ABHANDLUNGEN DER HERDER-GESELLSCHAFT UND
DES HERDER-INSTITUTS ZU RIGA
FÜNFTER BAND Nr. 6

ERIK SVENSON

BEITRÄGE ZUR THEORIE GEWISSER INTEGRALTYPEN

VERLAG DER AKT.-GES. »ERNST PLATES«
RIGA 1936

ABHANDLUNGEN DER HERDER-GESELLSCHAFT UND
DES HERDER-INSTITUTS ZU RIGA
FÜNFTER BAND Nr. 6

ERIK SVENSON

BEITRÄGE ZUR THEORIE GEWISSER INTEGRALTYPEN

VERLAG DER AKT.-GES. »ERNST PLATES«
RIGA 1936

ERNST PLATES RIGA
M. Monētu ielā 18

Einleitung.

Vorliegende Arbeit ist eine Fortführung einer Untersuchung, die der Verfasser unter gleichem Titel im Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 170 (1934), S. 179 ff, veröffentlicht hat[1]. Behandelt werden die Eigenschaften gewisser Integraltypen, die vornehmlich von Hellinger in die mathematische Literatur eingeführt worden sind.

In der Einleitung seien hier der selbständigen Lesbarkeit wegen die Ergebnisse der erwähnten Untersuchung zusammengestellt, sowie die ihr als Grundlage dienenden Hauptresultate der einschlägigen Arbeiten von Hellinger[2] und Hahn[3] nochmals angeführt.

Ergebnisse von Hellinger.

Definition des Grundintegrales. Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei im Intervall (a, b) eindeutige, stetige Funktionen, $g(x)$ ausserdem monoton wachsend[4]. Existiert dann in diesem Intervall der im Sinne eines bestimmten Integrales zu verstehende Grenzwert $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\frac{\Delta f^2}{\Delta g}$, so wird er als Integral $\int\limits_a^b\frac{df^2}{dg}$ bezeichnet[5].

---

[1]) Weiterhin zitiert mit „Beiträge 1".

[2]) Hellinger, Dissertation, Göttingen 1907, zitiert mit „Hlg. Diss."

[3]) Hahn, Über die Integrale des Herrn Hellinger usw., Monatshefte für Math. u. Phys. 23 (1912), S. 161.

[4]) Im folgenden wird unter monoton immer monoton wachsend verstanden.

[5]) Δf^2 bzw. df^2 soll stets $(\Delta f)^2$ bzw. $(df)^2$ bedeuten.

Eventuelle Konstanzintervalle $\Delta g = 0$, in denen auch $\Delta f = 0$ sein muss, sind im Integral nicht zu berücksichtigen. Es kann ihrer höchstens abzählbar unendlich viele geben.

Die Summen nähern sich dem Grenzwert $\int\limits_a^b \frac{df^2}{dg}$ von unten her, weil bei der Intervallunterteilung die Summe $\sum \frac{\Delta f^2}{\Delta g}$ nicht abnimmt.

Sind $f(x)$ und $g(x)$ stetig differenzierbar, so geht das Integral in ein gewöhnliches Riemannsches Integral über:

$$\int\limits_a^b \frac{df^2}{dg} = \int\limits_a^b \frac{f'^2(x)}{g'(x)}\,dx.$$

Dieser Integraltypus besitzt folgende grundlegende Eigenschaften.

a) Das Integral $\int\limits_a^b \frac{df^2}{dg}$ existiert im ganzen Intervall (a, b) und in jedem Teilintervall, wenn es eine weitere eindeutige, stetige, monotone Funktion $\varphi(x)$ derart gibt, dass für jedes Teilintervall Δ von (a, b) die Ungleichung $\Delta f^2 \leqq \Delta g \Delta \varphi$ gilt; es ist dann $\int\limits_\Delta \frac{df^2}{dg} \leqq \Delta\varphi$ [6]).

Umgekehrt: Existiert das Integral, so ist es eine stetige, monotone Funktion der oberen Grenze, $\int\limits_a^x \frac{df^2}{dg} = h(x) - h(a)$, und es gilt $\Delta f^2 \leqq \Delta g\, \Delta h$, wobei $h(x)$ die am langsamsten wachsende Funktion ist, die dieser Beziehung genügt: $\Delta h \leqq \Delta\varphi$. $f(x)$ ist notwendig von beschränkter Schwankung.

b) Existiert das Integral nicht, so wächst der Wert der Summe bei immer feiner werdender Intervallunter-

---

[6]) Siehe Hlg. Diss., S. 26f.

teilung über alle Grenzen, unabhängig von der Art der Unterteilung. Formal kann man also auch in diesem Falle das Integral einführen, indem man setzt

$$\int_a^b \frac{df^2}{dg} = \infty\,.\text{[7]}$$

c) Es ist $\int_a^x \frac{df^2}{dg} = 0$ identisch in x dann und nur dann, wenn $f(x)$ konstant ist.[8]).

Der Einfachheit halber kann die untere Grenze des Integrales gleich Null gesetzt werden, ebenso $h(0) = 0$; man kann auch $g(0) = 0$ und $f(0) = 0$ annehmen, da es auf konstante Zusatzglieder nicht ankommt.

Zusammen mit $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ existiert wegen $\Delta f^2 \leqq \leqq \Delta g \Delta h$ auch $\int_0^x \frac{df^2}{dh} \leqq g(x)$; indessen kann hier im allgemeinen auch das Ungleichheitszeichen stehen. Besteht Gleichheit, so soll das Integral $\int_0^x \frac{df^2}{dg}$ *umkehrbar* heissen. Sind die Funktionen stetig differenzierbar, so ist das Integral umkehrbar. Ein erstes Beispiel eines nicht umkehrbaren Integrales gibt Hellinger in der Funktion $J(x)$.[9])

d) Damit $h(x)$ durch ein Integral eines Quadrates mit dem Nenner $g(x)$ dargestellt werden kann, also $h(x) = \int_0^x \frac{df^2}{dg}$ gilt, wobei $g(x)$ und $h(x)$ stetig und monoton

---

[7]) Diesen Zusatz kann man dem Beweise des Existenzsatzes a) von Hellinger entnehmen.

[8]) Denn, wenn für jedes Δ $\frac{\Delta f^2}{\Delta g} \leqq \int_\Delta \frac{df^2}{dg} = 0$ gilt, so folgt $\Delta f = 0$.

[9]) Siehe Hlg. Diss., S. 36.

sind, ist notwendig und hinreichend, dass *jeder Nullmenge der g-Achse durch die Beziehungen* $g = g(x)$, $h = h(x)$ *eine Nullmenge der h-Achse entspricht.*[10]

Da im folgenden letztere Verknüpfung der beiden stetigen, monotonen Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ eine grosse Rolle spielt, werde sie kurz als die $0(g) \to 0(h)$ Aussage bezeichnet. Man beachte ihre Unsymmetrie; dagegen ist sie reflexiv und transitiv.

Damit $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ umkehrbar ist, ist notwendig und hinreichend, dass auch die umgekehrte Aussage $0(h) \to 0(g)$ gilt.

e) Die Beziehung $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ ist bei gegebenen $g(x)$ und $h(x)$ stets in bezug auf die Funktion $f(x)$ auflösbar; als *monotone* Funktion ist $f(x)$ bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.[11] Die ausdrückliche Auflösung siehe unter g).

f) Falls $\int_a^b \frac{df^2}{dg}$ und $\int_a^b \frac{df_1^2}{dg}$ existieren, so existiert in demselben Sinn auch der anschliessende Integraltypus $\int_a^b \frac{df\,df_1}{dg}$ und es besteht für jedes Teilintervall Δ die Beziehung

$$\left(\int_\Delta \frac{df\,df_1}{dg}\right)^2 \leqq \int_\Delta \frac{df^2}{dg} \cdot \int_\Delta \frac{df_1^2}{dg},$$

die man als ein Analogon zur bekannten Schwarzschen Ungleichung im Gebiet der Hellingerschen Integrale bezeichnen kann. Aus ihr folgt, dass $\int_a^x \frac{df\,df_1}{dg}$ eine ste-

[10] Siehe Hlg. Diss., S. 50.

[11] Siehe Hlg. Diss., S. 34f.

tige Funktion von beschränkter Schwankung der oberen Grenze ist.

Ferner existiert das Integral $\int_a^b \frac{d(f+f_1)^2}{dg}$ und es gelten die Beziehungen $\int_a^b \frac{d(f+f_1)^2}{dg} = \int_a^b \frac{df^2}{dg} + 2\int_a^b \frac{df df_1}{dg} + \int_a^b \frac{df_1^{\,2}}{dg}$, $\int_a^b \frac{df df_1}{dg} + \int_a^b \frac{df df_2}{dg} = \int_a^b \frac{df d(f_1+f_2)}{dg}$, die sich auf beliebig viele Summanden verallgemeinern lassen (natürlich unter der Voraussetzung der Existenz der entsprechenden Quadratintegrale).

Ist endlich $u(x)$ eine beliebige im Intervall (a, b) stetige Funktion, so existiert im gleichen Sinn auch $\lim\limits_{\Delta\to 0} \sum u(\xi) \frac{\Delta f \Delta f_1}{\Delta g} = \int_a^b u \frac{df df_1}{dg}$, wobei ξ irgend eine beliebige Stelle des abgeschlossenen Intervalles Δ bedeutet.[12])

D e f i n i t i o n d e s U m k e h r i n t e g r a l e s (von H i l b e r t angegeben).[13]) Bedeuten $g(x)$ und $h(x)$ zwei im Intervall (a, b) stetige, monotone Funktionen, so existiert stets der integralartige Grenzwert $\lim\limits_{\Delta\to 0} \sum \sqrt{\Delta g \Delta h} = \int_a^b \sqrt{dg dh}$, entsprechend auch in jedem Teilintervall.

Da bei der Intervallunterteilung $\sqrt{\Delta g \Delta h}$ nicht zunimmt, so nähern sich die Summen dem Grenzwert von oben her. Bezeichnet man $\int_0^x \sqrt{dg dh} = \varphi(x)$, so gilt $\Delta\varphi \leqq \Delta g\, \Delta h$. Daher ist die monotone Funktion $\varphi(x)$ stetig und von beschränkter Schwankung. Sie ist die

---

[12]) Siehe Hlg. Diss., S. 30 und Journ. reine angew. Math. 136 (1909), S. 237 f.

[13]) Siehe Hlg. Diss., S. 31 f.

am schnellsten wachsende monotone Funktion, die dieser Beziehung genügt.

Sind $g(x)$ und $h(x)$ stetig differenzierbar, so geht das Integral in ein Riemannsches über $\int_0^x \sqrt{dg\,dh} =$
$= \int_0^x \sqrt{g'(x)\,h'(x)}\,dx$.

g) Ist $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ gegeben und $f(x)$ eine monotone Funktion, so kann man diese Gleichung in bezug auf $f(x)$ in folgender Art auflösen: $f(x) = \int_0^x \sqrt{dg\,dh}$, wobei die frei bleibende Konstante zur Normierung dient.[14]

Ist $f(x)$ nicht monoton, so gilt $f(x) = \int_0^x sgn\,df \sqrt{dg\,dh}$, wo der Grenzprozess so zu verstehen ist, dass jeder Wurzel das Vorzeichen von Δf im betreffenden Intervall gegeben werden soll. Auch ein solches erweitertes Integral ist eine stetige Funktion von beschränkter Schwankung der oberen Grenze.

Umgekehrt: Ist $\int_0^x \sqrt{dg\,dh} = f(x)$ gegeben, so kann man daraus die Funktion $h(x)$ berechnen, aber nur, wenn die $0(g) \rightarrow 0(h)$ Aussage gilt (das hängt damit zusammen, dass das Grundintegral nur unter gewissen Voraussetzungen existiert, das Umkehrintegral aber stets). Es ist dann
$h(x) = \int_0^x \frac{df^2}{dg}$.[15]

h) Es besteht die Beziehung

$$\int_0^x sgn\,df \,.\, sgn\,df_1 \sqrt{d\int_0^x \frac{df^2}{dg} \,.\, d\int_0^x \frac{df_1^2}{dg}} = \int_0^x \frac{df\,df_1}{dg}.$$[16]

---

[14]) Siehe Hlg. Diss., S. 34 f.; vgl. hierzu auch Satz e).

[15]) Siehe Hlg. Diss., S. 42 u. 50.

[16]) Siehe Hlg. Diss., S. 35; vgl. hierzu auch weiter unten bei den Ergänzungen Fl (3).

Ergebnisse von Hahn.

Hahn führt mit Hilfe der Substitution $x = x(g)$ den Hellingerschen Integraltypus auf ein Lebesguesches Integral zurück. Es zeigt sich, dass die höheren Hilfsmittel der allgemeinen Theorie dieser Integrale zur Behandlung der Hellingerschen Integrale gut geeignet sind, dass aber andererseits letztere eine Sonderstellung einnehmen, die eine besondere Untersuchung gerechtfertigt erscheinen lässt.

Gegenüber jeder eindeutigen, stetigen, monotonen Substitution $x = x(y)$ [mit $x(0) = 0$] ist das Integral $\int\limits_0^x \frac{df^2}{dg}$ invariant, insbesondere auch gegenüber $x = x(g)$, obgleich diese Substitution abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen entsprechend den Konstanzintervallen von $g(x)$ haben kann:

$$\int\limits_0^x \frac{df^2}{dg} = \int\limits_0^y \frac{df^2}{dg} = \int\limits_0^g \frac{df^2}{dg}.$$ [17])

i) Damit $\int\limits_a^b \frac{df^2}{dg}$ existiere, ist notwendig und hinreichend, dass $f(g)$ das unbestimmte Integral einer in dem (a, b) auf der g-Achse entsprechenden Intervalle (A, B) samt ihrem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrierbaren [18]) Funktion $\varphi(g)$ sei. Abgesehen von einer Nullmenge hat man dann in (A, B) $f'(g) = \varphi(g)$, und es ist

---

[17]) Um im folgenden die Schreibweise zu vereinfachen, wird hier, wie auch sonst gegebenenfalls üblich, bei Wechsel des Argumentes das Funktionszeichen nicht gewechselt, also z. B. $h(x) = h[x(g)] = h(g)$ geschrieben. Deswegen ist zu beachten, dass das Funktionssymbol je nach dem Argument eine verschiedene Bedeutung hat, sich aber auf dieselbe veränderliche Grösse bezieht.

[18]) Alle in gewöhnlicher Form fernerhin angegebenen Integrale sind im Lebesgueschen Sinne zu verstehen.

$$\int_a^b \frac{df^2}{dg} = \int_A^B f'^2(g)dg.$$ [19]

k) Desgleichen gilt, falls die Funktionen $f(g)$ und $f_1(g)$ den vorhin angegebenen Bedingungen genügen,

$$\int_a^b \frac{df\,df_1}{dg} = \int_A^B f'(g)\,f_1'(g)\,dg, \quad \int_a^b u\,\frac{df\,df_1}{dg} = \int_A^B u(g)\,f'(g)\,f_1'(g)\,dg.$$ [20]

Danach sind $\int_A^g \frac{df^2}{dg}$, $\int_A^g \frac{df\,df_1}{dg}$ und $\int_A^g u\,\frac{df\,df_1}{dg}$ totalstetige Funktionen von g. Es sei hier noch die wichtige Bemerkung hinzugefügt, dass für stetige, monotone Funktionen $h(g)$ die drei Aussagen: 1) Totalstetigkeit, 2) $h(g)$ ist unbestimmtes Integral im Lebesgueschen Sinn und 3) $0(g) \to 0(h)$ gleichwertig sind. Ferner ist, damit zusammen mit $h(g)$ auch die Umkehrfunktion $g(h)$ totalstetig ist, notwendig und hinreichend, dass $h'(g)$ höchstens auf einer Nullmenge verschwindet.[21]

Ergebnisse des Verfassers.

Der erste Teil der eingangs erwähnten Untersuchung befasst sich des näheren mit der Frage nach der Umkehrbarkeit des Grundintegrales.

Zunächst möge hier folgender Sachverhalt angegeben werden, der sich mit den allereinfachsten Mitteln beweisen lässt.

I) Bildet man nach dem Prinzip $\int_0^x \frac{df^2}{dg_1} = g_2$, $\int_0^x \frac{df^2}{dg_2} = g_3$, $\int_0^x \frac{df^2}{dg_3} = g_4$ usw. eine Folge von monotonen Funktionen $g_1, g_2 \ldots$, so sind diese mit Ausnahme von g_1

---

[19]) Siehe Hahn, a. a. O., S. 172.

[20]) Siehe Hahn, a. a. O., S. 180 f.

[21]) Näheres darüber siehe Beiträge 1, S. 181 f., Hilfssätze 1 u. 3.

einander abwechselnd gleich: $g_2 = g_4 = \ldots$, $g_3 = g_5 = \ldots$, d. h. mit Ausnahme vom ersten sind alle Integrale umkehrbar. Mit anderen Worten: lässt sich eine Funktion $g(\mathrm{x})$ als Integral mit der Funktion $f(g)$ im Zähler darstellen, so liefert sie selbst ein umkehrbares Integral; es

gilt dann $$\int_0^{\mathrm{x}} \frac{df^2}{d\int_0^{\mathrm{x}} \frac{df^2}{dg}} = g(\mathrm{x}).$$

Man hat nämlich nach a) $\Delta f^2 \leqq \Delta g_1 \Delta g_2$,

$$\Delta f^2 \leqq \Delta g_2 \Delta g_3, \quad \Delta g_3 \leqq \Delta g_1,$$
$$\Delta f^2 \leqq \Delta g_3 \Delta g_4, \quad \Delta g_4 \leqq \Delta g_2,$$

folglich auch $\Delta f^2 \leqq \Delta g_1 \Delta g_4, \quad \Delta g_2 \leqq \Delta g_4.$

Damit ist $\Delta g_2 = \Delta g_4$, also $g_2 = g_4$ erwiesen. Das Weitere ergibt sich von selbst.

Man kann aber nicht beweisen, dass aus $g_2 = g_4$, d. h. aus $\int_0^{\mathrm{x}} \frac{df^2}{dg_1} = \int_0^{\mathrm{x}} \frac{df^2}{dg_3}$ auch $g_1 = g_3$ folgt. g_1 nimmt eine Ausnahmestellung ein.

Schon dieses einfache Resultat deutet auf die Nichtumkehrbarkeit des allgemeinen Grundintegrales hin. Die Frage nach der Existenz nicht umkehrbarer Integrale beantwortet Hellinger, wie erwähnt, durch Angabe eines solchen und durch die Aufstellung des oben angegebenen Satzes d).

Darüber hinaus bestehen diesbezüglich noch folgende Sätze.[22])

m) Existiert $\int_0^{\mathrm{x}} \frac{df^2}{dg} = h(\mathrm{x})$ und ist $f(\mathrm{x})$ monoton, so ist zur Umkehrbarkeit des Integrales notwendig und hinreichend, das $0(f) \to 0(g)$ gilt [ebensogut wie früher

[22]) Siehe Beiträge 1, S. 183 ff.

$0(h) \rightarrow 0(g)]$. Für $\int\limits_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ gilt bei monotonem $f(x)$ stets $0(f) \rightleftarrows 0(h)$.

n) Ist ein nicht umkehrbares Integral $\int\limits_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ vorgegeben, also $\int\limits_0^x \frac{df^2}{dh} = \chi(x) \neq g(x)$, so ist auf der Konstanzmenge[23]) der Funktion $h(g)$ auch $\chi'(g) = 0$, sonst aber fast überall in g[24]) $\chi'(g) = 1$. Für die Funktion $\chi(g)$ besteht ferner die Beziehung $\int\limits_0^x \frac{d\chi^2}{dg} = \chi(x)$; sie liefert also ein nicht umkehrbares Integral von besonders einfacher Art.

Auf Grund dieses Satzes lässt sich eine Methode zur Herstellung beliebiger nicht umkehrbarer Integrale angeben.[25]) Die Funktion $\chi(g)$ dient als Repräsentant einer Funktionsklasse, die solche Integrale liefert. Im wesentlichen gibt es keine weiteren derartigen Funktionen. Die Hellingersche Funktion $J(x)$ ist ein Sonderfall der Funktion $\chi(g)$. Sie, wie jede χ-Funktion, eignet sich ausserordentlich gut zur Angabe von Beispielen dessen, was im Gebiet der Hellingerschen Integrale überhaupt für Besonderheiten auftreten können.

Folgerung. Es gilt $\int\limits_0^x \frac{d\varphi^2}{d\chi} = \int\limits_0^x \frac{d\varphi^2}{dg}$ für jede Funktion $\varphi(x)$, für die das erste und folglich auch das zweite Integral existiert.

---

[23]) D. i. die grösste messbare Menge der g-Achse, der eine Nullmenge auf der h-Achse entspricht. Auf ihr ist $h'(g) = 0$. Siehe Beiträge 1, S. 182, Hilfssatz 2.

[24]) D. h. hier und im folgenden stets — im in Frage kommenden Intervall.

[25]) Siehe Beiträge 1, S. 185.

o) Damit $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ umkehrbar sei, ist notwendig und hinreichend, dass fast überall auf der g-Achse $\lim_{\Delta\to 0} \vartheta = 1$ ist, wo $\vartheta = \frac{\Delta f^2}{\Delta g \Delta h}$ gesetzt ist ($\vartheta \leqq 1$). Ist $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ nicht umkehrbar, so ist doch immerhin $\lim_{\Delta\to 0} \vartheta = 1$ fast überall auf die h-Achse.

p) Sind $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ und $\int_0^x \frac{df_1{}^2}{dg} = h_1(x)$ umkehrbar, so ist fast überall auf der g-Achse $\lim_{\Delta\to 0} \overline{\vartheta} = 1$ und $\lim_{\Delta\to 0} \vartheta' = 1$, wo $\overline{\vartheta} = \frac{\Delta f \Delta f_1}{\Delta g \Delta \rho}$, $\vartheta' = \frac{\Delta \rho^2}{\Delta h \Delta h_1}$ und $\rho(x) = \int_0^x \frac{df df_1}{dg}$ ist. Ist nur $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ umkehrbar, so ist doch $\lim_{\Delta\to 0} \overline{\vartheta} = 1$ und $\lim_{\Delta\to 0} \vartheta' = 1$ fast überall auf der h_1-Achse (bzw. umgekehrt).

q) Ist in $\rho(x) = \int_0^x \frac{df df_1}{dg}$ $f(x)$ monoton, so ist $\rho(f)$ totalstetig, und es gilt $\rho(f) = \int_0^f f_1'(g) df$.

Der zweite Teil der erwähnten Untersuchung befasst sich mit den durch Ineinanderschachtelung Hellinger-scher Integrale entstehenden neuartigen Integraltypen und ihren Eigenschaften. Es werden dabei folgende Sätze aufgestellt.

r) Es sei $\int_a^x \frac{df^2}{dg} = h(x) - h(a)$ und $\sigma(x)$ eine weitere in (a, b) definierte in bezug auf h totalstetige Funktion. Dann existiert folgendes Integral und hat den angegebenen Wert:

$$\int_a^x \frac{d\sigma df^2}{dh\,dg} = \int_A^g \sigma'(h) f'^2(g)\,dg = \sigma(x) - \sigma(a).$$

s) Falls $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$, $\int_0^x \frac{df_1{}^2}{dg} = h_1(x)$, $\int_0^x \frac{df df_1}{dg} = \rho(x)$ gegeben sind, so existieren die weiteren Integrale $\int_0^x \frac{d\rho^2}{dh} \leqq h_1(x)$ und $\int_0^x \frac{d\rho^2}{dh_1} \leqq h(x)$, und zwar ist unter der Voraussetzung der Umkehrbarkeit von $h(x)$ $\int_0^x \frac{d\rho^2}{dh} = h_1(x)$ und entsprechend bei derjenigen von $h_1(x)$ $\int_0^x \frac{d\rho^2}{dh_1} = h(x)$.

t) Es sei $\Delta f^2 \leqq \Delta g_1 \Delta g_2$ und es mögen die beiden Integrale $\int_0^x \frac{df_1{}^2}{dg_1}$, $\int_0^x \frac{df_2{}^2}{dg_2}$ existieren. Dann existieren auch die weiteren Integrale $\int_0^x \frac{df^2}{dg_1}$, $\int_0^x \frac{df^2}{dg_2}$, $\rho_1(x) = \int_0^x \frac{df df_1}{dg_1}$, $\rho_2(x) = \int_0^x \frac{df df_2}{dg_2}$, $\int_0^x \frac{d\rho_1{}^2}{dg_2}$, $\int_0^x \frac{d\rho_2{}^2}{dg_1}$, und es gilt die Beziehung

$$\int_0^x \frac{df_1 d\rho_2}{dg_1} = \int_0^x \frac{df_2 d\rho_1}{dg_2}\,{}^{26)}.$$

Unter denselben Voraussetzungen existiert auch der neue Integraltypus $\int_0^x \frac{df df_1 df_2}{dg_1\,dg_2}$, und es gilt

$$\int_0^x \frac{df df_1 df_2}{dg_1\,dg_2} = \int_0^x \frac{df_2 d\rho_1}{dg_2}.$$

---

[26]) Hierzu genügt auch, die Existenz der sechs Quadratintegrale vorauszusetzen.

Sonderfall. Es sei $g_1(x) = g(x)$, $g_2(x) = h(x)$, wo $h(x) = \int_0^x \frac{df^2}{dg}$ ist. Dann braucht man nur die Existenz der drei Quadratintegrale $\int_0^x \frac{df^2}{dg}$, $\int_0^x \frac{df_1^2}{dg}$, $\int_0^x \frac{df_2^2}{dh}$ vorauszusetzen und der Satz lautet ausführlich geschrieben

$$\int_0^x \frac{df_1\, d\int_0^x \frac{df\, df_2}{dh}}{dg} = \int_0^x \frac{df_2 d\int_0^x \frac{df\, df_1}{dg}}{dh} = \int_0^x \frac{df\, df_1\, df_2}{dg\, dh}.$$

Ergänzungen.

Als Illustration zu diesen Sätzen seien eine Reihe von Folgerungen und Beispielen hier angegeben.

Zur ersten Gruppe von Sätzen.

Damit $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ umkehrbar ist, ist hinreichend, aber nicht notwendig, dass $\int_0^x \frac{dg^2}{dh}$ existiert, denn dann ist $0(h) \to 0(g)$; gilt aber dieses, so braucht $\int_0^x \frac{dg^2}{dh}$ noch nicht zu existieren. Dazu muss ausser $g'(h)$ noch $g'^2(h)$ integrierbar sein und wenn $g'(h)$ nicht beschränkt ist, braucht das nicht von selbst der Fall zu sein.[27])

Beispiel. $\int_0^x \frac{d\chi^2}{dg} = \chi(x)$ ist nicht umkehrbar, also existiert $\int_0^x \frac{dg^2}{d\chi}$ nicht, d. h. nach b) gilt $\int_0^x \frac{dg^2}{d\chi} = \infty$.

---

[27]) Vgl. Schlesinger und Plessner, Lebesguesche Integrale, Bln. u. Lpz. 1926, S. 213.

Wenn $\int\limits_0^x \frac{df^2}{dg}$ existiert und umkehrbar ist, $f(x)$ monoton, so braucht $\int\limits_0^x \frac{dg^2}{df}$ aus demselben Grunde noch nicht zu existieren.

Beispiel. $y = x^2$ im Intervall (0,1). Hier ist $0(x) \rightleftarrows 0(y)$. Es existiert $\int\limits_0^x \frac{dy^2}{dx} = \frac{4}{3} x^3$, aber $\int\limits_0^x \frac{dx^2}{dy}$ existiert nicht, weil das auf $\int\limits_0^y \frac{dy}{y}$ führt. Dieses aber existiert sowohl als Riemannsches, wie auch als Lebesguesches Integral nicht.

Man kann Satz f) nicht umkehren. Wenn $\int\limits_a^b \frac{df\,df_1}{dg}$ existiert, so brauchen die Quadratintegrale noch nicht zu existieren, wie das Beispiel $\int\limits_0^x \frac{dg\,d\chi}{d\chi}$ lehrt.

Ist $\int\limits_a^x \frac{df\,df_1}{dg} = 0$ identisch in x und $\int\limits_0^x \frac{df^2}{dg}$ umkehrbar, so ist $f_1(x)$ konstant. Denn man hat zunächst nach k) fast überall in g $f'(g) f_1'(g) = 0$. $f'(g)$ kann wegen der Umkehrbarkeit des Integrales höchstens auf einer Nullmenge verschwinden (vgl. Satz d) und die Bemerkung auf Seite 10 oben. Mithin ist fast überall $f_1'(g) = 0$. Daraus folgt, weil $f_1(g)$ totalstetig ist, $f_1(g)$ = konst., also auch $f_1(x)$ = konst.

Sind beide Ausgangsintegrale nicht umkehrbar, so kann $\int\limits_0^x \frac{df\,df_1}{dg}$ identisch verschwinden, ohne dass $f(x)$ oder $f_1(x)$ konstant wären. Ein Beispiel siehe weiter unten bei Satz 4, Fl (16).

Kommen nicht totalstetige Funktionen vor, so können noch die verschiedensten Möglichkeiten eintreten, die von vorstehenden Sätzen abweichen. Beispielsweise ist die Funktion $g(\chi)$ nicht totalstetig, da $\chi'(g)=0$ auf einer Nichtnullmenge ist. Es existieren nun $\int_0^x \frac{dg\,d\chi}{d\chi} = g$ und $\int_0^\chi g'(\chi)\,\chi'(\chi)\,d\chi = \chi$, sind aber nicht einander gleich, oder: $\int_0^x \frac{dg\,d(g-\chi)}{d\chi}$ existiert nicht, aber $\int_0^\chi g'(g-\chi)'d\chi = 0$ wohl; beides entgegen Satz k). Für eine singuläre Funktion [28] $f(g)$ existiert sogar $\int_0^g f'^2(g)\,dg = 0$, aber $\int_0^g \frac{df^2}{dg}$ nicht.

Sind $\int_0^x \frac{df^2}{dg}$ und $\int_0^x \frac{df_1^2}{dg}$ umkehrbar, dabei $f(x)$ und $f_1(x)$ monoton, so ist auch $\int_0^x \frac{d(f+f_1)^2}{dg}$ umkehrbar. Denn es gilt $0(f) \rightleftarrows 0(g)$ und $0(f_1) \rightleftarrows 0(g)$, woraus $0(f+f_1) \rightleftarrows 0(g)$ folgt. Sind nämlich zwei Funktionen totalstetig, so ist es auch ihre Summe und andererseits folgt aus $f+f_1 \geqq f$ $0(f+f_1) \rightarrow 0(f)$, also gilt $0(f+f_1) \rightarrow 0(f) \rightarrow 0(g)$.

Für nicht monotone Funktionen gilt der Satz aber nicht. Ein Beispiel siehe später, im Anschluss an Fl (17).

Zur zweiten Gruppe von Sätzen.

Der Beweis des zweiten Teiles des Satzes t) wird geleistet durch Verwendung eines Zwischengliedes, das die Verbindung zwischen den beiden in Rede stehenden Integralen herstellt, d. h. ihnen beiden gleich ist. [29] Im

[28]) Näheres über singuläre Funktionen siehe S. 22.

[29]) Siehe Beiträge 1, S. 194.

Grunde genommen stellt dieses Zwischenglied einen neuen Integraltypus $\int_0^x \frac{df_2}{dg_2} \cdot sgn(df df_1) \sqrt{d\int_0^x \frac{df^2}{dg_1} \cdot d\int_0^x \frac{df_1^2}{dg_1}}$ dar, der durch Ineinanderschachtelung der beiden verschiedenartigen Grundtypen Hellingerscher Integrale entsteht. Somit gilt also bei den Voraussetzungen des Satzes t)

$$\int_0^x \frac{df_2}{dg_2} \cdot sgn(df df_1) \sqrt{d\int_0^x \frac{df^2}{dg_1} \cdot d\int_0^x \frac{df_1^2}{dg_1}} = \int_0^x \frac{df_2 \cdot d\int_0^x \frac{df df_1}{dg_1}}{dg_2} \tag{1}$$

und im Sonderfall $g_1(x) = g(x)$, $g_2(x) = \int_0^x \frac{df^2}{dg}$

$$\int_0^x \frac{df_2}{d\int_0^x \frac{df^2}{dg}} \cdot sgn(df df_1) \sqrt{d\int_0^x \frac{df^2}{dg} \cdot d\int_0^x \frac{df_1^2}{dg}} = \int_0^x \frac{df_2 \cdot d\int_0^x \frac{df df_1}{dg}}{d\int_0^x \frac{df^2}{dg}}. \tag{2}$$

Hieraus lässt sich durch weitere Spezialisation die Formel h)

$$\int_0^x sgn\, df \cdot sgn\, df_1 \sqrt{d\int_0^x \frac{df^2}{dg} \cdot d\int_0^x \frac{df_1^2}{dg}} = \int_0^x \frac{df df_1}{dg} \tag{3}$$

beweisen, was hier besonders hervorgehoben sei, weil Hellinger einen Beweis von ihr unterdrückt.[30]) Man hat dazu nur $f_2(x) = \int_0^x \frac{df^2}{dg}$ zu setzen.

Ferner kann man eine weitere Anwendung der Formel (2) machen, indem man $f = g$ setzt und f für f_1, sowie f_1 für f_2 schreibt. Man findet

---

[30]) Siehe Hlg. Diss., S. 35.

$$\int_0^x \frac{df_1}{dg} \cdot sgn\, df \sqrt{dg \cdot d\int_0^x \frac{df^2}{dg}} = \int_0^x \frac{df\, df_1}{dg}\,. \tag{4}$$

Alle diese Formeln lassen sich auch andersartig auffassen, wenn man $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ und $\int_0^x \frac{df_1^2}{dg} = h_1(x)$ als selbständig gegebene Funktionen einführt, wobei sie allerdings dann nach Satz d) der $0(g) \to 0(h)$ bzw. der $0(g) \to 0(h_1)$ Aussage genügen müssen. Die Funktionen $f(x)$ und $f_1(x)$ sind dann durch $g(x)$ und $h(x)$ bzw. $h_1(x)$ auszudrücken, was nach Satz g) stets möglich ist. Sie werden dabei monoton gewählt, so dass die Vorzeichen wegfallen. Man hat dann aus (3) beim ersten Schritt

$$\int_0^x \frac{d\int_0^x \sqrt{dg\, dh} \cdot df_1}{dg} = \int_0^x sgn\, df_1 \sqrt{dh \cdot d\int_0^x \frac{df_1^2}{dg}} \tag{5}$$

und beim zweiten

$$\int_0^x \frac{d\int_0^x \sqrt{dg\, dh} \cdot d\int_0^x \sqrt{dg\, dh_1}}{dg} = \int_0^x \sqrt{dh\, dh_1}\,, \tag{6}$$

insbesondere bei $h_1(x) = h(x)$

$$\int_0^x \frac{d\left(\int_0^x \sqrt{dg\, dh}\right)^2}{dg} = h(x) \tag{7}$$

und endlich aus (4)

$$\int_0^x \frac{d\int_0^x \sqrt{dg\, dh} \cdot df_1}{dg} = \int_0^x \frac{df_1}{dg} \sqrt{dg\, dh}\,, \tag{8}$$

was sich mit Formel (5) zu *einer* Gleichung vereinigen lässt. Diese Formeln lassen sich bezüglich der Voraussetzungen noch verschärfen, wie später gezeigt werden wird.[31])

---

[31]) Siehe S. 24.

Zurückführung des Umkehrintegrales auf ein Lebesguesches Integral.

Diese Zurückführung ist in bezug auf das Umkehrintegral bei Hahn nicht ausdrücklich angegeben. Indessen lässt sie sich analog durchführen, ja das Resultat ist sogar noch allgemeiner als für das Grundintegral, weil die Existenz der Integrale an keine Voraussetzung geknüpft ist, wie das beim Grundintegral der Fall war.

Zunächst ist das Integral $\int\limits_0^x \sqrt{dg\,dh}$ ebenfalls invariant gegenüber jeder eindeutigen, stetigen, monotonen Substitution $x = x(y)$ [mit $x(0) = 0$], insbesondere auch gegenüber der Substitution $x = x(g)$ [hier entsprechend auch gegenüber $x = x(h)$], obgleich diese abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen haben kann.

$$\int\limits_0^x \sqrt{dg\,dh} = \int\limits_0^y \sqrt{dg\,dh} = \int\limits_0^g \sqrt{dg dh}. \tag{9}$$

Da hier aber auch die Funktion $h(g)$ Unstetigkeitsstellen in angegebener Menge haben kann, so ist eine Erweiterung der Definition des Umkehrintegrales erforderlich und auch möglich. Wenn $h(g)$ in einem Intervall eine beliebige monotone, beschränkte Funktion ist, so streben in diesem Intervall die Summen $\sum \sqrt{\Delta g\, \Delta h}$ beim integralartigen Grenzprozess einem Grenzwert zu. Der von Hellinger angegebene Beweis[32]) lässt sich auch in diesem Fall durchführen. Ausgehend vom Integral $\int\limits_0^g \sqrt{dg\,dh}$ lässt sich dann die umgekehrte *stetige* Substitution $g = g(x)$ ausführen, woraus $\int\limits_0^g \sqrt{dg\,dh} = \int\limits_0^x \sqrt{dg\,dh}$ folgt.

Satz 1. *Sind $g(x)$ und $h(x)$ zwei im Intervall (a, b) stetige, monotone Funktionen, so existiert ausser* $\int\limits_a^b \sqrt{dg\,dh}$

---

[32]) Siehe Hlg. Diss., S. 31.

stets $\int\limits_A^B \sqrt{h'(g)}\,dg$, *wo* (A, B) *ein* (a, b) *entsprechendes Intervall auf der g-Achse bedeutet, und es ist*

$$\int\limits_a^b \sqrt{dg\,dh} = \int\limits_A^B \sqrt{h'(g)}\,dg\,.$$

Damit ist auch das Umkehrintegral auf ein Lebesguesches Integral zurückgeführt. Der Einfachheit halber werde wieder $a=0$ und $g(0)=0$, $h(0)=0$ angenommen.

Zunächst ist der Satz richtig, wenn die $0(g) \rightarrow 0(h)$ Aussage gilt. Denn man hat dann nach Satz g), falls man $\int\limits_0^x \sqrt{dg\,dh} = f(x)$ setzt, $h(x) = \int\limits_0^x \frac{df^2}{dg}$. Es folgt $h'(g) = f'^2(g)$, $\sqrt{h'(g)} = f'(g)$, da $f(g)$ monoton ist, und nach Satz i) $f(g) = \int\limits_0^g f'(g)\,dg = \int\limits_0^g \sqrt{h'(g)}\,dg$, w. z. b. w.

Ähnlich kann man den in Satz g) angegebenen, aus $\int\limits_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$ folgenden Ausdruck $f(x) = \int\limits_0^x sgn\,df \sqrt{dg\,dh}$ umformen. In diesem allgemeineren Fall hat man $f'(g) = sgn\,f'(g)\,\sqrt{h'(g)}$, also $f(g) = \int\limits_0^g sgn\,f'(g) \sqrt{h'(g)}\,dg$.

Beispiel. Es sei $\int\limits_0^x \frac{df^2}{dg} = g(x)$. Dann ist $f'(g) = \pm 1$, also $f(g) = \int\limits_0^g (\pm\, dg) = m(g) - m_1(g)$, wobei $g = m(g) + m_1(g)$ ist. $m(g)$ bedeutet den Inhalt derjenigen Teilmenge des Intervalles $(0, g)$, auf der $f'(g) = +1$ ist, entsprechend $m_1(g)$ für $f'(g) = -1$.[33])

Eine beliebige stetige, monotone Funktion lässt

---

[33]) Vgl. hierzu die Ausführungen zu Satz 6.

sich bekanntlich in einen totalstetigen und einen singulären Anteil zerlegen[34]):

$$h(g) = \int_0^g h'(g)\,dg + V(g) = T(g) + V(g). \tag{10}$$

Dabei ist $V(g)$ die Variation von $h(g)$ auf derjenigen Nullmenge, wo $h'(g)$ nicht existiert oder unendlich wird. $V(g)$ ist monoton und fast überall gilt $V'(g) = 0$.

Sollte $h(g)$ an abzählbar unendlich vielen Stellen unstetig sein, so können diese Unstetigkeiten in $V(g)$ hinein genommen werden, so dass die Zerlegung bestehen bleibt. Auch dann gilt noch fast überall $V'(g) = 0$.

Vorhin war der Satz für den totalstetigen Anteil bewiesen worden, nun werde er für den singulären Anteil gezeigt. Als Funktion von x ist $V[g(x)]$ stetig, weil $h(x)$ es ist.

Es sei $\int_0^x \sqrt{dg\,dV} = f(x)$. Für $f(x)$ gelten die früher bewiesenen Sätze. Es ist $\Delta f^2 \leqq \Delta g \Delta V$, also nach der Schwarzschen Umgleichung, die in diesem Gebiet eines der hauptsächlichsten Hilfsmittel ist,

$$\Sigma\,|\Delta f| \leqq \sqrt{\Sigma \Delta g} \cdot \sqrt{\Sigma \Delta V} \leqq \sqrt{\Sigma \Delta g} \cdot \text{konst.}$$

Hieraus folgt, dass $f(g)$ totalstetig ist[35]). Ferner ist, in g gerechnet,

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} \leqq \lim_{\Delta \to 0} \frac{\sqrt{\Delta g \Delta V}}{\Delta g} = \lim_{\Delta \to 0} \sqrt{\frac{\Delta V}{\Delta g}}.$$

Fast überall ist daher $f'(g) = \sqrt{V'(g)} = 0$ und wegen der Totalstetigkeit von $f(g)$ auch $f(g) = 0$. Somit ist für jede singuläre monotone Funktion $V(g)$ $\int_0^x \sqrt{dg\,dV} = 0$, andererseits aber auch $\int_0^g \sqrt{V'(g)}\,dg = 0$, so dass wirklich

---

[34]) Siehe etwa Schlesinger u. Plessner a. a. O., S. 160, oder De la Vallée Poussin, Cours d'Analyse infinitesimale II (2. éd.) S. 268 f. Die Bezeichnungsweise ist hier etwas abgeändert, weil das für das Folgende bequemer ist, und zwar wird unter einer singulären Funktion nur der singuläre Anteil selbst verstanden, also eine Funktion, deren Ableitung fast überall verschwindet.

[35]) Vgl. etwa Schlesinger u. Plessner, a. a. O., S. 140.

im Falle einer singulären Funktion der Satz ebenfalls bewiesen ist.

Nun werde der allgemeine Fall betrachtet. Die Differenz $h(g) - V(g)$ ist totalstetig. Für sie gilt daher

$$\int_0^x \sqrt{dg(dh - dV)} = \int_0^x \sqrt{h'(g) - V'(g)}\, dg = \int_0^g \sqrt{h'(g)}\, dg.$$

Andererseits ist $\int_0^x \sqrt{dg\, dh} - \int_0^x \sqrt{dg(dh - dV)} =$

$= \int_0^x (\sqrt{dh} - \sqrt{dh - dV})\sqrt{dg} \leqq \int_0^x \sqrt{dg\, dV} = 0$, wegen der Ungleichung $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a - b}$ für $a > b > 0$.

Es folgt $\int_0^x \sqrt{dg(dh - dV)} = \int_0^x \sqrt{dg\, dh}$, also

$$\int_0^x \sqrt{dg\, dh} = \int_0^g \sqrt{h'(g)}\, dg.$$

F o l g e r u n g. *Es gilt* $\int_0^x \sqrt{dg\, dh} = 0$ *identisch in* x, *bzw.* $\int_0^g \sqrt{dg\, dh} = 0$ *identisch in g, dann und nur dann, wenn h als Funktion von g singulär ist.*

Dass in diesem Fall das Integral den Wert Null hat, ist schon bewiesen. Ist umgekehrt $\int_0^x \sqrt{dg\, dh} = 0$, also $\int_0^g \sqrt{h'(g)}\, dg = 0$, so folgt fast überall $h'(g) = 0$, w. z. b. w.

B e i s p i e l e. Ein nicht triviales Beispiel, wo keine der beiden Funktionen konstant ist, gibt H e l l i n g e r in der im Intervall (0, 1) erklärten Funktion $Z(x)$ [36]): $\int_0^1 \sqrt{dZ\, dx} = 0$. Also ist $Z(x)$ eine singuläre Funktion. Er zeigt auch, dass allgemeiner $\int_0^1 \sqrt{dZ\, dZ_1} = 0$ gilt; $Z(x)$ und $Z_1(x)$ haben gleichartigen Bau, nur ein darin vorkommender Parameter hat jeweils einen verschiedenen Wert.

[36]) Siehe Hlg. Diss., S. 33.

Weitere Beispiele liefern die Funktionen vom χ-Typus.

$$\int_0^x \sqrt{dg\,d\chi} = \int_0^g \sqrt{\chi'(g)}\,dg = \int_0^g \chi'(g)\,dg = \chi(x),$$

oder
$$\int_0^x \sqrt{dg\,d\chi} = \int_0^\chi \sqrt{g'(\chi)}\,d\chi = \chi(x), \tag{11}$$

weil $g'(\chi) = 1$ fast überall in χ ist. Beide Schlussweisen gelten also, obgleich nur $0(g) \to 0(\chi)$ erfüllt ist, nicht aber das Umgekehrte [37]).

Die hier durchgeführte Methode lässt sich auch verwenden, um die Formeln (5) — (8) zu verschärfen. Dazu bedarf es zunächst eines Hilfssatzes, der auch später eine Rolle spielt.

Hilfssatz. *Ist $f(g)$ eine singuläre monotone Funktion, so erhält man durch die monotone Substitution $g = g(h)$, für die die $0(g) \to 0(h)$ Aussage gilt, wiederum eine singuläre monotone Funktion $f(h)$.*

Wäre $f(h)$ nicht singulär, so könnte man sie in einen totalstetigen und einen singulären Anteil zerlegen, die beide auch monoton sind: $f(h) = T(h) + V(h)$.

Substituierte man hier wiederum $g, f(g) = T(g) + V(g)$, so wäre $T(g)$ ebenfalls totalstetig wegen der Transitivität dieser Eigenschaft. Von $V(g)$ her könnte noch ein weiterer totalstetiger Anteil hinzukommen, der sich zu $T(g)$ addieren würde, jedenfalls wäre $f(g)$ gegen die Voraussetzung nicht singulär, w. z. b. w.

Mit Hilfe der hier entwickelten Hilfsmittel kann man diesen Hilfssatz folgendermassen ausdrücken.

Sind $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ stetige, monotone Funktionen und ist $\int_0^x \sqrt{df\,dg} = 0$ identisch in x, so gilt ebenfalls identisch in x $\int_0^x \sqrt{df\,dh} = 0$, falls die $0(g) \to 0(h)$ Aussage besteht.

---

37) Siehe S. 17.

Anmerkung. Dieser Hilfssatz gilt auch für beliebige singuläre Funktionen von beschränkter Schwankung $f(g)$, denn diese lassen sich auf monotone zurückführen [38].

S a t z 2. *Unter denselben Voraussetzungen wie bei Satz 1, zu denen noch die Existenz von* $\int\limits_0^x \frac{df_1^2}{dg}$ kommt, gilt

$$\int\limits_0^x sgn\, df_1 \sqrt{dh \cdot d\int_0^x \frac{df_1^2}{dg}} = \int\limits_0^x \frac{df_1}{dg}\sqrt{dg\,dh} = \int\limits_0^x \frac{d\int\limits_0^x \sqrt{dg\,dh}\cdot df_1}{dg} =$$

$$= \int\limits_0^g f_1'(g)\sqrt{h'(g)}\,dg\,.$$

Früher waren diese Gleichungen für eine totalstetige Funktion $h(g)$ bewiesen [39]; jetzt werden sie für eine singuläre Funktion $V(g)$ gezeigt, worauf die Zusammensetzung erfolgt. Die Zurückführung auf das L e b e s g u e sche Integral folgt in allen Fällen aus der letzten Form des Integrales auf Grund der früheren Resultate.

Zunächst hat man also zu bestätigen, dass

$$\int\limits_0^x sgn\, df_1 \sqrt{dV \cdot d\int_0^x \frac{df_1^2}{dg}} = 0, \text{ sowie} \int\limits_0^x \frac{df_1}{dg}\sqrt{dg\,dV} = 0 \qquad (12)$$

gilt. Die erste Gleichung ohne $sgn\, df_1$ folgt direkt aus dem Hilfssatz, da nach Satz d) $0(g) \to 0$ $\left(\int\limits_0^x \frac{df_1^2}{dg}\right)$ besteht. Aus der L e b e s g u e schen Form des Integrales erkennt man, dass auch die Vorzeichenregel an seinem Verschwinden nichts ändert. In bezug auf die zweite Gleichung schliesst man analog zu S. 22 wie folgt.

[38]) Vgl. S. 28.
[39]) Siehe S. 19.

$$\int_0^x \frac{df_1}{dg}\sqrt{dg\,dV} = \varphi(x)\,;\ \Delta\varphi^2 \leqq \int_\Delta \frac{df_1^2}{dg}\cdot\Delta V;\ \text{Totalstetigkeit von}$$

$$\varphi(g)\,;\ \lim_{\Delta\to 0}\frac{|\Delta\varphi|}{\Delta g} \leqq \lim_{\Delta\to 0}\sqrt{\frac{\int_\Delta \frac{df_1^2}{dg}}{\Delta g}}\cdot\lim_{\Delta\to 0}\sqrt{\frac{\Delta V}{\Delta g}} = f_1'(g)\sqrt{V'(g)}\,;$$

$$\varphi'(g) = 0;\ \varphi(g) = 0.$$

Weiter folgt der allgemeine Fall. Man setzt die Formeln für die totalstetige Differenz $h(g) - V(g)$ an, etwa in derselben Reihenfolge wie oben im Satz. Der Wert des dritten Integrales ändert sich, wie schon bewiesen, nicht, wenn man die Differenz durch $h(g)$ selbst ersetzt. Das Gleiche gilt für die beiden ersten Integrale, wie man durch Abschätzungen beweist, die derjenigen, die früher an entsprechender Stelle ausgeführt wurde, ganz analog sind, nur müssen die absoluten Beträge genommen werden:

$$\left|\int_0^x sgn\, df_1 \sqrt{d\int_0^x \frac{df_1^2}{dg}\left(\sqrt{dh} - \sqrt{dh - dV}\right)}\right| \leqq$$

$$\leqq \int_0^x \sqrt{d\int_0^x \frac{df_1^2}{dg}\cdot dV} = 0,$$

bzw. $$\left|\int_0^x \frac{df_1}{dg}\left(\sqrt{dh} - \sqrt{dh - dV}\right)\sqrt{dg}\right| \leqq \int_0^x \left|\frac{df_1}{dg}\right|\sqrt{dg\,dV} = 0.$$

Damit ist der vollständige Beweis des Satzes 2 geführt.

B e i s p i e l. Existiert $\int_0^x \frac{df_1^2}{d\chi}$, so kann man χ für g nehmen und für h die nicht totalstetige Funktion $g(\chi)$. Man erhält vermöge Formel (11)

$$\int_0^x sgn\, df_1 \sqrt{dg\cdot d\int_0^x \frac{df_1^2}{d\chi}} = \int_0^x \frac{df_1}{d\chi}\sqrt{dg\,d\chi} = f_1(x). \qquad (13)$$

Andererseits kann man direkt χ an Stelle von h nehmen. Wenn man dann noch berücksichtigt, dass bei der gemachten Voraussetzung über $f_1(x)$ $\int\limits_0^x \frac{df_1^2}{d\chi} = \int\limits_0^x \frac{df_1^2}{dg}$ gilt gemäss der Folgerung aus Satz n), so ergibt sich

$$f_1(x) = \int\limits_0^x \frac{df_1}{dg} \sqrt{dg\,d\chi} = \int\limits_0^x \frac{d\chi df_1}{dg}. \tag{14}$$

Man beachte aber, dass hier die Voraussetzung der Existenz von $\int\limits_0^x \frac{df_1^2}{d\chi}$ wesentlich ist, wie sich durch Gegenbeispiele zeigen lässt[40]).

S a t z 3. *Sind $g(x)$, $h(x)$ und $h_1(x)$ stetige, monotone Funktionen und ist eine der beiden h-Funktionen totalstetig in bezug auf g, so gilt*

$$\int\limits_0^x \frac{d\int\limits_0^x \sqrt{dg\,dh} \cdot d\int\limits_0^x \sqrt{dg\,dh_1}}{dg} = \int\limits_0^x \sqrt{dh\,dh_1},$$

$$\textit{bzw.}\ \int\limits_0^g \sqrt{h'(g)\,h_1'(g)}\,dg = \int\limits_0^{h_1} \sqrt{h'(h_1)}dh_1.$$

Da der Beweis dieses Satzes völlig analog den vorigen ist, $0(g) \to 0(h_1)$ vorausgesetzt, so erübrigt sich seine Ausführung. Er geschieht in denselben drei Schritten und beruht auf der früher bewiesenen Formel (6), sowie auf dem Hilfssatz. Man kann aber auch den Beweis des Satzes auf andere Weise ganz im Rahmen der L e b e s g u e-schen Integraltheorie führen, da beide Integrale sich durch L e b e s g u e sche ausdrücken lassen. Darauf sei hier nicht näher eingegangen.

Bemerkung. Formel (7) gilt für singuläre, also auch für beliebige Funktionen von beschränkter Schwankung nicht. Ein Widerspruch liegt darin nicht, da sie ja $h_1(x) = h(x)$ voraussetzt, also *allein* $0(g) \to 0(h_1)$ garnicht angenommen werden kann.

---

40) Vgl. Beiträge 1, S. 193.

Zum Schluss dieses Abschnittes sei noch darauf hingewiesen, dass das hier entwickelte Hilfsmittel geeignet ist, die allgemeinen Eigenschaften der singulären Funktionen zu untersuchen. Beispielsweise seien hier zwei Sätze angeführt.

Zusammen mit einer monotonen, singulären Funktion $h(g)$ ist auch ihre Umkehrfunktion $g(h)$ singulär. Denn man kann stets eine geeignete neue Veränderliche x einführen, so dass $g(\mathrm{x})$ und $h(\mathrm{x})$ stetige Funktionen sind, also $\int\limits_0^{\mathrm{x}} \sqrt{dg\,dh} = 0$ ist, in welchem Integral g und h völlig gleichberechtigt sind.

Die Summe zweier monotoner, singulärer Funktionen $h(g)$ und $h_1(g)$ ist wiederum monoton und singulär. Denn aus $\int\limits_0^{\mathrm{x}} \sqrt{dg\,dh} = 0$ und $\int\limits_0^{\mathrm{x}} \sqrt{dg dh_1} = 0$ folgt durch einfache Abschätzung auch $\int\limits_0^{\mathrm{x}} \sqrt{dg(dh + dh_1)} = 0$.

Zusammenhänge mit allgemeinen Eigenschaften der Funktionen von beschränkter Schwankung.

Es seien hier einige Sätze über Hellingersche Integrale angegeben, die sich auf die Zerlegung einer Funktion von beschränkter Schwankung in monotone Funktionen beziehen. Bekanntlich besteht folgende Normaldarstellung jeder stetigen Funktion von beschränkter Schwankung $f(\mathrm{x})$, sowie ihrer Gesamtschwankung $s(\mathrm{x})$, durch zwei monotone, stetige Funktionen $m(\mathrm{x})$ und $m_1(\mathrm{x})$, auf der die Wesensgleichheit der Funktionen beider Klassen beruht:

$$f(\mathrm{x}) = m(\mathrm{x}) - m_1(\mathrm{x}), \quad s(\mathrm{x}) = m(\mathrm{x}) + m_1(\mathrm{x}). \tag{15}$$

Die Funktionen seien alle so normiert, dass sie bei $\mathrm{x} = 0$ verschwinden.

Schon Hellinger beweist, dass $\int\limits_0^{\mathrm{x}} \frac{df^2}{dg} = \int\limits_0^{\mathrm{x}} \frac{ds^2}{dg}$

ist[41]). Im Rahmen der Verwendung der Theorie Lebesguescher Integrale bedeutet das, dass fast überall auf der g-Achse $|f'(g)| = s'(g)$ ist. Darüber hinaus gilt

Satz 4. *Ist* $f(x) = m(x) - m_1(x)$ *und* $s(x) = m(x) + m_1(x)$, *so existieren stets zusammen mit* $\int\limits_0^x \frac{df^2}{dg}$ *auch die übrigen Quadratintegrale und es ist*

$$\int\limits_0^x \frac{df^2}{dg} = \int\limits_0^x \frac{ds^2}{dg} = \int\limits_0^x \frac{dm^2}{dg} + \int\limits_0^x \frac{dm_1^2}{dg}, \text{ sowie } \int\limits_0^x \frac{dm\, dm_1}{dg} = 0.$$

Umgekehrt: *Gilt* $f(x) = m(x) - m_1(x)$ *und* $\int\limits_0^x \frac{dm dm_1}{dg} = 0$ *mit geeigneter monotoner Funktion* $g(x)$, *so ist jenes die Normaldarstellung von* $f(x)$, *d. h. es ist* $s(x) = m(x) + m_1(x)$.

Aus $\Delta s^2 = \Delta m^2 + \Delta m_1^2 + 2\Delta m\, \Delta m_1 \leqq \Delta g \cdot \int\limits_\Delta \frac{df^2}{dg}$ folgt, da alle Zuwächse positiv sind, $\Delta m^2 \leqq \Delta g \cdot \int\limits_\Delta \frac{df^2}{dg}$, womit die Existenz von $\int\limits_0^x \frac{dm^2}{dg}$ bewiesen ist, entsprechend diejenige von $\int\limits_0^x \frac{dm_1^2}{dg}$. Ferner ist $4 \lim\limits_{\Delta \to 0} \sum \frac{\Delta m\, \Delta m_1}{\Delta g} =$ $= \lim\limits_{\Delta \to 0} \left(\sum \frac{\Delta s^2}{\Delta g} - \sum \frac{\Delta f^2}{\Delta g} \right) = 0$, woraus ohne weiteres folgt $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sum \frac{\Delta f^2}{\Delta g} = \lim\limits_{\Delta \to 0} \sum \frac{\Delta m^2}{\Delta g} + \lim\limits_{\Delta \to 0} \sum \frac{\Delta m_1^2}{\Delta g}$, w. z. b. w.

---

[41]) Siehe Hlg. Diss. S. 30.

Um die Umkehrung zu beweisen, schliesst man folgendermassen:

$$\int_0^x \frac{ds^2}{dg} = \int_0^x \frac{df^2}{dg} = \int_0^x \frac{d(m-m_1)^2}{dg} = \int_0^x \frac{dm^2}{dg} + \int_0^x \frac{dm_1{}^2}{dg} = \int_0^x \frac{d(m+m_1)^2}{dg}.$$

Nach Satz e) kann sich also $s(x)$ von $m(x)+m_1(x)$ nur um eine Konstante unterscheiden, die aber wegen der Normierung der Funktionen verschwindet.

Ein interessantes Beispiel hierzu liefert jede χ-Funktion. Für sie bestehen folgende drei Beziehungen, wie man leicht nachrechnet,

$$\int_0^x \frac{d\chi^2}{dg} = \chi, \quad \int_0^x \frac{d(g-\chi)^2}{dg} = g-\chi, \quad \int_0^x \frac{d\chi\, d(g-\chi)}{dg} = 0. \tag{16}$$

Daraus und aus Satz n) erkennt man, dass die beiden monotonen Funktionen g und $g-\chi$ vom gleichen Typus sind. Ihre Konstanzmengen, auf denen die Ableitungen verschwinden, sind komplementär. Die dritte Beziehung liefert ein Beispiel dafür, dass das gemischte Integral verschwinden kann, ohne dass die Funktionen konstant zu sein brauchen[42]). Sind die Funktionen stetig differenzierbar, so müssen sie allerdings, damit das Integral verschwindet, abwechselnd konstant sein.

Dieselbe Beziehung lehrt nach obigem Satz auch, dass $g-2\chi=(g-\chi)-\chi$ die Normaldarstellung der Funktion $g-2\chi$ ist. Sie selbst ist nicht mehr monoton, da ihre Ableitung teils positive, teils negative Werte annimmt, $(g-2\chi)' = \pm 1$. Die Gesamtschwankung von $g-2\chi$ ist gleich $(g-\chi)+\chi=g$.

Im Gegensatz zu g und $g-\chi$ liefert $g-2\chi$ ein umkehrbares Integral:

$$\int_0^x \frac{d(g-2\chi)^2}{dg} = g-2\chi. \tag{17}$$

Auch g selbst gibt natürlich ein umkehrbares Inte-

---

[42]) Vgl. S. 16.

gral, die Summe beider $2(g-\chi)$ aber nicht. Das kann nur eintreten, weil $g-2\chi$ nicht monoton ist[43]).

Es werde noch die Gesamtschwankung $\sigma(x)$ von $\rho(x) = \int_0^x \frac{df df_1}{dg}$ gefunden. Da fast überall $\sigma'(g) = |\rho'(g)| = |f'(g)| \cdot |f_1'(g)| = s'(g)\, s_1'(g)$ gilt und $\sigma(g)$ zusammen mit $\rho(g)$ totalstetig ist, hat man $\sigma(x) = \int_0^x \frac{ds\, ds_1}{dg}$.

Auf Grund hiervon erkennt man, dass die Gesamtschwankungen der Ausdrücke, die unter dem Integralzeichen Vorzeichen bei einer Wurzel aufweisen[44]), gleich den entsprechenden Ausdrücken, aber ohne Vorzeichen, sind. Zum Beispiel ist die Gesamtschwankung von

$$\int_0^x sgn\, df \cdot sgn\, df_1 \sqrt{d\int_0^x \frac{df^2}{dg} \cdot d\int_0^x \frac{df_1^2}{dg}}$$

$$\text{gleich } \int_0^x \sqrt{d\int_0^x \frac{df^2}{dg} \cdot d\int_0^x \frac{df_1^2}{dg}}\,.$$

Sind die Normaldarstellungen zweier Funktionen gegeben, $f = m - m_1$ und $f_1 = n - n_1$, so folgt daraus diejenige von $\rho = \int_0^x \frac{df df_1}{dg}$ zu $\rho = \mu - \mu_1$, wo $\mu = \int_0^x \frac{dm\, dn}{dg} + \int_0^x \frac{dm_1 dn_1}{dg}$, $\mu_1 = \int_0^x \frac{dm\, dn_1}{dg} + \int_0^x \frac{dm_1 dn}{dg}$ ist, welche Integrale alle existieren.

S a t z 5. *Unter denselben Voraussetzungen wie bei Satz 4 gilt stets*

$$\int_0^x \frac{df^2}{ds} = s(x), \quad \int_0^x \frac{dm^2}{ds} = m(x), \quad \int_0^x \frac{dm_1^2}{dg} = m_1(x)\,.$$

---

[43]) Vgl. S. 17.

[44]) Siehe S. 8.

Die beiden letzten Integrale sind also nicht umkehrbar, das erste aber wohl.

Wegen $|\Delta f| \leqq \Delta s$ existiert das Integral $\int\limits_0^x \frac{df^2}{ds}$. Man kann also Satz 1 anwenden, indem man insbesondere s an Stelle von g nimmt. Also ist

$$\int\limits_0^x \frac{df^2}{ds} = \int\limits_0^x \frac{ds^2}{ds} = s(\mathrm{x}) \text{ und } \int\limits_0^x \frac{dm\,dm_1}{ds} = 0, \text{ also } m'(s)m_1'(s) = 0$$

fast überall auf der s-Achse. Darüber hinaus kann man jetzt noch behaupten, dass $m'(s)$ und $m_1'(s)$ nicht gleichzeitig verschwinden, denn ihre Summe muss gleich 1 sein.

Es ist nun $\int\limits_0^x \frac{dm^2}{ds} = \frac{1}{4}\int\limits_0^x \frac{d(f+s)^2}{ds} = \frac{1}{4}(s+2f+s) = m.$

Daraus folgt weiter $m'^2(s) = m'(s)$ fast überall auf der s-Achse, also $\mathrm{m}'(s) = 1$ oder 0 und $m = \int\limits_0^s m'(s)\,ds = \int ds$, erstreckt über die Teilmenge des Intervalles $(0, s)$, auf der $m'(s) = 1$ ist. Also ist $m(s)$ Inhaltsfunktion dieser Teilmenge. Entsprechendes gilt für m_1. $m_1(s)$ ist nach obigem die Inhaltsfunktion der Komplementärmenge.

$m(\mathrm{x})$ und $m_1(\mathrm{x})$ sind demnach Funktionen vom χ-Typus, deren Konstanzmengen komplementär sind[45]).

Zusammen lehren Satz 4 und 5, dass jede stetige Funktion von beschränkter Schwankung durch ihre Normalzerlegung nicht umkehrbare Integrale vom einfachen χ-Typus liefert und umgekehrt jede χ-Funktion zusammen mit ihrer Komplementärfunktion eine Normalzerlegung der erwähnten Art darstellt. Beide Begriffe sind also eng miteinander verknüpft.

Satz 6. *Damit die Differenz der stetigen, monotonen Funktionen* $m(\mathrm{x})$ *und* $m_1(\mathrm{x})$ *die Normaldarstellung einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung bildet, ist*

---

[45]) Vgl. Beiträge 1, S. 185.

notwendig und hinreichend, dass $\int_0^x \sqrt{dm\,dm_1} = 0$ *gilt, d. h. die Funktion* $m(m_1)$ *singulär ist.*

Diese neue Formulierung des Sachverhaltes von Satz 4 ist insofern der früheren vorzuziehen, als in ihr keine in der Voraussetzung garnicht genannte Funktion $g(x)$ vorkommt.

Ist eine Normaldarstellung gegeben, so ergibt sich aus den früheren Resultaten

$$\int_0^x \frac{dm^2}{ds} = m(x), \quad \int_0^x \frac{df^2}{ds} = s(x), \quad \int_0^x \frac{dm dm_1}{ds} = 0,$$

nach Satz g) und h)

$$m(x) = \int_0^x \sqrt{dmds}, \quad f(x) = \int_0^x (\pm ds),$$

$$\int_0^x \sqrt{dmdm_1} = \int_0^x \sqrt{d\int_0^x \frac{dm^2}{ds} \cdot d\int_0^x \frac{dm_1{}^2}{ds}} = \int_0^x \frac{dmdm_1}{ds} = 0,$$

d. h. die Bedingung ist notwendig. Im Ausdruck $f(x) = \int_0^x (\pm ds)$ erkennt man die Normaldarstellung wieder, denn wenn man s substituiert, zerfällt das Integral in die Differenz zweier Inhaltsfunktionen, die, wie man leicht erkennt, mit $m(s)$ und $m_1(s)$ übereinstimmen[46].

Umgekehrt sei $\int_0^x \sqrt{dmdm_1} = 0$ vorgegeben. Man bildet dann die Integrale $\int_0^x \frac{dm^2}{ds}$, $\int_0^x \frac{dm_1{}^2}{ds}$. Nach Satz m) gilt $m \rightleftarrows \int_0^x \frac{dm^2}{ds}$, entsprechend $m_1 \rightleftarrows \int_0^x \frac{dm_1{}^2}{ds}$. Durch zweimalige Anwendung des Hilfssatzes folgt aus der Voraussetzung

$$\int_0^x \sqrt{d\int_0^x \frac{dm^2}{dx} \cdot d\int_0^x \frac{dm_1{}^2}{dx}} = 0, \text{ d. h. } \int_0^x \frac{dm\,dm_1}{ds} = 0.$$

---

[46]) Siehe das Beispiel von S. 21.

Also ist nach Satz 4 $f(x) = m(x) - m_1(x)$ eine Normaldarstellung, w. z. b. w.

Folgerungen. Die Normaldarstellung $f(x) = m(x) - m_1(x)$ ist invariant gegenüber jeder stetigen, monotonen Substitution $x = x(y)$ [mit $x(0) = 0$]. Denn das Integral $\int_0^x \sqrt{dm\,dm_1}$ ist nach Formel (9) dabei invariant.

Zwischen den von Hellinger angegebenen Funktionen $J(x)$ und $Z(x)$ [47]) besteht ein gegenseitiger Zusammenhang. Man kann sie als Repräsentanten der χ-Funktionen, bzw. der singulären Funktionen ansehen. Einerseits lässt sich aus jeder χ-Funktion nach Formel (16) ein Funktionenpaar bilden, das zu einer singulären Funktion führt: $\int_0^x \sqrt{d\chi\, d(g-\chi)} = 0$, insbesondere $\int_0^x \sqrt{dJ\, d(x-J)} = 0$, andererseits ist jetzt auch bewiesen, dass man aus jedem solchen Funktionenpaar nicht umkehrbare Integrale herstellen kann: $\int_0^x \frac{dm^2}{ds} = m(x)$, insbesondere $\int_0^x \frac{dZ^2}{d(Z+Z_1)} = Z(x)$.

Es sei hier noch auf einen weiteren Zusammenhang hingewiesen, nämlich einen, der zwischen den beiden allgemeinen Zerlegungen einer monotonen Funktion (10) und (15) besteht.

Satz 7. *Die Zerlegung der Gesamtschwankung einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung lässt sich stets durch eine geeignete monotone Substitution mit stetiger Umkehrung in eine Zerlegung einer monotonen Funktion in einen totalstetigen und einen singulären Anteil überführen. Die umgekehrte Überführung ist ebenfalls stets*

[47]) Siehe S. 5 und 23.

durch eine geeignete stetige, monotone Substitution ausführbar.

Es sei $s(\mathrm{x}) = m(\mathrm{x}) + m_1(\mathrm{x})$ eine Zerlegung vom Typus (15). Führt man hierin m (bzw. m_1) als unabhängige Veränderliche ein, so ist tatsächlich $s(m) = m + m_1(m)$ vom Typus (10). Denn $s(m)$ ist im allgemeinen nicht mehr stetig, da $s(\mathrm{x})$ wachsen kann, während $m(\mathrm{x})$ konstant bleibt, $m(m)$ ist totalstetig und $m_1(m)$ singulär. Die Substitution $\mathrm{x} = \mathrm{x}(m)$ besitzt eine stetige Umkehrung. $s(m)$ entspricht der nicht totalstetigen Funktion $g(\chi)$[48], deren entsprechende Zerlegung $g(\chi) = \chi + (g - \chi)$ lautet.

Umgekehrt sei $S(\mathrm{x}) = T(\mathrm{x}) + V(\mathrm{x})$ eine Zerlegung vom Typus (10). $S(\mathrm{x})$ und $V(\mathrm{x})$ sind im allgemeinen nicht stetig, sondern haben abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen. Nach der Voraussetzung ist $\int\limits_0^{\mathrm{x}} \sqrt{dVd\mathrm{x}} = 0$. Es lässt sich nun stets eine stetige, monotone Substitution $\mathrm{x} = \mathrm{x}(\mathrm{y})$ angeben, so dass $V(\mathrm{y})$ eine stetige Funktion wird, während $T(\mathrm{y})$ natürlich ebenfalls stetig bleibt. Man hat nur dafür zu sorgen, dass die Umkehrfunktion $\mathrm{y}(\mathrm{x})$ an denselben Stellen Sprünge hat wie $V(\mathrm{x})$. In y gilt ebenfalls $\int\limits_0^{\mathrm{y}} \sqrt{dVd\mathrm{x}} = 0$ und wegen $0(\mathrm{x}) \to 0(T)$ nach dem Hilfssatz auch $\int\limits_0^{\mathrm{y}} \sqrt{dVdT} = 0$. Infolgedessen stellt $S(\mathrm{y}) = T(\mathrm{y}) + V(\mathrm{y})$ eine Zerlegung vom Typus (15) dar.

Satz 8. *Damit die Überlagerung zweier Normaldarstellungen stetiger Funktionen von beschränkter Schwankung, $f(\mathrm{x}) = m(\mathrm{x}) - m_1(\mathrm{x})$, $f_1(\mathrm{x}) = n(\mathrm{x}) - n_1(\mathrm{x})$, wiederum eine solche ergibt, ist notwendig und hinreichend, dass die zugehörigen Gesamtschwankungen sich durch eine und dieselbe monotone Substitution mit stetiger Umkehrung in Zerlegungen in einen totalstetigen und einen singulären Anteil überführen lassen.*

Im allgemeinen wird das nicht der Fall sein, denn

---

[48]) Siehe S. 17.

aus $\int_0^x \sqrt{dm\,dm_1} = 0$ und $\int_0^x \sqrt{dn\,dn_1} = 0$ folgt noch nicht $\int_0^x \sqrt{d(m+n)\,d(m_1+n_1)} = 0.$

Ergibt aber die Substitution *einer* neuen unabhängigen Veränderlichen zugleich zwei Zerlegungen vom Typus (10), so ist auch die Überlagerung dieser eine ebensolche, da die Eigenschaften der Totalstetigkeit und der Singularität additiv sind[49]). Folglich ist nach dem Hilfssatz $m_1 + n_1$ als Funktion von $m + n$ singulär, also gilt $\int_0^x \sqrt{d(m+m_1)\,d(n+n_1)} = 0$, w. z. b. w.

Umgekehrt sei die Überlagerung wieder eine Normaldarstellung. Führt man dann $m + n$ als unabhängige Veränderliche ein, so leistet diese Substitution das Erforderliche. Die Umkehrfunktion ist stetig und beide Gesamtschwankungen, etwa

$$s(m + n) = m(m + n) + m_1(m + n),$$

liefern Zerlegungen vom Typus (10). Tatsächlich ist $m(m + n)$ totalstetig, wegen $\Delta m \leqq \Delta m + \Delta n$, und $m_1(m + n)$ singulär, weil gemäss der Voraussetzung $\int_0^x \sqrt{d(m+n)\,d(m_1+n_1)} = 0$, also erst recht $\int_0^x \sqrt{d(m+n)\,dm_1} = 0$ gilt.

Zusammensetzung Stieltjesscher und Hellingerscher Integrale.

Bekanntlich versteht man unter einem Stieltjesschen Integral den im gewöhnlichen Sinn zu verstehenden Grenzwert

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum u(\xi)\,\Delta f = \int_a^b u\,df\;^{50)}.$$

Er existiert, falls $u(x)$ stetig und $f(x)$ stetig und von beschränkter Schwankung im Intervall (a, b) ist. Ein

---

[49]) Siehe S. 28.

[50]) Vgl. z. B. die Habilitationsschrift von Hellinger, Journ. reine ang. Math. 136 (1909), S. 235, hier zitiert mit „Hlg. Habil.“.

solches Integral ist eine stetige Funktion von beschränkter Schwankung der oberen Grenze. Das folgt etwa aus dem gleich anzugebenden Mittelwertsatz in Verbindung mit der Zerlegung von $f(x)$ in monotone Funktionen.

Die folgenden Sätze in diesem Abschnitt lassen sich alle mit elementaren Hilfsmitteln auf das einfachste beweisen und benötigen nicht der Zurückführung auf die tiefer liegende Theorie der Lebesgueschen Integrale.

Satz 9. *Ein Stieltjessches Integral eines Produktes zweier Funktionen lässt sich aufspalten in zwei aufeinander folgende Integrale mit nur je einer Funktion, d. h. es gilt die Formel* $\int_a^b u u_1\, df = \int_a^b u\, d\int_a^x u_1\, df$.

Zunächst gilt der Mittelwertsatz für Stieltjessche Integrale, wenn $f(x)$ monoton ist[51]):

$$\int_\Delta u\, df = u(\xi)\, \Delta f.$$

Das beweist man wie für gewöhnliche Integrale. Die innerhalb von Δ gelegene Stelle ξ ist durch Δ mitbestimmt.

Daraus folgert man obige Formel zunächst für monotone Funktionen $f(x)$.

$$\int_a^b u\, d\int_a^x u_1 df = \lim_{\Delta\to 0} \sum u(\xi) \int_\Delta u_1 df = \lim_{\Delta\to 0} \sum u(\xi)\, u_1(\xi) \Delta f =$$

$= \int_a^b u u_1\, df$, denn man kann im ersten Faktor $u(\xi)$ über die Stelle ξ frei verfügen und daher den ersten Faktor dem zweiten $u_1(\xi)$, in dem ξ festgelegt ist, anpassen.

Ist $f(x)$ nicht monoton, so lässt es sich in stetige, monotone Funktionen zerlegen, $f(x) = m(x) - m_1(x)$, woraus der allgemeine Satz folgt:

$$\int_a^b u\, d\int_a^x u_1\, df = \int_a^b u\, d\int_a^x u_1 dm - \int_a^b u\, d\int_a^x u_1 dm_1 =$$

$$= \int_a^b u u_1 dm - \int_a^b u u_1\, dm_1 = \int_a^b u u_1 df.$$

---

[51]) Vgl. Hlg. Habil., S. 246.

Das Integral $\int_a^b u \frac{df\,df_1}{dg}$[52] stellt eine Verallgemeinerung sowohl eines Stieltjesschen, wie auch eines Hellingerschen Integrales dar.

Satz 10. *Das Integral* $\int_a^b u \frac{df\,df_1}{dg}$ *kann als Zusammensetzung eines Stieltjesschen und eines Hellingerschen Integrales in beiderlei Anordnung dargestellt werden. Es gilt*

$$\text{a)} \int_a^b u \frac{df\,df_1}{dg} = \int_a^b u\, d\int_a^x \frac{df\,df_1}{dg}, \quad \text{b)} \int_a^b u \frac{df\,df_1}{dg} = \int_a^b \frac{df_1\, d\int_a^x u\,df}{dg}.$$

a) Das innere Integral $\rho(x) = \int_a^x \frac{df\,df_1}{dg}$ erfüllt nach Satz f) die zur Existenz des äusseren notwendigen Bedingungen. Diese Formel ist bei Hellinger angegeben[53]. Einen Beweis findet man bei ihm für $f_1 = f$[54]. Er lässt sich aber nicht direkt auf den allgemeinen Fall übertragen, weil $\Delta\rho - \frac{\Delta f \Delta f_1}{\Delta g}$ nicht stets positiv ausfällt. Indessen lässt sich der allgemeine Fall auf den speziellen zurückführen. Es gilt analog zu einer der Formeln f)

$$\int_a^b u \frac{df\,df_1}{dg} = \frac{1}{2}\left[\int_a^b u \frac{d(f+f_1)^2}{dg} - \int_a^b u \frac{df^2}{dg} - \int_a^b u \frac{df_1^2}{dg}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_a^b u\, d\int_a^x \frac{d(f+f_1)^2}{dg} - \int_a^b u\, d\int_a^x \frac{df^2}{dg} - \int_a^b u\, d\int_a^x \frac{df_1^2}{dg}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b u\, d\left[\int_a^x \frac{d(f+f_1)^2}{dg} - \int_a^x \frac{df^2}{dg} - \int_a^x \frac{df_1^2}{dg}\right] =$$

---

[52]) Siehe S. 7.

[53]) Siehe Hlg. Habil., S. 238.

[54]) Siehe Hlg. Diss., S. 60.

$$=\int_a^b u\,d\int_a^x \frac{df\,df_1}{dg}.$$

b) Für monotone Funktionen $f(x)$ gilt nach dem Mittelwertsatz

$$\int_a^b \frac{df_1\,d\int_a^x u\,df}{dg} = \lim_{\Delta\to 0}\sum \frac{\Delta f_1\cdot\int\limits_\Delta u\,df}{\Delta g} = \lim_{\Delta\to 0}\sum \frac{\Delta f_1\cdot u(\xi)\Delta f}{\Delta g} =$$

$$=\int_a^b u\,\frac{df\,df_1}{dg}\,.$$

Dieser Beweis gibt auch die Existenz des neuen Integraltypus. Der allgemeine Fall erledigt sich wieder durch Zerlegung von $f(x)$ in monotone Funktionen, wobei die in Satz 4 erwiesene Existenz von $\int_a^b \frac{dm^2}{dg}$ eine Rolle spielt.

Soll das Ausgangsintegral $\int_a^b \frac{df^2}{dg}$ durch beliebige Funktionen $u(x)$ und $f_1(x)$ in angegebener Weise erweitert werden, so zeigt dieses Resultat, dass die Form $\int_a^b \frac{df\,df_1}{dg}$ genügt. $u(x)$ braucht garnicht eingeführt zu werden, da es nichts Neues bringt.

Beide Teile des Satzes 10 lassen sich in gleicher Weise verallgemeinern.

S a t z 11. *Die Formeln des Satzes 10 bleiben bestehen, wenn man df_1 durch $u_1 df_1$ ersetzt.*

$$\text{a)} \int_a^b u u_1 \frac{df\,df_1}{dg} = \int_a^b u\,d\int_a^x u_1 \frac{df\,df_1}{dg},$$

$$\text{b)} \int_a^b u u_1 \frac{df\,df_1}{dg} = \int_a^b u_1 \frac{df_1\, d\int_a^x u\,df}{dg} \text{ [55]).}$$

a) Zunächst sei $f_1 = f$. $\int_a^b u\, d\int_a^x u_1 \frac{df^2}{dg}$ existiert, denn das innere Integral ist eine stetige Funktion von beschränkter Schwankung von x. Es sei $\int_a^x u_1 \frac{df^2}{dg} = \varphi(x) - \varphi(a)$. Dann hat man für das Intervall (a, b) $\lim\limits_{\Delta\to 0} \sum\left(\Delta\varphi - u_1(\xi)\frac{\Delta f^2}{\Delta g}\right) = 0$. Hierin sei in jedem Teilintervall Δ diejenige Stelle ξ gewählt, an der $u_1(x)$ als stetige Funktion den Minimalwert m innerhalb Δ annimmt. Dadurch ist erreicht, dass stets $\Delta\varphi - u_1(\xi)\frac{\Delta f^2}{\Delta g} \geqq 0$ ist; denn aus $m \leqq u_1(x)$ folgt für eine Unterteilung von Δ $\sum\limits_{\delta} m \frac{\delta f^2}{\delta g} \leqq \sum\limits_{\delta} u_1(x) \frac{\delta f^2}{\delta g}$ und weiter durch Grenzübergang

$m \frac{\Delta f^2}{\Delta g} \leqq m \int\limits_{\Delta} \frac{df^2}{dg} \leqq \int\limits_{\Delta} u_1 \frac{df^2}{dg}$. Das ist wesentlich für die folgende Abschätzung.

Weiter wird mit $u(\xi)$, genommen an derselben Stelle ξ, gebildet

$$\left|\sum u(\xi)\left(\Delta\varphi - u_1(\xi)\frac{\Delta f^2}{\Delta g}\right)\right| \leqq \sum |u(\xi)| \left(\Delta\varphi - u_1(\xi)\frac{\Delta f^2}{\Delta g}\right) \leqq$$
$$\leqq M \sum\left(\Delta\varphi - u_1(\xi)\frac{\Delta f^2}{\Delta g}\right) \leqq \delta,$$

---

[55]) Die beiden Formeln (11a) u. (11b), sowie die daraus sich ergebende Folgerung (12b), sind in einer Arbeit des Verfassers „Zur Theorie der Summengleichungen" im Journ. reine angew. Math. **160** (1928), S. 41 f verwendet worden. Die Formel (11 b) wird ebenfalls von Weyl benutzt, Math. Ann. **66** (1908), S. 289 u. 293, aber ohne ihre ausdrückliche Angabe und auch ohne Beweis.

wo M das Maximum der stetigen Funktion $|u(\xi)|$ bedeutet. Folglich ist

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum u(\xi)\,\Delta\varphi = \lim_{\Delta\to 0} \sum u(\xi)\; u_1(\xi)\frac{\Delta f^2}{\Delta g}.$$

Gleichheit der Grenzwerte ist hier zwar nur für spezielle Intervalleinteilungsfolgen bewiesen, aber da beide Integrale existieren, müssen die Grenzwerte stets gleich sein. Der allgemeine Fall $f_1 \neq f$ wird analog Satz 10a durch Zurückführung auf den speziellen bewiesen.

b) Die zweite Formel wird ganz analog zu 10b zuerst für monotones $f(x)$ durch den Mittelwertsatz und dann durch die Zerlegung $f(x) = m(x) - m_1(x)$ bewiesen.

Durch zweimalige Anwendung dieser Formel folgt auch noch

$$\int_a^b uu_1 \frac{df df_1}{dg} = \int_a^b \frac{d\int_a^x u\; df \cdot d\int_a^x u_1 df}{dg}.$$

S a t z 12. *Ist im Intervall* (a, b) $u(x) \geqq m > 0$, *so gelten folgende Umkehrungsformeln:*

a) *aus* $\int_a^x u\,df = f_1(x) - f_1(a)$ *folgt* $\int_a^x \frac{1}{u}\,df_1 = f(x) - f(a)$[56];

b) *aus* $\int_a^x u \frac{df df_1}{dg} = \int_a^x \frac{df\, df_2}{dg}$ *folgt* $\int_a^x \frac{1}{u} \frac{df df_2}{dg} = \int_a^x \frac{df df_1}{dg}$.

a) erhält man, wenn man in Satz 9 u durch $\frac{1}{u_1}$ ersetzt:

$$\int_a^x \frac{1}{u}\, d\int_a^x u\, df = f(x) - f(a)$$

und b) ebenso aus Satz 11a:

$$\int_a^x \frac{1}{u}\, d\int_a^x u \frac{df df_1}{dg} = \int_a^x \frac{df df_1}{dg}$$

oder aus a) vermittelst des Satzes 10a.

[56]) Steht bei Hlg. Habil., S. 236.

F o l g e r u n g e n. *Wenn* $\int\limits_a^x u\,df = 0$ *identisch in* x *ist, so gilt* $f(\mathrm{x}) =$ konst.; *wenn* $\int\limits_a^x u\,df = \int\limits_a^x u\,df_1$ *ist, so gilt* $f_1(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) +$ konst.; *endlich wenn* $\int\limits_a^x u\frac{df\,df_1}{dg} = 0$ *ist, so gilt* $\int\limits_a^x \frac{df\,df_1}{dg} = 0$, *insbesondere ist also* $f(\mathrm{x}) =$ konst., *wenn* $\int\limits_a^x u\frac{df^2}{dg} = 0$ *identisch in* x *gilt*[57]).

Auch wenn $u(\mathrm{x})$ an einer Stelle x_0 verschwindet, bleiben die Formeln bestehen. Denn man kann in gewöhnlicher Weise das uneigentliche Integral definieren,

$$\int\limits_a^{\mathrm{x}_0} \frac{1}{u}\,df_1 = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\int\limits_a^{\mathrm{x}} \frac{1}{u}\,df_1,$$

und hat dann, da für beliebiges $\mathrm{x} < \mathrm{x}_0$ die Formel a) gilt, auf Grund der Stetigkeit der Funktion $f(\mathrm{x})$

$$\int\limits_a^{\mathrm{x}_0} \frac{1}{u}\,df_1 = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\int\limits_a^{\mathrm{x}} \frac{1}{u}\,df_1 = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(\mathrm{x}) - f(a) = f(\mathrm{x}_0) - f(a),$$

d. h. es besteht die Formel a) für x_0 als obere Grenze. Dasselbe gilt dann, wenn x_0 untere Grenze oder eine beliebige Stelle im Integrationsintervall ist, im letzteren Fall zeigt man das durch Zusammensetzung. Entsprechend lässt sich auch im Falle b) verfahren, denn $\int\limits_a^b \frac{df\,df_1}{dg}$ ist ebenfalls eine stetige Funktion beider Grenzen.

Die Schwarzsche Ungleichung im Gebiet der Hellingerschen Integrale.

Die Grundungleichung ist schon unter f) auf S. 6 angegeben worden. Man beweist sie wie gewöhnlich

[57]) Nach Satz c) S. 5.

durch Berufung auf eine positiv semidefinite, binäre quadratische Form mit nicht negativer Diskriminante.

S a t z 13. *Existieren für eine unendliche Folge von Funktionssystemen* $f^{(n)}(x)$, $f_1^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$, $u^{(n)}(x)$ *und* $u_1^{(n)}(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, *im Intervall* (a, b) *die einzelnen Quadratintegrale* $\int_a^b u^{(n)2} \frac{df^{(n)2}}{dg^{(n)}}$ *und* $\int_a^b u_1^{(n)2} \frac{df_1^{(n)2}}{dg^{(n)}}$ *und konvergieren ihre unendlichen Summen, so konvergiert auch* $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u^{(n)} u_1^{(n)} \frac{df^{(n)} df_1^{(n)}}{dg^{(n)}}$, *und es gilt die Ungleichung*

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u^{(n)} u_1^{(n)} \frac{df^{(n)} df_1^{(n)}}{dg^{(n)}}\right]^2 \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u^{(n)2} \frac{df^{(n)2}}{dg^{(n)}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_1^{(n)2} \frac{df_1^{(n)2}}{dg^{(n)}},$$

desgleichen in jedem Teilintervall Δ [58]).

Die Beziehung bleibt auch bestehen, wenn aus sämtlichen Integralen die Anteile für gewisse Teilintervalle herausfallen.

Für eine endliche Teilfolge wird die Beziehung wie die Grundungleichung bewiesen:

$$\left[\sum_{n=1}^{m} \int_a^b u^{(n)} u_1^{(n)} \frac{df^{(n)} df_1^{(n)}}{dg^{(n)}}\right]^2 \leqq \sum_{n=1}^{m} \int_a^b u^{(n)2} \frac{df^{(n)2}}{dg^{(n)}} \cdot \sum_{n=1}^{m} \int_a^b u_1^{(n)2} \frac{df_1^{(n)2}}{dg^{(n)}}.$$

Da die Summen rechts bei $m \to \infty$ nach Voraussetzung konvergieren, so bleibt die Summe links jedenfalls beschränkt. Sie enthält aber nicht nur positive Glieder, so dass ihre Konvergenz nicht ohne weiteres folgt, sondern besonders zu beweisen ist, ehe man den Grenzübergang ausführen kann. Man hat

$$\sum_{n=1}^{m} \int_a^b \frac{(u^{(n)} df^{(n)} + u_1^{(n)} df_1^{(n)})^2}{dg^{(n)}} = \sum_{n=1}^{m} \int_a^b u^{(n)2} \frac{df^{(n)2}}{dg^{(n)}} +$$

[58]) Auch dieser Satz ist in der auf S. 40 zitierten Arbeit des Verfassers auf S. 41 verwendet worden.

$$+\ 2\sum_{n=1}^{m}\int_a^b u^{(n)}u_1^{(n)}\frac{df^{(n)}df_1^{(n)}}{dg^{(n)}}+\sum_{n=1}^{m}\int_a^b u_1^{(n)2}\frac{df_1^{(n)2}}{dg^{(n)}}\leqq$$

$$\leqq\left[\sqrt{\sum_{n=1}^{m}\int_a^b u^{(n)2}\frac{df^{(n)2}}{dg^{(n)}}}+\sqrt{\sum_{n=1}^{m}\int_a^b u_1^{(n)2}\frac{df_1^{(n)2}}{dg^{(n)}}}\right]^2,$$

wo nun die Summe links aus lauter positiven Gliedern besteht. Falls man also hier $m\to\infty$ streben lässt, so bleibt sie beschränkt und konvergiert auch. Aus der Konvergenz dieser Summe folgt dann auch diejenige von $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u^{(n)}u_1^{(n)}\frac{df^{(n)}df_1^{(n)}}{dg^{(n)}}$, und ist dieses erwiesen, so erhält man die zu beweisende Ungleichung durch Grenzübergang aus der für die Teilfolge geltenden.

Satz 14. *Haben die Funktionen* $u(x)$ *und* $u_1(x)$ *je endlich viele Pole im Intervall (a, b), konvergieren jedoch die uneigentlichen Integrale* $\int_a^b u^2\frac{df^2}{dg}$ *und* $\int_a^b u_1^2\frac{df_1^2}{dg}$, *so konvergiert auch* $\int_a^b uu_1\frac{dfdf_1}{dg}$ *und es gilt die gewöhnliche Ungleichung*

$$\left[\int_a^b uu_1\frac{dfdf_1}{dg}\right]^2\leqq\int_a^b u^2\frac{df^2}{dg}\cdot\int_a^b u_1^2\frac{df_1^2}{dg}.$$

Man verstehe unter $\overset{*}{\int_a^b}$ ein Integral, aus dessen Intervall die Unstetigkeitsstellen der Funktionen $u(x)$ und $u_1(x)$ herausgeschnitten sind. Dann gilt die Ungleichung für $\overset{*}{\int_a^b}$ und ausserdem ähnlich dem vorigen

$$\overset{*}{\int_a^b}\frac{(u\,df+u_1\,df_1)^2}{dg}=\overset{*}{\int_a^b}u^2\frac{df^2}{dg}+2\overset{*}{\int_a^b}uu_1\frac{dfdf_1}{dg}+$$

$$+ {}^*\!\!\int_a^b u_1^2 \frac{df_1^2}{dg} \leqq \left[\sqrt{{}^*\!\!\int_a^b u^2 \frac{df^2}{dg}} + \sqrt{{}^*\!\!\int_a^b u_1^2 \frac{df_1^2}{dg}}\right]^2 \leqq$$

$$\leqq \left[\sqrt{\int_a^b u^2 \frac{df^2}{dg}} + \sqrt{\int_a^b u_1^2 \frac{df_1^2}{dg}}\right]^2.$$

Lässt man jetzt ${}^*\!\int_a^b$ sich auf $\int_a^b$ ausdehnen, so bleibt ${}^*\!\!\int_a^b \frac{(u\,df + u_1\,df_1)^2}{dg}$ unter einer festen Schranke, muss also, da es stetig wächst, einem Grenzwert $\int_a^b \frac{(u\,df + u_1\,df_1)^2}{dg}$ zustreben. Dann konvergiert ebenfalls $\int_a^b uu_1 \frac{df df_1}{dg}$ und es gilt auch für uneigentliche Integrale

$$\int_a^b \frac{(u\,df + u_1 df_1)^2}{dg} = \int_a^b u^2 \frac{df^2}{dg} + 2\int_a^b uu_1 \frac{df df_1}{dg} + \int_a^b u_1 \frac{df_1^2}{dg}.$$

Die zu beweisende Ungleichung folgt endlich aus der entsprechenden für ${}^*\!\int_a^b$ durch Grenzübergang.

Kombiniert man die Sätze 13 und 14, so ergibt sich

Satz 15. *Hat jede der Funktionen* $u^{(n)}(x)$, $u_1^{(n)}(x)$, $n = 1, 2 \ldots$, *im Intervall* (a, b) *endlich viele Pole, so bleibt Satz* 13 *dennoch bestehen, sofern sämtliche einzelne Quadratintegrale* $\int_a^b u^{(n)2} \frac{df^{(n)2}}{dg^{(n)}}$ *und* $\int_a^b u_1^{(n)2} \frac{df_1^{(n)2}}{dg^{(n)}}$ *konvergieren.*

Der Beweis verläuft völlig analog den beiden vorigen. Man führt wiederum Integrale ${}^*\!\int_a^b$ ein, aus denen alle Unstetigkeitsstellen der ersten m Funktionspaare $u^{(n)}(x)$ und $u_1^{(n)}(x)$ herausgeschnitten sind und setzt die entsprechenden Beziehungen für diese Integrale und für endliche Summen $\sum\limits_{n=1}^{m}$ von ihnen an. In diesen Beziehungen lässt sich dann zuerst der Grenzübergang ${}^{*}\!\int\limits_a^b \rightarrow \int\limits_a^b$ und hinterher der andere $m \rightarrow \infty$ mit den entsprechenden Schlussfolgerungen ausführen, womit der Beweis geführt ist.

Anwendungen auf die Theorie der beschränkten linearen und quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen.

Hellinger hat die hier in Rede stehenden Integraltypen hauptsächlich als Hilfsmittel zur Untersuchung der beschränkten quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen gebraucht[59]), in Fortführung der Hilbertschen Theorie dieser Formen. Es soll als Abschluss noch an einigen Beispielen gezeigt werden, dass auch die weiteren, hier entwickelten Eigenschaften der Hellingerschen Integrale sich ebenfalls in dieser Theorie verwenden lassen.

Es sei $P(\mathrm{x};\lambda) = \sum\limits_{(s)} \rho_s(\lambda)\,\mathrm{x}_s$ [60]) eine beschränkte Linearform der unendlich vielen Veränderlichen $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \ldots$ Die Koeffizienten $\rho_s(\lambda)$ seien im Intervall (a, b) stetige Funktionen einer Veränderlichen λ, deren Quadratsumme $\sum\limits_{(s)} \rho_s^2(\lambda)$ innerhalb (a, b) gegen eine stetige Funktion von λ konvergieren möge. Die Konvergenz ist dann nach einem bekannten Satz gleichmässig im Intervall, da alle Glieder stetig und positiv sind. Die Reihe $\sum\limits_{(s)} \rho_s(\lambda)\,\mathrm{x}_s$ ist daher auch gleichmässig konvergent für jedes Wertsystem x_s mit konvergenter Quadratsumme und $P(\mathrm{x};\lambda)$ ist eine stetige Funktion von λ.

---

[59]) Vgl. die Einleitung seiner Dissertation.

[60]) Unendliche Summen werden durch eingeklammerte Summationsindizes angedeutet.

Ferner möge das Integral $\int\limits_a^b \frac{dP^2(x)}{d\rho_0}$, das mit einer $P(x;\lambda)$ zugeordneten stetigen, monotonen Funktion $\rho_0(\lambda)$ gebildet wird, existieren und für alle Wertsysteme x_s, für die $\sum\limits_{(s)} x_s^2 \leqq 1$ ist, unterhalb einer festen Schranke G^2 bleiben. Durch diese Forderung ist der Anschluss an das Frühere erreicht. $\rho_0(\lambda)$ heisst die Basis von $P(x;\lambda)$.

Hellinger zeigt, dass bei diesen Voraussetzungen

$$\int\limits_a^b \frac{dP(x)\,df}{d\rho_0} = \sum_{(s)} x_s \int\limits_a^b \frac{d\rho_s\,df}{d\rho_0} \tag{18}$$

ebenfalls eine beschränkte Linearform und

$$\int\limits_a^b u\frac{dP^2(x)}{d\rho_0} = \sum_{(s)}\sum_{(t)} x_s\,x_t \int\limits_a^b u\frac{d\rho_s\,d\rho_t}{d\rho_0} \tag{19}$$

eine beschränkte quadratische Form derselben Veränderlichen darstellt, d. h. dass in beiden Fällen Umordnung der Operationen gestattet ist[61]). Dabei ist $f(\lambda)$ eine beliebige Funktion, für die $\int\limits_a^b \frac{df^2}{d\rho_0}$ existiert und $u(\lambda)$ eine beliebige im Intervall (a, b) stetige Funktion von λ.

Bemerkt sei noch, dass aus $\int\limits_a^b \frac{dP^2(x)}{d\rho_0} \leqq G^2$ für alle erwähnten Wertsysteme x_s folgt

$$\Delta P^2(x;\lambda) \leqq G^2\,\Delta\rho_0(\lambda), \quad P^2(x;\lambda) \leqq G^2\,\rho_0(\lambda). \tag{20}$$

Also können $G\sqrt{\Delta\rho_0(\lambda)}$ bzw. $G\sqrt{\rho_0(\lambda)}$ als Schranken der Linearformen $\Delta P(x;\lambda)$ bzw. $P(x;\lambda)$ angesehen werden. Dank den Eigenschaften beschränkter Linearformen gilt auch noch

$$\sum_{(s)} \Delta\rho_s^2(\lambda) \leqq G^2\Delta\rho_0(\lambda), \quad \sum_{(s)} \rho_s^2(\lambda) \leqq G^2\rho_0(\lambda). \tag{21}$$

---

[61]) Siehe Hlg. Habil., S. 239 f.

Es soll nun des Näheren gezeigt werden, dass die Transformation $\int\limits_0^\lambda \frac{dP(x)df}{d\rho_o} = P'(x;\lambda)$, die eine gewisse Erweiterung von $P(x;\lambda)$ liefert — hier auch noch durch $u(\lambda)$ zu erweitern erübrigt sich nach einer an Satz 10 anschliessenden Bemerkung — ein vollständiges Analogon im Gebiet der von einem Parameter abhängigen Koeffizienten bildet zu der Erweiterung einer gewöhnlichen beschränkten Linearform durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor. Da es nur auf Differenzen bezüglich λ ankommt, kann man dabei der Einfachheit halber wie immer $a = 0$ und alle $\rho_s(0) = 0$, sowie $\rho_o(0) = 0$, annehmen.

Zunächst sei bemerkt, dass diese Transformation den Typus der Linearform nicht ändert. Das ist in obigem Resultat (18) — die obere Grenze veränderlich genommen — enthalten, wenn man noch hinzufügt, dass die neuen Koeffizienten $\rho'_s(\lambda) = \int\limits_0^\lambda \frac{d\rho_s\, df}{d\rho_o}$ ebenfalls stetige Funktionen von λ darstellen, die bei $\lambda = 0$ verschwinden und deren Quadratsumme gegen eine stetige Funktion konvergiert. Letzteres wird gleich gezeigt. Endlich existiert auch das Integral $\int\limits_0^\lambda \frac{dP'^2(x)}{d\rho'_o}$, wobei man $P'(x;\lambda)$ als Basis die stetige, monotone Funktion $\rho'_o(\lambda) = \int\limits_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho_o}$ zuzuordnen hat. Das folgt aus Satz s), wenn man dort für $f_1(x)$, $g(x)$, $\rho(x)$, $h(x)$, $h_1(x)$ bzw. $P(x;\lambda)$, $\rho_o(\lambda)$, $P'(x;\lambda)$, $\rho'_o(\lambda)$, $\int\limits_0^\lambda \frac{dP^2(x)}{d\rho_o}$ setzt. Zugleich erhält man auch die Ungleichung

$$\int_0^\lambda \frac{dP'^2(x)}{d\rho'_0} \leqq \int_0^\lambda \frac{dP^2(x)}{d\rho_0}. \qquad (22)$$

Insbesondere besteht sogar Gleichheit der Integrale,

wenn $\rho'_0(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho_0}$ umkehrbar gewählt ist.

Analog zu (20) und (21) gilt für die Form $P'(x; \lambda)$

$$\Delta P'^2(x; \lambda) \leqq G^2 \Delta\rho'_0(\lambda), \quad P'^2(x; \lambda) \leqq G^2 \rho'_0(\lambda),$$

$$\sum_{(s)} \Delta\rho'^2_s(\lambda) \leqq G^2 \Delta\rho'_0(\lambda), \quad \sum_{(s)} \rho'^2_s(\lambda) \leqq G^2 \rho'_0(\lambda).$$

Sie hat also die Schranke $G\sqrt{\rho'_0(\lambda)}$.

Nun kann man die Zunahme der Quadratsumme der Koeffizienten beim Übergang des Argumentes von einem Wert λ_1 zu einem benachbarten λ_2 wie folgt abschätzen:

$$\left| \Delta \sum_{(s)} \rho'^2_s(\lambda) \right| \leqq \left| \sum_{(s)} (\rho'^2_s(\lambda_2) - \rho'^2_s(\lambda_1)) \right| =$$

$$= \left| \sum_{(s)} \Delta\rho'_s(\lambda)\,(\rho'_s(\lambda_1) + \rho'_s(\lambda_2)) \right| \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{(s)} \Delta\rho'^2_s(\lambda)} \cdot \sqrt{\sum_{(s)} (\rho'_s(\lambda_1) + \rho'_s(\lambda_2))^2} \leqq G^2 \sqrt{\Delta\rho'_0(\lambda)} \cdot$$

$$\cdot \left[\sqrt{\sum_{(s)} \rho'^2_s(\lambda_1)} + \sqrt{\sum_{(s)} \rho'^2_s(\lambda_2)} \right] \leqq 2\, G^2 \sqrt{\Delta\rho'_0(\lambda)} \cdot \sqrt{\rho'_0(b)}.$$

Daraus folgt, da $\rho'_0(\lambda)$ stetig ist, auch die Stetigkeit von $\sum_{(s)} \rho'^2_s(\lambda)$, w. z. b. w.

Um die oben erwähnte Analogie vollständig zu machen, muss noch folgende für eine Multiplikation mit einem konstanten Faktor selbstverständliche Gruppeneigenschaft bewiesen werden:

Satz 16. *Zwei aufeinander folgende Transformationen vom Typus* $\int_0^\lambda \frac{dP(x)\,df}{d\rho_0} = P'(x; \lambda)$ *lassen sich durch eine einzige derselben Art ersetzen.*

Voraussetzung: $\int_0^\lambda \frac{dP^2(x)}{d\rho_0}$, $\int_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho_0} = \rho'_0(\lambda)$, $\int_0^\lambda \frac{df'^2}{d\rho'_0} = \rho_0''(\lambda)$

existieren; gebildet werden nacheinander die neuen Linearformen

$$P'(x; \lambda) = \int_0^\lambda \frac{dP(x)\,df}{d\rho_0}, \quad P''(x; \lambda) = \int_0^\lambda \frac{dP'(x)\,df'}{d\rho'_0}.$$

Behauptung:

$$P''(x; \lambda) = \int_0^\lambda \frac{dP(x)d\sigma}{d\rho_0}, \quad \rho_0''(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{d\sigma^2}{d\rho_0}$$

mit geeignet gewählter Funktion $\sigma(\lambda)$.

Tatsächlich werden diese Forderungen von der Funktion $\sigma(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{df df'}{d\rho'_0}$ erfüllt, denn erstens gilt nach dem Sonderfall des Satzes t) auf S. 15

$$\int_0^\lambda \frac{df' d\int_0^\lambda \frac{dP(x)df}{d\rho_0}}{d\rho'_0} = \int_0^\lambda \frac{dP(x) d\int_0^\lambda \frac{df df'}{d\rho'_0}}{d\rho_0} = \int_0^\lambda \frac{dP(x)df df'}{d\rho_0 d\rho'_0}$$

und ferner hat man nach Satz s)

$$\int_0^\lambda \frac{d\sigma^2}{d\int_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho'_0}} = \int_0^\lambda \frac{df'^2}{d\rho'_0}$$

— denn das Gleichheitszeichen gilt, da $\int_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho_0'}$ nach Satz l) auf S. 10 als zweites Element der Folge stets umkehrbar ist, — also ist zweitens gemäss der Folgerung zu Satz n)

$$\int_0^\lambda \frac{d\sigma^2}{d\rho_0} = \rho_0''(\lambda).$$

Für $P''(x;\lambda)$ spielt $\sigma(\lambda)$ genau dieselbe Rolle, wie $f(\lambda)$ für $P'(x;\lambda)$; man hat zur Bildung von $\rho''_0(\lambda)$ die Zwischenstufe ebenfalls nicht nötig. Die Basis $\rho''_0(\lambda)$ hängt also von der Art der Bildung von $P''(x;\lambda)$ nicht ab, sondern ist eindeutig bestimmt.

Ausserdem gilt

$$\int_0^\lambda \frac{dP''^2(x)}{d\rho''_0} \leqq \int_0^\lambda \frac{dP'^2(x)}{d\rho'_0} \leqq \int_0^\lambda \frac{dP^2(x)}{d\rho_0}. \tag{23}$$

Die Ungleichungen gehen in Gleichungen über, wenn $\int_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho_0} = \rho'_0(\lambda)$ und $\int_0^\lambda \frac{df'^2}{d\rho'_0} = \rho''_0(\lambda)$ umkehrbar sind. Dann ist auch $\int_0^\lambda \frac{d\sigma^2}{d\rho_0} = \rho''_0(\lambda)$ umkehrbar.

Wählt man insbesondere beim ersten Schritt $f(\lambda) = \rho_0(\lambda)$, so erhält man die identische Transformation $P'(x;\lambda) = P(x;\lambda)$.

Multiplikationen mit einem konstanten Faktor sind für $f(\lambda) = c\,\rho_0(\lambda)$ auch mit in dieser Transformationsklasse enthalten.

Insbesondere wird die Frage nach der Existenz der Umkehrtransformation interessieren. In bezug darauf gilt

Satz 17. *Die Umkehrtransformation zu* $P'(x;\lambda) = \int_0^\lambda \frac{dP(x)\,df}{d\rho_0}$ *existiert im allgemeinen nur, falls* $\int_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho_0}$ *umkehrbar ist. In diesem Fall ist sie eindeutig bestimmt und wird durch dieselbe Funktion* $f(\lambda)$ *geleistet:*

$$\int_0^\lambda \frac{dP'(x)df}{d\rho'_0} = P(x;\lambda).$$

Die Voraussetzung der Umkehrbarkeit von $\int\limits_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho_0}$ ist ganz naturgemäss, da nur in diesem Fall die Funktionen $\rho_0(\lambda)$ und $\rho'_0(\lambda)$ gleichberechtigt sind.

Man hat die Gleichung

$$\int\limits_0^\lambda \frac{df'\, d\int\limits_0^\lambda \frac{dP(\mathrm{x})\, df}{d\rho_0}}{d\rho'_0} = P(\mathrm{x};\, \lambda)$$

nach $f'(\lambda)$ aufzulösen, und zwar identisch für alle zugelassenen Wertsysteme x. Man kann ihr mit Hilfe von Satz t) die Form geben

$$\int\limits_0^\lambda \frac{dP(\mathrm{x})\left(d\rho_0 - d\int\limits_0^\lambda \frac{df\, df'}{d\rho'_0}\right)}{d\rho_0} = 0.$$

Bezüglich des Integrales $\int\limits_0^\lambda \frac{dP^2(\mathrm{x})}{d\rho_0}$ ist nun die Bemerkung zu machen, dass es noch von der Wahl des Wertsystemes x abhängen wird, ob es umkehrbar ist oder nicht. Im allgemeinen wird sowohl das eine, wie auch das andere vorkommen, z. B. tritt das in einem später anzugebenden Sonderfall ein[62]). Da nun die Gleichung für *alle* Systeme x bestehen soll, so kann man je nach Bedürfnis das eine oder das andere annehmen. An dieser Stelle setzt man Umkehrbarkeit voraus und schliesst daraus nach einer der ergänzenden Bemerkungen von S. 15 f., dass

$$\int\limits_0^\lambda \frac{df\, df'}{d\rho'_0} = \rho_0(\lambda) \text{ oder auch } \int\limits_0^\lambda \frac{d\rho_0\, df\, df'}{d\rho_0\, d\rho'_0} = \rho_0(\lambda)$$

gelten muss.

[62]) Siehe weiter unten im Anschluss an Fl (37).

Nun hat man zwei Fälle zu unterscheiden. 1) $\int\limits_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho_0}$ sei umkehrbar. Dann ist

$$\int\limits_0^\lambda \frac{df df'}{d\rho'_0} = \int\limits_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho'_0}, \quad \int\limits_0^\lambda \frac{df(df-df')}{d\rho'_0} = 0.$$

Da ferner $\int\limits_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho'_0}$ in jedem Fall nach Satz l) umkehrbar ist, so muss wie vorhin $f'(\lambda) = f(\lambda)$ sein. Dass bei dieser Voraussetzung $f'(\lambda) = f(\lambda)$ tatsächlich eine Lösung liefert, steht in Übereinstimmung mit Satz r), da dann die Umkehrfunktion $\rho_0(\rho'_0)$ totalstetig ist.

Nach dem vorigen gilt in diesem Fall in (22) das Gleichheitszeichen und man hat auch noch allgemeiner für jede stetige Funktion $u(\lambda)$

$$\int\limits_0^\lambda u \frac{dP'^2(x)}{d\rho'_0} = \int\limits_0^\lambda u \frac{dP^2(x)}{d\rho_0}, \tag{24}$$

wie man mit Hilfe von Satz 10a leicht erkennt.

2) $\int\limits_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho_0}$ sei nicht umkehrbar. Auf Grund der Lebesgueschen Integraldarstellung für $\int\limits_0^\lambda \frac{d\rho_0 \, df \, df'}{d\rho_0 \, d\rho'_0}$ ist das Produkt der beiden Ableitungen von f nach ρ_0 und von f' nach ρ'_0 fast überall auf der ρ_0-Achse gleich 1. Nach der Voraussetzung verschwindet aber die Ableitung von f nach ρ_0 auf einer Nichtnullmenge. Es besteht also ein Widerspruch, die Gleichung ist unlösbar.

Ausser der besprochenen Erweiterung durch ein Hellingersches Integral kommt noch die Summation zweier der in Rede stehenden Formen $P'(x; \lambda) = \sum_{(s)} \rho'_s(\lambda) x_s$

und $P_s'(x; \lambda) = \sum_{(s)} \rho''_s(\lambda) x_s$ (im gleichen Intervall) in Betracht. Auch durch diese Operation erhält man eine Form mit denselben Eigenschaften, wenn man der Summenform als Basis die Summe der Basen $\rho'_0(\lambda) + \rho''_0(\lambda)$ zuordnet.

Von der gleichmässigen Konvergenz der Quadratsumme der neuen Koeffizienten überzeugt man sich auf Grund der Abschätzung

$$\sum_{(s)} \Big[\rho'_s(\lambda) + \rho''_s(\lambda)\Big]^2 \leqq \Big[\sqrt{\sum_{(s)} \rho'^2_s(\lambda)} + \sqrt{\sum_{(s)} \rho''^2_s(\lambda)}\Big]^2 \leqq$$

$$\leqq \left(G'\sqrt{\rho'_0(\lambda)} + G''\sqrt{\rho''_0(\lambda)}\right)^2, \qquad (25)$$

da $\sum_{(s)} \rho'^2_s(\lambda)$ und $\sum_{(s)} \rho''^2_s(\lambda)$ gleichmässig konvergieren. Nach f) existiert auch $\int_0^\lambda \frac{d\,[P'(x) + P''(x)]^2}{d(\rho'_0 + \rho''_0)}$ und es gilt für alle Wertsysteme x_s, für die $\sum_{(s)} x_s^2 \leqq 1$ ist,

$$\int_0^\lambda \frac{d\,[P'(x) + P''(x)]^2}{d(\rho'_0 + \rho''_0)} \leqq \left[\sqrt{\int_0^\lambda \frac{dP'^2(x)}{d\rho'_0}} + \sqrt{\int_0^\lambda \frac{dP''^2(x)}{d\rho''_0}}\right]^2 \leqq$$

$$\leqq (G' + G'')^2, \qquad (26)$$

weil man im einzelnen Quadratintegral den Nenner stets durch eine schneller wachsende monotone Funktion ersetzen kann, ohne die Existenz des Integrales aufzuheben und seine Schranke zu ändern, demzufolge also $\rho'_0(\lambda) + \rho''_0(\lambda)$ als gemeinsamen Nenner einführen kann.

Auch dieser Operation kommt natürlich die oben erwähnte Gruppeneigenschaft zu, wobei die Basis ebenfalls eindeutig bestimmt ist.

Um eine Aussage machen zu können über das Verhalten von unendlichen Summen derartiger Formen, benötigt man den

Hilfssatz. *Konvergiert eine unendliche Folge von Wertsystemen* $x_s^{(\nu)}$, $s, \nu = 1, 2 \ldots$, *deren Quadratsummen* $\sum_{(s)} x_s^{(\nu)2}$ *sämtlich unter einer und derselben festen Schranke* S

bleiben, gegen ein Grenzsystem ξ_s derart, dass $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_s^{(\nu)} = \xi_s$, $s = 1, 2 \ldots$, so bleibt auch die Quadratsumme des Grenzsystems $\sum\limits_{(s)} \xi_s^2$ unter derselben Schranke.

Denn würde $\sum\limits_{(s)} \xi_s^2$ über S hinauswachsen, so gäbe es ein m derart, dass $\sum\limits_{s=1}^{m} \xi_s^2 > S$ ist. Dann könnte man diese endliche Summe durch die Folge beliebig annähern, d. h. es gäbe dann für das gewählte m einen Index n, so dass $\sum\limits_{s=1}^{m} (x_s^{(n)})^2 > S$ wäre. Das ist aber nach der Voraussetzung nicht möglich, denn danach gilt für sämtliche m und n $\sum\limits_{s=1}^{m} (x_s^{(n)})^2 \leqq S$.

Der entsprechende Satz gilt aber nicht für Wertsysteme mit konvergenter Quadratsumme schlechtweg, wie das Gegenbeispiel zeigt

s	1	2	3			
$x_s^{(1)}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{\frac{1}{2}\rho_1}$	$\sqrt{\frac{1}{3}\rho_1}$	$\ldots$	$\sum\limits_{(s)} \frac{1}{s^{\rho_1}}$	konvergent,
$x_s^{(2)}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{\frac{1}{2}\rho_2}$	$\sqrt{\frac{1}{3}\rho_2}$	$\ldots$	$\sum\limits_{(s)} \frac{1}{s^{\rho_2}}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$			
ξ_s	$\sqrt{1}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\ldots$	$\sum\limits_{(s)} \frac{1}{s}$	divergent,

wo ρ_ν eine von oben gegen 1 konvergente Zahlenfolge bedeutet. Hier wachsen nämlich die Quadratsummen $\sum\limits_{(s)} \frac{1}{s^{\rho_\nu}}$ mit ν über alle Grenzen.

Satz 18. *Eine unendliche Reihe von P-Formen $\sum\limits_{(\nu)} P^{(\nu)}(x; \lambda) = P(x; \lambda)$ stellt wiederum eine solche dar, wenn die Summe der Schranken $\sum\limits_{(\nu)} G^{(\nu)} = G$ und die Summe der Basen $\sum\limits_{(\nu)} \rho_0^{(\nu)}(\lambda) = \rho_0(\lambda)$ konvergiert; letztere Konvergenz ist, da es sich um monotone Funktionen handelt, stets gleichmässig.*

Zunächst wird eine endliche Anzahl n von Formen summiert. Dann gilt in Erweiterung von (25) und (26) — $\sum\limits_{(\nu)} G^{(\nu)2}$ konvergiert natürlich erst recht —

$$\sum_{(s)}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\rho_s^{(\nu)}(\lambda)\right)^2 \leqq \left[\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{\sum_{(s)}\rho_s^{(\nu)2}(\lambda)}\right]^2 \leqq \left[\sum_{\nu=1}^{n}G^{(\nu)}\sqrt{\rho_0^{(\nu)}(\lambda)}\right]^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{n}G^{(\nu)2}\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\rho_0^{(\nu)}(\lambda) \leqq \sum_{(\nu)}G^{(\nu)2}\cdot\rho_0(\lambda) \tag{27}$$

und

$$\int_0^\lambda \frac{d\left[\sum_{\nu=1}^{n}P^{(\nu)}(x)\right]^2}{d\sum_{\nu=1}^{n}\rho_0^{(\nu)}} \leqq \left[\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{\int_0^\lambda\frac{dP^{(\nu)2}(x)}{d\rho_0^{(\nu)}}}\right]^2 \leqq$$

$$\leqq \left[\sum_{(\nu)}\sqrt{\int_0^\lambda\frac{dP^{(\nu)2}(x)}{d\rho_0^{(\nu)}}}\right]^2 \leqq G^2. \tag{28}$$

Aus (27) schliesst man auf die gleichmässige Konvergenz der neuen Koeffizienten $\sum_{(\nu)}\rho_s^{(\nu)}(\lambda)$ und damit auf ihre Stetigkeit. Denn man hat erst recht für ein einzelnes Glied der äusseren Summe

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\rho_s^{(\nu)}(\lambda)\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n}G^{(\nu)}\sqrt{\rho_0^{(\nu)}(\lambda)} \leqq \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}G^{(\nu)2}}\cdot\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}\rho_0^{(\nu)}(\lambda)}$$

und eine entsprechende Abschätzung gilt auch für jeden Ausschnitt aus der Reihe $\sum_{(\nu)}\rho_s^{(\nu)}(\lambda)$. Da nun die endlichen Summen $\sum_{\nu=1}^{n}\rho_s^{(\nu)}(\lambda)$ gegen die unendlichen $\sum_{(\nu)}\rho_s^{(\nu)}(\lambda)$ konvergieren und die Schranke $\sum_{(\nu)}G^{(\nu)2}\cdot\rho_0(\lambda)$ in (27) unabhängig von n ist, so ist die Quadratsumme der letzteren nach dem Hilfssatz ebenfalls konvergent und es gilt für sie dieselbe Abschätzung:

$$\sum_{(s)}\left(\sum_{(\nu)}\rho_s^{(\nu)}(\lambda)\right)^2 \leqq \sum_{(\nu)}G^{(\nu)2}\cdot\rho_0(\lambda). \tag{29}$$

Die mit den unendlichen Summen als Koeffizienten gebildete Form ist somit eine beschränkte Linearform.

Wegen der Eigenschaft der Vollstetigkeit beschränkter Linearformen[63]) ist hierin das allgemeinere Zwischenresultat enthalten, dass eine unendliche Reihe

[63]) Siehe Hlg. Habil., S. 248.

von beschränkten Linearformen wiederum eine solche darstellt, d. h. Umordnung der Summationen erlaubt ist, falls die Reihe ihrer Schranken konvergiert:

$$\sum_{(\nu)}\sum_{(s)}\rho_s^{(\nu)}(\lambda)\,x_s = \sum_{(s)} x_s \cdot \sum_{(\nu)}\rho_s^{(\nu)}(\lambda). \tag{30}$$

Ganz wie (29) beweist man die entsprechende Beziehung für die Differenzen:

$$\sum_{(s)}\Big(\Delta \sum_{(\nu)}\rho_s^{(\nu)}(\lambda)\Big)^2 \leqq \sum_{(\nu)} G^{(\nu)2} \cdot \Delta\rho_0(\lambda). \tag{31}$$

Weiter kann man ganz analog zu den Überlegungen auf S. 49 die Stetigkeit der Quadratsumme der Koeffizienten der Summenform erschliessen. Man hat nur $\sum_{(\nu)}\rho_s^{(\nu)}(\lambda)$ an Stelle von $\rho'_s(\lambda)$ zu setzen.

$$\left|\Delta \sum_{(s)}\Big(\sum_{(\nu)}\rho_s^{(\nu)}(\lambda)\Big)^2\right| \leqq \sqrt{\sum_{(s)}\Delta\Big(\sum_{(\nu)}\rho_s^{(\nu)}(\lambda)\Big)^2}\,\left[\sqrt{\sum_{(s)}\Big(\sum_{(\nu)}\rho_s^{(\nu)}(\lambda_1)\Big)^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{(s)}\Big(\sum_{(\nu)}\rho_s^{(\nu)}(\lambda_2)\Big)^2}\,\right]^2 \leqq 2\sum_{(\nu)} G^{(\nu)2}\cdot\sqrt{\Delta\rho_0(\lambda)}\,\sqrt{\rho_0(b)}.$$

Danach ist die Quadratsumme stetig, da $\rho_0(\lambda)$ nach der Voraussetzung über die gleichmässige Konvergenz stetig ist. Zugleich ist damit wie auf S. 46 die Stetigkeit der Summenform $P(x;\lambda)$ selbst bewiesen.

Aus (28) folgt endlich die Existenz von $\displaystyle\int_0^\lambda \frac{dP^2(x)}{d\rho_0}$;

denn es gilt für alle n und für eine beliebige Unterteilung des Intervalles $(0, \lambda)$ in Teilintervalle Δ_i

$$\sum_i \frac{\Big[\Delta_i \sum\limits_{\nu=1}^{n} P^{(\nu)}(x)\Big]^2}{\Delta_i\rho_0} \leqq \sum_i \frac{\Big[\Delta_i \sum\limits_{\nu=1}^{n} P^{(\nu)}(x)\Big]^2}{\Delta_i \sum\limits_{\nu=1}^{n}\rho_0^{(\nu)}} \leqq \left[\sum_{(\nu)}\sqrt{\int_0^\lambda \frac{dP^{(\nu)2}(x)}{d\rho_0^{(\nu)}}}\,\right]^2.$$

Da nun die Summen $\sum\limits_{\nu=1}^{n} P^{(\nu)}(x;\lambda)$ gegen $P(x;\lambda)$ konvergieren, muss auch $\displaystyle\sum_i \frac{\Delta_i P^2(x)}{\Delta_i\rho_0}$ unter derselben von der Intervallunterteilung unabhängigen Schranke bleiben, womit nach Satz b) die Existenz des entsprechenden Integrales sichergestellt ist. Man hat somit

$$\int_0^\lambda \frac{dP^2(\mathrm{x})}{d\rho_0} \leqq \left[\sum_{(\nu)} \sqrt{\int_0^\lambda \frac{dP^{(\nu)^2}(\mathrm{x})}{d\rho_0^{(\nu)}}}\right]^2 \leqq G^2. \qquad (32)$$

Die beiden auf P-Formen angewandten Operationen der Erweiterung durch ein Hellingersches Integral und der Summation lassen sich auch vereinigen. Man erhält dadurch eine „lineare Kombination“ $\sum_{\nu=1}^{n} \int_0^\lambda \frac{dP^{(\nu)}(\mathrm{x})\, df^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}}$, die einer gewöhnlichen linearen Kombination beschränkter Linearformen analog ist. Auch für sie besteht die Gruppeneigenschaft, die für die letzteren trivial ist:

Satz 19. *Eine lineare Kombination der in Rede stehenden speziellen beschränkten Linearformen in oben erklärtem Sinn von einer linearen Kombination ist wiederum eine solche der ursprünglichen Formen; Eindeutigkeit der Basis besteht aber nur, wenn jede der ursprünglichen Linearformen nur einmal verwendet wird.*

Dass die Basis allgemein nicht eindeutig bestimmt sein kann, zeigt schon das einfache Beispiel

$$\int_0^\lambda \frac{dP(\mathrm{x})\,df}{d\rho_0} + \int_0^\lambda \frac{dP(\mathrm{x})\,df_1}{d\rho_0} = \int_0^\lambda \frac{dP(\mathrm{x})\,d(f+f_1)}{d\rho_0}, \qquad (33)$$

wo dieselbe Form zweimal verwendet wird. Eindeutigkeit der Basis besteht hier nur bei der Zusatzbedingung

$$\int_0^\lambda \frac{df\,df_1}{d\rho_0} = 0.$$

Es seien n verschiedene Linearformen $P^{(\nu)}(\mathrm{x};\lambda)$, $\nu = 1, 2 \ldots n$, gegeben. Sie mögen mit den Funktionen $f^{(\nu)}(\lambda)$ erweitert und dann addiert werden und das Resultat werde wiederum mit einer neuen Funktion $f(\lambda)$ erweitert. Dieses ist ein Sonderfall des Satzes, bei dem auch noch Eindeutigkeit der Basis besteht. Seinerseits enthält er den Fall einer einfachen durch *eine* Funktion erweiterten Summe von Formen.

$$P(\mathrm{x};\lambda)=\sum_{\nu=1}^{n}\int_0^\lambda\frac{dP^{(\nu)}(\mathrm{x})\,df^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}}\text{ hat die Basis }\rho_0(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{n}\int_0^\lambda\frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}}.$$

Es gilt

$$\int_0^\lambda\frac{dP(\mathrm{x})\,df}{d\rho_0}=\sum_{\nu=1}^{n}\int_0^\lambda\frac{df\,d\int_0^\lambda\frac{dP^{(\nu)}(\mathrm{x})\,df^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}}}{d\rho_0}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\int_0^\lambda\frac{dP^{(\nu)}(\mathrm{x})\,d\int_0^\lambda\frac{df\,df^{(\nu)}}{d\rho_0}}{d\rho_0^{(\nu)}}=\sum_{\nu=1}^{n}\int_0^\lambda\frac{dP^{(\nu)}(\mathrm{x})\,d\sigma^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}}.$$

Die Vertauschung der Integrationsfolge in jedem einzelnen Glied ist nach Satz t) gestattet, dessen Voraussetzungen erfüllt sind, nämlich $\int_0^\lambda\frac{df^2}{d\rho_0}$ und $\int_0^\lambda\frac{dP^{(\nu)2}(\mathrm{x})}{d\rho_0^{(\nu)}}$ existieren und es gilt $\Delta f^{(\nu)2}\leqq\Delta\rho_0^{(\nu)}\int_\Delta\frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}}\leqq\Delta\rho_0^{(\nu)}\,\Delta\rho_0$.
Man beachte, dass hier nicht der Sonderfall des angegebenen Satzes in Frage kommt, sondern der allgemeine Fall, da $\rho_0(\lambda)$ an Stelle von $\int_0^\lambda\frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}}$ als Nenner benutzt wird.

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen, denn es sind geeignete Funktionen $\sigma^{(\nu)}(\lambda)=\int_0^\lambda\frac{df\,df^{(\nu)}}{d\rho_0}$ gefunden, aus denen $\int_0^\lambda\frac{dP(\mathrm{x})df}{d\rho_0}$ sich linear aufbaut. Ferner muss die Gleichheit der Basis der linken und der rechten Seite gezeigt werden, d. h.

$$\int_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho_0} = \sum_{\nu=1}^n \int_0^\lambda \frac{d\sigma^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}}.$$

Das beweist man, indem man auf jedes Glied der Summe rechts zweimal hintereinander die vorhin ausgeführte Umformung anwendet; das ist zulässig, da $\int_0^\lambda \frac{df\,df^{(\nu)}}{d\rho_0}$ bzw. $f^{(\nu)}(\lambda)$ an Stelle von $P^{(\nu)}(x;\lambda)$ treten kann.

$$\sum_{\nu=1}^n \int_0^\lambda \frac{d\sigma^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}} = \sum_{\nu=1}^n \int_0^\lambda \frac{df\,d\int_0^\lambda \frac{df^{(\nu)}\,d\int_0^\lambda \frac{df\,df^{(\nu)}}{d\rho_0}}{d\rho_0^{(\nu)}}}{d\rho_0} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^n \int_0^\lambda \frac{df\,d\int_0^\lambda \frac{df\,d\int_0^\lambda \frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}}}{d\rho_0}}{d\rho_0} = \int_0^\lambda \frac{df\,d\int_0^\lambda \frac{df\,d\sum_{\nu=1}^n \int_0^\lambda \frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}}}{d\rho_0}}{d\rho_0} = \int_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho_0}.$$

Im allgemeinen Fall hat man aus weiteren Formengruppen $P^{(\nu)}(x;\lambda)$ mit neuen Funktionen $f^{(\nu)}(\lambda)$ und $f(\lambda)$ entsprechende Ausdrücke zu bilden und hinterher alle miteinander zu summieren. Sind bei der Bildung der weiteren Gruppen nur neue Formen verwendet, also alle ursprünglichen Formen verschieden voneinander, so kommt zu dem vorigen nur die Summation hinzu; sind aber dieselben Formen mehrfach verwendet, treten sie also im Resultat in mehreren Gliedern auf, so sind diese noch zu einem zu vereinigen nach dem Schema (33). Die Summenform erscheint in allen Fällen als lineare Kombination aller auftretenden ursprünglichen Formen; die Basis ist aber nur im ersten Falle eindeutig bestimmt, weil es bei allen einzelnen Schritten so ist, während im zweiten Fall der hinzukommende letzte Schritt wie erwähnt diese Eigenschaft nicht besitzt und damit auch die zusammengesetzte Summenform ebenfalls nicht.

Alle in diesem Abschnitt bisher behandelten Fragen sind besonders angepasst der Anwendung auf eine spezielle Klasse beschränkter Linearformen, nämlich auf die sogenannten Orthogonalformen.

Die Linearform $P(x; \lambda) = \sum\limits_{(s)} \rho_s(\lambda) x_s$ mit der Basis $\rho_0(\lambda)$ bildet im Intervall (a, b) ein System orthogonaler Differentialformen oder — um hier eine kürzere Bezeichnungsweise einzuführen — eine orthogonale Integralform, falls $\sum\limits_{(s)} \rho_s^2(\lambda)$ innerhalb (a, b) gegen eine stetige Funktion von λ konvergiert und für alle möglichen Teilintervalle Δ_1 und Δ_2 die Beziehung besteht

$$\sum_{(s)} \Delta_1 \rho_s(\lambda)\, \Delta_2 \rho_s(\lambda) = \Delta_{12} \rho_0(\lambda), \tag{34}$$

wo Δ_{12} das gemeinsame Stück von Δ_1 und Δ_2 bedeutet; symbolisch ausgedrückt, falls

$$\sum_{(s)} d\rho_s(\lambda)\, d\rho_s(\lambda') = \begin{cases} 0, & \lambda' \neq \lambda \\ d\rho_0(\lambda), & \lambda' = \lambda, \end{cases}$$

woher der Name herrührt[64]). $\rho_0(\lambda)$ ist notwendig monoton und stetig; letzteres erkennt man daraus, dass $\rho_0(\lambda)$ bei der gewöhnlichen Normierung aller Funktionen mit $\sum\limits_{(s)} \rho_s^2(\lambda)$ übereinstimmen muss.

Eine solche Orthogonalform besitzt als Funktion von λ mit $\rho_0(\lambda)$ als Basis das Integral $\int\limits_a^b \frac{dP^2(x)}{d\rho_0}$ und dieses bleibt für alle Wertsysteme x_s mit $\sum\limits_{(s)} x_s^2 \leqq 1$ unterhalb der Schranke 1.[65]) Also ist die grundlegende Bedingung von S. 47 erfüllt, es gelten für diese Formen alle früher aufgestellten Sätze über P-Formen.

Unter einem Orthogonalsystem von Integralformen im Intervall (a, b) versteht man ferner ein System von solchen Formen $P^{(\nu)}(x; \lambda)$, $\nu = 1, 2 \ldots$, von denen jede

[64]) Siehe Hlg. Habil., S. 246.
[65]) Siehe Hlg. Habil., S. 248.

einzelne eine orthogonale Integralform ist und die ausserdem alle *zueinander* orthogonal sind, d. h. für die gilt [66])

$$\sum_{(s)} \Delta_1\rho_s^{(\nu)}(\lambda)\, \Delta_2\rho_s^{(\mu)}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu \\ \Delta_{12}\, \rho_0^{(\nu)}(\lambda), & \mu = \nu. \end{cases} \tag{35}$$

Aus diesen Orthogonalitätsrelationen folgen die allgemeineren Beziehungen [67])

$$\sum_{(s)} \int_{\Delta_1} \frac{d\rho_s^{(\nu)} df}{d\rho_0^{(\nu)}} \int_{\Delta_2} \frac{d\rho_s^{(\mu)} df_1}{d\rho_0^{(\mu)}} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu \\ \displaystyle\int_{\Delta_{12}} \frac{df\, df_1}{d\rho_0^{(\nu)}}, & \mu = \nu, \end{cases} \tag{36}$$

die (35) als Sonderfall [für $f(\lambda) = \rho_0^{(\nu)}(\lambda)$, $f_1(\lambda) = \rho_0^{(\mu)}(\lambda)$] enthalten. Sie bedeuten, dass auch ein durch Erweiterung jeder Form erhaltenes neues System von Formen $\displaystyle\int_0^\lambda \frac{dP^{(\nu)}(\mathrm{x})\, df^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}}$, $\nu = 1, 2 \ldots$, ein Orthogonalsystem ist, wobei gerade $\displaystyle\int_0^\lambda \frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}}$ die Rolle der Basis jeder neuen Form übernimmt.

Da es sich in dieser Arbeit in der Hauptsache um die Eigenschaften der *allgemeinen* Formen vom Typus $P(\mathrm{x};\ \lambda)$ handelt, seien bezüglich der Orthogonalformen nur noch einige Bemerkungen hinzugefügt, die in unmittelbarem Zusammenhang mit den früheren Resultaten stehen.

Die Beziehungen (36) lassen sich noch erweitern zu

$$\sum_{(s)} \int_{\Delta_1} u \frac{d\rho_s^{(\nu)} df}{d\rho_0^{(\nu)}} \int_{\Delta_2} u_1 \frac{d\rho_s^{(\mu)} df_1}{d\rho_0^{(\mu)}} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu \\ \displaystyle\int_{\Delta_{12}} u u_1 \frac{df\, df_1}{d\rho_0^{(\nu)}}, & \mu = \nu. \end{cases} \tag{37}$$

Dazu hat man auf sie nur die Sätze 10b und 11b anzuwenden.

---

[66]) Siehe Hlg. Habil., S. 251.

[67]) Vgl. Hlg. Habil., S. 249.

Es gibt Wertsysteme x_s, für die das Integral $\int_0^\lambda \frac{dP^2(x)}{d\rho_0}$ umkehrbar, und solche, für die es nicht umkehrbar ist. Wählt man nämlich insbesondere $x_s = \rho_s(\lambda_0)$ mit einem festen Wert λ_0 aus dem Intervall $(0, b)$, so wird auf Grund von (34)

$$P(x; \lambda) = \begin{cases} \rho_0(\lambda) & \text{für } \lambda \leqq \lambda_0 \\ \rho_0(\lambda_0) & \text{für } \lambda \geqq \lambda_0, \end{cases}$$

da es sich hier um eine Überdeckung der Intervalle $(0, \lambda)$ und $(0, \lambda_0)$ handelt. Speziell für $x_s = \rho_s(b)$ ist hingegen überall $P(x; \lambda) = \rho_0(\lambda)$. In einem Fall ist also $\int_0^\lambda \frac{dP^2(x)}{d\rho_0}$ nicht umkehrbar [68]), im anderen wohl.

Folgerung. Falls für eine orthogonale Integralform $\int_0^\lambda \frac{dP(x)\,df}{d\rho_0} = 0$ identisch für alle zugelassenen Wertsysteme x_s ist, so ist notwendig $f(\lambda) =$ konst. Denn man kann $\int_0^\lambda \frac{dP^2(x)}{d\rho_0}$ umkehrbar annehmen.

Setzt man in der Beziehung (22) $x_s = \rho_s(b)$, so reduziert sich $P(x; \lambda)$ auf $\rho_0(\lambda)$, also $P'(x; \lambda)$ auf $f(\lambda)$, und die Beziehung auf

$$\int_0^\lambda \frac{df^2}{d\int_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho_0}} \leqq \rho_0(\lambda).$$

Ob nun hier das Gleichheitszeichen oder das Ungleichheitszeichen steht, das kommt darauf an, ob $\int_0^\lambda \frac{df^2}{d\rho_0}$

[68]) Vgl. Beiträge 1, S. 185.

umkehrbar gewählt ist oder nicht. Orthogonalität der Formen genügt also nicht etwa dazu, dass das Gleichheitszeichen gilt.

Aus den Orthogonalitätsrelationen (35) kann man durch mehrfache Anwendung folgern, dass die Summe zweier oder mehrerer Formen eines Orthogonalsystems wieder eine orthogonale Integralform im gleichen Intervall ist, wobei gerade die Summe der Basen $\sum_{\nu=1}^{n} \rho_0^{(\nu)}(\lambda)$ die Rolle der neuen Basis übernimmt, d. h. gleich der Quadratsumme der Koeffizienten der Summenform ist.

Durch die angegebenen beiden Operationen, die früher auf allgemeinere Linearformen angewendet wurden, kommt man also nicht aus dem Bereich der Orthogonalformen heraus, und zwar reproduzieren sich die Basen der Formen (im alten Sinn von S. 47) in allen Fällen gerade in der Weise, dass sie durch die entstehende Form selbst bestimmt sind, nämlich als Quadratsumme ihrer Koeffizienten. Der frühere Begriff „Basis" geht also bei Orthogonalformen in dem jetzigen auf.

Satz 18 gilt für Orthogonalformen in verschärfter Form. Es genügt, Konvergenz der Summe der Basen $\sum_{(\nu)} \rho_0^{(\nu)}(\lambda) = \sum_{(\nu)} \sum_{(s)} \rho_s^{(\nu)2}(\lambda)$ allein anzunehmen. Der frühere Beweis lässt sich diesem Fall anpassen. In den Abschätzungen (27) — (32) tritt an Stelle der Faktoren $\sum_{(\nu)} G^{(\nu)2}$ und G^2 die 1. Ausserdem kann zum Schluss auf Grund von (30) und (35) durch sogenannte wechselseitige, gliedweise Faltung von $\Delta_1 P(x;\lambda)$ mit $\Delta_2 P(x;\lambda)$ noch bewiesen werden, dass $P(x;\lambda)$ eine Orthogonalform ist mit $\sum_{(\nu)} \rho_0^{(\nu)}(\lambda)$ als Basis. An Stelle von (29) tritt somit die *Gleichung*

$$\sum_{(s)} \Big(\sum_{(\nu)} \rho_s^{(\nu)}(\lambda)\Big)^2 = \sum_{(\nu)} \rho_0^{(\nu)}(\lambda).$$

Der Sachverhalt ist also genau der gleiche wie bei endlichen Summen von Formen.

Sollte die Reihe der Basen nicht konvergieren, so kann sie dadurch konvergent gemacht werden, dass man die Formen zuerst mit geeigneten Funktionen $f^{(\nu)}(\lambda)$ erweitert. Man kommt so zu

Satz 20. *Eine unendliche lineare Kombination* $\sum_{(\nu)} \int_a^\lambda \frac{dP^{(\nu)}(x)\, df^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}}$ *der Formen eines Orthogonalsystems im Intervall* (a, b) *ist dann und nur dann, falls* $\sum_{(\nu)} \int_a^\lambda \frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}}$ *innerhalb* (a, b) *konvergiert, wieder eine orthogonale Integralform im gleichen Intervall, und zwar mit* $\sum_{(\nu)} \int_a^\lambda \frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}}$ *als Basis:*

$$\sum_{(\nu)} \sum_{(s)} x_s \int_a^\lambda \frac{d\rho_s^{(\nu)} df^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}} = \sum_{(s)} x_s \sum_{(\nu)} \int_a^\lambda \frac{d\rho_s^{(\nu)}\, df^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}},$$

$$\sum_{(s)} \left[\sum_{(\nu)} \int_a^\lambda \frac{d\rho_s^{(\nu)}\, df^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}} \right]^2 = \sum_{(\nu)} \int_a^\lambda \frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}} \text{ [69]}.$$

Wie man leicht erkennt, ist wegen der Monotonie der einzelnen Glieder die Konvergenz von $\sum_{(\nu)} \int_a^\lambda \frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}}$ gleichmässig im Intervall (a, b). Ferner folgt nach Satz 13 und einem Analogon zur Besselschen Ungleichung,

$\sum_{(\nu)} \int_a^b \frac{dP^{(\nu)2}(x)}{d\rho_0^{(\nu)}} \leqq \sum_{(s)} x_s^2$, gültig für ein Orthogonalsystem von Integralformen [70]),

[69]) Dieser Satz ist ebenfalls in der auf S. 40 zitierten Arbeit des Verfassers auf S. 41 verwendet worden. In der Hauptsache ist er schon von Hahn, a. a. O. S. 195, in Lebesguescher Integraldarstellung angegeben. Der von ihm geführte andersartige Beweis beruht auf speziellen Eigenschaften der Orthogonalformen.

[70]) Siehe Hlg. Habil., S. 251.

$$\left[\sum_{(\nu)}\int_a^\lambda \frac{dP^{(\nu)}(x)\,df^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}}\right]^2 \leqq \sum_{(\nu)}\int_a^\lambda \frac{dP^{(\nu)2}(x)}{d\rho_0^{(\nu)}}\,\cdot$$

$$\cdot\sum_{(\nu)}\int_a^\lambda \frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}} \leqq \sum_{(s)} x_s^2 \cdot \sum_{(\nu)}\int_a^\lambda \frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}}, \tag{38}$$

demnach auch die gleichmässige Konvergenz von $\sum_{(\nu)}\int_a^\lambda \frac{dP^{(\nu)}(x)\,df^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}}$. Damit ist die Stetigkeit der Summenform und ihrer Basis bestätigt.

Auch bei diesem Satz würde eine noch allgemeinere Fassung mit Hilfe von stetigen Funktionen $u^{(\nu)}(\lambda)$, also die Bildung von $\sum_{(\nu)}\int_a^\lambda u^{(\nu)}\frac{dP^{(\nu)}(x)\,df^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}}$ mit der Basis $\sum_{(\nu)}\int_a^\lambda u^{(\nu)2}\frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}}$ möglich sein, aber nichts wesentlich Neues geben, da man nach Satz 11b auch den quadratischen Ausdruck $\int_a^\lambda u^{(\nu)2}\frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}}$ auf den einfacheren Typus $\int_a^\lambda \frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}}$ mit geeigneter Zählerfunktion zurückführen kann [71]).

Die Notwendigkeit der Konvergenzbedingung des Satzes lässt sich dadurch beweisen, dass man in der „Besselschen Ungleichung“ $x_s = \sum_{(\nu)}\int_a^b \frac{d\rho_s^{(\nu)}\,df^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}}$ setzt.

[71]) Vgl. die diesbezügliche Bemerkung auf S. 39.

Das ist zulässig, da nach der Voraussetzung $\sum_{(s)}\left[\sum_{(\nu)}\int_a^b \frac{d\rho_s^{(\nu)}\, df^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}}\right]^2$ konvergent ist. Vermöge (30) und (36) reduziert sich dann $P^{(\nu)}(x;\,\lambda)$ auf $f^{(\nu)}(\lambda)$, also die Ungleichung auf

$$\sum_{(\nu)}\int_a^b \frac{df^{(\nu)2}}{d\rho_0^{(\nu)}} \leqq \sum_{(s)}\left[\sum_{(\nu)}\int_a^b \frac{d\rho_s^{(\nu)} df^{(\nu)}}{d\rho_0^{(\nu)}}\right]^2,$$

woraus die Konvergenz der linken Seite folgt.

Auch Satz 19 gilt für Orthogonalformen, und zwar ebenfalls in verschärfter Form; denn es ist zu beachten, dass bei der Bildung einer linearen Kombination nur zueinander orthogonale Formen gebraucht werden dürfen. Dadurch werden gerade jene Fälle ausgeschaltet, die früher eine Nichteindeutigkeit der Basis hervorriefen, nämlich solche, in denen *eine* Form mehrfach verwendet wird. Eine orthogonale Integralform ist ja zu sich selbst nicht orthogonal. Das steht in Übereinstimmung damit, dass die Basis jeder Orthogonalform stets durch diese selbst bestimmt ist und daher unabhängig von der Entstehungsweise der Form sein muss.

Die mehrfach erwähnte Analogie zwischen den gewöhnlichen beschränkten Linearformen und den hier in Rede stehenden lässt sich gerade im Gebiet der Orthogonalformen noch weiter verfolgen. Sie lässt sich verwenden zur Aufstellung der kanonischen Darstellung einer beschränkten quadratischen Form von unendlich vielen Veränderlichen[72]), und zwar durch Aufbau der Form aus ihren Eigenwerten, Eigenformen und Eigendifferential- bzw. -Integralformen. Da hierzu aber eine weitgehende Kenntnis der Eigenschaften der beschränkten quadratischen Formen erforderlich ist, geht die Ausführung über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

---

[72]) Siehe Hlg. Habil., S. 258.

Inhalt.

Berichtigungen.

Bei den beiden letzten Integralen auf S. 16, sowie dem ersten auf S. 48 hat die untere Grenze a statt 0 zu lauten.

In den Integralen der letzten Zeile von S. 31, sowie von S. 33 hat im Nenner durchweg ds zu stehen.

In der Formel vor Satz 12, S. 41, fehlt beim letzten f der Index 1.

Auf S. 49, Zeile 13 von oben, ist beim Faktor G das Quadrat zu streichen.