A. Koppel

Üldrelatiivsusteooria alused

TARTU 1975

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Teoreetilise füüsika kateeder

Aare Koppel

ÜLDRELATIIVSUSTEOORIA ALUSED

Tartu 1975

Kinnitatud Füüsika-Keemiateaduskonna nõukogus
16. nov. 1973.

S a a t e k s

Käesoleva loengukursuse esmaseks adressaadiks on teoreetilise füüsika eriharu üliõpilased, kellele üldrelatiivsusteooria (ÜRT) on ette nähtud plaanilise erikursusena. Ent võib-olla on need loengud kasulikud ka teistele asjasthuvitatuile. Kursust on püütud koostada sellisel tasemel, et selle abil võiksid kõik füüsikat õppivad üliõpilased tutvuda ÜRT kui nüüdisaegse füüsika ühe fundamentaalteooriaga. Nõutavad on üksnes eelteadmised matemaatilise analüüsi põhikursuse ulatuses, kaasa arvatud algteadmised vektoranalüüsist ja mitme muutuja funktsioonidest. Mõistagi on tarvis kursis olla ka füüsika mõnede tähtsamate tõdedega, eriti peamisega erirelatiivsusteooriast.

Käesolevad loengud kujutavad endast ÜRT n.-ö. klassikaliste aluste esitust. Et kursuse maht on piiratud, siis mitmeid ÜRT olulisi eriprobleeme ainult nimetatakse. Seejuures viidatakse aga kättesaadavatele õpikutele ja monograafiatele. Loengukursuse peamiseks eesmärgiks on seostada ÜRT põhialused füüsika muude osade ja probleemidega, analüüsida selle teooria kohta füüsikateooriate nüüdisaegses süsteemis, näidata ÜRT osatähtsust füüsika mitmete tähtsamate mõistete sisu rikastajana, avardajana ja ka "ümbernormeerijana". Siin püütakse tutvustada ÜRT "klassikalist" tuuma üksnes sellises mahus, et soovijad oleksid vajalikul määral ette valmistatud ulatuslikumaks tutvumiseks selle teooriaga spetsiaalsete monograafiate abil.

Käesoleva õppevahendi eduka läbitöötamise eelduseks on aktiivne kaasamõtlemine, kõikide mõttekäikude detailne jälgimine, arvutuste iseseisev läbitegemine ja toodud ülesannete lahendamine. Eriti on see muidugi hädavajalik neile, kes kavatsevad sooritada õppeplaanis ettenähtud eksami.

x x
x

Selle loengukursuse koostamist on oluliselt suunanud eesti gravitatsionistide liidri, akadeemik Harald Kerese omaaegsed loengud ülikoolis ja tema teaduslikud tööd. Mitmetel H. Kerese ideedel on siin (näit. ruumi ja aja põhiomaduste selgitamisel, ekvivalentsusprintsiibi ja üldrelatiivsusprintsiibi lahtimõtestamisel) põhimõtteline tähtsus. Kõike seda tahab käesoleva loengukursuse koostaja tänutundes eriti alla kriipsutada ja ära märkida. Hinnaliste näpunäidete ja märkuste eest tänab autor samuti professor P. Kardi ja dotsent I. Piiri.

I. ÜLDRELATIIVSUSTEOORIA LÄHTEKOHAD JA PÕHIIDEED

1. Ruum ja aeg kui füüsika uurimisobjektid

a) Meid ümbritsevad tohutus mitmekesisuses nii eripalgelised kui ka sarnased looduse objektid, millega alati midagi sünnib, s. t. mis alati osalevad teatavates loodusnähtustes. Kogemuste üldistusena võime öelda, et kogu loodus koosneb s t r u k t u u r s e t e s t m o o d u s t i s t e s t ehk o b j e k t i d e s t (taevakehad, kivid, majad, elusolendid, molekulid, aatomid jne.), mis omavahelis te mitmelaadiliste v a s t a s m õ j u d e ehk i n t e r a k t s i o o n i d e tõttu (magneti mõju rauatükile, taevakehade ja Maa külgetõmme, ainete võime keemiliselt reageerida, elusolendite vastastikused suhted jne.) on alalises m u u t u m i s e s ehk l i i k u m i s e s (kivi allaveeremine mäest, aastaaegade, öö ja päeva vaheldumine, raua roostetamine, puu kõdunemine, elusolendite kasvamine ja areng jne.).

Asudes seda objektiivset reaalsust uurima, võib ühe lähenemisviisina ka abstraheeruda tegelikkuse paljudest konkreetsetest kvaliteetidest ja küsida: mis on kõikide looduse objektide puhul ja kõigis loodusnähtustes ü l d i s t ja p õ h i l i s t ?

Füüsika ongi loodusteadus, mis uurib looduse kõige üldisemaid ja põhilisemaid struktuurseid moodustisi (füüsikalised makrokehad ja makroväljad, molekulid, aatomid, aatomituumad, elementaarosakesed), kõige universaalsemaid ja fundamentaalsemaid vastasmõjusid (gravitatsiooniline, elektromagnetiline, tugev ja nõrk) ning kõige üldisemaid ja põhilisemaid liikumisvorme (makrokehade mehaaniline liikumine, makroväljade muutumised, aatomite ja molekulide soojusliikumine, mikroosakeste kvantmehaaniline liikumine, elementaarosakeste muundumine).

b) Abstraheerudes veelgi tegelikkuse konkreetsetest omadustest, võime kogemuste üldistamise põhjal veenduda, et looduse objektide ja nende kogumite struktuurile on omane teatav u l a t u v u s , et neile on omased teatavad püsivad v o r m i d , et objektide endi ja nende osade puhul võime rääkida teatavatest a s e n d i s u h e t e s t. Siit tuleneb ruumi kui väga üldise kategooria mõiste, mida määratlegem vastavalt "Füüsika entsüklopeedilisele sõnaraamatule"[x] järgmiselt:

Ruum on suhete kogum, milles väljendub kooseksisteerivate objektide koordinatsioon, nende asend üksteise suhtes, selliste asendisuhete suurus.

c) Kogemustest on teada, et mistahes muutumistele tegelikkuses, mistahes loodusnähtustele on omane ka teatav j ä r g n e v u s , et nähtuste kulgemiseski ilmneb teatav

---

[x] FES-IV, lk. 227. (Siin ja edaspidi kasutame viitamisel lühendeid, mille tähendus on selgitatud kirjanduse nimistus õppevahendi lõpus.)

üldine k o r r a p ä r a s u s . Siit tuleneb väga üldise abstraktsioonina aja mõiste:[x]

Aeg on suhete kogum, milles väljendub üksteist väljavahetavate olekute koordinatsioon objektiivses reaalsuses, nende olekute järgnevus ja kestus.

d) Et ruumi ja aja mõisted ei kujuta muud kui abstraktsioone, milles peegelduvad just l o o d u s e objektide ja l o o d u s n ä h t u s t e , kogu tegelikkuse väga üldised ja põhilised omadused, siis saab ruumi ja aja konkreetseid omadusi välja selgitada üksnes l o o d u s t e a d u s t e areng. Vastavalt füüsika kui loodusteaduse spetsiifikale tuleb aga r u u m i j a a j a k õ i g e u n i v e r s a a l s e m a t e j a f u n d a m e n t a a l s e m a t e o m a d u s t e g a tegelda just f ü ü s i k a l .

Tänapäeval võime pidada juba hästi kinnitatud kogemuslikuks tõeks, et ettekujutust ruumi ja aja üldistest ja põhilistest omadustest rikastabki nimelt looduse kõige üldisemate ja põhilisemate struktuursete moodustiste, vastasmõjude ja liikumisvormide konkreetne uurimine, s.t. füüsika uurimisaine järjest sügavam tunnetamine.

2. Ruumi põhiomaduste uurimine. Koordinaatsüsteem. Geomeetria kui ruumi teooria

a) P a r t i k l i ehk o s a k e s e (ka a i n e p u n k t i) mõiste on lihtsaim idealisatsioon, mis võib iseloomustada reaalsuse ainelisi objekte.

[x] FES -IV, lk. 227.

Partikkel on selline aineline objekt, mille sisemist struktuuri ega ulatuvust antud probleemi puhul ei arvestata.

Et uurimine peab alati kulgema lihtsamalt keerulisemale, siis ka objektide koordinatsiooni väljendavate suhete, s. t. r u u m i omaduste uurimist tuleks ilmselt alustada just sellise lihtsa mõiste abil nagu partikkel. Igat konkreetset partiklit võime edaspidi käsitada kui r u u m i teatava kindla p u n k t i fikseerijat.

b) Ühe üksiku partikli puhul pole veel mõtet rääkida mingitest asendisuhetest. Partikli a s e n d ehk a s u k o h t saab omada mõtet üksnes mingi teise partikli s u h t e s.

Et määrata partiklite omavahelisi asendeid, selleks peab olema teatav "sidepidamise" moodus. Oma universaalsuse tõttu on üheks sobivamaks "sidevahendiks" v a l g u s s i g n a a l, üldisemalt e l e k t r o m a g n e t s i g n a a l.

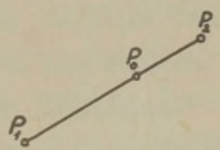
Lihtsaim idealisatsioon, mis võib iseloomustada levivat elektromagnetvälja, on aga v a l g u s k i i r e mõiste.

Valguskiir on selline leviv elektromagnetväli, mille ulatuvust vaadeldakse ainult ühes suunas ja mille muid omadusi antud probleemi puhul ei arvestata.

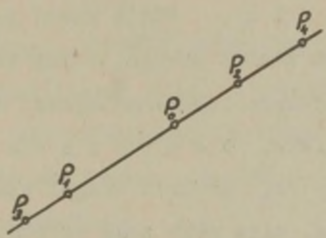
c) Kogemusest on teada, et vähemalt piiratud ulatuses on k a k s partiklit ühendatavad täpselt ühe valguskiirega. Sellist valguskiirt võime nüüd pidada s i r g l õ i g u mõiste defineerijaks.[x]

Igal sirglõigul võib määratleda relatsiooni " v a h e l ": partikkel P_o on partiklite P_1 ja P_2 vahel, kui partiklilt P_1 lähetatud kiir valgustab partiklit P_o, kuid jätab P_2 partikli P_o varju (vt. joonis 1).

Relatsiooni "vahel" abil saab partiklitega P_1 ja P_2 määratud sirglõigule kuitahes palju partikleid paigutada - ikka uus olemasolevate vahele. Kasutades jätkuvalt sama relatsiooni juba olemasolevate äärmiste partiklite endi jaoks (jättes näiteks partikli P_1 partiklite P_o ja P_3 vahele jne., võib partiklitega P_1 ja P_2 määratud sirglõiku ka järjest pikendada esialgsest vahemikust väljapoole (vt. joonis 2). Nii jõuame s i r g e mõisteni.



Joonis 1.



Joonis 2.

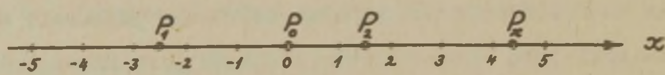
Nagu öeldud, saab partiklitega P_1 ja P_2 määratud sirgele mõtteliselt kuitahes palju partikleid paigutada.

---

[x] Nagu hiljem selgub, on selline sirglõigu mõiste (ja hiljem määratletud sirge mõiste) üldisem kooligeomeetria, s. t. eukleidilise geomeetria sirglõigu (ja sirge) mõistest. Igapäevastes mastaapides on nn. valgussirge praktiliselt täiesti ühtiv eukleidilise geomeetria sirgega.

2

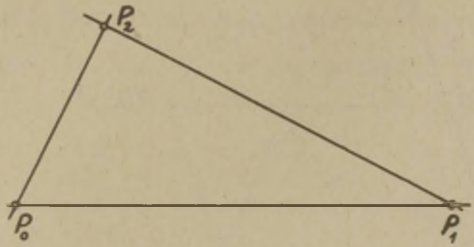
Neist igaühe juurde võib korraldada ka mingi reaalarvu, nõudes seejuures üksnes, et nende arvude loomulikule järjestusele vastaks partiklite antud järjestus sirgel. Partikli P_0 juurde võib valida arvu 0 , partikli P_1 poole jäävate partiklite juurde korraldada negatiivsed ja partikli P_2 poole jäävate partiklite juurde positiivsed arvud (joonis 3).



Joonis 3.

Pärast seda, kui ühel sirgel paiknevate partiklite hulgale on vastavusse seatud r e a a l a r v u d e h u l k , ühtib mingi partikli P_x asukoht sirgel alati teatud arvuga ja nii saab see arv mainitud partikli asukoha iseloomustajaks. Nimetame edaspidi seda arvu partikli k o o r d i n a a d i k s vaadeldaval sirgel. Et P_x asukoht sirgel võib põhimõtteliselt igasugune olla, siis võib seda asukohta tähistada üldiselt algebralise sümboliga x ning partiklitega P_1 ja P_2 määratud sirget võime hakata nimetama x - t e l j e k s , täpsemalt x - k o o r d i n a a t t e l j e k s . Nii oleme jõudnud täpse m a t e m a a t i l i s e m o o d u s e n i , mille abil saab määrata ühel kindlal sirgel asetsevate partiklite, seega ka ruumi punktide asukohti teiste samal sirgel asetsevate partiklite (punktide) suhtes.

d) Edasi on kogemusest teada, et vähemalt piiratud ulatuses on k o l m partiklit alati ka nii paigutatavad, et igat partiklit tema kahe naabriga ühendavast kahest valguskiirest kumbki ei sisalda kahte nende naabritest ja et kõik need lõikuvad omavahel ainult nimetatud kolme partikli P_o, P_1 ja P_2 asukohas (joonis 4).

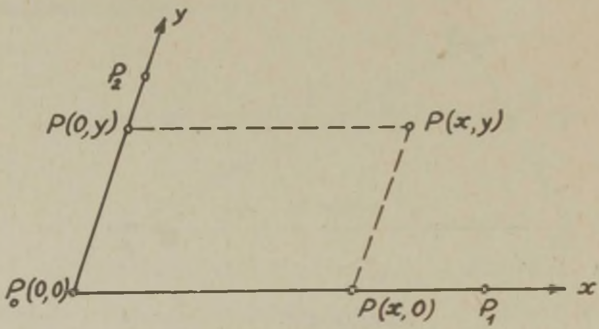


Joonis 4.

Sellisesse kolmikusse kuuluvate partiklipaaridega määratud sirglõigud võib täita partiklitega, need partiklid omakorda ühendada sirglõikudega kõikvõimalikel viisidel ja seejärel täita partiklitega. Kogemus õpetab, et sellisel viisil võib partiklite hulga abil määratleda t a s a n d i - t ü k i ja siit edasi t a s a n d i mõisted.[x] Iga partikkel määrab nüüd antud tasandi kindla punkti ja igat sellist punkti saab üheselt iseloomustada reaalarvude paariga, mida nimetame edaspidi punkti k o o r d i n a a t i d e k s vaadeldaval t a s a n d i l . Selgub, et need koordinaa-

[x] Olgu jälle rõhutatud, et nn. valgustasandi mõiste ühtib praktiliselt eukleidilise geomeetria tasandi mõistega üksnes igapäevastes mastaapides.

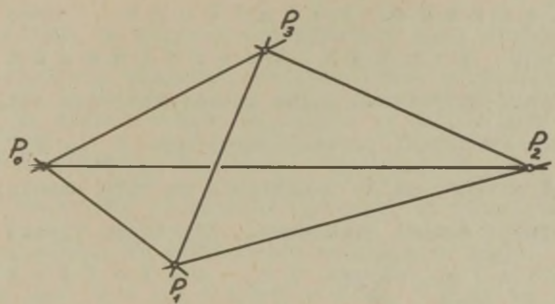
did on ühesel viisil määratavad kahe koordinaattelje abil, milleks võivad olla partiklitega P_oP_1 ja partiklitega P_oP_2 määratud sirged, mille punktidele on eelmises alapunktis kirjeldatud viisil vastavusse seatud reaalarvud. Nimetagem sirget P_oP_1 x - t e l j e k s ja sirget P_oP_2 y - t e l j e k s (joonis 5).



Joonis 5.

Nii saadakse kahe koordinaattelje abil matemaatiline moodus, mille abil võib määrata ühel kindlal tasandil asetsevate partiklite (resp. punktide) a s u k o h t i teiste samal t a s a n d i l asetsevate partiklite (resp. punktide) suhtes. Nimetatud koordinaatteljed moodustavad sellel tasandil k o o r d i n a a t s ü s t e e m i ehk k o o r d i n a a d i s t i k u. Et koordinaatteljed määratakse kolme ettevõetud partikliga P_o, P_1 ja P_2, siis sõltuvalt partiklite valikust on võimalikud väga mitmesugused koordinaatsüsteemid (sealhulgas ristkoordinaadistikud).

e) Kogemus õpetab veel, et vähemalt piiratud ulatuses võib mingi etteantud tasandi mistahes punkti fikseerivalt partiklilt ikka sellise valguskiire välja saata, mis ei taba enam antud tasandi partiklit. Tuleb välja, et n e l i partiklit on üksteise suhtes ka selliselt paigutatavad, et igat partiklit tema kolme naabriga ühendavast kolmest valguskiirest ükski ei sisalda kolme nendest partiklitest ja et kõik need kiired lõikuvad omavahel ainult nimetatud nelja partikli P_0, P_1, P_2 ja P_3 asukohas (joonis 6).

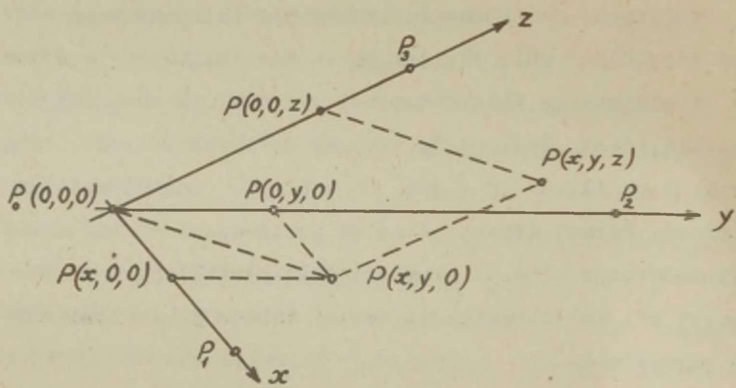


Joonis 6.

Sellisesse nelikusse kuuluvate partiklipaaridega määratud sirglõigud võib jällegi täita partiklitega, need ühendada sirglõikudega kõikvõimalikel viisidel ja seejärel täita partiklitega. Kogemus õpetab, et sellisel viisil võib partiklitega täita k o g u r u u m i (antud vaatlusulatuses). Pärast äsjakirjeldatud protseduuri ei saa antud vaatlusulatuses mingilt olemasolevalt partiklilt enam valguskiirt nii välja saata, et see ei tabaks juba olemasolevaid partikleid.

Seega saamaks partiklite konfiguratsiooni, millest lähtudes "vahele" paigutamise protseduuriga võiks täita partiklitega kogu ruumi, tuleb mistahes väljavalitud partiklile (olgu selleks P_o) lisaks võtta vähemalt kolm niisugust partiklit, mis kolmekesi ei asetse ühel sirgel ega ole väljavalitud neljanda partikliga P_o samas tasandis. Samal ajal pole neid lisaksvõetavaid partikleid ka rohkem vaja kui ü k s n e s k o l m. Selles kogemuslikus faktis avaldubki r u u m i k o l m e m õ õ t m e l i s u s.

Täidetud ruumis määravad partiklid juba ruumi mistahes punkti ja igat sellist punkti saab üheselt iseloomustada r e a a l a r v u d e k o l m i k u g a. Need kolm arvu - r u u m i p u n k t i k o o r d i n a a d i d - on üheselt viisil määratavad kolme koordinaattelje abil, milleks võivad olla vastavalt partiklipaaridega P_oP_1, P_oP_2 ja P_oP_3 määratavad sirged, mille punktidele on juba teadaoleval viisil vastavusse seatud reaalarvud. Nimetagem lisaks x - ja y - t e l j e l e sirget P_oP_3 z - t e l j e k s (joonis 7).



Joonis 7.

Nii saadakse kolme koordinaattelje abil matemaatiline moodus, mille abil võib määrata mistahes partiklite (resp. punktide) a s u k o h t i r u u m i s teiste partiklite (resp. punktide) suhtes. Nimetatud kolm koordinaattelge moodustavad r u u m i l i s e k o o r d i n a a t - s ü s t e e m i ehk k o o r d i n a a d i s t i k u . Partiklite P_o, P_1, P_2 ja P_3 konkreetsest valikust tingituna on jällegi võimalikud väga mitmesugused koordinaatsüsteemid.

f) Partikli ja valguskiire mõistete abil saadud ruumiliste asendisuhete eksaktne, matemaatiline kirjeldamine on üldistatav ka keerulisemate aineliste ja väljaliste objektide vaatlemise juhule füüsikas. Partiklid P_o, P_1, P_2 ja P_3, mis fikseerivad koordinaatsüsteemi, on tavaliselt ulatuslikuma ainelise objekti koostisosadeks ja seda objekti nimetatakse ka t a u s t k e h a k s , kuna ta määrab füüsikaliste objektide kirjeldamise ruumilise "tausta". Et objektide omavahelise koordinatsiooni, nende vastastikuse asendi jt. ruumiliste vahekordade täpne kirjeldamine on faktiliselt kõikide füüsika probleemide puhul oluline, siis sellest tulenevalt on nii taustkeha kui ka koordinaatsüsteemi mõisted ühed põhilisemad füüsika mõisted.

Füüsikaliste objektide ruumilisel iseloomustamisel mõistagi ei piisa üksnes objektide suhtelise asendi määramisest. On vaja kindlaks teha ka asendisuhete suurus, s. t. kaugus kahe objekti vahel. Tekib p i k k u s e määramise ja mõõtmise probleem.

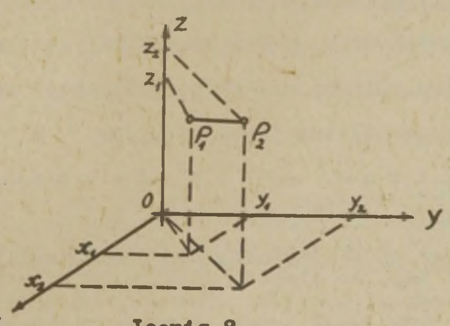
Kogemus õpetab, et kauguse mõiste ruumi kahe punkti vahel ja seega pikkuse määramine ei sõltu asukoha määramisest. Nende mõistete defineerimiseks on tarvis täiendavalt uurida ruumi omadusi. Kuidas saab määratleda pikkuse mõõtmise konkreetset menetlust, kas kaugus mingi kindla objekti kahe punkti vahel (näiteks mingi vardakujulise keha - "m õ õ d u p u u" - pikkus, mille valime pikkuste mõõtmise ühikuks ja millega võrdleme kõiki pikkusi) on kõikjal ühesugune või mitte - kõik see selgub jällegi üksnes looduse objektide ja nähtuste konkreetsest uurimisest.

Õpetuseks, milles üldistuvad süstematiseeritud kujul teadmised ruumi omadustest, on g e o m e e t r i a. Nagu eelnevast selge peaks olema, ei saa see olla mingi aprioorne, "kogemuste-eelne", üksnes puhtmatemaatiline ja puhtdeduktiivne teadusharu. Geomeetriat (vähemalt selles osas, mis nii või teisiti seostub füüsikaga) tuleb käsitada samuti kogemusliku päritoluga teadusena, s. t. loodusteadusena, mille mõistete süsteem kuulub küll juba väga kõrgele abstraktsioonitasemele (ja see annabki talle erakordselt suure üldkehtivuse ja heuristilise jõu!), mille mõisted ja tõestusvõtted on tõepoolest tihti puhtalt mõistusepärased, kuid mille sobivuse tegelikkuse kirjeldamiseks peab lõppkokkuvõttes ikkagi välja selgitama konkreetne looduseuurimine.

g) Klassikaline füüsika tõestas oma uurimisvaldkonnas e u k l e i d i l i s e g e o m e e t r i a tõdede väga hea vastavuse tegelikkusele. Selle geomeetria tõed (nagu kolmnurga sisenurkade summa võrdumine 180 nurgakraadiga, paralleelsuse postulaat, ettekujutus ruumi homogeensusest ja isotroopsusest jne.) said lahutamatuteks füüsika tõdedest. Eukleidilise geomeetria ettekujutus ruumi homogeensusest ja isotroopsusest on näiteks kooskõlas ettekujutusega "mõõdupuude" muutumatusest. Eriti olulise osa omandas klassikalise füüsika matemaatilises aparatuuris eukleidilisele geomeetriale baseeruv v e k t o r a r v u t u s kui ruumiliste vahekordade eksaktse kirjeldamise võimas instrument ja keel.

Ehkki on võimalikud väga mitmesugused, sealhulgas ka kõverjoonelised koordinaadistikud, võib otstarbekuse seisukohalt pidada eukleidilises geomeetrias eelistatud koordinaatsüsteemiks Cartesiuse r i s t k o o r d i n a a d i s t i k k u (joonis 8). See on abstraktsioon sirgete ja ristiolevate jäikade mõõdupuude süsteemist. Cartesiuse ristkoordinaadistiku puhul võib koordinaatidele omistada vahetu meetrilise mõtte: pikkuseühikule võib seada vastavusse arvude erinevuse ühe võrra koordinaattelgedel. Kaugus punktide P_1 ja P_2 vahel määratakse valemiga

$$\ell = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \,. \tag{I 2.1}$$



Joonis 8.

3

3. Aja põhiomadused. Aegruum. Taustsüsteem. Kinemaatika kui aegruumi teooria

a) Suhete uurimist, milles väljendub üksteist väljavahetavate olekute koordinatsioon objektiivses reaalsuses, olekute järgnevus ja kestus, s. t. teiste sõnadega - a j a omaduste uurimist on samuti mõistlik alustada selliste lihtsate, kuid väga üldiste mõistete abil, nagu on partikkel ja elektromagnetsignaal.

Olekute järgnevust saab ilmselt lihtsaimal viisil modelleerida partikliga, mis katkendlikult, üksteisele järgnevalt lähetab elektromagnetsignaale, näiteks valgussähvatusi. Iga selline sähvatus fikseeribki aja h e t k e kui aja elemendi (analoog ruumi p u n k t i mõistele). Iga hetk vastab partikli teatavale, eelmist väljavahetavale olekule.

Kogemus õpetab, et partikli üksteisele järgnevate olekute puhul saab täiesti üheselt määratleda relatsioone "varem" ja "hiljem". Partikli iga sähvatus toimub eelmisest hiljem ja järgmisest varem. (Täpsustusena - jutt on vaatleja suhtes paigalolevast partiklist.) Sellisel moel korralduvad partikli kõik olekud ühemõõtmelisse ja kindlasuunalisse jadasse. Nii on see ka keerulisemate objektide puhul. Selles kogemuslikus faktis avaldub a j a ü h e - m õ õ t m e l i s u s ja ü h e s u u n a l i s u s[x].

---

[x] Mõistagi on ettekujutus aja ühemõõtmelisusest ja ühesuunalisusest nagu ka eespool käsitletud ettekujutus ruumi kolmemõõtmelisusest hoopiski ulatuslikuma kogemuse üldistamise tulemus ning kõigi nende tõdedega piirnevate problee-

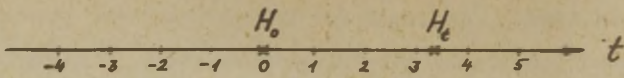
Paneme tähele, et ruumi kui kolmemõõtmelise punktide kontiinumi puhul pole relatsioonid "eespool", "tagapool" üheselt ja kindlasihiliselt määratletud.

Nagu ühel sirgel asetsevatele partiklitele (resp. ruumi punktidele) nii ka partikli üksteisele järgnevatele olekutele (resp. aja hetkedele) võime vastavusse seada r e a a l a r v u d e   h u l g a , nõudes seejuures ainult, et nende arvude loomulikule järjestusele vastaks olekute (hetkede) tegelik järjestus. Ühe kindla oleku H_0 juurde võib valida arvu nulli - see fikseerib n u l l h e t k e ehk a l g h e t k e . Varasemate hetkede juurde korralduvad siis negatiivsed, hilisemate juurde positiivsed arvud. Mingile meelevaldsele olekule H_t (resp. hetkele) vastab nüüd alati teatud arv t, mis saab seega mainitud oleku (hetke) a j a l i s e   a s u k o h a iseloomustajaks. Nimetame edaspidi seda arvu oleku a j a l i s e k s   k o o r d i n a a d i k s ehk lihtsamalt t - k o o r d i n a a d i k s .

Kirjeldatud ühedimensionaalse reaalarvude hulga võib omakorda vastavusse seada ühe sirge punktidele. Selle sirge iga punkt kujutab nüüd mingit kindlat olekut (resp. hetke) ning fikseerib selle oleku ajalise koordinaadi. Nimetame saadud sirget a j a t e l j e k s ehk t - t e l j e k s (joonis 9).

---

mide analüüs ei saa käesolevas loengukursuses kõne alla tulla. Sügavamaks põhjenduseks ettekujutusele aja ühesuunalisusest kui väga üldisele abstraktsioonile on näiteks üldistused entroopia kasvu seaduse, samuti bioloogilise evolutsiooni seaduse näol.



Joonis 9.

b) Nagu füüsikaliste objektide ruumilisel iseloomustamisel nii ka objektide eksistentsi ajalisel määratlemisel ei piisa üksnes olekute suhtelise koordinatsiooni määramisest. On jällegi vaja kindlaks teha suhete suurus sellises koordinatsioonis, s. t. uurida olekute kestust. Tekib a j a - v a h e m i k e määramise ja mõõtmise probleem.

Kogemus õpetab, et ka ajavahemike määramine on sõltumatu ajalise asukoha määramisest ning vajab täiendavat aja omaduste uurimist. Kuidas saab määratleda ajavahemike mõõtmise konkreetset menetlust, kas ajavahemik mingi kindla objekti mingite kindlate olekute vahel (näiteks mingi kindla perioodilise protsessi - millegi täisvõnke, täispöörde, täistiiru jne. - kestus, mille valime ajavahemike mõõtmise ühikuks ja millega võrdleme kõiki teisi ajavahemikke, s.t. teiste sõnadega - " k e l l a " käik) on kõikjal ja alati ühesugune või mitte - kõik see selgub jällegi üksnes looduse objektide ja nähtuste konkreetsest uurimisest. Niisuguse uurimise tulemused üldistuvad üldistes ettekujutustes ajast (nimetagem selliste ettekujutuste kogu k r o n o - m e e t r i a k s), mis, nagu geomeetria tõedki, on alati sõltuvuses looduseuurimise konkreetsest tasemest.

K l a s s i k a l i s e f ü ü s i k a uurimisvaldkonnas osutus tegelikkusele väga hästi vastavaks ettekujutus a b s o l u u t s e s t a j a s t , mis on looduse objektide konkreetsetest omadustest ja nähtustest sõltumatu, mis kõikjal voolab ühtlaselt ja on seega homogeenne. Sellest ettekujutusest tuleneb ka ettekujutus "kellade"[x] käigu täielikust sünkroonsusest sõltumata ruumi punktist ja aja hetkest.

c) Tegelikkuses asetleidvate mistahes nähtuste kirjeldamisel ja uurimisel tuleb alati vaadelda objekti nii ruumis kui ka ajas. Me elame faktiliselt s ü n d m u s t e m a a i l m a s . Mistahes objekti iga üksikolekut tuleb korraga iseloomustada nii ruumiliselt kui ajaliselt (iseasi, kas seda praktika seisukohalt alati vaja läheb). Näiteks teatava kindla partikli eksistentsist täieliku ettekujutuse saamiseks tuleb igal h e t k e l fikseerida ruumi p u n k t , milles ta parasjagu asub. Partikli iga üksikolekut iseloomustavad k o l m ruumikoordinaati (näiteks x, y, z) ja ü k s ajakoordinaat (t).

Nii on ülalkirjeldatud mõttes ruum ja aeg alati lahutamatud. Tänapäeval teamegi, et faktiliselt on meil tegemist ühtse tervikuga - a e g r u u m i g a .

Aegruum on materiaalsete objektide ja nende olekute eksistentsi ja koordinatsiooni üldine ja põhiline vorm, mis on lahutamatu nii mateeriast kui liikumisest.

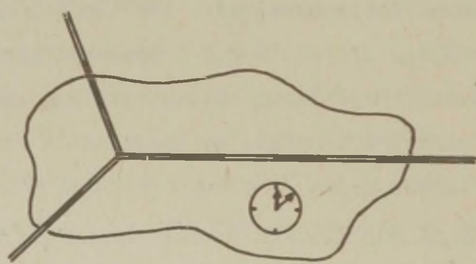
Aegruumi elemendiks on p u n k t h e t k ehk s ü n d m u s . Et iga sündmus on iseloomustatud nelja

---

[x] Olgu märgitud, et mõisted "mõõdupuu" ja "kell" ei tähenda siin igapäevasusest tuntud tollipulki, seina-, lauakelli jne., mis võivad paremini või halvemini tehtud olla. Jutt on põhimõttelistest, ideaalsetest pikkuste ja ajavahemike mõõtmise vahenditest.

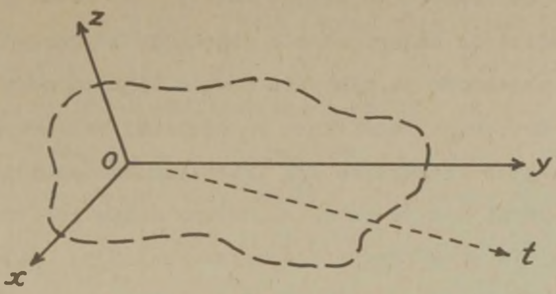
koordinaadiga, siis kujutab aegruum endast n e l j a - m õ õ t m e l i s t p u n k t h e t k e d e e h k s ü n d - m u s t e k o n t i i n u m i t . (Ruumi ja aja printsi-piaalse erinevuse tõttu on siin täpsemalt öeldult siiski tegemist (3 + 1) - m õ õ t m e l i s e k o n t i i n u - m i g a.)

Neljamõõtmelises aegruumis ei piisa objektide eksistentsi täielikuks matemaatiliseks kirjeldamiseks ainuüksi taustkeha ja sellega seotud ruumilise koordinaatsüsteemi valikust. Taustkeha tuleb veel täiendada pikkuste ja ajavahemike mõõtmise seadeldistega ("mõõdupuu" ja "kellaga") ning vastavat ruumilist koordinaatsüsteemi ajateljega. Selliselt täiendatud taustkeha nimetame t a u s t s ü s t e e m i k s (joonis 10) ning



Joonis 10.

vastavat matemaatilist abstraktsiooni a e g r u u m i - l i s e k s k o o r d i n a a t s ü s t e e m i k s (joonis 11).



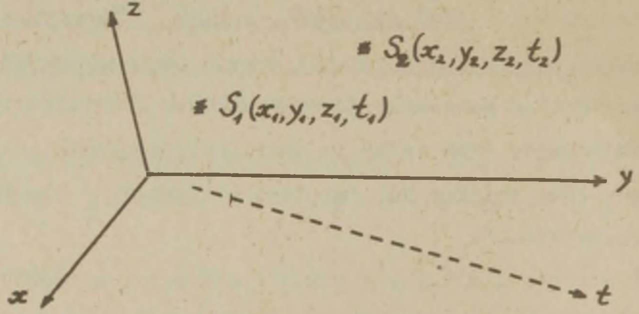
Joonis 11.

d) Ehkki ruum ja aeg on tegelikult lahutamatud, tõestas klassikaline füüsika oma uurimisvaldkonnas, et ruumi ja aega võib formaalselt siiski ka lahus vaadelda. Paljude probleemide puhul on see tõepoolest õigustatud. Muidugi ei kujuta ka klassikalise füüsika ruumilis-ajalised ettekujutused endast ruumi ja aja täielikku teineteisest isoleerimist. Et see nii pole, selgub juba klassikalise füüsika põhimõistetest, nagu kiirus, kiirendus jne.

Kõikvõimalikest taustsüsteemidest tõstab klassikaline füüsika esile inertsiaalsüsteemid. Need on määratud kui mittepöörlevad, vabade (inertsiaalselt liikuvate) partiklitega jäigalt seotud taustsüsteemid. Kogu klassikaline mehaanika formuleeritakse faktiliselt inertsiaalsüsteemide juhu jaoks ja mitteinertsiaalseid taustsüsteeme käsitletakse kui "mittesoovitavaid", isegi kui "mittelubatavaid".

Erirelatiivsusteooria (ERT) tekkega (1905) sai ruumi ja aja printsipiaalne lahutamatus sügavama põhjenduse. Ka selgub ERT-st, et ruumi ja aja omadused sõltuvad materiaalsete objektide kiirusest. Niisiis ilmneb objektide ja nähtuste hoopis tihedam seos ruumi ja ajaga. Ent kuigi ruumilised ja ajalised vahekorrad on üksteise suhtes liikuvates eri inertsiaalsüsteemides erinevad, on ERT järgi aja ja ruumi struktuur antud inertsiaalsüsteemi kogu ulatuses ikkagi ühesugune ega sõltu objektide karakteristikutest. Ka ERT järgi on antud inertsiaalsüsteemis ruum eukleidiline ja aeg homogeenne. Eelistatud taustsüsteemideks jäävad endiselt inertsiaalsüsteemid, kusjuures vastava matemaatilise koordinaatsüsteemi ruumilise osana on esile tõstetav Cartesiuse ristkoordinaadistik. Tavalise kolmemõõtmelise ruumi kauguse mõiste üldistus aegruumi kui neljamõõtmelise kontiinumi puhul - kahe sündmuse (S_1 ja S_2) vaheline i n t e r v a l l - avaldatakse ERT-s tavaliselt järgmisel kujul (vt. ka joonis 12):

$$s = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2} \quad . \qquad \text{(I 3.1)}$$



Joonis 12.

e) Õpetust aegruumi omadustest nimetatakse üldiselt k i n e m a a t i k a k s . (Võib öelda, et kinemaatika on a e g r u u m i g e o m e e t r i a .) Klassikalises füüsikas ja ERT-s käsitleb kinemaatika objektide n.-ö. puhast liikumist, s. t. ruumiliste ja ajaliste suhete määramisel on vaatluse all üksnes tegelikkuse struktuursed moodustised ja liikumisvormid (vt. füüsika uurimisaine määratelu 1. punkti alapunktis a). Vastasmõjude osa ruumilistes ja ajalistes suhetes siin ei avaldu. Nii klassikalise füüsika kui ERT rakendusulatuses on see ka õigeks osutunud. Vastasmõjude kõrvalejätmisega on sisuliselt seotud ka inertsiaalsüsteemide kui vabade partiklitega määratud taustsüsteemide eelistamine.

Pärast ü l d r e l a t i i v s u s t e o o r i a loomist (1916) on aga selgeks saanud, et ruumi ja aja omadustes kajastub ka looduse kõige üldisem ja põhilisem vastasmõju - gravitatsioon. (Paneme seega tähele, et ruumi ja aja omadused on faktiliselt seotud füüsika uurimisaine kõigi komponentidega.) Nii tulebki meil edasiseks ja sügavamaks aegruumi omadustega tutvumiseks asuda paralleelselt uurima ka gravitatsiooninähtusi.

4. Kehade "gravitatsioonimass" ja Newtoni gravitatsiooniseadus

a) Kehade erinev r a s k u s ja nende liikumine raskuse mõjul Maa poole on inimkonna igivana kogemus.

Et kehade raskus on universaalne omadus, siis hakati juba ammu ka esemeid, ainehulki jne. iseloomustama ja üksteisest eraldama raskuse järgi. Kehasid hakati k a a l u m a , s. t. võrdlema nende raskust teatud kindlate kehade, näiteks kaaluvihtide raskusega. Asjaolu, et mingi aine suurem hulk kaalub rohkem kui sama aine väiksem kogus, leidis väga tähtsa praktilise rakenduse inimestevahelises suhtlemises a i n e h u l k a d e m õ õ t m i s e moodusena.

b) Kuidas kehade liikumine raskuse mõjul täpsemalt välja näeb, selle tegi kindlaks Galileo Galilei (1564 - 1642), kes formuleeris k e h a d e v a b a l a n g e m i s e seadused:

1) Kõik vabad kehad langevad Maa poole ühtlaselt kiirenevalt.

2) Antud kohas on kõikide kehade vaba langemise kiirendus ($\vec{g}$) ühesugune.

Vaba langemise seadused on olemuselt k i n e m a a t i k a seadused, mis üksnes kirjeldavad kõigist muudest mõjustustest vabastatud kehade liikumist raskuse mõjul.[x]

c) Isaac Newtoni (1643 - 1727) poolt formuleeritud k l a s s i k a l i s e d ü n a a m i k a põhiseadustega tuli füüsikasse j õ u mõiste. Newtoni dünaamika järgi on kiirendus või keha deformeerumine alati teatava jõu (kui füüsikalist vastasmõju iseloomustava kvantitatiivse suuruse) olemasolu indikaatoriks. (Sellele tuginevalt de-

---

[x] Täpsemalt rääkides mõjustab vabade kehade langemist ka Maa kui taustsüsteemi mitteinertsiaalsus. Sellest tuleb juttu hiljem.

fineeritakse ka jõudude mõõtmise eeskiri ja mõõtühikud.) Seega tulenes nüüd vaba langemise seadustest r a s k u s j õ u kui vaba langemise põhjuse mõiste.

Et ainehulki hakati mõõtma just raskuse abil, siis tuli paralleelselt raskusjõu mõistega füüsikasse ka nn. raske massi ehk "gravitatsioonimassi" mõiste, mida intuitiivselt hakati käsitama ainehulga mõõduna. Kehade " g r a v i t a t s i o o n i m a s s i d " (M) on defineeritud kui antud kohas raskusjõuga võrdelised suurused ja see mõiste sai niiviisi ka kehade Maa poole tõmbumise mõõduks.[x]

d) Newton üldistas oluliselt raskuse mõistet. Ta hakkas käsitlema kehade raskust Maal kui ühe üldisema, "ülemaailmse" nähtuse - gravitatsiooni - eri vormi. Nii tuli füüsikasse gravitatsiooni kui üldise ja põhilise vastasmõju mõiste. Nagu juba märgitud, on see kõigist neljast nüüdisajal tuntud füüsikalise interaktsiooni tüübist kõige universaalsem ja fundamentaalsem.

1687. aastal formuleeris Newton k l a s s i k a l i s e g r a v i t a t s i o o n i t e o o r i a põhiseaduse (vt. joonis 13):

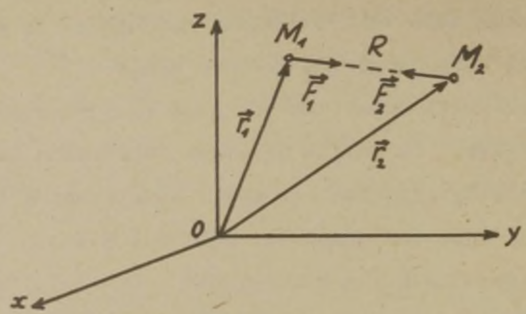
Kaks teineteisest kaugusel R asetsevat punktmassi M_1 ja M_2 tõmbuvad neid ühendava sirge sihis jõuga

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \gamma \frac{M_1 M_2}{R^2} \frac{\vec{R}}{R}, \qquad \text{(I 4.1)}$$

kus $R = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ja $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ on g r a v i t a t s i o o n i k o n s t a n t .[xx]

[x] Toodud väites on jällegi lihtsustavalt jäetud arvestamata Maa mitteinertsiaalsus. Hiljem näeme, et tänu ekvivalentsusprintsiibile siin mingit sisulist viga ei ole.

[xx] Kui analoogi mõistele p u n k t l a e n g kasuta-



Joonis 13.

e) Newtoni gravitatsiooniseadusel on rikas põhimõtteline sisu.

Nagu juba öeldud, hüpoteesiga selle seaduse universaalsusest looduses (kehtivusest kogu maailmaruumi kohta) ületas Newton geotsentrilise vaatekoha raskusnähtuste käsitlemisel. Mitte ainult Maa, vaid iga keha universumis avaldab teistele kehadele gravitatsioonilist külgetõmmet.

Valemi (I 4.1) põhjal omandab "gravitatsioonimass" täpse kvantitatiivse tähenduse "gravitatsioonilaenguna" (vrdl. elektrilaenguga Coulombi seaduses!). Valides ühe punktmassi etaloonmassiks (M_{et}), võime kindlal kaugusel R võrrelda nii selle punktmassi kui ka mistahes teise punktmassi (M_x) gravitatsioonilist külgetõmmet mingile kolmandale punktmassile (M_0). Newtoni gravitatsiooniseadusest järeldub nüüd mõjuvate gravitatsioonijõudude

---

gem mõistet p u n k t m a s s (a i n e p u n k t i või m a s s p u n k t i asemel)! Punktmass tähendagu partiklit, mida vaadeldava probleemi puhul iseloomustame ka massi mõistega.

absoluutväärtuste jaoks

$$F_{et} = \gamma \frac{M_0 M_{et}}{R^2}, \qquad F_x = \gamma \frac{M_0 M_x}{R^2}. \qquad \text{(I 4.2)}$$

Siit saame omakorda eeskirja "gravitatsioonimassi" kui füüsikalise suuruse mõõtmiseks:

$$\frac{M_x}{M_{et}} = \frac{F_x}{F_{et}}. \qquad \text{(I 4.3)}$$

Valem (I 4.1) fikseerib ka ühe looduse põhilisema ja üldisema konstandi γ, mis on sisuliselt seosekoefitsiendiks kehade gravitatsioonivõime karakteristiku M ja mehaaniliste nähtuste dünaamilise karakteristiku $\vec{F}$ vahel. Pärast massiühiku fikseerimist saab konstandi γ arvväärtust vahetult eksperimendist määrata üksteisest teataval kaugusel asuvate punktmasside vahel mõjuvate gravitatsioonijõudude mõõtmisega.

f) Valemi (I 4.1) universaalsust on kinnitanud kogu järgnenud füüsika arengulugu. Tänapäeval võime seda seaduspärasust lugeda tohutu vaatlus- ja katsematerjali poolt (ennekõike muidugi praktiliselt kogu taevamehaanika poolt) õigeks ja seejuures väga täpseks tunnistatud põhiliseks loodusseaduseks. Selle seaduse mõned põhimõttelised puudused ning tema paratamatu piiratus said selgeks alles meie sajandil, pärast relativistliku füüsika sündi.

5. "Gravitatsioonimassi" ja "inertsusmassi" võrdsus

a) Klassikalises Newtoni mehaanikas on sisuliselt kaks massi mõistet.

Nagu juba märgitud, määratleb Newtoni gravitatsiooniseadus kehade gravitatsioonivõime mõõduna "gravitatsioonimassi" (M) mõiste. Newtoni II seaduses esineb aga kehade inertsi mõõduna "i n e r t s u s m a s s" (m):

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} . \qquad \text{(I 5.1)}$$

Silmas pidades klassikalisele dünaamikale omast inertsusmassi konstantsuse eeldust, võib toodud valemit teatavasti lihtsustada:

$$\vec{F} = m\vec{a} . \qquad \text{(I 5.2)}$$

Valemist (I 5.2) võib ka tuletada inertsusmassi kui kvantitatiivse karakteristiku mõõtmise eeskirja klassikalises dünaamikas:

$$\frac{m_x}{m_{et}} = \frac{F_x a_{et}}{F_{et} a_x} , \qquad \text{(I 5.3)}$$

kus F_{et} ja a_{et} on vastavalt inertsusmassi etaloonkehale (massiga m_{et}) mõjuva mõõdetava meelevaldse jõu ja selle jõu poolt esilekutsutava kiirenduse absoluutväärtused ning F_x ja a_x on vastavad suurused tundmatu massiga (m_x) keha puhul. (Märkigem siinkohal, et impulsi jäävuse seaduse põhjal võib formuleerida inertsusmassi mõõtmise üldisema eeskirja.)

"Gravitatsioonimass" ja "inertsusmass" iseloomustavad kumbki näiliselt täiesti eri tüüpi ilminguid. Kumbagi neist saab defineerida teisest täiesti sõltumatult. Mõlemaid nimetatakse aga tavaliselt lihtsalt m a s s i k s . Seetõttu kerkib loomulikult ka küsimus: miks on neil näiliselt erinevatel suurustel siiski sama nimetus?

b) Vaadelgem Maad kui mitteinertsiaalset taustsüsteemi K' Päikesega seotud inertsiaalsüsteemis K (Päikesesüsteemi planeetide mõju Päikese liikumisele jääb arvestamata) ja pangem Maaga seotud taustsüsteemis kirja üldavaldis jõu jaoks, mis annab kiirenduse punktmassile[x]:

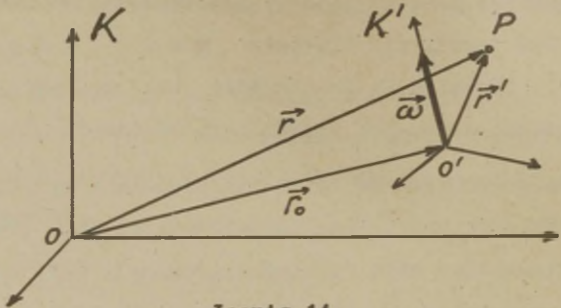
$$\vec{F}' = -m[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'] - m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] - 2m[\vec{\omega} \times \vec{v}'] - m\vec{a}_0 - \gamma \frac{MM_\odot}{(r)^3}\vec{r} - \gamma \frac{MM_♁}{(r')^3}\vec{r}' + \vec{\phi} \tag{I 5.4}$$

Siin on $\vec{r}$ ja $\vec{r}'$ punktmassi kohavektorid vastavalt taustsüsteemides K ja K', $\vec{\omega}$ ja $\dot{\vec{\omega}}$ on vastavalt süsteemi K' (s. t. Maa) pöörlemise nurkkiirus ja nurkkiirendus K suhtes, $\vec{v}'$ on punktmassi kiirus süsteemis K', $\vec{a}_0$ on punkti O' (s. t. Maa inertskeskme) kiirendus K suhtes, $M_♁$ ja $M_\odot$ on vastavalt Maa ja Päikese "gravitatsioonimassid" (vt. ka joonis 14; olgu märgitud, et arvestades klassikalise füüsika ettekujutust aja absoluutsu-

---

[x] Vt. ka Olh., lk. 178-182.

sest, pole mõtet taustsüsteemide graafilisel esitamisel ajatelgi välja joonistada).



Joonis 14.

Esimesed neli liiget avaldise paremal poolel kirjeldavad i n e r t s i j õ u d e, seejuures teine neist on tsentrifugaalne inertsijõud ja kolmas - Coriolisi jõud. Inertsijõud on võrdelised punktmassi "inertsusmassiga" m. Viies ja kuues liige on vastavalt punktmassi ja Päikese ning punktmassi ja Maa vahel mõjuvad g r a v i t a t s i o o n i - j õ u d, mis on võrdelised "gravitatsioonimassiga" M. Seitsmes liige $\vec{\phi}$ kirjeldab punktmassile mõjuvaid mittegravitatsioonilisi jõude. Jõu $\vec{F}\,'$ mõjul saab punktmass Maasuhtelise kiirenduse $\vec{a}\,'$, kusjuures see kiirendus on mõistagi pöördvõrdeline "inertsusmassiga":

$$\vec{a}\,' = \frac{\vec{F}\,'}{m} \qquad \text{(I 5.5)}$$

Erijuhuna võib valemist (I 5.4) leida avaldise jõudude $\vec{F}_\kappa\,'$ jaoks, mis annavad teatavas kohas ja teataval hetkel paigalolevatele punktmassidele (vastavalt "gravitatsioonimassidega" M_1, M_2, ..., M_κ, ... ja "inertsusmassidega" m_1, m_2, ..., m_κ, ...) Maa-suhtelise vaba langemise kiirenduse $\vec{a}' = \vec{g}$. Et nüüd $\vec{v}' = 0$ ja $\vec{\Phi} = 0$, siis

$$\vec{F}_\kappa' = -m_\kappa\left\{(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}') + [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] + \vec{a}_0\right\} - \\ - M_\kappa\left(\frac{\gamma M_\odot}{(r)^3}\vec{r} + \frac{\gamma M_\delta}{(r')^3}\vec{r}'\right). \qquad \text{(I 5.6)}$$

Arvestades Galilei vaba langemise seadustes sisalduvat väidet $\vec{g}$ konstantsuse kohta kõikide kehade jaoks antud kohas, saame valemi (I 5.5) põhjal seosed

$$\vec{g} = -\left\{(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}') + [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')] + \vec{a}_0\right\} - \\ - \frac{M_\kappa}{m_\kappa}\left(\frac{\gamma M_\odot}{(r)^3}\vec{r} + \frac{\gamma M_\delta}{(r')^3}\vec{r}'\right), \qquad \text{(I 5.7)}$$

kus κ = 1, 2, 3, ...

Seostest (I 5.7) järeldub vahetult võrduste jada

$$\frac{M_1}{m_1} = \frac{M_2}{m_2} = \ldots = \frac{M_\kappa}{m_\kappa} = \ldots = const, \qquad \text{(I 5.8)}$$

s. t. suhe $\frac{M_\kappa}{m_\kappa}$ peab olema mistahes punktmassi jaoks ühesugune jääv suurus. Seega on mistahes punktmassi (ja selle üldistusena ka mistahes keha) "gravitatsioonimass" ja "inertsusmass" rangelt **v õ r d e l i s e d**. Etaloonid ja mõõtühikud kahe võrdelise suuruse mõõtmiseks võib aga valida nii, et võrdetegur oleks 1 ja seetõttu

$$m = M. \qquad \text{(I 5.9)}$$

Nii järeldub Galilei vaba langemise seadustest ja Newtoni dünaamikast "gravitatsioonimassi" kui "gravitatsioonilaengu" ja "inertsusmassi" kui inertsi mõõdu v õ r d s u s (arvatavasti on see ka sama nimetuse põhjuseks). Ent m i k s see nii on, sellele me Newtoni mehaanikast vastust ei leia. Kehade liikumist raskuse toimel ja liikumist üksnes inertsi tõttu käsitatakse koguni põhimõtteliselt erinevate ilmingutena. Esimene on liikumine jõu mõjul, teine jõuvaba liikumine. Ka elektriliselt laetud kehadega pole analoogiat. Jõu, millega üks laetud keha tõmbub teise poole, määrab laeng q, laetud keha inertsi määrab aga ikkagi "inertsusmass" m ning q ja m on teineteisest sõltumatud suurused.

c) Kas "gravitatsioonimass" ja "inertsusmass" on tõepoolest võrdsed, seda on uuritud ka peenemate eksperimentidega. Pangem seejuures tähele, et negatiivne katsetulemus näitaks Newtoni mehaanika seesmist vastuolulisust või vähemalt teatavat sisulist piiratust.

Ajalooliselt esimene sedatüüpi kaalukas eksperiment pärineb ungari füüsikult L. Eötvösilt (1890). Kasutanud nn. gravitatsioonilist variomeetrit, millega sai suure täpsusega võrrelda eri ainest kehade puhul avaldises (I 5.4) esinevate inertsijõudude ja gravitatsioonijõudude vahekorda, õnnestus Eötvösil kinnitada sama keha "gravitatsioonimassi" ja "inertsusmassi" võrdsust. Need katsed näitasid, et "gravitatsioonimassi" ja "inertsusmassi" suhe ei või erineda ühest rohkem kui suurusjärgus 10^{-9} või väiksemate liikmete poolest. 1960. aastatel viis R. Dicke katsetäpsuse 10^{-11}-ni ning 1971. aastal said V. Braginski ja V. Panov tulemuseks isegi 10^{-12}.

Niisiis on "gravitatsioonimassi" ja "inertsusmassi" võrdsus suure täpsusega kindlaks tehtud e k s p e r i m e n t a a l n e f a k t , mis kinnitab Newtoni mehaanika seesmist harmooniat, ent mille sügavam seletus klassikalises füüsikas ometi puudub.

d) Et eksperiment on suure täpsusega kinnitanud "gravitatsioonimassi" ja "inertsusmassi" võrdsust, siis võib järelikult täie õigusega kasutada üksnes ühte massi mõistet. (Edaspidi pole ka käesolevas käsitluses tähistuste m ja M vahel sisulist vahet.) Massi kui füüsikalise suuruse tänapäevase definitsiooni annab "Füüsika entsüklopeediline sõnaraamat"[x] järgmiselt:

Mass on mateeria füüsikaline karakteristik, mis on üheaegselt nii mateeria gravitatsiooni- kui ka inertsiomaduste väljendaja ja mõõt.

Pangem tähele, et selles definitsioonis pole sõnagi massist kui "ainehulgast" või "ainehulga mõõdust". Ometi käsitati ja isegi määratleti vanemas füüsika-alases kirjanduses massi sageli just "ainehulga mõõduna" või "mateeriahulga mõõduna", vahel aga koguni otseselt "ainehulgana" või "mateeriahulgana" ning sellelaadilist käsitust võib kohata veel tänapäevalgi.

Mis vahekorras siis mõisted m a s s ja a i n e h u l k õieti on?

e) Massi ja ainehulga samastamine tähendab tänapäeval sisuliselt massi ülaltoodud täpse t e a d u s l i -

[x] FES-III, lk. 135.

k u tähenduse unustamist ja selle mõiste samastamist "gravitatsioonimassi" ehk "raske" massi i n t u i t i i v s e tähendusega, millest oli juttu eespool, või koguni mõiste "mass" i g a p ä e v a s e tähendusega. Nii näiteks määratleb "Õigekeelsuse sõnaraamat" (Tallinn, 1960) tõepoolest massi üldise tähendusena: "aine; kogu, hulk". "Võõrsõnade leksikon" (Tallinn, 1961) lisab, et mass on "vormitu aine, püdel v. poolsula aine; suur hulk; terviklikuks ühikuks liitunud rahvahulk".

Füüsikas kasutatakse ainehulkade mõõtmiseks faktiliselt vägagi e r i n e v a t e füüsikaliste suuruste mõõtmist (sel eesmärgil mõõdetakse ruumala, pikkusi, pindala, aega, kaalu). Ainehulga mõiste eripärase füüsikalise suurusena seni kasutusel polnudki[x].

Et mass pole samastatav ei aine- ega mateeriahulgaga, see saab eriti ilmseks ERT tõdede valguses. Käsitades massi mateeria- või ainehulga mõõduna, peaks valemi $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ põhjal mateeria- (või aine-) hulk kasvama kiirusest sõltuvalt ka siis, kui aatomite hulk kehas jääb muutumatuks. Samastades mateeriahulga seisumassi mõistega, tuleks arvata mateeria hulgast välja footonid ja neutriinod. Lugedes seisumassi samaseks ainehulgaga, kerkib aga kohe küsimus, mis on siis elektromagnet- ja neutriinovälja puhul nn. väljahulk? Kui pidada kas massi üldse või ainuüksi seisumassi mateeria- või

---

[x] 1971. a. oktoobris otsustas Pariisis toimunud XIV Rahvusvaheline Mõõtude ja Kaalude Peakonverents võtta a i n e - h u l k siiski kasutusele rahvusvahelise mõõtühikute süsteemi (SI) seitsmenda põhisuurusena, kusjuures vastavaks põhiühikuks sai m o o l (tähis: mol). Avogadro arv $N = (6,02252 \pm 0,00028) \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

ainehulgaks, järelduks kõigele lisaks massi ja energia identsuse seadusest $E=mc^2$ veel see, et siis tuleks ka energiat hakata nimetama mateeria- või ainehulgaks (!?).

Väitel "mass on mateeria- (või aine-) hulga mõõt" on mõistagi ka teatav mõistlik ja konkreetne sisu. S e i s u m a s s võib tõepoolest olla ü h e k s ainehulga võimalikuks mõõduks. (Nagu nägime, tuli just sel moel esialgselt "gravitatsioonimassi" mõiste füüsikasse.) Kuid äsjaöeldut ei saa tänapäeval mingil juhul lugeda massi definitsiooniks.[x] Selline "määratelu" ei ava massi mõiste tõelist sisu ega anna massi mõõtmise viisi. Massi teadusliku mõiste defineerimisel on ikkagi mateeria inertsi- ja gravitatsiooniomadused p r i m a a r s e d . Aga tänu inertsi- ja gravitatsiooniomaduste erakordsele fundamentaalsusele ja universaalsusele on massi mõiste kasutatav ka ainehulga väga üldise mõõduna. Niisiis on massi mõiste olemus ainehulga mõõduna tema s e k u n d a a r n e omadus.

6. Gravitatsioonivälja mõiste Newtoni gravitatsiooniteoorias

a) Gravitatsiooniliste mõjude vahendaja probleem pärineb juba Newtoni ajast. Tol ajal polnud veel võimalik sellele probleemile sügavamasisulist vastust anda. Newtoni gravitatsiooniseadus (I 4.1) jäi faktiliselt kirjelda-

---

[x] Seda enam, et nüüd on a i n e h u l k sisse viidud juba omaette põhisuurusena.

vaks ja gravitatsiooni lihtsalt kvantitatiivselt iseloomustavaks seaduseks selles mõttes, et temast ei järeldu midagi gravitatsiooniliste mõjude vahendaja kohta. Newtoni gravitatsiooniseaduse kohaselt võib gravitatsiooni puhul olla tegemist ka kaugmõjuga, s.t. mõjude üleandmisega üle kauguste nii, et vahepealses ruumis pole midagi, mis oleks nende mõjudega seotud, ning selline mõjude üleandmine võiks toimuda silmapilkselt.

b) ERT loomise järel sai selgeks füüsikaliste mõjude leviku kiiruse lõplikkus. Selle asjaolu selgumine likvideeris füüsikast kaugmõju kontseptsiooni võimalikkuse. Ainuvõimalikuks sai lähimõju kontseptsioon, s. t. mõjude levik ruumipunktist ruumipunkti lõpliku kiirusega. See tegi omakorda vajalikuks rääkida üksteisest eraldatud aineliste objektide vaheliste mõjutuste puhul väljast kui mõjutusi vahendavast reaalsusest.

Elektromagnetlainete avastamine ja uurimine tõestas juba enne ERT sündi elektromagnetvälja reaalsuse. Maxwelli poolt möödunud sajandi 60-ndatel aastatel formuleeritud elektromagnetvälja põhivõrrandid osutusid automaatselt invariantseteks ka Lorentzi teisenduste suhtes ja seega ERT-ga täiesti kooskõlas olevateks. Võrreldes nüüd aga gravitatsiooni Newtoni teooriat ja elektromagnetismi Maxwelli teooriat omavahel, näeme, et viimane on sisuliselt oluliselt rikkam: ta kirjeldab peale laengute ja nende vahel mõjuvate jõudude veel laengutega ja nende liikumisega lahutamatult seotud elektromagnetvälja.

c) Matemaatilise abimõistena, formaalselt võib lülitada g r a v i t a t s i o o n i v ä l j a mõiste ka Newtoni teooriasse. Gravitatsiooniväli mingi massijaotuse ümber tähendab siis lihtsalt selle kindlaksmääramist, kui suure ja missuunalise jõuga mõjutab antud mass ühikulist proovimassi kõikides teda ümbritsevates ruumipunktides. Lugedes selliselt iga ruumipunkti juurde kuuluvaks ühe jõuvektori, saamegi puhtmatemaatilise loomusega "jõuvälja" ruumis. Analoogiliselt elektrostaatilise jõuväljaga võib siin defineerida v ä l j a t u g e v u s e mõiste

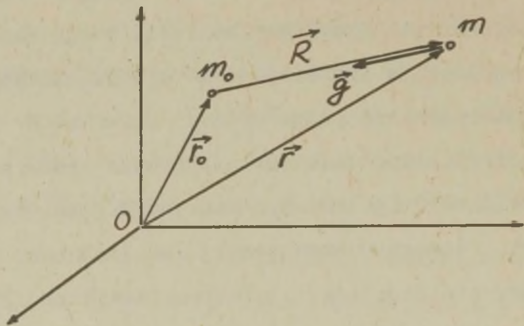
$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad \text{(I 6.1)}$$

(Et tänu "gravitatsioonimassi" ja "inertsusmassi" võrdsusele võib seda valemit tõlgendada ka Newtoni II seadusena, siis näeme, et defineeritud suurusel on faktiliselt vaba langemise kiirenduse tähendus.)

Vaatleme nüüd konkreetselt teatavas kindlas inertsiaalsüsteemis paigaloleva üksiku punktmassi (m_0) ümber olevat gravitatsioonivälja. Newtoni gravitatsiooniseaduse (I 4.1) põhjal omandab valem (I 6.1) kuju

$$\vec{g} = -\frac{\gamma m_0 \vec{R}}{R^3} = -\frac{\gamma m_0 (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \qquad \text{(I 6.2)}$$

(vt. ka joonis 15). Suurus $\vec{g}$ on siin üksnes kohavektori $\vec{r}$ funktsioon ja sellega ongi meil nüüd määratud suuruse $\vec{g}$ väärtuste "väli" ruumis. Edasi võime selle välja puhul kasutada kõiki vektoranalüüsi mõisteid ja arvutusvalemeid.



Joonis 15.

d) Täiesti analoogiliselt elektrostaatikale[x] saab tuletada g r a v i t a t s i o o n i v ä l j a d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d i d Newtoni teooria raamides:

$$\operatorname{rot} \vec{g} = 0, \tag{I 6.3}$$

$$\operatorname{div} \vec{g} = -4\pi\gamma\mu_0 . \tag{I 6.4}$$

Neis võrrandeis on välja kirjeldavaks suuruseks väljatugevus $\vec{g}$. Suurus μ_0 tähendab massitihedust.

Et seose (I 6.3) põhjal on ülalvaadeldud gravitatsiooniväli pöörisevaba, siis võib defineerida ka v ä l j a p o t e n t s i a a l i mõiste

$$\vec{g} = -\operatorname{grad} U . \tag{I 6.5}$$

---

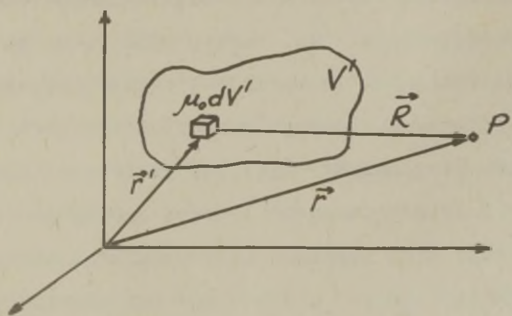
[x] Vt. näiteks K-ME, lk. 13 jj.

Punktmassi puhul (kalibreerides potentsiaali lõpmata kaugel nulliks) avaldub välja potentsiaal valemiga

$$U = -\frac{\gamma m_0}{R} = -\frac{\gamma m_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \,, \tag{I 6.6}$$

meelevaldse massijaotusega keha (vt. joonis 16) puhul aga valemiga

$$U = -\gamma \int\limits_{(V)} \frac{\mu_0(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \,. \tag{I 6.7}$$



Joonis 16.

Arvestades definitsioonivalemit (I 6.5), on väljavõrrandid (I 6.3) ja (I 6.4) teatavasti identselt rahuldatud, kui vaid on rahuldatud võrrand

$$\boxed{\operatorname{div}\operatorname{grad} U \equiv \Delta U = 4\pi\gamma\mu_0} \tag{I 6.8}$$

See on **gravitatsioonivälja põhivõrrand**, kui kirjeldame välja potentsiaali abil.

e) Niisiis näeme, et Newtoni teooria on sisuliselt **gravistaatilise välja** teooria. Seda välja kirjeldab ja iseloomustab täielikult **skalaar-**

n e (s. t. ühekomponendiline) suurus U ning välja põhivõrrandiks on just eripäraselt staatilisi ilminguid kirjeldav elliptilist tüüpi P o i s s o n i v õ r r a n d (üks võrrand). Pangem seejuures tähele, et nii potentsiaal U kui massitihedus μ_o võivad üldjuhul ajast t kui parameetrist siiski sõltuda.

Et Newtoni teooria ei hõlma välja suuruste kirjeldust, siis jääbki selles välja mõiste möödapääsmatult formaalseks. Mingit realiteeti, mis oleks lähimõju vahendaja, see teooria kirjeldada ei saa. Paneme tähele, et ka elektrostaatiline väli omaette vaadeldult jääks paratamatult formaalseks mõisteks. Elektromagnetvälja (ja selle erijuhtude - elektri- ning magnetvälja) kui realiteedi mõiste kujunemisel oli asendamatu osa elektromagnetnähtuste terviklikul teoorial. Siit järeldub nüüd omakorda, et relativistlikus füüsikas e i s a a Newtoni gravitatsiooniteooria (oma loomult tegelikult mitterelativistlik teooria) olla täielik ja kõigiti rahuldav gravitatsiooninähtuste teooria.

f) R e l a t i v i s t l i k u g r a v i t a t s i o o n i t e o o r i a , mis sai nii Newtoni gravitatsiooniteooria kui ka ERT üldistuseks ja edasiarenduseks, andis 1916. aastaks Albert Einstein (1879-1955). Seda teooriat, mis ühendab endas mehaaniliste, elektromagnetiliste ja gravitatsiooniliste makronähtuste tervikliku ja harmoonilise kirjelduse, mis seletab sügavamalt "gravitatsioonimassi" ja "inertsusmassi" võrdsuse ning milles ka gravitatsioonivälja mõiste omandab realiteedi tähenduse, hakatigi nimetama ü l d r e l a t i i v s u s t e o o r i a k s (ÜRT).

7. Ekvivalentsusprintsiip

a) A. Einsteini järgi on e k v i v a l e n t s u s p r i n t s i i p üks tähtsamaid ÜRT alustõdesid, põhilisemaid printsiipe. Ent see printsiip on siiski ka tänapäeval veel mitmetimõistmise ja diskussioonide objektiks.

Ekvivalentsusprintsiibi sisuks on teatav väide inertsi- ja gravitatsiooninähtuste omavahelise seose kohta. Erinevalt mõistetakse aga selle väite ulatust, samuti ekvivalentsusprintsiibi osatähtsust ÜRT struktuuris.

Vahel peetakse lihtsalt "inertsus-" ja "gravitatsioonimassi" võrdsuse katselist fakti ekvivalentsusprintsiibiks. Mõistagi pole sel juhul tegemist veel mitte mingi "printsiibiga".

On olemas teadlasi (näiteks V. Fok, J. Synge, A.Petrov jt.), kes peavad ekvivalentsusprintsiipi rangelt lokaalse kehtivusega ja sisuliselt ligikaudseks printsiibiks, mis üksnes konstateerib inertsi- ja gravitatsiooninähtuste eristamise võimatust küllalt väikeses ruumipiirkonnas küllalt väikese ajavahemiku jooksul (näiteks "Einsteini liftis", mida kohe allpool vaatleme). Selliste füüsikute arvates pole ekvivalentsusprintsiibil olulist osa ÜRT-s kui nüüdisaegses gravitatsiooniteoorias.

On aga samuti teadlasi (näiteks L. Infeld, A. Bogorodski, H. Keres jt.), kes, järgides A. Einsteini enda käsitust, mõistavad e k v i v a l e n t s u s p r i n t s i i p i sügavasisulise, fundamentaalse ja universaalse printsiibina:

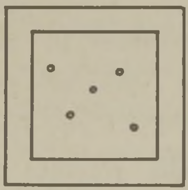
<u>Inertsinähtused ja gravitatsiooninähtused on loomult ühtsed, füüsikaliselt samaolemuslikud</u>.

Sellisena on ekvivalentsusprintsiip ÜRT üks nurgakive, rikastades oluliselt selle teooria füüsikalist sisu.

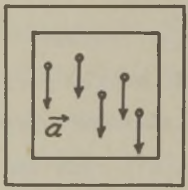
b) "Einsteini liftiks" nimetame mingit kinnist laboratooriumi või kabiini (lift, kosmoselaeva kabiin jms.), mis on küllalt väike gravitatsioonivälja mittehomogeensuste avaldumiseks kasutatava mõõtmistäpsuse juures ning mida vaatleme sellise küllalt lühikese ajavahemiku jooksul, mille vältel tema liikumisoleku iseloom ei muutu.

Vaatleme nüüd mõningaid mõttelisi katseid sellise "liftiga" ning neist tulenevaid järeldusi. Kõigi nende mõtteliste katsete puhul tulenegu järeldused ü k s n e s l i f t i s i s e s t e s t vaatlustest ja mõõtmistest.

Oletagem esiteks, et kõik vabad kehad liftis jäävad lifti kui taustsüsteemi suhtes paigale või liiguvad ühtlaselt ja sirgjooneliselt (joonis 17). Ilmselt võiksime seda nähtust seletada vaatlushetkel kahel viisil: 1) lifti inertsiaalse liikumisega suurel kaugusel mistahes massijaotusest, mistõttu puudub gravitatsiooniline külgetõmme ja ka kõik kehad liiguvad liftis üksnes inertsi toimel; ning 2) lifti vaba translatoorse langemisega mingis gravitatsiooniväljas, mistõttu kõik kehad liftis langevad koos sellega ning neil puudub liftisuhteline kiirendus. Esimesel juhul oleks tegemist i n e r t s i a a l s ü s t e e m i g a, milles p u u d u b g r a v i t a t s i o o n i v ä l i ; teisel juhul - g r a v i t a t s i o o n i v ä l j a s vabalt langeva m i t t e i n e r t s i a a l s e t a u s t s ü s t e e m i g a . Kumb taustsüsteem meil tegelikult on, seda ülalkirjeldatud üksnes liftisiseste vaatluste ja mõõtmistega kindlaks teha ei saa.



Joonis 17.



Joonis 18.

Teise situatsioonina oletagem, et kõik vabad kehad liiguvad mingi kindla ja ühesuguse liftisuhtelise kiirendusega $\vec{a}$ (joonis 18). Seda olukorda võiksime teataval vaatlushetkel samuti seletada kahel viisil: 1) lifti paigalolekuga teatava massijaotuse lähedal, mille gravitatsiooniline külgetõmme tekitab kõikide kehade puhul just nimetatud kiirenduse $\vec{a}=\vec{g}$ (näiteks selliste kiirenduste puhul, mis on lähedased 9,8 m/s^2-le, võiks tegemist olla paigalolekuga mingis Maa-lähedases punktis); ning 2) lifti kiireneva liikumisega kuskil tähtedevahelises ruumis, kus muude kehade gravitatsiooniline külgetõmme praktiliselt puudub ja nimetatud kiirenduse saavad vabad kehad lifti enda vastassuunalisest kiirendatud liikumisest, näiteks "liftiga" ühendatud mootorite poolt arendatud veojõu toimel. Esimesel juhul oleks tegemist inertsiaalsüsteemiga, milles on gravitatsiooniväli; teisel juhul - gravitatsioonivälja puudumisel kiirenevalt liikuva mitteinertsiaalse taustsüsteemiga. Ja jällegi - kumb taustsüsteem meil tegelikult on, see jääb ülalkirjeldatud liftisisestest vaatlustest ja mõõtmistest kindlaks tegemata.

Niisiis, küllalt väikeses ruumipiirkonnas ja küllalt väikese ajavahemiku jooksul ei ole inertsi- ja gravitatsiooninähtused tõepoolest lokaalselt eristatavad. Ent kas on tingimata vaja piirduda üksnes selle eristamatuse nentimisega? Jääb ju nii inertsi- ja gravitatsiooninähtuste sarnasus ikkagi sügavamalt seletamata, samuti "gravitatsioonimassi" ja "inertsusmassi" võrdsus põhjendamata.

c) Ekvivalentsusprintsiibi Einsteini-pärase käsituse kohaselt on "Einsteini liftis" esinev inertsi- ja gravitatsiooninähtuste "sassiminek" ülimalt loomulik. Kirjeldatud olukordades on see lihtsalt järelduseks sügavamast füüsikalisest tunnetusest. Nii ajaliselt konstantses ja ruumiliselt homogeenses gravitatsiooniväljas paigalolevas jäigas taustsüsteemis kui ka gravitatsioonivälja puudumisel kiirenevalt liikuvas jäigas mitteinertsiaalses taustsüsteemis näiteks peavadki materiaalsed protsessid kulgema ühesuguste seaduspärasuste järgi, mistõttu ühes neist toimuvate nähtuste jälgimine ei võimalda kindlaks teha, kumma süsteemiga on tegemist.

Märkigem, et tänapäeval pole teada mingeid fakte, mis kummutaksid ettekujutuse inertsi- ja gravitatsiooninähtuste samaolemuslikkusest. Vastupidi - peale ülalkirjeldatute tuntakse veel mitmeid teisigi nähtusi, kus inertsi- ja gravitatsiooninähtuste samaolemuslikkus selgelt avaldub. Nii on see näiteks kehade kaaluvuse, samuti kaalutuse olekute ilmnemise puhul.[x] Et ekvivalentsusprintsiibi sügavam tõlgendus annab ka ÜRT-le tervikuna sügavama ja ulatuslikuma sisu, selleski võime veenduda edaspidises. Mis puutub gravitatsiooniväljaga analoogilise "inertsivälja" ja selle "allikate" olemasolu probleemi, siis on võimalik leida ka sellele probleemile loomulik ja vastuoluvaba lahendus.

Ekvivalentsusprintsiibi Einsteini-pärase tõlgenduse kohaselt on täiesti loomulik seegi tõik, et "inertsus-" ja "gravitatsioonimass" on võrdsed. Sellega leiab nimetatud eksperimentaalne fakt sügavama teoreetilise põhjenduse. A. Einstein ise on kirjutanud: "Võimalus seletada inertsi ja gravitatsiooni arvulist võrdsust nende loomuse ühtsuse alusel annab üldrelatiivsusteooriale minu arvates sellise eelise klassikalise mehaanika ettekujutuste ees, et kõiki raskusi, millega see teooria kohtub oma arenguteel, tuleb nimetatud asjaolu kõrval tühisteks lugeda"[xx].

---

[x] Kehade kaaluvusest ja kaalutusest ning nende olekutega seotud olulisest mõistest - kaalust - tuleb juttu ÜRT-le omases tõlgenduses käesoleva kursuse III peatükis.

[xx] E, lk. 45.

d) Et mõista ekvivalentsusprintsiibi Einsteini-pärase käsituse kriitika mõningate põhiargumentide alusetust, tuleb tähele panna, et inertsi- ja gravitatsiooninähtuste samaolemuslikkus ei tähenda kaugeltki seda, nagu peaksid ühed neist alati olema asendatavad teistega. Nagu hiljem täpsemast eritlusest näeme, on inertsinähtused teatava üldisema nähtuste liigi üks avaldumisvorme, "tõelised" gravitatsiooninähtused - sama nähtuste liigi teistsugune avaldumisvorm. Need eri avaldumisvormid võivad teatud olukordades (kuid kaugeltki mitte alati!) teatavate tunnuste abil muidugi ka eristatavad olla (näiteks vabade punktmasside trajektooride suhteliste orientatsioonide abil). Kuid see ei pruugi ju sugugi nende nähtuste samaolemuslikkusega vastuolus olla (elektrivälja eri tüüpide puhul võib ka vabade proovilaengute trajektooridel erinev kuju olla).

Niisiis ei nõua ekvivalentsusprintsiibi Einsteini-pärane tõlgendus sugugi (nagu arvavad paljud kriitikud), et "tõelised" gravitatsiooninähtused oleksid alati imiteeritavad inertsinähtustega. Üldise mittehomogeense gravitatsioonivälja puhul on see mõistagi võimalik üksnes lokaalselt - aegruumi lõpmata väikestes piirkondades. Ent see l o k a a l n e v õ i m a l i k k u s realiseerub täiesti t o t a a l s e l t : gravitatsioonivälja mistahes punktis mistahes hetkel lõpmata lühikese ajavahemiku jooksul vaadeldud lõpmatult väikeste ruumiliste mõõtmetega pöörlemisvabalt langev lokaalne taustsüsteem on juba tõepoolest täiesti identne (mitte üksnes lihtsalt sarnane) inertsiaalsüsteemiga.

Olgu märgitud, et just viimane asjaolu põhjendab ammendavalt alatist võimalust võtta igas aegruumi punktis kasutusele nn. lokaalne inertsiaalsüsteem. Nagu hiljem näeme, on sellel võimalusel põhimõtteline tähtsus ÜRT matemaatilise aparatuuri konstrueerimisel.

8. Üldrelatiivsusprintsiip

a) ÜRT teine põhiprintsiip - üldrelatiivsusprintsiip - on samuti mitmetimõistmise ja diskussioonide objekt.

Üldrelatiivsusprintsiibi sisuks on relatiivsusprintsiibi üldistamine mistahes taustsüsteemide juhule. Osa teadlasi (näiteks V. Fok, A. Petrov jt.) peab sellist üldistamist võimatuks ning koos sellega üldrelatiivsusprintsiipi sisutühjaks või koguni ebaõigeks. Teised teadlased (näiteks L. Infeld, M. Širokov, H. Keres jt.), järgides A. Einsteini enda käsitust, on aga veendunud sellise üldistuse vajalikkuses, sisukuses ja korrektsuses.

b) Relatiivsus, millest on jutt relatiivsusteoorias kui füüsikalises teoorias (nii ERT-s kui ÜRT-s), kujutab endast objektide ja nähtuste ajalis-ruumilise kirjeldamise ühte aspekti. Seejuures on oluline tähele panna, et nagu üldiseltki, nii on ka siin millegi relatiivsus lahutamatult seotud millegi absoluutsusega.

Selgub, et võttes aluseks vahekorra taustsüsteemiga, võib kõiki füüsikanähtusi ning neid iseloomustavaid suurusi jaotada kahte suurde rühma: absoluutseteks ja relatiivseteks. On aga selgeks saanud veel seegi tõde, et selline jaotus ise on samuti relatiivne, sõltudes teadmiste arengutasemest ja vaatekohast nähtustele. (Absoluutne on siin ainult see tõik, et selline jaotamine üldse printsipiaalselt võimalik on ning teatavat füüsikalist mõtet omab.)

Nähtusi ja suurusi nimetame siis relatiivseteks, kui nende puhul on olemas teatav ajalis-ruumilise kirjelduse tagapõhja muutmise võimalus, ilma et see põhimõtteliselt midagi muudaks.

Niisiis on meil relatiivsete nähtuste ja suuruste puhul alati tegemist teatava samaväärsete taustsüsteemide hulgaga.

Juba klassikalises füüsikas oli hästi tuntud ruumi homogeensusest ja isotroopsusest tingitud ruumilise asukoha ja ruumi suundade relatiivsus ("geomeetriline relatiivsus"), samuti aja homogeensusest tingitud ajahetke relatiivsus ("kronomeetriline relatiivsus"): kui silmas peame üksnes nende mõistete konkretiseerimist vaadeldavate objektide ja nähtuste puhul, siis selles mõttes pole ükski taustsüsteem teistest põhimõtteliselt eelistatum.

Klassikalise relatiivsusprintsiibi kohaselt on vähemalt mehaanikanähtuste valdkonnas ka kiiruse mõiste relatiivne: mehaanikanähtuste kirjeldamisel pole seetõttu ükski inertsiaalsüsteem teistest inertsiaalsüsteemidest põhimõtteliselt eelistatum. Praktiliste kaalutluste seisukohalt on eelistatumad inertsiaalsüsteemid muidugi olemas, näiteks taevamehaanikas kujunes selliseks taustsüsteem, milles taustkehaks on Päike ja kellaks planeetide liikumine.

ERT tegi selgeks, et kiiruse mõiste on relatiivne k õ i g i füüsikanähtuste valdkonnas: inertsiaalsüsteemid on seega k õ i g i füüsikanähtuste suhtes (ja kõigi loodusnähtuste suhtes üldse) põhimõtteliselt samaväärsed. Samal ajal fikseeris aga ERT-gi mitmete absoluutsete suuruste olemasolu: valguse kiirus vaakumis c, seisumass m_o jt. Absoluutseks jääb ERT raamides ka kiirenduse mõiste - selles mõttes, et erineva kiirendusega liikuvad taustsüsteemid pole samaväärsetena käsitatavad.

c) Tänu ekvivalentsusprintsiibile võib aga asuda vaatekohale, mille järgi k i i r e n d u s k i on käsitatav relatiivse suurusena.

Paneme tähele, et ekvivalentsusprintsiibi üheks tahuks on just inertsiaalsete ja mitteinertsiaalsete taustsüsteemide kõrvutamine ning nende samaväärsuse konstateerimine teatavate olukordade jaoks. Ekvivalentsusprintsiibist järeldub, et taustsüsteemi kiirendusest tingitud inertsiefektid pole põhimõtteliselt eristatavad gravitatsiooniefektidest. Taustsüsteemi kiirendus pole seega ka üheselt väljaloetav üksnes süsteemisisestest vaatlustest ja mõõtmistest, samuti nagu inertsiaalsüsteemide kiirus. Selles mõttes on nüüd kiirus ja kiirendus analoogilised suurused, seega mõlemad relatiivsed.

Mõistagi pole äsjanimetatud analoogia täielik. Pangem tähele, et kiirus ja kiirendus on relatiivsed e r i n e v a t e l a b s t r a k t s i o o n i t a s e m e t e l. Et mitteinertsiaalseid taustsüsteeme eristab inertsiaalsetest just inertsiefektide olemasolu (ja need on tõesti reaalsed efektid), siis saame kõiki taustsüsteeme samaväärseteks lugeda üksnes sellel abstraktsioonitasemel, mil abstraheerume juba gravitatsiooni- ning koos sellega ekvivalentsete inertsinähtuste konkreetsest olemasolust või puudumisest. Teisiti samaväärsust mõistagi olla ei saa. Ent samal ajal on ikkagi oluliseks tõeks see, et t e a t a v a l a b s t r a k t s i o o n i t a s e m e l võime siiski lugeda kõiki t a u s t s ü s t e e m e s a m a v ä ä r s e t e k s, sõltumata nende kiirendusest. Ja siit avanebki võimalus üldrelatiivsusprintsiibi formuleerimiseks.

Sooviga rõhutada just ülaltoodud printsipiaalselt tähtsaid asjaolusid, andkem siin ü l d r e l a t i i v s u s p r i n t s i i p mõneti ebaharilikus sõnastuses:[x]

Sellisel abstraktsioonitasemel, mil gravitatsiooninähtuste ja nendega ekvivalentsete inertsinähtuste olemas-

[x] Võrdluseks formuleerigem analoogiliselt ka e r i r e l a t i i v s u s p r i n t s i i p:
Sellisel abstraktsioonitasemel, mil füüsikanähtuste kirjeldamisel peetakse põhimõttelise tähtsusega asjaoluks just inertsinähtuste olemasolu või puudumist ning kõiki teisi nähtusi võetakse arvesse täiendavalt, on füüsikanähtuste kirjeldamiseks kõik inertsiaalsüsteemid samaväärsed.

olu või puudumist ei peeta põhimõttelise tähtsusega asjaoluks ning neid nähtusi võetakse arvesse täiendavalt, on füüsikanähtuse kirjeldamiseks kõik taustsüsteemid samaväärsed.

d) Kõigi taustsüsteemide samaväärsuse sisuliseks garanteerimiseks nõuab üldrelatiivsusprintsiip füüsika seaduste sellist formuleerimist, et need oleksid r a k e n d a t a v a d   m i s t a h e s   t a u s t s ü s t e e m i s ja vajaduse korral võimaldaksid kirjeldada ka gravitatsiooni- või nendega ekvivalentseid inertsiefekte. Järelikult peaksid sellistes mistahes taustsüsteemide jaoks kehtivates füüsika võrrandites olema ka teatavad u u e d   f ü ü s i k a l i s e d   s u u r u s e d, mis iseloomustaksid gravitatsiooni- ja inertsinähtusi. Nagu edaspidi näeme, saavutatakse nimetatud eesmärgid füüsika võrranditele ü l d k o v a r i a n t s e   k u j u andmise teel.

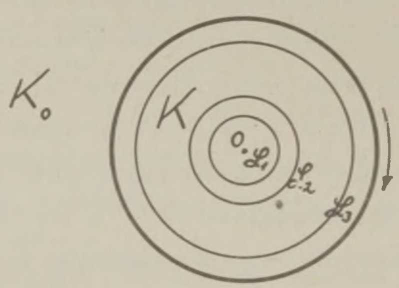
Et üldrelatiivsusprintsiip püstitab täiesti uuelaadilised eesmärgid füüsika võrrandite formuleerimisel, selles seisnebki nimetatud printsiibi suur h e u r i s t i l i n e   v ä ä r t u s. Ta ju näitab niiviisi teed, kuidas füüsika võrrandeid sisukamal kujul kirja panna.

Tänu üldrelatiivsusprintsiibile on leitud ka vaatekoht, millelt vaadatuna mitteinertsiaalsed süsteemid pole enam "mittesoovitavad" ja "ebaõiged", lühidalt - inertsiaalsüsteemidest halvemad. Sellised süsteemid on konkreetsetes ülesannetes üsna tavalised ning nende ja inertsiaalsüsteemide samaväärse käsitlemise võimalus on seetõttu väga tähtis. Teooria, mis võimaldab sellist samaväärset käsitlemist, on nii klassikalise mahaanika kui ka erirelatiivsusteooria loomulik üldistus kõrgemal abstraktsioonitasemel ning see asjaolu õigustab ka nimetust üldrelatiivsusteooria.

9. Seos gravitatsiooni ja aegruumi omaduste vahel

a) Pidades silmas üldrelatiivsusprintsiipi ja ekvivalentsusprintsiipi, analüüsigem nüüd järgmist mõttelist katset.[x]

Olgu meil joonestatud mingile kettale teatav hulk kontsentrilisi, kuid erineva diameetriga ringjooni, näiteks $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ jne. (joonis 19). Kui see ketas on mingis inertsiaalsüsteemis paigal, siis on ta ise samuti teatav inertsiaalsüsteem ning kõigi ringjoonte punktid on üksteise suh-



Joonis 19.

[x] Vt. E, lk. 46; samuti EI, lk. 168.

tes paigal. Mõõtes vaadeldavas inertsiaalsüsteemis K_0 ringjoonte $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, ... pikkuste $\mathcal{P}_{01}$, $\mathcal{P}_{02}$, $\mathcal{P}_{03}$, ... suhet diameetritesse $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, ..., saame kõigi ringjoonte puhul eukleidilise geomeetria tuntud seose

$$\frac{\mathcal{P}_{01}}{\mathcal{D}_1} = \frac{\mathcal{P}_{02}}{\mathcal{D}_2} = \frac{\mathcal{P}_{03}}{\mathcal{D}_3} = \ldots = \pi \qquad \text{(I 9.1)}$$

Et teatava kindla inertsiaalsüsteemi kogu ulatuses aeg kulgeb täiesti ühesuguselt, siis ka mingi kahe kindla sündmuse vaheline ajavahemik on kõikidel ringjoontel sama:

$$\Delta t_{01} = \Delta t_{02} = \Delta t_{03} = \ldots = \Delta t_0 \qquad \text{(I 9.2)}$$

Edasi vaadelgem olukorda, kus äsjavaadeldud ketas pöörleb ümber telje O teatava nurkkiirusega ω inertsiaalsüsteemi K_0 suhtes. Nüüd kujutab see ketas endast mitteinertsiaalset taustsüsteemi K. Erinevate diameetritega ringjoonte punktid liiguvad inertsiaalsüsteemi suhtes erinevate joonkiirustega $\frac{\omega\mathcal{D}_1}{2}$, $\frac{\omega\mathcal{D}_2}{2}$, $\frac{\omega\mathcal{D}_3}{2}$, ..., kusjuures

$$\frac{\omega\mathcal{D}_1}{2} < \frac{\omega\mathcal{D}_2}{2} < \frac{\omega\mathcal{D}_3}{2} < \ldots \qquad \text{(I 9.3)}$$

Vastavalt ERT-st tuntud pikkuste kontraktsiooni valemile avalduvad nüüd ringjoonte pikkused järgmiselt:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \mathcal{P}_{01}\sqrt{1 - \frac{\omega^2\mathcal{D}_1^2}{4c^2}}, \\ \mathcal{P}_2 &= \mathcal{P}_{02}\sqrt{1 - \frac{\omega^2\mathcal{D}_2^2}{4c^2}}, \\ \mathcal{P}_3 &= \mathcal{P}_{03}\sqrt{1 - \frac{\omega^2\mathcal{D}_3^2}{4c^2}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad \text{(I 9.4)}$$

s. t. erinevate diameetritega ringjoonte pikkused on erinevad:

$$\mathcal{P}_1 > \mathcal{P}_2 > \mathcal{P}_3 > \ldots \qquad \text{(I 9.5)}$$

Et diameetrid $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, ... on risti liikumise sihiga, siis nende pikkus inertsiaalsüsteemi K_0 suhtes ei muutu. Seoste (I 9.1), (I 9.4) ja (I 9.5) põhjal saame mitteinertsiaalses süsteemis K olevate ringjoonte pikkuste ja diameetrite suhete jaoks järgmise võrratuste jada:

$$\pi > \frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{D}_1} > \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{D}_2} > \frac{\mathcal{P}_3}{\mathcal{D}_3} > \ldots \qquad \text{(I 9.6)}$$

Aja relativistliku dilatatsiooni tõttu kulgeb aeg erinevate kiirustega liikuvatel ringjoontel erinevalt:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 \mathcal{D}_1^2}{4c^2}}},$$

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 \mathcal{D}_2^2}{4c^2}}}, \qquad \text{(I 9.7)}$$

$$\Delta t_3 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 \mathcal{D}_3^2}{4c^2}}},$$

. . . .

Siis saame järgmise võrratuste jada:

$$\Delta t_0 < \Delta t_1 < \Delta t_2 < \Delta t_3 < \ldots \qquad \text{(I 9.8)}$$

Nii näeme, et m i t t e i n e r t s i a a l s e s t a u s t s ü s t e e m i s on inertsiaalsüsteemiga võrreldes a e g r u u m i o m a d u s e d t e i s t s u-g u s e d : ei kehti enam eukleidilise geomeetria tuntud seos (I 9.1) ja aegki kulgeb asünkroonselt. Et vastavalt üldrelatiivsusprintsiibile on mitteinertsiaalsed taustsüsteemid samuti "lubatavad" taustsüsteemid, siis peame neid aegruumi uuelaadilisi omadusigi nüüd "lubatavaiks" pidama. See aga tähendab aegruumi omaduste sügavamat ja avaramat tunnetamist.

Erinevalt t a s a s e s t ehk g a l i l e i l i s e s t a e g r u u m i s t, kus ruumi geomeetria on kogu ulatuses eukleidiline ning aja kulg sünkroonne, nimetagem edaspidi mitteeukleidilise ruumi ja asünkroonse ajaga aegruumi k õ v e r a k s a e g r u u m i k s. Mitteeukleidilise geomeetriaga ruumi omaette nimetame lihtsalt k õ v e r a k s r u u m i k s ning asünkroonset aega võiks seepärast nimetada ka k õ v e r a k s a j a k s. (Olgu kohe rõhutatud, et kvalitatiivses mõttes on toodud väidetega oluliselt määratletud ruumi, aja ja aegruumi k õ v e r u s e teaduslik mõiste. Mingi piltlikult tajutava "kõverusega" siin üldjuhul tegemist pole.)

b) Kõrvutagem nüüd äsjasaadud järeldusi ekvivalentsusprintiibiga.

Seostest (I 9.4) ja (I 9.6) näeme, et inertsiaalsüsteemiga võrreldes erinevad meie poolt vaadeldud mitteinertsiaalses taustsüsteemis ruumi omadused eukleidilise ruumi omadustest seda enam, mida suurem on joonkiirus $\frac{\omega\vartheta}{2}$, s. t. mida tugevamalt avalduvad vaadeldavas ruumipunktis inertsiefektid. Seostest (I 9.7) ja (I 9.8) järeldub analoogiiselt aja omaduste kohta mitteinertsiaalses taustsüsteemis: aeg kulgeb seda aeglasemalt, mida tugevamad on inertsiefektid.

Ekvivalentsusprintsiibi põhjal on inertsiefektid samaolemuslikud gravitatsiooniefektidega. Niisiis peavad ka gravitatsiooninähtused olema seoses aegruumi omadustega: mida tugevamad on gravitatsiooniefektid, seda mitteeukleididilisem on ruumi geomeetria ning seda aeglasemalt kulgeb aeg. Sellega on ülalvaadeldud mõtteline katse meid juhtinud ÜRT kõige olulisema põhipostulaadini - tõeni, mille õigsust ÜRT kogu oma olemasoluga on kinnitanud:

Aegruum on üldjuhul kõver. Gravitatsiooniväli kui reaaliteet avaldub selle kõvera aegruumi objektiivsetes omadustes.

c) Eespool juba rõhutasime, et ettekujutused aegruumi omadustest sõltuvad loodusteaduste uurimistasemest ja muutuvad seega teaduse arenedes.

K l a s s i k a l i s e s f ü ü s i k a s võis vaadelda ruumi ja aega lahus. Ruumi ainuvõimaliku ja absoluutselt täpse teooriana käsitati e u k l e i d i l i s t g e o m e e t r i a t . Eukleidilise geomeetria kohaselt on ruum homogeenne (kõik ruumipunktid on samaväärsed) ja isotroopne (kõik ruumi suunad on samaväärsed). Aega käsitati samuti absoluutselt homogeensena, s. t. sellisena, mis kulgeb kõikjal täiesti ühtemoodi. Ehkki konkreetsetes füüsikaprobleemides vaadeldi klassikalises füüsikaski faktiliselt üksnes relatiivset ruumi (s. t. ruumi, milles asukoha määramiseks valitakse teatav kindel taustkeha) ning üksnes relatiivset aega (s. t. aega, mille hetki määrab teatav kindel kell), omistati objektiivne sisu ka absoluutse ruumi ja absoluutse aja mõistetele.

E R T järgi on ruum samuti eukleidiline ja aeg homogeenne. ERT likvideerib juba absoluutse ruumi ja absoluutse aja mõisted ning tõestab vajaduse vaadelda aega ja ruumi ühe tervikuna - a e g r u u m i n a . Ent, nagu juba märgitud, ERT järgi on aja ja ruumi struktuur antud inertsiaalsüsteemi kogu ulatuses ikkagi ühesugune. Selles mõttes on ERT-s aja ja ruumi absoluutsus omaette asendunud aegruumi kui terviku absoluutsusega. Ka piirdub ERT rakendatavus üksnes inertsiaalsüsteemidega.

Äsja veendusime, et Ü R T tähendab järjekordset u u t e t a p p i ruumi ja aja omaduste sügavamas tunnetamises. Näeme, et üldjuhul, s. t. mittehomogeenselt ja anisotroopselt ilmnevate gravitatsiooni- või inertsiefektide olemasolu korral pole aegruum ise tegelikult ei homogeenne ega isotroopne (erijuhtudel, kuid üksnes erijuhtudel, võib aegruum muidugi niisugune olla ning ligikaudselt homogeense ja isotroopsena võib seda ka, nagu hiljem selgub, paljude probleemide puhul vaadelda). Üldjuhulise kõvera aegruumi kui 4-mõõtmelise ruumi tarvis on seega vaja uut ruumiõpetust. A. Einstein leidis siin geniaalse lahenduse: ta tegi kindlaks, et selliseks uueks ruumiõpetuseks sobib suurepäraselt juba möödunud sajandil matemaatikute poolt loodud ja arendatud n - m õ õ t m e l i s t e m i t t e e u k -

l e i d i l i s t e r u u m i d e g e o m e e t r i a, täpsemalt nn. Riemanni geomeetria kui üks sellise üldistatud geomeetria harusid.

Nii on ÜRT loomisega eriti selgeks saanud g e o m e e t r i a kui varem puhtmatemaatiliseks ja puhtdeduktiivseks peetud distsipliini o r g a a n i l i n e s e o s f ü ü s i k a g a. Eukleidilist geomeetriat, kuigi see erakordselt hästi kirjeldab reaalse füüsikalise ruumi omadusi (nagu hiljem näeme, kinnitab seda ka ÜRT), ei saa me enam kuidagi pidada ainuvõimalikuks ja absoluutseks ruumiteooriaks. Tuleb möönda, et eukleidiline geomeetria üldistab teatavate mõistete harmoonilise ja täiusliku deduktiivse süsteemi näol üksnes piiratud kogemust ruumist ja nimelt sellist, mis on saadud jäikadeks peetud ja seejuures kosmilises mõttes väikeste kehade ruumiliste omaduste ning mitte eriti ulatuslike valgussirgete uurimisel. Pole midagi imestada, kui selline kogemus osutub teatavates uutes olukordades piiratuks.

d) Sellega lõpetagem käesoleva loengukursuse I peatükk. Püüdsime selles analüüsida füüsika mõningaid põhilisi mõisteid, mis on ÜRT-s eriti olulised ja mille käsitust ÜRT omalt poolt süvendab (ruum, aeg, taustkeha, koordinaatsüsteem, taustsüsteem, gravitatsioon, inerts, mass, gravitatsiooniväli, nähtuste ja suuruste relatiivsus), määratlesime ÜRT koha füüsikateooriate süsteemis nii gravitatsiooni klassikalist Newtoni teooriat kui ka ERT-d üldistava ja edasiarendava teooriana, formuleerisime ÜRT fundamentaalsed füüsikalised printsiibid ja põhjendasime ÜRT olemust nüüdisaegse kõige üldisema aegruumi teooriana. Edasine sügavam ja detailsem tutvumine ÜRT-ga pole enam mõeldav vastava matemaatilise keele omandamiseta. Selle juurde järgmises peatükis asumegi.

Olgu siinkohal veel märgitud, et eespooltoodu pole muidugi ainuvõimalik tee lähenemiseks ÜRT füüsikalise sisu esitamisele. Kirjandusest võime leida paljusid erinevaid käsitlusaspekte, millega oleks hea ka tutvuda.[x] Nagu eespool vihjeid tehtud, on seejuures olemas selliseidki käsitlusi, mis ignoreerivad ekvivalentsusprintsiibi ja üldrelatiivsusprintsiibi osa kõnesolevas teoorias. Sel juhul võetakse aluseks tavaliselt postulaat, et gravitatsiooniväli avaldub aegruumi kõveruses ja on kirjeldatav aegruumi meetrikaga (viimasest mõistest tuleb meil juttu järgmises peatükis). Sellele lisatakse hüpotees väljavõrrandite kuju kohta. Seostamaks omavahel ÜRT-d ja ERT-d on kolmandaks ikkagi vaja ka postulaati, et igas aegruumi punktis on kasutatav lokaalne inertsiaalsüsteem (nagu nägime, avaldub selles faktis tegelikult ekvivalentsusprintsiip). Matemaatilisest aspektist vaadatuna uut teooriat niiviisi ei saada, küll on aga erinevusi mõningate arvutustulemuste tõlgendamises. ÜRT on nüüd lihtsalt sisuvaesem. Mõnikord seda nimetataksegi üksnes "ruumi, aja ja gravitatsiooni teooriaks".[xx]

[x] Mõningate esialgseks tutvumiseks rohkem või vähem sobivate ÜRT õpikute ja monograafiate, samuti kasulike populaarteaduslike raamatute nimistu on ära toodud õppevahendi lõpus.

[xx] Vt. näiteks kirjanduse nimistus toodud V. Foki raamatu pealkirja.

II. KÕVERA n-MÕÕTMELISE RUUMI TENSOR-ARVUTUSE PÕHIMÕISTEID JA PÕHI-VALEMEID

1. Kõverjoonelised koordinaadistikud ja lokaalsed reeperid

a) Tuletagem veelkord meelde mõningaid tõdesid tavalise eukleidilise ruumi, s. t. eukleidilise 3-ruumi puhult.

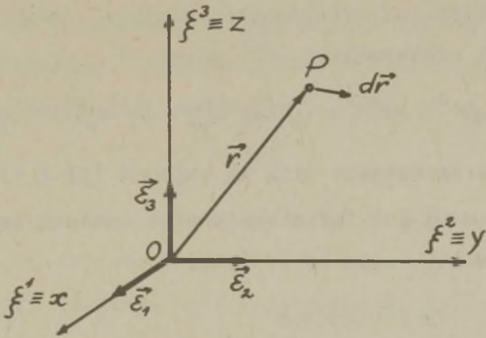
Nagu juba märgitud, on siin eeliskoordinaadistikuks Cartesiuse ristkoordinaadistik (vt. joonis 8). Väljavalitud kindlas koordinaadistikus iseloomustavad ruumi iga punkti 3 arvu - 3 koordinaati: x, y, z. Teatavasti võib aga kindla ristkoordinaadistiku fikseerimiseks kasutada ka ortogonaalsete ühikvektorite kolmikut (triaadi), kusjuures iga vektor määrab ühe koordinaattelje suuna. Nüüd ütleme, et meie ristkoordinaadistik on fikseeritud ortonormeeritud baasi ehk reeperiga.

Kompaktsema kirjutusviisi saavutamise huvides valime edaspidi Cartesiuse ristkoordinaatide tähisteks ξ^1, ξ^2 ja ξ^3 ning vastavaid baasvektoreid tähistame $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$ ja $\vec{\varepsilon}_3$ (joonis 20). Baasvektorite ortonormeerituse tingimused on nüüd kirja pandavad seostena[x]

[x] NB! Siin ja edaspidi tähistab iga ladina täht indeksina (a, b, ..., k, l, ..., s, t, ...) kolme arvu: 1,

$$\vec{\varepsilon}_p \vec{\varepsilon}_s = \delta_{ps} , \qquad \text{(II 1.1)}$$

kus δ_{ps} on Kroneckeri sümbol.



Joonis 20.

Mistahes vektori, mis on vastavusse seatud mingile füüsikalisele või geomeetrilisele suurusele eukleidilises 3-ruumis, võime esitada baasvektorite lineaarkombinatsioonina (NB! Einsteini summeerimisreegel!)

$$\vec{v} = v^s \vec{\varepsilon}_s , \qquad \text{(II 1.2)}$$

kus v^s on vektori komponendid. Seejuures avaldub punkti P kohavektor kujul

$$\vec{r} = \xi^s \vec{\varepsilon}_s . \qquad \text{(II 1.3)}$$

2, 3. Iga k r e e k a täht indeksina ($\alpha, \beta, \ldots, \varkappa, \lambda, \ldots, \sigma, \tau, \ldots$) võib edaspidi omandada neli väärtust: 1, 2, 3, 4 (või 0). Samuti võtame kasutusele E i n s t e i n i s u m m e e r i m i s r e e g l i : kui üksliikmena kirjutatud avaldises esineb kaks korda indeksina üks ja sama täht, siis tähendab see summeerimist üle selle indeksi kõikvõimalike väärtuste. Seega $a_s b^s \equiv \sum_{s=1}^{3} a_s b^s$ ning $a_\sigma b^\sigma \equiv \sum_{\sigma=1}^{4} a_\sigma b^\sigma$.

Infinitesimaalse (lõpmata väikese) ruumilise nihke jaoks saame

$$d\vec{r} = d\xi^s \vec{\varepsilon}_s. \qquad \text{(II 1.4)}$$

Kahe punkti vahelise infinitesimaalse kauguse ruutu võime nüüd arvutada kui nihkevektori $d\vec{r}$ normi

$$(dl)^2 = d\vec{r}\,d\vec{r} = d\xi^p \vec{\varepsilon}_p\, d\xi^s \vec{\varepsilon}_s = d\xi^p d\xi^s \delta_{ps} = d\xi^s d\xi^s. \qquad \text{(II 1.5)}$$

Paneme tähele, et kasutasime siin ka valemit (II 1.1). Saadud tulemus pole muud kui infinitesimaalne analoog tavalisele kauguste määramise valemile (I 2.1):

$$(l)^2 = \Delta\xi^s \Delta\xi^s. \qquad \text{(II 1.6)}$$

(Oleme siin kasutanud ümbertähistusi ja Einsteini summeerimiskokkulepet, seejuures $\Delta\xi^s \equiv \xi_2^s - \xi_1^s$.)

Edaspidi nimetame infinitesimaalse kauguse ruudu avaldist *meetriliseks vormiks*, sest selles kajastub pikkuste määramise iseloom vaadeldavas ruumis. Valem (II 1.5) näiteks informeerib meid, et eukleidilises 3-ruumis on Cartesiuse ristkoordinaatidel vahetu meetriline mõte (vt. I, 2, g)[x].

b) Järgides puhtmatemaatilist rada, võib eelmises alapunktis esitatud valemeid rakendada ka kõrgemal abstraktsioonitasemel, nimelt *n-mõõtmelise eukleidilise ruumi* puhul. Sel juhul on tegemist abstraktse ruumiga, milles kehtivad kõik eespool toodud seosed, kuid tegemist on n sõltumatu baasvektoriga ja indeksid või-

[x] Selline kirjutusviis tähendab I peatüki 2. punkti alapunkti g . Edaspidi kasutame analoogilist viitamismoodust.

vad seetõttu omandada mitte üksnes kolm, vaid n väärtust.

n-mõõtmelistest eukleidilistest ruumidest on füüsika jaoks olulisim e u k l e i d i l i n e 4 - r u u m . On hästi teada, et ERT-s võib niisugust matemaatilist ruumi seada vastavusse reaalsele aegruumile, mis ise on tegelikult pseudoeukleidiline.[x] Selleks on üksnes vaja kasutusele võtta nn. imaginaarne ajakoordinaat

$$\xi^4 = ict. \qquad \text{(II 1.7)}$$

Rakendades nüüd eespool kasutatud ümbertähistusi ruumiliste Cartesiuse ristkoordinaatide jaoks($x\equiv\xi^1$, $y\equiv\xi^2$, $z\equiv\xi^3$), võime intervalli avaldise (I 3.1) teisendada kujule, mis on täiesti analoogiline valemiga (II 1.6):

$$(s)^2 = \Delta\xi^\sigma \Delta\xi^\sigma. \qquad \text{(II 1.8)}$$

Ka aegruumi juhul võib kindla "ristkoordinaadistiku" (ξ^1, ξ^2, ξ^3 ja ξ^4) fikseerimiseks kasutada ortogonaalseid ühikvektoreid, s. t. ortogonaalset baasi ehk reeperit. Nüüd on tegemist vektorite nelikuga (tetraadiga): $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ ja $\mathcal{E}_4$. Baasvektorite ortonormeerituse tingimus omandab kuju

$$\mathcal{E}_\rho \mathcal{E}_\sigma = \delta_{\rho\sigma}. \qquad \text{(II 1.9)}$$

Mistahes 4-vektor (tähistagem selle siin tinglikult $\mathbb{V}$) on esitatav nende baasvektorite lineaarkombinatsioonina

$$\mathbb{V} = v^\sigma \mathcal{E}_\sigma \qquad \text{(II 1.10)}$$

kus v^σ on 4-vektori komponendid. 4-mõõtmeline kohavektor $\mathcal{S}$ avaldub kujul

---

[x] Vt. näiteks K-I, lk. 86.

9

$$\mathcal{S} = \xi^{\sigma} \mathcal{E}_{\sigma} \tag{II 1.11}$$

ning 4-mõõtmeline "nihe"

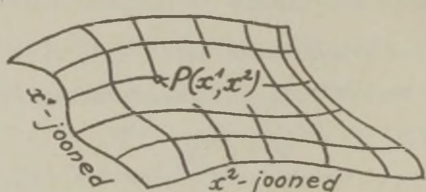
$$d\mathcal{S} = d\xi^{\sigma} \mathcal{E}_{\sigma} . \tag{II 1.12}$$

Infinitesimaalse "kauguse", s. t. intervalli ruudu võime nüüd välja arvutada analoogiliselt valemile (II 1.5):

$$ds^2 = d\xi^{\sigma} d\xi^{\sigma} . \tag{II 1.13}$$

Näeme, et ERT-s võib kasutada aegruumi puhul samuti koordinaate, millel on vahetu meetriline mõte.

c) Mistahes dimensiooniga **kõveras** ruumis ei ole koordinaatidel üldjuhul enam vahetut meetrilist mõtet. Kõveral pinnal, s. t. 2-mõõtmelises kõveras ruumis (näit. kerapinnal) ei saa teatavasti võtta kasutusele Cartesiuse ristkoordinaate. Kõvera pinna geomeetria saab aga üles ehitada kõverjooneliste koordinaatide abil, valides pinnal koordinaatjoonteks kaks meelevaldset, kuid sõltumatut kõverate parve (näiteks kerapinnal meridiaanid ja paralleelid). Mistahes punkt pinnal on nüüd jällegi iseloomustatav kahe arvuga x^1 ja x^2 (joonis 21). Kuid muidugi ei mõõda koordinaatide



Joonis 21.

erinevus piki koordinaatjooni nüüd üldjuhul enam pikkust (vrdl. I, 2, g). Näiteks geomeetriliste pikkuskraadide erinevus piki mingit paralleeli ei iseloomusta vahetult ruumilist kaugust vaadeldavate punktide vahel.

Ka kõveras 3-ruumis või 4-ruumis osutub võimalikuks kirjeldada asukohti kõverjoonelise koordinaadistiku abil, kusjuures koordinaatjoonteks on vastavalt kolm või neli sõltumatut koordinaatjoonte parve.

d) Vaadelgem nüüd kõverjoonelisi koordinaadistikke k õ v e r a s 4 - r u u m i s, mis kujutab endast kõverat aegruumi.

Vastavalt ekvivalentsusprintsiibile on aegruumi mistahes punkthetkel alati realiseeritav lokaalne inertsiaalsüsteem (vt. I, 7, d). See aga tähendab, et ERT on rakendatav ka kõvera aegruumi iga punkthetke infinitesimaalses ümbruses. Niisiis võib sellises infinitesimaalses ulatuses e u k l e i d i l i n e 4 - r u u m alati olla n.-õ. p u u t e r u u m i k s aegruumile kui kõverale 4-ruumile (nii nagu teatava kindla punkti infinitesimaalses ümbruses on tasapind kõvera pinna puutepinnaks).

Eukleidilises puuteruumis on mõistagi sisseviidavad Cartesiuse ristkoordinaadid ξ^μ. Pöördteisendust omava teisendusega

$$x^\nu = x^\nu(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4), \qquad (\mu, \nu = 1,2,3,4), \quad \text{(II 1.14)}$$
$$\xi^\mu = \xi^\mu(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

võib neilt ristkoordinaatidelt alati üle minna sellistele kõverjoonelistele koordinaatidele x^ν, mille koordinaatjooned ühtivad kõnesolevas infinitesimaalses ulatuses vaadeldava kõvera 4-ruumi koordinaatjoontega. Nii võib tõlgendada valemit (II 1.14) kui l o k a a l s e t seost puuteruumi Cartesiuse ristkoordinaatide ja kõvera ruumi kõverjooneliste koordinaatide vahel. Edasi võib selle lokaalse seose abil uurida kõvera ruumi kõverjoonelise koordinaadistiku omadusi.

e) Võtkem kõigepealt vaatluse alla puuteruumi läbivad kõverjoonelise koordinaadistiku k o o r d i n a a t j o o n e d. Teatavasti muutub piki x^ν-koordinaatjoont üksnes antud koordinaat x^ν, kuna kõik teised koordinaadid säilitavad konstantse väärtuse. Kui avaldame puuteruumis infinitesimaalse nihke piki x^ν-koordinaatjoont $d\mathcal{S}=d\xi^\sigma \mathcal{E}_\sigma$, siis sõltub ka see üksnes ühest koordinaadist x^ν. Siit võime arvutada nimetatud koordinaatjoone p u u t u j a v e k t o r i

$$\underline{\mathcal{C}_\nu = \frac{d\mathcal{S}}{dx^\nu} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} \mathcal{E}_\sigma .} \qquad \text{(II 1.15)}$$

Edasi vaadelgem kõverjoonelise koordinaadistiku k o o r d i n a a t h ü p e r p i n d u. Teatavasti säilitab koordinaatpinna puhul alati üks koordinaat konstantse väärtuse (näit. $x^\mu = x^\mu[\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4] =$ const.), kuna teised koordinaadid üldjuhul muutuvad. Nüüd võime arvutada puuteruumis x^μ-koordinaathüperpinna n o r m a a l i v e k t o r i kui teatava 4-mõõtmelise gradientvektori[x]

[x] Vt. näit. ka K-II, lk. 13.

$$\mathfrak{e}^{\mu} = \operatorname{grad} x^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\rho}} \mathcal{E}_{\rho} . \qquad \text{(II 1.16)}$$

Niisiis on meil kõvera 4-ruumi igas punktis võimalik defineerida kaks kõverjooneliste koordinaatidega seotud vektorite nelikut. Üldjuhul need nelikud ei ühti, samuti on nad erinevad kõvera ruumi eri punktide jaoks. Kuid ilmselt võib kumbagi nelikut edasises valida l o k a a l s e k s r e e p e r i k s , avaldamaks näiteks 4-vektoreid kui kõvera ruumi suurusi. Sellega saab korvatud kõvera ruumi "puudus", mis avaldub sellise üldkehtiva ja kogu ruumi jaoks ühtse konstantse reeperi puudumises, nagu on tasase ruumi Cartesiuse koordinaadistikku määrav ortonormeeritud reeper.

Koordinaatjoonte puutujavektoritega määratud reeperit $\mathfrak{e}_{\nu}$ nimetagem edaspidi p õ h i r e e p e r i k s ehk p õ h i b a a s i k s ning koordinaathüperpindade normaalivektoritega määratud reeperit $\mathfrak{e}^{\mu}$ - k a a s r e e p e r i k s .

f) Ehkki põhireeper ja kaasreeper ei ühti, üksteisest sõltumatud nad mõistagi pole (meil on ju tegemist ikkagi 4-mõõtmelise ruumiga, s. t. üksnes nelja sõltumatu koordinaatjoonte parvega). Ühe lokaalse reeperi vektoreid võib alati avaldada teise reeperi vektorite abil:

$$\mathfrak{e}_{\nu} = g_{\nu\rho} \mathfrak{e}^{\rho} , \qquad \text{(II 1.17)}$$

$$\mathfrak{e}^{\varkappa} = g^{\varkappa\sigma} \mathfrak{e}_{\sigma} . \qquad \text{(II 1.18)}$$

Suurused $g_{\nu\rho}$ on siin defineeritud kui kaasbaasil avaldatud põhibaasi vektorite komponendid ning $g^{\varkappa\sigma}$ kui põhibaasil avaldatud kaasbaasi vektorite komponendid.

Lähtudes valemitest (II 1.15-16) ja arvestades ka seost (II 1.9), võime arvutada, et

$$\mathbf{e}_\nu \mathbf{e}^\varkappa = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} \mathcal{E}_\sigma \frac{\partial x^\varkappa}{\partial \xi^\rho} \mathcal{E}_\rho = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\varkappa}{\partial \xi^\rho} \delta_{\sigma\rho} .$$

Nii jõuame seoseni

$$\mathbf{e}_\nu \mathbf{e}^\varkappa = \delta_\nu^\varkappa . \tag{II 1.19}$$

Valemite (II 1.17-18) arvestamisel järeldub siit veel omakorda

$$g_{\nu\sigma} \mathbf{e}^\sigma g^{\varkappa\rho} \mathbf{e}_\rho = g_{\nu\sigma} g^{\varkappa\rho} \delta_\rho^\sigma ,$$

s. t.

$$g_{\nu\sigma} g^{\varkappa\sigma} = \delta_\nu^\varkappa . \tag{II 1.20}$$

Seoseid (II 1.19-20) võib vaadelda võrranditena $\mathbf{e}^\varkappa$ ja $g^{\varkappa\sigma}$ arvutamiseks etteantud suurustest $\mathbf{e}_\nu$ ja $g_{\nu\sigma}$ (või ka vastupidi).

Valemite (II 1.17-19) põhjal võime leida ka seosed

$$\mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_\mu = g_{\nu\mu} \tag{II 1.21}$$

ja

$$\mathbf{e}^\nu \mathbf{e}^\mu = g^{\nu\mu} . \tag{II 1.22}$$

g) Kõvera 4-ruumi mingist punktist arvutatud meelevaldne infinitesimaalne nihe avaldub selle punkti juurde kuuluvas puuteruumis valemina (II 1.12). Arvutades teisendusvalemitest (II 1.14) täisdiferentsiaalid $d\xi^\sigma$ ja kasutades seejärel valemit (II 1.15), saame mainitud infinitesimaalse nihke esitada kõvera ruumi lokaalsel põhireeperil

$$d\mathcal{S} = \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \mathcal{E}_{\sigma} = dx^{\nu} \mathbf{e}_{\nu} \,. \qquad \text{(II 1.23)}$$

Nüüd võib kõvera 4-ruumi infinitesimaalse intervalli ruudu, s. t. **kõvera 4-ruumi meetrilise vormi** avaldada selles ruumis endas sisseviidud kõverjooneliste koordinaatide kaudu:

$$(ds)^2 = dx^{\mu} \mathbf{e}_{\mu} dx^{\nu} \mathbf{e}_{\nu} = \mathbf{e}_{\mu} \mathbf{e}_{\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} .$$

Valemi (II 1.21) põhjal järeldub siit

$$\boxed{(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}} \qquad \text{(II 1.24)}$$

Et võrduse (II 1.21) vasemal poolel korrutis ei olene tegurite järjekorrast, siis järeldub siit suuruste $g_{\mu\nu}$ tähtis omadus - sümmeetrilisus indeksites

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \,. \qquad \text{(II 1.25)}$$

h) Suurused $g_{\mu\nu}$, mille mõningaid põhiomadusi ja -seoseid äsja tundma õppisime[x], on kõvera ruumi erinevates punktides üldjuhul erinevad. Vastavuses valemiga (II 1.21) muutuvad nad punktist punkti nagu kõvera ruumi lokaalsed reeperidki. Seega on suurused $g_{\mu\nu}$ ruumi punktide koordinaatide funktsioonid:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3, x^4) . \qquad \text{(II 1.26)}$$

Valemist (II 1.24) näeme, et suurused $g_{\mu\nu}$ määravad

---

[x] Üksikasjalikum tutvumine suurustega $g_{\mu\nu}$, nende tõelise nimetusega, nende omadustega, nendele esitatavate matemaatiliste ja füüsikaliste nõuetega jne. saab võimalikuks alles meie loengukursuse mitme peatüki ulatuses.

kõvera ruumi igas punktis intervalli, s. t. "kauguse" mõõtmise eeskirja. Kuna $(ds)^2$ on iga punkti juurde kuuluvas puuteruumis invariantne suurus, siis ei sõltu ta samuti kõvera 4-ruumi konkreetsest kõverjoonelisest koordinaadistikust, vaid iseloomustab kõvera 4-ruumi enda omadusi. Seetõttu on ilmselt ka suurustel $g_{\mu\nu}$ fundamentaalne osatähtsus kõvera ruumi omaduste kirjeldajaina. Sellises rollis me neid suurusi käesolevas loengukursuses käsitamegi. Samas paneme aga ka kohe tähele, et suuruste $g_{\mu\nu}$ konkreetne kuju sõltub ilmselt samuti kõverjoonelise koordinaadistiku konkreetsest valikust ruumis. Selline suuruste $g_{\mu\nu}$ "kahepalgeline" iseloom on aluseks ÜRT mitmele isepärale, sealhulgas eripärastele raskustele arvutustulemuste füüsikalisel tõlgendamisel.

i) Paneme tähele, et siin ja edaspidi võib eukleidilist 4-ruumi alati käsitada kui üldjuhuliselt kõvera 4-ruumi erijuhtu. Ortonormeeritud reeper $\mathcal{E}_\sigma$ on lokaalsete reeperite $\mathbf{e}_\sigma$ ja $\mathbf{e}^\sigma$ kokkulangev erijuht. Cartesiuse "ristkoordinaadid" ξ^σ on üldiste koordinaatide x^σ erijuht. Meetriline vorm (II 1.13) on meetrilise vormi (II 1.24) erijuht, kui ainult on täidetud tingimus

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} . \qquad \text{(II 1.27)}$$

Muidugi on siin ja edaspidi erijuhuna käsitatav ka 3-ruumi juht - nii kõvera kui ka eukleidilise ruumi puhul (kui pole spetsiaalselt fikseeritud ruumi dimensioon ja sellega seotud eripärad). Selle juhu jaoks tuleb vaid formaalselt asendada kreeka indeksid ladina indeksitega. Üldse võib kõiki käesolevas peatükis käsitletavaid suurusi, valemeid, seoseid jne. vaadelda hoopis üldisematena, nimelt üldjuhulise n-mõõtmelise ruumi juhu, seega ka näiteks 2-ruumi või koguni 5-ruumi jaoks kehtivatena. Et aga peaeesmärgiks on meil ikkagi aegruumi, s. t. 4-mõõtmelise kontiinumi üldjuhuliste omaduste uurimine ja kirjeldamine, siis konkreetsuse huvides räägime edasises alati ennekõike kõverast 4-ruumist. Muudele juhtudele juhime tähelepanu üksnes vajaduse korral.

Ülesandeid

1. Teha läbi kõigis detailides valemi (II 1.13) tuletamine.

2. Tuletada seosed (II 1.21) ja (II 1.22).

2. Koordinaatteisendused kõveras ruumis

a) Nii nagu tavalise 3-ruumi puhul võib koordinaatsüsteeme valida põhimõtteliselt lõpmata mitmel viisil (vt. ka I, 2, e), nii võib 4-mõõtmelise ja üldjuhuliselt kõvera ruumi puhul ruumi punktidele arvude hulki üksühesesse vastavusse seada lõpmata mitmeti.[x] Kui aga vaadeldavas ruumipiirkonnas on antud kaks erinevat koordinaadistikku, näiteks $\{x^{\nu}\}$ ja $\{x^{\mu'}\}$, siis peab olema fikseeritav ka üksühene vastavus nende vahel, s. t. peavad olema antavad

[x] Juhime tähelepanu, et üldjuhul on siin tegemist kompleksarvude hulkadega, sest kasutusel võivad olla ka imaginaarsed koordinaadid (vt. näiteks valem (II 1.7)).

10

koordinaatide teisenemise valemid üleminekuks ühest koordinaadistikust teise ja vastupidi:

$$x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad \text{(II 2.1)}$$

ja

$$x^{\nu} = x^{\nu}(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, x^{4'}) . \qquad \text{(II 2.2)}$$

Valemitega (II 2.1-2) antud k o o r d i n a a t t e i s e n d u s t e s t on üks teise pöördteisendus. Et pöördteisendus alati olemas oleks, selleks peavad teatavasti nullist erinema vastavad funktsionaaldeterminandid ehk jakobiaanid:

$$\left|\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}\right| \neq 0, \quad \left|\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}\right| \neq 0. \qquad \text{(II 2.3)}$$

b) Ruumi teatavas kindlas punktis määravad üksteisest erinevad koordinaadistikud ka üksteisest e r i n e v a d l o k a a l s e d r e e p e r i d . Mistahes koordinaadistiku puhul võime aga kasutada seoseid (II 1.15-16). Nii saame koordinaadistiku $\{x^{\nu}\}$ puhul põhireeperi vektorite jaoks

$$\mathbf{e}_{\nu} = \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \mathcal{E}_{\sigma} ,$$

koordinaadistiku $\{x^{\mu'}\}$ puhul -

$$\mathbf{e}_{\mu'} = \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\mu'}} \mathcal{E}_{\sigma} .$$

Arvestades teisendusvalemit (II 2.2), võime tuletist $\frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\mu'}}$ vaadelda liitfunktsiooni tuletisena

$$\frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \cdot \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} .$$

Seega saame

$$e_{\mu'} = \frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \cdot \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} \cdot \mathcal{E}_{\sigma} ,$$

millest omakorda järeldub[x]

$$e_{\mu'} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} e_{\nu} \equiv x^{\nu}_{,\mu'} e_{\nu} . \qquad \text{(II 2.4)}$$

Analoogilisel viisil saame tuletada seose eri koordinaadistike kaasreeperite vahel:

$$e^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} e^{\nu} \equiv x^{\mu'}_{,\nu} e^{\nu} . \qquad \text{(II 2.5)}$$

Valemitega (II 2.4-5) on antud koordinaadistiku $\{x^{\mu'}\}$ lokaalsed reeperid koordinaadistiku $\{x^{\nu}\}$ lokaalsete reeperite kaudu. Võib muidugi panna kirja ka vastupidised seosed:

$$e_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} e_{\mu'} \equiv x^{\mu'}_{,\nu} e_{\mu'} \qquad \text{(II 2.6)}$$

ja

$$e^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} e^{\mu'} \equiv x^{\nu}_{,\mu'} e^{\mu'} . \qquad \text{(II 2.7)}$$

Võrrelgem veel teisendusvalemeid (II 2.4) ja (II 2.5) omavahel. Pangem tähele primiga tähistatud koordinaatide, samuti summeerimisindeksite asukohta nii ühes kui teises. Öeldakse, et need teisendused on k o n t r a g r e d i e n t s e d üksteise suhtes.

Ülesandeid

1. Tuletada valem (II 2.5).

---

[x] Siin ja edaspidi tähistab komaga eraldatud indeks osatuletist vastava koordinaadi järgi.

2. Põhjendada valemite (II 2.6-7) kirjapanemist analoogia põhjal seostega (II.2.4-5).

3. Tensori mõiste

a) Klassikalises füüsikas on teatavasti paljud füüsikalised suurused esitatavad vektorina e u k l e i d i l i s e s 3-ruumis. Märkisime, et selline 3 - v e k t o r on alati esitatav baasvektorite lineaarkombinatsioonina (II 1.2). ERT-s osutub vajalikuks kasutusele võtta vektori mõiste ka eukleidilises 4-ruumis. 4 - v e k t o r on esitatav baasvektorite lineaarkombinatsioonina (II 1.10). Nii klassikalises füüsikas kui ka ERT-s leiab aga juba rakendamist vektori mõistega analoogiline, kuid sellest keerukam - t e n s o r i mõiste.

Nüüd tuleb meil vektori ja tensori mõistetest rääkida k õ v e r a 4 - r u u m i juhul. Tegelikult me defineerime alljärgnevalt tensori mõiste veel üldisemalt ja nimelt k õ v e r a n - m õ õ t m e l i s e r u u m i juhul. Nagu edasises veendume, jõuame sellega eukleidilise 3-ruumi vektori mõiste üldistuseni kolmes mõttes: 1) eukleidilise ruumi asemel on üldjuhul kõver ruum, 2) 3-mõõtmelise ruumi asemel on üldjuhuline n-mõõtmeline ruum ning 3) vektori mõiste asemel on seda mõistet üldistav mõiste - tensor.

ÜRT matemaatilise aparatuuri tuumaks ongi k õ v e r a 4 - r u u m i t e n s o r a r v u t u s . Eukleidilise 4-ruumi tensorarvutus kui ERT-s kasutatav matemaatiline aparatuur[x] on selle erijuht.

[x] Vt. näiteks K-II, lk. 3 jj.

b) Pangem tähele, et vektori mõiste puhul on füüsika suhtes kõige olulisem tema omadus tervikuna mitte sõltuda koordinaadistiku valikust. Teatavas kindlas eukleidilise 3-ruumi punktis ja teataval kindlal ajahetkel võib esitada mingit füüsikalist suurust kujutava vektori (näiteks ainepunkti kiirusevektori) väga mitmeti valitud Cartesiuse ristkoordinaadistike baasvektorite lineaarkombinatsioonina. Kõik sellised lineaarkombinatsioonid peavad aga ikkagi andma sellesama vektori, s. t.

$$\vec{v} = v^{s'}\vec{\mathcal{E}}_{s'} = v^{s''}\vec{\mathcal{E}}_{s''} = v^{s'''}\vec{\mathcal{E}}_{s'''} = \dots , \qquad \text{(II 3.1)}$$

kus $\vec{\mathcal{E}}_{s'}$, $\vec{\mathcal{E}}_{s''}$, $\vec{\mathcal{E}}_{s'''}$, ... on erinevate Cartesiuse ristkoordinaadistike ortonormeeritud baasid.

Üldjuhuliselt kõveras ja n-mõõtmelises ruumis saab vektoreid esitada kindlas ruumi punktis lokaalsete baasvektorite n-mõõtmeliste lineaarkombinatsioonidena. Sõltuvalt kahte sorti baaside olemasolust on seejuures kaks võimalust: kas esitus põhibaasil

$$\mathbb{V} = v^{\sigma'} e_{\sigma'} = v^{\sigma''} e_{\sigma''} = v^{\sigma'''} e_{\sigma'''} = \dots \qquad \text{(II 3.2)}$$

või esitus kaasbaasil

$$\mathbb{V} = v_{\sigma'} e^{\sigma'} = v_{\sigma''} e^{\sigma''} = v^{\sigma'''} e_{\sigma'''} = \dots , \qquad \text{(II 3.3)}$$

kusjuures mõlemal juhul on ikkagi tegemist sama vektoriga, s. t.

$$\mathbb{V} = v^{\sigma} e_{\sigma} = v_{\sigma} e^{\sigma} . \qquad \text{(II 3.4)}$$

Niisiis näeme, et vektor on ka üldjuhul defineeritud kui baasvektoritest moodustatud, kuid koordinaatteisenduste (resp. baasi teisenduste) suhtes invariantne l i n e a a r n e , s. t. 1. järku algebraline vorm. Järgides puhtmatemaatilist rada, võib aga vektori üldistusena mõistagi defineerida k õ r g e m a t j ä r k u invariantseid algebralisi vorme. Selgub, et selliseid kõrgemat järku vorme saab samuti kasutada ning isegi peab kasutama füüsikanähtuste kirjeldamisel ja füüsikaliste suuruste määratlemisel. Siit jõuame t e n s o r i d e f i n i t s i o o n i n i :

<u>n-mõõtmelise ruumi s-ndat järku tensor on matemaatiline objekt, mis on esitatav n-mõõtmelise ruumi koordinaatteisenduste (resp. baasi teisenduste) suhtes invariantse s-ndat järku algebralise vormina</u>[x]:

$$\mathbb{T} = T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots}\, e_\alpha \otimes e_\beta \otimes \ldots e^\gamma \otimes e^\delta \otimes \ldots =$$

$$= T^{\alpha'\beta'\ldots}{}_{\gamma'\delta'\ldots}\, e_{\alpha'} \otimes e_{\beta'} \otimes \ldots e^{\gamma'} \otimes e^{\delta'} \otimes \ldots \qquad \text{(II 3.5)}$$

Toodud valemis on suurused $T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots}$ s-ndat järku t e n s o r i k o m p o n e n d i d , seejuures indeksite koguarv on s . Üle nende suuruste ülemiste indeksite toimub summeerimine üle vastava põhireeperi vektorite, üle alumiste summeeritakse üle vastava kaasreeperi vektorite. (Siit näeme, et nüüd ja edaspidi on indeksite asuko-

[x] Märk $\otimes$ tähistab tensorite nn. otsekorrutist kui teatavat algebralist operatsiooni (vt. järgmine punkt).

hal põhimõtteline tähendus!) Paneme veel ka tähele, et tensori komponendid $T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots}$ sõltuvad muidugi üldjuhul ka koordinaatidest, kuivõrd tensori poolt esitatav füüsikaline suurus on üldjuhul koordinaatide funktsioon, muutudes punktist punkti ja kujutades teatavat "t e n s o r i v ä l j a" vaadeldavas ruumis:

$$T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots} = T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots}(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad \text{(II 3.6)}$$

(vrdl. ka I, 6, c).

c) Edasi vaadelgem tensorite liigitamist indeksite arvu järgi.

Kui $s = 0$, siis

$$T(x^\sigma) = T'(x^{\sigma'}). \qquad \text{(II 3.7)}$$

See on faktiliselt skaalari definitsioon. Niisiis näeme, et skaalar pole muud kui 0 - n d a t j ä r k u t e n s o r.

Kui $s = 1$, siis kas

$$T^\alpha(x^\sigma)\,e_\alpha = T^{\alpha'}(x^{\sigma'})\,e_{\alpha'} \qquad \text{(II 3.8)}$$

või

$$T_\gamma(x^\sigma)\,e^\gamma = T_{\gamma'}(x^{\sigma'})\,e^{\gamma'}. \qquad \text{(II 3.9)}$$

Need valemid ühtivad ju sisuliselt valemitega (II 3.2) ja (II 3.3). Seega on vektor 1. j ä r k u t e n s o r. Siit näemegi, et tensori mõiste sisaldab erijuhuna ka varemtuntud vektori mõiste.

Kui $s = 2$, siis kas

$$T^{\alpha\beta}(x^{\sigma})e_{\alpha}\otimes e_{\beta}=T^{\alpha'\beta'}(x^{\sigma'})e_{\alpha'}\otimes e_{\beta'}, \quad \text{(II 3.10)}$$

$$\left.\begin{aligned} T^{\alpha}{}_{\gamma}(x^{\sigma})e_{\alpha}\otimes e^{\gamma}&=T^{\alpha'}{}_{\gamma'}(x^{\sigma'})e_{\alpha'}\otimes e^{\gamma'},\\ T_{\gamma}{}^{\delta}(x^{\sigma})e^{\gamma}\otimes e_{\delta}&=T_{\gamma'}{}^{\delta'}(x^{\sigma'})e^{\gamma'}\otimes e_{\delta'} \end{aligned}\right\} \quad \text{(II 3.11)}$$

või

$$T_{\gamma\delta}(x^{\sigma})e^{\gamma}\otimes e^{\delta}=T_{\gamma'\delta'}(x^{\sigma'})e^{\gamma'}\otimes e^{\delta'}. \quad \text{(II 3.12)}$$

Need valemid esitavad 2. j ä r k u t e n s o r i. Siin on juba tegemist baasvektoritest moodustatud 2. järku, s. t. kõrgemat järku algebralise vormiga.

Muidugi võib olla ka tensoreid, mille puhul $s > 2$. Kui $s = 3$, siis on tegemist 3. j ä r k u t e n s o r i g a, kui $s = 4$, siis 4. j ä r k u t e n s o r i g a jne.

d) Küsigem nüüd, kuidas teisenevad tensori komponendid üleminekul ühest kõverjoonelisest koordinaadistikust teise?

Kasutagem definitsioonivalemi (II 3.5) puhul baasvektorite teisenemisvalemeid (II 2.4-5) (lihtsuse huvides vaadelgem konkreetselt 4. järku tensorit):

$$T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\, e_{\alpha}\otimes e_{\beta}\otimes e^{\gamma}\otimes e^{\delta}=$$

$$=T^{\alpha'\beta'}{}_{\gamma'\delta'}\, x^{\alpha}{}_{,\alpha'}e_{\alpha}\otimes x^{\beta}{}_{,\beta'}e_{\beta}\otimes x^{\gamma'}{}_{,\gamma}e^{\gamma}\otimes x^{\delta'}{}_{,\delta}e^{\delta}.$$

Siit saame[x]

$$\left(T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}-T^{\alpha'\beta'}{}_{\gamma'\delta'}x^{\alpha}{}_{,\alpha'}x^{\beta}{}_{,\beta'}x^{\gamma'}{}_{,\gamma}x^{\delta'}{}_{,\delta}\right)e_{\alpha}\otimes e_{\beta}\otimes e^{\gamma}\otimes e^{\delta}=0.$$

---

[x] Märgil $\otimes$ on eripärane tähendus üksnes "paksendatult" kirjutatud suuruste vahel; koordinaatide tuletiste, samuti tensori komponentide jaoks tähendab see tavalist korrutamist.

Baasvektorite meelevaldsusest järeldub aga

$$\underline{T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = x^{\alpha}{}_{,\alpha'} x^{\beta}{}_{,\beta'} x^{\gamma'}{}_{,\gamma} x^{\delta'}{}_{,\delta} T^{\alpha'\beta'}{}_{\gamma'\delta'}} . \qquad \text{(II 3.13)}$$

"Vanade" ja "uute" koordinaatide sümmeetrilisust arvestades võime kirjutada ka

$$\underline{T^{\alpha'\beta'}{}_{\gamma'\delta'} = x^{\alpha'}{}_{,\alpha} x^{\beta'}{}_{,\beta} x^{\gamma}{}_{,\gamma'} x^{\delta}{}_{,\delta'} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}} . \qquad \text{(II 3.14)}$$

Neid tensori komponentide teisenemisvalemeid võime muidugi mõistagi rakendada mistahes-järgulise tensori puhul. Näiteks vektori jaoks saame valemist (II 3.14)

$$T^{\alpha'} = x^{\alpha'}{}_{,\alpha} T^{\alpha} \qquad \text{(II 3.15)}$$

või

$$T_{\gamma'} = x^{\gamma}{}_{,\gamma'} T_{\gamma} . \qquad \text{(II 3.16)}$$

Et valemid (II 3.13-14) on üheselt määratud definitsioonivalemiga (II 3.5), siis võivad nad ka viimast asendada. Nii peetakse sageli just neid valemeid tensori definitsiooniks. Seega võib tensori mõistet ka järgmiselt määratleda:

<u>Kui n-mõõtmelises ruumis matemaatiline objekt on iga (üldiselt kõverjoonelise) koordinaatsüsteemi suhtes määratud n^s arvuga $T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots}$ (s on indeksite arv) ja kui üleminekul ühest koordinaatsüsteemist teise need arvud teisenevad eeskirjade (II 3.13-14) kohaselt, siis on need arvud s-ndat järku tensori komponendid</u>.

e) Kui võrdleme teisenemisvalemit (II 3.14) teisenemisvalemiga (II 2.4), siis näeme, et alumistes indeksites teisenevad tensori komponendid põhibaasi vektoritega k o -

g r e d i e n t s e l t , ülemistes indeksites aga - k o n t r a g r e d i e n t s e l t . Siit tuletatakse tensori eri liiki komponentide nimetused.

Tensori üksnes alumiste indeksitega komponente nimetatakse k o v a r i a n t s e t e k s , üksnes ülemiste indeksitega komponente - k o n t r a v a r i a n t s e t e k s . Kui esinevad nii alumised kui ka ülemised indeksid, siis on tegemist s e g a k o m p o n e n t i d e g a . 1. järku tensori, s. t. vektori erijuhul öeldakse avaldise $\mathbb{T}=T_\alpha e^\alpha$ puhul, et vektor on esitatud oma kovariantsete komponentidega. Avaldises $\mathbb{T}=T^\alpha e_\alpha$ on aga vektori kontravariantsed komponendid.

Ühe ja sama tensori ko- ja kontravariantsete komponentide vahel on alati kindlad seosed, mis tulenevad eri liiki baasvektorite seosevalemitest (II 1.17-18). Võime näiteks kirjutada

$$T_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} e^\alpha \otimes e^\beta \otimes e_\gamma \otimes e_\delta = T_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} g^{\alpha\varkappa} g^{\beta\lambda} g_{\gamma\mu} g_{\delta\nu}\, e_\varkappa \otimes e_\lambda \otimes e^\mu \otimes e^\nu .$$

Siit aga järeldub

$$T^{\varkappa\lambda}{}_{\mu\nu} = g^{\alpha\varkappa} g^{\beta\lambda} g_{\gamma\mu} g_{\delta\nu} T_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} . \qquad \text{(II 3.17)}$$

Niisiis näeme, et suuruste $g^{\mu\nu}$ abil saab indekseid "tõsta" ja suuruste $g_{\mu\nu}$ abil "langetada". Vektori puhul näiteks

$$T_\mu = g_{\gamma\mu} T^\gamma \qquad \text{(II 3.18)}$$

või

$$T^\varkappa = g^{\alpha\varkappa} T_\alpha . \qquad \text{(II 3.19)}$$

2. järku tensori kovariantsed komponendid avalduvad kontravariantsete või segakomponentide kaudu järgmiselt:

$$T_{\mu\nu} = g_{\gamma\mu} T^{\gamma}{}_{\nu} = g_{\gamma\mu} g_{\delta\nu} T^{\gamma\delta}. \qquad \text{(II 3.20)}$$

Segakomponentide jaoks saame

$$T^{\varkappa}{}_{\nu} = g^{\mu\varkappa} T_{\mu\nu} = g_{\lambda\nu} T^{\varkappa\lambda} \qquad \text{(II 3.21)}$$

ja kontravariantsete jaoks

$$T^{\varkappa\lambda} = g^{\mu\varkappa} T_{\mu}{}^{\lambda} = g^{\mu\varkappa} g^{\nu\lambda} T_{\mu\nu}. \qquad \text{(II 3.22)}$$

f) Põhjendame nüüd mõnede juba tuntud suuruste tensoriseloomu.

Vaatleme näiteks koordinaatteisendust (II 2.1). Arvutame siit "uute" koordinaatide täisdiferentsiaalid

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha} \equiv x^{\mu'}{}_{,\alpha} dx^{\alpha}. \qquad \text{(II 3.23)}$$

Näeme, et saadud valem ühtib täiesti üldjuhulise valemiga (II 3.15), kui vaid seal võtta $T^{\mu'} \equiv dx^{\mu'}$ (nn. vabaindeksi võime ju valida meelevaldselt) ja $T^{\alpha} \equiv dx^{\alpha}$. Niisiis on k o o r d i n a a t i d e d i f e r e n t s i a a l i d ühe vektori kontravariantsed komponendid. Selleks vektoriks on muidugi i n f i n i t e s i m a a l s e n i h k e v e k t o r . Siit selgub ka, miks koordinaatide puhul tuleb indeksid kirjutada üles. Tõsi, mugavuse kaalutlustest lähtudes kirjutatakse vahel konkreetsetes arvutustes kokkuleppeliselt ka x_{α} , ξ_{α} jne.

Et meetriline vorm $(ds)^2$ on invariant, s. t. 0-ndat järku tensor, siis valemi (II 1.24) põhjal kehtib seos

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = g_{\mu'\nu'}\, dx^{\mu'} dx^{\nu'}.$$

Kasutades nüüd edasi valemit (II 3.23), saame

$$g_{\mu\nu} = x^{\mu'}{}_{,\mu}\, x^{\nu'}{}_{,\nu}\, g_{\mu'\nu'}. \tag{II 3.24}$$

Niisiis on suurused $g_{\mu\nu}$ ühe 2. järku tensori k o v a r i a n t s e d komponendid. Seda tensorit nimetatakse m e e t r i l i s e k s t e n s o r i k s ehk f u n d a m e n t a a l t e n s o r i k s . Sellega oleme siis ka jõudnud suuruste $g_{\mu\nu}$ tõelise nimetuseni.

Suurusi $g_{\mu\nu}$ ja $g^{\varkappa\lambda}$ seob valem (II 1.20)[x]:

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\varkappa} = \delta_\nu^\varkappa.$$

Valemi (II 3.21) põhjal võib neid seoseid käsitada kui üleminekut kovariantsetelt komponentidelt segakomponentidele. Niisiis on Kroneckeri sümbolid δ_ν^μ meetrilise tensori s e g a k o m p o n e n d i d . Tõstes segakomponentides veel ühe indeksi, saame

$$g^{\nu\lambda} \delta_\nu^\varkappa = g^{\varkappa\lambda}.$$

Järelikult on suurused $g^{\varkappa\lambda}$ meetrilise tensori k o n t r a v a r i a n t s e d komponendid.

Vaadeldes seoseid (II 1.20) indeksi $\varkappa$ iga fikseeritud väärtuse puhul kui lineaarsete algebraliste võrrandite süsteemi meetrilise tensori kontravariantsete komponentide $g^{\mu\varkappa}$ kui tundmatute jaoks, võime vastavalt üldisele teooriale kirjutada

---

[x] Nagu peatselt põhjendame, on ka suurused $g^{\mu\varkappa}$ oma indeksites sümmeetrilised, nii et indeksite järjekorda võib siin ja edaspidi vahetada nii $g_{\nu\mu}$ kui ka $g^{\varkappa\mu}$ puhul.

$$g^{\mu\varkappa} = \frac{\min(g_{\mu\varkappa})}{g} .\qquad \text{(II 3.25)}$$

Siin ja edaspidi tähistab g meetrilise tensori komponentidest moodustatud determinanti

$$g \equiv \det \| g_{\mu\nu} \| , \qquad \text{(II 3.26)}$$

suurus $\min(g_{\mu\varkappa})$ tähistab elemendile $g_{\mu\varkappa}$ vaetavat algebralist täiendit determinandis g. Valemist (II 3.25) järeldub ka

$$g^{\mu\varkappa} = g^{\varkappa\mu} . \qquad \text{(II 3.27)}$$

g) Juhime tähelepanu asjaolule, et meetrilise tensori komponendite teisenemisvalemit (II 3.24) võib vahetult kasutada meetrilise tensori kuju leidmiseks pärast üleminekut ühest koordinaadistikust (üldiselt kõverjoonelisest) teise. Antud valemi puhul sobib valida lähtekoordinaatide tähisteks $x^{\mu'}$. Teades meetrilise tensori "vana" kuju ($g_{\mu'\nu'}$), samuti teisenemisvalemite (II 2.1) konkreetset kuju, s. t. seda, kuidas "vanad" koordinaadid ($x^{\mu'}$) avalduvad "uute" (x^{μ}) kaudu, võime pärast osatuletiste $x^{\mu'}_{,\mu}$ arvutamist valemi (II 3.24) põhjal välja arvutada ka meetrilise tensori "uue" kuju ($g_{\mu\nu}$).

Ülalkirjeldatud protseduuri võib rakendada samuti eukleidilise ruumi erijuhul, nii 4- kui ka 3-ruumi puhul. Nagu hiljem näeme, on sellistel $g_{i\varkappa}$ avaldistel märkimistvääriv praktiline tähtsus.

Kui 3-ruumi Cartesiuse ristkoordinaadid ξ^m avalduvad kõverjooneliste x^i kaudu seostena

$$\xi^m = \xi^m(x^n), \qquad (m,n = 1,2,3), \tag{II 3.28}$$

siis 3-mõõtmelisena mõistetud tingimuse (II 1.27) arvestamisel saame valemist (II 3.24)

$$g_{ik} = \xi^m_{,i}\, \xi^n_{,k}\, \delta_{mn} = \xi^m_{,i}\, \xi^m_{,k}\,. \tag{II 3.29}$$

Üleminekuks silindrilistele koordinaatidele on teatavasti teisenemisvalemid

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 &= x^1 \cos x^3, \\ \xi^2 &= x^1 \sin x^3, \\ \xi^3 &= x^2. \end{aligned}\right\} \tag{II 3.30}$$

Siit saame silindriliste koordinaatide jaoks

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1)^2 \end{pmatrix}. \tag{II 3.31}$$

Üleminekuks sfäärilistele koordinaatidele on valemid

$$\left.\begin{aligned} \xi^1 &= x^1 \sin x^2 \cos x^3, \\ \xi^2 &= x^1 \sin x^2 \sin x^3, \\ \xi^3 &= x^1 \cos x^2. \end{aligned}\right\} \tag{II 3.32}$$

Siit saame

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1 \sin x^2)^2 \end{pmatrix}. \tag{II 3.33}$$

Ülesandeid

1. Võttes tensori definitsiooniks teisendusvalemi (II 3.13), tuletada valem (II 3.5).

2. Tõestada, et P. Kardi konspekti "Erirelatiivsusteooria" II (K-II) valemid (3.1) ja (3.2) on teisenemisvalemi (II 3.14) erijuhud.

3. Tuletada maatriksi (II 3.31) kuju ning panna kirja eukleidilise 3-ruumi meetriline vorm silindriliste koordinaatide puhul.

4. Tuletada maatriksi (II 3.33) kuju ning panna kirja eukleidilise 3-ruumi meetriline vorm sfääriliste koordinaatide puhul.

4. Tensoralgebra põhitehteid

a) Käesolevas alapunktis määratleme tensoralgebra tähtsamad tehted. Kõikide esitatavate lausete ja valemite õigsust võib teisenemisvalemite (II 3.13-14) põhjal tõestada. Tõestuskäikude põhiidee on kõikide juhtude jaoks sama: eeldades lähtesuuruste tensoriseloomu, s. t. teisenemist eeskirjade (II 3.13-14) kohaselt, näidatakse, et ka tulemuseks saadavatel suurustel on tensoriseloom.

1° Sama järku tensoreid võib l i i t a ja l a h u t a d a :

$$\mathbb{A} \pm \mathbb{B} = \mathbb{C} . \qquad \text{(II 4.1a)}$$

Liita ja lahutada tuleb samatüübilisi vastavaid komponente. Tulemuseks saadakse sama järku tensori sama tüüpi komponendid:

$$A^{\alpha\beta\dots}{}_{\gamma\delta\dots} \pm B^{\alpha\beta\dots}{}_{\gamma\delta\dots} = C^{\alpha\beta\dots}{}_{\gamma\delta\dots} . \qquad \text{(II 4.1b)}$$

2° s-ndat järku tensorist ja t-ndat järku tensorist võib moodustada (s+t)-ndat järku tensori, korrutades esimese tensori iga komponendi teise tensori iga komponendiga:

$$A^{\alpha\dots}{}_{\gamma\dots} B^{\beta\dots}{}_{\delta\dots} = C^{\alpha\beta\dots}{}_{\gamma\delta\dots} . \qquad \text{(II 4.2a)}$$

Nii saamegi tensorite nn. o t s e k o r r u t i s e :

$$\mathbb{A} \otimes \mathbb{B} = \mathbb{C} . \qquad \text{(II 4.2b)}$$

3° s-ndat järku tensorist võib moodustada (s-2)-ndat järku tensori, võttes võrdseks 2 ükskõik millist erineva iseloomuga indeksit ja summeerides üle nende kõikvõimalike väärtuste

$$A^{\alpha\beta\dots}{}_{\alpha\delta\dots} = B^{\beta\dots}{}_{\delta\dots} . \qquad \text{(II 4.3)}$$

Sellist tehet nimetatakse tensori k o o n d a m i s e k s (ka lühendamiseks, ahendamiseks).

4° Kui suurused $B_\sigma A^{\alpha\beta\dots}{}_{\gamma\delta\dots}$ või $C^\rho D^{\alpha\beta\dots}{}_{\rho\delta\dots}$ osutuvad s-ndat järku tensori komponentideks ning B_σ ja C^ρ on seejuures vektori komponendid, siis suurused $A^{\alpha\beta\dots}{}_{\gamma\delta\dots}$ ja $D^{\alpha\beta\dots}{}_{\rho\delta\dots}$ on (s+1)-ndat järku tensori komponendid.

5° Kui mingis kindlas koordinaatsüsteemis teatava tensori kõik komponendid on nullid, siis selle tensori kõik komponendid on nullid mistahes koordinaatsüsteemis.

b) Lähtudes tensoralgebra juba eespool toodud tehetest, võib saada operatsiooni, mida nimetatakse tensorite s i s e k o r r u t i s e k s. Selleks kombineerime lauseid 2° ja 3°

$$A^{\alpha\ldots}{}_{\beta\ldots} B^{\beta\ldots}{}_{\delta\ldots} = C^{\alpha\ldots}{}_{\delta\ldots} . \qquad \text{(II 4.4)}$$

Siit saama ka s k a l a a r k o r r u t i s e ü l d i s t u s e

$$A^{\alpha\ldots}{}_{\beta\ldots} B^{\beta\ldots}{}_{\alpha\ldots} = C . \qquad \text{(II 4.5)}$$

Erijuhuks on

$$A^{\alpha} B_{\alpha} = A_{\alpha} B^{\alpha} = C . \qquad \text{(II 4.6)}$$

V e k t o r i n o r m on defineeritud

$$A_{\alpha} A^{\alpha} = C . \qquad \text{(II 4.7)}$$

Kui

$$A_{\alpha} B^{\alpha} = 0 , \qquad \text{(II 4.8)}$$

siis öeldakse, et vektorid on o r t o g o n a a l s e d. Tingimus

$$A_{\alpha} A^{\alpha} = 0 \qquad \text{(II 4.9)}$$

on aga vektori i s o t r o o p s u s e tunnuseks.

c) Igast s-ndat järku tensorist võib moodustada uue s-ndat järku tensori s ü m m e t r i s e e r i m i s e operatsiooni teel

$$A_{(\alpha\beta\gamma\ldots\tau)} = \frac{1}{s!}\left(A_{\alpha\beta\gamma\ldots} + A_{\beta\alpha\gamma\ldots} + \ldots\right) . \qquad \text{(II 4.10)}$$

Summa liikmed selles valemis on saadud ühte ja sama tüüpi indeksite kõikvõimalike ümberpaigutuste tulemusena.

Kui

$$A_{(\alpha\beta)\gamma\ldots} = A_{\alpha\beta\gamma\ldots}\,, \tag{II 4.11}$$

siis öeldakse, et tensor on s ü m m e e t r i l i n e neis indeksites. Tänu seosele (II 1.25) rahuldab seda seost ka meetriline tensor.

Võib tõestada, et 2. järku sümmeetrilisel tensoril on n-mõõtmelises ruumis $\frac{n(n+1)}{2}$ sõltumatut komponenti. Seega meetrilisel tensoril $g_{\mu\nu}$ on 4-ruumis sõltumatuid komponente 10, 3-ruumis - 6, 2-ruumis, s. t. pinnal - 3.

Igast s-ndat järku tensorist võib moodustada uue s-ndat järku tensori ka a l t e r n e e r i m i s e operatsiooni teel

$$A_{[\alpha\beta\gamma\ldots]} = \frac{1}{s!}\left(A_{\alpha\beta\gamma\ldots} - A_{\beta\alpha\gamma\ldots} + \ldots\right). \tag{II 4.12}$$

Summa liikmed selles valemis on saadud ühte ja sama tüüpi indeksite kõikvõimalike ümberpaigutuste tulemusena, kuid iga paarituarvulise permutatsiooni teel saadud liikme ees on miinus.

Kui

$$A_{[\alpha\beta]\gamma\ldots} = A_{\alpha\beta\gamma\ldots} \tag{II 4.13}$$

siis on tensor a n t i s ü m m e e t r i l i n e neis indeksites. Antisümmeetriline on teatavasti[x] elektromagnetvälja tensor $\phi_{\mu\nu}$.

---

[x] Vt. K-II, lk. 182.

Võib tõestada, et 2. järku antisümmeetrilisel tensoril on n-mõõtmelises ruumis $\frac{n(n-1)}{2}$ sõltumatut komponenti. Ka siit niisiis järeldub, et elektromagnetvälja tensoril on 4-ruumis 6 sõltumatut komponenti.

Rõhutagem lõpuks, et tensorite sümmeetrilisus või antisümmeetrilisus on nende invariantsed omadused.

Ülesandeid

1. Tõestada arvutustega laused 1° - 5°.

2. Arvutada nii 4-, 3- kui ka 2-ruumis skaalari väärtus, mille saame meetrilise tensori koondamise tulemusena. (Vastus: 4; 3; 2.)

3. Lähtudes meetrilise vormi kui 0-ndat järku tensori avaldisest (II 1.24) ja teades, et koordinaatide diferentsiaalid on 1. järku tensori komponendid, tõestada lause 4° põhjal suuruste $g_{\mu\nu}$ tensoriseloom.

4. Veenduda otsese arvutuse teel, et elektromagnetvälja tensor $\phi_{\mu\nu}$ rahuldab tingimust (II 4.13).

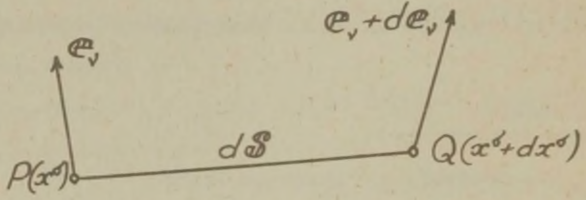
5. Diferentsiaaloperatsioonidest tensorite puhul

a) Tensoriseloomuga diferentsiaaloperatsioonide määratlemiseks on vaja ennekõike vaadelda lokaalse baasi muutusi infinitesimaalsel nihkel.

On selge, et infinitesimaalsel nihkel kõveras ruumis $d\mathcal{S}$ (vt. joonis 22) baasvektorid e_ν üldiselt muutuvad. Baasvektoreile lisanduvad teatavad muutused de_ν , s. t.

$$e_\nu(x^\sigma+dx^\sigma) = e_\nu(x^\sigma) + de_\nu . \qquad \text{(II 5.1)}$$

Defineerigem siin muutuse de_ν iseloomustajaina teatavad uued ruumi omadustest sõltuvad suurused $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}(x^\sigma)$,



Joonis 22.

mida nimetagem **C h r i s t o f f e l i k o e f i t s i e n t i d e k s** (nende uute suuruste täpsem sisu ja seos meetrilise tensoriga selgub edaspidises):

$$\underline{de_\nu = \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\, e_\rho\, dx^\sigma .} \qquad \text{(II 5.2)}$$

Põhibaasi muutudes muutub samal ajal ka kaasbaas. Baasvektorite e^μ vastavad muutused määratlegem esialgu valemiga (II 5.2) analoogiliselt:

$$de^\mu = B^\mu_{\rho\sigma}\, e^\rho dx^\sigma . \qquad \text{(II 5.3)}$$

Suurused $B^\mu_{\rho\sigma}$ ei tohiks aga olla sõltumatud suurustest $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$, sest vastavalt valemile (II 1.19)

$$e_\nu e^\mu = \delta^\mu_\nu .$$

Diferentsides seda seost, saame

$$(de_\nu)e^\mu + e_\nu de^\mu = 0$$

ja siit omakorda valemeid (II 5.2-3) arvestades,

$$\Gamma^{\varrho}_{\nu\sigma} dx^{\sigma} e_{\varrho} e^{\mu} + B^{\mu}_{\varrho\sigma} dx^{\sigma} e^{\varrho} e_{\nu} = 0.$$

Seega

$$(\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} + B^{\mu}_{\nu\sigma}) dx^{\sigma} = 0$$

ning diferentsiaalide meelevaldsusest

$$B^{\mu}_{\nu\sigma} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} \tag{II 5.4}$$

s. t.

$$\underline{d e^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\varrho\sigma} e^{\varrho} dx^{\sigma}}. \tag{II 5.5}$$

b) Nüüd võime asuda tensorite diferentsimise juurde. Alustagem 0-ndat järku tensorist, s. t. skaalarist. Olgu vaadeldava ruumiosa kõikides punktides määratud ühe skaalari arvväärtused (sel juhul teatavasti öeldakse, et vaadeldavas ruumiosas on antud teatav s k a l a a r n e v ä l i):

$$\varphi = \varphi(x^{\sigma}). \tag{II 5.6}$$

Infinitesimaalsel nihkel selle skaalari väärtused üldiselt muutuvad, s. t.

$$\varphi(x^{\sigma} + dx^{\sigma}) = \varphi(x^{\sigma}) + d\varphi. \tag{II 5.7}$$

Seejuures avaldub skaalari muutus $d\varphi$ täisdiferentsiaalina

$$d\varphi = \varphi_{,\sigma} dx^{\sigma}. \tag{II 5.8}$$

Et $d\varphi$ on skaalar ja dx^{σ} - vektori komponendid, siis tensoralgebra 4° lause põhjal on osatuletised $\varphi_{,\sigma} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\sigma}}$ ühe vektori kovariantsed komponendid. Nimetagem seda vektorit skaalari g r a d i e n d i k s

$$\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = \varphi_{,\sigma}\mathbf{e}^{\sigma}. \qquad \text{(II 5.9)}$$

c) Olgu meil vaadeldavas ruumiosas antud v e k t o r - v ä l i

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}(x^{\sigma}) = v_{\alpha}\mathbf{e}^{\alpha} = v^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}. \qquad \text{(II 5.10)}$$

Infinitesimaalsel nihkel vektorväljas muutub ka vektor, s. t.

$$\mathbb{V}(x^{\sigma}+dx^{\sigma}) = \mathbb{V}(x^{\sigma}) + d\mathbb{V}. \qquad \text{(II 5.11)}$$

Valemi (II 5.10) põhjal

$$d\mathbb{V} = v_{\alpha}d\mathbf{e}^{\alpha} + (dv_{\alpha})\mathbf{e}^{\alpha}.$$

Siit aga saame täisdiferentsiaale arvutades ja valemit (II 5.5) arvestades

$$d\mathbb{V} = -v_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}\mathbf{e}^{\rho}dx^{\sigma} + v_{\alpha,\sigma}dx^{\sigma}\mathbf{e}^{\alpha}.$$

Pärast summeerimisindeksi asendamist $\alpha \to \rho$ teises liikmes

$$d\mathbb{V} = (v_{\rho,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}v_{\alpha})dx^{\sigma}\mathbf{e}^{\rho}.$$

Nüüd defineerime uue suuruse

$$v_{\rho;\sigma} = v_{\rho,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}v_{\alpha}. \qquad \text{(II 5.12)}$$

Seega

$$d\mathbb{V} = v_{\rho;\sigma}dx^{\sigma}\mathbf{e}^{\rho} = (Dv_{\rho})\mathbf{e}^{\rho}, \qquad \text{(II 5.13)}$$

kust näeme, et suurused Dv_{ρ} on ühe vektori komponendid. Tensoralgebra 4° lause põhjal on suurused $v_{\rho;\sigma}$ järelikult teatava 2. järku tensori komponendid. Niisiis defineerib seos (II 5.12) ühe diferentsiaaloperatsiooni, millel on tensoriseloom. Nimetagem seda vektori **kovariantseks tuletiseks**. Nüüd ja edaspidi tähistab kovariantset tuletist semikoolon indeksite vahel.

Analoogiliselt seostele (II 5.12-13) saame tuletada ka valemi

$$dV = v^{\rho}{}_{;\sigma} dx^{\sigma} e_{\rho} = (Dv^{\rho}) e_{\rho} , \qquad \text{(II 5.14)}$$

kus Dv^{ρ} on samuti vektori komponendid ning suurused

$$\underline{v^{\rho}{}_{;\sigma} = v^{\rho}{}_{,\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} v^{\tau}} \qquad \text{(II 5.15)}$$

– 2. järku tensori komponendid.

Kuna valemid (II 5.13 ja 5.14) esitavad ühe ja sama suuruse, siis tuleneb siit võrdus

$$v^{\rho}{}_{;\sigma} e_{\rho} = v_{\rho;\sigma} e^{\rho} .$$

Otsekorrutamine baasvektoritega e^{σ} ja järgnev summeerimine annab juba ülalpool kõnesolnud 2. järku tensori esituse baasvektorite kombinatsioonidena

$$\mathrm{grad}\, V \equiv \nabla V = v^{\rho}{}_{;\sigma} e_{\rho} \otimes e^{\sigma} = v_{\rho;\sigma} e^{\rho} \otimes e^{\sigma} . \qquad \text{(II 5.16)}$$

Seda 2. järku tensorit nimetatakse vektori, s. t. 1.järku tensori **gradiendiks**. Suurused $v^{\rho}{}_{;\sigma}$ ja $v_{\rho;\sigma}$ on järelikult selle tensori eritüübilised komponendid.

Suurusi Dv_{ρ} ja Dv^{ρ} nimetatakse ka vektori **kovariantseteks diferentsiaalideks**.

d) Vaatleme nüüd üldjuhtu, s. t. **s-ndat järku tensorvälja**:

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}(x^\sigma) = T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots}\, e_\alpha \otimes e_\beta \otimes \ldots e^\gamma \otimes e^\delta \otimes \ldots \tag{II 5.17}$$

Infinitesimaalsel nihkel

$$\mathbb{T}(x^\sigma + dx^\sigma) = \mathbb{T}(x^\sigma) + d\mathbb{T}. \tag{II 5.18}$$

Kui nüüd arvutame $d\mathbb{T}$ valemi (II 5.17) põhjal, siis saame tulemuseks

$$d\mathbb{T} = T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots;\sigma}\, dx^\sigma\, e_\alpha \otimes e_\beta \otimes \ldots e^\gamma \otimes e^\delta \otimes \ldots, \tag{II 5.19}$$

kus

$$\underline{T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots;\sigma} = T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta,\sigma} + \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} T^{\rho\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots} + \Gamma^\beta_{\rho\sigma} T^{\alpha\rho\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots} +}$$

$$\underline{+ \ldots - \Gamma^\rho_{\gamma\sigma} T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\rho\delta\ldots} - \Gamma^\rho_{\delta\sigma} T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\rho\ldots} - \ldots} \tag{II 5.20}$$

Valemist (II 5.19) näeme, et

$$DT^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots} = T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots;\sigma}\, dx^\sigma \tag{II 5.21}$$

on ühe s-ndat järku tensori komponendid. Need on s-ndat järku tensori kovariantsed diferentsiaalid. Edasi järeldub siit, et suurused $T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots;\sigma}$ on ühe (s+1)-ndat järku tensori komponendid.

Valem (II 5.20) defineerib s-ndat järku tensori kovariantse tuletise kui vektori kovariantse tuletise üldistuse. On kerge veenduda, et nii seos (II 5.12) kui ka (II 5.15) on valemi (II 5.20) erijuhud. s-ndat järku tensori gradient kui (s+1)-järku tensor on esitatav valemina

$$\operatorname{grad} \mathbb{T} \equiv \nabla \mathbb{T} = T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots;\sigma}\, e_\alpha \otimes e_\beta \otimes \ldots e^\gamma \otimes e^\delta \otimes \ldots e^\sigma . \qquad \text{(II 5.22)}$$

Praktilistes arvutustes on oluline just valem (II 5.20). Anname seetõttu ka selle valemi sõnastuse:

<u>Et saada s-ndat järku tensori komponendi kovariantset tuletist koordinaadi x^σ järgi, tuleb tavalisele osatuletisele $T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots,\sigma}$ lisada tensori komponendi iga kontravariantse indeksi α kohta liige</u> $+\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} T^{\rho\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots}$ <u>(summeerimisindeks ρ asendab tensori komponendi indeksit α) ning iga kovariantse indeksi γ kohta liige</u> $-\Gamma^{\rho}_{\gamma\sigma} T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\rho\delta\ldots}$ <u>(summeerimisindeks ρ asendab indeksit γ)</u>.

e) Eelnevas oleme seega üldistanud gradiendi mõistet üldjuhuliselt kõvera ja n-mõõtmelise ruumi ning s-ndat järku tensori juhule. Näeme, et gradiendi kui ruumilise diferentsiaaloperatsiooni rakendamine tõstab alati tensori järku ühe võrra.

Kõvera ja n-mõõtmelise ruumi juhu ning üldjuhul s-ndat järku tensorite jaoks võib üldistada ka teisi tuntud ruumilisi diferentsiaaloperatsioone.

Divergents on koondatud gradient:

$$\operatorname{div} \mathbb{T} = T^{\alpha\sigma\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots;\sigma}\, e_\alpha \otimes \ldots e^\gamma \otimes e^\delta \otimes \ldots \quad . \qquad \text{(II 5.23)}$$

Niisiis langetab divergentsi arvutamine alati tensori järku ühe võrra.

Rootori mõiste üldistust vaadelgem siin vektori juhul

13

$$\operatorname{rot} \mathbb{V} = (v_{\mu;\nu} - v_{\nu;\mu})\, e^{\mu} \otimes e^{\nu} \equiv 2\, v_{[\mu;\nu]}\, e^{\mu} \otimes e^{\nu}. \quad \text{(II 5.24)}$$

f) Et kovariantsed tuletised on tensori komponendid, siis võib nendegi puhul tõsta indekseid. Näiteks vektori kovariantse tuletise puhul

$$A_{\mu}{}^{;\nu} = g^{\nu\sigma} A_{\mu;\sigma} \quad \text{(II 5.25)}$$

See valem defineerib vektori k o n t r a v a r i a n t s e t u l e t i s e .

Tensorite o t s e k o r r u t i s e k o v a r i a n t s e t u l e t i s e jaoks saame valemi

$$(A^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots} B^{\varkappa\lambda\ldots}{}_{\mu\nu\ldots})_{;\sigma} = A^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots;\sigma} B^{\varkappa\lambda\ldots}{}_{\mu\nu\ldots} +$$

$$+ A^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots} B^{\varkappa\lambda\ldots}{}_{\mu\nu\ldots;\sigma} . \quad \text{(II 5.26)}$$

Analoogiline on valem ka kovariantse diferentsiaali puhul.

g) Lõpuks leiame veel meetrilise tensori kovariantse tuletise.

Olgu meil antud meelevaldse vektori puhul seos kovariantsete ja kontravariantsete komponentide vahel

$$A_{\nu} = g_{\nu\sigma} A^{\sigma} .$$

Arvutagem võrduse mõlema poole kovariantne diferentsiaal

$$DA_{\nu} = (Dg_{\nu\sigma}) A^{\sigma} + g_{\nu\sigma} DA^{\sigma} .$$

Et DA^{σ} on vektori komponendid, siis

$$g_{\nu\sigma} DA^{\sigma} = DA_{\nu} .$$

Seega

$$(Dg_{\nu\sigma})A^{\sigma} = 0.$$

Et A^{σ} on täiesti meelevaldse vektori komponendid, siis peab alati kehtima seos

$$Dg_{\nu\sigma} = g_{\nu\sigma;\rho}\, dx^{\rho} = 0.$$

Siit aga omakorda järeldub dx^{ρ} meelevaldsusest

$$\underline{g_{\nu\sigma;\rho} = 0.} \tag{II 5.27}$$

Saame seega olulise tulemuse: <u>kovariantse diferentsimise suhtes käituvad meetrilise tensori komponendid konstantidena.</u>

<u>Ülesandeid</u>

1. Tuletada valemid (II 5.14-15).

2. Tõestada otsese arvutuse teel, et tavalised osatuletised $v_{\rho,\sigma}$ ei ole tensori komponendid (näidata, et nad ei teisene valemite (II 3.13-14) kohaselt).

3. Tõestada valem (II 5.20).

4. Tõestada valem (II 5.26) otsekorrutise $A^{\alpha}B_{\mu\nu}$ puhul. (Näpunäide: arvutada korrutiste $T^{\alpha}{}_{\mu\nu} \equiv A^{\alpha}B_{\mu\nu}$ kui 3. järku tensori komponentide kovariantne tuletis, seejärel kombineerida liikmeid.)

5. Tuletada tensorite otsekorrutise kovariantse diferentsiaali valem.

6. Christoffeli koefitsiendid

a) Näeme, et tensoriseloomuga diferentsiaaloperatsioonide määratlemisel osutuvad Christoffeli koefitsiendid $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ kui baasvektorite diferentsiaale iseloomustavad suurused üpris olulisteks. Uurigem nüüd lähemalt nende omadusi ning seoseid teiste suurustega.

Kõigepealt pangem tähele, et Christoffeli koefitsiendid pole tensori komponendid. See järeldub näiteks otseselt valemi (II 5.12) struktuurist:

$$v_{\rho;\sigma} = v_{\rho,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} v_{\alpha} .$$

Näeme, et kui suurused $\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}$ oleksid tensori komponendid, siis v_{α} vektoriseloomu ja tensoralgebra 4° lause tõttu oleksid ka suurused $\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma} v_{\alpha}$ tensori komponendid. Viies need suurused võrduse vasemale poolele, saaksime seal 2. järku tensorite komponentide summa, s. t. samuti 2. järku tensori komponendid, mis peaksid võrduma osatuletistega $v_{\rho,\sigma}$. Ent viimased pole ju tensori komponendid. Järelikult oli meie algoletus Christoffeli koefitsientide tensoriseloomu kohta tõepoolest väär.

Kasutades tensori komponentide teisenemisvalemit (II 3.13), saame tuletada valemist (II 5.12) teisenemisvalemi ka Christoffeli koefitsientide jaoks (vt. ülesanne 1):

$$\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma} = x^{\tau}_{,\gamma'} \left(x^{\gamma'}_{,\rho,\sigma} + x^{\alpha'}_{,\rho} x^{\beta'}_{,\sigma} \Gamma^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} \right). \qquad \text{(II 6.1)}$$

Muidugi nähtub siitki, et suurused $\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}$ pole tensori komponendid.

Et Christoffeli koefitsiendid ei ole tensori komponendid, siis ei kehti nende kohta ka tensoralgebra 5° lause. Seega juhul, kui nad on ühes koordinaatsüsteemis nullid, ei pruugi nad tingimata mingi teise, kuid sellessamas ruumis sisseviidud koordinaatsüsteemi puhul enam nullid olla. Kogu ruumi jaoks on see võimalik üksnes teatava ruumide klassi ja nimelt tasaste ruumide juhul. ÜRT-s kasutatavate kõverate ruumide, nn. Riemanni ruumide puhul saab aga alati valida sellist koordinaatsüsteemi, milles kõik Christoffeli koefitsiendid on nullid mingis kindlas etteantud punktis (vt. ülesanne 3). Nii see peabki olema, sest teisiti poleks lokaalne inertsiaalsüsteem mistahes ruumipunktis realiseeritav.

b) Tõestame, et Christoffeli koefitsiendid on oma alumistes indeksites sümmeetrilised, s. t.

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} . \qquad \text{(II 6.2)}$$

Tõestuseks valime meelevaldse skaalari φ ja arvutame selle osatuletised koordinaatide järgi. Tähistame $A_\nu \equiv \varphi_{,\nu}$ ning arvutame selle gradientvektori komponentide kovariantse tuletise

$$A_{\nu;\mu} = A_{\nu,\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} A_\sigma ,$$

s. t.

$$A_{\nu;\mu} = \varphi_{,\nu,\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} \varphi_{,\sigma} .$$

Analoogiliselt saame

$$A_{\mu;\nu} = \varphi_{,\mu,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \varphi_{,\sigma} .$$

Siit aga järeldub

$$A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = (\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}) A_{\sigma} . \qquad \text{(II 6.3)}$$

Läheme nüüd üle koordinaadistikku, milles mingi etteantud punkti jaoks kehtib tingimus $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = 0$. Valem (II 6.3) omandab seega kuju

$$A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = 0 . \qquad \text{(II 6.4)}$$

Et sel seosel on tensoriseloom, siis antud punkti jaoks peab see seos kehtima kõikides koordinaatsüsteemides. Kuid üldjuhul Christoffeli koefitsiendid pole nullid, samuti ei võrdu nulliga osatuletised $\varphi_{,\sigma}$. Niisiis selleks, et seos (II 6.4) oleks rahuldatud, peab tõepoolest olema täidetud tingimus (II 6.2).

c) Edasi defineerime uued suurused[x]

$$\Gamma_{\mu\nu.\varkappa} = g_{\varkappa\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} . \qquad \text{(II 6.5)}$$

Formaalselt oleks siin nagu tegemist indeksi langetamisega, kuid meenutagem, et suurused $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ pole tensori komponendid. Järelikult pole uued suurused $\Gamma_{\mu\nu.\varkappa}$ samuti tensori komponendid.

Indeksi "tõstmine" annab tulemuseks

$$g^{\sigma\varkappa} \Gamma_{\mu\nu.\varkappa} = g^{\sigma\varkappa} g_{\varkappa\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \delta^{\sigma}_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} .$$

---

[x] Tavaliselt kasutatakse defineeritavates suurustes punkti asemel koma, s. t. $\Gamma_{\mu\nu.\varkappa} \equiv \Gamma_{\mu\nu,\varkappa}$. Siin ja edaspidi aga väldime üldlevinud tähistusviisi, et ei tekiks segiminekut tavalise osatuletise tähisega. Suurusi $\Gamma_{\mu\nu,\varkappa}$ nimetatakse ka Christoffeli 1. liiki sümboliteks, kusjuures Christoffeli koefitsientide $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ kohta kasutatakse tavaliselt nimetust Christoffeli 2. liiki sümbolid.

Siit saame seose

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = g^{\sigma\varkappa} \Gamma_{\mu\nu.\varkappa} . \qquad \text{(II 6.6)}$$

Nii valemist (II 6.5) kui ka valemist (II 6.6) järeldub sümmeetriatingimus

$$\Gamma_{\mu\nu.\varkappa} = \Gamma_{\nu\mu.\varkappa} . \qquad \text{(II 6.7)}$$

d) Tuletame nüüd seose suuruste $\Gamma_{\mu\nu.\varkappa}$ ja meetrilise tensori komponentide vahel.

Lähtume avaldisest

$$g_{\nu\mu;\rho} = 0,$$

mis pikemalt kirjapandult omab kuju

$$g_{\nu\mu,\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} g_{\sigma\mu} - \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} g_{\nu\sigma} = 0.$$

Valemi (II 6.5) põhjal saame siit

$$g_{\nu\mu,\rho} = \Gamma_{\nu\rho.\mu} + \Gamma_{\rho\mu.\nu} . \qquad \text{(II 6.8)}$$

Indeksite vastav äravahetamine annab veel kaks analoogilist seost:

$$g_{\rho\nu,\mu} = \Gamma_{\rho\mu.\nu} + \Gamma_{\mu\nu.\rho}$$

ja

$$-g_{\mu\rho,\nu} = -\Gamma_{\mu\nu.\rho} - \Gamma_{\nu\rho.\mu} .$$

Saadud seoste paremate ja vasemate poolte liitmisel osa liidetavaid koondub ning tulemusena saame

$$g_{\nu\mu,\rho} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\rho,\nu} = 2\Gamma_{\rho\mu.\nu} ,$$

kust omakorda tuleneb seos

$$\Gamma_{\varrho\mu.\nu} = \frac{1}{2}(g_{\nu\mu,\varrho} + g_{\varrho\nu,\mu} - g_{\varrho\mu,\nu}). \qquad \text{(II 6.9)}$$

Näeme seega, et suurused $\Gamma_{\varrho\mu.\nu}$ on täielikult määratud meetrilise tensori komponentide esimeste tuletistega. Tihti kasutatakse ka paralleeltähistust

$$[\varrho\mu,\nu] \equiv \Gamma_{\varrho\mu.\nu}. \qquad \text{(II 6.10)}$$

Christoffeli koefitsientide $\Gamma^{\varkappa}_{\varrho\mu}$ jaoks saame valemi

$$\Gamma^{\varkappa}_{\varrho\mu} = \frac{1}{2}g^{\varkappa\nu}(g_{\nu\mu,\varrho} + g_{\varrho\nu,\mu} - g_{\varrho\mu,\nu}). \qquad \text{(II 6.11)}$$

Paralleeltähistusena on kasutusel ka

$$\left\{ {\varkappa \atop \varrho\mu} \right\} \equiv \Gamma^{\varkappa}_{\varrho\mu}. \qquad \text{(II 6.12)}$$

e) Arvutame nn. koondatud Christoffeli koefitsiendid $\Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma}$ (juhime jällegi tähelepanu, et tegemist pole tensoriga):

$$\Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma} = g^{\sigma\varrho}\Gamma_{\nu\sigma.\varrho} = \frac{1}{2}g^{\sigma\varrho}(g_{\nu\varrho,\sigma} + g_{\sigma\varrho,\nu} - g_{\nu\sigma,\varrho}) =$$
$$= \frac{1}{2}g^{\sigma\varrho}g_{\nu\varrho,\sigma} + \frac{1}{2}g^{\sigma\varrho}g_{\sigma\varrho,\nu} - \frac{1}{2}g^{\sigma\varrho}g_{\nu\sigma,\varrho}.$$

Vahetades viimases liikmes summeerimisindeksid ja arvestades suuruste $g^{\sigma\varrho}$ sümmeetriaomadust, näeme, et esimene ja viimane liige koonduvad. Seega

$$\Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\varrho}g_{\sigma\varrho,\nu}. \qquad \text{(II 6.13)}$$

"Koondatud" Christoffeli koefitsiente saab siduda ka meetrilise tensori determinandiga g. Arvutades

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\nu}} \equiv g_{,\nu} = \frac{\partial g}{\partial g_{\sigma\varrho}} \cdot \frac{\partial g_{\sigma\varrho}}{\partial x^{\nu}} = min(g_{\sigma\varrho}) \cdot g_{\sigma\varrho,\nu}$$

ja arvestades seost (II 3.25), saame

$$g_{,\nu} = g g^{\sigma\varrho} g_{\sigma\varrho,\nu} .$$

Seega järeldub võrdlusest valemiga (II 6.13)

$$\Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma} = \frac{g_{,\nu}}{2g} . \qquad \text{(II 6.14)}$$

Et

$$(\ln\sqrt{|g|})_{,\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|})_{,\nu} = \frac{|g|_{,\nu}}{2|g|} = \frac{g_{,\nu}}{2g} ,$$

siis saame ka seosed

$$\Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|})_{,\nu} \qquad \text{(II 6.15)}$$

ja

$$\Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma} = (\ln\sqrt{|g|})_{,\nu} . \qquad \text{(II 6.16)}$$

f) Äsjaleitud valemite abil võib kirja panna mitmeid olulisi arvutusvalemeid.

Lähtudes vektori kontravariantsete komponentide kovariantsest tuletisest

$$A^{\sigma}{}_{;\varrho} = A^{\sigma}{}_{,\varrho} + \Gamma^{\sigma}_{\varrho\tau} A^{\tau} ,$$

arvutame vektori divergentsi

$$A^{\sigma}{}_{;\sigma} = A^{\sigma}{}_{,\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\tau\sigma} A^{\tau} .$$

Arvestades valemit (II 6.15), saame

$$A^{\sigma}{}_{;\sigma} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|}A^{\sigma})_{,\sigma} . \qquad \text{(II 6.17)}$$

Analoogiliselt võime leida antisümmeetrilise tensori ($A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$) divergentsi:

$$A^{\mu\sigma}{}_{;\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}\,A^{\mu\sigma}\right)_{,\sigma} . \qquad \text{(II 6.18)}$$

Sümmeetrilise tensori ($A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$) divergents avaldub

$$A^{\sigma}_{\mu;\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}\,A^{\sigma}_{\mu}\right)_{,\sigma} - \frac{1}{2}A^{\sigma\varkappa}g_{\sigma\varkappa,\mu} . \qquad \text{(II 6.19)}$$

Kui defineerime t e n s o r t i h e d u s e mõiste

$$\mathfrak{A}^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots} = \sqrt{g}\,A^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots} , \qquad \text{(II 6.20)}$$

siis selle mõiste abil omandab valem (II 6.17) kuju

$$\mathfrak{A}^{\sigma}{}_{;\sigma} = \mathfrak{A}^{\sigma}{}_{,\sigma} , \qquad \text{(II 6.21)}$$

valem (II 6.18) -

$$\mathfrak{A}^{\mu\sigma}{}_{;\sigma} = \mathfrak{A}^{\mu\sigma}{}_{,\sigma} \qquad \text{(II 6.22)}$$

ja valem (II 6.19) -

$$\mathfrak{A}^{\sigma}_{\mu;\sigma} = \mathfrak{A}^{\sigma}_{\mu,\sigma} - \frac{1}{2}\mathfrak{A}^{\sigma\varkappa}g_{\sigma\varkappa,\mu} . \qquad \text{(II 6.23)}$$

Rootori jaoks saame valemi

$$A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} . \qquad \text{(II 6.24)}$$

"Laplasiaan" $\Delta\varphi \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$ võtab kuju

$$\Delta\varphi = \left(\varphi^{;\sigma}\right)_{;\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}\,g^{\sigma\rho}\varphi_{,\rho}\right)_{,\sigma} . \qquad \text{(II 6.25)}$$

Ülesandeid

1. Tuletada valem (II 6.1). (Näpunäide: kasutada suuruste $v_{\rho;\sigma}$ teisenemisvalemites kovariantse tuletise valemit ka uue koordinaadistiku puhul. Kombineerida tulemust

osatuletiste $\vartheta_{\varrho,\sigma}$ teisenemisvalemitega, mis on arvutatud vektori komponentide teisenemisvalemitest.)

2. Milliste teisenduste puhul käituvad suurused $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ siiski tensori komponentidena?

3. Olgu mingis etteantud punktis Christoffeli koefitsientide esialgsed väärtused $(\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu})_0$. Valigem see punkt uue koordinaadistiku alguspunktiks ning tehkem koordinaatteisendus

$$x^{\nu'} = x^{\nu} + \frac{1}{2}(\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu})_0 \, x^{\lambda} x^{\mu} . \qquad \text{(II 6.26)}$$

Näidata valemi (II 6.1) abil, et uue koordinaadistiku alguspunktis on kõik Christoffeli koefitsiendid nullid, s. t. $\{\Gamma^{\nu'}_{\lambda'\mu'}\}_0 = 0$. Tõestada, et see teisendus ei muuda tensorite väärtusi mainitud etteantud punktis.

4. Tuletada valemid (II 6.18-19).

5. Kasutades maatrikseid (II 3.31 ja (II 3.33), leida valemi (II 6.25) abil Laplace'i operaatori kuju eukleidilise 3-ruumi silindriliste ja sfääriliste koordinaatide puhul.

7. Teine kovariantne tuletis ja baasvektorite diferentsiaalide integreeruvustingimused. Riemanni-Christoffeli tensor

a) Uurigem v e k t o r i t e i s e k o v a r i a n t s e t u l e t i s e omadusi. Selleks arvutagem vastavalt valemile (II 5.20)

$$\vartheta_{\lambda;\mu;\nu} = (\vartheta_{\lambda;\mu})_{,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\vartheta_{\sigma;\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\vartheta_{\lambda;\sigma} . \qquad \text{(II 7.1)}$$

Analoogiliselt saame

$$\vartheta_{\lambda;\nu;\mu} = (\vartheta_{\lambda;\nu})_{,\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\vartheta_{\sigma;\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\vartheta_{\lambda;\sigma}. \qquad \text{(II 7.2)}$$

Moodustame nüüd avaldiste (II 7.1-2) vahe, kirjutades seejuures enamikus liikmetes esimesed kovariantsed tuletised pikemalt välja

$$\vartheta_{\lambda;\mu;\nu} - \vartheta_{\lambda;\nu;\mu} =$$

$$= \vartheta_{\lambda,\mu,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu,\nu}\vartheta_{\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\vartheta_{\sigma,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\vartheta_{\sigma,\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu}\vartheta_{\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\vartheta_{\lambda;\sigma} -$$

$$- \vartheta_{\lambda,\nu,\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu,\mu}\vartheta_{\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\vartheta_{\sigma,\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\vartheta_{\sigma,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}\vartheta_{\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\vartheta_{\lambda;\sigma}.$$

Näeme, et osa liikmeid koondub. Tähistades järelejäänud liikmetes summeerimisindeksid sobivalt ümber, nii et kõikides liikmetes oleks vektori indeks σ , saame

$$\vartheta_{\lambda;\mu;\nu} - \vartheta_{\lambda;\nu;\mu} = \left(\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}\right)\vartheta_{\sigma}.$$

Defineerides

$$\underline{R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}}, \qquad \text{(II 7.3)}$$

võime saadud tulemuse esitada üpris kompaktselt:

$$\underline{\vartheta_{\lambda[;\mu;\nu]} = \tfrac{1}{2} R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu}\vartheta_{\sigma}}. \qquad \text{(II 7.4)}$$

b) Analüüsigem valemit (II 7.4). Näeme, et vasemal poolel on teatava 3. järku tensori komponendid. Järelikult on ka paremal poolel sama järku tensori komponendid. Et ϑ_{σ} on eelduse kohaselt vektori komponendid, siis tensoralgebra 4° lause põhjal on valemiga (II 7.3) defineeritud suurused $R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu}$ ühe 4. järku tensori komponendid. Seda tensorit nimetatakse **R i e m a n n i - C h r i s t o f f e l i t e n s o r i k s .**

Valemile (II 7.4) võime seega omistada järgmise mõtte: vektori teine kovariantne tuletis ei sõltu siis ja ainult siis tuletise võtmise järjekorrast, kui Riemanni-Christoffeli tensor on null-tensor, s. t. kui on nullid kõik tema komponendid. Üldjuhul pole aga ükskõik, millises järjekorras kaks korda kovariantset tuletist arvutada.

c) Järgnevalt vaadelgem **b a a s v e k t o r i t e d i f e r e n t s i a a l i d e i n t e g r e e r u v u s t i n g i m u s i .**

Et valemist (II 5.2) tuntud suurused $de_{\lambda} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} e_{\sigma} dx^{\nu}$ oleksid täisdiferentsiaalid, selleks peaks kehtima tingimus

$$e_{\lambda,\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} e_{\sigma} . \qquad \text{(II 7.5)}$$

Siit võime arvutada vahe

$$e_{\lambda,\nu,\mu} - e_{\lambda,\mu,\nu} = (\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} e_{\sigma})_{,\mu} - (\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} e_{\sigma})_{,\nu} =$$

$$= \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu,\mu} e_{\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} e_{\sigma,\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu,\nu} e_{\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} e_{\sigma,\nu} .$$

Pärast summeerimisindeksite sobivat ümbertähistamist ja valemi (II 7.5) arvestamist saame

$$(\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} e_{\sigma})_{,\mu} - (\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} e_{\sigma})_{,\nu} = (\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}) e_{\sigma} .$$

Pidades silmas definitsioonivalemit (II 7.3), oleme seega jõudnud seoseni

$$(\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} e_{\sigma})_{,\mu} - (\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} e_{\sigma})_{,\nu} = R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu} e_{\sigma}. \qquad \text{(II 7.6)}$$

Tingimuse (II 7.5) täitmiseks peaks saadud seose vasem pool identselt null olema. Nulliga peab siis võrduma meelevaldsete baasvektorite puhul ka seose parem pool. Järelikult on baasvektorite diferentsiaalid integreeruvad siis ja ainult siis, kui Riemanni-Christoffeli tensori kõik komponendid $R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu}$ on nullid.

Omakorda järeldub eelnevast (silmas pidades tensoralgebra 5^c lauset), et baasvektorite diferentsiaalide integreeruvus on ruumi invariantne, s. t. koordinaatide valikust sõltumatu omadus. Ja selle invariantse omaduse väljendajaks on Riemani-Christoffeli tensor. Niisiis näeme, et Riemanni-Christoffeli tensor on ilmselt üpris oluline ruumi omaduste karakteristik.

d) Et kindlaks teha Riemanni-Christoffeli tensori mõningaid olulisemaid diferentsiaalseid ja algebralisi omadusi, leidkem järgmise sammuna selle tensori t ä i e l i k u l t k o v a r i a n t s e d k o m p o n e n d i d :

$$R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = g_{\varkappa\sigma} R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu}.$$

Kasutades valemit (II 7.3), jõuame siit mõningate teisenduste järel avaldiseni

$$R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = (g_{\varkappa\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu})_{,\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} g_{\varkappa\sigma,\mu} - (g_{\varkappa\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu})_{,\nu} +$$

$$+ \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} g_{\varkappa\sigma,\nu} + g_{\varkappa\sigma}(\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}).$$

Edasi arvestame valemit (II 6.8)

$$g_{\nu\mu,\rho} = \Gamma_{\nu\rho.\mu} + \Gamma_{\rho\mu.\nu} \, ,$$

samuti seoseid (II 6.5-6). Arvutuste tulemuseks on

$$\underline{R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(g_{\varkappa\nu,\lambda,\mu} + g_{\lambda\mu,\varkappa,\nu} - g_{\lambda\nu,\varkappa,\mu} - g_{\varkappa\mu,\lambda,\nu}) +}$$

$$\underline{+ g^{\sigma\tau}(\Gamma_{\lambda\mu.\tau}\Gamma_{\varkappa\nu.\sigma} - \Gamma_{\lambda\nu.\tau}\Gamma_{\varkappa\mu.\sigma})} \qquad \text{(II 7.7)}$$

e) Arvestades seoseid (II 6.9), selgub valemist (II 7.7) Riemanni-Christoffeli tensori d i f e r e n t s i a a l n e   s t r u k t u u r . Näeme, et selle tensori komponendid kujutavad endast teatavat kombinatsiooni meetrilise tensori komponentidest, samuti viimaste esimestest ja teistest tuletistest. Seejuures paneme tähele, et meetrilise tensori komponentide teised tuletised esinevad lineaarses kombinatsioonis, teised tuletised aga ruudulises. Rõhutagem, et see on väga oluline Riemanni-Cristoffeli tensori matemaatiline omadus.

Valemist (II 7.7) saavad selgeks ka Riemanni-Christoffeli tensori s ü m m e e t r i a o m a d u s e d , s.t. selguvad olulised algebralised omadused. Näeme, et

$$R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = -R_{\varkappa\lambda\nu\mu} \, , \qquad \text{(II 7.8)}$$

$$R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\varkappa\lambda} \tag{II 7.9}$$

ning nende järeldusena

$$R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\varkappa\mu\nu} . \tag{II 7.10}$$

Kehtib ka seos

$$R_{\varkappa\lambda\mu\nu} + R_{\varkappa\nu\lambda\mu} + R_{\varkappa\mu\nu\lambda} = 0 . \tag{II 7.11}$$

f) Tensori algebralisest struktuurist järeldub tema s õ l t u m a t u t e k o m p o n e n t i d e a r v . Küsigem seepärast siingi: kui palju on Riemanni-Christoffeli tensoril sõltumatuid, nullist erinevaid komponente?

n-mõõtmelise ruumi s-ndat järku tensori komponentide üldarv on teatavasti n^s . Seega 4. järku tensoril on üldse 2-mõõtmelisel juhul $2^4 = 16$, 3-mõõtmelisel juhul $3^4 = 81$ ning 4-mõõtmelisel juhul $4^4 = 256$ komponenti. Sümmeetriaomaduste tõttu on aga sõltumatute ja nullist erinevate komponentide arv palju väiksem.

Riemanni-Christoffeli tensori puhul paneme kõigepealt tähele, et valemite (II 7.8) ja (II 7.10) järeldusena on nullid kõik need komponendid, mille puhul kaks esimest või kaks viimast indeksit on omavahel võrdsed. Sümmeetriaomaduste tõttu pole ka kõik nullist erinevad komponendid üksteisest sõltumatud.

Kui n = 2, siis indeksid $\varkappa$, λ , μ , ν võivad omandada ainult väärtusi 1 ja 2. Näeme, et ainus sõltumatu ja nulliga mitte võrduv komponent saab sel juhul olla üksnes R_{1212} . Niisiis on 2 - r u u m i s Riemanni-Christoffeli tensoril ü k s a i n u s sõltumatu komponent.

Kui n = 3, siis võivad tensori indeksid omandada väärtusi 1, 2 ja 3. Vaadelgem esialgu komponente, milles on üksnes kaks erinevat indeksit. Kahe fikseeritud indeksi puhul saab seda tüüpi sõltumatuid komponente olla vaid üks. Kolmest indeksi väärtusest võib kahte fikseerida kolmel viisil. Seega on $R_{\varkappa\lambda\varkappa\lambda}$ tüüpi (3-ruumi tähistuste kokkuleppele vastavalt - $R_{\kappa\ell\kappa\ell}$ tüüpi) sõltumatuid komponente kokku kolm. $R_{\varkappa\lambda\varkappa\mu}$ tüüpi ($R_{\kappa\ell\kappa m}$ tüüpi) sõltumatuid komponente saab ka olla kolm - see on määratud $\varkappa$ võimalike väärtuste arvuga. Niisiis on 3 - r u u m i s Riemanni-Christoffeli tensoril kokku k u u s sõltumatut komponenti.

Kuni n = 4, siis $\varkappa$, λ , μ , ν võivad omandada igaüks neli väärtust. $R_{\varkappa\lambda\varkappa\lambda}$ tüüpi komponentide puhul võime indekseid $\varkappa$ ja λ fikseerida $C_4^2 = 6$ viisil. $R_{\varkappa\lambda\varkappa\mu}$ tüüpi komponentide puhul võib indekseid $\varkappa$, λ , μ fikseerida $C_4^3 = 4$ viisil ja seejuures iga viisi puhul võib $\varkappa$ omandada kolm erinevat väärtust. Seega on seda tüüpi komponente kokku 12. Komponentidest $R_{\varkappa\lambda\mu\nu}$, mille puhul kõik neli indeksit on erinevad, tulevad sõltumatutena kõne alla vaid R_{1234} , R_{1423} , ja R_{1342} ning needki on omavahel seotud seosega (II 7.11). Seega on seda tüüpi sõltumatuid komponente üksnes 2. Niisiis on 4 - r u u m i s Riemanni-Christoffeli tensoril kokku 20 s õ l t u m a t u t k o m p o n e n t i (256-st).

Ülesandeid

1. Teha läbi detailselt arvutused valemi (II 7.7) tuletamisel.

2. Põhjendada valemeid (II 7.8), (II 7.9) ja (II 7.10).

3. Tuletada seos (II 7.11).

8. Ricci tensor. Bianchi identsused. Einsteini tensor

a) Riemanni-Christoffeli tensorist kui 4. järku tensorist saab moodustada koondamise teel ühe 2. järku tensori. Seda tensorit nimetatakse R i c c i t e n s o r i k s ning vastavalt definitsioonile avalduvad komponendid järgmiselt:

$$R_{\lambda\mu} = R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\sigma} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma,\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu,\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} . \qquad \text{(II 8.1)}$$

Et valemi (II 6.16) põhjal kehtib seos $\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma,\mu} = (\ln\sqrt{|g|})_{,\lambda,\mu}$, millest teist järku osatuletiste omaduste tõttu järeldub sümmeetrilisus indeksites λ ja μ ning et vahetult on näha teistegi valemi (II 8.1) parema poole liikmete sümmeetrilisus samades indeksites, siis järeldub siit omakorda Ricci tensori sümmeetrilisus:

$$R_{\mu\lambda} = R_{\lambda\mu} . \qquad \text{(II 8.2)}$$

Võime arvutada ka Ricci tensori segakomponendid

$$R^{\nu}_{\mu} = g^{\nu\lambda} R_{\lambda\mu} . \qquad \text{(II 8.3)}$$

Siit saame koondamise teel veel ühe uue suuruse, seekord skalaarse, mida nimetagem R i c c i s k a a l a r i k s

$$R = R^{\nu}_{\nu} = g^{\nu\lambda} R_{\lambda\nu} . \qquad \text{(II 8.4)}$$

b) Järgnevalt moodustame Riemanni-Christoffeli tensori abil ühe 5. järku tensori

$$S^{\sigma}_{\lambda\mu\nu\rho} \equiv R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu;\rho} + R^{\sigma}_{\lambda\rho\mu;\nu} + R^{\sigma}_{\lambda\nu\rho;\mu} \qquad \text{(II 8.5)}$$

ja tõestame, et see tensor on identselt null.

Tõestuseks kasutame koordinaadistikku, milles etteantud punkti jaoks on Christoffeli koefitsiendid $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ nullid. Märkigem seejuures, et samaaegselt võib antud punktis olla $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\varkappa} \neq 0$. Arvutades Riemanni-Christoffeli tensori kovariantse tuletise $R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu;\rho}$, paneme tähele, et kõikides liikmetes peale kahe sisaldub tegur $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Järelikult kehtib kasutatavas koordinaatsüsteemis seos

$$R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu;\rho} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu,\mu,\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu,\nu,\rho} .$$

Analoogiliselt saame

$$R^{\sigma}_{\lambda\rho\mu;\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu,\rho,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho,\mu,\nu} ,$$

$$R^{\sigma}_{\lambda\nu\rho;\mu} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\rho,\nu,\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu,\rho,\mu} .$$

Liites nüüd võrduste vasemad ja paremad pooled, saamegi

$$\underline{S^{\sigma}_{\lambda\mu\nu\rho} \equiv R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu;\rho} + R^{\sigma}_{\lambda\rho\mu;\nu} + R^{\sigma}_{\lambda\nu\rho;\mu} = 0.} \qquad \text{(II 8.6)}$$

Et tegemist on tensoriga, siis kehtib see valem mistahes koordinaadistikus.

Valemiga (II 8.6) antud seoseid nimetatakse B i a n c h i i d e n t s u s t e k s .

c) Bianchi identsuste koondamise teel jõuame veel ühe tähtsa tensori määratlemiseni.

Tõstnud valemis (II 8.6) veel ka indeksi λ, koondame saadud seost kaks korda (seejuures võttes $\nu = \sigma$ ja $\mu = \lambda$):

$$R^{\sigma\mu}{}_{\mu\sigma;\rho} + R^{\sigma\mu}{}_{\rho\mu;\sigma} + R^{\sigma\mu}{}_{\sigma\rho;\mu} = 0.$$

Riemanni-Christoffeli tensori sümmeetriaomaduste, samuti valemite (II 8.1-4) arvestamisel järeldub siit

$$R_{;\rho} - R^{\sigma}_{\rho;\sigma} - R^{\mu}_{\rho;\mu} = 0.$$

Pärast summeerimisindeksi ümbertähistamist viimases liikmes ($\mu \to \sigma$) võime saadud seose esitada kujul

$$\left(R^{\sigma}_{\rho} - \tfrac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\rho} R\right)_{;\sigma} = 0. \qquad \text{(II 8.7)}$$

Tensoralgebra laused tagavad sulgudes seisva avaldise tensoriseloomu. Tähistame uute suurustena (võttes enne $\rho \to \lambda$)

$$\underline{G^{\sigma}_{\lambda} = R^{\sigma}_{\lambda} - \tfrac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\lambda} R.} \qquad \text{(II 8.8)}$$

Need on E i n s t e i n i t e n s o r i ehk k o n s e r v a t i i v s e t e n s o r i segakomponendid. Muidugi võime kirja panna ka selle 2. järku tensori kovariantsed komponendid

$$G_{\lambda\mu} = g_{\mu\sigma} G^{\sigma}_{\lambda} = R_{\lambda\mu} - \tfrac{1}{2} g_{\lambda\mu} R, \qquad \text{(II 8.9)}$$

samuti kontravariantsed komponendid. Valemist (II 8.9) on näha, et Einsteini tensoril on samasugused sümmeetriaomadused kui Ricci tensoril. Tema diferentsiaalne struktuur on aga samasugune kui Riemanni-Christoffeli tensoril, sest sellest ta meetrilise tensoriga kombineerides ja algebraliste tehete abil ju tuletatud ongi.

Valem (II 8.7) omandab nüüd kuju

$$G^{\sigma}_{\mu;\sigma} = 0. \qquad \text{(II 8.10)}$$

Näeme, et Einsteini tensori kovariantne divergents on identselt null (siit ka nimetus konservatiivne, s. t. jääv, säiliv). See on Einsteini tensori üks tähelepanuväärseid omadusi, millel, nagu hiljem näeme, on oluline tähtsus ÜRT väljavõrrandite kirjapanemisel. Võib tõestada, et triviaalse liidaliikme täpsusega on Einsteini tensor ainus selline 2. järku tensor, mis samaaegselt 1) koosneb meetrilise tensori komponentidest ja nende tuletistest kuni 2. järguni, kusjuures teised tuletised sisalduvad lineaarselt, ning 2) rahuldab identselt divergentsseost (II 8.10).

Ülesandeid

1. Teha kindlaks Ricci tensori, samuti Einsteini tensori sõltumatute komponentide arv 4-, 3- ja 2-ruumis. Võrrelda tulemusi Riemanni-Christoffeli tensori sõltumatute komponentide arvuga.

2. Tõestada, et 4-ruumi korral kehtib seos

$$R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G, \qquad \text{(II 8.11)}$$

kus G on Einsteini tensorist koondamise teel saadud skaalar.

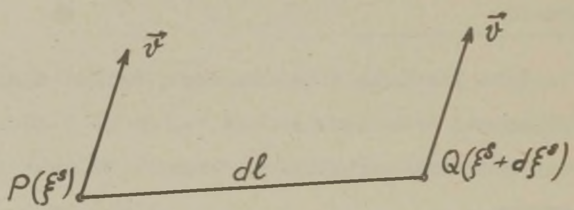
3. Põhjendada, et kovariantne divergents on null ka tensoril

$$M_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \qquad \text{(II 8.12)}$$

kus Λ on konstant.

9. Vektori paralleelnihe. Ruumi tasasuse ja kõveruse invariantne tunnus. Geodeetilised jooned

a) Eukleidilises 3-ruumis võib vektori infinitesimaalset paralleelnihet määratleda kui vektori sellist ülekandmist ühest punktist teise, mille puhul vektor jääb iseendaga võrdseks, s. t. $d\vec{v} = 0$ (joonis 23). Pangem tähele, et seejuures ei muutu ka selle vektori komponendid Cartesiuse ristkoordinaatides, s. t. on samaväärsed tingimused $d\vec{v} = 0$ ja $dv^s = 0$.



Joonis 23.

Kuna ÜRT-s vaadeldavatele kõveratele ruumidele on eukleidiline ruum lokaalselt alati puuteruumiks (vt. II, 1, d), siis sellistes kõverates ruumides peab samuti olema võimalik analoogiliselt defineerida vektori infinitesimaalset paralleelnihet. Niisiis nimetagem üldjuhulgi vektori infinitesimaalseks paralleelnihkeks sellist vektori lõpmata väikest nihet, mille puhul vektor jääb iseendaga võrdseks, s. t.

$$dV = 0. \qquad \text{(II 9.1)}$$

Siit edasi tuleneb arvutustest (vt. 5. punkt), et

$$dV = d(v^\sigma e_\sigma) = (dv^\sigma) e_\sigma + v^\sigma de_\sigma = (dv^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} v^\mu dx^\nu) e_\sigma .$$

Seega kehtib i n f i n i t e s i m a a l s e l p a r a l l e e l n i h k e l vektori komponentide jaoks tingimus

$$dv^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} v^\mu dx^\nu = 0. \qquad \text{(II 9.2)}$$

Näeme, et üldjuhul ei tähenda tingimus $dV = 0$ veel samaaegselt tingimust $dv^\sigma = 0$.

Seosest (II 9.2) avaneb Christoffeli koefitsientide $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ geomeetriline mõte. Näeme, et need suurused määravad vektori paralleelsuse lõpmata väikese nihke puhul. Seetõttu nimetatakse suurusi $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ ka ruumi a f i i n s e s e o s t u s e k o e f i t s i e n t i d e k s.

b) Püstitagem nüüd küsimus, kuidas on üldjuhul vektorite paralleelsus määratud l õ p l i k u n i h k e puhul.

Vektori igasugune lõplik nihe saadakse infinitesimaalsete nihete integreerimisest. Nihutades järjestikuste infinitesimaalsete paralleelnihetega vektori ühest teatavast ruumi punktist mingisse lõplikul kaugusel asuvasse teise punkti e r i n e v a i d t e i d mööda, pole aga üldjuhul selge, kas tulemuseks on ühtelangevad vektorid.

Matemaatiliselt tähendab vektorite järjestikuste infinitesimaalsete paralleelnihete teostamine võrrandite (II 9.2) integreerimist. Niisiis võime üheselt määratud paralleelsusest kauge maa taha rääkida üksnes juhul, kui võrrandite (II 9.2) integreerimine ei sõltu teest. Selleks teatavasti peavad aga suurused dv^σ kujutama endast täisdiferentsiaale.

Võrrandite (II 9.2) struktuur on täpselt samasugune kui baasvektorite diferentsiaalide valemi (II 5.2) struktuur. Nõnda on (II, 7, c) põhjal ka võrrandite (II 9.2) täieliku integreeruvuse tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks

$$R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = 0. \tag{II 9.3}$$

Nagu märgitud, on tingimus (II 9.3) ruumide invariantne omadus. Järelikult jaotuvad kõikvõimalikud, üldjuhuliselt kõverad ruumid kahte suurde klassi, kusjuures selline jaotamine on invariantne: 1) ruumid, mille puhul tingimus (II 9.3) on täidetud, ja 2) ruumid, mille puhul see tingimus täidetud pole.

Nn. t a s a s e s r u u m i s, s. t. ruumis, kus kehtib eukleidiline geomeetria (vt. I, 9, a), on teatavasti alati sisseviidavad ka lõplikus ulatuses Cartesiuse ristkoordinaadid. Nagu triviaalselt järeldub valemitest (II 1.27), (II 6.11-12) ja (II 7.3), on sellises koordinaadistikus tingimus (II 9.3) alati täidetud. Niisiis on nimetatud tingimus ruumi tasasuse täpseks kvantitatiivseks ning seejuures invariantseks tunnuseks. Juhime tähelepanu asjaolule, et kõverjooneliste koordinaatide kasutamisel pole ka tasases ruumis meetrilise tensori komponendid $g_{\mu\nu}$ konstandid, samuti pole nullid Christoffeli koefitsiendid. Tingimus (II 9.3) peab aga alati täidetud olema.

Kui tingimus (II 9.3) pole rahuldatud, siis, nagu nägime, pole paralleelsus üheselt kauge maa taha määratud. See aga tähendab, et ei kehti Eukleidese V postulaat. Järelikult on sel juhul tingimata tegemist mitteeukleidilise geomeetriaga. Ruume, kus geomeetria on mitteeukleidiline, oleme teatavasti hakanud nimetama k õ v e r a t e k s r u u m i d e k s (vt. jälle I, 9, a). Niisiis juhul, kui tingimus (II 9.3) pole täidetud, on meil alati tegemist kõverate ruumidega. Selliselt oleme jõudnud ka ruumi kõveruse täpse kvantitatiivse ja seejuures invariantse tunnuse formuleerimiseni.

Et Riemanni-Christoffeli tensori abil võib eksaktselt ja invariantselt iseloomustada ruumide tasasust või kõverust, siis nimetatakse seda tensorit ka k õ v e r u s e t e n s o r i k s . Ricci skaalarit nimetatakse aga tavaliselt s k a l a a r s e k s k õ v e r u s e k s .

c) Eukleidilises, s. t. t a s a s e s 3 - r u u m i s võib s i r g e t defineerida kui joont, mille puutujavektor jääb infinitesimaalsel nihkel alati iseendaga paralleelseks.

Üldjuhuliselt k õ v e r a r u u m i juhul defineerime g e o d e e t i l i s e j o o n e mõiste kui sirge üldistuse:

<u>Joon on siis geodeetiline, kui tema puutujavektor jääb lõpmata väikesel nihkel alati iseendaga paralleelseks</u>.

Olgu joon antud oma parameetriliste võrranditega

$$x^{\sigma} = x^{\sigma}(s) . \qquad \text{(II 9.4)}$$

Selle joone puutujavektori komponendid avalduvad valemina

$$n^{\sigma} = \frac{dx^{\sigma}}{ds} . \qquad \text{(II 9.5)}$$

Mitteisotroopse puutujavektori puhul võib valida parameetriks suuruse s, mis mõõdab intervalli joone punktide vahel. Näeme, et sellel juhul valemiga (II 9.5) defineeritud vektori norm $n_\sigma n^\sigma = 1$, s. t. sellel juhul on n^σ ühikvektori komponendid. Isotroopse puutujavektori puhul tuleb parameetrile omistada teistsugune tähendus.

Et joone puutujavektor jääks lõpmata väikesel nihkel alati iseendaga paralleelseks, selleks peavad tema komponendid n^σ mõistagi rahuldama seoseid (II 9.2). Asendades vektori komponentide avaldised (II 9.5) nendesse seostesse, saame

$$d\left(\frac{dx^\sigma}{ds}\right) + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}dx^\nu = 0$$

Pärast suurusega ds läbijagamist olemegi jõudnud üldjuhuliselt kõvera ruumi g e o d e e t i l i s t e j o o n t e v õ r r a n d i t e n i :

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \qquad \text{(II 9.6)}$$

Olgu märgitud, et saadud võrrandid on ka sirge võrranditeks eukleidilises 3-ruumis. Neid on otstarbekas rakendada siis, kui kasutusel on kõverjoonelised koordinaadid.

d) Teatavasti on eukleidilises 3-ruumis sirge määratletud ka kui lühim tee kahe punkti vahel. Võib näidata,[x] et geodeetiliste joonte üldised võrrandid on samuti tuletatavad miinimumülesandest

$$\delta\int_{(1)}^{(2)} ds = 0. \qquad \text{(II 9.7)}$$

[x] Vt. LL, lk. 316.

Seega on üldjuhuliselt kõveras ruumiski geodeetilised jooned l ü h i m a k s t e e k s kahe punkti vahel.

Ülesandeid

1. Tõestada, et valemiga (II 9.5) määratletud vektor on ühikvektor.

2. Tuletada geodeetiliste joonte võrrandid miinimumülesandest (II 9.7).

10. Kerapind kui kõver 2-ruum

a) Eelmise punktiga lõpetasime ÜRT matemaatilise aparatuuriga tutvumise sellises mahus, mis on hädavajalik selle teooria tuuma tundmaõppimiseks.

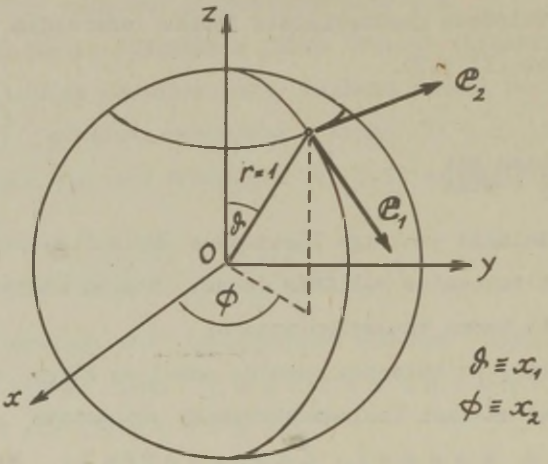
Nägime, et kõverate ruumide puhul on kõige olulisemateks ruumi omadusi iseloomustavateks suurusteks m e e t r i l i n e t e n s o r, C h r i s t o f f e l i k o e f i t s i e n d i d ja R i e m a n n i - C h r i s t o f f e l i ehk k õ v e r u s e t e n s o r. Hiljem näeme, et just need suurused saavad kesksateks ka ÜRT nn. meetrilises formalismis.

Et tuua puhtmatemaatiliste küsimuste lõpetuseks lihtsat ja konkreetset näidet eespool nimetatud suuruste kompleksse kasutamise kohta kõverate ruumide puhul, vaadelgem käesolevas punktis veel kerapinda kui kõverat 2-ruumi.

b) Olgu meil kujundatud eukleidilises 3-ruumis mingi punkti O kui tsentri ümber kerapind ühikulise raadiusega.

Kera keskpunkt olgu samaaegselt sfääriliste koordinaatide algpunkt (joonis 24). Seega on neis koordinaatides ülalmainitud kerapind selliste ruumi punktide geomeetriliseks kohaks, mille puhul

$$r = 1. \qquad \text{(II 10.1)}$$



Joonis 24.

Sfäärilistes koordinaatides on eukleididilise 3-ruumi meetriline vorm teatavasti järgmine (vt. 3. punkti 4. ülesanne):

$$(dl)^2 = (dr)^2 + (r d\vartheta)^2 + (r \sin\vartheta \, d\phi)^2. \qquad \text{(II 10.2)}$$

Arvestades tingimust (II 10.1) omandab ülaltoodud meetriline vorm kuju[x]

[x] Otstarbekuse kaalutlustel kirjutame siin ja edaspidi koordinaatide indeksid alla (vrdl. II, 3, f).

$$(dl)^2=(d\vartheta)^2+(\sin\vartheta\, d\phi)^2 \equiv dx_1^2+\sin^2 x_1\, dx_2^2 . \quad \text{(II 10.3)}$$

See on nüüd **k e r a p i n n a k u i 2 - r u u m i m e e t r i l i n e v o r m .** Pangem ühtlasi tähele, et meie poolt kerapinnal kasutatav koordinaadistik ühtib põhimõtteliselt geograafilise koordinaadistikuga: x_1-koordinaatjooned kujutavad endast meridiaane ja x_2-koordinaatjooned – paralleele. Erinevus seisneb üksnes selles, et meie koordinaadistiku puhul muutub koordinaat x_1 vahemikus $0 \leq x_1 \leq \pi$, geograafiliste koordinaatide puhul aga vahemikus $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}$ $(-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < 0$ – põhjalaiuskraadid, $x_1 = 0$ – ekvaator, $0 < x_1 \leq \frac{\pi}{2}$ – lõunalaiuskraadid).

Meetrilisele vormile (II 10.3) vastab järgmine meetrilise tensori maatriks[x]:

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 x_1 \end{pmatrix} . \quad \text{(II 10.4)}$$

Siit arvutame determinandi

$$g = \sin^2 x_1 \quad \text{(II 10.5)}$$

ning valemi (II 3.25) abil meetrilise tensori kontravariantsed komponendid

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^{-2} x_1 \end{pmatrix} . \quad \text{(II 10.6)}$$

Edasi arvutame valemite (II 6.9) põhjal suurused $\Gamma_{AB.C}$:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_{11.1} = \Gamma_{11.2} = \Gamma_{12.1} = \Gamma_{22.2} = 0 , \\ &\Gamma_{12.2} = \sin x_1 \cos x_1 , \\ &\Gamma_{22.1} = -\sin x_1 \cos x_1 . \end{aligned}\right\} \quad \text{(II 10.7)}$$

---

[x] 2-ruumi puhul võtkem indeksiteks suured ladina tähed.

Valemeid (II 6.11) ja (II 10.6) appi võttes saame kätte Christoffeli koefitsiendid:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = 0, \\ &\Gamma^2_{12} = \cot x_1, \\ &\Gamma^1_{22} = -\sin x_1 \cos x_1. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II 10.8)}$$

2-ruumi Riemanni-Christoffeli tensori ainsa sõltumatu komponendi R_{1212} leiame valemist (II 7.7)

$$R_{1212} = \sin^2 x_1 \neq 0. \qquad \text{(11 10.9)}$$

Niisiis näeme, et kerapind kuulub k õ v e r a t e ruumide klassi. Antud juhul ühtib meie intuitiivne ettekujutus kõverast ruumist kõveruse eksaktse matemaatilise määrateluga. Selline kokkulangemine on võimalik aga vaid 2-mõõtmeliste ruumide, s. t. pindade juhul, kus kõverus saab olla ka meeleliselt tajutav. 3- ja enamamõõtmeliste ruumide puhul me enam ei saa kõverust meeleliselt tajuda ning et üldistada pinna kõveruse mõistet, jääb üksnes üle matemaatika appi võtta. Tegemist on siin suurepärase näitega, kuidas matemaatika aitab meie piltliku ettekujutamisvõime piiratust ületada.

c) Nagu öeldud, vaatleme käesolevas ÜRT aluste kursuses selle teooria "klassikalist" tuuma, seega ka tema "klassikalist" esitust nn. m e e t r i l i s e s f o r m a l i s m i s . On aga vaja rõhutada, et seda klassikalist formalismi täiustades on tänapäevaks välja arendatud ÜRT matemaatiliste aluste teistsugused, üldiselt komplitseeritumad käsitused, mis lähtuvad üldisematest matemaatilistest kontseptsioonidest ja mõistetest. Sel puhul alustatakse tavaliselt aegruumi kui diferentseeruva muutkonna lokaalsete pseudoeukleidiliste puuteruumide, nendest moodustatud puutujavektorkonna, puuteruumis Lorentzi rühma taandumatute esitustega defineeritavate matemaatiliste suuruste (spiinorite, tensorite) vaatlemisest, seejärel tõmmatakse kaasa kogu tänapäevane diferentsiaalgeomeetria, hõlmatakse topoloogilised meetodid, mitmed eripärased ja efektiivsed arvutusmeetodid (näiteks Cartani välisdiferentsiaalvormide arvutus) ning rakendatakse see kõik aegruumi kui kõvera Riemanni ruumi omaduste detailse uurimise teenistusse. Näidatakse, et tensorformalismist fundamentaalsemana on käsiteldav nn. s p i i n o r f o r m a l i s m, mis lubab formuleerida ÜRT-d spiinorite keeles. Spiinorformalismilt saab üle minna t e n s o r f o r m a l i s m i l e , mida võib arendada kasutades kas globaalseid koordinaate (see annabki meetrilise formalismi) või lokaalseid reepereid iseloomustavaid suurusi. Viimane formuleerimisviis on üldisem ning kujutab endast ÜRT esitust r e e p e r- ehk t e t r a a d f o r m a l i s m i s . Meetriline formalism on tegelikult reeperformalismi erijuht nn. holonoomse reeperi ehk koordinaatreeperi (meil baasvektorite e_μ ja e^ν) kasutamise korral. Vaatamata üldisemate käsitlusviiside eelistatusele suurema matemaatilise üldisusastme, efektiivsuse ja elegantsi poolest, piirdume käesolevas kursuses metoodilistel kaalutlustel siiski üksnes meetrilise formalismiga.

Ülesandeid

1. Veenduda valemite (II 5.2) ja (II 10.8) abil, et kerapinna kui 2-ruumi puhul baasvektorite $\mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{e}_2$ (vt. joonis 24) diferentsiaalid pole tõepoolest integreeruvad, s. t. et nad pole täisdiferentsiaalid.

2. Panna kirja kerapinna geodeetiliste joonte diferentsiaalvõrrandid ning tõestada nende põhjal, et meridiaanid kui kera suurringid on geodeetilised jooned, kuid paralleelidest on üksnes ekvaator geodeetiliseks jooneks.

3. Uurida silinderpinda kui 2-ruumi. Tõestada, et see ruum pole kõver. (Näpunäide: lähtuda meetrilise tensori maatriksist (II 3.31), tuletada sellest silinderpinna meetriline vorm $(dl)^2 = dx_1^2 + x_1^2 dx_2^2$ ning ka edasi teha läbi analoogilised arvutused nagu kerapinna puhulgi.)

III. FÜÜSIKANÄHTUSTE KIRJELDAMISEST ÜLDRELATIIVSUSTEOORIAS

1. Taustsüsteemi mõiste ÜRT-s

a) Nagu märgitud (vt. II, 1, c), pole üldjuhuliselt kõveras aegruumis koordinaatidel enam vahetut meetrilist mõtet. Punkthetkedele võib arvude hulkasid seada vastavusse põhimõtteliselt lõpmata mitmeti ning üldjuhul on siin tegemist üksnes teatava punkthetkede nummerdamise moodusega. ÜRT-s nimetame k o o r d i n a a t s ü s t e e m i k s ehk k o o r d i n a a d i s t i k u k s igat üksühest vastavust aegruumi punkthetkede (sündmuste) ja teatavate arvusüsteemide $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ vahel (vt. ka II, 2, a). Seejuures peavad alati olema antavad ka koordinaatide teisenemise valemid üleminekuks ühest koordinaatsüsteemist teise (II 2.1-2).

b) Aegruumi meetrilisi omadusi kirjeldab ÜRT-s meetriline tensor $g_{\mu\nu}$, mis fikseerib aegruumis nn. hüperboolset tüüpi Riemanni geomeetria ja mis kasutatava koordinaatsüsteemi puhul on koordinaatide $\{x^\sigma\}$ funktsioon. Väide hüperboolset tüüpi Riemanni geomeetria olemasolu kohta tähendab seda ekvivalentsusprintsiibist järelduvat tõika, et iga punkthetke infinitesimaalses naabruses peab kõvera aegruumi meetriline vorm olema lokaalselt teisendatav galileilise ehk tasase aegruumi meetriliseks vormiks (II 1.13):

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2 \qquad \text{(III 1.1)}$$

(vt. ka II, 1, d). Et meetrilise vormi (III 1.1) puhul determinant g (II 3.26) on negatiivne, siis ruutvormide algebralise teooria põhjal peab see tulemus kehtima alati hüperboolset tüüpi meetrika puhul. Niisiis peab kõvera aegruumi jaoks kehtima tingimus

$$g < 0. \qquad \text{(III 1.2)}$$

Nagu märgitud (vt. II, 1, b), iseloomustab meetriline tensor ühelt poolt kõvera ruumi omadusi, teiselt poolt peegeldub temas aga lihtsalt koordinaatsüsteemi valik. Mõistagi võib koordinaatsüsteemi valik olla üldjuhul üsnagi formaalne ning seetõttu ei tohi ÜRT-s mingil juhul koordinaatsüsteemi mõistet samastada taustsüsteemi mõistega. Koordinaatsüsteemi mõiste on kasulik abstraktsioon kõvera aegruumi matemaatilisel uurimisel, kuid koordinaatidele füüsikalise mõtte omistamisel on alati tarvis olla ülimalt ettevaatlik.

c) Ka ÜRT-s tuleb nii taustkeha kui ka taustsüsteemi mõisted siduda reaalsete objektidega. Kõvera aegruumi objektiivsete omaduste, eelkõige muidugi aegruumi kõveruse määra enda väljaselgitamiseks tuleb uurida konkreetseid looduse objekte ja nähtusi. Nagu märgitud, on seejuures otstarbekas alustada uurimist selliste lihtsate mõistete abil, nagu on partikkel ja valguskiir (vt. I, 2, a, b).

T a u s t k e h a k s tuleks pidada kõvera 3-ruumi puhul kogu vaadeldavat ruumiosa täitvat partiklite ning neid ühendavate valguskiirte konfiguratsiooni. Seejuures pole enam õigustatud eeldus taustkeha jäikusest mitterelativistlikus ja eukleidilises mõttes. Tegemist on üldjuhul n.-ö. molluskitaolise taustkehaga, "taustkeskkonnaga".

T a u s t s ü s t e e m i k s (vrdl. I, 3, c) on kõvera aegruumi puhul selline taustkeha, mille koosseisus on iga partikkel varustatud oma lokaalse pikkuste ja ajavahemike mõõtmise seadeldisega (nende lokaalsete seadeldiste matemaatiliseks abstraktsiooniks ongi lokaalsed reeperid). Ka taustsüsteem on seega üldiselt "molluskitaoline", kuid oluline on seejuures ikkagi asjaolu, et taustsüsteemi iga ruumipunkt ja ajahetk peab alati olema fikseeritav millegi materiaalse abil.

Taustsüsteemi mõiste edasise täpsustamise probleem on ÜRT-s küllaltki ulatuslik ja keerukas. Siin kerkib palju küsimusi, nagu näiteks: Missugused koordinaatteisendused on võimalikud taustsüsteemi enda sees ning millised koordinaatteisendused tähendavad juba taustsüsteemi teisendamist? Missuguste füüsikaliste objektide ja nähtuste abil saab esile tõsta mingis konkreetses mõttes eelistatud taustsüsteeme? Kuidas määrata kõveras aegruumis pikkusi ja ajavahemikke? Jne.[x]

d) Et gravitatsiooniväli kui realiteet avaldub kõvera

---

[x] Selliste probleemide lähem analüüs ei mahu käesoleva kursuse raamidesse. Pikkuste ja ajavahemike määramise kohta vt. näiteks LL, lk. 298 jj.

aegruumi objektiivsetes omadustes (vt. I, 9), siis on meetriline tensor muidugi ka gravitatsioonivälja oluliselt iseloomustavaks suuruseks. Nagu hiljem täpsemalt põhjendame, on füüsika seisukohalt õigustatud meetrilise tensori komponentide nimetamine g r a v i t a t s i o o n i v ä l j a p o t e n t s i a a l i d e k s . Nii on ÜRT-s taustsüsteemi valiku probleem lahutamatult seotud gravitatsioonivälja kirjeldamise probleemiga.

Ekvivalentsusprintsiibi tõttu pole aga gravitatsiooniefektid teatavasti täielikult eristatavad inertsiefektidest. Seetõttu pole ka otseselt selge, mis peegeldab meetrilise tensori kujus üksnes taustsüsteemi valikut ja mis kajastab konkreetsete materiaalsete objektide gravitatiivset vastasmõju. Needki küsimused vajavad sügavamat ja üksikasjalikumat uurimist.

e) Lahtised on veel kaks järgmist printsipiaalset probleemi: 1) kuidas määrab mateeria paiknemine ja liikumine gravitatsioonivälja struktuuri, s. t. meetrilise tensori komponentide ehk gravitatsioonivälja potentsiaalide $g_{\mu\nu}$ konkreetse kuju ja 2) kuidas seostub gravitatsiooniilmingute kirjeldus muude füüsikanähtuste kirjeldamisega.

Esimesele neist küsimustest annab põhimõttelise vastuse väljavõrrandite kuju kindlaksmääramine. Gravitatsioonivälja võrrandite formuleerimise ja nende uurimise probleemi hakkame vaatlema käesoleva kursuse IV peatükis.

Teise ülalnimetatud printsipiaalse küsimuse juurde asume aga kohe.

2. Füüsika võrrandite üldkovariantse kuju füüsikaline mõte

a) Teatavasti võib nii relativistlikus kui mitterelativistlikus füüsikas kirjeldada väga paljusid füüsika suurusi tensorite abil. Sel juhul saab füüsika mistahes võrrandi kirja panna matemaatilise faktina, et teatava tensori kõik komponendid on nullid. Lähtudes näiteks klassikalise mehaanika põhiseaduse kujust 3-ruumi Cartesiuse ristkoordinaatides ja defineerides uued suurused $A_i \equiv a_i - \frac{F_i}{m}$ kui 3-mõõtmelise vektori komponendid, võime Newtoni II seaduse avaldada lihtsal kujul $A_i = 0$ ehk $\vec{A} = 0$. Tensoralgebra 5° lause (vt. II, 4, a) aga garanteerib seda tüüpi seoste kehtivuse mistahes võimalike koordinaatsüsteemide puhul.

Niisiis on avaldis

$$A^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots} = 0 \qquad \text{(III 2.1a)}$$

universaalne loomulik kuju paljudele füüsika võrranditele, mis tagab nende sisu üldkovariantse väljenduse, s. t. selle, et üleminekul ühest võimalikust koordinaatsüsteemist teise ei muutu võrrandite füüsikaline mõte. Arvestades valemit (II 3.5), on seosega (III 2.1a) ekvivalentne tema n.-ö. koordinaadivaba kuju:

$$\mathbb{A} = 0, \qquad \text{(III 2.1b)}$$

mis füüsikalise sisu sõltumatuse koordinaatsüsteemist veelgi paremini esile toob.

b) Nagu juba märgitud, v õ i b eespool nimetatud "koordinaadivaba" ehk üldkovariantset keelt kasutada nii relativistlike kui ka mitterelativistlike võrrandite puhul. Üldrelatiivsusprintsiibist aga järeldub, et ÜRT-s p e a b füüsika võrranditele andma relativistliku, 4-mõõtmelise üldkovariantse kuju (vt. I, 8, d). Seetõttu on nüüd füüsika võrrandite formuleerimiseks hädavajalik ka üldjuhuliselt kõvera 4-mõõtmelise ruumi tensorarvutus, mida vaatlesime käesoleva kursuse II peatükis.

c) Pannes füüsika diferentsiaalvõrrandid kirja üldistatud tensoranalüüsi, s. o. kovariantse iseloomuga diferentsiaaloperatsioonide abil (vt. valem (II 5.20)), tulevad sellega võrranditesse suurused $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, mis on teatavasti konstrueeritud suurustest $g_{\mu\nu}$. Nagu eelmises punktis rõhutasime, kirjeldab aga meetriline tensor gravitatsiooni- ja inertsiefekte. Seega tulevad füüsika võrranditesse tegelikult hoopis u u e d f ü ü s i k a l i s e d s u u r u s e d (üldjuhul 10 meetrilise tensori komponenti):

$$A^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots}\left[a^{\varkappa\lambda\ldots}{}_{\mu\nu\ldots},\, b^{\varkappa\lambda\ldots}{}_{\mu\nu\ldots},\, \ldots,\, g_{\mu\nu},\, g_{\mu\nu,\sigma}\ldots\right] = 0. \qquad \text{(III 2.2)}$$

Siin kirjeldavad koordinaatidest sõltuvad suurused $a^{\varkappa\lambda\ldots}{}_{\mu\nu\ldots}$, $b^{\varkappa\lambda\ldots}{}_{\mu\nu\ldots}$ mingeid muid füüsikalisi ilminguid, suurused $g_{\mu\nu}$ on gravitatsioonivälja potentsiaalid ning tensori komponendid $A^{\alpha\beta\ldots}{}_{\gamma\delta\ldots}$ fikseerivad seose kõigi nende suuruste vahel.

Niisiis näeme, et füüsika võrranditele üldkovariantse kuju andmisega muutuvad nad ÜRT põhiideede valguses tõepoolest füüsikaliselt sisukamateks ja rikkamateks, võimaldades vajaduse korral kirjeldada ka gravitatsiooni- või nendega ekvivalentseid inertsiefekte (vt. veelkord I, 8, d). Pärast füüsika võrranditele üldkovariantse kuju andmist tuleb neid ÜRT-s lisaks esialgsele mõttele käsitada ka kui seoseid gravitatsioonivälja potentsiaalide ja teiste füüsikaliste suuruste vahel. Ilmselt ei saa seda lugeda triviaalseks tulemuseks ning seetõttu pole ka üldrelatiivsusprintsiip füüsika aspektist sisutühi.

d) Pangem tähele järgmist asjaolu.

Kui me kirjutame üles füüsika võrrandid erinevate taustsüsteemide puhul, s. t. kasutame meetrilise tensori erinevaid konkreetseid kujusid, siis on need võrrandid mõistagi kujult erinevad. See asjaolu pole muidugi üldrelatiivsusprintsiibiga vastuolus, vaid - vastupidi - just kinnitab seda. Sellise konkretiseerimisega olemegi ju saanud arvesse võtta konkreetseid gravitatsiooni- või inertsiefekte, s. t. oleme juba lahkunud sellelt abstraktsioonitasemelt, millel võrrandid on kõikide taustsüsteemide jaoks ühesugused.

Ühesugused on oma kujult füüsika võrrandid kõikide taustsüsteemide jaoks üksnes siis, kui suuruste $g_{\mu\nu}$ kuju pole veel mingil määral konkretiseeritud.

e) Lõpuks tuleb veel küsida, kuidas teha kindlaks ühe või teise füüsikalise nähtuse relativistliku kirjeldamise üldkovariantset kuju.

Selle probleemi lahendamisel on meile toeks ERT. Gravitatsiooniefektide puudumisel peavad üldkovariantsed võrrandid olema ju rakendatavad ka inertsiaalsüsteemides kui erijuhulistes taustsüsteemides. Samuti peavad nad üle minema ERT võrranditeks mistahes punkthetke lokaalses ümbruses, s. t. lokaalses inertsiaalsüsteemis.

Järgnevalt toomegi mõned näited füüsika võrranditele relativistliku üldkovariantse kuju andmise kohta.

3. Vaba partikli liikumine

a) Partikli (ainepunkti, punktmassi) eksistentsi aegruumis kirjeldab teatavasti tema m a a i l m a j o o n[x], mille võime esitada parameetriliste võrranditega:

$$x^{\nu}=x^{\nu}(s). \qquad \text{(III 3.1)}$$

Sellise keha eksistentsi, mis on käsitatav partiklite süsteemina, kirjeldab teatav maailmajoonte kongruents.

ERT kohaselt liigub v a b a partikkel, s.t. punktmass, mida ei mõjusta teised füüsikalised objektid, inertsiaalsüsteemide suhtes ühtlaselt ja sirgjooneliselt. Seda tõika võib teisiti sõnastada nii: ERT mõttes vaba partikkel liigub inertsiaalsüsteemis nii, et tema maailmajoone puutuja jääb kogu aeg iseendaga paralleelseks. Siit järeldub, et samal moel peab vaba partikkel liikuma ka l o k a a l s e s i n e r t s i a a l s ü s t e e m i s .

b) Ekvivalentsusprintsiibi tõttu ei saa meie ÜRT-s enam eristada inertsiaalset liikumist liikumisest puhtgravita-

---

[x] Vt. ka K-I, lk. 141.

tiivse mõjustuse tõttu. Vaba inertsiaalset liikumist ja vaba gravitatiivset liikumist (näiteks vaba langemist) tuleb käsitada olemuselt samaväärsetena. Ainelise objekti vaba liikumise all tuleb meil mõista tema vaba eksistentsi üldjuhulises aegruumis, olgu see siis tasane või kõver.

Kõveras aegruumis võime käsitada vaba partikli eksistentsi kui järjestikuseid üleminekuid ühest lokaalsest inertsiaalsüsteemist teise. Nagu juba märgitud, jääb vabal liikumisel lokaalses inertsiaalsüsteemis maailmajoone puutuja iseendaga paralleelseks. Järelikult peab partikkel ka globaalses mõttes liikuma nii, et tema eksistentsi maailmajoone puutujavektor infinitesimaalses ulatuses kogu aeg iseendaga paralleelseks jääb. Siit aga järeldub omakorda (vt. II, 9, c), et ÜRT-s on v a b a p a r t i k l i l i i k u m i s v õ r r a n d i t e k s geodeetilise joone võrrandid (II 9.6):

$$\boxed{\frac{d^2x^\nu}{ds^2} + \Gamma^\nu_{\sigma\rho}\frac{dx^\sigma}{ds}\cdot\frac{dx^\rho}{ds} = 0} \qquad \text{(III 3.2)}$$

c) Võrrandid (III 3.2) kujutavad endast i n e r t s i s e a d u s e üldistatud ja üldkovariantset formulatsiooni. Need võrrandid kirjeldavad nii kuulikese liikumist mööda ideaalselt siledat horisontaalset pinda kui ka väikese keha vaba kukkumist õhuta ruumis ja väljalülitatud mootoritega kosmoselaeva liikumist (kui vaid võime viimasel juhul jätta arvestamata kosmoselaeva lõplikke mõõtmeid ja atmosfääri kõrgematest kihtidest tingitud keskkonnatakistust).

Kõik konkreetsed gravitatsioonivälja juhud on võrrandite (III 3.2) puhul fikseeritavad suuruste $\Gamma^\nu_{\sigma\rho}$ konkreetse kujuga, mis omakorda sõltub suuruste $g_{\mu\nu}$ konkreetsest kujust. On tõepoolest selge, et konkreetse meetrilise tensori puhul pole võrrandid (III 3.2) enam ühesugused kõikide taustsüsteemide jaoks. Sel juhul oleme juba võtnud arvesse konkreetseid gravitatsiooni- ja inertsiilminguid. Ent - pangem tähele - algkujul on kõnesolevad võrrandid tõesti täiesti universaalsed.

Erijuhul, kui suurused $g_{\mu\nu}$ kirjeldavad tasast aegruumi ning on esitatavad kujul (II 1.27), võtavad võrrandid (III 3.2) kuju

$$\frac{d^2x^\nu}{ds^2} = 0. \qquad \text{(III 3.3)}$$

Nende võrranditega on teatavasti kirjeldatud vaba partikli eksistents tasases aegruumis, s. t. partikli inertsiaalne liikumine (ühtlane sirgliikumine) eukleidilises 3-ruumis.

d) Kui süveneda sügavamalt ÜRT-sse, siis selgub, et gravitatsioonivälja võrrandid määravad nii selle, kuidas mateeria konkreetsed vormid tekitavad gravitatsioonivälja, kui ka selle, mil viisil see gravitatsiooniväli materiaalseid objekte liikuma paneb. Seega pole materiaalsete objektide liikumisvõrrandid (ning üldse mistahes füüsikalisi ilminguid kirjeldavad võrrandid) tegelikult gravitatsioonivälja võrranditest sõltumatud. Võib näidata, et liikumisvõrrandid (III 3.2) on õieti gravitatsioonivälja põhivõrrandite järeldus.

Rõhutagem veel ka järgmist asjaolu. Et vastavalt ÜRT põhipostulaadile gravitatsiooniväli avaldub aegruumi objektiivsetes omadustes ja et aegruumi struktuur määrab täielikult, nagu nägime, partiklite gravitatiivse liikumise, siis selles mõttes lülitub Ü R T k i n e m a a t i k a s s e tegelikult mõneti dünaamikagi. Puhtalt ruumilistes ja ajalistes suhetes, mis on just kinemaatika uurimisaineks, avaldub samuti mateeria gravitatsiooniline vastasmõju (vt. veelkord I, 3, e). Seega on ÜRT-s kinemaatika mõiste avaram kui ERT-s ja klassikalises mehaanikas.

4. Dünaamika põhivõrrandid. Kehade kaaluvus ja kaalutus

a) Nagu märgitud, kuulub ÜRT-s gravitatsioonilise vastasmõju kirjeldamine kinemaatikasse. Seega puudub ÜRT-s gravitatsioonijõu kui dünaamilise suuruse mõiste. Nii "inertsijõudusid" kui "gravitatsioonijõudusid" (klassikalise mehaanika mõttes) kirjeldavad võrrandites (III 3.2) kõverat aegruumi iseloomustavad suurused $\Gamma^{\nu}_{\delta\rho}$.

Ainelised objektid võivad aga alluda ka mittegravitatsioonilistele mõjustustele (näiteks võib tegemist olla elektromagnetilise vastasmõjuga n.-ö. puhtal kujul või selle vastasmõju eripäraste makroskoopiliste ilmingutega nagu elastsusjõuga, hõõrdejõuga vms.). Mittegravitatsiooniliste mõjustuste puhul ei ole geodeetilise joone võrrandid enam partikli liikumisvõrranditeks, sest tema vaba inertsiaalne ja gravitatsiooniline liikumine on nüüd takistatud. Liikumisvõrranditesse peavad lisanduma täiendavad, mittegravitatsioonilisi mõjustusi kirjeldavad liikmed.

b) Dünaamika põhivõrrandid 4-mõõtmelises kujus pannakse ERT-s kirja 4-mõõtmelise jõuvektori mõiste abil.[x] Invariantse ajana kasutatakse seejuures tavaliselt omaaega. Et ERT-s on omaaja vahemik võrdeline intervalliga (valemist (III 1.1) järeldub ju omaaja τ jaoks $(ds)^2 = -(c\,d\tau)^2$), siis võib dünaamika põhivõrrandites defineerida nii 4-kiiruse kui 4-kiirenduse tuletistena ka invariandi s järgi. Üleminekuks ÜRT-le on sellised definitsioonid sobivamad. Arvestades veel koordinaatide kontravariantset iseloomu, saame ERT dünaamika põhivõrrandid esitada seega kujul

$$-m_0 c^2 \frac{dV^\nu}{ds} = \mathcal{F}^\nu , \qquad \text{(III 4.1)}$$

kus m_0 on seisumass, $V^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}$ - partikli 4-kiirus ehk tema maailmajoone puutuja ühikvektor ning $\mathcal{F}^\nu$ - 4-jõud samas mõttes, nagu see on määratletud P. Kardi konspektis[xx].

Et saada võrrandit (III 4.1) üldkovariantsel kujul, tuleb valemite (II 5.14-15) kohaselt asendada vektori V^ν tavaline diferentsiaal dV^ν kovariantse diferentsiaaliga DV^ν. Pärast mõningate tegurite ja liikmete ümberkorraldamist ning V^ν tähenduse arvestamist on tulemuseks

$$\boxed{\frac{d^2x^\nu}{ds^2} + \Gamma^\nu_{\sigma\rho}\frac{dx^\sigma}{ds}\frac{dx^\rho}{ds} + \frac{\mathcal{F}^\nu}{m_0 c^2} = 0} \qquad \text{(III 4.2)}$$

Sellised on niisiis **partikli dünaamika põhivõrrandid** ÜRT-s ehk, teiste sõnadega, partikli liikumisvõrrandid mittegravitatsiooniliste mõjustuste

---

[x] Vt. K-II, lk. 68.

[xx] Vt. eelmine allmärkus. Kordaja c^2 ja miinusmärk tulevad valemisse ülemineku tõttu omaajalt τ intervallile s.

olemasolul, mida kirjeldab 4-jõud $\mathcal{F}^{\nu}$. Kui kasutada invariandi s asemel omaaega τ, siis on võrranditel (III 4.2) järgmine kuju:

$$\boxed{\frac{d^2x^{\nu}}{d\tau^2}+\Gamma^{\nu}_{\sigma\rho}\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}\cdot\frac{dx^{\rho}}{d\tau}-\frac{\mathcal{F}^{\nu}}{m_0}=0} \qquad \text{(III 4.3)}$$

c) Niisuguste füüsikaliste kehade dünaamikat, mis pole enam käsitatavad partiklitena, s. t. ainepunktidena, me käesolevas põhikursuses ei vaatle. Seetõttu me ei saa üksikasjalikumalt käsitleda ka kehade selliseid objektiivselt olemasolevaid olekuid, mida me nimetame k a a l u v u s e k s ning k a a l u t u s e k s . Analüüsigem allpool neid mõisteid ennekõike kvalitatiivselt ja seejärel vaadelgem kaalu mõistet täpsemalt punktmassi puhul.

Nagu märgitud, puudub ÜRT-s gravitatsioonijõu kui dünaamilise suuruse mõiste. Klassikalises füüsikas samastati gravitatsioonijõu mõistega faktiliselt ka kaalu mõiste (veel hiljuti käibel olnud 6. klassi füüsikaõpikust: "kaal on jõud, millega Maa tõmbab keha enda poole"). Niisiis peaks ÜRT-s likvideeruma samuti kaalu mõiste. Et aga kehade kaaluvuse ja kaalutuse olekuid tuleb käsitleda ÜRT-ski (tegemist on objektiivsete olekutega, mis nii või teisiti ilmnevad kõikide kehade puhul), siis on ilmselt otstarbekas ÜRT-s siiski säilitada k a a l u kui füüsikalise suuruse mõiste ning just ülalmainitud olekute kvantitatiivse füüsikalise karakteristikuna.

Tuleks eriti alla kriipsutada, et tänapäeval puutuvad inimesed kehade kaaluvuse probleemiga kokku mitte üksnes Maa suhtes paigalolevate kehade puhul, vaid e r i n e v a d (pane tähele!) kaaluvuse olekud, sealhulgas kaalutuse olek on teatavasti väga olulised tegurid nähtuste puhul kosmilistel lendudel, s. t. selliste nähtuste puhul, mida tänapäeval ulatuslikult ja intensiivselt uuritakse ning millest ka üldsuses on laialt juttu. Kaalu mõiste avaram käsitus ÜRT vaimus lubabki ülalmainitud olukordasid suhteliselt lihtsalt ja ühtsel loogilisel alusel seletada.

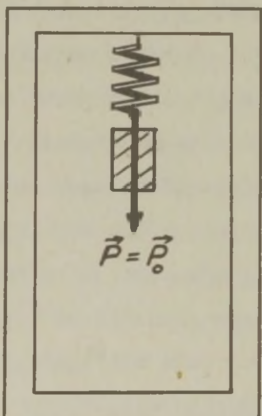
d) Erinevad k a a l u v u s e olekud ilmnevad füüsikalistel kehadel siis, kui nende vaba inertsiaalne ja gravitatiivne liikumine on mingite põhjuste tõttu takistatud. Sellises olukorras oleme näiteks meie ise, olles paigal Maa peal kui enam-vähem inertsiaalses taustsüsteemis, milles on gravitatsiooniväli. Analoogilises olukorras, seejuures küll "märgatavalt tugevamas kaaluvuse olekus" on kosmonaudid kiirendusega vertikaalselt üles startivas kosmoselaevas kui "tugevasti mitteinertsiaalses" taustsüsteemis.

Igasuguse määraga kaaluvuse puhul tekivad kehades deformatsioonid ning ilmnevad seesmised mehaanilised pinged, mis on just iseloomulikud kaaluvusele ning mille tõttu ka inimesed tunnetavad, et "neil on kaal". Nagu tõestavad vastavad katsed, on sellised deformatsioonid ja pinged oma loomult täiesti eristamatud, kui võrrelda omavahel ühelt poolt "loomulikku" kaaluvust, mis on tingitud üksnes gravitatiivsest vastasmõjust, ning teiselt poolt "kunstlikku" ehk "tehislikku" kaaluvust, mis on tingitud taustsüsteemi mitteinertsiaalsusest. Maa peal paigalolevate kehade "loomulik" kaaluvus on juba ise teatavasti põhjustatud nii Maa gravitatiivsest mõjust kui ka Maa pöörlemise tõttu tekkivatest inertsinähtustest ja tõepoolest ei ilmne ju üheski füüsikanähtuses Maa peal kumbki kaaluvuse põhjus eraldi. Nii avaldub kaaluvuse olekus eriti selgesti inertsi- ja gravitatsiooninähtuste samaolemuslikkus ning see on järjekordselt heaks kinnituseks ekvivalentsusprintsiibile (vt. I, 7, c).

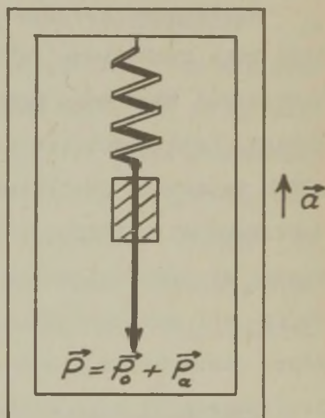
Kaaluvuse igasuguse määraga olekute puhul ilmneb kaaluva keha reaktsioon, millega see keha mõjustab objekte, mis takistavad tema vaba inertsiaalset ja gravitatiivset liikumist. Seda reaktsiooni on otstarbekas iseloomustada ja mõõta teatavate 3-mõõtmeliste reaktsioonijõududega, mille vektorsummat tulekski nimetada keha k a a l u k s . Märkigem, et just selliseid reaktsioonijõude me ju mõõdame vedru- või kangkaaludega ning just neid jõudusid on seetõttu otstarbekas pidada kvantitatiivseteks näitajateks, mis iseloomustavad keha kaaluvuse "määra" ehk "astet".

Nii on Maa peal paigaloleva keha kaalu puhul (joonis 25) ja keha kaalu puhul nn. ülekoormuse tingimustes vertikaalselt üles startivas kosmoselaevas (joonis 26) lihtsalt tegemist sama suuruse erinevate väärtustega. Kaalu mõiste on seega defineeritud ÜRT vaimule vastavalt, s. t. ta on määratletud ühesena mistahes taustsüsteemide (inertsiaalsete või mitteinertsiaalsete) jaoks.

Vaadelgem nüüd täpsemalt kaalu mõistet partikli puhul. On ju partiklina vaadeldaval objektilgi teatav sisemine struktuur, mistõttu võivad ka talle omased olla kaaluvusele iseloomulikud deformatsioonid ja pinged. Kaaluvuse tekkeks peab vektoril $\mathcal{F}^{\nu}$ võrrandites (III 4.2) ilmselt olema nullist erinevaid komponente. Nagu öeldud, iseloomustab nimetatud jõud selle füüsikalise objekti mõju, mis takistab partikli vaba inertsiaalset ja gravitatiivset liikumist. Kaaluks on jõud, mis iseloomustab partikli vastumõju sellele takistavale füüsikalisele objektile.



Joonis 25.



Joonis 26.

e) Kui füüsikalises kehas puuduvad kaaluvusele omased deformatsioonid ja pinged (või kui need on niivõrd tühised, nii et neid võib mitte arvestada), siis on keha k a a l u t u s e olekus. Sellises olekus on kõik küllalt väikesed mittepöörlevad kehad, mis liiguvad vabalt inertsi ja gravitatsiooni tõttu. Teiste sõnadega - sellises olekus on kõik sellised füüsikalised kehad, millega võib olla seostatav lokaalne inertsiaalsüsteem. Konkreetseteks näideteks võivad olla väljalülitatud mootoritega kosmoselaevad Maa tehiskaaslase orbiidil, vabalt langevad liftid jms.

Kaalutuse puhul puuduvad vaba liikumist takistavad objektid ja puuduvad seetõttu ka eespool nimetatud reaktsioonijõud, mida mõõdab kaal. Niisiis iseloomustab kaalutust kaalu kui füüsikalise suuruse nulliga võrduv väärtus.

Partikli puhul on kaalutus võimalik üksnes siis, kui võrrandid (III 4.2) lähevad üle võrranditeks (III 3.2), s.t. siis, kui $\mathcal{F}^{\nu} = 0$. Pangem tähele, et seejuures võib ikkagi säilida mingi objekti gravitatiivne mõju partiklile, mida kirjeldavad suurused $\Gamma^{\nu}_{\sigma\rho}$. Seega on "jõud, millega Maa tõmbab keha enda poole" tõepoolest midagi muud kui keha kaal.

f) Niisiis näeme, et võrreldes klassikalise füüsika käsitusega tuleb ÜRT-s kaalu mõiste "ümber normeerida". See uus, avaram ja "ümbernormeeritud" kaalu mõiste ühtib sisuliselt ka kaalu mõistega uutes kooliõpikutes[x].

Nagu veenduda võisime, on oluliseks erinevuseks uue ja vana kaalu mõiste vahel see asjaolu, et keha kaalu ei mõisteta enam kehale, vaid selle keha seostele rakendatud jõuna. Peale selle on uue käsituse puhul ületatud ka vana kaalu mõiste faktiliselt geotsentriline iseloom. Nüüd mõistame keha kaalu m i s t a h e s t a u s t s ü s t e e m i jaoks määratletud r e l a t i i v s e vektoriaalse suurusena, mille väärtus ja suund sõltuvad nii keha gravitatiivsetest

[x] Vt. näiteks I. Kikoin, A. Kikoin. Füüsika IX klassile. Tallinn, 1971, lk. 124.

omadustest kui ka liikumise iseloomust kasutatava taustsüsteemi suhtes. Seejuures aga rõhutagem, et mingit sisulist vastuolu kaalu vana ja uue käsituse vahel siiski pole. Uutmoodi mõtestatult (rakenduspunkt!) sisaldub vana kaalu mõiste tegelikult uues kui erijuht.

Uue käsituse kohaselt pole antud keha kaal mõistagi enam kõikjal ja alati ühesugune. Kuid ka uus kaalu määratelu rahuldab ikkagi füüsikalistele suurustele esitatavat ühesuse nõuet, kusjuures tuleb üksnes silmas pidada, et tegemist on relatiivse suurusega: gravitatsioonivälja antud punktis ja kindla liikumisoleku puhul (mille üheks erijuhuks on paigalseis) on kasutatavas kindlas taustsüsteemis vaadeldava keha kaalul kindel arvväärtus ja kindel suund. Mainitud tingimustel on kõikjal ja alati kõikide kehade puhul massi ja nullist erineva kaalu arvväärtused rangelt võrdelised ja see asjaolu lubabki võrrelda kehade masse nende kehade kaalumise teel.

5. Elektromagnetvälja võrrandid

a) ERT-s on elektromagnetvälja iseloomustavaks põhisuuruseks teatavasti 2. järku antisümmeetriline tensor $\phi_{\mu\nu}$, mida nimetatakse e l e k t r o m a g n e t v ä l j a t e n s o r i k s [x]. Selle tensori kuus sõltumatut ja üldjuhul nullist erinevat komponenti kirjeldavad nii elektri- kui magnetvälja.

---

[x] Vt. K-II, lk. 182.

Võib samuti defineerida elektromagnetvälja 4-potentsiaali U_ν, kusjuures

$$\phi_{\mu\nu} = U_{\nu,\mu} - U_{\mu,\nu} . \qquad \text{(III 5.1)}$$

Ülalnimetatud suurused on elektromagnetvälja iseloomustavateks suurusteks ka kõvera aegruumi puhul, s. t. ÜRT-s. Pangem tähele, et seos (III 5.1) jääb seejuures muutumatuks, sest vastavalt valemile (II 6.24)

$$U_{\nu;\mu} - U_{\mu;\nu} = U_{\nu,\mu} - U_{\mu,\nu} .$$

b) Maxwelli-Lorentzi võrranditel kui n.-õ. puhtalt elektromagnetvälja ja selle allikaid, s. t. elektrilaenguid kirjeldavatel võrranditel on ERT-s teatavasti järgmine kuju[x]:

$$\phi_{\nu\sigma,\sigma} = \frac{1}{c} j_\nu , \qquad \text{(III 5.2)}$$

$$\phi_{\mu\nu,\varkappa} + \phi_{\varkappa\mu,\nu} + \phi_{\nu\varkappa,\mu} = 0 . \qquad \text{(III 5.3)}$$

Suurused j_ν on siin 4-mõõtmelise voolutiheduse vektori komponendid.

Et formuleerida need võrrandid üldkovariantsel kujul, tuleb neis asendada tavalised tuletised kovariantsetega ning peale selle teha selget vahet ko- ja kontravariantsete indeksite vahel. Selgub, et võrrandid (III 5.3) ongi juba üldkovariantsel kujul, sest

$$\phi_{\mu\nu,\varkappa} + \phi_{\varkappa\mu,\nu} + \phi_{\nu\varkappa,\mu} = \phi_{\mu\nu;\varkappa} + \phi_{\varkappa\mu;\nu} + \phi_{\nu\varkappa;\mu} \qquad \text{(III 5.4)}$$

(vt. ülesanne 1). Selle avaldise üleskirjutamiseks võib aga

---

[x] Vt. K-II, lk. 183-184.

ÜRT-s samuti kasutada suurust $\varepsilon^{\varkappa\lambda\mu\nu}$, millel on järgmised omadused: 1) $\varepsilon^{1234} = 1$; 2) iga indeksite paari ümbervahetamine muudab selle suuruse märki ja 3) mistahes kahe indeksi võrdsuse puhul on $\varepsilon^{\varkappa\lambda\mu\nu} = 0$.

Lõpptulemusena saamegi elektromagnetvälja põhivõrrandid ÜRT-s:

$$\boxed{\begin{aligned} &\phi^{\nu\sigma}{}_{;\sigma} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\sqrt{|g|}\,\phi^{\nu\sigma}\right)_{,\sigma} = \frac{1}{c} j^{\nu} \\ &\varepsilon^{\varkappa\lambda\mu\nu}\phi_{\lambda\mu,\nu} = 0 \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(\text{III } 5.5) \\ &(\text{III } 5.6) \end{aligned}$$

Pangem tähele, et võrrandite (III 5.5) kirjapanemisel on kasutatud valemit (II 6.18). Võttes siin edasi tarvitusele vastavalt valemile (II 6.20) tensoritiheduse mõiste, saame need võrrandid esitada ka kujul

$$f^{\nu\sigma}{}_{,\sigma} = \frac{1}{c} s^{\nu}, \qquad (\text{III } 5.7)$$

kus on defineeritud uued suurused

$$f^{\nu\sigma} = \sqrt{|g|}\,\phi^{\nu\sigma}, \qquad (\text{III } 5.8)$$

$$s^{\nu} = \sqrt{|g|}\,j^{\nu}. \qquad (\text{III } 5.9)$$

Elektromagnetvälja põhivõrrandite järelduseks on elektrilaengu jäävust väljendav pidevuse võrrand, mis ÜRT-s avaldub kovariantse divergentsi kujul

$$j^{\sigma}{}_{;\sigma} = 0 \qquad (\text{III } 5.10)$$

Tensoritiheduse mõiste abil saab seda võrrandit esitada ka tavalise divergentsi kujul

$$s^{\sigma}{}_{,\sigma} = 0. \qquad (\text{III } 5.11)$$

c) Et muuta elektromagnetismi põhivõrrandite süsteemi täielikuks, tuleb neile teatavasti veel lisada elektrilaengu liikumisvõrrandid. Selleks on aga vaja teada Lorentzi jõu avaldist. Diskreetse punktlaengu Q puhul saame 4-mõõtmelise Lorentzi jõu esitada järgmisel üldkovariantsel kujul[x]:

$$\mathcal{F}^{\nu}=\frac{Q}{c\varepsilon_0}\phi^{\nu}{}_{\sigma}\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}=\frac{iQ}{\varepsilon_0}\phi^{\nu}{}_{\sigma}V^{\sigma}. \qquad \text{(III 5.12)}$$

Vaakumi elektriline läbitavus $\varepsilon_0=8{,}854\cdot10^{-12}\ \frac{A^2s^2}{N\,m^2}$ tuleb sellesse valemisse SI ühikute kasutamise tõttu. (Juhime tähelepanu, et väljatensori komponentide ühikuks on siin $\frac{A\,s}{m^2}$.) Imaginaarühik i esineb aga valemis seetõttu, et vastavuses seosega (III 1.1) on meil meetrilise vormi signatuuriks valitud (+,+,+,-) ja sellest tulenevalt $V^{\sigma}\equiv\frac{dx^{\sigma}}{ds}=\frac{1}{ic}\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}$.

Asendades Lorentzi jõu komponendid (III 5.12) ainepunkti dünaamika põhivõrranditesse (III 4.3), saame elektriliselt laetud partikli üldkovariantsed liikumisvõrrandid:

$$\boxed{\frac{d^2x^{\nu}}{d\tau^2}+\Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}\frac{dx^{\rho}}{d\tau}\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}-\frac{Q}{\varepsilon_0 m_0 c}\phi^{\nu}{}_{\sigma}\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}=0} \qquad \text{(III 5.13)}$$

d) Elektromagnetvälja energiat ja impulssi kirjeldab 2. järku sümmeetriline tensor $T_{\mu\nu}$, mida nimetatakse välja energia-impulsitensoriks[xx]. Üld-

[x] Vrdl. K-II, lk. 197.
[xx] K-II, 229.

kovariantsel kujul avalduvad selle tensori segakomponendid valemina

$$T_{\mu}^{\nu}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\phi_{\mu\sigma}\phi^{\nu\sigma}-\frac{1}{4}\delta_{\mu}^{\nu}\phi^{\sigma\rho}\phi_{\sigma\rho}\right) \qquad \text{(III 5.14)}$$

(Siin on arvestatud eespool nimetatud ühikute valikut väljatensori komponentide puhul.) Energia-impulsitensori komponent T_4^4 iseloomustab teatavasti välja energia tihedust. Komponendid T_4^{κ} kirjeldavad välja energia levikut ja komponendid T_i^{κ} - välja impulsi voogu.

Nagu otsene arvutus kinnitada võib, on elektromagnetvälja energia-impulsitensoril järgmine üldine omadus:

$$T\equiv T_{\sigma}^{\sigma}=0. \qquad \text{(III 5.15)}$$

Kui vaatleme allikatest vaba piirkonda elektromagnetväljas - nn. elektrovaakumit, siis rahuldab energia-impulsitensor tingimust

$$\underline{T_{\mu;\sigma}^{\sigma}=0}. \qquad \text{(III 5.16)}$$

Need avaldised kirjeldavad elektromagnetvälja energia ja impulsi jäävust.

e) Käesolevas punktis käsitletud valemite puhul pangem jälle tähele füüsika võrrandite ja seoste sisukamaks muutumist pärast neile relativistliku üldkovariantse kuju andmist.

Näeme, et elektromagnetvälja põhivõrranditesse (III 5.5) kuuluvad nii elektromagnetvälja iseloomustavad suurused $\phi_{\mu\nu}$ kui ka gravitatsioonivälja kirjeldavad suurused $g_{\mu\nu}$. Need võrrandid on nüüd üldkehtivad mistahes gravitatsioonivälja puhul mistahes elektromagnetvälja uurimiseks (mõistagi Maxwelli-Lorentzi teooria täpsuse piirides). Meetrilise tensori komponentide erineva konkreetse kuju puhul on aga muidugi nendel võrranditel erinev kuju.

Piirdudes üksnes elektromagnetvälja võrranditega (III 5.5-6), on meil tegelikult vaatluse all ainult elektromagnetismi ja gravitatsiooni seose üks aspekt. Need võrrandid omaette kirjeldavad n.-ö. gravitatsioonilise f o o n i (kaasa arvatud taustsüsteemi mitteinertsiaalsuse) mõju elektromagnetnähtustele. Elektromagnet- ja gravitatsiooninähtuste seosel on mõistagi samuti teine aspekt, sest elektromagnetväli, millel on alati energia, omab massi ja energia identsuse tõttu alati ka massi ning seetõttu on elektromagnetväli omakorda gravitatsioonivälja allikaks. Selle probleemi, kuidas elektromagnetilmingud omalt poolt mõjustavad gravitatsiooniilminguid, lahendab gravitatsioonivälja põhivõrrandite formuleerimine.

Ülesandeid

1. Tõestada seos (III 5.4).

2. Tuletada võrrand (III 5.10) võrrandite (III 5.5) järeldusena.

3. Tõestada seos (III 5.15).

4. Näidata jäävuslausete (III 5.16) kehtivust.

**6. Ainelised kesk-
konnad ÜRT-s**

a) ÜRT-d võib pidada oma sünnilt puhtalt makroskoopiliseks füüsikateooriaks. Tuleb nentida, et katsed siduda sügavamalt ÜRT põhiideid ja matemaatilist aparatuuri kvantteooriaga kui füüsikaliste mikronähtuste põhiteooriaga pole seni olulist edu toonud. Seepärast käsitleme praegu siingi ÜRT-d kui puhtalt makroskoopilist teooriat ning püüame gravitatsiooninähtuste ja teiste füüsikanähtuste kirjeldamist seostada üksnes makrotasemel.

Nagu teada, võime kõige üldisemalt rääkides eristada m a k r o t a s e m e l kaht füüsikalist objekti: a i n e t ja v ä l j a. Jäädes järjekindla makroskoopilise, s. t. fenomenoloogilise käsitluse juurde, tuleb meil seejuures vaadelda nii ainet kui välja p i d e v a t e s u b s t a n t s i d e n a. Küsimused sellest, miks ainelised kehad koos seisavad, milline on nende mikrostruktuur, milline on aineliste objektide ja väljade vastastikuse mõju sisemine mehhanism jne., on juba iseloomulikud füüsikanähtuste uurimisele mikrotasemel. Hästi on aga teada, et paljudel juhtudel piisabki nii aine kui välja puhul ülalkirjeldatud fenomenoloogilisest käsitlusest.

b) Tänapäevaste teadmiste kohaselt võime makrotasemel rääkida üksnes kahest füüsikalise välja tüübist: gravitatsiooniväljast ja elektromagnetväljast. Nende omaette vaatlemisest ÜRT raamides meil on juba juttu olnud. Järelikult on jäänud veel heita pilk aine kui pideva keskkonna käsitlusele ÜRT-s. Märkigem seejuures, et teatavates olukordades võib ainet kirjeldada fenomenoloogiliselt ka partiklitena või nende süsteemidena. Partikli dünaamikast meil oli samuti juba veidi juttu.

Pidevate aineliste keskkondade käsitlemisel võib ÜRT raamides mõistagi üsna palju ette võtta ja üsna kaugele minna. Võib näiteks formuleerida e l a s t s u s e t e o o r i a kui tahkeid kehi fenomenoloogiliselt vaatleva teooria (seda oleks näiteks vaja kehade kaaluvuse probleemi sügavamaks analüüsiks). Võib käsitleda ÜRT raamides pidevate keskkondade h ü d r o d ü n a a m i k a t , s. t. vaadelda fenomenoloogiliselt vedelikke ja gaase. Võib arendada a k u s t i k a t kui õpetust mehaaniliste lainete levikust pidevas ainelises keskkonnas. Võib vaadelda p i d e v a t e k e s k k o n d a d e e l e k t r o d ü n a a m i k a t (sealhulgas magnetohüdrodünaamikat) ning sellele tuginevat l a i n e o p t i k a t ja g e o m e e t r i l i s t o p t i k a t . Arendada võib ÜRT raamides ka m a k r o s k o o p i l i s t e s ü s t e e m i d e t e r m o d ü n a a m i k a t .

Nii olemegi libisenud linnulennul üle kogu makrofüüsika. Käesoleva loengukursuse raamides kõike seda konkreetselt demonstreerida pole muidugi võimalik.

c) Et meid edaspidi huvitab esmajoones aine kui füüsikalise objekti fenomenoloogiline käsitlemine gravitatsioonivälja tekitamise probleemi seisukohalt, siis pakub meile praegu erilist huvi aine kui keskkonna energeetiline kirjeldamine (energiaga on ju identne "gravitatsioonilaeng" - mass!).

Teatavasti kasutatakse analoogiliselt elektromagnetvälja juhuga nii partiklite süsteemide kui ka pidevate keskkondade energeetiliseks iseloomustamiseks 2. järku sümmeetrilist tensorit $T_{\mu\nu}$ - e n e r g i a - i m p u l s i t e n s o r i t . Selle tensori konkreetse üldkuju põhjendamine aine puhul on omaette probleem, mida meie siin sügavamalt ei vaatle. Anname pideva keskkonna energia-impulsitensori komponendid järgmisel küllaltki üldisel kujul:

$$T_{\mu}^{\nu} = \mu_0 c^2 V_{\mu} V^{\nu} + M_{\mu}^{\nu} \qquad \text{(III 6.1)}$$

Invariantne suurus $\mu_0 c^2$ on siin seisuenergia tihedus nn. kaasaliikuvas taustsüsteemis. $V^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{ds}$ on pideva keskkonna füüsikaliselt lõpmata väikeste elementide 4-kiiruse komponendid, suurused M_{μ}^{ν} on aga teatava tensori komponendid, mis kirjeldavad fenomenoloogiliselt ainelise süsteemi alaosade omavahelist vastastikust mõju, s. t. ainelise süsteemi seesmisi mehaanilisi pingeid. Mõistagi vajavad tensori komponendid M_{μ}^{ν} konkretiseerimist konkreetsete olukordade tarvis.

Isoleeritud ainelise süsteemi puhul peavad energia-impulsitensori komponendid T_{μ}^{ν} rahuldama energia ja impulsi jäävuse seadusi, mida võib esitada ÜRT-s järgmisel kujul:

$$\underline{T_{\mu;\sigma}^{\sigma} = 0.} \qquad \text{(III 6.2)}$$

d) Järgnevalt vaadelgem mõningaid ainelise keskkonna energia-impulsitensori olulisemaid erijuhte.

Käsitades ainet i d e a a l s e   v e d e l i k u n a , omandab energia-impulsitensor järgmise kuju:

$$T_\mu^{\ \nu} = (\mu_0 c^2 + p_0) V_\mu V^\nu - p_0 \delta_\mu^\nu \qquad \text{(III 6.3)}$$

kus p_0 on ideaalses vedelikus valitsev isotroopne rõhk (Pascali seadus!). Et rõhk p_0 on mõõdetud kaasaliikuvas taustsüsteemis, siis on seegi suurus invariant. Et 4-kiiruse komponendid V^ν on seotud omavahel $V_\sigma V^\sigma = 1$, siis on avaldises (III 6.3) üldjuhul viis sõltumatut suurust.

Ideaalse vedeliku erijuhuks on omakorda nn. t o l m   t ü h j u s e s , mis kujutab endast faktiliselt ainelise keskkonna vaatlemist üksteist mittemõjustavate partiklite kongruentsina. Sel juhul $p_0 = 0$ (mis tähendab ühtlasi ka tingimust $M_\mu^{\ \nu} = 0$) ning energia-impulsitensori kujuks on

$$T_\mu^{\ \nu} = \mu_0 c^2 V_\mu V^\nu \qquad \text{(III 6.4)}$$

Nn. staatilisel juhul ($V^\kappa \equiv \frac{dx^\kappa}{ds} = 0$) võtavad valemid (III 6.4) veel lihtsama kuju:

$$T_4^{\ 4} = \mu_0 c^2 , \quad T_i^{\ 4} = T_4^{\ \kappa} = T_i^{\ \kappa} = 0 . \qquad \text{(III 6.5)}$$

e) Tulgem veel korraks tagasi jäävuslausete (III 6.2) juurde ja vastavalt valemile (II 6.19) kirjutagem nad üles veidi pikemalt:

$$\underline{T_{\mu;\sigma}^{\ \sigma} \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|}\, T_\mu^{\ \sigma} \right)_{,\sigma} - \frac{1}{2} g_{\sigma\rho,\mu} T^{\sigma\rho} = 0} \qquad \text{(III 6.6)}$$

Pangem valemite (III 6.6) puhul järjekordselt tähele, et vahetult on näha "gravitatsioonilise fooni" mõju füüsikanähtustele, antud juhul pideva ainelise keskkonna liikumisele. Jällegi võib alla kriipsutada, et gravitatsioonivälja potentsiaalid $g_{\mu\nu}$ võivad muidugi olla konkreetsete gravitatsiooniväljade ja taustsüsteemide puhul erinevad, kuid võrrandid (III 6.6) ise on täiesti üldkehtivad.

Kui paneme valemisse (III 6.6) ideaalse vedeliku energia-impulsitensori komponendid (III 6.3), siis saame ideaalse vedeliku voolamise kirjelduse teatavate potentsiaalidega $g_{\mu\nu}$ kirjeldatava gravitatsioonivälja puhul. Pannes aga valemisse (III 6.6) komponendid T_{μ}^{ν} kujul (III 6.4), saame geodeetiliste joonte võrrandid, mis muidugi peavadki üksteisest sõltumatute partiklite puhul siit välja tulema.

IV. GRAVITATSIOONIVÄLJA VÕRRANDID

1. Gravitatsioonivälja võrrandite üldkuju ja nende põhilised struktuurilised omadused

a) Nagu märgitud, vaatlesime eelmises peatükis füüsikalisi makronähtusi n.-ö. gravitatsioonilisel foonil. Nüüd hakkame lähemalt uurima gravitatsioonivälja enda determineerituse probleemi.

Püstitame põhiküsimuse: kuidas määrab materiaalsete objektide eksistents meetrilise tensori kuju?

Põhimõttelise vastuse sellele küsimusele annavad gravitatsioonivälja Einsteini võrrandid:

$$\boxed{G_{\mu}^{\nu} = \varkappa T_{\mu}^{\nu}} \qquad \text{(IV 1.1)}$$

Võrrandites (IV 1.1) on vasemal Einsteini tensori komponendid G_{μ}^{ν}, mis koosnevad teatavasti meetrilise tensori komponentidest ja nende tuletistest kuni 2. järguni (vt. valem (II 8.8) ja II, 8, c). Paremal seisavad energia-impulsitensori komponendid T_{μ}^{ν}, mis kirjeldavad aegruumi vaadeldavas piirkonnas eksisteerivaid materiaalseid objekte. Suurus $\varkappa$ on nn. Einsteini gravitatsioonikonstant (tema seose Newtoni gravitatsioonikonstandiga γ selgitame hiljem).

Niisiis on gravitatsioonivälja Einsteini võrrandite ühel poolel suurused, mis iseloomustavad kõvera aegruumi geomeetriat, s. t. gravitatsioonivälja, teisel poolel aga suurused, mis iseloomustavad kõveras ruumis paiknevat ja liikuvat mateeriat. Sellega fikseerivadki need võrrandid kvantitatiivse seose ühelt poolt aegruumi omaduste, mis on lahutamatud gravitatsioonivälja omadustest, ja teiselt poolt ajas ja ruumis eksisteeriva mateeria konkreetsete omaduste vahel.

Defineerides ühe uue 2. järku sümmeetrilise tensori $H_\mu^\nu \equiv G_\mu^\nu - \varkappa T_\mu^\nu$, võime võrrandid (IV 1.1) esitada muidugi ka kujul

$$H_\mu^\nu = 0. \qquad \text{(IV 1.2)}$$

Seega, nagu ikka ja alati: mingi tensori kõik komponendid on nullid - selline on füüsika võrrandite standardkuju (vt. III, 2, a). Veelgi elegantsem on Einsteini võrrandite (IV 1.1) "koordinaadivaba" kuju

$$\mathbb{G} = \varkappa \mathbb{T}, \qquad \text{(IV 1.3)}$$

kus $\mathbb{G} = G_{\mu\nu}\, \mathbb{e}^\mu \otimes \mathbb{e}^\nu$ ja $\mathbb{T} = T_{\mu\nu}\, \mathbb{e}^\mu \otimes \mathbb{e}^\nu$.

b) Einsteini tensori diferentsiaalne struktuur (vt. II, 8, c, samuti II, 7, e) määrab ka gravitatsioonivälja võrrandite (IV 1.1) vasema poole diferentsiaalse struktuuri. Nii koosnevad Einsteini võrrandite vasemad pooled meetrilise tensori komponentidest ja nende tuletistest kuni 2. järguni, kusjuures esimesed tuletised esinevad mittelineaarselt.

Seega näeme, et Einsteini väljavõrrandid kujutavad endast osatuletistega mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite süsteemi. Isegi n.-ö. homogeense juhu jaoks ($T_{\mu}^{\nu}=0$) on siin üldjuhul kümme võrrandit kümne tundmatu funktsiooni $g_{\mu\nu}$ jaoks. Seejuures sõltub igaüks neist kümnest funktsioonist üldjuhul neljast tundmatust x^{σ} . Võrrandite ja tundmatute hulka saab erijuhtudel muidugi vähendada, kuid sellegipoolest tähendab gravitatsioonivälja Einsteini võrrandite lahendamine erakordselt keerukat matemaatilist probleemi.

Nagu igasugustele diferentsiaalvõrranditele, nii tuleb lisada a l g - ja ä ä r e t i n g i m u s e d ka Einsteini võrranditele, et neid lahendada konkreetsete füüsikaliste olukordade puhul, s. t. selleks, et leida konkreetseid erilahendeid. Peale selle on võrrandite erakordse keerukuse tõttu oluline osa mitmesugustel teistelgi nii füüsikalistest kui ka matemaatilistest kaalutlustest lähtuvatel l i s a t i n g i m u s t e l .

c) Gravitatsioonivälja võrrandite (IV 1.1) õigsuse kõige olulisemaks kriteeriumiks on mõistagi neist tulenevate järelduste kooskõla vaatluse ja eksperimendiga (selle probleemiga tegeleme käesoleva kursuse V peatükis). Formuleeritud on aga need võrrandid väga põhiliste ja üldiste teoreetiliste kaalutluste põhjal, mis tagavad gravitatsioonivälja võrrandite sügavalt olemusliku ja harmoonilise seose tänapäevase füüsika muude oluliste tõdedega. Võrrandite väärtuse hindamisel pole seegi tõik vähemtähtis, pigem on lood vastupidi.

Gravitatsioonivälja Einsteini võrrandites on leidnud eksaktse ning samal ajal loogiliselt väga täiusliku ja elegantse kajastuse ÜRT põhiideed. Nagu nägime, fikseerivad nad kvantitatiivses vormis seose aegruumi omaduste ja gravitatsiooni vahel. Nende võrrandite 4-mõõtmeline üldkovariantne tensorkuju on vastavuses üldrelatiivsusprintsiibiga ning tagab ühtlasi võrrandite relativistliku loomuse, lubades neil olla nimelt r e l a t i v i s t l i k u gravitatsiooniteooria põhivõrranditeks. Peatselt näeme, et ka ekvivalentsusprintsiip - gravitatsiooni- ja inertsinähtuste samaolemuslikkus kajastub võrrandites (IV 1.1).

Üheks olulisemaks gravitatsioonivälja Einsteini võrrandite omaduseks on asjaolu, et nad on kõige ülaltoodu juures veel ka gravitatsioonivälja Newtoni võrrandite (I 6.8) loogiliseks üldistuseks, sisaldades viimaseid, nagu peagi näeme, mitterelativistliku piirjuhuna. Sellega on rahuldatud veel üks ülimalt oluline tänapäevase füüsika printsiip - nimelt v a s t a v u s e p r i n t s i i p , mis alati peab siduma teatud kindlat nähtuste valdkonda kirjeldavat klassikalist ja relativistlikku teooriat.

Võrreldes võrrandit (I 6.8) võrranditega (IV 1.1), võime veenduda, et mõlemal juhul on vasemal poolel gravitatsioonivälja potentsiaale sisaldav avaldis ning paremal poolel - ruumis paiknevat mateeriat kirjeldav avaldis. Mõistagi peab viimane relativistlikul juhul keerulisem olema kui üksnes massitihedust μ_0 kirjeldav avaldis. Et mitterelativistlikus võrrandis on vasemal poolel gravitatsioonivälja potentsiaalide teiste tuletiste lineaarne kombinatsioon (funktsiooni U laplasiaan), siis peaks analoogilist struktuurielementi sisaldama ka relativistlik võrrand (muidu ei pruugiks ju piirjuhule üle minnes olla tagatud vastavuse printsiip). Et materiaalsete objektide puhul ka jäävuslaused peavad olema täidetud $T_{\mu;\sigma}^{\sigma} = 0$, siis äsjanimetatud asjaolud juba määravadki peaaegu üheselt võrrandite (IV 1.1) vasema poole kuju, sest - nagu teada - Einsteini tensor on ainus teist järku sümmeetriline tensor, mille komponendid G_{μ}^{ν} sisaldavad gravitatsioonivälja potentsiaale $g_{\mu\nu}$ ja nende tuletisi kuni teise järguni (seejuures viimaseid just nimelt lineaarselt!) ning mis samal ajal rahuldavad seoseid $G_{\mu;\sigma}^{\sigma} = 0$ (vt. veelkord II, 7, c).

d) Nagu veendusime, on gravitatsioonivälja võrrandid (IV 1.1) m i t t e l i n e a a r s e d . Elektromagnetvälja võrrandid (III 5.5-6) on aga lineaarsed. See oluline erinevus koos gravitatsioonivälja võrrandite mõnede teiste eripäraste omadustega viib veel sellele, et gravitatsioonivälja puhul ei saa enam väljavõrranditele suvaliselt lisada l i i k u m i s v õ r r a n d e i d . Selgub, et materiaalsete objektide gravitatiivse liikumise võrrandid, sealhulgas vaba partikli liikumisvõrrandid (III 3.3), on juba väljavõrrandite sees. Seega kirjeldavad võrrandid (IV 1.1) nii seda, kuidas materiaalsed objektid tekitavad

21

gravitatsioonivälja, kui ka seda, kuidas sama väli omakorda määrab objektide liikumise.

Liikumisvõrrandite konkreetne tuletamine väljavõrranditest on siiski keeruline matemaatiline probleem. Et nende tuletamisel etendab olulist osa meetod, siis vastavalt sellele võib eristada ka liikumisvõrrandite põhimõtteliselt erinevaid saamisviise. Olulisemateks on siin kaks põhisuunda. Ühele neist panid aluse A. Einstein ja L. Infeld[x] ning teisele V. Fok ja tema kaastöölised[xx].

2. Gravitatsioonivälja võrrandid ainelise keskkonna ja elektromagnetvälja puhul

a) Teisendagem mõnevõrra gravitatsioonivälja võrrandite põhikuju (IV 1.1).

Selleks leidkem kõigepealt koondamise tulemusena seos

$$G = \varkappa T. \qquad \text{(IV 2.1)}$$

(NB! - Mitte segi ajada seda skalaarset seost tensorseosega (IV 1.3)!) Arvestades nüüd veel valemit (II 8.11), saame gravitatsioonivälja Einsteini võrrandid järgmisel, põhikujuga (IV 1.1) täiesti ekvivalentsel kujul:

$$\underline{R_\mu^\nu = \varkappa\left(T_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu T\right).} \qquad \text{(IV 2.2)}$$

---

[x] Selle meetodi ideedega võib näiteks tutvuda kirjanduse nimistus toodud L. Infeldi ja E. Plebanski raamatu põhjal.

[xx] Vt. kirjanduse nimistus osutatud V. Foki raamatut.

Einsteini tensori asemel iseloomustab võrrandites (IV 2.2) aegruumi geomeetriat Ricci tensor. Et Ricci tensori komponentide (II 8.1) seos Christoffeli koefitsientidega $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ ja nende kaudu meetrilise tensori komponentidega $g_{\mu\nu}$ on lihtsam kui Einsteini tensoril, siis on konkreetsete rakenduste seisukohalt gravitatsioonivälja võrrandite kuju (IV 2.2) mõnevõrra eelistatum kujust (IV 1.1).

Järgnevalt vaadelgem üldjoontes, kuidas on võimalik konkretiseerida gravitatsioonivälja võrrandeid olenevalt meie konkreetsetest teadmistest ruumis paiknevate materiaalsete objektide kohta.

b) A i n e l i s e k e s k k o n n a vaatlemisel piirdugem käesolevas kursuses üksnes ideaalse vedeliku suhteliselt lihtsa (ja seejuures ikkagi veel küllalt keeruka) erijuhuga.

Käsitades ainelist keskkonda i d e a a l s e v e d e l i k u n a , on suurused T^{ν}_{μ} võrrandites (IV 2.2) määratud valemitega (III 6.3). Nendest valemitest leiame koondamise tulemusena ka

$$T = c^2\mu_0 - 3p_0 . \qquad \text{(IV 2.3)}$$

Gravitatsioonivälja põhivõrrandid (IV 2.2) omandavad seega kuju

$$R^{\nu}_{\mu} = \varkappa\left[(c^2\mu_0 + p_0)V_{\mu}V^{\nu} - \tfrac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}(c^2\mu_0 - p_0)\right]. \qquad \text{(IV 2.4)}$$

Näeme, et antud juhul on meil üldiselt viisteist tundmatut suurust (kümme meetrilise tensori komponenti $g_{\mu\nu}$, kolm sõltumatut 4-kiiruse komponenti V^{ν} , rõhk p_0 ja massitihedus μ_0). Et peale võrrandite (IV 2.4) peavad kõik nimetatud suurused rahuldama ka ideaalse vedeliku liikumisvõrrandeid (III 6.2) $T_{\mu;\sigma}^{\sigma}=0$, siis võrrandeid on meil nüüd üldjuhul kokku neliteist. Seega on esialgu võrrandsüsteem alamääratud. Võrrandite ja tundmatute funktsioonide arvu kooskõlla viimiseks lisatakse tavaliselt ülalnimetatud süsteemile veel teatav seos suuruste ρ_0 ja μ_0 vahel kui n.-ö. olekuvõrrand.

Kui aineline keskkond on käsitatav " t ü h j u s e s o l e v a t o l m u n a " ($\rho_0=0$), s. t. kui suurused T_{μ}^{ν} on määratud valemitega (III 6.4), siis omandavad väljavõrrandid (IV 2.4) kuju

$$R_{\mu}^{\nu}=\varkappa c^2\mu_0\left[V_{\mu}V^{\nu}-\frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}\right]. \qquad \text{(IV 2.5)}$$

Et tundmatute funktsioonide arv ühe võrra väheneb, siis kaob ka vajadus olekuvõrrandi lisamise järele.

c) Gravitatsioonivälja võib uurida ka e l e k t r i l i s e l t l a e t u d a i n e l i s e k e s k k o n n a puhul. Piirdudes selgi juhul ideaalse vedeliku mudeliga, on suurused T_{μ}^{ν} võrrandites (IV 2.2) määratud valemitega

$$T_{\mu}^{\nu}=\overset{a}{T}{}_{\mu}^{\nu}+\overset{e}{T}{}_{\mu}^{\nu}. \qquad \text{(IV 2.6)}$$

Siin kujutavad suurused $\overset{a}{T}{}_{\mu}^{\nu}$ endast ideaalse vedeliku energia-impulsitensori komponente (III 6.3) ja suurused $\overset{e}{T}{}_{\mu}^{\nu}$ sama suuruse komponente elektromagnetvälja puhul (III 5.14).

Näeme, et võrreldes võrranditega (IV 2.4) komplitseeruvad gravitatsioonivälja võrrandid nüüd veelgi. Neisse lisanduvad uute suurustena elektromagnetvälja tensori komponendid $\phi_{\mu\nu}$. Kuid elektromagnetvälja põhivõrrandid (III 5.5-6), mis määravad väljatensori komponendid $\phi_{\mu\nu}$ antud voolutiheduse j^{μ} puhul, lisanduvad samuti gravitatsioonivälja võrranditele. Rõhutagem, et kõiki ülalmainitud võrrandeid tuleb nüüd rahuldada samaaegselt ja koos.

Kui gravitatsioonivälja võrrandites (IV 2.2) on suurused T_{μ}^{ν} määratud valemiga

$$T_{\mu}^{\nu} = \overset{e}{T}_{\mu}^{\nu}, \tag{IV 2.7}$$

siis on meil tegemist nn. e l e k t r o v a a k u m i g a. Vastavalt seosele (III 5.15) on nüüd $T = 0$ ja võrrandid (IV 2.2) omandavad kuju

$$R_{\mu}^{\nu} = \frac{\varkappa}{\varepsilon_0}\left(\phi^{\nu\sigma}\phi_{\mu\sigma} - \frac{1}{4}\delta_{\mu}^{\nu}\phi^{\sigma\rho}\phi_{\sigma\rho}\right). \tag{IV 2.8}$$

Seda süsteemi tuleb lahendada koos elektromagnetvälja võrranditega (III 5.5-6) juhul $j^{\nu} = 0$:

$$\left(\sqrt{g}\,\phi^{\nu\sigma}\right)_{,\sigma} = 0, \tag{IV 2.9}$$

$$\varepsilon^{\varkappa\lambda\mu\nu}\phi_{\lambda\mu,\nu} = 0. \tag{IV 2.10}$$

Et antud juhul on vastavalt seosele (III 5.16) võrrandid $T_{\mu\,;\sigma}^{\sigma} = 0$ identselt rahuldatud ning et 4-potentsiaali nelja komponendi U_{ν} jaoks on sõltumatuid Maxwelli-Lorentzi võrrandeid üksnes neli, siis faktiliselt on meil süsteemis (IV 2.8-10) üldjuhul kokku neliteist võrrandit sama palju tundmatute funktsioonide jaoks. Pangem tähele, et kõnesolev võrrandisüsteem kirjeldab kompleksselt k õ i k i tänapäeval tuntud m a k r o v ä l j u ning koos sellega on ühtlasi hõlmatud kogu **makromaailma** füüsikaliste **vastasmõjude** kirjeldus ühtses tervikus. Nendes võrrandites kajastub nii gravitatsioonivälja mõju elektromagnetväljale kui ka vastupidine - elektromagnetvälja mõju gravitatsiooniväljale (vrdl. III, 5, e).

Märkigem veel, et nagu otseselt järeldub ka võrranditest (IV 2.8), on elektrovaakumi juhul aegruumi skalaarne kõverus alati null:

$$R = 0. \qquad \text{(IV 2.11)}$$

d) Kui ainelise keskkonna käsitamisel ideaalse vedelikuna kehtib seos

$$c^2\mu_0 = -p_0 \equiv \frac{\Lambda}{\varkappa}, \qquad \text{(IV 2.12)}$$

kus Λ on konstant, siis omandavad võrrandid (IV 2.4) kuju

$$R_\mu^\nu + \Lambda\delta_\mu^\nu = 0. \qquad \text{(IV 2.13)}$$

Oleme saanud Einsteini võrrandid nn. **kosmoloogilise liikmega**. Kosmoloogilise liikme võib tegelikult viia juba gravitatsioonivälja võrrandite algkuju (IV 1.1), sest $(\Lambda\delta_\mu^\sigma)_{;\sigma} = 0$ (vt. II, 8; 3. ülesanne). Üldjuhul võiks esineda võrrandites ka veel täiendavalt materiaalseid objekte iseloomustavaid suurusi.

Võrranditest (IV 2.13) saame samuti seose

$$R = -4\Lambda. \qquad \text{(IV 2.14)}$$

Niisiis on antud juhul tegemist konstantse skalaarse kõverusega 4-ruumidega. Selliseid ruume nimetatakse üldiselt **Einsteini ruumideks**.

Kirjanduses on püütud kosmoloogilise liikme füüsikalist mõtet korduvalt analüüsida, kuid nn. kosmoloogilise konstandi Λ osatähtsus teooria vastavusseseadmisel tegelikkusega pole tänapäevalgi veel lõplikult selge. Näeme seosest (IV 2.12), et seda kosmoloogilist liiget võiks tõlgendada kui teatava universaalse konstantse negatiivse (!?) rõhu olemasolu. Aga võib-olla ongi olemas kosmoloogilistes mastaapides teatav uuelaadiline vastasmõju, mis avaldub näiteks galaktikaparvede vahelise tõukejõuna?!

Seostatult kvantväljateooria ideedega on tänapäeval katseid tehtud tõlgendada kosmoloogilist liiget ka vaakumi nn. polarisatsioonist tingitud täiendavate gravitatsiooniliste efektide kirjeldajana, millel oleks oluline osatähtsus üksnes kosmoloogilistes mastaapides. Üldise arvamuse kohaselt pole aga seni ei otsest vajadust ega veenvaid argumente selleks, et viia gravitatsioonivälja võrranditesse kosmoloogiline liige. Seepärast kasutab nüüdisaegne relativistlik kosmoloogia väljavõrrandeid tavaliselt ilma selle liikmeta.[x]

Ülesandeid

1. Tuletada seos

$$R = -\varkappa T. \qquad \text{(IV 2.15)}$$

[x] Vt. näiteks LL, lk. 454.

3. Gravitatsioonivälja võrrandid tühja ruumi puhul. Riemanni-Christoffeli tensor gravitatsioonivälja iseloomustava suurusena. Koordinaattingimused

a) Aegruumi selliste piirkondade jaoks, kus puuduvad makroskoopilised füüsikalised objektid (aine ja väli), omandavad gravitatsioonivälja võrrandid (IV 2.2) kuju

$$R_{\mu}^{\nu} = 0. \qquad \text{(IV 3.1)}$$

Need on Einsteini võrrandid t ü h j a r u u m i jaoks ehk gravitatsioonivälja nn. v a a k u m v õ r r a n d i d.

Mõistagi kaasneb võrranditega (IV 3.1) samuti seos

$$R = 0. \qquad \text{(IV 3.2)}$$

b) Rööbiti tühja ruumi võrranditega on otstarbekas pöörata tähelepanu ka aegruumi antud piirkonda iseloomustava Riemanni-Christoffeli tensori komponentidele (II 7.7). Võivad ju olla täidetud kas tingimused

$$R_{\varkappa\lambda\mu\nu} \neq 0 \qquad \text{(IV 3.3)}$$

(kas või Riemanni-Christoffeli tensori ühe komponendi jaoks) või tingimused

$$R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = 0. \qquad \text{(IV 3.4)}$$

(Pangem tähele, et vaadeldes gravitatsioonivälja võrrandeid ainelise keskkonna ja elektromagnetvälja puhul, s. t. nullist erineva parema poolega võrrandeid (IV 2.2), ei ole tingimused (IV 3.4) üldsegi mõeldavad. Jätame siin kõrvale sellise eriskummalise (põhimõtteliselt siiski võimaliku) materiaalse keskkonna juhu, mille puhul, vaatamata materiaalseid objekte iseloomustavate suuruste olemasolule, seisavad gravitatsioonivälja võrrandite paremal poolel siiski nullid.)

On teadlasi, näiteks V. Fok, J. Synge, A. Petrov jt.[x], kelle vaadete kohaselt tingimused (IV 3.4) tähendavad lihtsalt gravitatsioonivälja puudumist. "Tõeliste" gravitatsiooniväljade puhul peavad nende arvates alati olema täidetud tingimused (IV 3.3).

On aga olemas ka teisi teadlasi (Einstein nende hulgas), kelle vaatekoht gravitatsioonivälja puudumise või olemasolu probleemile on avaram. See avaram vaatekoht on seotud ekvivalentsusprintsiibi sügavama ja avarama käsitusega (vt. I, 7). Ka juhtu $R_{\varkappa\lambda\mu\nu}=0$ tuleb tõlgendada kui gravitatsioonivälja olemasolu juhtu, vastasel korral poleks meil enam võimalik rääkida gravitatsiooni- ja inertsinähtuste samaolemuslikkusest.

Tingimustel (IV 3.4) kirjeldavad võrrandite (IV 3.1) lahendid gravitatsioonivälja n.-ö. homogeenset ja isotroopset erivormi. Välja niisugust erivormi võiks nimetada ka inertsiväljaks ning võiks oletada, et inertsivälja kui homogeenset ja isotroopset fooni tekitavad antud vaatluskohast lõpmata kaugel paiknevad materiaalsed objektid. Selline inertsiväli tulebki ilmsiks mitteinertsiaalsetes taustsüsteemides. Selline inertsiväli suunab partikli vaba inertsiaalset liikumist samal moel na-

[x] Vt. näiteks kirjanduse nimistus toodud raamatuid nimetatud autoritelt.

gu "tõeline" gravitatsiooniväli suunab materiaalse objekti läheduses oleva partikli vaba gravitatiivset langemist.

Tingimustel (IV 3.3) kirjeldavad võrrandite (IV 3.1) lahendid gravitatsioonivälja m i t t e h o m o g e e n s e t vormi, mis on tekitatud materiaalsete objektide paigutuse lokaalsest mittehomogeensusest.

Ülalmainitust näeme, et ekvivalentsusprintsiibi sügavam tõlgendus annab ÜRT-le, sealhulgas selle teooria põhivõrranditele, tõepoolest sügavama ja ulatuslikuma sisu.

c) Niisiis on gravitatsioonipotentsiaalide $g_{\mu\nu}$ kõrval samuti Riemanni-Christoffeli tensori komponendid gravitatsioonivälja olulisteks karakteristikuteks. Olgu märgitud, et neid välju, mille puhul on täidetud tingimused (IV 3.4), nimetatakse veel ka g a l i l e i l i s t e k s. Nii nimetatakse samuti võrrandite (IV 3.1) vastavaid lahendeid. Tingimustele (IV 3.3) vastavad väljad on m i t t e g a l i l e i l i s e d.

Riemanni-Christoffeli tensori komponentide algebraliste omaduste järgi võib mittegalileilisi gravitatsioonivälju omakorda liigitada, kusjuures seda klassifikatsiooni on võimalik avardada samuti gravitatsioonivälja juhule mittetühjas ruumis. Ülalmainitud liigitust, mille kohaselt on olemas kolm ja ainult kolm mittegalileiliste gravitatsiooniväljade põhilist tüüpi, nimetatakse selle kasutuselevõtja nime järgi gravitatsiooniväljade P e t r o v i k l a s s i f i k a t s i o o n i k s [x]. Viimastel aastatel on teis-

---

[x] Petrovi klassifikatsiooniga põhjalikumaks tutvumiseks vt. P, lk. 101 jj. või ka LL, lk. 337-340.

te uurijate poolt Petrovi klassifikatsiooni mõnevõrra süvendatud ja detailiseeritud.

d) Võrrandite (IV 3.1) puhul väärib tähelepanu veel ka järgmine asjaolu.

Nagu teada, kehtivad identselt seosed $G^{\sigma}_{\mu;\sigma}=0$. Tänu valemile (IV 3.2) võtavad võrrandite (IV 3.1) puhul need seosed kuju

$$R^{\sigma}_{\mu;\sigma}=0. \qquad \text{(IV 3.5)}$$

Nii selgub, et võrrandeid (IV 3.1) seob omavahel neli identsust. Järelikult on selles süsteemis üldjuhul ainult kuus sõltumatut võrrandit, tundmatuid funktsioone on aga üldjuhul kümme. Võrrandisüsteem (IV 3.1) on faktiliselt alamääratud.

Et koordinaatide valik on ÜRT-s meelevaldne, siis peabki süsteem (IV 3.1) alamääratud olema. Niisugune alamääratus tähendab üksnes seda asjaolu, et üldjuhul peab nende võrrandite üldlahend sisaldama veel nelja tundmatut funktsiooni. Nende funktsioonide konkretiseerimine antud kindla gravitatsioonivälja puhul tähendab sisuliselt taustsüsteemi, üldisemalt rääkides koordinaatsüsteemi konkreetset valikut. Kui selliseid tundmatuid funktsioone üldlahendis poleks, siis oleksime vastuolus nii ekvivalentsus- kui ka üldrelatiivsusprintsiibiga.

Koordinaatsüsteem tuleb ÜRT-s alati valida täiendavate kaalutluste põhjal ning selle fikseerivad nn. k o o r d i n a a t t i n g i m u s e d

$$C_{\mu}=0. \qquad \text{(IV 3.6)}$$

Seejuures ei tohi need neli seost, mis lisatakse väljavõrranditele, tensorseosed olla. Nad peavad ju kehtima ainult ühe kindla koordinaatsüsteemide klassi puhul.

Et ühe või teise koordinaatsüsteemi (ja ka taustsüsteemi) eelistamine nõuab ÜRT-s mitmete täiendavate füüsikaliste kaalutluste arvestamist ning et sellised täiendavad kaalutlused võivad mitmelaadilised (ja üksteisest põhimõtteliselt erinevad) olla, siis pole ka üksmeelselt eelistatavaid koordinaattingimusi. ÜRT erinevate probleemide puhul osutuvad otstarbekateks erinevad koordinaattingimused. Muidugi kaasnevad sellega teatavad raskused arvutustulemuste füüsikalisel tõlgendamisel ja omavahel võrdlemisel. Sellised raskused on ÜRT üheks eripäraks ning nende põhjus peitub ilmselt juba ÜRT enda loomuses (vrdl. II, 1, h).

e) Järgnevalt tutvugem mõnede enamkasutatavate koordinaattingimustega.

Kui eeldatakse kehtivateks seosed

$$g_{44} = 1, \quad g_{4i} = 0, \qquad \text{(IV 3.7)}$$

siis on meil tegemist nn. p o o l g e o d e e t i l i s t e k o o r d i n a a t s ü s t e e m i d e g a . H.Keres tõlgendab niisuguseid koordinaatsüsteeme nn. üldistatud inertsiaalsüsteemidena. Paljudes kosmoloogilistes uurimistes on sellistel süsteemidel samuti eriline osatähtsus. Siin nimetatakse neid sünkroonseteks taustsüsteemideks ja ka kaasaliikuvateks taustsüsteemideks.[x]

[x] Vt. näiteks LL, lk-d 365-370; 458 jj.

Kui on rahuldatud tingimused

$$\left(\sqrt{g}\, g^{\mu\sigma}\right)_{,\sigma} = 0, \qquad \text{(IV 3.8)}$$

siis on tegemist nn. h a r m o o n i l i s t e k o o r d i n a a t i d e g a . Need süsteemid on eelistatavad (privilegeeritud) V. Foki seisukohalt. V. Fok ja tema vaatekoha pooldajad lahendavad konkreetseid gravitatsiooniprobleeme just selliste koordinaatsüsteemide klassi puhul.[x] Seejuures peetakse koordinaattingimusi (IV 3.8) enam-vähem samakaalulisteks väljavõrranditega.

Märkigem, et kui üks koordinaatsüsteemide klass saab ülalmainitud viisil eelistatuks ja füüsikanähtusi vaadeldakse juba ettemääratult selles kindlas koordinaatsüsteemide klassis (teisi võimalusi kõrvale jättes), siis kaotab üldrelatiivsusprintsiip tõepoolest oma mõtte (vt. I, 8, a). Kuid pole ju sugugi välistatud ka avaram vaatekoht, mis ei nõua koordinaatsüsteemide valiku sellist piiramist. Nagu öeldud, tõestavadki ÜRT-alased uurimised, et probleemide muutumisel tuleb tihti paratamatult muuta ka koordinaatsüsteemi valikut.

4. Nõrga välja võrrandid

a) Gravitatsioonivälja Einsteini võrrandeid on uuritud mitmesuguste l ä h e n d u s m e e t o d i t e g a . Olgu märgitud, et paljusid probleeme, kas või näiteks väl-

---

[x] Vt. kirjanduse nimistus osutatud V. Foki raamatut.

javõrrandite ja liikumisvõrrandite vahekorda (vt. IV, 1, d), teisiti uurida ei saagi. Võrrandite erakordse keerukuse tõttu osutub täpsete lahendite leidmine võimalikuks üksnes küllalt üksikutel ja seejuures tugevasti lihtsustatud erijuhtudel.

Vaadelgem siin üht lihtsaimat lähendusvõtet, mis aga annab meile gravitatsioonivälja Einsteini võrrandite struktuuri ja sisu kohta küllaltki palju olulist informatsiooni.

b) Eeldagem meetrilise tensori puhul, et tema komponentidel on järgmine kuju:

$$g_{\mu\nu} = \overset{(0)}{g}_{\mu\nu} + \overset{(1)}{g}_{\mu\nu} . \qquad \text{(IV 4.1)}$$

Siin olgu suurused $\overset{(0)}{g}_{\mu\nu}$ meetrilise tensori komponentide galileilised väärtused (rahuldavad tingimusi $R_{\varkappa\lambda\mu\nu} = 0$), suurused $\overset{(1)}{g}_{\mu\nu}$ olgu aga niivõrd väikesed parandusliikmed neile galileilistele väärtustele, et nende mittelineaarseid kombinatsioone me enam ei pruugi arvutustes arvesse võtta. Et suurused $\overset{(1)}{g}_{\mu\nu}$ jääksid väikesteks aegruumi kogu vaadeldavas piirkonnas, siis peavad ka tuletised $\overset{(1)}{g}_{\mu\nu,\sigma}$ olema sama järku väikesed suurused.

Nimetagem gravitatsioonivälju, mida kirjeldavad ülalmainitud omadustega meetrilise tensori komponendid, n õ r k a d e k s .

c) On teada (vt. II, 1, a, b), et üldisust piiramata võib valida

$$\overset{(0)}{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} . \qquad \text{(IV 4.2)}$$

Seega omandab valem (IV 4.1) kuju

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \overset{(1)}{g}_{\mu\nu} . \tag{IV 4.3}$$

Siit avaldame kontravariantsed komponendid

$$g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} + \overset{(1)}{g}{}^{\mu\nu}$$

suuruste $\overset{(1)}{g}_{\mu\nu}$ kaudu. Et kehtib seos

$$\delta_\mu^\nu = g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = (\delta_{\mu\sigma} + \overset{(1)}{g}_{\mu\sigma})(\delta^{\sigma\nu} + \overset{(1)}{g}{}^{\sigma\nu}) \simeq \delta_\mu^\nu + \overset{(1)}{g}{}^{\mu\nu} + \overset{(1)}{g}_{\mu\nu}$$

(siin on ära jäetud kõrgemat järku väikesed suurused), siis saame

$$g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} - \overset{(1)}{g}_{\mu\nu} . \tag{IV 4.4}$$

Pangem muuhulgas tähele, et kuna kõik suurused on nüüd faktiliselt esitatud eukleidilises 4-ruumis meetrikaga $\overset{(0)}{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, siis edaspidi kaotab ka indeksite asukoht oma printsipiaalse tähenduse.

Edasi arvutame valemitega (II 6.9) defineeritud suurused ("Christoffeli 1. liiki sümbolid"):

$$\Gamma_{\mu\nu.\sigma} = \frac{1}{2}(\overset{(1)}{g}_{\mu\sigma,\nu} + \overset{(1)}{g}_{\nu\sigma,\mu} - \overset{(1)}{g}_{\mu\nu,\sigma}) \tag{IV 4.5}$$

"Christoffeli 2. liiki sümbolid" leiame valemite (II 6.11) ja (IV 4.4) põhjal:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\mu\nu.\sigma} = (\delta^{\lambda\sigma} - \overset{(1)}{g}_{\lambda\sigma})\Gamma_{\mu\nu.\sigma} .$$

Jättes ära kõrgemat järku väikesed suurused, võtab see seos kuju

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu.\lambda} . \tag{IV 4.6}$$

Valemist (IV 4.5) näeme, et Christoffeli koefitsiendid $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ on antud juhul samuti väikesed suurused. Järelikult võib ka Ricci tensori komponentide (II 8.1) arvutamisel jätta arvestamata ruutliikmed. Antud täpsuse piirides kehtib seega valem

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu,\sigma} ,$$

mis seoseid (IV 4.5-6) arvestades omandab kuju

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\sigma.\sigma,\nu} - \Gamma_{\mu\nu.\sigma,\sigma} =$$

$$= \frac{1}{2}\overset{(1)}{g}_{\mu\nu,\sigma,\sigma} - \frac{1}{2}\left(\overset{(1)}{g}_{\mu\sigma,\nu,\sigma} + \overset{(1)}{g}_{\nu\sigma,\mu,\sigma} - \overset{(1)}{g}_{\sigma\sigma,\mu,\nu}\right). \qquad \text{(IV 4.7)}$$

d) Pangem tähele, et meetrilise tensori kuju pole nõrga välja tingimustega veel üheselt määratud. Ka siin on võimalik täiendavalt täpsustada koordinaatsüsteemi valikut. Seejuures ei muuda koordinaatteisendused

$$x'_\nu = x_\nu + \delta x_\nu , \qquad \text{(IV 4.8)}$$

kus δx_ν on mingid meelevaldsed väikesed suurused, tensori $g_{\mu\nu}$ põhimõttelist kuju (IV 4.3). Veendugem selles.

Arvestades meetrilise tensori teisenemisvalemit (II 3.24), kusjuures vahetame üksnes primiga ja ilma primita indeksid, leiame pärast kõrgemat järku väikeste suuruste ärajätmist

$$g'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \overset{(1)}{g}{}'_{\mu\nu} , \qquad \text{(IV 4.9)}$$

kus

$$\overset{(1)}{g}{}'_{\mu\nu} = \overset{(1)}{g}_{\mu\nu} + (\delta x_\nu)_{,\mu} + (\delta x_\mu)_{,\nu} . \qquad \text{(IV 4.10)}$$

Siit näeme, et $\overset{(1)}{g}{}'_{\mu\nu}$ on tõepoolest sama liiki väike suurus nagu $\overset{(1)}{g}_{\mu\nu}$.

e) Edasi võib kasutada teisendust (IV 4.8) Ricci tensori kuju lihtsustamiseks.

Esmalt defineerime uued suurused

$$h_{\mu\sigma} = \overset{(1)}{g}_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}\overset{(1)}{g}_{\rho\rho}\delta_{\mu\sigma}. \qquad \text{(IV 4.11)}$$

Et ilmselt kehtib seos

$$h_{\rho\rho} = -\overset{(1)}{g}_{\rho\rho},$$

siis saame ka valemi

$$\overset{(1)}{g}_{\mu\sigma} = h_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}h_{\rho\rho}\delta_{\mu\sigma} \qquad \text{(IV 4.12)}$$

Äsjasaadud valemi põhjal kehtib seos

$$\overset{(1)}{g}_{\mu\sigma,\sigma} = h_{\mu\sigma,\sigma} - \frac{1}{2}h_{\rho\rho,\mu}$$

mille kasutamine Ricci tensori komponentide (IV 4.7) puhul annab

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\overset{(1)}{g}_{\mu\nu,\sigma,\sigma} - h_{\sigma(\mu,\nu),\sigma}. \qquad \text{(IV 4.13)}$$

Teisenduste (IV 4.8) abil mingem nüüd üle uude koordinaatsüsteemi. Arvestades seoseid (IV 4.10-11), saame uues koordinaatsüsteemis

$$h'_{\mu\sigma} = h_{\mu\sigma} + (\delta x_\sigma)_{,\mu} + (\delta x_\mu)_{,\sigma} - \delta_{\mu\sigma}(\delta x_\rho)_{,\rho}.$$

Siit leiame pärast arvutusi

$$h'_{\mu\sigma,\sigma} = h_{\mu\sigma,\sigma} - (\delta x_\mu)_{,\sigma,\sigma}. \qquad \text{(IV 4.14)}$$

Kui nüüd valime meelevaldsed suurused δx_μ sellistena, et oleksid rahuldatud võrrandid

$$(\delta x_\mu)_{,\sigma,\sigma} = h_{\mu\sigma,\sigma}, \qquad \text{(IV 4.15)}$$

siis uues koordinaatsüsteemis kehtib (IV 4.14) põhjal alati tingimus

$$h'_{\mu\sigma,\sigma} = 0. \qquad \text{(IV 4.16)}$$

Seega on õige ka võrdus

$$\frac{1}{2}\left(h'_{\sigma\mu,\nu,\sigma}+h'_{\sigma\nu,\mu,\sigma}\right)\equiv h'_{\sigma(\mu,\nu),\sigma}=0,$$

mille tulemusena Ricci tensor (IV 4.13) omandab uues koordinaatsüsteemis kuju

$$R'_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\overset{(1)}{g}{}'_{\mu\nu,\sigma\sigma} \qquad \text{(IV 4.17)}$$

(pangem tähele, et seost (IV 4.13) võib rakendada mistahes koordinaatsüsteemis - nii "vanas" kui "uues").

Et võrrandite (IV 4.15) vasemal poolel seisev diferentsiaaloperaator on tegelikult d'Alembert'i operaator:

$$(\delta x_\mu)_{,\sigma,\sigma}\equiv(\delta x_\mu)_{,1,1}+(\delta x_\mu)_{,2,2}+(\delta x_\mu)_{,3,3}+(\delta x_\mu)_{,4,4}=$$

$$=\Delta(\delta x_\mu)+\frac{1}{(ic)^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta x_\mu)=\Box(\delta x_\mu), \qquad \text{(IV 4.18)}$$

siis järelikult kujutavad võrrandid (IV 4.15) endast d'Alembert'i võrrandeid, mille paremal poolel on teada olevad funktsioonid (suurused $h_{\mu\sigma}$ on ju "vanas" koordinaatsüsteemis teada). Et d'Alembert'i võrrandil on alati lahend olemas, siis on sellega alati tagatud ka üleminek koordinaatsüsteemi, kus Ricci tensoril on kuju (IV 4.17).

Pärast üleminekut uude koordinaatsüsteemi on primid juba ülearused ning arvestades valemit (IV 4.18) saame seega

$$R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\Box\overset{(1)}{g}_{\mu\nu}. \qquad \text{(IV 4.19)}$$

Olgu märgitud, et analoogia põhjal elektromagnetvälja teooriaga, võib selles uues koordinaatsüsteemis kehtivat tingimust (IV 4.16) tõlgendada ka Lorentzi kalibreerimistingimusena.

f) Arvestades nüüd valemit (IV 4.19) ja kirjutades üles gravitatsioonivälja võrrandid (IV 2.2) täielikult kovariantsete komponentide näol, saame nad kujul, mis kehtib mistahes struktuuriga nõrga välja puhul:

$$\underline{\Box \overset{(1)}{g}_{\mu\nu} = \varkappa (2T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} T)}. \qquad \text{(IV 4.20)}$$

Mõistagi peavad olema nendes võrrandites parema poole suurused samuti väikesed.

Niisiis saame kapitaalset tähendust omava tulemuse: <u>nõrga välja lähenduses taanduvad gravitatsioonivälja Einsteini võrrandid d'Alembert'i tüüpi võrrandite süsteemiks</u>.

<u>Ülesandeid</u>

1. Tuletada seos (IV 4.9).
2. Leida valem (IV 4.13).

5. Gravitatsiooni Newtoni teooria kui ÜRT piirjuht

a) Eeldagem, et lisaks nõrga gravitatsioonivälja üldistele tingimustele (IV 4.3):

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \overset{(1)}{g}_{\mu\nu} \qquad \text{(IV 5.1)}$$

on veel täidetud tingimused

$$g_{\mu\nu,4} = 0 , \qquad \text{(IV 5.2)}$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} T^{\sigma}_{\nu} = c^2 \mu_0 V_\mu V_\nu \qquad \text{(IV 5.3)}$$

ja

$$V^{\kappa} \equiv \frac{dx_{\kappa}}{ds} = 0 . \qquad \text{(IV 5.4)}$$

Valemid (IV 5.2) kujutavad endast välja s t a t s i o n a a r s u s e tingimust. Tensor (IV 5.3) koos lisatingimusega (IV 5.4) kirjeldab aga statsionaarselt paiknevat ja vastastikku üksteist ainult gravitatiivselt mõjustavate partiklite süsteemi. (Mittegravitatiivsed mõjustused puuduvad.)

b) Uurigem nüüd, millise kuju omandavad tehtud eeldustel gravitatsioonivälja võrrandid (IV 4.20).

Näeme kõigepealt, et tänu tingimustele (IV 5.2) asendub d'Alembert'i operaator $\Box$ Laplace'i operaatoriga Δ. Valemid (IV 5.3-4) annavad tingimuse (IV 5.1) arvestamisel

$$T_{\mu\nu} = (\delta_{\mu\sigma} + \overset{(1)}{g}_{\mu\sigma})\, c^2 \mu_0 \delta_4^{\sigma} \delta_{\nu}^{4} .$$

Et suurused $\overset{(1)}{g}_{\mu\sigma}$ on eelduse kohaselt väga väikesed, siis nõrga välja lähenduses võib nad ilmselt jätta äsjatoodud valemis arvestamata ning me saame

$$T_{\mu\nu} = c^2 \mu_0 \delta_{\mu}^{4} \delta_{\nu}^{4} , \qquad \text{(IV 5.5)}$$

s. t.

$$T_{44} = c^2 \mu_0 , \quad T_{\kappa 4} = T_{i\kappa} = 0 .$$

Siit leiame koondamise tulemusena

$$T \equiv T_{\sigma}^{\sigma} = T_4^4 = g^{44} T_{44} = (1 - g_{44}) T_{44} \simeq T_{44} = c^2 \mu_0 . \qquad \text{(IV 5.6)}$$

Kõike eeltoodut arvestades omandavad väljavõrrandid (IV 4.20) kuju

$$\Delta \overset{(1)}{g}_{\mu\nu} = \varkappa c^2 \mu_0 \left(2\delta_\mu^4 \delta_\nu^4 - \delta_{\mu\nu}\right). \qquad \text{(IV 5.7)}$$

Gravitatsioonivälja võrrandid on taandunud Poissoni tüüpi võrranditeks, s. t. samasugusteks võrranditeks, nagu on gravitatsiooni Newtoni teooria võrrand (I 6.8) gravitatsioonipotentsiaali U jaoks.

c) Äsjasaadud tulemustel on jällegi fundamentaalne tähendus. Näeme ju siit, et kui tõlgendada parandusliikmeid $\overset{(1)}{g}_{\mu\nu}$ suurustena, mis on võrdelised Newtoni gravitatsioonipotentsiaaliga U, siis tehtud eeldustel, s.t. n õ r k a d e ja s t a t s i o n a a r s e t e gravitatsiooniväljade piirjuhul läheb Einsteini gravitatsiooniteooria üle Newtoni gravitatsiooniteooriaks. Sellega aga ongi rahuldatud vastavuse printsiip Einsteini väljavõrrandite puhul (vt. IV, 1, c).

Silmas pidades vastavuse printsiipi, võime ühelt poolt ilmselt mõista sügavamalt ja tänapäevasemalt Newtoni gravitatsiooniteooriat (sellest täpsemalt veidi hiljem), teiselt poolt saame aga olulisi juhtmõtteid ÜRT suuruste tõlgendamiseks. Ülaltoodu põhjal näiteks näeme, et suurusi $g_{\mu\nu}$, s. t. meetrilise tensori komponente on tõepoolest mõistlik käsitada kui gravitatsioonivälja potentsiaale (vt. III, 1, d). Konstant $\varkappa$ on aga võrrandite (I 6.8) ja (IV 5.7) põhjal ilmselt võrdeline Newtoni gravitatsioonikonstandiga.

d) Et teha kindlaks täpset seost nii suuruste U ja $\overset{(1)}{g}_{\mu\nu}$ kui ka konstantide γ ja $\varkappa$ vahel, ei piisa üksi võrranditest (IV 5.7). Lisaks tuleb võrrelda veel gravitatsiooniväljas viibiva vaba partikli liikumisvõrrandeid nii Newtoni kui ka Einsteini teoorias.

ÜRT kohaselt allub vaba partikli liikumine võrranditele (III 3.2). Eeldades, et partikkel on hetkeliselt paigal, s. t. et kehtib tingimus

$$\frac{dx_k}{ds} = 0\,,$$

omandavad need võrrandid kuju

$$\frac{d^2x_k}{ds^2} + \Gamma^{\nu}_{44}\frac{dx_4}{ds}\frac{dx_4}{ds} = 0.$$

Jättes kõrvale võrrandi indeksi väärtusel $\nu = 4$, mis meile praegu olulist huvi ei paku (sellest võrrandist tuleneb sõltuvus intervalli s ja aja t vahel), anname ülejäänud võrranditele ($\nu = i$) kuju

$$\frac{d^2x_i}{dx_4^2} + \Gamma^{i}_{44} = 0\,,$$

millest omakorda seost $x_4 = ict$ arvestades järeldub

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = c^2\Gamma^{i}_{44}\,. \qquad \text{(IV 5.8)}$$

Saadud valem esitab hetkeliselt paigaloleva partikli vaba langemise kiirenduse komponendid koordinaatidega x_i ja t fikseeritud taustsüsteemis.

Võrdleme nüüd seda ÜRT-st saadud tulemust Newtoni teooria vastava valemiga (I 6.5), mis suuruse $\vec{g}$ kahelist tähendust (vt. I, 6, c) arvestades võib esineda ka kujul

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = -U_{,i}\,. \qquad \text{(IV 5.9)}$$

Et nõrga ja statsionaarse välja puhul kehtib valemite (IV 4.5-6) ja (IV 5,2) tõttu seos

$$\Gamma^{i}_{44} = \Gamma_{44.i} = -\frac{1}{2}\overset{(1)}{g}_{44,i}$$

siis saame võrrandite (IV 5.8) ja (IV 5.9) võrdlemise tulemusena diferentsiaalvõrrandid

$$\overset{(1)}{g}_{44,i} = \frac{2}{c^2}U_{,i} \,. \qquad \text{(IV 5.10)}$$

Nende võrrandite integreerimine annab omakorda

$$\overset{(1)}{g}_{44} = \frac{2U}{c^2} + K \,, \qquad \text{(IV 5.11)}$$

kus K on integreerimiskonstant. Et juhule $U = 0$ vastaks juht $\overset{(1)}{g}_{44} = 0$, tuleb ilmselt valida $K = 0$. Niisiis saame potentsiaalide $\overset{(1)}{g}_{44}$ loomuliku kalibreeringu korral lõpptulemuseks

$$\underline{\overset{(1)}{g}_{44} = \frac{2U}{c^2}} \,. \qquad \text{(IV 5.12)}$$

e) Suuruse $\overset{(1)}{g}_{44}$ jaoks on võrrandil (IV 5.7) kuju

$$\Delta \overset{(1)}{g}_{44} = \varkappa c^2 \mu_0 \,. \qquad \text{(IV 5.13)}$$

Seose (IV 5.12) tõttu omandab aga sama võrrand kuju

$$\Delta U = \frac{\varkappa c^4}{2}\mu_0 \,. \qquad \text{(IV 5.14)}$$

Et see võrrand peabki nüüd olema gravitatsiooni Newtoni teooria põhivõrrand (I 6.8), siis saame siit leida seose Einsteini gravitatsioonikonstandi $\varkappa$ ja Newtoni gravitatsioonikonstandi γ vahel:

$$\underline{\varkappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4}} \,. \qquad \text{(IV 5.15)}$$

f) Silmas pidades potentsiaali $\overset{(1)}{g}_{44}$ kuju (IV 5.12), püüame järgnevalt leida süsteemis (IV 5.7) avaldised ka kõigi ülejäänud suuruste $\overset{(1)}{g}_{\mu\nu}$ jaoks.

Kuna üldised võrrandid (IV 5.7) erinevad võrrandist (IV 5.13) ainult teguri $(2\delta_{\mu}^{4}\delta_{\nu}^{4}-\delta_{\mu\nu})$ poolest võrrandite paremal poolel, siis on ilmselt lihtsaim võimalus eeldada, et ka suurused $\overset{(1)}{g}_{\mu\nu}$ erinevad suurusest $\overset{(1)}{g}_{44}$ üksnes sellise teguri poolest, s. t.

$$\overset{(1)}{g}_{\mu\nu}=\overset{(1)}{g}_{44}(2\delta_{\mu}^{4}\delta_{\nu}^{4}-\delta_{\mu\nu})=\frac{2U}{c^2}(2\delta_{\mu}^{4}\delta_{\nu}^{4}-\delta_{\mu\nu}) \quad \text{(IV 5.16)}$$

(Pangem tähele, et juhu $\mu=\nu=4$ jaoks on siin tõepoolest identsus.)

Arvestades valemit (IV 5.1), on avaldistega (IV 5.16) täielikult määratud aegruumi meetrika nõrkade ja statsionaarsete gravitatsiooniväljade puhul. Sellise aegruumi meetriline vorm omandab kuju

$$(ds)^2=\left[\delta_{\mu\nu}+\frac{2U}{c^2}(2\delta_{\mu}^{4}\delta_{\nu}^{4}-\delta_{\mu\nu})\right]dx_{\mu}dx_{\nu}=\left(1-\frac{2U}{c^2}\right)\delta_{\mu\nu}dx_{\mu}dx_{\nu}+$$
$$+\frac{4U}{c^2}\delta_{\mu}^{4}\delta_{\nu}^{4}dx_{\mu}dx_{\nu}=\left(1-\frac{2U}{c^2}\right)dx_{s}dx_{s}+\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)(dx_4)^2.$$

Arvestades veel seost koordinaadi x_4 ja aja t vahel $x_4=ict$, saame lõplikult

$$(ds)^2=-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)(cdt)^2+\left(1-\frac{2U}{c^2}\right)\left[(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2\right] \quad \text{(IV 5.17)}$$

Näeme, et antud juhul on meetrilises vormis ainult diagonaalsed elemendid, kuid meetrilise vormi kordajad erinevad tasase aegruumi meetrilisest vormist (III 1.1) parandusliikme $\pm\frac{2U}{c^2}$ võrra.

g) Äsjasaadud tulemuste põhjal võime anda t ä n a p ä e v a s e h i n n a n g u Newtoni gravitatsiooniteooriale, aga samuti eukleidilise geomeetria osatähtsusele füüsikanähtuste kirjeldamisel.

Kõige olulisema asjaoluna rõhutagem kohe, et nagu veenduda võisime, pole Newtoni ja Einsteini teooriad üldsegi mingis "vastuolus". Vastupidi - gravitatsiooni Newtoni teooriat tuleb vaadelda kui Einsteini teooria koostisosa. Järelikult võib rakendada Newtoni teooria puhul ka kõiki Einsteini teooriale omaseid uusi ettekujutusi (muidugi vaid sellises ulatuses, mis sel puhul loomulik on). Võib isegi formuleerida Newtoni teooriat n.-ö. kõvera aegruumi keeles, tuues sellega esile teooria mitmeid seni varju jäänud nüansse.[x]

Mõningaid Newtoni teooria mõisteid võib nüüd hoopis sügavamalt mõista. Näiteks on raskus- ehk gravitatsioonijõud tõlgendatav kui Newtoni teooria eripärane suurus, mida läheb meil vaja üksnes siis, kui käsitleme aegruumi faktiliselt olemasolevaid kõverusefekte n.-ö. tasase aegruumi keeles, s. t. siis, kui vaatleme kõvera aegruumiga lahutamatult seotud gravitatsioonivälja n.-ö. projitseerituna tasasele, kogu ulatuses ühesuguste omadustega aegruumile. Gravitatsioonijõud kui füüsikaline suurus on sel juhul vajalik täiesti analoogiliselt inertsijõu mõistele, mida omakorda läheb vaja seetõttu, et vaadeldakse mitteinertsiaalse taustsüsteemi nähtusi inertsiaalsüsteemi "keeles". Mitteinertsiaalsetes taustsüsteemides erinevad ju aegruumi omadused faktiliselt samuti inertsiaalsüsteemide tasase aegruumi omadustest (vt. I, 9, a).

Näeme, et nüüd omandab ka Newtoni teoorias gravitatsioonivälja mõiste reaalse sisu, kuivõrd Einsteini teoorias kui

---

[x] Vt. näiteks H. Keres, Mõningaid gravitatsiooniteooria küsimusi. —Tähetorni Kalender. 1974, lk. 44.

24

relativistlikus teoorias peab see mõiste tingimata reaalset sisu omama. Et aga Newtoni teooria kirjeldab ainult gravistaatilisi välju (nüüd veendusime, et sellised ongi selle teooria loomulikud rakenduspiirid), siis välja muutuste levik mõistagi temas kajastuda ei saagi (vrdl. I, 6, e).

Niisiis, vaadelduna oma loomulikus rakendusulatuses ja ootamata temalt rohkem, kui ta pakkuda saab, pole Newtoni gravitatsiooniteooriale tegelikult midagi ette heita ei kvantitatiivsest ega ka kvalitatiivsest aspektist. Einsteini teooria annab seletuse kõigile Newtoni teooria põhimõttelistele "puudustele" (vt. I, 6, a).

h) Gravitatsiooni Einsteini teooria teeb meile ka selgeks, miks vähemalt Maa peal ja samuti Päikesesüsteemi ulatuses on Newtoni teooria siiski ülitäpne gravitatsiooniteooria (vt. I, 4, f).

Asi seisab selles, et eeldused (IV 5.1–4) on meie Päikesesüsteemis tõepoolest väga suure täpsusega täidetud.

Aegruumi meetrika (IV 5.17) saame teatavasti just eeldusest (IV 5.1) lähtudes. Kui aga arvutada Maa pinna jaoks välja paranduslikme $\left|\frac{2U}{c^2}\right| \simeq \frac{2\gamma M_♁}{c^2 R_♁}$ arvväärtus, siis leiame selle suurusjärguks 10^{-9}. Niisiis on tõepoolest tegemist väga väikese parandusega galileilisele meetrikale. Siit järeldubki, miks eukleidiline geomeetria on Maa peal väga hästi kehtiv. Ka parandused Päikesesüsteemi muude paikkondade jaoks on üsna väikesed ning seepärast on teada ainult üksikud üliväikesed efektid Päikesesüsteemis, milles avaldub aegruumi faktiline erinevus galileilisest (sellest tuleb juttu käesoleva loengukursuse V peatükis).

Eeldus (IV 5.2) on Päikesesüsteemis samuti väga hästi täidetud, sest gravitatsiooniväli on siin tõepoolest küllaltki suure täpsusega statsionaarne.

Ka eeldus (IV 5.3) koos eeldusega (IV 5.4) on Päikesesüsteemis täidetud, sest Päikesesüsteemi olulisi ainelisi koostisosasid võib ju teatavasti tõepoolest partiklitena vaadelda, kusjuures nende statsionaarne liikumine on just selline, et suurusi $\frac{dx_\kappa}{ds}$ võib nulliga võrdseteks lugeda. Veendugem selles.

Et antud juhul on meetrilise vormi $(ds)^2$ puhul kordajate erinevus galileilistest väärtustest tühine, siis kehtib suure täpsusega tingimus

$$\left(\frac{ds}{dx_4}\right)^2 \simeq 1 + \frac{dx_\kappa dx_\kappa}{(dx_4)^2} = 1 - \frac{1}{c^2}\frac{dx_\kappa}{dt}\frac{dx_\kappa}{dt} = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2, \qquad \text{(IV 5.18)}$$

kus suurus $\frac{dx_\kappa}{dt}\frac{dx_\kappa}{dt} = v_\kappa v_\kappa = (v)^2$ võib olla tõlgendatav Päikesesüsteemi objektide liikumise kiiruse ruuduna. Tingimuse (IV 5.18) abil saame nüüd ka seose

$$\left|\frac{dx_\kappa}{ds}\right| = \left|\frac{dx_\kappa}{dx_4}\right|\left|\frac{dx_4}{ds}\right| \simeq \frac{v_\kappa}{c}\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2}. \qquad \text{(IV 5.19)}$$

Kuna planeetide ja Päikesesüsteemi muude suuremate objektide liikumisel kehtib teatavasti hästi tingimus $v_\kappa \ll c$, siis järeldub seosest (IV 5.19), et suurused $\frac{dx_\kappa}{ds}$ on tõepoolest väga väikesed ning neid võib ilma suurema veata nulliga võrdseteks lugeda.

i) Lõpuks rõhutagem veel järgmist asjaolu.

Nägime, et gravitatsiooni Newtoni teooria on gravitatsiooni Einsteini teooria mitterelativistlik piirjuht.

Selgub aga, et Newtoni teooria pole Einsteini teooria ainuke selline piirjuht. Üldisema, rangema ja üksikasjalikuma matemaatilise käsitlusega (kasutades sealhulgas eespool nimetatud võimalust kirja panna Newtoni teooriat Einsteini teooriale omaste matemaatiliste vahendite abil) on H. Keres näidanud, et lisaks Newtoni tüüpi gravitatsiooniväljadele kirjeldavad Einsteini võrrandid mitterelativistlikul piirjuhul ka veel p ö ö r i s e l i s i, s.t. m i t t e - n j u u t o n i l i s i gravitatsioonivälju.[x] Selliste väljade esinemise kohta tegelikkuses andmed praegu küll puuduvad.

Ülesandeid

1. Silmas pidades meetrilise vormi (IV 5.17) kuju ja kerakujulise keha Newtoni gravitatsioonipotentsiaali avaldist, tuletada liikumisvõrranditest (III 3.2) valemid (I 5.7). Seejuures lugeda muidugi $m_K \equiv M_K$ ning lihtsustavalt jätta arvestamata Päikese mõju, s. t. eeldada, et $\vec{a}_\circ = 0$ ning liiget suurusega $M_\odot$ pole. Niisugune arvutus tõestabki, et nii "inertsijõude" kui ka "gravitatsioonijõude" (klassikalise Newtoni mehaanika mõttes) kirjeldavad võrrandites (III 3.2) suurused $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ (vt. III, 4, a).

---

[x] Vt. Tähetorni Kalender. 1974, lk. 44.

6. Gravitatsioonilained ja gravitatsioonivälja energia probleem

a) Nägime, et nõrga välja üldkujulised võrrandid (IV 4.20) kujutavad endast d'Alembert'i tüüpi võrrandite süsteemi. Sellest tõigast aga järeldub, et juba nõrga välja lähenduses kirjeldavad Einsteini võrrandid gravistaatiliste väljade (njuutoniliste ja mittenjuutoniliste) kõrval samuti a j a s t s õ l t u v a i d gravitatsioonivälju.

Võrrandeid (IV 4.20) võib käsitada täiesti analoogiliselt elektromagnetvälja potentsiaalide võrranditega meelevaldselt liikuvate laengute juhul. Ka siin võib näiteks uurida välja eemal teatavast liikuvate materiaalsete objektide süsteemist. Tühja ruumi piirkonna jaoks saame võrrandid (IV 4.20) kujul

$$\Box \overset{(1)}{g}_{\mu\nu} \equiv \Delta \overset{(1)}{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \overset{(1)}{g}_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(IV 6.1)}$$

Et need võrrandid kirjeldavad lainelisi protsesse, see on hästi teada.

Niisiis, analoogiliselt Maxwelli-Lorentzi võrranditega, järeldub Einsteini võrranditest v ä l j a m u u t u s t e l a i n e l i s e l e v i k u võimalus, kusjuures need välja muutused peavad levima tühjuses kiirusega c .

Nagu elektromagnetvälja potentsiaalide võrrandite puhul, nii võib ka võrrandite (IV 6.1) puhul leida lahendeid retardeeritud potentsiaalide kujul. Selle asjaolu kindlakstegemisel oli teatavasti oluline osa ettekujutuste kujunemisel elektromagnetväljast kui realiteedist. Retardeeritud potentsiaalide valemitest järeldub, et kui vaatlejast teataval kaugusel R välja allikate paigutus muutub, siis järgneb välja muutus vaatluskohas alles mõninga aja $\frac{R}{c}$ pärast. See ajavahemik kulub füüsikalise mõjustuse üleandmiseks ühest ruumipunktist teise. Seepärast ei saagi enam käsitada ruumi välja allikate ümber tühipalja "mittemiskina". Seal peab ju midagi r e a a l s e l t eksisteerivat ja levivat olema! Kirjeldades seega staatiliste protsessidе kõrval ka dünaamilisi, annab gravitatsiooni Einsteini teooria juba nõrga välja lähenduses kindla ettekujutuse väljast kui realiteedist.

b) N õ r g a välja lähenduses võib gravitatsioonivälja lainelist levikut tõlgendada kui galileilise meetrika häirituse levikut, s. t. kui midagi analoogilist virvenduste levikule tasasel veepinnal. Gravitatsioonikiirguse teooriat võib siin arendada igati elektromagnetkiirguse teooria eeskujul (näiteks võib vaadelda välja kaugel kiirgajast teatavates multipollähendites jne.)[x]

Kuidas aga tõlgendada t u g e v a t e gravitatsiooniväljade puhul gravitatsioonikiirguse levikut, s.t. gravitatsioonilaineid? Selgub, et niisuguste protsesside in-

---

[x] Gravitatsioonikiirguse probleemi täpsemaks uurimiseks tuleb juba nõrga välja lähenduseski kasutada ülalkirjeldatust keerulisemat ja peenemat metoodikat. Tänapäeval tuginevad mitmed olulisemad seda tüüpi uurimisviisid tetraadformalismi kasutamisele. Gravitatsioonilainete omaduste teoreetilise uurimise mõningate tulemustega tutvumiseks vt. ka LL, lk. 437 jj.

terpreteerimine on üsnagi keeruline aegruumi suure kõverusе tõttu. Gravitatsioonivälja täpsete võrrandite selliseid lahendeid, mis ilmselt just gravitatsioonikiirgust kirjeldavad, siiski tuntakse.

c) Gravitatsioonilainete probleem seostub g r a v i t a t s i o o n i v ä l j a e n e r g i a probleemiga. Võib ju küsida: kas ka gravitatsioonilained kannavad energiat? Vastamiseks peab aga teadma, mida endast üldse kujutab gravitatsioonivälja energia.

Küsimus sellest, mida üldjuhulise kõvera aegruumi puhul mõista gravitatsioonivälja energia all, on ÜRT-s tänase päevani lahtine. Seni pole siin veel jõutud ühtse seisukoha tunnustamiseni.

Kogu senises füüsikas on mõistetud ja mõistetakse energiat kui galileilise aegruumiga lahutamatult seotud mõistet. See orgaaniline seos näib veel sügavam, kui tuletame meelde, et ERT-s on energia j ä ä v u s s e a d u s (nagu impulsi ja impulssmomendi jäävusseadusedki) vahetult seotud galileilise aegruumi omadustega. Energia jäävusseadus isoleeritud süsteemi jaoks tuleneb teatavasti aja homogeensuse omadustest[x].

Kõvera aegruumi puhul ei saa enam rääkida ruumi isotroopsusest ega homogeensusest, ei ka aja homogeensusest, järelikult pole enam energia jäävusseadust ERT mõttes. Võib-olla pole siis samuti energia mõistet "vanas", s. t. tasase aegruumi mõttes. Kõik füüsika mõisted arenevad ja miks

---

[x] Vt. näiteks LL - Meh., lk. 23.

ei võiks seegi mõiste saada n.-õ. ümber normeeritud? (Vrdl. äsjaöeldut kaalu mõiste käsitlusega ÜRT seisukohalt - III, 4, c-f.) Energia mõiste võib ju olla ÜRT-s komplitseeritum, millest "vanade" ja tuttavate olukordade jaoks peaks muidugi tulenema tuntud energia mõiste. Nägime juba, et gravitatsioonilise vastasmõju d ü n a a m i l i n e aspekt avaldub lihtsalt aegruumi kõveruses (gravitatsioonijõu funktsiooni võtavad üle suurused $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$). Kas ei avaldu siis ka gravitatsioonilise vastasmõju e n e r g e e t i l i n e aspekt lihtsalt aegruumi kõveruse ühe tahuna, kusjuures vana tuttava energia mõiste saame vaid nähtuste projitseerimisel tasasesse ruumi? (Vrdl. IV 5, g.)

d) Gravitatsioonilainete ja gravitatsioonivälja energia seni lahtiste probleemidega seostub veel g r a v i t a t s i o o n i v ä l j a k v a n t i s e e r i m i s e samuti lahtine probleem.

Võib ju küsida: kui saab kvantiseerida elektromagnetvälja ja omistada välja kvantidele reaalset sisu, miks ei saa siis sedasama teha gravitatsioonivälja puhul?

Vähemalt nõrga välja lähenduses, s. t. siis, kui välja võrrandid on lineariseeritud, võib kvantelektrodünaamika eeskujul tõepoolest matemaatiliselt kvantiseerimise protseduuri läbi teha. Et mingit empiirilist baasi seni pole, siis jääb aga küllaltki segaseks ülalnimetatud matemaatilise protseduuri tulemuste, s. t. gravitatsioonivälja kvantide (nn. gravitonide) füüsikaline tõlgendamine.

On uurijaid, kes ÜRT-d ei peagi rahuldavaks seetõttu, et see on kvantteooriaga raskesti seostatav. Pannakse ette asendada ÜRT ikkagi tasase aegruumi foonil opereeriva gravitatsiooniteooriaga. Kas aga sellised kaalutlused siiski küllalt põhjendatud on? Võib-olla oluliste olemuslike erinevuste tõttu gravitatsiooni- ja elektromagnetvälja vahel peab ka gravitatsiooniteooria seos kvantteooriaga hoopis teistsugune olema.

7. Punktmassi gravitatsiooniväli

a) Nagu öeldud, osutub gravitatsioonivälja Einsteini võrrandite täpsete lahendite leidmine võimalikuks ainult küllalt tugevasti lihtsustatud erijuhtudel. Käesolevas punktis vaadelgem gravitatsioonivälja võrrandite lahendamist ühel sellisel lihtsal, kuid seejuures üpris olulisel erijuhul; nimel juhul, kui välja allikaks on üksik punktmass.

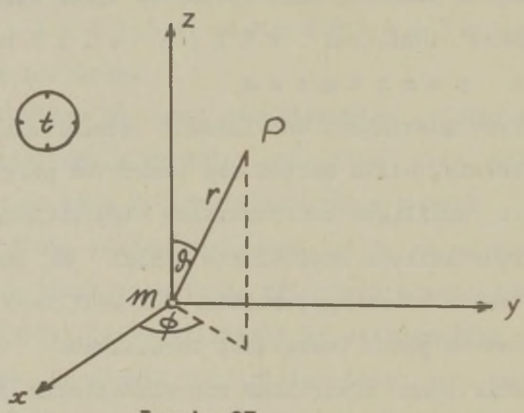
Üksikut punktmassi on ilmselt otstarbekas vaadelda taustsüsteemis, mille suhtes see punktmass paigal on ja kus ta asetseb ruumiliste koordinaatide alguspunktis (joonis 27). Üldiste füüsikaliste kaalutluste põhjal on väli selles taustsüsteemis kerasümmeetriline. Eukleidilises ruumis on kerasümmeetria puhul teatavasti loomulikuks ruumiliseks koordinaadistikuks sfääriline koordinaadistik $\{r, \vartheta, \phi\}$. Võib oletada, et kõvera ruumi tsentraal- ehk kerasümmeetria puhul osutuvad loomulikeks koordinaadid, mis on saadud tasase aegruumi koordinaatidest n.-ö. sfäärilise sümmeetriaga kõverdamise tulemusena.

Niisiis võiksime vaadeldava probleemi puhul postuleerida meetrilise vormi järgmise kuju:

$$(ds)^2 = a(r)(dr)^2 + h(r)(r)^2[(d\vartheta)^2 + (\sin\vartheta d\phi)^2] - b(r)(cdt)^2 \qquad \text{(IV 7.1)}$$

Kui $a = b = h = 1$, siis saamegi siit ruumiliselt sfäärilise koordinaadistiku galileilises aegruumis. Suurusi a, b ja h võime tõlgendada kui n.-ö. aegruumi kõverdumise koefitsiente.

Pangem tähele, et meetrilise vormi kujule (IV 7.1) jõudsime faktiliselt mitterangete, n.-ö. piltlike kaalutluste teel. Kasutades eksaktseid rühmateoreetilisi meetodeid, saame aga staatilise sfäärilise sümmeetria eeldamisel kõveras aegruumis samasuguse tulemuse[x].



Joonis 27.

[x] Vt. P, lk. 419 jj.

b) Meetrilise vormi puhul (IV 7.1) on vahetult näha, et koordinaatteisenduse puhul, mis on järgmist tüüpi:

$$r = r(r'),$$
$$r' = r'(r), \tag{IV 7.2}$$

ei muutu vormi (IV 7.1) põhimõtteline kuju. Nii peabki olema, sest vastavalt ÜRT vaimule peab antud probleemis radiaalmuutuja olema vabalt valitav.

Kasutades teisendust (IV 7.2), võime juba enne, kui asuda väljavõrrandeid lahendama, fikseerida ühe kolmest tundmatust funktsioonist a, b ja h. Igale fikseerimisviisile vastab üks kindel koordinaatsüsteem, mis kõik kuuluvad sisuliselt ühte ja samasse taustsüsteemi (pangem siit konkreetselt tähele erinevust taust- ja koordinaatsüsteemide vahel - vt. III, 1, b).

Valime praegu uue radiaalmuutuja järgmiselt:

$$r' = \sqrt{h(r)}\, r. \tag{IV 7.3}$$

Pärast üleminekut uude koordinaatsüsteemi jätame aga primi ära ning seega saame lihtsalt meetrilise vormi (IV 7.1) niisugusel kujul, kus $h = 1$.

c) Arvutusteks on otstarbekas sisse viia uued tähistused koordinaatide jaoks

$$x_0 \equiv ct, \quad x_1 \equiv r, \quad x_2 \equiv \vartheta, \quad x_3 \equiv \phi \tag{IV 7.4}$$

ning samuti suuruste a ja b jaoks

$$e^{2\Psi(x_1)} \equiv a(x_1), \quad e^{2F(x_1)} \equiv b(x_1). \tag{IV 7.5}$$

Valides sellisel viisil meetrilise vormi kordajate kuju, fikseerime üheselt ruutvormi (IV 7.1) signatuuri. Paneme tähele, et ka tingimus (III 1.2) on seejuures alati täidetud.

Niisiis võime üldisust piiramata esitada staatilise ja tsentraalsümmeetrilise meetrilise vormi järgmisel kujul:

$$(ds)^2 = -e^{2F(x_1)}(dx_0)^2 + e^{2\Psi(x_1)}(dx_1)^2 + (x_1)^2\left[(dx_2)^2 + (\sin x_2 dx_3)^2\right], \qquad \text{(IV 7.6)}$$

s. t.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2F(x_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\Psi(x_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x_1 \sin x_2)^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(IV 7.7)}$$

Et leida suuruste F ja Ψ ning sellega ühtlasi punktmassi gravitatsioonivälja potentsiaalide konkreetne kuju, tuleb lahendada gravitatsioonivälja võrrandid. Nagu näeme viimaste kujust (IV 2.2), on selleks igal juhul tarvis teada Ricci tensori komponentide kuju. Viimaste leidmiseks tuleb aga enne välja arvutada Christoffeli koefitsiendid $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

d) Vajalikeks arvutusteks on veel ennekõike tarvis teada determinanti g ja meetrilise tensori kontravariantseid komponente. Et

$$g = -(x_1)^4(\sin x_2)^2 e^{2(F+\Psi)}, \qquad \text{(IV 7.8)}$$

siis valemi (II 3.25) põhjal saame

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2F(x_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\Psi(x_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_1)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x_1 \sin x_2)^{-2} \end{pmatrix} . \qquad \text{(IV 7.9)}$$

(Paneme tähele, et nn. diagonaalse meetrika puhul om meetrilise tensori kontravariantsete komponentide maatriks samuti diagonaalne ning need diagonaalsed komponendid on lihtsalt kovariantsete pöördväärtused.)

Pärast suuruste (II 6.9) leidmist, arvutame valemitest (II 6.11) Christoffeli koefitsiendid $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Selgub, et meetrilise vormi (IV 7.6) puhul on nullist erinevaid koefitsiente üksnes üheksa (kriips tähendab tuletist koordinaadi x_1 järgi):

$$\begin{aligned} &\Gamma^{1}_{00} = F' e^{2(F-\Psi)} , \qquad \Gamma^{0}_{01} = F' , \\ &\Gamma^{1}_{11} = \Psi' , \quad \Gamma^{2}_{12} = \frac{1}{x_1} , \quad \Gamma^{3}_{13} = \frac{1}{x_1} , \\ &\Gamma^{1}_{22} = -x_1 e^{-2\Psi} , \qquad \Gamma^{3}_{23} = \cot x_2 , \\ &\Gamma^{1}_{33} = -x_1 e^{-2\Psi} (\sin x_2)^2 , \quad \Gamma^{2}_{33} = -\sin x_2 \cos x_2 . \end{aligned} \qquad \text{(IV 7.10)}$$

Vaja läheb ka nn. koondatud Christoffeli koefitsiente (II 6.13):

$$\begin{aligned} &\Gamma^{\sigma}_{1\sigma} = F' + \Psi' + \frac{2}{x_1} , \\ &\Gamma^{\sigma}_{2\sigma} = \cot x_2 , \\ &\Gamma^{\sigma}_{3\sigma} = \Gamma^{\sigma}_{0\sigma} = 0 . \end{aligned} \qquad \text{(IV 7.11)}$$

Valemite (IV 7.10–11) põhjal võimegi nüüd arvutada Ricci tensori komponendid (II 8.1). Selgub, et antud juhul pole identselt nullid üksnes võrdsete indeksitega ($\lambda=\mu$) komponendid:

$$R_{00}=e^{2(F-\Psi)}\left[-F''+F'\left(\Psi'-F'-\frac{2}{x_1}\right)\right],$$

$$R_{11}=F''+(F')^2-\Psi'\left(F'+\frac{2}{x_1}\right),$$

$$R_{22}=-1+e^{-2\Psi}\left[1+x_1(F'-\Psi')\right], \qquad \text{(IV 7.12)}$$

$$R_{33}=(\sin x_2)^2\left\{-1+e^{-2\Psi}\left[1+x_1(F'-\Psi')\right]\right\}.$$

e) Kui üksik punktmass pole elektriliselt laetud, siis kehtivad väljaspool tema asukohta gravitatsioonivälja vaakumvõrrandid (IV 3.1). Arvestades valemeid (IV 7.12), omandavad need kuju:

$$-F''-(F')^2+\Psi'F'-\frac{2\Psi'}{x_1}=0, \qquad \text{(IV 7.13)}$$

$$F''+(F')^2-\Psi'F'-\frac{2F'}{x_1}=0, \qquad \text{(IV 7.14)}$$

$$-1+e^{-2\Psi}\left[1+x_1(F'-\Psi')\right]=0. \qquad \text{(IV 7.15)}$$

Näeme, et võrrandid on tõepoolest mittelineaarsed. Ent antud juhul on tegemist üksnes kahe ühest muutujast sõltuva funktsiooniga ning seetõttu osutub siin gravitatsioonivälja võrrandite integreerimine siiski üpris hõlpsaks.

Liites võrrandid (IV 7.13) ja (IV 7.14), saame seose

$$\frac{2}{x_1}(F' + \Psi') = 0,$$

millest järeldub, et

$$F + \Psi = C \tag{IV 7.16}$$

Integreerimiskonstandi C võib kohe määrata vaadeldava probleemi loomulikest ääretingimustest. Nimelt on ju mõistlik eeldada, et lõpmata kaugel üksikust punktmassist on väli galileiline ning et seda kirjeldab meetriline vorm (IV 7.1) lisatingimusega $a = b = h = 1$. Seega peavad kehtima ääretingimused

$$\lim_{r\to\infty} F = \lim_{r\to\infty} \Psi = 0, \tag{IV 7.17}$$

millest järeldub, et seoses (IV 7.16) peab konstant C võrduma nulliga. Niisiis saame

$$\underline{\Psi = -F}. \tag{IV 7.18}$$

Lahutades võrrandist (IV 7.14) võrrandi (IV 7.13), jõuame võrrandile

$$2\left[F'' + 2(F')^2 + \frac{2}{x_1}F'\right] = 0,$$

mille teisendamine annab (eeldusel $F' \neq 0$)

$$(\ln F')' + 2F' + \frac{2}{x_1} = 0.$$

Siit leiame integreerimisel seose

$$\ln F' + 2F + 2\ln x_1 = \ln\frac{r_0}{2},$$

s. t.

$$2F' e^{2F}(x_1)^2 = r_0$$

ehk

$$(e^{2F})' = \frac{r_0}{(x_1)^2} .$$

Veelkordne integreerimine annab nüüd

$$e^{2F} = A - \frac{r_0}{x_1} . \qquad \text{(IV 7.19)}$$

Et oleks rahuldatud ka võrrand (IV 7.15), peab seoses (IV 7.19) konstant A võrduma ühega. Niisiis leiame lõplikult

$$e^{2F} = 1 - \frac{r_0}{x_1} . \qquad \text{(IV 7.20)}$$

Konstant r_0 iseloomustab ilmselt välja allikaks olevat punktmassi. Peagi näeme, et see tõepoolest nii ka on.

f) Valemite (IV 7.18) ja (IV 7.20) põhjal võime konkretiseerida meetrilise vormi (IV 7.6) kuju. Sellega olemegi leidnud aegruumi meetrilise vormi punktmassi gravitatsioonivälja puhul. Rõhutagem veelkord, et selle vormi oleme leidnud gravitatsioonivälja Einsteini võrrandite t ä p s e lahendamise teel. Kõnesoleva lahendi leidis esimesena K. Schwarzschild 1916. aastal ja seda nimetataksegi seepärast S c h w a r z s c h i l d i l a h e n d i k s, täpsemalt Schwarzschildi v ä l i s e k s lahendiks.

Võime minna ka tagasi koordinaatide tähistustele t, r, ϑ ja ϕ. Nii saame vaadeldava meetrilise vormi (nn. Schwarzschildi meetrika) kujul

$$(ds)^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)(c\,dt)^2 + \frac{(dr)^2}{1 - \frac{r_0}{r}} + (r)^2\left[(d\vartheta)^2 + (\sin\vartheta\, d\phi)^2\right] . \qquad \text{(IV 7.21)}$$

g) Meetrilise vormi (IV 7.21) võib teisendada nn. isotroopsesse kujju.

Kui valime teisenduse (IV 7.2) kujul

$$r = r'\left(1+\frac{r_0}{4r'}\right)^2, \qquad \text{(IV 7.22)}$$

siis näeme, et

$$dr = dr'\left(1+\frac{r_0}{4r'}\right)\left(1-\frac{r_0}{4r'}\right)$$

ja

$$1-\frac{r_0}{r} = \frac{\left(1-\frac{r_0}{4r'}\right)^2}{\left(1+\frac{r_0}{4r'}\right)^2}.$$

Siit leiamegi meetrilisele vormile (IV 7.21) uue, nn. isotroopse kuju

$$(ds)^2 = -\left(\frac{1-\frac{r_0}{4r'}}{1+\frac{r_0}{4r'}}\right)^2 (cdt)^2 + \left(1+\frac{r_0}{4r'}\right)^4\left\{(dr')^2+(r')^2\left[(d\vartheta)^2+(\sin\vartheta\, d\phi)^2\right]\right\}. \qquad \text{(IV 7.23)}$$

h) Küllalt kaugel punktmassist peab gravitatsiooniväli ilmselt nõrk olema. Suurused $\frac{r_0}{r}$ ja $\frac{r_0}{r'}$ on aga sel juhul väga väikesed.

Arendame avaldises (IV 7.23) meetrilise vormi kordajad ritta suuruse $\frac{r_0}{r'}$ astmete järgi ja piirdume ainult esimese parandusega. Siis leiame

$$\left(\frac{1-\frac{r_0}{4r'}}{1+\frac{r_0}{4r'}}\right)^2 \simeq \left(1-\frac{r_0}{4r'}\right)^4 \simeq 1-\frac{r_0}{r'}$$

ja

$$\left(1+\frac{r_0}{4r'}\right)^4 \simeq 1+\frac{r_0}{r'}.$$

Seega saame punktmassi gravitatsioonivälja puhul nõrga välja meetrilise vormi kujul

$$(ds)^2 = -\left(1-\frac{r_0}{r'}\right)(c\,dt)^2 + \left(1+\frac{r_0}{r'}\right)(dl)^2, \qquad \text{(IV 7.24)}$$

kus $(dl)^2$ on eukleidilise 3-ruumi meetriline vorm.

Võrdleme saadud tulemust nõrga ja staatilise gravitatsioonivälja meetrilise vormi üldise kujuga (IV 5.17). Et punktmassi puhul Newtoni potentsiaal $U=-\frac{\gamma m}{r'}$, siis tuleneb sellest võrdlusest seos

$$\underline{r_0 = \frac{2\gamma m}{c^2}}. \qquad \text{(IV 7.25)}$$

Sellega on konstandi r_0 kui välja allikat iseloomustava parameetri väärtus määratud.

i) Suurust r_0, mille määrab valemi (IV 7.25) kohaselt partikli mass, nimetatakse ka punktmassi g r a v i t a t s i o o n i l i s e k s r a a d i u s e k s. Leitud punktmassi jaoks, kirjeldavad meetrilised vormid (IV 7.21) ja (IV 7.23) tegelikult gravitatsioonivälja igasuguste sfäärilise sümmeetriaga massijaotuste ümber, kus allikaks olev aine on kas paigal või liigub üksnes radiaalselt. m on sel juhul vaadeldava ainejaotuse kogumass.

Paneme tähele, et juhul $r=r_0$ ("Schwarzschildi pind") muutub meetrilises vormis (IV 7.21) g_{00} nulliks ja g_{11} kasvab piiramatult. Selle tõiga põhjal võiks arvata, et aegruumi meetrika saab "Schwarzschildi pinnal" singulaarseks ning et antud kogumassi m puhul pole võimalikud kehad gravitatsioonilisest väiksema "raadiusega" (NB! r on üksnes radiaalmuutuja; kauguse[x] punktide r_1 ja r_2 vahel piki raadiust annab integraal $\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{g_{11}}\, dr$). Ent tegelikult ei saa aegruumi meetrika $r = r_0$ puhul singulaarseks. Seda tõendab näiteks asjaolu, et nii determinant $g = -(r^2 \sin\vartheta)^2$ kui ka invariant $J = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ (vt. ülesanne 8) jäävad "Schwarzschildi pinnal" regulaarseteks. Meetrika tõeline singulaarsus ilmneb üksnes punktis $r = 0$. Selgub, et ruumilise piirkonna $r \leq r_0$ puhul pole lihtsalt meetrilisi vorme (IV 7.21) ja (IV 7.23) iseloomustavad koordinaadid rakendatavad. Kasutades teistsuguseid ja nimelt teatavaid mittejäiku koordinaatsüsteeme (meetrilise vormi kordajad sõltuvad koordinaatajast)[xx], on võimalik uurida aegruumi omadusi ka piirkonnas $r \leq r_0$.

j) On selgunud, et aegruumi omadused piirkonnas $r \leq r_0$ on seostatavad massiivsete kehade teatavate eripäraste omadustega.

Kui uurida sfäärilise sümmeetriaga keha relativistlikke tasakaalutingimusi, siis selgub, et küllalt suure massiga keha puhul ei saa olla tasakaaluiist staatilist olukorda. Selline keha peab tema enda tekitatud gravitatsioonivälja mõjul piiramatult kokku tõmbuma. Nimetatud nähtust kirjeldasid esmakordselt J. R. Oppenheimer ja H. Snyder 1939. aastal ning seda on hakatud nimetama g r a v i t a t s i o o n i l i s e k s   k o l l a p s i k s .

---

[x] Vt. LL, lk. 384.

[xx] Sealsamas, lk. 393 jj.

Välise liikumatu vaatleja suhtes, kes kasutab koordinaate meetrilise vormiga (IV 7.21), läheneb kollabeeruva (kollapseeruva) keha "raadius" lõpmata kauges tulevikus gravitatsioonilisele. Kollabeeruva ainega kaasaliikuvas taustsüsteemis aga ületab kokkutõmbuv aine lühikese omaaja-vahemiku jooksul "Schwarzschildi pinna" ning jätkab liikumist ka selle "all", kus paigalolek on võimatu. Mis sünnib piirkonnas $r < r_0$, seda pole väljastpoolt näha, sest nii ainelised osakesed kui elektromagnetiline kiirgus (sealhulgas valgus) võivad läbida "Schwarzschildi pinda" üksnes ühes suunas - sissepoole.

Niisiis kulgevad kollabeeruva ainega k a a s a l i i k u v a s teljestikus protsessid edasi, v ä l i s e vaatleja suhtes aga gravitatsioonilise raadiuse ümber kokkutõmbuv keha just nagu "sulgub endasse", "tardub" - keha ei saada enam mingeid signaale ümbritsevasse ruumi (siin avaldub aja relatiivsus oma äärmises vormis). Sellist kollabeerunud objekti nimetatakse k o l l a p s a r i k s ehk " m u s t a k s a u g u k s ". Ta on ümbruskonnaga vastastikuses mõjustuses üksnes oma gravitatsioonivälja vahendusel.[x]

Et selgitada kollabeeruva keha seesmise oleku muutusi, sealhulgas üksikasjalikumalt tema käitumist "Schwarzschildi pinna all", on vaja uurida Einsteini võrrandite sfäärilise sümmeetriaga lahendeid ainelise keskkonna jaoks (s. t. juhul $T_\mu^\nu \neq 0$)[xx].

[x] Vt. näiteks LL, lk. 393.
[xx] Sealsamas, lk. 401 jj.

Viimasel ajal on uuritud ka Einsteini võrrandite järeldusi mittesfääriliste ja pöörlevate kollabeeruvate objektide puhul. Nii leiti 1963. aastal täpne lahend (nn. Kerri lahend), millel on terve rida huvitavaid omadusi ja mis hilisemate uurimuste põhjal on tõenäoliselt rakendatav pöörleva statsionaarse kollapsari kirjeldamiseks.[x]

Ülesandeid

1. Arvutada meetrilise vormi (IV 7.6) puhul "Christoffeli 1. liiki sümbolid" (II 6.9).

2. Tõestada, et meetrilise vormi (IV 7.6) puhul on 40-st Christoffeli koefitsiendist $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ nullist erinevaid tõepoolest ainult üheksa ning et nad avalduvad valemitega (IV 7.10).

3. Põhjendada valemite (IV 7.11) kuju.

4. Tõestada, et meetrilise vormi (IV 7.6) puhul Ricci tensori nn. mittediagonaalsed komponendid $R_{\lambda\mu}$ ($\lambda \neq \mu$) on identselt nullid ja et diagonaalsed komponendid avalduvad valemitega (IV 7.12).

5. Näidata, et seosed (IV 7.18-19) rahuldavad võrrandit (IV 7.15) tõepoolest üksnes siis, kui $A = 1$.

6. Arvestades seoseid (IV 7.18) ja (IV 7.20), konkretiseerida meetrilise vormi (IV 7.21) jaoks Christoffeli koefitsientide (IV 7.10) kujud.

7. Silmas pidada valemit (II 7.3) ja kasutades eelmi-

---

[x] Vt. näiteks LL, lk. 408 jj.

se ülesande tulemusi, arvutada meetrilise vormi (IV 7.21) puhul Riemanni-Christoffeli tensori komponendid $R^{\sigma}{}_{\lambda\mu\nu}$. Saada siit täielikult kovariantsed komponendid $R_{\varkappa\lambda\mu\nu}$.

8. Eelmise ülesande tulemuste põhjal arvutada invariant $J = R_{\varkappa\lambda\mu\nu} R^{\varkappa\lambda\mu\nu}$.

V. ÜLDRELATIIVSUSTEOORIA VAHEKORD VAATLUSE JA EKSPERIMENDIGA

1. ÜRT ja kosmosefüüsika

a) Mõistagi ei tõesta käesoleva loengukursuse I peatükis toodud mõttelised katsed pöörleva kettaga, Einsteini liftiga ja teised sellesarnased veel seda, et gravitatsiooninähtusi ikka tõesti just ÜRT kirjeldab ja seletab. Nendel mõttelistel katsetel on küll ülitähtis osa juhtideede andjatena, loogilise mõtte suunajatena, milleta teaduse areng üpris saamatult kulgeks, kuid lõpliku õigustuse ÜRT põhiprintsiipidele, tema matemaatilise aparatuuri otstarbekusele, tema põhivõrranditele saab siiski anda üksnes teooria järelduste k o o s k õ l a vaatlus- ja eksperimendiandmetega.

Millised empiirilised andmed siis ÜRT olemasolu õigustavad? Et gravitatsiooniline vastasmõju on loodusnähtustes seda olulisem, mida suuremate mastaapidega meil tegemist on ja mida suurem on vaadeldavate objektide kogumass ning tihedus, siis ka gravitatsiooniteooria kinnitust tuleks ilmselt otsida ennekõike suurtest mastaapidest ja väga ulatuslike või väga tihedate materiaalsete objektide juurest. Pangem tähele, et Newton lähtus samuti taevamehaanikast ja alles siis tõi gravitatsiooniseaduse "maisesse" mehaanikasse. Meie ajal on kosmiline horisont palju avaram ja seega tuleks tänapäevasele gravitatsiooniteooriale hinnangu andmisel alustada Newtoni aegadega võrreldes hoopis suurematest mastaapidest. Niisiis ei piisa ÜRT-le õigustuse otsimisel ainult Maal kulgevate nähtuste ega isegi üksnes Päikesesüsteemi nähtuste analüüsist, vaid kõigepealt tuleks vaadelda k o s m o s e f ü ü s i k a t kogu selle tänapäevases haardes.

b) Hästi jämedal viisil võib tänapäevase kosmosefüüsika probleemid jaotada kahte suurde rühma. (Sealjuures moodustaksid Päikesesüsteemi-sisesed ja Maa-lähedase kosmilise ruumi nähtused veel kolmandagi rühma.)

Esiteks on siin probleemid, mis on seotud kogu meile tuntud maailmaruumi kui terviku, selle ehituse, omaduste ja käitumise uurimisega. Need on k o s m o l o o g i a probleemid, mis seostuvad maailmaruumi objektide tekke ja evolutsiooni, s. o. k o s m o g o o n i a probleemidega.

Kosmoloogilistes mastaapides, kus juba kogu meie Galaktika osutub tillukeseks objektiks, on kõigist füüsikalistest interaktsioonidest gravitatsiooniline vastasmõju ilmselt kõige olulisem. Seega peaksid just need mastaabid olema ÜRT peamiseks rakendusalaks. Selgub, et see nii ka on. Nüüdisaegses kosmoloogias, mis uurib mateeria jaotust, liikumist ja vastastikust mõju kogu meile tuntud maailmaruumi ulatuses ning koos sellega aegruumi n.-ö. globaalseid omadusi, on gravitatsiooniteooriana tõepoolest end õigustanud nimelt ÜRT.

Tuginedes ÜRT-le, konstrueeritakse mitmesuguseid kosmoloogilisi mudeleid, mille omadustes püütakse kajastada reaalse kosmilise aegruumi omadusi. Eeldades aine homogeenset ja isotroopset jaotust vaatlustega hõlmatavas maailmaruumis kui tervikus, on teiste hulgas saadud näiteks nn. isotroopsed mudelid, mis on tuntud alates aastast 1922 ja mida esmasleidja nime järgi nimetatakse ka Friedmanni mudeliteks[x]. Nende mudelite iseloomulikuks jooneks on meetrika mittestatsionaarsus: aegruumi kõverus on aja funktsioon. Niisuguste mudelite alusel õnnestub seetõttu seletada ühte väga tähelepanuväärset empiirilist kosmilist tõika ja nimelt kaugetelt galaktikatelt tuleva valguse spektrijoonte punanihet (nn. kosmoloogilist punanihet ehk Hubble'i nihet). Mittestatsionaarne dünaamiline kosmoloogiline mudel lubab seda nähtust loogiliselt seletada kaugete galaktikate eemaldumisega meist ("maailma paisumisega").

Arvesse võttes tänapäevaseid astronoomilisi andmeid, on alust arvata, et isotroopne kosmoloogiline mudel kirjeldab üldjoontes adekvaatselt nii meile tuntud maailmaruumi tänapäevast olukorda kui ka selle senise evolutsiooni olulisemaid jooni. Ta on kooskõlas seniste andmetega kosmiliste objektide ea, samuti nn. kosmilise relikt-

---

[x] Vt. näiteks LL, lk. 453 jj. Et kosmoloogilised mudelid nõuavad ulatuslikumat eripärast käsitlemist, siis ei mahu nende konkreetne vaatlus käesoleva põhikursuse raamidesse.

kiirguse kohta. Ent samas on selge, et eeldus mateeria homogeensest ja isotroopsest jaotusest saab olla üksnes ligikaudne, sest suhteliselt väiksemate kosmoloogiliste mastaapide puhul pole ta ilmselt enam kehtiv. See asjaolu stimuleerib ka keerukamate kosmoloogiliste mudelite, sealhulgas nn. anisotroopsete mudelite uurimist. Omaette probleemiks on kosmoloogilise mudeli ajalise singulaarsuse ("maailma alguse") olemasolu või puudumine, mudeli omadused sellise singulaarsuse puhul jne.[x]

c) Teiseks suureks kosmosefüüsika probleemide rühmaks on a s t r o f ü ü s i k a l i s e d probleemid, mis on seotud mitmesuguste isoleeritud objektide (täht, pulsar, kvasar, galaktika jne.) uurimisega. See valdkond on tänapäeval samuti saanud ÜRT rakendusalaks.[xx]

Mitterelativistlik gravitatsiooniteooria koos termodünaamika, plasma- ja tuumafüüsikaga seletab täielikult tähtede heleduse, mõõtmed ja spektrid nn. tavaliste tähtede puhul. Arvutuslikud hinnangud aga näitavad, et ülitihedate objektide evolutsiooni ja tasakaalu uurimine nõuab juba relativistlike efektide arvestamist. See tähendabki vajadust ÜRT järele. Huvi relativistlike efektide uurimise vastu suurenes eriti kvasarite (1963) ja pulsarite (1968) avastamise järel.

---

[x] Vt. LL, lk. 499 jj.

[xx] Vt. näiteks kirjanduse nimistus osutatud J. Zeldovitši ja I. Novikovi, aga samuti D. W. Sciama (*Шама*) raamatuid.

Et vastavalt tehtud arvutustele on teatavates tingimustes võimalik tähtede (näiteks nn. valgete kääbuste) evolutsiooni üleminek relativistlikuks gravitatsiooniliseks kollapsiks, siis on saanud tänapäeval ka "mustade aukude" esinemise võimalus maailmaruumis palju huvi pakkuvaks astrofüüsikaliseks probleemiks (vt. IV 7, j). Intensiivselt analüüsitakse nähtusi, mis võiksid võimaldada "musta augu" avastamist.

d) Nagu näitasime (vt. IV, 6), järeldub Einsteini võrranditest g r a v i t a t s i o o n i k i i r g u s e võimalus. Ent arvutused kinnitavad, et eksperimendis jälgitavaid gravitatsioonilaineid tekitada maistes tingimustes tänapäeval veel suurt lootust pole. Liiga tühine on siin põhimõtteliselt võimalik gravitatsioonikiirguse intensiivsus ja seni pole lihtsalt olemas seadmeid, mis sellist kiirgust registreerida suudaksid. Küll aga võiks esialgu jälle aidata kosmoseilmingute uurimine.

Mingid hiiglaslikud kosmilised protsessid (näiteks tähe kollabeerumine "mustaks auguks", supernoova teke vms.), millega kaasnevad massi kontsentratsiooni tohutult suured ja kiired muutused, võiksid ilmselt tekitada ka gravitatsioonivälja suuri muutusi, mis siis kas pidevate lainetena või üksikimpulssidena universumis levida võiksid. Selliste kaugkosmosest Maale levivate gravitatsioonilainete avastamiseks on viimastel aastakümnetel väga peeni ja täpseid katseriistu ehitada püütud ning on võimalik, et siin on isegi juba mõningat edu olnud.

Nii näiteks väitis 1969. aastal ameerika gravitatsionist J. Weber, et temal ja ta kaastöölistel ongi tõenäoliselt juba korda läinud registreerida mingilt kosmiliselt allikalt lähtunud gravitatsioonikiirguse impulsse. Kiirguse vastuvõtjateks olid Weberi katsetes massiivsed, umbkaudu pooleteisetonnised, pooleteise meetri pikkused ja kuni meetri jämedused vaakumis ülesriputatud ja igasugustest mittegravitatsioonilistest mõjustustest isoleeritud alumiiniumsilindrid, mille mõõtmete muutuste amplituude piesoelektriliste muundurite vahendusel ja ülitundliku elektroonikaaparatuuri abil mõõdeti. Selliseid silindri mõõtmete muutusi võis aga tekitada just ruumi kõveruse ajutine muutus leviva gravitatsioonikiirguse impulsi toimel. Hoolikas kontroll olevat kinnitanud väga suure tõenäosusega, et ülalmainitud impulsside vastuvõtmisel mingid kohalikud mõjustused, nagu näiteks mingid elektromagnetlained, vibratsioonid jne., katseriista mõjustada ei võinud. Tõsi, Weberi ja tema kaastööliste seni saadud tulemused on päris mõõtmistäpsuse äärmise piiri peal ning täiesti usaldusväärsete andmete saamiseks tuleb mõistagi uurimusi jätkata ja tulemusi täiendavalt kontrollida. Viimastel aastatel on siiski süvenenud kahtlused Weberi katsetulemuste suhtes, sest seni (1974. a.) pole teistel uurijatel õnnestunud neid tulemusi omapoolselt kontrollida, ehkki Weberi katseseadmetega samaväärseid on juba mitmel pool olemas (näiteks ka nõukogude uurija V. Braginski töörühmal).

Ent olgu kuidas on Weberi seniste konkreetsete eksperimentide usaldusväärsusega, ikkagi tuleb tõdeda, et gravitatsioonikiirguse genereerimise ja detekteerimise, selle kiirguse levimiskiiruse, polarisatsiooni ja muude omaduste uurimise eksperimentaalsete võimaluste laiaulatuslik väljaselgitamine on alanud. Paljudes laboratooriumides tegeldakse intensiivselt vajaliku aparatuuri arendamise ja instrumentide tundlikkuse tõstmisega ning mõõdetavat gravitatsioonikiirgust põhjustada võivate objektide väljaselgitamisega. Gravitatsioonikiirgust uurivatesse eksperimentidesse tõmmatakse kaasa nüüdisaegse füüsika kõige peenem katsetehnika (krüogeenne elektroonika, lasertehnika jne.).

e) Nagu teada, osutub Päikesesüsteemi ulatuses ja Maa peal väga suure täpsusega õigeks gravitatsiooni Newtoni teooria. Et viimane tuleb erijuhuna ÜRT-st (vt. IV, 5), siis on seegi tõik faktiliselt ÜRT õigustus. Kogu Newtoni teooria rakendusulatuses on ju seega ÜRT samuti kooskõlas vaatluse ja eksperimendiga.

Muidugi ennustab ÜRT ka Päikesesüsteemi ulatuses Newtoni teooria täpsuspiiridest väljuvaid efekte. Ehkki erinevalt kaugkosmose ilmingutest on seda tüüpi efektide puhul võimalik selgemalt eristada puhtgravitatsioonilisi nähtusi muudest, on nad kõik siiski väga väikesed. Paljusid selliseid nähtusi (nagu näiteks eespool mainitud "maiseid" gravitatsioonilaineid, Maa kui gravitatsioonivälja allika pöörlemisest tingitud relativistlikke lisanähtusi, mis võiksid avalduda tehiskaaslasele paigutatud güroskoobi pretsessioonis, ja mitmeid teisi) pole füüsika tänapäevane eksperimenditehnika veel suuteline registreerima. Mõnda ÜRT poolt ennustatud ilmingut Päikesesüsteemis on aga võimaldunud ka empiiriliselt jälgida. Niisugusteks nähtusteks on planeedi periheeli relativistlik nihe, elektromagnetsignaali, sealhulgas valguskiire kõrvalekalle ("paindumine") Päikese gravitatsiooniväljas, spektrijoonte gravitatsiooniline nihe, Maalt Veenusele või Merkuurile (või ka tehiskaaslasele) saadetava ja sealt tagasipeegelduva raadiosignaali ("radarkaja") relativistlik hilinemine Päikese gravitatsioonivälja toimel. Kolmest esimesest efektist tuleb veel juttu käesoleva peatüki järgmistes punktides, kus näeme, et katsetäpsuse piirides on empiirilised andmed kinnitanud ÜRT arvutusi. Neljandale nähtusele juhtis esimesena tähelepanu I. Shapiro 1964. aastal ja selle efekti mõõtmistulemused (suurusjärgus 10^{-4} s vahetult Päikeseketta ääre juurest möödunud signaali puhul) on samuti olnud kooskõlas ÜRT põhjal tehtud arvutustega.

Mõistagi on loota, et tänu eksperimenditehnika arengule suureneb peagi võimaluste hulk Päikesesüsteemi-sisesteks empiirilisteks uurimistöödeks. Viidakem näiteks kas või järgmisele mõõtmistehnika viimase aja saavutusele. Kuul käinud astronaudid paigutasid teatavasti sellele taevakehale reflektori, millelt peegeldunud laserikiire abil on saadud mõõta ülitäpselt Maa ja Kuu vahelist kaugust (ca 0,5 m täpsusega). Tänu sellele on tekkinud võimalus uurida väga täpselt Maa ja Kuu suhtelist liikumist ning võrrelda Maa tegelikku orbiiti selle geodeetilise joonega, mida mööda peaks Maa liikuma. Niisuguse võrdluse tulemus lubaks ju jällegi kontrollida ÜRT-st tulenevaid järeldusi.

f) Et Päikesesüsteemi ulatuses ja Maa peal on teada vaid üksikuid nähtusi, mille seletamiseks ÜRT-d vaja läheb, ning et seejuures nende seletamiseks tuleb leida üksnes väikesi parandusi Newtoni teooria tulemustele, siis pole eriti vaja imestada, et ülalnimetatud seni mõõdetud ilminguid mõne teisegi teooria abil seletada võib. Ent küsida tuleks, kas need teised teooriad kogu ulatuses, oma loogiliste seoste poolest ülejäänud füüsikateooriatega ning seesmise täiuslikkuse ja harmoonia poolest siiski niisama head on kui ÜRT? Teaduses ei saa asendada ühte teooriat teisega ja seejuures veel fundamentaalset teooriat vähem fundamentaalsega ainuüksi ja lihtsalt sellepärast, et mõne üksikküsimuse puhul võiks seletust anda k a teistsugusel viisil. Selline ühe teooria asendamine teisega peab igati põhjendatud ja paratamatu olema. Seni siiski samaväärtuslikku alternatiivset teooriat ÜRT-le pole olemas. Ei ole samuti teada tänapäeval ühtki empiirilist fakti, mis ÜRT-le otseselt vastu räägiks. Katseid ÜRT aluste kontrollimiseks ja ÜRT võrdlemiseks mõningate teiste olemasolevate gravitatsiooniteooriatega on viimasel ajal mitmeidki planeeritud ja ka teostatud (näiteks: kas ei muutu ajas gravitatsioonikonstant, kas poleks vaja asendada ÜRT-le omane gravitatsiooni tensorpotentsiaal skalaarsega, kas gravitatsioon on ikka kirjeldatav aegruumi meetrikaga jne.).

2. Partikkel punktmassi gravitatsiooniväljas

a) Nagu rõhutatud, peaks aegruumi omaduste uurimine alati kulgema lihtsamalt keerulisemale (vt. I, 2, a; I, 3, a). Seega ka kõveras aegruumis tuleks kõigepealt uurida partiklite eksistentsi ja valguskiirte kongruentse. Ennekõike niisuguste "proovipartiklite" ja "proovivalguskiirte" käitumises avalduvad konkreetse mateeriajaotusega aegruumi ning sellega lahutamatult seotud gravitatsioonivälja omadused. Proovipartiklite enda mass loetakse teatavasti kaduvväikeseks ja nende endi poolt tekitatud gravitatsiooniväli jäetakse arvestamata.

Empiiriliste andmetega võrdlemise seisukohalt pakub esmajoones huvi kerasümmeetrilise gravitatsioonivälja uurimine. Teatavasti saab sellisena vaadelda esimeses lähenduses nii Päikese kui ka iga üksiku planeedi gravitatsioonivälja. Siit selgub esmajoones Schwarzschildi meetrikaga aegruumi uurimise suur rakenduslik tähtsus.

Ühe proovipartikli uurimine punktmassi gravitatsiooniväljas, mida kirjeldab Schwarzschildi meetrika, kujutab endast klassikalise mehaanika Kepleri ülesande relativistlikku üldistust. Ka siin on nüüd vaatluse all sisuliselt kahe keha liikumise probleem juhul, kui ühe keha mass on teise massist nii palju kordi suurem, et selle teise keha massi võib tinglikult nulliks lugeda.

b) Partiklite eksistentsi uurimine mingis relativistlikus gravitatsiooniväljas taandub teatavasti vastava aegruumi geodeetiliste joonte võrrandite uurimisele (vt. III, 3; vrdl. ka IV, 5, d).

Geodeetiliste joonte võrrandite (III 3.2) konkretiseerimine kindla väljatüübi puhul saab võimalikuks pärast Christoffeli koefitsientide $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ konkreetse kuju kindlakstegemist. Schwarzschildi meetrika puhul ongi meil juba nende suuruste kuju teada (vt. IV, 7; 6. ülesanne). Geodeetiliste joonte võrrandite integreerimiseks pole aga antud juhul otstarbekas kasutada Christoffeli koefitsiente sellisel "lõplikult ilmutatud" kujul. Piisab täiesti nende suuruste kujust (IV 7.10), kus on vaid lisaks arvesse võetud seos (IV 7.18).

Niisiis võime meetrilise vormi (IV 7.21) puhul geodeetilise joone võrrandid üles kirjutada järgmisel kujul (arvestatud on tähistusi (IV 7.4)):

$$\frac{d^2t}{ds^2} + 2F'\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds} = 0, \tag{V 2.1}$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} + c^2F'e^{4F}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - F'\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - e^{2F}r\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 - e^{2F}r\left(\sin\vartheta\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0, \tag{V 2.2}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\vartheta}{ds} - \sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 0, \tag{V 2.3}$$

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds} + 2\cot\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}\frac{d\phi}{ds} = 0. \tag{V 2.4}$$

c) Ühe proovipartikli liikumise uurimisel võime üldisust piiramata orienteerida ruumilise koordinaadistiku nii, et vaatluse alghetkel liiguks vaadeldav partikkel n.-ö. ekvatoriaaltasandis, s. t. et oleksid täidetud tingimused

$$\frac{d\vartheta}{ds}=0, \quad \vartheta=\frac{\pi}{2}. \qquad (\text{V } 2.5)$$

Võrrand (V 2.3) omandab nüüd kuju

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2}=0.$$

Siit aga järeldub, et tingimused (V 2.5) jäävadki kehtima kogu liikumise aja jooksul. Nii muutub võrrand (V 2.3) lihtsalt identsuseks ning ka teised võrrandid lihtsustuvad mõnevõrra.

d) Järgnevalt uurime võrrandeid (V 2.1) ja (V 2.4).

Pärast läbikorrutamist teguriga e^{2F} on võrrand (V 2.1) kirja pandav sellisel kujul:

$$\frac{d}{ds}\left(e^{2F}\frac{dt}{ds}\right)=0.$$

Siit leiame ühe integraali meie poolt uuritavale võrrandite süsteemile

$$e^{2F}\frac{dt}{ds}=iL,$$

kus i on imaginaarühik ja L reaalne konstant (piki partikli maailmajoont on ju intervall ajasarnane ning vastavalt ruutvormi $(ds)^2$ signatuuri valikule käesolevas kursuses on seetõttu ds praegu imaginaarne). Leitud integraalist saame pärast seose (IV 7.20) arvestamist

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=-(L)^2\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-2}. \qquad (\text{V } 2.6)$$

Oleme saanud sisuliselt ajakoordinaadi t seose parameetriga s piki geodeetilist joont. Näeme, et seos sõltub radiaalmuutujast r.

Arvestades tingimust (V 2.5), on võrrand (V 2.4) kirja pandav kujul

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{d\phi}{ds}\right)=0$$

Siit leiame veel ühe integraali

$$\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2=-\left(\frac{N}{r}\right)^2. \qquad \text{(V 2.7)}$$

See seos, kus N on reaalne konstant, kujutab endast faktiliselt Kepleri pindade lause üldistust.

e) Pärast tingimuste (V 2.5) arvestamist ja integraalide (V 2.6) ja (V 2.7) leidmist jääb lahendada veel võrrand (V 2.2). Arvestades seni saadud tulemusi, lihtsustub see võrrand oluliselt:

$$\frac{d^2r}{ds^2}-F'\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-(cL)^2F'+(N)^2(r)^{-3}e^{2F}=0. \qquad \text{(V 2.8)}$$

Et punktmassi gravitatsioonivälja meetriline vorm (IV 7.21) kirjeldab muidugi ka selle välja geodeetiliste joonte lõpmata lähedaste punkthetkede vahelist intervalli, siis võib seda asjaolu ära kasutada võrrandi (V 2.8) integraali hõlpsaks leidmiseks. Pärast suurusega $(ds)^2$ läbijagamist võtab valem (IV 7.21) kuju

$$1=-e^{2F}\left(c\frac{dt}{ds}\right)^2+e^{-2F}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+\left(r\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2+\left(r\sin\vartheta\frac{d\phi}{ds}\right)^2$$

ja siit saame seoste (V 2.5-7) arvestamisel uue võrrandi

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=-(cL)^2+\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\left[1+\left(\frac{N}{r}\right)^2\right]. \qquad \text{(V 2.9)}$$

Diferentsides saadud avaldist ning asendades tulemuse koos selle avaldise endaga võrrandisse (V 2.8), võime veenduda, et seos (V 2.9) on tõesti võrrandi (V 2.8) integraal.

f) Liikumise integraalid (V 2.6), (V 2.7) ja (V 2.9) kirjeldavad vaba partikli liikumise kõikvõimalikke "ekvatoriaaltasapinnalisi" trajektoore punktmassi gravitatsiooniväljas.

Kui partikkel liigub teatud hetkel nii, et lisaks on täidetud veel ka tingimus

$$\frac{d\phi}{ds} = 0 , \qquad \text{(V 2.10)}$$

siis seose (V 2.7) kohaselt $N = 0$ ja partikkel jääbki liikuma üksnes radiaalsihiliselt. Järelikult kirjeldavad sellel juhul ülalnimetatud integraalid partikli n.-ö. puhast vaba langemist.

Järgnevalt vaadelgem keerulisemat liikumise juhtu, mis leiab aset siis, kui tingimus (V 2.10) ei ole täidetud.

Liikumise trajektoore "ekvatoriaaltasapinnal" on otstarbekas kirjeldada koordinaatide r ja ϕ omavahelise sõltuvuse näol. Sellise sõltuvuse leidmiseks tuleb võrranditest (V 2.7) ja (V 2.9) elimineerida suurus ds . Seejärel saame võrrandi

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \left[\frac{cL}{N}(r)^2\right]^2 - r(r-r_o)\left[\left(\frac{r}{N}\right)^2 + 1\right] ,$$

milles omakorda on otstarbekas sisse viia uus muutuja

$$u = \frac{1}{r} \qquad \text{(V 2.11)}$$

Seega saame võrrandi (V 2.9) lõpuks kujul

$$(u')^2 = \left(\frac{cL}{N}\right)^2 - (1 - ur_o)\left[\left(\frac{1}{N}\right)^2 + (u)^2\right] , \qquad \text{(V 2.12)}$$

kus $u' \equiv \frac{du}{d\phi}$.

Diferentsimise teel on veel kasulik saadud võrrandilt üle minna 2. järku diferentsiaalvõrrandile, mis pärast mõningaid teisendusi võtab kuju

$$u'' + u = \frac{r_0}{2}(N)^{-2}\left[1 + 3(Nu)^2\right]. \qquad \text{(V 2.13)}$$

g) Seni on meie arvutused olnud täpsed. Võrrandit (V 2.13) aga elementaarfunktsioonide abil täpselt lahendada enam ei õnnestu. Seepärast tuleb otsida võimalusi selle võrrandi ligikaudseks lahendamiseks.

Hinnakem võrrandis (V 2.13) esineva liikme $3(Nu)^2$ suurusjärku.

Kui on täidetud tingimus

$$r_0 \ll r, \qquad \text{(V 2.14)}$$

siis on punktmassi gravitatsiooniväljale vastav meetrika (IV 7.20) suure täpsusega galileiline:

$$(ds)^2 \simeq (d\ell)^2 - (cdt)^2 = -(cdt)^2\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right].$$

Pangem tähele, et ligikaudselt võib sellisel juhul omistada radiaalkoordinaadile ka vahetu meetrilise mõtte, s. t. võib lugeda teda ruumilisi pikkusi iseloomustavaks suuruseks. Kui proovipartikli liikumise kiirus pole eriti suur, nii et kehtib tingimus

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1, \qquad \text{(V 2.15)}$$

siis on piki partikli maailmajoont suure täpsusega õige koguni seos

$$(ds)^2 \simeq -(cdt)^2.$$

Niisiis järeldub tingimustel (V 2.14–15) valemist (V 2.7) võrrand

$$\left(\frac{r}{c}\frac{d\phi}{dt}\right)^2=\left(\frac{N}{r}\right)^2,$$

mida võib aga esitada ka kujul

$$\left(\frac{r\omega}{c}\right)^2=\left(\frac{N}{r}\right)^2. \qquad \text{(V 2.16)}$$

Et nurkkiiruse ja joonkiiruse absoluutväärtusi seob valem $r\omega=\vartheta$, siis valemit (V 2.11) arvestades saame siit seose

$$\left(\frac{\vartheta}{c}\right)^2=(Nu)^2,$$

s. t.

$$3(Nu)^2\ll 1. \qquad \text{(V 2.17)}$$

Seega näeme, et ülalnimetatud eeldustel võiks võrrandi (V 2.13) lahendit otsida esimeses lähenduses niisugusena:

$$u=\underset{(0)}{u}+\underset{(1)}{u}, \qquad \text{(V 2.18)}$$

kus $\underset{(0)}{u}$ on võrrandi (V 2.13) lahend juhul, kui väike liige $3(Nu)^2$ on arvestamata jäetud, s. t.

$$\underset{(0)}{u}''+\underset{(0)}{u}=\frac{r_0}{2}(N)^{-2}. \qquad \text{(V 2.19)}$$

Suurus $\underset{(1)}{u}$ on selle lahendi $\underset{(0)}{u}$ väike parandus, mis arvestab juba liikme $3(Nu)^2$ olemasolu.

h) Toogem sisse uus suurus

$$y=\underset{(0)}{u}-\frac{r_0}{2}(N)^{-2}.$$

Võrrand (V 2.19) võtab nüüd kuju

$$y''+y=0. \qquad \text{(V 2.20)}$$

Selle võrrandi üldlahend on hästi tuntud ja me võime ta esitada kujul

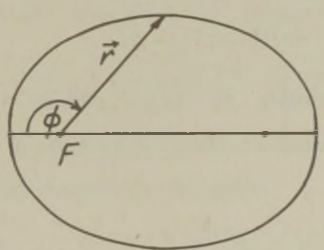
$$y = K\cos(\phi - \delta), \tag{V 2.21}$$

kus K ja δ on integreerimiskonstandid.

Seose põhjal suuruste y ja $\underset{(0)}{u}$ vahel on meil nüüd käes ka võrrandi (V 2.19) lahend

$$\underset{(0)}{u} = \frac{r_o}{2(N)^2}\left[1 + \frac{2K}{r_o}(N)^2\cos(\phi - \delta)\right].$$

Arvesse võttes seost (V 2.11), näeme, et oleme saanud teist järku joone võrrandi tasapinnalistes polaarkoordinaatides r ja ϕ. Kui $\varepsilon \equiv \frac{2K}{r_o}(N)^2 < 1$, siis on tegemist ellipsiga ja ε on selle ekstsentrilisus. Võttes $\delta = 0$, vastab koordinaadi ϕ väärtusele $\phi = 0$ ellipsi lähim punkt ühele fookustest (joonis 28).



Joonis 28.

Niisiis lõplikult saame

$$\underset{(0)}{u} = \frac{r_o}{2(N)^2}\left(1 + \varepsilon\cos\phi\right). \tag{V 2.22}$$

Näeme seega, et ilma liikmeta $3(Nu)^2$ kujutab võrrand (V 2.13) endast faktiliselt klassikalist Kepleri ülesannet.

i) Leidkem nüüd parandusliige $\underset{(1)}{u}$ valemis (V 2.18). Asendades avaldise (V 2.18) võrrandisse (V 2.13), saame

$$\underset{(0)}{u}'' + \underset{(0)}{u} + \underset{(1)}{u}'' + \underset{(1)}{u} = \frac{r_0}{2(N)^2} + \frac{3r_0}{2}\left(\underset{(0)}{u} + \underset{(1)}{u}\right)^2 .$$

Esimese paranduse leidmiseks ilmselt piisab, kui lugeda $\left(\underset{(0)}{u} + \underset{(1)}{u}\right)^2 \simeq \left(\underset{(0)}{u}\right)^2$. Võrrandit (V 2.19) arvestades leiame seega seose

$$\underset{(1)}{u}'' + \underset{(1)}{u} = \frac{3r_0}{2}\left(\underset{(0)}{u}\right)^2,$$

mis võtab võrrandi (V 2.22) põhjal kuju

$$\underset{(1)}{u}'' + \underset{(1)}{u} = \frac{3(r_0)^3}{8(N)^4}\left(1 + \varepsilon\cos\phi\right)^2. \qquad \text{(V 2.23)}$$

Võrreldes võrrandiga (V 2.20) on saadud võrrand mittehomogeenne. Kui kirjutame homogeense võrrandi lahendi (V 2.21) üles kujul

$$\underset{(1)}{u} = \alpha\cos\phi + \beta\sin\phi, \qquad \text{(V 2.24)}$$

siis võime sellest lähtudes ja konstantide varieerimise võtet kasutades leida lahendi ka võrrandile (V 2.23). Lisatingimuseks valime

$$\alpha'\cos\phi + \beta'\sin\phi = 0. \qquad \text{(V 2.25)}$$

Seda arvestades saame võrrandist (V 2.23) seose

$$-\alpha'\sin\phi + \beta'\cos\phi = \frac{3(r_0)^3}{8(N)^4}\left(1 + \varepsilon\cos\phi\right)^2. \qquad \text{(V 2.26)}$$

Ka saadud seostes tähendab kriips tuletist koordinaadi ϕ järgi.

Võrrandisüsteemi (V 2.25-26) lahenditeks on

$$\alpha = \frac{(r_0)^3}{8\varepsilon(N)^4}\left(1 + \varepsilon\cos\phi\right)^3 + C_1, \qquad \text{(V 2.27)}$$

$$\beta = \frac{3(r_0)^2}{8(N)^4}\Big[\varepsilon\phi + \sin\phi + \frac{\varepsilon}{2}\sin 2\phi + (\varepsilon)^2\sin\phi - \frac{(\varepsilon)^2}{3}(\sin\phi)^3\Big] + C_2 . \qquad \text{(V 2.28)}$$

Kui nüüd asendada suuruste α ja β avaldised (V 2.27-28) valemisse (V 2.24), siis näeme, et parandusliikmes $\underset{(1)}{u}$ saab oluliseks ja ilmselt suurusjärku määravaks tegurit $\varepsilon\phi$ sisaldav liige. Kui teiste liikmete suurus muutub perioodiliselt, siis see liige kasvab monotoonselt. Et aga otsime üksnes esimest kõige olulisemat parandusliiget suurusele $\underset{(0)}{u}$, siis võibki piirduda $\underset{(1)}{u}$ avaldises üksnes selle liikmega. Seega

$$\underset{(1)}{u} \simeq \frac{3\varepsilon(r_0)^3}{8(N)^4}\,\phi\sin\phi . \qquad \text{(V 2.29)}$$

j) Arvestades valemeid (V 2.18), (V 2.22) ja (V 2.29), paneme nüüd kirja avaldise u jaoks:

$$u = \frac{r_0}{2(N)^2}\Big\{1 + \varepsilon\Big[\cos\phi + \frac{3}{4}\Big(\frac{r_0}{N}\Big)^2\phi\sin\phi\Big]\Big\} . \qquad \text{(V 2.30)}$$

Et liikme $\underset{(1)}{u}$ suurusjärku määrav tegur $\frac{3}{4}\left(\frac{r_0}{N}\right)^2$ on väike suurus, siis võime kasutada valemit

$$\cos[(1-\lambda)\phi] = \cos\phi\cos(\lambda\phi) + \sin\phi\sin(\lambda\phi) \simeq \cos\phi + \lambda\phi\sin\phi , \qquad \text{(V 2.31)}$$

kus $\lambda \ll 1$. Valemi (V 2.31) põhjal omandab võrrand (V 2.30) kuju

$$\underline{u = \frac{r_0}{2(N)^2}\Big\{1 + \varepsilon\cos\Big[\Big(1 - \frac{3}{4}\Big[\frac{r_0}{N}\Big]^2\Big)\phi\Big]\Big\}} . \qquad \text{(V 2.32)}$$

Näeme, et partikli trajektooriks jääb juhul $\varepsilon < 1$ ikkagi ellips, kuid lisaliikme $-\frac{3}{4}\left(\frac{r_0}{N}\right)^2$ tõttu argumendi ϕ kordajas on tegemist teatava "parandatud" ellipsiga.

k) Võrrelgem järgnevalt partikli liikumist mööda klassikalisele mehaanikale vastavat trajektoori (V 2.22) ning mööda trajektoori (V 2.32), mis arvestab esimest relativistlikku parandust.

Suuruse u maksimaalne väärtus (vastavalt valemile (V 2.11) "raadiusvektori" r minimaalne väärtus) vastab ellipsi punktile, mis on kõige lähemal ühele fookustest. Et partikkel pärast täistiiru jõuaks tagasi sellisesse fookusele lähimasse punkti, selleks peab koosinuse argument muutuma 2π võrra. Valemist (V 2.32) aga näeme, et koosinuse argumendi niisugusele muutusele peab vastama veidi suurem koordinaadi ϕ muutus $\Delta\phi$, sest võrdusest

$$\left[1-\frac{3}{4}\left(\frac{r_0}{N}\right)^2\right]\Delta\phi = 2\pi$$

saame liikme $-\frac{3}{4}\left(\frac{r_0}{N}\right)^2$ väiksuse arvestamisel

$$\Delta\phi \simeq 2\pi\left[1+\frac{3}{4}\left(\frac{r_0}{N}\right)^2\right]$$

ehk

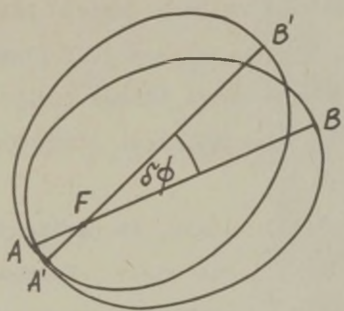
$$\Delta\phi \simeq 2\pi + \delta\phi ,$$

kus valemit (IV 7.25) arvestades

$$\underline{\delta\phi = \frac{3\pi}{2}\left(\frac{r_0}{N}\right)^2 = \frac{6\pi}{(c)^4}\left(\frac{\gamma m}{N}\right)^2} . \qquad \text{(V 2.33)}$$

Niisiis näeme, et partikli iga tiiruga mööda "relativistlikku" ellipsit pöördub selle apsiidjoon AB (ellipsi suurtelg) "klassikalise" ellipsi apsiidjoone suhtes teatava nurga $\delta\phi$ võrra (joonis 29).

1) Äsjasaadud teoreetilisi tulemusi võib kõrvutada vaatluslike andmetega planeetide liikumise kohta Päikesesüsteemis, sest ka iga üksiku planeedi liikumist Päikese gravitatsiooniväljas võib esimeses lähenduses käsitada kui kaduvväikese massiga partikli ("proovipartikli") liikumist kerasümmeetrilises gravitatsiooniväljas ning seejuures on hästi täidetud nii tingimus (V 2.14) kui ka (V 2.15). Mõistagi jääb



Joonis 29.

nii küll arvestamata planeetide mõju gravitatsioonivälja allikana ja ka Päikese enda kui mõnevõrra lapiku ja pöörleva objekti gravitatsioonivälja erinevused mittepöörleva punktmassi kerasümmeetrilisest gravitatsiooniväljast. Nimetatud tegurite arvestamiseks vajame keerukamat ülesandepüstitust.

Märkigem, et võrrandi (V 2.22) näol oli meil eespool ennekõike tuletatud (nüüd juba ÜRT raamides) k l a s s i k a l i s e njuutonliku t a e v a m e h a a n i k a p õ -

h i v õ r r a n d n.-ö. häirimata Kepleri liikumise juhul. Seejuures kujutab seos (V 2.16) endast faktiliselt k l a s s i k a l i s t K e p l e r i p i n d a d e l a u s e t. Siit saab leida ka konstandi N väärtuse konkreetsete planeetide puhul.

Valem (V 2.32) kirjeldab aga juba üksikult vaadeldava planeedi liikumist esimeses r e l a t i v i s t l i k u s lähenduses, s. t. sellises lähenduses, kus on arvesse võetud kõige olulisem osa Päikese massi kõverdavast mõjust ruumi omadustele. Nägime, et see viib planeedi p e r i h e e l i (Päikesele kõige lähema punkti) n i h k e l e Päikesega seotud ja kinnistähtede järgi orienteeritud taustsüsteemi suhtes.

Valemist (V 2.33) selgub, et periheeli ülalmainitud nihe sõltub konstandi N väärtusest. Konkreetne analüüs näitab, et see konstant on väiksem Päikesele lähematel planeetidel, samuti on ta väiksem hästi väljavenitatud orbiitidega (suure ekstsentrilisusega) Päikese kaaslaste puhul.

Päikesele lähima planeedi Merkuuri puhul leiame valemist (V 2.33) $\delta\phi$ = 43,03 kaaresekundit sajandi kohta. Vastlustest kindlaks tehtav periheeli nihe on faktiliselt küll märksa suurem, kuid suurem osa sellest on põhjustatud teiste planeetide häirivast mõjust, mis järeldub juba klassikalisest taevamehaanikast, niisiis on seletatav Newtoni teooria põhjal. Ülejääk on aga tõepoolest ca 1%-lise täpsusega kooskõlas ÜRT ennustusega. Viimasel ajal on juhitud tähelepanu vajadusele võtta vaatlusandmete kõrvutamisel teoreetiliste ennustustega siiski täpsemalt arvesse Päikese lapikust ja sellega seotud kvadrupolmomenti. Kas viimane asjaolu teooria ja empiiria kooskõla halvemaks muudab, see pole seni teada.

Periheeli nihet peaks saama jälgida samuti mõne asteroidi puhul (näiteks Ikarose puhul), sest siin on tegemist eriti suure ekstsentrilisusega orbiitidega. Asteroidide kohta kogutud vaatlusmaterjal pole aga seni ilmselt veel küllaldane konkreetsete järelduste tegemiseks. Efekti väiksuse tõttu pole selgemat pilti empiiriliste andmete ja teoreetiliste arvutuste kooskõla kohta ka teiste suurte planeetide puhul peale Merkuuri (näit. Veenuse, Maa jt. puhul).

Partikli liikumisena kerasümmeetrilises gravitatsiooniväljas on esimeses lähenduses vaadeldav ka Maa tehiskaaslase liikumine. Teoreetiliselt peaks siingi esinema perigee (orbiidi Maale lähima punkti) nihe. Efekt pole aga olnud atmosfääri kõrgemate kihtide mõju, Maa faktilise asümmeetrilisuse, Kuu mõju ning samuti vaatluste suhtelise lühiajalisuse tõttu seni praktiliselt jälgitav.

Ülesandeid

1. Uurida integraalide (V 2.6) ja (V 2.9) abil proovipartikli radiaalsihilist liikumist ($N=0$). Võrrelda relativistlikku vaba langemise võrrandit vastava klassikalise seosega.

2. Leida võrrandisüsteemi (V 2.25-26) lahendid (V 2.27-28).

3. Valguskiir punktmassi gravitatsiooniväljas

a) Eelmises punktis uurisime partikli, s. t. kõige lihtsama a i n e l i s e objekti käitumist gravitatsiooniväljas. Nagu öeldud, annab olulist informatsiooni gravitatsioonivälja struktuuri kohta ka valguskiire, s. t. levivat e l e k t r o m a g n e t v ä l j a lihtsaimal viisil modelleeriva idealisatsiooni uurimine. Empiiriliste andmetega võrdlemise seisukohalt pakub jällegi esmajoones huvi valguskiire vaatlemine kerasümmeetrilise gravitatsioonivälja, s. t. Schwarzschildi meetrikaga aegruumi juhul.

Piki valguskiire maailmajoont on intervall isotroopne, s. t. $ds = 0$. Seega tuleks meil nüüd vaadelda nn. isotroopseid geodeetilisi (nullgeodeetilisi) jooni. Geodeetiliste joonte võrrandid, kus joonte parameetriks on intervall s , pole sel juhul enam rakendatavad. Selgub aga, et teatava formaalse võtte abil saab praegu siiski ära kasutada ka eelmises punktis saadud tulemusi Schwarzschildi meetrikaga aegruumi mitteisotroopsete geodeetiliste joonte uurimisel.

b) Uurides üht kindlat valguskiirt, võime sellegi puhul orienteerida ruumilise koordinaadistiku nii, et vaadeldav valguskiir jääb kogu aeg "ekvatoriaaltasapinnale". Ka valguskiirt võime sellel "tasapinnal" kirjeldada suurusega

$$\frac{1}{r} \equiv u = u(\phi) \qquad \text{(V 3.1)}$$

Partikli puhul saime maailmajoone diferentsiaalvõrrandi kujul (V 2.13). Lisaks sellele tuli arvestada integraali (V 2.7). Neid seoseid õnnestub meil nüüd "kohandada" ka valguskiire juhule.

Seosest (V 2.7) näeme, et üleminekule $ds \to 0$ võib formaalselt vastavusse seada ülemineku $N \to \infty$. Arvestades seda, "teiseneb" võrrand (V 2.13) valguskiire võrrandiks Schwarzschildi meetrika puhul:

$$\underline{u'' + u = \frac{3}{2} r_0 (u)^2}. \qquad \text{(V 3.2)}$$

c) Ka võrrandit (V 3.2) ei õnnestu täpselt lahendada. Et seose (V 3.1) arvestamisel on võrrand esitatav kujul

$$u'' + u\left(1 - \frac{3}{2}\frac{r_0}{r}\right) = 0,$$

siis võib siingi tingimuse (V 2.14) kehtimisel otsida lahendit kujul

$$u = \underset{(0)}{u} + \underset{(1)}{u}, \qquad \text{(V 3.3)}$$

kus suurus $\underset{(0)}{u}$ on võrrandi

$$\underset{(0)}{u}'' + \underset{(0)}{u} = 0 \qquad \text{(V 3.4)}$$

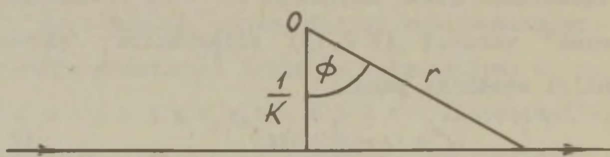
lahend ning $\underset{(1)}{u}$ on selle lahendi väike parandus.

Võrrand (V 3.4) ühtib täpselt eelmise punkti võrrandiga (V 2.20). Arvestades funktsiooni y praegust tähendust ($y = u = \frac{1}{r}$), näeme, et lahend (V 2.21) kujutab nüüd sirget tasapinnalistes polaarkoordinaatides. Võttes $\delta = 0$, vastab koordinaadi ϕ väärtusele $\phi = 0$ sirge lähim punkt koordinaadistiku alguspunktile, s. t. gravitatsioonivälja allikaks olevale punktmassile.

Niisiis saame suuruse $\underset{(0)}{u}$ jaoks avaldise

$$\underset{(0)}{u} = K\cos\phi . \qquad \text{(V 3.5)}$$

Näeme, et ilma liikmeta $\frac{3}{2}r_0(u)^2$ esitab võrrand (V 3.2) faktiliselt valguskiire sirgjoonelise leviku seaduse, s. t. valguskiire leviku seaduse tasases aegruumis (joon. 30).



Joonis 30.

d) Arvutagem nüüd parandusliige $\underset{(1)}{u}$ valemist (V 3.3). Asendades avaldise (V 3.3) võrrandisse (V 3.2) ning arvestades võrrandit (V 3.4), samuti suuruse $\underset{(1)}{u}$ väiksust, saame mittehomogeense võrrandi

$$\underset{(1)}{u}'' + \underset{(1)}{u} = \frac{3}{2}r_0(K\cos\phi)^2 . \qquad \text{(V 3.6)}$$

Selle võrrandi lahendi leiame jällegi vastavast homogeense võrrandi lahendist konstantide varieerimise teel.

Võttes

$$\underset{(1)}{u} = \alpha\cos\phi + \beta\sin\phi \qquad \text{(V 3.7)}$$

ja valides lisatingimuseks

$$\alpha'\cos\phi + \beta'\sin\phi = 0, \qquad \text{(V 3.8)}$$

saame võrrandist (V 3.6) seose

$$-\alpha' \sin\phi + \beta' \cos\phi = \frac{3}{2} r_0 (K\cos\phi)^2 . \qquad \text{(V 3.9)}$$

Võrrandsüsteemi (V 3.8–9) lahenditeks on

$$\alpha = \frac{r_0}{2}(K)^2\left[(\cos\phi)^3 + A\right], \qquad \text{(V 3.10)}$$

$$\beta = \frac{3r_0}{2}(K)^2\left[\sin\phi - \frac{1}{3}(\sin\phi)^2 + B\right], \qquad \text{(V 3.11)}$$

kus A ja B on integreerimiskonstandid.

e) Valemitest (V 3.3), (V 3.5), (V 3.7), (V 3.10) ja (V 3.11) tuleneb avaldis u jaoks

$$u = K\cos\phi + \frac{r_0}{2}(K)^2\left[(\cos\phi)^4 - (\sin\phi)^4 + \right.$$

$$\left. + 3(\sin\phi)^2 + A\cos\phi + 3B\sin\phi\right]. \qquad \text{(V 3.12)}$$

Suuruse $\underset{(1)}{u}$ väiksuse tõttu erineb "kõverdunud" valguskiirt kirjeldav funktsioon u üsna vähe funktsioonist $\underset{(0)}{u}$, mis kirjeldab sirget valguskiirt. Seda silmas pidades võime esitada avaldisele (V 3.12) üldisust piiramata kaks nõuet, mille alusel saame määrata konstandid A ja B.

Esiteks võime nõuda, et koordinaadi väärtusel $\phi = 0$ ühtiksid "kõverdunud" ja sirge valguskiir (joon. 31). Näeme, et selle nõude täitmiseks peab kehtima tingimus

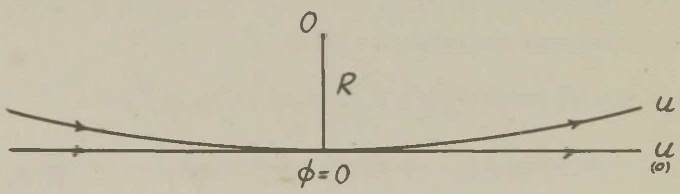
$$A = -1 . \qquad \text{(V 3.13)}$$

Konstandi K pöördväärtus tähendab nüüd ka valemis (V 3.12) valguskiire "lähimat kaugust" välja allikaks olevast punktmassist. Selle "lähima kauguse" tähistuseks valime R. Seega

$$K = \frac{1}{R}. \qquad (V\ 3.14)$$

Eelnevat nõuet silmas pidades ja valguskiire pööratavust arvestades tuleb teiseks veel nõuda, et ka "kõverdunud" valguskiir oleks sümmeetriline punkti $\phi = 0$ suhtes, s. t. et kehtiks sümmeetriaomadus

$$u(\phi) = u(-\phi). \qquad (V\ 3.15)$$



Joonis 31.

Valemist (V 3.12) järeldub, et seda nõuet saab rahuldada üksnes tingimusel

$$B = 0. \qquad (V\ 3.16)$$

Kui kasutame veel seoseid

$$(\cos\phi)^2 + (\sin\phi)^2 = 1$$

ja

$$(\cos\phi)^4 - (\sin\phi)^4 = (\cos\phi)^2 - (\sin\phi)^2,$$

siis saame kõike eelnevat arvestades esitada suuruse (V 3.12) kujul

$$\underline{u = \frac{1}{R}\cos\phi + \frac{r_0}{2(R)^2}\left[1 - \cos\phi + (\sin\phi)^2\right]}. \qquad (V\ 3.17)$$

f) Projitseerides valguse leviku tegeliku trajektoori kõveras ruumis tasasele ruumile, analüüsigem "kõverdunud" valguskiire võrrandit (V 3.17).

Valguse sirgjoonelise leviku puhul tasases ruumis, mida kirjeldab sirge võrrand (V 3.5), vastab piirväärtusele $\phi \to \pm\frac{\pi}{2}$ piirväärtus $u \to 0$, s. t. $r \to \infty$. Avaldisest (V 3.17) aga näeme, et kui $\phi \to \pm\frac{\pi}{2}$, siis funktsioon u veel nulliks ei saa. Suurus u võib saada nulliks alles "raadiusvektori" teatava suurema pöördenurga

$$\phi = \pm\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \qquad \text{(V 3.18)}$$

puhul (nagu peagi eksaktselt põhjendame, on δ väike positiivne lisaliige). Järelikult, vaadeldes kõvera ruumi valguskiirt tasase ruumi foonil, leiab aset v a l g u s k i i r e "p a i n d u m i n e" välja allikaks oleva punktmassi poole. Olgu rõhutatud, et valguskiire sellises käitumises avaldubki võib-olla kõige piltlikumalt kõvera ruumi erinevus tasasest ruumist. Kõveras ruumis endas midagi "sirgemat" ülalnimetatud valguskiirest tegelikult enam pole ning see tasase ruumi suhtes kõverdunud valguskiir kui "valgussirge" ongi seal "sirge" mõiste defineerijaks (vrdl. I, 2, c).

Järgnevalt arvutagem valguskiire "paindumist" iseloomustava parameetri δ väärtus. Selleks tuleb asendada koordinaadi ϕ väärtus (V 3.18) avaldisse (V 3.17), vastavalt nõudes, et sel juhul oleks $u = 0$:

$$\frac{1}{R}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right) + \frac{r_0}{2(R)^2}\left\{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right) + \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)\right]^2\right\} = 0.$$

Siit saame trigonomeetrilisi taandamisvalemeid arvestades, samuti pärast suurusega R läbikorrutamist

$$-\sin\delta + \frac{r_0}{2R}\left[1 + \sin\delta + (\cos\delta)^2\right] = 0.$$

Et δ on ilmselt väga väike suurus, siis lihtsustub saadud avaldis veelgi:

$$-\delta + \frac{r_0}{2R}(2+\delta) \simeq 0$$

s. t.

$$\delta\left(1 - \frac{r_0}{2R}\right) \simeq \frac{r_0}{R}.$$

Edasised teisendused annavad suuruse $\frac{r_0}{R}$ väiksust arvestades

$$\delta \simeq \frac{r_0}{R}\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)$$

ja

$$\underline{\delta \simeq \frac{r_0}{R} = \frac{2\gamma m}{c^2 R}}. \qquad \text{(V 3.19)}$$

Siin on silmas peetud ka valemit (IV 7.25).

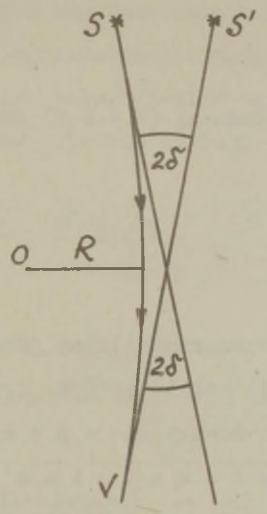
g) Valguskiire äsjakirjeldatud "paindumine" osutub empiiriliselt jälgitavaks järgmises situatsioonis.

Möödugu mingilt kaugemalt kehalt kui valguspunktilt S lähtuv valguskiir hästi lähedalt mingist punktmassina vaadeldavast kehast O kui tugeva gravitatsioonivälja allikast. Vaatlejani jõudnud valguskiir on sel juhul teataval määral "paindunud" (joonis 32). Et aga valguse leviku tee kõveras ruumis projitseerime paratamatult ikka tasasesse ruumi, siis peab vaatlejale V näima valguspunkti S asukoht nihkununa uude asendisse S'. Tegeliku ja näiva asukoha suundade vaheline nurk ongi 2δ.

Päikesest hästi lähedalt mööduva valguskiire puhul võime valemile (V 3.19) anda kuju

$$\delta = \frac{r_0}{r_\odot} \cdot \frac{r_\odot}{R} = 1'', 75 \frac{r_\odot}{R}, \qquad \text{(V 3.20)}$$

kus $r_\odot$ on Päikese raadius. Täieliku päikesevarjutuse puhul osutub võimalikuks fikseerida Päikese ketta läheduses olevate tähtede näivaid asukohti taevaskeral ning neid asukohti saab võrrelda samade tähtede asukohtadega sel juhul,



Joonis 32.

kui Päike on taevaskeral hoopis vastasasendis. Kui Päikesest möödumisel leiab aset valguskiirte "paindumine", siis peavad päikesevarjutuse ajal fikseeritud tähtede asukohad veidi nihkunud olema nende tavaliste asukohtade suhtes. Ja tõepoolest - niisugust ilmingut on ka täheldatud. Tõsi, mitmesugustel põhjustel on siin vaatlusvead väga suured ja efekti on mõõdetud ca 10%-lise täpsusega. Sellise täpsuse piirides on aga vaatlusandmed kooskõlas eespool toodud teoreetilise ennustusega.

Alates 1968. aastast on võimaldunud mõõta ka kvasaritelt lähtunud ja Päikesest möödunud raadiokiirguse kõrvalekallet. Mõõtmistäpsus on siingi suurusjärgus 10 % ja selle piirides lahkuminekut ÜRT ennustusest pole.

Ülesandeid

1. Leida võrrandisüsteemi (V 3.8-9) lahendid (V 3.10-11).

4. Spektrijoonte gravitatsiooniline nihe

a) Juba ekvivalentsusprintsiibist järeldub, et gravitatsiooniväljas aja kulg aeglustub (vt. I, 9, c). Selle nähtuse üheks avaldumisvormiks on s p e k t r i j o o n t e g r a v i t a t s i o o n i l i n e n i h e. Ilmsiks tuleb selline nihe siis, kui võrdleme omavahel valguse kiirgamise protsesse erineva tugevusega gravitatsiooniväljades.

b) Vaadelgem praegu elektromagnetkiirguse allikaid, mille keskmine kiirus teatavas taustsüsteemis on null. Aja kulg nendes kiirgajates on sel juhul määratud seosega

$$dt = \frac{ds}{c\sqrt{g_{00}}} . \qquad (V\ 4.1)$$

Kindla kiirgajatüübi puhul on kiiratava elektromagnetlainetuse sagedus pöördvõrdeline ajavahemikuga

$$\nu \sim \frac{1}{dt} = \frac{c\sqrt{g_{00}}}{ds} . \qquad (V\ 4.2)$$

Kiirgaja maailmajoone element ds on invariantne suurus.

Seega, nagu näeme saadud valemist, sõltub sagedus ν antud kindla kiirgaja puhul meetrilise tensori komponendi g_{oo} väärtusest. See iseloomustab aga omakorda aegruumiga lahutamatult seotud gravitatsioonivälja.

Võrrelgem nüüd sagedust sama kiirgajatüübi puhul gravitatsioonivälja erinevates punktides (tähistagem vastavad gravitatsioonivälja potentsiaalid tinglikult $g_{oo}(1)$ ja $g_{oo}(2)$). Suhteline sageduse erinevus avaldub valemiga

$$\frac{\nu_1-\nu_2}{\nu_1}=\frac{\frac{c}{ds}\left[\sqrt{g_{oo}(1)}-\sqrt{g_{oo}(2)}\right]}{\frac{c}{ds}\sqrt{g_{oo}(1)}},$$

seega

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=\frac{\sqrt{|g_{oo}(1)|}-\sqrt{|g_{oo}(2)|}}{\sqrt{|g_{oo}(1)|}}. \qquad \text{(V 4.3)}$$

c) Järgnevalt oletagem, et meil on tegemist nõrga ja staatilise gravitatsiooniväljaga, s. t. et vastavalt valemile (IV 5.17) kehtib seos

$$g_{oo}=-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right),$$

kus U on gravitatsioonivälja Newtoni potentsiaal. Siit saame liikme $\frac{2U}{c^2}$ väiksuse tõttu

$$\sqrt{|g_{oo}|}\simeq 1+\frac{U}{c^2}. \qquad \text{(V 4.4)}$$

Pangem tähele, et Schwarzschildi täpse meetrika (IV 7.21) puhul saame samasuguse tulemuse.

Seost (V 4.4) arvestades võtab valem (V 4.3) kuju

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1}\simeq\frac{U_1-U_2}{c^2\left(1+\frac{U_1}{c^2}\right)},$$

millest liikme $\frac{U_1}{c^2}$ väiksuse tõttu saame

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1} \simeq \frac{U_1 - U_2}{c^2} \qquad \text{(V 4.5)}$$

d) Valemit (V 4.5) võime rakendada paljudel erijuhtudel.

Võrrelgem näiteks samatüübilisi kiirgajaid Maa peal ja Päikesel. Tähistagu U_1 ja U_2 vastavalt Maa ja Päikese pinnal mingite punktide gravitatsioonipotentsiaale, seega

$$U_1 = -\frac{\gamma m_{\delta}}{r_{\delta}}$$

ja

$$U_2 = -\frac{\gamma m_{\odot}}{r_{\odot}}.$$

Valemist (V 4.5) saame

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1} = \frac{\gamma}{c^2}\left(\frac{m_{\odot}}{r_{\odot}} - \frac{m_{\delta}}{r_{\delta}}\right). \qquad \text{(V 4.6)}$$

Et SI ühikutes $\frac{m_{\odot}}{r_{\odot}} \simeq 3\cdot 10^{21}$, $\frac{m_{\delta}}{r_{\delta}} \simeq 1\cdot 10^{17}$ ja $\frac{\gamma}{c^2} \simeq 0{,}7\cdot 10^{-27}$, siis

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1} \simeq +\frac{\gamma m_{\odot}}{c^2 r_{\odot}} \simeq +2{,}1\cdot 10^{-6}. \qquad \text{(V 4.7)}$$

Niisiis on Maal kiiratava elektromagnetlainetuse, sealhulgas valguse sagedus suurem kui sama kiirguse sagedus Päikesel asetseva kiirgaja puhul. Päikeselt tulev valgus on "punasem". Tekib spektrijoonte gravitatsiooniline p u n a n i h e . Seda punanihet on jälgitud ka empiiriliselt. Vaatlustulemuste kvantitatiivset võrdlemist teoreetiliste arvutustega raskendavad aga siingi mitmed segavad tegurid (näit. gaaside voolamine Päikese atmosfääris). Ca 1%-lise täpsusega ühtivad aga teoreetilised ennustused empiiriliste andmetega.

e) Võib võrrelda samatüübilisi kiirgajaid samuti Maa gravitatsioonivälja erinevates punktides. Tähistagu U_1 gravitatsioonipotentsiaali Maa pinnal ja U_2 gravitatsioonipotentsiaali teataval kõrgusel Maa pinnast $h = r_h - r_{\oplus}$. (Vaatleme siin üksnes efekti n.-ö. peamist põhjustajat, s.t. Maad kui kerakujulist gravitatsioonivälja allikat. Maa lapikusest ja pöörlemisest tingitud parandused jäävad siin arvesse võtmata.) Seega kehtivad seosed

$$U_1 = -\frac{\gamma m_{\oplus}}{r_{\oplus}}$$

ja

$$U_2 = -\frac{\gamma m_{\oplus}}{r_h}$$

Valemist (V 4.5) saame

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_1} = \gamma m_{\oplus}\left(\frac{1}{r_h} - \frac{1}{r_{\oplus}}\right) = \frac{\gamma m_{\oplus}}{r_{\oplus}}\left(\frac{r_{\oplus}}{r_h} - 1\right),$$

s. o.

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_1} = -\frac{\gamma m_{\oplus}}{r_{\oplus}}\left(1 - \frac{r_{\oplus}}{r_h}\right). \qquad \text{(V 4.8)}$$

Niisiis näeme, et Maa pinnal kiiratava elektromagnetlainetuse sagedus on väiksem kui sama tüüpi kiirgaja puhul teataval kõrgusel Maa pinnast. Teatavalt kõrguselt Maa pinnale tulev valgus on seega "sinisem". Tekib spektrijoonte gravitatsiooniline s i n i n i h e .

Kirjeldatud sininihke empiirilise jälgimise üheks võimaluseks võiksid olla küllalt kõrgel tiirlevad tehiskaaslased. Seni jääb aga oodatav efekt ilmselt teiste efektide varju. Küll on aga alates 1959. aastast eksperimentaalselt jälgitud gravitatsioonilist sininihet "maiste" laboratoorsete vahenditega kümnekonnameetrise kõrguste vahe korral Mössbaueri efekti abil, kusjuures ÜRT ennustused on suure täpsusega täielikku kinnitust leidnud.

f) Mössbaueri efekti abil on samuti mõõdetud pöörlevalt silindrilt tuleva kiirguse sageduse muutumist sõltuvalt pöörlemiskiirusest. Seejuures on selgunud, et pöörlemiskiiruse suurenedes kiirguse sagedus tõepoolest väheneb. Sageduse muutus on just niisugune, nagu oleks kiirgus lähtunud silindri pöörlemiskiirusele vastava gravitatsioonipotentsiaaliga ruumipiirkonnast (vrdl. valemit (V 4.3) valemitest (I 9.7) tulenevate järeldustega). Nii on spektrijoonte nihke mõõtmine Mössbaueri efekti abil võimaldanud päris otseselt kontrollida ekvivalentsusprintsiipi.

L õ p e t u s e k s

Sellega lõpetagem käesolev ÜRT aluste kursus. Nagu nägime, oli siin esitatud üksnes ÜRT ideeline ja matemaatiline tuum ning toodud ainult mõningad rakenduslikud näited. Eespool juba märkisime paaril korral, et paljude ÜRT enda ja tema rakendamisega seotud probleemide (sealhulgas gravitatsioonilainete, kosmoloogiliste mudelite, tähtede relativistlike protsesside, mitmete muude ennustatud gravitatsiooniefektide) analüüs tänapäevasel tasemel nõuab peenemate ja keerukamate matemaatiliste meetodite, aga samuti nüüdisaegsete komplitseeritud eksperimendivõtete kaasatõmbamist. Süvendatult on kavatsusel käsitleda ÜRT-d käesolevale põhikursusele eri vihikutena järgnevates täiendavates peatükkides. Rõhutagem veel kord, et esialgu on tahetud üksnes põhijoontes tutvustada ÜRT tunnetuslikke väärtusi. Kuid selleta pole ka ÜRT probleemide süvendatum käsitlus mõistlik ega mõeldav.

K i r j a n d u s

A. ÜRT-alased õpikud, monograafiad, populaarteaduslikud raamatud

Бергман П. Введение в теорию относительности. ГИИЛ, 1947.

Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. ИИЛ, 1962.

Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. "Наука", 1971.

Инфельд Л., Плебанский Е. Движение и релятивизм. ИИЛ, 1962.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Изд. 6-е. "Наука", 1973. (Lüh.: LL)

Мак-Витти Г.К. Общая теория относительности и космология. ИИЛ, 1961.

Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. "Наука", 1966. (Lüh.: P)

Синг Дж. Общая теория относительности. ИИЛ, 1963.

Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. ГИФМЛ, 1961.

Шама Д.В. Современная космология. "Мир", 1973.

Эйнштейн А. Сущность теории относительности. /Собрание научных трудов, т. 2. "Наука", 1966. Lk. 5-82/ (Lüh.: E)

Einstein, A., Infeld, L. Füüsika evolutsioon. ERK, 1962. (Lüh.: EI)

Õiglane, H. Vestlus relatiivsusteooriast. 3. trükk. "Valgus", 1973.

B. Muu tsiteeritud kirjandus

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. ГИФМЛ, 1958. (Lüh.: LL-Meh)

Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. Изд. Моск. ун-та, 1974. (Lüh.: Olh.)

Физический энциклопедический словарь, т. 3. "СЭ", 1963. (Lüh.: FES-III)

Физический энциклопедический словарь, т. 4. "СЭ", 1965. (Lüh.: FES-IV)

Kard, P. Makroskoopiline elektrodünaamika I. TRÜ rotaprint, 1966. (Lüh.: K-ME)

Kard, P. Erirelatiivsusteooria I. TRÜ rotaprint, 1972. (Lüh.: K-I)

Kard, P. Erirelatiivsusteooria II. TRÜ rotaprint, 1972. (Lüh.: K-II)

S i s u k o r d

А. Коппел
ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
На эстонском языке
Тартуский государственный университет
ЭССР, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Vastutav toimetaja P. Kard
Korrektor V. Lang

Paljundamisele antud 21.II 75. Trükip. nr. 2, 30x42.1/4. Trükipoognaid 15,75. Tingtrükipoognaid 14,65. Arvestuspoognaid 13,1. Trükiarv 400. MB 00351. Tell. nr. 323.
TRÜ trükikoda, ENSV, Tartu, Palsoni t. 14.
Hind 46 kop.

46 kop.