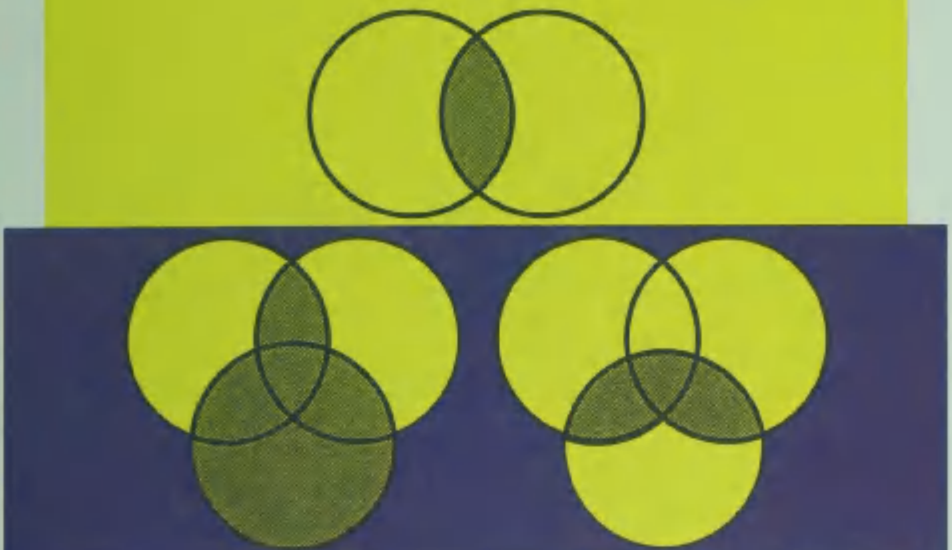
Peeter Oja

HULGATEOORIA



Tartu Ülikool
Rakendusmatemaatika instituut

Peeter Oja

HULGATEOORIA

Neljas, täiendatud ja ümbertöötatud trükk

Tartu 2006

Kaane kujundanud Aita Linnas

ISBN 9949–11–406–3

Tartu Ülikooli Kirjastus
www.tyk.ee

Eessõna

Käesolevas õppevahendis tutvustame hulgateooria algtõdesid, tuginedes lugeja varasematele kogemustele põhiliselt koolimatemaatikast. Seejuures me ei käsitle üldse aksiomaatilist ülesehitust.

Hulga mõiste kõrval on meie käsitluses keskseks ka funktsiooni mõiste. Funktsioonid on meil iseseisvaks uurimisobjektiks, aga ka vahendiks hulkade mitmesuguste omaduste vaatlemisel.

Peaaegu kõik esitatud väited ja tulemused on tõestatud. Ainsaks erandiks on arusaadavatel põhjustel nn. kontiinumi probleem. Osa ülesandeid on sellised, kus lahendus nõuab ideid ja võtteid, mida selles õppevahendis ei tutvustata. Suhteliselt komplitseeritud lahendusega ülesanded on varustatud sümboliga *.

Õppevahend on mõeldud eeskätt matemaatika-informaatikateaduskonna üliõpilastele ja enamikule neist peaks ta andma küllaldase koguse õpingute jooksul vajaminevaid hulgateooria mõisteid ja tulemusi.

Hulgateooria iseseisval õppimisel tuleks lisaks siin antutele lahendada veel ülesandeid, mida võib leida näiteks kogudest [3,14].

Põhjalikumat hulgateooria käsitlust vajavatele lugejatele soovitame süvatasemel õpikut [1] või monograafiat [13], aga kasulik võib olla tutvuda ka raamatutega [4,10–12,15]. Need, kellele meie käsitlus näib liiga lakoonilisena, võivad mõnede mõistete selgitamisel abi saada populaarteaduslikumast kirjandusest [2,9,16].

Praegune õppevahend on 1995. aastal ilmunud "Hulgateooria" [6] ümbertöötatud ja täiendatud variant. Mõned tõestused on uued ja on ka teistel ideedel põhinevaid. Lisatud on ülesandeid, mis valgustavad materjali teistest aspektidest. Olulisim muudatus on matemaatilise loogika ühe algusosa – lausearvutuse lisamine. Seda on tehtud eelkõige üliõpilaste vajadusi silmas pidades, sest hulgateooria on ühendatud lausearvutusega üheks matemaatika-informaatikateaduskonnas õpetatavaks aineks. Lausearvutuse osas soovitame tutvuda raamatutega [5,7,8,14].

Lausearvutuse osa vaatas läbi dots. Rein Prank, kelle märkused aitasid palju kaasa teksti lõplikul viimistlemisel. Praeguse õppevahendi joonised ja trükitöö tegi Anu Roio. Mõlemale on autor väga tänulik.

§1. Hulga mõiste

Hulk on käesolevas kursuses algmõiste, me ei defineeri teda rangelt mingite üldisemate mõistete abil. Hulkadega tegelemiseks tuleb nad siiski kuidagi määratleda.

Hulgateooria rajaja Georg Cantor andis järgmise formuleeringu: hulk on selline omavahel erinevate objektide kogu, millest saab mõelda kui tervikust.

Selles määratluses näeme ühte hulkade olulist tunnust: hulka kuuluvad objektid on omavahel erinevad. Teine oluline tunnus seisneb selles, et mistahes objekti korral peab olema võimalik üheselt otsustada, kas ta kuulub vaadeldavasse hulka või mitte.

Objekte, mis moodustavad hulga (kuuluvad hulka), nimetatakse hulga elementideks. Kolmas hulki iseloomustav tunnus on järgmine: hulga element ja hulk ise loetakse alati erinevateks (mittevõrdseteks) objektideks, seega hulk ei ole kunagi iseenda elemendiks.

Kahte hulka loetakse võrdseteks, kui nad koosnevad ühtedest ja samadest elementidest.

Sellest järeldub, et hulga määratlemisel ei ole mingit tähtsust tema elementide omavahelistel vahekordadel, sealhulgas ka näiteks järjestusel.

Hulki tähistatakse tavaliselt suurte ladina tähtedega A, B, C, .., hulga elemente väikeste ladina tähtedega $a, b, c,$ Asjaolu, et a on hulga A element, tähistatakse $a \in A$; kui a ei ole hulga A element, siis kirjutatakse $a \notin A$, mõnikord ka $a \overline{\in} A$.

Hulkade kirjeldamise viisidega tutvume näidetes.

Näited. 1. Hulka, milles on kaks elementi a ja b, võib kirjutada $\{a, b\}$. Hulk $\{2, 3, 4, 5\}$ koosneb neljast elemendist, seejuures näiteks $\{2, 3, 4, 5\} = \{5, 4, 3, 2\} = \{2, 4, 3, 5\}$.

2. Tähtsamad arvuhulgad on naturaalarvude hulk $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, täisarvude hulk $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q} = \{q \mid q = \dfrac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$, reaalarvude hulk $\mathbb{R}$, kompleksarvude hulk $\mathbb{C} = \{z \mid z = x+iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ kirjeldus ratsionaalarvude kaudu esitatakse tavaliselt matemaatilise analüüsi kursuses.

Neis näidetes tutvusime hulga kirjeldusviisiga $\{a \mid P(a)\}$, kus $P(a)$ tähistab tingimust või tingimuste loetelu, mida vaadeldavasse hulka kuuluvad elemendid a peavad rahuldama. Taolise kirjutise asemel kasutatakse ka temaga samaväärset $\{a : P(a)\}$

3. Arvude intervallid on lõik $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leqslant x \leqslant b\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, vahemik $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$, poollõik $[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leqslant x < b\}$ või poollõik $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leqslant b\}$.

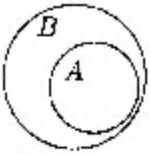
4. Kirjutised $\{a, a, b, c\}$ ja $\{\{a, b\}, \{b, a\}\}$ ei tähista hulki, sest hulka kuuluvad elemendid on omavahel erinevad. Kuid $\{a, \{a\}\}$ on hulk, sest alati $a \neq \{a\}$.

5. Kõikidest puudest Eesti metsades ei ole mõistlik rääkida kui hulgast, sest näiteks ei ole praktiliselt võimalik üheselt kindlaks määrata, millisest hetkest vaadeldav taim on hävinud, samuti peab enne täpselt kokku leppima, millised puud jäävad Eesti piiri sisse ning millised taimed lugeda puudeks.

6. Olgu $A = \{a \mid a \text{ on hulk}\}$ – see oleks „kõikide hulkade hulk" Kui A oleks hulk, siis ta oleks üks oma elementidest, seega $A \in A$. See on aga võimatu, mistõttu A ei ole hulk. Antud juhul räägitakse kõikide hulkade klassist või kõikide hulkade kogumist.

§2. Osahulk ehk alamhulk

Definitsioon. Hulka A nimetatakse hulga B osahulgaks ehk alamhulgaks, kui kõik hulga A elemendid on hulga B elementideks (hulga A iga element kuulub hulka B).



Asjaolu, et hulk A on hulga B osahulk, tähistatakse $A \subset B$, samuti $B \supset A$. Mõnikord kasutatakse ka kirjutist $A \subseteq B$ või $B \supseteq A$.

Kui $A = \{a \mid P(a)\}$ ja $B = \{a \mid Q(a)\}$, siis $A \subset B$ parajasti siis, kui $P(a) \Rightarrow Q(a)$.

Osahulkadel on järgmised vahetult definitsioonist järelduvad omadused:

1) iga hulga A korral $A \subset A$,
2) kui $A \subset B$ ja $B \subset A$, siis $A = B$,
3) kui $A \subset B$ ja $B \subset C$, siis $A \subset C$.

Omadust 2) kasutatakse hulkade võrdsuse tõestamisel.

Definitsioon. Hulka, mis ei sisalda ühtegi elementi, nimetatakse tühjaks hulgaks, teda tähistatakse $\emptyset$. Tühja hulka võib kirjeldada ka võrdusega $\emptyset = \{a \mid a \neq a\}$. On selge, et $\emptyset \subset A$ iga hulga A korral.

Tühi hulk on üheselt määratud, sest kui leiduksid tühjad hulgad $\emptyset_1$ ja $\emptyset_2$, siis $\emptyset_1 \subset \emptyset_2$ (sest $\emptyset_1$ on tühi hulk), samuti $\emptyset_2 \subset \emptyset_1$ (sest $\emptyset_2$ on tühi hulk), nendest sisalduvustest aga järeldub, et $\emptyset_1 = \emptyset_2$.

Näited. 1. Eespool vaadeldud arvuhulgad on üksteise osahulgad järgmiselt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2. Hulga $A = \{a\}$ osahulgad on $\emptyset$ ja $\{a\}$. Hulga $A = \{a, b\}$ osahulgad on $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$.

Ülesanne. Tõestada, et kui hulgas A on n elementi, siis hulgal A on 2^n erinevat osahulka.

Hulga A kõigi osahulkade hulka tähistatakse $P(A)$, s.t. $P(A) = \{B \mid B \subset A\}$.

Kui hulgas on mingi naturaalarvuga võrdne arv elemente, siis nimetatakse seda hulka lõplikuks. Tühja hulga lõplikuks lugemine on kokkuleppe küsimus, temas sisalduvate elementide arv on 0. Hulka, mis ei ole lõplik (ega tühi), nimetatakse lõpmatuks. Lõpmatud on näiteks hulgad $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{R}$, kõigi tasandil paiknevate kolmnurkade hulk.

§3. Tehted hulkadega

Definitsioon. Hulkade A ja B ühendiks ehk summaks nimetatakse hulka, mille moodustavad kõik kas hulka A, hulka B või mõlemasse kuuluvad elemendid. Hulkade A ja B ühendit tähistatakse $A \cup B$.

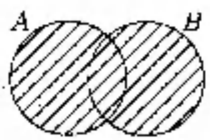
Definitsioonis väljendatut märgitakse sümbolite abil järgmiselt:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Näide. Kui $A = \{a, b, e\}$ ja $B = \{a, c, d, e\}$, siis $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.

Märgime, et alati $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

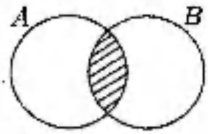
Tehete abil moodustatud hulkadest piltliku ettekujutuse saamiseks kasutatakse nn. Venni diagramme. Kui hulgad A ja B on kujutatud ringidena, siis viirutatud ala joonisel on nende ühend $A \cup B$.



Definitsioon. Hulkade A ja B ühisosaks ehk lõikeks (mõnikord ka korrutiseks) nimetatakse hulka, mille moodustavad kõik nii hulka A kui ka hulka B kuuluvad elemendid. Hulkade A ja B ühisosa tähistatakse $A \cap B$.

Sümbolite abil on ühisosa väljendatav

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$



samuti viirutatud osana kõrvaloleval joonisel.

Näide. Kui $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{a, c, d, e\}$, siis $A \cap B = \{a, c\}$. Mistahes hulkade korral $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$.

Hulkade ühendil ja ühisosal on järgmised omadused:

1) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, (idempotentsus)

2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, (kommutatiivsus)

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, (assotsiatiivsus)

4) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. (distributiivsus)

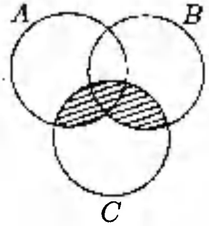
Omadused 1) – 3) järelduvad vahetult definitsioonidest. Näitena tõestame teise distributiivsuse võrduse.

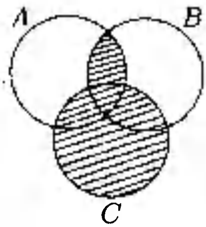
Olgu $x \in (A \cap B) \cup C$. Siis $x \in A \cap B \vee x \in C$. Kui $x \in C$, siis $x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C$, mistõttu $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Kui aga $x \notin C$, siis $x \in A \cap B$ ehk $x \in A \wedge x \in B$. Siis aga $x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C$, s.t. $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Sellega on näidatud, et $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Olgu nüüd $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Siis $x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C$. Kui $x \in C$, siis $x \in (A \cap B) \cup C$. Kui aga $x \notin C$, siis $x \in A \wedge x \in B$ ehk $x \in A \cap B$ ning $x \in (A \cap B) \cup C$. Sellega on näidatud ka, et $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$ ning ühtlasi tõestatud teine distributiivsuse võrdus.

Ülesanne. Tõestada esimene distributiivsuse võrdus.

Distributiivsuse võrdustes esinevad hulgad Venni diagrammidel on järgmised:





Märgime, et Venni diagramme ei saa kasutada hulkade korral kehtivate universaalsete võrduste (nagu näiteks distributiivsuse omaduste) tõestamiseks, sest ei ole põhjendatud mistahes hulkade kujutamine punktihulkadena tasandil. Küll aga võib Venni diagramme mõnikord vaadelda näidetena hulkadevaheliste võrduste mittekehtivuse kohta.

Ülesanne. Tõestada, et $A \cup (A \cap B) = A$ ja $A \cap (A \cup B) = A$.

Ühendi ja ühisosa assotsiatiivsus võimaldab need tehted laiendada lõplikule hulkade kogumile, suurendades järkjärgult hulkade arvu:

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n,$$

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n = (A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cap A_n.$$

Saadud hulkade korral kasutatakse ka tähistusi $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ ja $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. Kui $\{A_\alpha\}$ on hulkade A_α süsteem, siis defineerime $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ kui kõigi selliste elementide hulga, mis kuuluvad vähemalt ühte hulkadest A_α, ning $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ kui kõigi selliste elementide hulga, mis kuuluvad igasse hulka A_α. Niisiis

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha = \{x \mid \exists\, \alpha \text{ nii, et } x \in A_\alpha\}.$$

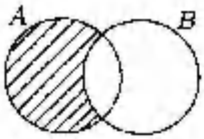
$$\bigcap_{\alpha} A_\alpha = \{x \mid \forall\, \alpha \text{ korral } x \in A_\alpha\}$$

Näiteks $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} \left[i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}\right) = \bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty} \left[i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}\right) = \mathbb{R}$, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$, $\bigcup\limits_{a,b \in \mathbb{Q}} (a, b) = \mathbb{R}$, iga hulga A korral $\bigcup\limits_{a \in A} \{a\} = A$.

Definitsioon. Hulkade A ja B vaheks nimetatakse kõigi selliste elementide hulka, mis kuuluvad hulka A, kuid ei kuulu hulka B. Hulkade A ja B vahet tähistatakse $A \setminus B$.

Seega

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



ning ka kõrvaloleval Venni diagrammil on kujutatud hulk $A \setminus B$.

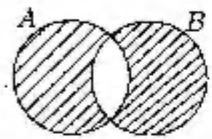
Näide. Kui $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{a, c, d, e\}$, siis $A \setminus B = \{b\}$ ja $B \setminus A = \{d, e\}$.

Toodud näide kinnitab ka asjaolu, et üldiselt $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Definitsioon. Hulkade A ja B sümmeetriliseks vaheks nimetatakse kõigi selliste elementide hulka, mis kuuluvad hulka A, kuid mitte hulka B, või kuuluvad hulka B, kuid mitte hulka A. Hulkade A ja B sümmeetrilist vahet tähistatakse $A \Delta B$, mõnikord ka $A - B$.

Sümbolitega on sümmeetrilise vahe definitsioon väljendatav

$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\},$$



seda hulka on illustreeritud ka kõrvaloleval joonisel.

Definitsiooni põhjal võib öelda, et

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Näide. Kui $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{a, c, d, e\}$, siis $A \Delta B = \{b, d, e\}$

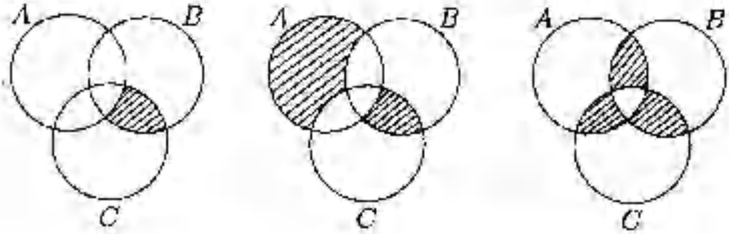
Sümmeetrilise vahe tähtsamad omadused on järgmised:
1) $A \Delta B = B \Delta A$, (kommutatiivsus)
2) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,
3) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$, (assotsiatiivsus)

4) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$, (distributiivsus)
5) $A \Delta B = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Ülesanne. Tõestada omadused 2) – 5).

Ülesanne. Kujutada Venni diagrammil hulgad $A \setminus (B \cup C)$, $A \cap (B \setminus C)$, $(A \setminus B) \setminus C$, $A \setminus (B \setminus C)$.

Ülesanne. Kirjutada hulgateoreetiliste tehete abil järgmised Venni diagrammidel kujutatud hulgad



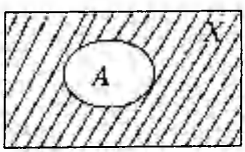
Vaadeldud neli hulgateoreetilist tehet ei ole sõltumatud selles mõttes, et neid saab väljendada teiste kaudu. Näiteks $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, eespool juba oli esitus $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Ülesanne. Avaldada $A \cup B$ ja $A \setminus B$ tehete $\cap$ ja Δ abil, $A \cap B$ ja $A \setminus B$ tehete $\cup$ ja Δ abil, $A \cup B$ tehete $\setminus$ ja Δ abil.

Ülesanne. Tõestada, et $A \cup B$ ei ole võimalik avaldada tehete $\cap$ ja $\setminus$ abil ning $A \setminus B$ ei ole võimalik avaldada tehete $\cup$ ja $\cap$ abil.

Tihti on tegemist olukorraga, kus kõik vaadeldavad hulgad on ühe ja sama hulga osahulgad. Taolist teisi hulki sisaldavat hulka nimetatakse universaalseks. Näiteks matemaatilise analüüsi mõnede küsimuste käsitlemisel võib selleks olla reaalarvude hulk, geomeetrias tasandi kõigi punktide hulk või ruumi kõigi punktide hulk.

Definitsioon. Hulga A täiendiks (universaalse hulga X suhtes) nimetatakse hulka $A' = X \setminus A$.



Joonisel kujutab hulka A' viirutatud ala.

Hulga täiendi moodustamisel kehtivad järgmised omadused:

1) $\emptyset' = X$,
2) $X' = \emptyset$,
3) $A \cup A' = X$,
4) $A \cap A' = \emptyset$,
5) $A'' = A$,
6) $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
7) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Omadused 6) ja 7) on üldistatavad suvalistele ühisosadele ja ühenditele

$$\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)' = \bigcap_\alpha A_\alpha{}',$$

$$\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)' = \bigcup_\alpha A_\alpha{}'$$

Neid võrduseid nimetatakse de Morgani valemiteks ning nad väljendavad ühendi ja ühisosa duaalsust täiendi võtmise suhtes.

Omadused 1) – 5) järelduvad vahetult täiendi definitsioonist, de Morgani valemid põhjendatakse järgmiste samaväärsuste ahelatega:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)' &\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin \bigcup_\alpha A_\alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in X \wedge (\forall \alpha \text{ korral } x \notin A_\alpha) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall \alpha \text{ korral } x \in X \setminus A_\alpha \Leftrightarrow x \in \bigcap_\alpha A_\alpha{}', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)' &\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin \bigcap_\alpha A_\alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in X \wedge (\exists \alpha \text{ nii, et } x \notin A_\alpha) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \text{ nii, et } x \in X \setminus A_\alpha \Leftrightarrow x \in \bigcup_\alpha A_\alpha{}' \end{aligned}$$

Ülesanne.* Tõestada, et antud hulgast ja tema n osahulgast saab tehete $\cup$, $\cap$ ja $\setminus$ abil moodustada maksimaalselt 2^{2^n} erinevat hulka.

§4. Hulkade otsekorrutis

Definitsioon. Hulkade A ja B otsekorrutiseks ehk Descartes'i korrutiseks nimetatakse kõigi paaride (a, b) hulka, kus $a \in A$, $b \in B$, seejuures elementide järjekord paarides on oluline. Hulkade A ja B otsekorrutist tähistatakse $A \times B$. Niisiis

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

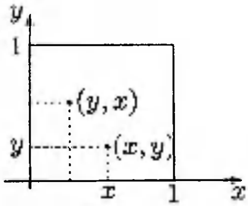
Lisame, et paaride võrdsus tähendab vastavate paariliste võrdsust, s.t.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Näited. 1. Kui $A = \{a, b\}$ ja $B = \{a, b, c\}$, siis $A \times B =$ $= \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}$ ja $B \times A =$ $= \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b)\}$.

See näide kinnitab, et üldiselt $A \times B \neq B \times A$.

2. Kui $A = B = [0, 1]$, siis otsekorrutist $A \times B =$ $= \{(x, y) \mid x, y \in [0, 1]\}$ võib kujutada ruuduna tasandil, mille punktide koordinaadid asuvad lõigus $[0, 1]$. On selge, et üldiselt $(x, y) \neq (y, x)$.



3. Hulka $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ võib kujutada kui tasandi punktide hulka, mille mõlemad koordinaadid on täisarvud.

4. Kui $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ja $B = \{1, 2, . . , 8\}$, siis otsekorrutist $A \times B = \{(a, 1), . . , (h, 8)\}$ võib vaadelda kui malelaua ruudustikku (males kasutatakse teatavasti ruutude lühemat kirjutusviisi $a1$, $\quad$, $h8$).

Ülesanne. Tõestada, et kui $A \neq \emptyset$ ja $B \neq \emptyset$, siis $A \times B = B \times A$ parajasti siis, kui $A = B$.

Hulkade otsekorrutis rahuldab järgmisi võrdusi:
1) $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times A = \emptyset$,
2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

3) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,

4) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Sümmeetria kaalutlustel on selge, et võrdustega 2) – 4) analoogilised distributiivsuse tingimused kehtivad ka otsekorrutise teise teguri suhtes.

Võrduse 2) põhjendab samaväärsuste ahel

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (A \cup B) \times C \ &\Leftrightarrow\ x \in A \cup B \wedge y \in C \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ (x,y) \in A \times C \vee (x,y) \in B \times C \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C).
\end{aligned}
$$

Ülesanne. Tõestada võrdused 3) ja 4).

Otsekorrutise $A \times A$ puhul kasutatakse veel tähistust A^2 Näiteks $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ on vaadeldav tasandi kõigi punktide hulgana, kusjuures punkti (x,y) koordinaadid on x ja y.

Kahe hulga otsekorrutise mõiste on vahetult üldistatav mistahes lõplikule arvule hulkadele. Defineerime

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\},$$

pidades tegurite järjekorda oluliseks. Kui kahe hulga otsekorrutise elemendid on paarid, siis üldisemal juhul räägitakse n-komponendilisest korteežist või vektorist.

Otsekorrutist $\underbrace{A \times \ldots \times A}_{n}$ tähistatakse A^n

Näiteks $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ on kolmemõõtmeline ruum, kus punkti (x,y,z) koordinaadid on x, y ja z.

Märgime, et kui hulgas A on m elementi ja hulgas B on n elementi, siis hulgas $A \times B$ on $m \cdot n$ elementi. Üldisemalt, kui A_1 koosneb m_1 elemendist, $\ldots$, A_n koosneb m_n elemendist, siis $A_1 \times \ldots \times A_n$ koosneb $m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ elemendist.

Ülesanne. Tõestada, et kui $A_i \neq \emptyset$, $B_i \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, n$, siis

1) $A_1 \times \ldots \times A_n \subset B_1 \times \ldots \times B_n$ parajasti siis, kui $A_1 \subset B_1, \ldots, A_n \subset B_n$;

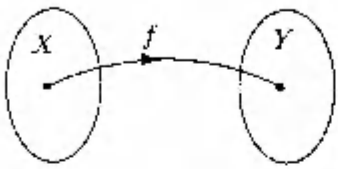
2) $A_1 \times \ldots \times A_n = B_1 \times \ldots \times B_n$ parajasti siis, kui $A_1 = B_1, \ldots, A_n = B_n$.

§5. Funktsioonid

Funktsiooni mõiste on matemaatikas üks olulisemaid mõisteid. Koolimatemaatikas tutvutakse tavaliselt arvudevahelist sõltuvust väljendavate funktsioonidega. Nendega võrreldes üldistame me funktsiooni mõistet väga palju.

Olgu X ja Y hulgad.

Definitsioon. Kui on antud eeskiri f, mis seab hulga X igale elemendile vastavusse hulga Y kindla elemendi, siis öeldakse, et on defineeritud funktsioon f, ja kirjutatakse $f : X \to Y$ Kui elemendile $x \in X$ seatakse vastavusse $y \in Y$, siis kasutatakse kirjutist $y = f(x)$ või $y = fx$ või $f : x \to y$.

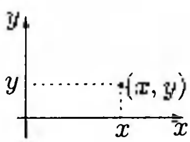


Funktsiooni asemel räägitakse ka operaatorist või kujutusest või teisendusest.

Funktsiooni mõiste üldisusest saab parema ettekujutuse alles siis, kui nendega on küllalt palju tegeldud. Oluliste näidetega tutvutakse tavaliselt teistes matemaatilistes distsipliinides, siin vaadeldavad on põhiliselt illustreerivat laadi.

Näited. 1. Koolimatemaatikast on tuntud lineaarne funktsioon $y = ax + b$, ruutfunktsioon $y = x^2$, trigonomeetrilised funktsioonid $y = \sin x$, $y = \cos x$. Need kõik on näited funktsioonist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Samal ajal võib vaadelda ka funktsioone $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$, ruutfunktsioon: $\mathbb{R} \to [0, \infty)$.

2. Vaatleme funktsiooni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, mis on antud võrdusega $f((x, y)) = (x, 0)$, s.t. tasandi punktile (x, y) seab vastavusse tema esimese koordinaadi x-teljel. Sellist funktsiooni nimetatakse projekteerimisteisenduseks x-teljele ehk projektoriks x-teljele. Analoogiliselt võib vaadelda projektorit y-teljele.



3. Reaalarvuliste liikmetega jada $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ võib vaadelda funktsioonina $A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; siin on igale naturaalarvule seatud vastavusse kindel reaalarv. Seejuures kasutatakse mõnikord jada märkimiseks kirjutusviisi $a(1), \ldots, a(n), \ldots$

4. Samasusteisendus ehk identsusteisendus $I : X \to X$ on funktsioon, mis hulga X igale elemendile seab vastavusse sama elemendi, seega $I(x) = x$, $x \in X$.

5. Konstantne funktsioon on $f : X \to Y$, $f(x) = c$, $x \in X$, kus $c \in Y$ on sama element kõikide elementide $x \in X$ korral.

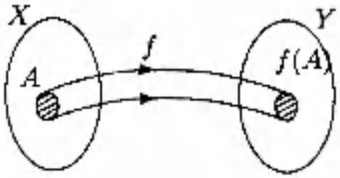
6. Olgu $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Vaatleme funktsioone $s : X \to X$, kus üks ja sama naturaalarv ei vasta kahele erinevale naturaalarvule, s.t. ei ole võimalik olukord, kus $s(i) = s(j)$, aga $i \neq j$. Niisuguse tingimuse täidetuse korral iga arv hulgast X kindlasti mingile arvule sellest hulgast ka vastab. Taolisi funktsioone esitatakse tavaliselt tabelina

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

kusjuures $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = X$, ning neid nimetatakse substitutsioonideks. Substitutsiooni esitamisel võib muidugi esimese rea kirjutada ka teises järjekorras, näiteks

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Olgu antud funktsioon $f : X \to Y$. Hulka X nimetatakse funktsiooni f määramispiirkonnaks. Öeldakse, et funktsiooni f väärtuste piirkond asub hulgas Y. Elementi $y = f(x)$ nimetatakse elemendi x kujutiseks, elementi x nimetatakse elemendi y originaaliks. Kui $A \subset X$, siis hulka $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ nii, et } y = f(x)\} = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$ nimetatakse hulga A kujutiseks.



Hulka $f(X)$ nimetatakse funktsiooni f väärtuste piirkonnaks. Näiteks $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Kui $B \subset Y$, siis hulka $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ nimetatakse hulga B originaaliks. Võib juhtuda, et $f^{-1}(B) = \emptyset$, kuigi $B \neq \emptyset$, näiteks $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puhul $\sin^{-1}([2, 3]) = \emptyset$. Kuid näiteks $\sin^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Hulkade kujutistel on järgmised põhilised omadused:

1) $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(X) \subset Y$,

2) kui $A_1 \subset A_2$, siis $f(A_1) \subset f(A_2)$,

3) $f\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$,

4) $f\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right) \subset \bigcap_\alpha f(A_\alpha)$.

Omaduste 1) ja 2) kehtivus on vahetult selge definitsiooni põhjal, omaduse 3) tõestuseks on samaväärsused

$$\begin{aligned}
y \in f\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) &\Leftrightarrow \exists x \quad x \in \bigcup_\alpha A_\alpha,\ f(x) = y \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists x\ \exists \alpha\ x \in A_\alpha,\ f(x) = y \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists \alpha\ \exists x\ x \in A_\alpha,\ f(x) = y \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists \alpha\ y \in f(A_\alpha) \Leftrightarrow y \in \bigcup_\alpha f(A_\alpha).
\end{aligned}$$

Ülesanne. Tõestada omadus 4) ja leida näide funktsioonist ja hulkadest, kus omaduses 4) võrdust ei ole. Näpunäide: vaadelda projekteerimisteisendust.

Hulkade originaalidel on järgmised põhilised omadused:

1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y) = X$,

2) kui $B_1 \subset B_2$, siis $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$,

3) $f^{-1}\left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$,

4) $f^{-1}\left(\bigcap_\alpha B_\alpha\right) = \bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$,

5) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

Ülesanne. Tõestada originaalide omadused 3) – 5).

Kujutise ja originaali järjestikuse võtmise korral
1) kui $A \subset X$, siis $A \subset f^{-1}(f(A))$,
2) kui $B \subset Y$, siis $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Ülesanne. Tõestada omadused 1) ja 2) ning leida näited, kus viimastes sisalduvustes ei ole võrdust.

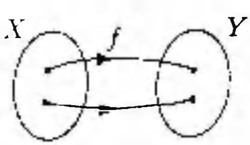
Hulkade kujutistel ei ole originaalide omadusega 5) analoogilist omadust. Kui näiteks $f : X \to Y$ on konstantne funktsioon, siis $f(A) = \{c\}$ (kui $A \neq \emptyset$), $f(X \setminus A) = \{c\}$ (kui $A \neq X$) ja $Y \setminus f(A) = Y \setminus \{c\}$ ning ei leia aset ei sisalduvus $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$ ega ka sisalduvus $f(X \setminus A) \supset Y \setminus f(A)$ (kui $Y \neq \{c\}$). Nagu näeme, on hulkade originaalide omadused paremad kui hulkade kujutiste omadused, mistõttu funktsioonide põhiomaduste määratlemisel teistes matemaatilistes distsipliinides kasutatakse rohkem hulkade originaale.

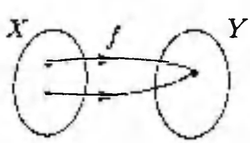
Ülesanne.* Tõestada, et kui $A \subset X$, $B \subset Y$ ja $f\colon X \to Y$, siis $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$ ja $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$.

Funktsioone $f_1\colon X_1 \to Y_1$ ja $f_2\colon X_2 \to Y_2$ nimetatakse võrdseteks, kui $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ ja $f_1(x) = f_2(x)$ iga $x \in X_1 (= X_2)$ korral. Seega näiteks funktsioonid $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ loeme erinevateks.

Definitsioon. Funktsiooni $f\colon X \to Y$ nimetatakse injektiivseks ehk üksüheseks, kui iga paari $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, korral $f(x_1) \neq f(x_2)$ (erinevad elemendid teisenevad erinevateks elementideks).

Funktsiooni injektiivsus tähendab veel seda, et kui $f(x_1) = f(x_2)$, siis $x_1 = x_2$, samuti seda, et ühelgi elemendil hulgast Y ei ole üle ühe originaali. Injektiivsus tähendab seda, et funktsioon teisendab nii nagu on näidatud vasakpoolsel joonisel ning parempoolsel joonisel toodud olukord ei ole lubatud.





Näiteks funktsioon $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei ole injektiivne, sest $\sin 0 = \sin \pi$, kuid $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ on injektiivne. Projektorid koordinaattelgedele ei ole injektiivsed. Injektiivne on samasusteisendus $I : X \to X$, samuti iga substitutsioon, mille defineerimisel injektiivsust nõutaksegi.

Ülesanne. Tõestada, et funktsioon $f : X \to Y$ rahuldab tingimust

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \qquad \forall A, B \subset X$$

parajasti siis, kui ta on injektiivne.

Definitsioon. Funktsiooni $f : X \to Y$ nimetatakse sürjektiivseks ehk pealekujutuseks, kui $f(X) = Y$ ehk kui igal elemendil hulgast Y leidub originaal.

Näiteks $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ on sürjektiivne, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mitte. Projektorid koordinaattelgedele ei ole sürjektiivsed. Sürjektiivne on samasusteisendus ja iga substitutsioon. Reaalarvuliste liikmetega jada $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ei ole kunagi sürjektiivne, selle põhjendame hiljem.

Definitsioon. Funktsiooni $f : X \to Y$ nimetatakse bijektiivseks ehk üksüheseks vastavuseks, kui ta on injektiivne ja sürjektiivne ehk kui igal elemendil hulgast Y leidub parajasti üks originaal.

Näiteks on bijektiivne funktsioon $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, ühikteisendus, iga substitutsioon.

Injektiivset funktsiooni nimetatakse ka injektsiooniks, sürjektiivset funktsiooni sürjektsiooniks ja bijektiivset funktsiooni bijektsiooniks.

Vaatleme funktsiooni $f : X \to Y$ Hulka $\{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ nimetatakse funktsiooni f graafikuks, teda tähistatakse $G(f)$.

Märgime, et esitatud graafiku mõiste üldistab funktsioonide $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ graafiku mõistet.

Vaatleme funktsioone $f_1 : X \to Y$ ja $f_2 : X \to Y$ Siis $f_1 = f_2$ parajasti siis, kui $G(f_1) = G(f_2)$, sest

$$\begin{aligned} f_1 = f_2 \quad &\Leftrightarrow \quad f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in X \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (x, f_1(x)) = (x, f_2(x)) \quad \forall x \in X \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad G(f_1) = G(f_2). \end{aligned}$$

Püüame vastata järgmisele loomulikule küsimusele: millal osahulk $G \subset X \times Y$ on mingi funktsiooni $f : X \to Y$ graafik $G(f)$?

Kui $G \subset X \times Y$ on mingi funktsiooni graafik, siis peavad olema täidetud tingimused:

1° $\forall x \in X\ \exists y \in Y$ nii, et $(x,y) \in G$ (hulgas G peab olema küllaldaselt paare, et igale elemendile $x \in X$ midagi vastaks);

2° $(x,y_1) \in G \wedge (x,y_2) \in G \Rightarrow y_1 = y_2$ (elemendile $x \in X$ ei saa vastata kahte erinevat elementi y_1 ja y_2).

Seega on tingimused 1° ja 2° tarvilikud selleks, et hulk $G \subset X \times Y$ oleks mingi funktsiooni graafik. Nad on ka piisavad, sest kui G rahuldab tingimusi 1° ja 2°, siis defineerime funktsiooni $f : X \to Y$ järgmiselt: kui $x \in X$, siis $f(x) = y$, kus $(x,y) \in G$. On selge, et seejuures $G(f) = G$.

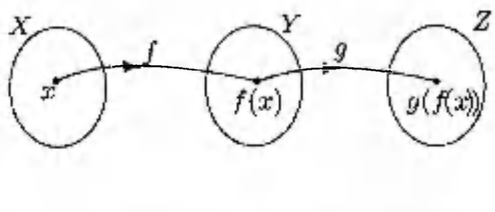
Niisiis, antud hulkade X ja Y korral on olemas loomulik üksühene vastavus (bijektsioon) kõigi funktsioonide $f : X \to Y$ hulga ning kõigi tingimusi 1° ja 2° rahuldavate osahulkade $G \subset X \times Y$ hulga vahel.

Ülesanne. Näidata, et kui $f_1 : X \to Y$ ja $f_2 : X \to Y$, siis $G(f_1) \cup G(f_2)$ (samuti $G(f_1) \cap G(f_2)$) on mingi hulgal X määratud funktsiooni graafik parajasti siis, kui $f_1 = f_2$.

Definitsioon. Funktsioonide $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ korrutiseks ehk kompositsiooniks nimetatakse funktsiooni $gf : X \to Z$, mis määratakse võrdusega

$$(gf)(x) = g(f(x)), \quad x \in X.$$

Funktsioonide f ja g korrutist tähistatakse ka $g \circ f$



Definitsiooni kohaselt on funktsioonide korrutamine nende järjest rakendamine. Juhime tähelepanu sellele, et funktsioonide korrutamine on võimalik, kui funktsiooni g määramispiirkond Y on selline hulk, kuhu kuulub funktsiooni f väärtuste piirkond.

Märgime, et matemaatilise analüüsi kursuses nimetatakse funktsioonide kompositsiooni liitfunktsiooniks.

Lause. Kui $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ ja $h : Z \to W$, siis $h(gf) = (hg)f$ (funktsioonide korrutamine on assotsiatiivne).

Tõestus. Kuna $gf : X \to Z$ ja $h : Z \to W$, siis saab moodustada korrutise $h(gf)$, samuti $f : X \to Y$ ja $hg : Y \to W$ lubavad moodustada $(hg)f$ Kui nüüd $x \in X$, siis

$$(h(gf))(x) = h((gf)(x)) = h(g(f(x))),$$

$$((hg)f)(x) = (hg)(f(x)) = h(g(f(x))),$$

millest saamegi võrduse $h(gf) = (hg)f$

Üldiselt $gf \neq fg$, sest kui $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$, siis saab vaadelda küll korrutist gf, aga kui $Z \not\subset X$ (täpsemalt, $g(Y) \not\subset X$), siis ei eksisteeri fg. Võrdust $gf = fg$ ei tarvitse olla isegi siis, kui $f : X \to X$ ja $g : X \to X$, näiteks kui $a, b \in X$, $a \neq b$, siis konstantsete funktsioonide $f(x) = a$, $x \in X$, ja $g(x) = b$, $x \in X$, korral $(fg)(x) = f(g(x)) = a$, $(gf)(x) = g(f(x)) = b$, s.t. $gf \neq fg$. Seega ei ole funktsioonide korrutamine kommutatiivne.

Ülesanne. Uurida, kas substitutsioonide korrutamine on kommutatiivne.

Lause. Kui $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ on injektiivsed, siis $gf : X \to Z$ on ka injektiivne.

Tõestus. Olgu $x_1 \neq x_2$. Siis funktsiooni f injektiivsuse tõttu $f(x_1) \neq f(x_2)$. Sellest aga järeldub funktsiooni g injektiivsuse tõttu $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ ehk $(gf)(x_1) \neq (gf)(x_2)$.

Lause. Kui $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ on sürjektiivsed, siis ka $gf : X \to Z$ on sürjektiivne.

Tõestus. Valime vabalt $z \in Z$. Siis g sürjektiivsuse tõttu leidub $y \in Y$ nii, et $g(y) = z$. Nüüd f sürjektiivsuse tõttu leidub $x \in X$ nii, et $f(x) = y$. Seega $(gf)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, mis ütleb, et gf on sürjektiivne.

Järeldus. Kui $f \colon X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ on bijektiivsed, siis ka $gf \colon X \to Z$ on bijektiivne.

Kui funktsioon $f\colon X \to Y$ on bijektiivne, siis saab defineerida pöördfunktsiooni $f^{-1}\colon Y \to X$, mis igale elemendile $y \in Y$ seab vastavusse tema originaali $x \in X$ funktsiooniga f teisendamisel, s.t.

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

Kui aga funktsioon $f\colon X \to Y$ ei ole bijektiivne, siis niiviisi funktsiooni $f^{-1}\colon Y \to X$ defineerida ei saa (kui f ei ole sürjektiivne, siis leidub $y \in Y$, millel pole originaali; kui aga f ei ole injektiivne, siis leidub $y \in Y$, millel on rohkem kui üks originaal). Seega väljendid „funktsioon $f\colon X \to Y$ on bijektiivne", „eksisteerib pöördfunktsioon $f^{-1}\colon Y \to X$" ja „funktsioon $f\colon X \to Y$ on pööratav" on kõik sama tähendusega.

Eespool kasutasime hulga B originaali $f^{-1}(B)$, mis ei nõudnud pöördfunktsiooni olemasolu. Kui aga eksisteerib pöördfunktsioon f^{-1}, siis sama kirjutis $f^{-1}(B)$ tähendab ka hulga B kujutist funktsiooniga f^{-1} Kahemõttelisust siin siiski ei teki, sest mõlemad hulgad ühtivad:

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(B)\,(\text{hulga } B \text{ kujutis funktsiooniga } f^{-1}) = \\
&\quad = \{f^{-1}(y) \in X \mid y \in B\} = \\
&\quad\ (\text{tähistame } f^{-1}(y) = x \text{ ehk } y = f(x)) \\
&\quad = \{x \in X \mid f(x) \in B\} = \\
&\quad = f^{-1}(B)\ (\text{hulga } B \text{ originaal funktsiooniga } f).
\end{aligned}$$

Pööratava funktsiooni $f\colon X \to Y$ korral $f^{-1}f = I$ ja $ff^{-1} = I$, sest võrdustest $f(x) = y$ ja $f^{-1}(y) = x$ saame $(f^{-1}f)(x) = f^{-1}(y) = x$ ja $(ff^{-1})(y) = f(x) = y$.

Teoreem. Kui $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to X$ ning $gf = I$ ja $fg = I$, siis eksisteerib f^{-1} ning $f^{-1} = g$.

Tõestus. Funktsioon f on injektiivne, sest kui $f(x_1) = f(x_2)$, siis $x_1 = (gf)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (gf)(x_2) = x_2$. Funktsioon f on sürjektiivne, sest iga $y \in Y$ korral $f(g(y)) = (fg)(y) = y$ (seega elemendil $y \in Y$ leidub originaal $g(y) \in X$). Niisiis, f on bijektiivne, mis tähendab, et eksisteerib f^{-1} Peale selle,

$$f^{-1} = f^{-1}(fg) = (f^{-1}f)g = g.$$

Järeldus. Kui f on pööratav, siis ka f^{-1} on pööratav ning $(f^{-1})^{-1} = f$

Tõestuseks kasutame teoreemi eeldustel $ff^{-1} = I$ ja $f^{-1}f = I$ (s.t. teoreemis esinevaks funktsiooniks f on siin f^{-1} ja funktsiooniks g on siin f).

Ülesanne. Tõestada, et kui $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to X$ korral $gf = I$, siis f on injektiivne ning g on sürjektiivne.

Teoreemi formaalseks üldistuseks on

Lause. Kui $f\colon X \to Y$, $g_1\colon Y \to X$ ja $g_2\colon Y \to X$ korral $g_1 f = I$ ja $fg_2 = I$ (sel juhul öeldakse, et funktsioonil f on olemas vasakpoolne pöördfunktsioon g_1 ja parempoolne pöördfunktsioon g_2), siis eksisteerib $f^{-1}\colon Y \to X$ ning $f^{-1} = g_1 = g_2$.

Tõestuseks paneme tähele, et ülesandes toodud väite abil saame eelduse esimesest võrdusest funktsiooni f injektiivsuse, teisest funktsiooni f sürjektiivsuse, väites esinevad võrdused aga saadakse nagu teoreemi tõestuseski.

Lause. Kui $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to Z$ on pööratavad, siis on pööratav ka $gf\colon X \to Z$ ning $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$

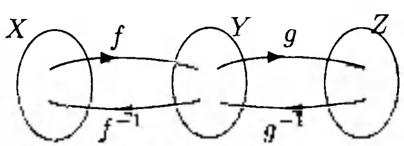
Tõestus. Eespool tõestasime funktsioonide korrutise bijektiivsuse, kui tegurid on bijektiivsed, seepärast jääb tõestada viimane võrdus. Saame

$$(gf)(f^{-1}g^{-1}) = g(ff^{-1})g^{-1} = gg^{-1} = I,$$

$$(f^{-1}g^{-1})(gf) = f^{-1}(g^{-1}g)f = f^{-1}f = I,$$

misjärel kasutame teoreemi.

Juhime tähelepanu sellele, et võrreldes korrutisega gf rakenduvad pöördfunktsioonid teises järjekorras $f^{-1}g^{-1}$, mida on illustreeritud kõrvaloleval joonisel.



Ülesanne. Olgu hulgas X m elementi ja hulgas Y n elementi. Kui palju on erinevaid funktsioone, injektsioone, sürjektsioone ja bijektsioone $f\colon X \to Y$?

§6. Hulga karakteristlik funktsioon

Olgu X universaalne hulk.

Definitsioon. Hulga $A \subset X$ karakteristlikuks funktsiooniks nimetatakse funktsiooni $\chi_A\colon X \to \{0,1\}$, kus

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in A, \\ 0, & \text{kui } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Niisiis, igale hulgale $A \subset X$ on seatud vastavusse tema karakteristlik funktsioon, üks funktsioonidest $\chi\colon X \to \{0,1\}$. On selge, et erinevatele hulkadele vastavad erinevad funktsioonid, s.t. vastavus on injektiivne.

Olgu antud funktsioon $\chi\colon X \to \{0,1\}$. Vaatleme hulka $A = \{x \in X \mid \chi(x) = 1\}$. Kui nüüd $x \in A$, siis $\chi(x) = 1$, kui aga $x \in X \setminus A$, siis $\chi(x) = 0$, seepärast $\chi = \chi_A$. Sellega oleme näidanud, et vaadeldav vastavus hulkade $A \subset X$ ja funktsioonide $\chi\colon X \to \{0,1\}$ vahel on bijektsioon.

Kõigi hulgast X hulka Y tegutsevate funktsioonide hulka $\{f \mid f\colon X \to Y\}$ tähistatakse Y^X Sellega kooskõlas kirjutatakse $\{\chi \mid \chi\colon X \to \{0,1\}\} = \{0,1\}^X = 2^X$, kusjuures viimane tähis sümboliseerib hulga $\{0,1\}$ asendamist tema elementide arvuga 2. Samuti tähistatakse hulga X kõigi osahulkade hulka

$$P(X) = \{A \mid A \subset X\} = 2^X,$$

mis on õigustatud eespool vaadeldud loomuliku bijektsiooniga $P(X)$ ja $\{0,1\}^X$ vahel. Samadel kaalutlustel nimetatakse hulka $P(X)$ hulga X potentshulgaks.

Hulga karakteristlikul funktsioonil on järgmised omadused:

1) $\chi_A(x)\chi_A(x) \equiv \chi_A(x)$,

2) $\chi_{A\cap B}(x) \equiv \chi_A(x)\chi_B(x) \equiv \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$,

3) $\chi_{A\cup B}(x) \equiv \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) \equiv$
$\equiv \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$,

4) $\chi_{A\setminus B}(x) \equiv \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$,

5) $\chi_\emptyset(x) \equiv 0$, $\chi_X(x) \equiv 1$, $\chi_{A'}(x) \equiv \chi_{X\setminus A}(x) \equiv 1 - \chi_A(x)$,

6) $\chi_{A\times B}((x,y)) \equiv \chi_A(x)\chi_B(y)$.

Võrdus 1) järeldub üksnes sellest, et $0 \quad 0 = 0$ ja $1 \quad 1 = 1$. Omaduse 2) tõestamisel võtame arvesse, et võib esineda 4 erinevat võimalust:

$$\begin{array}{lcl} \chi_A(x) = 0 & \text{ja} & \chi_B(x) = 0, \\ \chi_A(x) = 1 & \text{ja} & \chi_B(x) = 0, \\ \chi_A(x) = 0 & \text{ja} & \chi_B(x) = 1, \\ \chi_A(x) = 1 & \text{ja} & \chi_B(x) = 1. \end{array}$$

Siit järeldub, et

$$\begin{aligned} \chi_A(x)\chi_B(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \chi_A(x) = 1 \wedge \chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \cap B \Leftrightarrow \chi_{A\cap B}(x) = 1, \end{aligned}$$

millest omakorda saame, et

$$\chi_A(x)\chi_B(x) = 0 \Leftrightarrow \chi_{A\cap B}(x) = 0.$$

Analoogiliste aruteludega tõestatakse ka teised omadused.

Ülesanne. Tõestada omadused 3) ja 4).

Ülesanne. Avaldada $\chi_{A\triangle B}$ funktsioonide χ_A ja χ_B kaudu.

Nagu nägime, on hulgad ja nende karakteristlikud funktsioonid bijektiivses vastavuses. See asjaolu võimaldab tõestada hulkadevahelisi võrdusi, näidates vastavate karakteristlike funktsioonide võrdsust.

Näide. Tõestame, et $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Ühelt poolt

$$\begin{aligned}
\chi_{(A \cup B) \cap C} &= \chi_{A \cup B} \chi_C = \\
&= (\chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B) \chi_C = \\
&= \chi_A \chi_C + \chi_B \chi_C - \chi_A \chi_B \chi_C.
\end{aligned}$$

Teiselt poolt

$$\begin{aligned}
\chi_{(A \cap C) \cup (B \cap C)} &= \chi_{A \cap C} + \chi_{B \cap C} - \chi_{A \cap C} \chi_{B \cap C} = \\
&= \chi_A \chi_C + \chi_B \chi_C - \chi_A \chi_C \chi_B \chi_C = \\
&= \chi_{(A \cup B) \cap C},
\end{aligned}$$

sest $\chi_C^2 = \chi_C$.

Ülesanne. Tõestada, et

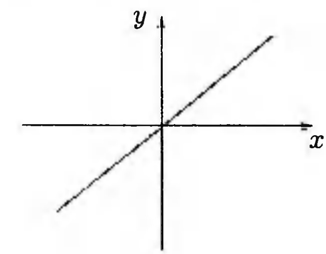
$$\begin{aligned}
&(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A, \\
&(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C), \\
&(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).
\end{aligned}$$

§7 Seosed

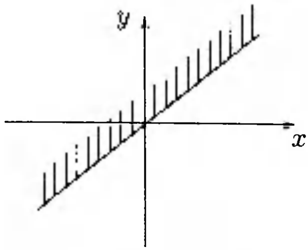
Definitsioon. Seoseks hulkade X ja Y vahel nimetatakse mistahes osahulka otsekorrutises $X \times Y$

Kui $R \subset X \times Y$, siis asjaolu, et $(x, y) \in R$, märgitakse ka xRy ning öeldakse, et x ja y on seoses R. Mõnikord öeldakse osahulga R kohta, et see on seose graafik.

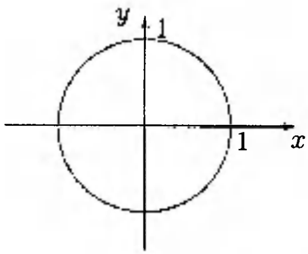
Näited. 1. Olgu $X = Y = \mathbb{R}$. Defineerime, et xRy, kui $x = y$, s.t. $R = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. See seos on sirge, mis poolitab telgedevahelise nurga.



2. Olgu $X = Y = \mathbb{R}$, $R = \{(x,y) \mid x \leqslant y\}$ See hulk on kujutatud kõrvaloleval joonisel.



3. Olgu $X = Y = \mathbb{R}$, $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. See seos on joonisel kujutatud ringjoon. Näeme, et näiteks arv 2 ei ole ühegi teise arvuga seoses.



4. Olgu X tasandi kõigi punktide hulk ja Y kõigi samal tasandil asuvate sirgete hulk. Defineerime siin, et xRy, kui punkt x asub sirgel y.

5. Olgu $X = Y$ — samal tasandil asuvate sirgete hulk ning xRy, kui sirged x ja y on paralleelsed või ühtivad.

6. Olgu $X = Y$ — maakeral elavate inimeste hulk ning xRy, kui inimestel x ja y on ühised vanemad.

7 Olgu antud funktsioon $f\colon X \to Y$ Defineerime $R = G(f)$, s.t. xRy, kui $(x,y) \in G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. Seega xRy parajasti siis, kui $y = f(x)$. Vaadeldaval juhul räägitakse funktsionaalsest seosest, samuti öeldakse, et funktsioon on seose erijuht.

Seosest $R \subset X \times X$ räägitakse kui seosest hulgas X. Tutvume järgnevas mõnede taolisi seoseid puudutavate mõistetega.

Seost R nimetatakse refleksiivseks, kui xRx iga $x \in X$ korral. Refleksiivsed on seosed näidetes 1, 2, 5 ja 6.

Seost R nimetatakse sümmeetriliseks, kui $xRy \Rightarrow yRx$. Sümmeetrilised on seosed näidetes 1, 3, 5 ja 6.

Seost R nimetatakse antisümmeetriliseks, kui $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.

Antisümmeetrilised on seosed näidetes 1 ja 2.

Seost R nimetatakse transitiivseks, kui $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.
Transitiivsed on seosed näidetes 1, 2, 5 ja 6.

Ülesanne. Tõestada, et kui seos on sümmeetriline ja antisümmeetriline, siis ta on transitiivne.

Ülesanne. Tõestada, et seos on refleksiivne, sümmeetriline ja antisümmeetriline (eelmise ülesande põhjal ka transitiivne) parajasti siis, kui ta on ühikseos $I = \{(x, x) \mid x \in X\}$.

Kuna seosed on hulgad (otsekorrutise $X \times Y$ osahulgad), siis saab rääkida seoste ühendist, ühisosast, vahest, täiendist hulgani $X \times Y$

Seose $R \subset X \times Y$ pöördseoseks nimetatakse seost $R^{-1} \subset Y \times X$, mis määratakse samaväärsusega

$$yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$$

ehk

$$(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R.$$

Nagu näeme, on igal seosel olemas pöördseos. Seega on ka igal funktsioonil kui seosel olemas pöördseos, mis ei tarvitse alati funktsioon olla. Püüame selgitada, millal funktsiooni $f \colon X \to Y$ pöördseos on funktsioon, mille määramispiirkond on Y ja väärtused kuuluvad hulka X.

Vaatleme funktsiooni $f \colon X \to Y$ ja tema graafikut $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. Graafiku pöördseos on $G^{-1}(f) = \{(f(x), x) \mid x \in X\} \subset Y \times X$. Eespool nägime, et hulk $G \subset X \times Y$ on mingi funktsiooni graafik parajasti siis, kui on täidetud tingimused

1° $\forall x \in X \ \exists y \in Y$ nii, et $(x, y) \in G$;

2° $(x, y_1) \in G \wedge (x, y_2) \in G \Rightarrow y_1 = y_2$.

Rakendades seda tulemust $G(f)$ pöördseosele, võime öelda, et $G^{-1}(f)$ on mingi funktsiooni graafikuks parajasti siis, kui

1° $\forall y \in Y \ \exists x \in X$ nii, et $(y, x) \in G^{-1}(f)$ ehk $(x, y) \in G(f)$ ehk $y = f(x)$, mis tähendab funktsiooni f sürjektiivsust;

2° kui $(f(x_1), x_1) \in G^{-1}(f)$, $(f(x_2), x_2) \in G^{-1}(f)$ ja $f(x_1) = f(x_2)$, siis $x_1 = x_2$, mis tähendab funktsiooni f injektiivsust.

Seega, $G^{-1}(f)$ on mingi funktsiooni graafik parajasti siis, kui f on bijektiivne ehk eksisteerib f^{-1} Arvestades veel samaväärsust $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$, saame, et

$$G^{-1}(f) = \{(f(x), x) \mid x \in X\} = \{(y, f^{-1}(y)) \mid y \in Y\} = G(f^{-1}),$$

s.t. pööratava funktsiooni f pöördseos on pöördfunktsioon f^{-1} Niisiis, pöördseose mõiste üldistab pöördfunktsiooni mõistet.

Seoste $R \subset X \times Y$ ja $S \subset Y \times Z$ korrutiseks nimetatakse seost $SR \subset X \times Z$, kus

$$SR = \{(x, z) \mid \exists y \in Y \text{ nii, et } (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}.$$

Vahel kasutatakse ka tähist $S \circ R$.

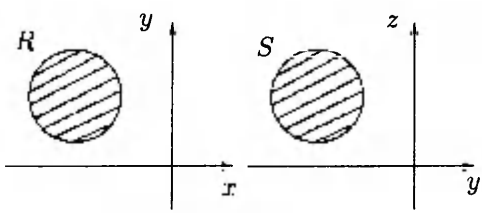
Ülesanne. Tõestada, et seose $R \subset X \times Y$ ja ühikseose $I\colon X \to X$ korral $RI = R$, ühikseose $I\colon Y \to Y$ korral $IR = R$.

Näitame, et funktsioonide kui seoste korrutis ühtib nende kui funktsioonide korrutisega. Vaatleme funktsioone $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to Z$. Elemendi $x \in X$ ainus paariline seoses $G(f)$ on $f(x) \in Y$, viimase ainus paariline seoses $G(g)$ on $g(f(x)) \in Z$, seepärast

$$\begin{aligned} G(g)G(f) &= \{(x, z) \mid \exists y \in Y\ (x, y) \in G(f) \wedge (y, z) \in G(g)\} = \\ &= \{(x, g(f(x))) \mid x \in X\} = G(gf). \end{aligned}$$

Seega seoste korrutamistehe üldistab funktsioonide korrutamistehet.

Märgime, et seoste korrutamisel võib juhtuda, et $R \neq \emptyset$ ja $S \neq \emptyset$, aga $SR = \emptyset$. Näiteks $X = Y = Z = \mathbb{R}$ korral joonisel toodud seoste $S \neq \emptyset$ ja $R \neq \emptyset$ korrutis $SR = \emptyset$, sest $(x, y) \in R$ korral $y > 0$, aga $(y, z) \in S$ korral $y < 0$.



Lause. Kui $R \subset X \times Y$, $S \subset Y \times Z$ ja $T \subset Z \times W$, siis

$$(SR)^{-1} = R^{-1}S^{-1}$$

ja

$$T(SR) = (TS)R.$$

Tõestuseks on järgmised samaväärsuste ahelad:

$$\begin{aligned}
(z,x) \in (SR)^{-1} &\Leftrightarrow (x,z) \in SR \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists y \in Y\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists y \in Y\ (y,x) \in R^{-1} \wedge (z,y) \in S^{-1} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists y \in Y\ (z,y) \in S^{-1} \wedge (y,x) \in R^{-1} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (z,x) \in R^{-1}S^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x,w) \in T(SR) &\Leftrightarrow \exists z \in Z\ (x,z) \in SR \wedge (z,w) \in T \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists z \in Z\ \exists y \in Y\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S \wedge (z,w) \in T \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists y \in Y\ (x,y) \in R \wedge (y,w) \in TS \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x,w) \in (TS)R.
\end{aligned}$$

Ülesanded. **1.** Leida arvupaarid, mis kuuluvad seosesse $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = xy\}$.

2. Kujutada graafiliselt seost $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid [x] = [y]\}$, kus $[x]$ tähistab arvu x täisosa, s.t. $[x] \in \mathbb{Z}$ nii, et $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

3. Tõestada, et

R on refleksiivne $\Leftrightarrow I \subset R$,

R on sümmeetriline $\Leftrightarrow R^{-1} \subset R$,

R on antisümmeetriline $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subset I$,

R on transitiivne $\Leftrightarrow RR \subset R$.

4.* Tõestada, et seos $R \subset X \times Y$ on bijektsioon hulkade X ja Y vahel parajasti siis, kui $R^{-1}R = I\colon X \to X$ ja $RR^{-1} = I\colon Y \to Y$

§8. Ekvivalentsusseos ja klassijaotus

Meenutame, et osahulka $R \subset X \times X$ nimetatakse seoseks hulgas X.

Definitsioon. Seost R hulgas X nimetatakse ekvivalentsusseoseks, kui ta on

1° refleksiivne, s.t. kui $xRx \; \forall x \in X$;

2° sümmeetriline, s.t. kui $xRy \Rightarrow yRx$;

3° transitiivne, s.t. kui $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Kui R on ekvivalentsusseos ja xRy, siis öeldakse, et elemendid x ja y on ekvivalentsed (seose R järgi).

Näited. 1. Suvalises hulgas X olgu xRy, kui $x = y$ (s.t. $R = \{(x,x) \mid x \in X\} = I\colon X \to X$). Seega võrdus ehk ühikseos on ekvivalentsusseos. Ta on ühtlasi kõige kitsam ekvivalentsusseos, sest ta on iga ekvivalentsusseose (kui refleksiivse seose) osahulk.

2. Ühel ja samal tasandil asuvate sirgete hulgas loeme xRy, kui sirged x ja y on paralleelsed või ühtivad.

3. Maakeral elavate inimeste hulgas loeme xRy, kui inimestel x ja y on ühised vanemad (nad on õed-vennad).

4. Olgu X mingite hulkade hulk (näiteks $P(\mathbb{N})$ või $\{A \subset \mathbb{R} \mid A$ on lõplik$\}$). Hulgad $A \in X$ ja $B \in X$ olgu seoses R (s.t. $(A,B) \in R$), kui eksisteerib bijektsioon $f\colon A \to B$. Seos R on ekvivalentsusseos, sest

1° $I\colon A \to A$ on bijektsioon, s.t. $(A,A) \in R$;

2° kui $(A,B) \in R$, s.t. eksisteerib bijektsioon $f\colon A \to B$, siis $f^{-1}\colon B \to A$ on bijektsioon, s.t. $(B,A) \in R$;

3° kui $(A,B) \in R$ ja $(B,C) \in R$, s.t. eksisteerivad bijektsioonid $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$, siis $gf\colon A \to C$ on bijektsioon, s.t. $(A,C) \in R$.

Eelmises paragrahvis esitatud ülesannete põhjal võime öelda, et kui ekvivalentsusseos on antisümmeetriline, siis on ta võrdus ehk ühikseos.

Ülesanne.* Tõestada, et kui R ja S on ekvivalentsusseosed, siis SR on ekvivalentsusseos parajasti siis, kui $SR = RS$. Leida näide ekvivalentsusseostest R ja S (samas hulgas X), kus $SR \neq RS$.

Definitsioon. Klassijaotuseks mittetühjas hulgas X nimetatakse hulkade süsteemi $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$, mis rahuldab tingimusi: iga $\alpha \in A$ korral $X_\alpha \neq \emptyset$, $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = X$, $X_\alpha \neq X_\beta \Rightarrow X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$.

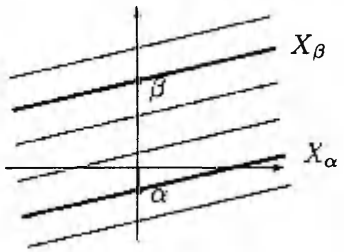
Märgime, et tingimuse $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = X$ tõttu $X_\alpha \subset X$ iga $\alpha \in A$ korral. Seega tähendab klassijaotus hulgas, et tema kõik elemendid on grupeeritud paarikaupa mittelõikuvateks osahulkadeks.

Näited. 1. Hulga X kõik üheelemendilised osahulgad $\{\{x\} \mid x \in X\}$ moodustavad klassijaotuse, sest $\{x\} \neq \emptyset$, $\bigcup_{x \in X} \{x\} = X$, $\{x\} \neq \{y\}$ (s.t. $x \neq y$) $\Rightarrow \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$. See on kõige peenem klassijaotus hulgas X

2. Süsteem $\{X\}$, mis koosneb ühest hulgast X, on kõige jämedam klassijaotus hulgas X.

3. Süsteem $\{[k, k+1), k \in \mathbb{Z}\}$ moodustab klassijaotuse hulgas $\mathbb{R}$, sest $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1) = \mathbb{R}$ ning $[k, k+1) \cap [l, l+1) = \emptyset$, kui $k \neq l$.

4. Tasandi $\mathbb{R}^2$ kui punktihulga klassijaotuse moodustab kõigi omavahel paralleelsete sirgete süsteem $\{X_\alpha\}$, sest $\bigcup_\alpha X_\alpha = \mathbb{R}^2$ (kõik sirged ühtekokku katavad terve tasandi) ja $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, kui $X_\alpha \neq X_\beta$ (paralleelsed sirged ei lõiku).



Märgime, et üldiselt me ei eelda klassijaotuses, et $X_\alpha \neq X_\beta$, kui $\alpha \neq \beta$. Hulga X klassijaotused $\{X_\alpha\}$ ja $\{X_\beta\}$ loeme võrdseteks, kui iga X_α korral leidub X_β nii, et $X_\beta = X_\alpha$, ja vastupidi, iga X_β korral leidub X_α nii, et $X_\alpha = X_\beta$. Näiteks kui X on hulk ja $X_1 = X$, $X_2 = X$, siis süsteem $\{X_1, X_2\}$ on sama klassijaotus, mis $\{X\}$.

Lause. Klassijaotused $\{X_\alpha\}$ ja $\{X_\beta\}$ühtivad, kui iga X_α korral leidub X_β nii, et $X_\beta = X_\alpha$.

Tõestus. Valime vabalt X_β. Olgu $x \in X_\beta$. Et $x \in X$, siis $\bigcup_\alpha X_\alpha = X$ tõttu leidub X_α nii, et $x \in X_\alpha$. Leiame $X_{\beta'}$ nii, et

$X_{\beta'} = X_\alpha$. Siis $x \in X_\beta \cap X_{\beta'}$, seega $X_\beta \cap X_{\beta'} \neq \emptyset$. Sellest järeldub, et $X_\beta = X_{\beta'}$ ehk $X_\alpha = X_\beta$.

Teoreem. Mistahes mittetühja hulga kõigi ekvivalentsusseoste hulga ja kõigi klassijaotuste hulga vahel on olemas loomulik üksühene vastavus.

Tõestus. 1) Olgu hulgas X antud ekvivalentsusseos R. Mistahes elemendi $x \in X$ korral defineerime hulga $X_x = \{y \in X \mid yRx\}$ — see on kõigi elemendiga x ekvivalentsete elementide hulk. Näitame, et $\{X_x, x \in X\}$ on klassijaotus. Kõigepealt, $x \in X_x$, sest alati xRx, seega $X_x \neq \emptyset$. Et $\{x\} \subset X_x \subset X$, siis $\bigcup\limits_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup\limits_{x \in X} X_x \subset X$, kuid $\bigcup\limits_{x \in X} \{x\} = X$, seepärast $\bigcup\limits_{x \in X} X_x = X$. Vaatleme kahte hulka X_x ja X_y. Olgu $X_x \cap X_y \neq \emptyset$. Siis leidub $z \in X_x \cap X_y$, s.t. $z \in X_x$ ja $z \in X_y$, ehk zRx ja zRy. Kui nüüd $w \in X_x$, siis wRx, kuid $wRx \Rightarrow wRz \Rightarrow wRy \Rightarrow w \in X_y$, mistõttu $X_x \subset X_y$. Analoogiliselt saame, et $X_y \subset X_x$, s.t. $X_x = X_y$. Sellega oleme näidanud, et $X_x \cap X_y \neq \emptyset \Rightarrow X_x = X_y$. Seepärast, kui $X_x \neq X_y$, siis $X_x \cap X_y = \emptyset$.

2) Olgu hulgas X antud klassijaotus $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$. Defineerime seose $R \subset X \times X$, kus $xRy \Leftrightarrow \exists \alpha$ nii, et $x \in X_\alpha \wedge y \in X_\alpha$ (leidub selline hulk X_α, kuhu kuuluvad mõlemad elemendid x ja y). Näitame, et saadud seos R on ekvivalentsusseos. Seos R on refleksiivne: iga $x \in X$ korral xRx, sest $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha = X$ ning $x \in X$ tõttu peab element x vähemalt ühte hulka X_α kuuluma. Seos R on sümmeetriline: kui xRy, s.t. $x \in X_\alpha \wedge y \in X_\alpha$, siis $y \in X_\alpha \wedge x \in X_\alpha$, s.t. yRx. Seos R on ka transitiivne: kui xRy ja yRz, siis $x, y \in X_\alpha$ ja $y, z \in X_\beta$, mistõttu $y \in X_\alpha$ ja $y \in X_\beta$, s.t. $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$. Kuid siis $X_\alpha = X_\beta$, mistõttu $x, z \in X_\alpha$ ehk xRz.

3) Eespool tõestasime, et kui $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ja $g\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ on sellised, et $gf = I$ ja $fg = I$, siis funktsioon f on bijektsioon. Kasutame seda tulemust olukorras, kus $\mathcal{X}$ on hulga X kõigi ekvivalentsusseoste hulk, $\mathcal{Y}$ on hulga X kõigi klassijaotuste hulk, funktsioon f on tõestuse esimeses osas ja funktsioon g tõestuse teises osas defineeritud vastavus. Tõestuse lõpetamiseks veendume, et $gf = I$ ja $fg = I$.

Vaatleme hulgas X antud ekvivalentsusseost R. Talle seadsime tõestuse osas 1) vastavusse klassijaotuse $\{X_x, x \in X\}$, kus $X_x = \{y \in X \mid yRx\}$. Kui nüüd klassijaotuse $\{X_x, x \in X\}$ korral defineerida nagu osas 2) seos R_1, siis

$$
\begin{aligned}
xR_1y &\Leftrightarrow \exists z \text{ nii, et } x \in X_z \wedge y \in X_z \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists z \text{ nii, et } xRz \wedge yRz \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow xRy,
\end{aligned}
$$

mistõttu $R_1 = R$. Seega $gf = I$.

Olgu hulgas X antud klassijaotus $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$. Talle vastab ekvivalentsusseos R, kus $xRy \Leftrightarrow \exists \alpha$ nii, et $x, y \in X_\alpha$. Kuid siis $X_x = \{y \in X \mid yRx\} = \{y \in X \mid \exists \alpha \text{ nii, et } y, x \in X_\alpha\} = \{y \in X \mid y \in X_\alpha\}$ (leidub parajasti üks hulk X_α nii, et $x \in X_\alpha$) $= X_\alpha$, mis tähendab teoreemile eelnenud lause põhjal, et klassijaotused $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$ ja $\{X_x, x \in X\}$ ühtivad. Seega $fg = I$.

Teoreem on tõestatud.

Märgime, et teoreemi sõnastuses väidetud loomulikkus on hinnang tõestuse käigus konstrueeritud vastavusele.

Kui R on ekvivalentsusseos hulgas X, siis hulki $X_x = \{y \in X \mid yRx\}$, $x \in X$, nimetatakse ekvivalentsiklassideks.

Näitame veel, et $X_x = X_y$ parajasti siis, kui xRy. Kui $X_x = X_y$, siis $x \in X_x = X_y$ annab, et xRy. Teiselt poolt, kui xRy, siis $x \in X_y$ ning arvestades ka sisalduvust $x \in X_x$, näeme, et $X_x \cap X_y \neq \emptyset$. Kuid siis $X_x = X_y$.

Näited, milles leiame juba esinenud ekvivalentsusseostele ja klassijaotustele loomulikult vastavad klassijaotused ja ekvivalentsusseosed.

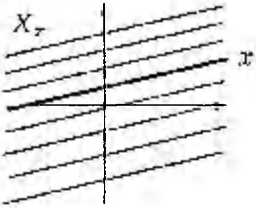
1. Suvalises hulgas X antud võrdusseosele, s.t. seosele xRy, kui $x = y$, vastav klassijaotus koosneb hulkadest $X_x = \{y \in X \mid yRx\} = \{y \in X \mid y = x\} = \{x\}$, $x \in X$. Seega vastab võrdusele kui kõige kitsamale ekvivalentsusseosele kõige peenem klassijaotus $\{\{x\}, x \in X\}$.

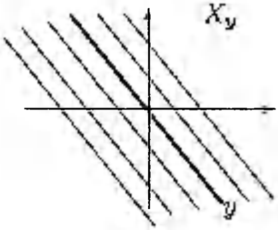
2. Vaatleme hulgas X ühehulgalist klassijaotust $\{X\}$. Talle vastava ekvivalentsusseose R korral

$$
\begin{aligned}
xRy \Leftrightarrow x \in X \wedge y \in X &\text{ (leidub ainult üks hulk klassijaotuses,} \\
&\text{kuhu mõlemad elemendid } x \text{ ja } y \text{ kuuluvad)} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in X \times X.
\end{aligned}
$$

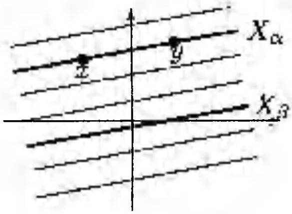
Seega antud juhul $R = X \times X$, s.t. kõige jämedamale klassijaotusele $\{X\}$ vastab kõige laiem ekvivalentsusseos $X \times X$.

3. Vaatleme kõigi ühel ja samal tasandil asuvate sirgete hulgas X seost R, kus xRy tähendab, et sirged x ja y on paralleelsed või ühtivad. Siis $X_x = \{y \in X \mid yRx\} = \{y \in X \mid y$ ühtib sirgega x või on temaga paralleelne$\}$ Klassijaotus $\{X_x, x \in X\}$ tähendab, et kõik tasandil asuvad sirged on jaotatud omavahel paralleelsete sirgete klassidesse.





4. Vaatleme tasandil $\mathbb{R}^2$ antud klassijaotust $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$, kus punktihulgad X_α on paralleelsed sirged. Vastava ekvivalentsusseose korral $xRy \leftrightarrow \exists\, \alpha$ nii, et $x, y \in X_\alpha$, mis tähendab, et tasandi punktid x ja y on ekvivalentsed parajasti siis, kui nad kuuluvad samale sirgele X_α.



5. Ülesanne. Leida hulga $\mathbb{R}$ klassijaotusele $\{[k, k+1), k \in \mathbb{Z}\}$ vastav ekvivalentsusseos.

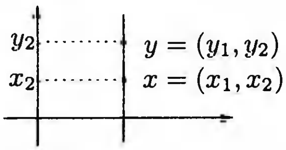
§9. Faktorhulk, kanooniline kujutus ja funktsioonide faktoriseerimine

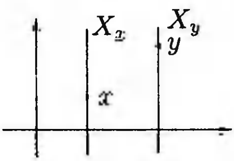
Definitsioon. Hulga X faktorhulgaks temas antud ekvivalentsusseose R järgi nimetatakse kõigi ekvivalentsiklasside hulka $\{X_x \mid x \in X\}$, faktorhulka tähistatakse X/R.

Märgime, et erinevatele elementidele vastavad ekvivalentsiklassid võivad ühtida, s.t. $x \neq y$ korral võib olla $X_x = X_y$. Faktorhulga elementideks võetakse võrdsete ekvivalentsiklasside seast ainult üks.

Näited. 1. Kui hulgas X vaadelda ekvivalentsusseosena R võrdust, s.t. $xRy \Leftrightarrow x = y$, siis $X/R = \{\{x\} \mid x \in X\}$.

2. Tasandi $X = \mathbb{R}^2$ punktid $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$ loeme ekvivalentseteks, kui nad asuvad samal vertikaalsel sirgel, s.t. xRy, kui $x_1 = y_1$ (see on erijuht eelmise paragrahvi näitest 4). Siis $X_x = \{y \in X \mid y_1 = x_1\}$ on kõigi punktide hulk, mis asuvad punktiga x ühel ja samal vertikaalsel sirgel, ehk punkti x läbiv vertikaalne sirge. Faktorhulk X/R koosneb siin kõigist vertikaalsetest sirgetest.





Olgu hulgas X antud ekvivalentsusseos R. Sellega on määratud ka faktorhulk X/R Kanooniliseks kujutuseks nimetatakse funktsiooni $\kappa\colon X \to X/R$, mis defineeritakse võrdusega $\kappa(x) = X_x$, $x \in X$, s.t. igale elemendile $x \in X$ seatakse vastavusse temaga ekvivalentsete elementide hulk.

Kanooniline kujutus on sürjektiivne, sest faktorhulga elemendi X_x originaaliks sobib element $x \in X$. Kanooniline kujutus ei tarvitse olla injektiivne, sest kui $x, y \in X_x$, $x \neq y$, siis $\kappa(x) = X_x$ ja $\kappa(y) = X_y$, kuid $y \in X_x$ ja $y \in X_y$ tõttu $X_x \cap X_y \neq \emptyset$, millest järeldub, et $X_x = X_y$.

Olgu antud funktsioon $f\colon X \to Y$ Defineerime hulgas X seose R, kus

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Seos R on ekvivalentsusseos, sest

1° $f(x) = f(x) \Rightarrow xRx \; \forall x \in X$,

2° $x_1Rx_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_2Rx_1$,

3° $x_1Rx_2 \wedge x_2Rx_3 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \wedge f(x_2) = f(x_3) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1) = f(x_3) \Rightarrow x_1Rx_3$.

Vaadeldavat seost nimetatakse funktsiooni f tuumaks ja tähistatakse Ker f

Ülesanne. Leida kanoonilise kujutuse $\kappa\colon X \to X/R$ tuum Ker κ.

Ülesanne. Olgu hulgas X m elementi ja hulgas Y n elementi, seejuures $m \geqslant n$. Näidata, et kõigi sürjektsioonide $f\colon X \to Y$ arv on $n!k$, kus k on hulga X kõigi n klassist koosnevate klassijaotuste arv.

Teoreem (funktsioonide faktoriseerimisteoreem). Iga funktsiooni $f\colon X \to Y$ korral leidub funktsioon $g\colon X/\mathrm{Ker}\, f \to Y$ nii, et $f = g\kappa$, kus $\kappa\colon X \to X/\mathrm{Ker}\, f$ on kanooniline kujutus. Funktsioon g on injektiivne ja üheselt määratud.

Tõestus. Defineerime funktsiooni $g\colon X/\mathrm{Ker}\, f \to Y$ võrdusega $g(X_x) = f(x)$, $X_x \in X/\mathrm{Ker}\, f$ Nagu näeme, tuleb siin $g(X_x)$ väärtuse määramisel kasutada elementi x, seepärast tekib definitsiooni korrektsuse küsimus: kui $X_{x_1} = X_x$, siis definitsiooni kohaselt $g(X_{x_1}) = f(x_1)$, kuid kas $g(X_{x_1}) = g(X_x)$? Kui $X_{x_1} = X_x$, siis $x_1(\mathrm{Ker}\, f)x$ ehk $f(x_1) = f(x)$, mis näitab, et funktsiooni g väärtused hulga $X/\mathrm{Ker}\, f$ elementidel on üheselt määratud. Seejuures

$$(g\kappa)(x) = g(\kappa(x)) = g(X_x) = f(x), \quad x \in X,$$

seega $f = g\kappa$.

Näitame, et g on injektiivne. Olgu $g(X_{x_1}) = g(X_{x_2})$, s.t. $f(x_1) = f(x_2)$. Siis $x_1(\mathrm{Ker}\, f)x_2$, mistõttu $X_{x_1} = X_{x_2}$.

Tõestame lõpuks funktsiooni g ühesuse. Oletame, et leidub veel $g_1\colon X/\mathrm{Ker}\, f \to Y$ nii, et $f = g_1\kappa$. Siis

$$\begin{aligned} g_1\kappa = g\kappa &\Leftrightarrow (g_1\kappa)(x) = (g\kappa)(x) \quad \forall x \in X \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g_1(\kappa(x)) = g(\kappa(x)) \quad \forall x \in X \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g_1(X_x) = g(X_x) \quad \forall x \in X \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g_1(X_x) = g(X_x) \quad \forall X_x \in X/\mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g_1 = g. \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud.

Teoreemis toodud funktsiooni f teguriteks lahutust ehk faktoriseerimist illustreerib kõrvalolev diagramm, kus hulgast X hulka Y võib liikuda kahte teed mööda, mõlemal juhul saame sama tulemuse.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & Y \\ & X/\operatorname{Ker} f \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Ülesanded. 1. Olgu $f\colon X \to Y$, $g_1\colon Y \to Z$ ja $g_2\colon Y \to Z$. Näidata, et kui $g_1 f = g_2 f$ ja f on sürjektiivne, siis $g_1 = g_2$.

2. Olgu $f_1\colon X \to Y$, $f_2\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to Z$. Näidata, et kui $g f_1 = g f_2$ ja g on injektiivne, siis $f_1 = f_2$.

§10. Hulga võimsus

Meenutame, et lõplikuks nimetasime hulka, mille elementide arv on naturaalarv. Kahe lõpliku hulga korral loeme selle hulga, milles on rohkem elemente, suurema võimsusega hulgaks. Samuti on loomulik pidada iga lõpmatu hulga võimsust suuremaks mistahes lõpliku hulga võimsusest. Edaspidi püüame elementide koguselt võrrelda lõpmatuid hulki.

1. Võrdse võimsusega hulgad. Paneme tähele, et kui kahes lõplikus hulgas on võrdne arv elemente, siis saab nende vahel korraldada üksühese vastavuse: kui näiteks $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ja $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, siis $f\colon A \to B$, $f(a_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, on bijektsioon. Kui aga näiteks $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ja $m < n$, siis funktsioon $f\colon A \to B$, $f(a_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, on injektsioon, kuid mitte sürjektsioon. Samal ajal ei leidu injektsiooni $g\colon B \to A$.

Definitsioon. Ütleme, et hulgad A ja B on sama võimsusega, kui eksisteerib bijektsioon $f\colon A \to B$.

Märgime asjaolu, et hulgad A ja B on sama võimsusega, kirjutisega $A \sim B$; öeldakse ka, et hulgad A ja B on ekvivalentsed. See on põhjendatud, sest nagu nägime eespool, on taoline seos ekvivalentsusseos mistahes hulkade hulgas. Seega $A \sim A$ iga hulga korral, $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

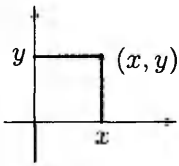
Näited. **1.** Olgu $A = \mathbb{N}$ ja $B = \{2, 4, 6, \ldots\}$ – kõigi paarisarvude hulk. Siis $f\colon A \to B$, $f(n) = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, on bijektsioon. Seega naturaalarvude hulk ja paarisarvude hulk on sama võimsusega.

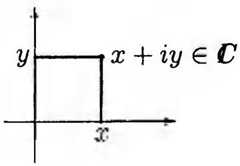
2. Ka hulgad $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{Z}$ on sama võimsusega, bijektsiooniks $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ on

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{kui } n \text{ on paaris,} \\[2mm] \dfrac{-n+1}{2}, & \text{kui } n \text{ on paaritu.} \end{cases}$$

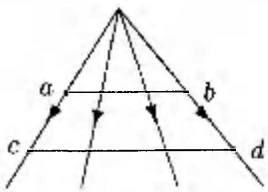
Populaarselt võiks öelda, et täisarve on sama palju kui naturaalarve.

3. Hulgad $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{C}$ on sama võimsusega, sest mõlemaid saab seada bijektiivsesse vastavusse tasandi punktidega.

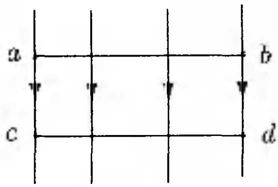




4. Vaatleme lõike $[a, b]$ ja $[c, d]$, kus $a < b$ ja $c < d$. Bijektsiooni $f\colon [a, b] \to [c, d]$ saab geomeetriliselt korraldada järgmiselt:



kui lõigud on erineva pikkusega, projekteerime tsentraalselt,



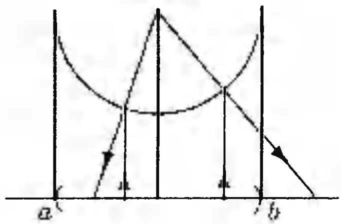
kui lõigud on sama pikkusega, projekteerime paralleelselt.

Analüütiliselt korraldab selle vastavuse lineaarne funktsioon $f(x) = \dfrac{(d-c)x + bc - ad}{b-a}$, $x \in [a, b]$.

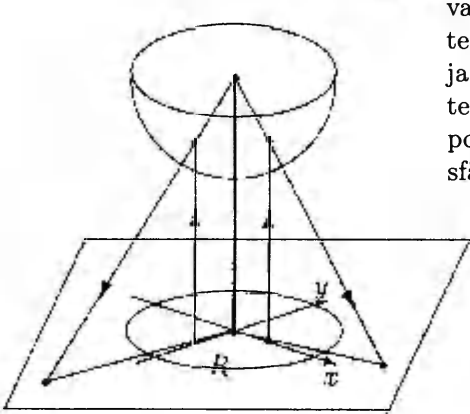
Märgime, et sama valemiga on antud ka bijektsioon $f\colon (a,b) \to (c,d)$.

Niisiis, omavahel on ekvivalentsed kõik lõigud, aga ka kõik vahemikud.

5. Vahemiku (a,b) ja sirge $I\!R$ vahel saab geomeetriliselt korraldada bijektsiooni järgmiselt: vertikaalprojekteerimisega korraldame vastavuse vahemiku ja poolringjoone vahel, seejärel tsentraalprojekteerimisega poolringjoone ja sirge vahel. Bijektsioon on ka funktsioon $\tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to I\!R$.



6. Eelmises näites esitatud ideega saab korraldada bijektiivse vastavuse lahtise ringi (näiteks $\{(x,y) \mid x^2+y^2 < R^2\}$) ja tasandi $I\!R^2$ vahel, projekteerides ringi vertikaalselt poolsfäärile, seejärel poolsfääri tsentraalselt tasandile.



Ülesanded. **1.** Tõestada, et kui $A \sim A_1$ ja $B \sim B_1$, siis $A \times B \sim A_1 \times B_1$

2. Kui $A \sim A_1$ ja $B \sim B_1$, siis ei saa väita, et $A \cap B \sim A_1 \cap B_1$, $A \cup B \sim A_1 \cup B_1$, $A \setminus B \sim A_1 \setminus B_1$. Tuua selle kohta näited.

3. Tõestada, et kui $A \setminus B \sim B \setminus A$, siis $A \sim B$.

4. Tuua näide, kus $A \sim B$, kuid ei kehti $A \setminus B \sim B \setminus A$.

5. Tõestada, et kui $X \sim Z$ ja $Y \sim W$, siis $Y^X \sim W^Z$

6. Tõestada, et $(Z^Y)^X \sim Z^{X \times Y}$

2. Loenduvad hulgad.

Definitsioon. Hulki, mis on sama võimsusega kui naturaalarvude hulk, nimetatakse loenduvateks.

Seega loenduvad on parajasti need hulgad, mis on esitatavad jadana $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Loenduva hulga iga lõpmatu osahulk on ka loenduv, sest ta moodustab osajada hulga jadana esituses.
Vaatleme järgnevas lähemalt loenduvate hulkade omadusi.

Lause. Iga lõpmatu hulk sisaldab loenduva osahulga.

Tõestus. Olgu hulk A lõpmatu, s.t. ta ei ole lõplik (ega tühi). Siis leidub element $a_1 \in A$. Seejuures $\{a_1\} \subsetneq A$, sest võrduse korral oleks A lõplik. Leiame $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$, saame $\{a_1, a_2\} \subsetneq A$, sest võrduse korral oleks A lõplik. Niiviisi jätkates leiame $a_n \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, kusjuures $\{a_1, \ldots, a_n\} \subsetneq A$, jne. Kokku moodustub loenduv hulk $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \subset A$.

Järeldusena märgime, et hulk on lõpmatu parajasti siis, kui ta sisaldab loenduva osahulga.

Ülesanne. Tõestada, et hulk on lõpmatu parajasti siis, kui ta on ekvivalentne endast erineva osahulgaga.

Ülesandes formuleeritud väitest saab järeldada, et hulk on lõplik (või tühi) parajasti siis, kui ta ei ole ekvivalentne ühegi endast erineva osahulgaga.

Lause. Loenduva ja lõpliku hulga ühend on loenduv

Tõestus. Olgu A loenduv ja B lõplik. Alati $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, kusjuures $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Et $B \setminus A \subset B$, siis $B \setminus A$ on lõplik (või tühi). Kui $B \setminus A = \emptyset$, siis $A \cup B = A$ on loenduv. Kui aga $B \setminus A = \{b_1, \ldots, b_m\}$ ja $A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, siis $A \cup B = \{b_1, \ldots, b_m, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ on loenduv.

Lause. Kahe loenduva hulga ühend on loenduv.

Tõestus. Vaatleme hulka $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, kus A ja B on loenduvad. Kui $B \setminus A = \emptyset$ või $B \setminus A$ on lõplik , siis $A \cup B$ on loenduv eelmise lause põhjal. Kui aga $B \setminus A = \{b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$, siis võime kirjutada $A \cup (B \setminus A) = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots\}$, kus on esindatud ühendi $A \cup B$ kõik elemendid, igaüks parajasti üks kord.

Lause. Lõpliku hulga loenduvate hulkade ühend on loenduv.

Tõestus. Olgu hulgad $A_1, \ldots, A_n$ loenduvad. Tuginedes eelmisele lausele, saame, et $A_1 \cup A_2$ on loenduv, seejärel $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$ on loenduv, jne., kuni näeme, et $A_1 \cup \ldots \cup A_n = (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n$ on loenduv.

Märgime vahepeal, et kui hulgad A_i, $i \in \mathbb{N}$, on lõplikud, siis $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ on lõplik või loenduv. Kui näiteks hulgad A_i on mittetühjad ja paarikaupa mittelõikuvad ($A_i \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, kui $i \neq j$), siis $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in_i}\}$ korral

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n_1}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n_2}, \ldots\},$$

s.t. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ on loenduv.

Lause. Loenduvate hulkade loenduv ühend on loenduv, s.t. kui hulgad A_i, $i \in \mathbb{N}$, on loenduvad, siis $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ on loenduv.

Tõestus. Eeldame algul, et hulgad A_i on paarikaupa mittelõikuvad. Olgu

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots\}, \\
A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots\}, \\
&\ldots \\
A_m &= \{a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, \ldots\}, \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Siis võime kirjutada $A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup \ldots = \{\underbrace{a_{11}}, \underbrace{a_{12}, a_{21}}, \underbrace{a_{13}, a_{22}, a_{31}}, \underbrace{a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}}, \ldots\}$, kus elemendid on rühmitatud indeksite summa kasvamise järjekorras. On selge, et ühendi iga element satub sellesse jadasse parajasti ühel korral, s.t. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ on loenduv. Kui aga hulgad A_i ei ole paarikaupa mittelõikuvad, siis moodustame hulgad $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$,

$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots, B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}), \ldots$ Jätame kõrvale tühjad hulgad B_i, ühendame eraldi lõplikud ja loenduvad hulgad B_i ning kasutades juba tõestatud tulemusi, saame hulga $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ loenduvuse.

Näide. Näitame, et naturaalarvude hulga kõigi lõplike osahulkade hulk on loenduv Olgu $A_1 = \{\{1\}, \{2\}, \ldots\}$ kõigi üheelemendiliste osahulkade hulk, $A_2 = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \ldots\}$ kõigi kaheelemendiliste osahulkade hulk (mis on kirjutatud jadasse elementide summa kasvamise järjekorras), $\ldots, A_n$ kõigi n elemendiliste osahulkade hulk jne. Kuna hulgad A_i on loenduvad, siis on loenduv ka $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Ülesanne. Nimetame lõplikku hulka $\{a_1, \ldots, a_n\}$ tähestikuks, suvalist lõplikku tähtede järjestikust kirjutist sõnaks. Sõnad on näiteks a_1 ja $a_2a_1a_1a_3$. Tõestada, et kõigi sõnade hulk on loenduv.

Lause. Kahe loenduva hulga otsekorrutis on loenduv.

Tõestus. Vaatleme loenduvaid hulki $A_1 = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ ja $B = \{b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$. Kasutades eelmise lause tõestuse ideed, saame $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), \ldots\}$, mistõttu $A \times B$ on loenduv.

Lause. Lõpliku hulga loenduvate hulkade otsekorrutis on loenduv.

Tõestus. Olgu hulgad $A_1, \ldots, A_n$ loenduvad. Siis hulk $A_1 \times A_2$ on loenduv. Ka hulk $(A_1 \times A_2) \times A_3$ on loenduv, seepärast on loenduv $A_1 \times A_2 \times A_3 \sim (A_1 \times A_2) \times A_3$. Analoogiliselt jätkates jõuame hulga

$$A_1 \times \ldots \times A_n \sim (\ldots (A_1 \times A_2) \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$$

loenduvuseni.

Juhime tähelepanu sellele, et $A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in A_i\}$, kuid $(A_1 \times A_2) \times A_3 = \{((a_1, a_2), a_3) \mid a_i \in A_i\}$, seepärast ei ole need hulgad võrdsed, küll aga on nad ekvivalentsed.

Näited. 1. Näitame, et ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$ on loenduv. Peame silmas, et $\mathbb{Q} = \{q \mid q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Iga ratsionaalarvu saab üheselt esitada taandumatu murruna $q = \frac{m}{n}$ (näiteks

$\frac{3}{4}$ on taandumatu, $\frac{6}{8}$ aga mitte). Seades arvule $q \in \mathbb{Q}$ vastavusse paari (m, n), saame, et $\mathbb{Q} \sim A \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, kus hulk A koosneb taandumatutest murdudest moodustatud paaridest (näiteks $(3, 4) \in A$, kuid $(6, 8) \notin A$). Et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ on loenduv, siis on loenduv ka A kui loenduva hulga lõpmatu osahulk.

2. Hulk $\mathbb{Q}^n$ kui lõpliku hulga loenduvate hulkade otsekorrutis on loenduv. Et $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$, siis öeldakse, et ruumi $\mathbb{R}^n$ (sealhulgas tasandi ja kolmemõõtmelise ruumi) ratsionaalsete koordinaatidega punktide hulk on loenduv.

3. Näitame, et ratsionaalsete kordajatega polünoomide hulk on loenduv. Olgu $\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}} = \{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \quad + a_{n-1}x + a_n \mid a_0, \quad , a_n \in \mathbb{Q}\}$ — kõigi ülimalt n. astme ratsionaalsete kordajatega polünoomide hulk. Siis $\mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{Q}^{n+1}$ Seega kõigi ratsionaalsete kordajatega polünoomide hulk $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}^n_{\mathbb{Q}}$ on loenduv kui loenduvate hulkade loenduv ühend.

4. Definitsioon. Kompleksarvu c (erijuhul reaalarvu) nimetatakse algebraliseks arvuks, kui leidub ratsionaalsete kordajatega polünoom $P(x) \not\equiv 0$ nii, et $P(c) = 0$.

Kõik ratsionaalarvud on algebralised arvud, näiteks $q \in \mathbb{Q}$ on polünoomi $x - q$ juur. Juba teise astme polünoomide juurtena tuleb algebraliste arvude hulka irratsionaalarve.

Algebra põhiteoreem väidab, et igal n. astme polünoomil on kompleksarvude hulgas täpselt n juurt kui arvestada juurte kordsusi. Niisiis on algebraliste arvude hulk lõplike hulkade (polünoomide juurte hulkade) loenduv (nii palju on ratsionaalsete kordajatega polünoome) ühend, seega loenduv (nagu nägime, ei ole ta lõplik). Sellega on tõestatud

Teoreem (Cantori teoreem). Algebraliste arvude hulk on loenduv.

Ülesanded. 1. Tõestada, et iga hulk, mille elementideks on paarikaupa mittelõikuvad intervallid, on lõplik või loenduv (intervalli all mõtleme siin hulki (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ või $(a, b]$, kus $a < b$).

2. Tõestada, et monotoonse funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ katkevuspunktide hulk (kui ta ei ole tühi) on lõplik või loenduv.

3. Cantor–Bernsteini teoreem.

Definitsioon. Ütleme, et hulga A võimsus ei ületa hulga B võimsust, kui leidub injektsioon $f\colon A \to B$.

Märgime, et injektsiooni $f\colon A \to B$ olemasolu on samaväärne sellega, et leidub bijektsioon $f\colon A \to B_1 \subset B$, sest injektsioon $f\colon A \to B$ on bijektsioon $f\colon A \to f(A) \subset B$.

Näited. 1. Vaatleme lõplikku hulka $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ Funktsioon $f\colon A \to \mathbb{N}$, kus $f(a_k) = k$, $k = 1, \ldots, n$, on injektsioon, seega hulga A võimsus ei ületa hulga $\mathbb{N}$ võimsust.

2. Kui $A \subset B$, siis funktsioon $f\colon A \to B$, kus $f(a) = a$, $a \in A$, on injektsioon. Seepärast osahulga võimsus ei ületa hulga enda võimsust. Näiteks hulga $\mathbb{N}$, aga ka $\mathbb{Q}$ võimsus ei ületa hulga $\mathbb{R}$ võimsust.

3. Funktsioon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n < m$, mis on antud võrdusega $f((x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$, on injektsioon. Seega hulga $\mathbb{R}^n$ võimsus ei ületa $\mathbb{R}^m$ võimsust, kui $n < m$, sealhulgas $\mathbb{R}$ võimsus ei ületa $\mathbb{R}^2$ võimsust.

Efektiivne vahend hulkade ekvivalentsuse tõestamiseks on järgmine

Teoreem (Cantor–Bernsteini teoreem). Kui hulga A võimsus ei ületa hulga B võimsust ja hulga B võimsus ei ületa hulga A võimsust, siis hulgad A ja B on ekvivalentsed.

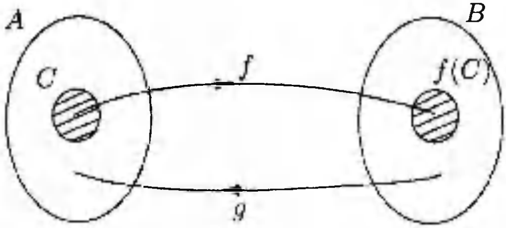
Tõestus. Olgu $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to A$ injektsioonid. Defineerime funktsiooni $\varphi\colon P(A) \to P(A)$ järgmiselt: hulga $X \subset A$ korral $\varphi(X) = A \setminus g(B \setminus f(X))$. Selgituseks lisame, et $f(X) \subset B$ ja $g(B \setminus f(X)) \subset A$, seepärast $\varphi(X) \subset A$.

Kui $X_1 \subset X_2 \subset A$, siis $f(X_1) \subset f(X_2)$, millest järeldub $B \setminus f(X_1) \supset B \setminus f(X_2)$ ning $g(B \setminus f(X_1)) \supset g(B \setminus f(X_2))$. Viimasest sisalduvusest saame $A \setminus g(B \setminus f(X_1)) \subset A \setminus g(B \setminus f(X_2))$ ehk $\varphi(X_1) \subset \varphi(X_2)$. Niisiis, funktsioon φ säilitab hulga A osahulkade sisalduvuse. Juhime tähelepanu sellele, et φ ei ole funktsioon hulgast A hulka A, mis rahuldab alati kujutise monotoonsuse omadust.

Olgu $\mathcal{W} = \{X \subset A\colon X \subset \varphi(X)\} \subset P(A)$, s.t. $\mathcal{W}$ on funktsiooni φ rakendamisel "laienevate" hulkade hulk. Võib öelda, et vähemalt $\emptyset \in \mathcal{W}$. Tähistame $C = \bigcup\limits_{X \in \mathcal{W}} X$, muidugi $C \subset A$. Kui $x \in C$, siis leidub $X \in \mathcal{W}$ nii, et $x \in X$. Seega $x \in X \subset \varphi(X) \subset \varphi(C)$

(sest $X \subset C$ ja φ säilitab sisalduvuse), mis tähendab, et $C \subset \varphi(C)$. Sellest omakorda järeldub, et $\varphi(C) \subset \varphi(\varphi(C))$, mistõttu $\varphi(C) \in \mathcal{W}$. Siis aga $\varphi(C) \subset \bigcup_{X \in \mathcal{W}} X = C$ ning on tõestatud, et $C = \varphi(C)$.

Oleme leidnud hulga $C \subset A$ nii, et $C = A \setminus g(B \setminus f(C))$, millest $A \setminus C = g(B \setminus f(C))$. Funktsiooni g injektiivsuse tõttu on siis $g\colon B \setminus f(C) \to A \setminus C$ bijektsioon ning ka tema pöördfunktsioon $g^{-1}\colon A \setminus C \to B \setminus f(C)$ on bijektsioon.



Niisiis teisendab f hulga A viirutatud osa C bijektiivselt hulgaks $f(C)$ (sest $f\colon C \to f(C)$ on bijektsioon), samuti teisendab g^{-1} hulga A viirutamata osa $A \setminus C$ bijektiivselt hulga B viirutamata osaks $B \setminus f(C)$. Seepärast funktsioon $h\colon A \to B$, mis on defineeritud

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui} \quad x \in C, \\ g^{-1}(x), & \text{kui} \quad x \in A \setminus C, \end{cases}$$

on bijektsioon.

Teoreem on tõestatud.

Cantor–Bernsteini teoreemi saab sõnastada veel järgmiselt: kui $A_2 \subset A_1 \subset A_0$ ja $A_2 \sim A_0$, siis $A_0 \sim A_1 \sim A_2$.

Tõestame, et teoreemi äsjatoodud sõnastus on samaväärne põhivariandiga.

Eeldame, et teoreemi põhivariant kehtib. Olgu $A_2 \subset A_1 \subset A_0$ ja $A_2 \sim A_0$. Siis $I\colon A_1 \to A_1 \subset A_0$ on bijektsioon ja leidub bijektsioon $g\colon A_0 \to A_2 \subset A_1$, millest põhivariandi põhjal järeldub, et $A_1 \sim A_0$. Arvestades veel eeldatud ekvivalentsust $A_2 \sim A_0$, saame $A_0 \sim A_1 \sim A_2$.

Eeldame, et kehtib teoreemi teine variant. Olgu $f\colon A \to B_1 \subset B$ ja $g\colon B \to A_1 \subset A$ bijektsioonid. Olgu $A_2 = (gf)(A) \subset A_1$. Siis $h = gf\colon A \to A_2$ on bijektsioon. Seega $A_2 \subset A_1 \subset A$ ja $A_2 \sim A$, millest järeldub, et $A \sim A_1$. Kuid $A_1 \sim B$, seepärast $A \sim B$.

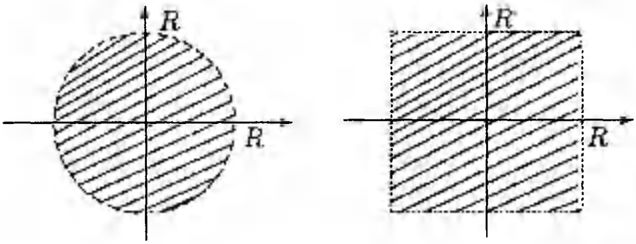
Näited. 1. Vahemik (a,b) ja lõik $[a,b]$ on ekvivalentsed, sest $(a,b) \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$ ja $(a,b) \sim \mathbb{R}$.

2. Sisalduvused $(a,b) \subset (a,b] \subset \mathbb{R}$ ja $(a,b) \subset [a,b) \subset \mathbb{R}$ lubavad järeldada, et $(a,b] \sim [a,b) \sim (a,b)$.

3. Kuna $\{(x,y) \mid x^2+y^2 < R^2\} \subset \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\} \subset \mathbb{R}^2$, siis lahtine ring ja kinnine ring on ekvivalentsed.

4. Sisalduvusest

$$\{(x,y) \mid x^2+y^2 < R^2\} \subset \{(x,y) \mid \max\{|x|,|y|\} < R\} \subset \mathbb{R}^2$$



järeldame, et ring ja ruut on ekvivalentsed.

Lause. Hulgad $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^2$ on sama võimsusega.

Tõestus. Me teame, et $\mathbb{R} \sim (0,1)$ ja $\mathbb{R}^2 \sim (0,1)^2$, seepärast piisab tõestada, et $(0,1) \sim (0,1)^2$ Kontrollime Cantor–Bernsteini teoreemi eelduste täidetust. Ühelt poolt, $(0,1) \sim \{(x,\frac{1}{2}) \mid x \in (0,1)\} \subset$ $\subset (0,1)^2$, seega vahemiku $(0,1)$ võimsus ei ületa ruudu $(0,1)^2$ võimsust. Näitame veel, et ruudu $(0,1)^2$ võimsus ei ületa vahemiku $(0,1)$ võimsust. Lähtume sellest, et $(0,1)^2 = \{(x,y) \mid x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots,$ $y = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\}$, kus x ja y on kirjutatud oma kümnendesitusena, s.t. $\alpha_i, \beta_i \in \{0,1,\ldots,9\}$. Seejuures kümnendesituse mõiste kohaselt ei lõpe see ainult üheksate jadaga, näiteks $0,3499\ldots$ asemel kirjutame hoopis $0,3500\ldots$ Olgu $f((x,y)) = 0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\ldots$ Et x ja y esitused ei lõpe üheksate jadaga, ei lõpe ka $f((x,y))$ üheksate jadaga, seega $f((x,y)) < 1$. Peale selle, $f((x,y)) > 0$, sest kui kehtiks $f((x,y)) = 0$, siis oleks $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \ldots = 0$, s.t. $x = y = 0$. Niisiis $f\colon (0,1)^2 \to (0,1)$. Funktsioon f on injektiivne, sest kui $f((x_1,y_1)) = f(x_2,y_2)) = 0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots$, siis $(x_1,y_1) = (0,\alpha_1\alpha_2\ldots,0,\beta_1\beta_2\ldots)$ ning $f((x_1,y_1)) = 0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots$, mis annab $x_1 = 0,\gamma_1\gamma_3$ ja $y_1 = 0,\gamma_2\gamma_4$ Analoogiliselt $x_2 = 0,\gamma_1\gamma_3$. ja $y_2 = 0,\gamma_2\gamma_4$, seega $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Cantor–Bernsteini teoreemi põhjal saame nüüd järeldada, et $(0,1) \sim (0,1)^2$, millega on tõestatud ka lause väide.

Järeldus. Hulgad $I\!R^n$, $n = 1, 2, .$, on kõik sama võimsusega.

Põhjenduseks toome ekvivalentsused $I\!R^{n+1} \sim I\!R^{n-1} \times I\!R^2 \sim \sim I\!R^{n-1} \times I\!R \sim I\!R^n$

Populaarselt võiks öelda, et sirgel on sama palju punkte kui tasandil või ruumis.

4. Võimsuste hierarhia. Siiani oleme tõestanud lõpmatute hulkade korral vaid nende ekvivalentsust. Kõik lõpmatud hulgad ei ole siiski võrdse võimsusega, seda kinnitab järgmine

Lause. Hulgad $I\!N$ ja $(0,1)$ ei ole ekvivalentsed.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et hulgad $I\!N$ ja $(0,1)$ on ekvivalentsed. Sel juhul saame kõik hulga $(0,1)$ elemendid kümnendesitustena kirjutada jadasse (järjekorras ülalt alla)

$$\begin{array}{l} 0,\alpha_{11}\alpha_{12} \,..\, \alpha_{1j} \\ 0,\alpha_{21}\alpha_{22} \,.\, \alpha_{2j} \\ \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \\ 0,\alpha_{i1}\alpha_{i2} \,.\, \alpha_{ij} \\ \cdot\cdot \end{array}$$

Moodustame arvu $0,\alpha_1\alpha_2$, kus $\alpha_1 \in \{1, 2, \quad , 9\} \setminus \{\alpha_{11}\}$, $\alpha_2 \in \{0, 1, \quad , 8\} \setminus \{\alpha_{22}\}$, , $\alpha_i \in \{0, 1, . \quad , 8\} \setminus \{\alpha_{ii}\}$, Siis $0,\alpha_1\alpha_2 \quad \in (0,1)$, sest ta ei lõpe üheksate jadaga ja ei koosne ainult nullidest. Kuid see arv on erinev igast jadas olevast arvust, sest $\alpha_i \neq \alpha_{ii}$, $i = 1, 2, .$ Seega ei ole kõiki vahemikus $(0,1)$ paiknevaid arve võimalik jadana esitada, mistõttu $I\!N \not\sim (0,1)$.

Märgime, et tõestuses kasutatud võtet nimetatakse diagonaalprotsessiks.

Definitsioon. Kui hulga A võimsus ei ületa hulga B võimsust ning A ja B ei ole ekvivalentsed, siis öeldakse, et hulga A võimsus on väiksem kui hulga B võimsus (või hulga B võimsus on suurem kui hulga A võimsus).

Näiteks naturaalarvude hulga $I\!N$ võimsus on väiksem kui vahemiku $(0,1)$ võimsus, sest $I\!N \subset I\!R \sim (0,1)$ ($I\!N$ võimsus ei ületa $(0,1)$ võimsust). Sellega on selgeks tehtud, et reaalarvude hulk $I\!R$ ja temaga ekvivalentsed hulgad on mitteloenduvad.

Praegu oleme võimelised põhjendama ühte varem toodud väidet, kus ütlesime, et jada $a\colon I\!N \to I\!R$ ei saa olla sürjektiivne. Vaatleme hulka $a(I\!N)$. Ta saab olla kas lõplik või loenduv olenevalt sellest, kas jadas $a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots$ on lõplik või lõpmatu hulk erinevaid liikmeid. Mõlemal juhul on hulga $a(I\!N)$ võimsus väiksem kui hulga $I\!R$ võimsus, seega $a(I\!N) \neq I\!R$.

Vaadeldes senini esinenud näiteid, võib tekkida küsimus, kas on olemas hulki, mille võimsus on suurem kui hulga $I\!R$ võimsus. Vastuse sellele annab järgmine

Teoreem (Cantori teoreem). Hulga $P(A)$ võimsus on suurem kui hulga A võimsus.

Tõestus. Me peame tõestama, et hulga A võimsus ei ületa $P(A)$ võimsust ja $A \not\sim P(A)$. Defineerime funktsiooni $f\colon A \to P(A)$ võrdusega $f(a) = \{a\}$, $a \in A$, s.t. igale elemendile $a \in A$ seame vastavusse üheelemendilise hulga $\{a\}$ — elemendi hulgast $P(A)$. On selge, et f on injektiivne. Väite $A \not\sim P(A)$ tõestame vastuväiteliselt. Oletame, et $A \sim P(A)$ ning vaatleme bijektsiooni $g\colon A \to P(A)$. Olgu $g(a) = A_a \subset A$ (ehk $A_a \in P(A)$), $a \in A$. Seejuures kas $a \in A_a$ või $a \notin A_a$. Olgu $A^* = \{a \in A \mid a \notin A_a\}$. Tähistame veel $a^* = g^{-1}(A^*)$, siis $g(a^*) = A^*$. Kuna aga $g(a^*) = A_{a^*}$, siis $A^* = A_{a^*}$. Kui oletada, et $a^* \in A_{a^*}$, siis saame hulga A^* definitsiooni põhjal, et $a^* \notin A^*$ ehk $a^* \notin A_{a^*}$. Kui aga oletada, et $a^* \notin A_{a^*}$, siis A^* definitsiooni kohaselt $a^* \in A^*$ ehk $a^* \in A_{a^*}$. Seega viivad mõlemad võimalused vastuoluni, mis näitab, et bijektsiooni $g\colon A \to P(A)$ ei eksisteeri. Teoreem on tõestatud.

Järeldus. Kui hulgas B on vähemalt kaks elementi, siis hulga B^A võimsus on suurem kui hulga A võimsus.

Tõestus. Meenutame, et $B^A = \{f \mid f\colon A \to B\}$ ja $P(A) \sim \sim \{\chi \mid \chi\colon A \to \{0,1\}\} = \{0,1\}^A$. Olgu hulgas B vähemalt kaks elementi a ja b. Siis $B^A \supset \{f \in B^A \mid f(A) \subset \{a,b\}\} \sim \{a,b\}^A \sim \sim \{0,1\}^A \sim P(A)$, mis tähendab, et hulga $P(A)$ võimsus ei ületa B^A võimsust. Jääb kasutada Cantori teoreemi.

Tihti nimetataksegi Cantori teoreemiks just esitatud järeldust.

Püüame nüüd vastata küsimusele, mis on hulga võimsus.

Me saame rääkida näiteks kõigi üheelemendiliste hulkade klassist, kõigi kaheelemendiliste hulkade klassist, kõigi loenduvate hulkade klassist. Seda ja kõike selles paragrahvis esitatut silmas pidades on mõistetav järgmine määratlus. Hulga võimsuseks nimetatakse kõigi temaga ekvivalentsete hulkade klassi. Võimsuse mõistes on tähtsaim aspekt hulga võime olla bijektiivses vastavuses kõigi hulkadega mingist kindlast hulkade klassist.

Hulga A võimsust tähistatakse $\overline{\overline{A}}$ või $|A|$ või $\operatorname{card} A$, hulkade võimsusi nimetatakse kardinaalarvudeks. Kui $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, siis kirjutame $\overline{\overline{A}} = n$, samuti $\overline{\overline{\emptyset}} = 0$. Loenduva hulga võimsust tähistatakse $\aleph_0$ (loetakse „alef-null"), kusjuures teame, et $n < \aleph_0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Kasutatakse tähistust $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = c$ ning räägitakse kontiinumi võimsusest (kontiinumiks nimetatakse vahel ka arvsirget). Teame, et $\aleph_0 < c$.

Lause. Kehtib võrdus $\overline{\overline{P(\mathbb{N})}} = c$.

Tõestus. Eelnevast teame, et $P(\mathbb{N}) \sim \{\chi \mid \chi\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$. Iga konkreetne funktsioon $\chi\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ on esitatav jadana $(i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots)$, kus $i_k \in \{0,1\}$, s.t. arvudest 0 ja 1 koosneva jadana. Seega $P(\mathbb{N}) \sim \{(i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots) \mid i_k \in \{0,1\}\} = M$ (kõigi arvudest 0 ja 1 koosnevate jadade hulga tähistame tähega M). Piisab näidata, et $M \sim [0,1)$, sest $[0,1) \sim \mathbb{R}$.

Jaotame intervalli $[0,1)$ osadeks $[0,\frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2},1)$. Kui arv $a \in [0,1)$ satub esimesse poolde $[0,\frac{1}{2})$, seame talle jada esimese liikmena vastavusse 0, kui teise poolde $[\frac{1}{2},1)$, siis jada esimene liige olgu 1. Seejärel poolitame osaintervallid $[0,\frac{1}{2}) = [0,\frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ ja $[\frac{1}{2},1) = [\frac{1}{2},\frac{3}{4}) \cup [\frac{3}{4},1)$ ning jälle, vastavalt sellele, kummasse poolde a satub, kirjutame teisele kohale jadas 0 või 1. Seda poolitamisprotseduuri jätkame. Näiteks joonisel näidatud arvule a vastab jada $(1,0,1,1,0,\ldots)$.

On selge, et erinevatele arvudele vastavad erinevad jadad, seega on meil konstrueeritud injektsioon $f\colon [0,1) \to M$. Märgime, et f ei ole sürjektiivne, sest näiteks jada $(1,1,1,\ldots)$ ei vasta ühelegi arvule $a \in [0,1)$ (võib öelda, et arvudele $a \in [0,1)$ ei saa vastata jadad, mis lõpevad ainult arvudega 1).

Olgu $g\colon M \to [0,1)$ funktsioon, mis jadale $(i_1, i_2, \quad , i_n, \quad .) \in M$ seab vastavusse kümnendarvu $0, i_1 i_2 . \quad i_n \quad \in [0,1)$ (tegelikult $0, i_1 i_2 \quad i_n \quad \in [0, \frac{1}{9}]$, sest $0,111 \quad = \frac{1}{9}$). On selge, et funktsioon g on injektiivne. Tuginedes Cantor–Bernsteini teoreemile, võime öelda, et $M \sim [0,1)$.

Lause on tõestatud.

Siianiesitatust võib jääda mulje, et lõpmatute hulkade võimsuste skaala meenutab naturaalarve, s.t. et need on paarikaupa mittelõikuvate hulkade

$$I\!N, 2^{I\!N}, 2^{2^{I\!N}}, .$$

järjest suurenevad võimsused. Tegelikult võime vaadelda hulka

$$M = I\!N \cup 2^{I\!N} \cup 2^{2^{I\!N}} \cup \quad = \bigcup_{i=0}^{\infty} \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{I\!N}}}}}}_{i},$$

on selge, et hulga M võimsus on suurem iga liidetava võimsusest (ta on vähemalt järgmise liidetava võimsusega). Seejärel võime vaadelda hulki

$$M, 2^M, 2^{2^M}, \quad ,$$

mis on järjest suureneva võimsusega. Hulk

$$M \cup 2^M \cup 2^{2^M} \cup \quad = \bigcup_{i=0}^{\infty} \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{M}}}}}}_{i},$$

on jälle suurema võimsusega kui liidetavad. Taolist protseduuri võib piiramatult jätkata.

Nagu näeme, on suuremate võimsuste struktuur väga mitmekesine. Loomulik on püstitada küsimus, kas leidub $\aleph_0$ ja c vahel paiknevaid võimsusi? See on üks kuulsamaid probleeme matemaatikas, nn. kontiinumi probleem. Vastust sellele otsis juba Cantor. Püstitati nn. kontiinumi hüpotees, mille kohaselt vahepealseid võimsusi pole. Lahenduse leidmiseks tuleb hulgateooria üles ehitada aksiomaatiliselt. Austria matemaatik Kurt Gödel näitas 1939. aastal, et tavalisest aksiomaatikast lähtudes ei saa tõestada, et vahepealseid võimsusi ei ole. Lõpliku lahenduse probleemile andis 1963. aastal USA matemaatik Paul Cohen, kes näitas, et vahepealsete võimsuste olemasolu, samuti mitteolemasolu ei ole vastuolus teiste aksioomidega. Seega võib hulgateooria tavalistele aksioomidele lisada veel aksioomi, et vahepealseid võimsusi pole, aga võib ka lisada aksioomi, et vahepealsed võimsused on olemas. Kumbki süsteem pole vastuoluline.

Paragrahvi lõpetuseks küsime, kas igat kahte võimsust saab võrrelda, s.t. kui meil on hulgad A ja B, kas siis alati kas $A \sim B$, $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ või $\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{A}}$? Vastuse sellele anname järgmises paragrahvis.

Ülesanded. **1.** Tõestada, et kui hulgad A_i on kontiinumi võimsusega, siis $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ja $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ on kontiinumi võimsusega.

2. Tõestada, et kui A on kontiinumi võimsusega, B on loenduv ja $B \subset A$, siis $A \setminus B$ on kontiinumi võimsusega.

3. Tõestada, et kõigi naturaalarvuliste liikmetega jadade hulk on kontiinumi võimsusega.

4.* Tõestada, et kõigi reaalarvuliste liikmetega jadade hulk on kontiinumi võimsusega.

5. Leida kõigi naturaalarvuliste liikmetega kasvavate jadade hulga võimsus.

6. Tõestada, et kõigi funktsioonide $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hulga võimsus on 2^c (hulga $P(\mathbb{R})$ ehk $2^{\mathbb{R}}$ võimsus).

7 * Tõestada, et kõigi pidevate funktsioonide $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hulk on kontiinumi võimsusega. Näpunäide: pidev funktsioon on määratud väärtustega ratsionaalarvulistel argumentidel.

§11. Järjestatud hulgad

1. Osaliselt ja lineaarselt järjestatud hulgad.

Definitsioon. Seost $R \subset X \times X$, mis on refleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne, nimetatakse järjestusseoseks (mõnikord ka järjestuseks) hulgas X.

Ülesanne. Tõestada, et kui R on järjestusseos, siis ka R^{-1} on järjestusseos.

Kui R on järjestusseos, siis asjaolu xRy märgitakse $x \leqslant y$ või samaväärselt $y \geqslant x$. Seega võib järjestusseose omadused üles kirjutada järgmiselt:

1° $x \leqslant x \ \forall x \in X$ (refleksiivsus),

2° $x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$ (antisümmeetrilisus),

3° $x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ (transitiivsus).

Seost $<$ hulgas X nimetatakse irrefleksiivseks, kui $x < x$ ei kehti ühegi $x \in X$ korral.

Ülesanne. Olgu seos $<$ hulgas X irrefleksiivne ja transitiivne. Defineerime seose $\leqslant$ järgmiselt: $x \leqslant y$, kui $x < y$ või $x = y$. Tõestada, et seos $\leqslant$ on järjestusseos hulgas X.

Irrefleksiivset ja transitiivset seost nimetatakse range järjestuse seoseks. Nagu näeme ülesandest, võib järjestusseose asemel anda vaadeldavas hulgas ette range järjestuse seose, mis siis loomulikul viisil määrab järjestusseose.

Teisipidi, kui $\leqslant$ on järjestusseos, siis defineerime seose $<$ järgmiselt: $x < y$, kui $x \leqslant y$ ja $x \neq y$ (kasutame ka kirjutust $y > x$).

Ülesanne. Tõestada, et niiviisi järjestusseose $\leqslant$ poolt määratud seos $<$ on irrefleksiivne ja transitiivne.

Seega tekitab hulgas antud järjestusseos seal loomulikul viisil ka range järjestuse seose.

Kui $x \leqslant y$, siis öeldakse, et x eelneb elemendile y või y järgneb elemendile x. Kasutatakse ka väljendeid „x on väiksem või võrdne kui y" või „y on suurem või võrdne kui x" ning juhul $x < y$ väljendeid „x on väiksem kui y" või „y on suurem kui x"

Definitsioon. Kui hulgas on antud järjestusseos, siis nimetatakse seda hulka osaliselt järjestatud hulgaks.

Osaliselt järjestatud hulgas ei tarvitse kaks vabalt valitud elementi x ja y olla võrreldavad, s.t. ei saa öelda, et tingimata kas $x \leqslant y$ või $y \leqslant x$.

Definitsioon. Osaliselt järjestatud hulka nimetatakse lineaarselt järjestatud hulgaks, kui iga elementide paari x ja y korral $x \leqslant y$ või $y \leqslant x$ (s.t. kaks suvalist elementi on omavahel võrreldavad).

Järjestusseose definitsioonist järeldub vahetult, et osaliselt järjestatud hulga iga osahulk, kui temas säilitada elementide omavaheline järjestus, on osaliselt järjestatud. Analoogiline väide kehtib ka lineaarse järjestuse kohta.

Näited. 1. Hulkades $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$, seega ka kõigis nende osahulkades on olemas loomulik arvudevaheline järjestus. Selliselt on need hulgad lineaarselt järjestatud.

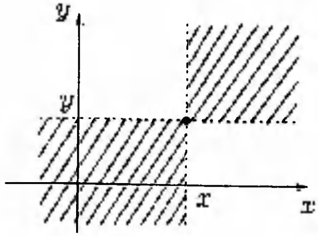
2. Olgu hulgas $\mathbb{N}$ $m < n$, kui m on paaritu ja n paarisarv, seejuures paaritute arvude paarides ja paarisarvupaarides säilitame loomuliku järjestuse. Seega taolises järjestuses $1 < 3 < 5 < \quad < 2 < 4 < 6 <$ Vaadeldav järjestus on lineaarne.

3. Ülesanne. Olgu hulgas $\mathbb{N}$ $n \leqslant m$, kui $\frac{m}{n} \in \mathbb{N}$ (s.t. naturaalarv m jagub arvuga n). Tõestada, et see seos on osaline järjestus.

4. Kuna ratsionaalarvude hulk on loenduv, siis võime kõik ratsionaalarvud kirjutada jadasse $r_1, r_2,$ Defineerime $r_m < r_n$, kui $m < n$. Taoline järjestus on lineaarne.

5. Olgu hulgas $\mathbb{R}^2$ defineeritud $(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x_1 < x_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 < y_2)$. Taolist järjestust nimetatakse alfabeetiliseks või leksikograafiliseks ning ta on lineaarne järjestus.

6. Defineerime hulgas $\mathbb{R}^2$ järjestuse järgmiselt: loeme, et $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$, kui $x_1 < x_2 \wedge y_1 < y_2$, pidades järjestustes $x_1 < x_2$ ja $y_1 < y_2$ silmas reaalarvude loomulikku järjestust. Selline järjestus hulgas $\mathbb{R}^2$ on osaline, kuid mitte lineaarne, sest näiteks elemendid $(1, 2)$ ja $(2, 1)$ ei ole omavahel võrreldavad. Viirutatud



osad kõrvaloleval joonisel kujutavad elementide hulki, mis on elemendist (x, y) suuremad (paremal ja kõrgemal) või väiksemad (vasakul ja madalamal). Sama järjestust võime vaadelda näiteks ka $\mathbb{R}^2$ osahulgas $\mathbb{N}^2$

7 Suvalises hulgas X on $R = \{(x, x) \mid x \in X\}$ järjestusseos. Selle seose puhul $x \leqslant x$ mistahes $x \in X$ korral, kuid $x \neq y$ korral ei ole elemendid x ja y võrreldavad. Taolist järjestust nimetatakse triviaalseks.

8. Suvalise hulga X kõigi osahulkade hulgas $P(X)$ loeme $A, B \in P(X)$ korral $A \leqslant B$, kui $A \subset B$. Toodud nn. sisalduvusjärjestus on osaline, kuid ta ei ole lineaarne, kui hulgas X on vähemalt kaks elementi, sest kui $a \neq b$, siis hulgad $\{a\}$ ja $\{b\}$ ei ole võrreldavad.

9. Olgu R_1 ja R_2 järjestusseosed hulgas X. Defineerime $R_1 \leqslant R_2$, kui $xR_1y \Rightarrow xR_2y$. Viimast implikatsiooni võib väljendada ka kujul $(x, y) \in R_1 \Rightarrow (x, y) \in R_2$, mis tähendab, et $R_1 \subset R_2$. Seega on defineeritud järjestus sisalduvusjärjestus nagu eelmises näiteski, kuid nüüd vaadeldakse sisalduvusjärjestust hulga X kõigi järjestusseoste hulgas, s.o. hulga $P(X \times X)$ teatud osahulgas. Kui näiteks R_1 on loomulik järjestus naturaalarvude hulgas $\mathbb{N}$ ja R_2 näites 3 toodud jaguvusjärjestus, siis $R_2 \subset R_1$, kuid $R_2 \neq R_1$ Kui aga R_3 on näites 2 esinenud järjestus, siis järjestused R_1 ja R_3 ei ole võrreldavad, sest näiteks $(2, 3) \in R_1$, kuid $(2, 3) \notin R_3$, ja $(3, 2) \in R_3$, kuid $(3, 2) \notin R_1$. Seega on sisalduvusjärjestus hulga X kõigi järjestusseoste hulgas osaline, kuid üldiselt ei ole ta lineaarne. Märgime, et näites 7 vaadeldud triviaalne järjestus sisaldub igas järjestuses.

10. Määrame tähestikus $\{a_1, \quad , a_n\}$ järjestuse $a_1 < a_2 < \, < a_n$. Defineerime sõnade hulgas järjestuse

$$\begin{aligned} (x_1, \quad ., x_m) \quad < \quad & (y_1, .. \quad , y_l) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 < y_2) \vee \\ \vee \quad & (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 < y_3) \vee \\ \vee \quad & (x_1 = y_1 \wedge \qquad \wedge x_m = y_m \wedge m < l). \end{aligned}$$

Taolist järjestust nimetatakse alfabeetiliseks ehk leksikograafiliseks, ta on lineaarne ning teda kasutatakse sõnaraamatutes.

Ülesanne. Olgu $\leqslant$ ja $<$ loomulikud järjestused naturaalarvude hulgas $I\!N$ Näidata, et $< \circ <\neq<$, $\leqslant \circ <=<$, $\leqslant \circ \geqslant= I\!N \times I\!N$

Definitsioon. Osaliselt järjestatud hulga X elementi x_0 nimetatakse vähimaks ehk esimeseks, kui $x_0 \leqslant x$ iga $x \in X$ korral. Analoogiliselt, elementi $x_0 \in X$ nimetatakse suurimaks ehk viimaseks, kui $x \leqslant x_0$ iga $x \in X$ korral.

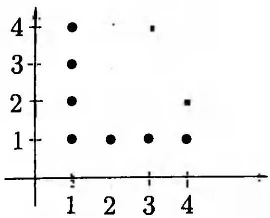
Näiteks hulgas $I\!N$ loomuliku järjestusega on esimene element 1, pole aga viimast, reaalarvude vahemikus $(0, 1)$ pole ei esimest ega viimast, hulgas $P(X)$ sisalduvusjärjestusega on vähim element $\emptyset$ ja suurim element X

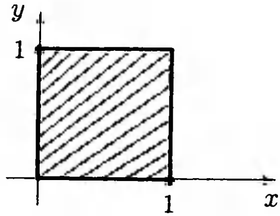
Lause. Osaliselt järjestatud hulgas ei ole üle ühe vähima ega üle ühe suurima elemendi.

Tõestus. Kui näiteks x_0 ja x_1 on vähimad elemendid, siis $x_0 \leqslant x_1$ (sest x_0 on vähim element), samuti $x_1 \leqslant x_0$ (sest x_1 on vähim element), millest aga järeldub, et $x_0 = x_1$. Suurima elemendi ühesuse tõestus on analoogiline.

Definitsioon. Osaliselt järjestatud hulga X elementi x_0 nimetatakse minimaalseks, kui sellest, et $x \leqslant x_0$, $x \in X$, järeldub, et $x = x_0$ (s.t. hulgas X ei ole elemendist x_0 väiksemaid elemente). Analoogiliselt, elementi $x_0 \in X$ nimetatakse maksimaalseks, kui sellest, et $x_0 \leqslant x$, $x \in X$, järeldub, et $x = x_0$ (s.t. hulgas X ei ole elemendist x_0 suuremaid elemente).

Näiteks reaalarvude hulgas $I\!R$, kus peetakse silmas loomulikku järjestust, ei ole minimaalseid ega maksimaalseid elemente. Hulgas $I\!N \times I\!N$ näite 5 järjestusega (s.t. $(m_1, n_1) < (m_2, n_2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m_1 < m_2 \wedge n_1 < n_2$) on minimaalseteks elementideks kõik paarid $(m, 1)$ ja $(1, n)$. Analoogiliselt, hulgas $[0, 1] \times [0, 1]$ näites 6 esitatud järjestusega on minimaalseteks elementideks kõik paarid $(x,0)$, $(0, y)$, x, $y \in \in [0, 1]$, maksimaalseteks kõik paarid $(x,1)$, $(1, y)$, $x, y \in [0, 1]$, seega on paarid $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ samaaegselt minimaalsed ja maksimaalsed elemendid. Seejuures ei ole nendes näidetes toodud minimaalsetest elementidest ükski vähim ega maksimaalsetest ükski suurim.





Nagu näeme definitsioonidest, on vähima ja minimaalse elemendi mõiste põhiline erinevus selles, et vähima elemendi korral nõutakse, et kõik teised vaadeldava hulga elemendid on temaga võrreldavad, kuid minimaalse elemendi puhul ei nõuta, et teised elemendid oleksid temaga võrreldavad.

Lause. Osaliselt järjestatud hulga vähim element on selle hulga ainus minimaalne element ja suurim element on selle hulga ainus maksimaalne element.

Tõestus. Olgu $x_0 \in X$ vähim element, s.t. $x_0 \leqslant x$ iga $x \in X$ korral. Kui mingi $x \in X$ korral kehtiks veel $x \leqslant x_0$, siis järjestuse antisümmeetrilisuse tõttu $x = x_0$, mis tähendab, et x_0 on minimaalne element. Kui leiduks veel mingi minimaalne element $x_1 \in X$, siis $x_0 \leqslant x_1$ (sest x_0 on vähim element). Tingimuse $x_0 \neq x_1$ korral ei oleks x_1 minimaalne element, seepärast $x_0 = x_1$.

Lause. Lineaarselt järjestatud hulgas on minimaalne element esimene ja maksimaalne element viimane.

Tõestus. Olgu lineaarselt järjestatud hulgas X element $x_0 \in X$ minimaalne, s.t. kui $x \in X$, $x \leqslant x_0$, siis $x = x_0$. Näitame, et $x_0 \leqslant x$ iga $x \in X$ korral. Kui oletada vastuväiteliselt, et see ei leia aset, siis leidub $x_1 \in X$ nii, et ei kehti $x_0 \leqslant x_1$. Lineaarse järjestuse tõttu $x_0 \leqslant x_1$ või $x_1 \leqslant x_0$, seega saab kehtida ainult $x_1 \leqslant x_0$. Seejuures $x_1 \neq x_0$, sest $x_1 = x_0$ korral oleks $x_0 \leqslant x_1$. Kuid $x_1 \neq x_0$, $x_1 \leqslant x_0$ on vastuolus elemendi x_0 minimaalsusega.

Nagu nähtub kahest viimati tõestatud lausest, on lineaarselt järjestatud hulgas esimese ja minimaalse elemendi, samuti viimase ja maksimaalse elemendi mõisted ühtivad.

Osalise järjestuse seosest üldisem mõiste on kvaasijärjestus ehk eeljärjestus, mis on refleksiivne ja transitiivne seos. Teda tähistame nagu osalist järjestustki sümboliga $\leqslant$. Kui hulgas on selline seos antud, siis räägitakse kvaasijärjestatud hulgast. Kvaasijärjestatud hulka X nimetatakse suunatud hulgaks, kui iga kahe elemendi $x, y \in X$ korral leidub $z \in X$ nii, et $x \leqslant z$ ja $y \leqslant z$.

Näited. 1. Iga osaliselt järjestatud hulk on kvaasijärjestatud. Hulga X osahulkade hulk $P(X)$ sisalduvusjärjestusega on suunatud, kuid triviaalselt järjestatud hulk (kui temas on vähemalt kaks elementi) ei ole suunatud. Lineaarselt järjestatud hulk on suunatud hulk.

2. Hulga X katteks nimetatakse hulga X mittetühjade osahulkade hulka $\mathcal{A} = \{X_\alpha,\ \alpha \in A\}$, mille korral $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha = X$. Kui $\mathcal{A} = \{X_\alpha,\ \alpha \in A\}$ ja $\mathcal{B} = \{X_\beta, \beta \in B\}$ on hulga X katted, siis defineerime $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$, kui iga $X_\alpha \in \mathcal{A}$ korral leidub $X_\beta \in \mathcal{B}$ nii, et $X_\beta \subset X_\alpha$; seejuures öeldakse ka, et kate $\mathcal{B}$ on peenem kui kate $\mathcal{A}$. Taoline seos on kvaasijärjestus igas hulga X katete hulgas. Üldiselt ei ole ta antisümmeetriline. Näiteks reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ kateteks on $\mathcal{A} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, aga ka $\mathcal{B} = \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$. Seejuures on selge, et $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ ja $\mathcal{B} \leqslant \mathcal{A}$, kuid $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$. Hulga X kõigi katete hulk on suunatud hulk, sest kui $\mathcal{A} = \{X_\alpha, \alpha \in A\}$ ja $\mathcal{B} = \{X_\beta, \beta \in B\}$, siis kate $\{X_\alpha \cap X_\beta,\ X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset,\ \alpha \in A, \beta \in B\}$ on peenem nii kattest $\mathcal{A}$ kui ka kattest $\mathcal{B}$.

3. Funktsioonide $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hulgas on kvaasijärjestuseks seos: $f_1 \leqslant f_2$, kui leidub konstant M nii, et $|f_1(x)| \leqslant M|f_2(x)|$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Kõigi funktsioonide hulk $\{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ on suunatud hulk, sest $f_3(x) = \max\{|f_1(x)|, |f_2(x)|\}$ korral $f_1 \leqslant f_3$ ja $f_2 \leqslant f_3$.

Üldiste piirprotsesside uurimisel on tähtsaks mõisteks üldistatud jada ehk pere. Pereks hulgas X nimetatakse funktsiooni $a\colon A \to X$, kus A on suunatud hulk. Pere erijuhuks on jada $a\colon \mathbb{N} \to X$, kus naturaalarvude hulgas $\mathbb{N}$ peetakse silmas loomulikku järjestust.

2. Kuratowski–Zorni lemma. Kuratowski-Zorni lemmale tuginedes on võimalik tõestada mitmeid matemaatika fundamentaalseid teoreeme.

Selle lemma esitamiseks on meil vaja veel järgmist mõistet. Osaliselt järjestatud hulga X elementi x_0 nimetatakse osahulga $X_0 \subset X$ ülemiseks tõkkeks, kui $x \leqslant x_0$ iga $x \in X_0$ korral.

Teoreem (Kuratowski–Zorni lemma). Kui osaliselt järjestatud hulga X igal lineaarselt järjestatud osahulgal on olemas ülemine tõke, siis hulgas X leidub maksimaalne element.

Tõestus. Vaatleme hulkade süsteemi $\mathcal{X} = \{X_0 \mid X_0 \subset X,$ X_0 on lineaarselt järjestatud$\}$, s.t. hulga $\mathcal{X}$ elementideks on hulga X kõik sellised osahulgad, mis on lineaarselt järjestatud hulga X järjestuse mõttes. Pidades hulgas $\mathcal{X}$ silmas sisalduvusjärjestust hulga X osahulkade vahel, näitame, et hulgas $\mathcal{X}$ leidub maksimaalne element ehk hulgas X leidub maksimaalne lineaarselt järjestatud osahulk.

Oletame vastuväiteliselt, et hulgas $\mathcal{X}$ ei ole maksimaalset elementi. Siis iga $Y \in \mathcal{X}$ korral leidub talle järgnev temast erinev element; seades selle vastavusse elemendile Y, moodustame funktsiooni $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, kus $f(Y) \supset Y$, $f(Y) \neq Y$ iga $Y \in \mathcal{X}$ korral.

Valime elemendi $Y_0 \in \mathcal{X}$ ja loeme ta järgneva tõestuse jooksul fikseerituks. Osahulka $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ nimetame lubatavaks, kui ta rahuldab järgmisi tingimusi:

a) $Y_0 \in \mathcal{Y}$;

b) $f(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}$;

c) kui $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$ on lineaarselt järjestatud, siis $\bigcup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} Z \in \mathcal{Y}$.

Veendume vahepeal, et kui $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ on lineaarselt järjestatud, siis $\bigcup\limits_{X_0 \in \mathcal{X}_0} X_0 \in \mathcal{X}$ (s.t. $\bigcup\limits_{X_0 \in \mathcal{X}_0} X_0$ on lineaarselt järjestatud). Kui $x, y \in \bigcup\limits_{X_0 \in \mathcal{X}_0} X_0$, siis $x \in X_0 \in \mathcal{X}_0$ ja $y \in X_1 \in \mathcal{X}_0$, kuid hulga $\mathcal{X}_0$ lineaarse järjestatuse tõttu näiteks $X_0 \subset X_1$, järelikult $x, y \in X_1$. Hulga X_1 lineaarne järjestatus lubab väita, et $x \leqslant y$ või $y \leqslant x$.

Lubatavaks hulgaks on näiteks $\mathcal{X}$. Lubatavate hulkade ühisosa on ka lubatav, sest a) kui $Y_0 \in \mathcal{Y}_\alpha$ iga α korral, siis $Y_0 \in \bigcap\limits_\alpha \mathcal{Y}_\alpha$; b) $f(\bigcap\limits_\alpha \mathcal{Y}_\alpha) \subset \bigcap\limits_\alpha f(\mathcal{Y}_\alpha) \subset \bigcap\limits_\alpha \mathcal{Y}_\alpha$; c) kui $\mathcal{Z} \subset \bigcap\limits_\alpha \mathcal{Y}_\alpha$ on lineaarselt järjestatud, siis iga α korral $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}_\alpha$ ning $\bigcup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} Z \in \mathcal{Y}_\alpha$, mistõttu $\bigcup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} Z \in \bigcap\limits_\alpha \mathcal{Y}_\alpha$. Kõikide lubatavate hulkade ühisosa on ka lubatav, tähistame ta sümboliga $\mathcal{Y}_*$. Hulk $\mathcal{Y}_*$ sisaldub igas lubatavas hulgas, olles seega minimaalne lubatav hulk.

Hulk $\mathcal{X}_* = \{X_0 \mid X_0 \in \mathcal{X}, X_0 \supset Y_0\}$ on lubatav, sest a) $Y_0 \supset Y_0$ tõttu $Y_0 \in \mathcal{X}_*$; b) kui $X_0 \in \mathcal{X}_* \subset \mathcal{X}$, siis $f(X_0) \supset X_0 \supset Y_0$, s.t. $f(X_0) \in \mathcal{X}_*$; c) kui $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}_*$ on lineaarselt järjestatud, siis iga $Z \in \mathcal{Z}$ korral $Z \supset Y_0$, seega $\bigcup\limits_{Z \in \mathcal{Z}} Z \supset Y_0$ ning $\bigcup\limits_{Z \subset \mathcal{Z}} Z \in \mathcal{X}_*$. Sellega oleme ühtlasi näidanud, et $\mathcal{Y}_* \subset \mathcal{X}_*$ ning iga $Y \in \mathcal{Y}_*$ korral $Y \supset Y_0$.

Vaatleme hulka $\mathcal{Z}_* = \{Z \mid Z \in \mathcal{Y}_*$, kui $Y \in \mathcal{Y}_*$ ja $Y \underset{\neq}{\subset} Z$, siis $f(Y) \subset Z\}$. On selge, et $\mathcal{Z}_* \subset \mathcal{Y}_* \subset \mathcal{X}_*$.

Näitame, et

d) kui $Z \in \mathcal{Z}_*$ ja $Y \in \mathcal{Y}_*$, siis $Y \subset Z$ või $Y \supset f(Z)$.

Olgu $Z \in \mathcal{Z}_*$ ning $\mathcal{Y}_Z = \{Y \in \mathcal{Y}_* \mid Y \subset Z$ või $Y \supset f(Z)\}$. Näitame, et $\mathcal{Y}_Z$ on lubatav. Kõigepealt märgime, et kuna $\mathcal{Y}_*$ on lubatav, siis $Y_0 \in \mathcal{Y}_*$. Sisalduvusest $Z \in \mathcal{Z}_* \subset \mathcal{X}_*$ järeldub, et $Z \supset Y_0$, seega $Y_0 \in \mathcal{Y}_Z$ ehk $\mathcal{Y}_Z$ rahuldab tingimust a). Olgu $Y \in \mathcal{Y}_Z$, s.t. $Y \in \mathcal{Y}_*$ ja lisaks $Y \subset Z$ või $Y \supset f(Z)$. Et $\mathcal{Y}_*$ on lubatav, siis $f(Y) \in \mathcal{Y}_*$. Kui $Y = Z$, siis $f(Y) = f(Z)$ (seega $f(Y) \supset f(Z)$) ning $f(Y) \in \mathcal{Y}_Z$. Kui $Y \underset{\neq}{\subset} Z$, siis $Z \in \mathcal{Z}_*$ tõttu $f(Y) \subset Z$, järelikult ka sel juhul $f(Y) \in \mathcal{Y}_Z$. Lõpuks, kui $Y \supset f(Z)$, siis juba sisalduvus $Y \in \mathcal{X}$ annab $f(Y) \supset Y$, järelikult $f(Y) \supset f(Z)$ ning seepärast $f(Y) \in \mathcal{Y}_Z$. Sellega on näidatud, et $\mathcal{Y}_Z$ rahuldab lubatavuse tingimust b). Olgu nüüd $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_Z$ lineaarselt järjestatud osahulk ning $Y_* = \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y$ Et $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_Z \subset \mathcal{Y}_*$ ja $\mathcal{Y}_*$ on lubatav, siis $Y_* \in \mathcal{Y}_*$. Lisaks sellele, kas iga $Y \in \mathcal{Y}$ korral $Y \subset Z$, siis $Y_* = \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y \subset Z$, mistõttu $Y_* \in \mathcal{Y}_Z$, või mingi $Y \in \mathcal{Y}$ korral $Y \supset f(Z)$, siis $Y_* \supset Y \supset f(Z)$, seega ka sel juhul $Y_* \in \mathcal{Y}_Z$. Niisiis rahuldab $\mathcal{Y}_Z$ ka lubatavuse tingimust c). Kuna $\mathcal{Y}_Z$ on definitsiooni kohaselt minimaalse lubatava hulga $\mathcal{Y}_*$ osahulk, siis $\mathcal{Y}_Z = \mathcal{Y}_*$ ning väide d) on tõestatud.

Näitame järgnevas, et $\mathcal{Z}_*$ on lubatav. Kui $Y \in \mathcal{Y}_* \subset \mathcal{X}_*$, siis $Y \supset Y_0$, seepärast ei ole võimalik, et $Y \underset{\neq}{\subset} Y_0$. See tähendab, et $\mathcal{Z}_*$ kirjelduses olev nõue on Y_0 korral täidetud, mistõttu $Y_0 \in \mathcal{Z}_*$ ehk $\mathcal{Z}_*$ rahuldab tingimust a). Olgu $Z \in \mathcal{Z}_*$. Kui $Y \in \mathcal{Y}_*$ ja $Y \underset{\neq}{\subset} f(Z)$, siis tingimuse d) tõttu $Y \subset Z$. Kui nüüd $Y = Z$, siis $f(Y) = f(Z)$ (seega $f(Y) \subset f(Z)$) ning järelikult $f(Z) \in \mathcal{Z}_*$. Kui aga $Y \underset{\neq}{\subset} Z$, siis $Z \in \mathcal{Z}_*$ tõttu $f(Y) \subset Z \subset f(Z)$, seega ka sel juhul $f(Z) \in \mathcal{Z}_*$. Sellega on näidatud, et $\mathcal{Z}_*$ rahuldab lubatavuse nõuet b). Olgu $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}_*$ lineaarselt järjestatud ja $Z_* = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z$. Kohe näeme, et $Z_* \in \mathcal{Y}_*$, sest $\mathcal{Z}_* \subset \mathcal{Y}_*$ ja $\mathcal{Y}_*$ kui lubatav hulk rahuldab nõuet c). Olgu $Y \in \mathcal{Y}_*$ selline, et $Y \underset{\neq}{\subset} Z_*$. Omaduse d) põhjal võib öelda, et iga $Z \in \mathcal{Z}$ korral kas $Y \subset Z$ või $Y \supset f(Z) \supset Z$. Viimane tingimus ei saa olla täidetud iga $Z \in \mathcal{Z}$ korral, sest siis oleks $Z_* = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z \subset Y$

(meil on aga $Y \underset{\neq}{\subset} Z_*$). Seega leidub $Z_0 \in \mathcal{Z}$ nii, et $Y \subset Z_0$. Kui $Y \underset{\neq}{\subset} Z_0$, siis hulga $\mathcal{Z}_*$ definitsiooni põhjal $f(Y) \subset Z_0 \subset Z_*$. Kui aga $Y = Z_0$, siis $Y \neq Z_*$ tõttu leidub $Z_1 \in \mathcal{Z}$ nii, et $Y \underset{\neq}{\subset} Z_1$ (kuna $Z_0 \underset{\neq}{\subset} Z_*$, siis leidub $z \in Z_* \setminus Z_0$, s.t. mingi $Z_1 \in \mathcal{Z}$ korral $z \in Z_1$; hulga $\mathcal{Z}$ lineaarse järjestatuse tõttu $Z_1 \subset Z_0$ või $Z_0 \subset Z_1$, millest realiseerub viimane sisalduvus, kusjuures $z \notin Z_0$ tagab, et $Z_0 \underset{\neq}{\subset} Z_1$) ning $\mathcal{Z}_*$ definitsiooni põhjal $f(Y) \subset Z_1 \subset Z_*$. Niisiis mõlemal juhul $f(Y) \subset Z_*$, mistõttu $Z_* \in \mathcal{Z}_*$. Sellega on tõestatud, et $\mathcal{Z}_*$ rahuldab ka lubatavuse tingimust c). Kuna $\mathcal{Z}_* \subset \mathcal{Y}_*$ ja $\mathcal{Y}_*$ on minimaalne lubatav hulk, siis $\mathcal{Z}_* = \mathcal{Y}_*$.

Omaduse d) põhjal võime öelda, et iga $Z, Y \in \mathcal{Y}_*$ korral $Z \subset Y$ või $Z \supset f(Y) \supset Y$, s.t. $\mathcal{Y}_*$ on lineaarselt järjestatud. Kui $Y_* = \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}_*} Y$, siis lubatavuse tingimuse c) tõttu $Y_* \in \mathcal{Y}_*$ ning b) tõttu $f(Y_*) \in \mathcal{Y}_*$. Seega $f(Y_*) \subset \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}_*} Y = Y_*$. Kuna samal ajal $Y_* \subset f(Y_*)$ (sest $Y_* \in \mathcal{Y}_* \subset \mathcal{X}$), siis $f(Y_*) = Y_*$, mis on vastuolus funktsiooni f definitsiooniga. Sellega on tõestatud, et hulgas $\mathcal{X}$ leidub maksimaalne element.

Hulga $\mathcal{X}$ maksimaalsel elemendil X_*, s.o. hulga X maksimaalsel lineaarselt järjestatud osahulgal leidub ülemine tõke x_*. Oletame, et mingi elemendi $x \in X$ korral $x_* \leqslant x$. Kui $x \in X \setminus X_*$, siis $X_* \cup \{x\}$ on lineaarselt järjestatud, see aga räägib vastu X_* maksimaalsusele. Seepärast $x \in X_*$ ning $x \leqslant x_*$, mistõttu $x = x_*$. Niisiis, x_* on maksimaalne element hulgas X.

Teoreem on tõestatud.

3. Täielikult järjestatud hulgad ja ordinaalarvud. Enne täielikult järjestatud hulkade käsitlemist vaatleme veel mõningaid üldisemaid järjestusi puudutavaid mõisteid.

Definitsioon. Olgu X ja Y osaliselt järjestatud hulgad. Bijektsiooni $f\colon X \to Y$ nimetatakse sarnasusteisenduseks ehk järjestust säilitavaks, kui

$$x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Hulki X ja Y nimetatakse sarnasteks ehk sarnaselt järjestatuteks, kui leidub sarnasusteisendus $f\colon X \to Y$ Hulkade X ja Y sarnasust tähistatakse kirjutisega $X \simeq Y$

Ülesanne. Näidata , et osaliselt järjestatud hulkade sarnasus on ekvivalentsusseos igas hulgas, mille elemendid on osaliselt järjestatud hulgad.

Märgime, et kui $f\colon X \to Y$ on bijektsioon, siis tingimus $x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$ on samaväärne sellega, et $x_1 < x_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, sest $x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Kui sarnastest hulkadest üks on lineaarselt järjestatud, siis on lineaarselt järjestatud ka teine hulk. Kui hulgad X ja Y on lineaarselt järjestatud, siis nende sarnasuseks piisab, et bijektsioon $f\colon X \to Y$ rahuldab tingimust $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (või samaväärset tingimust $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$). Põhjenduseks märgime, et kui $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ ja kui oletada, et $x_1 \leqslant x_2$ ei kehti, siis $x_1 > x_2$, millest aga järeldub eeldusega vastuoluline $f(x_1) > f(x_2)$.

Näited. 1. Vahemikud (a, b) ja (c, d) on sarnased, kui neis vaadelda loomulikku järjestust, sest bijektsioon

$$f(x) = \frac{(d-c)x + bc - ad}{b-a}, \qquad x \in (a, b),$$

on kasvav, säilitades seega järjestuse.

2. Hulgad $I\!N$ ja $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\}$ loomuliku järjestusega on sarnased, sest bijektsioon $f(n) = \frac{n}{n+1}$, $n \in I\!N$, säilitab järjestuse.

3. Olgu naturaalarvude hulgas $I\!N$ kõrvuti loomuliku järjestusega $<$ vaatluse all ka selle pöördjärjestus $<^{-1}$. Oletame, et eksisteerib bijektsioon $f : I\!N \to I\!N$, mille korral $n_1 < n_2 \Rightarrow f(n_1) <^{-1} f(n_2)$. Olgu $f(1) = n$. Siis $1 < 2$ tõttu $f(1) <^{-1} f(2)$ ehk $f(2) < f(1) = n$. Analoogiliselt saame, et $f(3) < n, \ldots, f(n+1) < n$. Kuid siis $f(2), \ldots, f(n+1) \in \{1, \ldots, n-1\}$, mis on vastuolu. Sellega oleme näidanud, et loomulik ja selle pöördjärjestus hulgas $I\!N$ ei ole sarnased.

Kui lineaarselt järjestatud hulgad on sarnased, siis öeldakse, et nad on sama järjestustüüpi. Analoogiliselt hulga võimsuse mõistega räägitakse ka siin hulga järjestustüübist kui kõigi vaadeldava hulgaga sarnaste lineaarselt järjestatud hulkade klassist, aga ka kui omadusest olla sarnane kõigi hulkadega teatud lineaarselt järjestatud hulkade klassist. Hulga A järjestustüüpi tähistatakse $\overline{A}$. Võrdluseks võimsuse tähisega $\overline{\overline{A}}$ märgime, et järjestustüübi mõiste korral ei peeta oluliseks, millised on hulga elemendid, võimsuse mõiste korral aga pole oluline, millised on hulga elemendid ja milline on nende järjestus. Seega võib hulga võimsuse mõistet vaadelda kahekordse abstraktsioonina, järjestustüübi mõistet aga ühekordse abstraktsioonina.

Definitsioon. Osaliselt järjestatud hulka nimetatakse täielikult järjestatuks, kui tema igas mittetühjas osahulgas leidub vähim element.

Märgime, et täielikult järjestatud hulk on lineaarselt järjestatud, sest tema igas kaheelemendilises osahulgas $\{x, y\}$ on üks elementidest x ja y vähim, seega kas $x \leqslant y$ või $y \leqslant x$.

Definitsioonist järeldub ka, et täielikult järjestatud hulga iga osahulk on täielikult järjestatud.

Näited. 1. Kõik lõplikud lineaarselt järjestatud hulgad on täielikult järjestatud.

2. Naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ loomuliku järjestusega on täielikult järjestatud.

3. Hulk $\mathbb{N}$ järjestusega $1 < 3 < 5 < \quad < 2 < 4 < 6 <$ on täielikult järjestatud, sest igas osahulgas on vähim element vähim paaritute arvude hulgast, kui neid aga pole, siis vähim paarisarvude hulgast.

4. Hulk $\mathbb{N}$ loomuliku järjestuse pöördjärjestusega ei ole täielikult järjestatud, sest tema lõpmatus osahulgas pole vähimat elementi.

5. Loomulik järjestus hulkades $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, (a, b), $[a, b]$ ei ole täielik.

Definitsioon. Täielikult järjestatud hulkade järjestustüüpe nimetatakse ordinaalarvudeks.

Järgnevas vaatleme põhjalikumalt täielikult järjestatud loenduvate hulkade järjestustüüpe ehk loenduvaid ordinaalarve. Paralleelselt sellega arendame järjestustüüpide aritmeetikat.

Märgime, et lõplike täielikult (ehk lineaarselt) järjestatud hulkade järjestustüüpe tähistatakse elementide arvuga võrdsete naturaalarvudega. Loomuliku järjestusega naturaalarvude hulga järjestustüüpi tähistatakse tähega ω. Sellise tüübiga on ka näiteks hulk $\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots\}$. Hulk $\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots,1\}$ ei ole sama tüüpi, sest siin on olemas viimane element, naturaalarvude hulgas viimast pole, sarnasusteisendus aga viib viimase elemendi viimaseks. Taolise hulga tüübiks loetakse $\omega+1$.

Vaatleme kahte lineaarselt järjestatud hulka A ja B, kusjuures olgu $A\cap B=\emptyset$. Määrame hulgas $A\cup B$ järjestuse järgmiselt: hulga A elemendipaarid, samuti hulga B elemendipaarid säilitavad oma järjestuse; kui $a\in A$ ja $b\in B$, siis olgu $a<b$. Kui α ja β on vastavalt hulkade A ja B järjestustüübid, siis tähistame taoliselt järjestatud hulga $A\cup B$ järjestustüüpi $\alpha+\beta$ (liidetavate järjekord on siin oluline).

Eespool nägime, et lisades ω tüüpi hulgale üheelemendilise hulga, mille järjestustüüp on 1, saime hulga tüübiga $\omega+1$. Analoogiliselt, näiteks hulga $\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots,1,2,\ldots,m\}$ järjestustüüp on $\omega+m$, hulga $\{1,3,5,\ldots,2,4,6,\ldots\}$ (kus elemendid on kasvavas järjestuses) järjestustüüp on aga $\omega+\omega$. Järjestustüüpide liitmine ei ole kommutatiivne, sest näiteks $n+\omega=\omega$ (lisades ω tüüpi hulgale lõpliku hulga tema elementidest väiksemaid elemente, ei muutu ühendi tüüp), seega $n+\omega\neq\omega+n$. Samal ajal on selge, et järjestustüüpide liitmine on assotsiatiivne, s.t. $(\alpha+\beta)+\gamma=$ $=\alpha+(\beta+\gamma)$.

Vaatleme lineaarselt järjestatud hulka A, mille elemendid on paarikaupa mittelõikuvad lineaarselt järjestatud hulgad B_s. Järjestame hulga $B=\bigcup\limits_{B_s\in A}B_s$ järgmiselt: samasse hulka B_s kuuluvad elemendid säilitavad oma järjestuse, kui aga $b_1\in B_{s_1}$, $b_2\in B_{s_2}$ ja $B_{s_1}<B_{s_2}$ (järjestus hulgas A), siis olgu $b_1<b_2$. Selliselt muutub hulk B lineaarselt järjestatud hulgaks. Näitame veel, et kui hulk A ja kõik hulgad B_s on täielikult järjestatud, siis ka hulk B on täielikult järjestatud. Olgu $C\subset B$. Et A on täielikult järjestatud, siis nende hulkade B_s seas, kus $C\cap B_s\neq\emptyset$, leidub esimene, olgu ta B_{s_0}. Kuna B_{s_0} on täielikult järjestatud, siis tema osahulgas $C\cap B_{s_0}$ on olemas esimene element, mis on ühtlasi esimene element hulgas C.

Kui hulga A järjestustüüp on α ja hulkade B_s järjestustüübid on β_s, siis hulga B järjestustüüpi nimetatakse tüüpide β_s summaks tüübi α järgi. Kui kõik hulgad B_s on sama tüüpi β, siis nimetatakse nende tüüpide summat tüübi α järgi tüüpide β ja α korrutiseks $\beta \cdot \alpha$ (järjekord on siingi oluline).

Näiteks $\omega + \omega = \omega \cdot 2$, üldisemalt $\underbrace{\omega + \ldots + \omega}_{n} = \omega \cdot n$, samal ajal $2 \cdot \omega = \omega$ ja $n \cdot \omega = \omega$. Ratsionaalarvudest koosnev hulk $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{2}{3}, \ldots, 1 + \frac{n}{n+1}, \ldots, m + \frac{1}{2}, m + \frac{2}{3}, \ldots, m + \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$ on järjestustüübiga $\omega \cdot \omega$, seda tähistatakse veel ω^2. Seega tekib järjestustüüp ω^2, kui ühendada mittelõikuvate ω tüüpi hulkade jada. Analoogiliselt, kui ühendada ω^2 tüüpi hulkade jada, saame $\omega^2 \cdot \omega$ tüüpi hulga, seda tähistatakse ω^3. Niiviisi jätkates võib moodustada ω^n tüüpi järjestusega hulga iga n korral. Seejärel võime moodustada summa $\omega + \omega^2 + \ldots + \omega^n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \omega^n$, mida tähistatakse ω^ω. Taolise järjestustüübi saab realiseerida näiteks nii, et järjestame vahemikus $(0, \frac{1}{2})$ asuvad ratsionaalarvud ω tüüpi hulgaks, vahemikus $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ asuvad ratsionaalarvud ω^2 tüüpi hulgaks, üldiselt, vahemikus $(\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1})$ asuvad ratsionaalarvud ω^n tüüpi hulgaks. Kõigi nende hulkade ühend on tüübiga ω^ω. Järgnevalt moodustame hulgad tüüpidega $\omega^\omega + 1, \ldots, \omega^\omega + \omega, \ldots, \omega^\omega + \omega \cdot 2, \ldots, \omega^\omega + \omega \cdot n, \ldots, \omega^\omega + \omega \cdot \omega = \omega^\omega + \omega^2, \ldots, \omega^\omega + \omega^n, \ldots, \omega^\omega + \omega^\omega = \omega^\omega \cdot 2, \ldots, \omega^\omega \cdot n, \ldots, \omega^\omega \cdot \omega$, mida tähistame $\omega^{\omega+1}, \omega^{\omega+1} + 1, \ldots, \omega^{\omega+1} + \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega+1} + \omega^\omega \cdot 2, \ldots, \omega^{\omega+1} + \omega \cdot n, \ldots, \omega^{\omega+1} + \omega^{\omega+1} = \omega^{\omega+1} \cdot 2, \ldots, \omega^{\omega+1} \cdot \omega = \omega^{\omega+2}, \ldots, \omega^{\omega+n}, \ldots, \omega^{\omega+\omega} = \omega^{\omega \cdot 2}, \ldots, \omega^{\omega \cdot n}, \ldots, \omega^{\omega \cdot \omega} = \omega^{\omega^2}, \ldots, \omega^{\omega^n}, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots, \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}_{n}, \ldots$

Summa $\omega + \omega^\omega + \omega^{\omega^\omega} + \ldots + \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}_{n} + \ldots$ tähistatakse sümboliga $\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$ või ϵ. Edasi võime moodustada hulgad järjestustüüpidega $\epsilon + 1, \ldots, \epsilon + \omega, \ldots, \epsilon + \epsilon = \epsilon \cdot 2, \ldots, \epsilon \cdot \epsilon = \epsilon^2$ jne. Kuna vaadeldud ordinaalarvud on lõpliku või loenduva hulga lõplike või loenduvate hulkade ühendi järjestustüübid, on nad kõik loenduvad.

Eespool käsitlesime järjestustüüpide aritmeetikat, sealhulgas liitmist ja korrutamist. Järgnevas näeme, et ordinaalarve on võimalik ka järjestada.

Lause. Kui X on täielikult järjestatud hulk ja $f\colon X \to X_0 \subset X$ sarnasusteisendus, siis iga $x \in X$ korral $f(x) \geqslant x$.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et hulgas X leidub elemente, mis seda võrratust ei rahulda. Siis nende hulgas on esimene, olgu ta x_1. Seega $f(x_1) < x_1$. Olgu $x_0 = f(x_1) < x_1$ Et f on sarnasusteisendus, siis $f(x_0) < f(x_1) = x_0$. Kuid $x_0 < x_1$ ja $f(x_0) < x_0$ räägivad vastu sellele, et x_1 on esimene võrratust $f(x) \geqslant x$ mitterahuldavate elementide hulgas.

Olgu X täielikult järjestatud hulk ja $x \in X$. Vaatleme hulka $\{y \in X \mid y < x\}$, s.o. kõigi elemendist x väiksemate elementide hulka. Tähistame teda $X(x)$ ja nimetame segmendiks. Kui x_0 on esimene element hulgas X, siis $X(x_0) = \emptyset$.

Lause. Täielikult järjestatud hulk ei ole sarnane ühegi oma segmendiga.

Tõestus. Kui leiduks sarnasusteisendus $f\colon X \to X(x) \subset X$, siis $f(x) \in X(x)$, s.t. $f(x) < x$, mis on aga võimatu.

Järeldus. Täielikult järjestatud hulga kaks erinevat segmenti ei saa olla sarnased.

Põhjenduseks märgime, et kui $X(x_1)$ ja $X(x_2)$ on erinevad segmendid, siis näiteks $x_1 < x_2$, mistõttu $x_1 \in X(x_2)$ ja $X(x_1)$ on hulga $X(x_2)$ segment.

Lause. Kahe täielikult järjestatud hulga vahel ei saa olla rohkem kui üks sarnasusteisendus.

Tõestus. Olgu X ja Y täielikult järjestatud hulgad ja $f\colon X \to Y$, $g\colon X \to Y$ erinevad sarnasusteisendused. Siis leidub $x \in X$ nii, et $f(x) = y_1$, $g(x) = y_2$, $y_1 \neq y_2$. Olgu näiteks $y_1 < y_2$. Siis $y_1 \in Y(y_2)$, kuid $y_1 \notin Y(y_1)$, seepärast $Y(y_1) \neq Y(y_2)$. Segment $X(x)$ teisendub funktsiooniga f segmendiks $Y(y_1)$ ja funktsiooniga g segmendiks $Y(y_2)$, s.t. $X(x)$ on sarnane segmentidega $Y(y_1)$ ja $Y(y_2)$. Sellest aga järeldub, et $Y(y_1)$ ja $Y(y_2)$ on omavahel sarnased, mis on vastuolus tõestatavale lausele eelnenud järeldusega.

Äsjatõestatud lausest järeldub, et ainus sarnasusteisendus täielikult järjestatud hulgalt iseendale on samasusteisendus.

Lisame kõrvalmärkusena, et kahe lineaarselt järjestatud hulga vahel võib olla ka rohkem kui üks sarnasusteisendus. Vaatleme näiteks loomuliku järjestusega täisarvude hulka $\mathbb{Z}$. Iga fikseeritud täisarvu k korral on nihketeisendus $S_k\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, kus $S_k(l) = l + k$, $l \in \mathbb{Z}$, järjestust säilitav bijektsioon.

Definitsioon. Öeldakse, et ordinaalarv α on väiksem ordinaalarvust β (ja kirjutatakse $\alpha < \beta$), kui täielikult järjestatud hulk järjestustüübiga α on sarnane järjestustüübiga β hulga mingi segmendiga.

On selge, et kui $\alpha < \beta$ ja $\beta < \gamma$, siis $\alpha < \gamma$. Paneme veel tähele, et samaaegselt ei saa kehtida $\alpha < \beta$ ja $\alpha = \beta$, sest siis oleks hulk järjestustüübiga β sarnane oma segmendiga, mille järjestustüüp on α. Samuti ei saa kehtida samaaegselt $\alpha < \beta$ ja $\alpha > \beta$, sest siis oleks täielikult järjestatud hulk sarnane oma segmendi segmendiga ehk iseenda segmendiga.

Teoreem. Mistahes ordinaalarvude α ja β korral leiab aset parajasti üks kolmest võimalusest $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$.

Teoreemi võib sõnastada ka järgmiselt: kahe täielikult järjestatud hulga X ja Y korral leiab aset parajasti üks kolmest võimalusest $X \simeq Y$, $X \simeq Y(y)$, $Y \simeq X(x)$.

Enne teoreemi otsest tõestust toome veel ühe iseseisvat huvi pakkuva väite. Vaatleme ordinaalarvu ξ, olgu $W(\xi)$ kõigi temast väiksemate ordinaalarvude hulk. Näiteks sellise hulga, mille järjestustüüp on ξ, kõigi segmentide järjestustüübid moodustavad hulga $W(\xi)$.

Lause. Hulk $W(\xi)$ on täielikult järjestatud ja tema järjestustüüp on ξ.

Tõestus. Vaatleme täielikult järjestatud hulka X, mille järjestustüüp on ξ. Olgu funktsioon $f\colon X \to W(\xi)$ selline, mis igale elemendile $x \in X$ seab vastavusse segmendi $X(x)$ järjestustüübi. On selge, et f on bijektsioon. Ta on ka sarnasusteisendus, sest kui $x_1 < x_2$, siis $X(x_1)$ on segment hulgas $X(x_2)$, seepärast $f(x_1) < f(x_2)$. Hulga X täieliku järjestatuse tõttu on ka $W(\xi)$ täielikult järjestatud ning nende järjestustüübid ühtivad.

Teoreemi tõestus. Vaatleme ordinaalarve α ja β. Olgu $V = W(\alpha) \cap W(\beta)$. Kuna V on täielikult järjestatud hulga (näiteks $W(\alpha)$) osahulk, siis on ta täielikult järjestatud. Olgu tema järjestustüüp γ. Tõestame, et $\gamma \leqslant \alpha$ ja $\gamma \leqslant \beta$, seejuures analoogia kaalutlustel piisab neist näiteks esimese tõestamisest.

Kui $V = W(\alpha)$, siis $\gamma = \alpha$, seepärast vaatleme juhtu $V \subsetneq W(\alpha)$. Kui $\delta \in V$ ja $\eta \in W(\alpha) \setminus V$, siis hulga $W(\alpha)$ lineaarse järjestatuse tõttu $\delta < \eta$ või $\eta < \delta$. Näitame, et teine võrratus ei saa kehtida. Kuna $\delta \in W(\alpha)$ ja $\delta \in W(\beta)$, siis $\delta < \alpha$ ja $\delta < \beta$. Kui kehtiks $\eta < \delta$, siis saaksime $\eta < \alpha$ ja $\eta < \beta$, s.t. $\eta \in V$ Seega jääb ainult võimalus $\delta < \eta$. Kuna $W(\alpha) \setminus V$ on hulga $W(\alpha)$ osahulk, siis leidub temas esimene element ξ, seejuures $\xi < \alpha$. Et hulk $W(\alpha)$ sisaldab kõik ordinaalarvust α väiksemad ordinaalarvud ja $\xi \in W(\alpha)$, siis ta sisaldab ka kõik ordinaalarvust ξ väiksemad ordinaalarvud, kusjuures need kõik moodustavad hulga V See aga tähendab, et hulga V järjestustüüp on ξ ning $\gamma = \xi < \alpha$.

Niisiis, $\gamma \leqslant \alpha$ ja $\gamma \leqslant \beta$. Seejuures ei ole võimalik, et samaaegselt $\gamma < \alpha$ ja $\gamma < \beta$, sest siis $\gamma \in W(\alpha)$ ja $\gamma \in W(\beta)$ ning seega $\gamma \in V$ Kuna V koosneb oma järjestustüübist väiksematest ordinaalarvudest, siis oleks $\gamma < \gamma$, mis on võimatu. Seetõttu jäävad võimalused

$$
\begin{array}{lll}
\gamma = \alpha, & \gamma = \beta & (\text{siis } \alpha = \beta), \\
\gamma = \alpha, & \gamma < \beta & (\text{siis } \alpha < \beta), \\
\gamma < \alpha, & \gamma = \beta & (\text{siis } \alpha > \beta).
\end{array}
$$

Teoreem on tõestatud.

Lause. Iga ordinaalarvudest koosnev hulk on täielikult järjestatud.

Tõestus. Tarvitseb tõestada, et igas ordinaalarvudest koosnevas hulgas X leidub esimene element. Valime vabalt elemendi $\xi \in X$. Kui ξ on vähim element hulgas X, on lause tõestatud. Vastasel korral on hulk $W(\xi) \cap X$ mittetühi ning olles täielikult järjestatud hulga $W(\xi)$ osahulk, sisaldab esimese elemendi, mis on esimeseks elemendiks ka hulgas X

Paneme tähele, et iga ordinaalarvu ξ korral $\xi < \xi + 1$, sest kui A on täielikult järjestatud hulk, mille järjestustüüp on ξ, siis võttes $b \notin A$ ja defineerides $a < b$ iga $a \in A$ korral, saame täielikult järjestatud hulga $B = A \cup \{b\}$, mille järjestustüüp on $\xi + 1$. Seejuures $A = B(b)$, mistõttu $\xi < \xi + 1$.

Vaatleme olukorda, kus $A \subset B$ ning hulk B on täielikult järjestatud tüübiga β. Siis on täielikult järjestatud ka hulk A ning tema järjestustüüp α rahuldab võrratust $\alpha \leqslant \beta$. Tõepoolest, vastasel korral oleks $\beta < \alpha$, mis tähendaks, et hulk B oleks sarnane oma osahulga A segmendiga ehk iseenda segmendiga, mis on aga võimatu.

Lause. Kõigi loenduvate ordinaalarvude hulk on mitteloenduv.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et kõik loenduvad ordinaalarvud saab järjestada jadasse $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ Moodustame ordinaalarvude α_n, $n \in \mathbb{N}$, summa ordinaalarvu ω järgi, olgu see α; ta on loenduvate hulkade loenduva ühendi järjestustüüp, seega loenduv. Seejuures iga n korral $\alpha_n \leqslant \alpha$, sest α_n on α tüüpi hulga osahulga järjestustüüp. Kuid ordinaalarv $\alpha + 1$ on ka loenduv, kusjuures $\alpha < \alpha + 1$ tõttu $\alpha_n < \alpha + 1$ ning seega $\alpha + 1 \neq \alpha_n$ iga n korral. Saadud vastuolu tõestab lause väite.

4. Zermelo teoreem. Selle teoreemiga saame muuhulgas anda vastuse eelmises paragrahvis püstitatud hulkade võimsuste võrreldavuse probleemile.

Teoreem (Zermelo teoreem). Iga hulk on täielikult järjestatav.

(Teoreem väidab, et iga hulga X korral leidub täieliku järjestuse seos hulgas X).

Tõestus. Vaatleme hulka $\mathfrak{X} = \{\text{täielikult järjestatud } X_0 \mid X_0 \subset X\}$, s.t. hulga $\mathfrak{X}$ elementideks on hulga X osahulgad kõigi võimalike täielike järjestustega nendes; seega võib sama elementide koosseisuga osahulk $X_0 \subset X$ esineda hulga $\mathfrak{X}$ elemendina korduvalt vastavalt sellele, kui palju on erinevaid võimalusi hulka X_0 täielikult järjestada. Vaatleme hulgas $\mathfrak{X}$ seost $X_0 \leqslant X_1$, mis määratakse tingimustega

1) $X_0 \subset X_1$,
2) kui $x, y \in X_0$ ja $x \leqslant y$ hulgas X_0, siis $x \leqslant y$ hulgas X_1,
3) kui $x \in X_0$ ja $y \in X_1 \setminus X_0$, siis $x \leqslant y$ hulgas X_1.

Näitame, et defineeritud seos on osalise järjestuse seos hulgas $\mathfrak{X}$.

Kõigepealt, on selge, et $X_0 \leqslant X_0$, s.t. seos on refleksiivne. Kui

$X_0 \leqslant X_1$ ja $X_1 \leqslant X_0$, siis sisalduvused $X_0 \subset X_1$ ja $X_1 \subset X_0$ annavad, et hulgad X_0 ja X_1 koosnevad samadest elementidest. Peale selle, kui $x \leqslant y$ hulgas X_0, siis $X_0 \leqslant X_1$ tõttu $x \leqslant y$ hulgas X_1, ja vastupidi, kui $x \leqslant y$ hulgas X_1, siis $X_1 \leqslant X_0$ tõttu $x \leqslant y$ hulgas X_0, s.t. ühtivad ka järjestused hulkades X_0 ja X_1 Niisiis on hulgas $\mathfrak{X}$ defineeritud seos antisümmeetriline. Kui $X_0 \leqslant X_1$ ja $X_1 \leqslant X_2$, siis 1) $X_0 \subset X_1$ ja $X_1 \subset X_2$ lubavad järeldada, et $X_0 \subset X_2$; 2) kui $x, y \in X_0$ ja $x \leqslant y$ hulgas X_0, siis $x \leqslant y$ hulgas X_1, millest omakorda järeldub, et $x \leqslant y$ hulgas X_2; 3) kui $x \in X_0$ ja $y \in X_2 \setminus X_0$, siis $y \in X_2 \setminus X_1$ korral $x_0 \in X_1$ tõttu $x \leqslant y$ hulgas X_2, aga $y \in X_1 \setminus X_0$ korral $x \leqslant y$ hulgas X_1, millest järeldub, et $x \leqslant y$ hulgas X_2, järelikult $X_0 \leqslant X_2$. Sellega on näidatud ka hulgas $\mathfrak{X}$ vaadeldava seose transitiivsus.

Näitame, et igal lineaarselt järjestatud osahulgal $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$ on ülemine tõke. Olgu $X_* = \bigcup\limits_{X_0 \in \mathfrak{X}_0} X_0$. Kui $x, y \in X_*$, siis $x \in X_0 \in \mathfrak{X}_0$ ja $y \in X_1 \in \mathfrak{X}_0$ ning $\mathfrak{X}_0$ lineaarse järjestatuse tõttu $X_0 \leqslant X_1$ või $X_1 \leqslant X_0$. Kui näiteks $X_0 \leqslant X_1$, siis $x, y \in X_1$ ning defineerime seose $x \leqslant y$ hulgas X_*, kui $x \leqslant y$ hulgas X_1. Seos $x \leqslant y$ hulgas X_* on üheselt määratud, sest kui veel $x \in X_0{}' \in \mathfrak{X}_0$ ja $y \in X_1{}' \in \mathfrak{X}_0$ ning näiteks $x, y \in X_1{}'$, siis $X_1 \leqslant X_1{}'$ korral tingimuse 2) põhjal $x \leqslant y$ hulgas $X_1{}'$, aga $X_1{}' \leqslant X_1$ korral ei saaks olla $y < x$ hulgas $X_1{}'$, sest 2) tõttu oleks siis $y < x$ hulgas X_1. Veendume kõigepealt, et hulk X_* on osaliselt järjestatud. On selge, et $x \in X_*$ korral $x \leqslant x$ hulgas X_*. Kui $x \leqslant y$ ja $y \leqslant x$ hulgas X_*, siis $x \in X_0 \in \mathfrak{X}_0$ ja $y \in Y_0 \in \mathfrak{X}_0$, kuid $\mathfrak{X}_0$ lineaarse järjestatuse tõttu $X_0 \cup Y_0 \in \mathfrak{X}_0$ (kas $X_0 \subset Y_0$, siis $X_0 \cup Y_0 = Y_0$, või $Y_0 \subset X_0$, siis $X_0 \cup Y_0 = X_0$). Seepärast $x, y \in X_0 \cup Y_0$ ning $x \leqslant y$ ja $y \leqslant x$ hulgas $X_0 \cup Y_0$, millest järeldub, et $x = y$. Olgu $x \leqslant y$ ja $y \leqslant z$ hulgas X_*. Siis $x \in X_0 \in \mathfrak{X}_0$, $y \in Y_0 \in \mathfrak{X}_0$ ja $z \in Z_0 \in \mathfrak{X}_0$ ning $x \leqslant y$ hulgas $X_0 \cup Y_0 \in \mathfrak{X}_0$ ja $y \leqslant z$ hulgas $Y_0 \cup Z_0 \in \mathfrak{X}_0$. Kuid siis $x \leqslant y$ ja $y \leqslant z$ hulgas $X_0 \cup Y_0 \cup Z_0 \in \mathfrak{X}_0$, millest järeldub, et $x \leqslant z$ hulgas $X_0 \cup Y_0 \cup Z_0$, s.t. ka hulgas X_*. Näitame, et X_* on täielikult järjestatud. Olgu $Y \subset X_*$, $Y \neq \emptyset$. Siis leidub $X_0 \in \mathfrak{X}_0$ nii, et $Y \cap X_0 \neq \emptyset$ (kui $x \in Y \subset X_*$, siis $x \in X_0 \in \mathfrak{X}_0$). Kuna X_0 on täielikult järjestatud, siis tema osahulgas $Y \cap X_0$ leidub esimene element x_0, s.t. $x_0 \leqslant y$ iga $y \in Y \cap X_0$ korral. Kui aga $y \in Y \setminus X_0$, siis $y \in X_1 \in \mathfrak{X}_0$, kus $X_0 \leqslant X_1$ ($\mathfrak{X}_0$ lineaarse järjestatuse tõttu $X_0 \leqslant X_1$ või $X_1 \leqslant X_0$, kuid viimasel juhul oleks $y \in X_0$), kuid $x_0 \in X_0$ ja $y \in X_1 \setminus X_0$ korral $x_0 \leqslant y$ hulgas X_1, seega ka hulgas X_*. Sellega on näidatud, et x_0 on vähim element hulgas Y ning saadud, et X_* on täielikult järjestatud, mistõttu $X_* \in \mathcal{X}$. Vahetult on kontrollitav, et X_* on hulga $\mathcal{X}_0$ ülemine tõke.

Kuratowski–Zorni lemma põhjal leidub hulgas $\mathcal{X}$ maksimaalne element X_{00}, see on maksimaalne täielikult järjestatud osahulk hulgas X. Kui leiduks $x_0 \in X \setminus X_{00}$, siis laiendades hulga X_{00} järjestust hulgale $X_{00} \cup \{x_0\}$ nii, et $x \leqslant x_0$ iga $x \in X_{00}$ korral, saaksime hulgale X_{00} hulga $\mathcal{X}$ järjestuse mõttes järgneva täielikult järjestatud hulga $X_{00} \cup \{x_0\}$, mis oleks vastuolus hulga X_{00} maksimaalsusega. Seega $X_{00} = X$.

Teoreem on tõestatud.

Eespool tutvusime konkreetsete täielike järjestustega loenduvates hulkades. Kui sooviksime kirjeldada mingit täielikku järjestust näiteks hulgas $\mathbb{R}$, siis peame silmas pidama, et täielikult järjestatud hulk $\mathbb{R}$ peab sisaldama oma segmentidena kõikvõimalike täieliku järjestuse tüüpidega loenduvad osahulgad. Nagu nägime, on loenduvate ordinaalarvude struktuur väga mitmekesine, kõik nad kokku aga moodustavad mitteloenduva hulga.

Zermelo teoreemist järeldub, et mistahes võimsust võib vaadelda kui mingi täielikult järjestatud hulga võimsust. Vaatleme kahte võimsust a ja b ning hulki A ja B, kus $\overline{\overline{A}} = a$ ja $\overline{\overline{B}} = b$. Hulgad A ja B saame täielikult järjestada ning eelmises punktis tõestatud teoreemi põhjal võib väita, et leiab aset parajasti üks kolmest võimalusest

hulgad A ja B on sarnased (siis $a = b$),
hulk A on sarnane hulga B mingi segmendiga (siis $a \leqslant b$),
hulk B on sarnane hulga A mingi segmendiga (siis $b \leqslant a$).

Niisiis, mistahes kaks võimsust on alati võrreldavad.

Ülesanded. 1. Tõestada, et iga võimsustest koosnev hulk on täielikult järjestatud.

2.* Olgu R osalise järjestuse seos hulgas X. Tõestada, et leidub lineaarse järjestuse seos L hulgas X nii, et $R \subset L$, ehk, teisiti öeldes, iga osalise järjestuse saab laiendada lineaarseks järjestuseks. Näpunäide: Kasutada Kuratowski-Zorni lemmat.

3.* Tõestada, et kui X on osaliselt järjestatud hulk, siis leidub $\mathcal{X} \subset P(X)$ nii, et $X \simeq \mathcal{X}$, kus hulgas $\mathcal{X}$ peetakse silmas sisalduvusjärjestust.
Ülesande väide tähendab, et iga osaline järjestus on sarnane mingi sisalduvusjärjestusega, ehk sisalduvusjärjestus on universaalne osalise järjestuse kirjeldamiseks.

4.* Tõestada, et iga loenduv lineaarselt järjestatud hulk on sarnane ratsionaalarvude hulga mingi osahulgaga.
Seega on ratsionaalarvude hulk oma loomuliku järjestusega universaalne kõigi loenduvate lineaarsete järjestuste kirjeldamiseks.

§12. Lausearvutuse põhimõisted

Lause on meil põhimõiste, mida me ei defineeri teiste üldisemate mõistete kaudu. Nagu hulga mõiste puhul, määratleme lause mõistet igapäevase keele vahendeid kasutades.

Lauseteks on loomuliku keele laused, mis midagi väidavad. Seejuures

1) iga lause on kas tõene või väär (välistatud kolmanda seadus);

2) ükski lause ei ole korraga tõene ja väär (mittevasturääkivuse seadus).

Niisugused printsiibid võetakse ette klassikalises loogikas. Lausearvutuse mõttes ei ole laused näiteks loomuliku keele käsklaused "Jookse", küsilaused "Mida sa teed", sest nad ei väida midagi. Samuti ei ole lausearvutuses lauseteks paradokse väljendavad laused, näiteks kui keegi ütleb "Ma valetan praegu", siis selle väite tõeseks, aga ka vääraks lugemine viib vastuoluni lause sisuga.

Igal lausel on tõeväärtus tõene või väär, mida lühidalt tähistatakse t ja v. Kasutatakse ka tähti t ja f (inglise keeles *true, false*) või numbreid 1 ja 0.

Lausearvutuse eesmärk ei ole uurida lausete sisulist tähendust, vaid antud lausetest uute lausete moodustamist. Järgnevas tutvume tehetega, mis seda võimaldavad. Seejuures kehtivad järgmised põhimõtted:

1) uusi lauseid võib moodustada suvalistest komponentlausetest, nende sisuline mõte pole tähtis;

2) moodustatava lause tõeväärtus sõltub ainult komponentlausete tõeväärtustest.

Tähistame lauseid suurte ladina (tavaliselt tähestiku algusosa) tähtedega A, B, C,

Definitsioon. Lausete A ja B konjunktsioon $A \wedge B$ on tõene, kui A ja B on mõlemad tõesed.

Kasutatakse ka tähistust $A\&B$. Igapäevases keeles vastab konjunktsioonile sõna "ja"

Definitsioon. Lausete A ja B disjunktsioon $A \vee B$ on tõene, kui vähemalt üks lausetest A või B on tõene.

Tavakeeles vastab disjunktsioonile sõna "või", kuigi igapäevases elus esineb sõna "või" tõlgendamist nii, et mõlema komponentlause tõesus korraga ei ole lubatav.

Definitsioon. Lausete A ja B implikatsioon $A \Rightarrow B$ on tõene, kui A on väär või B on tõene.

Kasutatakse ka tähistust $A \rightarrow B$, $A \supset B$. Tavalises keeles väljendab inmplikatsiooni fraas "kui A, siis B" Vastavus pole aga päris täpne, näiteks loogikas on "$1 + 1 = 3 \Rightarrow$ karu ei ole loom" täiesti korrektselt moodustatud tõene lause, kuigi kõnekeeles loetakse see tavaliselt vääraks või mõttetuks.

Definitsioon. Lausete A ja B ekvivalents $A \sim B$ on tõene, kui A ja B tõeväärtused on võrdsed.

Kasutatakse veel tähistusi $A \Leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow B$. Tavatekstides väljendatakse ekvivalentsi sõnadega "parajasti siis, kui"

Definitsioon. Lause A eitus $\urcorner A$ on tõene, kui A on väär.

Teiste tähistustena on kasutusel $\overline{A}$ ja $-A$.

Kõik toodud tehete definitsioonid saab esitada ühises tabelis:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \sim B$	$\urcorner A$
t	t	t	t	t	t	v
t	v	v	t	v	v	v
v	t	v	t	t	v	t
v	v	v	v	t	t	t

Tehete kirjutamisel lepitakse kokku nende tugevusjärjekord, mis tavaliselt on

$$\urcorner \quad \wedge \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \sim$$

ja tähendab, et vasakul on enne sooritatav, paremal pärast sooritatav tehe. Näiteks $A \wedge B \vee C \wedge D$ tuleb mõista $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$. Tehete väljendamisel kasutatakse loomulikult ka sulge, näiteks kirjutises $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$ ei või sulge ära jätta. Sulge ei tule vaadelda tehtena, vaid nende abil näidatakse tehete järjekorda.

Lausearvutuse tehete uurimiseks võetakse kasutusele muutujad, täpsemalt, lausemuutujad, neid tähistatakse ladina tähestiku lõpuosa suurte tähtedega X, Y, Z. Nendest moodustatakse tehete abil valemid. Siin on analoogia algebraga, näiteks

$1 + 2$ (liitmistehe)	$x + y$ (avaldis)
$A \vee B$ (disjunktsioon)	$X \vee Y$ (lausearvutuse valem)

Lausearvutuse valemid tähistame suurte ladina kirjatähtedega $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, Täpsem valemi määratlus on järgmine.

Definitsioon. Valemid on ainult need avaldised, mis moodustatakse järgmiste reeglite alusel:

1) iga muutuja on valem;

2) tõeväärtused t ja v on valemid;

3) kui $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on valemid, siis $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ on valemid;

4) kui $\mathcal{A}$ on valem, siis $\urcorner \mathcal{A}$ on valem;

5) kui $\mathcal{A}$ on valem, siis $(\mathcal{A})$ on valem.

Näiteks avaldis $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{C} \vee \mathcal{D})$ on valem, kui $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ on valemid.

Definitsioonist järeldub, et valem saab sõltuda lõplikust arvust muutujatest. Seega võib iga valemi tinglikult kirjutada $\mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n)$.

Valemis esinevatele muutujatele antavaid tõeväärtuste komplekte nimetatakse väärtustusteks, seega $(X_1, \ldots, X_n)$ väärtustus on hulga $\{t,v\}^n = \underbrace{\{t,v\} \times \ldots \times \{t,v\}}_{n \text{ tegurit}}$ element. Igale muutujate väärtustusele seab valem vastavusse oma tõeväärtuse (s.o. t või v) sellel väärtustusel, mis tähendab, et valem on vaadeldav funktsioonina $\mathcal{A}\colon \{t,v\}^n \to \{t,v\}$. Siin võib küsida, kas iga funktsioon $f\colon \{t,v\}^n \to \{t,v\}$ on tekitatud mingi valemi poolt? Vastuse sellele anname hiljem.

Valemi muutujate väärtustuste hulk on alati lõplik, seepärast saab kõigile väärtustustele vastavad tõeväärtused esitada nn. tõeväärtustabelina.

Näide. Vaatame valemit $\mathcal{A}(X,Y,Z) = X \wedge Y \vee (Y \Rightarrow Z)$. Tema tõeväärtustabel on

X	Y	Z	$X \wedge Y$	$Y \Rightarrow Z$	$X \wedge Y \vee (Y \Rightarrow Z)$
t	t	t	t	t	t
t	t	v	t	v	t
t	v	t	v	t	t
t	v	v	v	t	t
v	t	t	v	t	t
v	t	v	v	v	v
v	v	t	v	t	t
v	v	v	v	t	t

Märgime, et kui tõeväärtuste hulgas $\{t,v\}$ kasutada järjestust $t < v$, siis muutujate (X,Y,Z) väärtustused on selles tabelis kirjutatud hulga $\{t,v\}^3$ alfabeetilises ehk leksikograafilises järjestuses. Sama printsiipi järgisime juba tehete definitsioonide tabelis ja nii kirjutatakse väärtustused ka suvalise arvu muutujate korral. Võib veel tähele panna, et kui valemis on n muutujat, siis nende väärtustusi on 2^n, ja kui valemis on m tehtemärki (arusaadavalt $m \geqslant n-1$), siis igal väärtustusel on vaja teha m tehet, mistõttu tabeli koostamine tervikuna nõuab $2^n \cdot m$ tehet.

Definitsioon. Valemit nimetatakse samaselt tõeseks, kui ta on tõene iga väärtustuse korral.

Valem $\mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n)$ on niisiis samaselt tõene, kui iga $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{t,v\}^n$ korral $\mathcal{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = t$. Samaselt tõesed on näiteks valemid $X \vee \urcorner X$ ja t, kuid mitte $X \vee Y$

Definitsioon. Valemit nimetatakse samaselt vääraks, kui ta on väär iga väärtustuse korral.

Valem $\mathcal{A}(X_1, \quad , X_n)$ on seega samaselt väär, kui iga $(\alpha_1, \quad , \alpha_n) \in \{t, v\}^n$ korral $\mathcal{A}(\alpha_1, \quad , \alpha_n) = v$. Näiteks on samaselt väärad $X \wedge \urcorner X$ ja v, mitte aga $X \vee Y$

Definitsioon. Valemit nimetatakse kehtestatavaks, kui ta on vähemalt ühe väärtustuse korral tõene. Valemit nimetatakse kummutatavaks, kui ta on vähemalt ühe väärtustuse korral väär.

Niisiis on valem $\mathcal{A}(X_1, . \quad , X_n)$ kehtestatav, kui leidub $(\alpha_1, \quad , \alpha_n) \in \{t, v\}^n$ nii, et $\mathcal{A}(\alpha_1, \quad , \alpha_n) - t$, ning kummutatav, kui leidub $(\alpha_1, \quad . , \alpha_n) \in \{t, v\}^n$ nii, et $\mathcal{A}(\alpha_1, . \quad , \alpha_n) = v$. Kõik samaselt tõesed valemid on ka kehtestatavad, kõik samaselt väärad valemid ka kummutatavad.

Vahetult definitsioonidest järeldub

Lause. Kehtivad väited
1) $\mathcal{A}$ on samaselt tõene parajasti siis, kui $\urcorner\mathcal{A}$ on samaselt väär,
2) $\mathcal{A}$ on samaselt väär parajasti siis, kui $\urcorner\mathcal{A}$ on samaselt tõene,
3) $\mathcal{A}$ on kehtestatav parajasti siis, kui $\mathcal{A}$ ei ole samaselt väär,
4) $\mathcal{A}$ on kummutatav parajasti siis, kui $\mathcal{A}$ ei ole samaselt tõene.

Valemite toodud nelja omaduse kindlakstegemiseks on üks võimalus koostada nende tõeväärtustabelid. See nõuab lõpliku arvu tehete sooritamist. Mõnikord saab nende omaduste üle otsustada ka vahetult, näiteks kui valemid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on samaselt tõesed, siis $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ on samaselt tõene.

§13. Substitutsioon

Substitutsioon on valemite kui funktsioonide liitfunktsioon ehk kompositsioon ja ta võimaldab moodustada uusi valemeid.

Definitsioon. Valemite $\mathcal{A}_1, \quad , \mathcal{A}_n$ substitutsiooniks ehk asenduseks valemisse $\mathcal{A}$ muutujate $X_1, \quad , X_n$ asemele nimetatakse valemit, kus valemis $\mathcal{A}$ esinevad muutujad $X_1, \ldots, X_n$ on asendatud valemitega $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$. Taolist substitutsiooni tähistatakse $\mathcal{A}(X_1 : \mathcal{A}_1, \ldots, X_n : \mathcal{A}_n)$.

Näide. Vaatleme valemeid $\mathcal{A} = X \wedge (X \sim Y) \Rightarrow W$ ning $\mathcal{A}_1 = X \Rightarrow Y$, $\mathcal{A}_2 = \urcorner W$, $\mathcal{A}_3 = X \wedge Y$ Siis asenduse tulemusena $\mathcal{A}(X : \mathcal{A}_1, Y : \mathcal{A}_2, Z : \mathcal{A}_3) = (X \Rightarrow Y) \wedge (X \Rightarrow Y \sim \urcorner W) \Rightarrow W$ Valemis $\mathcal{A}$ ei ole sõltuvust muutujast Z, seepärast teda millegagi ei asendata. Muutujat W aga ei asendata sellepärast, et teda asendus-eeskirjas ei ole.

Võrdluseks võib tuua analüüsi kursusest mitme muutuja funktsioonide liitfunktsiooni moodustamise, näiteks funktsioonis $f(x, y, z) = x + y$ muutujate x ja z asendamisel vastavalt funktsioonidega $\varphi(u, y)$ ja $\psi(u, v)$ saame $f(x : \varphi, z : \psi) = \varphi(u, y) + y$.

Kuigi me definitsioonis juba ütlesime, et peale asendamist saame valemi, tuleb see tõestada, põhjendades niiviisi definitsiooni korrektsust.

Lause. Suvaliste valemite $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ ja $\mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n)$ korral on $\mathcal{A}(X_1 : \mathcal{A}, \ldots, X_n : \mathcal{A}_n)$ valem.

Tõestus. Tõestame vajaliku väite induktsiooniga valemi ehituse järgi.

1) Kui $\mathcal{A} = t$ või $\mathcal{A} = v$, siis asendamine teda ei muuda. Olgu valemiks $\mathcal{A}$ muutuja X ehk $\mathcal{A} = X$ Kui X ühtib mingi muutujaga X_i, mis asub asendatavate loetelus, siis peale asendamist saame $\mathcal{A}(X_1 : \mathcal{A}_1, \ldots, X_n : \mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_i$. Kui aga X ei kuulu asendatavate muutujate hulka, siis $\mathcal{A}(X_1 : \mathcal{A}_1, \ldots, X_n : \mathcal{A}_n) = X$.

2) Olgu $\mathcal{A} = \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ (sama arutelu sobib ka tehete $\vee$, $\Rightarrow$, $\sim$ ja $\urcorner$ jaoks, kui nad on valemis $\mathcal{A}$ viimasena tehtavaks tehteks), kus $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ on sellised valemid, et $\mathcal{B}(X_1 : \mathcal{A}_1, \ldots, X_n : \mathcal{A}_n)$ ja $\mathcal{C}(X_1 : \mathcal{A}_1, \ldots, X_n : \mathcal{A}_n)$ on valemid. Siis

$$\mathcal{A}(X_1 : \mathcal{A}_1, \ldots, X_n : \mathcal{A}_n) =$$

$$= \mathcal{B}(X_1 : \mathcal{A}_1, \ldots, X_n : \mathcal{A}_n) \wedge \mathcal{C}(X_1 : \mathcal{A}_1, \ldots, X_n : \mathcal{A}_n)$$

on valem, sest ta on kahe valemi konjunktsioon.

Lause on tõestatud.

Teoreem (substitutsiooniteoreem). Kui valem $\mathcal{A}$ on samaselt tõene, siis suvaliste valemite $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ korral on substitutsioon $\mathcal{A}(X_1 : \mathcal{A}_1, \ldots, X_n : \mathcal{A}_n)$ samaselt tõene.

Tõestus. Teame, et peale asendust saame tulemusena valemi $\mathcal{A}(X_1 : \mathcal{A}_1, \ldots, X_n : \mathcal{A}_n)$. Tähistame selle kõiki muutujaid hulk $Y_1, \ldots, Y_m$ (siin on valemite $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ muutujate ja valemis $\mathcal{A}$ asendamisele mittekuuluvate muutujate ühend). Olgu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ muutujate $Y_1, \ldots, Y_m$ suvaline väärtustus. Siis

$$\mathcal{A}(X_1 : \mathcal{A}_1, \ldots, X_n : \mathcal{A}_n)(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) =$$
$$= \mathcal{A}(\underbrace{\mathcal{A}_{i_1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \ldots, \mathcal{A}_{i_k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)}_{\substack{\text{asendatud muutujatele} \\ \text{vastavad tõeväärtused}}}, \underbrace{\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_l}}_{\substack{\text{asendamata} \\ \text{muutujate} \\ \text{tõeväärtused}}}) = t,$$

sest $\mathcal{A}$ on samaselt tõene.

Teoreem on tõestatud.

Substitutsiooniteoreemil on oluline roll aksiomaatiliste teooriate ülesehitamisel. Nendes võetakse ette teatud hulk valemeid, mis loetakse samaselt tõesteks. Ükskõik milliseid substitutsioone neisse ka tehakse, saadakse samaselt tõesed valemid.

§14. Loogiliselt samaväärsed valemid

Lausearvutuse valemi $\mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n)$ muutujatele võime lisada nende hulgas puuduva muutuja Y, vaadeldes näiteks valemit $\mathcal{A} \wedge (Y \vee \neg Y)$. Viimase tõeväärtus ei sõltu tegelikult muutujast Y, vaid on määratud muutujate $X_1, \ldots, X_n$ väärtustusega täpselt nagu $\mathcal{A}$ tõeväärtus. Taolist muutujate hulga laiendamisvõimalust peamegi edaspidi silmas, kui valemis mõni kirjutatav muutuja puudub.

Võrdluseks toome funktsiooni $f(x) = x^2$, mida võib vajadusel vaadelda ka kahe muutuja funktsioonina $f(x, y) = x^2$

Edaspidi vaatleme korduvalt lõpliku hulga valemite ühendmuutujaid, s.t. kõiki neid muutujaid, mis esinevad vähemalt ühes vaadeldavatest valemitest.

Definitsioon. Valemeid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ nimetatakse loogiliselt samaväärseteks, kui nende ühendmuutujate $X_1, \ldots, X_n$ iga väärtustuse $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ korral

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathcal{B}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Loogilist samaväärsust tähistatakse $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Märgime, et loogiline samaväärsus on seos suvalises valemite hulgas.

Teoreem. Loogiline samaväärsus on ekvivalentsusseos suvalises valemite hulgas.

Tõestus. Teoreem väidab, et vaadeldav seos on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne. Tõestame neist ainult transitiivsuse, sest teiste omaduste kehtivust näidatakse täpselt samade ideedega.

Olgu $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ja $\mathcal{B} \equiv \mathcal{C}$, tahame tõestada, et siis $\mathcal{A} \equiv \mathcal{C}$. Olgu $X_1, \ldots, X_n$ valemite $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ühendmuutujad. Valime nende suvalise väärtustuse $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Siis eelduse tõttu

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathcal{B}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

ja

$$\mathcal{B}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathcal{C}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

millest

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathcal{C}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Teoreem on tõestatud.

Märgime, et loogiliselt samaväärsed võivad olla ka valemid, mis sisaldavad erinevaid muutujaid. See on võimalik, kui nendest muutujatest, mis on erinevad, sõltuvust ei ole, näiteks $X \wedge (Y \vee \neg Y) \equiv$ $\equiv X \wedge (Z \vee \neg Z) \equiv X$.

Järgnevalt esitame mõned tähtsamad samaväärsused, mis ühtlasi iseloomustavad tehete omadusi:

1) $\neg\neg X \equiv X$,

2) a) $X \wedge Y \equiv Y \wedge X$,
b) $X \vee Y \equiv Y \vee X$, (kommutatiivsus)
c) $X \sim Y \equiv Y \sim X$,

3) a) $(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$,
b) $(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$, (assotsiatiivsus)
c) $(X \sim Y) \sim Z \equiv X \sim (Y \sim Z)$,

4) a) $(X \vee Y) \wedge Z \equiv X \wedge Z \vee Y \wedge Z$, (distributiivsus)
b) $X \wedge Y \vee Z \equiv (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$,

5) a) $X \wedge X \equiv X$, (idempotentsus)
b) $X \vee X \equiv X$,

6) a) $X \wedge t \equiv X$,
   b) $X \wedge v \equiv v$,
   c) $X \vee t \equiv t$,
   d) $X \vee v \equiv X$,

7) a) $\neg(X \wedge Y) \equiv \neg X \vee \neg Y$,
   b) $\neg(X \vee Y) \equiv \neg X \wedge \neg Y$, (duaalsus)

8) a) $X \Rightarrow Y \equiv \neg Y \Rightarrow \neg X$,
   b) $X \Rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$,
   c) $X \Rightarrow Y \equiv \neg(X \wedge \neg Y)$,

9) a) $X \wedge Y \equiv \neg(X \Rightarrow \neg Y)$,
   b) $X \vee Y \equiv \neg X \Rightarrow Y$,

10) a) $X \sim Y \equiv (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$,
    b) $X \sim Y \equiv X \wedge Y \vee \neg X \wedge \neg Y$

Kõiki neid saab tõestada, kirjutades välja esinevate valemite tõeväärtustabelid. Osa neist on järelduvad ka teistest, näiteks 9a järeldub samaväärsusest 8c, 9b järeldub samaväärsusest 8b ning need järeldused on ka pööratavad.

Samaväärsused 7–10 võimaldavad ühtede tehete asendamist teistega, mida kinnitab

Lause. Iga valemi korral leidub temaga samaväärne valem, mis sisaldab ainult järgmisi tehteid:

a) $\wedge$ ja $\neg$,
b) $\vee$ ja $\neg$,
c) $\Rightarrow$ ja $\neg$

Tõestuseks märgime, et a) põhjendusel kasutame samaväärsusi 8c, 10b ja samaväärsusest 7b (või 7a) saadavat $X \vee Y \equiv \neg(\neg X \wedge \neg Y)$; b) põhjendamisel kasutame samaväärsusi 8b, 10b ja samaväärsusest 7a (või 7b) saadavat $X \wedge Y \equiv \neg(\neg X \vee \neg Y)$; c) põhjendamisel kasutame samaväärsusi 10a, 9a ja 9b.

Siianiesitatu põhjal võime öelda, et valem on muutujate, tõeväärtuste ja tehtemärkide teatud reegleid rahuldav järjest kirjutis (kirjutises võivad esineda ka sulud, aga need näitavad ainult tehete järjekorda).

Definitsioon. Valemi kui kirjutise osa nimetatakse osavalemiks, kui ta saadakse järgmisi printsiipe järgides:

1) valemi osavalemiks on valem ise;

2) kui $\mathcal{A} = \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ või $\mathcal{A} = \mathcal{B} \sim \mathcal{C}$, siis $\mathcal{A}$ osavalemiks on suvaline $\mathcal{B}$ või $\mathcal{C}$ osavalem;

3) $\urcorner\mathcal{A}$ osavalemiks on suvaline $\mathcal{A}$ osavalem.

Näited. 1. Valemi $\mathcal{A} = X \wedge Y \vee Z \Rightarrow (X \wedge Y)$ osavalemid on $\mathcal{A}$, $X \wedge Y \vee Z$, $X \wedge Y$, X, Y, Z. Kirjutis $Y \vee Z$ ei ole $\mathcal{A}$ osavalem.

2. Valemi $\mathcal{A} = \urcorner(X \vee \urcorner X)$ osavalemid on $\mathcal{A}$, $X \vee \urcorner X$, X, $\urcorner X$.

Olgu valemil $\mathcal{A}$ osavalem $\mathcal{B}$. Kui $\mathcal{B}$ asemele kirjutada (ühte või mitmesse esinemisse) valemiga $\mathcal{B}$ samaväärne valem $\mathcal{B}_1$, siis saadud valem $\mathcal{A}_1$ on valemiga $\mathcal{A}$ samaväärne. Selle põhjenduseks paneme tähele, et igal väärtustusel on $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{B}_1$ tõeväärtused võrdsed, seega võrduvad ka $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{A}_1$ tõeväärtused.

Anname lõpuks veel ühe valemite samaväärsuse esitusvõimaluse.

Teoreem. Samaväärsus $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ kehtib parajasti siis, kui valem $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ on samaselt tõene.

Tõestus. Olgu valemite $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ühendmuutujad $X_1, \ldots, X_n$. Siis samaväärsus $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ kehtib parajasti siis, kui iga väärtustuse korral $\mathcal{A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathcal{B}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ehk $(\mathcal{A} \sim \mathcal{B})(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = t$. Viimane võrdus aga tähendab, et $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ on samaselt tõene.

Teoreem on tõestatud.

§15. Disjunktiivne normaalkuju

Nagu algebras avaldised on ka lausearvutuses valemid mõistlik teisendada kujule, mis oleks mingite nõutud omadustega. Eelmises paragrahvis nägime, et suvalisel valemil on samaväärne valem, kus on kasutatud ainult kahte tehet: a) $\wedge$ ja $\urcorner$, b) $\vee$ ja $\urcorner$, c) $\Rightarrow$ ja $\urcorner$. Järgnevas näeme, et on ka teisi võimalusi, mis võimaldavad valemile anda struktuurilt loomuliku kuju.

1. Disjunktiivne normaalkuju ja selle täielikkus.

Definitsioon. Lihtkonjunktsiooniks ehk elementaarkonjunktsiooniks nimetatakse muutujate või nende eituste konjunktsiooni.

Analoogiliselt defineeritakse liht- ehk elementaardisjunktsioon. Lihtkonjunktsioonid on näiteks $X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$, X, $X \wedge \neg Y \wedge Z$, $X \wedge Y \wedge \neg Y$

Definitsioon. Lihtkonjunktsiooni (samuti lihtdisjunktsiooni) nimetatakse täielikuks, kui vaadeldavatest muutujatest igaüks esineb täpselt ühe korra.

Juhime tähelepanu sellele, et täielikkus sõltub siin vaadeldavate muutujate hulgast. Kui vaadeldakse muutujaid X, Y, Z, siis viimati esitatud näidetest on täielik neljas, aga mitte esimesed kolm. Täielik ei ole ka viimane näide, kuid seda hoopis teisel põhjusel: temas esineb nii Y kui ka $\neg Y$

Järgnevates formaalsetes kirjutistes kasutame tähistust $X^t = X$ ja $X^v = \neg X$, samuti üldtähisena X^α, kus α võib olla üks tõeväärtustest t või v.

Lemma. Kehtib $X^\alpha = t \Leftrightarrow X = \alpha$.

Tõestus. Kui $\alpha = t$, siis $X^\alpha = t \Leftrightarrow X = t \Leftrightarrow X = \alpha$. Kui aga $\alpha = v$, siis $X^\alpha = t \Leftrightarrow X^v = t \Leftrightarrow \neg X = t \Leftrightarrow X = v \Leftrightarrow X = \alpha$.

Iga lihtkonjunktsiooni saab esitada kujul

$$X_{i_1}^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge X_{i_k}^{\alpha_k}, \tag{1}$$

kus $n \leqslant k \leqslant 2n$, $1 = i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k = n$ ja $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \{t, v\}$; seejuures välistame võimaluse, et $p \neq q$ korral $\alpha_p = \alpha_q$ ja $i_p = i_q$. Viimane tingimus tähendab näiteks seda, et konjunktsioon $X \wedge X \wedge Y$ on juba asendatud temaga 5a põhjal samaväärse konjunktsiooniga $X \wedge Y$

Lause. Lihtkonjunktsioon (1) on väärtustusel $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tõene parajasti siis, kui $k = n$ ja $\beta_i = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Tõestus. Tingimus $k > n$ on samaväärne sellega, et mingi muutuja X_i esineb konjunktsioonis koos eitusega $\neg X_i$, mis omakorda tähendab, et (1) on väär igal väärtustusel.

Kui aga $k = n$, siis on väite tõestuseks samaväärsuste ahel

$$
\begin{aligned}
&(X_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_n})(\beta_1, \ldots, \beta_n) = t \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \text{ iga } i = 1, \ldots, n \text{ korral } \beta_i^{\alpha_i} = t \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \text{ iga } i = 1, \ldots, n \text{ korral } \beta_i = \alpha_i,
\end{aligned}
$$

milles esimene väljendab konjunktsiooni mõistet, teine aga tugineb lemmale.

Vaatleme muutujate $X_1, \ldots, X_n$ lihtkonjunktsioone $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_m$ ja nende disjunktsiooni

$$\mathcal{K}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{K}_m. \tag{2}$$

Loomulik on siin eeldada, et lihtkonjunktsioonid valemis (2) on omavahel erinevad (kahe kujul (1) oleva konjunktsiooni korral vähemalt ühes neist esineb $X_{i_p}^{\alpha_p}$, mida teises pole), sest eelmises paragrahvis toodud samaväärsuse 5b põhjal võime korduvatest konjunktsioonidest alles jätta ainult ühe. Märgime veel, et lihtkonjunktsiooni mõiste kohaselt ei ole vajalik kõigi muutujate $X_1, \ldots, X_n$ esinemine valemites $\mathcal{K}_i$. Väärtustuse $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ korral kehtib $(\mathcal{K}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{K}_m)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = t$ parajasti siis, kui leidub $i \in \{1, \ldots, m\}$ nii, et $\mathcal{K}_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = t$. Viimase võrduse üle saab aga otsustada viimatitõestatud lause abil, arvestades ainult neid tõeväärtusi komplektist $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, mis vastavad lihtkonjunktsioonis $\mathcal{K}_i$ esinevatele muutujatele.

Definitsioon. Valemi disjunktiivseks normaalkujuks nimetatakse temaga loogiliselt samaväärset valemit kujul (2).

Antud valemil võib olla ka rohkem kui üks disjunktiivne normaalkuju.

Näide. Olgu $\mathcal{A}(X, Y) = X \Rightarrow Y$ Eelmises paragrahvis esitatud samaväärsus 8b annab valemi $\neg X \vee Y$ kui tema disjunktiivse normaalkuju. Kuid ka $X \wedge Y \vee \neg X \wedge Y \vee \neg X \wedge \neg Y$ on valemiga $\mathcal{A}$ samaväärne (seda võib kontrollida näiteks tõeväärtustabelite abil), olles samuti disjunktiivne normaalkuju.

Definitsioon. Valemi täielikuks disjunktiivseks normaalkujuks nimetatakse temaga loogiliselt samaväärset valemit kujul (2), mis koosneb täielikest lihtkonjunktsioonidest.

Valemi täielik disjunktiivne normaalkuju koosneb niisiis täielikest lihtkonjunktsioonidest ja nagu näitab järgnev lause, saab vahetult leida väärtustused, mille korral ta on tõene.

Lause. Täielike lihtkonjunktsioonide disjunktsioon

$$X_1^{\alpha_{11}} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_{1n}} \vee X_1^{\alpha_{21}} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_{2n}} \vee \ldots \vee X_1^{\alpha_{m1}} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_{mn}} \tag{3}$$

on tõene parajasti väärtustustel $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$, $i = 1, \ldots, m$.

Tõestus. Valem (3) on väärtustusel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tõene parajasti siis, kui leidub $i \in \{1, \ldots, m\}$ nii, et $X_1^{\alpha_{i1}} \wedge \ldots X_n^{\alpha_{in}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = t$. Viimane võrdus leiab aga aset parajasti siis, kui $\alpha_j = \alpha_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$.

Näide. Valem $X \wedge \neg Y \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z \vee \neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$ kui täielikul disjunktiivsel normaalkujul olev on tõene parajasti väärtustustel (t, v, t), (v, t, t) ja (v, v, v).

Teoreem. Valemil eksisteerib täielik disjunktiivne normaalkuju parajasti siis, kui ta on kehtestatav. Täielik disjunktiivne normaalkuju on liikmete järjekorra täpsuseni üheselt määratud.

Tõestus on tegelikult juba antud viimatiesitatud lausega: antud kehtestatava valemi korral on üheselt määratud tema muutujate need väärtustused, millel ta on tõene, ning jääb ainult välja kirjutada valem (3). Samaselt vääral valemil aga ei eksisteeri väärtustusi, mille korral ta oleks tõene, seega pole ka temaga samaväärset valemit (3).

2. Seos täieliku konjunktiivse normaalkujuga. Eelmises paragrahvis antud samaväärsused 7a ja 7b näitasid konjunktsiooni ja disjunktsiooni duaalsust eituse suhtes. See võimaldab disjunktiivse normaalkuju korral esitada valemit ka duaalsel, konjunktiivsel normaalkujul. Lihtdisjunktsioonide konjunktsiooni

$$\mathcal{D}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{D}_m, \tag{4}$$

mis on täielik, võime kirjutada

$$(X_1^{\alpha_{11}} \vee \ldots \vee X_n^{\alpha_{1n}}) \wedge \ldots \wedge (X_1^{\alpha_{m1}} \vee \ldots \vee X_n^{\alpha_{mn}}). \tag{5}$$

Olgu valem $\mathcal{A}$ kujul (5). Siis

$$\begin{aligned} \neg\mathcal{A} &= \neg(\mathcal{D}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{D}_m) = \neg\mathcal{D}_1 \vee \ldots \vee \neg\mathcal{D}_m = \\ &= \neg X_1^{\alpha_{11}} \wedge \ldots \wedge \neg X_n^{\alpha_{1n}} \vee \ldots \vee \neg X_1^{\alpha_{m1}} \wedge \ldots \wedge \neg X_n^{\alpha_{mn}} \end{aligned}$$

Kui $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ on mingi väärtustus, siis

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\beta) = v &\Leftrightarrow \neg\mathcal{A}(\beta) = t \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists i \in \{1, \ldots, m\}\ ((\neg X_1^{\alpha_{i1}} \wedge \ldots \wedge \neg X_n^{\alpha_{in}})(\beta) = t) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists i\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}\ (\neg X_j^{\alpha_{ij}}(\beta_j) = t) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists i\ \forall j\ \ (X_j^{\neg\alpha_{ij}}(\beta_j) = t) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists i\ \forall j\ \ (\beta_j = \neg\alpha_{ij}) \Leftrightarrow \exists i\ \forall j\ \ (\alpha_{ij} = \neg\beta_j).
\end{aligned}
$$

Toodud arutelu ütleb, et valemi täieliku konjunktiivse normaalkuju (5) kirjapanekuks tuleb leida need väärtustused, millel valem on väär, võtta nende väärtustuste eitused (komponentide kaupa), mida siis kasutada valemis (5). Loomulikult on võimalik lähtuda valemi täielikust disjunktiivsest normaalkujust (3), mis annab kohe väärtustused, kus valem on tõene. Need väärtustused, kus valem on väär, on siis täiend hulgas $\{t, v\}^n$. Arusaadavalt on see protsess pööratav, s.t. täielikust konjunktiivsest normaalkujust (5) lähtudes saab leida väärtustused, kus valem on väär, misjärel täiendväärtustused lubavad välja kirjutada täieliku disjunktiivse normaalkuju.

Näide. Valem $\mathcal{A}(X, Y) = X \wedge Y \vee \neg X \wedge \neg Y$ on täielikul disjunktiivsel normaalkujul. Ta on tõene väärtustustel (t, t) ja (v, v) ning väär väärtustustel (t, v) ja (v, t). Viimaste eitused komponentide kaupa on (v, t) ja (t, v) ning valemi täielik konjuktiivne normaalkuju seega $(X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y)$.

Valemil eksisteerib täielik konjunktiivne normaalkuju parajasti siis, kui ta on mingil väärtustusel väär ehk parajasti siis, kui ta on kummutatav. Meenutades veel varemväidetut, võime öelda, et valemil, mis ei ole samaselt tõene ega samaselt väär, on olemas mõlemad, nii täielik disjunktiivne kui ka täielik konjunktiivne normaalkuju. Samaselt tõesel valemil on aga ainult täielik disjunktiivne normaalkuju, samaselt vääral valemil ainult täielik konjunktiivne normaalkuju.

Märgime veel, et nii disjunktiivne kui ka konjunktiivne normaalkuju on igal valemil: samaselt väära valemi disjunktiivne normaalkuju on näiteks $X_1 \wedge \neg X_1 \vee \ldots \vee X_n \wedge \neg X_n$, samaselt tõese valemi konjunktiivne normaalkuju on näiteks $(X_1 \vee \neg X_1) \wedge \ldots \wedge (X_n \vee \neg X_n)$.

Nüüd on väga lihtne vastata eespool püstitatud küsimusele, kas iga funktsioon $f\colon \{t, v\}^n \to \{t, v\}$ on tekitatud mingi valemi poolt? Tarvitseb ainult võtta $\{t, v\}^n$ elemendid, millel f väärtuseks on t, ja kirjutada välja valemi täielik disjunktiivne normaalkuju, või duaalselt, need $\{t, v\}^n$ elemendid, millel f väärtus on v, lubavad leida valemi täieliku konjunktiivse normaalkuju.

3. Täielikule disjunktiivsele normaalkujule teisendamine. Valemi täieliku disjunktiivse normaalkuju leidmiseks võib moodustada tema tõeväärtustabeli ja kasutada neid väärtustusi, millel valem on tõene. Teine võimalus on kasutada loogiliselt samaväärseid valemeid, minnes implikatsioonidelt ja ekvivalentsidelt üle konjunktsioonidele ning lõpetades täieliku normaalkujuga. Selle teisendamise loomulik järjekord on järgmine (ühtlasi vaatleme näitena valemi $(X \sim Y) \Rightarrow Z$ teisendamist):

1) asendame valemis esinevad implikatsioonid ja ekvivalentsid samaväärsuste 8c või 8b ja 10b alusel:

$$\begin{aligned}(X \sim Y) \Rightarrow Z &\equiv X \wedge Y \vee \urcorner X \wedge \urcorner Y \Rightarrow Z \equiv \\ &\equiv \urcorner(X \wedge Y \vee \urcorner X \wedge \urcorner Y) \vee Z \equiv\end{aligned}$$

2) viime eitused 7a ja 7b kasutades vahetult muutujate ette ning samaväärsuse 1 põhjal jätame ära kahekordsed eitused:

$$\begin{aligned}&\equiv \urcorner(X \wedge Y) \wedge \urcorner(\urcorner X \wedge \urcorner Y) \vee Z \equiv \\ &\equiv (\urcorner X \vee \urcorner Y) \wedge (\urcorner\urcorner X \vee \urcorner\urcorner Y) \vee Z \equiv \\ &\equiv (\urcorner X \vee \urcorner Y) \wedge (X \vee Y) \vee Z \equiv\end{aligned}$$

3) asendame disjunktsioonide konjunktsioonid distributiivsust 4a kasutades konjunktsioonide disjunktsioonidega:

$$\begin{aligned}&\equiv \urcorner X \wedge (X \vee Y) \vee \urcorner Y \wedge (X \vee Y) \vee Z \equiv \\ &\equiv \urcorner X \wedge X \vee \urcorner X \wedge Y \vee \urcorner Y \wedge X \vee \urcorner Y \wedge Y \vee Z \equiv\end{aligned}$$

4) kui esineb samaselt vääraid konjunktsioone, s.t. esinevad samaaegselt X_i ja $\urcorner X_i$, siis võime need ära jätta (kui esinevad ainult samaselt väärad konjunktsioonid, siis valem on samaselt väär ja samaväärne valemiga v), võrdsetest konjunktsioonidest jätame alles ainult ühe:

$$\equiv \urcorner X \wedge Y \vee \urcorner Y \wedge X \vee Z \equiv$$

5) täieliku disjunktiivse normaalkuju saamiseks tuleb iga lihtkonjunktsioon teha täielikuks: kui näiteks lihtkonjunktsioonis K puudub muutuja X, siis samaväärsusega

$$K \equiv K \wedge (X \vee \neg X) \equiv K \wedge X \vee K \wedge \neg X$$

oleme mõlemasse lihtkonjunktsiooni $K \wedge X$ ja $K \wedge \neg X$ lisanud muutuja X Vajadusel tuleb sellist võtet korrata ja lõpuks jätta omavahel võrdsetest täielikest lihtkonjunktsioonidest alles ainult üks:

$$\begin{aligned}
&\equiv \neg X \wedge Y \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge \neg Z \vee X \wedge \neg Y \wedge Z \vee \\
&\quad \vee X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \vee X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge \neg Y \wedge Z \vee \\
&\quad \vee \neg X \wedge Y \wedge Z \vee \neg X \wedge \neg Y \wedge Z \equiv \\
&\equiv X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge \neg Y \wedge Z \vee X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \vee \\
&\quad \vee \neg X \wedge Y \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge \neg Z \vee \neg X \wedge \neg Y \wedge Z
\end{aligned}$$

Saadud täielikust disjunktiivsest normaalkujust võib välja lugeda ka väärtustused, millel valem on tõene: (t,t,t), (t,v,t), (t,v,v), (v,t,t), (v,t,v), (v,v,t). Muidugi saab ka 4. etapi lõpuks leitud disjunktiivsest normaalkujust lähtudes leida need väärtustused, millel valem on tõene, lisades seal esinenud muutujatele vastavatele tõeväärtustele kõikvõimalikud puuduvate muutujate tõeväärtuste kombinatsioonid. Näiteks lihtkonjunktsioon Z määrab 4 väärtustust (t,t,t), (t,v,t), (v,t,t), (v,v,t), millel valem on tõene.

Äsjavaadeldud teisendamise mõttekust iseloomustab

Näide. Kui valemis on 20 muutujat, siis väärtustusi on $2^{20} = 1024^2 \approx 10^6$ Tõeväärtustabel, mille igal leheküljel on 50 väärtustust, sisaldab 20 000 lehekülge. Igal väärtustusel tuleb valemi tõeväärtuse leidmiseks teha vähemalt 19 tehet (niipalju on minimaalselt valemis tehtemärke). Samal ajal ei ole eriti raske ette kujutada teisendamise eri etappidel tehtavate asenduste arvu (sisuliselt piisab esimesest neljast etapist). Praktikas ei ole muutujate arv 20 sugugi suur, näiteks elektroonikaskeemid, mida saab kirjeldada lausearvutuse valemitega, võivad sisaldada märksa rohkem muutuvaid elemente.

Ülesanded. 1. Leida kolme muutuja valem, mis on tõene parajasti siis, kui kaks muutujat on väärad.

2. Leida kolme muutuja valem, mis on sama tõeväärtusega kui enamus muutujaid.

3. Olgu valem täielikul konjunktiivsel normaalkujul. Moodustame kõigi sinna mittekuuluvate täielike lihtdisjunktsioonide konjunktsiooni, seejärel asendame kõik tehted $\wedge$ tehtega $\vee$, tehted $\vee$ tehtega $\wedge$, muutujad X_i muutujatega $\urcorner X_i$ ja muutujad $\urcorner X_i$ muutujatega X_i. Tõestada, et saadud valem on esialgse valemi täielik disjunktiivne normaalkuju.

4.* Tõestada, et muutujatega $X_1, \ldots, X_n$ valem on samaväärne valemiga, mis kasutab ainult tehtemärke $\wedge$, $\vee$ ja $\Rightarrow$, parajasti siis, kui tema täielik konjunktiivne normaalkuju ei sisalda liiget $\urcorner X_1 \vee \ldots \vee \urcorner X_n$.

5.* Tõestada, et valem, mis kasutab tehetena ainult ekvivalentsi ning ei kasuta tõeväärtust v, on samaselt tõene parajasti siis, kui iga muutuja esineb valemis paarisarv kordi.

6.* Tõestada, et valem, mis kasutab tehetena ainult ekvivalentsi ja eitust ning ei kasuta tõeväärtust v, on samaselt tõene parajasti siis, kui iga muutuja ja eitus esinevad valemis paarisarv kordi.

§16. Järeldumine lausearvutuses

Olgu $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ ja $\mathcal{B}$ valemid ning $X_1, \ldots, X_m$ nende ühendmuutujad

Definitsioon. Öeldakse, et valemitest $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ järeldub valem $\mathcal{B}$, kui iga $\alpha \in \{t, v\}^m$ korral, kus $\mathcal{A}_i(\alpha) = t$, $i = 1, \ldots, n$, kehtib $\mathcal{B}(\alpha) = t$. Defineeritud järeldumist tähistame $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}$.

Märgime, et, nagu varemgi, võib igaüks valemitest $\mathcal{A}_i$ ja $\mathcal{B}$ kasutada väärtustusest α ainult osa komponente.

Teoreem. Valemitest $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ järeldub valem $\mathcal{B}$ parajasti siis, kui valem $\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$ on samaselt tõene.

Tõestuseks on samaväärsuste ahel:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B} \text{ on samaselt tõene } \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \forall \alpha \in \{t, v\}^m \ ((\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B})(\alpha) = t) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \forall \alpha \ ((\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n)(\alpha) = v \vee \mathcal{B}(\alpha) = t) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \forall \alpha \ (\text{kui } (\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n)(\alpha) = t, \text{ siis } \mathcal{B}(\alpha) = t) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \forall \alpha \ (\text{kui } \mathcal{A}_i(\alpha) = t,\ i = 1, \ldots, n, \text{ siis } \mathcal{B}(\alpha) = t) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}.
\end{aligned}
$$

Teoreemist järeldub, et antud valemite $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ ja $\mathcal{B}$ korral saab lõpliku arvu lausearvutuse tehetega kindlaks teha, kas $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \vdash \mathcal{B}$ või mitte (lõpliku arvu tehetega saab koostada valemi $\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$ tõeväärtustabeli). Muidugi võib leida ka valemi $\mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n \Rightarrow \mathcal{B}$ disjunktiivse normaalkuju, mis nõuab lõpliku arvu samaväärsuste kasutamist teisendamisel.

Järeldamine ei ole tehe, vaid on seos valemite hulgas, täpsemalt, kui meil on vaatluse all mingi valemite hulk $\mathfrak{X}$, siis $\vdash$ on seos hulkade $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{X}^2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{X}^i$ ja $\mathfrak{X}$ vahel.

Näited. 1. Kas $X \Rightarrow Y, Y \Rightarrow X \vdash X \sim Y$?

2. Kas $X \Rightarrow Y \vdash Y \Rightarrow X$?

Vastused saame tõeväärtustabelist

X	Y	$X \Rightarrow Y$	$Y \Rightarrow X$	$(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$	$X \sim Y$	$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$
t	t	t	t	t	t	t
t	v	v	t	v	v	t
v	t	t	v	v	v	v
v	v	t	t	t	t	t

Kahe eelviimase tulba ühtimine annab, et $(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X) \Rightarrow (X \sim Y)$ on samaselt tõene ning näite 1 küsimuse vastus on jaatav, viimane tulp aga ütleb, et näite 2 küsimuse vastus on eitav.

Kirjandus

1. K. Ciesielski, Set Theory for the Working Mathematician, Cambridge University Press, 1997

2. J. Gabovitš, Arvudeta matemaatika, Tln., 1968.

3. A. Monakov-Rogozkin, P Normak, A. Levin, Hulgateooria ja loogika elemente. Põhimõisted ja ülesanded. Tln., 1986.

4. M. Kilp, U. Nummert, Hulgateooria elemendid, Tartu, 1994.

5. I. Kull, Matemaatiline loogika, Tln., 1964.

6. P Oja, Hulgateooria, Tartu, 1995.

7 R. Prank, Matemaatiline loogika ja diskreetne matemaatika, Tartu, I 1978, II 1978, III 1983.

8. T. Tamme, T. Tammet, R. Prank, Loogika, mõtlemisest tõestamiseni, Tartu, 1997

9. N. Vilenkin, Jutustusi hulkadest, Tln., 1968.

10. П. С. Александров, Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977

11. Н. Вурбаки, Теория множеств, М., 1965.

12. П. Дж. Коэн, Теория множеств и континуум – гипотеза, М., 1969.

13. К. Куратовский, А. Мостовский, Теория множеств, М., 1970.

14. И. А. Лавров, Л. Л. Максимова, Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, М., 1975.

15. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.-Л., 1937

16. Ю. А. Шиханович, Введение в современную математику, М., 1965.

Aineregister

Alamhulk e. osahulk 6
alef-null 50
alfabeetiline järjestus 54, 56
algebraline arv 44
antisümmeetriline seos 28
asendus e. substitutsioon 76

Bijektiivne funktsioon e. bijektsioon 19

Cantor–Bernsteini teoreem 45
Cantori teoreem algebraliste arvude hulga loenduvusest 44
— — osahulkade hulga võimsusest 49

De Morgani valemid 12
diagonaalprotsess 48
disjunktiivne normaalkuju 83
disjunktsioon 73

Eeljärjestus 57
eelnev element 53
eitus 73
ekvivalents 73
ekvivalentsed hulgad 38
ekvivalentsiklass 34
ekvivalentsusseos 31
elemendi kujutis 16
— originaal 16
element 4
elementaardisjunktsioon e. lihtdisjunktsioon 82
elementaarkonjunktsioon e. lihtkonjunktsioon 82
esimene e. vähim element 56

Faktorhulk 36
funktsionaalne seos 27
funktsioon e. operaator e. kujutus e. teisendus 15
funktsiooni graafik 19
— määramispiirkond 16
— tuum 37
— väärtuste piirkond 17
funktsioonide faktoriseerimisteoreem 37

— korrutis e. kompositsioon 20

Hulga karakteristlik funktsioon 24
— kate 58
— kujutis 16
— kõigi osahulkade hulk e. potentshulk 6, 24
— originaal 17
— täiend 11
— võimsus 50
— — ei ületa teise hulga võimsust 45
— — on väiksem (suurem) teise hulga võimsusest 48
hulk 4
hulkade ekvivalentsus 38
— otsekorrutis e. Descartes'i korrutis 13, 14
— sümmeetriline vahe 10
— vahe 10
— ühend e. summa 7, 9
— ühisosa e. lõige 7, 9

Identsusteisendus e. samasusteisendus 16
implikatsioon 73
injektiivne funktsioon e. injektsioon 18
intervall 5

Jada 16
järgnev element 53
järjestusseos e. järjestus 53
järjestust säilitav bijektsioon 61
järjestustüüp 62
järjestustüüpide korrutis 65
— summa 64, 65

Kanooniline kujutus 36
kardinaalarv 50
kehtestatav valem 76
klassijaotus 32
kompleksarvude hulk 5
konjunktiivne normaalkuju 84
konjunktsioon 73
konstantne funktsioon 16
kontiinum 50
kontiinumi hüpotees 51

— probleem 51
— võimsus 50
kujutus e. funktsioon 15
kummutatav valem 76
Kuratowski – Zorni lemma 59
kvaasijärjestatud hulk 57
kvaasijärjestus 57

Lause 72
lausearvutuse valem 74
lausemuutujad 74
leksikograafiline järjestus 54, 56
lihtdisjunktsioon e. elementaardisjunktsioon 82
lihtkonjunktsioon e. elementaarkonjunktsioon 82
liitfunktsioon 21
lineaarselt järjestatud hulk 54
loenduv hulk 41
— ordinaalarv 63
loogiliselt samaväärsed valemid 78
lõik 5
lõplik hulk 6
lõpmatu hulk 7

Maksimaalne element 56
minimaalne element 56
mittevasturääkivuse seadus 72

Naturaalarvude hulk 5

Operaator e. funktsioon 15
ordinaalarv 63
ordinaalarvude järjestus 67
osahulk e. alamhulk 6
osaliselt järjestatud hulk 54
osavalem 81

Parempoolne pöördfunktsioon 23
pealekujutus e. sürjektsioon 19
pere e. üldistatud jada 58
poollõik 5
projekteerimisteisendus e. projektor 15
pööratav funktsioon 22

pöördfunktsioon 22
pöördseos 28

Range järjestuse seos 53
ratsionaalarvude hulk 5
reaalarvude hulk 5
refleksiivne seos 27

Sama järjestustüüpi hulgad 62
— võimsusega hulgad 38
samaselt tõene valem 75
samaselt väär valem 76
samasusteisendus e. identsusteisendus 16
sarnased e. sarnaselt järjestatud hulgad 61
sarnasusteisendus 61
segment 66
seos 26
seoste korrutis 29
sisalduvusjärjestus 55
substitutsioon e. asendus 16, 76
substitutsiooniteoreem 77
suunatud hulk 58
suurim e. viimane element 56
sõna 43, 55
sümmeetriline seos 27
sürjektiivne funktsioon e. sürjektsioon 19

Tehete tugevusjärjekord 74
teisendus e. funktsioon 15
transitiivne seos 28
triviaalne järjestus 55
tõeväärtus 72
tõeväärtustabel 75
tähestik 43, 55
täielik disjunktiivne normaalkuju 83
täielik lihtdisjunktsioon 82
täielik lihtkonjunktsioon 82
täielikult järjestatud hulk 61
täisarvude hulk 5
tühi hulk 6

Universaalne hulk 11

Vahemik 5
valem e. lausearvutuse valem 74
valemite järeldumine 88
valemite substitutsioon 76
vasakpoolne pöördfunktsioon 23
Venni diagramm 7
viimane e. suurim element 56
võimsuste võrreldavus 52, 71
vähim e. esimene element 56
välistatud kolmanda seadus 72
väärtustus 75

Üksühene funktsioon e. injektsioon 18
— vastavus e. bijektsioon 19
üldistatud jada e. pere 58
ülemine tõke 58

Zermelo teoreem 69

Sisukord

	Eessõna	3
§ 1.	Hulga mõiste	4
§ 2.	Osahulk ehk alamhulk	6
§ 3.	Tehted hulkadega	7
§ 4.	Hulkade otsekorrutis	13
§ 5.	Funktsioonid	15
§ 6.	Hulga karakteristlik funktsioon	24
§ 7	Seosed	26
§ 8.	Ekvivalentsusseos ja klassijaotus	31
§ 9.	Faktorhulk, kanooniline kujutus ja funktsioonide faktoriseerimine	36
§ 10.	Hulga võimsus	38
	1. Võrdse võimsusega hulgad	38
	2. Loenduvad hulgad	41
	3. Cantor – Bernsteini teoreem	45
	4. Võimsuste hierarhia	48
§ 11.	Järjestatud hulgad	53
	1. Osaliselt ja lineaarselt järjestatud hulgad	53
	2. Kuratowski – Zorni lemma	58
	3. Täielikult järjestatud hulgad ja ordinaalarvud	61
	4. Zermelo teoreem	69
§ 12.	Lausearvutuse põhimõisted	72
§ 13.	Substitutsioon	76
§ 14.	Loogiliselt samaväärsed valemid	78
§ 15.	Disjunktiivne normaalkuju	81
	1. Disjunktiivne normaalkuju ja selle täielikkus	82
	2. Seos täieliku konjunktiivse normaalkujuga	84
	3. Täielikule disjunktiivsele normaalkujule teisendamine	86
§ 16.	Järeldumine lausearvutuses	88
	Kirjandus	90
	Aineregister	91