TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI
TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

803

STRUKTUURID MUUTKONDADEL
СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid
Труды по математике и механике

TARTU 1988

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 803 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г

STRUKTUURID MUUTKONDADEL
СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Matemaatika - ja mehhaanika - alaseid töid
Труды по математике и механике

TARTU 1988

TRÜ Toimetised
803 (1988), 3-14

Уч. зап. Тартуск. ун-та.
1988, 803, 3-14

ОБОБЩЕННЫЕ BRST - СУПЕРСИММЕТРИИ

В.Абрамов

Лаборатория прикладной математики

Суперсимметриями в физике называют такие преобразования, которые чётные величины переводят в нечётные и наоборот. Замечательную роль, как отмечено в недавнем обзоре [5], играют суперсимметрии в квантовой теории. Квантовое эффективное действие S_{eff} для калибровочного поля включает в себя, помимо классических полей $a_\mu(x)$ антикоммутирующие поля $c^\alpha(x)$, $\overset{*}{c}{}^\alpha(x)$ называемые "духами" Фаддеева-Попова. Действие S_{eff} неинвариантно относительно калибровочных преобразований $a_\mu(x) \longrightarrow g^{-1}(x)\, a_\mu(x)\, g(x) + g^{-1}(x)\, \partial_\mu g(x)$, где $g(x) \in \mathcal{G}$ и $\mathcal{G}$ - группа калибровочных преобразований. Однако, существуют преобразования, которые нетривиальным образом перемешивают обычные классические поля $a_\mu(x)$ и "духи" Фаддеева-Попова $c^\alpha(x)$, $\overset{*}{c}{}^\alpha(x)$ и относительно которых действие S_{eff} инвариантно. Подобные преобразования носят название $BRST$ - суперсимметрии (Becchi-Rouet-Stora-Tjutin)([7], [10]). С помощью $BRST$ - суперсимметрий, используя функциональную замену переменных в производящем функционале для функций Грина, можно получить альтернативный вывод обобщенных тождеств Уорда. Кроме того, как показано в работе [9], постулированные априори, $BRST$ и $\overline{BRST}$ - суперсимметрии позволяют получить наиболее общий вид перенормируемого лагранжиана.

Цель данной работы заключается в том, чтобы с помощью развитого автором в работах [1], [2] геометрического аппарата суперпространства связностей $\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A}$ дать геометрическую интерпретацию физическим величинам таким, как S_{eff}, $BRST$ и $\overline{BRST}$ - суперсимметрии и с помощью этой интерпретации прийти к естественным, с геометрической точки зрения, обобщениям. Учитывая то, что развитый на основе $BRST$ - суперсимметрий $BRST$ -формализм используется в настоящее время для квантования полевой теории струн и суперструн, то есть тех теорий, которые вполне реально претендуют на построение объединенной теории поля, его геометрическая интерпретация и следующие оттуда выводы могут сыграть немаловажную роль.

Первый параграф данной работы носит вводный характер. В нем коротко описано строение суперпространства связностей $Sup\,\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, строение бесконечномерной алгебры Грассмана-Березина или GB - алгебры $\mathcal{Y}$ и дано описание S_{eff} ,$BRST$ - суперсимметрий в терминах $Sup\,\mathcal{O}\!\mathcal{l}$. Более подробное изложение этого материала можно найти в работах [1] , [2] .

Во втором параграфе используется понятие грассманова аналитического продолжения некоторой чётной функции ([6]) , позволяющее распространить эту функцию с базы супермногообразия на всё супермногообразие. За функцию на базе берется классическое действие для калибровочного поля S_{cl} , определенное как функционал на пространстве $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ всех связностей данного расслоения $P(M, G)$. Пространство $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$,после выделения в нем неприводимых связностей, имеет структуру главного расслоения, причем структурной группой является группа калибровочных преобразований $\mathcal{G}$. Фиксация калибровки на геометрическом языке означает локальное сечение в расслоении $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$. Показывается, что если S_{cl} продолжить вдоль слоев действия $\mathcal{G}$ на все $Sup\,\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, то полученная функция совпадает с S_{eff} , ограниченным на сечение, заданное калибровкой.

В третьем параграфе разработана техника, позволяющая обобщить $BRST$ - суперсимметрии как векторные поля на $Sup\,\mathcal{O}\!\mathcal{l}$. При этом сохраняется важное свойство нильпотентности этих суперсимметрий. Кроме того, показано возможное расширение $BRST$ - супералгебры Ли.

§ I. Суперпространство связностей $Sup\,\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ и его структура

При построении суперпространства $Sup\,\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ за основу берется определение, данное в работе [6] , то есть используется подход Березина-Лейтеса. Существует еще несколько подходов к определению супермногообразия (см. напр. [II] , [I3]), которые имеют небольшие различия топологического характера. Два главных объекта, из которых строится супермногообразие, это его базовое, обычное многообразие и алгебра Грассмана. В данной работе оба эти объекта бесконечномерны и поэтому из всех возможных подходов выбран подход Березина-Лейтеса, как единственно пригодный пока для этого случая.

Коротко опишем базовое многообразие и алгебру Грассмана, необходимые нам для построения $Sup\,\mathcal{O}\!\mathcal{l}$. Пусть $P(M, G)$ главное расслоенное пространство с базой M и структурной группой G. Множество $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ всех связностей данного расслоения P является банаховым пространством после введения соответствующей нормы и пополнения по ней (см. [12]). Точку пространства $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ будем обозначать через a. В некоторой локальной тривиализации расслоения $P(M, G)$ её можно рассматривать как набор функций $a=\{a_\mu(x)\}_{\mu=1}^{n}$, где $n=\dim M, x\in U\subset M$ и при выборе базиса T^α алгебры Ли $\underline{G}$ группы G соответствующий набор можно записать в виде $\{a_\mu^\alpha(x)\}_{\mu=1,\alpha=1}^{n,\ r}$, где $r=\dim \underline{G}$. На банаховом пространстве $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ действует группа калибровочных преобразований $\mathcal{G}$. Если связность рассматривать как правоинвариантную I-форму a на P и элемент g группы $\mathcal{G}$ как автоморфизм расслоения P, сохраняющий слои, то действие $\mathcal{G}$ на $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ запишется в виде

$$a' = g^* a. \tag{I.I}$$

В записи через локальные коэффициенты $a_\mu(x)$ (I.I) дает известное калибровочное преобразование

$$a'_\mu(x) = g^{-1}(x)\, a_\mu(x)\, g(x) + g^{-1}(x)\, \partial_\mu g(x). \tag{I.2}$$

Порождаемые действием (I.I) операторы инфинитезимальных калибровочных преобразований имеют вид

$$T^A = -\nabla_\mu \left(\delta / \delta a_\mu^A \right), \tag{I.3}$$

где ∇_μ - ковариантная производная и индекс $A=(\alpha, x)$ объединяет дискретный индекс $\alpha = 1, \ldots, \dim \underline{G}$ и непрерывный $x\in M$. Операторы (I.3) удовлетворяют соотношению

$$[T^A, T^B] = f_{AB}^{C}\, T^C. \tag{I.4}$$

Относительно строения второго объекта бесконечномерной алгебры Грассмана сошлёмся на работу [I], где дано определение грассмановой алгебры со скалярным произведением и инволюцией и её реализация через пространства функций, и на работу [2], где дано обобщение её реализации на случай сечений векторных расслоений. В работе [2] подобная алгебра носит название GB -алгебры. Здесь же отметим, что произвольный элемент $f \in \mathcal{Y}$ GB -алгебры можно записать в виде

$$f=\sum_{p,q}\int \overset{*\alpha_1}{c}(x_1)\wedge\ldots\wedge \overset{*\alpha_p}{c}(x_p)\, \mathcal{F}_{\alpha_1\ldots\alpha_p;\beta_1\ldots\beta_q}(x_1,\ldots,x_p;y_1\ldots y_q)\, c^{\beta_1}(y_1)\wedge\ldots\wedge c^{\beta_q}(y_q)\,d^px\,d^qy \,, \quad (I.5)$$

где $\overset{*}{c}{}^{\alpha}(x), c^{\beta}(y)$ - инволютивные образующие алгебры $\mathcal{Y}$, значок $\wedge$ обозначает умножение в $\mathcal{Y}$, $\mathcal{F}_{\alpha_1\ldots\alpha_p;\beta_1\ldots\beta_q}(x_1,\ldots,x_p;y_1,\ldots,y_q)$ - локальная запись ядра оператора, действующего на сечениях векторных расслоений ξ^{*p} и ξ^{*q}, где $\xi = P\times_G \mathcal{G}$, ξ^* сопряженное к ξ расслоение и $\xi^{*p}=\xi^*\otimes\ldots\otimes\xi^*$ (p раз). Используя в дальнейшем парный индекс $A=(\alpha, x)$, можно (I.5) переписать в виде

$$f=\sum_{p,q} \overset{*}{c}{}^{A_1}\wedge\ldots\wedge \overset{*}{c}{}^{A_p}\,\mathcal{F}_{A_1\ldots A_p;B_1\ldots B_q}\, c^{B_1}\wedge\ldots\wedge c^{B_q} \,. \qquad (I.6)$$

В алгебре $\mathcal{Y}$ определены вариационные производные по образующим $\delta^A=\delta/\delta c^A$, $\overset{*}{\delta}{}^{B}=\delta/\delta \overset{*}{c}{}^{B}$. Определение этих производных (см. [3]) аналогично конечномерной алгебре Грассмана, с той лишь разницей, что по непрерывному индексу используется вместо символа Кронекера дельта-функкуя Дирака.

Определение I.I. Банаховым суперпространством связностей $Sup\,\mathfrak{A}$ назовём пару $\{\mathfrak{A},\ C(Sup\,\mathfrak{A})\}$, где $C(Sup\,\mathfrak{A})$ - коммутативная супералгебра (см. [6]) гладких функционалов на $\mathfrak{A}$ со значениями в GB-алгебре $\mathcal{Y}$, то есть $C(Sup\,\mathfrak{A}) = C(\mathfrak{A})\otimes\mathcal{Y}$, где $C(\mathfrak{A})$ - пространство гладких функционалов на $\mathfrak{A}$.

Согласно (I.6) функционал на $Sup\,\mathfrak{A}$, то есть элемент $C(Sup\,\mathfrak{A})$ в общем случае имеет вид

$$\mathcal{F}(a,\overset{*}{c},c)=\sum_{p,q} \overset{*}{c}{}^{A_1}\wedge\ldots\wedge \overset{*}{c}{}^{A_p}\,\mathcal{F}_{A_1\ldots A_p;B_1\ldots B_q}(a)\, c^{B_1}\wedge\ldots\wedge c^{B_q}, \qquad (I.7)$$

где $\mathcal{F}_{A_1\ldots A_p;B_1\ldots B_q}(a) \in C(\mathfrak{A})$. Несложно убедиться в том, что описанное выше построение позволяет интерпретировать квантовое эффективное действие $S_{eff}=S_{cl}+S_{gf}+S_{FP}$, где S_{cl} - классическое действие для калибровочного поля, S_{gf} - член фиксирующий калибровку, S_{FP} - член, содержащий "духовые" поля, как чётный функционал на $Sup\,\mathfrak{A}$. Действительно, если мы запишем S_{eff} через двойной индекс в виде

$$S_{eff}=S_{cl}(a)+b_A\mathcal{R}^A(a)-\frac{\alpha}{2}b_A b_A+\overset{*}{c}{}^{A}\mathcal{R}_{AB}(a)c^B, \quad (I.8)$$

где $b_A=b^{\alpha}(x)$ - вспомогательное поле, α - безразмерный параметр, $\mathcal{R}^A(a)=\mathcal{R}^{\alpha}(x,a)$ - калибровка, $\mathcal{R}_{AB}=T^B(\mathcal{R}^A)$ и $\overset{*}{c}{}^{A}$, c^B - "духовые" поля, то непосредственно убеждаемся в том, что S_{eff} имеет частный вид функционала (I.7). При этом "духовые" поля отождествляются с нечётными координатами c^A, $\overset{*}{c}{}^{B}$ и калибровочные поля со связностями расслоения $P(M, G)$.

Кроме того, изложенное выше построение, позволяет дать геометрическую интерпретацию $BRST$ - суперсимметрий. Записав $BRST$ - суперсимметрию через вариационные производные алгебры

$$\mathcal{D}^{s} = c^{A} T^{A} + b_{B} \delta^{*B} - \left(\tfrac{1}{2} f^{\mathcal{D}}_{BB'} c^{B} \wedge c^{B'}\right) \delta^{\mathcal{D}}, \qquad (I.9)$$

и $\overline{BRST}$ - суперсимметрию

$$\bar{\mathcal{D}}^{s} = \overset{*}{c}^{A} T^{A} - \left(\tfrac{1}{2} f^{A}_{BB'} \overset{*}{c}^{B} \wedge \overset{*}{c}^{B'}\right) \delta^{*A} + \bar{b}_{C} \delta^{C}, \qquad (I.10)$$

непосредственно убеждаемся в том, что они индуцируют векторные поля на $Sup\,\mathfrak{A}$. Для векторных полей (I.9) и (I.10) выполняются соотношения

$$\mathcal{D}^{s}(S_{eff}) = \bar{\mathcal{D}}^{s}(S_{eff}) = 0, \qquad (I.11)$$

и они образуют супералгебру Ли

$$[\mathcal{D}^{s}, \mathcal{D}^{s}] = [\bar{\mathcal{D}}^{s}, \bar{\mathcal{D}}^{s}] = [\mathcal{D}^{s}, \bar{\mathcal{D}}^{s}] = 0. \qquad (I.12)$$

Векторные поля со свойством (I.12) называются ([6]) нильпотентными. Супералгебру Ли, образованную полями $\mathcal{D}^{s}$ и $\bar{\mathcal{D}}^{s}$ обозначим через $Der^{BRST}\, C(Sup\,\mathfrak{A})$.

§ 2. Грассманово аналитическое продолжение классического действия

Пусть $\mathcal{F}(a)$ является функционалом на банаховом пространстве $\mathfrak{A}$, то есть $\mathcal{F}(a) \in C(\mathfrak{A})$. Если $\tau_{\mu A}(c^{*}, c)$ - семейство четных функционалов GB -алгебры $\mathcal{Y}$, то по определению (см. [6]) сопоставим функционалу $\mathcal{F}(a)$ четный функционал $\bar{\mathcal{F}}(a, c^{*}, c) \in C(Sup\,\mathfrak{A})$ следующим образом:

$$\bar{\mathcal{F}}(a, c^{*}, c) = \mathcal{F}(a + \tau_{\mu A}(c^{*}, c)) = \mathcal{F}(a) + \sum_{i_1 \ldots i_p} \frac{\delta \mathcal{F}(a)}{\delta a_{\mu_{i_1}}^{A_{i_1}} \ldots \delta a_{\mu_{i_p}}^{A_{i_p}}} \tau_{\mu_{i_1}}^{A_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \tau_{\mu_{i_p}}^{A_{i_p}}. \qquad (2.1)$$

Четный функционал $\bar{\mathcal{F}}(a, c^{*}, c)$ называется грассмановым аналитическим продолжением функционала $\mathcal{F}(a)$.

Рассмотрим подробнее, отмеченную выше, структуру банахова пространства связностей $\mathfrak{A}$, которое служит базой для суперпространства $Sup\,\mathfrak{A}$. Действие группы калибровочных преобразований $\mathcal{G}$ порождает фактор-пространство $\mathfrak{A}/\mathcal{G}$, точками которого являются классы калибровочно неэквивалентных связностей. Уравнение $\mathcal{R}^{A}(a) = \mathcal{R}^{\alpha}(x; a) = 0$ задает локальное сечение в фактор-пространстве $\mathfrak{A}_0$. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathfrak{A}_0$ подпространство, являющееся областью определения сечения $\sigma_{\mathcal{R}}$, определяемого калибровкой $\mathcal{R}^{A}(a)$, то есть $\sigma_{\mathcal{R}} : \mathcal{U} \to p^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathfrak{A}$, где p - проекция, сопоставляющая каждой связности $a \in \mathfrak{A}$ её класс по действию $\mathcal{G}$. Если $a^* \in \mathcal{U}$, то $\sigma_{\mathcal{R}}(a^*)$ является связностью, которая тождественно удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{R}^A(\sigma_{\mathcal{R}}(a^*)) = 0 . \qquad (2.2)$$

Описанная выше структура пространства $\mathfrak{A}$ позволяет ввести в области $p^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathfrak{A}$ локальные координаты. Если $a \in p^{-1}(\mathcal{U})$, то $a = (\sigma_{\mathcal{R}} \circ p(a), g)$, где $a = \sigma_{\mathcal{R}} \circ p(a) \cdot g$. Обозначим $\sigma_{\mathcal{R}} \circ p(a) = a_0$. Отметим, что эффективное действие S_{eff} на сечении $\sigma_{\mathcal{R}}$ имеет вид

$$S_{eff} = S_{cl}(a_0) + \overset{*}{c}{}^A \mathcal{R}_{AB}(a_0)\, c^B , \qquad (2.3)$$

то есть на локальном сечении $\sigma_{\mathcal{R}}$, индуцируемом калибровкой, исчезает член S_{gf}.

Из формулы (2.3) следует, что квантовое эффективное действие, ограниченное на $\sigma_{\mathcal{R}}$, строится с помощью двух функционалов, заданных на $\mathfrak{A}$, - это $S_{cl}(a)$ и $\mathcal{R}^A(a)$. С другой стороны, S_{eff} четный функционал на $\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A}$. Поэтому естественно попытаться найти такой функционал на $\mathfrak{A}$ с помощью S_{cl} и $\mathcal{R}^A$, который после его грассманова аналитического продолжения приводил бы к S_{eff} вида (2.3). Чтобы его построить, предположим, что существует локальный функционал $\mathcal{R}(a) \in C(\mathfrak{A})$, удовлетворяющий условию

$$T^A(\mathcal{R}(a)) = \mathcal{R}^A(a) . \qquad (2.4)$$

Рассмотрим функционал $S_0(a_0, g) = S_{cl}(a_0, g) + \mathcal{R}(a_0, g) - \mathcal{R}(a_0)$, заданный на области $p^{-1}(\mathcal{U})$ в локальных координатах, о которых шла речь выше. Его грассманово продолжение вдоль слоя действия группы $\mathcal{G}$ и дает нам вид квантового эффективного действия (2.3). Прежде всего, найдем грассманово продолжение функции $f_{\mu A} : \mathfrak{A} \times \mathcal{G} \to \mathfrak{A}$ действия группы $\mathcal{G}$ на $\mathfrak{A}$. Пусть $\bar{\lambda} \overset{*}{c}{}^A + \lambda c^A$ есть приращение координат g, где $\lambda, \bar{\lambda}$ некоторые нечётные параметры. Тогда

$$f_{\mu A}(a_0, g^B + \lambda c^B + \bar{\lambda} \overset{*}{c}{}^B) - f_{\mu A}(a_0, g) + \frac{\delta f_{\mu A}}{\delta g^B}(\lambda c^B + \bar{\lambda} \overset{*}{c}{}^B) - \frac{\delta^2 f_{\mu A}}{\delta g^B \delta g^{B'}} \lambda \bar{\lambda}\, c^B \wedge \overset{*}{c}{}^{B'} \qquad (2.5)$$

Теперь выпишем грассманово аналитическое продолжение функционала $S_0(a_0, g)$ и положим $g = e$. Имеем

$$S_0\left[a^A_{\mu_0} + \nabla^{AB}_\mu(a)(\lambda c^B + \bar\lambda \overset{*}{c}{}^B) - \frac{\delta^2 f_{\mu A}}{\delta g^B \delta g^{B'}} \lambda\bar\lambda c^B \wedge \overset{*}{c}{}^{B'}\right] =$$
$$= S_0(a^A_{\mu_0}) + \frac{\delta S_0}{\delta a^A_\mu}\left[\nabla^{AB}_\mu(\lambda c^B + \bar\lambda \overset{*}{c}{}^B) - \frac{\delta^2 f_{\mu A}}{\delta g^B \delta g^{B'}} \lambda\bar\lambda c^B \wedge c^{*B'}\right] = \tag{2.6}$$
$$= \frac{\delta^2 S_0}{\delta a^A_\mu\, \delta a^{A'}_{\mu'}} \lambda\bar\lambda \nabla^{A'B'}_{\mu'} \nabla^{AB}_\mu c^B \wedge \overset{*}{c}{}^{B'} = S_0(a^A_{\mu_0}) + T^B(S_0)(\lambda c^B + \bar\lambda \overset{*}{c}{}^B) + \overset{*}{c}{}^{B'} T^{B} T^{B'}(S_0) c^B \lambda\bar\lambda .$$

Но по определению функционала S_0 имеем $S_0(a^A_{\mu_0}) = S_{cl}(a^A_{\mu_0})$. Кроме того, в силу инвариантности классического действия $S_{cl}(a)$ относительно калибровочных преобразований имеем $T^B(S_0) = 0$. Итак, окончательно грассманово продолжение (2.6) можно переписать в виде

$$S_{cl}(a_0) + \overset{*}{c}{}^{B'} \mathcal{R}_{B'B}(a_0)\, c^B \lambda\bar\lambda . \tag{2.7}$$

Нетрудно убедиться, сравнив (2.7) и (2.3), что грассманово продолжение функционала S_0 вдоль слоев действия группы $\mathcal{G}$ совпадает с квантовым эффективным действием, ограниченным на сечение $\sigma_{\mathcal{R}}$.

§ 3. Векторные поля на $Sup\,\mathfrak{A}$ и обобщенные $BRST$ - суперсимметрии

Выделим в суперальгебре Ли всех дифференцирований $\mathcal{D}: C(Sup\,\mathfrak{A}) \longrightarrow C(Sup\,\mathfrak{A})$ подалгебру дифференциальных операторов вида

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_{A} + \mathcal{D}_{A_1 A_2} + \ldots + \mathcal{D}_{A_1 \ldots A_p} + \ldots , \tag{3.1}$$

где

$$\mathcal{D}_{A_1 \ldots A_p} = \mathcal{F}^\mu_{A_1 \ldots A_p C}(\psi) \frac{\delta}{\delta a^C_\mu} + \Phi_{A_1 \ldots A_p B}(\psi)\, \overset{*}{\delta}{}^B + \Psi_{A_1 \ldots A_p A}(\psi)\, \delta^A . \tag{3.2}$$

причем коэффициенты в выражении (3.2) при операторах $\delta/\delta a^C_\mu$, $\overset{*}{\delta}{}^B$, δ^A являются функционалами на $C(Sup\,\mathfrak{A})$, зависящими от $p+1$ параметров и $\psi = \{a^A_\mu, \overset{*}{c}{}^B, c^D\}$. Оператор вида (3.2) назовем векторным полем от p параметров на $Sup\,\mathfrak{A}$. Структура пространства $\mathfrak{A}$ позволяет выделить подалгебру супералгебры Ли операторов вида (3.1). Рассмотрим пространство операторов вида (3.1), для которых

$$\mathcal{D}_{A_1 \ldots A_p} = \mathcal{F}_{A_1 \ldots A_p C}(\psi)\, T^C + \bar\Phi_{A_1 \ldots A_p B}(\psi)\, \overset{*}{\delta}{}^B + \Psi_{A_1 \ldots A_p A}(\psi)\, \delta^A , \tag{3.3}$$

где T^C - операторы инфинитезимальных калибровочных преобразований, порожденные действием $\mathcal{G}$ на $\mathfrak{A}$. В силу соотношения (I.4) пространство операторов вида (3.3) является супералгеброй Ли, которую обозначим через $\mathcal{D}er^{\mathcal{G}}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A})$.

Пусть S некоторый элемент $C(\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A})$. Векторные поля из $\mathcal{D}er^{\mathcal{G}}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A})$, для которых выполняется соотношение

$$\mathcal{D}(S) = 0, \tag{3.4}$$

образуют подалгебру в $\mathcal{D}er^{\mathcal{G}}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A})$, которую обозначим через $\mathcal{D}er^{S}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A})$. Выделенная с помощью соотношения (3.4) подалгебра разлагается в прямую сумму

$$\mathcal{D}er^{S}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A}) = \mathcal{D}er^{S}_{0}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A}) \oplus \mathcal{D}er^{S}_{1}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A}) \tag{3.5}$$

соответственно чётных и нечётных векторных полей. Супералгебру Ли $\mathcal{D}er^{S}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A})$ будем называть $BRST$ - супералгеброй данного функционала S, если $\mathcal{D}er^{S}_{1}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A})$ коммутативная супералгебра Ли. Из § I следует, что $\mathcal{D}er^{BRST}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A}) \subset \mathcal{D}er^{S_{eff}}_{1}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A})$. Дальнейшее изложение посвящено исследованию $\mathcal{D}er^{S_{eff}}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A})$.

<u>Предложение 3.I</u>. Векторное поле $\mathcal{D}$ принадлежит $\mathcal{D}er^{S_{eff}}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, если его коэффициенты удовлетворяют соотношению

$$- \mathcal{F}^{(a)}_{A:A_1\ldots A_p:B_1\ldots B_q}\, b_C\, \mathcal{R}^{(a)}_{CA} + (-1)^{q-1}\frac{1}{4}\mathcal{F}^{(a)}_{A,A_1\ldots \underline{A_{p-1}}:B_1\ldots \underline{B_{q-1}}}\, \mathcal{R}^{(a)}_{\underline{A_p}\,\underline{B_q}\,A} +$$
$$+ \frac{1}{2}\Phi^{(a)}_{B,A_1\ldots A_p B_1\ldots \underline{B_{q-1}}}\, \mathcal{R}^{(a)}_{B\underline{B_q}} + (-1)^{q-1}\frac{1}{2}\Psi^{(a)}_{D,A_1\ldots \underline{A_{p-1}},B_1\ldots B_q}\, \mathcal{R}^{(a)}_{\underline{A_p}D} = 0 \tag{3.6}$$

где по подчеркнутым индексам произведена альтернация.

Доказательство заключается в непосредственной подстановке выражения поля (3.3) и выражения эффективного действия (I.8) в соотношение (3.4).

Прежде, чем переходить к разрешению соотношения (3.6), предположим, что оператор $\mathcal{R}_{AB}(a)$ имеет обратный оператор $\mathcal{L}_{BC}(a)$, то есть

$$\mathcal{R}_{AB}(a)\cdot \mathcal{L}_{BC}(a) = \mathcal{L}_{AB}(a)\cdot \mathcal{R}_{BC}(a) = \delta_{AC}. \tag{3.7}$$

Отметим, что в случае лоренцевой калибровки это требование выполняется (см. [8]). Кроме того, предположим, что векторные поля на $\mathrm{Sup}\,\mathfrak{A}$ зависят от вспомогательных полей b_A как от параметров полиномиальным образом. Учитывая сделанные предположения, можно разрешить (3.6) относительно

$\mathcal{F}_{A;\,A_1\ldots A_p;\,B_1\ldots B_q}^{(a)}$ следующим образом:

$$\mathcal{F}^{C_1\ldots C_K}_{A;\,A_1\ldots A_p\,B_1\ldots B_q}{}^{(a)} = \mathcal{L}^{(a)}_{AC_{K+1}} \Big\{ (-1)^{q-1} \frac{1}{4} \mathcal{R}^{(a)}_{\underline{A_p}\,\underline{B_q}\,A'} \mathcal{F}^{C_1\ldots C_{K+1}}_{A';\,A_1\ldots \underline{A_{p-1}}\,B_1\ldots \underline{B_{q-1}}} + \tag{3.8}$$

$$+ \frac{1}{2} \mathcal{R}_{B\underline{B_q}} \Phi^{C_1\ldots C_{K+1}}_{B;\,A_1\ldots A_p\,B_1\ldots \underline{B_{q-1}}} + (-1)^{q-1} \frac{1}{2} \mathcal{R}^{(a)}_{\underline{A_p}\,D} \Psi^{C_1\ldots C_{K+1}}_{D;\,A_1\ldots \underline{A_{p-1}}\,B_1\ldots B_{q-1}} \Big\}.$$

Соотношение (3.8) является рекуррентным. Прежде всего рассмотрим конечный результат последовательного решения рекуррентного соотношения (3.8), возникающий от первого слагаемого, то есть от функционала $\mathcal{F}^{C_1\ldots C_{K+1}}_{A';\,A_1\ldots A_p;\,B_1\ldots B_{q-1}}{}^{(a)}$.

Из соотношения (3.8) следует, что могут представиться три возможности, а именно: I) $p=q$, 2) $p<q$, 3) $p>q$. Случай I) интереса не представляет, ибо приводит к нулевому функционалу.

2) Пусть $p<q$. Конечным результатом последовательного решения рекуррентного соотношения (3.8) в этом случае, являются функционалы вида $\Phi^{C_1\ldots C_{K'}}_{B;\,0\,B_1\ldots B_q}$. Положим $K'=1$ и q - произвольное. В этом случае для функционала $\Phi^{C}_{B;\,C\,B_1\ldots B_q}$ производящим, с помощью соотношения (3.8), будет следующий единственный функционал $\mathcal{F}^{(0)}_{A;\,0\,B_1\ldots B_{q+1}}$, причем

$$\mathcal{F}^{(0)(a)}_{A;\,0\,B_1\ldots B_{q+1}} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{AC} \mathcal{R}_{BB_{q+1}} \Phi^{C\,(a)}_{B;\,0\,B_1\ldots B_q}. \tag{3.9}$$

Разрешая соотношение (3.8) при $K=0$ относительно $\Psi^{(0)(a)}_{A;\,0\,B_1\ldots B_{q+2}}$, получим

$$\Psi^{(0)(a)}_{A;\,0\,B_1\ldots B_{q+2}} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}^{(a)}_{AA_1} \mathcal{R}^{(a)}_{A_1B_{q+2}A'} \mathcal{F}^{(0)(a)}_{A';\,0\,B_1\ldots B_{q+2}} + \tag{3.10}$$

$$+ (-1)^{q+1} \frac{1}{2} \mathcal{L}_{AA_1} \mathcal{R}_{A\underline{B_{q+1}}} \Phi^{(0)(a)}_{A;\,A_1B_1\ldots \underline{B_{q+2}}}.$$

Подставляя (3.10) и (3.9) в выражение векторного поля (3.3) и вынося $\overset{*}{\Phi}{}^{(a)}_{B;\,0\,B_1\ldots B_q}$, получим первое семейство векторных полей

$$\mathcal{D}^{B}_{C} = (\mathcal{L}_{AC} \mathcal{R}_{BB'} c^{B'}) \overset{A}{T} + b_C \overset{*B}{\delta} - (\mathcal{L}_{AA'} \mathcal{R}_{A'B''A''} \mathcal{L}_{A''C} \mathcal{R}_{BB'} c^{B''} \wedge c^{B'}) \overset{A}{\delta}. \tag{3.II}$$

Отметим, что в подпространство, образованное этим семейством, входит векторное поле $\mathcal{D}^{\Lambda}$, соответствующее BRST -суперсимметрии, то есть $\mathcal{D}^{B}_{C}\, \sigma^{C}_{B} = \mathcal{D}^{\Lambda}$.

С помощью аналогичных вычислений, из соотношения (3.8) можно выделить еще два семейства векторных полей $\bar{\mathcal{D}}_C^B$ и $\mathcal{D}_0^{BC}$, соответствующие случаю $p > q$. Они имеют следующий вид в координатах суперпространства связностей

$$\bar{\mathcal{D}}_C^B = (-\mathcal{L}_{AC}\mathcal{R}_{A'B}\overset{*}{c}^{A'})\overset{A}{T} + (\mathcal{L}_{BA'}\mathcal{R}_{A'B'D}\mathcal{L}_{DC}\mathcal{R}_{A'B}\overset{*}{c}^{A'}\wedge\overset{*}{c}^{A'})\overset{*}{\delta}^{A} + b_C\delta^B, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{D}_0^{AB} = \overset{*}{c}^A\overset{*}{\delta}^B - (\mathcal{L}_{KA}\mathcal{R}_{BM}c^M)\delta^K. \quad (3.13)$$

Отметим, что в подпространство, образованное семейством $\bar{\mathcal{D}}_C^B$, векторное поле $\bar{\mathcal{D}}^\wedge$ входит лишь при определенных условиях на калибровку. Таким образом, семейство $\bar{\mathcal{D}}_C^B$ играет более фундаментальную роль по сравнению с $\bar{\mathcal{D}}^\wedge$.

<u>Теорема 3.I</u>. Коммутаторы семейства нечётных векторных полей от двух параметров $\mathcal{D}_C^B$ и $\bar{\mathcal{D}}_C^B$ и четных векторных полей $\mathcal{D}_0^{BC}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{D}_C^B, \mathcal{D}_{C'}^{B'}] = 0, && [\mathcal{D}_0^{AB}, \mathcal{D}_0^{A'B'}] = \delta^{AB'}\mathcal{D}_0^{BA'} + \delta^{BA'}\mathcal{D}_0^{AB'},\\
&[\bar{\mathcal{D}}_C^B, \bar{\mathcal{D}}_{C'}^{B'}] = 0, && [\mathcal{D}_C^B, \mathcal{D}_0^{A'B'}] = \delta_{BA'}\mathcal{D}_{C'}^{B'},\\
&[\mathcal{D}_C^B, \bar{\mathcal{D}}_{C'}^{B'}] = 0, && [\bar{\mathcal{D}}_C^B, \mathcal{D}_0^{A'B'}] = \delta_{BA'}\bar{\mathcal{D}}_C^{B'}.
\end{aligned} \quad (3.15)$$

Приведенная теорема позволяет, согласно введенному выше определению, утверждать, что супералгебра Ли векторных полей на $\mathrm{Sup}\,\mathcal{O}\iota$, порожденная полями $\mathcal{D}_C^B$, $\bar{\mathcal{D}}_C^B$, $\mathcal{D}_0^{AB}$, является $BRST$ – супералгеброй квантового эффективного действия. Обозначим её через $\overline{\mathrm{Der}}^{BRST}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathcal{O}\iota)$. При этом $\mathcal{D}_0^{AB}$ порождает её чётную часть, то есть

$$\overline{\mathrm{Der}}_0^{BRST}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathcal{O}\iota) \subset \mathrm{Der}_0^{SeH}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathcal{O}\iota),$$

а поле $\mathcal{D}_C^B$ и $\bar{\mathcal{D}}_C^B$ нечётную часть, то есть $\overline{\mathrm{Der}}_1^{BRST}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathcal{O}\iota) \subset \mathrm{Der}_1^{SeH}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathcal{O}\iota)$. При этом нечётная часть, в силу (3.I4), является коммутативной супералгеброй Ли. Включение $\mathrm{Der}^{BRST}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathcal{O}\iota) \subset \overline{\mathrm{Der}}^{BRST}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathcal{O}\iota) \subset$

$\subset \mathrm{Der}^{SeH}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathcal{O}\iota)$ позволяет заключить, что найдено расширение супералгебры $\mathrm{Der}^{BRST}\, C(\mathrm{Sup}\,\mathcal{O}\iota)$, образованной полями $\mathcal{D}^\wedge$ и $\bar{\mathcal{D}}^\wedge$, сохраняющее все свойства $BRST$-алгебры, сформулированные на языке теории суперпространств.

Литература

I. А б р а м о в В.А. Супермногообразие связностей и симметрии квантового эффективного действия // Препринт F - 28. - 1985. - Отд. физ.-мат. и техн. наук АН ЭССР. - Тарту. - С. 45.

2. А б р а м о в В.А., Л у м и с т е Ю.Г. Суперпространство с подстилающим банаховым расслоением связностей и суперсимметрии эффективного действия // Изв. вузов. Математика. - 1986. - № I. - С. 3-I2.

3. Б е р е з и н Ф.А. Метод вторичного квантования // - М. Физматгиз, 1965.

4. Б е р е з и н Ф.А., К е ц Г.И. Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами // Матем. сб. - 1970. - Т. 82. - I24. - С. 343-359.

5. Г е н д е н ш т е й н Л.Э., К р и в е И.В. Суперсимметрия в квантовой механике // УФН. - 1985. - Т. I46.- вып. 4. - С. 553-590.

6. Л е й т е с Д.А. Введение в теорию супермногообразий // - Петрозаводск, 1983.

7. Т ю т и н И.В. Препринт ФИАН СССР. - М., 1975. - № 39.

8. Ф а д д е е в Л.Д., С л а в н о в А.А. Введение в квантовую теорию калибровочных полей // М. Наука, 1978.

9. B a u l i e u L., T h i e r r y - M i e g I. The principle of BRS symmetry: An alternative approach to Yang-Mills theories.// Nucl. Phys.- 1982.- B 197. - No. 3. - P. 477-508.

10. B e c c h i C., R o u et A., S t o r a R. Renormalization of gauge theories.// Ann. of Phys. - 1976. - No. 98.- P. 287-321.

11. K o n s t a n t B. Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization.// Lect. Notes in Math. - 1975.- No. 570.- P. 177-307.

12. M i t t e r P. K., V i a l e t t C. M. On the bundle of connections and the gauge orbit manifolds in Yang-Mills theory.// Commun. Math. Phys.- 1981. - No. 79 - P. 457-472.

13. R o g e r s A. A. A global theory of sypermanifolds.-// J. Math. Phys.- 1980.- V.21.- No. 6.- P. 1352-1365.

Поступило
16 XI 1987

Generalized BRST-supersymmetries

V.Abramov

Summary

In the present paper the theory of supermanifolds is applied to a geometrical description of the theory of quantized gauge fields. By using the infinite-dimensional Grassmann algebra a supermanifold of connections has been constructed. The classical Yang-Mills action is functional on the manifold of the connections of a certain principal fibre bundle. Analogously, the Fadeyev-Popov effective action is functional on the supermanifold of connections. By using the Grassmann analytic continuation of the classical Yang-Mills action an effective action has been obtained BRST - $\overline{BRST}$ - operators are vector fields on the supermanifold of connections, which nullify the effective action. The Lie superalgebra of odd nilpotent vector fields, which include the BRST - algebra has been found.

TRÜ Toimetised
803 (1988), 15-30

Уч. зап. Тартуск. ун-та.
1988, 803, 15-30

ПОЛЯРНАЯ ПЛОСКОСТЬ КАРТАНОВА ПОДМНОГООБРАЗИЯ M_m С ПЛОСКОЙ НОРМАЛЬНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ В E_{2m+1}

Т.Вировере

Кафедра алгебры и геометрии

Подмногообразия M_m с плоской нормальной связностью $\nabla^\perp$ в евклидовом пространстве E_n привлекали внимание с 1920 годов и изучались многими исследователями (см. обзор [4]). Среди этих подмногообразий особое место занимают картановы [6], у которых слои $N_x^{(1)}M_m$ главного нормального расслоения $N^{(1)}M_m$ имеют размерность $m = \dim M_m$, т.е. $\dim N_x^{(1)}M_m = m$ в каждой точке $x \in M_m$; другими словами, у которых главные векторы кривизны $\vec{k}_i$, $i = 1, \ldots, m$, линейно независимы в каждой точке $x \in M_m$.

В [2] картановы M_m с плоской $\nabla^\perp$ исследовались нами при $m = 2$. В нормальном пространстве рассматриваемой M_2 в E_5 была построена пара прямых – так называемых полярно-квазифокусных прямых – расположение которых в $[x, T_x^\perp M_2]$ тесно связано с направлениями векторов $\vec{k}_i$. Вместе с характеристикой нормальных пространств – эволютной прямой лежат эти прямые в одной плоскости, называемой полярной плоскостью. По взаимному расположению этих трех прямых удалось в [2] провести некоторую классификацию картановых поверхностей M_2 с плоской $\nabla^\perp$ в E_5.

В настоящей статье эти конструкции находят свои естественные дополнения и обобщения на случай картанова подмногообразия M_m с плоской $\nabla^\perp$ в E_{2m+1}. Для рассматриваемых M_m показывается, что полярно-квазифокусные точки заполняют в каждой полярной плоскости m плоскостей размерности $m-1$. Исследуются возможные взаимные расположения этих плоскостей, а также относительно эволютной прямой.

Автор выражает свою искреннюю благодарность проф. Ю.Г. Лумисте за многие ценные замечания при составлении этой работы.

§ I. Основные понятия, технический аппарат

Пусть в E_{2m+1} задано подмногообразие M_m. Оно является базой своего касательного векторного расслоения TM_m и нормального векторного расслоения $T^{\perp}M_m$ со слоями, соответственно, T_xM_m и $T^{\perp}_xM_m$ в точке $x\in M_m$. К каждой $x\in M_m$ присоединяется ортонормированный репер $\{x,\vec{e}_J\}$, где $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{e}_\alpha\}$ принадлежат, соответственно к T_xM_m и $T^{\perp}_xM_m$. Здесь и в дальнейшем индексы пробегают следующие значения: $J, \exists,$ $K = 1,\dots,2m+1$; $i,j,k = 1,\dots,m$; $\alpha,\beta,\gamma = m+1,\dots,2m+1$.

В деривационных формулах репера

$$d\vec{x} = \omega^J\vec{e}_J,\ d\vec{e}_K = \omega_K^J\vec{e}_J$$

имеет место $\omega_J^K + \omega_K^J = 0$, причем удовлетворяются структурные уравнения

$$d\omega^J = \omega^K\wedge\omega_K^J,\ d\omega_\exists^J = \omega_\exists^K\wedge\omega_K^J.$$

Кроме того,

$$\omega^\alpha = 0,$$

откуда

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha\omega^j,\ b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha.$$

В силу этого

$$d\omega_i^j - \omega_i^k\wedge\omega_k^j = -\sum_\alpha b_{ik}^\alpha b_{jl}^\alpha\,\omega^k\wedge\omega^l,$$

$$d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta = -\sum_i b_{ik}^\alpha b_{il}^\beta\,\omega^k\wedge\omega^l.$$

Следовательно, в расслоениях TM_m и $T^{\perp}M_m$ определены связность Леви-Чивита ∇ и нормальная связность $\nabla^{\perp}$ с формами кривизны, соответственно

$$\Omega_i^j = -\sum_\alpha b_{ik}^\alpha b_{jl}^\alpha\,\omega^k\wedge\omega^l,$$

$$\Omega_\alpha^\beta = -\sum_i b_{ik}^\alpha b_{il}^\beta\,\omega^k\wedge\omega^l.$$

Пусть нормальная связность $\nabla^{\perp}$ подмногообразия M_m в E_{2m+1} плоская, т.е. пусть $\Omega_\alpha^\beta = 0$. Тогда все матрицы $\|b_{ik}^\alpha\|$ и $\|g_{ik}\|$ (где $g_{ik} = \vec{e}_i\cdot\vec{e}_k$; $\vec{e}_i, \vec{e}_k \in T_xM_m$) приводимы одновременно к каноническому виду:

$$b_{ik}^\alpha = k_i^\alpha\delta_{ik},\ g_{ik} = \delta_{ik}.$$

После этого векторы $\vec{e}_i$ идут в главных направлениях; интегральные линии полей этих направлений - линии кривизны - образуют на M_m ортогональную сопряженную сеть [1]. Главные векторы кривизны определяются при этом формулами

$$\vec{k}_i = k_i^\alpha\vec{e}_\alpha,\ i=1,\dots,m.$$

Пусть векторы $\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_m$ линейно независимы. Подмногообразие M_m с плоской $\nabla^{\perp}$ в E_{2m+1} называется тогда картановым подмногообразием. Репер специализируем так, чтобы линейные оболочки $[\vec{e}_{m+1},\dots,\vec{e}_{2m}]$ и $[\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_m]$ совпадали. Это приводит к

$$\omega_i^{m+j} = k_i^{m+j}\omega^i ; \quad \omega_i^{2m+1} = 0, \tag{I.I}$$

где в правой части нет суммирования по i. Заметим, что начиная с этого места краткая запись суммирования по латинским индексам больше не применяется.

Путем дифференциального продолжения из (I.I) получается, что

$$\begin{aligned} dk_i^{m+j} + \sum_k k_i^{m+k}\omega_{m+k}^{m+j} &= K_i^{m+j}\omega^i + \sum_{k\neq i} L_{ik}^{m+j}\omega^k, \\ (k_i^{m+j} - k_k^{m+j})\,\omega_i^k &= L_{ki}^{m+j}\omega^i + \sum_{\ell\neq i} k_{ik\ell}^{m+j}\omega^\ell, \end{aligned} \tag{I.2}$$

$$\sum_j k_i^{m+j}\omega_{m+j}^{2m+1} = \varkappa_i\omega^i, \tag{I.3}$$

где $L_{ik}^{m+j} = L_{ki}^{m+j}$ и $k_{ik\ell}^{m+j}$ симметричны по нижним индексам. В силу линейной независимости векторов $\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_m$ из (I.3) следует, что

$$\omega_{m+j}^{2m+1} = \sum_k \tilde{k}_{m+j}^{k}\varkappa_k\omega^k, \tag{I.4}$$

где $\sum_k \tilde{k}_{m+i}^{k} k_k^{m+j} = \delta_i^j$, $\sum_k \tilde{k}_{m+k}^{i} k_j^{m+k} = \delta_j^i$.

В силу (I.2) и (I.3) получаются теперь следующие деривационные формулы:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \sum_k \vec{e}_k\omega^k, \\ d\vec{e}_i &= \sum_k \vec{e}_k\omega_i^k + \vec{k}_i\omega^i, \\ d\vec{k}_i &= -\sum_k \vec{e}_k(\vec{k}_i\cdot\vec{k}_k)\omega^k + \vec{K}_i\omega^i + \sum_{j\neq i}\vec{L}_{ij}\omega^j + \varkappa_i\vec{e}_{2m+1}\omega^i, \\ d\vec{e}_{2m+1} &= -\sum_k \tilde{\vec{k}}_k\varkappa_k\omega^k, \end{aligned} \tag{I.5}$$

где $\vec{K}_i = \sum_j K_i^{m+j}\vec{e}_{m+j}$, $\vec{L}_{ij} = \sum_k L_{ij}^{m+k}\vec{e}_{m+k}$, $\tilde{\vec{k}}_k = \sum_j \tilde{k}_{m+j}^{k}\vec{e}_{m+j}$.

Линейная оболочка главных векторов кривизны $\vec{k}_i$ в точке $x\in M_m$ называется главным нормальным подпространством $N_x^{(1)}M_m$; вместе с $x\in M_m$ оно определяет m-мерную главную нормальную плоскость $[x, N_x^{(1)}]$. Направление $N_x^{(2)}M_m$, ортогонально дополняющее $N_x^{(1)}M_m$ в $T_x^{\perp}M_m$, будем называть бинормальным направлением; оно определяет бинормальную прямую $[x, N_x^{(2)}]$.

Плоскость $[x, N_x^{(1)}]$ содержит индикатрису нормальной кривизны $J_x^{(1)}$, которая определяется как множество точек с радиусами-векторами $\vec{x} + \sum_i (t^i)^2\vec{k}_i$, где единичный вектор $\vec{t} = \sum_i t^i\vec{e}_i$ вращается свободно в касательном пространстве T_xM_m. Индикатриса рассматриваемого M_m является $(m-1)$-мерным симплексом, у которого радиусами-векторами вершин K_i при начале $x\in M_m$ являются векторы $\vec{k}_i$. Индикатриса обладает $(m-1)$-мерной аффинной оболочкой $R(J_x^{(1)})$, векторное пространство которой натянуто на векторы $\vec{k}_i - \vec{k}_j$, $j\neq i$. Центром кривизны будет названа точка c_x, которая лежит на прямой, проходящей в $[x, N_x^{(1)}]$ через x перпендикулярно к $R(J_x^{(1)})$ по той стороне от x, где находится и точка пересечения с $R(J_x^{(1)})$ причем $|\vec{c}_x - \vec{x}| = k^{-1}$, где k — расстояние точки x от $R(J_x^{(1)})$ (ср. [2] и [5], где c_x был назван перицентром).

Специализируя репер в $N_x^{(1)}$ так, чтобы $\vec{e}_{m+1}$ был коллинеарен к $\overrightarrow{xc_x}$ (т.е. ортогонален к $R(J_x^{(1)})$) и сонаправлен с ним, получим, что все $\vec{k}_i$ имеют на e_{m+1} одну и ту же проекцию, и поэтому

$$k_i^{m+1} = k > 0, \ i = 1, \dots, m. \tag{I.6}$$

Центр кривизны c_x имеет при этом радиус-вектор $\vec{c}_x = \vec{x} + k^{-1}\vec{e}_{m+1}$.

Как следствие из (I.6) получается, что в матрице $\|\tilde{k}_{m+j}^{k}\|$ все определители $(m-1)$-го порядка $\mathcal{D}_i^{m+1}$, являющиеся алгебраическими дополнениями элементов $\tilde{k}_{m+1}^{i}$, равны между собой и отличны от нуля:

$$\mathcal{D}_1^{m+1} = \dots = \mathcal{D}_m^{m+1} \neq 0, \tag{I.7}$$

так как $\mathcal{D}_i^{m+1} = k_i^{m+1} \cdot det\|\tilde{k}_{m+j}^{k}\| = k \cdot (det\|k_k^{m+j}\|)^{-1}$.

Из (I.2), в силу (I.6), следует, что

$$L_{ij}^{m+1} = k_{jk}^{m+1} = 0, \ j \neq i, \ k \neq j, \ k \neq i, \tag{I.8}$$

которые влекут

$$dk + \sum_{j_1} k_i^{m+j_1} \omega_{m+j_1}^{m+1} = K_i^{m+1} \omega^i,$$

где $j_1, k_1 = 2, \dots, m$. Записывая эти соотношения в виде

$$k_i^{m+1} k^{-1} dk + \sum_{j_1} k_i^{m+j_1} \omega_{m+j_1}^{m+1} = K_i^{m+1} \omega^i$$

и рассматривая их как линейную систему для определения $d\ln k$ и $\omega_{m+j_1}^{m+1}$, получим, что

$$dk = \sum_k k \tilde{k}_{m+1}^{k} K_k^{m+1} \omega^k, \tag{I.9}$$

$$\omega_{m+j_1}^{m+1} = \sum_k \tilde{k}_{m+j_1}^{k} K_k^{m+1} \omega^k.$$

Точка $y \in [x, T_x^{\perp} M_m]$, радиус-вектор $\vec{y} = \vec{x} + y^\alpha \vec{e}_\alpha$ которой обладает свойством, что dy содержится в $[x, T_x^{\perp} M_m]$ при некотором смещении точки x вдоль M_m, называется фокусной точкой подмногообразия M_m. В случае картанова M_m с плоской $\nabla^{\perp}$ в E_{2m+1} фокусные точки заполняют m фокусных плоскостей φ_i размерности m, каждая из которых определяется уравнением

$$1 - \vec{k}_i \cdot (\vec{y} - \vec{x}) = 0. \tag{I.10}$$

Они пересекаются по прямой, проходящей через центр кривизны c_x ортогонально к $N_x^{(1)}$, т.е. параллельно к бинормальной прямой $[x, N_x^{(2)}]$. Эта прямая $[c_x, N_x^{(2)}] = S_x$ называется эволютной прямой. Она является характеристикой семейства нормальных пространств $\{[x, T_x^{\perp} M_m] \mid x \in M_m\}$. При $m = 1$

она совпадает с осью кривизны линии в E_3. В выбранном репере она определяется уравнением

$$\vec{y}=\vec{x}+k^{-1}\vec{e}_{m+1}+t\,\vec{e}_{2m+1}.$$

В нормальном пространстве $[x, T_x^{\perp}M_m]$ картанова M_m определяется m-мерная плоскость, проходящая через эволютную прямую S_x ортогонально к xc_x, т.е. параллельно к плоскости $R(J_x^{(1)})$; эта плоскость будет названа полярной плоскостью картанова M_m в точке x и обозначается Π_x. Относительно выбранного репера в $T_x^{\perp}M_m$ плоскость Π_x задается уравнением

$$k\vec{e}_{m+1}\cdot(\vec{y}-\vec{x})=1. \qquad \text{(I.II)}$$

Полярная плоскость Π_x и главная нормальная плоскость $[x, N_x^{(1)}]$ пересекаются по $(m-1)$-мерной плоскости, которая называется полярно-перпендикулярной $S_x^{\perp}$ в точке $x\in M_m$.

Определение I. Картановы M_m в E_{2m+1}, у которых: I) $\tilde{k}_{m+1}^{k}\neq 0$ при всех $k=1,\dots,m$; 2) $\vec{k}_i\cdot\vec{k}_j\neq 0$ при всех i,j; 3) $\varkappa_k\neq 0,\ k=1,\dots,m$; 4) $K_k^{m+1}\neq 0,\ k=1,\dots,m$; 5) при каждом фиксированном значении индекса i линейная оболочка векторов $\vec{L}_{ij},\ j\neq i$, $(m-1)$-мерна, будут названы картановыми M_m основного типа.

Ниже условия этого определения получают свои геометрические характеристики. Однако, для условий I) и 2) можно их дать уже сейчас.

Пусть $\tilde{k}_{m+1}^{i}=0$ при некотором фиксированном $i,\ 1\leq i\leq m$. Это равносильно тому, что в матрице $\|k_k^{m+j}\|$ определитель порядка $m-1$, который получается вычеркиванием первого столбца (с верхним индексом $m+1$, причем справедливо (I.6)) и i-го ряда, равен нулю. Если восстановить этот столбец, а этот ряд заменить рядом координат $(k; 0; \dots; 0)$ радиуса-вектора $k\vec{e}_{m+1}$ проекции точки c_x на $R(J_x^{(1)})$, то вместо этого определителя имеем его кратное с множителем $k>0$. Равенство нулю полученного определителя порядка m означает линейную зависимость векторов $\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_{i-1}, k\vec{e}_{m+1}, \vec{k}_{i+1},\dots,\vec{k}_m$, а это есть условие того, что указанная проекция лежит на плоскости грани симплекса $J_x^{(1)}$, противолежащей вершине K_i. Следовательно, условие I) требует, чтобы эта проекция находилась вне плоскостей граней симплекса $J_x^{(1)}$. Заметим, что для картанова M_m существует возможность, что $m-1$ среди $\tilde{k}_{m+1}^{k}$, $1\leq k\leq m$, равны нулю одновременно. В этом случае рассматриваемая проекция находится в той вершине K_i, которая соответствует условию $\tilde{k}_{m+1}^{i}\neq 0$.

Исследуем 2) условие определения I. Главные векторы кривизны $\vec{k}_k, 1 \leqslant k \leqslant m$, образуют в каждой точке $x \in M_m$ m-гранный угол нормальной кривизны $\{\sum_{k=1}^{m} \lambda^k \vec{k}_k, \lambda^k \geqslant 0\}$, составленный из $(m-1)$-мерных плоскостей, каждая из которых натянута на $m-1$ векторы среди $\vec{k}_k$. Из $\vec{k}_i \cdot \overset{\asymp}{k_j} = \delta_{ij}$ следует тогда, что каждый вектор $\overset{\asymp}{k_j}$ направлен по нормали к соответствующей $(m-1)$-мерной плоскости грани m-гранного угла нормальной кривизны в точке $x \in M_m$. Значит, условие 2) равносильно тому, что все двугранные углы m-гранного угла нормальной кривизны отличны от $\frac{\pi}{2}$.

§ 2 Эволютное подмногообразие и его фокусы

Эволютным подмногообразием $\mathcal{E}$ карта нова M_m в E_{2m+1} называется огибающая семейства нормальных пространств $\{[x, T_x^{\perp} M_m] \mid x \in M_m\}$. (При $m=1$ оно сводится к полярной поверхности линии в E_3). Выше выяснилось, что $\mathcal{E}$ совпадает с объединением $\bigcup_{x \in M_m} S_x$ эволютных прямых, являющихся характеристиками этого семейства. Следовательно, эволютное подмногообразие $\mathcal{E}$ имеет размерность $m+1$ и ранг m. Так как его касательными плоскостями являются нормальные плоскости картанова M_m в E_{2m+1}, а нормальная связность последнего плоская, то $\mathcal{E}$ как погруженное риманово многообразие является локально евклидовым.

Из результатов [3] следует, что $\mathcal{E}$ как $(m+1)$-мерная линейчатая поверхность ранга m должна обладать торсами и фокусными точками (вещественными или мнимыми) на каждой своей образующей S_x. Напомним, что $y \in S_x$ называется фокусной точкой для $\mathcal{E}$, если смещение $d\vec{y}$ этой точки принадлежит S_x при некотором смещении точки x на M_m.

<u>Предложение</u> I. Эволютное подмногообразие $\mathcal{E}$ картанова M_m в E_{2m+1}, удовлетворяющего условию 3) определения I, имеет на каждой своей образующей m фокусных точек (если считать их с кратностями), которые вещественны и получаются смещениями точки x в главных направлениях на M_m.

<u>Доказательство.</u> Фокусная точка $y \in S_x$ с радиусом-вектором $\vec{y} = \vec{x} + k^{-1}\vec{e}_{m+1} + t\,\vec{e}_{2m+1}$ характеризуется тем, что

$$d\vec{y} = \left(-(k^2)^{-1} dk + t\,\omega_{2m+1}^{m+1}\right)\vec{e}_{m+1} + \sum_{j_1}\left(k^{-1}\omega_{m+1}^{m+j_1} + t\,\omega_{2m+1}^{m+j_1}\right)\vec{e}_{m+j_1} +$$

$$+\left(dt + k^{-1}\omega_{m+1}^{2m+1}\right)\vec{e}_{2m+1}$$ коллинеарен к $\vec{e}_{2m+1}$ при некотором смещении $d\vec{x}$. Поэтому для нахождения фокусной точки получа-

ется, в силу (I.4) и (I.9), система

$$\sum_k \tilde{k}^k_{m+i}(k^{-1}K^{m+1}_k + t\,\text{æ}_k)\omega^k = 0\ ,\ 1 \leq i \leq m.$$

Так как $\det\|\tilde{k}^k_{m+i}\| \neq 0$, то отсюда $(k^{-1}K^{m+1}_k + t\,\text{æ}_k)\omega^k = 0$, $k = 1,\dots,m$. Следовательно, смещению $\omega^i = ds, \omega^j = 0, j \neq i$ вдоль одного из главных направлений соответствует фокусная точка f_i с радиусом-вектором

$$\vec{f}_i = \vec{x} + k^{-1}(\vec{e}_{m+1} - K^{m+1}_i \text{æ}_i^{-1}\vec{e}_{2m+1}). \tag{2.I}$$

Предложение доказано.

Замечание I. Этим получено геометрическое истолкование условия 3) определения I. Это условие равносильно тому, что все торсы эволютного линейчатого подмногообразия $\mathcal{E}$ должны быть нецилиндрические, т.е. должны иметь собственные фокусные точки.

Точка $y \in \varphi_i$ называется i-той фокусно-квазиэволютной точкой, если нормальная компонента ее смещения не выходит из φ_i при любом смещении точки x на M_m.

Предложение 2. Все фокусно-квазиэволютные точки картанова M_m в E_{2m+1} , удовлетворяющего условию 5) определения I принадлежат эволютной прямой S_x и совпадают с фокусными точками эволютного линейчатого подмногообразия $\mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть точка y с радиусом-вектором $\vec{y} = \vec{x} + y^\alpha \vec{e}_\alpha$ принадлежит фокусной плоскости φ_i и является фокусно-квазиэволютной точкой, т.е. $1 - \vec{k}_i\cdot(\vec{y}-\vec{x}) = 0$ и $d\vec{y}\cdot\vec{k}_i = 0$ при любом смещении $d\vec{x} \in T_x M_m$.

Дифференцирование первого условия дает теперь $d\vec{k}_i \cdot \vec{y} = 0$, а это приводит, в силу (I.5), к системе

$$\begin{cases} (\vec{k}_i + \text{æ}_i \vec{e}_{2m+1})\cdot(\vec{y} - \vec{x}) = 0, \\ \vec{L}_{ij}\cdot(\vec{y} - \vec{x}) = 0,\ j \neq i. \end{cases} \tag{2.2}$$

Так как имеют место (I.8) и условие 5) определения I, то из уравнений второй группы (2.2) следует, что $\vec{y} = \vec{x} + y^{m+1}\vec{e}_{m+1} + y^{2m+1}\vec{e}_{2m+1}$. Теперь (I.I0) и (2.2) первое уравнение определяют именно точку f_i с радиусом-вектором (2.I). Предложение доказано.

Замечание 2. Так как фокусно-квазиэволютные точки картанова M_m основного типа в E_{2m+1} совпадают с фокусными точками на S_x , то фокусные плоскости φ_k, $1 \leq k \leq m$ совпадают с соответственными касательными плоскостями торсов эволютного подмногообразия $\mathcal{E}$.

Замечание 3. Если M_m не является подмногообразием основного типа, точнее, если не удовлетворено условие 5) определения I, то к точкам f_i могут прибавляться фокусно-квазиэволютные точки, не являющиеся фокусными точками эволютного подмногообразия $\mathcal{E}$. Например, пусть $\vec{L}_{ij}=\vec{0}$, $j\neq i$. Тогда ранг системы (2.2) и (I.IO) равен 2, т.е. фокусно-квазиэволютные точки заполняют в φ_i некоторую плоскость коразмерности I, проходящую через f_i. Условия $\vec{L}_{ij}=\vec{0}, j\neq i$, характеризуются геометрически тем, что линии кривизны $\omega^i=ds, \omega^j=0, j\neq i$ являются геодезическими.

В дальнейшем, рассматривая картаново M_m основного типа, его фокусно-квазиэволютные точки будут названы, опираясь на предложение 2, эволютно-фокусными точками.

<u>Предложение 3</u>. Каждая эволютно-фокусная точка f_i картанова M_m основного типа в E_{2m+1} является центром гиперсферы, с которой соответствующая линия кривизны имеет касание третьего порядка, а остальные линии, проходящие через точку $x\in M_m$, касание второго порядка.

При $m=2$ это предложение доказано в [2], обобщение получается непосредственно.

§ 3 Полярно-квазифокусные плоскости

Точка y полярной плоскости Π_x картанова M_m в E_{2m+1} называется полярно-квазифокусной, если нормальная компонента ее смещения $d\vec{y}$ не выходит из Π_x при смещении $d\vec{x}$ точки $x\in M_m$ в одном из главных направлений.

<u>Предложение 4</u>. Полярно-квазифокусные точки картанова M_m основного типа в E_{2m+1} заполняют в каждой полярной плоскости Π_x m плоскостей коразмерности I, причем каждая из этих плоскостей проходит через соответствующую эволютно-фокусную точку f_i.

<u>Доказательство.</u> Пусть точка $y\in\Pi_x$ с радиусом-вектором $\vec{y}=\vec{x}+y^\alpha\vec{e}_\alpha$ является полярно-квазифокусной точкой, т.е. кроме (I.II) при $d\vec{x}\parallel\vec{e}_i$ имеет место $d\vec{y}\cdot\vec{e}_{m+1}=0$. Тогда путем дифференцирования получается из (I.II) следующее следствие:

$$(k^2)^{-1}dk+\Big(\sum_{j_1}\omega_{m+1}^{m+j_1}\vec{e}_{m+j_1}+\omega_{m+1}^{2m+1}\vec{e}_{2m+1}\Big)\cdot(\vec{y}-\vec{x})=0.$$

Если использовать здесь формулы (I.4) и (I.9) и учесть, что при $d\vec{x}\parallel\vec{e}_i$ среди всех ω^k, $1\leq k\leq m$, лишь ω^i отлична от нуля, получается, что

$$K_i^{m+1}\Big(k^{-1}\tilde{k}_{m+1}^{i}-\sum_{j_1}y^{m+j_1}\tilde{k}_{m+j_1}^{i}\Big)+y^{2m+1}\tilde{k}_{m+1}^{i}\varkappa_i=0. \quad (3.I)$$

Следовательно, полярно-квазифокусные точки образуют при каждом значении i, где $1 \leqslant i \leqslant m$, плоскость размерности $m-1$. Этим доказано первое утверждение. Второе следует непосредственно из того, что точка f_i имеет, в силу (2.I), координаты $y^{m+j_1}=0$, $j_1=2,\ldots,m$, $y^{2m+1}=-k^{-1}K_i^{m+1}æ_i^{-1}$. Предложение доказано.

Полученные $(m-1)$-мерные плоскости в Π_x, определяемые уравнениями (3.I) и состоящие из полярно-квазифокусных точек, будут названы полярно-квазифокусными плоскостями и обозначаются через Φ_i.

Исследуем далее возможности для взаимного расположения плоскостей $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$, предполагая лишь, что все они существуют. Это означает, что условия 3) и 4) определения I заменяются более слабым требованием:

6) $(K_k^{m+1})^2+æ_k^2 \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

<u>Определение 2</u>. Картановы M_m в E_{2m+1}, удовлетворяющие условиям I), 2) и 5) определения I и дополнительно еще условию 6), будут названы картановыми M_m общего типа. Те из них, которые не являются картановыми M_m основного типа, будут названы картановыми M_m общего неосновного типа в E_{2m+1}.

<u>Предложение 5</u>. У картанова M_m общего типа в E_{2m+1}, удовлетворяющего условию 4) определения I, полярно-квазифокусные плоскости $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$ либо имеют одну и только одну общую точку, либо имеют одномерное общее направление, неортогональное к эволютной прямой S_x. Плоскости Φ_k, $k=1,\ldots,m$ рассматриваемого M_m не имеют общего направления более высокой размерности; каждые две плоскости Φ_i и Φ_j, $j \neq i$, непараллельны между собой.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим $(m\times m)$-матрицу системы уравнения (3.I)

$$\mathcal{K}=\left\| \begin{matrix} \tilde{k}^1_{m+2}K_1^{m+1} & \ldots & \tilde{k}^1_{2m}K_1^{m+1} & \tilde{k}^1_{m+1}æ_1 \\ \hline \tilde{k}^m_{m+2}K_m^{m+1} & \ldots & \tilde{k}^m_{2m}K_m^{m+1} & \tilde{k}^m_{m+1}æ_m \end{matrix} \right\|$$

и обозначим через $\overline{\mathcal{K}}$ расширенную матрицу этой системы, т.е. матрицу $\mathcal{K}$, дополненную столбцом свободных членов $k^{-1}\tilde{k}^1_{m+1}K_1^{m+1}$, $\ldots$, $k^{-1}\tilde{k}^m_{m+1}K_m^{m+1}$.

В самом общем случае, когда $\operatorname{rank}\mathcal{K}=\operatorname{rank}\overline{\mathcal{K}}=m$, плоскости $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$ имеют одну и только одну общую точку. Заметим, что это может иметь место и тогда, когда среди величин $æ_1,\ldots,æ_m$ хотя бы один отличен от нуля.

Пусть $\operatorname{rank}\mathcal{K}<m$. Покажем, что здесь возможен лишь случай, когда $\operatorname{rank}\mathcal{K}=m-1$. Действительно, при допущении $\operatorname{rank}\mathcal{K}<m-1$ каждые $m-1$ столбцов матрицы $\mathcal{K}$ были бы ли-

нейно зависимы, в частности, и первые $m-1$ из них. Это привело бы к существованию чисел $\lambda^{m+j_1}, j_1=2,\dots,m$, не равных нулю одновременно, таких, что $K_k^{m+1}(\sum_{j_1}\lambda^{m+j_1}\tilde{k}^k_{m+j_1})=0$, $1\le k\le m$. Отсюда, в силу условия 4), получилось бы противоречие с предположением о картановости M_m.

Равенство $\operatorname{rank}\mathcal{K}=m-1$ геометрически эквивалентно тому, что плоскости $\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m$ имеют одномерное общее направление, направляющий ненулевой вектор которого имеет координаты $\lambda^{m+j_1}, j_1=2,\dots,m$ и λ^{2m+1}, удовлетворяющие системе

$$-\sum_{j_1} y^{m+j_1}\tilde{k}^k_{m+j_1}K_k^{m+1}+y^{2m+1}\varkappa_k\tilde{k}^k_{m+1}=0,\ 1\le k\le m. \tag{3.2}$$

Здесь равенство $\lambda^{2m+1}=0$ привело бы к ранее исключенному случаю линейной зависимости между первыми $m-1$ столбцами матрицы $\mathcal{K}$. Следовательно, $\lambda^{2m+1}\ne 0$, т.е. общее одномерное направление плоскостей $\mathfrak{F}_k$ не может быть перпендикулярно к S_x. Тогда

$$\varkappa_k\tilde{k}^k_{m+1}=-\sum_{j_1}\mu^{m+j_1}\tilde{k}^k_{m+j_1}K_k^{m+1},\ 1\le k\le m, \tag{3.3}$$

где $\mu^{m+j_1}=(\lambda^{2m+1})^{-1}\lambda^{m+j_1}$ при каждом j_1.

В частности, возможен случай, когда общее направление плоскостей $\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_m$ параллельно к S_x, т.е. когда все $\lambda^{m+j_1}=0$ и $\lambda^{2m+1}\ne 0$. Это равносильно тому, что

$$\varkappa_1=\dots=\varkappa_m=0.$$

Предположение о параллельности двух плоскостей $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{F}_j, j\ne i$, привело бы к соотношениям пропорциональности:

$$\tilde{k}^i_{m+k_1}=\lambda\tilde{k}^j_{m+k_1},\ \varkappa_i\tilde{k}^i_{m+1}=\mu\varkappa_j\tilde{k}^j_{m+1},$$

как следует из системы уравнений (3.I), причем $\lambda=(K_i^{m+1})^{-1}K_j^{m+1}\mu$. Это дало бы равенство нулю всех определителей $(m-1)$-го порядка $\tilde{\mathfrak{D}}_i^{m+1}$ матрицы $\|\tilde{k}^k_{m+j}\|$, но, в силу (I.7), это невозможно. Предложение доказано.

<u>Определение 3</u>. Картановы подмногообразия в E_{2m+1} удовлетворяющие условиям I), 2), 4) и 5) определения I, будут названы картановыми M_m главного типа в E_{2m+1}. Те из них, которые не являются картановыми M_m основного типа, получают название картановы M_m главного неосновного типа в E_{2m+1}.

Среди картановых M_m общего типа в E_{2m+1} более глубокий интерес представляют те, которые не удовлетворяют условию 4) определения I. Они будут исследованы ниже. Прежде всего покажем, что справедлива

<u>Лемма</u>. У картанова M_m общего типа в E_{2m+1} все коэффициенты $K_1^{m+1},\dots,K_m^{m+1}$ не могут быть равны нулю одновременно.

Доказательство. Предположение $K_1^{m+1} = \ldots = K_m^{m+1} = 0$ влечет, в силу (I.9), к $dk = 0$ и $\omega_{m+j_1}^{m+1} = 0$ при всех $j_1 = 2, \ldots, m$. Продифференцировав последние из полученных соотношений внешним образом, используя (I.4), получим, что

$$\sum_{k<\ell} \tilde{k}_{m+1}^{[k} \tilde{k}_{m+j_1}^{\ell]} æ_k æ_\ell \omega^k \wedge \omega^\ell = 0.$$

Отсюда, в силу условия 6) определения 2 и нашего предположения, следует, что $\tilde{k}_{m+1}^{[k} \tilde{k}_{m+j_1}^{\ell]} = 0$ при всех $k \neq \ell$ и $j_1 = 2, \ldots, m$. Это означает, что все определители 2-го порядка матрицы $\| \tilde{k}_{m+j}^{k} \|$, включающие элементы первого ряда, равны нулю. Получено противоречие с картановостью подмногообразия M_m общего типа. Лемма доказана.

Далее исследуем пересечение полярно-квазифокусных плоскостей $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$. Из предложения 5 следует, что у картанова M_m главного типа в E_{2m+1} случай $\bigcap_{k=1}^{m} \mathfrak{F}_k = \emptyset$ возможен лишь тогда, когда $\operatorname{rank} \mathcal{K} = m-1$ и $\operatorname{rank} \overline{\mathcal{K}} = m$.

Предполагаем теперь, что $\bigcap_{k=1}^{m} \mathfrak{F}_k \neq \emptyset$. Здесь уместно выделить два случая.

Сперва рассмотрим случай, когда $\dim \bigcap_{k=1}^{m} \mathfrak{F}_k = 0$, т.е. когда пересечением плоскостей $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_m$ является точка, которая обозначается через z_x.

Покажем, что если у картанова M_m общего неосновного типа не выполняется условие 4) определения I, то z_x принадлежит полярному перпендикуляру $S_x^\perp$ тогда и только тогда, когда один и только один из коэффициентов $K_1^{m+1}, \ldots, K_m^{m+1}$ равен нулю. В самом деле, из $z_x \in S_x^\perp$ следует, что система уравнений (3.I) имеет решение с $y^{2m+1} = 0$. Рассматривая однородную систему

$$K_k^{m+1}\left(y^{m+1} \tilde{k}_{m+1}^{k} - \sum_{j_1} y^{m+j_1} \tilde{k}_{m+j_1}^{k}\right) = 0, \ 1 \leq k \leq m$$

видно, что она имеет нетривиальное решение $y^{m+1} = k^{-1}$, y^{m+j_1}, $j_1 = 2, \ldots, m$, значит определитель этой системы равен нулю. В силу картановости M_m тогда один из коэффициентов $K_1^{m+1}, \ldots, K_m^{m+1}$ равен нулю. Обратное очевидно.

Далее исследуем случай, когда $\dim \bigcap_{k=1}^{m} \mathfrak{F}_k > 0$, т.е. когда $\operatorname{rank} \mathcal{K} = \operatorname{rank} \overline{\mathcal{K}} < m$. Справедливо

Предложение 6. У картанова M_m общего неосновного типа в E_{2m+1} одна из полярно-квазифокусных плоскостей $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ либо I) параллельна к S_x, либо 2) ортогональна к S_x и проходит через центр кривизны c_x (т.е. совпадает с полярным перпендикуляром $S_x^\perp$). Все эти плоскости рассматриваемого M_m имеют общее пересечение размерности $p-1$, $1 < p < m$ тогда и только тогда, когда среди коэффициентов $K_1^{m+1}, \ldots, K_m^{m+1}$ сушествует p , равных нулю одновременно, причем тогда $\bigcap\limits_{k=1}^{m} \mathfrak{F}_k \subset S_x^{\perp}$.

<u>Доказательство.</u> Среди коэффициентов $K_1^{m+1}, \ldots, K_m^{m+1}$ и $æ_1, \ldots, æ_m$ рассматриваемого M_m хотя бы один равен нулю, что доказывает первое утверждение, как следует из (3.I). Если, например, $K_i^{m+1} = 0$, то, в силу (3.I), плоскость $\mathfrak{F}_i$ ортогональна к S_x и проходит через точку c_x , т.е. $\mathfrak{F}_i = S_x^{\perp}$.

Если существует p равных нулю коэффициентов среди $K_1^{m+1}, \ldots, K_m^{m+1}$, где $1<p<m$, то из (3.I) следует, что $\operatorname{rank} \mathcal{K} = \operatorname{rank} \overline{\mathcal{K}} = m-(p-1)$, значит, $\dim \bigcap\limits_{k=1}^{m} \mathfrak{F}_k = p-1$, а p плоскостей среди $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ совпадают с $S_x^{\perp}$, в силу чего, $\bigcap\limits_{k=1}^{m} \mathfrak{F}_k \subset S_x^{\perp}$.

Обратно, пусть $\dim \bigcap\limits_{k=1}^{m} \mathfrak{F}_k = p-1$, где $2<p<m$. Это означает, что $\operatorname{rank} \mathcal{K} = \operatorname{rank} \overline{\mathcal{K}} = m-(p-1)$, поэтому каждые $m-(p-1)+1 = m-p+2$ столбцов матрицы $\overline{\mathcal{K}}$ линейно зависимы.

Анализируем сперва случай, когда эти столбцы выбраны из числа первых $m-1$ столбцов матрицы $\mathcal{K}$. Каждый выбор определяется некоторым набором $m-p+2$ разных значений индекса $m+j_1$; число этих наборов равно C_{m-1}^{m-p+2} . Возьмем один из них и обозначим его через A . Пусть индекс a пробегает набор A . Тогда существуют числа λ^a , одновременно не равные нулю, так что

$$\Big(\sum_{a\in A} \lambda^a \tilde{k}_a^k\Big) K_k^{m+1} = 0 \tag{3.4}$$

при $k=1,\ldots,m$.

В области изменения индекса k выбираем также всевозможные наборы $m-p+2$ разных значений (число таких наборов равно C_m^{m-p+2}) и обозначим эти наборы через $\mathcal{U}_\rho$; здесь $\rho = 1,\ldots,N$, где $N = C_m^{m-p+2}$.

Допустим, что для всех наборов $\mathcal{U}_\rho$ имеют место $\sum_a \lambda^a \tilde{k}_a^{u_\rho} = 0$, $\rho = 1,\ldots,N$, где индекс u_ρ пробегает набор $\mathcal{U}_\rho$. Из этого следует линейная зависимость между теми рядами матрицы $\|\tilde{k}_{m+j}^k\|$, индексы которых принадлежат набору A . Это противоречит картановости M_m . Следовательно, существует хотя бы одно значение субиндекса $\rho=\rho_0$, когда не более чем $m-p+1$ среди выражений $\sum_a \lambda^a \tilde{k}_a^{u_{\rho_0}}$ равны нулю. Из (3.4) вытекает теперь, что по крайней мере $p-1$ среди коэффициентов $K_1^{m+1}, \ldots, K_m^{m+1}$ равны нулю.

Перенумеровав эти коэффициенты, если нужно, можно в дальнейшем считать, что $K_h^{m+1} = 0$, $1 \leq h \leq p-1$. Остается доказать, что среди остальных коэффициентов $K_{\bar{h}}^{m+1}$, $\bar{h} = p,\ldots,m$, еще один равен нулю.

Исходим опять из того, что каждые $m-p+2$ столбцов матрицы $\mathcal{K}$ линейно зависимы. Возьмем теперь эти столбцы так, что

I) включен столбец свободных членов системы (3.I), но предпоследнего столбца матрицы $\mathcal{K}$ нет:

$$\Big(\sum_{j}\mu^{j}\tilde{k}^{k}_{j}+\mu^{m+1}k^{-1}\tilde{k}^{k}_{m+1}\Big)K^{m+1}_{k}=0,\ 1\le k\le m, \tag{3.5}$$

2) включены как столбец свободных членов, так и последний столбец матрицы $\mathcal{K}$:

$$\Big(\sum_{t}\nu^{t}\tilde{k}^{k}_{t}+\nu^{m+1}k^{-1}\tilde{k}^{k}_{m+1}\Big)K^{m+1}_{k}+\nu^{2m+1}\tilde{k}^{k}_{m+1}\varkappa_{k}=0,\ 1\le k\le m, \tag{3.6}$$

где

$$\sum_{j}(\mu^{j})^{2}+(\mu^{m+1})^{2}\ne 0,\ \sum_{t}(\nu^{t})^{2}+(\nu^{m+1})^{2}+(\nu^{2m+1})^{2}\ne 0. \tag{3.7}$$

Здесь индексы j и t пробегают, соответственно, наборы $m-p+1$ и $m-p$ разных значений в области изменения индекса $m+j_1$.

Учитывая в (3.5) и (3.6), что $K^{m+1}_{h}=0$ и $\tilde{k}^{\bar h}_{m+1}\varkappa_{\bar h}\ne 0$ (см. условия I) и 6) определений I и 2), получается из (3.6), что $\nu^{2m+1}=0$, значит, нетривиальные из этих зависимостей представляются в виде

$$K^{m+1}_{\bar h}\Big(\sum_{j}\mu^{j}\tilde{k}^{\bar h}_{j}+\mu^{m+1}k^{-1}\tilde{k}^{\bar h}_{m+1}\Big)=0,\ p\le \bar h\le m, \tag{3.8}$$

$$K^{m+1}_{\bar h}\Big(\sum_{t}\nu^{t}\tilde{k}^{\bar h}_{t}+\nu^{m+1}k^{-1}\tilde{k}^{\bar h}_{m+1}\Big)=0,\ p\le \bar h\le m. \tag{3.9}$$

Допустим теперь, что при всех $\bar h$ имеют место

$$\begin{aligned}&\sum_{j}\mu^{j}\tilde{k}^{\bar h}_{j}+\mu^{m+1}k^{-1}\tilde{k}^{\bar h}_{m+1}=0,\\ &\sum_{t}\nu^{t}\tilde{k}^{\bar h}_{t}+\nu^{m+1}k^{-1}\tilde{k}^{\bar h}_{m+1}=0,\ p\le \bar h\le m.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Фиксируем произвольно некоторый набор для j и выбираем среди последних зависимостей ту, у которой набор для t содержится в этом фиксированном наборе. Умножая обе стороны полученных зависимостей (3.10), соответственно, на ν^{m+1} и $-\mu^{m+1}$ и суммируя, получается

$$\sum_{t}(\mu^{t}\nu^{m+1}-\nu^{t}\mu^{m+1})\tilde{k}^{\bar h}_{t}+\nu^{m+1}\mu^{t+1}\tilde{k}^{\bar h}_{t+1}=0, \tag{3.11}$$

где $t+1$ обозначает то единственное значение индекса j ,которое отличается от значений индекса t .

Покажем теперь, что сделанные допущения (3.10) приводят к противоречию с картановостью подмногообразия M_m . Вторые из соотношений (3.10) покажут, в силу (3.7), (где $\nu^{2m+1}=0$, как показано), что все миноры $(m-p+1)$ -го порядка матрицы $\|\tilde{k}^{k}_{m+j}\|$, составленные из $m-p+1$ последних столбцов и содержащие элементы первого ряда, равны нулю. Из (3.II) следует равенство нулю остальных миноров $(m-p+1)$ -го порядка, составленных из этих же столбцов. Действительно, при каждом фиксированном наборе для s все μ^s не могут быть нули, потому, что при $\mu^s=0$ первые из допущений (3.I0) привели бы, в силу (3.8), к противоречию $\mu^{m+1}k^{-1}\tilde{k}^{\bar{k}}_{m+1}=0$ с (3.7) и с I) в определении I. Эти μ^s можно перенумеровать так, что $\mu^{t+1}\neq 0$. Если теперь $\nu^{m+1}\neq 0$, то (3.II) дает сразу желаемый результат. Если $\nu^{m+1}=0$, то следует обратиться к последним зависимостям (3.I0), из которых также следует равенство нулю рассматриваемых остальных миноров.

Итак, при допущениях (3.I0) все миноры $(m-p+1)$-го порядка последних $m-p+1$ столбцов матрицы $\|\tilde{k}^{\kappa}_{m+j}\|$ равны нулю и эти столбцы линейно зависимы, что противоречит картановости подмногообразия M_m. Следовательно, в (3.8) и (3.9) по крайней мере одно выражение в скобках отлично от нуля и среди $K^{m+1}_{\bar{k}}$, $p\leqslant\bar{k}\leqslant m$, один равен нулю.

Отдельно исследуем случай $p=2$. Тогда число линейно зависимых столбцов матрицы $\tilde{K}$ равно $m-(p-1)+1=m>m-1$ и вместо (3.4) выпишем следующие соотношения линейной зависимости:

$$\sum_{j_1}\lambda^{m+j_1}\tilde{k}^{\kappa}_{m+j_1}K^{m+1}_{\kappa}+\lambda^{2m+1}\tilde{k}^{\kappa}_{m+1}\varkappa_{\kappa}=0,\ \kappa=1,\ldots,m. \tag{3.I2}$$

В соотношениях (3.5) индекс s пробегает все значения индекса $j_1=2,\ldots,m$, т.е. (3.5) представляются в виде

$$\Big(\sum_{j_1}\mu^{m+j_1}\tilde{k}^{\kappa}_{m+j_1}+\mu^{m+1}k^{-1}\tilde{k}^{\kappa}_{m+1}\Big)K^{m+1}_{\kappa}=0,\ \kappa=1,\ldots,m. \tag{3.I3}$$

Отсюда допущение, что все скобочные выражения равны нулю, дает противоречие с картановостью рассматриваемого M_m. Значит, по крайней мере один из коэффициентов среди $K^{m+1}_1,\ldots,K^{m+1}_m$ равен нулю. Обозначим его через $K^{m+1}_i=0$ при фиксированном i и подставим в (3.I2), что влечет, как и выше: $\lambda^{2m+1}=0$. Поэтому остальные соотношения (3.I2) примут вид

$$\sum_{\ell_1}\lambda^{m+\ell_1}\tilde{k}^{j}_{m+\ell_1}K^{m+1}_{j}=0,\ j\neq i,\ \ell_1=2,\ldots,m.$$

Предположение, что здесь при всех $j\neq i$ имеют место

$$\sum_{\ell_1}\lambda^{m+\ell_1}\tilde{k}^{j}_{m+\ell_1}=0,$$

приводит нас к противоречию с условиями (I.7). Следовательно, еще один коэффициент среди K^{m+1}_j, $j\neq i$, равен нулю. Предложение доказано.

Предложение 6 дает возможность уточнить множество картановых M_m общего типа в E_{2m+1}.

Дополним условия определения 2 следующим:

7) $\operatorname{rank} K = \operatorname{rank} \bar{K} = m-p+1$, т.е. полярно-квазифокусные плоскости $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ картанова M_m имеют в каждой точке $x \in M_m$ непустое пересечение размерности $p-1$, $1 \leq p < m$.

Определение 4. Картановы подмногообразия, удовлетворяющие условиям I), 2), 5) и 6) определения 2 и еще условию 7), будут названы картановыми M_m генерального типа рода p в E_{2m+1}. Те из них при $p=1$, которые не являются картановыми M_m основного типа, будут названы картановыми M_m генерального неосновного типа рода 1 в E_{2m+1}.

Литература

I. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях и их преобразованиях//"Геометрия, 1963 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)". М. 1965. 138-164.

2. В и р о в е р е Т.М. Об эволютах поверхности M_2 с плоской нормальной связностью в E_5//. Уч. зап. Тартуск.ун-та. 1986. 734. 3-19.

3. Л у м и с т е Ю.Г. Многомерные линейчатые поверхности евклидова пространства//Матем. сб. 1961. 55 (97).411--420.

4. Л у м и с т е Ю.Г., Ч а к м а з я н А.В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны//Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Проблемы геометрии. М. 1981. 12. 3-30.

5. М у л л а р и Р.Р. К теории многомерных поверхностей евклидова пространства//Труды вычислительного центра вып. 16. Тарту. 1969. 127 с.

6. C a r t a n E. Sur les varietes de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien//Bul. de la Soc. Math. de France. 1919. 47. 125-160; 1920. 40. 132-208.

Поступило
I X 1987

THE POLAR PLANE OF A CARTAN SUBMANIFOLD M_m WITH FLAT NORMAL CONNECTION IN E_{2m+1}

T. Virovere

Summary

Let M_m be a submanifold with flat normal connection in E_{2m+1}. Its second fundamental tensors b^{α}_{ik} are simultaneously diagonalizable, i.e. $b^{\alpha}_{ik} = k^{\alpha}_i \delta_{ik}$. The normal vectors $\vec{k}_i = k^{\alpha}_i \bar{e}_{\alpha}$ are called principal curvature vectors and their linear hull is called first normal space $N^{(1)}_x$. Let $\dim N^{(1)}_x = m$, i.e. let M_m be of a Cartan type. There exist m focal m-planes φ_i with normalvectors $\vec{k}_i$ in each normal $(m+1)$-plane $[x, T^{\perp}_x M_m]$. The intersection $\bigcap\limits_{K=1}^{m} \varphi_K$ is the evolute straight line S_x of the submanifold M_m, i.e. the characteristic of the family of normal $(m+1)$-planes. For the point $c_x = S_x \cap [x, N^{(1)}_x]$ we have $xc_x \perp S_x$. The m-plane in $[x, T^{\perp}_x M_m]$ through S_x orthogonal to xc_x, is called polar plane Π_x. The set of points on the Π_x, whose infinitesimal displacements have normal components on the same Π_x, when x moves along one of curvature lines, constitutes $(m-1)$-planes $\Phi_1, \dots, \Phi_m$, which are called polar quasifocal $(m-1)$-planes.

In this paper focal properties of the evolute regulus $\bigcup\limits_{x \in M_m} S_x$ and possible mutual dispositions of $(m-1)$-planes $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ in Π_x are investigated assuming that each Φ_K is not ideal. There is proved: 1) in general $\bigcap\limits_{K=1}^{m} \Phi_K$ is a point, 2) if $\bigcap\limits_{K=1}^{m} \Phi_K = \emptyset$, then $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ have only one common one-dimensional direction, 3) if $\bigcap\limits_{K=1}^{m} \Phi_K$ is a $(p-1)$-plane, $1 < p < m$, then this $(p-1)$-plane lies in $S^{\perp}_x = [x, N^{(1)}_x] \cap \Pi_x$. A preliminary classification of Cartan submanifolds M_m in E_{2m+1} is given.

TRÜ Toimetised
803 (1988), 31-40

Уч. зап. Тартуск. ун-та.
1988, 803, 31-40

ГЕОМЕТРИЯ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ КАРТАНОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ M_m С ПЛОСКОЙ НОРМАЛЬНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ В E_{2m+1}

Т.Вироверe

Кафедра алгебры и геометрии

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [4] (см. настоящий сборник), поэтому сразу же отметим, что техническая аппаратура, употребляемая в дальнейшем не повторяется.

В каждом нормальном пространстве $[x, T_x^{\perp} M_m]$ картанова M_m с плоской $\nabla^{\perp}$ в E_{2m+1} [4] существует полярная плоскость Π_x коразмерности 1, проходящая через эволютную прямую S_x параллельно к плоскости $R(J_x^{(1)})$ индикатрисы нормальной кривизны $J_x^{(1)}$. Плоскость Π_x содержит m плоскостей $\Phi_1, \dots, \Phi_m$, каждая из которых состоит из точек, смещающихся в Π_x при смещении точки x по соответственной линии кривизны на M_m. Эти $(m-1)$-мерные плоскости называются полярно-квазифокусными. В специализированном репере нормального пространства каждая Φ_k, $1 \leq k \leq m$, представляется следующим уравнением (см. [4], уравнение (3.1)):

$$K_k^{m+1}\left(k^{-1}\tilde{k}_{m+1}^{k} - \sum_{j_1} y^{m+j_1}\tilde{k}_{m+j_1}^{k}\right) + y^{2m+1}\tilde{k}_{m+1}^{k}\varkappa_k = 0. \quad (0.1)$$

В [4] уделено внимание картановым M_m общего типа в E_{2m+1}. Основным условием того, чтобы M_m было подмногообразием общего типа, является то, что ни одна из полярно-квазифокусных плоскостей не является несобственной (см. определение 2 в [4]). Это означает аналитически, что M_m удовлетворяет условию $(K_k^{m+1})^2 + (\varkappa_k)^2 \neq 0$ при всех $k = 1, \dots, m$, так как описание класса "общего типа" включает и условия $\tilde{k}_{m+1}^{k} \neq 0$, $1 \leq k \leq m$ (см. определение 1 в [4]) и $\operatorname{rank} \|\tilde{k}_{m+j}^{k}\| = m$ (условие картановости M_m).

В общем случае плоскости $\Phi_k, 1 \leq k \leq m$ имеют единственную общую точку z_x, называемую полярно-квазиэволютной точкой картанова M_m. Эта точка обладает свойством, что нормальная компонента ее смещения $d\vec{z}_x$ принадлежит полярной плоскости Π_x при любом смещении точки x на M_m. Для установления других возможных взаимных расположений плоскостей Φ_k в предложениях 5 и 6 статьи [4] выяснено, к чему сводятся зависимости между коэффициентами $K_1^{m+1}, \dots, K_m^{m+1}$ и $\varkappa_1, \dots, \varkappa_m$, а также исследованы случаи, когда некоторые из них равны нулю.

В частном случае $m=2$ у картановых M_2 с плоской $\nabla^{\perp}$ в E_5 на полярной плоскости Π_x имеются две прямые Φ_1 и Φ_2. На основе взаимного расположения прямых Φ_1 и Φ_2 и эволютной прямой S_x удалось в [3] провести некоторую классификацию рассматриваемых поверхностей. Нижепроведенные исследования завершают эту классификацию, но уже в классе картановых M_m общего типа в E_{2m+1}.

Параллельно с этим выделяются подклассы картановых M_m с плоской $\nabla^{\perp}$ в E_{2m+1} по наличию специальных сечений разных подрасслоений нормального расслоения $T^{\perp}M_m$, параллельных в $\nabla^{\perp}$. В теоремах 1-4 устанавливаются взаимосвязи между классами, выделенными по указанным двум принципам.

Заметим, что ссылки на формулы из статьи [4] обозначаются в дальнейшем следующим образом: например, формула (I.I) из [4] запишется в кратком виде ([4], I.I).

§ I. Классификация картановых подмногообразий

Среди картановых M_m общего типа в E_{2m+1} предложения 5 и 6 из статьи [4] позволяют по взаимному расположению полярно-квазифокусных плоскостей $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ и эволютной прямой S_x в полярной плоскости Π_x выделить следующие классы подмногообразий:

Определение I. Через $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ и $\mathcal{K}_4$ обозначаются классы картановых M_m в E_{2m+1}, которые характеризуются следующими условиями:

$\mathcal{K}_1$ - картановы M_m главного типа, у которых эволютная прямая S_x проходит через полярно-квазиэволютную точку z_x или параллельна ко всем плоскостям $\Phi_1, \dots, \Phi_m$;

$\mathcal{K}_2$ - картановы M_m главного типа, у которых плоскости $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ имеют общее одномерное направление, непараллельное и неортогональное к эволютной прямой S_x;

$\mathcal{K}_3$ - картановы M_m генерального неосновного типа рода 1, у которых только одна полярно-квазифокусная плоскость Φ_i параллельна к эволютной прямой S_x;

$\mathcal{K}_4$- картановы M_m генерального неосновного типа рода I, у которых только одна полярно-квазифокусная плоскость Φ_i ортогональна к эволютной прямой S_x.

Другую классификацию картановых M_m в E_{2m+1} можно провести по наличию специальных нормальных векторных полей, параллельных в $\nabla^{\perp}$. Указанные в [4] геометрические конструкции позволяют выделить следующие подрасслоения нормального векторного расслоения $T^{\perp}M_m$: I) главное нормальное подрасслоение $N^{(1)}M_m$ со слоями $N^{(1)}_x M_m$; 2) полярное подрасслоение ΠM_m, m-мерные слои которого являются направлениями полярных плоскостей; 3) эволютное подрасслоение SM_m, 2-мерный слой которого над $x \in M_m$ является линейной оболочкой радиусов-векторов $\vec{xy}$ точек y эволютной прямой S_x.

Векторное поле $\vec{\xi} = \xi^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$, т.е. гладкое сечение нормального расслоения подмногообразия M_m называется параллельным в нормальной связности $\nabla^{\perp}$ [5], если его ковариантный дифференциал равен нулю, т.е. если имеют место

$$d\xi^{\alpha} + \xi^{\beta}\omega^{\alpha}_{\beta} = 0. \qquad (I.I)$$

<u>Определение 2</u>. Через $\mathcal{K}_{I}$, $\mathcal{K}_{II}$ и $\mathcal{K}_{III}$ обозначаются классы картановых M_m в E_{2m+1}, которые характеризуются следующими условиями:

$\mathcal{K}_{I}$- существует параллельное в $\nabla^{\perp}$ векторное поле, являющееся сечением подрасслоения SM_m, причем вектор этого поля не коллинеарен к радиусу-вектору центра кривизны во всех точках $x \in M_m$;

$\mathcal{K}_{II}$- существует параллельное в $\nabla^{\perp}$ векторное поле, неортогональное к эволютной прямой S_x, являющееся сечением подрасслоения ΠM_m;

$\mathcal{K}_{III}$- существует параллельное в $\nabla^{\perp}$ векторное поле, являющееся сечением подрасслоения $N^{(1)}M_m$.

В остальной части настоящей статьи выясняются взаимоотношения этих классов. Даются также некоторые геометрические характеристики их представителей.

§ 2. Описание классов подмногообразий главного или генерального типа

Обозначим через $\mathcal{K}^{\circ}_1$ и $\mathcal{K}^{\circ}_{I}$ пересечения классов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_{I}$ с множеством картановых M_m основного типа. Следующая теорема является обобщением теоремы 3 из [3].

<u>Теорема I</u>. Классы $\mathcal{K}^{\circ}_1$ и $\mathcal{K}^{\circ}_{I}$ совпадают между собой и

характеризуются в множестве картановых M_m основного типа любым из следующих свойств своих представителей:

1^0 эволютно-фокусные точки $f_1, \dots, f_m$ совпадают на каждой эволютной прямой S_x;

2^0 M_m принадлежит гиперсфере;

3^0 эволютное линейчатое подмногообразие $\mathcal{E} = \bigcup_{x \in M_m} S_x$ является нормальным (т.е. обладает m-мерным подмногообразием, пересекающим ортогонально все прямые S_x).

<u>Доказательство.</u> Пусть $M_m \in \mathcal{K}_1^0$, т.е. $z_x \in S_x$; тогда система уравнений (0.I), $1 \leq k \leq m$, удовлетворяется при $y^{m+j_1} = 0, j_1 = 2, \dots, m$ и сводится к системе

$$\tilde{k}^k_{m+1}(k^{-1}K_k^{m+1} + y^{2m+1}\varkappa_k) = 0, \ 1 \leq k \leq m.$$

Так как она имеет однозначно определенное решение, то

$$K_k^{m+1} = \gamma \varkappa_k, \ k = 1, \dots, m. \qquad (2.I)$$

Обратно, при (2.I) система уравнений (0.I) принимает вид

$$k^{-1}\tilde{k}^k_{m+1}\gamma - \sum_{j_1} y^{m+j_1}\tilde{k}^k_{m+j_1}\gamma + y^{2m+1}\tilde{k}^k_{m+1} = 0, \ 1 \leq k \leq m$$

и имеет единственное решение $y^{m+j_1} = 0, j_1 = 2, \dots, m, y^{2m+1} = -k^{-1}\gamma$, в силу чего, $z_x \in S_x$, т.е. $M_m \in \mathcal{K}_1^0$.

Пусть $M_m \in \mathcal{K}_I^0$; тогда (I.I) удовлетворяется при $\xi^{m+k_1} = 0$, $k_1 = 2, \dots, m$, т.е.

$$\xi^{m+1}\omega_{m+1}^{m+j_1} + \xi^{2m+1}\omega_{2m+1}^{m+j_1} = 0.$$

Отсюда, в силу ([4], I.4) и ([4], I.9) при каждом $k = 1, \dots, m$ получается линейная однородная система

$$(\xi^{m+1}K_k^{m+1} + \xi^{2m+1}\varkappa_k)\tilde{k}^k_{m+j_1} = 0, j_1 = 2, \dots, m$$

с двумя неизвестными, которая должна иметь единственное решение, т.е. ранг каждой системы должен быть 1. Для рассматриваемых M_m это означает, что имеют место (2.I).

Обратно, из (2.I) следует $M_m \in \mathcal{K}_I^0$. Действительно, (2.I) вместе с ([4], I.4) и ([4], I.9) влечет

$$dk = k\gamma\omega_{m+1}^{2m+1}, \ \omega_{m+j_1}^{m+1} = \gamma\omega_{m+j_1}^{2m+1} \qquad (2.2)$$

и отсюда дифференциальным продолжением получается

$$k\gamma d\gamma = (1+\gamma^2)dk. \qquad (2.3)$$

В силу (2.I) из системы уравнений (0.I) следует, что

$$\vec{z}_x = \vec{x} + k^{-1}(\vec{e}_{m+1} - \gamma\vec{e}_{2m+1})$$

и теперь (2.2) и (2.3) дают $d\vec{z}_x = \vec{0}$. Поэтому $d(\vec{z}_x - \vec{x}) = -d\vec{x}$, значит, сечение $\vec{z}_x - \vec{x}$ параллельно в $\nabla^{\perp}$. Этим доказано, что $\mathcal{K}_1^0$ и $\mathcal{K}_I^0$ совпадают.

Пусть имеет место 1^0. Тогда в ([4], 2.I) $K_i^{m+1}\varkappa_i^{-1}$ не зависит от выбора значения $i, 1 \leq i \leq m$, т.е. получается

(2.I). Обратно, из ([4], 2.I) следует при (2.I) I^0, следовательно, I^0 является характеристическим свойством для $\mathcal{K}_1^o = \mathcal{K}_I^o$.

Из (2.I) следует 2^0. Действительно, при (2.I) из вышедоказанного следует, что z_x является фиксированной точкой и $d(\vec{z}_x - \vec{x})^2 = 0$, значит $|\vec{z}_x - \vec{x}| = const$. Обратно, если M_m принадлежит гиперсфере, то, в силу предложения 3 из [4], последняя является ее единственной соприкасающейся гиперсферой, в которую сливаются все m ее соприкасающихся гиперсфер во всех точках $x \in M_m$, т.е. справедливо I^0, которое равносильно с (2.I).

Нормальность эволютного линейчатого подмногообразия $\mathcal{E}$ означает, что уравнение $dt + k^{-1}\omega_{m+1}^{2m+1} = 0$, вытекающее из условия $d(\vec{x} + k^{-1}\vec{e}_{m+1} + t\vec{e}_{2m+1}) \perp \vec{e}_{2m+1}$, является вполне интегрируемым. Путем внешнего дифференцирования из этого уравнения с помощью ([4], I.4) и ([4], I.9) получается

$$k^{-1} \sum_{k<\ell} (\tilde{\vec{k}}_k \cdot \tilde{\vec{k}}_\ell) K_{[k}^{m+1} \varkappa_{\ell]} \omega^k \wedge \omega^\ell = 0, \qquad (2.4)$$

откуда следует, что 3^0 равносильно условию $K_{[k}^{m+1} \varkappa_{\ell]} = 0$, т.е. 3^0 равносильно с (2.I). Теорема доказана.

Замечание I. Укажем на неточность теоремы 2 в [2], где, в самом деле, условие 3^0 не является эквивалентным к двум первым условиям для картановых M_m с плоской $\nabla^\perp$ в E_{2m+1}. Как видно из (2.4), эта теорема справедлива только для таких рассматриваемых M_m, у которых $K_{[k}^{m+1} \varkappa_{\ell]} \neq 0$ при всех $k \neq \ell$.

Замечание 2. В условиях теоремы I эволютное подмногообразие $\mathcal{E} = \bigcup_{x \in M_m} S_x$ является, как следует из доказательства, конусом с вершиной z_x, которая совпадает с центром гиперсферы, содержащей M_m.

Примечание I. Классы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_I$ совпадают. Осталось показать, что совпадают подклассы $\mathcal{K}_1 \setminus \mathcal{K}_1^o$ картановых M_m главного неосновного типа и $\mathcal{K}_I \setminus \mathcal{K}_I^o$ картановых M_m, не являющихся основного типа. При этом такой подкласс является предельным случаем класса $\mathcal{K}_1^o = \mathcal{K}_I^o$. Действительно, условие

$$\varkappa_1 = \cdots = \varkappa_m = 0 \qquad (2.5)$$

равносильно во-первых тому, что все плоскости $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ имеют общее одномерное направление, параллельное к эволютной прямой S_x, т.е. точка z_x бесконечно удаленная в направлении S_x, как следует из системы уравнений (0.I), и, во-вторых, параллельности в $\nabla^\perp$ бинормального направления, как следует из системы (2.2). Характеристические условия I^0 и 2^0 класса $\mathcal{K}_1^o = \mathcal{K}_I^o$ имеют место также для множества рассматриваемых картановых M_m главного неосновного типа. Именно, предельный случай I^0-го условия состоит в том, что эволютно-фокусные точки $f_1, \ldots, f_m$ бесконечно удалены, как следует из ([4], 2.I). Непосредственно ясно, что если $z_x \to \infty$, то гиперсфера, которой M_m принадлежит, является соприкасающейся гиперплоскостью $[x, T_x M_m \oplus N_x^{(1)} M_m]$ (ср. с известным результатом Эрбахера [6]). Но условие 3^0 в этом случае не эквивалентно с I^0 и 2^0, так как (2.5) являются лишь достаточными для нормальности эволютного подмногообразия $\mathcal{E}$.

<u>Теорема 2</u>. Класс $\mathcal{K}_{II}$ содержится в классе $\mathcal{K}_2$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $M_m \in \mathcal{K}_{II}$, т.е. существует сечение $\vec{\xi}$ подрасслоения ΠM_m, параллельное в $\nabla^{\perp}$. В выбранном репере $\vec{\xi} = \sum_{j_1} \xi^{m+j_1} \vec{e}_{m+j_1} + \xi^{2m+1} \vec{e}_{2m+1}$, $\xi^{m+1} = 0$ поэтому из (I.I)

получается, что

$$\sum_{j_1} \xi^{m+j_1} \omega_{m+j_1}^{m+1} + \xi^{2m+1} \omega_{2m+1}^{m+1} = 0. \qquad (2.6)$$

Сделав здесь подстановки из формул ([4], I.4) и ([4], I.9) и использовав линейную независимость 1-форм ω^k, следует, что координаты рассматриваемого вектора удовлетворяют следующей системе:

$$\sum_{j_1} \xi^{m+j_1} \tilde{k}_{m+j_1}^{k} K_k^{m+1} - \xi^{2m+1} \tilde{k}_{m+1}^{k} æ_k = 0, \; 1 \leq k \leq m. \quad (2.7)$$

Это означает, что координаты вектора $\vec{\xi}$ составляют решение системы ([4], 3.2) и поэтому $\vec{\xi}$ определяет общее одномерное направление плоскостей $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$. Следовательно, $M_m \in \mathcal{K}_2$, т.е. $\mathcal{K}_{II} \subset \mathcal{K}_2$. Теорема доказана.

<u>Примечание 2</u>. Класс $\mathcal{K}_{II}$ не совпадает с классом $\mathcal{K}_2$. Именно, если $M_m \in \mathcal{K}_2$, то существует сечение $\vec{\xi}$ подрасслоения ΠM_m, координаты которого удовлетворяют системе ([4], 3.2), которая совпадает с (2.7) и поэтому дает следствие (2.6).

Учитывая ([4], 3.3) в ([4], I.4) при $j = 1$ и сравнивая с ([4], I.9) получаем

$$\omega_{m+1}^{2m+1} = \sum_{j_1} \mu^{m+j_1} \omega_{m+1}^{m+j_1}. \qquad (2.8)$$

Здесь формы $\omega_{m+1}^{m+j_1}$ линейно независимы, так как противное предположение приводит к некартановости M_m.

Дифференциальным продолжением из (2.6) и с учетом (2.8) получается

$$\sum_{j_1} \Big[d\xi^{m+j_1} + \sum_{k_1} \xi^{m+k_1} \omega_{m+k_1}^{m+j_1} + \xi^{2m+1} \omega_{2m+1}^{m+j_1} + \big(d\xi^{2m+1} + \sum_{k_1} \xi^{m+k_1} \omega_{m+k_1}^{2m+1} \big) \mu^{m+j_1} \Big] \wedge \omega_{m+j_1}^{m+1} = 0$$

К последнему уравнению применяема лемма Картана, следствием чего является, что условия параллельности поля $\vec{\xi}$ не должны удовлетворяться. Это показывает наличие подмногообразий

$M_m \in \mathcal{K}_2$, не принадлежащих в $\mathcal{K}_{II}$, т.е. $\mathcal{K}_2 \neq \mathcal{K}_{II}$.

Примечание 3. Среди множества картановых M_m генерального типа рода $p>1$ в E_{2m+1} нет подмногообразий, у которых существует параллельное в $\nabla^\perp$ поле ($p-1$)-мерных векторных пространств, совпадающиеся в каждой точке $x \in M_m$ с общим ($p-1$)-мерным направлением полярно-квазифокусных плоскостей $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$. Действительно, предположение, что существует $p-1$ одномерных ($1<p<m$) линейно независимых сечений $\vec{\xi}_\tau = \sum_{j_1} \xi_\tau^{m+j_1} \vec{e}_{m+j_1}$, $\tau = 1, 2, \ldots, p-1$, подрасслоения ΠM_m, параллельных в $\nabla^\perp$ и учтение $\xi_\tau^{m+1} = \xi_\tau^{2m+1} = 0$ в (I.I) при каждом τ сводит к однородным системам

$$\Big(\sum_{j_1} \xi^{m+j_1} \tilde{k}^k_{m+j_1}\Big) K_k^{m+1} = 0, \Big(\sum_{j_1} \xi^{m+j_1} \tilde{k}^k_{m+j_1}\Big) \varkappa_k = 0, \; 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Поскольку $m-p$ уравнений из обеих систем нетривиальные, т.е. ранги этих систем равны $m-1-(p-1)=m-p$, то $m-p$ среди скобочных выражений равны нулю. Так как эти выражения из двух систем совпадают, то как p среди коэффициентов $K_1^{m+1}, K_2^{m+1}, \ldots, K_m^{m+1}$, так и p среди $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ с совпадающими индексами должны быть равными нулю, но это противоречит 6) условию определения 2 из [4].

§ 3. Описание классов подмногообразий генерального неосновного типа рода 1

Теорема 3. Класс $\mathcal{K}_{III}$ содержится в $\mathcal{K}_3$. В $\mathcal{K}_{III}$ существует подкласс рассматриваемых подмногообразий, обладающих следующими геометрическими характеристиками, эквивалентными между собой:

I^0 существует семейство линий кривизны, являющихся геодезическими, причем при смещении точки x вдоль линии этого семейства поле направлений соответствующего главного вектора кривизны является параллельным в $\nabla^\perp$;

2^0 существует семейство линий кривизны, лежащих в 2-мерных плоскостях.

Доказательство. Пусть $M_m \in \mathcal{K}_{III}$, т.е. существует поле направлений $\vec{\xi} \in N_x^{(1)}$, параллельное в $\nabla^\perp$. Поскольку $\xi^{2m+1} = 0$, то из (I.I) следует, что $\sum_j \xi^{m+j} \omega_{m+j}^{2m+1} = 0$, откуда, учитывая ([4], I.4) и линейную независимость 1-форм ω^k, получается система

$$\sum_j \xi^{m+j} \tilde{k}^k_{m+j} \varkappa_k = 0, \; 1 \leqslant k \leqslant m. \qquad (3.I)$$

Наличие одномерного ненулевого решения этой системы означает, что $\operatorname{rank} \|\tilde{k}^{k}_{m+j} \varkappa_k\| = m-1$, условие которое влечет

$$\varkappa_i = 0, \quad i\text{ -фиксировано}, \qquad (3.2)$$

причем из (3.I) определяется решение $\vec{\xi}$ условиями $\sum_j \xi^{m+j} \tilde{k}^{i}_{m+j} = \Theta$, $\sum_j \xi^{m+j} \tilde{k}^{\ell}_{m+j} = 0$, $\ell \neq i$. Отсюда вытекает, что $\vec{\xi} = \Theta \vec{k}_i$ при фиксированном i. Учитывание (3.2) в (0.I) показывает, что плоскость Φ_i параллельна к эволютной прямой S_x, т.е. $M_m \in \mathcal{K}_3$. Этим доказано первое утверждение теоремы.

Пусть теперь имеет место I^0. Линия кривизны является геодезической, если вектор кривизны этой линии не имеет компоненту в $T_x M_m$. Так как вектор кривизны рассматриваемой линии кривизны $\omega^i = ds, \omega^j = 0$, $j \neq i$, представляется, в силу ([4], I.2), в виде

$$d\vec{e}_i = \sum_{j \neq i} \vec{e}_j [(\vec{L}_{ij} \omega^i + \sum_{\ell \neq i} \vec{k}_{ij\ell} \omega^\ell)(\vec{k}_i - \vec{k}_j)^{-1}] + \vec{k}_i \omega^i,$$

то эта линия является геодезической тогда и только тогда, когда

$$\vec{L}_{ij} = \vec{0}, j \neq i, \quad i\text{ -фиксировано}.$$

(ср. с [1]).

Условия параллельности в $\nabla^\perp$ поля направлений главного вектора кривизны $\vec{k}_i$ при смещении точки x вдоль соответственной линии $\omega^i = ds, \omega^j = 0, j \neq i$

$$dk_i^{m+k} + \sum_\ell k_i^{m+\ell} \omega^{m+k}_{m+\ell} = \lambda k_i^{m+k}; \quad \sum_\ell k_i^{m+\ell} \omega^{2m+1}_{m+\ell} = 0$$

дают, в силу ([4], I.2) и ([4], I.3), что

$$\vec{K}_i = \lambda \vec{k}_i; \quad \varkappa_i = 0.$$

Обратно, подстановка последних в ([4], I.5) показывает искомую параллельность. Следовательно, I^0 равносильно с

$$\vec{K}_i = \lambda \vec{k}_i; \vec{L}_{ij} = \vec{0}, j \neq i; \varkappa_i = 0, \; i\text{ -фиксировано}. \qquad (3.3)$$

Из ([4], I.5) следует, что линия $\omega^i = ds, \omega^j = 0, j \neq i$ лежит в плоскости $[x, \vec{e}_i, \vec{k}_i]$ тогда и только тогда, когда смещения $d\vec{e}_i$ и $d\vec{k}_i$ принадлежат линейной оболочке $[\vec{e}_i, \vec{k}_i]$. Последнее условие эквивалентно с (3.3), т.е. 2^0 равносильно с (3.3). Теорема доказана.

<u>Примечание 4</u>. Классы $\mathcal{K}_3$ и $\mathcal{K}_{III}$ не совпадают. Действительно, ([4], I.3) дает, в силу (3.2), $\sum_k k_i^{m+k} \omega^{2m+1}_{m+k} = 0$, откуда дифференциальным продолжением получается

$$\sum_k (dk_i^{m+k} + \sum_\ell k_i^{m+\ell} \omega^{m+k}_{m+\ell}) \wedge \omega^{2m+1}_{m+k} = 0$$

Используя здесь формулы ([4], I.2) и ([4], I.4), выводятся при (3.2) следующие соотношения:

$$\sum_k K_i^{m+k} \tilde{k}^{j}_{m+k} \varkappa_j = 0, j \neq i, \text{т.е. } \vec{K}_i = \lambda \vec{k}_i,$$

$$\sum_{\ell}\left[L_{ij}^{m+\ell}\tilde{k}^{k}_{m+\ell}\varkappa_k - L_{ik}^{m+\ell}\tilde{k}^{j}_{m+\ell}\varkappa_j\right] = 0,\ k \neq j.$$

Следовательно, условия параллельности в $\nabla^{\perp}$ поля направлений $\vec{\xi} = \Theta \vec{k}_i$ выполняются только при дополнительном требовании $\vec{L}_{ij} = \vec{0},\ j \neq i$ т.е. $\mathcal{K}_3 \neq \mathcal{K}_{III}$.

Теорема 4. Класс $\mathcal{K}_4$ характеризуется в множестве картановых M_m генерального неосновного типа рода I любым из следующих свойств своих представителей:

I° одна из эволютно-фокусных точек совпадает с центром кривизны c_x;

2° полярно-квазиэволютная точка z_x лежит на полярно-перпендикулярной плоскости $S_x^{\perp}$.

Доказательство. Из уравнения (0.I) видно, что $M_m \in \mathcal{K}_4$ тогда и только тогда, когда

$$K_i^{m+1} = 0,\ \varkappa_i \neq 0. \qquad (3.4)$$

Так как центр кривизны c_x имеет радиус-вектор $\vec{c}_x = \vec{x} + k^{-1}\vec{e}_{m+1}$, то из ([4], 2.I) непосредственно видно, что I° равносильно с (3.4).

Также непосредственно следует из предложения 6 в [4], что 2° равносильно (3.4). Теорема доказана.

Литература

I. Б а з ы л е в В.Т. Об одном свойстве геодезических линий на многомерных поверхностях // Уч.зап.Моск.гос.пед.ин-та им. В.И.Ленина. 1970.I. № 374. 52-56.

2. В и р о в е р е Т.М. Эволютная линейчатая поверхность подмногообразия M_m с плоской нормальной связностью в E_{2m+1}. Тезисы докладов конференции "Теоретические и прикладные вопросы математики.I". Тарту. 1985. 43-44.

3. В и р о в е р е Т.М. Об эволютах поверхности M_2 с плоской нормальной связностью в E_5 // Уч.зап.Тартуск.ун-та. 1986. 734. 3-19.

4. В и р о в е р е Т.М. Полярная плоскость картанова M_m с плоской нормальной связностью в E_{2m+1} // Настоящий сборник.

5. Л у м и с т е Ю.Г., Ч а к м а з я н А.В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны. Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Проблемы геометрии. М. 1981. I2, 3-30.

6. E r b a c h e r J. Reduction of the codimension of an isometric immersion. J.Different. Geom. 1971. 5. No 3-4. 333-340.

Поступило

1. X 1987

THE GEOMETRY OF SOME SPECIAL CARTAN SUBMANIFOLDS M_m WITH FLAT NORMAL CONNECTION IN E_{2m+1}

T.Virovere

S u m m a r y

In this paper the first classification of general Cartan submanifolds M_m with flat normal connection in E_{2m+1}, given in [4], is detailed in two directions. First , the mutual disposition of the polar quasifocal planes $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ and evolute straight line $\mathfrak{S}_x$ in Π_x, allows to distinguish four new classes: $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ and $\mathcal{K}_4$. The characteristic property e.g. of $\mathcal{K}_1$ is: $\bigcap_{k=1}^{m} \mathfrak{F}_k$ is a point (perhaps ideal) on the $\mathfrak{S}_x$. The second detailed classification is based on the concept of normal vector field $\vec{\xi}$, parallel in normal connection. Three classes $\mathcal{K}_I$, $\mathcal{K}_{II}$, $\mathcal{K}_{III}$ are distinguished by the characteristic property, that there exists a parallel $\vec{\xi}$ in some subbundle of the normal bundle $T^{\perp}M_m$; these subbundles are determined by $\mathfrak{S}_x$, Π_x and $N_x^{(1)}$. Interrelations between two classifications are investigated. Some additional geometrical properties of the submanifolds M_m of these classes are given.

TRÜ Toimetised
803 (1988), 41-51

Уч. зап. Тартуск. ун-та.
1988, 803, 41-51

ПОДМНОГООБРАЗИЯ ДЮПЕНА-МАННГЕЙМА И КОНУСЫ КЛИФФОРДА В E_{n+m}

М. Вяльяс
Кафедра алгебры и геометрии

§1 Введение и результаты

Подмногообразие V_n с плоской нормальной связностью в евклидовом пространстве E_{n+m} называется подмногообразием Дюпена, если его главные векторы кривизны имеют постоянные кратности и параллельны в нормальной связности вдоль интегральных поверхностей соответствующих им распределений кривизны.

Здесь главными векторами кривизны мы назовем векторы нормальной кривизны $\vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n$ линий кривизны рассматриваемого подмногообразия; см. §2.

В [1] доказано, что такие подмногобразия существуют и в классе изотермических подмногообразии V_n в E_{n+m}. Изотермические подмногообразия V_n в E_{n+m} являются естественным обобщением изотермических гиперповерхностей в E_{n+1}, которые изучены в [3]. Они определяются следующим образом.

Атлас локальных карт на конформно плоском V_n называется изотермическим, если в его любой карте

$$ds^2 = e^{-2\sigma}(du_1^2 + \ldots + du_n^2), \tag{1}$$

где σ - некоторая гладкая функция на области этой карты.

Изотермическим называется конформно плоское подмногообразие V_n с плоской нормальной связностью в конформно плоском пространстве V_{n+m}, которое обладает таким изотермическим атласом, что сеть координатных линий каждой карты этого атласа является сетью линий кривизны этого подмногообразия V_n.

Класс изотермических подмногообразии Дюпена V_n в E_{n+m} $(m > n-2)$ с попарно различными главными векторами кривизны, как установлено в [1], тесно связан с подмногообразиями, которые обладают следующими геометрическими свойствами.

Подмногообразие V_n с плоской нормальной связностью в E_{n+m}, называется подмногообразием Дюпена-Маннгейма, если все его линии кривизны являются окружностями, плоскости которых для линии каждого семейства либо имеют общую прямую, либо параллельны между собой.

В частном случае $n=3$ и $m=1$ гиперповерхности Дюпена-Маннгейма исследовались в [2] и [4]; в [3] доказано, что они вместе с гиперконусами Клиффорда являются изотермическими гиперповерхностями.

Известно, что n-мерную обобщнную поверхность Клиффорда можно построить в $2n$-мерном евклидовом пространстве E_{2n}, где она принадлежит гиперсфере S_{2n-1} (см. [5]).

Пусть V_{n-1} является обобщенной поверхностью Клиффорда на гиперсфере S_{2n-3} в евклидовом пространстве E_{2n-2} с центром в точке c. Рассмотрим теперь n-мерный конус над V_{n-1} с вершиной в точке c и называем его конусом Клиффорда V_n в E_{2n+2}. Из него предельным переходом, когда c стремится в бесконечность, получается цилиндр Клиффорда V_n в E_{2n-1}, который строится следующим образом. Его направляющая поверхность есть обобщенная поверхность Клиффорда V_{n-1}, принадлежащая гиперплоскксти E_{2n-2} в пространстве E_{2n-1}, нормали этой гиперплоскости являются его образующими.

Подмногообразие V_n с плоской связностью в E_{n+m}, все главные векторы кривизны которого параллельны в нормальной связности, называется изопараметрическим (см. [7], [8]).

В настоящей статье доказываются:

Теорема 1. *Подмногообразия Дюпена-Маннгейма, конусы и цилиндры Клиффорда являются изотермическими подмногообразиями.*

Теорема 2. *Для подмногообразия V_n Дюпена-Маннгейма следующие условия равносильны между собой:*

1) в каждом из n семейств окружностей кривизны плоскости этих окружностей параллельны между собой;

2) V_n является изопараметрическим;

3) V_n является локально евклидовым.

Предложение 1. *При любом из условий теоремы 2 справедливо $m=n$ и подмногообразие Дюпена-Маннгейма является обобщенной поверхностью Клиффорда.*

Предложение 2. *Обобщенная поверхность Клиффорда V_n в евклидовом пространстве E_{2n} является одновременно изотермическим и изопараметрическим подмногообразием.*

§2. Доказательство теоремы 1 и предложения 2

1. Докажем предложение 2. Пусть V_n является обобщенной n-поверхностью Клиффорда. Известно, что ее можно построить в $2n$-мерном евклидовом пространстве E_{2n}, где она принадлежит гиперсфере S_{2n-1} (см. [5]). Выбираем ортонормированный репер в E_{2n} так, чтобы центр с гиперсферы S_{2n-1} являлся его началом и базисные векторы $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_{n+i}$ $(i=1, \ldots, n)$ принадлежали 2-плоскостям μ_i, с которыми радиус-вектор любой точки поверхности V_n, составляет постоянный угол θ_i.

Произвольный единичный вектор $\vec{x}$ можно представить в виде $\vec{x}=\sum r_i\vec{y}_i$, где

$$\vec{y}_i=\vec{e}_i\cos\varphi_i+\vec{e}_{n+i}\sin\varphi_i,$$

и $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i^2=1$. Так как проекция вектора $\vec{x}$ на плоскость μ_i имеет направляющим вектор $\vec{y}_i$, то

$$\langle\vec{x},\vec{y}_i\rangle=r_i=\cos\theta_i=const.$$

Следовательно, n-поверхность Клиффорда определяется уравнением

$$\vec{x}=\rho\sum_{i=1}^{n}\vec{y}_i\cos\theta_i ,$$

где ρ - радиус гиперсферы S_{2n-1}, содержащей V_n.

Из уравнения поверхности Клиффорда получим, что

$$d\vec{x}=\rho\sum_{i=1}^{n}\vec{x}_i\cos\theta_i d\varphi_i ,$$

где векторы

$$\vec{x}_i=-\vec{e}_i\sin\varphi_i+\vec{e}_{n+i}\cos\varphi_i$$

являются единичными касательными векторами для рассматриваемого подмногообразия. Первая фундаментальная форма

$ds^2=\langle d\vec{x}, d\vec{x}\rangle$ имеет вид

$$ds^2=\varrho^2(\cos^2\theta_1 d\varphi_1^2+\ \ldots\ +\cos^2\theta_n d\varphi_n^2),$$

откуда после замены криволинейных координат φ_i криволинейными координатами $u_i=\varphi_i\cos\theta_i$ получаем его изотермический вид

$$ds^2=\varrho^2(du_1^2+\ \ldots\ +du_n^2).$$

Осталось выяснить вид второй фундаментальной формы при этой параметризации. Векторы $\vec{n}_i=-\vec{y}_i$ являются единичными нормальными векторами для поверхности Клиффорда V_n и образуют ортонормальный базис в нормальном пространстве $T^{\perp}_x(V_n)$. Вторая фундаментальная форма в направлений единичного вектора $\vec{n}_i$ определяется формулой $II_i=-\langle d\vec{x}, d\vec{n}_i\rangle$, откуда получается, что его матрица H^{n+i} при параметризации $u_i=\varphi_i\cos\theta_i$ имеет диагоналный вид

$$\operatorname{diag}H^{n+i}=(0,\ \ldots\ ,0,\varrho\cos^{-1}\theta_i,0,\ \ldots\ ,0).$$

Следовательно, обобщенная поверхность Клиффорда V_n является изотермическим подмногообразием в E_{n+m} $(m\geq n)$. Ее изопараметричность следует из постоянства ненулевых элементов матриц H^{n+i}. Предложение доказано.

2. Доказательство теоремы 1 разбиваем на следующие части.

Предложение 3. *Конус Клиффорда V_n является изотермическим подмногообразием в евклидовом пространстве.*

Доказательсво. Репер в E_{2n-2} выбираем так, чтобы точка c, центр гиперсферы, являлась его началом и базисные векторы $\vec{e}_i$, $\vec{e}_{n-1+i}$ $(i=1,\ \ldots,\ n-1)$ принадлежали 2-плоскстям μ_i. Следовательно, такой конус можно представить уравнением

$$\vec{x}=\psi\sum_{i=1}^{n-1}\vec{y}_i\cos\theta_i,$$

где

$$\vec{y}_i=\vec{e}_i\cos\varphi_i+\vec{e}_{n-1+i}\sin\varphi_i$$

и $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\cos^2\theta_i=1$. Вычислим дифференциал

$$d\vec{x}=\psi\sum_{i=1}^{n-1}\vec{x}_i\cos\theta_i d\varphi_i+\vec{x}_n d\psi,$$

где векторы

$$\vec{x}_i=-\vec{e}_i\sin\varphi_i+\vec{e}_{n-1+i}\cos\varphi_i \quad (i=1,\ \ldots,\ n-1),$$
$$\vec{x}_n=\sum_{i=1}^{n-1}\vec{y}_i\cos\theta_i$$

являются единичными касательными векторами конуса. Первая фундаментальная форма имеет вид

$$ds^2=\psi^2(\cos^2\theta_1 d\varphi_1^2+\ \ldots\ +\cos^2\theta_{n-1}d\varphi_{n-1}^2)+d\psi^2,$$

откуда после замены параметров $u_i=\varphi_i\cos\theta_i$ и $u_n=\ln\psi$ получаем ее изотермический вид

$$ds^2=\psi^2(du_1^2+\ \ldots\ +du_{n-1}^2+du_n^2).$$

Для конуса V_n нормальными являются векторы

$$\vec{b}_i=-\vec{y}_i\cos\theta_{n-1}+\vec{y}_{n-1}\cos\theta_i \quad (i=1,\ \ldots,\ n-2),$$

которые линейно независимы и образуют базис в $T^{\perp}_x(V_n)$. Используя процесс ортогонализации, можно в нормальном пространстве построить базис, состоящий из $(n-2)$ взаимно ортогональных векторов. Относительно этого базиса матрицы вторых фундаментальных форм имеют при изотермической параметризации диагональный вид. Предложение доказано.

<u>Предложение 4.</u> *Цилиндр Клиффорда V_n является одновременно изотермическим и изопараметрическим подмногообразием в E_{n+m} $(m>n-1)$.*

Доказательство. Если выбрать векторы $\vec{e}_i$, $\vec{e}_{n-1+i}$ $(i=1,\ \ldots,\ n-1)$ так, как в доказательсве предложения 3, и $\vec{e}_n$ направить вдоль образующей цилиндра, то его можно представить уравнением

$$\vec{x}=\rho\sum_{i=1}^{n-1}\vec{y}_i\cos\theta_i+t\vec{e}_n.$$

Дальнейшее доказательство проводится аналогично как выше.

Предложение 5. *Подмногообразие* V_n *Дюпена-Маннгейма является изотермическим подмногообразием в евклидовом пространстве* E_{n+m} $(m \geq n-2)$.

Доказательство. Присоединим к любой точке x подмногообразия Дюпена-Маннгейма V_n ортонормальный адаптированный репер так, чтобы его касательные векторы были направлены вдоль главных направлений. Тогда в формулах его инфинитезимального перемещения

$$d\vec{x}=\omega^I\vec{e}_I, \quad d\vec{e}_I=\omega_I^J\vec{e}_J \qquad (I,\ J=1,\ \dots,\ n+m) \tag{2}$$

имеем $\omega_J^I+\omega_I^J=0$, $d\omega^I=\omega^K\wedge\omega_K^I$, $d\omega_J^I=\omega_J^K\wedge\omega_K^I$, и в данном случае

$$\omega^\alpha=0, \quad \omega_p^\alpha=k_p^\alpha\omega^p \qquad (p=1,\ \dots,\ n;\ \alpha=n+1,\ \dots,\ n+m) \tag{3}$$

(по индексу p не суммировать!). Нормальные векторы

$$\vec{k}_p=\sum_\alpha k_p^\alpha\vec{e}_\alpha \qquad (p=1,\ \dots,\ n) \tag{4}$$

называются главными векторами кривизны, они являются нормальными компонентами первых векторов кривизны соответствующих линий кривизны.

Дифференциальное продолжение системы (3) приводит к

$$dk_p^\alpha=a_p^\alpha\omega^p+\sum_{i\neq p}\gamma_{ip}(k_p^\alpha-k_i^\alpha)-\sum_{\beta\neq\alpha}k_p^\beta\omega_\beta^\alpha , \tag{5}$$

$$\omega_p^q=\gamma_{qp}\omega^p-\gamma_{pq}\omega^q+\sum_{\substack{k\neq p\\ k\neq q}}\gamma_{pk}^q\omega^k, \tag{6}$$

где $\gamma_{pk}^q=-\gamma_{qk}^p$ $(p\neq q\neq k\neq p)$. Из (4) следует

$$d\vec{k}_p=(\vec{a}_p-\langle\vec{k}_p,\vec{k}_p\rangle\vec{e}_p)\omega^p+\sum_{i\neq p}[\gamma_{ip}(\vec{k}_p-\vec{k}_i)-\langle\vec{k}_p,\vec{k}_i\rangle\vec{e}_i]\omega^i, \tag{7}$$

где $\vec{a}_p=\sum_\alpha a_p^\alpha\vec{e}_\alpha$.

Дальнейшее продолжение уравнений (6) приводит к

$$d\gamma_{qp}=\sum_k A_{qpk}\omega^k. \tag{8}$$

Линия кривизны с касательным вектором $\vec{e}_p$ определяется системой $\omega^1 = \ldots = \omega^{p-1} = \omega^{p+1} = \ldots = \omega^n = 0$ и вдоль нее $d\vec{x} = \vec{e}_p \omega^p$ и

$$d\vec{e}_p = (\sum_{i \neq p} \gamma_{ip} \vec{e}_i + \vec{k}_p)\omega^p,$$

$$d(\sum_{i \neq p} \gamma_{ip}\vec{e}_i + \vec{k}_p) = -[\sum_{i \neq p} (\gamma_{ip})^2 + \langle \vec{k}_p, \vec{k}_p \rangle]\vec{e}_p \omega^p +$$

$$+ [\sum_{i \neq p} (A_{ipp} + \sum_{j \neq p} \gamma_{jp} \gamma^i_{jp})\vec{e}_i + \vec{a}_p]\omega^p.$$

Так как все линии кривизны подмногообразия Дюпена-Маннгейма должны быть окружности, то

$$A_{ipp} = -\sum_{j \neq p} \gamma_{jp} \gamma^i_{jp}, \quad \vec{a}_p = 0 \tag{9}$$

при всех значениях индексов.

Плоскость рассматриваемой окружности определяется уравнением

$$\vec{y} = \vec{x} + \zeta \vec{e}_p + \eta (\sum_{i \neq p} \gamma_{ip} \vec{e}_i + \vec{k}_p). \tag{10}$$

У подмногообразия Дюпена-Маннгейма все плоскости окружностей кривизны одного семейство либо проходят через фиксированную прямую, либо параллельны. В первом случае любая точка y этой прямой определяется условием, что $d\vec{y}$ не выходит из этой плоскости. Так как выходящими компонентами могут быть лишь

$$\sum_{j \neq p} \omega^j \vec{e}_j + \zeta \sum_{j \neq p} [-\gamma_{pj}\omega^j + \sum_{\substack{k \neq j \\ k \neq p}} \gamma^j_{pk} \omega^k] \vec{e}_j + \eta \sum_{j \neq p} \sum_{k \neq p} P_{pjk} \omega^k \vec{e}_j,$$

где конкретный вид последних коэффициентов не представляет здесь интереса, то эта прямая определяется любым из уравнений

$$\begin{cases} 1 - \zeta \gamma_{pj} + \eta P_{pjj} = 0 & (j = 1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n), \\ \zeta \gamma^j_{pk} + \eta P_{pjk} = 0 & (k \neq j;\ j, k = 1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n), \end{cases}$$

система которых должна иметь, следовательно, ранг 1. Это приводит к тождествам

$$\gamma_{pj} = \gamma_{pk} = l_p, \quad \gamma^j_{pk} = 0 \tag{11}$$

при $j \neq k$; $j, k = 1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n$.

Если все плоскости (10) при некотором значении p параллельны, то $d\vec{e}_p$ должен при любых смещениях точки x на подмногообразии линейно выражаться через $\vec{e}_p$ и $\sum_{i\neq p}\gamma_{ip}\vec{e}_p+\vec{k}_p$. Это приводит к $\gamma_{pj}=\gamma_{pk}=\gamma^j_{pk}=0$, т.е. к частному случаю (11).

Из (8), (9) и (11) получим, что $dl_p=0 \pmod{\omega^p}$ и поэтому $d(\sum l_i\omega^i)=0$. Следовательно, по крайней мере локально $\sum l_i\omega^i=d\sigma$. Далее $d(e^{\sigma}\omega^p)=0$. Таким образом, на рассматриваемом подмногообразии V_n существуют такие локальные параметры $u_1, \ldots, u_n$, что $\omega^p=e^{-\sigma}du_p$ и следовательно

$$ds^2=e^{-2\sigma}(du_1^2 + \ldots + du_n^2),$$

причем u_p-линии являются линиями кривизны.

Следовательно, подмногообразие Дюпена-Маннгейма является изотермическим и в силу результата [6] имеет коразмерность $m\geqslant n-2$, так как все главные векторы кривизны попарно различные. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 1 непосредственно следует из предложении 3, 4 и 5.

§3. Доказательство теоремы 2 и предложения 1

1. Начнем с теоремы 2. Пусть V_n является подмногообразием Дюпена-Маннгейма в E_{n+m}. Докажем эквивалентность утверждений 1) и 2). Из доказательства предложения 5 следует, что плоскости окружностей кривизны являются параллельными в каждом семействе, если $l_p=0$ при $p=1, \ldots, n$. Теперь из (7), куда поставлены (11) и $\vec{a}_p=0$, непосредственно следует, что подмногообразие V_n является изопараметрическим, т.е. 1)$\Rightarrow$2).

Очевидно, справедливо и обратное. Эквивалентность утверждений 1) и 2) доказана.

Покажем, что при этих условиях имеет место 3). Из (6), где $\gamma^q_{pk}=0$, в этом случае следует, что касательная связность является плоской, так как $\omega^q_p=0$. Следовательно, V_n локально евклидова, т.е. координаты тензора кривизны равны нулю.

Для завершения доказательства теоремы надо показать, что имеет место импликация 3)$\Rightarrow$ 2).

Известно, что ненулевые компоненты тензора кривизны подмногообразия V_n с плоской нормальной связности в E_{n+m} выражаются через главные векторы кривизны следующим образом

$$R_{pq,\,pq}=\langle\vec{k}_p,\vec{k}_q\rangle \quad (p\neq q) \tag{12}$$

При 3) все компоненты тензора кривизны равны нулю и из (12) получаем, что $\langle\vec{k}_p,\vec{k}_q\rangle=0$ при всех различных значениях индексов p и q. Дифференцирование последнего равенства дает

$$l_p\langle\vec{k}_p,\vec{k}_p\rangle\omega^p+l_q\langle\vec{k}_q,\vec{k}_q\rangle\omega^q=0,$$

откуда получаем, что все $l_p=0$. Теорема доказана.

2. Докажем предложение 1. Пусть V_n является подмногообразием Дюпена-Маннгейма, которое удовлетворяет условиям теоремы 2. Такое подмногообразие имеет, по крайнем мере, m-мерное нормальное пространство, где $m\geq n$. Двумерное направление, натянутое на векторы $\vec{e}_p$ и $\vec{k}_p$, инвариантно связано с подмногообразием V_n при каждом значении $p=1,\ \dots,\ n$ так как

$$d\vec{e}_p=\vec{k}_p\omega^p,\quad d\vec{k}_p=-\langle\vec{k}_p,\vec{k}_p\rangle\vec{e}_p\omega^p.$$

Плоскости, которые определены точкой с с радиусом-вектором

$$\vec{c}=\vec{x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\langle\vec{k}_i,\vec{k}_i\rangle}\vec{k}_i$$

и с инвариантными 2-направлениями, являются неподвижными так как $d\vec{c}=0$ при любом смещении вдоль подмногообразия V_n. В частности, V_n принадлежит гиперсфере $S_{n+m-1}\subset E_{n+m}$ с центром в точке c.

Прямая, которая проходит через центр гиперсферы и точку x подмногообразия V_n, образует постоянный угол β_p с каждой неподвижной 2-плоскостью. Действительно, проекция этой прямой на инвариантную 2-плоскость имеет направляющий вектор $\vec{k}_p$ и $d(\cos\beta_p)=0$.

Следовательно, в терминах эллиптической геометрии рассматриваемая V_n является обобщенной поверхностью Клиффорда. Предложение доказано.

Л и т е р а т у р а

1. В я л ь я с М. Об изотермических подмногообразиях в конформно плоском постранстве. Изв. АН ЭстССР сер. физ.-матем. 1987, 36, No 3, с. 251-260.
2. В я л ь я с М. Гиперповерхности Дюпена с голономной сетью линии кривизны в E_4. Уч зап. Тартуск. ун-та. 1986, 734, с. 20-30.
3. В я л ь я с М.Э., Л у м и с т е Ю.Г. Изотермические гиперповерхности и трехмерные гиперциклиды Дюпена-Маннгейма. Матем. зам. 1987, т.41, No 5, с. 731-740.
4. Л у м и с т е Ю. Конструкция Кэли-Каталана для некоторых гиперповерхностей Дюпена. Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1986, 734, с. 36-49.
5. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Неевклидовы пространства. М. Наука. 1969.
6. C h e n B.-Y. V e r s t r a e l e n L. A charakterization of totally quasiumbilical submanifolds and its applications. Boll. Unione Mat. Ital. 1977, v.A14, No 1, p. 49-57; Errata corrige: Boll. Unione Mat. Ital. 1977, v.A14, No 3, p. 634.
7. H a r l e C.E. Isoparametric families of submanifolds. Boll. Soc. Bras. Mat. 1982, v.13, No 2, p. 35-48.
8. S t r ü b i n g W. Isoparametric submanifolds. Geom. Dedic. 1986, v.20, No 3, p. 367-387.

Поступило
27. X 1987

DUPIN-MANNHEIM SUBMANIFOLDS AND CLIFFORD CONES IN E_{n+m}

M. Väljas

S u m m a r y

A submanifold V_n with flat normal connection in E_{n+m} is called a Dupin-Mannheim submanifold, if its families of curvature lines consist of circles whose planes have a common straight line or are parallel to each other.

A submanifold V_n in E_{n+m} is called a Clifford cone, if V_n project a $(n-1)$-dimensional Clifford submanifold V_{n-1} (generalized Clifford surface) from the centre of hypersphere containing V_{n-1}, and a Clifford cylinder, if it is a cylinder on the product of $(n-1)$ circles (i.e. a limit case of pervious cone if the vertex tends to infinity).

A conformally flat submanifold V_n with flat normal connection in a Euclidean space E_{n+m} is called isothermic, if it has an isothermic atlas with all cards having curvature lines as coordinate lines.

In [1] it is proved that Dupin-Mannheim submanifolds, Clifford cones and cylinders exist among isothermic submanifolds in a Euclidean space. In this paper we prove that such submanifolds are always isothermic. The main results are:

Theorem 1. *The Dupin-Mannheim submanifolds, Clifford cones and cylinders are isothermic submanifolds.*

Theorem 2. *Let V_n be a Dupin-Mannheim submanifold. Then the next three conditions are equivalent:*

1) in each family of curvature circles the planes of circles are parallel to each other.

2) V_n is isoparametric;

3) V_n is locally Euclidean.

Proposition 1. *Any Dupin-Mannheim submanifold satisfying one of the conditions of Theorem 2 is a generalized Clifford surface.*

Proposition 2. *A generalized Clifford surface V_n in E_{2n} is isothermic and isoparametric*

TRU Toimetised
803 (1988), 52-68

Уч. зап. Тартуск. ун-та.
1988, 803, 52-68

СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФЛАГОВЫЕ СТРУКТУРЫ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА $S^1_{m2[m]}$

Х.Кильп

Кафедра алгебры и геометрии

§ I. Введение

Данная работа примыкает к работам автора [4], [5], [6] и выполнена теми же методами внешних форм Э.Картана и бесконечных групп Ли, специализация которых для изучения геометрической теории систем дифференциальных уравнений берет свое начало от работ А.М.Васильева [I], [2] и систематическое изложение которых можно найти в недавно вышедшей книге А.М.Васильева [3].

В данной работе изучается дифференциально-геометрическая структура, определяемая заданием квазилинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при m неизвестных функциях двух независимых переменных и с совпадающими характеристиками. Следуя общепринятому принципу ([I], [4]) обозначим такие системы символом $S^1_{m2[m]}$. В работе приводятся структурные уравнения такой структуры, проводится их канонизация, выделяются некоторые геометрические объекты этой структуры. Рассматриваются некоторые флаговые структуры, ассоциированные с данной структурой, приводятся необходимые и достаточные условия интегрируемости этих флаговых структур, тем самым выяснив геометрический смысл обращения в нуль некоторых геометрических объектов.

§ 2. Структурные уравнения

I. На гладком многообразии M_{m+2} независимых переменных x^λ, где $\lambda, \mu, \ldots = 1, 2,$ и зависимых переменных u^α, где $\alpha, \beta, \ldots = 3, 4, \ldots, m+2$, рассмотрим квазилинейную систему

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^1} = h^\alpha{}_\beta (x^\lambda, u^\gamma) \frac{\partial u^\beta}{\partial x^2} + f^\alpha (x^\lambda, u^\gamma). \qquad (2.I)$$

Предположим, что характеристическое уравнение $\det(\|h^{\alpha}_{\beta}\| - \lambda E) = 0$ имеет один единственный корень λ.

В статье [6] рассматривались почти линейные системы (I), т.е. системы (I) при $h^{\alpha}_{\beta}(x^{\lambda}, u^{\gamma}) = h^{\alpha}_{\beta}(x^{\lambda})$. Такая система приводится к каноническому виду линейным преобразованием, ее канонический вид имеет жорданову нормальную форму и характеристические числа зависят только от x^{λ}.

Строение геометрических образов $M_{(m)}$, заданных системой в точке многообразия M_{m+2}, не зависит от того, является ли квазилинейная система (I) почти линейной или нет, поскольку в точке многообразия M_{m+2} почти линейная система и квазилинейная система переходят в одну и ту же систему с постоянными коэффициентами. Поэтому, в точке многообразия M_{m+2} все рассуждения и результаты для почти линейных систем и квазилинейных систем одинаковые, в том числе результаты статьи [6] и § I статьи [7] верны и для квазилинейных систем (I).

2. На гладком многообразии M_{m+2} образуем дифференциальные формы

$$\omega^p = u^p_q \, du^q, \quad p, q = 1, 2, 3, \ldots, m+2,$$

где u^p_q - новые переменные, не зависящие от x^{λ}, u^{α} и удовлетворяющие единственному условию $\det \|u^p_q\| \neq 0$. Данная квазилинейная система (I) с совпадающими характеристиками на многообразии M_{m+2}, т.е. система $S^1_{m2[m]}$, равносильна системе [6]

$$\begin{aligned}
&\omega^3 \wedge \omega^2 = 0,\\
&\omega^3 \wedge \omega^1 + \omega^4 \wedge \omega^2 = 0,\\
&\omega^4 \wedge \omega^1 + \omega^5 \wedge \omega^2 = 0, \qquad\qquad (2.2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\omega^{m+1} \wedge \omega^1 + \omega^{m+2} \wedge \omega^2 = 0
\end{aligned}$$

на многообразии M_{m+2}.

Здесь единственный характеристический корень λ приведен к нулю, что всегда возможно. Тогда характеристические кривые на интегральных многообразиях задаются дифференциальным уравнением $\omega^2 = 0$.

Поскольку система остается квазилинейной при преобразованиях переменных вида

$$x^{\lambda'} = x^{\lambda'}(x^{\lambda}), \quad u^{\alpha'} = u^{\alpha'}(x^{\lambda}, u^{\alpha}),$$

где правые части - произвольные гладкие функции своих аргументов, то многообразие M_{m+2} расслаивается на m-мерные слои M_m, определяемые уравнениями $\omega^{\lambda} = 0$, с базой M_2, являющейся пространством независимых переменных.

Значит
$$\omega^\lambda = u^\lambda_\mu\, dx^\mu,$$
где $\det\|u^\lambda_\mu\| \neq 0$ и
$$d\omega^\lambda = \omega^\lambda_\mu \wedge \omega^\lambda.$$

3. Рассмотрим многообразие M_{m+2} с заданной на нем квазилинейной системой (2.I) с совпадающими характеристиками, которая равносильна системе (2.2). Требование сохранения системы (2.2) означает, что идеал форм Ω^α, $\alpha = 3, \ldots, m+2$, стоящих в левых частях уравнений системы (2.2), т.е.
$$\begin{aligned} \Omega^3 &= \omega^3 \wedge \omega^2, \\ \Omega^4 &= \omega^3 \wedge \omega^1 + \omega^4 \wedge \omega^2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \Omega^{m+2} &= \omega^{m+1} \wedge \omega^1 + \omega^{m+2} \wedge \omega^2, \end{aligned} \tag{2.3}$$
должен быть замкнут относительно дифференцирования, т.е. должно
$$d\Omega^\alpha = \Theta^\alpha_\beta \wedge \Omega^\beta + \Phi^\alpha,$$
где Θ^α_β выражаются через вторичные формы, а Φ^α через главные формы. Это требование дает после приведения подобных членов и разложения по обобщенной лемме Картана структурные уравнения
$$\begin{aligned}
d\omega^3 &= \omega^3_2 \wedge \omega^2 + \omega^3_3 \wedge \omega^3 + a^3_{\beta\gamma}\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + a^3_{\beta 1}\,\omega^\beta \wedge \omega^1, \\
d\omega^4 &= \omega^3_2 \wedge \omega^1 + \omega^4_2 \wedge \omega^2 + \omega^4_3 \wedge \omega^3 + (\omega^3_3 + \omega^1_1 - \omega^2_2) \wedge \omega^4 + a^4_{\beta\gamma}\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \\
&\quad + a^4_{\beta 1}\,\omega^\beta \wedge \omega^1, \\
d\omega^5 &= \omega^4_2 \wedge \omega^1 + \omega^5_2 \wedge \omega^2 + \omega^5_3 \wedge \omega^3 + (\omega^4_3 - \omega^1_2) \wedge \omega^4 + (\omega^3_3 + 2(\omega^1_1 - \omega^2_2)) \wedge \omega^5 + \\
&\quad + a^5_{\beta\gamma}\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + a^5_{\beta 1}\,\omega^\beta \wedge \omega^1, \\
d\omega^6 &= \omega^5_2 \wedge \omega^1 + \omega^6_2 \wedge \omega^2 + \omega^6_3 \wedge \omega^3 + \omega^5_3 \wedge \omega^4 + (\omega^4_3 - 2\omega^1_2) \wedge \omega^5 + \\
&\quad + (\omega^3_3 + 3(\omega^1_1 - \omega^2_2)) \wedge \omega^6 + a^6_{\beta\gamma}\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + a^6_{\beta 1}\,\omega^\beta \wedge \omega^1, \qquad (2.4) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d\omega^m &= \omega^{m-1}_2 \wedge \omega^1 + \omega^m_2 \wedge \omega^2 + \omega^m_3 \wedge \omega^3 + \omega^{m-1}_3 \wedge \omega^4 + \omega^{m-2}_3 \wedge \omega^5 + \ldots + \omega^5_3 \wedge \omega^{m-2} + \\
&\quad + (\omega^4_3 - (m-4)\omega^1_2) \wedge \omega^{m-1} + (\omega^3_3 + (m-3)(\omega^1_1 - \omega^2_2)) \wedge \omega^m + \\
&\quad + a^m_{\beta\gamma}\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + a^m_{\beta 1}\,\omega^\beta \wedge \omega^1, \\
d\omega^{m+1} &= \omega^m_2 \wedge \omega^1 + \omega^{m+1}_2 \wedge \omega^2 + \omega^{m+1}_3 \wedge \omega^3 + \omega^m_3 \wedge \omega^4 + \omega^{m-1}_3 \wedge \omega^5 + \ldots + \omega^5_3 \wedge \omega^{m-1} + \\
&\quad + (\omega^4_3 - (m-3)\omega^1_2) \wedge \omega^m + (\omega^3_3 + (m-2)(\omega^1_1 - \omega^2_2)) \wedge \omega^{m+1} + \\
&\quad + a^{m+1}_{\beta\gamma}\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + a^{m+1}_{\beta 1}\,\omega^\beta \wedge \omega^1, \\
d\omega^{m+2} &= \omega^{m+1}_2 \wedge \omega^1 + \omega^{m+2}_2 \wedge \omega^2 + \omega^{m+2}_3 \wedge \omega^3 + \omega^{m+1}_3 \wedge \omega^4 + \omega^m_3 \wedge \omega^5 + \ldots + \omega^5_3 \wedge \omega^m + \\
&\quad + (\omega^4_3 - (m-2)\omega^1_2) \wedge \omega^{m+1} + (\omega^3_3 + (m-1)(\omega^1_1 - \omega^2_2)) \wedge \omega^{m+2} + \\
&\quad + a^{m+2}_{\beta\gamma}\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + a^{m+2}_{\beta 1}\,\omega^\beta \wedge \omega^1.
\end{aligned}$$

При этом

$$\omega_1^2 = a^2_{1\beta}\,\omega^\beta, \tag{2.5}$$

т.е.

$$\begin{gathered} d\omega^1 = \omega_1^1\wedge\omega^1 + \omega_2^1\wedge\omega^2, \\ d\omega^2 = a^2_{1\beta}\,\omega^\beta\wedge\omega^1 + \omega_2^2\wedge\omega^2, \end{gathered} \tag{2.6}$$

что по существу является следствием того, что мы единственный характеристический корень λ привели к нулю и характеристики на интегральных многообразиях задаются уравнением $\omega^2 = 0$.

Уравнения (2.3) можно записать в общем виде:

$$\begin{gathered} d\omega^\alpha = \omega_2^{\alpha-1}\wedge\omega^1 + \omega^\alpha_2\wedge\omega^2 + \omega^\alpha_3\wedge\omega^3 + \omega^{\alpha-1}_3\wedge\omega^4 + \ldots + \omega_3^5\wedge\omega^{\alpha-2} + \\ + (\omega_3^4 - (\alpha-4)\omega_2^1)\wedge\omega^{\alpha-1} + (\omega_3^3 + (\alpha-3)(\omega_1^1 - \omega_2^2))\wedge\omega^\alpha + \\ + a^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\beta\wedge\omega^\gamma + a^\alpha_{\beta 1}\,\omega^\beta\wedge\omega^1, \quad \alpha = 3, 4, \ldots, m+2, \end{gathered} \tag{2.7}$$

или

$$d\omega^\alpha = \omega^{\alpha-1}_2\wedge\omega^1 + \omega^\alpha_2\wedge\omega^2 + \omega^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta, \quad \alpha = 3, 4, \ldots, m+2, \tag{2.8}$$

где

$$\begin{gathered} \omega^\alpha_1 \cong \omega^{\alpha-1}_2, \quad \omega^\alpha_{\alpha-1} \cong \omega^4_3 - (\alpha-4)\omega^1_2, \quad \omega^\alpha_\alpha \cong \omega^3_3 + (\alpha-3)(\omega^1_1 - \omega^2_2), \\ \omega^\alpha_{\alpha+1} \cong (\alpha-2)\omega^2_1 \cong (\alpha-1)a^\alpha_{1\rho}\,\omega^\rho, \\ \omega^\beta_3 \cong \omega^{\beta+1}_4 \cong \ldots \cong \omega^{m+2}_{m-\beta+5}, \quad \beta = 5, \ldots, m+1, \\ \omega^\beta_\gamma \cong 0, \quad \gamma > \beta. \end{gathered} \tag{2.9}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до главных форм многообразия M_{m+2}. Следовательно, матрица группы инвариантности данной системы (2.I) с совпадающими характеристиками в точке многообразия M_{m+2} следующая (ср. с. [7] , стр. 47):

$$\begin{pmatrix} \omega_1^1 & 0 & 0 & \omega_2^3 & \omega_2^4 & \omega_2^5 & \ldots & \omega_2^{m-1} & \omega_2^m & \omega_2^{m+1} \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 & \omega_2^4 & \omega_2^5 & \omega_2^6 & \ldots & \omega_2^m & \omega_2^{m+1} & \omega_2^{m+2} \\ 0 & 0 & \omega_3^3 & \omega_3^4 & \omega_3^5 & \omega_3^6 & \ldots & \omega_3^m & \omega_3^{m+1} & \omega_3^{m+2} \\ 0 & 0 & 0 & \omega_3^3+\omega & \omega_3^4-\omega_2^1 & \omega_3^5 & \ldots & \omega_3^{m-1} & \omega_3^m & \omega_3^{m+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_3^3+2\omega & \omega_3^4-2\omega_2^1 & \ldots & \omega_3^{m-2} & \omega_3^{m-1} & \omega_3^m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_3^3\ 3\omega & \ldots & \omega_3^{m-3} & \omega_3^{m-2} & \omega_3^{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \omega_3^{m-4} & \omega_3^{m-3} & \omega_3^{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \omega_3^3+(m-1)\omega & \omega_3^4-(m-3)\omega_2^1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \omega_3^3+(m-2)\omega & \omega_3^4-(m-2)\omega_2^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \omega_3^3+(m-1)\omega \end{pmatrix} \tag{2.I0}$$

где введено обозначение $\omega_1^1 - \omega_2^2 = \omega$.

Мы получили структурные уравнения (2.4), (2.6), которые оставляют идеал форм (2.3) замкнутым относительно дифференцирования, т.е. сохраняют систему (2.2) или равносильную ей квазилинейную систему $S^1_{m2[m]}$. Итак верна

Теорема I. Задание квазилинейной системы $S^1_{m2[m]}$ на многообразии M_{m+2} определяет на многообразии M_{m+2} дифференциально-геометрическую структуру со структурными уравнениями (2.4), (2.6).

§ 3. Строение касательного пространства $T_x(M_{m+2})$

I. В каждой точке x многообразия M_{m+2} в соответствующем касательном пространстве $T_x(M_{m+2})$ выделяется семейство реперов, инфинитезимальные преобразования которых имеют вид

$$d\bar{e}_\lambda = -\omega_\lambda^\mu \bar{e}_\mu - \omega_\lambda^\alpha \bar{e}_\alpha,$$
$$d\bar{e}_\alpha = -\omega_\alpha^\beta \bar{e}_\beta,$$

где матрица

$$\begin{pmatrix} \omega^\mu_\lambda & \omega_\lambda^\beta \\ 0 & \omega_\alpha^\beta \end{pmatrix}$$

имеет конкретный вид (2.9).

2. Система $S'_{m2[m]}$ задает в каждом $T_x(M_{m+2})$ инвариантное m-параметрическое семейство двумерных плоскостей $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, определяемых системой (2.2) или равносильной ей системой

$$\begin{aligned} &\omega^3 = a_3\omega^2, \\ &\omega^4 - a_3\omega^1 = a_4\omega^2, \\ &\omega^5 - a_4\omega^1 = a_5\omega^2, \\ &\dots\dots\dots \\ &\omega^{m+2} - a_{m+1}\omega^1 = a_{m+2}\omega^2. \end{aligned} \qquad (3.I)$$

Здесь получается последовательности вложенных друг в друга подпространств

$$H_1^m \subset H_2^{m-1} \subset \dots \subset H_i^{m-i+1} \subset \dots \subset H^2_{m-1} \subset H^1_m, \qquad (3.2)$$

где i-мерное подпространство H_i^{m-i+1} определяется уравнениями

$$\omega^2 = 0,\ \omega^3 = 0,\ \omega^\varrho - a_{\varrho-1}\omega^1 = 0,\ \varrho = 4, \dots, m-i+3,$$

и последовательности вложенных друг в друга подпространств

$$E_3^{m-1} \subset E_4^{m-2} \subset \dots \subset E^{m-i+1}_{i+1} \subset \dots \subset E^2_m \subset E^1_{m+1}, \qquad (3.3)$$

где $(i-1)$-мерное подпространство E^{m-i+1}_{i-1} определяется уравнениями

$$\omega^3=a_3\omega^2,\ \omega^\varrho-a_{\varrho-1}\omega^1=a_\varrho\omega^2,\ \varrho=4,\dots,m-i+3.$$

Здесь подпространство H_i^{m-i+1} есть ось семейства S^{m-i+1} из $(i+1)$-мерных подпространств E_{i+1}^{m-i+1}.

Двумерные плоскости, определяемые системой $S^1_{m2[m]}$ проходят через подпространство H_1^m, пересекая при этом каждое из подпространств H_i^{m-i+1} последовательности (3.2) и заполняют при этом подпространство E_3^{m-1}, принадлежа каждому из подпространств E_i^{m-i} последовательности (3.3).

При этом, между пучками подпространств-осей H_1^m и подпространств E_3^{m-1} возникает взаимно-однозначное соответствие по величинам $a_3, a_4, \dots, a_{m+1}$, далее - между H_2^{m-1} и E_4^{m-2} по величинам $a_3, a_4, \dots, a_m$ и т.д..

Интерпретируя нашу систему в случае $m=2$ в проективном пространстве P_3, получим точки $H_0\,(\omega^3=0,\ \omega^4-a_3\omega^1=0,\ \omega^2=0)$, прямую $H_1(\omega^3=0, \omega^2=0)$ и плоскости $E_2(\omega^3=a_3\omega^2)$. Системой $S^1_{2,2[2]}$ определится семейство прямых, которые проходят через точки H_0 прямой H_1 и заполняют при этом плоскости E_2. В таких отношениях находятся прямые, которые являются касательными к линейчатой поверхности (см. [6]).

3. Рассмотрим вопрос о системах Пфаффа в многообразии M_{m+2}, ассоциированных с нашей системой дифференциальных уравнений $S^1_{m2[m]}$. Поскольку система p уравнений Пфаффа в $(m+2)$-мерном многообразии определяется заданием в каждом касательном пространстве $(m+2-p)$-мерного линейного подпространства, то поставленный вопрос решается нахождением инвариантных в $T_x(M_{m+2})$ подпространств. В каждой точке заданы инвариантные подпространства, определяющие системы Пфаффа

$$S_{12}:\ \omega^1=0,\ \omega^2=0,$$

$$S_{1234\dots\varrho}:\ \omega^1=0,\ \omega^2=0,\ \omega^3=0,\omega^4=0,\dots,\ \omega^\varrho=0,\ \varrho=3,4,\dots,m+1;$$

$$S_{23}:\ \omega^2=0,\ \omega^3=0,$$

$$S_2:\ \omega^2=0.$$

В дальнейшем будем подпространство, определяющее тут указанную систему Пфаффа, обозначать тем же символом, что эту систему Пфаффа.

4. Подвижной репер в касательном пространстве $T_x(M_{m+2})$ частично канонизирован. Вектор $\bar e_1$ пробегает m-плоскость $S_{23}:\ \omega^2=0,\ \omega^3=0$, вектор $\bar e_{m+2}$ зафиксирован по направлению, векторы $\bar e_{m+1}, \bar e_{m+2}$ образуют инвариантное под-

пространство, и т.д. Имеем последовательности вложенных друг в друга инвариантных подпространств:

$$\{\bar e_{m+2}\}\subset\{\bar e_{m+2},\bar e_{m+1}\}\subset\{\bar e_{m+2},\bar e_{m+1},\bar e_m\}\subset\ldots$$
$$\subset\{\bar e_{m+2},\ldots,\bar e_5,\bar e_4\}\subset\{\bar e_{m+2},\ldots,\bar e_4,\bar e_3\}, \qquad (F_1)$$
$$\{\bar e_{m+2}\}\subset\{\bar e_{m+2},\bar e_{m+1}\}\subset\{\bar e_{m+2},\bar e_{m+1},\bar e_m\}\subset\ldots$$
$$\subset\{\bar e_{m+2},\ldots,\bar e_5,\bar e_4\}\subset\{\bar e_{m+2},\ldots,\bar e_4,\bar e_1\}, \qquad (F_2)$$
$$\{\bar e_{m+2}\}\subset\{\bar e_{m+2},\bar e_{m+1}\}\subset\{\bar e_{m+2},\bar e_{m+1},\bar e_m\}\subset\ldots$$
$$\subset\{\bar e_{m+2},\ldots,\bar e_5,\bar e_4\}\subset\{\bar e_{m+2},\ldots,\bar e_4,\bar e_3\}\subset\{\bar e_{m+2},\ldots,\bar e_4,\bar e_3,\bar e_1\}, \qquad (F_{12})$$
$$\{\bar e_{m+2}\}\subset\{\bar e_{m+2},\bar e_{m+1}\}\subset\{\bar e_{m+2},\bar e_{m+1},\bar e_m\}\subset\ldots$$
$$\subset\{\bar e_{m+2},\ldots,\bar e_5,\bar e_4\}\subset\{\bar e_{m+2},\ldots,\bar e_4,\bar e_1\}\subset\{\bar e_{m+2},\ldots,\bar e_4,\bar e_3,\bar e_1\}. \qquad (F_{22})$$

это флаги соответственно типов $\nu_1=\nu_2=(1,2,\ldots,m)$, $\nu_{12}=\nu_{22}=(1,2,\ldots,m+1)$. Флаги F_{12} и F_{22} являются полными флагами в касательном пространстве $T_x(M_{m+2})$ многообразия M_{m+1}, флаг F_1 можно рассматривать как подфлаг флагов F_{12} и F_{22}, он является полным флагом в касательном пространстве $T_x(M_{m+2})$ к слоевым многообразиям M_m в расслоении многообразия M_{m+2} с базой независимых переменных M_2. Учитывая договоренность предыдущего пункта 3, можно флаги F_1, F_2, F_{12}, F_{22} переобозначить

$$S_{123\ldots m+1}\subset S_{123\ldots m}\subset\ldots\subset S_{123}\subset S_{12}, \qquad (F_1)$$
$$S_{123\ldots m+1}\subset S_{123\ldots m}\subset\ldots\subset S_{123}\subset S_{23}, \qquad (F_2)$$
$$S_{123\ldots m+1}\subset S_{123\ldots m}\subset\ldots\subset S_{123}\subset S_{12}\subset S_2, \qquad (F_{12})$$
$$S_{123\ldots m+1}\subset S_{123\ldots m}\subset\ldots\subset S_{123}\subset S_{23}\subset S_2. \qquad (F_{22})$$

Сравним флаг F_2 и последовательность подпространств (3.2). Флаг F_2 завершается подпространством $H^1_m=S_{23}$, которым завершается и последовательность (3.2). Подпространство S_{1234} является осью семейства подпространств H^2_{m-1} и т.д., подпространство $S_{123\ldots q}$ является осью семейства подпространств H^{q-2}_{m-q+3}, $q=4,\ldots,m+1$, причем подпространство $S_{123\ldots m+1}$ является осью семейства подпространств H^{m-1}_2. Следовательно, берем подпространство $H^2_{m-1}=S_{23}$ и подпространство S_1. Рассмотрим в пространстве $H^2_{m-1}=S_{23}$ последовательность подпространств пересечения пространства S_1 с пространствами последовательности (3.2), получим флаг F_1 (отметим, что при этом $S_1\cap H^m_1=\{0\}$).

Отметим еще, что флаг F_1 принадлежит флагу F_{12} и флаг F_2 принадлежит флагу F_{22}. Все рассмотренные флаги отличаются друг от друга лишь в завершающих флаги подпространствах.

§ 4. Структурные уравнения (продолжение)

Для дальнейшего изучения следует выяснить характер коэффициентов, входящих в структурные уравнения (2.3),(2.6). Для этого нужно продолжить структурные уравнения (2.3), (2.6), т.е. продифференцировать внешним образом и применить обобщенную лемму Картана.

Продолжим уравнения (2.6). Начнем с уравнения

$$d\omega^2 = \omega^2_1\wedge\omega^1+\omega^2_2\wedge\omega^2 = (a^2_{13}\omega^3+a^2_{14}\omega^4+\ldots+a^2_{1,m+2}\omega^{m+2})\wedge\omega^1+\omega^2_2\wedge\omega^2,$$

получим

$$\begin{aligned}
&da^2_{13}+a^2_{13}(\omega^3_3+\omega)+a^2_{14}\omega^4_3+a^2_{15}\omega^5_3+a^2_{16}\omega^6_3+\ldots+a^2_{1,m+1}\omega^{m+1}_3+a^2_{1,m+2}\omega^{m+2}_3\cong 0,\\
&da^2_{14}+a^2_{14}(\omega^3_3+2\omega)+a^2_{15}(\omega^4_3-\omega^1_2)+a^2_{16}\omega^5_3+\ldots+a^2_{1,m+1}\omega^m_3+a^2_{1,m+2}\omega^{m+1}_3\cong 0,\\
&da^2_{15}+a^2_{15}(\omega^3_3+3\omega)+a^2_{16}(\omega^4_3-2\omega^1_2)+a^2_{17}\omega^5_3+\ldots+a^2_{1,m+1}\omega^{m-1}_3+a^2_{1,m+2}\omega^m_3\cong 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad (4.1)\\
&da^2_{1m}+a^2_{1m}(\omega^3_3+(m-2)\omega)+a^2_{1,m+1}(\omega^4_3-(m-3)\omega^1_2)+a^2_{1,m+2}\omega^5_3\cong 0,\\
&da^2_{1,m+1}+a^2_{1,m+1}(\omega^3_3+(m-1)\omega)+a^2_{1,m+2}(\omega^4_3-(m-2)\omega^1_2)\cong 0,\\
&da^2_{1,m+2}+a^2_{1,m+2}(\omega^3_3+m\omega)\cong 0;
\end{aligned}$$

$$d\omega^2_2 = a^2_{1\rho}\omega^\rho\wedge\omega^1_2+a^2_{1\rho}\omega^\rho_2\wedge\omega^1+\omega^2_{22}\wedge\omega^2; \qquad (4.2)$$

$$d\omega^2_1 = -\omega\wedge a^2_{1\rho}\omega^\rho+a^2_{1\rho}\omega^\rho_2\wedge\omega^2+a^2_{1\rho}\wedge\omega^{\rho-1}_2\wedge\omega^1. \qquad (4.3)$$

Продолжим уравнение

$$d\omega^1 = \omega^1_1\wedge\omega^1+\omega^1_2\wedge\omega^2,$$

получим

$$d\omega^1_1 = \omega^1_2\wedge a^2_{1\rho}\omega^\rho+\omega^1_{11}\wedge\omega^1+\omega^1_{12}\wedge\omega^2; \qquad (4.4)$$

$$d\omega^1_2 = \omega\wedge\omega^1_2+\omega^1_{21}\wedge\omega^1+\omega^1_{22}\wedge\omega^2, \qquad (4.5)$$

где трёхиндексные формы можно считать симметричными по нижним индексам [8].

Из формул (4.1) видно, что величины

$$\{a^2_{1,m+2}\},\ \{a^2_{1,m+2},a^2_{1,m+1}\},\ldots,\ \{a^2_{1,m+2},a^2_{1,m+1},\ldots,a^2_{14},a^2_{13}\} \qquad (4.6)$$

образуют геометрические объекты, первый из них есть относительный инвариант, а обращение в нуль последнего дает полную интегрируемость уравнения $S_2 : \omega^2 = 0$.

2. Продолжим уравнения (2.4), получим

$$da^\alpha_{\beta\gamma}+a^\alpha_{\beta\gamma}(\omega^3_3+(\beta+\gamma-\alpha-3)\omega)-$$

$$
\begin{aligned}
&+a^3_{\beta\gamma}\omega^\alpha_3-a^4_{\beta\gamma}\omega^{\alpha-1}_3-a^5_{\beta\gamma}\omega^{\alpha-2}_3-\ldots-a^{\alpha-2}_{\beta\gamma}\omega^5_3-a^{\alpha-1}_{\beta\gamma}(\omega^4_3-(\alpha-4)\omega^1_2)+\\
&+a^\alpha_{\beta+1,\gamma}(\omega^4_3-(\beta-3)\omega^1_2)+a^\alpha_{\beta+2,\gamma}\omega^5_3+\ldots+a^\alpha_{m+2,\gamma}\omega^{m+5-\beta}_3+ \qquad (4.6)\\
&+a^\alpha_{\beta,\gamma+1}(\omega^4_3-(\gamma-3)\omega^1_2)+a^\alpha_{\beta,\gamma+2}\omega^5_3+\ldots+a^\alpha_{\beta,m+2}\omega^{m+5-\gamma}_3\cong 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&da^\alpha_{\beta 1}+a^\alpha_{\beta 1}(\omega^1_1+(\beta-\alpha)\omega)-\\
&\quad-a^3_{\beta 1}\omega^\alpha_3-a^4_{\beta 1}\omega^{\alpha-1}_3-a^5_{\beta 1}\omega^{\alpha-2}_3-\ldots-a^{\alpha-2}_{\beta 1}\omega^5_3-a^{\alpha-1}_{\beta 1}(\omega^4_3-(\alpha-4)\omega^1_2)-\\
&\quad-a^\alpha_{\beta+1,1}(\omega^4_3-(\beta-3)\omega^1_2)+a^\alpha_{\beta+2,1}\omega^5_3+a^\alpha_{\beta+3,1}\omega^6_3+\ldots+a^\alpha_{m+2,1}\omega^{m+5-\beta}_3-\\
&\quad-a^\alpha_{\gamma\beta}\omega^{\gamma-1}_2+a^\alpha_{\beta\gamma}\omega^{\gamma-1}_2-a^2_{1\beta}\omega^\alpha_2+\\
&\quad+a^{\alpha-1}_{\gamma\beta}\omega^\gamma_2-a^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma_2-a^{\alpha-1}_{\beta 1}\omega^1_2\cong 0, \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&d\omega^\alpha_2-\omega^\alpha_3\wedge\omega^3_2-\omega^{\alpha-1}_3\wedge\omega^4_2-\omega^{\alpha-2}_3\wedge\omega^5_2-\ldots-\omega^5_3\wedge\omega^{\alpha-2}_2-\\
&\quad-(\omega^4_3-(\alpha-3)\omega^1_2)\wedge\omega^{\alpha-1}_2-(\omega^3_3+(\alpha-3)\omega-\omega^2_2)\wedge\omega^\alpha_2-\\
&\quad-(a^\alpha_{\gamma\beta}\omega^\gamma_2-a^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma_2-a^\alpha_{\beta 1}\omega^1_2)\wedge\omega^\beta-a^\alpha_{\beta 1}\omega^\beta_2\wedge\omega^1-\\
&\quad-\omega^{\alpha-1}_{22}\wedge\omega^1-\omega^{\alpha-1}_{32}\wedge\omega^4-\omega^{\alpha-2}_{32}\wedge\omega^5-\ldots-\omega^5_{32}\wedge\omega^{\alpha-2}-\\
&\quad-(\omega^4_{32}-(\alpha-4)\omega^1_{22})\wedge\omega^{\alpha-1}-(\omega^3_{33}+(\alpha-3)(\omega^1_{12}-\omega^2_{22}))\wedge\omega^\alpha= \qquad (4.8)\\
&\quad=\omega^\alpha_{22}\wedge\omega^2+\omega^\alpha_{23}\wedge\omega^3+\ldots,
\end{aligned}
$$

$$
d\omega^\alpha_3+(\alpha-4)\omega^1_2\wedge\omega^{\alpha-1}_3-(\alpha-3)\omega\wedge\omega^\alpha_3=\omega^\alpha_{32}\wedge\omega^2+\omega^\alpha_{33}\wedge\omega^3+\ldots, \qquad (4.9)
$$

где $\omega^\alpha_{\varrho 2}=\omega^\alpha_{2\varrho}$, $\alpha,\varrho=3,\ldots,m+2$.

Дополнительно к таким общим выражениям (4.6), (4.7) войдут трехиндексные формы в следующие уравнения:

$$
\begin{aligned}
&da^\alpha_{34}+\ldots+\omega^{\alpha-1}_{33}\cong 0, && da^\alpha_{31}+\ldots+\omega^{\alpha-1}_{23}\cong 0,\\
&da^\alpha_{35}+\ldots+\omega^{\alpha-2}_{33}\cong 0, && da^\alpha_{41}+\ldots+\omega^{\alpha-2}_{32}\cong 0,\\
&da^\alpha_{36}+\ldots+\omega^{\alpha-3}_{33}\cong 0, && \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (4.10)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots && da^\alpha_{\alpha-2,1}+\ldots+\omega^4_{32}-(\alpha-5)\omega^1_{22}\cong 0,\\
&da^\alpha_{3\alpha}+\ldots+\omega^3_{33}\cong 0, && da^\alpha_{\alpha-1,1}+\ldots+(\alpha-4)\omega^1_{21}+\omega^3_{32}+(\alpha-4)(\omega^1_{12}-\omega^2_{22})\cong 0,\\
&da^\alpha_{\varrho\alpha}+\ldots+(\alpha-3)2a^2_{1\varrho}\omega^1_2\cong 0, && da^\alpha_{\alpha 1}+\ldots-(\alpha-3)(\omega^1_{11}-a^2_{1\varrho}\omega^\varrho_2)\cong 0.
\end{aligned}
$$

§ 5. Канонизация

I. Производим канонизацию при помощи замены

$$
\omega^\alpha_2\to\omega^\alpha_2+\ell^\alpha_{2\lambda}\omega^\lambda+\ell^\alpha_{2\beta}\omega^\beta,\quad \omega^\alpha_3\to\omega^\alpha_3+\ell^\alpha_{3\lambda}\omega^\lambda+\ell^\alpha_{3\beta}\omega^\beta. \qquad (5.1)
$$

Чтобы не изменились структурные уравнения (2.4), необходимо и достаточно, чтобы

$$\ell^3_{21}=0,\ \ell^\rho_{21}=\ell^{\rho-1}_{22},\ \rho=4,\dots,m+2;$$
$$\ell^\alpha_{23}=\ell^\alpha_{32},\ \ell^\alpha_{2,\alpha+1}=\dots=\ell^\alpha_{2,m+2}=0,\ \alpha=3,\dots,m+2;$$
$$\ell^\rho_{2\rho}=\ell^{\rho-1}_{\rho-1,2},\ \ell^\rho_{2,\rho-1}=\ell^{\rho-1}_{\rho-2,2},\ \dots,\ \ell^\rho_{24}=\ell^{\rho-1}_{32},\ \rho=4,\dots,m+2.$$
Далее, подстановка замены (5.I) в структурные уравнения (2.4) дает

$$\ell^3_{31}=a^3_{31},\ \ell^3_{34}=a^3_{34},\ \ell^3_{35}=a^3_{35},\ \ell^3_{36}=a^3_{36},\ \dots,\ \ell^3_{3,m+2}=a^3_{3,m+2},$$
$$\ell^4_{31}-\ell^3_{23}=a^4_{31},\ \ell^4_{34}-\ell^3_{33}=a^4_{34},\ \ell^4_{35}=a^4_{35},\ \ell^4_{36}=a^4_{36},\ \dots,\ell^4_{3,m+2}=a^4_{3,m+2},$$
$$\ell^5_{31}-\ell^4_{23}=a^5_{31},\ \ell^5_{34}-\ell^4_{33}=a^5_{34},\ \ell^5_{35}-\ell^3_{33}=a^5_{35},\ \ell^5_{36}=a^5_{36},\ \dots,\ \ell^5_{3,m+2}=a^5_{3,m+2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\ell^{m+1}_{31}-\ell^m_{23}=a^{m+1}_{31},\ \ell^{m+1}_{34}-\ell^m_{33}=a^{m+1}_{34},\ \dots,\ \ell^{m+1}_{3,m+1}-\ell^3_{33}=a^{m+1}_{3,m+1},\ \ell^{m+1}_{3,m+2}=a^{m+1}_{3,m+2}$$
$$\ell^{m+2}_{31}-\ell^{m+1}_{23}=a^{m+2}_{31},\ \ell^{m+2}_{34}-\ell^{m+1}_{33}=a^{m+2}_{34},\ \ell^{m+2}_{35}-\ell^m_{33}=a^{m+2}_{35},\dots,\ \ell^{m+2}_{3,m+2}-\ell^3_{33}=a^{m+2}_{3,m+2}.$$
В результате такой перенормировки форм ω^1_2, ω^1_3 и некоторого переобозначения коэффициентов структурные уравнения упрощаются, а именно, в них можно считать

$$a^\alpha_{\beta 1}=0,\ a^\alpha_{\beta\gamma}=0,\ \beta=3;\ \alpha=3,4,\dots,\ m+2,\ \gamma>\beta. \tag{5.2}$$

В результате такой канонизации трехиндексные формы ω^α_{32}, ω^α_{33}, $\alpha=3,\dots,m+1$, стали главными. Формы ω^{m+2}_{32}, ω^{m+2}_{33}, ω^α_{22}, $\alpha=3,\dots,m+2$, в структурные уравнения не входят. Итак верна

<u>Теорема</u> 2. Существует канонизация многообразия реперов, присоединенных к M_{m+2} относительно которой $a^\alpha_{\beta 1}=0$, $a^\alpha_{\beta\gamma}=0$, $\beta=3;\ \alpha=3,4,\dots,\ m+2,\ \gamma>\beta$. В результате этой канонизации формы ω^α_{32}, ω^α_{33}, $\alpha=3,\dots,m+1$, стали главными формами.

После такой канонизации в структурные уравнения (4.6), (4.7), (4.9) добавляются члены:

$$da^\alpha_{\beta\gamma}+\dots-a^{3+\alpha-\beta}_{\delta\gamma}\,\omega^\delta_3\cong 0,$$
$$da^\alpha_{\beta 1}+\dots-a^{3+\alpha-\beta}_{\beta 1}\omega^\beta_3+a^2_{13}\,\omega^{3+\alpha-\beta}_2\cong 0,$$
$$d\omega^3_2=(a^\alpha_{\beta 1}\omega^\beta_3-a^2_{13}\omega^\alpha_2)\wedge\omega^1+a^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\beta_3\wedge\omega^\gamma+\omega^\alpha_{32}\wedge\omega^2+\omega^\alpha_{33}\wedge\omega^3,$$
где $\alpha=4,\dots,\ m+2;\ \beta\le\alpha$.

2. Укажем некоторые из геометрических объектов, которые используем в последующих исследованиях:

$$\{a^2_{1,m+2}\},\ \{a^2_{1,m+2},\ a^2_{1,m+1}\},\ \dots,\ \{a^2_{1,m+2},\ a^2_{1,m+1},\dots,\ a^2_{14},\ a^2_{13}\},$$

$\{a^3_{41}, a^3_{51}, \dots, a^3_{m+2,1}; a^3_{45}, a^3_{46}, \dots, a^3_{4,m+2}; a^3_{56}, a^3_{57}, \dots, a^3_{5,m+2};$
$\dots, a^3_{m,m+1}, a^3_{m,m+2}; a^3_{m+1,m+2}; a^2_{14}, a^2_{15}, \dots, a^2_{1,m+2}\},$

$\{a^3_{45}, a^3_{46}, \dots a^3_{4,m+2}; a^3_{56}, a^3_{57}, \dots, a^3_{5,m+2}; \dots; a^3_{m,m+1}, a^3_{m,m+2}; a^3_{m+1,m+2}\},$

$\{a^3_{46}, a^3_{47}, \dots, a^3_{4,m+2}; a^3_{56}, a^3_{57}, \dots, a^3_{5,m+2};$

$a^4_{46}, a^4_{47}, \dots, a^4_{4,m+2}; a^4_{56}, a^4_{57}, \dots, a^4_{5,m+2}\};$

. . . .

$\{a^\alpha_{\beta,m+2}, \alpha = 3, \dots, m+1, \beta = 4, \dots, m+1; a^\alpha_{\beta,m+1}, \alpha = 3, \dots, m-1; \beta = 4, \dots, m;$
$a^\alpha_{\beta,m}, \alpha = 3, \dots, m-1; \beta = 4, \dots, m-1\},$

$\{a^\alpha_{\beta,m+2}, \alpha = 3, \dots, m; \beta = 4, \dots, m+1; a^\alpha_{\beta,m+1}, \alpha = 3, \dots, m; \beta = 4, \dots, m\},$

$\{a^\alpha_{\beta,m+2}, \alpha = 3, \dots, m+1; \beta = 4, \dots, m+1\}.$

§ 6. Флаговые структуры

I. Определение. Дифференциально-геометрическая структура на n-мерном многообразии M, которая представляет собой поле флагов F_x типа $\nu = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, $1 \leq k \leq n-1$; $0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k < n$, определяемых подпространствами

$$V_1(x) \subset V_2(x) \subset \dots V_k(x)$$

соответственно размерностей $n_1, n_2, \dots, n_k$ в касательных пространствах $T_x(M)$, гладко зависящие от точки $x \in M$, называется флаговой структурой типа $\nu = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ на n-мерном многообразии M.

Флаговая структура типа $\nu = (1, 2, \dots, n-1)$ называется полной.

Флаговая структура типа ν на многообразии является G-структурой, где G-группа всех линейных преобразований n-мерного векторного пространства, сохраняющих некоторый флаг типа ν. Это G-структура бесконечного типа, группа автоморфизмов флаговой структуры, вообще говоря, бесконечномерная.

Определение. Флаговая структура типа ν на M называется локально плоской или интегрируемой, если каждая точка $x \in M$ обладает окрестностью $\mathcal{U}_x$, в которой существует такая локальная система координат $(x^1, x^2, \dots, x^n)$, что подпространства V_i порождены векторами

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n_i}}$$

при всех $x \in \mathcal{U}_x$ и всех $i = 1, 2, \dots, k$.

Последнее условие равносильно тому, что подпространства V_i в каждой точке этой окрестности задаются системами

$$dx^n = 0,\ dx^{n-1} = 0, \dots, dx^{n_i+1} = 0$$

при всех $i = 1, 2, \dots, k$.

Это означает, что окрестность $\mathcal{U}_x$ обладает таким набором слоений $S_1, S_2, \dots, S_k$, что при всех $x \in \mathcal{U}_x$ флаг F_x определяется набором подпространств пространства $T_x(M_{m+2})$, касательных к листам этих слоений, проходящих через точку x.

Флаговая структура тогда и только тогда является локально плоской, когда при любом $i = 1, 2, \dots, k$ распределение $V_i(x)$ является инволютивным, или, что то же самое, когда для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ система Пфаффа, определяющая соответствующее распределение V_i, вполне интегрируема.

2. В § 3 мы получили, что задание на многообразии M_{m+2} квазилинейной системы $S^1_{m2[m]}$ определяет в каждом касательном пространстве $T_x(M_{m+2})$ некоторые флаги F_1, F_2, F_{12}, F_{22}, из которых последние два – полные флаги. Тем самым определены и флаговые структуры на многообразии M_{m+2}.

Рассмотрим полные флаговые структуры F_{12} и F_{22} на многообразии M_{m+2}

$$S_{123\dots m+1} \subset S_{123\dots m} \subset \dots \subset S_{123} \subset S_{12} \subset S_2, \quad (F_{12})$$

$$S_{123\dots m+1} \subset S_{123\dots m} \subset \dots \subset S_{123} \subset S_{23} \subset S_2. \quad (F_{22})$$

Укажем геометрические объекты, обращение в нуль которых необходимо и достаточно для полной интегрируемости систем Пфаффа, определяющих подпространства флага в каждой точке многообразия M_{m+2}:

$S_{123\dots m+1}$: $a^2_{1,m+2},\ a^\alpha_{\beta,m+2},\ \alpha = 3, \dots, m+1;\ \beta = 4, \dots, m+1;$

$S_{123\dots m}$: $a^2_{1,m+2},\ a^2_{1,m+1};$

$a^\alpha_{\beta,m+2},\ \alpha = 3, \dots, m;\ \beta = 4, \dots, m+1;$

$a^\alpha_{\beta,m+1},\ \alpha = 3, \dots, m,\ \beta = 4, \dots, m;$

$S_{123\dots m-1}$: $a^2_{1,m+2},\ a^2_{1,m+1},\ a^2_{1,m}$

$a^\alpha_{\beta,m+2},\ \alpha = 3, \dots, m-1;\ \beta = 4, \dots, m+1;$

$a^{\alpha}_{\beta,m+1}$, $\alpha = 3,\dots, m-1$; $\beta = 4,\dots, m$;

$a^{\alpha}_{\beta,m}$, $\alpha = 3\dots, m-1$; $\beta = 4, \dots, m-1$;

- - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - -

S_{12345}: $a^{2}_{1,m+2}$, $a^{2}_{1,m+1}, \dots, a^{2}_{16}$;

$a^{\alpha}_{\beta,m+2}$, $\alpha = 3,4,5$; $\beta = 4,\dots, m+1$;

$a^{\alpha}_{\beta,m+1}$, $\alpha = 3,4,5$; $\beta = 4,\dots, m$;

- - - - - - - - - - - -

$a^{\alpha}_{\beta 6}$, $\alpha = 3,4,5$; $\beta = 4,5$;

S_{1234}: $a^{2}_{1,m+2}$, $a^{2}_{1,m+1}, \dots, a^{2}_{15}$;

$a^{\alpha}_{\beta,m+2}$, $\alpha = 3,4$; $\beta = 4,\dots, m+1$;

$a^{\alpha}_{\beta,m+1}$, $\alpha = 3,4$; $\beta = 4,\dots, m$,

- - - - - - - - - - - -

$a^{\alpha}_{\beta 5}$, $\alpha = 3,4$; $\beta = 4$;

S_{123}: $a^{2}_{1,m+2}$, $a^{2}_{1,m+1}, \dots, a^{2}_{14}$;

$a^{3}_{\beta,m+2}$, $\beta = 4,\dots, m+1$;

$a^{3}_{\beta,m+1}$, $\beta = 4,\dots, m$;

- - - - - - - -

a^{3}_{46}, a^{3}_{56}; a^{3}_{45};

S_{12}: вполне интегрируема;

S_{23}: $a^{2}_{1,m+2}$, $a^{2}_{1,m+1}, \dots, a^{2}_{14}$;

$a^{3}_{\beta,m+2}$, $\beta = 4,\dots, m+1$;

$a^3_{\beta, m+1}, \beta = 4, \ldots, m;$

$\ldots\ldots\ldots$

$a^3_{46}, a^3_{56};$

$a^3_{45};$

$a^3_{41}, a^3_{51}, \ldots, a^3_{m+2,1};$

$S_2 : a^2_{1,m+2}, a^2_{1,m+1}, \ldots, a^2_{14}, a^2_{13}.$

Итак доказана

Теорема 3. **Для интегрируемости флаговой структуры** F_{12} **необходимо и достаточно обращение в нуль геометрического объекта**

$$
\begin{aligned}
& a^2_{1,m+2}, a^2_{1,m+1}, \ldots, a^2_{14}, a^2_{13}; \\
& a^\alpha_{\beta, m+2}, \alpha = 3, \ldots, m+1; \beta = 4, \ldots, m+1; \\
& a^\alpha_{\beta, m+1}, \alpha = 3, \ldots, m; \beta = 4, \ldots, m; \\
& a^\alpha_{\beta, m}, \alpha = 3, \ldots, m-1; \beta = 4, \ldots, m-1; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a^\alpha_{\beta 6}, \alpha = 3, 4, 5; \beta = 4, 5; \\
& a^\alpha_{\beta 5}, \alpha = 3, 4; \beta = 4.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Теорема 4. **Для интегрируемости флаговой структуры** F_{22} **необходимо и достаточно обращение в нуль геометрического объекта**

$$
\begin{aligned}
& a^2_{1,m+2}, a^2_{1,m+1}, \ldots, a^2_{14}, a^2_{13}; \\
& a^\alpha_{\beta, m+2}, \alpha = 3, \ldots, m+1; \beta = 4, \ldots, m+1; \\
& a^\alpha_{\beta, m+1}, \alpha = 3, \ldots, m; \beta = 4, \ldots, m; \\
& a^\alpha_{\beta, m}, \alpha = 3, \ldots, m-1; \beta = 4, \ldots, m-1; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a^\alpha_{\beta 6}, \alpha = 3, 4, 5; \beta = 4, 5; \\
& a^\alpha_{\beta 5}, \alpha = 3, 4; \beta = 4; \\
& a^3_{\beta 1}, \beta = 4, \ldots, m+2.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

3. Рассмотрим флаговые структуры F_1 и F_2 на многообразии M_{m+2}:

$$S_{123\ldots m+1} \subset S_{123\ldots m} \subset \ldots \subset S_{123} \subset S_{12}, \qquad (F_1)$$
$$S_{123\ldots m+1} \subset S_{123\ldots m} \subset \ldots \subset S_{123} \subset S_{23}. \qquad (F_2)$$

Верны также

Теорема 5. Для интегрируемости флаговой структуры F_1 необходимо и достаточно обращение в нуль геометрического объекта

$$\begin{aligned}
&a^2_{1,m+2},\ a^2_{1,m+1}, \ldots, a^2_{14};\\
&a^\alpha_{\beta,m+2},\ \alpha=3,\ldots,m+1;\ \beta=4,\ldots,m+1;\\
&a^\alpha_{\beta,m+1},\ \alpha=3,\ldots,m;\ \beta=4,\ldots,m;\\
&a^\alpha_{\beta,m},\ \alpha=3,\ldots,m-1;\ \beta=4,\ldots,m-1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a^\alpha_{\beta 6},\ \alpha=3,4,5;\ \beta=4,5;\\
&a^\alpha_{\beta 5},\ \alpha=3,4;\ \beta=4.
\end{aligned} \qquad (6.3)$$

Теорема 6. Для интегрируемости флаговой структуры F_2 необходимо и достаточно обращение в нуль геометрического объекта

$$\begin{aligned}
&a^2_{1,m+2},\ a^2_{1,m+1}, \ldots, a^2_{14};\\
&a^\alpha_{\beta,m+2},\ \alpha=3,\ldots,m+1;\ \beta=4,\ldots,m+1;\\
&a^\alpha_{\beta,m+1},\ \alpha=3,\ldots,m;\ \beta=4,\ldots,m;\\
&a^\alpha_{\beta,m},\ \alpha=3,\ldots,m-1;\ \beta=4,\ldots,m-1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a^\alpha_{\beta 6},\ \alpha=3,4,5;\ \beta=4,5;\\
&a^\alpha_{\beta 5},\ \alpha=3,4;\ \beta=4;\\
&a^3_{\beta 1},\ \beta=4,\ldots,m+2.
\end{aligned} \qquad (6.4)$$

Отметим, что геометрический объект (6.3) отличается от геометрического объекта (6.1) (равно как и геометрический объект (6.4) от геометрического объекта (6.2)) на компоненту a^2_{13}.

4. Рассмотрим еще флаговые структуры F^ϱ:

$$S_{123\ldots m+1} \subset S_{123\ldots m} \subset \ldots \subset S_{123\ldots\varrho},$$

$\varrho=3,4,\ldots,m+1$. Не представляет труда указать необходимые и достаточные условия интегрируемости таких флаговых структур.

Теорема 7. Для интегрируемости флаговой структуры F^ϱ необходимо и достаточно обращение в нуль геометрического объекта

$$a^{2}_{1,m+2},\ a^{2}_{1,m+1},\ \dots,\ a^{2}_{1,\rho+1};$$
$$a^{\alpha}_{\beta,m+2},\ \alpha=3,\dots,m+1;\ \beta=4,\dots,m+1;$$
$$a^{\alpha}_{\beta,m+1},\ \alpha=3,\dots,m;\ \beta=4,\dots,m; \tag{6.5}$$
$$- - - - - - - - - - - - - -$$
$$a^{\alpha}_{\beta,\rho+1},\ \alpha=3,\dots,\rho;\ \beta=4,\dots,\rho.$$

Важным частным случаем флаговой структуры является флаговая структура типа (n_1), т.е. n_1-мерные распределения (тогда $k=1$, $0<n_1<n$; см. п. I этого параграфа). Отметим, что в пункте 2 этого параграфа были выписаны геометрические объекты, обращение в нуль которых необходимо и достаточно для интегрируемости $1-, 2-, \dots, (m+1)$-мерных распределений $S_{123\dots m+1}$, $S_{123\dots m}$, $\dots$, S_{123}, S_{23}, S_2, входящих в изучаемые флаговые структуры.

Полные флаговые структуры изучала М.М.Цаленко в своей работе [9]. Геометрический объект, обращение в нуль которого необходимо и достаточно для интегрируемости флаговой структуры, был в работе [9] назван <u>объектом кручения</u> этой флаговой структуры.

Итак, квазилинейная система $S^1_{m\,2\,[m]}$ определяет на многообразии независимых и зависимых переменных M_{m+2} некоторые флаговые структуры определенного типа, а именно, линейные преобразования $(m+2)$-мерного векторного пространства $T_x(M_{m+2})$, сохраняющие флаг, имеют конкретный вид (2.10). Основными среди этих флаговых структур следует считать (F_{12}), (F_{22}). На языке этих флаговых структур мы выяснили геометрический смысл обращения в нуль некоторых геометрических объектов.

Литература

I. Васильев А.М. Системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трех неизвестных функциях и двух независимых переменных (локальная теория) // Матем. сборник. 1966. Т.70, вып. 4. С. 457-480.

2. Васильев А.М. Дифференциальная алгебра как аппарат дифференциальной геометрии // Труды геометрического семинара. Т.I. М.: ВИНИТИ, 1966. С. 33-62.

3. В а с и л ь е в А.М. Теория дифференциально-геометрических структур. М.Изд. МГУ., 1987.
4. К и л ь п Х.О. Квазилинейные системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при m неизвестных функциях двух независимых переменных и с несовпадающими характеристиками (геометрическая теория) // Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1971, 281. С. 63-85.
5. К и л ь п Х.О. К геометрии системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка// Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та. 1971. Вып. 277.С.78-97.
6. К и л ь п Х.О. Геометрическое строение семейства плоскостей, заданных некоторой системой дифференциальных уравнений первого порядка // Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1968, 220. С. 31-42.
7. К и л ь п Х.О. Линейные группы инвариантности семейств плоскостей и соответствующие G-структуры // Уч.зап. Тартуск. ун-та. 1968. Вып. 220. С. 43-66.
8. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Труды геометрического семинара. Т. I. М.: ВИНИТИ, 1966.С. 139-189.
9. Ц а л е н к о М.М. О флаговых структурах // Уч. зап. Московск. гос. педаг. ин-та им. В.И.Ленина. 1965. С. 186-191.

Поступило
20 XII 87

STRUCTURAL EQUATIONS AND FLAG STRUCTURES
OF THE QUASILINEAR SYSTEM OF THE TYPE $S^1_{m2[m]}$

H.Kilp

S u m m a r y

In this paper the quasilinear system $S^1_{m2[m]}$ of the first order partial differential equations with two independent variables, m unknown functions and with coincident characteristics are examined by the method of E.Cartan. Structural equations of such a differential-geometric structure are found, their canonical form is indicated. Such quasilinear system $S^1_{m2[m]}$ determines certain flag structures on the manifold of dependent and independent variables M_{m+2}. These flag structures are used to characterize the differential-geometric structure of the quasilinear system $S^1_{m2[m]}$.

TRÜ Toimetised
803 (1988), 69-78

Уч. зап. Тартуск. ун-та.
1988, 803, 69-78

DECOMPOSITION OF SEMI-SYMMETRIC SUBMANIFOLDS

Ü.Lumiste

Department of algebra and geometry

1. Introduction. Locally symmetric Riemannian manifolds M^m are characterized by the system $\nabla R=0$, which leads to the integrability condition $R(X,Y)R=0$. By their investigation E.Cartan, P.A.Shirokov and others introduced the manifolds, satisfying this condition. A conjecture of K.Nomizu [6], that a complete irreducible M^m with $R(X,Y)R=0$ is locally symmetric, was refuted by H. Takagi [8] and others. The important role of this condition in the theory of geodesic maps was shown by N.S.Sinjukov, who in 1956 called a M^m, characterized by $R(X,Y)R=0$, a semi-symmetric manifold (see [15], Ch. II, §3). P.I.Kovaljev [9] used the Lie triple systems for an algebraic description of semi-symmetricity. All semi-symmetric Riemannian manifolds were classified by Z.I.Szabo [7]. Semi-symmetric Lorentzian 4-manifolds were investigated by V.R.Kaigorodov [9].

In the the geometry of submanifolds in space forms there is concept of a locally symmetric submanifold, which is characterized by the system $\bar\nabla h=0$ (D.Ferus [3]), where h is the second fundamental form and $\bar\nabla$ is the van der Waerden-Bortolotti connection. The integrability condition of this system is

$$\bar R(X,Y)h=0, \tag{1.1}$$

where $\bar R$ is the van der Waerden-Bortolotti curvature operator. Submanifolds, satisfying the condition (1.1), were introduced by F.Deprez [2] and called semi-parallel submanifolds. More natural is to call them semi-symmetric submanifolds, as we are doing in the following. From the results of E.Backes [1] it follows easily that they lead to Jordan triple systems. Intrinsically they are semi-symmetric Riemannian manifolds.

In this paper some decomposition theorems, announced in [4], will be proved for semi-symmetric submanifolds (see Theorems 1 and 2 below). They extend some analogous results, stated previously for the following special cases.

It is obvious, that a submanifold with flat $\bar{\nabla}$ (i.e. with $\bar{R}(X,Y)=0$) is semi-symmetric. A decomposition theorem for submanifolds with flat $\bar{\nabla}$ in a euclidean E_n is given in [13]. The generalized Ricci identity $\bar{\nabla}_{[X}\bar{\nabla}_{Y]}h = \bar{R}(X,Y)h$ shows that semisymmetric are also submanifolds with parallel third fundamental form $\bar{\nabla}h$ (i.e. with $\bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y h) = 0$ for arbitrary X and Y), investigated in [12], [14]. The first decomposition theorem, proved next in §3 (Theorem 1), is the nearest generalization of the corresponding theorem in [11].

Theorems 1 and 2 are stated and proved below in local setting, i.e. without any global restriction. Methods are purely differential geometric. One of the crucial points is the fact that the mean curvature vector of a semi-symmetric submanifold is a commutating normal vector in the sense of V.A.Mirzoyan [14].

2. <u>Apparatus and lemmas</u>. If a submanifold M^m in E^n is given, then the orthonormal frame bundle $\mathcal{O}(E^n)$ can be reduced to $\mathcal{O}(M^m, E^n)$; here $\{x, e_i, e_\alpha\} \in \mathcal{O}(M^m, E^n)$ implies

$$e_i \in T_x(M^m), \quad e_\alpha \in T_x^\perp(M^m); \quad i=1,\dots,m; \ \alpha = m+1,\dots,n.$$

Identifying the point $x \in M^m$ with its radius vector we have

$$dx = e_J \omega^J, \quad de_J = e_K \omega_J^K, \quad \omega_J^K + \omega_K^J = 0, \tag{2.1}$$

where $J,K = 1,\dots,n$ and the following differential system is satisfied:

$$\omega^\alpha = 0. \tag{2.2}$$

Therefore from structure equations (i.e. integrability conditions of (2.1))

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J, \quad d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K \tag{2.3}$$

it follows, due the Cartan lemma, that

$$\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha. \tag{2.4}$$

Now exterior differentiation and the same lemma give us

$$\bar\nabla h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ijk}\omega^k, \qquad h^\alpha_{ijk} = h^\alpha_{ikj}, \tag{2.5}$$
where $\bar\nabla$ is the covariant differential operator of the van der Waerden - Bortolotti connection; in particular
$$\bar\nabla h^\alpha_{ij} = dh^\alpha_{ij} - h^\alpha_{kj}\omega^k_i - h^\alpha_{ik}\omega^k_j + h^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta. \tag{2.6}$$
In the same manner (2.5) yield
$$\bar\nabla h^\alpha_{ijk}\wedge\omega^k = h^\alpha_{kj}\Omega^k_i + h^\alpha_{ik}\Omega^k_j - h^\beta_{ij}\Omega^\alpha_\beta, \tag{2.7}$$
where
$$\Omega^j_i = d\omega^j_i - \omega^k_i\wedge\omega^j_k = -\sum_\alpha h^\alpha_{i[k}h^\alpha_{l]j}\,\omega^k\wedge\omega^l, \tag{2.8}$$
$$\Omega^\beta_\alpha = d\omega^\beta_\alpha - \omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma = -\sum_i h^\alpha_{i[k}h^\beta_{l]i}\,\omega^k\wedge\omega^l \tag{2.9}$$
are the curvature 2-forms of the van der Waerden - Bortolotti connection

The second and the third fundamental forms are respectively symmetric $T^\perp M^m$-valued forms, respectively,
$$\alpha_2 : (X,Y) \longmapsto h^\alpha_{ij}X^iY^je_\alpha,$$
$$\alpha_3 : (X,Y,Z) \longmapsto h^\alpha_{ijk}X^iY^jZ^ke_\alpha;$$
here $X = X^ie_i$, $Y = Y^je_j$, $Z = Z^ke_k$; remark that α_2 is denoted also h (see Introduction). In view of (2.5) we write $h^\alpha_{ijk} = \bar\nabla_k h^\alpha_{ij}$ and correspondingly $\alpha_3 = \bar\nabla\alpha_2 = \bar\nabla h$.

Submanifolds M^m with parallel α_2 (resp. α_3) are characterized by $\bar\nabla h = 0$ or $\bar\nabla h^\alpha_{ij} = 0$ or $h^\alpha_{ijk} = 0$ (resp. by $\bar\nabla h^\alpha_{ijk} = 0$). Immersion $M^m \to E^n$ is called semi-symmetric, if
$$h^\alpha_{kj}\Omega^k_i + h^\alpha_{ik}\Omega^k_j - h^\beta_{ij}\Omega^\alpha_\beta = 0, \tag{2.10}$$
briefly if $\bar\Omega\alpha_2 = 0$, where $\bar\Omega$ is the curvature form operator of the van der Waerden - Bortolotti connection $\bar\nabla$. This condition (2.10) is equivalent to (1.1), which is its short form.

By the Cartan lemma from (2.7) follows $\bar\nabla h^\alpha_{ijk} = h^\alpha_{ijkl}\omega^l$, where $h^\alpha_{ijkl} = \bar\nabla_l h^\alpha_{ijk} = \bar\nabla_l\bar\nabla_k h^\alpha_{ij}$ need not be symmetric with respect to indices k and l. Therefore the fourth fundamental form $\alpha_4 = \bar\nabla\alpha_3$, which is defined by $\alpha_4 : (X,Y,Z,W) \longmapsto$ $\longmapsto h^\alpha_{ijkl}X^iY^jZ^kW^l$, is in general not symmetric.

<u>Lemma 1</u>. A submanifold M^m in E^n is semi-symmetric iff its fourth fundamental form α_4 is symmetric.

<u>Proof</u>. Follows immediately from (2.7) and (2.10).

This lemma 1 is an analog of the well-known consequence from the Ricci identity

$$\nabla_p R_{ij,kl}\wedge\omega^p = R_{pj,kl}\Omega^p_i + R_{ip,kl}\Omega^p_j + R_{ij,pl}\Omega^p_k + R_{ij,kp}\Omega^p_l, \qquad (2.11)$$

that a Riemannian manifold M^m is semi-symmetric iff $\nabla_q\nabla_p R_{ij,kl}$ is symmetric with respect to p and q, i.e. iff (2.11) is trivial $0=0$. Note, that (2.7) is equivalent to generalized Ricci identity mentioned in the introduction.

Lemma 2 (announced in [2]). If M^m is a semi-symmetric submanifold in E^n, then M^m is intrinsically a semi-symmetric Riemannian manifold.

Proof. From (2.8) it follows, that $R_{ij,kl}=\sum_\alpha h^\alpha_{i[k}h^\alpha_{l]j}$. Substituting it in the right side of (2.11) and using (2.10) and the identity $\Omega^\beta_\alpha+\Omega^\alpha_\beta=0$ we obtain zero, i.e. $\Omega R=0$.

Lemma 3. If a submanifold M^m in E^n has a parallel third fundamental form α_3, then it is a semi-symmetric submanifold.

Proof. Follows immediately from the formula $\bar\nabla\alpha_3=\alpha_4$ and Lemma 1.

Let $\xi=\xi^\alpha e_\alpha$ be a normal vector field on M^m, immersed in E^n; let $h^\xi_{ij}=\sum_\alpha\xi^\alpha h^\alpha_{ij}$ and $A^\xi=\|h^\xi_{ij}\|$. V.Mirzoyan [14] calls ξ a commutating normal vector field if A^ξ commutes with A^η by every normal vector field η.

Lemma 4. (J.Deprez [2]). If M^m is a semi-symmetric submanifold in E^n, then $H=H^\alpha e_\alpha$ is commutating, where $H^\alpha=\frac{1}{m}\sum_i h^\alpha_{ii}$.

Proof. Taking $i=j$ in (2.10) and summing over $1,\ldots,m$ we obtain, due to $\Omega^j_i+\Omega^i_j=0$, that $H^\beta\Omega^\alpha_\beta=0$. This and (2.9) yield

$$\sum_i(h^H_{ik}h^\alpha_{il}-h^H_{il}h^\alpha_{ik})=0 \qquad (2.12)$$

i.e. H is commutating.

In a special case of M^m with parallel α_3 this lemma 4 is proved in [14].

Next we need also the formula

$$h^H_{kj}\Omega^k_i+h^H_{ik}\Omega^k_j=0, \qquad (2.13)$$

which follows from (2.10) if we multiply by H^α, sum over $\alpha=m+1,\ldots,n$ and use $\Omega^\alpha_\beta+\Omega^\beta_\alpha=0$.

A submanifold M^m in E^n is called a product of submanifolds M^{m_ϱ} in E^{n_ϱ} ($\varrho=1,\ldots,r$) if 1) $M^m=M^{m_1}\times\ldots\times M^{m_r}$, 2) $E^n=E^{n_1}\times\ldots\times E^{n_r}$, 3) every two distinct E^{n_ϱ} and E^{n_σ} are totally orthogonal.

Lemma 5. Let M^m in E^n be the product of submanifolds M^{m_ϱ} in E^{n_ϱ} ($\varrho=1,\ldots,r$). Then M^m in E^n is semisymmetric iff every M^{m_ϱ} in E^{n_ϱ} is semi-symmetric.

Proof. Let us take $\{x, e_{i_\varrho}, e_{\alpha_\varrho}\} \in \mathcal{O}(M^{m_\varrho}, E^{n_\varrho})$ for every M^{m_ϱ} in E^{n_ϱ}; then $\omega_{i_\varrho}^{j_\sigma}=0$, $\omega_{\alpha_\varrho}^{\beta_\sigma}=0$ if $\varrho \neq \sigma$ and among h_{ij}^{α} only $h_{i_\varrho j_\varrho}^{\alpha_\varrho}$ can be nonzero. It follows, that among Ω_i^j and Ω_α^β only $\Omega_{i_\varrho}^{j_\varrho}$ and $\Omega_{\alpha_\varrho}^{\beta_\varrho}$ $(\varrho=1,\dots,r)$ can be nonzero. Now (2.10) hold for M^m in E^n iff it is satisfied for every M^{m_ϱ} in E^{n_ϱ}.

3. The first decomposition theorem. For a semi-symmetric submanifold the next statement concerning its decomposition in product of submanifolds is true. We formulate and prove here the local version of the statement without stating any global restriction.

Theorem 1. Let M^m be a semi-symmetric submanifold in E^n and let $\mathcal{U}^m$ be the open part of M^m, on which symmetric tensor A^H has distinct eigenvalues $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ of constant multiplicities. Then corresponding eigenspaces form r foliations $\Delta_1,\dots,\Delta_r$ on $\mathcal{U}^m$, which are totally orthogonal and conjugated with respect to α_2, i.e. $\langle\Delta_\varrho,\Delta_\sigma\rangle=0$ and $\alpha_2(\Delta_\varrho,\Delta_\sigma)=0$, $\varrho\neq\sigma$. Let $\Delta_1',\dots,\Delta_s'$ be direct sums of $\Delta_1,\dots,\Delta_r$, satisfying $\Delta_1'\oplus\dots\oplus\Delta_s'=T\mathcal{U}^m$, and let every Δ_φ', $1\leqslant\varphi\leqslant s$, be parallel in the Levi-Civita connection ∇ induced on M^m by immersion. Then around every point of $\mathcal{U}^m$ submanifold M^m in E^n locally coincides with product of semisymmetric submanifolds $\mathcal{U}^{m_\varphi}$ in E^{n_φ} where every $\mathcal{U}^{m_\varphi}$ is a leaf of Δ_φ', $1\leqslant\varphi\leqslant s$.

Proof. Let $\{x, e_i\}\in T_x(\mathcal{U}^m)$ be the canonical frame for A^H in arbitrary point $x\in\mathcal{U}^m$. Then $h_{i_\varrho j_\varrho}^H=\lambda_\varrho\delta_{i_\varrho j_\varrho}$, $h_{i_\varrho j_\sigma}^H=0$ $(\varrho\neq\sigma)$ and (2.12) yield

$$(\lambda_\varrho-\lambda_\sigma)h_{k_\varrho l_\sigma}^{\alpha}=0 \quad (\varrho\neq\sigma), \tag{3.1}$$

where $\lambda_\varrho-\lambda_\sigma\neq 0$. From (2.5) it follows, that $\nabla^\perp H^\alpha=H_k^\alpha\omega^k$, where $H_k^\alpha=\frac{1}{m}\sum_i h_{iik}^\alpha$ and therefore

$$\nabla h_{ij}^H=\Big(\sum_\alpha H_k^\alpha h_{ij}^\alpha+\sum_\alpha H^\alpha h_{ijk}^\alpha\Big)\omega^k.$$

Writing it in canonical frame for A^H we obtain particularly

$$(\lambda_\varrho-\lambda_\sigma)\omega_{i_\varrho}^{j_\sigma}=\sum_\alpha H^\alpha h_{i_\varrho j_\sigma k}^\alpha\omega^k \quad (\varrho\neq\sigma). \tag{3.2}$$

Distribution of eigenspaces of A^H, corresponding to λ_ϱ, is determined by the differential system

$$\omega^{j_1}=\dots=\omega^{j_{\varrho-1}}=\omega^{j_{\varrho+1}}=\dots=\omega^{j_r}=0, \tag{3.3}$$

which is totally integrable, because

$$d\omega^{j_\sigma}=\omega^{i_\varrho}\wedge\omega_{i_\varrho}^{j_\sigma}+\sum_{\tau\neq\varrho}\omega^{i_\tau}\wedge\omega_{i_\tau}^{j_\sigma} \quad (\varrho\neq\sigma)$$

become zero due to (3.2) as an algebraic consequence of the system. Thus the distribution, determined by (3.3), is a foliation Δ_ϱ on $\mathcal{U}^m$ $(\varrho = 1, \dots, r)$.

As A^H is symmetric and (3.1) hold, we have $\langle \Delta_\varrho, \Delta_\sigma \rangle = 0$, $\alpha_2(\Delta_\varrho, \Delta_\sigma) = 0$ $(\varrho \neq \sigma)$; the first part of the theorem is proved.

The same identities are satisfied also for direct sums $\Delta'_1, \dots, \Delta'_s$, so that

$$\langle \Delta'_\varphi, \Delta'_\psi \rangle = 0, \quad \alpha_2(\Delta'_\varphi, \Delta'_\psi) = 0 \quad (\varphi \neq \psi). \tag{3.4}$$

From (2.13), writing it in canonical frame for α_2^H, we deduce $(\lambda_\sigma - \lambda_\varrho)\Omega_{i_\varrho}^{j_\sigma} = 0$ $(\varrho \neq \sigma)$ and therefore

$$\Omega_{i_\varrho}^{j_\sigma} = -\sum_\alpha h^\alpha_{i_\varrho[k} h^\alpha_{l]j_\sigma} \omega^k \wedge \omega^l = 0 \quad (\varrho \neq \sigma).$$

Together with (3.1) it gives $\langle e_{i_\varrho k_\varrho}, e_{j_\sigma l_\sigma} \rangle = 0$ $(\varrho \neq \sigma)$, where $e_{ik} = h^\alpha_{ik} e_\alpha$; consequently

$$\langle e_{i'_\varphi k'_\varphi}, e_{j'_\psi l'_\psi} \rangle = 0 \quad (\varphi \neq \psi). \tag{3.5}$$

If every Δ'_φ is parallel in ∇, then $\omega_{i'_\varphi}^{j'_\psi} = 0$ $(\varphi \neq \psi)$. Now from (2.5), (2.6) and (3.1) it follows that among h^α_{ijk} only $h^\alpha_{i'_\varphi j'_\varphi k'_\varphi}$ $(\varphi = 1, \dots, s)$ can be nonzero and denoting $e_{ijk} = h^\alpha_{ijk} e_\alpha$ we deduce from (3.5) by differentation that

$$\langle e_{i'_\varphi k'_\varphi p'_\varphi}, e_{j'_\psi l'_\psi} \rangle = 0 \quad (\varphi \neq \psi). \tag{3.6}$$

For semi-symmetric M^m in E^n we have $\bar\nabla h^\alpha_{ijk} = h^\alpha_{ijkl}\omega^l$ with symmetric h^α_{ijkl}. It follows that among h^α_{ijkl} only $h^\alpha_{i'_\varphi j'_\varphi k'_\varphi l'_\varphi}$ $(\varphi = 1, \dots, s)$ can be nonzero and for $e_{ijkl} = h^\alpha_{ijkl} e_\alpha$ we deduce now from (3.6) that

$$\langle e_{i'_\varphi k'_\varphi p'_\varphi q'_\varphi}, e_{j'_\psi l'_\psi} \rangle = 0, \quad \langle e_{i'_\varphi k'_\varphi p'_\varphi}, e_{j'_\psi l'_\psi q'_\psi} \rangle = 0 \quad (\varphi \neq \psi).$$

Repeating this procedure we obtain in general

$$\langle e_{i'_\varphi \dots u'_\varphi}, e_{j'_\psi \dots v'_\psi} \rangle = 0 \quad (\varphi \neq \psi) \tag{3.7}$$

for every admissible choice of indices; it can be proved by induction. The procedure terminates if all vectors $e_{i'_\varphi \dots u'_\varphi}$ with $p+1$ indices are contained in the linear hull of vectors with $2, 3, \dots, p$ indices. Such a p exists because E^n has a finite dimension.

From (2.1), (2.4), (2.5) and from differential prolongation of the latter formulas it follows, that

$$\nabla e_{i'_\varphi} = e_{i'_\varphi j'_\varphi} \omega^{j'_\varphi},$$

$$\nabla e_{i'_\varphi j'_\varphi} = \sum_{l'_\varphi} e_{l'_\varphi} \langle e_{i'_\varphi j'_\varphi}, e_{k'_\varphi l'_\varphi} \rangle \omega^{k'_\varphi} + e_{i'_\varphi j'_\varphi k'_\varphi} \omega^{k'_\varphi},$$

$$\text{-----------------------------------}$$

$$\nabla e_{i'_\varphi \dots u'_\varphi} = \sum_{l'_\varphi} e_{l'_\varphi} \langle e_{i'_\varphi \dots u'_\varphi}, e_{p'_\varphi l'_\varphi} \rangle \omega^{p'_\varphi} + e_{i'_\varphi \dots u'_\varphi p'_\varphi} \omega^{p'_\varphi},$$

where $\nabla e_{i_\varphi} = de_{i_\varphi} - e_{j_\varphi}\omega^{j_\varphi}_{i_\varphi}$, $\nabla e_{i_\varphi j_\varphi} = de_{i_\varphi j_\varphi} - e_{k_\varphi j_\varphi}\omega^{k_\varphi}_{i_\varphi} - e_{i_\varphi k_\varphi}\omega^{k_\varphi}_{j_\varphi}$ and so on; here $\nabla e_{i_\varphi \dots u_\varphi}$ must have p indices. It is seen that a lief $\mathcal{U}^{m_\varphi}$ of the foliation Δ'_φ containing $x \in \mathcal{U}^m$ lies around x in a subspace E^{n_φ}, which is determined by x and the linear hull of vectors $e_{i_\varphi}, e_{i_\varphi j_\varphi}, \dots, e_{i_\varphi \dots u_\varphi}$ and that this hull is invariant on $\mathcal{U}^m$. Two such distinct subspaces E^{n_φ} and E^{n_ψ} $(\varphi \neq \psi)$ are totally orthogonal due to (3.4), (3.5), (3.6) and (3.7). Therefore around x the submanifold M^m in E^n locally coincides with the product of submanifolds $\mathcal{U}^{m_\varphi}$ in E^{n_φ} which are semi-symmetric in view of Lemma 5. Theorem is proved.

Remark 1. The first part of Theorem 1 is a consequense from corresponding results of [14]. Here we preferred to give its direct proof.

Remark 2. In case the open part $\mathcal{U}^m$ is complete and simply connected the de Rham decomposition theorem and the fundamental lemma of [5] can be applied and a global statement, that $\mathcal{U}^m$ is a product of leaves $\mathcal{U}^{m_\varphi}$ in E^{n_φ}, can be deduced. For our purpose the local version, given above, is more appropriate.

4. The second decomposition theorem. For a special case the next extension of the Theorem 1 is valid.

Theorem 2. Let M^m, $\mathcal{U}^m$ and $\Delta'_1, \dots, \Delta'_s$ be as in Theorem 1 and let $\lambda_r = 0$, $\Delta'_s = \Delta_r$. Suppose there is an orthogonal direct decomposition $\Delta'_s = \Delta^{(1)}_s \oplus \dots \oplus \Delta^{(s)}_s$, so that $\Delta^*_1, \dots, \Delta^*_s$ are parallel in the Levi-Civita connection ∇ on M^m, where $\Delta^*_\chi = \Delta'_\chi \oplus \Delta^{(\chi)}_s$, if $1 \leqslant \chi \leqslant s-1$ and $\Delta^*_s = \Delta^{(s)}_s$ (the possibility, that some of $\Delta^{(\varphi)}_s$, $1 \leqslant \varphi \leqslant s$, are $\{0\}$, is not excluded). Then around every point of $\mathcal{U}^m$ the submanifold M^m in E^n coincides with a product of semi-symmetric submanifolds, which are the leaves of distributions $\Delta^*_1, \dots, \Delta^*_s$. Here the leaves of $\Delta^*_s = \Delta^{(s)}_s$ are parallel planes in E^n.

Proof. The assumption that the restriction of α_2 on Δ'_s is zero (it follows from $\lambda_r = 0$) gives together with $\alpha_2(\Delta'_\varphi, \Delta'_\psi) = 0$ $(\varphi \neq \psi)$ that $\alpha_2(\Delta^*_\varphi, \Delta^*_\psi) = 0$ $(\varphi \neq \psi)$ due to the bilinearity of α_2. Similarly the orthogonality of decomposition $\Delta_s = \Delta^{(1)}_s \oplus \dots \oplus \Delta^{(s)}_s$ leads to $\langle \Delta^*_\varphi, \Delta^*_\psi \rangle = 0$ $(\varphi \neq \psi)$.

As well as in proof of Theorem 1 we have $\Omega^{j_\sigma}_{i_\rho} = 0$ $(\rho \neq \sigma)$. Besides (2.8) and (3.1) give

$$\Omega^{j_s}_{i_s} = -\sum_\alpha h^\alpha_{i_s[k_s} h^\alpha_{l_s]j_s} \omega^{k_s} \wedge \omega^{l_s} = 0$$

because $h^{\alpha}_{i_s k_s} = 0$. Therefore $\Omega^{j^*_\varphi}_{i^*_\psi} = 0$ and this together with $h^{\alpha}_{i^*_\varphi k^*_\psi} = 0 \ (\varphi \neq \psi)$ implies

$$\langle e_{i^*_\varphi k^*_\varphi}, e_{j^*_\psi \ell^*_\psi} \rangle = 0 \ (\varphi \neq \psi).$$

In the following we have to repeat the final part of proof of Theorem 13, where instead of Δ'_φ now are Δ^*_φ, $1 \leq \varphi \leq s$.

For $\Delta'_s = \Delta_\tau$ we have $h^{\alpha}_{i_s k_s} = 0$ because $\lambda_\tau = 0$. The parallelity of $\Delta^*_s = \Delta^{(s)}_s$ gives us $\omega^{k}_{i^*_s} = 0$, if $k \neq k^*_s$, where $i^*_s, k^*_s = m - m^*_s + 1, \dots, m$; $m^*_s = \dim \Delta^*_s$. Therefore on leaves of Δ^*_s we have from (2.1) that

$$dx = e_{i^*_s} \omega^{i^*_s}, \quad de_{i^*_s} = e_{k^*_s} \omega^{k^*_s}_{i^*_s},$$

i.e. these leaves are parallel m^*_s-planes. Theorem is proved.

Note that decomposition theorems have valuable applications to the classification problems of semi-symmetric submanifolds, as can be seen from the next publications.

References

1. B a c k e s E. Geometric applications of euclidean Jordan triple systems// Manuscr. Math. 1983. V. 42. P. 265-272.
2. D e p r e z J. Semi-parallel surfaces in Euclidean space.// J. of Geometry. 1985. V. 25. P. 192-200.
3. F e r u s D. Symmetric submanifolds of Euclidean space.// Math. Ann. 1980. B. 247. S. 81-93.
4. L u m i s t e Ü. Decomposition and classification theorems for semi-symmetric immersions.// Eesti NSV TA Toimetised. Füüs. Matem. 1987 K. 36. L.414-417.
5. M o o r e J. D. Isometric immersions of Riemannian products.// J. Differ. Geometry. 1971. V. 5. P. 159-168.
6. N o m i z u K. On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor.// Tôhoku Math. J. 1968. V. 20. P. 46-59.
7. S z a b ó Z. I. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y) \cdot R = 0$. I. The local version. // J. Differ. Geometry. 1982. V. 17. P. 531-582.
8. T a k a g i H. An example of Riemannian manifold satisfying $R(X,Y) \cdot R = 0$ but not $\nabla R = 0$ .// Tohoku Math. J. 1972. V. 24. P. 105-108.

9. Кайгородов В. Р. Структура кривизны пространства-времени.// Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Пробл. геометрии. 1983. Т. 14. С. 177-204.
10. Ковалев П. И. Тройные системы Ли и пространства аффинной связности.// Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 1. С. 107-112.
11. Лумисте Ю. Г. Приводимость подмногообразия с параллельной третьей фундаментальной формой. // Изв. ВУЗов. Матем. 1987, № 11. С. 1-10.
12. Лумисте Ю. Г. Неприводимые подмногообразия малых размерностей с параллельной третьей фундаментальной формой.// Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1986. Вып. 734. С. 50-62.
13. Лумисте Ю. Г. Подмногообразия с плоской связностью ван дер Вардена - Бортолотти и параллельность третьей фундаментальной формы.// Изв. ВУЗов. Матем. 1987. № 1. С. 18-27.
14. Мирзоян В. А. Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем.// Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. Пробл. геометрии. 1983. Т. 14. С. 73-100.
15. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука. 1979.

Поступило
25 IX 1987

РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

Ю.Лумисте

Резюме

Подмногообразие M^m в E^n называется полусимметрическим, если $\bar{R}(X,Y)h=0$, где $\bar{R}$ — кривизна связности ван дер Вардена - Бортолотти и h — вторая основная форма. Частными случаями являются M^m с параллельной h или с параллельной $\bar{\nabla}h$, а также M^m с плоской $\bar{\nabla}$, т.е. с $\bar{R}(X,Y)=0$. Говорят, что M^m в E^n является произведением подмногообразий M^{m_ρ} в E^{n_ρ} $(\rho=1,\dots,r)$, если 1) $M^m = M^{m_1}\times\dots\times M^{m_r}$, 2) $E^n=E^{n_1}\times\dots\times E^{n_r}$ и 3) любые два E^{n_ρ} и E^{n_σ} $(\rho\neq\sigma,\ 1\leq\rho\leq r,\ 1\leq\sigma\leq r)$ вполне ортогональны.

Доказываются две теоремы, которые дают достаточные условия, чтобы полусимметрическое подмногообразие M^m в E^n разлагалось в произведение подмногообразий меньших размерностей, которые при этом также являются полусимметрическими. В наиболее простом случае эти условия требуют параллельность на M^m собственных слоений второго основного тензора A^H относительно вектора средней кривизны.

TRÜ Toimetised
803 (1988), 79-94

Уч. зап. Тартуск. ун-та.
1988, 803, 79-94

CLASSIFICATION OF TWO-CODIMENSIONAL SEMI-SYMMETRIC SUBMANIFOLDS

Ü.Lumiste
Department of Algebra and Geometry

1. Introduction. A submanifold M^m in a euclidean E^n is called semisymmetric [5], [6] (or semi-parallel; see [2]), if $\bar{R}(X,Y)h=0$, where $\bar{R}$ is the curvature tensor of the van der Waerden - Bortolotti connection $\bar{\nabla}$ and h is the second fundamental form. This condition is equivalent to the symmetricity condition of $\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y h$ with respect to X and Y due to the generalized Ricci identity. intrinsically it is a semi-symmetric Riemannian space in the sense of [10], Ch. II, § 3. If we consider $\bar{\nabla}h$ as the third fundamental form (trilinear form, symmetric due to the Codazzi equation, with values in the normal bundle) and introduce submanifolds with parallel $\bar{\nabla}h$ satisfying $\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y h = 0$, then we get a subclass in the class of all semi-symmetric M^m in E^n. This subclass contains all M^m with parallel h, which are characterized by $\bar{\nabla}h=0$ and called symmetric M^m in E^n [3]; intrinsically they are locally symmetric Riemannian spaces.

On the other hand, it is obvious that all submanifolds with flat van der Waerden - Bortolotti connection $\bar{\nabla}$ are semi-symmetric, because $\bar{R}(X,Y)=0$ for them.

Semi-symmetric surfaces $(m=2)$ in E^n are classified by J.Deprez who proved the next theorem.

Theorem 1 (J.Deprez [2]). A surface M^2 in E^n is semi-symmetric, iff it locally coincides with (i) a sphere S^2 or (ii) has flat $\bar{\nabla}$, or (iii) is an isotropic M^2 in $E^n (n \geqslant m+3)$ with $H^2=3K$, where H is the mean curvature vector and K is the Gaussian curvature.

The surfaces M^2 with parallel $\bar{\nabla}h$ in E^n are classified independently in [7], see also [9].

Theorem 2 (see [7]). A surface M^2 in E^n has a parallel $\bar\nabla h$ iff it locally coincides with one from the following list:

plane E^2, sphere $S^2(r)$, cylinder $S^1(r)\times E^1$, Clifford torus $S^1(r)\times S^1(r')$, Veronese surface $V^2\subset S^4(r)\subset E^5$ (these have $\bar\nabla h=0$)

products: $C^1(a)\times E^1$, $C^1(a)\times S^1(r)$, $C^1(a)\times C^1(a')$, where $C^1(a)$ is the plane Cornu spiral (or clothoid; a is the constant ratio of the curvature and natural parameter):

products: $C^1_S(a,r)\times E^1$, $C^1_S(a,r)\times S^1(r')$, $C^1_S(a,r)\times C^1(a')$, $C^1_S(a,r)\times C^1_S(a',r')$, where $C^1_S(a,r)$ is the spherical Cornu spiral on the $S^2(r)$;

surface $B^2(c,r)\subset S^3(r)$, generated by spherical binormals of a twisted spherical clothoid (i.e. of a line in $S^3(r)$ with geodesic first curvature $k_g = cs$ and geodesic second curvature $\varkappa_g=\pm\frac{1}{r}$).

Note, that the Veronese surface belongs to the class (iii), all other surfaces listed here, except $S^2(r)$ belong to the class (ii).

In the following all semi-symmetric submanifolds M^m in E^{m+2} (i.e. with codimension $\leqslant 2$) will be classified and all submanifolds with parallel $\bar\nabla h$ will be found out among them. Particularly all semi-symmetric hypersurfaces $(n=m+1)$ will be described.

Note that among all submanifolds with parallel $\bar\nabla h$ the hypersurfaces are listed in [7] .

2. Preliminaries. We use the apparatus developed in our previous paper [6]. If we associate the orthonormal frame $\{x,e_i,e_\alpha\}$ in E^{m+2} to the submanifold M^m, then in

$$dx=\omega^J e_J\,,\quad de_J=\omega_J^K e_K\,,\quad \omega_J^K+\omega_K^J=0 \qquad (2.1)$$

we have $\omega^\alpha=0$, $\omega_i^\alpha=h^\alpha_{ij}\omega^j$, $h^\alpha_{ij}=h^\alpha_{ji}$ and get the curvature 2-forms of the Levi-Civita connection ∇ :

$$\Omega_i^j=d\omega_i^j-\omega_i^k\wedge\omega_k^j=-\sum_\alpha h^\alpha_{i[k}h^\alpha_{\ell]j}\,\omega^k\wedge\omega^\ell \qquad (2.2)$$

and of the normal connection

$$\Omega_\alpha^\beta=d\omega_\alpha^\beta-\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta=-\sum_i h^\alpha_{i[k}h^\beta_{\ell]i}\,\omega^k\wedge\omega^\ell. \qquad (2.3)$$

The semi-symmetric is characterized by

$$h^\alpha_{kj}\Omega_i^k+h^\alpha_{ik}\Omega_j^k-h^\beta_{ij}\Omega_\beta^\alpha=0 \qquad (2.4)$$

and M^m with parallel $\bar\nabla h$ by

$$\overline{\nabla} h^{\alpha}_{ij} = h^{\alpha}_{ijk}\omega^{k}, \quad \overline{\nabla} h^{\alpha}_{ijk} = 0, \tag{2.5}$$

where $\overline{\nabla}$ is the covariant differential operator of the van der Waerden - Bortolotti connection.

Taking $i=j$ in (2.4) and summing over $1,\dots,m$ we obtain, due to $\Omega^{j}_{i} + \Omega^{i}_{j} = 0$ that

$$H^{\beta}\Omega^{\alpha}_{\beta} = 0 \tag{2.6}$$

Lemma 1. A two-codimensional semi-symmetric submanifold M^m in E^{m+2} has flat normal connection $\nabla^{\perp}$.

Proof. From (2.6) due to $\Omega^{\beta}_{\alpha} + \Omega^{\alpha}_{\beta} = 0$ it follows that

$$H^{m+2}\Omega^{m+1}_{m+2} = 0, \quad H^{m+1}\Omega^{m+2}_{m+1} = 0.$$

If $H \neq 0$, then $\Omega^{\beta}_{\alpha} = 0$; if $H=0$ then the result (Theorem 2(iii)) of [1] gives for semisymmetric M^m that $h=0$ and therefore $\Omega^{\beta}_{\alpha} = 0$, too. Lemma is proved.

It follows due to (2.3) that for two-codimensional semi-symmetric submanifold two matrices $\| h^{\alpha}_{ij} \|$, where $\alpha = m+1$ or $\alpha = m+2$, commute and they are simultaneously diagonalizable by orthogonal transformation. Thus a frame exists in each $T_x M^m$ so that

$$h^{\alpha}_{ij} = k^{\alpha}_{i}\delta_{ij}. \tag{2.7}$$

The vectors $k_i = k^{\alpha}_{i} e_{\alpha}$ are called principal curvature vectors.

Note that (2.7) holds submanifold M^m in E^n with flat normal connection $\nabla^{\perp}$ in a suitable frame field.

Lemma 2. A submanifold M^m in E^n with a flat normal connection is semi-symmetric iff its every two different principal curvature vectors are orthogonal.

Proof. From (2.2) and (2.7) it follows that

$$\Omega^{j}_{i} = -\langle k_i, k_j \rangle \omega^{i} \wedge \omega^{j} \tag{2.8}$$

and now (2.4) is equivalent with $(k_i - k_j)\langle k_i, k_j \rangle = 0$.

Lemmas 1 and 2 together yield the next consequence.

Proposition 1. A semi-symmetric submanifold M^m in E^{m+2} has principal curvature vectors, for which only the following possibilities can occur:

$$A_{(p)}: \quad k_1 = \dots = k_p = k \neq 0, \quad k_{p+1} = \dots = k_m = 0, \quad 0 \leq p \leq m,$$

$$B_{(p,q)}: \quad k_1 = \dots = k_p = k_{I} \neq 0, \quad k_{p+1} = \dots = k_{p+q} = k_{II} \neq 0,$$

$$k_{I} \perp k_{II}, \quad k_{p+q+1} = \dots = k_m = 0, \quad pq \neq 0, \quad 2 \leq p+q \leq m.$$

1 ,

The problem is to give a geometrical description of the submanifold M^m for all these cases. For this the concept of type number or rank of a submanifold M^m is needed.

The second fundamental form $\alpha_2 : (X,Y) \to \alpha_2(X,Y) = h^\alpha_{ij} X^i Y^j e_\alpha$ defines $n-m$ symmetric endomorphisms $A^\alpha : X \to A^\alpha(X) = \sum h^\alpha_{ij} X^j e_\alpha$. The type number of a submanifold M^m in E^n is the maximal integer r, for which there exist r vectors $X_1, \ldots, X_r$, so that $(n-m)r$ vectors $A^\alpha(X_\rho)$ are linearly independent (see [4], Remark 17). This r, which is at the same time the rank of the system of 1-forms $\omega^\alpha_i = h^\alpha_{ij}\omega^j$, is in [11] called the rank of the submanifold M^m in E^n. It is shown in [11] that the open part $\mathcal{U}^m$ of M^m, on which rank r is constant, has the next property: the set of tangent planes $E^m_x = [x, T_x(\mathcal{U}^m)]$ in all points $x \in \mathcal{U}^m$ is a r-dimensional submanifold in the Grassmannian manifold $G(m, n-m)$. If $r < m$, then inmersed $\mathcal{U}^m$ is generated by the open parts of $(m-r)$-dimensional planes and E^m_x is the same for all points x of an arbitrary fixed generator, i.e. these generators are characteristic for $\{E^m_x : x \in \mathcal{U}^m\}$.

3. Subclass $A_{(p)}$ The case $A_{(0)}$ is, of course, the case of m-plane E^m in E^{m+2}. In the case $A_{(m)}$ every point of M^m is totally umbilical and therefore we have a sphere $S^m(r)$.

Proposition 2. A submanifold M^m in E^{m+2} is semi-symmetric of type $A_{(1)}$ iff it has rank 1.

Proof. For semi-symmetric M^m in E^{m+2} of type $A_{(1)}$ we have

$$\omega^\alpha_1 = k^\alpha \omega^1, \quad \omega^\alpha_u = 0 \ (u = 2, \ldots, m), \quad k \neq 0$$

Therefore the rank is 1.

Conversely, if M^m in E^{m+2} has rank 1, then frame vectors $e_2, \ldots, e_m$ can be directed in the characteristic and we have $\omega^\alpha_1 = h^\alpha_{11}\omega^1$, $\omega^\alpha_u = 0$, $h^\alpha_{11} e_\alpha \neq 0$.

Thus M^m is semi-symmetric due to Lemma 2 and corresponds to the case $A_{(1)}$.

Note that every submanifold M^m in E^n of rank 1 is semi-symmetric. Really, the second part of the previous proof is valid also in a more general case of E^n instead of E^{m+2}

Proposition 3. A submanifold M^m in E^{m+2} is semi-symmetric of type $A_{(p)}$, $1 < p < m$, iff it is either

(i) a product of a round conic hypersurface C^{p+1} of rank p in a E^{p+2} and a plane E^{m-p-1}, orthogonal to E^{p+2}, i.e. M^m is a right cylinder on some regular part of C^{p+1} in $E^{m+1} \subset E^{m+2}$, or

(ii) its limit case, when instead of round cone C^{p+1} we have right cylinder $S^p \times E^1$, i.e. M^m is a right cylinder on S^p in $E^{m+1} \subset E^{m+2}$ or its open part.

Proof. For M^m of type $A_{(p)}$ it follows, that

$$\omega_a^\alpha = k^\alpha \omega^a, \quad \omega_u^\alpha = 0, \tag{3.1}$$

where $a = 1, \ldots, p$; $u = p+1, \ldots, m$.

By exterior differentiation from (4.1) it follows that

$$(dk^\alpha + k^\beta \omega_\beta^\alpha) \wedge \omega^a - k^\alpha \omega_u^a \wedge \omega^u = 0, \quad \omega_a^u \wedge \omega^a = 0.$$

This implies due to the Cartan lemma and $p > 1$ that

$$dk^\alpha + k^\beta(\omega_\beta^\alpha + \delta_\beta^\alpha \lambda_u \omega^u) = 0, \quad \omega_u^a = \lambda_u \omega^a. \tag{3.2}$$

The same procedure gives now

$$d\lambda_u = \lambda_v (\omega_u^v - \lambda_u \omega^v). \tag{3.3}$$

Differential system $\omega^\alpha = 0$, (3.1), (3.2) and (3.3) is totally integrable.

From (3.2) it follows, that vector $k = k^\alpha e_\alpha$ is invariant in every point $x \in M^m$ because

$$dk = -k^2 \omega^a e_a + (\lambda_u \omega^u) k.$$

The frame part in $T_x^\perp(M^m)$ can be restricted so that $e_{m+1} \| k$. Then $k^{m+1} \neq 0$, $k^{m+2} = 0$, $\omega_a^{m+2} = 0$ and $\omega_{m+1}^{m+2} = 0$ due to (3.2). Now $de_{m+2} = 0$ and therefore M^m lies in a hyperplane E^{m+1} with normal vector e_{m+2}.

From (3.3) it follows that vector $l = \sum_u \lambda_u e_u$ is invariant in every point $x \in M^m$ because

$$dl = l^2 \omega^a e_a + (\lambda_u \omega^u) l.$$

(i) Let $l \neq 0$. The frame part in $T_x(M^m)$ can be restricted so that $e_{p+1} \| l$. Then $\lambda_{p+1} \neq 0$, $\lambda_{u_1} = 0$; $u_1 = p+2, \ldots, m$ and therefore, due to (3.2) and (3.3),

$$\omega_{u_1}^a = 0, \quad \omega_{u_1}^{p+1} = 0, \tag{3.4}$$

Next we need decomposition theorems of [6]. From (3.1) it follows that $H^\alpha = \frac{1}{m} k^\alpha$ and therefore $h_{ab}^H = \frac{1}{m} k^2 \delta_{ab}$, $h_{au}^H = h_{uv}^H = 0$. Thus in the first decomposition theorem we have $r = 2$, Δ_1 is spanned on $e_1, \ldots, e_p$ and Δ_2, on which h vanish, is spanned on $e_{p+1}, \ldots, e_m$. Decomposing $\Delta_2 = \Delta_2^{(1)} \oplus \Delta_2^{(2)}$ where $\Delta_2^{(1)}$ is spanned on e_{p+1} and $\Delta_2^{(2)}$

on $e_{p+2},\dots,e_m$, we see from (3.4) that $\Delta_1^* = \Delta_1 \oplus \Delta_2^{(1)}$ and $\Delta_2^* = \Delta_2^{(2)}$ are parallel in the Levi-Civita connection ∇ on M^m. Due to the second decomposition theorem M^m is the product of the leaves of Δ_1^* and $\Delta_2^{(2)}$. Obviously, the leaves of $\Delta_2^{(2)}$ are parallel planes, due to (3.4).

It remains to describe the leaf of Δ_1^* For it

$$dx = \omega^a e_a + \omega^{p+1} e_{p+1},\; de_a = \omega_a^\ell e_\ell - \lambda_{p+1}\omega^a e_{p+1} + k^{m+1}\omega^a e_{m+1}, \quad (3.5)$$

$$de_{p+1} = \lambda_{p+1}\omega^a e_a, \quad de_{m+1} = -k^{m+1}\omega^a e_a, \quad (3.6)$$

therefore $d(x - \lambda_{p+1}^{-1} e_{p+1}) = 0$, i.e. there is a fixed point Q with radius vector $x - \lambda_{p+1}^{-1} e_{p+1}$; the leaf consists of straight lines, passing through Q and consequently is a cone. Orthogonal section of generators of the cone, i.e. the maximal integral manifold of $\omega^{p+1} = 0$ is a totally umbilical submanifold and therefore a part of a sphere S^p. Thus the leaf is a part of a round hypercone C^{p+1} (i.e. hypercone of revolution) of rank p with vertex Q.

(ii) The case $\ell = 0$ can be considered as limit to the previous case, when $\ell \to 0$, i.e. $\lambda_{p+1} \to 0$. Then the vertex of the cone C^{p+1} goes to infinity and C^{p+1} tends to $S^p(r) \times \times E^1$.

Conversely, for a round hypercone C^{p+1} in E^{p+2}, if we denote the abscissa of a point $x \in C^{p+1}$ on the generator (with origin in vertex) by λ_{p+1}^{-1} and the lenght of normal interval from x to axis by k^{-1}, we have (3.5) and (3.6). Therefore conditions $A_{(p)}$ are satisfied. It follows that the product $C^{p+1} \times E^{m-p-1}$ in E^{m+1} is semi-symmetric (see Lemma 2 and [6], Lemma 5).

The same holds for $S^p \times E^{m-p}$ in E^{m+1}. Proposition 3 is proved.

4. Subclass $B_{(p,q)}$. We start with the case $p = q = 1$.

Proposition 4. A submanifold M^m in E^{m+2} is semi-symmetric of type $B_{(1,1)}$ iff it is a M^m of rank 2 with flat van der Waerden - Bortolotti connection $\bar\nabla$.

Proof. In the case $B_{(1,1)}$ 1-forms $\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j$ are the following:

$$\omega_1^\alpha = k_1^\alpha \omega^1, \quad \omega_2^\alpha = k_2^\alpha \omega^2, \quad \omega_u^\alpha = 0; \quad u = 3,\dots,m, \quad (4.1)$$

where

$$k_1 = k_1^\alpha e_\alpha \neq 0, \quad k_2 = k_2^\alpha e_\alpha, \quad k_1 \perp k_2; \quad (4.2)$$

Now the necessity follows from definition of the rank, from Lemma 1 and (2.8).

Conversely, let M^m in E^n have rank 2. Directing frame vectors $e_3, \dots, e_m$ in characteristic we have

$$\omega_a^\alpha = h_{ab}^\alpha \omega^b, \quad \omega_u^\alpha = 0 \; ; \; a, b = 1, 2 \; ; \; u = 3, \dots, m.$$

If $\bar{\nabla}$ is flat, then M^m is semi-symmetric. A transformation of frame $\{e_1, e_2\}$ exists, which gives (2.7): $h_{11}^\alpha = k_1^\alpha$, $h_{12}^\alpha = 0$, $h_{22}^\alpha = k_2^\alpha$ and now from (2.8) and $\Omega_i^j = 0$ it follows, that (4.1) and (4.2) hold, i.e. M^m in E^{m+2} is of type $B_{(1,1)}$.

Note that from our result ([8], Theorem A) it follows that immersed M^m in the situation of Proposition 4 consits of $(m-2)$-planes in E^{m+2} passing through the points of a M^2 with flat $\bar{\nabla}$ in direction of a field of normal $(m-2)$-subspaces, parallel on M^2 in the normal connection $\nabla^\perp$.

Before proceeding to the case $p>1$, $q=1$ we need some preparations.

Let a one-parameter family of spheres S^m with an envelope $\tilde{S}^m$ be given in E^{m+2}. If in every point $x \in \tilde{S}^m$ the orthogonal trajectory of the family of characteristic spheres S^{m-1} has the property, that its principal (or 1-st) normal is orthogonal to the hyperplane E^{m+1} of the family sphere S^m, passing through x, then we say that the envelope $\tilde{S}^m$ is of orthogonal type.

More general, suppose we have in E^{m+2} a one-parameter family of semisymmetric submanifolds M^m of type $A_{(p+1)}$ in hyperplanes (i.e. of $S^{p+1} \times E^{m-p-1}$ or $C^{p+2} \times E^{m-p-2}$, due to Proposition 3). Let this family have an envelope $\tilde{M}^m$ consisting of characteristic cylinders $S^p \times E^{m-p-1}$ or $C^{p+1} \times E^{m-p-2}$. If in every point $x \in \tilde{M}^m$ the orthogonal trajectory of the family of these characteristics on $\tilde{M}^m$ has the property, that the $(m-p)$-plane, spanned on the generating $(m-p-1)$-plane of the characteristic and on the principal normal of the trajectory, is orthogonal to the hyperplane of the family submanifold M^m, then we say that the envelope $\tilde{M}^m$ is of orthogonal type.

Proposition 5. A m-dimensional submanifold in E^{m+2} is semi-symmetric of type $B_{(p,1)}$, $1<p<m$, iff it is a regular part of an envelope of orthogonal type of a one-parameter family of semisymmetric submanifolds M^m of type $A_{(p+1)}$.

Proof. Having in E^{m+2} a m-dimensional semi-symmetric submanifold of type $B_{(p,1)}$ and taking and collinear to k_I and k_{II} respectively, we obtain the next equations:

$$\omega^\alpha=0,\ \omega_a^{m+1}=\varkappa_I\omega^a,\ \omega_a^{m+2}=\omega_{p+1}^{m+1}=0,\ \omega_{p+1}^{m+2}=\varkappa_{II}\omega^{p+1},\ \omega_u^\alpha=0, \quad (4.3)$$

where $\varkappa_I\neq 0$, $\varkappa_{II}\neq 0$; $a=1,\dots,p$; $u=p+2,\dots,m$; $\alpha=m+1,m+2$.

The last equations (4.3) give by exterior differentiation

$$\sum\omega_u^a\wedge\varkappa_I\omega^a=0,\qquad \omega_u^{p+1}\wedge\varkappa_{II}\omega^{p+1}=0$$

and hence by the Cartan lemma $\omega_u^a=\lambda_{uab}\omega^b$, $\omega_u^{p+1}=\nu_u\omega^{p+1}$, where $\lambda_{uab}=\lambda_{uba}$. From equations (4.3) containing $\varkappa_I$ and $\varkappa_{II}$ as coefficients we obtain

$$(\delta_{ab}d\varkappa_I+\varkappa_I\lambda_{uab}\omega^u)\wedge\omega^b+\varkappa_I\omega_a^{p+1}\wedge\omega^{p+1}=0,$$

$$\varkappa_{II}\omega_a^{p+1}\wedge\omega^a+(d\varkappa_{II}+\varkappa_{II}\nu_u\omega^u\wedge\omega^{p+1}=0$$

and hence

$$\delta_{ab}d\varkappa_I+\varkappa_I\lambda_{uab}\omega^u=\psi_{abc}\omega^c-\varkappa_I\mu_{ab}\omega^{p+1},$$

$$\omega_a^{p+1}=-\mu_{ab}\omega^b+\varphi_a\omega^{p+1},$$

$$d\varkappa_{II}+\varkappa_{II}\nu_u\omega^u=\varkappa_{II}\varphi_a\omega^a+\varkappa_{II}\xi\omega^{p+1},$$

where ψ_{abc} and μ_{ab} are symmetric in all their indices.

Since $p>1$ we can take $a\neq b$ and then $\lambda_{uab}=\mu_{ab}=\psi_{abc}=0$ $(a\neq b)$. Taking $a=b$ we obtain

$$d\varkappa_I+\varkappa_I\lambda_{uaa}\omega^u=\psi_{aaa}\omega^a+\varkappa_I\mu_{aa}\omega^{p+1}$$

for all p values of index a. Therefore

$$d\ln\varkappa_I=-\mu\omega^{p+1}-\lambda_u\omega^u,$$

$$\omega_a^{p+1}=-\mu\omega^a+\varphi_a\omega^{p+1}$$

$$d\ln\varkappa_{II}=\varphi_a\omega^a+\xi\omega^{p+1}-\nu_u\omega^u$$

where $\mu=\mu_{11}=\dots=\mu_{pp}$, $\lambda_u=\lambda_{u11}=\dots=\lambda_{upp}$.

From the middle equations (4.3) it follows that

$$\varkappa_{II}\omega_a^{p+1}\wedge\omega^{p+1}+\varkappa_I\omega_{m+2}^{m+1}\wedge\omega^a=0,$$

$$\varkappa_I\omega_b^{p+1}\wedge\omega^b+\varkappa_{II}\omega_{m+2}^{m+1}\wedge\omega^{p+1}=0.$$

Here the last equation gives

$$\varkappa_{II}\omega_{m+2}^{m+1}-\varkappa_I\varphi_b\omega^b=\chi\omega^{p+1}$$

If we substitute it in the first p equations we have

$$\varkappa_{II}^2\mu+\varkappa_I\chi=0,\quad \varphi_b=0.$$

Consequently

$$d\ln æ_{I} = -\mu\omega^{p+1} - \lambda_u\omega^u \tag{4.4}$$

$$d\ln æ_{II} = \xi\omega^{p+1} - \nu_u\omega^u \tag{4.5}$$

$$\omega_a^{p+1} = -\mu\omega^a,\ \omega_u^a = \lambda_u\omega^a,\ \omega_u^{p+1} = \nu_u\omega^{p+1},\ \omega_{m+1}^{m+2} = \frac{æ_{II}}{æ_{I}}\mu\omega^{p+1}. \tag{4.6}$$

From the first and the last equations (4.6) it follows that

$$d\mu = -(\mu^2 + \sum\lambda_u\nu_u)\omega^{p+1} - \mu\lambda_u\omega^u. \tag{4.7}$$

The middle equations (4.6) give

$$d\lambda_u = \lambda_v(\omega_u^v - \lambda_u\omega^v) + \mu(\nu_u - \lambda_u)\omega^{p+1}, \tag{4.8}$$

$$d\nu_u = \nu_v(\omega_u^v - \nu_u\omega^v) + \psi_u\omega^{p+1}. \tag{4.9}$$

Now (4.4), (4.7) and (4.8) by exterior differentiation lead to identities, but (4.5) and (4.9) give $m-p$ covariants with secondary forms $d\xi$ and $d\psi_u$. Therefore semi-symmetric submanifolds of the type $B_{(p,1)}$ in E^{m+2} exist with arbitrarity of $m-p$ functions of one variable.

Let we go to the geometrical description and start with the case $p = m-1$. Then we do not have the index u, i.e. u takes the empty set of values, an for this submanifold of the type $B_{(m-1,1)}$ in E^{m+2} we have

$$dx = \omega^a e_a + \omega^m e_m, \tag{4.10}$$

$$de_a = \omega_a^b e_b + \omega^a(-\mu e_m + æ_I e_{m+1}), \tag{4.11}$$

$$de_m = \mu\omega^a e_a + æ_{II}\omega^m e_{m+2}. \tag{4.12}$$

It follows that each of maximal integral submanifolds of the totally integrable equation $\omega^m = 0$ is a sphere S^{m-1} (with curvature vector $-\mu e_m + æ_I e_{m+1}$) or its part.

If $\mu \neq 0$ then $d(x - \frac{1}{\mu}e_m) = -\frac{1}{\mu}æ_{II}\omega^m e_{m+2}$, i.e. along this sphere S^{m-1} the point with radius vector $x - \frac{1}{\mu}e_m$ is fixed. Therefore the tangent lines to our submanifold in all points of S^{m-1} generate a round cone with vertex in this fixed point and there is a sphere S^m with radius $æ_{II}^{-1}$ and centre on the axis of the cone (the centre has radius vector $x + æ_{II}^{-1}e_{m+2}$), which is tangent to the cone and also to the considered submanifold along S^{m-1}. If $\mu = 0$ then instead of the cone we have a round cylinder, but a sphere S^{m-1} with properties mentioned above exists as before, It follows that the submanifold is the envelope $\tilde{S}^m$ of one-parameter family of spheres S^m. Orthogonal trajectory of the family of characteristic spheres is an integral line of the system $\omega^a = 0$. From (4.10)—

(4.12) we see, that its principal normal has the direction of e_{m+2} and therefore in every point $x \in \tilde{S}^m$ is orthogonal to the hyperplane of the family sphere S^m, which is spanned on x and vectors $e_1, \dots, e_m$ and e_{m+1}. Thus the envelope $\tilde{S}^m$ is of orthogonal type.

Conversely, if we have in E^{m+2} such an envelope $\tilde{S}^m$ of orthogonal type, then $\tilde{S}^m$ consists of characteristics S^{m-1} of family spheres S^m. Specifying the frame so that $e_1, \dots, e_m$ are tangent to S^m and e_m normal to S^{m-1} we have $h^\alpha_{ab} = k^\alpha_I \delta_{ab}$, where $a, b = 1, \dots, m-1$; $\alpha = m+1, m+2$. Since tangents to $\tilde{S}^m$ along S^{m-1} generate a round cone there is a point with radius vector $x - \frac{1}{\mu} e_m$, which is fixed for a given S^{m-1}, i.e. $d(x - \frac{1}{\mu} e_m) = 0$ if $\omega^m = 0$. This gives that $\omega^a - \frac{1}{\mu}\omega^a_m = \lambda^a \omega^m$ and $h^\alpha_{a,m} = 0$. Denoting $k^\alpha_I e_\alpha = k_I$ and $h^\alpha_{mm} e_\alpha = k_{II}$ we obtain for orthogonal trajectory of the family of characteristic spheres S^{m-1} (i.e. for $\omega^a = 0$) that $dx = \omega^m e_m$, $de_m = \omega^m(\lambda^a e_a + k_{II})$. As the principal normal of the trajectory, having direction of $\lambda^a e_a + k_{II}$, is orthogonal to hyperplane of S^m, spanned on $x \in \tilde{S}^m$ and $e_1, \dots, e_m$ and k_I, we have $\lambda^a = 0$ and $\langle k_I, k_{II} \rangle = 0$. The last equality says that $\tilde{S}^m$ is semi-symmetric (see Lemma 2). So the proposition 5 is proved for type $B_{(m-1,1)}$.

Next let we describe semi-symmetric m-dimensional submanifold of the type $B_{(m-2,1)}$ in E^{m+2}, i.e. supposing $p = m-2$. Then u takes only one value $p+2 = m$. If we denote $\lambda_m = \lambda$ and $\nu_m = \nu$ we have

$$dx = \omega^a e_a + \omega^{p+1} e_{p+1} + \omega^m e_m, \tag{4.13}$$

$$de_a = \omega^b_a e_b + \omega^a(-\mu e_{p+1} - \lambda e_m + \varkappa_I e_{m+1}), \tag{4.14}$$

$$de_{p+1} = \mu\omega^a e_a + \omega^m(-\nu e_m + \varkappa_{II} e_{m+2}),$$

$$de_m = \lambda\omega^a e_a + \nu\omega^{p+1} e_{p+1}.$$

The equation $\omega^{p+1} = 0$ determines a foliation on the submanifold, the leaves of which are in the case $\lambda \neq 0$ the round cones C^{m-1}, as we see by comparison with (3.5) and (3.6); in the role of $k^{m+1} e_{m+1}$ in (3.5) we have now $-\mu e_{p+1} + \varkappa_I e_{m+1}$.

Let we consider tangent line to the submanifold, orthogonal to the submanifold, orthogonal to C^{m-1} (i.e. having the direction of e_{p+1}), along the parallel sphere S^{m-2}, determined by $\omega^m = 0$ on the leaf C^{m-1}. As in the previous part of the proof we get that all these tangent lines intersect in the point P with radius vector $x-\frac{1}{\mu}e_{p+1}$, if $\mu \neq 0$ or are parallel, if $\mu=0$. Therefore a sphere S^{m-1} exists, which is tangent to the submanifold along the sphere S^{m-2}. These spheres S^{m-1} for all parallel spheres S^{m-2} of a roun cone C^{m-1} generate a round cone C^m, which is tangent to the submanifold along C^{m-1}. It follows from the fact: points P for all these S^{m-2} lie on a straight line through the vertex Q of the cone C^{m-1}, as is easy to see. Thus the submanifold is the envelope $\tilde{C}^m$ of the one-parameter family of round cones C^m.

An orthogonal trajectory of the family of characteristic cones C^{m-1} is an integral curve of the system $\omega^a=0$, $\omega^m=0$ and along it we have

$$dx=\omega^{p+1}e_{p+1},\quad de_{p+1}=\omega^{p+1}(-\nu e_m+\varkappa_{\mathrm{II}}e_{m+2}).$$

So the principal normal of this curve has the direction of $-\nu e_m+\varkappa_{\mathrm{II}}e_{m+2}$.

The family cone C^m lies in the space E^{m+1} spanned on a point $x\in C^m$ and vectors $e_a, e_{p+1}, e_m, e_{m+1}$, where e_m goes in the direction of the generating straight line of C^m passing x Thus the considered submanifold the envelope $\tilde{C}^m$ of orthogonal type.

Conversely, if we have in E^{m+2} an envelope $\tilde{C}^m$ of orthogonal type, then $\tilde{C}^m$ consists of characteristics C^{m-1} of family cones C^m. Let we specify the frame so that its vectors $e_1,\dots,e_{m-2}$ are tangent to parallel sphere S^{m-2} of the cone C^{m-1}, the vector $e_{m-1}(=e_{p+1})$ is tangent to $\tilde{C}^m$ and orthogonal to C^{m-1} and e_m has the direction of the common generating straight line of the cones C^{m-1} and C^m.

Let λ^{-1} be the distance from x to the common vertex of the cones C^{m-1} and C^m. Then $d(x-\lambda^{-1}e_m)=0$ if $\omega^{p+1}=0$ and this gives that $\omega_m^{p+1}=\nu\omega^{p+1}$, $\omega_m^\alpha=h^\alpha_{m,p+1}\omega^{p+1}$, i.e. $h^\alpha_{ma}=h^\alpha_{mm}=0$, where $\alpha=m+1, m+2$. Due to the umbilicity of S^{m-2} we have $\omega_a^{p+1}=-\mu\omega^a$, $\omega_a^m=-\lambda\omega^a$, $\omega_a^\alpha=k_{\mathrm{I}}^\alpha\omega^a$. Now

$$de_{p+1}=\mu\omega^a e_a+\omega^{p+1}(-\nu e_m+k_{\mathrm{II}})+\omega^m h^\alpha_{m,p+1}e_\alpha$$

where we have denoted $h^\alpha_{p+1,p+1}e_\alpha=k_{\mathrm{II}}$. Here e_{p+1} lies on the common tangent m-plane of $\tilde{C}^m$ and family C^m and therefore the component of de_{p+1}, normal to $\tilde{C}^m$, must be zero if x moves along the generating straight

12

line. Therefore $h^{\alpha}_{m,p+1}=0$, thus $\tilde{C}^m$ has flat $\nabla^{\perp}$ and among its principal curvature vectors nonzero are k_{I} and k_{II}. Since $\tilde{C}^m$ is of orthogonal type, these k_I and k_{II} are orthogonal and due to Lemma 2 $\tilde{C}^m$ is semi-symmetric. So the proposition 5 is proved for the type $B_{(m-2,}$

It remains to consider the general case of m-dimensional semi-symmetric submanifold of the type $B_{(p,1)}$ in E^{m+2}. For this submanifold we have the equations (4.3)-(4.9). Now the equation $\omega^{p+1}=0$ determines a foliation on the submanifold, the leaves of which are semi-symmetric submanifolds M^{m-1} of type $A_{(p)}$ in hyperplanes, i.e. products $C^{p+1}\times E^{m-p-2}$ (or their limit cases $S^p\times E^{m-p-1}$). If we take in all points of a fixed parallel sphere S^p of a cone C^{p+1} the tangent straight lines to our submanifold, orthogonal to this M^{m-1}, then we see that they intersect in a fixed point P with radius vector $x-\frac{1}{\mu}e_{p+1}$ (or are parallel, if $\mu=0$). Therefore a sphere S^{p+1} exists, which is tangent to the submanifold along the sphere S^p. These spheres S^{p+1} for all parallel spheres S^p of every fixed round cone C^{p+1} generate a round cone C^{p+2}, which is tangent to the submanifold along C^{p+1}. Thus the submanifold is the envelope $\tilde{M}^m$ of the one-parameter family of semi-symmetric submanifolds M^m of type $A_{(p+1)}$ in E^{m+2}.

An orthogonal trajectory of the family of characteristic submanifolds M^{m-1} is an integral curve of the system $\omega^a=0$, $\omega^{\alpha}=0$ and along it we have

$$dx=\omega^{p+1}e_{p+1},\quad de_{p+1}=\omega^{p+1}\left(-\sum_u \varkappa_u e_u+\varkappa_{II}e_{m+2}\right).$$

So its principal normal lies in the $(m-p)$-plane, spanned on generating $(m-p-1)$-plane of characteristic submanifold and on the vector e_{m+2}. The last vector is orthogonal to the hyperplane of the family submanifold M^m and thus the envelope $\tilde{M}^m$ is of orthogonal type.

Conversely, if we have in E^{m+2} an envelope $\tilde{M}^m$ of orthogonal type of a one-parameter family of semi-symmetric submanifolds M^m of type $A_{(p+1)}$ in hyperplanes, then it is a semi-symmetric m-dimensional submanifold of type $B_{(p,1)}$. To prove it, we have to repeat the previous arguments (in case of type $B_{(m-2,1)}$) with light generalizations. The Proposition 5 is proved.

Proposition 6. An submanifold M^m in E^{m+2} is semi-symmetric of type $B_{(p,q)}$, $p>1$, $q>1$, iff it is a regular part either (i) of a product of two round hypercones C^{p+1} and C^{q+1} and a plane $E^{m-p-q-2}$ or (ii) of its limit case: product of C^{p+1}, S^q and $E^{m-p-q-1}$ or (iii) of its limit case: product of S^p, S^q and E^{m-p-q}.

Proof. Having the case $B_{(p,q)}$, $p>1$, $q>1$ and taking e_{m+1} and e_{m+2} collinear to k_I and k_{II}, respectively, we obtain

$$\omega^\alpha=0,\ \omega_{a_1}^{m+1}=\varkappa_I\omega^{a_1},\ \omega_{a_1}^{m+2}=\omega_{a_2}^{m+1}=0,\ \omega_{a_2}^{m+2}=\varkappa_{II}\omega^{a_2},\ \omega_u^\alpha=0, \tag{4.16}$$

where $\varkappa_I\neq 0$, $\varkappa_{II}\neq 0$; $a_1=1,\dots,p$; $a_2=p+1,\dots,p+q$; $u=p+q+1,\dots,m$.

From the last equations (5.16) it follows that

$$\omega_u^{a_1}=\lambda_{ua_1b_1}\omega^{b_1},\qquad \omega_u^{a_2}=\lambda_{ua_2b_2}\omega^{b_2},$$

where the coefficients are symmetric with respect to their last two indices. Now the others equations (4.16) give by exterior differentation

$$(\delta_{a_1b_1}d\varkappa_I+\varkappa_I\lambda_{ua_1b_1}\omega^u)\wedge\omega^{b_1}-\varkappa_I\omega_{b_2}^{a_1}\wedge\omega^{b_2}=0,$$
$$\delta_{a_1b_1}\varkappa_I\,\omega_{m+1}^{m+2}\wedge\omega^{b_1}+\varkappa_{II}\,\omega_{b_2}^{a_1}\wedge\omega^{b_2}=0,$$
$$\varkappa_I\,\omega_{b_1}^{a_2}\wedge\omega^{b_1}-\delta_{a_2b_2}\varkappa_{II}\,\omega_{m+1}^{m+2}\wedge\omega^{b_2}=0,$$
$$-\varkappa_{II}\,\omega_{b_1}^{a_2}\wedge\omega^{b_1}+(\delta_{a_2b_2}d\varkappa_{II}+\varkappa_{II}\lambda_{ua_2b_2}\omega^u)\wedge\omega^{b_2}=0.$$

Using the Cartan lemma and inequalities $p>1$, $q>1$ we obtain (details see in the prood of the proposition 5)

$$d\ln\varkappa_I=-\lambda_{Iu}\omega^u,\qquad d\ln\varkappa_{II}=-\lambda_{IIu}\omega^u,$$
$$\omega_u^{a_1}=\lambda_{Iu}\omega^{a_1},\qquad \omega_u^{a_2}=\lambda_{IIu}\omega^{a_2},$$
$$\omega_{a_1}^{b_2}=0,\qquad \omega_{m+1}^{m+2}=0.$$

From these equations it follows that

$$d\lambda_{Iu}=\lambda_{Iv}(\omega_u^v-\lambda_{Iu}\omega^v),$$
$$d\lambda_{IIu}=\lambda_{IIv}(\omega_u^v-\lambda_{IIu}\omega^v)$$
$$\sum_u\lambda_{Iu}\lambda_{IIu}=0.$$

Hence two vectors $\ell_I=\sum_u\lambda_{Iu}e_u$ and $\ell_{II}=\sum_u\lambda_{IIu}e_u$ are orthogonal and their directions are fixed on every plane leaf of the foliation Δ_3, determined by $\omega^{a_1}=\omega^{a_2}=0$.

Let $\ell_I=\ell_{II}=0$. Then $\varkappa_I=\mathrm{const}$, $\varkappa_{II}=\mathrm{const}$, $\omega_u^{a_1}=\omega_u^{a_2}=\omega_{a_1}^{b_2}=0$, i.e. foliations Δ_1, Δ_2 and Δ_3 are parallel, where Δ_1 and Δ_2 are spanned on $e_1,\dots,e_p$ and $e_{p+1},\dots,e_{p+q}$ respectively. Thus we have (iii).

Let $\ell_I\neq 0$ and $\ell_{II}\neq 0$. We can take e_{m-1} and e_m collinear to ℓ_I and ℓ_{II}, respectively. Then $\lambda_{Iu_1}=\lambda_{Im}=\lambda_{IIu_1}=\lambda_{II\,m-1}=0$, $\lambda_{I\,m-1}=\lambda_I\neq 0$, $\lambda_{IIm}=\lambda_{II}\neq 0$, where $u_1=p+q+1,\dots$

$\dots, m-2$, and thus $\omega_{u_1}^{a_1} = \omega_{u_1}^{m-1} = \omega_{u_1}^{a_2} = \omega_{u_1}^{m} = \omega_{m-1}^{m} = \omega_{a_1}^{l_2} = \omega_{a_1}^{m} = \omega_{a_2}^{m-1} = 0$. Therefore $\Delta_1^* = \Delta_1 \oplus \Delta_3^{(1)}$, $\Delta_2^* = \Delta_2 \oplus \Delta_3^{(2)}$ and $\Delta_3^* = \Delta_3^{(3)}$ with $\Delta_3^{(1)}$ spanned on e_{m-1}, $\Delta_3^{(2)}$ on e_m and $\Delta_3^{(3)}$ on $e_{p+q+1}, \dots, e_{m-2}$ are parallel foliations. Comparing with th the proof of Proposition 3 we have (i).

The intermediate case $l_I \neq 0$, $l_{II} = 0$ gives analogously (ii).

The converse follows from Proposition 3 and [6], Lemma 5.

5. <u>Classification theorem</u>. Proposition 1-6 give the full classification of semi-symmetric submanifolds M^m in E^{m+2} and geometrical descriptions of all possible cases too.

To get all semi-symmetric submanifolds is sufficient to find all irreducible semi-symmetric submanifolds and then to take all their products and extendings of the ambient space.

<u>Classification theorem</u>* (for codimension $\leqslant 2$). Every irreducible semi-symmetric submanifold M^m in E^{m+1} or E^{m+2} $(m > 1)$ locally coincides

with one of the following irreducible submanifolds:
1) sphere S^m 2) round cone C^m or

with one irreducible component of the following submanifolds: 3) M^m with rank 1 in E^{m+1} 4) M with rank 1 in E^{m+2} 5) M^m with rank 2 and with flat van der Waerden - Bortolotti connection in E^{m+2} 6) the envelope of orthogonal type of one-parameter family of submanifolds $S^{p+1} \times E^{m-p-1}$ in E^{m+2}, $1 < p \leqslant m$, 7) the envelope of orthogonal type of one-parameter family of submanifolds $C^{p+2} \times E^{m-p-2}$ in E^{m+2}, $1 < p \leqslant m-1$.

Note that subclasses of M^m with parallel h or $\bar{\nabla} h$ in these classes 1)-7) are found out in [9].

* We have here to correct the formulation of Theorem 3 in [5], where this classification theorem was announced. The cases (6) and (7) in [5] are not the general ones and must be replaced by the cases 6) and 7) below.

References

1. B a c k e s E. Geometric applications of euclidean Jordan triple systems.// Manuscr. Math. 1983. V. 42. P. 265-272.
2. D e p r e z J. Semi-parallel surfaces in Euclidean space.// J. of Geometry. 1985. V. 25. P. 192-200.
3. F e r u s D. Symmetric submanifolds of Euclidean space.// Math. Ann. 1980. B. 247. S. 81-93.
4. K o b a y a s h i S., N o m i z u K. Foundations of differential Geometry. V. II. New York - London Sydney: Interscience Publishers. 1969.
5. L u m i s t e Ü. Decomposition and classification theorems for semi-symmetric immersions.// Eesti NSV TA Toimetised. Füüs. Matem. 1987. V. 36. L. 414-417.
6. L u m i s t e Ü. Decomposition of semi-symmetric submanifolds.// Tartu Ülik. toimetised. Acta et comment. univ. Tartuensis. 1988. V. 803, L. 69-78.
7. Л у м и с т е Ю. Г. Неприводимые подмногообразия малых размерностей с параллельной третьей фундаментальной формой.// Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1986. Вып. 734. С. 50-62.
8. Л у м и с т е Ю. Г. Подмногообразия с плоской связностью ван-дер-Вардена - Бортолотти и параллельность третьей фундаментальной формы.// Изв. ВУЗов. Матем. 1987. № I. № 11. С. 1-10.
9. Л у м и с т е Ю. Г. Приводимость подмногообразия с параллельной третьей фундаментальной формой.// Изв. ВУЗов. Матем. 1987. С. I-IO.
10. С и н ю к о в Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. М. Наука. 1979.
11. Я н е н к о Н. Н. Некоторые вопросы теории вложения римановых метрик в евклидовы пространства.// Успехи матем. наук. 1953, Т. 8. № I. С. 2I-I00.

Поступило
20 X 1987

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА

Ю.Лумисте

Р е з ю м е

Подмногообразие M^m в E^n называется полусимметрическим, если $\bar{R}(X,Y)h=0$, где h — вторая фундаментальная форма и $\bar{R}$ — тензор кривизны связности $\bar{\nabla}$ ван дер Вардена - Бортолотти; равносильное условие: $\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y h$ симметрично относительно X и Y. С точки зрения внутренней геометрии полусимметрическое подмногообразие является полусимметрическим римановым пространством. Доказывается, что при $m>1$ и $n\leqslant m+2$ каждое m-мерное полусимметрическое подмногообразие в E^n есть либо одно из следующего списка, либо их произведение: 1) сфера S^m, 2) регулярная часть прямого конуса C^m над S^{m-1}; M^m ранга 1; M^m ранга 2 с плоской $\bar{\nabla}$; огибающая 1-параметрического семейства цилиндров $S^{p+1}\times E^{m-p-1}$, $1<p\leqslant m-1$, у которой каждая ортогональная траектория семейства характеристических $S^p\times E^{m-p-1}$ обладает свойством, что $(m-p)$-плоскость, натянутая на образующую $(m-p-1)$-плоскость характеристики и главную нормаль траектории, ортогональна к гиперплоскости, содержащей цилиндр семейства; регулярная часть огибающей семейства цилиндров $C^{p+2}\times E^{m-p-2}$, у которой каждая ортогональная траектория семейства характеристических $C^{p+1}\times E^{m-p-2}$, $1<p\leqslant m-2$, обладает свойством, аналогичным вышеуказанному.

TRÜ Toimetised
803 (1988), 95-102

Уч. зап. Тартуск. ун-та.
1988, 803, 95-102

О ДВУХ КЛАССАХ ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

К.Рийвес

Эстонская сельскохозяйственная академия

I. Введение. Подмногообразие M^m в евклидовом пространстве E^n называется полусимметрическим [1], [2], [3] (или полупараллельным, см. [5]), если $\bar{R}(X,Y)h=0$, где $\bar{R}$ является тензором кривизны связности ван дер Вардена-Бортолотти $\bar{\nabla}$ и h - второй фундаментальной формой M^m. Частным случаем является подмногообразие M^m с параллельной третьей фундаментальной формой $\alpha_3 = \bar{\nabla}\alpha_2$, т.е. с $\bar{\nabla}_{[X}\bar{\nabla}_{Y]}h=0$ (см. [4]), как следует из тождества $\bar{\nabla}_{[X}\bar{\nabla}_{Y]}h = \bar{R}(X,Y)h$.

В [2] даются условия (анонсированы в [1]), при которых полусимметрическое подмногообразие M^m разлагается на произведение полусимметрических подмногообразий меньших размерностей. В [3] (см. также [1]) перечислены все неприводимые полусимметрические подмногообразия M^m коразмерности ≤ 2, т.е. лежащие в E^{m+2}, среди которых выделены подмногообразия с параллельной α_3. Решение задачи их классификации облегчено обстоятельством, что полусимметрическое подмногообразие коразмерности 2 имеет плоскую нормальную связность $\nabla^\perp$ ([3], лемма 1).

В настоящей работе изучается строение полусимметрических подмногообразий двух частных классов. Известно, что у подмногообразия M^m в E^n с плоской нормальной связностью $\nabla^\perp$ все вторые фундаментальные формы $h^\xi = \langle h, \xi \rangle$ относительно любого нормального векторного поля ξ приводимы одновременно к диагональному виду ортогональным преобразованием касательного пространства $T_x M^m$, $x \in M^m$. Этим определяются главные векторы кривизны $k_1, \dots, k_m$ так, что $\langle k_i, \xi \rangle$ являются диагональными элементами для h^ξ, $i=1,\dots,m$. При этом векторы k_i могут встречаться с кратностями, бóльшими чем I.

Теорема 1. Полусимметрическое подмногообразие M^m с плоской нормальной связностью $\nabla^\perp$ в E^n, у которого все главные векторы кривизны отличны от нуля и имеют кратности $m_\varrho \geq 2$, является произведением m_ϱ-мерных сфер S^{m_ϱ} или его частью, где $\varrho = 1, \ldots, r$ и $\sum_{\varrho=1}^{r} m_\varrho = m$.

Другой наш результат относится к подмногообразиям M^m с параллельной α_3. В [4] доказано, что каждое такое подмногообразие M^m размерности $m \geq 3$ в E^{m+2} является произведением подмногообразий меньших размерностей. Этот результат допускает следующее обобщение.

Теорема 2. Подмногообразие M^m с параллельной третьей фундаментальной формой α_3 и с плоской нормальной связностью $\nabla^\perp$ размерности $m \geq p \geq 3$ в E^{m+p-1} является либо сферой S^m, либо произведением подмногообразий меньших размерностей.

Заметим, что в силу леммы из [4] эти последние подмногообразия имеют также параллельную α_3 и плоскую нормальную связность.

Из доказательства теоремы 2 следует, что классификация подмногообразий M^m с параллельной α_3 и с плоской $\nabla^\perp$ в E^n при $n \leq 2m-1$ сводится к нахождению неприводимых подмногообразий M^q (т.е. не разлагающихся в произведение) с этими свойствами размерности $q < m$ и коразмерности $\leq m-1$, причем такие M^q могут обладать лишь однократными ненулевыми главными векторами кривизны. В выяснении последних сделаны пока только первые шаги при $m=3$ (см. [4]).

2. Аппарат исследования. Применяется метод подвижного ортонормированного репера, адаптированного к подмногообразию $M^m \subset E^n$. Произвольный элемент $\{x, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ этого репера является элементом суммы $OM^m \oplus O^\perp M^m$ главных расслоений OM^m и $O^\perp M^m$ ортонормированных реперов, присоединенных, соответственно, к касательному и нормальному расслоениям TM^m и $T^\perp M^m$. При этом в TM^m и OM^m имеется связность ∇ Леви-Чивита, а в $T^\perp M^m$ и $O^\perp M^m$ – нормальная связность $\nabla^\perp$. Их пара $\bar{\nabla} = (\nabla, \nabla^\perp)$ является связностью ван дер Вардена-Бортолотти в $TM^m \oplus T^\perp M^m$ и $OM^m \oplus O^\perp M^m$. Справедливы формулы

$$dx = e_J \omega^J, \quad de_J = e_K \omega_J^K, \quad J, K, \ldots = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где $\omega_J^K + \omega_K^J = 0$. Отсюда внешнее дифференцирование приводит к

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J, \quad d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K. \qquad (2)$$

Адаптация дает, кроме того,

$$\omega^{\alpha}=0, \quad \omega_i^{\alpha}=h_{ij}^{\alpha}\omega^{j}, \tag{3}$$

$$\bar\nabla h_{ij}^{\alpha}\equiv dh_{ij}^{\alpha}-h_{\ell j}^{\alpha}\omega_i^{\ell}-h_{i\ell}^{\alpha}\omega_j^{\ell}+h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}=h_{ijk}^{\alpha}\omega^{k}, \tag{4}$$

$$\bar\nabla h_{ijk}^{\alpha}\equiv dh_{ijk}^{\alpha}-h_{\ell jk}^{\alpha}\omega_i^{\ell}-h_{i\ell k}^{\alpha}\omega_j^{\ell}-h_{ij\ell}^{\alpha}\omega_k^{\ell}+h_{ijk}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}=h_{ijk\ell}^{\alpha}\omega^{\ell}, \tag{5}$$

где $i,j,\ldots=1,\ldots,m;\ \alpha,\beta,\ldots=m+1,\ldots,n$, коэффициенты h_{ij}^{α}, h_{ijk}^{α} симметричны по всем нижним индексам. Для связностей ∇ и $\nabla^{\perp}$ из (2), (3) получаются структурные уравнения

$$d\omega_i^{j}=\omega_i^{k}\wedge\omega_k^{j}+\Omega_i^{j}, \quad d\omega_{\alpha}^{\beta}=\omega_{\alpha}^{\gamma}\wedge\omega_{\gamma}^{\beta}+\Omega_{\alpha}^{\beta},$$

где

$$\begin{aligned}\Omega_i^{j}&=-(\sum_{\alpha}h_{i[k}^{\alpha}h_{\ell]j}^{\alpha})\omega^{k}\wedge\omega^{\ell},\\ \Omega_{\alpha}^{\beta}&=-(\sum_{i}h_{i[k}^{\alpha}h_{\ell]i}^{\beta})\omega^{k}\wedge\omega^{\ell}\end{aligned} \tag{6}$$

являются 2-формами кривизны этих связностей. Если $\Omega_{\alpha}^{\beta}=0$, то говорят, что подмногообразие M^m имеет <u>плоскую нормальную связность</u> $\nabla^{\perp}$. Тогда все матрицы $H^{\alpha}=\|h_{ij}^{\alpha}\|$ попарно коммутируют и поэтому приводимы ортогональными преобразованиями в $O^{\perp}M^m$ одновременно к диагональному виду, т.е. можно достичь, что $h_{ij}^{\alpha}=k_i^{\alpha}\delta_{ij}$. Векторы $k_i=k_i^{\alpha}e_{\alpha}$ являются главными векторами кривизны подмногообразия M^m.

Если выполняются условия

$$h_{kj}^{\alpha}\Omega_i^{k}+h_{ik}^{\alpha}\Omega_j^{k}-h_{ij}^{\beta}\Omega_{\beta}^{\alpha}=0, \tag{7}$$

то подмногообразие M^m называется <u>полусимметрическим</u>. Известно, что если в этом случае $\nabla^{\perp}$ является плоской, то главные векторы кривизны k_i $(i=1,\ldots,m)$ попарно либо совпадают, либо взаимно ортогональны (см. [3], лемма 2). Говорят [4], что подмногообразие M^m имеет <u>параллельную третью фундаментальную форму</u> α_3, если $\bar\nabla h_{ijk}^{\alpha}=0$. Тогда

$$\nabla e_{ij}=-\sum_{\ell}e_{\ell}\langle e_{ij},e_{k\ell}\rangle\omega^{k}+e_{ijk}\omega^{k}, \tag{8}$$

$$\nabla e_{ijk}=-\sum_{\ell}e_{\ell}\langle e_{ijk},e_{r\ell}\rangle\omega^{r}, \tag{9}$$

где $e_{ij}=h_{ij}^{\alpha}e_{\alpha}$, $e_{ijk}=h_{ijk}^{\alpha}e_{\alpha}$ (см. [4]).

3. <u>Доказательство теоремы I</u>. Так как $e_{ij}=\delta_{ij}k_i$, то соотношения (8) принимают вид

$$dk_i\delta_{ij}+(k_i-k_j)\omega_i^{j}=-\delta_{ij}\sum_{\ell}e_{\ell}\langle k_i,k_{\ell}\rangle\omega^{\ell}+e_{ij\ell}\omega^{\ell}, \tag{10}$$

12

где $e_{ij\ell}$ симметричны по нижним индексам. Пусть i_ϱ пробегает множество индексов тех e_i, которым соответствует m_ϱ -кратный главный вектор кривизны $k_\varrho \equiv k_{i_\varrho}$, $\varrho = 1, \dots, r$; $m_\varrho > 1$.

Если $i = i_\varrho$, $j = j_\varrho$, то

$$d k_\varrho \, \delta_{i_\varrho j_\varrho} = \delta_{i_\varrho j_\varrho} k_\varrho^2 e_{\ell_\varrho} \omega^{\ell_\varrho} + e_{i_\varrho j_\varrho \ell} \omega^\ell. \qquad (11)$$

Так как $m_\varrho > 1$, то существуют неравные $i_\varrho \neq j_\varrho$. Тогда $\delta_{i_\varrho j_\varrho} = 0$ и, следовательно, $e_{i_\varrho j_\varrho \ell} = 0$ как только $i_\varrho \neq j_\varrho$. В силу $k_{i_\varrho} = k_\varrho$ в равенстве (11) нет зависимости от значения i_ϱ; в частности $e_{i_\varrho i_\varrho \ell} = e_{j_\varrho j_\varrho \ell}$. Взяв здесь $i_\varrho \neq j_\varrho$ и $\ell = i_\varrho$, получим отсюда в силу симметрии $e_{ij\ell}$, что $e_{i_\varrho i_\varrho i_\varrho} = e_{j_\varrho j_\varrho i_\varrho} = 0$. Если $r = 1$, то M^m вполне омбилическое и, как известно, является сферой S^m. Пусть $r > 1$. Тогда в (11) существенными будут лишь $e_{i_\varrho i_\varrho j_\sigma}$ $(\varrho \neq \sigma)$. Обозначим их коротко через $e_{\varrho j_\sigma}$. Окончательно получим

$$d k_\varrho = k_\varrho^2 e_{j_\varrho} \omega^{j_\varrho} + \sum_{\varrho \neq \sigma} e_{\varrho j_\sigma} \omega^{j_\sigma}. \qquad (12)$$

Если в (10) $i = i_\varrho$, $j = j_\sigma$ $(\varrho \neq \sigma)$, то

$$(k_\varrho - k_\sigma) \omega_{i_\varrho}^{j_\sigma} = e_{\varrho j_\sigma} \omega^{i_\varrho} + e_{\sigma i_\varrho} \omega^{j_\sigma} + \sum_{\substack{\tau \neq \varrho \\ \tau \neq \sigma}} e_{i_\varrho j_\sigma \ell_\tau} \omega^{\ell_\tau}, \qquad (13)$$

где в случае $r = 2$ последней суммы нет. Пусть $r > 2$. Аналогично для $i = i_\varrho$, $j = \ell_\tau$ $(\varrho \neq \tau)$ справедливы

$$(k_\varrho - k_\tau) \omega_{i_\varrho}^{\ell_\tau} = e_{\varrho \ell_\tau} \omega^{i_\varrho} + e_{\tau i_\varrho} \omega^{\ell_\tau} + \sum_{\substack{\sigma \neq \varrho \\ \sigma \neq \tau}} e_{i_\varrho \ell_\tau j_\sigma} \omega^{j_\sigma}.$$

Отсюда с одной стороны $e_{i_\varrho j_\sigma \ell_\tau} \parallel k_\varrho - k_\sigma$, а с другой стороны $e_{i_\varrho j_\sigma \ell_\tau} \parallel k_\varrho - k_\tau$. Здесь k_ϱ, k_σ, k_τ являются тремя отличными от нуля попарно ортогональными векторами, поэтому $e_{i_\varrho j_\sigma \ell_\tau} = 0$. Таким образом и при $r > 2$ в (13) последняя сумма отсутствует. Кроме того, из (13) видно, что

$$e_{\varrho j_\sigma} = \lambda_{\varrho j_\sigma} (k_\varrho - k_\sigma), \quad e_{\sigma i_\varrho} = \lambda_{\sigma i_\varrho} (k_\varrho - k_\sigma). \qquad (14)$$

Так как $\langle k_\varrho, k_\sigma \rangle = 0$ $(\varrho \neq \sigma)$, то $\langle d k_\varrho, k_\sigma \rangle + \langle k_\varrho, d k_\sigma \rangle = 0$, и с учетом (12), (14) будем иметь

$$\lambda_{\varrho j_\sigma} \langle k_\varrho - k_\sigma, k_\sigma \rangle \omega^{j_\sigma} + \lambda_{\sigma j_\varrho} \langle k_\varrho, k_\varrho - k_\sigma \rangle \omega^{j_\varrho} +$$
$$+ \sum_{\substack{\tau \neq \varrho \\ \tau \neq \sigma}} [\langle e_{\varrho j_\tau}, k_\sigma \rangle + \langle k_\varrho, e_{\sigma j_\tau} \rangle] \omega^{j_\tau} = 0.$$

Эти равенства возможны только при $\lambda_{\varrho j_\sigma} = \lambda_{\sigma j_\varrho} = 0$, что в силу (14), приводит к $e_{\varrho j_\sigma} = e_{\sigma j_\varrho} = 0$. Таким образом $e_{ijk} \equiv h_{ijk}^\alpha e_\alpha = 0$ и подмногообразие $M^m \subset E^n$ имеет параллельную форму α_2 (т.е. $\bar\nabla \alpha_2 = \alpha_3 \equiv 0$). По результатам Валдена [6] такие многообразия являются произведениями сфер, что и требовалось доказать.

4. Доказательство теоремы 2. Теперь в $(p-1)$-мерном нормальном пространстве подмногообразия $M^m \subset E^{m+p-1}$ главные векторы кривизны образуют множество, состоящее из m векторов, которые попарно либо совпадают, либо ортогональны, причем $m > p-1$. Следовательно, существуют две возможности.

1) Среди них имеется нулевой вектор с ненулевой кратностью.

2) Все они отличны от нуля, но по крайней мере один имеет кратность > 1.

В первом случае пусть i_0 пробегает множество индексов тех e_i, которым соответствует нулевой главный вектор кривизны, т.е. $k_{i_0} = 0$. Из (II) следует, что $e_{i_0 j_0 \ell} = 0$.

Далее, пусть i_ς $(\varsigma \neq 0)$ пробегает множество индексов тех e_i, которым соответствует ненулевой главный вектор кривизны k_ς. Из (8) тогда получим

$$k_\varsigma \omega_{i_\varsigma}^{j_0} = e_{i_\varsigma j_0 \ell}\, \omega^\ell,$$

где в силу симметрии $e_{i_\varsigma j_0 \ell_0} = 0$. Если существуют два разных отличных от нуля k_ς и k_δ (они ортогональны), то с одной стороны $e_{i_\varsigma j_0 \ell_\delta} \parallel k_\varsigma$, с другой стороны $e_{\ell_\delta j_0 i_\varsigma} \parallel k_\delta$, причем векторы слева равны. Это возможно лишь при $e_{i_\varsigma j_0 \ell_\delta} = 0$ $(\varsigma \neq \delta)$. Следовательно, в любом случае

$$k_\varsigma \omega_{i_\varsigma}^{j_0} = e_{i_\varsigma j_0 \ell_\varsigma}\, \omega^{\ell_\varsigma}$$

и тем самым

$$e_{i_\varsigma j_0 \ell_\varsigma} = \lambda_{i_\varsigma j_0 \ell_\varsigma} k_\varsigma, \quad \omega_{i_\varsigma}^{j_0} = \lambda_{i_\varsigma j_0 \ell_\varsigma}\, \omega^{\ell_\varsigma}.$$

Учитывая теперь условие (9) при $(i, j, k) = (j_0, j_0, \ell_\varsigma)$, получим

$$e_{i_\varsigma j_0 \ell_\varsigma}\, \omega_{j_0}^{i_\varsigma} = 0,$$

что после подстановки дает $\lambda_{i_\varsigma j_0 \ell_\varsigma} \cdot \lambda_{i_\varsigma j_0 \ell_\varsigma} = 0$. Отсюда $\lambda_{i_\varsigma j_0 \ell_\varsigma} = 0$. Следовательно, $\omega_{i_\varsigma}^{j_0} = 0$ при всех значениях $\varsigma \neq 0$.

Теперь две системы $\omega^{i_\varsigma} = 0$ (ς пробегает все множество π индексов отличных от нуля главных векторов кривизны) и $\omega^{i_0} = 0$ обе вполне интегрируемы, так как $d\omega^{i_\varsigma} = \sum_{\delta \in \pi} \omega^{j_\delta} \wedge \omega_{j_\delta}^{i_\varsigma}$ и $d\omega^{i_0} = \omega^{j_0} \wedge \omega_{j_0}^{i_0}$. Учитывая, что $k_{i_0} = 0$, $e_{i_\varsigma j_0 \ell_\delta} = 0$, а также $e_{i_\varsigma j_\delta} = 0$ при $\varsigma \neq \delta$, $e_{i_\varsigma j_\varsigma} = k_\varsigma \delta_{i_\varsigma j_\varsigma}$ и $\langle k_\varsigma, k_\delta \rangle = 0$ при $\varsigma \neq \delta$, из

13*

(3), (8) и (9) для их интегральных подмногообразий получим, соответственно,

$$dx = e_{i_0}\omega^{i_0}, \quad de_{i_0} = e_{j_0}\omega_{i_0}^{j_0},$$

и

$$dx = \sum_{\varrho\in\pi} e_{i_\varrho}\omega^{i_\varrho}, \quad de_{i_\varrho} = \sum_{\delta\in\pi} e_{j_\delta}\omega_{i_\varrho}^{j_\delta} + \sum_{\delta\in\pi} e_{i_\varrho j_\delta}\omega^{j_\delta},$$

$$de_{i_\varrho j_\delta} = \sum_{\tau\in\pi} e_{\ell_\tau j_\delta}\omega_{i_\varrho}^{\ell_\tau} + \sum_{\tau\in\pi} e_{i_\varrho \ell_\tau}\omega_{j_\delta}^{\ell_\tau} - \sum_{m_\delta} e_{m_\delta}\langle e_{i_\varrho j_\delta}, e_{\ell_\varrho m_\delta}\rangle\omega^{\ell_\varrho} + \sum_{\tau\in\pi} e_{i_\varrho j_\delta \ell_\tau}\omega^{\ell_\tau},$$

$$de_{i_\varrho j_\delta \ell_\tau} = -\sum_{\nu\in\pi} e_{m_\nu}\langle e_{i_\varrho j_\delta \ell_\tau}, e_{n_\nu m_\nu}\rangle\omega^{n_\nu} + \sum_{\nu\in\pi} e_{m_\nu j_\delta \ell_\tau}\omega_{i_\varrho}^{m_\nu} + \sum_{\nu\in\pi} e_{i_\varrho m_\nu \ell_\tau}\omega_{j_\delta}^{m_\nu} + \sum_{\nu\in\pi} e_{i_\varrho j_\delta m_\nu}\omega_{\ell_\tau}^{m_\nu}.$$

Отсюда видно, что M^m является произведением этих интегральных подмногообразий. Точнее, M^m - это цилиндр, образующие которого имеют направление подпространства векторов e_{i_0}, т.е. $M^m = R^{m_0}\times M^{m-m_0}$, где m_0 - кратность нулевого главного вектора кривизны, а M^{m-m_0} имеет те же самые свойства, что и M^m.

Во втором случае пусть через r обозначено число различных и отличных от нуля главных векторов кривизны и пусть i_ϱ выполняют прежнюю роль. Здесь существуют значения ϱ, при которых индекс i_ϱ пробегает больше чем одно значение. Пусть такими будут $\varrho = 1,\dots,s$; $s\geq 1$. Для них проходит все то, что сделано в доказательстве теоремы I до формулы (I2), которая теперь имеет вид

$$dk_\varrho = k_\varrho^2 e_{j_\varrho}\omega^{j_\varrho} + \sum_{\delta\neq\varrho} e_{\varrho j_\delta}\omega^{j_\delta}, \quad \varrho = 1,\dots,s. \qquad (I5)$$

Если $r = s$, то мы вернемся к теореме I. Рассмотрим поэтому случай $s<r$. Тогда для всех $\varrho = s+1,\dots,r$ индекс i_ϱ принимает лишь одно значение и также как раньше можно ввести обозначение $e_{i_\varrho i_\varrho j_\delta} = e_{\varrho j_\delta}$. В соответствующих соотношениях (I5) в последней сумме отпадает условие $\delta\neq\varrho$.

Для всех различных значений ϱ и δ из (8) следует, что

$$(k_\varrho - k_\delta)\omega_{i_\varrho}^{j_\delta} = e_{i_\varrho j_\delta \ell}\omega^\ell. \qquad (I6)$$

Если таких значений только два, т.е. $s=1$, $r=2$, то (I6) принимает вид

$$(k_1 - k_2)\omega_{i_1}^{j_2} = e_{1 j_2}\omega^{i_1} + e_{2 i_1}\omega^{j_2}.$$

Если их больше чем 2, т.е. $r \geq 3$, то для различных ρ, σ, τ с одной стороны

$$e_{i_\rho j_\sigma \ell_\tau} \parallel k_\rho - k_\sigma,$$

а с другой стороны, заменив местами σ и τ,

$$e_{i_\rho j_\sigma \ell_\tau} \parallel k_\rho - k_\tau.$$

Также как в доказательстве теоремы I, отсюда ясно, что $e_{i_\rho j_\sigma \ell_\tau} = 0$. Кроме того, из (I6) следует, что во всех случаях

$$e_{\rho j_\sigma} = \lambda_{\rho j_\sigma}(k_\rho - k_\sigma),$$

что после подстановки в (I6) дает

$$\omega_{i_\rho}^{j_\sigma} = \lambda_{\rho j_\sigma}\omega^{i_\rho} + \lambda_{\sigma i_\rho}\omega^{j_\sigma}, \quad \rho \neq \sigma. \qquad (I7)$$

Применим условие (9) для $(i,j,k) = (i_\rho, i_\rho, i_\rho)$ с $1 \leq \rho \leq s$. Тогда $e_{i_\rho i_\rho i_\rho} = 0$ и мы получим

$$\sum_{\sigma \neq \rho} e_{\rho j_\sigma}\omega_{i_\rho}^{j_\sigma} = 0,$$

что с учетом (I7) приводит к $\lambda_{\rho j_\sigma} = 0$ $(1 \leq \rho \leq s;\ \sigma \neq \rho)$. Следовательно, $e_{\rho j_\sigma} = e_{i_\rho i_\rho j_\sigma} = 0$. Применяя теперь (9) для $(i,j,k) = (i_\rho, i_\rho, j_\sigma)$ с $1 \leq \rho \leq s$ и $\sigma \neq \rho$, получим

$$\sum_{\sigma \neq \rho} e_{\sigma i_\rho}\omega_{i_\rho}^{j_\sigma} = 0,$$

что после подстановки (I7) дает $\lambda_{\sigma i_\rho} = 0$ $(1 \leq \rho \leq s;\ \sigma \neq \rho)$. Таким образом $\omega_{i_\rho}^{j_\sigma} = 0$ $(1 \leq \rho \leq s;\ \sigma \neq \rho)$. Но тогда обе системы $\omega^{i_\rho} = 0$, $\rho = 1, \dots, s$ и $\omega^{j_\sigma} = 0$, $\sigma = s+1, \dots, r$, вполне интегрируемы. Также как в доказательстве теоремы I нетрудно проверить, что M^m является произведением интегральных подмногообразий этих двух систем. При этом, в силу теоремы I, второе из этих интегральных подмногообразий является в свою очередь, сферой или произведением сфер. Оба они имеют параллельную α_3 и плоскую нормальную связность.

Заметим, что при использовании условия (9) существенно то, что после дифференцирования из $\langle k_\rho, k_\sigma \rangle = 0$ с $1 \leq \rho \leq s$, $s < \sigma \leq r$ следует $\langle e_{\sigma j_\tau}, k_\rho \rangle = 0$ для всех значений τ.

Теорема 2 доказана.

1. L u m i s t e Ü. Decomposition and classification theorems for semisymmetric immersions.// Изв. АН ЭСТ ССР. Физ. Мат 1987. Т. 36. № 4. С. 414-417.

2. L u m i s t e Ü. Decomposition of semi-symmetric submanifolds.//Уч. зап. Тарт. ун-та. 1988.

3. L u m i s t e Ü. Classification of two-dimensional semi-symmetric submanifolds.// Уч. зап. Тарт. ун-та. 1988.

4. Л у м и с т е Ю. Г. Приводимость подмногообразий с параллельной третьей фундаментальной формой.// Изв. ВУЗов. Мат., 1987, № 11. 1-10.

5. D e p r e z J. Semi-parallel surfaces in Euclidean space.// J. of Geometry. 1985. V. 25. P. 192-200.

6. W a l d e n R. Untermannigfaltigreiten mit parallelen zweiter Fundamentalform in euklidischen Räumen und Sphären. Manuscr. math. 1973, 10, 91-102.

Поступило
5 X 1987

ABOUT TWO CLASSES OF SEMI-SYMMETRIC SUBMANIFOLDS

K.Riives

S u m m a r y

Two decomposition theorems of semi-symmetric submanifolds with flat normal connection $\nabla^{\perp}$ in Euclidean space are proved. Here semi-symmetricity means that $\bar{R}(X,Y)h=0$ or, equivalently $\bar{\nabla}_{[X}\bar{\nabla}_{Y]} = 0$, is the second fundamental form and $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^{\perp}$.

<u>Theorem 1</u>. Let semi-symmetric M^m with flat $\nabla^{\perp}$ in $\bar{E}^n$ have nonzero principal curvature vectors of multiplicities $m_\varrho > 1$, $\sum_{\varrho=1}^{N} m_\varrho = m$. Then $M^m = S^{m_1} \times \ldots \times S^{m_N}$.

<u>Theorem 2</u>. Let M_m in $\bar{E}^{m+p-1}$ have flat $\nabla^{\perp}$ and parallel third fundamental form, i.e. $\bar{\nabla}\bar{\nabla}h = 0$. If $m \geq p \geq 3$, then M^m is either S^m or a product of submanifolds with dimension $< m$ and with flat $\nabla^{\perp}$ and parallel $\bar{\nabla}h$.

TRÜ Toimetised
803 (1988), 103-114

Уч. зап. Тартуск. ун-та.
1988, 803, 103-114

СЛАБО-НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛУГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ ТКАНЕЙ

Е.В.Ферапонтов

Вычислительный центр АН СССР

Изучение геометрии характеристик на решениях квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений было начато Х.Кильп в [1]. В работе [2] тем же автором проведена полная классификация частных решений уравнений плоского стационарного течения несжимаемой идеальной жидкости, а также уравнений одномерного движения политропного газа в адиабатическом процессе, на которых характеристики образуют шестиугольную 3-ткань.

В настоящей работе показано, что среди квазилинейных гиперболических систем трех дифференциальных уравнений гидродинамического типа слабо-нелинейные полугамильтоновы системы и только они несут шестиугольную 3-ткань характеристик на любом решении.

При дополнительном предположении о существовании инвариантов Римана доказана линеаризуемость слабо-нелинейных полугамильтоновых систем преобразованием "по решению".

В качестве примеров рассматриваются уравнения хроматографии и одномерное движение газа Чаплыгина.

§ 1. Преобразование к системе внешних уравнений

Рассматриваются квазилинейные гиперболические системы трех дифференциальных уравнений гидродинамического типа:

$$u^i_t = h^i_j(u)\, u^j_x, \tag{1}$$

где (t, x) - независимые, $u = (u^1, u^2, u^3)$ - зависимые переменные системы, $u^i{}_t = \frac{\partial u^i}{\partial t}$, $u^j{}_x = \frac{\partial u^j}{\partial x}$, а индексы i, j принимают значения I, 2, 3.

Процедура преобразования (I) к системе внешних уравнений состоит в следующем. Приведем матрицу h к диагональному виду:

$$h^i_j = (\ell^{-1})^i_k \, \lambda^k \ell^k_j .$$

Здесь $\lambda^k(u)$ - собственные числа матрицы h, предполагаемые вещественными и различными, $\ell(u)$ - диагонализующее преобразование. Введем I-формы

$$\omega^i = \ell^i_j(u) \, du^j .$$

Тогда, как нетрудно проверить, система (I) эквивалентна системе внешних уравнений

$$\omega^i \wedge (dx + \lambda^i dt) = 0. \qquad (2)$$

Запись (2) была предложена А.М.Васильевым в [3] и использовалась Х.Кильп в [I] . Она оказывается существенно более удобной, поскольку включает явную зависимость от собственных чисел λ^i и "собственных ковекторов" ω^i.

Разложим дифференциалы собственных чисел λ^i по собственным ковекторам ω^i :

$$d\lambda^i = \lambda^i_j \, \omega^j .$$

Следуя [4] , дадим определения.

Определение I. Систему (2) будем называть слабо-нелинейной, если $\lambda^i_i = 0$ для любого i = I, 2, 3 ([4] , стр. 87).

Определение 2. Будем говорить, что система (2) диагонализуема (допускает инварианты Римана), если собственные ковекторы ω^i могут быть выбраны полными дифференциалами: $\omega^i = du^i$. При этом уравнения (I) запишутся в диагональной форме ([4] , стр. 27):

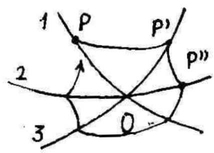
$$u^i{}_t = \lambda^i(u) \, u^i{}_x .$$

§ 2. 3-ткань из характеристик. Теорема о шестиугольности

Как известно, характеристиками системы (2) называются семейства кривых на решении, задаваемые уравнениями

$dx + \lambda^i dt = 0.$

Поскольку через любую точку проходят три различные характеристики, на каждом решении возникает 3-ткань, т.е. три однопараметрических семейства кривых. Сделаем следующее геометрическое построение.



Рассмотрим произвольную точку O на решении и проведем через нее три характеристики (обозначенные цифрами I, 2, 3 на рисунке). Пусть P - точка на характеристике I, близкая к точке O. Передвинемся из точки P в точку P' вдоль характеристики второго семейства. Затем из точки P' перейдем в P'' вдоль характеристики первого семейства и т.д. В результате полного оборота вокруг точки O мы можем не вернуться в начальное положение P. (Похожую картину можно наблюдать, когда паук строит паутину - после полного обхода своей сети он всегда оказывается ближе к центру, двигаясь таким образом по спирали). Ткань называется шестиугольной, ([5] , стр. I9), если в результате такого обхода мы всякий раз будем возвращаться в исходную позицию (и, таким образом, ни один паук не может сплести себе паутину).

Имеет место следующая теорема "о шестиугольности"

<u>Теорема I</u>. 3-ткань из характеристик будет шестиугольной на любом решении системы (2) тогда и только тогда, когда выполнены условия:

I) Система является слабо-нелинейной;

2) I-форма

$$\omega = \left(\frac{\lambda^2_1}{\lambda^1-\lambda^2} + \frac{\lambda^3_1}{\lambda^1-\lambda^3}\right)\omega^1 + \left(\frac{\lambda^1_2}{\lambda^2-\lambda^1} + \frac{\lambda^3_2}{\lambda^2-\lambda^3}\right)\omega^2 + \left(\frac{\lambda^1_3}{\lambda^3-\lambda^1} + \frac{\lambda^2_3}{\lambda^3-\lambda^2}\right)\omega^3$$

является замкнутой: $d\omega = 0$.

<u>Доказательство</u> состоит в непосредственном вычислении формы связности ([5] , стр. 36) рассматриваемой 3-ткани, которая оказывается в точности равной ω. Таким образом, условие $d\omega = 0$ есть условие "нулевой кривизны", что, как известно, эквивалентно шестиугольности.

Посмотрим, во что переходят эти условия при дополнительном предположении о диагонализуемости системы (2). Как нетрудно проверить, условие слабой нелинейности примет вид

$$\frac{\partial \lambda^i}{\partial u^i} = 0 \quad \text{для любого} \quad i = 1, 2, 3.$$

Требование $d\omega = 0$ даст следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\frac{\lambda^i_j}{\lambda^j - \lambda^i}\right) = \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{\lambda^i_k}{\lambda^k - \lambda^i}\right)$$

для любой упорядоченной тройки $i \neq j \neq k$.

Диагонализуемые системы, удовлетворяющие последнему условию, изучались С.П.Царевым в [6] , [7] и были названы полугамильтоновыми. Для этих систем было установлено существование интегралов с произволом в три функции одного аргумента, а также их интегрируемость "обобщенным методом годографа".

Естественно распространить определение слабой нелинейности и полугамильтоновости на недиагонализуемые системы.

Определение 3. Слабо-нелинейной полугамильтоновой мы будем называть систему, удовлетворяющую условиям теоремы I.

Несмотря на кажущуюся простоту условий I), 2) их проверка на практике может приводить к достаточно громоздким вычислениям. В следующем параграфе устанавливается ряд других свойств слабо- нелинейных полугамильтоновых систем, которые поддаются более простой проверке и позволяют дать полное описание систем этого класса.

§ 3. Свойства слабо-нелинейных полугамильтоновых систем

Будем говорить, что i -ое семейство характеристик допускает обобщенную функцию тока, если существует интеграл вида $B^i(u)\,(dx + \lambda^i dt)$, т.е. I-форма, замкнутая на решениях системы ([3]). Тогда на каждом решении соотношение

$$dA^i = B^i(u)\,(dx + \lambda^i dt)$$

определяет функцию A^i , называемую обобщенной функцией тока, которая постоянна вдоль i -ого семейства характеристик. Имеет место

Теорема 2. Система (2) является слабо-нелинейной полугамильтоновой тогда и только тогда, когда существуют три обобщенные функции тока A^1 , A^2 , A^3 для каждого семейства характеристик

$$dA^1 = B^1(u)\,(dx + \lambda^1 dt),$$
$$dA^2 = B^2(u)\,(dx + \lambda^2 dt),$$
$$dA^3 = B^3(u)\,(dx + \lambda^3 dt),$$

связанные дополнительным соотношением

$$dA^1 + dA^2 + dA^3 = 0.$$

Доказательство состоит в исследовании совместности переопределенной системы на функции тока A^1, A^2, A^3. Как нетрудно проверить, они совпадают с условиями 1), 2) теоремы 1.

Как будет продемонстрировано на конкретных примерах, проверка условий теоремы 2 не сталкивается с большими вычислительными сложностями.

Применим к слабо-нелинейной полугамильтоновой системе (2):

$$\omega^1 \wedge (dx + \lambda^1 dt) = 0,$$
$$\omega^2 \wedge (dx + \lambda^2 dt) = 0,$$
$$\omega^3 \wedge (dx + \lambda^3 dt) = 0,$$

так называемое преобразование "по решению" ([4] , стр. 31), используя утверждение теоремы 2 о существовании трех функций тока

$$dA^1 = B^1 (dx + \lambda^1 dt),$$
$$dA^2 = B^2 (dx + \lambda^2 dt),$$
$$dA^3 = B^3 (dx + \lambda^3 dt).$$

Для этого перейдем от независимых переменных (x , t) к новым независимым переменным (A^1 , A^2). Уравнения преобразованной системы примут вид:

$$\omega^1 \wedge dA^1 = 0,$$
$$\omega^2 \wedge dA^2 = 0,$$
$$\omega^3 \wedge (dA^1 + dA^2) = 0.$$

Таким образом, хотя собственные ковекторы при этом не изменились, новые собственные числа стали глобальными константами. Итак, доказана

Теорема 3. Слабо-нелинейная полугамильтонова система связана преобразованием "по решению" с системой, имеющей постоянные собственные числа.

Замечание. Как известно, шестиугольная ткань может быть переведена подходящей заменой координат в 3-ткань, образованную тремя семействами параллельных прямых. Таким образом, преобразование "по решению", переводящее собственные числа в константы, может неформально рассматриваться как замена координат, одновременно распрямляющая 3-ткани характеристик на всех решениях системы.

Для диагонализуемых систем теорема 3 принимает следующий вид:

Теорема 4. Диагонализуемая слабо-нелинейная полугамильтонова система линеаризуется преобразованием "по решению".

Теорема 3 утверждает, что всякая слабо-нелинейная полугамильтонова система получается преобразованием "по решению" из некоторой системы с постоянными собственными числами. Обратно, несложно показать, что любое преобразование "по решению" не выводит из класса слабо-нелинейных полугамильтоновых систем. Эти замечания позволяют считать слабо-нелинейными полугамильтоновыми те и только те системы, которые получаются преобразованиями "по решению" из систем с постоянными собственными числами.

Теоремы I, 2, 3 характеризуют с разных сторон один и тот же класс систем. При этом наиболее удобной в вычислительном плане является теорема 2. Перед тем как непосредственно перейти к рассмотрению конкретных примеров, приведем одну простую лемму, имеющую чисто техническое значение.

Лемма. Пусть A^1, A^2, A^3 - три обобщенные функции тока системы (2):

$$dA^1 = B^1(u)\,(dx + \lambda^1 dt),$$
$$dA^2 = B^2(u)\,(dx + \lambda^2 dt),$$
$$dA^3 = B^3(u)\,(dx + \lambda^3 dt).$$

Тогда функции $B^1(u)$, $B^2(u)$, $B^3(u)$ удовлетворяют уравнениям:

$$d\ln B^1 = \frac{\lambda^1_2}{\lambda^2-\lambda^1}\,\omega^2 + \frac{\lambda^1_3}{\lambda^3-\lambda^1}\,\omega^3 \mod \omega^1,$$
$$d\ln B^2 = \frac{\lambda^2_1}{\lambda^1-\lambda^2}\,\omega^1 + \frac{\lambda^2_3}{\lambda^3-\lambda^2}\,\omega^3 \mod \omega^2, \qquad (3)$$
$$d\ln B^3 = \frac{\lambda^3_1}{\lambda^1-\lambda^3}\,\omega^1 + \frac{\lambda^3_2}{\lambda^2-\lambda^3}\,\omega^2 \mod \omega^3.$$

При этом соотношение

$$dA^1 + dA^2 + dA^3 = 0$$

равносильно двум уравнениям на $B^i(u)$:

$$B^1+B^2+B^3=0,$$
$$\lambda^1 B^1+\lambda^2 B^2+\lambda^3 B^3=0.$$

Доказательство состоит в явном выписывании условий совместности уравнений на обобщенные функции тока A^1, A^2, A^3.

§ 4. Уравнения хроматографии

Рассмотрим систему уравнений хроматографии ([4] , стр. 661). Как было показано С.П.Царевым ([8]), в инвариантах Римана ее уравнения имеют вид:

$$u^1_t = u^2 u^3 u^1_x, \qquad \lambda^1 = u^2 u^3,$$
$$u^2_t = u^1 u^3 u^2_x, \qquad \lambda^2 = u^1 u^3,$$
$$u^3_t = u^1 u^2 u^3_x, \qquad \lambda^3 = u^1 u^2.$$

Будем искать три обобщенные функции тока A^1, A^2, A^3:

$$dA^1 = B^1\,(dx+\lambda^1 dt),$$
$$dA^2 = B^2\,(dx+\lambda^2 dt),$$
$$dA^3 = B^3\,(dx+\lambda^3 dt),$$

связанные соотношением

$$dA^1+dA^2+dA^3=0.$$

Пользуясь явным видом собственных чисел λ^i, выпишем уравнения (3):

$$d\ln B^1 = \frac{du^2}{u^1-u^2}+\frac{du^3}{u^1-u^3} \mod du^1,$$
$$d\ln B^2 = \frac{du^1}{u^2-u^1}+\frac{du^3}{u^2-u^3} \mod du^2,$$
$$d\ln B^3 = \frac{du^1}{u^3-u^1}+\frac{du^2}{u^3-u^2} \mod du^3,$$

или же

$$d\ln\left[B^1(u^2-u^1)(u^3-u^1)\right]=0 \mod du^1,$$
$$d\ln\left[B^2(u^1-u^2)(u^3-u^2)\right]=0 \mod du^2,$$
$$d\ln\left[B^3(u^1-u^3)(u^2-u^3)\right]=0 \mod du^3.$$

Выбирая B^1, B^2, B^3 в виде:

$$B^1=\frac{1}{(u^2-u^1)(u^3-u^1)},\ B^2=\frac{1}{(u^1-u^2)(u^3-u^2)},\ B^3=\frac{1}{(u^1-u^3)(u^2-u^3)},$$

мы, как нетрудно проверить, удовлетворим (3) и (4) одновременно. Искомые обобщенные функции тока A^1, A^2, A^3 примут вид:

$$dA^1=\frac{dx+u^2u^3\,dt}{(u^2-u^1)(u^3-u^1)},\ dA^2=\frac{dx+u^1u^3\,dt}{(u^1-u^2)(u^3-u^2)},\ dA^3=\frac{dx+u^1u^2\,dt}{(u^1-u^3)(u^2-u^3)}.$$

По утверждению теоремы I характеристики образуют шестиугольную 3-ткань на решениях уравнений хроматографии. Поскольку система уравнений хроматографии записывается в диагональном виде, переход от независимых переменных (x , t) к новым независимым переменным (A^1 , A^2) линеаризует рассматриваемую систему.

§ 5. Уравнения движения газа Чаплыгина

Начнем с более общих уравнений одномерного нестационарного течения газа:

$$\rho_t+u\rho_x+\rho u_x=0,$$
$$u_t+uu_x+p_x/\rho=0,$$
$$s_t+u\cdot s_x=0$$

Здесь ρ - плотность, u - скорость течения, s - энтропия, $p(\rho, x)$ - давление, заданное как функция плотности и энтропии.

Зададимся вопросом: при каких уравнениях состояния $p(\rho, s)$ соответствующая система уравнений будет слабонелинейной и полугамильтоновой?

Представим систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix}u_t\\ \rho_t\\ s_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-u & -p'/\rho & -\dot p/\rho\\ -\rho & -u & 0\\ 0 & 0 & -u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x\\ \rho_x\\ s_x\end{pmatrix},\ p'=\frac{\partial p}{\partial \rho},\ \dot p=\frac{\partial p}{\partial s}.$$

Для собственных чисел получаем выражения:

$$\lambda^1=-u,\ \lambda^2=\sqrt{p'}-u,\ \lambda^3=-\sqrt{p'}-u.$$

Будем искать три обобщенные функции тока

$$dA^1=B^1(dx-u\,dt),$$

$$dA^2 = B^2\left(dx + \left(\sqrt{p'} - u\right)dt\right),$$

$$dA^3 = B^3\left(dx - \left(\sqrt{p'} + u\right)dt\right),$$

связанные соотношением

$$dA^1 + dA^2 + dA^3 = 0.$$

Тогда, согласно (4),

$$B^1 + B^2 + B^3 = 0,$$

$$\lambda^1 B^1 + \lambda^2 B^2 + \lambda^3 B^3 = 0,$$

откуда сразу следует

$B^1 = -2B$, $B^2 = B^3 = B$, где B подлежит определению.

Таким образом,

$$dA^1 = -2B\,(dx - u\,dt),$$

$$dA^2 = B\,(dx + \sqrt{p'} - u)\,dt),$$

$$dA^3 = B\,(dx - \sqrt{p'} + u)\,dt).$$

Поскольку dA^1, dA^2, dA^3 являются линейными комбинациями I-форм $B\,(dx - u\,dt)$ и $B\sqrt{p'}\,dt$, условия замкнутости этих I-форм на решениях системы сразу дают $B = 1/\sqrt{p'}$. Мы пришли к следующей задаче: найти уравнения состояния $p(\rho, s)$, для которых I-форма

$$(p')^{-\frac{1}{2}}\,(dx - u\,dt)$$

будет задавать обобщенную функцию тока для семейства характеристик

$$dx - u\,dt = 0$$

Как показывает непосредственная выкладка, окончательное условие на $p(\rho, s)$ сводится к уравнению

$$p'' = -\frac{2}{\rho}p',$$

откуда без ограничения общности

$$p(\rho, s) = \frac{s}{\rho} + f(s),$$

что дает классическое уравнение состояния для газа Чаплыгина

$$p(\rho, s) = \frac{s}{\rho} \quad \text{при} \quad f(s) = 0.$$

Отметим, что свойство шестиугольности 3-ткани характеристик для газа Чаплыгина было установлено ранее Х.Кильп ([2]).

Преобразование "по решению", переводящее уравнения газа Чаплыгина в систему с постоянными собственными числами, строится следующим образом. Перепишем уравнения

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0,$$
$$u_t + u u_x + p_x/\rho = 0,$$
$$s_t + u s_x = 0$$

в виде системы внешних уравнений:

$$d\rho\wedge(dx - u\,dt) - \rho\, du\wedge dt = 0,$$
$$du\wedge(dx - u\,dt) - 1/\rho\, dp\wedge dt = 0,$$
$$ds\wedge(dx - u\,dt) = 0.$$

Подставим $\rho = s/p$:

$$dp\wedge(dx - u\,dt) + p\, du\wedge dt = 0,$$
$$du\wedge(dx - u\,dt) - p/s\, dp\wedge dt = 0,$$
$$ds\wedge(dx - u\,dt) = 0.$$

Перейдем от независимых переменных (x , t) к новым независимым переменным (A , t), где A - обобщенная функция тока для характеристик $dx - u\,dt = 0$:

$$dA = -\sqrt{-s}/p\,(dx - u\,dt).$$

Преобразованные уравнения примут вид:

$$dp\wedge dA - \sqrt{-s}\, du\wedge dt = 0,$$
$$du\wedge dA - 1/\sqrt{-s}\, dp\wedge dt = 0,$$
$$ds\wedge dA = 0.$$

Из третьего уравнения $s = s(A)$, в результате чего уравнения газа Чаплыгина сводятся к двум линейным уравнениям

$$p_t + \sqrt{-s(A)}\, u_A = 0,$$
$$u_t + 1/\sqrt{-s(A)}\, p_A = 0.$$

Заметим, что указанное преобразование независимых переменных $(x, t) \to (A, t)$ фактически эквивалентно известному в газовой динамике переходу от эйлеровых координат к лагранжевым ([4] , стр. 33).

Литература

I. К и л ь п Х. О., Квазилинейные системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при m неизвестных функциях, двух независимых переменных и несовпадающими характеристиками (геометрическая теория)//. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I97I, 28I.С. 63-85.

2. К и л ь п Х. О., Две квазилинейные системы $S^{1}_{32(1)}$ из механики с шестиугольной тритканью характеристик (геометрическая теория)//. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I975, 374. С. 63-78.

3. В а с и л ь е в А. М., Системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трех неизвестных функциях и двух независимых переменных (локальная теория)//. Матем. сборник. I966. Т. 70, № 4, 457-480.

4. Р о ж д е с т в е н с к и й Б. Л., Я н е н к о Н. Н., Системы квазилинейных уравнений. М. I978.

5. Б л я ш к е В., Введение в геометрию тканей. Москва,I959.

6. Ц а р е в С.П. О лиувиллевых скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа, возникающих в теории усреднения Боголюбова-Уизема.// Успехи математических наук, I984, Т.39,№6.С. 209-2I0.

7. Ц а р е в С.П., О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинатического типа.// ДАН СССР,I985, Т. 282, № 3. С. 534-537.

8. Ц а р е в С.П., Интегрирование уравнений хроматографии прохождения многокомпонентной смеси веществ через сорбирующую среду для случая лэнгмюровской изотермы сорбции// Томографические методы в физико-технических измерениях. Сборник научных трудов, М., I985.

Поступило
23 XII I987

15

WEAKLY NON-LINEAR SEMIHAMILTONIAN SYSTEMS
OF THREE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
FROM THE VIEWPOINT OF THE WEB THEORY

E.V.Ferapontov

S u m m a r y

The main theorem states that weakly non-linear semihamiltonian systems are the only ones among the quasilinear hyperbolic systems of three partial differential equations with hexagonal 3-web of the characteristics on each solution.

It is shown that every weakly non-linear semihamiltonian system is related to a system with constant eigenvalues via some resiprocal transformation.

The equations of chromatography and Chaplygin gas are given as examples.

TRU Toimetised
803 (1988), 115-131

Уч. зап. Тартуск. ун-та
1988, 803. 115-131

КВАДРАТИЧНАЯ ГИПЕРПОЛОСА И НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ ПОДМНОГООБРАЗИЯ КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

Л.Филоненко
Кафедра алгебры и геометрии

§ I. Введение

Впервые понятие полосы в трехмерном евклидовом пространстве E_3 ввел В.Бляшке [23]. Полосой он назвал линию в E_3, оснащенную гладким полем касательных плоскостей. В.В.Вагнер в работе [3] обобщил это понятие, называя m-мерной гиперполосой H_m в n-мерном центроаффинном пространстве A_n поверхность V_m $(m < n-1)$, оснащенную гладким полем касательных гиперплоскостей. Поверхность V_m для гиперполосы H_m называется базисной. Если характеристические плоскости семейства гиперплоскостей гиперполосы H_m не содержат направлений, касательных к ее базисной поверхности V_m, то гиперполоса H_m называется регулярной. В следующие десятилетия исследования были перенесены на случай гиперполос H_m проективного пространства P_n. Обзор соответствующих исследований по теории гиперполос и их обобщений, опубликованных до 1977 года, дает А.В.Столяров [17], ряд более поздних работ по этой тематике освещены Ю.И.Поповым [14]. Значительное место в этих исследованиях занимают построения оснащений регулярных гиперполос. При этом обычно существенно используется тензор Φ_{ijk}, который по аналогии с гиперповерхностью [9] назван тензором Дарбу гиперполосы (А.В.Столяров [15]). Поэтому эти построения не применимы в случае, когда этот тензор обращается в нуль. В нашей работе [18] дано другое построение инвариантного оснащения без использования выше указанного тензора, а поэтому более универсальное, применимое и в случае квадратичной гиперполосы.

Регулярная гиперполоса H_m в P_n называется квадратичной (М.А.Василян [4]), если ее базисная поверхность лежит на невырожденной неподвижной гиперквадрике Q_{n-1}, причем полем касательных гиперплоскостей гиперполосы H_m служит семейство касательных гиперплоскостей гиперквадрики Q_{n-1} в точках поверхности V_m. Квадратичная гиперполоса в P_n в дальнейшем будет обозначена через QH_m. Квадратичные гиперполосы исследовали М.А.Василян [4], [5] и А.В.Столяров [15], [16]. В статье [16] А.В.Столяров выводит внутренний признак квадратичности регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ $2 \le m < n-1$ (анонсирован в [15]). Один из этих признаков состоит в том, что $\mathcal{D}_{ijk} = 0$ это гарантирует, что $V_m \subset Q_{n-1}$.

Внутренний инвариантный репер для квадратичной гиперполосы QH_m в P_n в окрестности четвертого порядка ее образующего элемента, но лишь при $m = n-2$, строил М.А.Василян [4], указав, что его построение тесно связано с инвариантным оснащением гиперповерхности конформного пространства C_{n-1}, построенным М.А.Акивисом [I]. При этом использовалось перенесение Дарбу, которое позволяет невырожденную гиперквадрику $Q_{n-1} \subset P_n$ истолковать как конформное пространство C_{n-1}. Наша работа [I8] может быть рассмотрена как обобщение (в несколько улучшенном виде) этого построения на случай $m \le n-2$. Возникает естественный вопрос о связи наших построений в [I8] с исследованиями М.А.Акивиса по геометрии подмногообразий V_m конформного пространства C_{n-1}, которые в [2] были им расширены на случай $m < n-2$. Было построено инвариантное оснащение, внутренним образом связанное с подмногообразием V_m. Касательное частичное оснащение касательной m-сферой получилось в ее окрестностью второго порядка, а нормальное частичное оснащение нормализующей $(n-m-1)$- сферой в окрестностью третьего порядка.

После перенесения Дарбу эти построения становятся тесно связанными с нормализациями по Э.Картану и А.П.Нордена подмногообразия $V_m \subset Q_{n-1}$. Касательное частичное оснащение дает нормаль Картана в характеристической плоскости, а нормальное частичное оснащение - нормаль 2-го рода по Нордену. Уже в [8] показано, что первое индуцирует касательную конформную связность, присоединенную к $V_m \subset Q_{n-1}$ А.П.Норден [I0] выяснил, что любое поле нормалей 2-рода индуцирует на $V_m \subset Q_{n-1}$ касательную связность Вейля.

М.А.Акивис в своей докторской диссертации (Москва, МГУ, 1964) показал, что эта связность Вейля в случае построенного им инвариантного поля нормалей 2-го рода (т.е. нормализующих сфер) является фактически римановой связностью; этот результат пока не опубликован.

В последнее десятилетие конформную дифференциальную геометрию подмногообразий исследовал в серии своих статей Р.Зуланке (см. [25], [26], [27]). Рассмотрена задача погружения m -мерного многообразия в n-мерное конформное пространство, изучаются конформные инварианты погружений в пространство постоянной кривизны.

В данной работе решаются две задачи. Первая состоит в выяснении связи оснащения, полученного в работе [18], с оснащением поверхности $V_m \subset C_{n-1}$, данным М.А.Акивисом [2]. Для унификации изложения построение в [2] будет переложено путем перенесения Дарбу. Вместо гиперсфер конформного пространства C_{n-1} мы будем говорить о точках в проективном пространстве P_n. Точке A_0 поверхности $V_m \subset C_{n-1}$ будет соответствовать точка A_0 поверхности $V_m \subset Q_{n-1}$, нормальным гиперсферам A_i поверхности $V_m \subset C_{n-1}$ соответствуют точки A_i, лежащие в касательной плоскости E_m поверхности $V_m \subset Q_{n-1}$; касательным гиперсферам A_α -точки A_α, лежащие в характеристике E_{n-m-1} семейство касательных к Q_{n-1} гиперплоскостей в точках $A_0 \in V_m \subset Q_{n-1}$.

В итоге к $V_m \subset C_{n-1}$ присоединяется квадратичная гиперполоса с базисной поверхностью $V_m \subset Q_{n-1}$, которая называется квадратичной гиперполосой подмногообразия V_m конформного пространства C_{n-1}. Оказывается, что построение инвариантного оснащения в [18], если его применить к случаю этой квадратичной гиперполосы, полностью совпадает с построением М.А.Акивиса [2]. Поэтому изложенное в [18] позволяет представить построение М.А.Акивиса [2] в более общем репере: в [2] требуется, чтобы исходный репер был автополярен второго рода, изложение в [18] позволяет обойтись без этого требования.

Второй задачей, решаемой в статье, является присоединение к $V_m \subset C_{n-1}$ нормальных связностей. В [24] отмечалось, что нормальная связность подмногообразия в римановом пространстве инвариантна при конформных преобразованиях пространства. Насколько нам известно, чисто конформного подхода к нормальной связности подмногообразия конформного пространства в литературе еще не сделано.

При их введении и использовании будем пользоваться результатами А.В.Чакмазяна [21], [22], полученными при изучении нормальных связностей подмногообразий, нормализованных по Нордену, в проективном пространстве. Оказывается, что $V_m \subseteq C_{n-1}$ имеет три вида нормальных связностей. Наиболее простой является евклидова связность в векторном расслоении, которая возникает без всякого оснащения. Вторая получается с помощью нормали 2-го рода в этом же векторном расслоении расширением структурной группы до группы подобий.

Третья связность возникает в точечно-аффинном расслоении при расширении структурной группы до группы евклидовых подобий (аналог касательной связности Вейля).

Все исследования, проведенные в настоящей работе, носят локальный характер. Изучаемые многообразия предполагаются достаточно гладкими.

Используются следующие индексы:

$i, j, k = 1, 2, \dots, m; \ \alpha, \beta, \gamma = m+1, \dots, n-1; \ p, q = \overline{1, n-1}; \ \mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = \overline{0, n}$

и оператор дифференцирования ∇, действующий по закону, который станет ясным из примера:

$$\nabla B^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} = d B^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} + B^{\mathcal{I}}_{\mathcal{K}} \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{I}} - B^{\mathcal{J}}_{\mathcal{I}} \omega^{\mathcal{I}}_{\mathcal{K}} .$$

§ 2. Инвариантное оснащение квадратичной гиперполосы

Приступим к решению первой задачи. Рассмотрим, во что превращаются построения, проведенные в [18], если их применить для частного случая - квадратичной гиперполосы $QH_m \subset P_n$.

Пользуемся в P_n подвижным проективным репером, состоящим из аналитических точек $A_0, A_i, \dots, A_n$. Пусть задана квадратичная гиперполоса QH_m в P_n с базисной поверхностью $V_m \subset Q_{n-1}$. Адаптируем репер к ней так, чтобы $A_0 \in V_m$, точки $A_1, \dots, A_n$ лежали в касательной плоскости к V_m в точке A_0 и тем самым полярно сопряжены с A_0, а $A_{m+1}, \dots, A_{n-1}$ были полярно сопряжены относительно Q_{n-1} с точками $A_0, A_1, \dots, A_m$. При этом A_n может пока свободно располагаться вне касательной к Q_{n-1} гиперплоскости в точке A_0, определяемой теперь точками $A_0, \dots, A_{n-1}$.

В формулах

$$d A_{\mathcal{J}} = \omega^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}} A_{\mathcal{K}}$$

инфинитезимального перемещения репера тогда

$$\omega_0^\alpha = 0 ; \quad \omega_0^i = 0. \qquad (2.1)$$

В уравнении $g_{IK} x^I x^K = 0$ гиперквадрики Q_{n-1}, условие неподвижности которой состоит в том, что (см. [9])

$$\nabla g_{IK} = 2\Theta g_{IK}, \qquad (2.2)$$

где

$$\nabla g_{IK} = d g_{IK} - g_{IJ}\omega_K^J - g_{JK}\omega_I^J .$$

В силу такой адаптации репера имеют место тождества:

$$g_{00} \equiv g_{0i} \equiv g_{0\alpha} \equiv g_{i\alpha} \equiv 0 ; \quad g_{0n} = -1 . \qquad (2.3)$$

здесь последним тождеством произведена нормировка уравнения гиперквадрики Q_{n-1}.

Тогда из (2.2) при $I = i,\ K = 0$ следует:

$$\omega_i^n = g_{ij}\,\omega^j, \qquad (2.4)$$

а при $I = \alpha,\ K = 0$ получается

$$\omega_\alpha^n = 0 \qquad (2.5)$$

Последние уравнения показывают, что точки $A_{m+1}, \dots, A_{n-1}$ лежат на характеристике гиперполосы QH_m в точке A_0.

Уравнения (2.1), (2.5) после внешнего дифференцирования, используя структурные уравнения

$$d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K .$$

и применяя лемму Картана [20], дают:

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j , \qquad \omega_\alpha^i = \Lambda_\alpha^{ij} \omega_j^n ,$$

где Λ_{ij}^α и Λ_α^{ij} симметричны по индексам i, j.

Кроме (2.4), (2.5) из (2.2) с учетом (2.3) вытекает:

$$\nabla g_{ij} = g_{kj}\,\omega_i^k + g_{ik}\,\omega_j^k + [2g_{n(i}g_{j)k} + g_{ij}g_{kn}]\,\omega^k - g_{ij}(\omega_0^0 + \omega_n^n) \qquad (2.6)$$

Из соотношения

$$g_{\alpha\beta}\,\omega_i^\beta + g_{n\alpha}\,\omega_i^n + g_{ij}\,\omega_\alpha^j = 0$$

следует:

$$g_{n\alpha} = -(g_{\alpha\beta}\Lambda^\beta + \Lambda_\alpha)$$

где

$$\Lambda^\alpha = \frac{1}{m} g^{kl} \Lambda_{kl}^\alpha , \qquad \nabla_\delta \Lambda^\alpha = \Lambda^\alpha \pi_n^n - \pi_n^\alpha ,$$

$$\Lambda_\alpha = \frac{1}{m} g_{kl} \Lambda_\alpha^{kl} , \qquad \nabla_\delta \Lambda_\alpha = \pi_\alpha^0 - \Lambda_\alpha \pi_0^0 .$$

Заметим, что в случае общей регулярной гиперполосы вместо (2.4) и (2.6) в [18] получены более общие выражения:

$$\omega_i^n = a_{ij}\omega^j, \quad \nabla a_{ij} = a_{ijk}\omega^k - a_{ij}(\omega_0^0 + \omega_n^n). \qquad (2.7)$$

Простое сравнение покажет, что теперь

$$a_{ij} = g_{ij},$$

$$a_{ijk} = g_{ij}g_{kn} + 2g_{n(i}g_{j)k}.$$

Для невырожденного тензора a_{ij} рассмотрим обратный ему тензор a^{ij}, компоненты которого получены условием:

$$a_{ik}a^{kj} = \delta_i^j.$$

Дифференцируя это соотношение и учитывая (2.7), получаем:

$$\nabla a^{ij} = a^{ijk}\omega_k^n + a^{ij}(\omega_0^0 + \omega_n^n).$$

Дальше строим по примеру [18] следующие объекты:

$$t_i = \frac{1}{m+2} a_{ijk} g^{jk} = g_{in}, \quad \nabla t_i - t_i\omega_0^0 - g_{ik}\omega_n^k + \omega_i^0 = t_{ik}\omega^k,$$

$$t^i = \frac{1}{m+2} a^{ijk} g_{jk}, \quad \nabla t^i = t^i\omega_n^n - g^{ik}\omega_k^0 + \omega_n^i - t^{ij}\omega_j^n.$$

Вводя

$$b_{ij}^\alpha = \lambda_{ij}^\alpha - \lambda^\alpha g_{ij}, \quad \nabla_\delta b_{ij}^\alpha = -b_{ij}^\alpha \pi_0^0;$$

$$c_\alpha^{ij} = \lambda_\alpha^{ij} - \lambda_\alpha g^{ij}, \quad \nabla_\delta c_\alpha^{ij} = c_\alpha^{ij}\pi_n^n,$$

строим тензор

$$y_\alpha^\beta = b_{ij}^\beta c_\alpha^{ij},$$

ранг которого обозначим через S. Из него составим

$$y = y_{[\alpha_1}^{\beta_1} y_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots y_{\alpha_S]}^{\beta_S}, \text{ где } (\beta_1, \dots, \beta_S = m+1, \dots, n-1).$$

В дальнейшем рассматриваются лишь такие гиперполосы, для которых $y \neq 0$. Тогда имеем:

$$d(\ln y)^{1/S} = \omega_n^n - \omega_0^0 + y_i\omega^i,$$

где

$$y_i = -g_{ij}y^j.$$

Теперь, обозначая

$$\lambda_i = -\frac{1}{2}(t_i + y_i),$$

$$\lambda^i = -\frac{1}{2}(t^i + y^i),$$

введем, следуя [18], величины

$$\lambda = -\lambda_\alpha \lambda^\alpha; \tag{2.8}$$

$$T = \frac{1}{m}(t_{ij} - t_i t_j) g^{ij},$$
$$\bar{T} = \frac{1}{m}(t^{ij} - t^i t^j) g_{ij},$$
$$\tilde{\chi} = \frac{1}{2}(\lambda + T + g_{ij}\lambda^i \lambda^j) + \lambda^i t_i, \tag{2.9}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{T} + g^{ij}\lambda_i \lambda_j) + \lambda_i t^i, \tag{2.10}$$

$$\bar{\lambda}^0 = \frac{a\tilde{\chi} + b\bar{\chi}}{a + b}, \tag{2.11}$$

где

$$\bar{\chi} = -(\bar{y} + \lambda_i \lambda^i + \lambda_\alpha \lambda^\alpha), \tag{2.12}$$

а a, b – произвольные действительные числа.

Ниже мы увидим, что в случае квадратичной гиперполосы QH_m зависимость от a и b здесь фактически отпадает.

Построенные объекты позволяют ввести инвариантный репер, присоединенный в [18] внутренним образом к квадратичной гиперполосе $QH_m \subset P_n$ в окрестности третьего порядка ее образующего элемента и состоящий из точек

$$\begin{aligned} M_0 &= A_0, \\ M_i &= A_i - \lambda_i A_0, \\ M_\alpha &= A_\alpha - \lambda_\alpha A_0, \\ M_n &= A_n + \lambda^\alpha A_\alpha + \lambda^i A_i + \bar{\lambda}^0 A_0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Инвариантность этого репера $\{M_0, M_i, M_\alpha, M_n\}$ следует из формул (см. [18])

$$\nabla \lambda_i = -\lambda_i \omega_0^0 - \omega_i \quad (\mathrm{mod}\, \omega^j),$$
$$\nabla \lambda_\alpha = \omega_\alpha^0 - \lambda_\alpha \omega_0^0 \quad (\mathrm{mod}\, \omega^j),$$
$$\delta \bar{\lambda}^0 = \bar{\lambda}^0(\omega_0^0 - \omega_n^n) - \lambda^\alpha \omega_\alpha^0 + \lambda_\alpha \omega_n^\alpha \quad (\mathrm{mod}\, \omega^j).$$

Точки M_α определяют плоскость E_{n-m-2}, принадлежащую характеристике и не проходящую через точку A_0. Ее мы будем называть инвариантной характеристической нормалью Картана. Точки M_i определяют инвариантную плоскость E_{m-1} в касательной плоскости базисной поверхности $V_m \subset Q_{n-1}$; по А.П.Нордену [10] это нормаль второго рода. Плоскость, натянутая на M_n и характеристику, т.е. на точки A_0, M_α

и M_n, является инвариантной нормалью первого рода для базисной поверхности V_m гиперполосы QH_m, а плоскость, натянутая на M_α и E_{n-m-2} – инвариантной нормалью Картана.

Чтобы показать связь с построениями М.А.Акивиса [2] перейдем к автополярному реперу второго рода, т.е. ставим дополнительные условия, чтобы $A_n \in Q_{n-1}$ и A_n была полярно сопряжена как с A_i, так и с A_α. Получим:

$$g_{in} = g_{\alpha n} = g_{nn} = 0.$$

Мы будем иметь теперь следующие соотношения:

$$\lambda_\alpha = -g_{\alpha\beta}\lambda^\beta, \tag{2.14}$$

$$a_{ijk} = 0,$$

$$t_i = t^i = 0, \quad \bar{T} = T = 0, \tag{2.15}$$

$$d(\ln y)^{1/s} = -2\omega_0^0 + y_i\omega^i, \tag{2.16}$$

$$\lambda^i = -\frac{1}{2}y^i,$$

$$\lambda_i = -\frac{1}{2}y_i \tag{2.17}$$

В работе М.А.Акивиса [2] построен тензор a^α_{ij}, который совпадает с нашим тензором b^α_{ij}. С его помощью в [2] строится тензор

$$a^\beta_\alpha = g_{\alpha\gamma}g^{ik}g^{je}a^\gamma_{ij}a^\beta_{ke};$$

сравнение его с нашим тензором y^β_α дает, что

$$a^\beta_\alpha = -y^\beta_\alpha.$$

М.А.Акивис [2] строит относительный инвариант

$$a = a^{\alpha_1}_{[\alpha_1} \dots a^{\alpha m_1}_{\alpha m_1]}$$

и покажет, что он удовлетворяет уравнению

$$da = -2m_1 a(\omega_0^0 + \mu_i\omega^i). \tag{2.18}$$

Непосредственное сравнение (2.16) и (2.18) с учетом (2.17) дает

$$\mu_i = -\frac{1}{2}y_i = \lambda_i \tag{2.19}$$

Объект $\lambda^\alpha = \frac{1}{m}g^{ij}\lambda^\alpha_{ij}$, построенный в работе [2] М.А.Акивиса, совпадает с объектом λ^α работы [18].

С помощью объекта λ_α, который совпадает с нашим (2.14) и объекта μ_i, совпадающего с λ_i, М.А.Акивис находит инвариантную точку

$$E_n = A_n + \mu^i A_i - \lambda^\alpha A_\alpha - \frac{1}{2}(\mu_k\mu^k + \lambda_\alpha\lambda^\alpha)A_0 \tag{2.20}$$

где

$$\mu^i = g^{ij}\mu_j .$$

Оказывается, что эта точка есть точка M_n нашего инвариантного репера (I.I3). Чтобы доказать это, надо рассмотреть величину $\bar{\lambda}^0$ определяемую формулам (2.II). С учетом (2.8), (2.I5) из (2.9), (2.I0), (2.I2) получим:

$$\tilde{x} = \frac{1}{2}(-\lambda_\alpha \lambda^\alpha + g_{ij}\lambda^i \lambda^j),$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}(-\lambda_\alpha \lambda^\alpha + g^{ij}\lambda_i \lambda_j),$$

$$\bar{x} = -\frac{1}{2}(\lambda_\alpha \lambda^\alpha + g^{ij}\lambda_i \lambda_j + \frac{1}{2}\lambda_i \lambda^i)$$

Тогда

$$\bar{\lambda}^0 = -\frac{1}{2}\lambda_\alpha \lambda^\alpha + \frac{a-b}{2(a+b)} g^{ij}\lambda_i \lambda_j - \frac{b}{a+b}\lambda_j \lambda^j = -\frac{1}{2}(\lambda_\alpha \lambda^\alpha + \lambda_j \lambda^j)$$

т.е. M_n совпадает с точкой (2.20).

Мы приходим к выводу, что построение инвариантного оснащения регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$, данное в [18], если его применить к случаю квадратичной гиперполосы QH_m, совпадает с построением инвариантного оснащения подмногообразия V_m в конформном пространстве по М.А.Акивису [2]. Совпадение достигается, если к $V_m \subset C_n$ присоединить путем перенесения Дарбу его квадратичную гиперполосу.

§ 3. Связности при нормализации Нордена

Прежде чем приступить к решению второй задачи, поставленной во введении, ознакомимся с необходимыми при этом результатами о касательных связностях нормализованной гиперполосы и о нормальных связностях подмногообразий, нормализованных по Нордену, в проективном пространстве P_n.

При нормализации гиперполосы по Нордену [10] возникают расслоения: касательное расслоение базисной поверхности V_m, слоями которого являются центроаффинные касательные плоскости и расслоение нормалей первого рода, с проективными слоями. В [10] показано, что в первом из них возникает аффинная связность. При оснащении нормалями Картана получается проективная связность в центропроективном касательном расслоении. Вопросами, посвященными аффинным и проективным связностям, индуцируемым оснащением гиперполосы в касательных расслоениях занимались Ю.И.Попов [14], М.А.Василян [7].

В работах А.В.Чакмазяна [21], [22] рассматриваются вопросы, посвященные нормальной центропроективной связности многообразия, нормализованного по Нордену в n-мерном проективном пространстве P_n. А.В.Чакмазян [20] называет подмногообразие V_m в P_n, нормализованное по А.П.Нордену, двойственно нормализованным, если существует гиперполоса H_m с базисной поверхностью V_m такая, что нормаль первого рода в каждой точке $x \in V_m$ содержит характеристику семейства гиперплоскостей полосы H_m. В этом случае существует поле характеристических направлений, параллельное в нормальной связности, причем в соответствующем характеристическом подрасслоении нормального расслоения, возникает центропроективная связность, которую мы будем называть характеристической связностью данной гиперполосы H_m. А.В.Чакмазяном в [20] также доказано, что двойственно нормализованная гиперполоса допускает построение ее двойственной геометрии. Двойственная нормализация индуцирует в касательном расслоении две двойственные аффинные связности, которые являются сопряженными относительно главного фундаментального тензора регулярной гиперполосы. Изучению ряда вопросов внутренней геометрии двойственных аффинных и проективных связностей в касательном расслоении на двойственно нормализованной гиперполосе $RH_m \subset P_n$ посвящены работы Ю.И.Попова [13], [14], А.В.Столярова [17].

Для нас в дальнейшем особенно важно то, что в результате нормализации регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ по Нордену-Чакмазяну (т.е. нормализации V_m по Нордену, двойственной с данной гиперполосой H_m по Чакмазяну) возникает характеристическое расслоение, слоями которого являются характеристические $(n-m-1)$ - плоскости гиперполосы H_m, оно является подрасслоением нормального расслоения. Поскольку поле характеристических направлений параллельно в нормальной связности, то в нем по [21], [22] определена центро-проективная связность, которую мы будем называть характеристической связностью гиперполосы.

Оформим сказанное аналитически.

Находим структурные уравнения этой характеристической связности. Адаптируем репер к нормализованной по Нордену - Чакмазяну регулярной гиперполосе так, чтобы при выборе $A_0 \in V_m$ точки A_i лежали на нормали второго рода, точки A_α - на характеристике, а точка A_n - на гиперповерхности гиперполосы H_m. Тогда имеют место (2.1) и

(2.5) вместе с их дифференциальными следствиями и , кроме того,

$$\omega_i^0 = d_{ij}\omega^j; \qquad \omega_\alpha^i = \lambda_{\alpha j}^i \omega^j \tag{3.1}$$

Формами связности на характеристической связности являются $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$, которые получаются из форм ω_α^β следующим образом; из структурных уравнений теперь следует, что

$$d\omega_\alpha^0 = \tilde{\omega}_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^0 + \tilde{\Omega}_\alpha^0, \tag{3.2}$$

$$d\tilde{\omega}_\alpha^\beta = \tilde{\omega}_\alpha^\gamma \wedge \tilde{\omega}_\gamma^\beta + \tilde{\Omega}_\alpha^\beta, \tag{3.3}$$

где

$$\tilde{\omega}_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \omega_0^0 \tag{3.4}$$

и

$$\tilde{\Omega}_\alpha^0 = \lambda_{\alpha j}^i d_{ik}\omega^j \wedge \omega^k, \tag{3.5}$$

$$\tilde{\Omega}_\alpha^\beta = (\lambda_{\alpha k}^i \lambda_{ij}^\beta - \delta_\alpha^\beta d_{kj})\omega^k \wedge \omega^j. \tag{3.6}$$

Видно, что квадратичные формы $\tilde{\Omega}_\alpha^0$ и $\tilde{\Omega}_\alpha^\beta$, входящие в уравнения (3.2) и (3.3) являются полубазовыми, т.е. выражаются только через произведения $\omega^i \wedge \omega^k$. Поэтому в силу теоремы Картана - Лаптева [I2] формулы $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$, ω_α^0 определяют центропроективную связность в характеристическом расслоении $X(V_m)$. Эту связность мы и называли характеристической связностью. Её формами кручения-кривизны являются формы (3.5) и (3.6). Ей подчинена линейная связность с формами связности $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ и формами кривизны $\tilde{\Omega}_\alpha^\beta$, как следует из (3.3) - характеристическая линейная связность.

§ 4. Нормальные связности подмногообразия конформного пространства

Пусть задано подмногообразие V_m в конформном пространстве C_{n-1} . Путем перенесения Дарбу можем C_{n-1} реализовать в виде регулярной гиперквадрики Q_{n-1} в проективном пространстве P_n , заданной уравнением

$$g_{pq}x^p x^q - 2x^0 x^n = 0,$$

где $p, q = 1, \dots, n-1$ и $\det|g_{pq}| \neq 0$. Это уравнение, как видно, записано относительно нормированного автополярного репера 2-го рода, т.е. A_0 и A_n принадлежат гиперквадрике Q_{n-1}, составляют нормированную пару, а остальные A_p полярно сопряжены к ним. Если рассматривать многообразие всех таких реперов, то существенные формы ω_J^K в формулах инфинитезимального перемещения $dA_J = \omega_J^K A_K$ удовлетворяют структурным уравнениям конформного пространства C_{n-1}:

$$d\omega_0^0 + \omega_p^0 \wedge \omega_0^p = 0, \tag{4.1}$$

$$d\omega_0^p + (\omega_q^p - \delta_q^p \omega_0^0) \wedge \omega_0^q = 0, \tag{4.2}$$

$$d\omega_p^q + \omega_p^r \wedge \omega_r^q + \omega_0^q \wedge \omega_p^0 + g^{qr} g_{ps} \omega_r^0 \wedge \omega_0^s = 0, \tag{4.3}$$

$$d\omega_q^0 + \omega_p^0 \wedge (\omega_q^p - \delta_q^p \omega_0^0) = 0. \tag{4.4}$$

Здесь учтено, что $\omega_0^n = \omega_n^0 = 0,\ \omega_p^n = g_{pq}\omega_0^q,\ \omega_n^p = g^{pq}\omega_q^0,\ \omega_n^n = -\omega_0^0$ и, кроме того, $dg_{pq} = g_{rq}\omega_p^r + g_{pr}\omega_q^r$, как следует из (2.2) при нашем выборе репера.

Имея в Q_{n-1} подмногообразие V_m мы можем взять его квадратичную гиперполосу QH_m, гиперплоскостью которой в точке $A_0 \in Q_{n-1}$ является касательная гиперплоскость к Q_{n-1}, а относительные точки репера адаптировать к этой QH_m так, как было сделано в § 2. Тогда имеют место

$$\omega_0^\alpha = 0,\quad \omega_i^\alpha = \lambda_{ij}^\alpha \omega^j,\quad \lambda_{ij}^\alpha = \lambda_{ji}^\alpha. \tag{4.5}$$

и в силу (2.3)

$$\omega_i^n = g_{ij}\omega^j,\quad \omega_\alpha^n = 0,\quad \omega_\alpha^i = -g^{ij} g_{\alpha\beta} \lambda_{jk}^\beta \omega^k. \tag{4.6}$$

Если теперь сделать отсюда подстановки в уравнение (4.3), записанное для $p=\alpha$ и $q=\beta$:

$$d\omega_\alpha^\beta + \omega_\alpha^0 \wedge \omega_0^\beta + \omega_\alpha^i \wedge \omega_i^\beta + \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \omega_\alpha^n \wedge \omega_n^\beta + \omega_0^\beta \wedge \omega_\alpha^0 + g^{\beta\gamma} g_{\alpha\delta} \omega_\gamma^0 \wedge \omega_0^\delta = 0,$$

то получим следующее уравнение

$$d\omega_\alpha^\beta + \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = \mathcal{R}_\alpha^\beta, \tag{4.7}$$

где

$$\mathcal{R}_\alpha^\beta = g^{ij} g_{\alpha\gamma} \lambda_{jk}^\gamma \lambda_{il}^\beta \omega^k \wedge \omega^l \tag{4.8}$$

являются полубазовыми 2-формами. По теореме Картана-Лаптева в характеристическом расслоении квадратичной гиперполосы возникает связность, формами которой являются ω_α^β, удовлетворяющие $dg_{\alpha\beta} = g_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma + g_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma$, а формами кривизны которой являются $\mathfrak{R}_{\alpha}^{\beta}$. Эта связность, как видно, является евклидовой линейной связностью. С точки зрения подмногообразия V_m конформного пространства C_{n-1} отсюда следует следующее Предложение [+]: С каждым подмногообразием V_m конформного пространства C_{n-1} присоединена евклидова линейная связность со структурными уравнениями (4.7) и формами кривизны (4.8). Эту связность мы будем называть нормальной евклидовой связностью подмногообразия $V_m \subset C_{n-1}$. Её можно истолковать следующим образом. Известно, что в виде открытой области пространства C_{n-1} может быть реализовано всякое $(n-1)$-мерное односвязное пространство постоянной кривизны. В этом пространстве подмногообразие V_m имеет нормальное векторное расслоение и нормальную связность. При замене одного такого пространства другим происходит его конформное отображение на другое пространство постоянной кривизны. Известно, что нормальная связность подмногообразия конформно инвариантна. Указанная в предложении связность и представляет собой эту конформно инвариантную нормальную связность.

Оказывается, что в характеристическом расслоении квадратичной гиперполосы данного подмногообразия $V_m \subset Q_{n-1}$ можно ввести и другие связности с более широкой структурной группой, если заданы некоторые элементы оснащения.

Пусть V_m оснащено полем нормалей 2-го рода. Адаптировав репер так, чтобы A_i принадлежали этой нормали, мы имеем (3.I) и из (4.I) и (4.3) следует для форм (3.4), что

$$d\tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta} + \tilde{\omega}_{\alpha}^{\gamma} \wedge \tilde{\omega}_{\gamma}^{\beta} = \tilde{\mathfrak{R}}_{\alpha}^{\beta} \qquad (4.9)$$

где $\tilde{\mathfrak{R}}_{\alpha}^{\beta} = \mathfrak{R}_{\alpha}^{\beta} - \delta_{\alpha}^{\beta} d_{k\ell}\, \omega^{k} \wedge \omega^{\ell}$ и $\mathfrak{R}_{\alpha}^{\beta}$ определяется формулой (4.8). Следовательно, для V_m в Q_{n-1}, оснащенного полем нормалей 2-го рода, определена связность в характеристическом расслоении, формами связности которой являются $\tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta} = \omega_{\alpha}^{\beta} - \delta_{\alpha}^{\beta} \omega_{0}^{0}$. Для них

$$\nabla g_{\alpha\beta} = 2 g_{\alpha\beta}\, \omega_{0}^{0},$$

так что структурной группой этой связности является группа центральных подобий $(n-m-1)$-мерного евклидова пространства, т.е. группа вращений и гомотетий.

Эту связность для подмногообразия V_m конформного пространства будем называть нормальной вейлевой связностью;

[+] Сообщено мне Ü.Г.Лумисте.

её группа такова, как у связности Вейля в касательном расслоении нормализованного V_m (см. [10], § 83), но она определена в нормальном расслоении. Обратимся теперь и к (4.4). Отсюда

$$d\omega_\alpha^0 + \omega_\beta \wedge \tilde{\omega}_\alpha^\beta = \tilde{\Omega}_\alpha^0,$$

где $\tilde{\Omega}_\alpha^0 = -g^{ij} g_{\alpha\beta} \lambda_{jk}^\beta d_{i\ell}\, \omega^k \wedge \omega^\ell$. Вместе с (4.9) это покажет, что в характеристическом расслоении квадратичной гиперполосы, оснащенной полем нормалей 2-го рода, определена связность, структурной группой которой является группа подобий евклидова пространства.

Это расслоение и связность можно истолковать следующим образом. Точки на Q_{n-1}, полярно сопряженные с нормалью второго рода, составляют некоторую Q_{n-m}, во внутренности которой реализуется гиперболическая геометрия. С конформной точки зрения это Q_{n-m} представляет собой нормализующую сферу ([10], § 83). Группа полученной выше связности является подгруппой стационарности точки $A_0 \in Q_{n-m}$ в группе движений этой гиперболической геометрии, относительно которой A_0 лежит на абсолюте. Следовательно, эта группа сохраняет связку параллельных прямых в гиперболической геометрии. Так как на ортогональных к связке орисферах имеет место евклидова геометрия, отличающаяся подобием на различных орисферах, то группа - группа подобий евклидова пространства, которое можно отождествить с $Q_{n-m} \setminus \{A_0\}$.

Для нормализованных подмногообразий V_m в конформном пространстве C_{n-1} это означает, что в евклидовом расслоении пунктированных нормализующих сфер определена связность с группой подобий. Эту связность мы будем называть нормальной связностью подобий нормализованного подмногообразия $V_m \subset C_{n-1}$.

Построенный выше в § 2 объект λ_i (или μ_i по М.А. Акивису [2]) позволяет теперь ввести нормальную связность подобий, инвариантно присоединенную к подмногообразию $V_m \subset C_{n-1}$. Объект λ_α фиксирует вместе с λ_i инвариантную точку (2.20) на Q_{n-1}. Выбирая эту точку C_n за A_n мы получим $\lambda_i = \lambda_\alpha = 0$ и $\omega_i^0 = d_{ij}\, \omega^j$ прибавляются $\omega_\alpha^0 = \mu_{\alpha i}\, \omega^i$. Рассмотренное выше евклидово расслоение становится центроевклидовым, а инвариантная нормальная связность подобий редуцируется к инвариантной нормальной вейлевой связности.

Эти связности могут быть исследованы, конечно, и в том общем репере, который был применен в § 2. Они определяются в дифференциальной окрестности третьего порядка.

Я благодарю своего руководителя - профессора Ю.Г.Лумисте, прочитавшего рукопись и давшего ряд ценных советов.

Литература

1. А к и в и с М.А. Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства // ДАН СССР. т.82. № 3. 1952. С. 325-328; Матем. сборник. т. 31(73). № 1. 1952. С. 43-75.
2. А к и в и с М.А. К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей// Матем. сборник. т. 53(95). № 1. 1961. С. 53-72.
3. В а г н е р В.В. Теория поля локальных гиперполос //Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1950. вып. 8. С. 197-272.
4. В а с и л я н М.А. Квадратичные гиперполосы ранга $n-2$ в проективном пространстве P_n // ДАН Арм.ССР. Математика. 1970. т. 50. № 4. С. 193-197.
5. В а с и л я н М.А. Об инвариантном оснащении гиперполосы // ДАН Арм.ССР. 1970. т. 50. № 2. С. 65-70.
6. В а с и л я н М.А. Проективная теория многомерных гиперполос // Изв. АН Арм.ССР. Математика. 1971. 6. № 6. С. 477-481.
7. В а с и л я н М.А. Аффинные связности, индуцируемые оснащением гиперполосы // Докл. АН Арм.ССР. 1973. 57. № 4. С. 200-205.
8. К а р т а н Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности // Изд-во Казанского ун-та. 1961.
9. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Москов. мат. о-ва. 1953. т.2. С. 275-382.
10. Н о р д е н А.П. Пространство аффинной связности. М. [illegible]

II. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а н у Н.М., Ш и р о к о в А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Т. 9. М.: ВИНИТИ, 1979. С. 7-246.

I2. П о п о в Ю.И. К теории оснащенной гиперполосы в многомерном проективном пространстве // Уч. записки Моск. гос.пед.ин-та им. В.И.Ленина. Вопросы дифференциальной геометрии. 1970. I. № 374. С. 102-117.

I3. П о п о в Ю.И. Теория оснащенных регулярных гиперполос с ассоциированной связностью многомерного проективного пространства // В сб.: "Диф. геометрия многообразий фигур". Калининград. 1973. 3. С. 81-96.

I4. П о п о в Ю.И. Общая теория регулярных гиперполос.// Калининград. 1983.

I5. С т о л я р о в А.В. Условия квадратичности регулярной гиперполосы // Изв.высш.учеб.заведений. Математика. 1975. № II. С. 106-108.

I6. С т о л я р о в А.В. Условия квадратичности регулярной гиперполосы // В сб.: "Диф. геометрия многообразий фигур". Калининград. 1978. вып. 9. С. 93-101.

I7. С т о л я р о в А.В. Дифференциальная геометрия полос// Проблемы геометрии. ВИНИТИ АН СССР. М. 1978. т. 10. С. 25-54.

I8. Ф и л о н е н к о Л.Ф. Об инвариантном оснащении квадратичной гиперполосы QH_m в окрестности третьего порядка ее образующего элемента // Латв. мат. ежегодник. Рига. Зинатне. 1986. вып. 30. С. 168-173.

I9. Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ОГИЗ. 1948.

20. Ч а к м а з я н А.В. Двойственная нормализация // Докл. АН Арм. ССР. 1959. 28. № 4. С. 151-157.

2I. Ч а к м а з я н А.В. Нормализованное по Нордену подмногообразие с параллельным полем нормальных направлений в P_n // ДАН СССР. 1977. т. 236. № 4. С. 816-819.

22. Ч а к м а з я н А.В. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n // В сб.: "Проблемы геометрии". т. 10. ВИНИТИ АН СССР. М. 1978. С. 55-74.

23. B l a s c h k e W. Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen Einsteins Relativitäts-theorie. I Berlin, 1930. (имеется русский перевод: Бляшке В., Дифференциальная геометрия I). М.-Л.: ОНТИ,

1935).

24. C h e n B. - Y. Some conformal invariants of submanifolds and their applications// Boll. Unione mat. ital. 1974. V. 10. P. 380-385.
25. S c h i e m a n g k C., S u l a n k e R. Submanifolds of the Möbius space // "Math. Nachr." 1980. 96. C. 165-183.
26. S u l a n k e R. Submanifolds of the Möbius space. III The analogue of O.Bonnet's theorem for hypersurfaces // "Tensor". 1982. 38. Commem. vol. 2. P 311-317.
27. S u l a n k e R. Submanifolds of the Möbius space. IV. Conformal invariants of immersions into spaces of constant curvature // Potsdam Forch. 1984, B. N º 43, S. 21-26.

Поступило
20.11. 1987

QUADRIC HYPERSTRIP AND CONNECTIONS OF A SUBMANIFOLD IN THE CONFORMAL SPACE

L.F.Filonenko

S u m m a r y

It is known, that Darboux correspondence maps the conformal space C_{n-1} into a hyperquadric Q_{n-1} in the projective space P_n. If a submanifold $V_m \subset C_{n-1}$ is given, then by means of its image a hyperstrip is determined which consists of the tangent hyperplanes to Q_{n-1} in the points of this image and is called the quadric hypership QH_m of the submanifold V_m. It is shown that the invariant rigging of a regular hyperstrip, constructed in [18], gives the invariant rigging of $V_m \subset C_{n-1}$, erected by M.A.Akivis [2], by applying it to this QH_m.

The second aim of the paper is to join three kinds of normal connections to a $V_m \subset C_{n-1}$. The first is a euclidean connection in the normal vector bundle and can be interpreted by the conform invariant normal connection of a submanifold in a space form. The second is duced by a normalizing sphere in the same bundle, but has the group of dilatations and rotations as the structural group. The third is induced by a tangent sphere and is a connection in a normal affine bundle with a group of euclidean similarities as the structural group.

TRÜ Toimetised
803 (1988), 132-142

Уч. зап. Тартуск. ун-та.
1988, 803, 132-142

АЛГЕБРЫ ИНВАРИАНТНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Фляйшер

Лаборатория прикладной математики

§ I. Введение.

Пусть $M=G/H$ -редуктивное однородное пространство с разложением алгебры Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$. Следуя [8], подпространство $\mathfrak{m}$ можно наделить структурой неассоциативной антикоммутативной алгебры, полагая для $X,Y\in\mathfrak{m}$ произведение $X\circ Y=[X,Y]_{\mathfrak{m}}$, где $[X,Y]_{\mathfrak{m}}$ - проекция скобки $[X,Y]$ на $\mathfrak{m}$ (аналогично $h(X,Y)=[X,Y]_{\mathfrak{h}}$ - проекция $[X,Y]$ на $\mathfrak{h}$). Полученную алгебру будем обозначать $(\mathfrak{m},\circ)$.

Однако, алгебра $(\mathfrak{m},\circ)$ не является единственной неассоциативной алгеброй, связанной с G/H. В [7] было установлено биективное соответствие между множеством G-инвариантных связностей на редуктивном G/H с разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ и множеством билинейных функций $\alpha:\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}$, которые $Ad(H)$ -инвариантны. Другими словами, с каждой G -инвариантной связностью соотносится некоторая неассоциативная алгебра $(\mathfrak{m},\alpha)$, для которой $Ad(H)$ содержится в группе автоморфизмов $Aut(\mathfrak{m},\alpha)$ алгебры $(\mathfrak{m},\alpha)$. Тензоры кривизны и кручения этой связности в точке $\bar{e}=eH$ задаются формулами ([7]):

$$R(X,Y)Z=\alpha(X,\alpha(Y,Z))-\alpha(Y,\alpha(X,Z))-\alpha(X\circ Y,Z)-[h(X,Y),Z],\quad (I.1)$$

$$T(X,Y)=\alpha(X,Y)-\alpha(Y,X)-X\circ Y. \quad (I.2)$$

Как следует из [6] алгебра голономии $hol(\alpha)$ этой связности определяется тогда отображениями $a(X)$ и $\mathcal{D}(h(X,Y))$ для $X,Y\in\mathfrak{m}$, где

$$a(X):\mathfrak{m}\to\mathfrak{m},\quad Y\mapsto\alpha(X,Y),$$
$$\mathcal{D}(h(X,Y)):\mathfrak{m}\to\mathfrak{m},\quad Z\mapsto[h(X,Y),Z]$$

Будем говорить, что редуктивное пространство G/H с разложением $g=h+m$ неприводимо, если $hol(\alpha)$ действует на m неприводимо.

Если инвариантная псевдориманова связность на G/H индуцирована невырожденной симметричной билинейной формой C на m, то имеют место соотношения ([6], [7]):

$$C(ad\,U\,X, Y)+C(X, ad\,U\,Y)=0, \tag{I.3}$$

$$C(a(Z)X, Y)+C(X, a(Z)Y)=0 \tag{I.4}$$

для всех $X, Y, Z\in m$, $U\in h$. В отличие от общего случая, билинейную форму на m, индуцирующую естественную связность без кручения ([I]), будем обозначать буквой B. Для такой связности, как известно [8], $\alpha(X,Y)=\frac{1}{2}X\circ Y$ и потому алгебру $(m,\circ)$ можно называть алгеброй естественной связности без кручения.

Целью статьи является описание геометрических свойств редуктивных однородных пространств на языке алгебр связностей. В этой связи в §2 рассматривается алгебра $(m,\circ)$. Указывается на взаимосвязь приводимости пространства G/H, максимальности подалгебры h и простоты алгебры $(m,\circ)$. Найден псевдориманов аналог известной теоремы Б.Костанта [6] о связи между простотой группы G и приводимостью пространства G/H. В §3 мы на основе сопоставления алгебр $(m,\circ)$ и (m,α) доказываем, что на однородном изотропно-неприводимом редуктивном пространстве каждая связность, порожденная инвариантной псевдоримановой метрикой, является естественной связностью без кручения. Для выделенного в предыдущем параграфе класса редуктивных пространств G/H выясняется взаимосвязь между простотой группы G и строением алгебры (m,α).

Все рассмотренные в работе однородные пространства предполагаются односвязными.

§ 2. Алгебра естественной связности без кручения

Пусть $M=G/H$ - редуктивное однородное пространство с фиксированным разложением $g=h+m$. Как указано выше, функцией естественной связности без кручения на M является функция $\alpha(X,Y)=\frac{1}{2}X\circ Y$ на касательном пространстве m и потому алгебру $(m,\circ)$ можно называть алгеброй естественной связности без кручения. Идеалом этой алгебры называется подпространство $n\subset m$, для которого $n\circ m\subset n$ (в силу антикоммутативности каждый идеал является двусторонним); алгебра $(m,\circ)$ называется простой, если $m\circ m=m^2\neq 0$ и $(m,\circ)$ не содержит собственных идеалов. Заметим, что если пространство M локально-симметрическое, то $m^2=0$. Зависимость строения алгебры $(m,\circ)$ и приводимости пространства M устанавливаем

Теорема 2.I. (Sagle [8]) Пусть $M=G/H$ - редуктивное однородное пространство с фиксированным разложением $g=h+m$. Если $m^2\neq 0$ и M неприводимо (относительно естественной связности без кручения), то алгебра $(m,\circ)$ проста. Обратно, если M - псевдориманово и алгебра $(m,\circ)$ проста, то M неприводимо.

Особый интерес вызывает зависимость строения алгебры $(m,\circ)$ от строения основной группы G. В римановом случае ответ на этот вопрос дает

Теорема 2.2. Пусть $M=G/H$ - риманово несимметрическое однородное пространство. Тогда простота группы G влечет простоту алгебры $(m,\circ)$, где m - ортогональное дополнение к h относительно формы Киллинга K на g.

Доказательство. Ограничение K на h невырождено, и потому подпространство

$$m=\{X\in g \mid K(X,h)=0\}$$

задает естественно редуктивное [I] разложение $g=h+m$. Если $(m,\circ)$ не проста и $m^2\neq 0$ (в силу несимметричности), то $(m,\circ)$ содержит $\mathcal{D}(h)$ -инвариантный идеал n [8]. Ограничение K на n также невырождено (ввиду римановости) и потому $m=n+n^{\perp}$, где $n^{\perp}=\{X\in m \mid K(X,n)=0\}$. Покажем, что $[n,n^{\perp}]=0$. Действительно, в силу естественной редуктивности M имеем $K(X\circ Y,Z)=K(X,Y\circ Z)$ для $X,Y,Z\in m$ и тогда $0=K(n^{\perp},n\circ m)=K(n^{\perp}\circ n,m)$. Кроме того, $K(n^{\perp}\circ n,h)=0$, что влечет $K(n^{\perp}\circ n,g)=0$ и $n^{\perp}\circ n=0$. Инвариантность формы Киллинга влечет

$$K([n^{\perp},n],h)=K(n^{\perp},[n,h])=K(n^{\perp},n)=0.$$

Но $K([n^{\perp},n],m)=K(h(n^{\perp},n)+n^{\perp}\circ n,m)=K(h(n^{\perp},n),m)=0.$
В итоге $K([n^{\perp},n],g)=0$ и потому $[n^{\perp},n]=0$. Покажем, что теперь подпространство $p=n+h(n,n)$ будет идеалом в алгебре g. Первоначально из $\mathcal{D}(h)$ - инвариантности n следует

$$[p,n]\subseteq[n,n]+[h(n,n),n]\subseteq n\circ n+h(n,n)+n\subseteq p.$$

Легко показать, что $h(n,n)$ является идеалом в h и тогда

$$[p,h]=[n,h]+[h(n,n),h]\subseteq p.$$

Осталось показать, что $[p, n^{\perp}] \subset p$. Но

$$[p, n^{\perp}] \subseteq [n, n^{\perp}] + [h(n,n), n^{\perp}] \subseteq [[n,n], n^{\perp}] \subseteq [[n, n^{\perp}], n] = 0$$

и p является идеалом в g. Полученное противоречие доказывает теорему.

Из теорем 2.I и 2.2 вытекает следующий известный результат.

<u>Теорема 2.3.</u> (Kostant [5]) Однородное риманово естественно редуктивное пространство $M = G/H$ с простой группой G неприводимо.

Выделим класс редуктивных однородных пространств, для которых аналогичный результат имеет место в псевдоримановом случае.

<u>Определение</u>. Редуктивное однородное пространство $M = G/H$ с фиксированным разложением $g = h + m$ называется специально редуктивным, если алгебра $(m, \circ)$ не содержит идеалов с нулевым умножением.

Пример. Пусть G - полупростая связная группа Ли и H - ее полупростая замкнутая подгруппа. Тогда имеет место разложение $g = h + m$, где m ортогонально h относительно формы Киллинга K алгебры g, и соответствующее однородное пространство $M = G/H$ естественно редуктивно [3]. Если ограничение K_m формы K на m совпадает с формой Киллинга самой алгебры $(m, \circ)$, то M специально редуктивно.

<u>Предложение 2.4.</u> Каждое риманово естественно редуктивное однородное пространство разложимо в прямое произведение симметрического и специально редуктивного пространства.

<u>Доказательство.</u> Пусть $T_o(M) = T_o^{(o)} + \ldots + T_o^{(r)}$ - разложение де Рама касательного пространства $T_o(M)$ риманова естественно редуктивного пространства $M = G/H$ с разложением $g = h + m$ и $m = m_o + \ldots + m_r$ - соответствующее разложение для m при естественном отождествлении $T_o(M) = m$. Имеют место следующие соотношения ([I], стр. 198):

$$m_i \circ m_i \subset m_i, \quad [m_i, m_j] = 0 \text{ для } i \neq j, \ i,j = 0,1,\ldots,r.$$

Упорядочим m_i $(0 \leq i \leq r)$ таким образом, чтобы $c = m_o + \ldots + m_s$ являлось центром алгебры $(m, \circ)$, т.е. $m_k \circ m_k = 0$ $(0 \leq k \leq s)$ и $n = m_{s+1} + \ldots + m_r$, где $m_\ell \circ m_\ell \neq 0$ $(s+1 \leq \ell \leq r)$ не содержало идеалов алгебры $(m, \circ)$ с нулевым умножением. Таким образом $m = c + n$, причем $[c,c] \subset h$ и в итоге имеем $G/H = G_1/H \times G_2/H$, где G_1/H – симметрическое однородное пространство с разложением $g_1 = h + c$ и G_2/H – специально редуктивное пространство с разложением $g_2 = h + n$.

<u>Теорема 2.5.</u> ([I], стр. 189). Пусть $M = G/H$ – однородное пространство и алгебра g допускает $ad(G)$-инвариантную невырожденную симметричную билинейную форму B такую, что ее сужение B_h на h невырождено. Тогда M естественно редуктивно относительно разложения $g = h + m$ где $m = \{ X \in g \mid B(X,Y) = 0$ для всех $Y \in h \}$.

<u>Теорема 2.6.</u> В предположениях теоремы 2.5 пусть M специально редуктивно. Тогда либо M неприводимо, либо m разлагается в прямую сумму взаимно ортогональных относительно B идеалов

$$m = m_0 + m_1 + \ldots + m_r,$$

причем

(a) $[h, m_i] \subset m_i$, $i = 0,1,\ldots,r$;

(b) $m_i \circ m_i \subset m_i$, $i = 0,1,\ldots,r$;

(c) $[m_i, m_j] = 0$, $i \neq j,\ i,j = 0,1,\ldots,r$;

(d) $g_i = m_i + h(m_i, m_i)$ являются идеалами в g для $i = 0,1,\ldots,r$.

<u>Доказательство.</u> Приводимость пространства M влечет ([8]) существование минимального собственного $ad\,h$-инвариантного идеала m_0 в $(m, \circ)$. Пусть $m_0^\perp = \{ X \in m \mid B(X, m_0) = 0 \}$. В силу соотношений

$$B([m_0^\perp, h], m_0) = B(m_0^\perp, [h, m_0]) = 0,$$

$$B(m_0^\perp \circ m, m_0) = B(m_0^\perp, m \circ m_0) = 0,$$

вытекающих из (I.3) и (I.4), получаем, что $m_0^\perp$ также является $ad\,h$-инвариантным идеалом в $(m, \circ)$. Покажем, что $m_0 \cap m_0^\perp = 0$. Если это не так, то минимальность m_0 влечет включение $m_0 \subset m_0^\perp$. Но тогда $B(m_0, m_0) = 0$, откуда $B(m_0^2, m) = B(m_0 \circ m_0, m) = B(m_0, m_0 \circ m) = 0$ и $m_0^2 = 0$ вопреки условию. Итак, $m_0 \cap m_0^\perp = 0$ и потому m является прямой суммой m_0 и $m_0^\perp$. Теперь равенство $B(m_0, m_0^\perp) = 0$ влечет $0 = B(m_0, m_0^\perp \circ m) = B(m_0 \circ m_0^\perp, m)$. Но $B(m_0 \circ m_0^\perp, h) = 0$, потому $B(m_0 \circ m_0^\perp, g) = 0$, $m_0 \circ m_0^\perp = 0$ и $B(m_0 \circ m_0, m) = 0$. Теперь [illegible] $B([m_0, m_0^\perp], h) = B(m_0, [m_0^\perp, h]) = B(m_0, m_0^\perp) = 0$, имеем $B([m_0, m_0^\perp], g) = 0$ и $[m_0, m_0^\perp] = 0$.

Из включений [illegible]

вытекает, что $\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}_0$ является подалгеброй Ли в $\mathfrak{g}$. Так как $B(\mathfrak{h}_0,\mathfrak{m}_0')=0$, то G/H_0 - естественно редуктивное пространство, где H_0 - связная подгруппа в G, имеющая $\mathfrak{h}_0$ своей алгеброй Ли. Пространство G/H_0 является специально редуктивным, так как $(\mathfrak{m}_0,\circ)$ не содержит идеалов с нулевым умножением. Действительно, пусть $\mathfrak{n}$ - такой идеал в $(\mathfrak{m}_0',\circ)$, что $\mathfrak{n}^2=0$. Но тогда $\mathfrak{n}$ является идеалом и в $(\mathfrak{m},\circ)$, т.к. $\mathfrak{n}\circ\mathfrak{m}=\mathfrak{n}\circ(\mathfrak{m}_0+\mathfrak{m}_0')=\mathfrak{n}\circ\mathfrak{m}_0'\subset\mathfrak{n}$ (поскольку $\mathfrak{n}\circ\mathfrak{m}_0=0$), что противоречит условию. Теперь, если $(\mathfrak{m}_0',\circ)$ проста, то дальнейшее разложение невозможно. Если же $(\mathfrak{m}_0',\circ)$ не проста, то условия теоремы наследуются пространством G/H_0 и процесс продолжается до тех пор, пока $\mathfrak{m}$ не разложится в прямую сумму простых идеалов, взаимно ортогональных относительно B. Заключения $(a)-(c)$ следуют непосредственно из доказательства. Для доказательства утверждения (d) заметим, что из $ad\,\mathfrak{h}$-инвариантности $\mathfrak{m}_i$ вытекает, что все $\mathfrak{h}_i=\mathfrak{h}(\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i)$ являются идеалами в $\mathfrak{h}$ [3]). Потому

$$[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{h}]=[\mathfrak{m}_i+\mathfrak{h}(\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i),\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}(\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i)+\mathfrak{m}_i=\mathfrak{g}_i.$$

Далее имеем

$$[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}]=[\mathfrak{m}_i,\ \mathfrak{m}_0+\ldots+\mathfrak{m}_r]=[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]\subset\mathfrak{g}_i$$

и, наконец,

$$[\mathfrak{h}(\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i),\mathfrak{m}]\subset[[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i],\mathfrak{m}]\subset[[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}],\mathfrak{m}_i]=$$
$$[\mathfrak{h}(\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m})+\mathfrak{m}_i\circ\mathfrak{m},\ \mathfrak{m}_i]\subset[\mathfrak{h}(\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}),\mathfrak{m}_i]+[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]\subset$$
$$\mathfrak{m}_i+\mathfrak{h}(\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i)=\mathfrak{g}_i.$$

Из полученных соотношений имеем $[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{g}_i$ и подпространства $\mathfrak{g}_i$ являются идеалами в $\mathfrak{g}$.

Следствие. Пусть $M=G/H$ - естественное специально редуктивное однородное пространство. Если G проста, то M неприводимо.

Определение. Редуктивное однородное пространство $M=G/H$ с разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ называется изотропно неприводимым, если $ad\,\mathfrak{h}$ действует неприводимо на $\mathfrak{m}$.

В случае компактных G такие пространства были классифицированы О.В.Мантуровым ([2]), позднее аналогичные результаты получил Дж.Вольф ([9]).

Предложение 2.7. Пусть $M=G/H$ - редуктивное несимметрическое однородное пространство с фиксированным разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$. Если M изотропно неприводимо, то $(\mathfrak{m},\circ)$ проста.

Доказательство. Если $(m,\circ)$ не проста и $m^2 \neq 0$ (ввиду несимметричности), то согласно [8], алгебра $(m,\circ)$ должна содержать собственный $ad\,h$ - инвариантный идеал, что противоречит изотропной неприводимости.

Предложение 2.8. Пусть $M = G/H$ - редуктивное несимметрическое однородное пространство с фиксированным разложением $g = h + m$. Если h является максимальной подалгеброй в g, то алгебра $(m,\circ)$ проста.

Доказательство. Пусть n есть собственный $ad\,h$ - инвариантный идеал алгебры $(m,\circ)$ из доказательства предложения 2.7. Тогда из включений

$$[h,n] \subset n, \qquad [n,n] = h(n,n) + n \circ n \subset h + n$$

вытекает, что подпространство $h^* = h + n$ является собственной подалгеброй в g, содержащей h – противоречие.

Предложение 2.9. Пусть $M = G/H$ - редуктивное однородное пространство с разложением $g = h + m$. Если M изотропно неприводимо, то h -максимальная подалгебра в g.

Доказательство. Если h не максимальна в g, то существует собственная подалгебра $h^* \subset g$, для которой $h \subset h^*$. Пусть $m^* = h^* \cap m$. Из включений

$$[h, m^*] = [h, h^* \cap m] \subset [h, h^*] \cap [h, m] \subset h^* \cap m = m^*$$

следует $ad\,h$ - инвариантность m^* – противоречие.

§ 3. Алгебра общей псевдоримановой связности

Пусть $M = G/H$ - редуктивное однородное пространство с фиксированным разложением $g = h + m$. Тогда, как указано выше, каждая G-инвариантная связность на M порождает неассоциативную алгебру (m, α), где $\alpha : m \times m \to m$ – функция соответствующей связности. Левым (соответственно, правым) идеалом алгебры (m, α) называется подпространство $n \subset m$, для которого $\alpha(m,n) \subset n$ (соответственно, $\alpha(n,m) \subset n$). Взаимосвязь неприводимости M и структуры алгебры (m,α) выясняется из следующих соображений. Согласно формуле (I.I) каждый левый $h(m,m)$ -инвариантный идеал алгебры (m,α) является и $hol(\alpha)$ - инвариантным. Поэтому неприводимость M влечет утверждение, что алгебра (m,α) не содержит левых $h(m,m)$ -инвариантных идеалов. В случае псевдоримановой связности справедлива и более сильная

Теорема 3.I. Пусть $M = G/H$ – редуктивное несимметрическое однородное пространство с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, на котором G-инвариантная псевдориманова связность задает алгебру $(\mathfrak{m}, \alpha)$. Если M неприводимо, то $(\mathfrak{m}, \alpha)$ проста.

Доказательство. Если $\alpha(X,Y) = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$ то из формулы (I.2) имеем

$$0 = T(X,Y) = \alpha(X,Y) - \alpha(Y,X) - X \circ Y = -X \circ Y$$

и M оказывается симметрическим, что противоречит условию. Если теперь $(\mathfrak{m}, \alpha)$ не проста, то она содержит собственный двусторонний идеал. Согласно [I] она содержит тогда и собственный $ad\,\mathfrak{h}$-инвариантный идеал, являющийся, таким образом, $hol(\alpha)$-инвариантным.

В отличие от естественной связности без кручения (теорема 2.I) здесь обратная теорема не верна (контрпример, построенный из иных соображений, можно найти в работе [6]).

Лемма. В предположениях теоремы 3.I простота алгебры $(\mathfrak{m}, \circ)$ влечет простоту алгебры $(\mathfrak{m}, \alpha)$.

Доказательство. Алгебра $(\mathfrak{m}, \alpha)$ не является алгеброй с нулевым умножением, ибо, в противном случае, из формулы (I.2) мы имели бы $X \circ Y = 0$, что противоречит простоте $(\mathfrak{m}, \circ)$. Если $(\mathfrak{m}, \alpha)$ содержит собственный двусторонний идеал $\mathfrak{n}$, то из той же формулы $\mathfrak{n}$ является идеалом и в $(\mathfrak{m}, \circ)$ -противоречие.

Из данной леммы и теоремы 2.I непосредственно следует

Теорема 3.2. Пусть $M = G/H$ - редуктивное несимметрическое однородное пространство с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, на котором риманова связность задает алгебру $(\mathfrak{m}, \alpha)$. Тогда простота группы G влечет простоту алгебры $(\mathfrak{m}, \alpha)$.

Пусть $M = G/H$ - редуктивное однородное пространство с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ и C - невырожденная симметричная билинейная $ad\,\mathfrak{h}$-инвариантная форма на $\mathfrak{m}$, порождающая псевдориманову связность с соответствующей алгеброй $(\mathfrak{m}, \alpha)$. В силу соотношений (I.3) и (I.4) любой двусторонний $ad\,\mathfrak{h}$-инвариантный идеал в $(\mathfrak{m}, \alpha)$ является прямым слагаемым относительно C при условии, что $(\mathfrak{m}, \alpha)$ не содержит идеалов с нулевым умножением. Пусть в этом предположении $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1 + \ldots + \mathfrak{m}_r$ - разложение $(\mathfrak{m}, \alpha)$ в прямую сумму двусторонних $ad\,\mathfrak{h}$-инвариантных идеалов, взаимно ортогональных относительно C. Легко видеть, что если M специально редуктивно, то и $(\mathfrak{m}, \alpha)$ не содержит идеалов с нулевым умножением. В силу формулы

$$\alpha(X,Y)-\alpha(Y,X)=X\circ Y$$

получаем также, что все двусторонние идеалы алгебры (m,α) будут идеалами и в $(m,\circ)$, то есть

$$m\circ m_i\subset m_i\ ,\quad m_i\circ m_j=0\ (i\neq j),\ m_i\circ m_i\subset m_i\quad (i,j=0,1,\dots,r).$$

Взяв в формуле (I.I) векторы $X\in m_i$, $Y\in m_j$ $(i\neq j)$, $Z\in m$ получим

$$\alpha(X,Z)\in m_i\ ,\qquad \alpha(Y,Z)\in m_j\ ,$$
$$\alpha(X,\alpha(Y,Z))=0\ ,\qquad \alpha(Y,\alpha(X,Z))=0.$$

В итоге $R(X,Y)Z=-[h(X,Y),Z]$. Учитывая, что X и Y принадлежат различным множителям разложения де Рама ([4]), получаем, что член в левой части равен нулю ([I] , стр. 199). Ввиду точности линейного представления изотропии получаем $h(X,Y)=0$, что, в свою очередь, влечет $[m_i,m_j]=0$. Но тогда из доказательства теоремы 2.6 следует, что $g_i=m_i+h(m_i,m_i)$ является идеалом в g , и тем самым доказана

Теорема 3.3. Пусть $M=G/H$ - специально редуктивное однородное пространство с разложением $g=h+m$ и G -инвариантной псевдоримановой метрикой. Тогда простота G влечет простоту алгебры (m,α) , порожденной связностью данной метрики.

Будем как и прежде считать, что произвольная псевдориманова связность индуцирована формой C на m , сохранив букву B для формы, определяющей естественную связность без кручения. В силу невырожденности B и C существует $S\in GL(m)$, что $C(X,Y)=B(SX,Y)$ для всех $X,Y\in m$. Согласно [7] форма C и алгебра (m,α) задают алгебру $(m,\circ)$ с помощью формулы

$$2\ C(\alpha(X,Y),Z)=C(X\circ Y,Z)+C(Y,Z\circ X)+C(X,Z\circ Y)$$

или

$$\begin{aligned}2B(S\alpha(X,Y),Z)&=B(S(X\circ Y),Z)+B(SY,Z\circ X)+B(SX,Z\circ Y)\\&=B(S(X\circ Y),Z)-B(SY,X\circ Z)-B(SX,Y\circ Z)\\&=B(S(X\circ Y),Z)-B(SY\circ X,Z)-B(SX\circ Y,Z)\\&=B(S(X\circ Y),Z)+B(X\circ SY,Z)-B(SX\circ Y,Z).\end{aligned}$$

Следовательно

$$2\ S\ \alpha(X,Y)=S(X\circ Y)+X\circ SY-SX\circ Y,$$

откуда окончательно имеем

$$2\alpha(X,Y)=X\circ Y+S^{-1}[X\circ SY-SX\circ Y]. \qquad (3.I)$$

В силу C и B -кососимметричности $ad\,u\ (u\in h)$ мы также имеем

$$B(S(ad\,u\,X), y) = C(ad\,u\,X, y) = -C(X, ad\,u\,y) =$$
$$= -B(SX, ad\,u\,y) = B(ad\,u\,(SX), y),$$

что влечет

$$[S, ad\,u] = 0. \qquad (3.2)$$

Кроме того

$$C(X, Sy) = B(SX, Sy) = B(Sy, SX) = C(y\,SX) = C(SX, y),$$

откуда следует самосопряженность S. Пусть λ -его ненулевой вещественный характеристический корень. Тогда в силу (3.2), характеристическое подпространство

$$n = \{X \in m \mid SX = \lambda X\}$$

является $ad\,h$ -инвариантным. Если теперь предположить соответствующее редуктивное однородное пространство $M = G/H$ с разложением $g = h + m$ изотропно неприводимым, то n должно совпасть с m и, соответственно, $S = \lambda E$. Тогда из (3.I) вытекает $\alpha(X, y) = \frac{1}{2} X \cdot y$ и справедлива

Теорема 3.4. Каждая инвариантная псевдориманова связность на редуктивном изотропно неприводимом однородном пространстве является естественной связностью без кручения.

Литература

I. К о б а я с и Ш. Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. // М.: Наука, I98I.

2. М а н т у р о в О.В. Римановы однородные пространства с неприводимой группой вращений.// Труды семинара по вект. и тенз. анализу. I966. Т. I3. С. 68-I45.

3. Ф л я й ш е р А. Об одном классе редуктивных пространств.// Труды геом. семинара. I975. Т.6. С. 267-276.

4. F l e i s c h e r A. On a class of pseudo-Riemannian homogeneous spaces // Colloq. math. soc. János Bolyai. 1979. V.31. P. 217-224.

5. K o s t a n t B. On differential geometry and homogeneous spaces, II// Proc. Nat. Acad. Sci. 1956. V. 42. P. 354-357.

6. K o s t a n t B. On holonomy and homogeneous spaces// Nagoya Math. J. 1957. N 12. P. 31-54.

7. N o m i z u K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. Math. J. 1954. V. 76. P. 33-65.

8. S a g l e A. On anticommutative algebras and homogeneous spaces // J. Math. and Mech. 1967. No. 16. P. 1381-1393.

Поступило

12 X 1987

ALGEBRAS OF INVARIANT PSEUDO-RIEMANNIAN CONNECTIONS ON HOMOGENEOUS SPACES

A, Fleischer

S u m m a r y

Let $M = G/H$ be a reductive homogeneous space with decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$. For $X, Y \in \mathfrak{m}$ let $[X,Y] = X \circ Y + \mathfrak{h}(X,Y)$ where $X \circ Y = [X,Y]_{\mathfrak{m}}$ and $\mathfrak{h}(X,Y) = [X,Y]_{\mathfrak{h}}$ are the projections of $[X,Y]$ into $\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{h}$ respectively. Therefore $\mathfrak{m}$ with the multiplication $X \circ Y$ becomes an anticommutative algebra [8] denoted by $(\mathfrak{m}, \circ)$. In [2] a correspondence was established between G-invariant connections on M with fixed decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ and certain algebras $(\mathfrak{m}, \alpha)$ where α is a bilinear multiplication function on $\mathfrak{m}$. In the case when this connection is the natural torsion free connection we have $\alpha(X,Y) = \frac{1}{2} X \circ Y$ and therefore the algebra $(\mathfrak{m}, \circ)$ can be called algebra of natural torsion free connection.

In this paper we provide the description of geometric properties of reductive homogeneous spaces on the language of connection algebras. With this aim in view we consider the algebra $(\mathfrak{m}, \circ)$ in §2. In particular the depence between the simplicity of G, reducibility of G/H and simplicity of $(\mathfrak{m}, \circ)$ in the Riemannian case is studied. An example of pseudo-Riemannian naturally reductive space G/H for which the simplicity of G implies the holonomy irreducibility of G/H is given. In §3 we compare a pseudo-Riemannian connection algebra $(\mathfrak{m}, \alpha)$ with the natural torsion free connection algebra $(\mathfrak{m}, \circ)$. For the special reductive homogeneous spaces (which are introduced in §2) the dependence between the simplicity of G and the structure of $(\mathfrak{m}, \alpha)$ is studied. It is shown that every invariant pseudo-Riemannian connection which is induced by a pseudo-Riemannian metric on the reductive isotropy irreducible homogeneous space is a naturally torsion free connection.

СОДЕРЖАНИЕ - SISUKORD

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 803.
СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ.
Труды по математике и механике.
На русском и английском языках.
Резюме на английском и русском языках.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор Х. Кильп.
Подписано к печати 19.04.1988.
МВ 02663.
Формат 60x90/16.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 8,1. Печатных листов 9,0.
Тираж 450.
Заказ № 249.
Цена 1 руб. 60 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.
2 - 2