TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
MATEMAATILISE STATISTIKA INSTITUUT

Kertu Fedotov

# PENSIONIKINDLUSTUSE MUDELID EESTI ANDMETEL

Magistriprojekt

Juhendajad: prof. Tõnu Kollo ja prof. Mart Sõrg

Tartu 2003

# SISUKORD

# SISSEJUHATUS

Maailma riikide elanikkonna vananemine jätkub, meditsiini arengu tõttu on see haaranud ka arenguriike. Rahvastiku vanuselist koostist mõjutab ka majanduslik areng, kõrge elatustaseme korral väheneb laste sünd. Elanikkonna vananedes kasvavad pensioni- ja arstiabikulud, mis avaldab survet riigieelarvele.

Riik maksab pensioni sotsiaalmaksust. Rahvastiku vananemise tõttu väheneb töölkäijate arv ja kasvab pensionivajajate arv. Riik ei saa seetõttu piisavalt raha pensionide maksmiseks ja pensionäride sissetulekud on väikesed. See on probleem nii riigile kui ka tema elanikele.

1. augustil 1998. aastal jõustus Eestis pensionifondide seadus, mis lõi aluse kolmesambalisele pensionisüsteemile. Süsteem, kus esimene sammas on riiklik solidaarsuspension, teine sammas kohustuslik kogumine ja kolmas sammas vabatahtlik pensionikindlustus, peaks andma nii riiki kui rahvast rahuldava tulemuse.

Pensionisüsteemi olulisemaid komponente on pensionikindlustus oma teenusevalikuga. Nii pensionikindlustusteenuste arendamine ja edukas müük kui ka inimeste huvi ja ostuotsused tuginevad valdkonna tundmisele ja otsustajate käsutuses olevale teabele. Esmast ja ennekõike praktilise kallakuga infot on võimalik hankida ajakirjandusest, reklaamist ja müügivõrgustikust. Valdkonna põhjalik läbiuurimine eeldab ühelt poolt suure hulga teoreetilise käsitluse läbitöötamist, teiselt poolt aga olemasoleva rahvusvahelise ja omamaise kogemuse võrdlevat analüüsi.

Käesoleva magistriprojekti eesmärgiks on kirjeldada kindlustusseltsi poolt makstava pensioni kujunemise põhimõtteid ning hinnata, kui suurt pensioni saab kindlustusselts annuiteedi ostjale maksta, arvestades algkapitali suurust ja suremustõenäosusi, mis on leitud Eesti andmetega kõige paremini sobivate suremust kirjeldavate mudelite abil.

Magistriprojekt koosneb seitsmest peatükist.

Esimeses peatükis tutvustatakse Eesti kolmesambalise pensionisüsteemi ülesehitust ja pensionikindlustuse olemust ning tuuakse välja pensionikindlustuses kasutatavad olulisemad mõisted.

Teises peatükis antakse ülevaade intressidest ja annuiteetidest.

Kolmas, neljas ja viies peatükk on pühendatud suremuse käsitlemisele, sest pensionikindlustus baseerub suremuse prognoosimisel. Kolmandas peatükis räägitaksegi suremusnäitajatest üldiselt, neljandas peatükis tutvustatakse erinevaid suremusseadusi ja viiendas peatükis uuritakse suremust kõrges vanuses.

Kuuendas peatükis käsitletakse elukindlustuses kasutatavaid valemeid ja seoseid.

Seitsmendas peatükis näidatakse, kuidas kasutada esimeses kuues peatükis vaadeldud põhimõtteid ja valemeid, et leida pensioni suurust, võttes arvesse algkapitali ja kindlustatu tulevast eluiga.

Käesoleva projekti tulemusi saavad kasutada nii kindlustusseltsid (nt kindlustusmatemaatikaga otseselt mitte kokkupuutuval personalil avaneb võimalus enda teadmisi täiendada ning seeläbi klientidele adekvaatsemat informatsiooni jagada) kui ka inimesed, kes on huvitatud kindlustusseltsilt annuiteedi ostmisest.

# 1 PENSIONIKINDLUSTUSE OLEMUS

Ühiskond on jõudnud selleni, et riiklikku pensioni ja pensionäri seostatakse tihti vaesusega. Kas vanaemade ja vanaisade pensionipõlve mured korduvad ka laste ja lastelaste pensionipõlves? Probleemi lahendamiseks (leevendamiseks) on riik loonud tulevastele pensionäridele lisavõimalusi täiendava pensioni kogumiseks (kasutades pensionikindlustust või pensionifonde).

Magistriprojekti esimese peatüki eesmärgiks on tutvustada neid lisavõimalusi ehk anda ülevaade Eestis toimivast kolmesambalisest pensionisüsteemist ning esitada pensionikindlustuse kui süsteemi ühe olulise komponendi olemus.

## 1.1. Eesti kolmesambalise pensionisüsteemi ülesehitus

1. augustil 1998 jõustus Eestis pensionifondide seadus, mis lõi aluse kolmesambalise pensionisüsteemi kolmandale sambale. Kui 1. jaanuaril 1999 jõustunud pensionireformi esimene sammas ja 2002. aastal käivitunud teine sammas on kõigile kohustuslikud (teine sammas muutub kõigile kohustuslikuks alates aastast 2025), siis kolmas sammas annab võimaluse koguda riiklikule pensionile vabatahtlikult lisa.

***Esimene sammas*** *on kohustuslik riiklik pensionikindlustus, mille tuluallikaks on sotsiaalmaks ning mille eesmärk on tagada kõigile pensionäridele pensioni baastase.*

I samba ehk riikliku pensionikindlustuse sotsiaalpoliitiliseks ülesandeks vanadusea kindlustamisel on tagada kaitse elatusvahenditeta jäämise vastu vanaduspensioni kaudu.

I samba pensionivalemi järgi [5] arvutatakse pension $\mathbb{P}_{\mathrm{I}}$ järgmiselt:

$\mathbb{P}_{\mathrm{I}} = B + S + K,$

kus $B$ – baasosa, $S$ – staažiosak, $K$ – kindlustusosak.

Pensionide baasosa suuruse, staažiaasta hinne ning pensionikindlustuse aastakoefitsent kehtestatakse igal aastal.

Staažiosak kehtib 1. jaanuarini 1999 töötatud aastate kohta, kindlustusosak alates 1. jaanuarist 1999 kuni pensionile minekuni.

Isiku varasema töötasuga seob pensioni kindlustusosak, mille arvutamise aluseks on **pensionikindlustuse aastakoefitsiendid**, mis näitavad isiku poolt/eest makstud sotsiaalmaksu suhet keskmisesse tasutud sotsiaalmaksu antud aastal [9].

Staažiosak ei olene palgast, kuid kindlustusosak oleneb [9].

Mida rohkem ületab sissetulek keskmist palka, seda suuremaks kujuneb esimese samba pension. Seega on riiklik pension (alates 1999) muutunud läbipaistvamaks. Inimesi kutsutakse oma tulusid seaduse järgi deklareerima (mis tagab efektiivsema maksude laekumise), viidates tulevase pensioni seotusele varasematest sissetulekutega.

Pension $\mathbb{P}_{\mathrm{I}}$ koosneb kahest komponendist, nende jaoks:

a) kes alustasid teenistuskäiku 1999. aastal või hiljem

$\mathbb{P}_{\mathrm{I}} = B + K$;

b) kes läksid pensionile enne 1999. aastat

$\mathbb{P}_{\mathrm{I}} = B + S$.

***Teine sammas** on kogumispension, mille eesmärk on luua pensionieaks lisasääste. Tuluallikas jaguneb siin kaheks – osa tuleb töötaja palgast ja osa sotsiaalmaksust, mis tööandja töövõtja pealt maksab* [3].

Erinevalt riiklikust pensionikindlustusest põhineb kogumispension eelfinantseerimisel – praegused töötajad koguvad ise raha oma pensionipõlveks. Kogumispensioniga ühinemine on kohustuslik 1983. aastal ja hiljem sündinud töötajatele. Enne 1983. aastat sündinud töötajatel on võimalik valida, kas liituda kogumispensioniga või mitte. Kes on kord kogumispensioniga ühinenud, sellel saab pensioni kogumine kohustuslikuks.

Kogumispensioniga liitudes tuleb esmalt valida enda jaoks sobiv pensionifond.

***Pensionifond*** *on lepinguline investeerimisfond (st ühisteks investeeringuteks moodustatud vara kogum, mida valitseb, riski hajutamise põhimõttest lähtudes, aktsiaselts (fondivalitseja), kelle ainsaks tegevuseks on fondide valitsemine, sh fondi osakute väljalaske korraldamine, fondi vara investeerimine, fondi vara üle arvestuse pidamine), mille põhieesmärk on kogumispensioni võimaldamine pensionifondi osaku omanikule.*

Pensionifonde on kahte liiki:

1) kohustuslikud pensionifondid, kuhu tehakse sissemakseid ja kust tehakse väljamakseid seoses kohustusliku kogumispensioni maksemisega;

2) vabatahtlikud pensionifondid, kuhu tehakse sissemakseid ja kust tehakse väljamakseid seoses täiendava kogumispensioni maksmisega.

Teise samba pensionifond on kohustuslik pensionifond ning sinna tehakse ainult teise samba sissemakseid ning raha saab kasutada ainult teise samba pensioniks, kas otse fondist või pensionikindlustuse kaudu.

Kogumispensioni väljamaksetele tekib osakuomanikul õigus (vt näiteks [3]), kui ta on:

- jõudnud vanaduspensionikka,
- saanud riiklikku pensioni ning

- esimese sissemakse tegemisest kohustuslikku pensionifondi on möödunud vähemalt viis aastat.

Seejärel tuleb üldjuhul sõlmida kindlustusseltsiga leping, mille alusel hakatakse tegema perioodilisi väljamakseid (elu lõpuni).

***Kolmas sammas*** *on kogumisprintsiibile rajatud lisapension, mille tuluallikaks on vabatahtlikud sissemaksed ja mille eesmärk on võimaldada lisasäästmist.* See on pigem teisi sambaid toetav abisammas.

Pensionisüsteemi kolmandaks sambaks on vabatahtlikel sissemaksetel põhinevad kogumispensionid, mille eesmärk on tagada vanaduspõlve lisasissetulek. Kolmandas sambas osalemist ergutab riik maksusoodustustega. Maksusoodustusi kehtestades laiendab riik õieti nende isikute ringi, kellel kolmandas sambas osalemine on lisasäästmise kaudu võimalik.

## 1.2. Pensionikindlustuse põhimõtted ja olulised mõisted

Kindlustusseltside olemasolu algaastatel oli peamine kindlustusvaldkond tulekindlustus. Tulekindlustuse kõrval hakati pakkuma ka elukindlustust [2, lk 5].

Kindlustuse ülesanne on riski üle kanda. Risk tähendab paljudele olukorra ebakindlust. Eksisteerib võimalus, et toimub mingi sündmus, mille tulemus on ebasoodne. Kõik riskid ei teostu võrdse tõenäosusega. Kindlustamine ei muuda soovimatu sündmuse toimumise riski olematuks. Kindlustus pakub kaitset (raha või mõnel juhul ekvivalentse hüvitise kujul) inimese või ettevõtte omandile, võimaldades taastada omandi kahjueelse seisundi. Kandes kindlustusvõtja riski endale üle, pakub kindlustusandja kindlustusvõtjale meelerahu [2, lk 5].

Kindlustussummade väljamaksmise järgi jaguneb elukindlustus kaheks:

- **kapitalikindlustus** tagab kindlustussumma väljamaksmise ettenähtud ajal;
- **annuiteetkindlustus** tagab kindla suurusega sissetuleku kindlal ajavahemikul.

Pensionikindlustus on annuiteetkindlustus.

Vabatahtlikuks pensionikogumiseks on kaks võimalust:

1) sõlmida kindlustusseltsiga pensionikindlustusleping;

2) osta (vabatahtliku) pensionifondi osakuid.

Alljärgnevalt esitame pensionikindlustuses kasutatavad mõisted, järgides allikat [3].

***Pensionikindlustuse alus*** *on isiku ja pensionifondi (kindlustusseltsi) vahel sõlmitud leping.*

***Pensionikindlustusleping*** *on kindlustusandja ja kindlustusvõtja vahel sõlmitud leping, mille alusel:*

1) *kindlustusvõtja kohustub tasuma kindlustusandjale kindlustusmakseid;*
2) *kindlustusandja kohustub maksma kindlustusvõtjale kindlustuspensioni või muid kokku lepitud summasid.*

***Kindlustuspoliis*** *on kindlustusandja poolt välja antud dokument, mis tõendab lepingu sõlmimist.*

***Kindlustusandja*** *on juriidiline isik, kellel on õigus kindlustustegevuseks.*

***Kindlustusvõtja*** *on füüsiline või juriidiline isik, kes sõlmib kindlustusandjaga lepingu ning tasub kindlustusmakseid. Tulumaksusoodustusega pensionikindlustuslepingu korral võib kindlustusvõtjaks olla ainult füüsiline isik.*

***Kindlustatu*** *on füüsiline isik, kelle huvides sõlmitakse leping. Kindlustatu võib olla kindlustusvõtja ise või muu isik, kelle kindlustusvõtja nimetab.*

***Soodustatud isik*** *on kindlustatu või muu(d) lepingus nimetatud isik(ud), kellele kindlustusandja kohustub kindlustusjuhtumi saabumise korral välja maksma kindlustussumma või –hüvitise. Surmajuhtumi korral on soodustatud isik kindlustatu poolt määratud füüsiline või juriidiline isik. Kindlustustähtaja lõppemisel on tavaliselt soodustatud isikuks kindlustatu ise.*

Kindlustusjuhtum on lepinguga määratud sündmus või seisund, mille saabumise korral tekib soodustatud isikul õigus nõuda kindlustusandjalt kindlustussumma või –hüvitise väljamaksmist ning kindlustusandjal tekib kohustus kindlustussumma või –hüvitis välja maksta.

*Pensionikindlustuse* ***kindlustusjuhtumiks*** *on:*

- *surm*
- *kindlustuspensioni väljamaksmise algus.*

***Kindlustuspension*** *on:*

- *rahasumma, mille kindlustusandja maksab välja kokku lepitud ajal ühekordse maksena või maksete jadana;*
- *kogumisperioodi jooksul kogutud kapital koos riskisummaga (või ilma selleta), mille kindlustusandja maksab välja kokku lepitud ajal ühekordse maksena või maksete jadana. Riskisumma on rahasumma, mille kindlustusandja maksab välja kindlustatud isiku surma korral. (Enamiku pensionikindlustuste puhul ei ole riskisummat määratud).*

Esimesel juhul on intressimäär fikseeritud ja kindlustusselts saab juba lepingu sõlmimise hetkel ütelda, kui suur summa pensioni väljamaksmise hetkeks koguneb (kui kindlustusmakseid tehakse kindla graafiku alusel). Kui intressimäär ei ole fikseeritud või makseid tehakse vaba graafiku alusel, siis ei saa kindlustussummat kokku leppida, vaid see kujuneb vastavalt tehtavatele maksetele ja kindlustusseltsi tegevusele. Sel juhul selgub kogutud kapitali suurus makseperioodi lõpuks. Olenemata sellest, kas kindlustussumma suurust on võimalik määrata või mitte, saab kokku leppida riskisumma suuruse (miinimumväärtus on 0). Riskisumma makstakse välja pärijatele, kui kindlustatu sureb. Kokku lepitud summa makstakse välja ka juhul, kui kindlustatu sureb näiteks teisel aastal pärast lepingu sõlmimist ning kogutud summa on alles väike.

***Kindlustushüvitis** on kindlustussumma või muu lepingus kokku lepitud summa, mille kindlustusandja maksab välja kindlustusjuhtumi saabumise korral.*

Hüvitiste arvutamiseks on kaks erinevat moodust:

- kindlaksmääratud hüvitised – sellisel puhul lepitakse kokku makstava hüvitise suurus ning pensionifondi tasutakse kokkulepitud hüvitisele vastav summa;

- kindlaksmääratud sissemaksed – lepitakse kokku fondi sissemakse suurus ning kui hüvitise maksmise aeg kätte jõuab, sõltub selle suurus akumuleerunud rahasummast.

***Kindlustusmakse** on rahasumma, mille kindlustusvõtja on lepingu tingimuste kohaselt kohustatud tasuma kindlustusandjale.*

Kui lepingus fikseeritakse tulevase kindlustuspensioni suurus, siis arvutatakse kindlustusmakse kindlustusandja poolt kinnitatud tariifide alusel lähtudes kindlustatu kohta käivatest kindlustuslepingus fikseeritud andmetest (sugu, vanus jne), lepingu sõlmimise hetkel kehtivast suremustabelist, kogumisperioodi ja garanteeritud väljamakseaja pikkusest, pensioni suurusest ning väljamakse viisist. Kindlustusmakse võib olla ka kindlustusvõtja ja kindlustusandja vahel kokku lepitud rahasumma, mida kindlustusvõtja on nõus (ja võimeline) kindlustusandjale tasuma, tulevane kindlustuspension kujuneb sel puhul vastavalt tasutud kindlustusmaksetele, kindlustusandja majandustegevusele ning pensioni väljamaksete alguse hetkel kehtivale suremustabelile.

Kindlustusmaksete tasumise kord nähakse ette kindlustuslepingus. Makseid võib tasuda nii kindla graafiku alusel kui ka ilma selleta.

***Garanteeritud periood*** *on ajavahemik, mille jooksul kindlustuspensioni makstakse välja olenemata sellest, kas kindlustatu on elus või mitte.*

Pensionikindlustus jaguneb klassikaliseks pensionikindlustuseks ja investeerimisriskiga pensionikindlustuseks.

***Klassikaline pensionikindlustus*** *ühendab endas kindlustuskaitse (surmajuhtumihüvitis, võimalik ka õnnetusjuhtumi lisakindlustus) ja raha kogumise (pikaks ajaks garanteeritud intressimäär, peale garanteeritud intressimäära võimalus osa saada kindlustusandja kasumist). Säästmise eesmärk on koguda pensionisissetulekut.*

Klassikalise pensionikindlustuse puhul makstakse kindlustussumma välja kindlustusperioodi lõppedes või kui kindlustatu sureb makseperioodi jooksul.

Kui inimene sõlmib kindlustuslepingu, on tal kaks põhieesmärki: säästa (kapitalipaigutus) ja kaitsta end riski vastu.

Klassikalise pensionikindlustuse korral määratakse lepingus ka kindlustussumma, mis lepingu lõppedes täies ulatuses välja makstakse. Kindlustussummast (ja kindlustusperioodi pikkusest) sõltub kindlustusmakse suurus. Kui kindlustatu sureb kogumisperioodi jooksul, on selts kohustatud kindlustussumma täies ulatuses välja maksma. Et kontrollida, ega kindlustatu ei põe mõnd haigust, mis võiks tema suremise tõenäosust suurendada, võib kindlustusselts saata kindlustatu enne lepingu sõlmimist arstlikku kontrolli.

Pensioniks võib raha koguda põhimõtteliselt iga liiki kogumiskindlustuse abil. Leppides kokku, et makseperioodi lõppedes maksab kindlustusandja kindlustusvõtjale pensioni eluaegse annuiteedina, tehes makseid vähemalt kord kvartalis, saab kindlustusvõtja tehtud sissemaksetelt tagasi tulumaksu kuni 15% ulatuses aastasissetulekust. Sellisel juhul on ka väljamaksed (pension) tulumaksuvabad.

Lepingu sõlmimise hetkel ei ole veel teada, kui suureks kujuneb tulevane pension. Maksegraafikul on näha vaid see, kui suur summa kogumisperioodi lõpuks koguneb (ilma lisakasumita). Pensioni suuruse arvestab kindlustusselts välja kogumisperioodi lõpus, enne pensionimaksete algust. Pensioni arvutamiseks kasutatakse sel hetkel kehtivaid suremustabelid.

***Investeeringuriskiga kindlustus*** *ühendab endas kindlustust ja investeerimist.*

Investeeringuriskiga kindlustus on oma olemuselt elu- või pensionikindlustus, mille puhul kindlustusvõtja paigutab ise oma raha investeerimisfondidesse. Kui palju ta seejuures oma elu kindlustab, on samuti tema enda valida. Kui kindlustusvõtja ei ole huvitatud oma elu kindlustamisest ja soovib ainult investeerida, võib ta valida minimaalse elukindlustuskaitse. Kui kindlustusvõtja (=kindlustatu) on huvitatud ka oma elu kindlustamisest, lepib ta kindlustusseltsiga kokku summa (riskisumma), mille kindlustusselts tema surma korral välja maksab. Elukindlustuslepingu ja pensionikindlustuslepingu ainus erinevus on see, et pensionikindlustuse puhul lubab kindlustusvõtja pensioni annuiteedina välja võtta ning saab selle eest vastutasuks juba varem kirjeldatud maksusoodustused.

Peale pensionikindlustusest tuttava maksusoodustuse on investeerimisriskiga kindlustusel veel teinegi maksusoodustus. Kui kindlustuslepingu kestus ületab kindlaks määratud miinimumi (nt viis aastat), siis väljamaksetelt tulumaksu ei arvestata (sissemaksetelt tulumaksu tagasi ei saa).

Sissemakstud rahast, millest on maha arvestatud kulud ja tasu kindlustuse eest (kui kindlustus on võetud), moodustub nn investeerimisosa. Investeerimisosa seotakse kokku lepitud investeerimisfondide osakutega, mille väärtus võib nii kasvada kui ka kahaneda.

# 2. INTRESS JA ANNUITEEDID

Et muuta kogutud raha elu lõpuni makstavaks pensioniks, tuleb see eluaegse annuiteedi vastu vahetada; loomulikult võib oma sääste ka ise oma äranägemise järgi kulutada, kuid siis võib juhtuda, et ühel hetkel on säästud otsa saanud.

Sellest tulenevalt on teise peatüki eesmärgiks tutvustada kindlustusseltsi poolt makstava pensioni arvutamisel kasutatavaid mõisteid intress ja annuiteet.

## *2.1 Intress*

Raha kogumisel ja pensioni kujunemisel on olulised kolm tegurit – aeg, algkapitali suurus ja intressimäär (või tulumäär). Intressimäära ja nüüdisväärtuse mõistete tutvustamisel kasutame allikat [6] (leheküljed 2 – 9).

***Intress** on tasu laenuks võetud raha kasutamise eest. Protsendina väljendatud intressi nimetatakse intressimääraks.*

Vaatleme investeeringut, mille algsumma on 1 ühik. Defineerime kasvufunktsiooni $a(t)$, mis kujundab algsummale 1 ajahetkeks $t$ ( $t \geq 0$ ) lõppväärtuse (tulevikuväärtuse).

Tavaliselt ei võrdu investeeritav algsumma ühega, vaid mingi summaga $k$, $k > 0$. Defineerime lõppsumma funktsiooni $A(t)$, mis annab alginvesteeringule $k$ lõppväärtuse ajal $t$ ($t \geq 0$). Saame järgmise seose:

$$A(t) = k \cdot a(t),$$

kus $A(0) = k$ ja $a(t)$ on kasvufunktsioon.

Tähistame $n$-nda aasta jooksul teenitud intressi sümboliga $I_n$, siis:

$I_n = A(n) - A(n-1)$, $n \geq 1$

## Reaalintress

Üks intressi liike on reaalintress, mida tähistatakse $i$.

***Reaalintress*** *$i$ on rahahulk, mida teenib perioodi alguses investeeritud üks ühik ühe perioodiga, kui intressi makstakse perioodi lõpus.*

Kasvufunktsiooni abil väljendatuna on ülaltoodud definitsioon ekvivalentne võrdusega:

$i = a(1) - a(0)$ või $a(1) = 1 + i$.

## Lihtintress

Praktikas kasutatakse kõige enam liht- ja liitintressi.

Eespool nägime, et $a(0) = 1$ ja $a(1) = 1 + i$.

Lihtintressi korral on kasvufunktsioon kujul:

$a(t) = 1 + i \cdot t, \; t \geq 0$.

## Liitintress

Lihtintressi iseloomustab see, et intressi ei reinvesteerita. Liitintressi puhul intress reinvesteeritakse, et teenida lisaintressi.

Leiame kasvufunktsiooni liitintressi jaoks. Vaatleme 1 ühiku suurust investeeringut, mis esimese aasta lõpuks kasvab summaks $1 + i$. Summat $1 + i$ võib vaadelda kui järgmise perioodi sissemakset. Teise aastaga teenib summa intressi $i \cdot (1+i)$ Teise aasta lõpuks koguneb seega

$$(1+i) + i \cdot (1+i) = (1+i)^2,$$

mida saame vaadelda kui kolmanda aasta investeeringu algsummat, mis teenib intressi $i \cdot (1+i)^2$ Kolmanda aasta lõpuks on järelikult

$$(1+i)^2 + i \cdot (1+i)^2 = (1+i)^3$$

Jätkates protsessi $t$ korda, saame tulemuseks

$$a(t) = (1+i)^t, \quad t \geq 0$$

On selge, et liht- ja liitintress annavad üheaastase perioodi korral sama tulemuse. Pikema perioodi jooksul kasvatab liitintress lõppsumma suuremaks kui lihtintress sama alginvesteeringu korral, aastast väiksema perioodi korral kehtib aga vastupidine.

**Nüüdisväärtus**

Intressimäära mõistega tutvudes puutusime kokku sellega, kuidas leida alginvesteeringu väärtust investeeringuperioodi lõpuks. Meid huvitab aga ka vastupidine situatsioon – püüame määrata alginvesteeringut, mis tagaks tulevikuks soovitud lõppsumma. Teisisõnu, soovime määrata tulevikus saadava(te) makse(te) praegust väärtust.

Oleme näinud, et 1 ühiku suurune alginvesteering kasvab aasta lõpuks summaks 1 + $i$. Kui me soovime, et meil oleks aasta möödudes 1 ühik, peab alginvesteeringu suurus olema $(1 + i)^{-1}$ Summat 1 + $i$ nimetatakse ***kasvuteguriks***. Toome sisse uue tähistuse

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Suurust v nimetatakse ***diskontoteguriks***, sest see diskonteerib aasta lõpuks kogunenud lõppsumma alginvesteeringuks.

Investeeringuperiood ei pruugi aga olla täpselt ühe aasta pikkune. Kui suur summa tuleks investeerida, et $t$ aasta möödudes oleks meil 1 ühik? Vastus on, et alginvesteering peaks olema kasvufunktsiooni pöördväärtus $a^{-1}(t)$, sest $t$ aasta möödudes on $a^{-1}(t)$ väärtus $a^{-1}(t) \cdot a(t) = 1$. Funktsiooni $a^{-1}(t)$ nimetatakse ***diskontofunktsiooniks***.

Liht- ja liitintressi jaoks saame järgmised diskontofunktsiooni avaldised:

lihtintress $a^{-1}(t) = \frac{1}{1+it}$, $t \geq 0$;

liitintress $a^{-1}(t) = \frac{1}{(1+i)^t} = v^t$, $t \geq 0$

## 2.2. *Annuiteedid*

Pensioniks võib raha koguda investeerides suure summa (nt 150 000 krooni) ühe korraga (ning jättes seejärel intressi teenima) või investeerides kindla ajavahemiku (nt kuu, kvartali või aasta) tagant mingi rahasumma (nt 1 000 krooni). Välja makstakse pension üldjuhul maksete jadana.

***Annuiteet** on fikseeritud perioodi jooksul, fikseeritud ajavahemike tagant toimuvate maksete jada. Maksed võivad olla konstantse suurusega või üksteisest erineda* [1, lk 10].

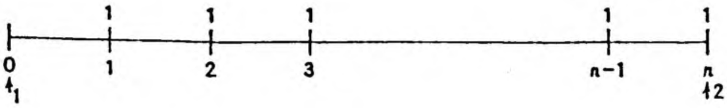
Annuiteeti võib defineerida ka kui maksete seeriat, kus maksed toimuvad võrdsete ajaintervallide tagant. Algul kasutati terminit "annuiteet" aastaste maksete korral, kuid tänaseks on mõiste laienenud ka teistele regulaarsetele ajavahemikele.

Majanduses on annuiteetmaksed väga levinud. Korteriüür, laenu- ja liisingumaksed ning intressimaksed investeeritud kapitali pealt on kõik näited annuiteetmakse kohta.

Käesolevas punktis tutvume eri liiki annuiteetidega (allikas [6], lk 45-75), mida hiljem kasutame välja makstava pensioni arvutamiseks.

**Annuiteet, kus maksed toimuvad perioodi lõpus (tavaannuiteet)**

Olgu meil annuiteet, kus makse suurus on üks ühik ja perioodi pikkus aasta. Maksed toimuvad iga aasta lõpus, kokku $n$ aastat (vt joonis 1).




Joonis 1. Perioodi lõpus makstav annuiteet

Nool 1 tähistab hetke $t$ = 0, mil esimese makseni on jäänud üks aasta. Annuiteedi nüüdisväärtust sellel ajahetkel tähistatakse: $a_{\overline{n}|}$ (tehnilistel põhjustel kasutame edaspidi klassikalise tähistuse asemel tähistust $a_{n]}$).

Nool 2 tähistab hetke $t$ = $n$, mil viimane makse on just toimunud. Annuiteedi tulevikuväärtust hetkel $t = n$ tähistatakse: $s_{\overline{n}|}$ (mille edaspidi tähistame $s_{n]}$).

Tuletame $a_{n]}$ avaldise. Esimese aasta lõpus toimuva ühe ühiku suuruse makse nüüdisväärtus olgu $v$, teise aasta lõpus toimuva makse nüüdisväärtus on sellisel juhul $v^2$ Jätkame protsessi, kuni oleme leidnud ka $n$-nda aasta lõpus toimuva makse nüüdisväärtuse: $v^n$ Kogu nüüdisväärtus $a_{n]}$ peab võrduma üksikute maksete nüüdisväärtuse summaga

$$a_{n]} = v + v^2 + \ldots + v^{n-1} + v^n \tag{2.2.1}$$

Ülaltoodud valemit saab kasutada $a_{n]}$ leidmiseks, kuid suure $n$ korral muutub see ebapraktiliseks.

Pannes tähele, et võrrandi (2.2.1) parem pool moodustab geomeetrilise jada, saame $a_{n]}$ jaoks tuletada kompaktsema avaldise

$$a_{n]} = v \ \frac{1-v^n}{1-v} = v \cdot \frac{1-v^n}{i \cdot v} = \frac{1-v^n}{i}.$$

Seega saime, et nüüdisväärtus avaldub kujul

$$a_{n]} = \frac{1-v^n}{i} \tag{2.2.2}$$

Analoogseid võtteid kasutades saame tuletada ka tulevikuväärtuse $s_{n]}$ jaoks avaldise

$$s_{n]} = 1 + (1+i) + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \tag{2.2.3}$$

Kompaktsema avaldise saame võrdusest (2.2.3) geomeetrilise jada summeerimise teel

$$s_{n]} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{2.2.4}$$

Suuruste $a_{n]}$ ja $s_{n]}$ väärtused on erinevate intressimäärade ja ajaperioodide $n$ korral tabuleeritud (nimetatud tabelid leiab näiteks allikast [6]).

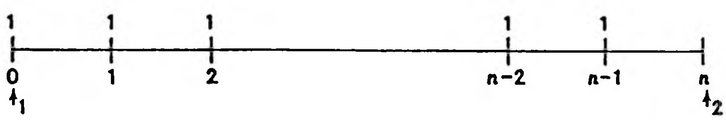
Nüüdisväärtuse $a_{n]}$ ja tulevikuväärtuse $s_{n]}$ vahel kehtib seos

$$s_{n]} = a_{n]} \cdot (1+i)^n \tag{2.2.5}$$

Seos (2.2.5) järeldub otseselt valemitest (2.2.1) ja (2.2.3) või (2.2.2) ja (2.2.4).

**Avansiline annuiteet (avanssannuiteet)**

Avansiline annuiteet on selline annuiteet, kus maksed toimuvad perioodi alguses, mitte lõpus (vt joonis 2). Avansilise annuiteedi nüüdis- ja tulevikuväärtuse tähistamisel kasutame perioodi lõpus makstavale annuiteedile analoogseid tähistusi $\ddot{a}_{n]}$ ja $\ddot{s}_{n]}$.




Joonis 2. Avansiline annuiteet

Vaatleme ülaltoodud $n$ aastase 1 ühiku suuruste maksetega avansilise annuiteedi ajadiagrammi. Nool 1 tähistab nüüd esimese makse toimumise ajahetke $t = 0$. Sellel ajahetkel on annuiteedi nüüdisväärtus $\ddot{a}_{n]}$. Nool 2 paikneb üks aasta peale viimase makse toimumist, ajahetkel $t = n$. Sellel ajahetkel on annuiteedi tulevikuväärtuseks $\ddot{s}_{n]}$

Analoogselt valemile (2.2.1) saab leida avaldise ka avansilise annuiteedi nüüdisväärtusele $\ddot{a}_{n]}$

$$\ddot{a}_{n]} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} \tag{2.2.6}$$

Kasutades geomeetrilise jada summeerimist, saame

$$\ddot{a}_{n]} = \frac{1 - v^n}{d}, \tag{2.2.7}$$

kus

$$d = \frac{i}{(1 + i)}$$

Saime valemile (2.2.2) analoogse seose.

Tulevikuväärtusele $\ddot{s}_{n]}$ leiame avaldised analoogselt valemitele (2.2.3) ja (2.2.4)

$$\ddot{s}_{n]} = (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^n$$

Siis

$$\ddot{s}_{n]} = \frac{(1 + i)^n - 1}{d} \tag{2.2.8}$$

Võrreldes valemeid (2.2.2) ja (2.2.7) näeme, et lugejad on võrdsed, kuid nimetajas on ühel *i* ja teisel *d*. Perioodi lõpus toimuvate maksetega annuiteedi korral tähistab *i* intressi, mida makstakse samuti perioodi lõpus. Avansilise annuiteedi korral toimuvad maksed perioodi alguses ja *d* tähistab intressi, mida makstakse perioodi alguses. Valemite (2.2.4) ja (2.2.8) võrdlusest jõuame sarnase tulemuseni.

Ka avansilise annuiteedi korral kehtivad nüüdisväärtuse ja tulevikuväärtuse vahel sarnased seosed, nagu perioodi lõpus makstava annuiteedi korral

$$\ddot{s}_{n]} = \ddot{a}_{n]} \cdot (1 + i)^n$$

Kahte erinevat tüüpi annuiteeti – perioodi lõpus toimuvate maksetega annuiteeti ja avansilist annuiteeti – on võimalik ka omavahel siduda

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \cdot (1+i) \tag{2.2.9}$$

ja

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} \cdot (1+i) \tag{2.2.10}$$

Seos (2.2.9) tuleneb otseselt valemitest (2.2.1) ja (2.2.6) või (2.2.2) ja (2.2.7). Et $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ korral toimuvad maksed üks aasta varem kui $a_{\overline{n}|}$ korral, siis peab avansilise annuiteedi nüüdisväärtus olema ühe aasta intressi võrra suurem. Valemi (2.2.10) tuletuskäik on analoogne.

Perioodi lõpus makstav annuiteet ja avansiline annuiteet arvutatakse täpselt sama maksete seeria põhjal, ainult erineval ajahetkel (vt joonis 3).


Joonis 3. Perioodi lõpus makstava annuiteedi ja avansilise annuiteedi ajaline kulg

### Edasilükatud annuiteet (viitannuiteet)

Annuiteeti, kus vaatame *n* aasta pikkust perioodi, kuid esimene makse leiab aset alles *m* aasta möödudes, kusjuures ühikulised maksed toimuvad aasta lõpus, nimetatakse ***edasilükatud perioodi lõpus toimuvate maksetega annuiteediks***.

Kirjeldatud annuiteedi nüüdisväärtust tähistame ${}_{m|}a_{\overline{n}|}$ ja leiame järgmiselt

$${}_{m|}a_{\overline{n}|} = v^{m+1} + \ldots + v^{m+n} = v^m(v + v^2 + \ldots + v^n) = v^m \quad a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}$$

Annuiteeti, kus me vaatame $n$ aasta pikkust perioodi, kuid esimene makse leiab aset alles $m$ aasta möödudes, kusjuures ühikulised maksed toimuvad aasta alguses, nimetatakse ***edasilükatud avansiliseks annuiteediks***.

Edasilükatud avansilise annuiteedi nüüdisväärtust tähistame ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$ ja leiame (analoogselt edasilükatud perioodi lõpus makstavale annuiteedile)

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m \ \ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|}. $$

## Annuiteedid, kus maksed toimuvad sagedamini kui intressi arvestamine

Siiani vaatasime annuiteete, kus maksed toimuvad kord aastas ja intressi arvestatakse samuti kord aastas. Ette võib aga tulla olukordi, kus maksed toimuvad sagedamini kui kord aastas, nt kord kuus, kuid intressi arvestatakse ikka kord aastas.

Käesoleva alapunkti raames uurime annuiteete, kus maksed toimuvad sagedamini kui intressi arvestamine.

### *Perioodi lõpus makstavad annuiteedid*

Olgu $m$ makseperioodide arv ühes intressiarvestuse perioodis. Olgu $n$ annuiteedi pikkus, mida mõõdetakse intressiarvestamise perioodides. Olgu $i$ intress intressiarvestuse perioodis. Eeldame, et iga intressiarvestuse periood sisaldab lõplikku arvu maksete perioode. Seega on annuiteedimaksete arvuks kokku $mn$, mis on lõplik [6, lk 72].

Kui meil on $n$ intressiarvestuse perioodiga annuiteet, kus iga $m$ intressiarvestuse perioodi lõpus makstakse summa $\frac{1}{m}$, siis sellise annuiteedi nüüdisväärtust tähistame $a_{\overline{n}|}^{(m)}$ Saame järgmise avaldise

$$ a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot \left[ v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \ldots + v^{n-\frac{1}{m}} + v^n \right] = \frac{1}{m} \cdot \left[ \frac{v^{\frac{1}{m}} - v^{n+\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} \right] = \frac{1 - v^n}{m \cdot \left[ (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right]} $$

ja tähistades

$$i^{(m)} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right],$$

saame

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}} \qquad (2.2.11)$$

Kirjeldatud annuiteedi tulevikuväärtust tähistame sümboliga $s_{\overline{n}|}^{(m)}$ ja leiame seosega

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)} \cdot (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}} \qquad (2.2.12)$$

Valemid (2.2.11) ja (2.2.12) on sama kujuga kui (2.2.2) ja (2.2.4), ainult valemite (2.2.11) ja (2.2.12) nimetajas on $i^{(m)}$ ning (2.2.2) ja (2.2.4) nimetajas $i$. Et $i^{(m)}$ mõõdab intressi, mida makstakse $m$-nda intressiarvestuse perioodi lõpus, siis kattuvad intressi maksmise ajahetked hetkedega, mil toimuvad maksed.

### *Avansiline annuiteet*

Olgu meil $n$ intressiarvestuse perioodiga annuiteet, kus $\frac{1}{m}$ suurused maksed toimuvad iga $m$-nda intressiarvestuse perioodi alguses (avansiline annuiteet), siis sellise annuiteedi nüüdisväärtus $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$ avaldub kujul

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot \left[1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \ldots + v^{n - \frac{1}{m}}\right] = \frac{1 - v^n}{m \cdot (1 - v^{\frac{1}{m}})} = \frac{1 - v^n}{m \cdot \left[1 - (1-d)^{\frac{1}{m}}\right]}$$

ja tähistades

$$d^{(m)} = m\left[1 - (1-d)^{\frac{1}{m}}\right],$$

saame

$$\ddot{a}_{n]}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}}$$

Kirjeldatud annuiteedi tulevikuväärtuse saame järgmiselt

$$\ddot{s}_{n]}^{(m)} = \ddot{a}_{n]}^{(m)} \cdot (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}}$$

# 3. SUREMUS

Käesoleva peatüki raames anname ülevaate suremuse hindamisega seotud mõistetest, sest elukindlustus ja pensionikindlustus põhinevad suremuse prognoosimisel.

Traditsiooniliselt kasutatakse suremuse kirjeldamiseks suremustabeleid ehk elutabeleid. Elutabelid sisaldavad rahvastiku suremust peegeldavaid karakteristikuid, mis tavaliselt tuuakse välja iga vanuseaasta kohta.

Elukindlustuse ja pensionikindlustuse lepingute hinnad ja väärtused sõltuvad teadmistest praeguse ja tulevase suremuse kohta. Kuna suremustõenäosused on suremustabelite aluseks, siis on oluline, et need oleksid hinnatud õigesti. Suremustõenäosuste järgi prognoositakse surmade arvu ning inimeste tulevase eluea pikkust.

Suremustabeleid võib koostada nii kogu rahvastiku kui ka näiteks ainult kindlustatud isikute kohta (selekteeritud suremustabel). Viimasel juhul on peale vanuse näha suremuse seos ka sellega, kui kaua on inimene olnud kindlustatute hulgas. Pensionikindlustus on mõeldud kõigile inimestele ja seetõttu ei seata kindlustusvõtjale tema terviseseisundiga seotud piiranguid. Samas tuleb tõdeda, et kindlustuse võtavad inimesed, kelle majanduslik olukord seda võimaldab, mis omakorda tähendab seda, et ühiskonna heidikud jäävad kindlustatute hulgast välja. Nii võib eeldada, et kindlustatute suremus on mõnevõrra väiksem kui kogu rahvastiku oma.

Pikka aega tegutsenud elukindlustusseltsid kasutavad kindlustatute suremustabeleid. Eestis on elukindlustusseltside kogemusel põhinevaid suremusandmeid vähe, mistõttu vaatame käesoleva magistriprojekti raames üksnes kogu rahvastiku suremustabelit.

**$x$-aastase inimese tulevane eluiga**

Kuigi iga inimese eluiga on erinev ja määratud tema elutingimuste, päriliku info ja paljude muude faktoritega, saab leida üldistava mudeli, mida saab kasutada paljude praktiliste järelduste tegemiseks eluea kohta. Selle mudeli koostamisel arvestatakse, et vaadeldava isiku ***elukestus*** on juhuslik suurus, mis allub teatavatele statistilistele seaduspärasustele. Lihtsaima mudeli saame, kui eeldame, et kogu rahvastiku ***elukestuse jaotus*** on ühesugune ja ei muutu ajas ning seda kirjeldab jaotusfunktsioon $G(t)$ [12].

Elukestusmudeli põhimõisted esitame H. Gerberi raamatu [4] ja H.-L. Viirsalu loengukonspekti [13] põhjal.

Tähistame vastsündinu tulevase eluea, mis on pidev juhuslik suurus, sümboliga $T$, mille väärtused on lõigust $[0, \omega]$, $0 < \omega < \infty$, kus $\omega$ on piirvanus.

Tähistame $x$ aasta vanuse isiku (mida tähistatakse $(x)$) tulevase eluea sümboliga $T(x)$ ($T(0) = T$). Seega sureb kirjeldatud isik $x + T(x)$ aasta vanuselt.

***Elukestus*** *$T(x)$ on juhuslik suurus jaotusfunktsiooniga*

$$G_x(t) = P(T(x) \le t),\ t \ge 0.$$

Elukestus $T(x)$ kirjeldab isiku $(x)$ suremust tõenäosuslikult.

Rahvastikustatistikas kasutatakse isiku suremise tõenäosust iseloomustava jaotusfunktsiooni $G_x(t)$ asemel sageli üleelamisfunktsiooni $S_x(t)$.

***Üleelamisfunktsioon*** *$S_x(t)$ näitab tõenäosust, et vanuses x olev isik on aja t möödudes veel elus*

$$S_x(t) = P(T(x) > t),\ t \ge 0$$

Elukestuse jaotusfunktsiooni ja üleelamisfunktsiooni vahel kehtib seos

$$S_x(t) = 1 - G_x(t). \tag{3.1}$$

*Tõenäosust, et x-aastane inimene sureb t aasta jooksul, nimetatakse* ***suremistõenäosuseks*** *ja tähistatakse* ${}_t q_x$

*Tõenäosust, et x-aastane inimene elab veel vähemalt t aastat, nimetatakse* ***üleelamistõenäosuseks*** *ja tähistatakse* ${}_t p_x$

Kehtivad järgmised seosed

$$ {}_t q_x = G_x(t) \tag{3.2} $$

ja

$$ {}_t p_x = 1 - G_x(t) \tag{3.3} $$

Kui $t = 1$, jäetakse $t$ kirjutamata, nii saame $q_x$ ja $p_x$ ($p_x = 1 - q_x$).

Oletame, et elukestuse $T(x)$ jaotusfunktsioon $G_x(t)$ on teada. Eeldame ka, et elukestus $T(x)$ on pidev juhuslik suurus ja tal eksisteerib tihedusfunktsioon $g_x(t) = G_x'(t)$

Avaldame tihedusfunktsiooni teisiti

$$ g_x(t) = G_x'(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{G_x(t+h) - G_x(t)}{h} = S_x(t) \lim_{h \to 0^+} \frac{G_{x+t}(h)}{h} = S_x(t) \lim_{h \to 0^+} \frac{{}_h q_{x+t}}{h} $$

Piirväärtust

$$ \lim_{h \to 0^+} \frac{{}_h q_x}{h} = \mu_x $$

nimetatakse ***hetkeliseks suremusmääraks*** vanuses $x$. Hetkelise suremusmäära kaudu avaldub tihedusfunktsioon $g_x(t)$ järgmiselt

$$ g_x(t) = S_x(t) \ \mu_{x+t} $$

Hetkeline suremusmäär isiku ($x$) jaoks vanuses $x + t$ avaldub viimasest seosest kujul

$$ \mu_{x+t} = \frac{g_x(t)}{1 - G_x(t)} = -\frac{d}{dt} \ln[1 - G_x(t)] $$

ehk

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln {}_t p_x .$$

Vaatame $l_0$ vastsündinust (sama üleelamisfunktsiooniga $S(x) = S_0(x)$) vanuseni $x$ jõudnud isikute arvu $L(x)$

$$L(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j ,$$

kus $I_j$ on indikaator ($I_j \sim \mathrm{Be}(S(x))$) ja

$$I_j = \begin{cases} 1, kui\ j\ elab\ vanuseni\ x \\ 0, vastasel\ korral \end{cases}$$

Keskmine ellujäänute arv vanuses $x$ avaldub kui keskväärtus

$$l_x = E[L(x)] = \sum_{j=1}^{l_0} E(I_j) = l_0 S(x) .$$

Olgu ${}_t D_x$ surmade arv vanuste $x$ ja $x + t$ vahel algsest $l_0$ elust. Siis oodatav surmade arv

$${}_t d_x = E({}_t D_x) = l_x - l_{x+t}$$

Kui $t = 1$, siis saame $d_x$ leida järgmiselt

$$d_x = l_x \ q_x \tag{3.4}$$

Seega saame $l_{x+1}$ avaldada vahena

$$l_{x+1} = l_x - d_x \tag{3.5}$$

Valemi $l_x = l_0 S(x)$ ($t \geq 0$) abil tuletame järgmised seosed

$${}_t p_x = S_x(t) = P(T(x) > t) = P(T > x + t | T > x) = \frac{P(T > x + t)}{P(T > x)} = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{\frac{l_{x+t}}{l_0}}{\frac{l_x}{l_0}}$$

ehk

$$ {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}; $$

$$ {}_t q_x = 1 - {}_t p_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} $$

ehk

$$ {}_t q_x = \frac{{}_t d_x}{l_x}. $$

Kasutades ellujäänute arvu $l_x$, saame hetkelise suremusmäära leida suhtena

$$ \mu_x = -\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{l'(x)}{l(x)} $$

Järgnevalt vaatame, kuidas leida keskmist tulevast eluiga $ET(x)$.

***Keskmine tulevane eluiga vanuses x*** *tähistab aastaid, mis on x aasta vanusel inimesel keskmiselt veel elada jäänud.*

Olgu $K(x) = [T(x)]$ (täisosa) diskreetne juhuslik suurus väärtustega 0, 1, ..., $[\omega - x]$, st vaatame $(x)$ tulevast eluiga täisaastates. Siis diskreetne keskmine tulevane eluiga vanuses $x$ on

$$ e_x = E[K(x)] = \sum_{k=0}^{[\omega-x]} k \quad P(K(x) = k), $$

$$ \begin{aligned} P(K(x) = k) &= P(k \leq T(x) < k+1) = P(k < T(x) \leq k+1) = \\ &= P(T(x) > k) - P(t(x) > k+1) = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x \end{aligned} $$

Järelikult

$$e_x = \sum_{k=0}^{[\omega-x]} k({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) = \sum_{k=1}^{[\omega-x]} k \cdot {}_k p_x - \sum_{k=1}^{[\omega-x]} (k-1)\,{}_k p_x ,$$

millest

$$e_x = \sum_{k=1}^{[\omega-x]} {}_k p_x$$

Avaldades keskmise tulevase eluea täisaastates $e_x$ ellujäänute arvu $l_x$ kaudu, saame

$$e_x = \sum_{k=1}^{[\omega-x]} {}_k p_x = \sum_{k=1}^{[\omega-x]} \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{[\omega-x]} l_{x+k} \tag{3.6}$$

Pideval juhul saame keskmise tulevase eluea vanuses $x$

$$e_x = ET(x) = \int_0^{\omega-x} t\ g_x(t)dt = \int_0^{\omega-x} t\ G_x'(t)dt = -\int_0^{\omega-x} t\ S_x'(t)dt = -t \cdot {}_t p_x \Big|_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x} {}_t p_x dt ,$$

millest järeldub, et

$$e_x = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x dt$$

Et kehtib võrratusteahel $K(x) \le T(x) \le K(x) + 1$, siis kehtib ka $EK(x) \le ET(x) \le EK(x) + 1$ ehk $e_x \le e_x \le e_x + 1$ Praktikas kasutatakse ligikaudset seost

$$\mathring{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2}, \tag{3.7}$$

mis lähtub eeldusest, et juhuslik suurus $T(x) - K(x)$ on ühtlase jaotusega U(0,1).

### Suremustabeli ehk elutabeli koostamine

***Suremustabel** on mudel, mis iseloomustab rahvastiku suremust teatud lihtsustatud eeldustel ja skeem, mis võimaldab arvutada iga vanuse jaoks keskmist tulevast eluiga* [12].

Suremustabel näitab, kui suur osa mingil aastal sündinud lastest on $x$ aasta pärast ($x = 0, 1, \ldots$ ) tõenäoliselt elus, kui suremus püsib samal tasemel.

Suremustabel koostatakse ühe ***põlvkonna*** ehk ***sünnikohordi*** kohta – see on mingil ajavahemikul (kõige sagedamini ühe aasta jooksul) sündinud isikute hulk. Kohordi suuruseks võetakse mingi hüpoteetiline arv (praktikas on selleks sageli 100 000 või 1 000 000).

Esitame fragmendi seitsmeveerulisest suremustabelist, mille lähteandmeteks on teine veerg – suremustõenäosused (vt tabel 1).

| (1) | (2) | | (3) | | (4) | | (5) | | (6) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | Suremustõenäosus $q_x$ | | Ellujäämistõenäosus $p_x$ | | Ellujäänud $l_x$ | | Surnud $d_x$ | | Keskmine tulevane eluiga $\overset{\circ}{e}_x$ | |
| | mehed | Naised | mehed | naised | mehed | naised | mehed | naised | mehed | naised |
| 0 | 0.0100 | 0.0075 | 0.9900 | 0.9925 | 100000 | 100000 | 995 | 754 | 64.23 | 75.73 |
| 1 | 0.0011 | 0.0012 | 0.9989 | 0.9988 | 99005 | 99246 | 107 | 115 | 63.88 | 75.30 |
| 2 | 0.0005 | 0.0002 | 0.9995 | 0.9998 | 98897 | 99131 | 48 | 17 | 62.95 | 74.39 |
| 3 | 0.0003 | 0.0005 | 0.9997 | 0.9995 | 98849 | 99114 | 32 | 52 | 61.98 | 73.40 |
| 4 | 0.0000 | 0.0007 | 1.0000 | 0.9993 | 98817 | 99062 | 0 | 66 | 61.00 | 72.44 |
| 5 | 0.0008 | 0.0006 | 0.9992 | 0.9994 | 98817 | 98996 | 76 | 64 | 60.00 | 71.49 |
| 6 | 0.0004 | 0.0004 | 0.9996 | 0.9996 | 98741 | 98932 | 42 | 39 | 59.04 | 70.54 |
| 7 | 0.0004 | 0.0003 | 0.9996 | 0.9997 | 98699 | 98894 | 39 | 29 | 58.07 | 69.56 |
| 8 | 0.0004 | 0.0002 | 0.9996 | 0.9998 | 98660 | 98864 | 37 | 23 | 57.09 | 68.58 |
| 9 | 0.0004 | 0.0002 | 0.9996 | 0.9998 | 98623 | 98841 | 38 | 19 | 56.11 | 67.60 |
| 10 | 0.0004 | 0.0002 | 0.9996 | 0.9998 | 98585 | 98822 | 42 | 19 | 55.13 | 66.61 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Tabel 1. Fragment suremustabelist

Suremustabel koosneb järgmistest veergudest [10, lk 46]:

(1) $x$ – vanus (täielikes tabelites on esindatud kõik vanused, kuid kasutatakse ka viie aasta suuruseid vanuserühmi);

(2) $q_x$ – tõenäosus surra vanuses $x$ kuni $x + 1$;

(3) $p_x$ – ellujäämistõenäosus vanuses $x$ kuni $x + 1$;

(4) $l_x$ – hüpoteetilisest sünnipõlvkonnast ellujäänuid vanuseks $x$;

(5) $d_x$ – hüpoteetilisest sünnipõlvkonnast vanuses $x$ kuni x + 1 surnud;

(6) $\overset{\circ}{e}_x$ – keskmise tulevase eluea pikkus (pideval juhul).

Suremustabeli (täielik tabel on esitatud lisas 3) koostamisel tegime läbi järgmised sammud:

a) olgu meil teada suremustõenäosused $q_x$;

b) fikseerime $l_0$ (nt 100 000);

c) leiame suremustõenäosuste põhjal ellujäämistõenäosused (kasutades valemeid (3.1), (3.2) ja (3.3));

d) hüpoteetilisest sünnipõlvkonnast surnud vanuses $x$ kuni x + 1 leiame valemi (3.4) abil;

e) hüpoteetilisest sünnipõlvkonnast ellujäänud vanuses $x + 1$ leiame valemi (3.5) abil;

f) tulevase keskmise eluea leiame ligikaudset seost (3.7) ja valemit (3.6) kasutades.

Kui vaatleme ***suremust mittetäisarvuliste vanuste korral***, koosneb eluiga $T$ elueast täisaastates $K$ ja murdarvulisest osast $U$ (kus $U \sim$ U(0,1)). [4] Juhusliku suuruse $K$ jaotuse ja sellega seotud suurusi saab leida suremustabelist. Eeldame, et eluiga täisaastates $K$ ja murdarvuline osa $U$ on sõltumatud.

Et interpoleerimise tulemusel jõuda eluea $T$ jaotuseni, tuleb teha eeldusi suremustõenäosuste ${}_uq_x$ või hetkelise suremusmäära $\mu_{x+u}$ kohta vahepealses vanuses $x + u$ ($x$ on täisarv ja $0 < u < 1$).

Suremuse käsitlemiseks mittetäisarvuliste vanuste korral on kolm meetodit:

1) eeldame, et eluea murdarvuline osa $U$ on ühtlase jaotusega (tähistame: eeldus $E1$);

2) eeldame, et hetkeline suremusmäär on konstantne;

3) kasutame nn Balducci hüpoteesi.

Meie kasutame esimest eeldust (eeldus $E1$), seega saame järgmise seose

$$l_{x+u} = (1-u)l_x + u \cdot l_{x+1} = l_x - u(l_x - l_{x+1}) = l_x - u \ d_x .$$

Üleelamistõenäosus avaldub

$$ {}_u p_x = \frac{l_{x+u}}{l_x} = 1 - u \ \frac{d_x}{l_x} = 1 - u \cdot q_x $$

ning suremistõenäosus

$$ {}_u q_x = 1 - {}_u p_x = u \ \ q_x $$

Hetkelise suremusmäära saame kujul

$$ \mu_{x+u} = - \frac{l'_{x+u}}{l_{x+u}} = \frac{d_x}{l_{x+t}} $$

Korrutades lugejat ja nimetajat elusolijate arvuga $l_x$, saame hetkelise suremusmäära leidmiseks avaldise

$$ \mu_{x+u} = \frac{d_x \cdot l_x}{l_{x+t} \ l_x} = \frac{q_x}{{}_u p_x} = \frac{q_x}{1 - u \ \ q_x} $$

Tihedusfunktsiooni saame kujul

$$ g_x(u) = {}_u p_x \ \ \mu_{x+u} = q_u $$

# 4. SUREMUSSEADUSED

Alljärgnevalt tutvustame raamatu [4] põhjal tuntumaid suremusseadusi, mis püüavad suremust kirjeldada analüütiliste avaldiste abil.

1) **De Moivre** (1724) postuleeris inimese maksimaalse vanuse $\omega$ olemasolu ja eeldas, et tulevane eluiga $T(x)$ on ühtlaselt jaotunud 0 ja $\omega$ - $x$ vahel, millest järeldub, et tihedusfunktsioonil on järgmine kuju

$$g_x(t) = \frac{1}{\omega - x},$$

kus $0 < t < \omega - x$.

Seega saame, et suremusmäär on võrdne

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t}, \quad 0 < t < \omega - x \ ,$$

mis on $t$ kasvav funktsioon.

2) **Gompertz** (1824) postuleeris, et suremusmäär kasvab eksponentsiaalselt

$$\mu_{x+t} = Bc^{x+t}, \quad t > 0 \tag{4.1}$$

See peegeldab vananemisprotsessi paremini kui De Moivre'i seaduspära ja lisaks sellele kõrvaldab eelduse maksimaalse vanuse $\omega$ kohta.

3) **Makeham** (1860) modifitseeris Gompertzi valemit ja postuleeris järgmise seose

$$\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}, \quad t > 0, A > 0.$$

Seega lisas Makeham eksponentsiaalselt kasvavale suremusmäärale (4.1) vanusest sõltumatu komponendi.

4) **Weibull** (1939) pakkus välja, et suremusmäär sõltub ajast $t$ astmefunktsioonina, mitte aga eksponentsiaalselt

$$\mu_{x+t} = k(x+t)^n,$$

kus $k > 0$ ja $n > 0$ on fikseeritud parameetrid. Ellujäämistõenäosus avaldub kujul

$${}_t p_x = e^{-\frac{k}{n+1}\left[(x+t)^{n+1} - x^{n+1}\right]}$$

**Mudel Heligman-Pollard**

Järgnevalt tutvustame lähemalt üht keerukamat elukestuse jaotust kirjeldavat mudelit, nn Heligman-Pollardi mudelit [7]. Mudel on meile tähtis, sest seda kasutab ka Eesti Statistikaamet elutabelite silumiseks.

Heligman ja Pollard lähtusid järgmisest võrdusest

$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x, \tag{4.2}$$

kus $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ on tundmatud parameetrid, mis tuleb leida.

Valem (4.2) koosneb kolmest osast. Esimese osa moodustab kiirelt kahanev eksponentfunktsioon, mis peegeldab suremuse langust imikueas. Seda komponenti kutsutakse vastsündinu komponendiks. Teiseks osaks on funktsioon, mis on sarnane lognormaalsele jaotusele ja kirjeldab suremusjoonel asuvat kühmu, mis vastab kahekümnendatele eluaastatele. See kühm esindab suremuse suurenemist, mida tavaliselt interpreteeritakse kui õnnetuse efekti. Kolmas liige – vananemise komponent – on Gompertz'i eksponentfunktsioon, mis kirjeldab suremust vanemas eas.

Kas mudel – Heligman-Pollard – mida kasutab ka Eesti Statistikaamet, sobib suremuse kirjeldamiseks ka kõrges vanuses? Arenenud riikides tehtud suremusanalüüsid näitavad, et vanurite suremuse kirjeldamiseks on võimalik leida paremaid mudeleid.

# 5. SUREMUS KÕRGES VANUSES

Käesolev peatükk tugineb eelkõige monograafiale [11]. Raamatu autorid A. R. Thatcher, V Kannisto ja J. W Vaupel seadsid eesmärgiks kõrges vanuses (vahemikus 80 kuni 120 aastat) inimeste suremust kirjeldava mudeli leidmise. Nad kasutasid kolmeteistkümne arenenud riigi andmeid. Need kolmteist riiki on: Austria, Taani, Inglismaa, Soome, Prantsusmaa, Saksamaa, Island, Itaalia, Jaapan, Holland, Norra, Rootsi ja Šveits.

Neis riikides oli kokku peaaegu 40 miljonit elanikku, kes jõudsid vanuseni 80 ja rohkem kui 120 000 elaniku, kes jõudsid vanuseni 100 ajavahemikul 1960 – 1990. Analüüs katab nimetatud ajavahemikus rohkem kui 32 miljonit surma vanuses 80 ja üle selle.

Monograafias esitatud analüüsis on autorid kasutanud lisaks eelpool vaadeldud Gompertzi, Makehami, Weibulli ning Heligman-Pollardi mudelitele, veel kolme spetsiifilist mudelit.

**Logistiline mudel**

Logistilise mudeli esitas esimesena 1932. aastal Perks, kes leidis empiiriliselt, et hetkelise suremusmäära $\mu_x$ väärtusi saab lähendada logistilise funktsiooniga. Erinevad autorid on kasutanud mitmeid erinevaid tähistusi. Alljärgnevalt tutvustame ühte võimalust logistilise funktsiooni esitamiseks

$$\mu_x = c + \frac{ae^{bx}}{1+\alpha e^{bx}} \tag{5.1}$$

Valemist (5.1) on näha, et see mudel sisaldab erijuhuna Makehami seadust, kui $\alpha$ = 0. Kui kordaja $\alpha$ on väike, siis kõik teooriad, mis seletavad, miks suurus $\mu_x$ käitub logistilise funktsiooni alusel, aitavad seletada ka seda, miks Makehami ja Gompertz 'i seadused enamiku vanuste puhul nii hästi töötavad.

### Kannisto mudel

Kannisto mudel põhineb faktil, et hetkelise suremusmäär $\mu_x$ on kõrges vanuses hästi kirjeldatav ühe logistilise mudeli erijuhuga. Selle tähelepaneku tegi Kannisto 1992. aastal.

Kannisto mudel avaldub kujul

$$\mu_x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}}$$

Kannisto mudeli põhjal saame ellujäämistõenäosuse leida valemiga

$$_t p_x = \left( \frac{1+ae^{bx}}{1+ae^{b(t+x)}} \right)^{\frac{1}{b}} \qquad (5.2)$$

### Heligman-Pollardi mudel kõrgete vanuste korral

Lähtume Heligman-Pollardi mudelist (4.2).

Alates vanusest 50 võib mudeli kaks esimest osa ära jätta ja nii jääb alles vaid järgmine avaldis

$$\frac{q_x}{p_x} = GH^x,$$

kus $p_x = 1 - q_x$ ning $G$ ja $H$ on konstandid. Suremistõenäosus $q_x$ avaldub järgmiselt

$$q_x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}},$$

mis näitab, et $q_x$ järgib logistilist funktsiooni ning tema väärtused jäävad 0 ja 1 vahele.

**Ruutmudel**

Ideed, et funktsiooni $\ln(\mu_x)$ saab piiratud vanusepiirkonnas lähendada ruutfunktsiooniga, kasutasid Coale ja Kisker 1990. aastal eesmärgiga interpoleerida $\mu_x$ vanusevahemikus 85 kuni 110. Mudel avaldub kujul

$$\ln(\mu_x) = a + bx + cx^2,$$

kus $c < 0$.

Ruutmudelit ei saa kasutada väga pika ajaperioodi jaoks ülikõrgete vanuste korral.

Tänapäeva andmete korral on Makehami mudelis konstandi $A$ väärtus väga väike, seega kaob kõrges vanuses Gompertz'i ja Makehami seaduste erinevus. Seetõttu keskendusid A. R. Thatcher, V Kannisto ja J. W Vaupel analüüsimisel kuue mudeli – Gompertz, logistiline, Kannisto, Weibull, Heligman & Pollard ning ruutmudel – kasutamisele.

Neid mudeleid katsetati iga riigi andmestikul kasutades suurima tõepära meetodit. Suremustõenäosuse $q_x$ ja mudeli abil saadud lähendi $q_x^r$ suhe kanti graafikule. Tingimuseks oli, et surmade arv vaadeldavas vanuses ületaks 100. Hajuvusdiagrammide võrdluse alusel reastati mudelid paremuse järjekorras:

1. logistiline mudel;

2. Kannisto mudel;

3. Weibulli mudel;

4. Heligman-Pollardi mudel;

5. ruutmudel;

6. Gompertz'i mudel.

Logistiline mudel kirjeldas suremust kõrges vanuses (madala suremusega rahvaste hulgas) kõigi andmestike korral kõige edukamalt.

Kannisto kaheparameetrilise mudeli poolt saadud hinnangud olid rahuldavad, kuid mitte nii head, kui logistilise mudeli korral.

Kolmandal kuni viiendal kohal seisvate Weibulli mudeli, Heligman-Pollardi mudeli ning ruutmudeli puhul olid tulemused sarnased ja nende järjestus on mõnevõrra tinglik.

Gompertz'i mudel ülehindab suremuse kasvu vanuse kasvamisel ja on seetõttu kõige vähem sobiv.

Mudelite võrdlemisel kasutati järgnevalt kõigi 13 riigi andmeid koos, rakendati uuesti kuut mudelit saadud koondandmetel ja võrreldi tulemusi (kasutati tõenäosuste $q_x$ võrdlust).

A. R. Thatcher, V Kannisto ja J. W Vaupel näitasid, et Gompertz'i mudel andis kõigil juhtudel hinnanguid, mis jäid tegelikest väärtustest väga kaugele. Gompertz'i mudelist veidi paremaid tulemusi andsid Weibulli ning Heligman ja Pollardi mudelid. Need kolm mudelit andsid kõik suremusele hinnanguid, mis peale 100. eluaastat ületasid kaugelt tegelikke suremusi.

Ülejäänud kolm mudelit (logistiline, Kannisto ja ruutmudel) olid kõik tegelikele tulemustele palju lähemal.

Mudeli headust kirjeldavad testid ei ole aga alati ainsad, mille alusel valida. Teoreetilisest aspektist on logistilisel mudelil olulisi eeliseid. Logistiline mudel on üldisem kui teised mudelid. On leitud teoreetilisi põhjendusi, miks mudel töötab ja on välja selgitatud tingimused, mille korral mudel hästi ei sobi.

Kannisto mudel on logistilise mudeli erijuht. Leiti, et mudel töötab siis, kui konstant $c$ logistilises mudelis on väike ja kui hetkelist suremusmäära $\mu_x$ saab hästi sobitada funktsiooniga, mis läheneb ühele ja kui suremusmäär on väga kõrgete vanuste korral (üle 105 aasta) ühele lähedane. Kannisto mudelil on see praktiline eelis, et tal on ainult kaks parameetrit, mis muudab mudeli kergelt sobitatavaks ning mudel annab kõrges vanuses suremuse kohta üsna häid prognoose, kui seda rakendada sobivatel perioodidel.

Ruutmudel kasutab lähendamiseks parabooli. Selline võte võib tihti osutuda väga edukaks, kuid ainult piiratud vanusevalikute korral.

Arvestades kõiki neid asjaolusid kujunes parimaks mudeliks logistiline mudel koos oma erijuhu Kannisto mudeliga.

**Suremus väga kõrges vanuses (kuni 120 aastat)**

A. R. Thatcher, V Kannisto ja J. W Vaupel eeldasid, et mudelid, mis sobivad andmetega vanuses 80 kuni 110, on jätkuvalt kasutatavad vanuses kuni 120 aastat. Kas selline eeldus on mõistlik? See võib osutuda valeks, kui logistiline mudel millegipärast ei kirjelda suremust enam vanuses 110 kuni 120 aastat.

Mudel võib alahinnata suremust, kui rahvastikus sisaldub veelgi rohkem erakordselt eakaid indiviide, kui on ootuspärane logistilise mudeli korral, mis iseenesest ei ole võimatu. Ent ainus otsene tõendus sellele on proua Calment, kes elas kauem kui on logistilise mudeli alusel oodatav. Proua Calment elas 122 aastat ja viis kuud vanaks.

A. R. Thatcher, V Kannisto ja J. W Vaupel identifitseerisid oma töös logistilise mudeli ja selle lähendi Kannisto mudeli kui paikapidava hüpoteesi, mis sobib adekvaatselt kogu nende kasutuses oleva andmestikuga, va proua Calment. See hüpotees viis prognoosimisel tulemuseni, et suremusmäär vanuses 120 ($\mu_{120}$) jääb 0,7 ja 1,0 vahele ning suremustõenäosus ($q_{120}$) jääb 0,5 ja 0,65 vahele, nii meeste kui naiste puhul. Kas proua Calment mõjutab seda prognoosi? See on õigustatud küsimus, kuid kahjuks sõltub vastus sellest, kas proua oli erandlik, kõrvalekalduv juhus või on ta trendikujundaja. Ainult ühe üle 116 aastase vaatlusaluse olemasolu korral on võimatu vastust anda.

## Eesti andmete põhjal arvutatud suremistõenäosused eri mudelite puhul

Jaana Raudla on oma bakalaureusetöös "Eestlaste suremusnäitajad kõrges vanuses" (Tartu Ülikool, 2001) [8] uurinud, missugune mudel iseloomustab Eesti vanurite suremust kõige paremini. Ta on võrrelnud eri mudelite põhjal arvutatud suremustõenäosuste graafikuid, kasutades 1990.–1999. aasta silumata suremustabeleid, mis pärinevad Eesti Statistikaametist, ning 1999. aasta tasandatud suremustõenäosusi vanusevahemikus 80–110 aastat.

Mudelite võrdlemisel jõuti järgmiste tulemusteni:

1) Kogu rahvastiku suremustõenäosustele annavad kõik mudelid väga kõrges eas (alates vanusest 92) alahinnangu (vanuseni 88 annavad kõik mudelid väikese ülehinnangu).

2) Meeste suremustõenäosustele annab Weibulli mudel kõrges eas ülehinnangu, teised mudelid aga alahindavad tabeli suremustõenäosusi.

3) Naiste suremustõenäosusi kirjeldab väga hästi Gompertzi mudel, ülejäänud neli mudelit annavad alates vanusest 93 alahinnangu.

J. Raudla on võrrelnud eri mudelite põhjal arvutatud Eesti suremistõenäosuste graafikuid A. R. Thatcheri, V Kannisto ja J. W Vaupeli töös esitatud kolmeteistkümne riigi suremistõenäosuste graafikutega (kasutades viimaste puhul ajavahemikku 1980–1990). Ilmneb, et Eesti suremistõenäosuste graafikud on sama kujuga kui kolmeteistkümne uuritud riigi omad, kuid teadaolevalt on mudelite põhjal leitud suremistõenäosused neis kolmeteistkümnes riigis madalamad kui Eestis. Graafikute alusel võib väita, et suremistõenäosuste erinevused olid kõige väiksemad Kannisto mudeli puhul.

Võrreldes Kannisto mudeli põhjal arvutatud Eesti suremistõenäosusi ja kolmeteistkümne uuritud riigi suremistõenäosusi, tuli välja, et olukord on üsna sarnane. Meeste puhul on suremistõenäosused väiksemad kolmeteistkümnes uuritud riigis, naiste puhul kehtib sama väide umbes 100. eluaastani, millest alates jäävad Eesti suremistõenäosused väiksemaks.

# 6. PENSIONIKINDLUSTUSE MATEMAATILISED MUDELID

Käesoleva peatüki raames vaatame (toetudes allikatele [4] ja [13]), kuidas kasutada intressiteooriat, annuiteete ja suremistõenäosusi pensionikindlustuses.

Rääkides kindlustusmaksetest ehk preemiatest, jätame kindlustusseltsi tegevuskulud ja kasumi arvestamata, st vaatame netopreemiaid.

***Netopreemia** on kindlustuspreemia, mis katab vaid hüvitiste maksmisest tekkinud väljaminekuid.*

Ekvivalentsiprintsiibi kohaselt võrdub hüvitiste nüüdisväärtuse keskväärtus preemiate nüüdisväärtuse keskväärtusega. (Lisades mudelisse kulud, räägitakse brutopreemiast ning sellisel juhul võrdub preemiate nüüdisväärtuse keskväärtus hüvitiste nüüdisväärtuse keskväärtuse ja kulude nüüdisväärtuste keskväärtuse summaga.)

Pensionikindlustuse puhul on hüvitise näol tegemist maksejadaga, mis kestab nii kaua, kui $x$-aastane kindlustatu elab. See on annuiteet, kus maksete tegemise aeg sõltub tulevasest elueast $T(x)$. Annuiteedi nüüdisväärtus on juhuslik suurus, mida tähistatakse $Y$

Käesoleva magistriprojekti raames vaatleme pensionikindlustust, kus preemia makstakse ühekordsena (st me ei uuri raha kogumise võimalusi).

Olgu meil eluaegne avansiline annuiteet, mis pakub ühe ühiku suuruseid aastamakseid kindlustatu eluajal. Makseid tehakse ajahetkedel 0, 1, ..., $K$ ($K$ on isiku ($x$) tulevane eluiga täisaastates). Sellise maksejada nüüdisväärtus avaldub kujul

$$Y = 1 + v + v^2 + \ldots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1|}}$$

Selle juhusliku suuruse tõenäosusjaotus on määratud tõenäosustega

$$P(Y = \ddot{a}_{\overline{k+1|}}) = P(K = k) = {}_k p_x q_{x+k}, \; k = 0,1,2,\ldots$$

Annuiteedi aktuaarne nüüdisväärtus $\ddot{a}_x$ võrdub annuiteedi nüüdisväärtuse $Y$ keskväärtusega, seega saame

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{k+1]}\, {}_k p_x q_{x+k} \tag{6.1}$$

Annuiteedi müüdisväärtuse $Y$ saab avaldada ka kujul

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k I_{\{K \geq k\}},$$

kus $I_{\{K \geq k\}} = \begin{cases} 1, kui\ K \geq k \\ 0, K < k \end{cases}$

Sellisel juhul saame annuiteedi nüüdisväärtuse $Y$ keskväärtuse (ehk aktuaarse nüüdisväärtuse) väljendada valemiga

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_k p_x \tag{6.2}$$

Kui meil on annuiteet, kus makseid tehakse $n$ aastat (meil on $n$-aastane annuiteet), kehtib annuiteedi nüüdisväärtuse $Y$ jaoks seos

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{K+1]}, kui\ K = 0, 1, ..., n-1, \\ \ddot{a}_{n]}, kui\ K = n, n+1, ... \end{cases}$$

Analoogselt valemitele (6.1) ja (6.2) saab $n$-aastase annuiteedi aktuaarse nüüdisväärtuse avaldada valemiga

$$\ddot{a}_{x:n]} = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{k+1]}\, {}_k p_x \quad q_{x+k} + \ddot{a}_{n]} \cdot {}_n p_x$$

või

$$\ddot{a}_{x:n]} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, {}_k p_x$$

Kui meil on tegemist $m$ aastat edasilükatud aasta algul makstava eluaegse annuiteediga, siis kehtib annuiteedi nüüdisväärtuse $Y$ jaoks seos

$$Y = \begin{cases} 0, & kui\ K = 0, 1, \ldots, m-1 \\ v^m + v^{m+1} + \ldots + v^K, & kui\ K = m, m+1, \ldots \end{cases}$$

ning $m$ aastat edasilükatud annuiteedi aktuaarse nüüdisväärtuse saame leida vahest

$$_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:m]}$$

Nii saame

$$_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, _kp_x - \sum_{k=0}^{m-1} v^k\, _kp_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k\, _kp_x \tag{6.7}$$

Järgmiseks vaatame situatsiooni, kus $m$ korda aastas (hetkedel 0, $1/m$, $2/m$, ...) tehakse makseid suurusega $1/m$, kuni $x$-aastase kindlustatu surmani. Sellise annuiteedi aktuaarse nüüdisväärtuse leidmiseks vajalike valemite tuletamisel kasutame riskielukindlustuse ühekordset netopreemiat.

Kord aastas makstava annuiteedi aktuaarse nüüdisväärtuse saab avaldada tähtajatu riskielukindlustuse ühekordse netopreemia kaudu. Tähtajatu riskielukindlustuse puhul tähistab $Z$ hüvitise nüüdisväärtust. Kui preemiaid makstakse $K+1$ aastat, siis

$$Z = v^{K+1} \tag{6.3}$$

ning tõenäosusjaotus on määratud tõenäosustega

$$P(Z = v^{K+1}) = P(K = k) = {}_kp_x\ q_{x+k},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Tähtajatu riskielukindlustuse ühekordset netopreemiat tähistatakse $A_x$ ja leitakse valemiga

$$A_x = E(Z) = E\left[v^{K+1}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, _kp_x \cdot q_{x+k} \tag{6.4}$$

Kasutades valemeid (6.3) ja (6.4) ning avansilise annuiteedi leidmise loogikat (2.2.7), saame annuiteedi nüüdisväärtuse avaldada tähtajatu riskielukindlustuse hüvitise nüüdisväärtuse kaudu

$$Y = \frac{1 - v^{K+1}}{d} = \frac{1 - Z}{d}$$

Minnes üle keskväärtusele, saame avaldise, kus annuiteedi aktuaarne nüüdisväärtus on leitav ühekordse netopreemia kaudu

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}, \tag{6.5}$$

kus $\ddot{a}_x = E(Y)$ ja $A_x = E(Z)$.

Valemist (6.5) järeldub, et

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x. \tag{6.6}$$

Kui $m$ korda aastas (hetkedel 0, $1/m$, $2/m$, ...) tehakse makseid suurusega $1/m$, kuni $x$-aastase kindlustatu surmani, siis saame analoogselt valemile (6.6)

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)},$$

millest järeldub, et

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{d^{(m)}} A_x^{(m)} \tag{6.8}$$

Seega oleme $m$ korda aastas makstava annuiteedi aktuaarse nüüdisväärtuse avaldanud tähtajatu riskielukindlustuse ühekordse netopreemia kaudu. Oletame, et (ühe ühiku suurune) tähtajatu riskielukindlustuse hüvitis makstakse välja surmaaasta $m$-ndal ajahetkel (osal), seega vaatame ajavahemikku $K + U^{(m)}$ (kus $K$ on kindlustatu eluiga täisaastates ja $U^{(m)}$ murdarvuline osa). Hüvitise nüüdisväärtus avaldub sellisel juhul valemiga

$$Z = v^{K+U^{(m)}}$$

Ühekordse netopreemia leidmiseks kasutame eeldust $E1$ (vt lk 32). Vaadeldava ajavahemiku kirjutame kujul

$$K + U^{(m)} = (K+1) - (1 - U^{(m)}).$$

Lähtudes eeldusest, et $K$ ja $U^{(m)}$ sõltumatud, saame

$$E\left[(1+i)^{1-U^{(m)}}\right] = s_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}}$$

Siit saame ühekordse netopreemia jaoks avaldise

$$A_x^{(m)} = E[v^{K+1}]E[(1+i)^{1-U^{(m)}}] = \frac{i}{i^{(m)}} A_x$$

Et $A_x = 1 - d\ddot{a}_x$, saame

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d_i}{d^{(m)}i^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)}i^{(m)}}$$

Tähistades $\alpha(m) = \dfrac{d_i}{d^{(m)}i^{(m)}}$ ja $\beta(m) = \dfrac{i - i^{(m)}}{d^{(m)}i^{(m)}}$,

saame valemi (6.8) kirjutada kujul

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) \tag{6.9}$$

Alljärgnevalt esitame koefitsentide $\alpha(m)$ ja $\beta(m)$ tabuleeritud väärtused, tingimustel $i = 5\%$, $m = 12$ (igakuised maksed) ja $m = \infty$ (pidevad maksed).

| $m$ | $\alpha(m)$ | $\beta(m)$ |
|---|---|---|
| 12 | 1,000197 | 0,46651 |
| $\infty$ | 1,000198 | 0,50823 |

Tabel 2. Koefitsendid $\alpha(m)$ ja $\beta(m)$

Praktikas kasutatakse tihti järgmisi ligikaudseid seoseid

$$\alpha(m) \approx 1 \text{ ja } \beta(m) \approx \frac{m-1}{2m}$$

Ligikaudseid seoseid saame kasutada üksnes siis, kui intressimäär on madal.

Seni oleme eeldanud, et lähtevanus $x$ on täisarvuline, kuid tegelikkuses ei pruugi see nii olla. Seetõttu vaatleme, kuidas leida aktuaarset nüüdisväärtust $\ddot{a}_{x+u}$, kus $x$ on täisarv ja $0 < u < 1$.

Alustame samasusest

$${}_{u}p_{x} \cdot {}_{k}p_{x+u} = {}_{k}p_{x} \; {}_{u}p_{x+k}$$

Kasutame eeldust $E1$ (vt lk 23), saame võrduse

$$(1 - uq_x)\,{}_{k}p_{x+u} = {}_{k}p_{x}(1 - uq_{x+k})$$

Korrutades võrduse mõlemaid pooli suurusega $v^k$ ning summeerides üle $k$, saame

$$(1 - uq_x)\ddot{a}_{x+u} = \ddot{a}_x - u(1+i)A_x$$

Asendades nüüd suuruse $A_x$ vahega 1 - $d\ddot{a}_x$, jõuame tulemuseni

$$\ddot{a}_{x+u} = \frac{(1+ui)\ddot{a}_x - u(1+i)}{1 - uq_x}. \tag{6.10}$$

Järgmises peatükis tutvume sellega, kuidas kasutada saadud valemeid pensioni suuruse leidmisel.

# 7 KINDLUSTUSSELTSI POOLT MAKSTAVA PENSIONI LEIDMINE

Kohustuslik kogumispension ja vabatahtlik kogumispension makstakse reeglina välja kindlustusseltside poolt.

**Kohustusliku kogumispensioni leidmine**

Teise samba pensioni (kohustuslik kogumispension) kogutakse teise samba pensionifondide kaudu. Fondi investeeritakse 6% brutopalgast. Tulusus oleneb väärtpaberiturgude liikumisest ja valitud fondidest, samuti kogumisperioodi pikkusest.

Kui intressimäär oleks teada (me võime ka lihtsalt eeldada, et intress on mingi kindel suurus, nt 6% aastas), saaks investeeringu lõppväärtust arvutada valemitega, mille abil leitakse annuiteedi tulevikuväärtust. Teise samba pensioni kogumisel on muutuv ka sissemaksete suurus, sest see oleneb brutopalgast, mis ei ole teatavasti püsiv.

Kui kogumisperiood on läbi ja pensioniiga käes, ostetakse tavaliselt eluaegne annuiteet (kindlustusselts hakkab maksma pensioni). Sel viisil kujuneva pensioni suurus leitakse sama moodi nagu vabatahtliku kogumispensioni puhul.

**Vabatahtlik kogumispension**

Lisapensioni saab koguda kolmanda samba pensionifondide ja elukindlustuse kaudu. Kolmanda samba pensionifondide kasutamine sarnaneb teise samba pensionifondide omaga, kuid sissemaksed ei ole otseselt seotud brutopalgaga.

Kui koguda pensioni elukindlustuse abil, on siingi kaks peamist võimalust: elukindlustuseta tähtajaline kogumiskindlustus ja elukindlustusega tähtajaline kogumiskindlustus.

Kui koguda pensioniks raha ilma elukindlustuseta, saab kogumisperioodi, intressimäära ja sissemaksete suuruse põhjal arvutada kogumisperioodi lõpuks koguneva summa. Selleks tuleks taas kasutada annuiteedi tulevikuväärtuse leidmise valemeid. Kui kogumisega käib kaasas elukindlustus, tuleb lisaks arvestada suremusega.

Kogumisperioodi lõppedes, kui kindlustatu on saanud vähemalt 55-aastaseks, ostetakse üldjuhul eluaegne annuiteet. Elukindlustusseltsi makstava pensioni arvutamist vaatame allpool.

Võtame annuiteedi, kus kord aastas tehakse ühe ühiku suuruseid makseid. Leiame sellise annuiteedi aktuaarse nüüdisväärtuse, kasutades valemit (6.2).

Esmalt tuleb meil leida üleelamistõenäosused ${}_k p_x$ Üleelamistõenäosuse arvutamisel võtame aluseks Eesti Statistikaameti suremustabeli (lisa 2) ja Kannisto mudeli (mis on Eesti andmetega kõige paremini sobiv mudel kõrge vanuse puhul) põhjal arvutatud väärtused (lisa 4) ning arvestame, et ${}_k p_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}$. Vanuseni 85 kasutame Eesti Statistikaameti suremustabelit ning sealt edasi Kannisto mudeli põhjal saadud tõenäosusi.

Kannisto mudeli järgi leiame üleelamistõenäosused

$$ {}_t p_x = \left( \frac{1 + ae^{bx}}{1 + ae^{b(t+x)}} \right)^{\frac{1}{b}}, \tag{7.1} $$

kasutades parameetrite $a$ ja $b$ hinnanguid J. Raudla bakalaureusetööst [8]:

mehed: $a = 5.20680*10^{-5}$ ja $b = 9.81308*10^{-1}$,

naised: $a = 1.04931*10^{-5}$ ja $b = 1.12371*10^{-1}$;

$x = 85,\ldots,110$;

$t = 1$.

Valemi (7.1) abil leitud üleelamistõenäosused on esitatud lisas 4.

Suremustabelid, mille abil oleme arvutanud kindlustusseltsi makstava pensioni suurust, on toodud lisades 4 ja 6, ning valemi (6.2) põhjal leitud aktuaarsed nüüdisväärtused lisades 5 ja 7. Intressimäär on 3%.

Saadud tulemused on esitatud ka alljärgnevas tabelis.

| III s pensionimaksete algus | Mees: $\ddot{a}_x$ | Naine: $\ddot{a}_x$ |
|---|---|---|
| 55-aastaselt | 13,6478 | 17,4915 |
| 63-aastaselt | 11,0172 | 14,3169 |

Tabel 3. Algkapital, mis on vajalik 1 ühiku suuruse eluaegse aastapensioni maksmiseks

Kui pensioni hakatakse maksma 55. eluaastal, siis valemis (6.2) $x = 55$ ja $k = 0,\dots,55$.

Kui pensioni hakatakse maksma 63. eluaastal, siis valemis (6.2) $x = 63$ ja $k = 0,\dots,47$.

Leitud väärtused $\ddot{a}_x$ on 1 ühiku suuruste pensionimaksete nüüdisväärtus hetkel, kui pensionimaksed algavad (meie näites, kui inimene on 55-aastane või 63-aastane). See tähendab, et näiteks, 55-aastasele mehele võimaldab ühe ühiku suuruseid pensionimakseid teha 13,6478 ühiku suurune summa.

Kui suured oleksid pensionimaksed aga siis, kui 13,6478 ja 17,4915 ühiku asemel vaadata järgmisi rahasummasi: 100 000 krooni, 300 000 krooni või 500 000 krooni?

Tähistame pensionimakset tähega $P_{\mathrm{III}}$ ja algkapitali, mille eest annuiteet ostetakse, tähega $S$, siis saame algkapitali ja pensionimakse jaoks seosed

$$S = P_{\mathrm{III}} \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_x \, ,$$

$$P_{\mathrm{III}} = \frac{S}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_x} \tag{7.2}$$

Andes suurusele $S$ väärtused 100 000 krooni, 300 000 krooni ja 500 000 krooni, saame alltoodud tabelis esitatud pensionide aastamaksed.

| III samba pensioni väljamaksete algus | Mees: $S$=100 000 | Naine: $S$=100 000 | Mees: $S$=300 000 | Naine: $S$=300 000 | Mees: $S$=500 000 | Naine: $S$=500 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 55-a | 7 327 - | 5 717 - | 21 982.- | 17 151.- | 36 636.- | 28 585.- |
| 63-a | 9 077 - | 6 985.- | 27 230.- | 20 954.- | 45 384.- | 34 924.- |

Tabel 4. Eluaegne aastapension eri suurusega algkapitali korral

Saadud pensionide näol on tegemist aastapensioniga.

Kui me soovime leida kuupensioni, siis tuleb kasutada valemit (6.9), kus võtame $\alpha(m) = 1$ ja $\beta(m) = \frac{m-1}{2m}$ ning $m$ =12. Seega saame kõige pealt vastavad algkapitalide suurused.

| III s pensionimaksete algus | Mees: $\ddot{a}_x^{(m)}$ | Naine: $\ddot{a}_x^{(m)}$ |
|---|---|---|
| 55-aastaselt | 13,1894 | 17,0332 |
| 63-aastaselt | 10,5589 | 13,8586 |

Tabel 5. Algkapital, mis on vajalik 1/12 ühiku suuruse eluaegse kuupensioni maksmiseks

Analoogselt valemile (7.2) saab leida ka kuupensioni $K_{III}$. Suurus $\ddot{a}_x^{(m)}$ näitab, kui suure summa eest tuleb annuiteet osta, et saada ühe kaheteistkümnendiku ühiku suuruseid kuumakseid elu lõpuni.

Vaatame näiteks olukorda, kus annuiteet ostetakse 500 000 EEK eest. Kui suurt kuupensioni hakkab kindlustusselts maksma naisele, kes hakkab pensioni saama 63-aastaselt? Kasutame lisades toodud annuiteediarvutusi.

*Lahendus:* $\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) = \alpha(m) \sum_{k=0}^{55} v^k {}_k p_x - \beta(m)$

Analoogselt eelmisele arutluskäigule saame ka siit avaldada pensioni $P_{III}$, mis leitakse vastavalt algsummale $S$

$$P_{III} = \frac{S}{\alpha(12) \ P\sum_{k=0}^{55} v^k {}_k p_x - \beta(12)} = \frac{500000}{13{,}8586} = 36079 \text{ krooni.}$$

Leidsime aastapensioni $P_{III}$ (36 079 krooni), millest saame kuupension $K_{III}$ väärtusega 3 007 krooni. Kui kindlustusselts arvestas aastapensioni, siis kujunes 63-aastase naise pensioniks 34 906 krooni. Näeme, et aastapension, mida makstakse iga kuu, tuleb suurem kui aastapension, mida makstakse kord aastas. Kui vaatame esimest pensionimakset, siis makstakse aastamaksetega lepingu järgi välja 34 906 krooni ja kuumaksetega lepingu järgi 3 007 krooni ning ülejäänud kuumaksed teenivad intressi edasi. Kirjeldatud stsenaariumist, mis kordub igal aastal, tulenebki pensionide suuruste vahe.

Kui pensionikindlustusleping sõlmitakse garanteeritud perioodiga, siis saame ühe ühiku suurusele aastapensionile vastava algsumma leida järgmise valemi abil

$$S = P_{III} \ (\ddot{a}_{n]} + {}_{n|}\ddot{a}_x),$$

kus $\ddot{a}_{n]} = \dfrac{1 - v^n}{d}$ ja ${}_{n|}\ddot{a}_x$ leitakse vastavalt valemile (6.7).

Leiame näiteks 10-aastase garanteeritud perioodiga aastapensioni, kui annuiteet ostetakse 500 000 krooni eest. Tegemist on mehega ning kindlustusselts hakkab pensioni maksma siis, kui kindlustatu on 63-aastane.

*Lahendus:* $S = \mathbb{P}_{\mathrm{III}}\ (\ddot{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\ddot{a}_x)$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d}, d = \frac{i}{1+i}, v = \frac{1}{1+i}, \ {}_{n|}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k\, {}_k p_x$$

$$S = \mathbb{P}_{\mathrm{III}} \left[\frac{1-v^{10}}{d} + \sum_{k=10}^{47} v^k\, {}_k p_x\right] = 12{,}3837\mathbb{P}_{\mathrm{III}}.$$

Seega $\mathbb{P}_{\mathrm{III}} = \dfrac{500000}{12{,}3837} = 40376$ krooni.

Kui meil oli tavaline annuiteet (st ilma garanteeritud perioodita), siis võimaldas 500 000 krooni suurune algkapital kindlustusseltsil maksta 63-aastasele mehele aastapensioni 45 384 krooni. 10-aastase garanteeritud perioodiga leping võimaldab samade tingimuste juures maksta aastapensioni 40 376 krooni. Seega on garanteeritud perioodiga leping kindlustatu jaoks kallim.

Kui meil on olukord, kus pensioni maksmine ei alga täisaastal (kindlustatu võib olla, näiteks 63 aastat ja 1 kuu vana), saame aktuaarse nüüdisväärtuse leida valemi (6.10) abil, kus meie näite puhul: $x = 63$ ja $u = 1/12$.

Vaatame näiteks, kuidas leida kindlustusseltsi poolt makstava pensioni suurus 63 aastat ja 2 kuud vanale mehele, juhul, kui algsummaks on 500 000 krooni. Kasutame lisades toodud annuiteediarvutusi.

*Lahendus*: $\ddot{a}_{x+u} = \dfrac{(1+ui)\ddot{a}_x - u(1+i)}{1-uq_x} = \dfrac{(1+\frac{2}{12}\ 0{,}03)\ 11{,}0172 - \frac{2}{12}(1+0{,}03)}{1-\frac{2}{12}\cdot 0{,}034316} = 10{,}9633$,

$$P_{III} = \frac{500000}{10,9633} = 45607 \text{ krooni.}$$

Kui kindlustusselts hakkab pensioni maksma 63 aasta ja 2 kuu vanusele mehele, siis kujuneb aastapensioni suuruseks 45 607 krooni (algkapital on 500 000 krooni). Kui pensioni hakatakse maksma 63-aastasele mehele, siis kujuneb aastapensioni suuruseks 45 384 krooni. Näeme, et kahekuune esimeste maksete vahe tingib 223 krooni suuruse pensionide vahe (kui algkapital on 500 000 krooni).

Kõik arvutatud pensionid on saadud arvestamata kindlustusseltsi tegevuskulusid ja kasumit, mis tähendab, et pensioni suurus tuleks tegelikult väiksem, kui näidetes arvutatud.

# KOKKUVÕTE

Alates 1998. aasta 1. augustist, mil jõustus pensionifondide seadus, võib rääkida pensionist kui uuest mõistest, sest alus pandi kolmest sambast koosnevale pensionisüsteemile. **Esimene sammas** on kohustuslik riiklik pensionikindlustus, mille tuluallikaks on sotsiaalmaks ning mille eesmärgiks on tagada kõigile pensionäridele pensioni baastase. **Teine sammas** on kogumispension, mille eesmärk on luua pensionieaks lisasääste. Tuluallikas jaguneb siin kaheks – osa tuleb töötaja palgast ja osa tööandja poolt töötaja eest makstavast sotsiaalmaksust. **Kolmas sammas** on kogumisprintsiibile rajatud lisapension, mille tuluallikaks on vabatahtlikud sissemaksed ja mille eesmärgiks on täiendav säästmine.

Kolmanda samba pensioniks võib raha koguda spetsiaalse pensionikindlustuse või lihtsalt kogumiskindlustuse abil. Et kogutud raha elu lõpuni makstavaks pensioniks muuta, tuleb see eluaegse annuiteedi vastu vahetada, sest kasutades sääste oma äranägemise järgi, võib juhtuda, et ühel hetkel on säästud otsa saanud. Annuiteet on fikseeritud perioodi jooksul fikseeritud ajavahemike tagant toimuvate maksete jada. Maksed võivad olla konstantse suurusega või üksteisest erineda.

Pensionikindlustus baseerub suremuse prognoosimisel. Traditsiooniliselt kasutatakse suremuse kirjeldamiseks elutabeleid ehk suremustabeleid. Elutabel ehk suremustabel on ühtaegu mudel, mis iseloomustab rahvastiku suremust teatavatel lihtsustavatel eeldustel, teiselt poolt arvutusskeem, mis võimaldab lihtsalt arvutada iga vanuse jaoks keskmist tulevast eluiga.

Eesti Statistikaamet kasutab elutabelite silumiseks kaheksaparameetrilist, kolmest komponendist koosnevat Heligman-Pollardi mudelit kujul

$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x ,$$

kus $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ on tundmatud parameetrid, mis tuleb leida.

A. R. Thatcher, V Kannisto ja J. W Vaupel leidsid, et kõrges vanuses kirjeldavad suremust kõige paremini logistiline mudel ja viimase erijuht Kannisto mudel

$$\mu_x = \frac{ae^{bx}}{1+ae^{bx}}$$

Pensionimaksete arvutamisel kasutasime kuni vanuseni 85 Eesti Statistikaameti elutabelit ning sealt edasi Kannisto mudeli põhjal arvutatud suremis- ja ellujäämistõenäosusi.

Pensionikindlustuse puhul on tegemist annuiteediga, mis koosneb pensionimaksete jadast, mida makstakse seni, kuni $x$-aastane kindlustatu elab. Seega on meil tegemist annuiteediga, kus maksete sooritamise aeg sõltub tulevasest elueast $T(x)$. Kindlustusseltsi poolt makstava pensioni $P_{III}$ arvutamiseks saime valemi

$$P_{III} = \frac{S}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_x},$$

kus $S$ on algkapitali suurus.

Garanteeritud perioodiga pensionikindlustuslepingu alusel makstava pensioni saame leida valemiga

$$P_{III} = \frac{S}{\ddot{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\ddot{a}_x} = \frac{S}{\dfrac{1-v^n}{d} + \sum_{k=m}^{\infty} v^k \, {}_k p_x}$$

# Estonian Pension Insurance Models

Kertu Fedotov

## Summary

Today, as the world's population ages, old people retire in younger years than their ancestors and young people start working in older age (because they prefer to get an university degree), old age security systems are in trouble worldwide. Income insecurity in old age is a worldwide problem and it causes a demand for improving pension systems.

Pensions are about financial techniques and people. The most popular multi-pillar pension system is a three-pillar system. Estonia has the three-pillar system as well:

- The 1$^{st}$ pillar – state pension is based on pay-as-you-go;
- The 2$^{nd}$ pillar – 1$^{st}$ pillar capitalization, where the pension is collected by the 2$^{nd}$ pillar Pension Funds;
- The 3$^{rd}$ pillar - individual pensions, which are provided by insurance companies and the 3$^{rd}$ pillar Pension Funds.

The purpose of the Master project is to present the necessary mathematical models for pension calculation and to apply them to Estonian data.

The organization of Estonian Pension System, pension insurance purposes and terms, the theory of interest and different types of annuities, mortality, the laws of mortality, mortality in high ages and basic notions of life insurance mathematics are covered in the Project. Finally the amounts of pensions, which could be paid by life-insurance companies, are presented, as examples.

Pricing and valuation of contracts, such as life insurance and annuities, depend upon knowledge of mortality now and in the future.

The traditional way of recording mortality is through life tables. The probability distribution of future lifetime of a person at age $x$ can be constructed by adopting a suitable life table. A life table is essentially a table of one-year death probabilities $q_x$, which completely defines the distribution of $K$, which denotes the number of completed future years lived by $(x)$.

We shall use Estonian life tables, which are based on official statistics, as the insurance companies do not have enough statistical data.

The method of calculation life tables which is used in Estonia is the one proposed by Heligman and Pollard (in 1980).

A. R. Thatcher, V Kannisto and J. W Vaupel found in their research that the Heligman and Pollard model gives estimates of mortality, which are far too high above age 100. This means that the model is not the best for using in high ages. This fact is a danger for life insurance companies, because if the mortality rates are overestimated, then companies believe that people will die earlier and they will calculate the pensions based on these predictions. But in reality people will live longer and there won't be enough money to pay for pensions. Thatcher, Kannisto and Vaupel found that the Logistic model and its particular case Kannisto model are the best models to describe the mortality in high ages in developed western countries. Kannisto model has also the best mach with Estonian data.

At ages between 0 and 85 years I used life tables of Estonian Statistical Office and at ages over 85 years probabilities of mortality were found out with Kannisto model.

In pension insurance there is an annuity, which includes pension payments. Life-insurance company pays these pension payments as long as the person insured (at the $x$) lives. So we have an annuity, where the payment period depends on the future lifetime $T(x)$.

The amount of the pension payment $P_{\text{III}}$ can be found by the formula

$$P_{\text{III}} = \frac{S}{\sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_x},$$

where $S$ is the sum of money which is used for buying an annuity.

For example, if a man at age 63 buys an annuity with a lump sum 500 000 Estonian Crowns then life insurance company will pay him 45 384 crowns as a yearly pension.

If the policy includes a guaranteed period – the period, while the pension payments are certain, it does not matter wheather insured is alive or not – then we can find the pension payments by following formula

$$P_{\text{III}} = \frac{S}{\ddot{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\ddot{a}_x} = \frac{S}{\frac{1-v^n}{d} + \sum_{k=m}^{\infty} v^k \, {}_k p_x}$$

For example, if a man at age 63 buys an annuity with lump sum 500 000 Estonian Crowns and the policy includes guaranteed period 10 years, then life insurance company will pay him 40 376 crowns per year.

So one can see, that the guaranteed period costs extra money for the person insured.

# KIRJANDUS


1. Adams, A. T., Bloomfield, D. S. F., Booth, P M., England, P D. *Investment Mathematics and Statistics*, London, 1993.

2. Bland, D. *Kindlustus: põhimõtted ja praktika*, Eesti Kindlustus, Tallinn, 1996.

3. Eesti Kolmesambalist pensionisüsteemi tutvustav interneti kodulehekülg:

www.pensionikeskus.ee

4. Gerber, H. U. *Life Insurance Mathematics*, second, expanded edition, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

5. Tagatisfondi seadus. *Riigi Teataja* I osa 2002, 102, 600.

6. Kellison, S. G. *The Theory of Interest*, Richard D. Irwin, Inc, Homewood, Illinois, 1970.

7 *Modelling and Forecasting Mortality Improvement*,

http://www.scor.fr/us/pdf/LA-Essay.pdf

8. Raudla, J. *Eestlaste suremusnäitajad kõrges vanuses*, bakalaureusetöö, Matemaatilise statistika instituut, Tartu Ülikool, 2000.

9. Riikliku Pensionikindlustuse seadus. *Riigi Teataja* I osa 1998, 64, 65.

10. Soome, A. *Rahvastikustatistika algkursus*, Tartu Ülikooli kirjastus, Tartu, 2000.

11. Thatcher, A. R., Kannisto, V., Vaupel, J. W *The Force of Mortality at Ages 80 to 120*, Odense University Press, Odense, 1998.

12. Tiit, E.-M., *Rahvastikustatistika*, loengukonspektid, Tartu Ülikool, 2001

Suremus

http://www.ms.ut.ee/oppetoo/rvs/14/SUREMUSL.htm

Keskmine tulevane eluiga

http://www.ms.ut.ee/oppetoo/rvs/15/elukestus.htm

13. Viirsalu, E.-L. *Elukindlustusmatemaatika*, loengukonspekt, Tartu Ülikool, 2003.

# LISA 1 – RIIKLIK PENSIONIIGA

| | NAISED | | MEHED | |
|---|---|---|---|---|
| Pensioniikka jõudmise aeg | Sünniaasta | Vanus | Sünniaasta | Vanus |
| 1999/2000 | 1942 | 57a 6k | 1937 | 62a 6k |
| 2001 | 1943 | 58a | 1938 | 63a |
| 2002/2003 | 1944 | 58a 6k | | |
| 2004 | 1945 | 59a | | |
| 2005/2006 | 1946 | 59a 6k | | |
| 2007 | 1947 | 60a | | |
| 2008/2009 | 1948 | 60a 6k | | |
| 2010 | 1949 | 61a | | |
| 2011/2012 | 1950 | 61a 6k | | |
| 2013 | 1951 | 62a | | |
| 2014/2015 | 1952 | 62a 6k | | |
| 2016 | 1953 | 63a | | |

[10, lk 2098-2099]

# LISA 2 – EESTI STATISTIKAAMETI SUREMUSTABEL 2001

| x | Suremustõenäosus | | Ellujäänud | | Eelolev eluiga | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | mehed | naised | mehed | naised | mehed | naised |
| 0 | 0.009954 | 0.007542 | 100000 | 100000 | 64.73 | 76.23 |
| 1 | 0.001083 | 0.001159 | 99005 | 99246 | 64.38 | 75.80 |
| 2 | 0.000490 | 0.000173 | 98897 | 99131 | 63.45 | 74.89 |
| 3 | 0.000324 | 0.000522 | 98849 | 99114 | 62.48 | 73.90 |
| 4 | 0.000000 | 0.000667 | 98817 | 99062 | 61.50 | 72.94 |
| 5 | 0.000766 | 0.000642 | 98817 | 98996 | 60.50 | 71.99 |
| 6 | 0.000423 | 0.000392 | 98741 | 98932 | 59.54 | 71.04 |
| 7 | 0.000397 | 0.000298 | 98699 | 98894 | 58.57 | 70.06 |
| 8 | 0.000374 | 0.000228 | 98660 | 98864 | 57.59 | 69.08 |
| 9 | 0.000390 | 0.000196 | 98623 | 98841 | 56.61 | 68.10 |
| 10 | 0.000426 | 0.000188 | 98585 | 98822 | 55.63 | 67.11 |
| 11 | 0.000444 | 0.000191 | 98543 | 98804 | 54.66 | 66.13 |
| 12 | 0.000432 | 0.000196 | 98499 | 98785 | 53.68 | 65.14 |
| 13 | 0.000429 | 0.000210 | 98457 | 98765 | 52.71 | 64.15 |
| 14 | 0.000493 | 0.000232 | 98414 | 98745 | 51.73 | 63.16 |
| 15 | 0.000648 | 0.000263 | 98366 | 98722 | 50.75 | 62.18 |
| 16 | 0.000889 | 0.000300 | 98302 | 98696 | 49.79 | 61.19 |
| 17 | 0.001175 | 0.000347 | 98215 | 98666 | 48.83 | 60.21 |
| 18 | 0.001484 | 0.000408 | 98099 | 98632 | 47.89 | 59.23 |
| 19 | 0.001789 | 0.000470 | 97954 | 98592 | 46.96 | 58.26 |
| 20 | 0.002072 | 0.000523 | 97779 | 98545 | 46.04 | 57.28 |
| 21 | 0.002293 | 0.000553 | 97576 | 98494 | 45.13 | 56.31 |
| 22 | 0.002419 | 0.000564 | 97352 | 98439 | 44.24 | 55.35 |
| 23 | 0.002453 | 0.000556 | 97117 | 98384 | 43.34 | 54.38 |
| 24 | 0.002443 | 0.000541 | 96879 | 98329 | 42.45 | 53.41 |
| 25 | 0.002443 | 0.000523 | 96642 | 98276 | 41.55 | 52.43 |
| 26 | 0.002488 | 0.000525 | 96406 | 98224 | 40.65 | 51.46 |
| 27 | 0.002582 | 0.000552 | 96166 | 98173 | 39.75 | 50.49 |
| 28 | 0.002738 | 0.000622 | 95918 | 98119 | 38.85 | 49.52 |
| 29 | 0.002949 | 0.000718 | 95655 | 98058 | 37.96 | 48.55 |
| 30 | 0.003183 | 0.000831 | 95373 | 97987 | 37.07 | 47.58 |
| 31 | 0.003390 | 0.000946 | 95069 | 97906 | 36.19 | 46.62 |
| 32 | 0.003557 | 0.001092 | 94747 | 97813 | 35.31 | 45.66 |
| 33 | 0.003765 | 0.001277 | 94410 | 97706 | 34.43 | 44.71 |
| 34 | 0.004106 | 0.001476 | 94055 | 97582 | 33.56 | 43.77 |
| 35 | 0.004618 | 0.001618 | 93668 | 97438 | 32.70 | 42.83 |
| 36 | 0.005232 | 0.001660 | 93236 | 97280 | 31.85 | 41.90 |
| 37 | 0.005857 | 0.001636 | 92748 | 97118 | 31.01 | 40.97 |
| 38 | 0.006451 | 0.001618 | 92205 | 96960 | 30.19 | 40.04 |
| 39 | 0.007028 | 0.001675 | 91610 | 96803 | 29.38 | 39.10 |
| 40 | 0.007590 | 0.001809 | 90966 | 96641 | 28.59 | 38.17 |
| 41 | 0.008191 | 0.002003 | 90276 | 96466 | 27.80 | 37.23 |
| 42 | 0.008911 | 0.002237 | 89536 | 96273 | 27.03 | 36.31 |

| x | Suremustõenäosus | | Ellujäänud | | Eelolev eluiga | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | mehed | naised | mehed | naised | mehed | naised |
| 43 | 0.009912 | 0.002528 | 88739 | 96057 | 26.27 | 35.39 |
| 44 | 0.011102 | 0.002908 | 87859 | 95814 | 25.52 | 34.48 |
| 45 | 0.012307 | 0.003376 | 86884 | 95536 | 24.81 | 33.58 |
| 46 | 0.013224 | 0.003881 | 85814 | 95213 | 24.11 | 32.69 |
| 47 | 0.013941 | 0.004351 | 84679 | 94844 | 23.42 | 31.81 |
| 48 | 0.014601 | 0.004742 | 83499 | 94431 | 22.75 | 30.95 |
| 49 | 0.015376 | 0.005063 | 82280 | 93983 | 22.08 | 30.10 |
| 50 | 0.016162 | 0.005363 | 81015 | 93507 | 21.42 | 29.25 |
| 51 | 0.016869 | 0.005719 | 79705 | 93006 | 20.76 | 28.40 |
| 52 | 0.017675 | 0.006218 | 78361 | 92474 | 20.11 | 27.56 |
| 53 | 0.018795 | 0.006855 | 76976 | 91899 | 19.46 | 26.73 |
| 54 | 0.020404 | 0.007556 | 75529 | 91269 | 18.82 | 25.91 |
| 55 | 0.022153 | 0.008184 | 73988 | 90579 | 18.20 | 25.11 |
| 56 | 0.023755 | 0.008690 | 72349 | 89838 | 17.61 | 24.31 |
| 57 | 0.024973 | 0.009090 | 70630 | 89057 | 17.02 | 23.52 |
| 58 | 0.026089 | 0.009415 | 68866 | 88248 | 16.44 | 22.73 |
| 59 | 0.027361 | 0.009696 | 67070 | 87417 | 15.87 | 21.94 |
| 60 | 0.028684 | 0.009917 | 65235 | 86570 | 15.30 | 21.15 |
| 61 | 0.030421 | 0.010172 | 63363 | 85711 | 14.74 | 20.36 |
| 62 | 0.032294 | 0.010524 | 61436 | 84839 | 14.19 | 19.56 |
| 63 | 0.034316 | 0.011168 | 59452 | 83946 | 13.65 | 18.76 |
| 64 | 0.036497 | 0.012160 | 57412 | 83009 | 13.11 | 17.97 |
| 65 | 0.038849 | 0.013452 | 55316 | 81999 | 12.59 | 17.18 |
| 66 | 0.041386 | 0.014903 | 53167 | 80896 | 12.08 | 16.41 |
| 67 | 0.044121 | 0.016533 | 50967 | 79691 | 11.58 | 15.65 |
| 68 | 0.047069 | 0.018364 | 48718 | 78373 | 11.09 | 14.91 |
| 69 | 0.050246 | 0.020421 | 46425 | 76934 | 10.61 | 14.18 |
| 70 | 0.053669 | 0.022729 | 44092 | 75363 | 10.15 | 13.46 |
| 71 | 0.057356 | 0.025320 | 41726 | 73650 | 9.70 | 12.76 |
| 72 | 0.061325 | 0.028228 | 39333 | 71785 | 9.25 | 12.08 |
| 73 | 0.065598 | 0.031488 | 36921 | 69759 | 8.83 | 11.42 |
| 74 | 0.070196 | 0.035144 | 34499 | 67562 | 8.41 | 10.77 |
| 75 | 0.075141 | 0.039241 | 32077 | 65188 | 8.01 | 10.15 |
| 76 | 0.080458 | 0.043829 | 29667 | 62630 | 7.62 | 9.54 |
| 77 | 0.086172 | 0.048966 | 27280 | 59885 | 7.24 | 8.96 |
| 78 | 0.092310 | 0.054713 | 24929 | 56952 | 6.88 | 8.39 |
| 79 | 0.098899 | 0.061138 | 22628 | 53836 | 6.53 | 7.85 |
| 80 | 0.105969 | 0.068315 | 20390 | 50545 | 6.19 | 7.33 |
| 81 | 0.113550 | 0.076324 | 18229 | 47092 | 5.86 | 6.83 |
| 82 | 0.121674 | 0.085254 | 16159 | 43498 | 5.55 | 6.35 |
| 83 | 0.130374 | 0.095198 | 14193 | 39789 | 5.25 | 5.90 |
| 84 | 0.139682 | 0.106258 | 12343 | 36002 | 4.96 | 5.46 |
| 85 | 0.149633 | 0.11854 | 10619 | 32176 | 4.68 | 5.05 |
| 86 | 0.160263 | 0.13216 | 9030 | 28362 | 4.42 | 4.67 |
| 87 | 0.171605 | 0.14723 | 7583 | 24614 | 4.17 | 4.30 |
| 88 | 0.183695 | 0.16387 | 6281 | 20990 | 3.92 | 3.96 |
| 89 | 0.196568 | 0.18221 | 5128 | 17550 | 3.70 | 3.63 |
| 90 | 0.210256 | 0.20237 | 4120 | 14352 | 3.48 | 3.33 |
| 91 | 0.224794 | 0.22445 | 3253 | 11448 | 3.27 | 3.05 |
| 92 | 0.240209 | 0.24857 | 2522 | 8878 | 3.07 | 2.79 |

| x | Suremustõenäosus | | Ellujäänud | | Eelolev eluiga | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | mehed | naised | mehed | naised | mehed | naised |
| 93 | 0.256531 | 0.27482 | 1916 | 6671 | 2.89 | 2.55 |
| 94 | 0.273783 | 0.30325 | 1425 | 4838 | 2.71 | 2.32 |
| 95 | 0.291984 | 0.33391 | 1035 | 3371 | 2.54 | 2.12 |
| 96 | 0.311149 | 0.3668 | 733 | 2245 | 2.38 | 1.93 |
| 97 | 0.331286 | 0.40187 | 505 | 1422 | 2.23 | 1.75 |
| 98 | 0.352395 | 0.43901 | 337 | 850 | 2.10 | 1.59 |
| 99 | 0.374467 | 0.47804 | 219 | 477 | 1.96 | 1.45 |
| 100 | 0.397485 | 0.51873 | 137 | 249 | 1.83 | 1.32 |
| 101 | 0.421419 | 0.56073 | 82 | 120 | 1.72 | 1.20 |
| 102 | 0.446225 | 0.60362 | 48 | 53 | 1.58 | 1.08 |
| 103 | 0.47185 | 0.6469 | 26 | 21 | 1.50 | 0.98 |
| 104 | 0.498221 | 0.68997 | 14 | 7 | 1.36 | 0.93 |
| 105 | 0.525252 | 0.73218 | 7 | 2 | 1.21 | 1.00 |
| 106 | 0.55284 | 0.77284 | 3 | 1 | 1.17 | 0.50 |
| 107 | 0.580867 | 0.81126 | 1 | 0 | | |
| 108 | 0.609194 | 0.84678 | 1 | 0 | | |
| 109 | 0.63767 | 0.87882 | 0 | 0 | | |
| 110 | 0.666126 | 0.90693 | 0 | 0 | | |

[Eesti Statistikaamet]

# LISA 3 – SUREMUSTABELI TÄITMINE

| | Suremustõenäosus | | Ellujäämistõenäosus | | Ellujäänud | | Surnud | | Eelolev eluiga | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | mehed | naised | mehed | naised | mehed | naised | mehed | naised | mehed | naised |
| 0 | 0.009954 | 0.007542 | 0.990046 | 0.992458 | 100000 | 100000 | 995 | 754 | 64.73 | 76.23 |
| 1 | 0.001083 | 0.001159 | 0.998917 | 0.998841 | 99005 | 99246 | 107 | 115 | 64.38 | 75.80 |
| 2 | 0.000490 | 0.000173 | 0.999510 | 0.999827 | 98897 | 99131 | 48 | 17 | 63.45 | 74.89 |
| 3 | 0.000324 | 0.000522 | 0.999676 | 0.999478 | 98849 | 99114 | 32 | 52 | 62.48 | 73.90 |
| 4 | 0.000000 | 0.000667 | 1.000000 | 0.999333 | 98817 | 99062 | 0 | 66 | 61.50 | 72.94 |
| 5 | 0.000766 | 0.000642 | 0.999234 | 0.999358 | 98817 | 98996 | 76 | 64 | 60.50 | 71.99 |
| 6 | 0.000423 | 0.000392 | 0.999577 | 0.999608 | 98741 | 98932 | 42 | 39 | 59.54 | 71.04 |
| 7 | 0.000397 | 0.000298 | 0.999603 | 0.999702 | 98699 | 98894 | 39 | 29 | 58.57 | 70.06 |
| 8 | 0.000374 | 0.000228 | 0.999626 | 0.999772 | 98660 | 98864 | 37 | 23 | 57.59 | 69.08 |
| 9 | 0.000390 | 0.000196 | 0.999610 | 0.999804 | 98623 | 98841 | 38 | 19 | 56.61 | 68.10 |
| 10 | 0.000426 | 0.000188 | 0.999574 | 0.999812 | 98585 | 98822 | 42 | 19 | 55.63 | 67.11 |
| 11 | 0.000444 | 0.000191 | 0.999556 | 0.999809 | 98543 | 98804 | 44 | 19 | 54.66 | 66.13 |
| 12 | 0.000432 | 0.000196 | 0.999568 | 0.999804 | 98499 | 98785 | 43 | 19 | 53.68 | 65.14 |
| 13 | 0.000429 | 0.000210 | 0.999571 | 0.999790 | 98457 | 98765 | 42 | 21 | 52.71 | 64.15 |
| 14 | 0.000493 | 0.000232 | 0.999507 | 0.999768 | 98414 | 98745 | 49 | 23 | 51.73 | 63.16 |
| 15 | 0.000648 | 0.000263 | 0.999352 | 0.999737 | 98366 | 98722 | 64 | 26 | 50.75 | 62.18 |
| 16 | 0.000889 | 0.000300 | 0.999111 | 0.999700 | 98302 | 98696 | 87 | 30 | 49.79 | 61.19 |
| 17 | 0.001175 | 0.000347 | 0.998825 | 0.999653 | 98215 | 98666 | 115 | 34 | 48.83 | 60.21 |
| 18 | 0.001484 | 0.000408 | 0.998516 | 0.999592 | 98099 | 98632 | 146 | 40 | 47.89 | 59.23 |
| 19 | 0.001789 | 0.000470 | 0.998211 | 0.999530 | 97954 | 98592 | 175 | 46 | 46.96 | 58.26 |
| 20 | 0.002072 | 0.000523 | 0.997928 | 0.999477 | 97779 | 98545 | 203 | 52 | 46.04 | 57.28 |
| 21 | 0.002293 | 0.000553 | 0.997707 | 0.999447 | 97576 | 98494 | 224 | 54 | 45.13 | 56.31 |
| 22 | 0.002419 | 0.000564 | 0.997581 | 0.999436 | 97352 | 98439 | 235 | 56 | 44.24 | 55.35 |
| 23 | 0.002453 | 0.000556 | 0.997547 | 0.999444 | 97117 | 98384 | 238 | 55 | 43.34 | 54.38 |
| 24 | 0.002443 | 0.000541 | 0.997557 | 0.999459 | 96879 | 98329 | 237 | 53 | 42.45 | 53.41 |
| 25 | 0.002443 | 0.000523 | 0.997557 | 0.999477 | 96642 | 98276 | 236 | 51 | 41.55 | 52.43 |
| 26 | 0.002488 | 0.000525 | 0.997512 | 0.999475 | 96406 | 98224 | 240 | 52 | 40.65 | 51.46 |
| 27 | 0.002582 | 0.000552 | 0.997418 | 0.999448 | 96166 | 98173 | 248 | 54 | 39.75 | 50.49 |
| 28 | 0.002738 | 0.000622 | 0.997262 | 0.999378 | 95918 | 98119 | 263 | 61 | 38.85 | 49.52 |
| 29 | 0.002949 | 0.000718 | 0.997051 | 0.999282 | 95655 | 98058 | 282 | 70 | 37.96 | 48.55 |
| 30 | 0.003183 | 0.000831 | 0.996817 | 0.999169 | 95373 | 97987 | 304 | 81 | 37.07 | 47.58 |
| 31 | 0.003390 | 0.000946 | 0.996610 | 0.999054 | 95069 | 97906 | 322 | 93 | 36.19 | 46.62 |
| 32 | 0.003557 | 0.001092 | 0.996443 | 0.998908 | 94747 | 97813 | 337 | 107 | 35.31 | 45.66 |
| 33 | 0.003765 | 0.001277 | 0.996235 | 0.998723 | 94410 | 97706 | 355 | 125 | 34.43 | 44.71 |
| 34 | 0.004106 | 0.001476 | 0.995894 | 0.998524 | 94055 | 97582 | 386 | 144 | 33.56 | 43.77 |
| 35 | 0.004618 | 0.001618 | 0.995382 | 0.998382 | 93668 | 97438 | 433 | 158 | 32.70 | 42.83 |
| 36 | 0.005232 | 0.001660 | 0.994768 | 0.998340 | 93236 | 97280 | 488 | 161 | 31.85 | 41.90 |
| 37 | 0.005857 | 0.001636 | 0.994143 | 0.998364 | 92748 | 97118 | 543 | 159 | 31.01 | 40.97 |
| 38 | 0.006451 | 0.001618 | 0.993549 | 0.998382 | 92205 | 96960 | 595 | 157 | 30.19 | 40.04 |
| 39 | 0.007028 | 0.001675 | 0.992972 | 0.998325 | 91610 | 96803 | 644 | 162 | 29.38 | 39.10 |
| 40 | 0.007590 | 0.001809 | 0.992410 | 0.998191 | 90966 | 96641 | 690 | 175 | 28.59 | 38.17 |
| 41 | 0.008191 | 0.002003 | 0.991809 | 0.997997 | 90276 | 96466 | 739 | 193 | 27.80 | 37.23 |
| 42 | 0.008911 | 0.002237 | 0.991089 | 0.997763 | 89536 | 96273 | 798 | 215 | 27.03 | 36.31 |

| | Suremustõenäosus | | Ellujäämistõenäosus | | Ellujäänud | | Surnud | | Eelolev eluiga | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | mehed | naised | mehed | naised | mehed | naised | mehed | naised | mehed | naised |
| 43 | 0.009912 | 0.002528 | 0.990088 | 0.997472 | 88739 | 96057 | 880 | 243 | 26.27 | 35.39 |
| 44 | 0.011102 | 0.002908 | 0.988898 | 0.997092 | 87859 | 95814 | 975 | 279 | 25.52 | 34.48 |
| 45 | 0.012307 | 0.003376 | 0.987693 | 0.996624 | 86884 | 95536 | 1069 | 323 | 24.81 | 33.58 |
| 46 | 0.013224 | 0.003881 | 0.986776 | 0.996119 | 85814 | 95213 | 1135 | 370 | 24.11 | 32.69 |
| 47 | 0.013941 | 0.004351 | 0.986059 | 0.995649 | 84679 | 94844 | 1181 | 413 | 23.42 | 31.81 |
| 48 | 0.014601 | 0.004742 | 0.985399 | 0.995258 | 83499 | 94431 | 1219 | 448 | 22.75 | 30.95 |
| 49 | 0.015376 | 0.005063 | 0.984624 | 0.994937 | 82280 | 93983 | 1265 | 476 | 22.08 | 30.10 |
| 50 | 0.016162 | 0.005363 | 0.983838 | 0.994637 | 81015 | 93507 | 1309 | 501 | 21.42 | 29.25 |
| 51 | 0.016869 | 0.005719 | 0.983131 | 0.994281 | 79705 | 93006 | 1345 | 532 | 20.76 | 28.40 |
| 52 | 0.017675 | 0.006218 | 0.982325 | 0.993782 | 78361 | 92474 | 1385 | 575 | 20.11 | 27.56 |
| 53 | 0.018795 | 0.006855 | 0.981205 | 0.993145 | 76976 | 91899 | 1447 | 630 | 19.46 | 26.73 |
| 54 | 0.020404 | 0.007556 | 0.979596 | 0.992444 | 75529 | 91269 | 1541 | 690 | 18.82 | 25.91 |
| 55 | 0.022153 | 0.008184 | 0.977847 | 0.991816 | 73988 | 90579 | 1639 | 741 | 18.20 | 25.11 |
| 56 | 0.023755 | 0.008690 | 0.976245 | 0.991310 | 72349 | 89838 | 1719 | 781 | 17.61 | 24.31 |
| 57 | 0.024973 | 0.009090 | 0.975027 | 0.990910 | 70630 | 89057 | 1764 | 810 | 17.02 | 23.52 |
| 58 | 0.026089 | 0.009415 | 0.973911 | 0.990585 | 68866 | 88248 | 1797 | 831 | 16.44 | 22.73 |
| 59 | 0.027361 | 0.009696 | 0.972639 | 0.990304 | 67070 | 87417 | 1835 | 848 | 15.87 | 21.94 |
| 60 | 0.028684 | 0.009917 | 0.971316 | 0.990083 | 65235 | 86570 | 1871 | 859 | 15.30 | 21.15 |
| 61 | 0.030421 | 0.010172 | 0.969579 | 0.989828 | 63363 | 85711 | 1928 | 872 | 14.74 | 20.36 |
| 62 | 0.032294 | 0.010524 | 0.967706 | 0.989476 | 61436 | 84839 | 1984 | 893 | 14.19 | 19.56 |
| 63 | 0.034316 | 0.011168 | 0.965684 | 0.988832 | 59452 | 83946 | 2040 | 938 | 13.65 | 18.76 |
| 64 | 0.036497 | 0.012160 | 0.963503 | 0.987840 | 57412 | 83009 | 2095 | 1009 | 13.11 | 17.97 |
| 65 | 0.038849 | 0.013452 | 0.961151 | 0.986548 | 55316 | 81999 | 2149 | 1103 | 12.59 | 17.18 |
| 66 | 0.041386 | 0.014903 | 0.958614 | 0.985097 | 53167 | 80896 | 2200 | 1206 | 12.08 | 16.41 |
| 67 | 0.044121 | 0.016533 | 0.955879 | 0.983467 | 50967 | 79691 | 2249 | 1318 | 11.58 | 15.65 |
| 68 | 0.047069 | 0.018364 | 0.952931 | 0.981636 | 48718 | 78373 | 2293 | 1439 | 11.09 | 14.91 |
| 69 | 0.050246 | 0.020421 | 0.949754 | 0.979579 | 46425 | 76934 | 2333 | 1571 | 10.61 | 14.18 |
| 70 | 0.053669 | 0.022729 | 0.946331 | 0.977271 | 44092 | 75363 | 2366 | 1713 | 10.15 | 13.46 |
| 71 | 0.057356 | 0.025320 | 0.942644 | 0.974680 | 41726 | 73650 | 2393 | 1865 | 9.70 | 12.76 |
| 72 | 0.061325 | 0.028228 | 0.938675 | 0.971772 | 39333 | 71785 | 2412 | 2026 | 9.25 | 12.08 |
| 73 | 0.065598 | 0.031488 | 0.934402 | 0.968512 | 36921 | 69759 | 2422 | 2197 | 8.83 | 11.42 |
| 74 | 0.070196 | 0.035144 | 0.929804 | 0.964856 | 34499 | 67562 | 2422 | 2374 | 8.41 | 10.77 |
| 75 | 0.075141 | 0.039241 | 0.924859 | 0.960759 | 32077 | 65188 | 2410 | 2558 | 8.01 | 10.15 |
| 76 | 0.080458 | 0.043829 | 0.919542 | 0.956171 | 29667 | 62630 | 2387 | 2745 | 7.62 | 9.54 |
| 77 | 0.086172 | 0.048966 | 0.913828 | 0.951034 | 27280 | 59885 | 2351 | 2932 | 7.24 | 8.96 |
| 78 | 0.092310 | 0.054713 | 0.907690 | 0.945287 | 24929 | 56952 | 2301 | 3116 | 6.88 | 8.39 |
| 79 | 0.098899 | 0.061138 | 0.901101 | 0.938862 | 22628 | 53836 | 2238 | 3291 | 6.53 | 7.85 |
| 80 | 0.105969 | 0.068315 | 0.894031 | 0.931685 | 20390 | 50545 | 2161 | 3453 | 6.19 | 7.33 |
| 81 | 0.113550 | 0.076324 | 0.886450 | 0.923676 | 18229 | 47092 | 2070 | 3594 | 5.86 | 6.83 |
| 82 | 0.121674 | 0.085254 | 0.878326 | 0.914746 | 16159 | 43498 | 1966 | 3708 | 5.55 | 6.35 |
| 83 | 0.130374 | 0.095198 | 0.869626 | 0.904802 | 14193 | 39789 | 1850 | 3788 | 5.25 | 5.90 |
| 84 | 0.139682 | 0.106258 | 0.860318 | 0.893742 | 12343 | 36002 | 1724 | 3826 | 4.96 | 5.46 |
| 85 | 0.149633 | 0.118540 | 0.850367 | 0.881460 | 10619 | 32176 | 1589 | 3814 | 4.68 | 5.05 |

Suremustõenäosus on võetud Eesti Statistikaameti elutabelist 2001, ülejäänud veerud on täidetud 3. peatükis tutvustatud valemeid kasutades.

# LISA 4 – KANNISTO MUDEL

KANNISTO MUDEL

| | |
|---|---|
| mehed 1/*b* | 10.19048046 |
| naised 1/*b* | 8.899093182 |

| | Mehed | Naised |
|---|---|---|
| parameeter *a* | 0.000052068 | 1.04931E-05 |
| parameeter *b* | 0.0981308 | 0.112371 |

| *x* | mehed $p_x$ | naised $p_x$ | mehed $q_x$ | naised $q_x$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| 85 | 0.82980951 | 0.87363769 | 0.17019049 | 0.12636231 |
| 86 | 0.81716943 | 0.86177283 | 0.18283057 | 0.13822717 |
| 87 | 0.80397862 | 0.84911570 | 0.19602138 | 0.15088430 |
| 88 | 0.79026965 | 0.83567358 | 0.20973035 | 0.16432642 |
| 89 | 0.77608324 | 0.82146564 | 0.22391676 | 0.17853436 |
| 90 | 0.76146810 | 0.80652396 | 0.23853190 | 0.19347604 |
| 91 | 0.74648054 | 0.79089428 | 0.25351946 | 0.20910572 |
| 92 | 0.73118386 | 0.77463628 | 0.26881614 | 0.22536372 |
| 93 | 0.71564736 | 0.75782341 | 0.28435264 | 0.24217659 |
| 94 | 0.69994526 | 0.74054207 | 0.30005474 | 0.25945793 |
| 95 | 0.68415524 | 0.72289027 | 0.31584476 | 0.27710973 |
| 96 | 0.66835702 | 0.70497563 | 0.33164298 | 0.29502437 |
| 97 | 0.65263063 | 0.68691291 | 0.34736937 | 0.31308709 |
| 98 | 0.63705483 | 0.66882116 | 0.36294517 | 0.33117884 |
| 99 | 0.62170551 | 0.65082049 | 0.37829449 | 0.34917951 |
| 100 | 0.60665417 | 0.63302892 | 0.39334583 | 0.36697108 |
| 101 | 0.59196664 | 0.61555920 | 0.40803336 | 0.38444080 |
| 102 | 0.57770199 | 0.59851597 | 0.42229801 | 0.40148403 |
| 103 | 0.56391175 | 0.58199332 | 0.43608825 | 0.41800668 |
| 104 | 0.55063932 | 0.56607294 | 0.44936068 | 0.43392706 |
| 105 | 0.53791974 | 0.55082285 | 0.46208026 | 0.44917715 |
| 106 | 0.52577971 | 0.53629674 | 0.47422029 | 0.46370326 |
| 107 | 0.51423778 | 0.52253398 | 0.48576222 | 0.47746602 |
| 108 | 0.50330485 | 0.50956005 | 0.49669515 | 0.49043995 |
| 109 | 0.49298470 | 0.49738752 | 0.50701530 | 0.50261248 |
| 110 | 0.48327475 | 0.48601726 | 0.51672525 | 0.51398274 |

# LISA 5 – AKTUAARSE NÜÜDISVÄÄRTUSE LEIDMINE ($x = 55$)

| | |
|---|---|
| $i$ | 0.03 |
| | 0.970874 |

| $k$ | $v^k$ | ${}_k p_x$ | | $v^k\,{}_k p_x$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | mehed | naised | mehed | naised |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0.970874 | 0.977847 | 0.991816 | 0.949366 | 0.962928 |
| 2 | 0.942596 | 0.954618 | 0.983197 | 0.899819 | 0.926758 |
| 3 | 0.915142 | 0.930779 | 0.974260 | 0.851794 | 0.891586 |
| 4 | 0.888487 | 0.906495 | 0.965087 | 0.805409 | 0.857467 |
| 5 | 0.862609 | 0.881693 | 0.955738 | 0.760556 | 0.824428 |
| 6 | 0.837484 | 0.856402 | 0.946260 | 0.717224 | 0.792478 |
| 7 | 0.813092 | 0.830350 | 0.936628 | 0.675150 | 0.761564 |
| 8 | 0.789409 | 0.803534 | 0.926771 | 0.634318 | 0.731601 |
| 9 | 0.766417 | 0.775960 | 0.916421 | 0.594709 | 0.702360 |
| 10 | 0.744094 | 0.747640 | 0.905277 | 0.556314 | 0.673611 |
| 11 | 0.722421 | 0.718595 | 0.893099 | 0.519128 | 0.645194 |
| 12 | 0.701380 | 0.688855 | 0.879789 | 0.483149 | 0.617067 |
| 13 | 0.680951 | 0.658462 | 0.865244 | 0.448381 | 0.589189 |
| 14 | 0.661118 | 0.627469 | 0.849354 | 0.414831 | 0.561523 |
| 15 | 0.641862 | 0.595941 | 0.832010 | 0.382512 | 0.534035 |
| 16 | 0.623167 | 0.563958 | 0.813099 | 0.351440 | 0.506696 |
| 17 | 0.605016 | 0.531611 | 0.792511 | 0.321634 | 0.479482 |
| 18 | 0.587395 | 0.499010 | 0.770140 | 0.293116 | 0.452376 |
| 19 | 0.570286 | 0.466276 | 0.745890 | 0.265911 | 0.425371 |
| 20 | 0.553676 | 0.433546 | 0.719677 | 0.240044 | 0.398468 |
| 21 | 0.537549 | 0.400968 | 0.691436 | 0.215540 | 0.371681 |
| 22 | 0.521893 | 0.368707 | 0.661131 | 0.192426 | 0.345039 |
| 23 | 0.506692 | 0.336935 | 0.628758 | 0.170722 | 0.318586 |
| 24 | 0.491934 | 0.305833 | 0.594357 | 0.150449 | 0.292384 |
| 25 | 0.477606 | 0.275586 | 0.558019 | 0.131621 | 0.266513 |
| 26 | 0.463695 | 0.246383 | 0.519898 | 0.114246 | 0.241074 |
| 27 | 0.450189 | 0.218406 | 0.480217 | 0.098324 | 0.216189 |
| 28 | 0.437077 | 0.191831 | 0.439277 | 0.083845 | 0.191998 |
| 29 | 0.424346 | 0.166822 | 0.397464 | 0.070790 | 0.168663 |
| 30 | 0.411987 | 0.143520 | 0.355231 | 0.059128 | 0.146350 |
| 31 | 0.399987 | 0.119094 | 0.310343 | 0.047636 | 0.124133 |
| 32 | 0.388337 | 0.097320 | 0.267445 | 0.037793 | 0.103859 |
| 33 | 0.377026 | 0.078243 | 0.227092 | 0.029500 | 0.085620 |
| 34 | 0.366045 | 0.061833 | 0.189775 | 0.022634 | 0.069466 |
| 35 | 0.355383 | 0.047988 | 0.155893 | 0.017054 | 0.055402 |
| 36 | 0.345032 | 0.036541 | 0.125732 | 0.012608 | 0.043382 |
| 37 | 0.334983 | 0.027277 | 0.099440 | 0.009137 | 0.033311 |
| 38 | 0.325226 | 0.019945 | 0.077030 | 0.006487 | 0.025052 |
| 39 | 0.315754 | 0.014273 | 0.058375 | 0.004507 | 0.018432 |
| 40 | 0.306557 | 0.009991 | 0.043229 | 0.003063 | 0.013252 |
| 41 | 0.297628 | 0.006835 | 0.031250 | 0.002034 | 0.009301 |
| 42 | 0.288959 | 0.004568 | 0.022031 | 0.001320 | 0.006366 |
| 43 | 0.280543 | 0.002981 | 0.015133 | 0.000836 | 0.004245 |
| 44 | 0.272372 | 0.001899 | 0.010121 | 0.000517 | 0.002757 |
| 45 | 0.264439 | 0.001181 | 0.006587 | 0.000312 | 0.001742 |

| $k$ | $v^k$ | ${}_k p_x$ | | $v^k \, {}_k p_x$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | mehed | naised | mehed | naised |
| 46 | 0.256737 | 0.000716 | 0.004170 | 0.000184 | 0.001071 |
| 47 | 0.249259 | 0.000424 | 0.002567 | 0.000106 | 0.000640 |
| 48 | 0.241999 | 0.000245 | 0.001536 | 0.000059 | 0.000372 |
| 49 | 0.234950 | 0.000138 | 0.000894 | 0.000032 | 0.000210 |
| 50 | 0.228107 | 0.000076 | 0.000506 | 0.000017 | 0.000115 |
| 51 | 0.221463 | 0.000041 | 0.000279 | 0.000009 | 0.000062 |
| 52 | 0.215013 | 0.000022 | 0.000150 | 0.000005 | 0.000032 |
| 53 | 0.208750 | 0.000011 | 0.000078 | 0.000002 | 0.000016 |
| 54 | 0.202670 | 0.000006 | 0.000040 | 0.000001 | 0.000008 |
| 55 | 0.196767 | 0.000003 | 0.000020 | 0.000001 | 0.000004 |
| $\ddot{a}_x$ | | | | 13.647752 | 17.491510 |

# LISA 6 – AKTUAARSE NÜÜDISVÄÄRTUSE LEIDMINE ($x = 63$)

| | |
|---|---|
| $i$ | 0.03 |
| | 0.970874 |

| $k$ | $v^k$ | ${}_k p_x$ | | $v^k\,{}_k p_x$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | mehed | naised | mehed | naised |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0.970874 | 0.965684 | 0.988832 | 0.937557 | 0.960031 |
| 2 | 0.942596 | 0.930439 | 0.976808 | 0.877028 | 0.920735 |
| 3 | 0.915142 | 0.894293 | 0.963668 | 0.818405 | 0.881893 |
| 4 | 0.888487 | 0.857282 | 0.949306 | 0.761684 | 0.843446 |
| 5 | 0.862609 | 0.819457 | 0.933611 | 0.706871 | 0.805341 |
| 6 | 0.837484 | 0.780886 | 0.916467 | 0.653980 | 0.767526 |
| 7 | 0.813092 | 0.741650 | 0.897751 | 0.603029 | 0.729954 |
| 8 | 0.789409 | 0.701846 | 0.877346 | 0.554044 | 0.692585 |
| 9 | 0.766417 | 0.661591 | 0.855132 | 0.507055 | 0.655387 |
| 10 | 0.744094 | 0.621019 | 0.830993 | 0.462097 | 0.618337 |
| 11 | 0.722421 | 0.580282 | 0.804827 | 0.419208 | 0.581424 |
| 12 | 0.701380 | 0.539548 | 0.776542 | 0.378428 | 0.544651 |
| 13 | 0.680951 | 0.499006 | 0.746070 | 0.339799 | 0.508037 |
| 14 | 0.661118 | 0.458857 | 0.713370 | 0.303358 | 0.471622 |
| 15 | 0.641862 | 0.419316 | 0.678439 | 0.269143 | 0.435464 |
| 16 | 0.623167 | 0.380609 | 0.641320 | 0.237183 | 0.399649 |
| 17 | 0.605016 | 0.342967 | 0.602111 | 0.207501 | 0.364287 |
| 18 | 0.587395 | 0.306623 | 0.560978 | 0.180109 | 0.329515 |
| 19 | 0.570286 | 0.271806 | 0.518162 | 0.155007 | 0.295500 |
| 20 | 0.553676 | 0.238735 | 0.473986 | 0.132182 | 0.262435 |
| 21 | 0.537549 | 0.207610 | 0.428870 | 0.111600 | 0.230539 |
| 22 | 0.521893 | 0.178610 | 0.383299 | 0.093215 | 0.200041 |
| 23 | 0.506692 | 0.148213 | 0.334865 | 0.075098 | 0.169673 |
| 24 | 0.491934 | 0.121115 | 0.288577 | 0.059580 | 0.141961 |
| 25 | 0.477606 | 0.097374 | 0.245036 | 0.046506 | 0.117030 |
| 26 | 0.463695 | 0.076952 | 0.204770 | 0.035682 | 0.094951 |
| 27 | 0.450189 | 0.059721 | 0.168211 | 0.026886 | 0.075727 |
| 28 | 0.437077 | 0.045475 | 0.135666 | 0.019876 | 0.059297 |
| 29 | 0.424346 | 0.033947 | 0.107298 | 0.014405 | 0.045531 |
| 30 | 0.411987 | 0.024821 | 0.083117 | 0.010226 | 0.034243 |
| 31 | 0.399987 | 0.017763 | 0.062988 | 0.007105 | 0.025194 |
| 32 | 0.388337 | 0.012433 | 0.046645 | 0.004828 | 0.018114 |
| 33 | 0.377026 | 0.008506 | 0.033719 | 0.003207 | 0.012713 |
| 34 | 0.366045 | 0.005685 | 0.023771 | 0.002081 | 0.008701 |
| 35 | 0.355383 | 0.003710 | 0.016329 | 0.001319 | 0.005803 |
| 36 | 0.345032 | 0.002364 | 0.010921 | 0.000816 | 0.003768 |
| 37 | 0.334983 | 0.001470 | 0.007108 | 0.000492 | 0.002381 |
| 38 | 0.325226 | 0.000891 | 0.004499 | 0.000290 | 0.001463 |
| 39 | 0.315754 | 0.000528 | 0.002770 | 0.000167 | 0.000875 |
| 40 | 0.306557 | 0.000305 | 0.001658 | 0.000093 | 0.000508 |
| 41 | 0.297628 | 0.000172 | 0.000965 | 0.000051 | 0.000287 |
| 42 | 0.288959 | 0.000095 | 0.000546 | 0.000027 | 0.000158 |
| 43 | 0.280543 | 0.000051 | 0.000301 | 0.000014 | 0.000084 |
| 44 | 0.272372 | 0.000027 | 0.000161 | 0.000007 | 0.000044 |

| $k$ | $v^k$ | ${}_k p_x$ | | $v^k\,{}_k p_x$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | mehed | naised | mehed | naised |
| 45 | 0.264439 | 0.000014 | 0.000084 | 0.000004 | 0.000022 |
| 46 | 0.256737 | 0.000007 | 0.000043 | 0.000002 | 0.000011 |
| 47 | 0.249259 | 0.000003 | 0.000021 | 0.000001 | 0.000005 |
| $\ddot{a}_x$ | | | | 11.017248 | 14.316948 |

## LISA 7 – 10 AASTA VÕRRA EDASI LÜKATUD ANNUITEEDI AKTUAARSE NÜÜDISVÄÄRTUSE LEIDMINE ($x$ = 55)

| | |
|---|---|
| $i$ | 0.03 |
| | 0.970874 |
| $\ddot{a}_{n\rceil}$ | 8.786109 |

| $k$ | $v^k$ | ${}_k p_x$ | | $v^k\,{}_k p_x$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | mehed | naised | mehed | naised |
| 10 | 0.744094 | 0.747640 | 0.905277 | 0.556314 | 0.673611 |
| 11 | 0.722421 | 0.718595 | 0.893099 | 0.519128 | 0.645194 |
| 12 | 0.701380 | 0.688855 | 0.879789 | 0.483149 | 0.617067 |
| 13 | 0.680951 | 0.658462 | 0.865244 | 0.448381 | 0.589189 |
| 14 | 0.661118 | 0.627469 | 0.849354 | 0.414831 | 0.561523 |
| 15 | 0.641862 | 0.595941 | 0.832010 | 0.382512 | 0.534035 |
| 16 | 0.623167 | 0.563958 | 0.813099 | 0.351440 | 0.506696 |
| 17 | 0.605016 | 0.531611 | 0.792511 | 0.321634 | 0.479482 |
| 18 | 0.587395 | 0.499010 | 0.770140 | 0.293116 | 0.452376 |
| 19 | 0.570286 | 0.466276 | 0.745890 | 0.265911 | 0.425371 |
| 20 | 0.553676 | 0.433546 | 0.719677 | 0.240044 | 0.398468 |
| 21 | 0.537549 | 0.400968 | 0.691436 | 0.215540 | 0.371681 |
| 22 | 0.521893 | 0.368707 | 0.661131 | 0.192426 | 0.345039 |
| 23 | 0.506692 | 0.336935 | 0.628758 | 0.170722 | 0.318586 |
| 24 | 0.491934 | 0.305833 | 0.594357 | 0.150449 | 0.292384 |
| 25 | 0.477606 | 0.275586 | 0.558019 | 0.131621 | 0.266513 |
| 26 | 0.463695 | 0.246383 | 0.519898 | 0.114246 | 0.241074 |
| 27 | 0.450189 | 0.218406 | 0.480217 | 0.098324 | 0.216189 |
| 28 | 0.437077 | 0.191831 | 0.439277 | 0.083845 | 0.191998 |
| 29 | 0.424346 | 0.166822 | 0.397464 | 0.070790 | 0.168663 |
| 30 | 0.411987 | 0.143520 | 0.355231 | 0.059128 | 0.146350 |
| 31 | 0.399987 | 0.119094 | 0.310343 | 0.047636 | 0.124133 |
| 32 | 0.388337 | 0.097320 | 0.267445 | 0.037793 | 0.103859 |
| 33 | 0.377026 | 0.078243 | 0.227092 | 0.029500 | 0.085620 |
| 34 | 0.366045 | 0.061833 | 0.189775 | 0.022634 | 0.069466 |
| 35 | 0.355383 | 0.047988 | 0.155893 | 0.017054 | 0.055402 |
| 36 | 0.345032 | 0.036541 | 0.125732 | 0.012608 | 0.043382 |
| 37 | 0.334983 | 0.027277 | 0.099440 | 0.009137 | 0.033311 |
| 38 | 0.325226 | 0.019945 | 0.077030 | 0.006487 | 0.025052 |
| 39 | 0.315754 | 0.014273 | 0.058375 | 0.004507 | 0.018432 |
| 40 | 0.306557 | 0.009991 | 0.043229 | 0.003063 | 0.013252 |
| 41 | 0.297628 | 0.006835 | 0.031250 | 0.002034 | 0.009301 |
| 42 | 0.288959 | 0.004568 | 0.022031 | 0.001320 | 0.006366 |
| 43 | 0.280543 | 0.002981 | 0.015133 | 0.000836 | 0.004245 |
| 44 | 0.272372 | 0.001899 | 0.010121 | 0.000517 | 0.002757 |
| 45 | 0.264439 | 0.001181 | 0.006587 | 0.000312 | 0.001742 |
| 46 | 0.256737 | 0.000716 | 0.004170 | 0.000184 | 0.001071 |
| 47 | 0.249259 | 0.000424 | 0.002567 | 0.000106 | 0.000640 |
| 48 | 0.241999 | 0.000245 | 0.001536 | 0.000059 | 0.000372 |
| 49 | 0.234950 | 0.000138 | 0.000894 | 0.000032 | 0.000210 |
| 50 | 0.228107 | 0.000076 | 0.000506 | 0.000017 | 0.000115 |

| $k$ | $v^k$ | ${}_k p_x$ | | $v^k\ {}_k p_x$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | mehed | naised | mehed | naised |
| | | | | | |
| 51 | 0.221463 | 0.000041 | 0.000279 | 0.000009 | 0.000062 |
| 52 | 0.215013 | 0.000022 | 0.000150 | 0.000005 | 0.000032 |
| 53 | 0.208750 | 0.000011 | 0.000078 | 0.000002 | 0.000016 |
| 54 | 0.202670 | 0.000006 | 0.000040 | 0.000001 | 0.000008 |
| 55 | 0.196767 | 0.000003 | 0.000020 | 0.000001 | 0.000004 |
| $\ddot{a}_x$ | | | | 5.759406 | 9.040338 |
| | | | | | |
| | | | $\ddot{a}_{n]} + \ddot{a}_x$ | 14.54551 | 17.82644 |

# LISA 8 – 10 AASTA VÕRRA EDASI LÜKATUD ANNUITEEDI AKTUAARSE NÜÜDISVÄÄRTUSE LEIDMINE ($x = 63$)

| | |
|---|---|
| $i$ | 0.03 |
| | 0.970874 |
| $\ddot{a}_{n]}$ | 8.786109 |

| $k$ | $v^k$ | ${}_k p_x$ | | $v^k\ {}_k p_x$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | mehed | naised | mehed | naised |
| 10 | 0.744094 | 0.621019 | 0.830993 | 0.462097 | 0.618337 |
| 11 | 0.722421 | 0.580282 | 0.804827 | 0.419208 | 0.581424 |
| 12 | 0.701380 | 0.539548 | 0.776542 | 0.378428 | 0.544651 |
| 13 | 0.680951 | 0.499006 | 0.746070 | 0.339799 | 0.508037 |
| 14 | 0.661118 | 0.458857 | 0.713370 | 0.303358 | 0.471622 |
| 15 | 0.641862 | 0.419316 | 0.678439 | 0.269143 | 0.435464 |
| 16 | 0.623167 | 0.380609 | 0.641320 | 0.237183 | 0.399649 |
| 17 | 0.605016 | 0.342967 | 0.602111 | 0.207501 | 0.364287 |
| 18 | 0.587395 | 0.306623 | 0.560978 | 0.180109 | 0.329515 |
| 19 | 0.570286 | 0.271806 | 0.518162 | 0.155007 | 0.295500 |
| 20 | 0.553676 | 0.238735 | 0.473986 | 0.132182 | 0.262435 |
| 21 | 0.537549 | 0.207610 | 0.428870 | 0.111600 | 0.230539 |
| 22 | 0.521893 | 0.178610 | 0.383299 | 0.093215 | 0.200041 |
| 23 | 0.506692 | 0.148213 | 0.334865 | 0.075098 | 0.169673 |
| 24 | 0.491934 | 0.121115 | 0.288577 | 0.059580 | 0.141961 |
| 25 | 0.477606 | 0.097374 | 0.245036 | 0.046506 | 0.117030 |
| 26 | 0.463695 | 0.076952 | 0.204770 | 0.035682 | 0.094951 |
| 27 | 0.450189 | 0.059721 | 0.168211 | 0.026886 | 0.075727 |
| 28 | 0.437077 | 0.045475 | 0.135666 | 0.019876 | 0.059297 |
| 29 | 0.424346 | 0.033947 | 0.107298 | 0.014405 | 0.045531 |
| 30 | 0.411987 | 0.024821 | 0.083117 | 0.010226 | 0.034243 |
| 31 | 0.399987 | 0.017763 | 0.062988 | 0.007105 | 0.025194 |
| 32 | 0.388337 | 0.012433 | 0.046645 | 0.004828 | 0.018114 |
| 33 | 0.377026 | 0.008506 | 0.033719 | 0.003207 | 0.012713 |
| 34 | 0.366045 | 0.005685 | 0.023771 | 0.002081 | 0.008701 |
| 35 | 0.355383 | 0.003710 | 0.016329 | 0.001319 | 0.005803 |
| 36 | 0.345032 | 0.002364 | 0.010921 | 0.000816 | 0.003768 |
| 37 | 0.334983 | 0.001470 | 0.007108 | 0.000492 | 0.002381 |
| 38 | 0.325226 | 0.000891 | 0.004499 | 0.000290 | 0.001463 |
| 39 | 0.315754 | 0.000528 | 0.002770 | 0.000167 | 0.000875 |
| 40 | 0.306557 | 0.000305 | 0.001658 | 0.000093 | 0.000508 |
| 41 | 0.297628 | 0.000172 | 0.000965 | 0.000051 | 0.000287 |
| 42 | 0.288959 | 0.000095 | 0.000546 | 0.000027 | 0.000158 |
| 43 | 0.280543 | 0.000051 | 0.000301 | 0.000014 | 0.000084 |
| 44 | 0.272372 | 0.000027 | 0.000161 | 0.000007 | 0.000044 |
| 45 | 0.264439 | 0.000014 | 0.000084 | 0.000004 | 0.000022 |
| 46 | 0.256737 | 0.000007 | 0.000043 | 0.000002 | 0.000011 |
| 47 | 0.249259 | 0.000003 | 0.000021 | 0.000001 | 0.000005 |
| $\ddot{a}_x$ | | | | 3.597595 | 6.060048 |
| | | | $\ddot{a}_{n]} + \ddot{a}_x$ | 12.383704 | 14.846157 |