja pliiatsi abil. Tuletatakse ellipsi võrrand ning uurides seda võrrandit, jõutakse tingimusteni, mis annavad samuti täieliku ettekujutuse ellipsist kui kinnisest kõverast.

Kasutades koordinaatide teisendust $x = X$ ja $y = \frac{m}{n}Y$, saadakse ringjoone võrrandist $X^2 + Y^2 = R^2$ ellipsi võrrand. Tõestatakse veel, et ringjoone normaalprojektsioon on ellips.

Tutvume nüüd matemaatilise analüüsi teemade käsitlusega standardõpikus.

Alustatakse suuruste klassifitseerimisest jäävateks ja muutuvateks.

Funktsiooni defineeritakse järgmiselt: "Kui ühe suuruse igale väärtusele vastab teise suuruse väärtus, siis öeldakse, et teine suurus oleneb esimesest, ehk teisiti, teine suurus on esimese funktsioon. Suurust, millest funktsioon oleneb, nimetatakse argumendiks." Suurustevahelise olenevuse kõige võimsamaks väljendusvahendiks arvatakse valem, sest "ta lubab kohe arvutada funktsiooni väärtuste tabeli, selle järgi saab siis joonestada funktsiooni graafiku."

Võrdeline sõltuvus defineeritakse vastavate väärtuste jagatiste võrdsuse kaudu. Omadusena fikseeritakse "kui kahest võrdeliselt olenevast suurusest üks suurus kasvab mingi arv korda, siis teine suurus kasvab sama arv korda". Rõhutamata on jäetud, et see omadus kehtib ainult positiivse võrdeteguri korral.

Lineaarfunktsioon defineeritakse valemi $y = ax + b$ kaudu. Selgitatakse, et argumendi kordaja a kujutab selle funktsiooni muutumise kiirust. Tõestatakse ka, et argumendi ja funktsiooni juurdekasvude võrdelisus on tarvilik ja piisav tingimus selleks, et funktsioon oleks lineaarne.

Pöördvõrdeline sõltuvus defineeritakse vastavate väärtuste korrutiste võrdsuse kaudu ning tõestatakse pöördvõrdelise olenevuse tunnus: "Kui ühe suuruse kasvades mingi arv korda teine suurus kahaneb sama arv korda, siis need kaks suurust olenevad teineteisest pöördvõrdeliselt." Ka siin tuleb eeldada pöördvõrdelisuse kordaja positiivsust.

Hüperbooliga tutvutaksegi kui pöördvõrdelise sõltuvuse graafikuga. Seda joont ei defineerita ja võrrandit ei tuletata.

Ruutparabooliga $y = ax^2$ tutvutakse sellest võrrandist väljaloetavate omaduste kaudu. Kui suurustevaheline olenevus avaldub kujul $y = ax^2 + bx + c$, siis nimetatakse seda üldiseks ruutolenevuseks. Selleks, et veenduda, et ka sel juhul on funktsiooni graafikuks parabool, teisendatakse võrdus

$$y = ax^2 + bx + c$$

kujule $y - (c - \frac{b^2}{4a}) = a(x + \frac{b}{2a})$.

Siin minnakse üle uutele muutujatele $X = x + \frac{b}{2a}$ ja $Y = y - (c - \frac{b^2}{4a})$ ning võrrand teisenebki kujule $Y = aX^2$. Selle parabooli haripunkt esialgses teljestikus on punktis $0_1 \equiv (-\frac{b}{2a};\ c - \frac{b^2}{4a})$.

Tehakse tutvust ka kuupolenevusega $y = ax^3$ ja vastava kuupparabooliga.

Tundmaõpitud jooni kasutatakse ruutvõrrandisüsteemide graafiliseks lahendamiseks.

Funktsiooni muutumise uurimist alustatakse suuruste lõpmatu kasvamise ja lõpmatu kahanemise tundmaõppimisega. Need mõisted defineeritakse vastava suuruse absoluutväärtuste muutumise kaudu ning funktsiooni piirväärtusele antakse siis järgmine definitsioon:

"Kui suurus s muutub nõnda, et tema ja jääva arvu a vahe lõpmatult kahaneb, siis ütleme, et suurus s läheneb piiramatult arvule a."

Seejärel võetakse vaatluse alla lõpmatult kasvav ja lõpmatult kahanev geomeetriline rida ning lõpmatult kahaneva geomeetrilise rea summa valem saadakse geomeetrilise rea summa valemist piirväärtuse leidmise kaudu. Tutvutakse ka funktsiooni pidevuse mõistega ning jõutakse järeldusele, et "funktsiooni pidevuseks argumendi antud väärtusel on tarvis, et funktsioon sellel argumendi väärtusel oleks määratud".

Funktsiooni tuletise mõiste juurde jõutakse funktsiooni muutumise kiiruse mõiste kaudu ning seda kiirust argumendi väärtusel x nimetatakse funktsiooni tuletiseks. Järgnevalt antakse funktsiooni tuletisele geomeetriline tõlgendus ning hakatakse definitsioonist tuleneva skeemi järgi leidma üksikute funktsioonide tuletisi. Kui on näidatud, et funktsiooni muutumise kiirus on tõlgendatav ka liikumise kiirusena, siis lisatakse kohe kiirenduse mõiste, mis viib funktsiooni teise tuletise mõisteni.

Funktsiooni tuletise rakendamiseks leitakse, kas funktsioon on etteantud kohal kasvav või kahanev või omab sellel kohal ekstreemumit. Viimasel juhul rõhutatakse, et tingimuse $f'(x_0) = 0$ kehtivusest ei piisa veel ekstreemumi olemasoluks. Sellel kohal peab toimuma funktsiooni tuletisel märgimuut.

Lõpuks tuuakse näiteid ka ekstreemumülesannete lahendamise kohta. Näiteks leitakse, et kui tahetakse kolmnurgakujulisele maatükile ehitada võimalikult suure ristkülikukujulise põhjaga maja, siis peavad põhja mõõtmeteks olema pool alust a ja pool kõrgust h ning selle ristküliku pindala $\frac{1}{4}ah$ on parajasti pool antud kolmnurga pindalast.

Esitame mõned ülesannete näited õpiku juurde kuuluvaist harjutustikkudest.

"On antud nelinurkne tükk maad $ABCD$. Võtame külje AD abstsissteljeks ja punkti A koordinaatide alguseks. Olgu sel juhul $A \equiv (x_0 \mid 0), B \equiv (x_1 \mid y_1), C \equiv (x_2 \mid y_2)$ ja $D \equiv (x_3 \mid 0)$. Näita, et maatüki pindala saab arvutada maamõõtjate poolt kasutatava valemi

$$S = \frac{y_1(x_2-x_0)+y_2(x_3-x_1)}{2}$$

järgi."

"Ristküliku ühe külje otspunktid asetsevad sirge $2x - y - 6 = 0$ lõikepunktides koordinaatide telgedega. Leia teiste külgsirgete võrrandid ja tippude koordinaadid, kui on teada, et kolmanda tipu abstsiss on 0."

"Inglismaale saadetavate postipakkide mõõtmed on piiratud Inglise postimäärusega, mille järgi paki pikkuse ja vöö pikkuse summa ei tohi ületada 6 jalga. Missugused mõõtmed on ruudukujulise läbilõikega suurimal karbil, mida veel saab saata Inglismaale eelmist määrust silmas pidades?"

4.4.13. Analüütilise geomeetria ja matemaatilise analüüsi elemendid Gerhard Rägo neljakümnendatel aastatel kirjutatud õpikuis

Professor Gerhard Rägo on oma neljakümnendatel aastatel ilmunud gümnaasiumi V ja keskkooli XI klassi õpikutes kasutanud oma 1939. a. ilmunud humanitaargümnaasiumi standardõpiku teksti. Sealt on kasutatud kogu tekst, mis on seotud analüütilise geomeetriaga ning matemaatilise analüüsi osast on võetud suuruste olenevuse peatükk. Analüütilise geomeetria osa on täiendatud joone võrrandi ja parabooli käsitlusega. Matemaatilise analüüsi osas on lisatud lineaarne interpolarisatsioon ning laiendatud ruutfunktsiooni käsitlust. Et 1939. a. standardõpiku analüütilise geomeetria ja matemaatilise analüüsi osa on eespool tutvustatud, siis lisame nüüd ainult mõne märkuse juurdevõetud aine käsitluse kohta.

Joone võrrandi mõiste valmistatakse ette võrrandisüsteemide vaatlemisega, millel on üks või rohkem lahendeid või lahendid puuduvad. Lahendiks saadi kahe võrrandi puhul kas 2, 1 või mitte ühtki punkti. Nüüd selgitataksegi, et üks võrrand kahe tundmatuga, mida rahuldavad mingi joone iga punkti koordinaadid ja ainult need, on selle joone võrrand. Näideteks esitatakse kahe punkti keskristsirge võrrandi ja diameetri otspunktidega määratud ringjoone võrrandi leidmine.

Parabooli käsitlust alustatakse definitsiooniga ja selle alusel konstrueeritakse parabool. Seejärel tuletatakse parabooli võrrand ning selle abil uuritakse parabooli kuju ja asendit koordinaatteljestikus.

Lineaarset interpolatsiooni tutvustatakse samuti esmalt graafiliselt ja seejärel arvutamise teel.

Ruutfunktsiooni käsitlust on täiendatud arutlusega parabooli kuju ja asendi kohta, lähtudes võrrandist $y = ax^2 + bx + c$.

* * *

Gerhard Rägo elust ja tegevusest loe lk. 181.

4.5. Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika käsitlusi

Kuigi käesoleva sajandi algul ei olnud tõenäosusteoorial ja matemaatilisel statistikal nii teaduses kui rahvamajanduses sellist olulist tähendust nagu tänapäeval, esitati siiski juba tol ajal rahvusvahelise koolimatemaatika uuendamise reformiliikumises soovitusi eriti tõenäosusteooria elementide õpetamiseks koolis. Need soovitused võeti mõneti omaks ka Eestis. Kahekümnendatel aastatel käsitlesid sündmuse tõenäosuse mõistet oma algebraõpikuis P. Ederberg ja V. Päss. Kolmekümnendatel aastatel lülitas G. Rägo nüüd peamiselt matemaatilise statistika temaatika nii oma tööraamatusse kui ka humanitaargümnaasiumide standardõpikuisse. Kolmekümnendate aastate lõpul jagas prof. A. Humal soovitusi selle temaatika õpetamiseks koolis. Siin tutvustame tema matemaatilise statistika õpikut.

Käesolevas peatükis on vaatluse all järgmised alateemad.

1. Tõenäosusteooria küsimusi Viktor Pässi käsitluses.

   V. Päss "Algebra ülesannete kogu I." Tallinnas, 1920.

2. Tõenäosusteooria küsimusi Paul Ederbergi käsitluses.

   P. Ederberg "Algebra ülesannete kogu ja kokkuvõtlik käsiraamat III (keskkooli IV ja V klassi jaoks)". Tallinnas, 1924.

3. Matemaatilise statistika ja tõenäosusteooria küsimusi Gerhard Rägo tööraamatutes.

   G. Rägo "Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Analüüsi alged. Statistika alged. 5. klassi kursus". Tartus, 1932.

4. Statistika algete ja vaatlusandmete käsitlemine Elmar Etvergi ja Gerhard Rägo standardõpikus humanitaargümnaasiumile.

E. Etverk, G. Rägo "Matemaatika õpik humanitaargümnaasiumile". Tartu-Tallinn, 1939;

K. Ratassepp, G. Rägo "Matemaatika harjutustik humanitaargümnaasiumile. III klassi kursus". Tallinn–Tartu, 1939.

5. Matemaatilise statistika elemendid Arnold Humala käsitluses.

"Matemaatilise statistika elemendid. Konspekt." Koostatud vastavalt Tartu Ülikooli prof. A. Humal'i eksamikavale ja selle ulatuses. Tartu, 1938.

4.5.1. Tõenäosusteooria küsimusi Viktor Pässi käsitluses

Viktor Pässi algebraülesannete kogu I osa viimasesse peatükki on koondatud ühendite, Newtoni binoomi ja tõenäosuse käsitlus. Ühenditest on vaatluse all permutatsioonid, variatsioonid ja kombinatsioonid. Esitatakse ka valemid, nagu $P_{n(me)} = \frac{n!}{m!e!}$ $K_n^m = \frac{V_n^m}{P_m}$ ja $K_n^m + K_n^{m+1} = K_{n+1}^{m+1}$.

Kombinatsioonidena esitatakse ka Newtoni binoomi arendi kordajad:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + K_{n+1}^1 a^n b + K_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + ... + K_{n+1}^n ab^n + b^{n+1}.$$

Tõenäosusteooria elementide käsitlus sisaldab võimalikkude ja ühtlasvõimalikkude juhtumiste tutvustamise ning nende arvude n ja N kaudu defineeritakse sündmuse tõenäosus $T = \frac{n}{N}$. Näidetena vaadeldakse aga kohe ülesandeid, kus nii n kui ka N tulevad leida kombinatsioonide arvuna. Veel esitatakse sündmuste summa ja korrutise tõenäosus. Vaikides eeldatakse, et esimesel puhul on sündmused teineteist välistavad ja teisel juhul, et sündmused on sõltumatud. Vastavad valemid esitatakse järgmisel kujul:

$$T = \frac{n+m}{N}. = \frac{n}{n} + \frac{m}{N} = t_1 + t_2 \quad \text{ja} \quad T = \frac{n \cdot m}{N \cdot M} = \frac{n}{N} \cdot \frac{m}{M} = t_1 \cdot t_2.$$

On lisatud 25 ülesannet tõenäosuse arvutamiseks. Esitame neist mõne siingi.

"Tartus on jaanuarikuul keskmiselt 3 päeva vihmasajuga ja 16 päeva lumesajuga. Kui tõenäitlik on sellepärast Tartus oodata, et uuel aastal ja kolmekuninga päeval

a) vihma sajaks,

b) lund sajaks,

c) ühel päeval vihma, teisel lund sajaks,

d) ei vihma ega lund ei sajaks?"

"Kui kolme täringuga korraga visata, kui suur on siis tõenäitlikkus selleks, et vähemalt 2 ühesugust arvu saada?"

"Kotis on 3 magusat ja 5 haput õuna. Kui suur on tõenäitlikkus selleks, et võttes enne ühe õuna ja siis (ilma, et esimest kotti tagasi panna) teise

a) 2 magusat õuna saada?

b) 2 haput õuna saada?

c) ühe magusa ja teise hapu õuna saada?"

4.5.2. Tõenäosusteooria küsimusi Paul Ederbergi käsitluses

Paul Ederberg on oma IV ja V klassi õpikus käsitlenud ka kombinatoorika ja tõenäosusteooria elemente.

Kombinatoorika osas tutvustatakse jällegi ühendeid, s.t. kombinatsioone, variatsioone ja permutatsioone. Antakse ka valem, mis seob neid kolme ühendite liiki, $V_n^m = P_m \cdot K_n^m$. Vaatluse alla võetakse isegi kordumistega ühendid ja esitatakse valemid permutatsioonide arvu leidmiseks, kui esineb võrdseid elemente:

$$P_{n(s)} = \frac{n!}{s!} \quad \text{ja} \quad P_{n(st)} = \frac{n!}{s!\,t!}.$$

Tõenäosuse mõiste antakse soodsate ja "kõikide ühtlasvõimalikkude" juhuste arvude jagatisena: $t = \frac{n}{N}$. Seejärel esitatakse "nähtuse mitteilmumise" tõenäosus $t_v = 1 - t$ ning tuuakse ära järgmine tabel:

"Olgu t_1 nähtuse A ilmumise tõenäosus, t_2 – tõenäosus nähtuse B suhtes, siis on tõenäosus, et

A ei ilmu	$1 - t_1$
B ei ilmu	$1 - t_2$
A ilmub, kuid B mitte	$t_1(1 - t_2)$
A ei ilmu, kuid ilmub B	$(1 - t_1) \cdot t_2$
Ilmub ainult A või B	$t_1 \cdot (1 - t_2) + (1 - t_1) \cdot t_2$
a ja B ilmuvad mõlemad	$t_1 \cdot t_2$
A ja B mõlemad korraga ei ilmu, teiste sõnadega, et kõige rohkem üks nendest ilmub	$1 - t_1 \cdot t_2$
Ei ilmu ei A ega B	$(1 - t_1)(1 - t_2)$
Ilmuvad A või B, või mõlemad korraga, teiste sõnadega, et vähemalt üks nendest ilmub	$1 - (1 - t_1)(1 - t_2)$."

Tabeli juurde on lisatud märkus: "Järele mõtelda, mispärast nii!"

Veel esitatakse tõenäosus selleks, et "nähtustest vähemalt üks ilmub":

$$1 - (1 - t_1)(1 - t_2)...(1 - t_n)$$

ja et "n katse juures nähtus vähemalt üks kord sünnib":

$$1 - (1 - t)^n.$$

Lõpuks tutvustatakse kindlustusarvutusega seotud küsimusi, nagu suremustabel, elamiskindlustus jt.

4.5.3. Matemaatilise statistika ja tõenäosusteooria küsimusi Gerhard Rägo tööraamatuis

Professor Gerhard Rägo on oma matemaatika tööraamatuis õige rohkesti kasutanud statistilisi andmeid. I klassi raamatus nõutakse nende andmete kujutamist graafiliselt. Näiteks esitatakse järgmine ülesanne:

"Aastal 1926 jagunesid õpilased meie koolides üksikuile õppeaastaile, nagu tabel näitab:

I	II	III	IV	V
18 547	22 839	25 313	22 320	11 183

VI	VII	VIII	IX	X	XI
8801	4396	3975	3819	3315	2690

Kujuta andmed tulpdiagrammis."

Rohkesti tabeleid esitatakse võrdelise ja pöördvõrdelise, aga ka teiste olenevuste käsitlemisel.

Teise klassi raamatus tuuakse seoses ruutsõltuvusega sisse mõiste *keskmine ruutviga*. Selle mõiste juurde jõutakse järgmise mõttekäiguga:

"Olgu teatava suuruse tõeline väärtus v_0, tema jaoks mõõtmisel saadud väärtuse v_1 mõõtmisviga $w(w > 0$ või $w < 0$, või juhuslikult $w = 0)$, nõnda, et $v = v_0 + w$."

Katse kordamisel saame:

$$v_1 = v_0 + w_1, v_2 = v_0 + w_2, v_3 = v_0 + w_3, ..., v_n = v_0 + w_n.$$

1° Võrduste liitmine annab

$$v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n = n \cdot v_0 + (w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n).$$

Et muist vigu > 0, muist < 0, siis võib arvata, et liitmisel vead tunduvalt vastastikku kattuvad (kompenseeruvad), nii et

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n \approx 0,$$

sellega $\quad v_0 \approx \frac{v_1+v_2+v_3+\dots+v_n}{n}.$

Sõnasta tulemus.

2° annab selle tulemuse põhjal eeskirja juhuslistе mõõtmisvigade ligikaudseks arvutamiseks mõõtmissaadustest.

3° Suurust $\bar{w} = \sqrt{\frac{w_1^2+w_2^2+w_3^2+\dots+w_n^2}{n}}$ nimetatakse "keskmiseks ruutveaks". Sõnasta eeskiri tema arvutamiseks.

4° Mida tihedamalt koonduvad mõõtmissaadused oma aritmeetilise keskmise ümber, seda parem on nende kokkukõla; mida hõredamalt – seda halvem on see kokkukõla. Mõõtmissaaduste kokkukõla headust hinnatakse suuruse $\bar{w}$ abil; mida väiksem on $\bar{w}$ seda parem on mõõtmissaaduste kokkukõla."

Seejärel esitatakse kolme õpilase poolt erinevate vahenditega teostatud ühe ja sama kauguse mõõtmisel saadud andmed ning nõutakse leida igaühe mõõtmistulemuste jaoks aritmeetiline keskmine ja keskmine ruutviga.

G. Rägo keskkooli V klassi tööraamatus on aga eraldi peatükk "Statistilise meetodi alged".

Et selgitada nähtuse tõenäosuse mõistet, antakse ülesandeid küll kaartide tõmbamise, täringu viskamise ja muude juhusest sõltuvate suuruste kohta. Edasi tulevad ülesanded relatiivse sageduse määramiseks ning selle sageduse püsivuse kogemiseks. Seejärel tehakse kokkuvõte, mille kohaselt relatiivne sagedus küllalt suure katsete arvu korral omandab püsiva väärtuse. See annab aluse nimetada relatiivset sagedust nähtuse tõenäosuseks. Sellele definitsioonile järgnevad ülesanded tõenäosuse arvutamiseks juhtude loendamise teel. Seejärel antakse nähtuse teoreetilise tõenäosuse definitsioon, mis tugineb mõeldavate võrdvõimalike juhtude loendamisele.

Tõenäosuse liitmis- ja korrutamislausete juurde jõutakse jällegi ülesannete kaudu. Nende lahendamise käigus antakse vastassündmuse, "teineteist eemaldavate" sündmuste ning "teineteisest olenevate" sündmuste mõisted. Eeldades, et sündmused on teineteist eemaldavad, jõutakse sündmuste tõenäosuste liitmislauseni $p = p_1 + p_2$, ning kui sündmused on teineteisest olenematud, saadakse tõenäosuste korrutamislause $p = p_1 \cdot p_2$.

Järgnevatest ülesannetest olgu üks siingi esitatud.

"Loteriis on 90 loosi, millest 5 toovad võidu. Kui suur on tõenäosus, et

1° ühele ostetud loosile parajasti langeb võit?

2° kahest ostetud loosist kas esimene või teine toob võidu?

3° nii esimene kui teine loosidest toob võidu?
4° esimesele langeb võit, teisele mitte?
5° vähemalt ühele kahest loosist langeb võit?"

Mitu ülesannet esitatakse suremustabeli rakendamiseks. Toome neistki ühe näite.

"Olgu tegemist kolme sama lennu ülikooli lõpetajaga, kelle ead on 20, 24 ja 29 aastat. Kui suur on tõenäosus, et vähemalt üks neist on veel elus 30 aasta järel?

Näpunäide. Määra suremustabelist iga isiku jaoks surma tõenäosus, siis tõenäosus, et nad kõik on surnud 30 aasta pärast ja siit edasi tõenäosus, et nad kõik veel surnud pole."

Järgnevas kindlustusmatemaatika algete osas esitatavate ülesannete kaudu selgitatakse ka suremustabeli koostamist. Isikukindlustusega seotud ülesanded tuginevad omakorda samale tabelile.

Peatüki "Statistilise meetodi alged" lõpus on statistilise rea keskväärtuste ja hajumismõõtude arvutamise ülesanded. Siin jõutakse analoogiliste ülesanneteni, nagu oli juba II klassi raamatus. Mõned ülesanded on aga isegi samad. Raamatu lõpul tutvustatakse veel binoomjaotust, mis tugineb peatükis "Polünoomide rakendamine arvutusabinõuna" esitatud Newtoni binoomi arendile.

Esitame peatüki lõpus toodud ülesannetest ühe, kus on kasutatud sagedusjaotust ja sealt tuleb selle abil leida vajalikud arvulised karakteristikud:

"Et selgusele jõuda külitud hernesordi viljakuse kohta, võeti karbitäis kaunu ja loeti ära terade hulk igas kaunas. Töö tulemuseks oli tabel:

Terade arv:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kaunade arv:	3	6	14	17	34	45	70	94	75	48	23	28	5

Kujuta andmed tulpdiagrammis.

Täienda joonist murdjoonega, mille tipud on tulpade lõpupunktid. See murdejoon näitab kaunte sagedusjaotust herneterade arvu järgi.

Lisa mõlemal pool saadud joonist veel üks lisaintervall ja pikenda murdjoon nende intervallide keskpunktideni. Kui suur on saadud murdjoone poolt piiratud pindala?

Kui suur on herneterade hulga mediaan?

Missugust osa mängib sellele vastav ordinaat joonisel?

Kui suur on herneterade hulga keskmine?

Kui suur on herneterade hulga hajumismõõt?"

Lõpuks rakendatakse ülesannetes ka nn. binomiaalset jaotust.

4.5.4. Statistika alged ja vaatlusandmete käsitlemine Elmar Etvergi ja Gerhard Rägo humanitaargümnaasiumide standardõpikus

Juba eespoolgi vaatluse all olnud standardõpikus on veel peatükid "Statistika alged" ja "Vaatlusandmete käsitlemine". Esimest peatükki alustatakse kollektiivi ja kollektiivi elemendi, tunnuse ja tunnuse väärtuse mõistetega ning statistilist rida defineeritakse kollektiivi elementide tunnuse väärtuste reana. Nüüd lisandub sageduse mõiste ja konstrueeritakse sageduste tabel. Arvulistest karakteristikutest tutvustatakse esimesena mediaani ning õpetatakse seda leidma ka sagedustabelist. Järgneb aritmeetilise keskmise mõiste ja selle leidmine esialgse keskmise kaudu. Hajuvusmõõtude käsitlemisel veendutakse, et aritmeetilise keskmise suhtes arvutatud hälvete summa on null ning hajuvusmõõduna võetakse kasutusele ruuthälve. Tõestatakse, et aritmeetilise keskmise suhtes arvutatud ruuthälve on väiksem kui ühegi teise arvu suhtes arvutatud ruuthälve. Aritmeetilise keskmise suhtes arvutatud ruuthälvet nimetatakse seejärel standardhälbeks. Nähtuse tõenäosuse mõiste antakse relatiivse sageduse kaudu järgmiselt: "Tõenäosuseks, et nähtus esineb kollektiivi juhuslikult võetud elemendi juures, nimetatakse relatiivset sagedust, millega nähtus kollektiivis esineb".

Vaatlusandmete käsitlemisel selgitatakse kõigepealt, et mõõdetava suuruse tõenäoseimaks väärtuseks on mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine. Järgnevalt tutvustatakse vaatlusandmete graafilist tasandamist ning empiirilisi seadusi. Viimastele antakse järgmine definitsioon: "Seadusi, mis on tuletatud vaatlus- ja katseandmeist ja mis ei põhine teoreetilistel uurimistel, nimetatakse empiirilisteks seadusteks. Tuuakse näiteid nähtuskäiku valitseva seaduse leidmiseks vaatlusandmetele tuginedes.

K. Ratassepa ja G. Rägo humanitaargümnaasiumi III klassi harjutustikus leiame tutvustatud teemade kohta ka ülesandeid. Esitame mõned nendest ka siin.

1) "Äride *A* ja *B* päevasissetulekud kroonides üksikutel nädalapäevadel olid järgmised:

Nädalapäev	E	T	K	N	R	L
A sissetulek	238	312	298	373	435	528
B sissetulek	341	360	337	360	349	653

Kui suur on kummagi äri keskmine päevasissetulek?

Kummal äril on ühtlasem tegevus?"

2) "Võta mingi eestikeelne ilukirjanduslik teos ja ava ta mingil leheküljel, võta sellel leheküljel 10 trükirida, loenda neis esinevate tähtede hulk ja määra a-tähe esinemise sagedus selles hulgas. Kui suur on a-tähe relatiivne sagedus võetud 10 reas?

Võta veel 10 rida juurde ja määra a-tähe relatiivne sagedus võetud 20 reas. Määra edasi a-tähe relatiivne sagedus tervel leheküljel. Kujuta graafiliselt a-tähe relatiivse sageduse olenevus võetud ridade arvust. Kui suur on a-tähe esinemise relatiivne sagedus eesti keeles?"

3) "Järgmine tabel kujutab meeste keskmise pikkuse p cm olenevust nende isade pikkusest i cm.

i	157	163	166	175	178	180	183
p	166,7	169,8	171,4	176,1	177,6	178,7	180,2

Oletades, et arvud i ja p vahemikus $i = 157$ kuni $i = 183$ on seotud lineaarse võrrandiga $p = ai + b$, määra kordajate a ja b sobivamad väärtused."

4.5.5. Professor Arnold Humala "Matemaatilise statistika elemendid"

Professor Arnold Humala seisukohti matemaatilise statistika õpetamises saab tundma õppida 1938. a. välja antud konspektist "Matemaatilise statistika elemendid". Selles 50-leheküljelises brošüüris on käsitletud järgmisi teemasid: statistiline materjal ja statistiline analüüs, sagedusjaotused ja keskmised, hajumismäär, aegread, korrelatsioonarvutus, tõenäosusteooria algmed.

Esimeses teemas tutvustatakse klassifikatsiooni ja statistilisi ridu. Viimased jaotatakse kvalitatiivseteks, geograafilisteks, aeg- ja kvantitatiivseteks ridadeks. Seejärel esitatakse ositusarve (näiteks elanike jaotumine protsentides maa- ja linnaelanikeks), ühenimeliste ja erinimeliste arvude jagatisi, nn. suhtarve (näiteks teatud kuul surnute arvu suhe kogu elanikkonna arvusse, viljasaak kilogrammides ühe hektari kohta) – need esitatakse aga tavaliselt ilma protsendimärgita, ning lõpuks antakse ka suhtarve rea ühe elemendi suhtes (väljaveo indeks, ehitusmaksumuse indeks).

Teine teema hõlmab sageduste graafilise esitamise viisid (histogramm, sageduspolügoon, lahutusdiagramm (kumulatiiv)). Edasi käsitletakse keskmisi (mood, mediaan, aritmeetiline keskmine) ning tutvustatakse aritmeetilise keskmise arvutamist hälvete abil.

Kolmas teema hõlmab hajumisvahemiku, kvartiilpunktide ja -hälbe, keskmise hälbe, standardhälbe ehk dispersiooni ning muude hajumismäärade (variatsioonikordaja, tertiilpunktid, detsiilpunktid) mõisteid ja vastavaid arvutamiseeskirju. Selle teema raames on tõestatud ka mõned laused hajumismäärade kohta (keskmise hälbe miinimum, hälvete ruutkeskmise miinimum).

Aegridade teemas tutvustatakse indeksarve ehk indekseid, geomeetrilist keskmist, trende ja sesoontegureid.

Korrelatsioonarvutuse käsitlemist alustatakse regressioonsirgetest, millele järgneb korrelatsioonikoefitsient ja selle omadused.

Tõenäosusteooria algmete hulka on arvatud tõenäosuste liitmis- ja korrutamislaused, binomiaaljaotus, Bernoulli rida, selle mood, aritmeetiline keskmine ja standardhälve, aga ka suurte arvude seadus, hälvete normaalkõver ja vähimruutude meetod.

* * *

Arnold Humal (kuni 1936. a. Tudeberg) (1908–1987) sündis Tallinnas. Õppis Tallinna Poeglaste Humanitaargümnaasiumis ning Tartu Ülikooli matemaatika-loodusteaduskonnas, mille matemaatikaosakonna lõpetas 1929. a. Oma doktoritööd kaitses 1934. a. Töötas Tartu Ülikooli õppejõuna kuni 1941. aastani. Aastatel 1941–1944 oli Tallinnas matemaatikaõpetajaks ning alates 1944. aastast kuni surmani oli Tallinna Tehnikaülikooli professor. Aastast 1947 osales Eesti NSV Teaduste Akadeemia töös (vt. ka IV, lk. 72).

Kokkuvõte

Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elementide õpetamine on Eesti koolides olnud episoodiline ja mahult tagasihoidlik. Esimesed käsitlused kahekümnendatel aastatel pakkusid ainult tõenäosuse mõiste ning tõenäosuste liitmis- ja korrutamislaused. Seejuures ei tõstetud päevakorrale sündmuste välistavust ega sõltumatust. Professor G. Rägo on peaaegu kõigis oma tööraamatutes tutvustanud matemaatilise statistika mõisteid ja lihtsamaid statistilisi arvutusi. Keskkooli lõpuklassis pakutud pisut ulatuslikum kursus kordab eelmistes klassides tutvustatud karakteristikuid ja lisab neile uusi. Tähtsale kohale tõstatub siin suremustabel ja selle kasutamine, ka kindlustuse korraldamisel. Tõenäosuse käsitlemisel rõhutatakse siin sündmuste välistavust ja sõltumatust, mida arvestatakse vastavalt tõenäosuste liitmis- ja korrutamislause tuletamisel. Tingliku tõenäosuse mõistet aga ei anta ja seega vastavate üldiste valemiteni ei jõuta. G. Rägo raamatut iseloomustab rohke huvitavate ülesannete valik. Standardõpikus leiame üksikasjaliku statistika algmõistete ning arvuliste karakteristikute (mediaani, aritmeetilise keskmise ja ruuthälbe) tutvustamise. Tõenäosuse mõiste antakse siin relatiivse sageduse kaudu. K. Ratassepa, G. Rägo vastavas ülesannetekogus leidub ka tööraamatust tuttavaid ülesandeid.

Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elementide õpetamise püüdlused koolis väärivad esiletõstmist. Ei olnud ju nendel aastatel paljudes maades jõutud veel nende elementide õpetamiseni koolis.

Neljakümnendate aastate standardõpikuis tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika küsimusi ei käsitleta. Möödub mitu aastakümmet, enne kui neile küsimusile hakatakse koolis jälle pisut tähelepanu osutama.

A. Humala konspekt näitab, mida õpetati Tartu Ülikooli matemaatika-loodusteaduskonna üliõpilastele 1938. a. õppekavva võetud statistiliste meetodite kursuses.

“EESTI KOOLIMATEMAATIKA AJALOO” III OSA LÕPETUSEKS

Eestikeelse matemaatika kooliraamatu arengulugu hakkasime jälgima juba “Eesti koolimatemaatika ajaloo” I osas. Seal tutvusime esimeste eestikeelsete aritmeetika-, algebra- ja geomeetriaõpikutega. Suurt tähelepanu pöörasime Rudolf Gottfried Kallase “Mõistlikule rehkendajale”, mis osutus silmapaistvaks aritmeetika õpetamise metoodika õpetuseks.

Ka raamatu II osas olid vaatluse all kooliraamatud. Need olid XX sajandi esikümnetel ilmunud aritmeetika raamatud, mille autoriteks olid tolleaegsed koolmeistrid. Mõnest neist sai eestikeelse matemaatikaõpetuse kindlustaja ka 1918. a. sündinud Eesti Vabariigis. Nimetame August Maramaad (Marfeldt), Friedrich Vollrad Mikkelsaart, Oskar Pärlit.

Käesolev raamatu III osa on pühendatud eestikeelsele matemaatika kooliraamatule aastail 1918–1950. Et siin õpikute arv on küllalt suur, siis pidasime vajalikuks käsitleda seda ainet kronoloogilises ja ainealases järjestuses. Kronoloogilises järjestuses piirdusime ühel või teisel aastal ilmunud raamatute ülevaatega või õigemini loeteluga. Artikleid oleme aga püüdnud seal ka lähemalt tutvustada. Ainealases järjestuses oleme esile tõstnud õpikute sisu ja huvitavamaid metoodilisi lahendusi ühe või teise teema käsitlemisel. Kokku on selle osa kokkuseadmiseks läbi töötatud *ca* 300 õpikut ja ülesannetekogu, 40 töövihikut ja 180 artiklit.

“Eesti koolimatemaatika ajaloo” I ja III osa on pühendatud kooliraamatule, II osa aga peamiselt tunni- ja õppekavadele (õppeplaan ja programm). On jäänud selgitada, kuidas on toimunud matemaatikaõpetaja ettevalmistamine, missugust osa selles protsessis on täitnud Eesti Vabariigi Tartu Ülikool ja Tallinna kõrgkoolide esimesed eestlastest matemaatikaprofessorid. Nende küsimuste valgustamine on järgmise, s.o. IV osa ülesandeks.

Märkus. IV osa, lk. 53 joonealusest nimekirjast puuduvad 1990. a. osas:

Leida Kork, kauaaegne Kehra keskkooli matemaatikaõpetaja;

Alfred Lints, silmapaistvate algklasside matemaatikaõpikute autor. Käesoleva raamatu autor vabandab nende isikute ees.

* * *

Lisame veel raamatu toimetamise ajal saadud informatsiooni mõne kõne all olnud isiku elu ja tegevuse kohta.

Richard Tiitso (1886–1952). Sündis Virumaal Rägavere vallas. Lõpetas eksternina Tallinna Reaalgümnaasiumi ning õppis siis maamõõtmist ja kultuurtehnikat ning nendega seonduvaid aineid Kurskis, Moskvas, Hersonis ning Saksamaal Bonnis.

Aastatel 1905–1907 oli Viljandis kooliõpetajaks ja andis koos August Marfeldtiga (hiljem Maramaa) välja ka aritmeetikaraamatud. Hiljem töötas kümmekond aastat maamõõtjana ja kultuurtehnikuna. Oli Tallinna Tehnikumi lektor, 6 aastat Tallinna Merekooli matemaatikaõpetaja ning sõja-aastail Tallinna Tööstustehnikumi maamõõdu ja kultuurtehnika osakonna juhataja. Pärast sõda oli Tartu Ülikooli melioratsiooni kateedri juhataja ning Eesti Põllumajanduse Akadeemias jätkas kuni surmani geodeesia kateedri juhataja ja õppejõuna.

Juhan Tork (1889–1980). Sündis ja õppis Tartus. Ülikooli lõpetas 1914. a. ajalookandidaadi kraadiga. Täiendas ennast pedagoogika ja psühholoogia alal Leipzigis ja Hamburgis. Oli Tartu Õpetajate Seminari juhataja (1919–1932). 1939. a. sai filosoofiadoktoriks pedagoogika alal. 1944. a. põgenes Eestist Saksamaale, oli seal Eesti gümnaasiumi direktor. Hiljem elas Uus-Meremaal ja elu lõpuaastail Kanadas.

Kalev Ratassepp (1898–1960). Sündis Tallinnas, õppis sealses Nikolai Gümnaasiumis, seejärel Peterburi Elektrotehnikainstituudis ja Tartu Ülikoolis, mille lõpetas matemaatika erialal 1926. aastal. Oli õpetaja Tartu Kommertsgümnaasiumis, Rakvere Õpetajate Seminaris, Tallinnas H. Kubu ja J. Westholmi eragümnaasiumis ning Riiklikus Kolledžis. Pärast II maailmasõda oli Tallinna Polütehnilise Instituudi matemaatika kateedri dotsent. Kandidaaditöö, mille ta kaitses 1946. a., valmis prof. G. Rägo juhendamisel.

Aastatel 1939–1949 oli K. Ratassepp mitme keskkooli matemaatikaõpiku ja ülesannetekogude autor või kaasautor.

Jüri Nuut (1892–1952). Sündis Peterburis. Seal õppis ja lõpetas Peterburi Ülikooli matemaatikuna. Opteerus Eestisse 1921. a. Töötas õpetajana Narvas ja Tartus. 1928. a. kaitses doktoriväitekirja ning seejärel töötas Tartu Ülikooli matemaatika dotsendina. 1936 asus tööle Tallinna Tehnikainstituuti. Seal sai professoriks, oli ka rektor. II maailmasõja järel oli ENSV hariduse rahvakomissar ja 1946. a. nimetati ENSV Teaduste Akadeemia teadussekretäriks. On avaldanud mitu matemaatikaõpikut. Lähemalt vt. IV osa, lk. 55.

Oskar Silde. Sündis 1900. aastal Käina vallas Hiiumaal. Õppis Tallinna linna poeglaste gümnaasiumis (1917–1921) ja Tartu Ülikooli matemaatika-loodusteaduskonnas (1921–1925). Seejärel täiendas ennast samas veel astronoomia erialal. Töötas õpetajana mitmes koolis, sealhulgas ka Tallinna Õpetajate Seminari inspektorina. Pärast II maailmasõda oli Tallinna Tehnikaülikooli dotsent. 1993. a. elas Tallinnas pensionärina.

Gunnar Kangro (1913–1975). Sündis ja õppis ning omandas matemaatiku eriala Tartus. Töötas õppejõuna Tartus, sõja-aastail Tšeljabinski ja Moskva Ülikoolis. Pärast sõda asus tööle Tartu Ülikooli, kus sai 1951 professori kutse. Töötas kateedrijuhatajana. Valmistas ette 25 uut noort teadlast ning kirjutas hulga kõrgkooli matemaatikaõpikuid.

Hermann Jaakson (1891–1964). Sündis Viljandimaal Saarepeedi külas. Õppis Riia Aleksandri Gümnaasiumis ja Tartu Ülikoolis (1909–1913). Töötas õpetajana Tartu Kommertskoolis ning alates 1918. aastast Tartu Ülikoolis, esialgu dotsent, aastast 1926 professor. Pärast II maailmasõda oli matemaatilise analüüsi kateedri juhataja. Lähemalt vt. IV osa,lk. 65.

THE HISTORY OF SCHOOL MATHEMATICS IN ESTONIA

Abstract of Part III

The Mathematics Textbooks of the Estonian Schools in 1918–1950

In the first part of the book we introduced the tentative efforts to teach mathematics in Estonian in the 19th century. The second part described the rapid development of mathematics teaching in the mother tongue during the years of the Republic of Estonia (1918–1940). In the same part the reader became arquainted with the new study plans and mathematics syllabuses of the period. Now, in the third part, attention is given to mathematics textbooks, books of problems and workbooks, also articles on teaching mathematics published in newspapers and journals.

Part III opens with a chronological overview of the school mathematics literature, first paying attention to the period of essentially reforming the course of mathematics at school and renovating the modes of teaching (1918–1936), secondly to the period of standardizing the teaching of mathematics (1937–1950).

In the first period alternative textbooks were in use. Of the arithmetic books for the elementary school (forms I–VI) we have analysed the publications by August Maramaa and Friedrich Vollrad Mikkelsaar, and those by co-authors Karl Rudolf Veski and Jüri Grünthal; Herta Veidermann, Adeele Oengo-Johanson and Christian Brüller; Johannes Kuulberg (Kallak), Elisabeth Kuulberg (Kallak), Elmar Martinson (Araste), Oskar Pärli and Konstantin Treffner; August Kasvand and Juhan Lang. Light has been shed on mathematics workbooks, introduced in the thirties, which caused considerable excitement. This new method was organized and carried out by Johannes Käis.

The school reform of 1934 replaced the former school system of 6+5 years by the new system of 4+5+3 or 6+3+3 years. This necessitated the publication of arithmetic books specially for the first two forms on the five-grade progymnasium. And so joint authors Albert Borkvell, August Kasvand, Felix Laarens, Oskar Paas and Arnold Vihman published separate books of arithmetic, algebra and geometry for school years 5–9 (progymnasium). Arithmetic books were written also for vocational schools by Eduard Moss, Jaan Jaakson and others.

The period of standardization included World War II and the occupation of Estonia. In the conditions of ideological pressure some authors proved undesirable. In those years books of arithmetic were written by Juhan Kallak, Boris Rea, Arvo Lehis, Ott Rünk, Hilda Roos and Arnold Vihman. In 1949, however, our schools switched over to the mathematics syllabuses and textbooks, currently used in the Soviet Union.

We have also briefly described the Estonian books of arithmetic, published in Soviet Russia in the twenties.

In the first period **algebra** was taught on the basis of the books by David Rootsmann (Rootsmäe), Viktor Päss, Paul Ederberg, Oskar Pärli, Gerhard Rägo, Theodor Koik, and the joint authors, mentioned above (A. Borkvell et al.). The standard textbooks taken into use in the second period were written by Gerhard Rägo, Elmar Etverk, Julius Grüntal, Kalev Ratassepp, Arnold Vihman and Leonti Ruumet. In 1928–1936 the most outstanding schoolbooks of algebra were the five parts on the "Workbooks of Mathematics" (I–V) by Gerhard Rägo.

In the first period the schoolbooks of **geometry** were published by Oskar Pärli, Jüri Nuut, Paul Madisson, Edgar Krahn, Albert Borkvell and Elmar Etverk, and the joint authors (A. Borkvell et al.). In his book E. Krahn introduced elements of descriptive geometry. During the period of standardization mainly the textbooks by E. Etverk were in use.

The books of **trigonometry** were compiled by Villem Nano and Albert Borkvell in the first period, in the second by Kalev Ratassepp. At the same time trigonometry as touched upon also in geometry books. Problems of spherical trigonometry were explained in the book written by V. Nano.

The treatment of **analytic geometry** and **mathematical analysis** has been dealt with in a separate section. In this field books were written by Gerhard Rägo and Albert Borkvell, but these problems were given attention to also in the books of algebra.

The presentation of **elements of the probability theory** and **mathematical statistics** has also been separately discussed. These problems, too, were highlighted in the books of algebra.

In all, we have analysed 200 schoolbooks, 40 workbooks and 180 articles.

KIRJANDUS

Artiklid ja arvustused

1. **Aader, E.** Arvustus: Lang, J., Rootsman, D. Isaac Newton. Kasvatus, 1933, 4, 179–181.
1. **Ambur, P.** NSV Liidus ilmunud eestikeelsest õppekirjandusest. Nõukogude Kool, 1940, nov., 236–238.
2. **Aleksandrov, P.S.** Suur vene matemaatik Lobatševski. Tartu, 1947.
3. **Brüller, Chr.** Algkooli matemaatika õppekavad. Kasvatus, 1926, 11, 325–329; 12, 360–366.
4. **Brüller, Chr.** Aritmeetiliste ülesannete liike ja tüüpe. Eesti Kool, 1940, 2, 92–105.
5. **Brüller, Chr.** Arvustus: Kasvand, A., Lang, J., Paas, O. Matemaatika õpik. 5. ja 6. õppeaasta. Eesti Kool, 1938.
6. **Brüller, Chr.** Veel kord matemaatika standardõpikust. Kasvatus, 1939, 9, 389–391.
7. **Brüller, Chr.** Arvutamisest. Kasvatus, 1940, 1, 16–23.
8. **Brüller, Chr.** Veidike matemaatiliste vigade kvalitatiivset analüüsi. Kasvatus, 1934, 8, 363–373.
9. **Budkovsky, A.** Matemaatika. II õppeaasta. Korrutustabeli läbitöötamine. Teel töökoolile, II anne. Võru, 1928, 3. 46–67.
10. **Depman, J.** Leningradi matemaatikaõpetajad Euleri haual. Nõukogude Õpetaja, 1947, 17. okt.
11. **Dobrotin, A.N.** Murdude korrutamise ja jagamise metoodika. Nõukogude Kool, 1949, 6, 357–362.
12. Ebaterveid nähtusi kooliraamatute turul. Õpetajate Leht, 1936, 39.
13. **Elango, Õ.** Algkooliõpikud iseseisvas Eestis (1919–1940). Haridus, 1991, 3, 44–47.
14. **Elango, Õ.** Keskkooliõpikud omariikluse aastail (1919–1940). Haridus, 1991, 10, 43–45.
15. **Emmo, A.** Vajame uusi kooliraamatuid. Õpetajate Leht, 1932, 30.

16. **Gonobolin, F.** Õpitu süstemaatilisest kordamisest. Nõukogude Õpetaja, 1941, 13.
17. **Greenberg, K.** Matemaatika metoodika. Teel töökoolile. Võru, 1929, 33–110.
18. **Greenberg, K.** Matemaatika. Teel töökoolile. Võru, 1928, 33–46.
19. **Grüntal, J.** Arvustus: Rägo, G. Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Algebra I ja II klassi kursus. Kasvatus, 1929, 6, 282–289.
20. **Grüntal, J.** Uusi teid. Õpetajate Leht, 1932, 42.
21. **Heinpalu, J.** Matemaatika õpetamise edu nimel. Nõukogude Õpetaja, 1947, 26. dets.
22. **Humal, A.** Funktsioonide vahe graafiline integreerimine. Ruutvõrrandi geomeetriline lahendamine. Tartu, 1947.
23. **Jaakson, H.** Arvustus: Rägo, G. Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned. Loodus, 1922, 6, 373–375.
24. **Jaakson, H.** Kaugõppest matemaatika erialal TRÜ-s. Nõukogude Õpetaja, 1947, 13. juuni.
25. **Jaakson, H.** Lõpmatuse mõiste matemaatikas. Loodus, 1923, 3, 149–164.
26. **Jevdokimova, A.** Minu töö kogemusi. Nõukogude Kool, 1950, 12, 758–763.
27. **Kadastik, J.H.** Mõnda üks-kord-ühe õpetamisest. Kooliuuenduslane, 1938, 1, 8–10.
28. **Kalju, A.** Arvustus: Madisson, P. ja Ussisoo, Th. Planimeetria. Kasvatus, 1921, 9, 143–144.
29. **Kall, O.** Mõnda arvusüsteemi läbitöötamisest algastmel. Kooliuuenduslane, 1936, 4, 47–50.
30. **Kallio, N.** Jooni Soome koolide matemaatika ja füüsika õpetusest. Eesti Kool, 1937, 4, 220–225.
31. Kas jälle standardõpikud? Õpetajate Leht, 1940, 1.
32. **Kasvand, A.** Märkmeid "Matemaatika õpikute" kohta. Eesti Kool, 1938, 8, 542–547.
33. **Kasvand, A.** Korrutamine ja jagamine saja piires. Nõukogude Kool, 1946, 8, 506–510.
34. **Kasvand, A.** Matemaatika metoodikast. Nõukogude Kool, 1946, 8, 560–568.
35. **Kasvand, A., Lang, J., Paas, O.** Matemaatika standardõpikud. Kasvatus, 1939, 6/7, 278–283.
36. Kergemalt raskemale. Kooliuuenduslane, 1935, 9, 112.
37. **Kiivet, J.** Arvustus: Jaakson, J. Põllumajanduslik aritmeetika ülesandeis. Kasvatus, 1932, 2, 84–85.
38. **Kiivet, J.** Arvustus: Päss, V. Algebra ülesannete kogu I. Kasvatus, 1921, 20, 321–322.

39. **Kiivet, J.** Arvustus: Veiderman, H. ja Brüller, Chr. Väike arvaja. I ja II õppeaasta. Kasvatus, 1922, 22, 365–366.
40. **Kiivet, J.** Suurte arvude nimetused. Täiendav lehekülg aritmeetika õpperaamatuile. Kasvatus, 1922, 2, 24–25.
41. **Kivistu, A.** Sobimatu liik harjutusi aritmeetikaõpikuis. Nõukogude Õpetaja, 1949, 16. sept.
42. **Kivistu, A.** Võrrandi koostamisest. Nõukogude Õpetaja, 1949, 25. nov.
43. **Klement, F.** Märkmeid keskkooli päevaküsimusist. Õpetajate Leht, 1930, 12; 13.
44. III üleriiklik matemaatika, füüsika ja kosmograafia õpetajate kongress 18.–20. aprillini 1922 Tallinnas. Kasvatus, 1922, 13, 202–206; 15, 255–256; 16, 271–272.
45. **Kolts, P.** Arvustus: Treffner, K., Kuulbergid J. ja E., Perli, O., Martinson, E. Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. I õppeaasta. Kasvatus. 1925, 2, 51–54.
46. **Kolts, P.** Arvuõpetuslikust koolikirjandusest. Kasvatus, 1924, 11, 339–341.
47. **Kolts, P.** Mõõdud ja mitmenimelised arvud algkooli matemaatikas. Kasvatus, 1925, 11, 328–330.
48. **Koppel, J.** Puhang arvutusõpetuse metoodikas. Kasvatus, 1923, 4, 118–120.
49. **Krahn, A.** Ligikaudne arvamine. Kasvatus, 1926, 1, 2–4.
50. **Krahn, E.** Arvustus: Borkvell, A. Matemaatilise analüüsi põhimõisted ja rakendused. Õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele. Kasvatus, 1927, 11, 500–501.
51. **Kurvits, U.** Algkool ja koolikohustus. Kasvatus 1920, 11–12.
52. **Kuulberg, J.** Meie algkooli matemaatika õppekavad. Kasvatus, 1924, 7, 193–196; 8, 244–247; 9, 271–278.
53. **Käis, J.** Arvutusmänge peastarvutamise arendamiseks. Kooliuuenduslane, 1939, 5, 107–112; 6, 123–125.
54. **Käis, J.** Eelarvamusi ja tõsiasju matemaatika töövihikute kohta. Õpetajate Leht, 1940, 9.
55. **Käis, J.** Eksamiülesandeist. Õpetajate Leht, 1940, 20.
56. **Käis, J.** Individualiseeritud õpetus teena isetegevusele. Matemaatikaõpetus. Kooliuuenduslane, 1939, 2, 52–54.
57. **Käis, J.** Rohkem eluligidust õppetöösse. Kooliuuenduslane, 1934, 7, 45–47; 8, 53–55; 9, 61–63.
58. **Käis, J.** Töövihikud otstarbeka õpetuse vahendina eriti matemaatikas. Kasvatus, 1939, 5, 218–224.
59. **Käis, J.** Õpilase edukuse hindamine matemaatikas. Nõukogude Õpetaja, 1948, 16. apr.

60. Känd, P. Õpilastele on pandud matemaatikas kindel alus. Nõukogude Õpetaja, 1949, 28. mai.
61. Kärsna, A. Korrelatiivsete seoste tõlgendamisest. Eesti Loodus, 1940, 4/5, 193–201.
62. Lang, J. Arvutusskeemid vajavad revisjoni. Nõukogude Kool, 1941, 1, 76–78.
63. Lang, J. Eksamite korraldus Nõukogude Vene koolis. Nõukogude Kool, 1940, okt., 144–147.
64. Lang, J. Töökorralduse juhtnööre Nõukogude Vene (VNFSV) alg- ja keskkoolis. Nõukogude Kool, 1940, sept., 44–48.
65. Lehis, A. Matemaatika metoodikast. Nõukogude Kool, 1946, 6, 350–364.
66. Limberg, E. Individuaalne meetod matemaatika õpetuses. Teel töökoolile. Võru, 1930, 72–78.
67. Limberg, E. Matemaatika metoodika käsiraamat. Uusi teid algõpetuses. Tallinn, 1934.
68. Limberg, E. Matemaatika tööjuhatusi individuaalseks tööks. 6. õppeaasta. Tallinn, 1934.
69. Limberg, E. Matemaatika. Uusi teid algõpetuses. Tallinn, 1933, 50–58.
70. Lints, A. Peastarvutamisest. Nõukogude Kool, 1947, 11, 695–704.
71. Livländer, R. Triangulatsioonist ja täpsest kaardistamisest. Loodusvaatleja, 1931, 3, 70–73.
72. Livländer, R. Arvustus: Nuut, J. Millest kõneleb Einsteini relatiivsuse õpetus. Loodusvaatleja, 1930, 5, 154.
73. Lõbusast arvutamisest. Kooliuuenduslane, 1935, 3, 46.
74. Majergoiz, D. Õpilaste vigade uurimisest matemaatikas. Nõukogude Kool, 1950, 6, 360–372.
75. Martinson, E. Arvustus: Käis, Joh. Uusi teid algõpetuses. Õpetajate Leht, 1931, 39.
76. Marõtševa, A. Matemaatikaõpetaja töökogemusi. Nõukogude Õpetaja, 1950, 22. sept.
77. Matemaatika-, füüsika- ja kosmograafia-õpetajate IV kongress. Loodus, 1924, 5, 268–269.
78. Matemaatikast algklassis. Kooliuuenduslane, 1937, 4/5, 64–67.
79. Matemaatika standardõpiku käsikiri VI õ.-a. valmis. Õpetajate Leht, 1938, 24/25.
80. Meos, M. Mõningaid metoodilisi võtteid matemaatika õpetamisel 5. ja 6. õppeaastal. Eesti Kool, 1940, 3, 174–183.
81. Mohrfeldt, J. Matemaatilised sümbolid põhimõttelisest vaatepunktist. Eesti Kool, 1936, 8, 431–439.
82. Nano, V. Arvustus: Rägo, G. Matemaatilise analüüsi elemendid. Kasvatus, 1922, 11, 168–171.

83. **Nuut, J.** Eksaktteaduste kriisist. Varamu, 1939, 1, 58–64.
84. **Nuut, J.** Geomeetria üldhariduslise õppeainena koolis. Loodus, 1924, 9, 443–454.
85. **Nuut, J.** Ülikoolis korraldatud kontrolltööde tulemuste kvantitatiivne analüüs. Eesti Kool, 1935, 1, 16–26.
86. **Nõges, V.** Arvustus: Sapotzki, L. Kujutava geomeetria ja konstruktiivse perspektiivi algõpetus. Kasvatus, 1930, 7, 335–337.
87. **Oissar, E.** Õpilase töö hindamisest. Nõukogude Kool, 1940, dets., 265–276.
88. **Anton, K.** Omavalmistatud õppevahendid. Nõukogude Kool, 1946, 6, 249–258.
89. **Ordlik, V.** Aritmeetika ülesannete lahendamisest. Nõukogude Kool, 1946, 4, 235–248.
90. **Ordlik, V.** Kirjutamise algõpetusest. Kooliuuenduslane, 1937, 1, 4–8.
91. **Ordlik, V.** Miks eelistan matemaatika töövihke? Kooliuuenduslane, 1938, 5, 70–76.
92. **Ordlik, V.** Murru mõiste kujundamisest. Kooliuuenduslane, 1937, 2, 21–23.
93. **Ordlik, V.** Mõnda matemaatika töövihikutest ja arvutuskaartidest. Kooliuuenduslane, 1935, 1, 7–8.
94. **Ortlich, V.** Mõningaid märkmeid J. Käisi – A. Budkovsky matemaatika töövihikute kohta. Kooliuuenduslane, 1934, 3, 14–15.
95. **Pahiot, P.** Tõhusa töö head tulemused. Nõukogude Õpetaja, 1949, 4. juuni.
96. **Peerna, A.** Ruutjuurimine täpsusega 0,1. Kooliuuenduslane, 1936, 4, 50–51.
97. **Pillikse, E.** Algebra küpsuseksamile. Nõukogude Õpetaja, 1947, 20. juuni.
98. **P.K.** Arvustus: Rägo, G. Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Kasvatus, 1928, 10, 307–308.
99. **Ploom, V.** Arvutusülesannete lahendamine jooniste abil. Kooliuuenduslane, 1938, 3, 56–57.
100. **Polubarmova-Rotšina, P.J.** Sada aastat Sofia Kovalevskaja sünnist. Nõukogude Õpetaja, 1950, 13. jaan.
101. **Pomogiba, V.I.** Kuidas võidelda teiseks aastaks jäämisega. Nõukogude Kool, 1947, 12, 734–745.
102. **Prinits, O.** Alternatiivsed matemaatika kooliraamatud Eesti Vabariigi koolis. Haridus, 1992, 5, 42–45.
103. **Prüller, K.** Ainulubatud matemaatikaõpikud. Õpetajate Leht, 1938, 49.

104. Prümmel, J. Matemaatika õpetamise uuendusvoolud. Kasvatus, 1920, 4, 111–113; 5, 135–141; 6, 170–174.

105. Pāss, V. Logaritmide tabelite üle. Kasvatus, 1920, 22, 598.

106. Raidma, E. Korrutustabelis esinevate korrutusjuhtude reastamine raskuse järjekorras. Kooliuuenduslane, 1939, 8, 156–157.

107. Rajaleid, J. Tihe teadmiste kontroll tagab hea õppeedukuse. Nõukogude Õpetaja, 1950, 22. dets.

108. Ratassepp, E. Kuidas õpetada I ja II klassi õpilasi ülesandeid lahendama. Nõukogude Kool, 1947, 6, 367–377.

109. Ratassepp, E. Näitlikke õppevahendeid aritmeetikas. Nõukogude Õpetaja, 1946, 13. sept.

110. Raud, M. Kas raamat või töövihik matemaatika õpetamisel. Õpetajate Leht, 1940, 8.

111. Rea, B. Matemaatikatund seoses toidu- ja tööstuskaupade hindade uue alandamisega. Nõukogude Õpetaja, 1950, 10. märts.

112. Rea, B. Ühe ülesande lahendamisest. Nõukogude Õpetaja, 1950, 31. märts.

113. Rebassoo, H. Kümnendsüsteemi ajalooline areng. Eesti Kool, 1939, 6, 397–412.

114. Reino, V. Eestikeelne matemaatika-alane kirjandus 1920–1941. Annoteeritud bibliograafia. Diplomitöö. Tartu, 1963.

115. Rida, K. Kuidas alustasin kooliuuendustööga. Kooliuuenduslane, 1940, 3, 44–46.

116. Ritso, E. Jooni õpetajate ettevalmistamisest vanas Tartu Ülikoolis. Kasvatus, 1931, 4, 155–157.

117. Ritso, E. Neli põhitehet algebraliste arvudega. Kasvatus, 1930, 4, 164–167.

118. Ritso, E. Soove matemaatika õpetamise suhtes algkoolides. Kasvatus, 1929, 9, 413–415.

119. Rohkem matemaatikatunde algkoolidesse: Kuidas arvutab meie algkooli õpilane. Õpetajate Leht, 1931, 9; 11.

120. Roosalu, E. Peastarvutamise tehnikast. Nõukogude Õpetaja, 1949, 12. aug.

121. Rootsman, D. Vastuseletus arvustusele. Kasvatus, 1921, 3, 44–46.

122. R.R. Mida eelistada: kas harilikke matemaatika õpperaamatuid või uusi matemaatika töövihke. Kooliuuenduslane, 1934, 7, 47–48.

123. Rägo, G. Keskkooli- ja gümnaasiumiõpetajate ettevalmistamisest. Varamu, 1939, 6, 638–643.

124. Rägo, G. Mis on matemaatika ja milles on tema väärtus. Esiloeng ametisse astumise puhul 2. oktoobril 1920. Tartu, 1921.

125. **Rünk, O.** Arvutustehnilisi küsimusi. Nõukogude Kool, 1941, juuni, 424–433.
126. **Rünk, O.** Keelelisi ja terminoloogilisi küsimusi koolimatemaatikas. Eesti Kool, 1940, 5, 317–323.
127. **Rünk, O.** Komistusi matemaatika tunnis. Nõukogude Kool, 1940, nov., 220–224.
128. **Salum, M.** Sõjaasjandus matemaatika tundides. Nõukogude Kool, 1945, 5, 211–218.
129. **Salum, M.** Võrrandite käsitlus VI–VII klassis. Nõukogude Kool, 1946, 11, 678–684.
130. **Sarv, J.** Blaise Pascal. Loodus, 1922, 7, 438.
131. **Sarv, J.** Einsteini teooria. Loodus, 1922, 2, 66–73.
132. **Sarv, J.** Geomeetria ehk ruumiteadus. Loodus, 1924, 3, 140–144.
133. **Sarv, J.** Valguse raskusest. Loodus, 1923, 6, 360–367.
134. **Siim, K.** Esimesed päevad koolis. Nõukogude Kool, 1946, 8, 487–501.
135. **Siim, K.** Õppevahendite valmistamine. Nõukogude Kool, 1947, 6, 377–382.
136. **Siim, K.** Töö arvudega 1-st kuni 10-ni. Nõukogude Õpetaja, 1948, 24. sept.
137. **Siret, P.** Matemaatika õpetajate kokkutulekult. Nõukogude Õpetaja, 1949, 16. dets.
138. **Siret, P.** Märkmeid algebraeksamilt. Nõukogude Õpetaja, 1948, 16. juuni.
139. **Summer, H.** Matemaatika õpetus ja tegelik elu. Kasvatus, 1926, 6, 177–178.
140. **Sütt, J.** Geomeetria praktiliste tööde korraldamine. Eesti Kool, 1937, 4, 213–219.
141. **Taba, R.** Arvustus: Kasvand, A., Lang, J. Väike matemaatik I, II, III, IV. Õpetajate Leht, 1935, 39.
142. **Taba, R.** Paar pisinäidet vähendatud mõõdu mõiste süvendamiseks algkooli IV klassis. Kooliuuenduslane, 1939, 6, 120–123.
143. **Tosko, J.** Arvustus: Koppel, J. Metoodiline matemaatika õpperaamat. I anne – algaste. Kasvatus, 1922, 24, 294–295.
144. **Tiki, A.** Formalismist matemaatikas. Nõukogude Õpetaja, 1948, 23. apr.
145. **Tiki, A.** Tüüpilisi vigu seitsmendate klasside eksami töös. Nõukogude Õpetaja, 1948, 22. mai.
146. **Tork, J.** Kooliõpetaja kalender-käsiraamat õppeaastaks 1918–1919. Tartu, 1918.
147. **Tunin, O.** Matemaatika seoses tööõpetuse ja joonistamisega. Kooliuuenduslane, 1938, 1, 5–7.

148. **Tšutšina, F.** Kuidas õpetada ruutvõrrandite lahendamist 7. klassis. Nõukogude Õpetaja, 1949, 1. apr.
149. **Tšutšina, F.** Vanemate klasside matemaatika ringi töökogemusi. Nõukogude Õpetaja, 1949, 19. märts.
150. **Udikas, J.** Esimesi samme matemaatikas. Kooliuuenduslane, 1938, 3, 52–56.
151. **Udras, A.** Rakendusülesannete lahendusskeeme. Kooliuuenduslane, 1935, 6, 66–67.
152. **U.J.** Mõtteid ja märkusi "Algkooli matemaatika õppekava projekt" puhul. Kasvatus, 1926, 3, 81–84.
153. **Valgemäe, P.** Algkooli lõpetanute vigu matemaatikaeksamil keskkooli astumisel. Eesti Kool, 1940, 4, 250–257.
154. **Vana, H.** Matemaatika õpetamisest liitklassis. Nõukogude Õpetaja, 1949, 9. dets.
155. Vastuseks hr. Chr. Brülleri kirjutisele "Algkooli matemaatika õppekavad". Kasvatus, 1927, 3, 119–122.
156. Vastuseks hr. J.U. kirjutisele "Algkooli matemaatika õppekava projekti puhul". Kasvatus, 1927, 3, 118–119.
157. **Verendel, J.** Arvustus: Veski, K.R. ja Grünthal, J. Aritmeetika I, II, III õppeaasta. Kasvatus, 1922, 15, 251–252.
158. **Voore, A., Rööm, A.** Neljanda viisaastaku seaduse rakendamisvõimalusi kooli õppe- ja kasvatustöös, eriti matemaatika tundides. Nõukogude Kool, 1946, 11, 673–678.
159. **Vihman, A.** Algebra küpsustöödest. Nõukogude Õpetaja, 1947, 12. juuli.
160. **Vihman, A.** Arvutamise tulemuste kontrollimine arvu 11 abil. Nõukogude Õpetaja, 1950, 6. jaan.
161. **Vihman, A.** Geomeetria küpsustööd luubi all. Nõukogude Õpetaja, 1947, 25. juuli.
162. **Vihman, A.** Kordamine matemaatika tunnis. Nõukogude Õpetaja, 1950, 31. märts.
163. **Vihman, A.** Nimeliste arvudega arvutuste üleskirjutamisest. Nõukogude Õpetaja, 1948, 3. sept.
164. **Vihman, A.** 7. klassi lõpetajate oskuste tasemest matemaatikas. Nõukogude Õpetaja, 1946, 18. okt.
165. **Vihman, A.** Tehete tulemuste kontrollimine arvu üheksa abil. Nõukogude Õpetaja, 1949, 7. okt.
166. Vigade märkimisest matemaatika kirjalikes töödes. Nõukogude Õpetaja, 1948, 30. jaan.
167. **Vilberg, G.** Prof. J. Sarv – matemaatika doktor. Loodusvaatleja, 1931, 6, 201.

168. Väisälä, K. Arvustus: Rägo, G. Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned. Kasvatus, 1921, 22, 354–356.
169. W. Arvustus: Rootsman, D. Algebraline analüüs ülesandeis I, II. Kasvatus, 1920, 19–20, 527.
170. Ükskordüks – matemaatika põhialus. Nõukogude Õpetaja, 1945, 12. X.
171. Üleskutse noortele täppisteadlastele. Nõukogude Õpetaja, 1950, 14. apr.
172. Ülevaade matemaatika õpetamisest ENSV keskkoolide kaheksandates klassides 1946/47. õppeaastal. Nõukogude Kool, 1948, 6, 356–363.
173. X. Arvustus: Nano, V. Trigonomeetria õpperaamat keskkoolidele. Kasvatus, 1922, 12, 188–190.

Õpikud ja ülesannetekogud

1. Analüütiline geomeetria. Prof. J. Sarve loengute põhjal kokkuseatud matemaatika üliõpilastele. Tartu, 1923.
2. **Behrsing, A., Ussisoo, T.** Laste geomeetria. Tallinn, 1920.
3. **Berezanskaja, E.** Aritmeetika ülesannete kogu V ja VI klassile. Tartu, 1949.
4. **Bilov, A.** Aritmeetiliste ülesannete kogu keskkoolidele. Esimene jagu. Neljas trükk. Tallinn, 1920.
5. **Bilov, A.** Aritmeetiliste ülesannete kogu keskkoolidele. Teine jagu. Neljas trükk. Tallinn, 1920.
6. **Bilov, A.** Aritmeetiliste ülesannete kogu keskkoolidele. Kolmas jagu. Kolmas trükk. Tallinn, 1920.
7. **Blaubrück, H.** N. Šapošnikovi ja N. Valtsevi algebraliste ülesannete kogu II jao VII, VIII ja X (IX) osade ülesannete täielikud lahendused. Tartu, 1924.
8. **Borkvell, A.** Analüütiline geomeetria. Õpik ENSV kõrgematele õppeasutustele. Tartu, 1949.
9. **Borkvell, A.** Analüütiline geomeetria. Õpperaamat keskkoolidele. Tartu, 1930.
10. **Borkvell, A.** Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Tartu, 1941.
11. **Borkvell, A.** Logaritmiline liineal. Tartu, 1929.
12. **Borkvell, A.** Matemaatilise analüüsi põhimõisted ja rakendused. Õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele. Tartu, 1927.
13. **Borkvell, A.** Matemaatika, füüsika ja kosmograafia tabelid ja valemid keskkoolidele. Tartu, 1927.
14. **Borkvell, A.** Sfääriline trigonomeetria. Tartu, 1940.
15. **Borkvell, A.** Stereomeetria. Õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele. Tartu, 1927.

16. **Borkvell, A.** Tasapinnalise ja ruumilise analüütilise geomeetria põhijooni. Tartu, 1937.
17. **Borkvell, A.** Trigonomeetria. Õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele. Tartu, 1929.
18. **Borkvell, A., Kasvand, A., Laarens, F., Maasik, K., Paas, O., Vihman, A.** Keskkooli aritmeetika I–II. Õpperaamat I ja II klassile. Tartu, 1936.
19. **Borkvell, A.** jt. Keskkooli aritmeetika II. Õpperaamat II klassile. Tartu, 1936.
20. **Borkvell, A.** jt. Keskkooli algebra I. Õpperaamat II ja III klassile. Tartu, 1936; II tr. 1937.
21. **Borkvell, A.** jt. Keskkooli algebra II. Õpperaamat IV ja V klassile. Tartu, 1936; 2. tr. 1937.
22. **Borkvell, A.** jt. Keskkooli geomeetria I. Õpperaamat III klassile. Tartu, 1936; 2. tr. 1937; 3. tr. 1940.
23. **Borkvell, A.** jt. Keskkooli geomeetria II. Õpperaamat IV klassile. Tartu, 1936.
24. **Borkvell, A.** jt. Keskkooli geomeetria III. Õpperaamat V klassile. Tartu, 1936; 2. tr. 1940.
25. **Bradis, V.** Neljakohalised matemaatilised tabelid keskkoolidele. Tartu, 1949.
26. **Bronštein, S.** Algebra ja selle õpetamine seitsmeklassilises koolis. Abiraamat õpetajale. Tartu, 1949.
27. **Brüller, Chr.** Väike arvaja. III ja IV õppeaasta. I osa. Tallinn, 1924.
28. **Brüller, Chr., Oengo-Johanson, A.** Väike arvaja. III ja IV õppeaasta. II osa. Tallinn, 1925.
29. **Brüller, Chr., Oengo-Johanson, A.** Väike arvaja. V õppeaasta. Tartu, 1927.
30. **Greenberg, K.** Matemaatika. Teel töökoolile. Võru, 1928, 33–46.
30a. **Greenberg, K.** Matemaatika metoodika. Teel töökoolile. Võru, 1929, 33–110.
31. **Ederberg, P.** Täis- ja murdavaldused ja esimese astme võrrandid. Algebra ülesannete kogu ja kokkuvõtlik käsiraamat VII ja VIII õppeaasta jaoks. Tallinn, 1922.
31a. **Ederberg, P.** Juured ja ruutvõrrandid. Algebra ülesannete kogu VIII ja IX õppeaasta jaoks. Tallinn, 1922.
32. **Ederberg, P.** Algebra ülesannete kogu ja kokkuvõtlik käsiraamat III. Keskkooli IV ja V klassi jaoks. Tallinn, 1924.
33. **Etverk, E.** Geomeetria. Keskkooli IX klassile. Tartu, 1945, 2. tr. 1946.
34. **Etverk, E.** Geomeetria. Keskkooli VIII klassile. Tartu, 1945, 2. tr. 1946, 3. tr. 1948.

35. **Etverk, E.** Geomeetria õpik gümnaasiumi I klassile. Tartu, 1942.
36. **Etverk, E.** Geomeetria õpik gümnaasiumi II klassile. Tartu, 1942.
37. **Etverk, E.** Geomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile. Tartu, 1943.
38. **Etverk, E.** Geomeetria. Õpperaamat III klassile. Tallinn, 1936.
39. **Etverk, E.** Geomeetria. Õpperaamat IV klassile. Tallinn, 1936.
40. **Etverk, E.** Geomeetria õpperaamat V klassile. Tallinn, 1937.
41. **Etverk, E.** Stereomeetria. Keskkooli XI klassile. Tartu, 1945, 2. tr. 1946.
42. **Etverk, E., Rägo, G.** Matemaatika õpik humanitaargümnaasiumile. Tartu 1939.
43. **Etverk, E., Rägo, G.** Matemaatika õpik humanitaargümnaasiumile. III klassi kursus. Tartu–Tallinn, 1939.
44. **Etverk, E., Tiikmaa, B.** Geomeetria. Keskkooli IX klassile. Tartu, 1947, 2. tr. 1948.
45. **Grüntal, J.** Matemaatika eelkursus I. Algkooli aritmeetika kursuse kokkuvõtt. (Käsikiri.) Tallinn, 1934.
46. **Grüntal, J., Rägo, G.** Matemaatika õpik humanitaargümnaasiumile. Tartu, 1939.
47. **Hansen, J.** Neljakohaga logaritmide tabelid ja mõned teised väljaarvamisi lühendavad tabelid. Tallinn, 1921.
48. **H.I.K.** Ülesannete täielised selgitused ja lahendused G. Rägo "Matemaatika tööraamatu" algebra I klassi kursusele. Tartu, 1934.
49. **Humal, A.** Finantsmatemaatika. Tartu, 1940.
50. **Humal, A.** Matemaatilise statistika elemendid. Tartu, 1938.
51. **Jaakson, J.** Põllumajanduslik aritmeetika ülesandeis. Tallinn, 1932.
52. **Jaakson, J.** Põllumajanduslik aritmeetika ülesandeis. Ülesannete lahendused. Tallinn, 1932.
53. **Jaanson, H.** Algebra ülesanded ja lahendused. I. Rakvere, 1938.
54. **Jaanson, H.** Algebra ülesanded ja lahendused II. Rakvere, 1938.
55. **Jakk, J.** Üldine ametirehkenduse õpik. Tallinn, 1940.
56. **Jakk, J., Ratassepp, K.** Matemaatika metallistidele. Tartu, 1947.
57. **Jostoff, J., Koido, A.** Arvutusõpetus arvutusraamil. Käsiraamat õppeasutustele ja iseõppijaile. 1935.
58. **Järvela, E.** Ülesanded kaubandusaritmeetikas. Tartu, 1938.
59. **Jürman, H.** Algebra II. (Konspekt). Mimeograafitrükk. Tartu, 1920.
60. **Kallak, J.** Aritmeetika I klassile. Tartu, 1947.
61. **Kallak, J.** Aritmeetika II klassile. Tartu, 1947.
62. **Kasvand, A.** Matemaatika täiendusvihk III klassile. Tartu, 1945, 2. tr. 1946.
63. **Kasvand, A., Lang, J.** Juhatusi õpetajaile "Väike matemaatik" I, II, III ja IV käsitlemiseks. Tartu, 1935.

64. Kasvand, A., Lang, J. Juhatusi õpetajaile "Väike matemaatik" V ja VI käsitlemiseks. Tartu, 1934.
65. Kasvand, A., Lang, J. Lahendid V õppeaasta tööraamatule "Väike matemaatik" V. Tartu, 1934.
66. Kasvand, A., Lang, J. Lahendid VI õppeaasta tööraamatule "Väike matemaatik" VI. Tartu, 1934.
67. Kasvand, A., Lang, J. Väike matemaatik. Tööraamat algkooli I klassile. Tartu, 1935.
68. Kasvand, A., Lang, J. Väike matemaatik. Tööraamat algkooli II klassile. Tartu, 1935. 2. tr. 1936.
69. Kasvand, A., Lang, J. Väike matemaatik. Tööraamat algkooli III klassile. Tartu, 1935. 4. tr. 1941.
70. Kasvand, A., Lang, J. Väike matemaatik. Tööraamat algkooli IV klassile. Tartu, 1935. 2. tr. 1936.
71. Kasvand, A., Lang, J. Väike matemaatik. Tööraamat algkooli V klassile. Tartu, 1934.
72. Kasvand, A., Lang, J. Väike matemaatik. Tööraamat algkooli VI klassile. Tartu, 1934. 2. tr. 1935.
73. Kasvand, A., Kallak, J., Lang, J. Matemaatika täiendusvihik III klassile. Tallinn, 1941.
74. Kasvand, A., Lang, J., Paas, O. Matemaatika õpik. 5. õppeaasta. Tartu, 1939.
75. Kasvand, A., Lang, J., Paas, O. Matemaatika õpik. 6. õppeaasta. Tartu, 1938.
76. Kilkson, E. Stereomeetria (konspekt) I osa. Tartu, 1920.
77. Kisseljov, A.P. Aritmeetika õpik. V ja VI klassile. Tartu, 1949.
78. Kisseljov, A.P. Algebra õpik keskkoolile. VI–VIII klassile. Tartu, 1949.
79. Kisseljov, A.P. Algebra õpik keskkoolile. VIII–IX klassile. Tartu, 1949.
80. Kisseljov, A.P. Geomeetria. Planimeetria. VIII ja IX klassile. Tartu, 1949.
81. Kisseljov, A.P. Geomeetria. Stereomeetria. IX ja X klassile. Tartu, 1949.
82. Kivimäe, A. Mõõtrihmaga veise eluskaalu määramise viiside täpsusest ja sobivusest. Tartu, 1939.
83. Koik, T. Elementaarne algebra. Õpperaamat koolidele ja iseõppijaile I. Viljandi, 1920.
84. Koik, T. Matemaatika õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele. I. Keskkooli II klassi kursus. Viljandi, 1935.
85. Koik, T. Matemaatika õpperaamat kesk- ja kutsekoolidele. II. Algebra ja geomeetria III kl. kursus. Viljandi, 1936.
86. Kool, O. Analüütilise geomeetria põhijooni ja ülesandeid. Gümnaasiumi humanitaarharu kursus. Tartu, 1928.

87. **Kool, O.** Stereomeetria ülesanded täielikkude lahendustega. I. Tartu, 1932.
88. **Kool, O.** Trigonomeetrilisi planimeetria ülesandeid. Tartu, 1928.
89. **Kool, O.** Trigonomeetrilisi stereomeetria ülesandeid. Tartu, 1929.
90. **Koppel, J.** Metoodiline matemaatika õpperaamat. I anne – algaste. Tartu, 1920.
91. **Koppel, J.** Ülesannetekogu metoodilise matemaatika õpperaamatu juure (1. ja 2. vihik). Tartu, 1921.
92. **Koppel, J.** Ülesannete kogu metoodilise matemaatika õpperaamatu juure. Tartu, 1923.
93. **Krahn, E.** Stereomeetria ühes kujutava geomeetriaga. Tallinn, 1922.
94. **Kudder, A.** Kasvatamise abitabel arvelauale 10000x10000. Rakvere, 1920.
95. **Kuldvere, G.** Meie kodupaik allikana arvuteaduse õpetamiseks. Tartu, 1924.
96. **Kuulberg, J.** Algkooli matemaatika metoodika II. (Geomeetria.) Tartu, 1929.
97. **Kuulberg, J.** Kuidas "Ükskordüks" Ilmarile vaevata meelde jäi. Metoodiline veste. Tartu, 1924.
98. **Kuulberg, J., Kuulberg, E., Martinson, E.** Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. I õppeaasta. Tartu, 1924. Teine, parandatud trükk. 1931. 3. tr. 1932, 4. tr. 1933, 5. tr. 1935, 6. tr. 1936, 7. tr. 1937, 8. tr. 1938.
99. **Kuulberg, J., Kuulberg, E., Martinson, E.** Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. II õppeaasta. Tartu, 1925. Teine, parandatud trükk. 1931. 3. tr. 1933, 4. tr. 1935, 5. tr. 1936. 6. tr. 1937, 7. tr. 1938.
100. **Kuulberg, J., Kuulberg, E., Martinson, E.** Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. III õppeaasta. Tartu, 1928; 2. tr. 1935; 3. tr. 1937, 4. tr. 1938, 5. tr. 1940 (Kallak, J., Kallak, E., Araste, E.).
101. **Kuulberg, J., Kuulberg, E., Martinson, E.** Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. IV õppeaasta. Tartu, 1929. Teine, ümbertöötatud trükk. 1932. 3. tr. 1935.
102. **Kuulberg, J., Kuulberg, E., Martinson, E.** Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. V õppeaasta. Tartu, 1930, 2. tr. 1934, 3. tr. 1935.
103. **Kuulberg, J., Kuulberg, E., Martinson, E.** Elavad arvud. VI õppeaasta. Tartu, 1931.
104. **Kuulberg, J., Nuut, J.** Matemaatika kursus keskkoolidele I. 5. õppeaasta. Tartu, 1934. 2. tr. 1935.
105. **Kuulberg, J., Nuut, J.** Matemaatika kursus keskkoolidele II. 6. õppeaasta. Tartu, 1935.

106. Kõiv, A. Aritmeetilised ülesanded keskkoolidele. I, II ja III kooliaasta. Tartu, 1920. 2. tr. 1920.

107. Käis, J. Matemaatika algõpetusest. Tartu, 1940.

108. Käis, J. Uusi teid algõpetuses. Metoodiline käsiraamat liitklassidele. Esimene jagu: õppetöö üldine korraldus liitklassides. Töökavad. Tallinn, 1931.

109. Käis, J. Uusi teid algõpetuses. Metoodiline käsiraamat. Teine jagu. I osa. 1.–2. õppeaasta töö üldõpetusena individuaalse tööviisi rakendusega. Tallinn, 1932.

110. Käis, J. Uusi teid algõpetuses. Metoodiline käsiraamat. Teine jagu. II osa. 1.–2. õppeaasta töö üldõpetusena individuaalse tööviisi rakendusega. Tallinn, 1932.

111. Käis, J. Uusi teid algõpetuses. Metoodiline käsiraamat. Kolmas jagu. 3.–4. õppeaasta töö keskustuse põhimõttel individuaalse tööviisi rakendusega. I osa. Tallinn, 1933.

112. Käis, J. Uusi teid algõpetuses. Metoodiline käsiraamat. Kolmas jagu. 3.–4. õppeaasta töö keskustuse põhimõttel individuaalse tööviisi rakendusega. II osa. Tallinn, 1933.

113. Käis, J. Uusi teid algõpetuses. Metoodiline käsiraamat. Neljas jagu. 5.–6. õppeaasta töö keskustuse põhimõttel individuaalse tööviisi rakendusega. 1. osa. Tallinn, 1934.

114. Käis, J. Uusi teid algõpetuses. Metoodiline käsiraamat. Neljas jagu. 5.–6. õppeaasta töö keskustuse põhimõttel individuaalse tööviisi rakendusega. 2. osa E. Limberg. Matemaatika. Tallinn, 1934.

115. Lang, J. Algebra IV (konspekt). Tartu, 1920.

116. Lang, J. Planimeetria (konspekt). II osa. Tartu, 1920.

117. Lehis, A. Matemaatika õpik IV klassile. 1. ja 2. vihik. Tartu, 1946. 2. tr: 1. vihik 1947, 2. vihik 1948.

118. Lindenberg, E. Geomeetria ja trigonomeetria valemite kogu. Tallinn, 1926.

119. Maasik, K. Algebra III: kvadraat ja kõrgema astme ekvatsioonid. Tartu, 1920.

120. Maasik, K. Algebra õpik gümnaasiumi III klassile. Tartu, 1920.

120a Madisson, P. Stereomeetria. Tallinn, 1942.

121. Madisson, P., Ussisoo, Th. Planimeetria. Tallinn, 1921.

122. Marfeldt (Maramaa), A. Aritmeetika ülesannetekogu. I õppeaasta. Viljandi, 1921. B. Õpilase raamat, 2. tr. 1924; 3. tr. 1926, 5. tr. 1929, 6. tr. 1930, 7. tr. 1931, 8. tr. 1933, 9. tr. 1936.

123. Marfeldt (Maramaa), A. Aritmeetika ülesannetekogu. II õppeaasta. Viljandi, 1921. 2. tr. 1923, 3. tr. 1924, 4. tr. 1926, 5. tr. 1928, 6. tr. 1930, 7. tr. 1931, 8. tr. 1932, 9. tr. 1935.

124. Maramaa, A. Aritmeetika ülesannete kogu. III õppeaasta. Teine trükk. Viljandi, 1922. 3. tr. 1924, 4. tr. 1926, 6. tr. 1929, 7. tr. 1930, 8. tr. 1931, 9. tr. 1932.
125. Marfeldt (Maramaa), A. Aritmeetika ülesannete kogu. IV õppeaasta. Viljandi, 1922. 2. tr. 1923, 3. tr. 1924, 4. tr. 1926, 5. tr. 1927, 6. tr. 1929, 7. tr. 1930, 8. tr. 1931, 9. tr. 1934.
126. Maramaa, A. Aritmeetika ülesannete kogu. V õppeaasta. Viljandi, 1923. 5. tr. 1927, 6. tr. 1930, 7. tr. 1935.
127. Maramaa, A. Aritmeetika ülesannete kogu. V ja VI õppeaasta. Viljandi, 1925. 2. tr. 1926, 3. tr. 1928, 6. tr. 1934.
128. Maramaa, A. Algkooli matemaatika õppetöö kavad. A. Maramaa matemaatika õpperaamatute juure. Viljandi, 1928.
129. Maramaa, A. Aritmeetika ülesannetekogu. I õppeaasta. A. Käsiraamat õpetajale. 2., ümbertööt. trükk. Viljandi, 1924.
130. Maramaa, A. Geomeetria ülesannetekogu. II õppeaasta. Viljandi, 1924. Ilmus ka raamatu "Aritmeetika ülesannetekogu. II õppeaasta" lisana.
131. Maramaa, A. Geomeetria. Algkooli III õppeaasta. Viljandi, 1924. Ilmus ka raamatu "Aritmeetika ülesannete kogu. III õppeaasta" lisana.
132. Maramaa, A. Geomeetria. Algkooli IV õppeaasta. Viljandi, 1924. Ilmus ka raamatu "Aritmeetika ülesannete kogu. IV õppeaasta" lisana.
133. Maramaa, A. ja J. Geomeetria. V ja VI õppeaasta. Viljandi, 1927.
134. Maramaa, J. Geomeetria algkooli kõrgematele klassidele. Tartu, 1922. 2. tr. 1923.
135. Matemaatilise statistika elemendid. Konspekt. Koostatud vastavalt Tartu Ülikooli prof. A. Humal'i eksamikavale ja selle ulatuses. Tartu, 1938.
136. Matemaatika sõnastik. Kolmas, ümbertöötatud ja laiendatud trükk. Tartu, 1922.
137. Meos, M. Arvud elust. Käsiraamat õpetajaile matemaatika õpetamiseks ilma ülesannetekoguta. I õppeaasta. 1937.
138. Mikkelsaar, F.V. Algkooli matemaatika. I õppeaasta. Tallinn, 1924.
139. Mikkelsaar, F.V. Algkooli matemaatika. I õppeaasta. Lühendatud väljaanne õpilastele. Tallinn, 1925.
140. Mikkelsaar, F.V. Algkooli matemaatika. II õppeaasta. Tartu, 1926. 2. tr. 1929.
141. Mikkelsaar, F.V. Algkooli matemaatika. III õppeaasta. Tartu, 1926. 2. tr. 1929.
142. Mikkelsaar, F.V. Algkooli matemaatika. IV õppeaasta. Tartu, 1927. 2. tr. 1929.
143. Mikkelsaar, F.V. Algkooli matemaatika. V õppeaasta. Tartu, 1928. 2. tr. 1929.

144. Mikkelsaar, F.V. Algkooli matemaatika. 6. õppeaasta. Tartu, 1919. 2. tr. 1930 (toimet. G. Rägo).
145. Mikkelsaar, F.V. Geomeetria algkoolidele. III osa. 2., parandatud trükk. Tartu, 1924.
146. Mikkelsaar, F.V. Geomeetria algkoolidele. 2. osa. 2. trükk. Tartu, 1922. 3. tr. 1923.
147. Mikkelsaar, F.V. Geomeetria algkoolidele. 1. osa. 2. trükk. Tartu, 1921. 3. tr. 1922.
148. Mikkelsaar, F.V. Geomeetria rahvakoolidele. 3. õppeaasta. Tartu, 1920.
149. Mikkelsaar, F.V. Geomeetria alg- ja täienduskoolidele. Kordamis- ja täienduskursus. VI, VII ja VIII õppeaastale. 4. osa. Tartu, 1923.
150. Mikkelsaar, F.V. Geomeetria metoodika. Tallinn, 1921.
151. Mootse, G. Praktiline perspektiivi õpetus. I vihik. Tallinn, 1921.
152. Mootse, G. Praktiline perspektiivi õpetus. II vihik. Viljandi, 1921.
153. Moss, E. Kaubandusaritmeetika harjutistega. I. Tallinn, 1930. 2. tr. 1937.
154. Moss, E. Kaubandusaritmeetika harjutistega. II. Tartu, 1931. 2. tr. 1938.
155. Mutt, A. Matemaatika tööstuskeskkoolile. Tallinn, 1940.
156. Mülberg, J. Neljakohalised logaritmide tabelid. Tartu, 1925. 2. tr. 1927.
157. Nano, V. Stereomeetria II osa. Õpetus geomeetrilistest kehadest. Tartu, 1920.
158. Nano, V. Tasapinnaline trigonomeetria ja sfäärilise trigonomeetria alged. Teine trükk. Tallinn, 1923.
159. Nano, V. Trigonomeetria õpperaamat keskkoolidele. Tallinn, 1920.
160. Nathing, A., Perli, O. Ruumi algõpetus. II anne. Tallinn, 1920.
161. Nikitin, N.N., Poljak, G.B., Volodina, L.N. Aritmeetika ülesannete ja harjutuste kogu. I klassile. Tartu, 1949.
162. Nikitin, N.N., Poljak, G.B., Volodina, L.N. Aritmeetika ülesannete ja harjutuste kogu. II klassile. Tartu, 1949.
163. Nikitin, N.N., Poljak, G.B., Volodina, L.N. Aritmeetika ülesannete ja harjutuste kogu. III klassile. Tartu, 1949.
164. Nikitin, N.N., Poljak, G.B., Volodina, L.N. Aritmeetika ülesannete ja harjutuste kogu. IV klassile. Tartu, 1949.
165. Nuut, J. Geomeetria keskkoolidele I. (Esimese klassi kursus). Tartu, 1932.
166. Nuut, J, Geomeetria keskkoolidele II. (Teise klassi kursus). Tartu, 1932.
167. Nuut, J. Geomeetria keskkoolidele. III. Stereomeetria ja trigonomeetria (III, IV ja V klassi kursus). Tartu, 1923.
168. Nuut, J. Millest kõneleb Einsteini relatiivsuse õpetus. Tartu, 1930.
169. Nõges, V. Meetermõõdud. Tartu, 1928.
170. Oengo-Johanson, Brüller, Chr. Väike arvutaja. I õppeaasta. Tartu, 1933.

171. Okas, M. Arvlemisõpetus. Esimene osa. Tallinn, 1922.
172. Perandi, A. Uutel teedel. Tööraamat algkoolidele. I õppeaasta. Tartu, 1935.
173. Perandi, A. Uutel teedel. Matemaatika tööraamat algkoolidele. II õppeaasta. Tartu, 1936.
174. Perandi, A. Uutel teedel. Matemaatika tööraamat algkoolidele. III õppeaasta. Tartu, 1935.
175. Perelmann, J.I. Elav matemaatika. Tartu, 1948.
176. Perli, A. Arvud elust. 1. ja 2. õppeaasta. Tallinn, 1921.
177. Perli, A. Arvud elust. Vihik I–II. 3. ja 4. õppeaasta. Tallinn, 1920.
178. Perli, A. Arvud elust. III vihik. 5. õppeaasta. Tallinn, 1921.
179. Perli, O. Aritmeetika õpperaamat. Kolmas trükk. Tallinn, 1921.
180. Perli, O. Aritmeetiliste ülesannete kogu 6-nda õppeaasta jaoks. Tallinn, 1920.
181. Perli, O. Ruumi algõpetus. I anne. Teine, ümbertöötatud trükk. Tallinn, 1923, 3. tr. 1930.
182. Polügonomeetria ja logaritmide tabelid. Tallinn, 1930.
183. Privalov, I.I. Analüütiline geomeetria. Tartu, 1946.
184. Ptšolko, A. Algkooli aritmeetika õpetamise metoodika. Tartu, 1948.
185. Puura, N. Kaubandusaritmeetika. Tallinn, 1929.
186. Pärli, O. Ruumi algõpetus ülesandeis. II anne. Tallinn, 1926. III tr. 1930.
187. Pärli, O. Ruumi algõpetus. III anne. Stereomeetria. Tartu, 1927.
188. Pärli, O. Algebra ülesannete kogu. Keskkooli I klassile. Tartu, 1931.
189. Pärli, O. Algebra ülesannete kogu II. Keskkooli II klassile. Tartu, 1933.
190. Päss, V. Algebra ülesannete kogu I. Tallinn, 1920.
191. Päss, V. Algebra ülesannete kogu. II. Teooria ja ülesanded. (X ja XI õppeaasta jaoks). Tallinn, 1923.
192. Päss, V. Neljakohalised logaritmide tabelid. Tallinn, 1921. 2., parand. tr. 1922, 4. tr. 1925, 5. tr. 1927, 8. tr. 1932, 9. tr. 1935.
193. Rapka, P. Meetermõõdustik. Puudade kilogrammideks ümberarvutamise tabel. Suure-Jaani, 1923.
194. Ratassepp, K. Algebra ja trigonomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile. Tartu, 1942, 2. tr. 1943.
195. Ratassepp, K. Algebra. Keskkooli IX klassile. Tartu, 1945.
196. Ratassepp, K. Algebra. Keskkooli X klassile. Tartu, 1947.
197. Ratassepp, K. Matemaatilised tabelid. Tallinn, 1936. 2. tr. 1937, 2. parand. tr. 1940.
198. Ratassepp, K. Trigonomeetria. Keskkooli X klassile. Tartu, 1947.
199. Ratassepp, K. Trigonomeetria õpik gümnaasiumi III klassile. Tartu, 1942, 2. tr. 1943.

200. Ratassepp, K., Rägo, G. Matemaatika harjutustik gümnaasiumile. I klassi kursus. Tartu–Tallinn, 1938.
201. Ratassepp, K., Rägo, G. Matemaatika harjutustik humanitaargümnaasiumile. II klassi kursus. Tallinn–Tartu, 1938.
202. Ratassepp, K., Rägo, G. Matemaatika harjutustik humanitaargümnaasiumile. III klassi kursus. Tallinn–Tartu, 1939.
203. Rea, B. Aritmeetika III klassile. 1. ja 2. vihk. Tartu, 1946, 2. tr. 1. vihk 1947, 2. vihk 1948.
204. Rootsman, D. Algebraline analüüs ülesandeis koolidele ja iseõppijaile I. Tallinn, 1920.
205. Rootsman, D. Algebraline analüüs ülesandeis koolidele ja iseõppijaile II. Tallinn, 1920.
206. Ruumet, L. Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu V klassile. Tartu, 1944.
207. Ruumet, L. Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu III ja IV klassile. Tartu, 1944.
208. Rägo, G. Analüütiline geomeetria ja algebra. Keskkooli XI klassile. Tartu, 1946. 2. tr. 1948.
209. Rägo, G. Kõrgem matemaatika. Tartu, 1948.
210. Rägo, G. Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Algebra I klassi kursus. Tartu, 1928. 2. tr. 1930.
211. Rägo, G. Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Algebra II klassi kursus. Tartu, 1928.
212. Rägo, G. Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Algebra 3. klassi kursus. Tartu, 1929.
213. Rägo, G. Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Analüüsi alged. 4. klassi kursus. Tartu, 1930.
214. Rägo, G. Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Analüüsi alged. Statistika alged. 5. klassi kursus. Tartu, 1932.
215. Rägo, G. Matemaatika tööraamat keskkoolidele. Algebra. 2. osa. Tartu, 1934.
216. Rägo, G. Matemaatika tööraamat uuele keskkoolile. Algebra ülesannetekogu. I osa. Tartu, 1936.
217. Rägo, G. Matemaatika tööraamat uuele keskkoolile. Algebra ülesannetekogu. II osa. Tartu, 1936.
218. Rägo, G. Matemaatika tööraamat uuele keskkoolile. Algebra ülesannetekogu. Tartu, 1936.
219. Rägo, G. Matemaatilise analüüsi elemendid. Õpperaamat ja ülesanded. Tartu, 1922.
220. Rägo, G. Matemaatika õpik gümnaasiumi V klassile. Tartu, 1942.
221. Rägo, G. Matemaatika õpik keskkooli XI klassile. Tartu, 1945.

222. Rägo, G. Mis on matemaatika ja milles on tema väärtus. Esiloeng ametisse astumise puhul 2. okt. 1920. Tartu, 1921.
223. Rägo, G. Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned. Tartu, 1921.
224. Rägo, G., Vihman, A. Algebra harjutustik keskkoolile. Tartu–Tallinn, 1938.
225. Róbkin, N.A. Geomeetria ülesannete kogu keskkoolile. Planimeetria. VI–IX klassile. Tartu, 1949.
226. Róbkin, N.A. Geomeetria ülesannete kogu keskkoolile. Stereomeetria. X ja XI klassile. Tartu, 1949.
227. Róbkin, N.A. Tasapinnaline trigonomeetria. Keskkooli IX ja X klassile. Tallinn, 1941.
228. Róbkin, N.A. Tasapinnaline trigonomeetria keskkoolile. X klassile. Tartu, 1949.
229. Róbkin, N.A. Trigonomeetria ülesannete kogu ühes trigonomeetria rakendust nõudvate ülesannetega keskkoolile. X klassile. Tartu, 1949.
230. Rünk, O. Kaubandusaritmeetika. Autoriseeritud konspekt. Prof. A. Humala loengute järgi koostanud O. Rünk. Tartu, 1938.
231. Rünk, O., Roos, H. Matemaatika õpik ja harjutustik. 5. õppeaasta. Tartu, 1946. 2. tr. 1948.
232. Sapotski, L. Kujutava geomeetria ja konstruktiivse perspektiivi algõpetus. I anne. Tartu, 1929.
233. Sarv, J. Analüütilise geomeetria algkursus. Tartu, 1924.
234. Sarv, J. Nelja kohaga logaritmide tabelid ühes tarvitamise juhatusega. Tartu, 1921.
235. Shaposhnikov, N., Valtsev, N. Algebraliste ülesannete kogu. I jagu. Ümber töötanud ja täiendanud K.R. Veski ja J. Grünthal. Tartu, 1921. 2. tr. 1923, 3. tr. 1926.
236. Shaposhnikov, N., Valtsev, N. Algebraliste ülesannete kogu. II jagu. Tõlkinud ja täiendanud K.R. Veski ja J. Grünthal. Tartu, 1921.
237. Šapošnikov, N.A., Valtsev, N.K. Algebra ülesannete kogu keskkoolile. VI–VIII klassile. Tartu, 1949.
238. Šapošnikov, N.A., Valtsev, N.K. Algebra ülesannete kogu. Keskkooli VIII–X klassile. Tartu, 1949.
239. Tamm, A. Mõõtude käsiraamat. Tallinn, 1928.
240. Tarassov, N. Kõrgema matemaatika kursus tehnikumidele. Tartu, 1948.
241. Tehnika käsiraamat. Matemaatika, mehaanika ja ainete tehnoloogia (I anne): Matemaatika. Toimetaja *cand. math.* J. Kiivet. Tallinn, 1921.
242. Tender, E. Müntide ja mõõtude areng Eestis. Tartu, 1937.
243. Tooms, A. Arvjoonised. Tartu, 1931.

42*

244. Treffner, K., Kuulbergid, J. ja E., Perli, O., Martinson, E. Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. I õppeaasta. Tartu, 1924.
245. Treffner, K., Kuulbergid, J. ja E., Perli, O., Martinson, E. Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. II õppeaasta. Tartu, 1925.
246. Treffner, K., Kuulbergid, J. ja E., Perli, O., Martinson, E. Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. III õppeaasta. Tartu, 1928.
247. Treffner, K., Kuulbergid, J. ja E., Perli, O., Martinson, E. Elavad arvud. Matemaatika õpperaamat algkoolidele. IV õppeaasta. Tartu, 1929.
248. Treffner, K., Kuulbergid, J. ja E., Perli, O., Martinson, E. Metoodilised näpunäited "Elavate arvude" tarvitajaile. Tartu, 1924.
249. Treufeldt, H. Mõõtude käsiraamat. Eestis tarvitusel olevad mõõdud meetrisüsteemis ja ümberpöördult. Tallinn, 1923.
250. Trigonomeetria (konspekt) ja trigonomeetriliste ülesannete kogu. Tartu, 1920.
251. Tulinov, B.A., Tšekmarjov, J.E. Aritmeetika Pedagoogilistele koolidele. Tartu, 1949.
252. Ussisoo, Th. Geomeetriline joonestamine. Teine trükk. Tallinn, 1921. 3. tr. 1931, 4. tr. 1938.
253. Ussisoo, Th. Geomeetriliste pind- ja ruumalade arvutamine. I jagu. Tallinn, 1929.
254. Ussisoo, Th. Projektsioon-joonestamine. Tallinn, 1920.
255. Vahtberg, K. Protsenditabelid. Viljandi, 1929.
256. Veiderman, H. Väike arvaja. I õpeaasta. Joonistega. Tallinn, 1920; Oengo-Johanson ja Chr. Brüller põhjalikult teiseks trükiks ümber töötanud. Tartu, 1925.
257. Veiderman, H., Brüller, Chr. Väike arvaja. II õppeaasta. Tallinn, 1922.
258. Veikmann, A. Tabelid protsentide väljaarvamiseks. Tabelle für die Ausrechnung von Zinsen. Tallinn, 1920.
259. Veski, K.R. Planimeetria. Keskkoolikursus. Tartu, 1923.
260. Veski, K.R., Grünthal, J. Aritmeetika. I õppeaasta. Tartu, 1921. 2. tr. 1922, 3. tr. 1923.
261. Veski, K.R., Grünthal, J. Aritmeetiliste ülesannete kogu. II õppeaasta. Tartu, 1921. 2. tr. 1922, 3. tr. 1923.
262. Veski, K.R., Grünthal, J. Aritmeetika. III õppeaasta. Tartu, 1921. 2. tr. 1922, 3. tr. 1923, 4. tr. koos geomeetriaga 1926.
263. Veski, K.R., Grünthal, J. Aritmeetika. IV õppeaasta. Tartu, 1921. 2. tr. 1922, 3. tr. 1923, 4. tr. 1925, 5. tr. koos planimeetriaga 1926.
264. Veski, K.R., Grünthal, J. Aritmeetika. V õppeaasta. Tartu, 1922. 5. tr. koos geomeetriaga 1926.
265. Veski, K.R., Grünthal, J. Aritmeetika ja geomeetria. V õppeaasta. Tartu, 1924.

266. Veski, K.R., Grünthal, J. Aritmeetika ühes algebra eelkursusega. VI õppeaasta. Tartu, 1922. 2. tr. 1923, 2. täiendatud tr. 1924, 3. tr. 1928.
267. Veski, K.R., Grünthal, J. Stereomeetria. Tartu, 1922. 2. tr. 1924.
268. Veski, K.R., Randsepp, J. Stereomeetria. Teine muudetud trükk. Tartu, 1924.
269. Vesk, K.R., Verendel, J. Stereomeetria ülesannete kogu. Keskkooli kursus. Tartu, 1923.
270. Vihman, A. Algebra õpik gümnaasiumi I klassile. Tartu, 1942. 2. tr. 1943.
271. Vihman, A. Algebra õpik gümnaasiumi II klassile. Tartu, 1942. 2. tr. 1943.
272. Vihman, A. Algebra õpik VIII klassile. Tartu, 1946, 2. tr. 1947.
273. Vihman, A. Algebra õpik IX klassile. Tartu, 1946, 2. tr. 1947, 3. tr. 1948.
274. Vihman, A. Matemaatika õpik VI klassile. Tartu, 1945, 2. tr. 1946, 3. tr. 1948.
275. Vihman, A. Matemaatika õpik VII klassile. Tartu, 1945, 2. tr. 1946.
276. Viiekohaliste logaritmide ja trigonomeetriliste funktsioonide tabelid. Tallinn, 1925.
277. Wildbrett, A. Analüütiline geomeetria ja diferentsiaalarvamise põhijooned. Eestistanud E. Krahn. Tallinn, 1922.
278. Võgodski, M. Geomeetria VI ja VII klassile. Tartu, 1949.

Töövihikud, testid, kontrolltööd

Johannes Käisi, Anette Budkovsky ja Ervin Limbergi koostatud töövihikud ja arvutuskaardid

1. Käis, J. Õpilase arvutusvihik. 1. õppeaasta. Tallinn.
Sügisest – jõuluni: 1. tr. 1932, 2. tr. 1935, 3. tr. 1935, 5. tr. 1940.
Jõulust – kevadpühadeni: 1. tr. 1932, 2. tr. 1935, 3. tr. 1936, 4. tr. 1939.
Kevadpühadest – õppeaasta lõpuni: 1. tr. 1933, 2. tr. 1935, 3. tr. 1936.
2. Käis, J. Õpilase arvutusvihik. 2. õppeaasta. Tallinn.
Sügisest – jõuluni: 1. tr. 1932, 3. tr. 1935, 4. tr. 1938.
Jõulust – kevadpühadeni: 1. tr. 1934, 2. tr. 1935, 3. tr. 1936, 4. tr. 1940.
Kevadpühadest – õppetöö lõpuni: 2. tr. 1935, 3. tr. 1938, 4. tr. 1940.
3. Budkovsky, A., Käis, J. , Õpilase matemaatika töövihik. 3. õppeaasta. Tallinn.
1. vihik: Sügisest – jõuluni: 1 tr. 1933, 2. tr. 1934, 3. tr. 1936, 4. tr. 1940.
2. vihik: Jõulust – kevadpühadeni: 1. tr. 1933, 2. tr. 1935, 3. tr. 1939.
3. vihik: Kevadpühadest – õppeaasta lõpuni: 1. tr. 1934, 2. tr. 1936.

4. **Budkovsky, A., Käis, J.** Õpilase matemaatika töövihik. 4. õppeaasta. Tallinn.
   1. vihik: Sügisest – jõuluni: 1. tr. 1933, 3. tr. 1938.
   2. vihik: Jõulust – kevadpühadeni: 1. tr. 1933, 3. tr. 1939.
   3. vihik: Kevadpühadest – õppeaasta lõpuni: 1. tr. 1934, 2. tr. 1937.
5. **Limberg, E.** Matemaatika-töövihik. 5. õppeaasta. Tallinn.
   1. vihik 1934, 2. vihik 1934, 3. vihik 1935.
6. **Limberg, E.** Matemaatika-töövihik. 6. õppeaasta. Tallinn.
   1. vihik 1934, 2. tr. 1936; 2. vihik 1934; 3. vihik 1935.
7. **Käis, J.** Arvutuskaardid individuaalseks tööks. 1. õppeaasta. Tallinn, 1935.
8. **Käis, J.** Arvutuskaardid individuaalseks tööks. 2. õppeaasta. Tallinn, 1935.
9. **Limberg, E., Käis, J.** Arvutuskaardid individuaalseks tööks. 3. õppeaasta. Tallinn, 1935.
10. **Limberg, E., Käis, J.** Arvutuskaardid individuaalseks tööks. 4. õppeaasta. Tallinn, 1935.
11. **Limberg, E.** Tööjuhatusi individuaalseks tööks. 6. õppeaasta. Tallinn, 1935.

Christian Brülleri, Heino Brülleri, Elmar Etvergi, Paul Partsi, Erich Pavelsoni ja Johannes Unti koostatud töövihikud

12. **Brüller, C., Brüller, H., Pavelson, E., Parts, P., Unt, J., Etverk, E.** Matemaatika vihik nr. 1–8. Algkooli I klassile. Tallinn, 1935/36.
13. **Brüller, C., Brüller, H., Pavelson, E., Parts, P., Unt, J., Etverk, E.** Matemaatika vihik nr. 1–10. Algkooli II klassile. Tallinn, 1935/36.
14. **Brüller, H., Pavelson, E., Parts, P., Unt, J., Etverk, E., Brüller, C.** Matemaatika vihik nr. 1–10. Algkooli III klassile. Tallinn, 1935/36.
15. **Parts, P., Unt, J., Etverk, E., Brüller, C., Brüller, H., Pavelson, E.** Matemaatika vihik nr. 1–10. Algkooli IV klassile. Tallinn, 1935–1936.
16. **Unt, J., Etverk, E., Brüller, C., Brüller, H., Pavelson, E., Parts, P.** Matemaatika vihik nr. 1–12. Algkooli V klassile. Tallinn, 1935–1936.
17. **Etverk, E., Brüller, C., Brüller, H., Pavelson, E., Parts, P., Unt, J.** Matemaatika vihik nr. 1–12. Algkooli VI klassile. Tallinn, 1935–1936.

Autoreid nimetamata välja antud töövihikud

18. Matemaatika vihk. I–X. I õppeaasta. Tartu: K/ü "Loodus", 1935/36.
19. Matemaatika vihk I–X. II õppeaasta. Tartu: K/ü "Loodus", 1935/36.
20. Matemaatika vihk I–X. III õppeaasta. Tartu: K/ü "Loodus", 1935/36.
21. Matemaatika vihk I–X. IV õppeaasta. Tartu: K/ü "Loodus", 1935/36.

22. Matemaatika vihk I–X. V õppeaasta. Tartu: K/ü "Loodus", 1935/36.
23. Matemaatika vihk I–X. VI õppeaasta. Tartu: K/ü "Loodus", 1935/36.

Töövihikud

24. Etverk, E. jt. Matemaatika keskkoolis. I klassi harjutusvihik nr. 1–5. Tallinn, 1935.
25. Etverk, E. jt. Matemaatika keskkoolis. II klassi harjutusvihik nr. 1–5. Tallinn, 1935.
26. Etverk, E. jt. Matemaatika keskkoolis. III klassi harjutusvihik nr. 1–5. Tallinn, 1935/36.
27. Etverk, E. jt. Matemaatika keskkoolis. IV klassi harjutusvihik nr. 1–5. Tallinn, 1935/36.
28. Etverk, E. jt. Matemaatika keskkoolis. V klassi harjutusvihik nr. 1–5. Tallinn, 1936/37.
29. Rågo, G. Matemaatika harjutusvihik algkoolidele. VI klassi kursus. Tartu, 1935.
30. Rågo, G. Matemaatika harjutusvihik keskkoolidele. Algebra. III klassi kursus. Tartu, 1935.
31. Grüntal, J. Matemaatika test. 2. trükk. Tallinn, 1936.
32. Kuulberg, J., Tork, J. Matemaatika teste. II–VI õppeaasta. Sari A ja B. Tartu, 1935.

Kontrolltööde kogumikke

33. Borkvell, A. jt. Kontrolltöid keskkoolile I (aritmeetika). 1.–8. Tartu, 1936.
34. Borkvell, A. jt. Kontrolltöid keskkoolile II (aritmeetika ja algebra) nr. 1–8. Tartu, 1937.
35. Borkvell, A. jt. Kontrolltöid keskkoolile III (algebra) nr. 1–8. Tartu, 1937.
36. Borkvell, A. jt. Kontrolltöid keskkoolile IV (algebra) nr. 1–8. Tartu, 1937.
37. Kasvand, A., Lang, J. Kontrolltöid. III kl. A–B nr. 1–8. Tartu, 1935.
38. Kasvand, A., Lang, J. Kontrolltöid. IV kl. A–B nr. 1–8. Tartu, 1935.
39. Kasvand, A., Lang, J. Kontrolltöid. V kl. A–B nr. 1–8. Tartu, 1935.
40. Kasvand, A., Lang, J. Kontrolltöid matemaatikas. 4. õppeaasta. Nr. 1–8. Tartu, 1938.
41. Kasvand, A., Lang, J. Kontrolltöid matemaatikas. 5. õppeaasta. Nr. 1–8. Tartu, 1938.

42. Kasvand, A., Lang, J. Kontrolltöid matemaatikas. 6. õppeaasta. Nr. 1–8. Tartu, 1938.
43. Eksamiülesanded I. Esitatud matemaatika alal algkooli 4. klassi lõpetanuile vastuvõtukatseil keskkooli I klassi. Tallinn, 1936.
44. Eksamiülesanded II. Esitatud matemaatika alal algkooli 6. klassi lõpetanuile vastuvõtukatseil keskkooli III klassi. Tallinn, 1936.

ISIKUNIMEDE REGISTER

44

SISUKORD

AASTATEL 1918–1950 KASUTUSEL OLNUD MATEMAATIKA KOOLIRAAMATUD