TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893 a. VIHIK 430 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XIX

FUNKTSIONAALANALÜÜS JA RAKENDUSED
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ПРИЛОЖЕНИЯ

ТАРТУ 1977

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 430 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XIX

FUNKTSIONAALANALÜÜS JA RAKENDUSED
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ПРИЛОЖЕНИЯ

ТАРТУ 1977

ПАМЯТИ ПРОФ. ГУННАРА КАНГРО

Советская наука понесла тяжелую утрату: 25 декабря 1975 г. в возрасте 62 лет, в полном расцвете творческих сил, научных планов и намерений, скоропостижно скончался выдающийся математик Советской Эстонии профессор Гуннар Кангро. Еще днем на кафедре он занимался обычной своей работой, закончил годовой отчет кафедры, подготовил материалы к итоговому заседанию Совета Математического факультета ТГУ, беседовал с коллегами и давал советы. Он был бодрым и веселым. Вечером же дома, готовя на завтра свою последнюю лекцию семестра, он за письменным столом внезапно ослаб и в течение получаса его не стало: отказало сердце.

Г. Кангро родился 21 ноября 1913 года в городе Тарту в семье инженера-строителя. После окончания Тартуского реального училища в 1931 году, он поступил в Тартуский университет, который окончил в 1935 году. До Великой Отечественной войны Г. Кангро работал ассистентом в Таллинском политехническом институте. С начала войны он служил в рядах Красной Армии, а в начале 1942 года был направлен в Челябинский инстиут механизации сельского хозяйства и затем в 1943 году в Московский государственный университет. С ноября месяца 1944 года до последних дней своей жизни Г. Кангро работал в Тартуском государственном университете. В 1938 году ему была присуждена ученая степень кандидата математических наук. С 1948 года он доктор физико-математических наук, а с 1951 года — профессор кафедры математического анализа. В 1961 году Г. Кангро был избран членом-корреспондентом Академии наук Эстонской ССР. В 1965 проф. Г. Кангро присвоено звание заслуженного деятеля науки ЭССР.

После окончания университета Г. Кангро развернул широкую научную деятельность. Под влиянием идей проф. Х. Яаксона и проф. Ю. Нуута его любимой областью исследований становится теория расходящихся рядов. В первых же работах он изучает возможность применения теории суммируемости в теории функций и вводит новый обобщенный метод Бореля B^{λ}_{α}, чем значительно расширилась сфера применения метода Бореля, в частности, при решении функциональных уравнений при помощи степенных рядов.

В первых послевоенных работах Г. Кангро изучает вопросы суммируемости произведения Коши рядов, которые он полностью решает для метода суммирования взвешенных средних Рисса, а также обобщает классические теоремы о сходимости, непрерывности, дифференцирования и интегрирования степенных рядов на ряды, суммируемые матричным методом.

В теории множителей суммируемости Г. Кангро получил окончательные результаты для метода взвешенных средних Рисса в общем случае, когда к ряду со множителями применяется произвольный регулярный матричный метод. Эти же проблемы Г. Кангро решает и для (абстрактных) рядов, членами которых являются элементы банаховых пространств, доказав при этом основополагающие теоремы о преобразовании абстрактных рядов матрицами непрерывных линейных операторов из одного банахова праствнства в другое.

Велики заслуги Г. Кангро также в теории двойных рядов. Он сдвинул с мертвой точки теорию множителей суммируемости двойных рядов, дав метод нахождения необходимых условий. Это дало ему возможность найти множители сходимости для целого класса нормальных матричных методов суммирования двойных рядов, в частности для методов Чезаро и Рисса.

Г. Кангро занимался также тауберовыми теоремами. Он применил теорию множителей суммируемости для ослабления тауберовых условий для рядов и последовательностей, а также для функций. Он показал, что точные тауберовы условия не зависят от порядка суммирования.

В вопросах приближения функций и в теории ортогональных рядов особенно важно оценить скорость приближения преобразованной последовательности к пределу. Для изучения этой скорости Г. Кангро создал основы теории суммируемости со скоростью. Он находит различные точные условия для сохранения сходимости со скоростью и решает более общие задачи. В частности, получает глубокие результаты по теории тауберовых теорем с остаточным членом, в том числе при односторонних тауберовых условиях. Он разрабатывает топологические основы обобщения понятия совершенности для суммируемости со скоростью.

Важные общие результаты Г. Кангро получает в теории ортогональных рядов, суммируемых со скоростью. В частности, он находит условия для множителей Вейля, выраженные через множители суммируемости и в других терминах, а также находит связи между множителями Вейля для суммируемости ортогональных рядов и для их суммируемости со скоростью для широкого класса методов суммирования. Теория Кангро суммируемости со скоростью позволяет многие трудные задачи (например, касающиеся мультипликаторов рядов Фурье) решать проще, ибо дает более естественный подход к их решению.

Последней печатной работой Г. Кангро была его обзорная статья «Теория суммируемости последовательностей и рядов» (Итоги науки и техники. Математический анализ, 1974, **12**, 5—70). В ней изложены достижения теории суммируемости за последнее десятилетие и указаны связи теории суммируемости со многими другими областями математики. Эта обзорная работа стала настольной для всех математиков, работающих по теории суммируемости и смежным ей областям.

Еще многие годы в высших школах Эстонии математику будут изучать по учебникам Г. Кангро по высшей алгебре и по математическому анализу, написанным на высоком научном уровне и с большим педагогическим мастерством.

Неоценима заслуга проф. Г. Кангро в воспитании научных кадров республики. Из его аспирантов около 30 защитило кандидатские диссертации.

Ученики проф. Г. Кангро еще долго будут под впечатлением его замечательных университетских лекций по многим областям математики, которые отличались тщательной подготовленностью и в которых он, в первую очередь, ставил научные проблемы и дискуссионные вопросы.

Все математики Эстонии, большинство которых являются учениками проф. Г. Кангро, сохранят о профессоре Г. Кангро светлую память и продолжат начатые им традиции, оказавшиеся столь плодотворными в подготовке новых математических кадров Советской Эстонии.

С. Барон, Э. Реймерс

Литература о проф. Г. Кангро

1. Jürimäe, E., Prof. G. Kangro 50-aastane. Matemaatika ja kaasaeg, 1963, **1**, 78—79.
2. Барон С., Юримяэ Э., Реймерс Э., Сырмус Т., К пятидесятилетию со дня рождения проф. Г. Кангро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 3—11.
3. Лумисте Ю., Тамме Э. и др., Математика в Советской Эстонии за последние двадцать лет. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 12—52.
4. Общие собрания Академии наук Эстонской ССР и ее отделений. Изв. АН ЭстССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1961, **10**, № 1, 64—81.
5. История отечественной математики, том 3. Киев, 1968.
6. Шестидесятилетие члена-корреспондента АН ЭССР Гуннара Кангро. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1973, 22, № 4, 455—457.
7. Барон С., Реймерс Э., К шестидесятилетию профессора Г. Кангро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, **342**, 3—12.
8. Tauts, A., Intervjuu professor Gunnar Kangroga. Matemaatika ja kaasaeg, 1975, **20**, 122—128.
9. Барон С., Реймерс Э., Юримяэ Э., Гуннар Фромхолдович Кангро (к шестидесятилетию со дня рождения). Успехи матем. наук, 1975, **30**, № 1, 273—278.
10. Барон С., Реймерс Э., Гуннар Кангро. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1976, **25**, № 1, 95—97.
11. Барон С., Реймерс Э., Юримяэ Э., Памяти Гуннара Фромхолдовича Кангро. Успехи матем. наук, 1977, **32**, № 1, 151—152.

УСЛОВИЯ ВСЮДУ ПЛОТНОСТИ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

М. Абель

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

Пусть X — топологическое пространство, A — локально выпуклое пространство над $\mathbf{F}$ (т. е. над полем $\mathbf{R}$ вещественных или над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел) и $\mathfrak{S}$ — семейство замкнутых подмножеств, покрывающих X. Через $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ будем обозначать совокупность всех тех непрерывных функций $f: X \to A$, для которых $f(S)$ относительно компактно в A для любого $S \in \mathfrak{S}$ и $f(F) = \{\theta_A\}$, где θ_A — нулевой элемент в A и F — замкнутое подмножество в X. Как известно (см. [6], стр. 103), пространство[1] $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ локально выпукло в топологии равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{S}$. При этом, если $\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ — семейство непрерывных полунорм, порождающее (отделимую) локально выпуклую топологию на A, то топология равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{S}$ определяется семейством полунорм $\{p_{S,\lambda}: S \in \mathfrak{S}, \lambda \in \Lambda\}$, где

$$p_{S,\lambda}(f) = \sup_{x \in S} p_\lambda(f(x))$$

для всех $f \in D_F(X, A; \mathfrak{S})$.

В частности, если $F = \varnothing$ и $\mathfrak{S}$ является семейством всех непустых компактных подмножеств из X, пространство $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ совпадает с пространством всех непрерывных функций $f: X \to A$ с топологией компактной сходимости. В этом случае вместо $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ будем пользоваться обозначением $C(X, A)$. Кроме того, если $F = \varnothing$, а $\mathfrak{S} = \{X\}$, то пространство $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ совпадает с пространством $C_c(X, A)$ всех непрерывных функций $f: X \to A$, для которых $f(X)$ относительно компактно в A с топологией равномерной сходимости на X.

Пусть теперь X — локально компактное хаусдорфово пространство. Говорят, что функция $f: X \to A$ *стремится к нулю на бесконечности пространства* X, если для каждой окрестности

---

[1] Алгебраические операции над функциями в $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ определяются как обычно поточечно.

нуля O пространства X существует такое компактное подмножество $X_O \subset X$, что $f(x) \in O$ для всех $x \in X \setminus X_O$. Множество всех A-значных непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности пространства X, обозначим через $C_0(X, A)$ и наделим топологией равномерной сходимости на X. Нетрудно проверить, что

$$C_0(X, A) = \{f \,|\, X : f \in D_F(X_\infty, A; \{X_\infty\})\}$$

при $F = \{x_\infty\}$, где x_∞ — бесконечная точка пространства X и $X_\infty = X \cup F$.

Для каждого $a \in A$ и $\alpha \in D_F(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ через αa будем обозначать функцию, удовлетворяющую на X условию $(\alpha a)(x) = \alpha(x)a$, а через $L(\mathfrak{A}, B)$ — линейную оболочку множества $\{\alpha a\colon \alpha \in \mathfrak{A},\ a \in B\}$, где $\mathfrak{A} \subset D_F(X, \mathbf{F}; \mathfrak{S})$ и $B \subset A$.

В настоящей статье, в § 2, показывается, что если $\mathfrak{A}$ всюду плотно в $D_F(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})$ и B всюду плотно в A, то линейное подпространство $\mathfrak{D} \subset D_F(X, A; \mathfrak{S})$, содержащее $L(\mathfrak{A}, B)$, всюду плотно в $D_F(X, A; \mathfrak{S})$. Этим мы обобщаем результаты, доказанные в [2, 4, 8, 9, 11, 12, 16, 19]. В § 3 обобщается теорема Стоуна — Вейерштрасса на алгебр $C(X, A)$, $C_c(X, A)$ и $C_0(X, A)$ в случае, когда A является локально выпуклой алгеброй с единицей над $\mathbf{F}$. Это обобщение результатов, доказанных в [1, 3, 14, 15, 17, 18].

§ 2. Условия всюду плотности в $D_F(X, A; \mathfrak{S})$

Для решения многих проблем важно узнать, является ли рассматриваемое линейное подпространство $\mathfrak{D} \subset D_F(X, A; \mathfrak{S})$ всюду плотным в $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ или нет. Достаточное условие для этого дает следующая

Теорема 1. *Если $\mathfrak{A}$ и B — всюду плотные множества* в $D_F(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})$ *и в A соответственно, то каждое линейное подпространство $\mathfrak{D} \subset D_F(X, A; \mathfrak{S})$, содержащее $L(\mathfrak{A}, B)$, всюду плотно в $D_F(X, A; \mathfrak{S})$.*

Доказательство. Достаточно показать всюду плотность $L(\mathfrak{A}, B)$ в $D_F(X, A; \mathfrak{S})$. Для этого, пусть[2] $\varepsilon > 0$, $S \in \mathfrak{S}$, $\lambda \in \Lambda$, $f \in D_F(X, A; \mathfrak{S})$ и $A_S = \operatorname{cl} f(S)$. Пусть, далее, $U_{\lambda,\varepsilon}(a)$ является ε-окрестностью точки $a \in A_S$ относительно полунормы p_λ. В силу компактности A_S, существуют такие $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A_S$, что множества $U_{\lambda,\varepsilon}(a_k)$ с $k = 1, 2, \ldots, n$ покрывают A_S. Учитывая это, существуют $\mu_k \in C(A_S, [0, 1])$ с $k = 1, 2, \ldots, n$ такие, что для каждого k справедливо $\mu_k(a) = 0$ при $a \notin U_{\lambda,\varepsilon}(a_k)$ и

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k(a) = 1$$

на A_S (см. [5], стр. 260). Так как локально выпуклые простран-

---

[2] Здесь и всюду в дальнейшем $\operatorname{cl} X$ обозначает замыкание подмножества $X \subset Y$ в топологии пространства Y.

ства вполне регулярны (см. [13], стр. 453), то $A_X = \mathrm{cl}\, f(X)$ — вполне регулярное пространство. Поэтому каждая μ_k имеет продолжение

$$\bar{\mu}_k \in C(A_X, \mathbf{R})$$

(см. [10], стр. 43). Пусть теперь

$$a(x) = \min\{1, p_\lambda(f(x))/\varepsilon\}.$$

Тогда [3] $g_k = a(\bar{\mu}_k \circ f) \in D_F(X, \mathbf{R}; \mathfrak{S})$ для каждого $k \in 1, 2, \dots, n$ и

$$p_\lambda(f(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x) a_k) \leqslant p_\lambda[(1 - a(x)) f(x)] +$$
$$+ a(x) p_\lambda[f(x) - \sum_{k=1}^{n} (\bar{\mu}_k \circ f)(x) a_k] \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \mu_k(f(x)) p_\lambda(a_k - f(x)) <$$
$$< \varepsilon(1 + \sum_{k=1}^{n} \mu_k(f(x))) = 2\varepsilon$$

для всех $x \in S$. Теперь по предположениям существуют такие $\beta_k \in \mathfrak{A}$ и $b_k \in B$ с $k = 1, 2, \dots, n$, что для каждого k справедливо [4]

$$p_S(\beta_k - g_k) < \begin{cases} \varepsilon/\gamma & \text{при} \quad \gamma > 0, \\ \varepsilon & \text{при} \quad \gamma = 0, \end{cases}$$

и

$$p_\lambda(b_k - a_k) < \begin{cases} \varepsilon/\varrho & \text{при} \quad \varrho > 0, \\ \varepsilon & \text{при} \quad \varrho = 0, \end{cases}$$

где

$$\gamma = \sum_{k=1}^{n} p_\lambda(a_k) \quad \text{и} \quad \varrho = \sum_{k=1}^{n} p_S(\beta_k).$$

Поэтому

$$p_\lambda(f(x) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k(x) b_k) \leqslant p_\lambda(f(x) - \sum_{k=1}^{n} g_k(x) a_k) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} p_S(g_k - \beta_k) p_\lambda(a_k) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} p_S(\beta_k) p_\lambda(a_k - b_k) < 4\varepsilon$$

для всех $x \in S$. Следовательно,

$$p_{S,\lambda}(f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k b_k) \leqslant 4\varepsilon.$$

Таким образом, $L(\mathfrak{A}, B)$ всюду плотна в $D_F(X, A; \mathfrak{S})$.

---

[3] Относительная компактность множества $g_k(S)$ в A следует из справедливости включения $\mathrm{cl}\, g_k(S) \subset (\mathrm{cl}\, a(S)) \mu_k(A_S)$ для каждого $S \in \mathfrak{S}$.

[4] Здесь $p_S(a) = \sup_{x \in S} |a(x)|$ при $a \in C(X, \mathbf{R})$.

Следствие 1. *Если* $\mathfrak{A}$ *всюду плотно*[5] *в* $C(X, \mathbf{R})$ (*или в* $C_b(X, \mathbf{R})$ *или в* $C_0(X, \mathbf{R})$) *и* B *всюду плотно в* A, *то каждое линейное подпространство* $\mathfrak{D} \subset C(X, A)$ (*соответственно* $\mathfrak{D} \subset C_c(X, A)$ *или* $\mathfrak{D} \subset C_0(X, A)$), *содержащее* $L(\mathfrak{A}, B)$, *всюду плотно в* $C(X, A)$ (*соответственно в* $C_c(X, A)$ *или в* $C_0(X, A)$).

Доказательство. Положив в теореме 1 множество $F = \varnothing$ и $\mathfrak{S}$ множеством всех компактных подмножеств ($F = \varnothing$ и $\mathfrak{S} = \{X\}$), получаем всюду плотность $L(\mathfrak{A}, B)$ в $C(X, A)$ (соответственно в $C_c(X, A)$).

Для доказательства всюду плотности $L(\mathfrak{A}, B)$ в $C_0(X, A)$ положим X — локально компактным хаусдорфовым пространством, $F = \{x_\infty\}$, $Y = X \cup F$, $\mathfrak{S} = \{Y\}$ и

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \in X, \\ \theta_A & \text{при} \quad x = x_\infty, \end{cases}$$

для каждой $f \in C_0(X, A)$. Так как $\bar{f} \in D_F(Y, A; \mathfrak{S})$, то по теореме 1 существуют для каждых $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in \Lambda$ такие $a_k \in D_F(Y, R, \mathfrak{S})$ и $b_k \in B$ с $k = 1, 2, \ldots, n$, что

$$p_{X,\lambda}(f - \sum_{k=1}^{n} (a_k \mid X) b_k) < \varepsilon.$$

Теперь, по предположению, существуют $\beta_k \in \mathfrak{A}$ с $k = 1, 2, \ldots, n$ такие, что

$$\|\beta_k - a_k \mid X\| < \begin{cases} \varepsilon/\sigma & \text{при} \quad \sigma > 0, \\ \varepsilon & \text{при} \quad \sigma = 0, \end{cases}$$

где

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} p_\lambda(b_k).$$

Поэтому

$$p_{X,\lambda}(f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k b_k) \leqslant p_{X,\lambda}(f - \sum_{k=1}^{n} (a_k \mid X) b_k) + \sum_{k=1}^{n} \|\beta_k - a_k \mid X\| p_\lambda(b_k) < 2\varepsilon.$$

Итак, следствие 1 доказано.

Следствие 1, в частности, известно: всюду плотность $L(C_b(X, \mathbf{R}), A)$ в $C_c(X, A)$ показана в [16]; всюду плотность $L(C(X, \mathbf{F}), A)$ в $C(X, A)$ — в [8], стр. 206, а в случае, когда[6] X компактно — в [9], [11], стр. 28, и в [12], стр. 247, и всюду

[5] Как хорошо известно, $C_c(X, \mathbf{R})$ совпадает с пространством $C_b(X, \mathbf{R})$ всех ограниченных непрерывных функций $f: X \to \mathbf{R}$.

[6] См. также [2], стр. 147, и [4], стр. 245. Обобщение следствия 2 на случай, когда A — линейное топологическое (не обязательно локально выпуклое) пространство, но X — компактное пространство конечной покрывающей размерности, доказано в [20], теоремы 1 (см. также [22], стр. 28—29).

плотность $L(C_0(X, \mathbf{F}), A)$ в $C_0(X, A)$, если A — банахово пространство — в [19], стр. 357 (см. также [11], стр. 128).

Замечание 1. Если A — ограничено компактное (см. [7], стр. 695) локально выпуклое пространство, в частности, банахово пространство конечной размерности, то $C_c(X, A)$ совпадает с пространством $C_b(X, A)$ всех непрерывных ограниченных функций $f: X \to A$. Кроме того, $C_c(X, A) = C_b(X, A)$ для любого нормированного пространства, если X псевдокомпактно, так как $f(X)$ компактно в A (см. [21], теорема 2.3). В этих случаях следствие 1 справедливо и для $C_b(X, A)$.

§ 3. Обобщения теоремы Стоуна — Вейерштрасса

Пусть X — топологическое пространство. Множество $Z \subset X$ называется *нуль-множеством пространства* X, если $Z = \{x \in X: f(x) = 0\}$ для некоторой $f \in C(X, \mathbf{R})$. Говорят, что множество $\mathfrak{A} \subset C(X, \mathbf{R})$ *отделяет*

а) *нуль-множества пространства* X, если для каждых двух непересекающихся непустых нуль-множеств Z_1 и Z_2 пространства X существует в $\mathfrak{A}$ такая f, что

$$\operatorname{cl} f(Z_1) \cap \operatorname{cl} f(Z_2) = \varnothing;$$

б) *точки пространства* X, если для каждых двух различных точек x_1 и x_2 из X существует в $\mathfrak{A}$ такая f, что

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

В 1967 г. Нель ([18], стр. 229) доказал следующее обобщение теоремы Стоуна — Вейерштрасса:

Пусть X — топологическое пространство. Для того, чтобы подалгебра $\mathfrak{A} \subset C_b(X, \mathbf{R})$ была всюду плотна в $C_b(X, \mathbf{R})$, необходимо и достаточно, чтобы подалгебра $\mathfrak{A}$

а) *отделяла нуль-множества пространства X*

и

б) *содержала g с $\inf\limits_{x \in X} |g(x)| > 0$.*

Если X — компактное хаусдорфово пространство, то условие а) равносильно условию

а') *отделяла точки пространства X.*

Справедливо следующее обобщение теоремы Неля:

Теорема 2. *Пусть X — топологическое пространство и A — локально выпуклая алгебра с единицей e над $\mathbf{F}$. Подалгебра $\mathfrak{A} \subset C_c(X, A)$ всюду плотна в $C_c(X, A)$, если подалгебра $\mathfrak{A}$*

а) *содержит все постоянные A-значные функции*

и

б) *отделяет нуль-множества пространства X функциями вида αe, где $\alpha \in C_b(X, \mathbf{R})$.*

Если X — компактное хаусдорфово пространство, условие б) равносильно условию

б') *отделяет точки пространства X функциями вида ae, где* $a \in C(X, \mathbf{R})$.

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{A}_0 = \{a \in C_b(X, \mathbf{R}) : ae \in \mathfrak{A}\}.$$

По предположениям, $\mathfrak{A}_0$ является подалгеброй в $C_b(X, \mathbf{R})$, удовлетворяющей условиям теоремы Неля. Поэтому $\mathfrak{A}_0$ всюду плотна в $C_b(X, \mathbf{R})$. Так как $L(\mathfrak{A}_0, A) \subset \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ всюду плотна в $C_c(X, A)$, в силу следствия 1. Доказательство равносильности условий б) и б') аналогично доказательству теоремы 2 из [1].

Применяя вместо теоремы Неля, теорему Стоуна — Вейерштрасса для алгебры $C(X, \mathbf{R})$ (см., например, [17], стр. 286) и для алгебры $C_0(X, \mathbf{R})$, в силу следствия 1, справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть X — хаусдорфово пространство и A — локально выпуклая алгебра с единицей над* $\mathbf{F}$. *Подалгебра $\mathfrak{A} \subset C(X, A)$ всюду плотна в $C(X, A)$, если при $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ подалгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям* а) *и* б') *теоремы* 2, *а при* $\mathbf{F} = \mathbf{C}$, *кроме того, содержит множество*[7]

$$\{\bar{a}e : ae \in \mathfrak{A}\}. \qquad (a)$$

Теорема 4. *Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство и A — локально выпуклая алгебра с единицей над* $\mathbf{F}$. *Подалгебра $\mathfrak{A} \subset C_0(X, A)$ всюду плотна в $C_0(X, A)$, если подалгебра*[8] $\mathfrak{A}$

а) *содержит множество* $\{a\alpha : ae \in \mathfrak{A},\ a \in C_0(X, \mathbf{R}),\ \alpha \in A\}$,

б) *отделяет точки пространства X функциями вида ae, где* $a \in C_0(X, \mathbf{F})$,

в) *для каждой $x \in X$ содержит функцию γe, где $\gamma \in C_0(X, \mathbf{F})$ и* $\gamma(x) \neq 0$,

г) *содержит множество* (a) *при* $\mathbf{F} = \mathbf{C}$.

Автор признателен Е. Л. Аренсону за полезные замечания.

Литература

1. Абель М., Об обобщении теоремы Неля. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 104—114.
2. Абель М., Некоторые свойства алгебры непрерывных ограниченных функций со значениями в банаховой алгебре. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, 305, 144—155.

---

[7] Через $\bar{a}$ обозначается комплексно сопряженная функция функции $a \in C(X, \mathbf{C})$.

[8] В случае, когда $A = \mathbf{F}$ или $\mathfrak{A}$ является правым A-модулем, условие а) выполнено.

3. А б е л ь М., Х е р и н г с о н Э., Некоторые свойства алгебры $C_0(X, A)$. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **374**, 79—89.
4. Б у р б а к и Н., Общая топология. Функциональные пространства. Москва, 1975.
5. Н а й м а р к М. А., Нормированные кольца. Москва, 1968.
6. Ш е ф е р Х., Топологические векторные пространства. Москва, 1971.
7. Э д в а р д с Р., Функциональный анализ. Теория и приложения. Москва, 1969.
8. D i e t r i c h, W. E. Jr., The maximal ideal space of the topological algebra $C(X, A)$. Math. Ann., 1969, **183**, 201—212.
9. G e r m a n o v, L. L., Uniform approximation of continuous functions with values in locally convex space. Конструктивная теория функций. Тр. Междунар. конф. Золотые пески (Варна), 1970. София, 1972, 183—185.
10. G i l l m a n, L., J e r i s o n, M., Rings of continuous functions. Princeton, 1960.
11. G r o t h e n d i e c k, A., Topological vector spaces. New York, 1973.
12. H a u s n e r, A., Ideals in a certain Banach algebra. Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, 246—249.
13. H e w i t t, E. D., R o s s i, K. A., Abstract harmonic analysis I. Berlin, 1963.
14. H o l l a d a y, J. C., A note of the Stone-Weierstrass theorem for quaternions. Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, 656—657.
15. K a p l a n s k y, I., The structure of certain operator algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1951, **70**, 219—255.
16. K a t s a r a s, A. K., Continuous linear functionals on spaces of vector-valued functions. Bull. Soc. Math. Grèce, 1974, **15**, 13—19.
17. N a g a t a, J., Modern general topology. Amsterdam, 1968.
18. N e l, L. G. Theorems of Stone-Weierstrass type for non-compact spaces. Math. Z., 1968, **10**, 226—230.
19. S e m a d e n i, Z., Banach spaces of continuous functions. Warszawa, 1971.
20. S h u c h a t, A. H., Approximation of vector-valued continuous functions. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **31**, 97—103.
21. S t e p h e n s o n, R. M., Pseudocompact spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1968, **134**, 437—448.
22. W a e l b r o e c k, L., Topological vector spaces. Summer school on topological vector spaces. Berlin, 1973, Lect. Notes Math., **331**, 1—40.

Поступило
19 II 1976

KÕIKJAL TIHEDUSE TINGIMUSED MÕNEDES PIDEVATE FUNKTSIOONIDE RUUMIDES

M. Abel

R e s ü m e e

Olgu X — topoloogiline ruum, A — lokaalselt kumer ruum üle kompleksarvude või reaalarvude korpuse, $\mathfrak{S}$ — ruumi X kinniste alamhulkade hulk, mis katab ruumi X ning $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ kõigi selliste pidevate funktsioonide $f: X \to A$ ruum, mille korral $f(S)$ sulund on kompaktne ruumis A iga $S \in \mathfrak{S}$ korral ning $f(F) = \{\theta_A\}$ mingi kinnise alamhulga $F \subset X$ korral. Algebralised operatsioonid ruumis $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ defineerime nagu tavaliselt funktsioonide korral ning varustame ruumi $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ ühtlase koonduvuse topoloogiaga alamhulkadel $S \in \mathfrak{S}$. Selles topoloogias on $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ lokaalselt kumer ruum [6].

Käesolevas artiklis leitakse piisavad tingimused selleks, et lineaarne alamruum $\mathfrak{D} \subset D_F(X, A; \mathfrak{S})$ oleks kõikjal tihe ruumis $D_F(X, A; \mathfrak{S})$, üldistades töödes [2, 4, 8, 9, 11, 12, 16, 19] tõestatuid tulemusi. Saadud tulemust kasutatakse Stone-Weierstrassi teoreemi üldistamiseks algebratele $C(X, A)$, $C_c(X, A)$ ja $C_0(X, A)$ juhul, kui A on lokaalselt kumer ühikuga algebra.

THE DENSITY PROPERTY IN SOME SPACES OF CONTINUOUS FUNCTIONS

M. Abel

Summary

Let X be a topological space, A be a locally convex space over the field of real or complex numbers, $\mathfrak{S}$ be the set of closed subsets of X the union of which is X, and $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ be the space of all continuous functions $f: X \to A$ for which the range $f(S)$ is relatively compact in A for any $S \in \mathfrak{S}$ and which vanish on the closed subset $F \subset X$. The algebraic operations on $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ we define pointwise as usual for functions. It is known that $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ with topology of uniform convergence on $S \in \mathfrak{S}$ is a locally convex space. In particular, if $F = \varnothing$ and $\mathfrak{S}$ is the set of all non-empty compact subsets of X, the spce $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ coincides with space $C(X, A)$ (of all continuous functions $f: X \to A$) with topology of compact convergence, but if $F = \varnothing$ and $\mathfrak{S} = \{X\}$ — then with space $C_c(X, A)$ (of all continuous functions $f: X \to A$ for which $f(X)$ is relatively compact in A) with topology of uniform convergence on X.

In the present paper the sufficient condition for the density of linear subspace $\mathfrak{D} \subset D_F(X, A; \mathfrak{S})$ in $D_F(X, A; \mathfrak{S})$ is found. The case when A is an locally convex algebra with unit is considered separately, generalizing the theorem of Stone-Weierstrass for algebras $C(X, A)$, $C_c(X, A)$ and $C_0(X, A)$ (of all continuous function $f: X \to A$ which vanish at the infinity of the locally compact Haustorff space X). The theorems of this paper generalize the results, proved in [1—4, 8, 9, 11, 12, 14—18].

ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В АЛГЕБРАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИИ

М. Абель

Кафедра математического анализа

Пусть X — вполне регулярное T_1-пространство и A — локально выпуклая алгебра над $\mathbf{F}$ (т. е. над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел или над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел). Через $C(X,A)$ будем обозначать алгебру всех A-значных непрерывных функций на X, через $C_c(X,A)$ — подалгебру всех $f\in C(X,A)$, образ $f(X)$ которых относительно компактен в A, а в случае, когда X является локально компактным хаусдорфовым пространством, через $C_0(X,A)$ будем обозначать алгебру всех $f\in C(X,A)$, стремящихся к нулю на бесконечности пространства X. Алгебраические операции в этих алгебрах определяем поточечно. Алгебру $C(X,A)$ будем наделять топологией компактной сходимости, а алгебры $C_c(X,A)$ и $C_0(X,A)$ — топологией равномерной сходимости. Тогда все рассмотренные выше алгебры локально выпуклы (см. [6], стр. 103). Топология компактной сходимости на $C(X,A)$ совпадает с топологией равномерной сходимости на X, если пространство X компактно (см., например, [5], стр. 178). Поэтому будем говорить о топологии компактной сходимости на $C(X,A)$ только в том случае, когда X не является компактным.

В дальнейшем предположим, что (отделимая) локально выпуклая топология на A определена семейством $\{p_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ непрерывных полунорм. Тогда топологию компактной сходимости на $C(X,A)$ и топологию равномерной сходимости на $C_c(X,A)$ и $C_0(X,A)$ можно определить семействами полунорм $\{p_{S,\lambda}$: S компактно в $X,\lambda\in\Lambda\}$ и $\{q_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ соответственно, где

$$p_{S,\lambda}(f)=\sup_{x\in S}p_\lambda(f(x))$$

для всех $f\in C(X,A)$ и

$$q_\lambda(f)=p_{X,\lambda}(f)$$

для всех $f\in \mathbf{C}_c(X,A)$.

Пусть[1] $\hom A$ — множество всех непрерывных нетривиальных $\mathbf{F}$-значных гомоморфизмов на A, наделенное слабой топологией $\sigma(A',A)$. Используя результаты Маллиоса [12] о тензорных произведениях локально выпуклых алгебр, Дитрих [8] показал, что $\hom C(X,A)$ и $X\times\hom A$ гомеоморфны, если X — вполне регулярное k-пространство[2] и A — полная локально выпуклая алгебра с локально равностепенно непрерывным[3] $\hom A$. Кроме того, Маллиос (см. [12], теорема 5.1) показал, что $\hom C_0(X,A)$ и $X\times\hom A$ гомеоморфны для любого локально компактного пространства X, если A является m-выпуклой алгеброй, для которой пополнение есть m-выпуклая Q-алгебра[4]. Оказывается, что в статье Дитриха требования полноты алгебры A и того, что X есть k-пространство, а в статье Малиоса требование m-выпуклости алгебры A являются излишними. Справедлива

Теорема. *Пусть*[5] *X — вполне регулярное T_1-пространство и A — локально выпуклая алгебра*[6] *над* $\mathbf{F}$. *Для каждого $\Phi\in\hom C(X,A)$ (или $\Phi\in\hom C_0(X,A)$ и $\Phi\in\hom C_c(X,A)$) существуют такие однозначно определенные $x\in X$ (соответственно*[7], *$x\in X$ и $x\in\beta X$) и $\varphi\in\hom A$, что $\Phi(f)=\varphi[f(x)]$ (соответственно*[8], *$\Phi(f)=\varphi[f(x)]$ и $\Phi(f)=\varphi[f^\beta(x)]$) для всех $f\in C(X,A)$ (соответственно, $f\in C_0(X,A)$ и $f\in C_c(X,A)$).* При этом, отображения

$$\mu : \hom C(X,A) \to X\times\hom A, \tag{1}$$

$$\mu_0 : \hom C_0(X,A) \to X\times\hom A \tag{2}$$

и

$$\mu_c : \hom C_c(X,A) \to \beta X\times\hom A \tag{3}$$

являются непрерывными биекциями. Если, кроме того, $\hom A$ локально равностепенно непрерывно, то μ, μ_0 и μ_c являются гомеоморфизмами.

Замечание 1. В случае, когда алгебра A бочечна, то условие локальной равностепенной непрерывности пространства $\hom A$ равносильно следующим условиям: $\hom A$ локально ком-

---

[1] Здесь и всюду в дальнейшем предполагается, что $\hom A\neq\varnothing$. Как известно (см. [16], стр. 111), существуют локально выпуклые алгебры с $\hom A=\varnothing$.

[2] Определение k-пространства см., например, [11], стр. 230.

[3] Пространство X называется *локально равностепенно непрерывным*, если каждая точка из X обладает равностепенно непрерывной окрестностью в X.

[4] Определения m-выпуклой алгебры и Q-алгебры см., например, [13] или [16].

[5] В случае алгебры $C_0(X,A)$ предполагается X локально компактным хаусдорфовым пространством.

[6] В случае, когда A — коммутативная банахова алгебра, теорема, в частности, доказана в [1, 3, 9, 10].

[7] Через βX обозначается стоун-чеховское компактное расширение пространства X.

[8] Через f^β обозначается продолжение функции f на βX.

пактно и каждая компактная часть из $\hom A$ равностепенно непрерывно (см. [4], стр. 213, теорема 1). Кроме того, если A — банахова алгебра, то $\hom A$ равностепенно непрерывно и, следовательно, отображения μ, μ_0 и μ_c всегда являются гомеоморфизмами.

Замечание 2. Теорема остается справедливой и для алгебры $C_b(X, A)$ всех ограниченных непрерывных функций $f: X \to A$ в случае, когда алгебра A ограниченно компактна (см. [7], стр. 695), так как в этом случае $C_b(X, A) = C_c(X, A)$. Отметим здесь, что нормированные алгебры являются ограниченно компактными только тогда, когда размерность алгебры конечна. При этом, $C_b(X, A) = C_c(X, A)$ для любой нормированной алгебры A, если X псевдокомпактно, так как $f(X)$ компактно в A (см. [15], стр. 438).

Как известно (см. [13], стр. 10), если A является коммутативной локально выпуклой алгеброй над $\mathbf{C}$ с непрерывным квазиобратным, то существует биекция между $\hom A$ и множеством $\mathfrak{M}(A)$ всех замкнутых регулярных максимальных идеалов алгебры A. Учитывая это, из теоремы непосредственно следует

Следствие. *Если A — коммутативная локально выпуклая алгебра (над $\mathbf{C}$) с непрерывным квазиобратным и X — вполне регулярное T_1-пространство*[9], *то для каждого $\mathbf{M} \in \mathfrak{M}(C(X, A))$ (каждого $\mathbf{M}_0 \in \mathfrak{M}(C_0(X, A))$ и $\mathbf{M}_c \in \mathfrak{M}(C_c(X, A))$* существуют *такие однозначно определенные $x \in X$ (соответственно, $x \in X$ и $x \in \beta X$) и $M \in \mathfrak{M}(A)$, что*

$$\mathbf{M} = \{f \in C(X, A): f(x) \in M\},$$

$$\mathbf{M}_0 = \{f \in C_0(X, A): f(x) \in M\},$$

и

$$\mathbf{M}_c = \{f \in C_c(X, A): f^\beta(x) \in M\}.$$

Следствие известно[10] для алгебры $C_c(X, A)$, если A — коммутативная банахова алгебра (см. [10], стр. 1792) и для алгебры $C_0(X, A)$, если A является B^*-алгеброй (см. [3], стр. 82).

1. Доказательство теоремы для алгебры $C(X, A)$. Пусть $\Phi \in \hom C(X, A)$. Тогда Φ нетривиален на линейной оболочке $L(X, A)$ множества[11] $\{\alpha a: \alpha \in C(X, \mathbf{F}), a \in A\}$, так как $L(X, A)$ всюду плотна в $C(X, A)$ (см. [2], следствие 1). В силу этого, существуют такие $\alpha_0 \in C(X, \mathbf{F})$ и $a_0 \in A$, что

$$\sigma = \Phi(\alpha_0 a_0) \neq 0. \tag{4}$$

Пусть $\psi(a) = \Phi(a\alpha_0 a_0)/\sigma$ и[12] $\varphi(\alpha) = \Phi(e\alpha)$ для всех $\alpha \in$

---

[9] См. сноску 5.

[10] См. также [1], стр. 149 и [9] стр. 247.

[11] Через αa обозначается функция, удовлетворяющая на X условию $(\alpha a)(x) = \alpha(x) a$.

[12] Здесь и всюду в дальнейшем через e обозначается единица в $C(X, \mathbf{F})$.

$\in C(X, \mathbf{F})$ и $a \in A$. Тогда ψ и φ являются $\mathbf{F}$-значными гомоморфизмами на $C(X, \mathbf{F})$ и на A соответственно. Кроме того [13],

$$\Phi(aa) = \psi(a)\varphi(a) \tag{5}$$

для всех $a \in C(X, \mathbf{F})$ и $a \in A$. Учитывая (4) и (5), имеем $\psi(a_0) \neq 0$ и $\varphi(a_0) \neq 0$. Поэтому ψ и φ нетривиальны. Пусть $\nu : a \mapsto aa_0a_0/\sigma$ для каждой $a \in C(X, \mathbf{F})$ и $\varrho : a \mapsto ea$ для каждого $a \in A$. Так как ν и ϱ непрерывны, то $\psi = \Phi \circ \nu$ непрерывен на $C(X, \mathbf{F})$ и $\varphi = \Phi \circ \varrho$ непрерывен на A. Следовательно, $\psi \in \hom C(X, \mathbf{F})$ и $\varphi \in \hom A$. В силу этого (см. [8], стр. 203), существует такая $x \in X$, что

$$\psi(a) = a(x) \tag{6}$$

для всех $a \in C(X, \mathbf{F})$.

Пусть $g \in L(X, A)$, т. е.

$$g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k a_k,$$

где $\lambda_k \in \mathbf{F}$, $a_k \in C(X, \mathbf{F})$ и $a_k \in A$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Учитывая (5) и (6), убеждаемся в том, что [14]

$$\Phi(g) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k(x) \varphi(a_k) = \Phi(x, \varphi)(g)$$

на $L(X, A)$ для некоторых $x \in X$ и $\varphi \in \hom A$. Поэтому $\Phi = \Phi(x, \varphi)$ и на $C(X, A)$.

Покажем теперь, что каждый $\Phi \in \hom C(X, A)$ определяет точку $(x, \varphi) \in X \times \hom A$ однозначно. Для этого, пусть (x_1, φ_1), $(x_2, \varphi_2) \in X \times \hom A$ (определяющие гомоморфизмом $\Phi \in \hom C(X, A)$), причем $(x_1, \varphi_1) \neq (x_2, \varphi_2)$. Если $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то существует $a \in A$ такой, что $\varphi_1(a) \neq \varphi_2(a)$. Поэтому $\Phi(x_1, \varphi_1)(ea) \neq \Phi(x_2, \varphi_2)(ea)$. Пусть теперь $x_1 \neq x_2$. Тогда существует $a \in C(X, \mathbf{R})$ с $a(x_1) = 1$ и $a(x_2) = 0$. В силу этого, $\Phi(x_1, \varphi_1)(aa) \neq \Phi(x_2, \varphi_2)(aa)$ при $a \in A \setminus \ker \varphi_1$ независимо от того, равны φ_1 и φ_2 или нет. Следовательно, из $(x_1, \varphi_1) \neq (x_2, \varphi_2)$ следует, что $\Phi(x_1, \varphi_1) \neq \Phi(x_2, \varphi_2)$.

Пусть теперь (x, φ) — любая точка в $X \times \hom A$. Тогда $\Phi(x, \varphi)$ является нетривиальным $\mathbf{F}$-значным гомоморфизмом на $C(X, A)$. В силу непрерывности φ, существуют $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ и $K > 0$ такие, что

$$|\Phi(x, \varphi)(f)| \leqslant K \sup_k p_{\lambda_k}[f(x)] \leqslant K \sup_k p_{S, \lambda_k}(f)$$

---

[13] Отметим, что ψ не зависит от выбора $a_0 \in C(X, \mathbf{F})$ и $a_0 \in A$, удовлетворяющих условию (4). Действительно, если, кроме того, существуют $a' \in C(X, \mathbf{F})$ и $a' \in A$ такие, что $\sigma' - \Phi(a'a') \neq 0$, то из $\Phi(aa_0a_0)\sigma' = \sigma\Phi(aa'a')$ следует, что $\Phi(aa_0a_0)/\sigma = \Phi(aa'a')/\sigma'$.

[14] Здесь и всюду в дальнейшем через $\Phi(x, \varphi)$ обозначается отображение, удовлетворяющее условию $\Phi(x, \varphi)(f) = \varphi[f(x)]$ для всех $f \in C(X, A)$, $x \in X$ и $\varphi \in \hom A$.

для всех $f \in C(X, A)$, где $S \subset X$ — компактное множество, содержащее $\{x\}$. Поэтому $\Phi(x, \varphi)$ непрерывен на $C(X, A)$ и, следовательно, $\Phi(x, \varphi) \in \hom C(X, A)$. Таким образом, нами определена биекция μ, удовлетворяющая условию $\mu(\Phi(x, \varphi)) = (x, \varphi)$ при $(x, \varphi) \in X \times \hom A$.

Остается показать непрерывность биекции μ. Для этого, пусть $\{\Phi(x_i, \varphi_i) : i \in I\}$ — сеть в $\hom C(X, A)$, сходящаяся к $\Phi(x_0, \varphi_0) \in \hom C(X, A)$. Тогда $\{\Phi(x_i, \varphi_i)(f) : i \in I\}$ сходится к $\Phi(x_0, \varphi_0)(f)$ для каждой $f \in C(X, A)$. Поэтому, в силу равенства $\Phi(x_i, \varphi_i)(ea) = \varphi_i(a)$, сеть $\{\varphi_i(a) : i \in I\}$ сходится к $\varphi_0(a)$ для любого $a \in A$. Следовательно, $\{\varphi_i : i \in I\}$ сходится к φ_0 в слабой топологии пространства $\hom A$.

Пусть теперь $a \in A$ с $\varphi_0(a) = 1$, $\alpha \in C_b(X, \mathbf{F})$ и $\delta(x)(\alpha) = \alpha(x)$ на X. Так как $\delta(x) \in \hom C_b(X, \mathbf{F})$ для каждой $x \in X$ и $\alpha(x_i) - \alpha(x_0) = [\Phi(x_i, \varphi_i)(\alpha a) - \Phi(x_0, \varphi_0)(\alpha a)] - \alpha(x_i)[\varphi_i(a) - \varphi_0(a)]$, то $\{\delta(x_i)(\alpha) : i \in I\}$ сходится к $\delta(x_0)(\alpha)$ для каждой $\alpha \in C_b(X, \mathbf{F})$. Поэтому $\{\delta(x_i) : i \in I\}$ сходится к $\delta(x_0)$ в слабой топологии пространства $\hom C_b(X, \mathbf{F})$. В силу гомеоморфности пространств $\hom C_b(X, \mathbf{F})$ и βX, сеть $\{x_i : i \in I\}$ сходится к x_0 относительно топологии пространства X. Следовательно, $\{(x_i, \varphi_i) : i \in I\}$ сходится к (x_0, φ_0), чем непрерывность биекции μ доказана.

Пусть теперь $\hom A$ локально равностепенно непрерывно. Для каждой $\varphi_0 \in \hom A$ через $O_1(\varphi_0)$ обозначим равностепенно непрерывную окрестность гомоморфизма φ_0. Пусть $x_0 \in X$, $\varphi_0 \in \hom A$ и $f \in C(X, A)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $O(f(x_0))$, что

$$\|\varphi(a - f(x_0))\| < \varepsilon/2$$

для всех $a \in O(f(x_0))$ и $\varphi \in O_1(\varphi_0)$. Теперь, в свою очередь, существует такая окрестность $O(x_0)$, что

$$|\varphi(f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$$

для всех $x \in O(x_0)$ и $\varphi \in O_1(\varphi_0)$. Поэтому, в силу

$$\|\varphi[f(x)] - \varphi_0[f(x_0)]\| \leq \|\varphi[f(x) - f(x_0)]\| + |(\varphi - \varphi_0)(f(x_0))|,$$

справедливо

$$\|\Phi(x, \varphi)(f) - \Phi(x_0, \varphi_0)(f)| < \varepsilon$$

для всех $(x, \varphi) \in O(x_0) \times O(\varphi_0)$, где

$$O(\varphi_0) = O_1(\varphi_0) \cap \{\varphi \in \hom A : \|(\varphi - \varphi_0)(f(x_0))\| < \varepsilon/2\}.$$

Следовательно, $\Phi(x, \varphi)(f)$ непрерывно на $X \times \hom A$ при $f \in C(X, A)$. Поэтому μ^{-1} является непрерывным.

2. Доказательство теоремы для алгебры $C_0(X, A)$. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, x_∞ — бесконечная точка пространства X, $X_\infty = X \cup \{x_\infty\}$ и

$$I_\infty = \{f \in C(X_\infty, A) : f(x_\infty) = \theta_A\},$$

где θ_A — нулевой элемент алгебры A. Кроме того, для каждой $f \in C_0(X, A)$ пусть

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \in X, \\ \theta_A & \text{при} \quad x = x_\infty. \end{cases}$$

Нетрудно проверить[15], что отображение $\tau : f \mapsto \bar{f}$ является топологическим изоморфизмом между $C_0(X, A)$ и I_∞. Поэтому сопряженное τ^* отображения τ отображает $\operatorname{hom} I_\infty$ гомеоморфно на $\operatorname{hom} C_0(X, A)$. Так как I_∞ является двухсторонним идеалом в $C(X_\infty, A)$, сопряженное ν^* вложения $\nu : I_\infty \to C(X_\infty, A)$ отображает[16] $\operatorname{hom} C(X_\infty, A) \setminus h(I_\infty)$ гомеоморфно на $\operatorname{hom} I_\infty$, где $h(I_\infty)$ — оболочка идеала I_∞. Учитывая равенство

$$h(I_\infty) = \{\Phi(x_\infty, \varphi) : \varphi \in \operatorname{hom} A\},$$

отображение (1), определенное в первой части доказательства, отображает $\operatorname{hom} C(X_\infty, A) \setminus h(I_\infty)$ биективно на $X \times \operatorname{hom} A$. Итак, $\mu_0 = \mu \circ (\nu^*)^{-1} \circ (\tau^*)^{-1}$ является непрерывной биекцией между $\operatorname{hom} C_0(X, A)$ и $X \times \operatorname{hom} A$. Если, кроме того, $\operatorname{hom} A$ локально равностепенно непрерывно, то μ_0 является гомеоморфизмом.

3. Доказательство теоремы для алгебры $C_c(X, A)$. Пусть $\sigma : X \to \beta X$ — гомеоморфизм на всюду плотное подмножество. Как известно (см. [11], стр. 153), каждая $f \in C_c(X, A)$ обладает таким однозначно определенным продолжением $f^\beta \in C(\beta X, A)$, что $f = f^\beta \circ \sigma$. С другой стороны, если $f \in C(\beta X, A)$, то $f \circ \sigma$ непрерывна на X. Так как $(f \circ \sigma)(X) \subset f(\beta X)$ и $f(\beta X)$ компактно в A, то $f \circ \sigma \in C_c(X, A)$. Кроме того,

$$(q_\lambda)_{C_c(X,A)}(f \circ \sigma) = (q_\lambda)_{C(\beta X,A)}(f)$$

для всех $f \in C(\beta X, A)$. Итак, если X — вполне регулярное T_1-*пространство и A — локально выпуклая алгебра над* F, *то алгебры $C(\beta X, A)$ и $C_c(X, A)$ топологически изоморфны*[17].

Поэтому, с одной стороны, пространства $\operatorname{hom} C_c(X, A)$ и $\operatorname{hom} C(\beta X, A)$ гомеоморфны, а, с другой стороны, существует непрерывная биекция (1) между $\operatorname{hom} C(\beta X, A)$ и $\beta X \times \operatorname{hom} A$, определяемая в первой части доказательства. Следовательно, композиция этих отображений μ_c является непрерывной биек-

---

[15] См., например, [3], стр. 83—84.

[16] Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 3.1.18 из [14].

[17] В случае, когда A является банаховой алгеброй, алгебры $C(\beta X, A)$ и $C_c(X, A)$ изометрически изоморфны. Если, при этом, размерность алгебры A конечна, то и алгебры $C(\beta X, A)$ и $C_b(X, A)$ изометрически изоморфны.

цией между $\hom C_c(X, A)$ и $\beta X \times \hom A$. Если, кроме того, $\hom A$ локально равностепенно непрерывно, то μ_c является гомеоморфизмом.

Итак, теорема полностью доказана.

Автор признателен Е. Л. Аренсону за полезные замечания.

Примечание при корректуре. Когда рукопись этой статьи уже была в печати, автору стало известно о статье [17], где при помощи результата Маллиоса (см. [12], стр. 248) о тензорных произведениях локально выпуклых алгебр доказывается часть теоремы данной статьи, касающаяся алгебры $C(X, A)$. Кроме того, недавно появилась статья [18], в которой наша теорема доказывается для алгебр $C(X, A)$ и $C_c(X, A)$ в случае коммутативной Q-алгебры A с единицей. Мы, однако, не требуем коммутативности алгебры A и наличие единицы в нем. При этом локально выпуклая алгебра A, рассматриваемая нами, не обязательно является Q-алгеброй, но существуют Q-алгебры, не являющиеся локально выпуклыми (см. [16], стр. 10 и 17).

Литература

1. Абель М., Некоторые свойства алгебры непрерывных ограниченных функций со значениями в банаховой алгебре. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, **305**, 144—155.
2. Абель М., Условия всюду плотности в некоторых пространствах непрерывных функций. Настоящий сборник, стр. 6—13.
3. Абель М., Херингсон Э., Некоторые свойства алгебры $C_0(X, A)$. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **374**, 79—89.
4. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства. Москва, 1959.
5. Бурбаки Н., Общая топология. Функциональные пространства. Москва, 1975.
6. Шефер Х., Топологические векторные пространства. Москва, 1968.
7. Эдвардс Р., Функциональный анализ. Теория и приложения. Москва, 1969.
8. Dietrich, W. E. Jr., The maximal ideal space of the topological algebra $C(X, E)$. Math. Ann., 1969, **183**, 201—212.
9. Hausner, A., Ideals in a certain Banach algebra. Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, 246—249.
10. Hery, W. J., Rings of continuous Banach algebra valued functions. Doct. diss. Brooklyn Polytechn. Inst., 1974, 69 pp., Dissert. Abstrs., 1974, **B35**, № 4, 1792.
11. Kelly, J. L., General topology. Berlin, 1975.
12. Mallios, A., Heredity of tensor products of topological algebras. Math. Ann., 1966, **162**, 246—257.
13. Michael, E. A., Locally multiplicatively-convex algebras. Mem. Amer. Math. Soc., 1952, **11**, 1—79.
14. Rickart, C. E., General theory of Banach algebras. Princeton, 1960.
15 Stephenson, R. M., Pseudocompact spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1968, **134**, 437—448.
16. Żelazko, W., Selected topics in topological algebras. Lecture Notes Series № 31, Aarhus Univ., 1971.
17. Dietrich, W. E. Jr., The Gelfand degree of topological algebra. Math. Ann., 1970, **189**, 285—298.
18. Hery, W. J., Maximal ideal in algebras of topological algebra valued functions. Pacific J. Math., 1976, **65**, № 2, 365—373.

Поступило
10 III 1976

LINEAARSETE MULTIPLIKATIIVSETE FUNKTSIONAALIDE KIRJELDUS ALGEBRATE KORRAL, MIS KOOSNEVAD PIDEVATEST FUNKTSIOONIDEST

M. Abel

Resümee

Olgu X — täielikult regulaarne T_1-ruum, A — lokaalselt kumer algebra üle reaal- või kompleksarvude korpuse, $C(X, A)$ — kõigi pidevate funktsioonide $f: X \to A$ ruum, $C_c(X, A)$ — kõigi selliste pidevate funktsioonide $f: X \to A$ ruum, mille korral $f(X)$ sulund on kompaktne algebras A ning $C_0(X, A)$ — kõigi pidevate funktsioonide $f: X \to A$ ruum, mis lähenevad nullile lokaalselt kompaktse hausdorffi ruumi X lõpmatuses. Algebralised operatsioonid nendes algebrates defineerime nagu tavaliselt funktsioonide korral. Varustame algebra $C(X, A)$ kompaktse koonduvuse topoloogiaga ning algebrad $C_c(X, A)$ ja $C_0(X, A)$ — ühtlase koonduvuse topoloogiaga.

Olgu hom A — algebra A kõigi pidevate mittetriviaalsete lineaarsete multiplikatiivsete funktsionaalide hulk, mis on varustatud nõrga topoloogiaga $\sigma(A', A)$. Käesolevas artiklis näidatakse, et eksisteerivad pidevad bijektsioonid (1), (2) ja (3), mis on homöomorfismid juhul, kui hom A on lokaalselt võrdpidev. Erijuhul on nimetatud homöomorfismide olemasolu näidatud töödes [1, 3, 8—10, 12]. Järeldusena saadud tulemustest kirjeldatakse eespool nimetatud algebrate kõiki kinniseid regulaarseid maksimaalseid ideaale juhul, kui A on kommutatiivne lokaalselt kumer algebra (üle kompleksarvude korpuse), milles kvaasipööramine on pidev operatsioon.

THE DESCRIPTION OF LINEAR MULTIPLICATIVE FUNCTIONALS IN THE ALGEBRAS OF CONTINUOUS FUNCTIONS

M. Abel

Summary

Let X be a completely regular T_1-space, A be a locally convex algebra over the field of complex or real numbers, $C(X, A)$ be the space of all continuous functions $f: X \to A$, $C_c(X, A)$ be the space of all continuous functions $f: X \to A$ for which $f(X)$ is relatively compact in A and $C_0(X, A)$ be the space of all continuous functions $f: X \to A$ which vanish at the infinity of the locally compact Hausdorff space X. The algebraic operations on all of those algebras we define pointwise as usually for functions. The algebra $C(X, A)$ we endow with topology of compact convergence, but the algebras $C_c(X, A)$ and $C_0(X, A)$ — with topology of uniform convergence.

Let hom A denote the set of all non-zero continuous linear multiplicative functionals on A endowed with the weak topology $\sigma(A', A)$. In the present paper it is shown that there are exist the continuous bijections μ: hom $C(X, A) \to X \times$ hom A, μ_0: hom $C_0(X, A) \to X \times$ hom A and μ_c: hom $C_c(X, A) \to \beta X \times$ hom A (βX denotes the Stone-Čech compactification of X), which are homeomorphisms when hom A is locally equicontinuous. In particular case, the existence of the above mentioned homeomorphisms have been shown in [1, 3, 8—10, 12]. As a corollary of those results, all closed regular maximal ideals of the algebras $C(X, A)$, $C_0(X, A)$ and $C_c(X, A)$ are described in the case when A a commutative locally convex algebra (over the field of complex numbers) with continuous quasi-inversion.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БАКА

Э. Кольк

Кафедра математического анализа

В данной заметке обобщается на операторные матрицы известная из теории суммируемости числовых последовательностей теорема Бака (см. [4], стр. 401) и некоторые результаты из статьи [3] автора.

1. Пусть $E=(E,\tau_E)$ и $F=(F,\tau_F)$ — секвенциально полные отделимые топологические векторные пространства над полем K, где $K=\mathbf{R}$ или $K=\mathbf{C}$. Обозначим через $s(E)$ множество всех последовательностей [1]

$$X=(x_i)$$

из элементов $x_i\in E$, а через $m(E)$ и $c(E)$ — его подмножества, состоящие соответственно из всех ограниченных и τ_E-сходящихся последовательностей X. Пусть, далее, $L_c(E,F)$ — совокупность всех линейных секвенциально непрерывных операторов из E в F. Пусть $\Lambda\in L_c(E,F)$ — фиксированный оператор и $T: G\to s(F)$ — линейное отображение, где $G\subset s(E)$ является линейным многообразием. Отображение T называется *Λ-регулярным*, если $G\supset c(E)$ и из $\tau_E\text{-}\lim X=x$ следует $\tau_F\text{-}\lim TX=\Lambda x$. Обозначим символом $\mathfrak{T}(\Lambda)$ (коротко $\mathfrak{T}$) множество всех Λ-регулярных отображений T.

Введем следующие понятия. Последовательность $X\in s(E)$ мы называем *$T(\Lambda)$-сходящейся* к элементу $x\in E$, коротко $T(\Lambda)\text{-}\lim X=x$, если $\tau_F\text{-}\lim TX=\Lambda x$ в пространстве F. Из определения ясно, что $T(\Lambda)$-предел в общем однозначным не является. Он будет однозначным, например, в случае, когда оператор Λ инъективный [2]. Последовательность $X\in s(E)$ мы называем *$T^0(\Lambda)$-сходящейся* к точке x, коротко $T^0(\Lambda)\text{-}\lim X=x$, если для каждой $Y\in\mathfrak{N}(X)$ верно $T(\Lambda)\text{-}\lim Y=x$, где $\mathfrak{N}(X)$ — множество всех подпоследовательностей последовательности X. Последовательность X мы называем *$T^1(\Lambda)$-сходящейся* к элементу $x\in E$, коротко $T^1(\Lambda)\text{-}\lim X=x$, если для каждой $Y\in\mathfrak{N}(X)$ существует $Z\in\mathfrak{N}(Y)$ с $T(\Lambda)\text{-}\lim Z=x$. Из определений непосредственно следует, что $T^0(\Lambda)$- и $T^1(\Lambda)$-предел обладают свойством

---

[1] Свободные индексы принимают значения 1, 2, ...

[2] Т. е. из $x_1\neq x_2$, $x_1,x_2\in E$ следует $\Lambda x_1\neq\Lambda x_2$.

наследственности, а в случае инъективного Λ они оба также однозначно определены и $T^1(\Lambda)$-сходимость является т. н. L^*-сходимостью (см. [5], стр. 197).

Поля $T(\Lambda)$-, $T^0(\Lambda)$- и $T^1(\Lambda)$-*сходимости* определяются равенствами

$$c(E,T(\Lambda)) = \{X \in s(E) : \exists\, T(\Lambda)\text{-}\lim X \in E\},$$
$$c(E,T^0(\Lambda)) = \{X \in s(E) : \exists T^0(\Lambda)\text{-}\lim X \in E\},$$
$$c(E,T^1(\Lambda)) = \{X \in s(E) : \exists T^1(\Lambda)\text{-}\lim X \in E\}.$$

При этом, разумеется, $c(E,T^1(\Lambda)) \subset c(E,T^1(\Lambda))$.
В случае $T \in \mathfrak{T}$ имеем

$$c(E) \subset c(E,T^0(\Lambda)) \subset c(E,T^1(\Lambda)). \qquad (1)$$

Следовательно, если $T \in \mathfrak{T}$ и Λ — инъективный оператор, то $T^0(\Lambda)$- и $T^1(\Lambda)$-сходимости являются обобщениями секвенциальной τ_E-сходимости.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть $F = E$ и $\Lambda = I$, где I — тождественное отображение. Тогда, опуская в обозначениях символ Λ, получаем

$$T\text{-}\lim X = x \Leftrightarrow \tau_E\text{-}\lim TX = x,$$
$$T^0\text{-}\lim X = x \Leftrightarrow T\text{-}\lim Y = x\ \forall Y \in \mathfrak{R}(X),$$
$$T^1\text{-}\lim X = x \Leftrightarrow \forall Y \in \mathfrak{R}(X)\ \exists Z \in \mathfrak{R}(Y) : T\text{-}\lim Z = x.$$

В частности, если также $T = I$, то T-сходимость явно совпадает с τ_E-сходимостью. Равенство $I^1\text{-}\lim X = x$ выполняется тогда и только тогда, когда для каждой $Y \in \mathfrak{R}(X)$ существует $Z \in \mathfrak{R}(Y)$ с $\tau_E\text{-}\lim Z = x$. Но последнее равносильно τ_E-сходимости, ибо τ_E-сходимость является L^*-сходимостью. Таким образом, учитывая условие (1), получаем $c(E) = c(E, \mathrm{I}) = c(E, I^0) = c(E, I^1)$.

Пример 2. Пусть E и F суть пространства Фреше и $A_{nk} \in L_c(E,F)$. Матрица $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ определяет линейное отображение $\mathfrak{A}: G \to s(F)$ по формуле $\mathfrak{A}X = (t_nX)$, где

$$t_nX = \sum_k A_{nk}x_k$$

и

$$G = \{X \in s(E) : \exists \sum_k A_{nk}x_k \in F\}.$$

Известно, что $\mathfrak{A}$ является Λ-регулярным, если (см. [10], стр. 368)

1° $\tau_F\text{-}\lim\limits_n A_{nk}x = 0 \qquad \forall x \in E, \qquad (2)$

2° $\tau_F\text{-}\lim\limits_n \sum\limits_k A_{nk}x = \Lambda x \qquad \forall x \in E, \qquad (3)$

3° для каждого ограниченного $M \subset E$ и для каждого индекса j существует постоянное $K_{M,j}$, так что

$$q_j\Big(\sum_{k=1}^m A_{nk}x_k\Big) \leqslant K_{M,j}$$

при $x_k \in M$, где топология τ_F определена семейством полунорм (q_j).

Отображение $\mathfrak{A}$ приводит нас к понятиям $\mathfrak{A}(\Lambda)$-, $\mathfrak{A}^0(\Lambda)$- и $\mathfrak{A}^1(\Lambda)$-сходимостей. Если $F = E$ и $\Lambda = I$, то, следуя примеру 1, мы будем говорить соответственно о $\mathfrak{A}$-, $\mathfrak{A}^0$- и $\mathfrak{A}^1$-сходимости. Отметим, что $\mathfrak{A}$-сходимость совпадает с $\mathfrak{A}$-суммируемостью. В частности, при $A_{nk}x = a_{nk}x$ с $a_{nk} \in K$ мы имеем дело с понятиями A-, A^0- и A^1-сходимости из статьи [3], где $A = (a_{nk})$.

2. Пусть, в дальнейшем, Λ — инъективный оператор из $L_c(E, F)$ и $T \in \mathfrak{T}$.

Теорема 1. *Последовательность X, $T^1(\Lambda)$-сходящаяся (или $T^0(\Lambda)$-сходящаяся) сходится в топологии τ_E тогда и только тогда, когда множество*[3] *X относительно секвенциально τ_E-компактно.*

Доказательство. Необходимость в силу $T \in \mathfrak{T}$ очевидна.

Достаточность. Пусть $T^1(\Lambda)\text{-}\lim X = x$. Последовательность X сходится к элементу $x \in E$ в топологии τ_E тогда и только тогда, когда (см. пример 1) для каждой $Y \in \mathfrak{R}(X)$ найдется $Z \in \mathfrak{R}(Y)$ со свойством $\tau_E\text{-}\lim Z = x$. Так как X относительно секвенциально компактно, то для каждой $Y \in \mathfrak{R}(X)$ существует такая $Z \in \mathfrak{R}(Y)$, что $\tau_E\text{-}\lim Z = x(Z) \in E$. Если теперь допустить, что $x(Z) \neq x$ для всех $Z \in \mathfrak{R}(Y)$, то, ввиду $T \in \mathfrak{T}$, имеем $T^1(\Lambda)\text{-}\lim Y \neq x$. Но последнее противоречит предположению $T^1(\Lambda)\text{-}\lim X = x$. Следовательно, $\tau_E\text{-}\lim X = x$. Доказательство теоремы завершается применением соотношения (1).

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает

Теорема 2. *В случае ограниченно компактного*[4] *метризуемого E имеют место равенства*

$$c(E, T^0(\Lambda)) \cap m(E) = c(E), \quad c(E, T^1(\Lambda)) \cap m(E) = c(E).$$

Следствие 1. *Пусть $F = E$ суть монтелевские*[5] *пространства Фреше и $\Lambda = I$. Последовательность $X \in m(E)$ сходится к точке x в топологии τ_E тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}^1\text{-}\lim X = x$ для некоторого $\mathfrak{A} = (A_{nk}) \in \mathfrak{T}$.*

Следствие 2. *Пусть $F = E = K$ и $A = (a_{nk}) \in \mathfrak{T}$. Для $X \in m = m(K)$ равенство $A^1\text{-}\lim X = x$ (или $A^0\text{-}\lim X = x$) равносильно соотношению $\lim X = x$.*

3. Дальше мы рассмотрим случай операторных матриц $\mathfrak{A} = (A_{nk}) \in \mathfrak{T}$, где $A_{nk} \in L_c(E, F)$, а E и F — пространства Фреше. Мы говорим, что последовательность $X \in s(E)$ имеет *свойство* ($\mathfrak{A}^0$), если существует $\mathfrak{A}(\Lambda)\text{-}\lim Y$ для каждой $Y \in \mathfrak{R}(X)$. По определениям ясно, что каждая $\mathfrak{A}^0(\Lambda)$-сходящаяся последовательность обладает свойством ($\mathfrak{A}^0$). В случае скалярной мат-

---

[3] Последовательность X можно рассматривать как подмножество пространства E, если повторяющиеся элементы в X считать однократно.

[4] Топологическое векторное пространство называется *ограниченно компактным* (см. [6], стр. 695), если каждое его ограниченное подмножество относительно компактно.

рицы A верно и обратное (см. [3], лемма 1). Здесь мы обобщаем последнее на операторные матрицы, не пользуясь при этом теоремой Бака.

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *конечнострочная*[6] *матрица со свойствами* (2) *и* (3). *Из свойства* ($\mathfrak{A}^0$) *последовательности* $X \in s(E)$ *следует ее* $\mathfrak{A}^0(\Lambda)$*-сходимость.*

Доказательство. Пусть X — последовательность со свойством ($\mathfrak{A}^0$). Предположим от противного, что существуют Y', $Y'' \in \mathfrak{R}(X)$, так что $\mathfrak{A}(\Lambda)\text{-}\lim Y' = y' \neq y'' = \mathfrak{A}(\Lambda)\text{-}\lim Y''$. Покажем, что тогда можно построить последовательность $Y = (y_k) \in \mathfrak{R}(X)$ с элементами

$$y_k = \begin{cases} y'_k & \text{при} \quad n_{2m}+1 \leqslant k < n_{2m+1}, \\ y''_k & \text{при} \quad n_{2m+1}+1 \leqslant k < n_{2m} \quad (m=0,\ 1,\ \ldots,\ n_0=0) \end{cases}$$

такую, что $Y \notin c(E, \mathfrak{A}(\Lambda))$.

Обозначим $A_{nk} = A(n,k)$, $y_k = y(k)$ и $t_nY = t(n)Y$. Пусть d — инвариантная метрика, которая порождает топологию τ_F, и (ε_n) с $\varepsilon_n \in \mathbf{R}$ — положительная строго монотонная нуль-последовательность. В силу $\mathfrak{A}(\Lambda)$-сходимости последовательности Y' можем выбрать $n_1 > n_0$ таким, чтобы $d(t(n_1)Y', \Lambda y') < \varepsilon_1$. Обозначим, далее, через $A(n, k(n))$ последний отличный от нуля член в ряде с номером n. По условиям (2) и (3) последовательность индексов $k(n)$ не равномерно ограничена. Поэтому в силу $\mathfrak{A}(\Lambda)$-сходимости последовательности Y'' и условия (2) можно выбрать $n_2 > n_1$ столь большим, чтобы $d(t(n_2)Y'', \Lambda y'') < 2^{-1}\varepsilon_2$ и

$$d\left(\sum_{k=1}^{n_1} A(n_2,k)\,[y'(k) - y''(k)],\, 0\right) < 2^{-1}\varepsilon_2.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} d(t(n_2)Y, \Lambda y'') &= d\left(\sum_{k=1}^{n_1} A(n_2,k)\,[y'(k)-y''(k)] + t(n_2)Y'', \Lambda y''\right) \leqslant \\ &\leqslant d\left(\sum_{k=1}^{n_1} A(n_2,k)\,[y'(k)-y''(k)],\, 0\right) + \\ &\quad + d(t(n_2)Y'', \Lambda y'') < 2^{-1}\varepsilon_2 + 2^{-1}\varepsilon_2 = \varepsilon_2. \end{aligned}$$

В общем случае, если $n_1 < n_2 < \ldots < n_{2m}$ уже определены, то $n_{2m+1} > n_{2m}$ можем выбрать столь большим, чтобы

$$d(t(n_{2m+1})Y', \Lambda y') < 2^{-1}\varepsilon_{2m+1},$$

и

$$\sum_{p=1}^{m} d\left(\sum_{k=n_{2p-1}+1}^{n_{2p}} A(n_{2m+1},k)\,[y'(k)-y''(k)],\, 0\right) < 2^{-1}\varepsilon_{2m+1}.$$

[5] *Монтелевским пространством* (см. [2], стр. 240) называется отделимое бочечное ограниченно компактное пространство.

[6] Т. е. для каждого n существует $k(n)$, так что A_{nk} — нулевые операторы при $k > k(n)$.

Отсюда выводим

$$d(t(n_{2m+1})Y, \Lambda y') \leqslant \sum_{p=1}^{m} d\Big(\sum_{k=n_{2p-1}+1}^{n_{2p}} A(n_{2m+1}, k)\,[y'(k)-y''(k)], 0\Big) +$$
$$+ d(t(n_{2m+1})Y', \Lambda y') < \varepsilon_{2m+1}. \qquad (4)$$

Далее, фиксируя $n_{2m+2} > n_{2m+1}$ таким, что

$$d(t(n_{2m+2})Y'', \Lambda y'') < 2^{-1}\varepsilon_{2m+2},$$

и

$$\sum_{p=0}^{m} d\Big(\sum_{k=n_{2p}+1}^{n_{2p+1}} A(n_{2m+2}, k)\,[y'(k)-y''(k)], 0\Big) < 2^{-1}\varepsilon_{2m+2},$$

аналогично условию (4) получаем

$$d(t(n_{2m+2})Y, \Lambda y'') < \varepsilon_{2m+2}. \qquad (5)$$

Таким образом, последовательность индексов (n_i), и тем самым последовательность Y, определены. Так как Λ — инъективный оператор, то $\Lambda y' \neq \Lambda y''$. Поэтому из (4) и (5) непосредственно вытекает, что $Y \notin c(E, \mathfrak{A}(\Lambda))$. Лемма доказана.

Теорема 3 (см. [8], стр. 898; [7]). *Пусть $F = E = K$ и $A \in \mathfrak{T}$. Последовательность $X \in m \cap c(K, A)$ сходится тогда и только тогда, когда $Y \in c(K, A)$ для каждой $Y \in \mathfrak{R}(X)$.*

Доказательство. Необходимость. Если $X \in c$, то ввиду $A \in \mathfrak{T}$ имеем $Y \in c(K, A)$ при всех $Y \in \mathfrak{R}(X)$.

Достаточность. Пусть $X \in m$ обладает свойством (A^0) для некоторой $A \in \mathfrak{T}$. По одной теореме Брудно [1] (см. также [11], теорема 1) найдется такая треугольная матрица $B \in \mathfrak{T}$, что $c(K, A) \cap m = c(K, B) \cap m$ и из $A\text{-}\lim X = x$ следует $B\text{-}\lim X = x$. Следовательно, X обладает свойством (B^0) и в силу леммы 1 она B^0-сходится. Доказательство теоремы завершается применением следствия 2.

4. Обозначим символом $L_d(E, F)$ множество всех обратимых операторов $f \in L_c(E, F)$ с секвенциально непрерывным обратным f^{-1}. Если $f \in L_d(E, F)$, то $(fx_k) \in s(F) \setminus m(F)$ для любой $X \in s(E) \setminus m(E)$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех матриц $\mathfrak{A}$, ненулевые элементы которых принадлежат $L_d(E, F)$ и пусть $\mathfrak{T}_d = \mathfrak{T} \cap \mathfrak{M}$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{A} = (A_{nk}) \in \mathfrak{M}$ — матрица со свойствами (2) и (3). Каждая последовательность $X \in s(E) \setminus m(E)$ содержит подпоследовательность Y со свойством $Z \notin c(E, \mathfrak{A}(\Lambda))$ при всех $Z \in \mathfrak{R}(X)$.*

Доказательство нашей леммы аналогично доказательству леммы 2 из [3], если только заменить там абсолютную величину на расстояние от нулевой точки в пространстве F.

Лемма 2 показывает, что для матриц $\mathfrak{A} = (A_{nk}) \in \mathfrak{M}$ со свойствами (2) и (3) верно соотношение

$$c(E, \mathfrak{A}^0(A)) \subset c(E, \mathfrak{A}^1(A)) \subset m(E).$$

Отсюда по теореме 2 выводим, что справедлива

Теорема 4. *Пусть E и F — монтелевские пространства Фреше. Равенство τ_E-$\lim X = x$ равносильно каждому из соотношений $\mathfrak{A}^1(A)$-$\lim X = x$ и $\mathfrak{A}^0(A)$-$\lim X = x$, где $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_d$.*

Эта теорема позволяет нам усилить утверждение следствия 2, ибо любая матрица $A \in \mathfrak{T}$ принадлежит $\mathfrak{T}_d$.

Следствие 3 (см. [3], теорема 4). *Пусть $A \in \mathfrak{T}$ и $X \in s$. Равенства A^1-$\lim X = x$ и A^0-$\lim X = x$ равносильны соотношению $\lim X = x$.*

Теорема 4 содержит в себе следующую теорему тауберова типа.

Теорема 5. *Пусть E и F — монтелевские пространства Фреше и $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_d$. Из $\mathfrak{A}(A)$-$\lim X = x$ следует τ_E-$\lim X = x$, если каждая $Y \in \mathfrak{R}(X)$ содержит $Z \in \mathfrak{R}(Y)$ со свойством $\mathfrak{A}(A)$-$\lim Z = x$ (или $\mathfrak{A}(A)$-$\lim Y = x$ для каждой $Y \in \mathfrak{R}(X)$).*

Теорема 6. *Пусть E и F — монтелевские пространства Фреше. Последовательность $X \in s(E)$ является τ_E-сходящейся тогда и только тогда, когда она обладает свойством ($\mathfrak{A}^0$), где $\mathfrak{A} \in \mathfrak{T}_d$ — конечнострочная матрица.*

Доказательство. По лемме 1 свойство ($\mathfrak{A}^0$) последовательности X равносильно ее $\mathfrak{A}^0$-сходимости. Доказательство завершается теперь применением теоремы 4.

Следствие 4 (Бак [9]). Пусть $A \in T$. Последовательность *$X \in c(K, A)$ сходится тогда и только тогда, когда она обладает свойством* (A^0).

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть $A \in \mathfrak{T}$ и X обладает свойством (A^0). По лемме 2 последовательность X ограничена. Точно так же, как и в доказательстве теоремы 3 можно показать, что X обладает свойством (B^0) для некоторой треугольной матрицы $B \in \mathfrak{T}$. Следовательно, по теореме 5 последовательность X сходится. Достаточность условия (A^0) доказана.

Литература

1. Брудно А. Л., Суммирование ограниченных последовательностей матрицами. Матем. сб., 1945, 16, 191—247.
2. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства. Москва, 1959.
3. Кольк Э., Теорема Бака в локально выпуклых пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 128—139.
4. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.

5. Куратовский К., Топология, т. 1. Москва, 1966.
6. Эдвардс Р., Функциональный анализ. Москва, 1969.
7. Agnew, R. P., Summability of subsequences. Bull. Amer. Math. Soc., 1944, **50**, 596—598.
8. Buck, R. C., A note on subsequences. Bull. Amer. Math. Soc., 1943, **49**, 898—899.
9. Buck, R. C., An addendum to "A note on subsequences". Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, 1074—1975.
10. Ramanujan, M. S., Generalized Kojima-Toeplitz matrizes in certain linear topological spaces. Math. Ann., 1965, **159**, 365—373.
11. Tropper, A. M., A sufficient condition for a regular matrix to sum a bounded divergent sequence. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **4**, 671—677.

Поступило
26 II 1976

BUCKI TEOREEMI ÜLDISTUS

E. Kolk

Resümee

Käesolevas töös üldistatakse operaatormaatriksitele tuntud Bucki teoreem (vt. [4], lk. 401) ja mõned autori [3] tulemused. Tõestatakse näiteks järgmine teoreem.

Teoreem 4. *Olgu E ja F Frechet-Monteli ruumid, $\Lambda : E \to F$ — injektiivne pidev lineaarne kujutus ja $A = (A_{nk})$ niisugune Λ-regulaarne* (vt. [10], lk. 368) *üldistatud maatriks, mille kõik nullist erinevad elemendid on pideva pöördoperaatoriga pööratavad operaatorid. Jada (x_k), $x_k \in E$, on koonduv elemendiks x ruumis E parajasti siis, kui tema iga osajada (y_k) sisaldab osajada (z_k), mis on A-summeeruv ruumi F elemendiks Λx (ehk jada (x_k) iga osajada (y_k) on A-summeeruv elemendiks Λx).*

EINE VERALLGEMEINERUNG DES SATZES VON BUCK

E. Kolk

Zusammenfassung

In diesem Aufsatz werden der bekannte Satz von Buck (siehe [4], Seite 401) und einige Sätze des Autors [3] in dem Fall der aus den stetigen linearen Abbildungen bestehenden Matrix verallgemeinert. Als Beispiel wird der folgende Satz bewiesen.

Teoreem 4. *Es seien E und F die Frechet-Montel-Räume, Λ die injektive stetige lineare Abbildung von E in F und (A_{nk}) eine Λ-reguläre (siehe* [10], *Seite* 368) *Matrix mit den Nichtnullelementen als intakte stetige lineare Abbildungen mit stetigen Reziproken. Die Folge (x_k), $x_k \in E$, konvergiert gegen x im Raum E genau dann, wenn jede Teilfolge (y_k) der Folge (x_k) eine Teilfolge (z_k) mit*

$$\lim_n \sum_k A_{nk} z_k = \Lambda x \tag{1}$$

enthält (oder wenn es (1) *für alle Teilfolgen (z_k) der Folge (x_k) gilt).*

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ *BK*-ПРОСТРАНСТВ

Т. Тяхт

Кафедра математического анализа

Введение

Целью настоящей статьи является изучение мультипликаторов *BK*-пространств, в частности, пространств с базисом суммирования. Мультипликаторы для конкретных пространств тригонометрических рядов изучались многими авторами. Назовем здесь Гёса [13, 14], Скворцову [7] и Тыннова [8—10]. Для произвольных *BK*-пространств известно меньше результатов (см. [1, 15, 16]). Оказывается, что многие свойства мультипликаторов тригонометрических пространств имеют место и в случае произвольных *BK*-пространств. Здесь мы займемся обобщением результатов работ [6—10] на произвольные *BK*-пространства.

В § 1 приведем символику и основные понятия. Следующие § 2 и § 3 содержат вспомогательные результаты. Некоторые из них имеют и самостоятельное значение, в частности, обобщают многие результаты работ [7—10, 14]. Вопросам, связанным с понятием определяющиего многообразия, посвящен § 4. Это понятие определяется здесь в несколько более общем виде, чем в [9] (см. определение 4.2). В § 5 обобщается понятие инвариатности тригонометрического пространства относительно сдвига, что позволяет распространить теоремы 4.1, 4.2 и 4.4 из [9] на произвольные *BK*-пространства.

В последнем параграфе рассматривается суммируемость разложений элементов *BK*-пространств в более общем смысле (охватывающую, например, вместе с обычной суммируемостью еще и суммируемость и ограниченность со скоростью (см. [4]), почти суммируемость (см. [18]) и l_p-суммируемость). Получены достаточные условия для мультипликаторов, которые во многих случаях легко проверяемы. Следует отметить, что случай ограниченности со скоростью разложений по тригонометрической системе рассмотрен в [6].

Мы будем часто пользоваться результатами статьи [12]. Отметим, что следствия 25 и 27 из [12] не верны, но в настоящей статье они не используются.

§ 1. Основные понятия

Через E, а также E_1, E_2, F, G, если не оговорено иное, обозначим *ВК-пространства*, т. е. банаховы пространства числовых последовательностей, непрерывно вложенные в пространство s всех числовых последовательностей с топологией покоординатной сходимости. При этом предполагается, что $\delta^n \in E$ при любом [1] n, где $\delta^n = \{\delta_{nk}\}$. Через δ обозначим последовательность $\{\delta_{nn}\}$. Вообще, будем числовые последовательности обозначать греческими буквами μ, λ, φ, ξ, η, имея в виду, что $\mu = \{\mu_n\}$ и т. д.

Линейную оболочку множества $\{\delta^n\}$ обозначим через $L(\delta^n)$, а замыкание $L(\delta^n)$ в E через E_0. Единичный шар пространства E обозначается через $S(E)$. *Мультипликатором* (E_1, E_2) называется множество таких последовательностей μ, что для любого $\xi \in E_1$ верно $\mu\xi \in E_2$, где $\mu\xi = \{\mu_n \xi_n\}$.

Для топологически сопряженного к E пространства E^* определим пространство

$$^\wedge E^* = \{\varphi \in s: \exists f \in E^*,\ (\delta^n, f) = \varphi_n \ \ \forall n\}.$$

Легко видеть, что имеется алгебраический изоморфизм между пространствами $^\wedge E^*$ и $E^*/E_0{}^\perp$, где

$$E_0{}^\perp = \{f \in E^* : (\delta^n, f) = 0 \ \ \forall n\}.$$

Действительно, поставим в соответствие к $\varphi \in {}^\wedge E^*$ множество $\Phi \in E^*/E_0{}^\perp$ таких функционалов $f \in E^*$, что $\varphi_n = (\delta^n, f)$ при каждом n. Если определить норму на $^\wedge E^*$ через $\|\varphi\| = \|\Phi\|$, то $^\wedge E^*$ становится BK-пространством. Если $E = E_0$, то пространства E^* и $^\wedge E^*$ изометрически изоморфны. В этом случае не будем их различать, т. е. считаем E^* BK-пространством. Обозначим также $S(E^*) = \{f \in E^* : \|f\| \leqslant 1\}$.

Через A обозначим бесконечную числовую матрицу $\{a_{nk}\}$ с $\lim_n a_{nk} = 1$ при каждом k. Будем писать $A_n = \{a_{nk}\}$. В частности, через S обозначим матрицу с элементами

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n \geqslant k, \\ 0 & \text{при} \quad n < k. \end{cases}$$

Таким образом, $S_n = \{\underbrace{1, \ldots, 1}_{n \text{ единиц}}, 0, \ldots\}$.

Обозначим

$$FA = \{\xi \in s : A\xi \in F\},$$

где предполагается существование последовательности

$$A\xi = \{\sum a_{nk}\xi_k\}.$$

---

[1] Если не указаны дополнительные ограничения, то свободный индекс принимает все значения 1, 2, 3, ... Аналогично для индекса суммирования

$$\sum_n = \sum_{n=1}^{\infty}.$$

При этом всегда считаем, что $\delta^n \in FA$ при любом n. Полунормы

$$\pi(\xi) = \|A\xi\|_F,$$
$$\pi_n(\xi) = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{k} a_{ni}\xi_i\right| : k = 1,\ 2,\ \ldots\right\}, \tag{1.1}$$

задают FK-топологию [2] на FA. В дальнейшем, говоря о FA, часто предполагаем, что A обратима на F, т. е. уравнение $A\xi = \eta$ имеет единственное решение ξ при любом $\eta \in F$. Тогда FA становится BK-пространством относительно нормы $\pi(\xi)$, и для каждого n найдется константа $q_n > 0$, так что

$$\pi(\xi) \geqslant q_n \pi_n(\xi). \tag{1.2}$$

Будем писать $A_{nm} = S_m A_n$. Через $A_{nm}{}^*\varphi$ обозначим функционал на E, определяемый равенством

$$(\xi, A_{nm}{}^*\varphi) = \sum_{k=1}^{m} a_{nk}\xi_k\varphi_k,$$

где $\varphi \in s$, а $\xi \in E$. Если на E существует $\lim_m (\xi, A_{nm}{}^*\varphi)$, то обозначим его через $(\xi, A_n{}^*\varphi)$. Тогда $A_n{}^*\varphi \in E^*$.

Мы будем часто рассматривать мультипликатор $(^\wedge E^*, FA)$. Как и в [12], обозначим для краткости $(^\wedge E^*, mA) = E^o(A)$.

Обозначим еще $E^F(A) = (^\wedge E^*, FA) \cap E$.

Наконец, $E^{FN}(A) = \{\xi \in E^F(A) \colon \{\|A_n\xi - \xi\|\} \in F^\circ\}$, где дополнительно предполагается, что

(a) найдется BK-пространство $F^\circ \subset F$ такое, что [3] $F = F^\circ \oplus L(\delta)$,

(b) $\inf\{\|\delta_n\|\} > 0$ в F,

(c) норма в F° монотонна в следующем смысле: если $\xi \in F^\circ$ и $|\xi_n| \geqslant |\eta_n|$ при любом n, то $\eta \in F^\circ$ и $\|\xi\| \geqslant \|\eta\|$ (ср. с понятием нормального пространства в [17], стр. 409).

Заметим, что пространство $E^{FN}(A)$ можно определить, например, для пространств $F = m$, c, $l_p \oplus L(\delta)$ (при $p \geqslant 1$), f (см. [18]), m^λ, c^λ (см. [2, 4]). Но, например, в пространстве w_0 абсолютно сходящихся к нулю последовательностей норма не монотонна.

В дальнейшем нам будет полезна следующая

Лемма 1.1. *Если F удовлетворяет условиям* (a), (b) *и* (c) *в определении множества $E^{FN}(A)$, то $F \subset m$ и* $\liminf |\xi_n| = 0$ *для каждого $\xi \in F^\circ$.*

Доказательство. При каждом $\xi \in F^\circ$ имеем $|\xi_n|\,\|\delta^n\| = \|\xi_n\delta^n\| \leqslant \|\xi\|$, откуда $\xi \in m$. Но тогда и $\xi + C\delta \in m$ при любом числе C, т. е. $F \subset m$. Так как $\xi \in m$, то $\liminf |\xi_n| < \infty$. Далее, $\xi - S_k(\xi - \delta) \in F^\circ \not\ni \delta$ при любом k, поэтому (c) дает нам, что $\liminf |\xi_n| = 0$. Лемма доказана.

---

[2] Т. е. вложение $FA \subset s$ непрерывно и FA полно.

[3] Через $L(\delta)$ обозначим множество всех векторов вида $C\delta$, где C — произвольная константа.

Следствие 1.1. *Если* $\xi,\ \eta \in F$ *и* $|\xi_n - \eta_n| < \varepsilon$ *при всех* n, *то* $|p-q| < \varepsilon$, *где* $\xi = \xi^\circ + p\delta$, $\eta = \eta^\circ + q\delta$ *и* $\xi^\circ,\ \eta^\circ \in F^\circ$.

Доказательство. Так как $\xi^\circ,\ \eta^\circ \in F^\circ$, то и $\xi^\circ - \eta^\circ \in F^\circ$. По лемме 1.1 найдется подпоследовательность натуральной последовательности $\{n(k)\}$, так что $|\xi^\circ_{n(k)} - \eta^\circ_{n(k)}| \to 0$, откуда следует $|p-q| < \varepsilon$.

Следует отметить, что определенный в работах [6—10] мультипликатор (см. [9], определение 1.3) пространства тригонометрических рядов является подмножеством мультипликатора в определении настоящей статьи. Но это различие не существенно. Во-первых, все утверждения относительно BK-пространств настоящей статьи можно совершенно аналогично доказать для пространств тригонометрических рядов и мультипликаторов в смысле статей [6—10]. Во-вторых, все утверждения работ [6—10] имеют аналоги для комплексных пространств, где мультипликатор понимается уже в смысле настоящей статьи.

§ 2. Некоторые алгебраические соотношения

Приведенные в этом параграфе результаты могут быть сформулированы для произвольных подмножеств E, E_1, E_2 пространства s. Доказательства, кроме доказательства последнего предложения, ввиду их очевидности опускаются.

Предложение 2.1. *Имеет место включение*

$$(E_1, E_2) \subset ((E, E_1), (E, E_2)).$$

Из предложения 2.1, в частности, вытекает первое утверждение теоремы 5.1 из [9].

Предложение 2.2 *Имеет место включение*

$$(E_1, E_2) \subset ((E_2, E), (E_1, E)).$$

Из предложения 2.2 вытекает теорема 4.5 из [9].

Предложение 2.3. *Имеет место включение*

$$(E_1, E_2) \subset (E, ((E, E_1), E_2)).$$

Из предложения 2.3 вытекает второе утверждение теоремы 5.1 из [9].

Предложение 2.4. *Если* $E \ni \delta$, *то* $(E, E_1) \subset E_1$.

Следствием предложения 2.4 является теорема 3.1 из [9], а также предложение 2 из [11].

Предложение 2.5. *Если* $E \subset (E_1, E_2)$ *и* $E_1 \ni \delta$, *то* $(E_2, E_3) \subset \subset (E, E_3)$.

Из предложения 2.5 вытекает теорема 3.3 из [9]. Действительно, если $E = V$ и $E_1 = {}^\wedge V^*$, а E_2 — поле абсолютной суммируемости матрицы A и E_3 — поле суммируемости матрицы B, где A и B заданы в виде преобразования ряда в последовательность, то в предположениях теоремы 3.3 из [9] условия предложения 2.5 выполнены.

Предложение 2.6. *Если* $(E, E) \supset E_1 \ni \delta$, *то*

$$(E_1, (E, E_2)) = (E, (E_1, E_2)) = (E, E_2).$$

Доказательство. Пусть $\mu \in (E, E_2)$, $\xi \in E$, $\eta \in E_1$. Так как $E_1 \subset (E, E)$, то $\xi\eta \in E$ и поэтому $\mu\xi\eta \in E_2$. Ввиду произвольности $\eta \in E_1$ имеем $\mu\xi \in (E_1, E_2)$. Значит, $(E, E_2) \subset \subset (E, (E_1, E_2))$. Так как $E_1 \ni \delta$, то по предложению 2.4 имеем $(E_1, E_2) \subset E_2$, и поэтому $(E, (E_1, E_2)) \subset (E, E_2)$. В итоге $(E, (E_1, E_2)) = (E, E_2)$. Далее, по предложению 2.4 справедливо $(E_1, (E, E_2) \subset (E, E_2)$. Если же $\mu \in (E, (E_1, E_2))$, то при любом $\xi \in E$, $\eta \in E_1$ выполняется $\mu\xi\eta \in E_2$, т. е. $\mu\eta \in (E, E_2)$ и $\mu \in (E_1, (E, E_2))$. Значит, $(E_1, (E, E_2)) = (E, (E_1, E_2))$.

§ 3. Некоторые вспомогательные результаты

Ниже докажем несколько предложений, которые нам будут нужны в следующих параграфах. Некоторые из них имеют и самостоятельное значение.

Предложение 3.1. *Имеет место*

$$(E_0, (E_1)_0) = (E_0, E_1) \subset (E, E_1).$$

Доказательство. По непрерывности $\mu \in (E_0, E_1)$, (см. предл. 4 из [12]) при каждом $\xi \in E_0$ элемент $\mu\xi \in (E_1)_0$, т. е. $(E_0, (E_1)_0) \subset (E_0, E_1)$. Обратное включение очевидно из-за $E_1 \supset (E_1)_0$. Также из $E_0 \subset E$ выводим, что $(E_0, E_1) \supset (E, E_1)$.

Предложение 3.2. *Имеет место включение*

$$(E_1, E_2) \subset (^\wedge E_2^*, {}^\wedge E_1^*).$$

Доказательство. Определяя для $f \in E_2^*$ и $\mu \in (E_1, E_2)$ функционал μf на E_1 равенством

$$(\xi, \mu f) = (\mu\xi, f),$$

по предложению 4 из [12] имеем $\mu f \in E_1^*$, т. е. $\mu \in (^\wedge E_2^*, {}^\wedge E_1^*)$.

Предложение 3.3. *Если* $E = E_0$, *то*

$$(E, mA) = (E, cA).$$

Доказательство. Очевидно $(E, mA) \supset (E, cA)$. Но $(E, mA) \subset E^*$ (см. лемму 2 из [12]), и поэтому, если $\varphi \in \in (E, mA)$, то по теореме Банаха—Штейнгауза $(\xi, A_n{}^*\varphi) \to \to (\xi, \varphi)$ при любом $\xi \in E$, т. е. $\varphi \in (E, cA)$.

Предложение 3.4. *Имеет место равенство*

$$(E, mA) = \{\varphi \in {}^\wedge E^* : \exists A_n{}^*\varphi = O(1)\},$$

а если $E = E_0$, *то* $(E, mA) = E^{*o}(A)$.

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 2 в [12]. Для доказательства второго утверждения заметим, что в случае $E = E_0$ имеет место $E \subset {}^\wedge(E^*)^*$, и поэтому $(E, mA) \supset E^{*o}(A)$. Обратное включение следует из первого утверждения.

Заметим, что предложения 3.3 и 3.4 обобщают теорему 13 из [8].

Предложение 3.5. *Если* $E = E^{cN}(A)$, *то*

$$\wedge(E^{O}(A))^* = (E^{O}(A), mA) = (E, mA) = (E, cA) = E^*.$$

Доказательство. Для любых $\xi \in E^{O}(A)$, $\varphi \in \wedge(E^{O}(A))^*$ суммы рядов

$$\sum_k a_{nk}\xi_k\varphi_k$$

ограничены, так как по леммам 3 и 23 из [12] имеем $\wedge(E^{O}(A))^* = \wedge E^*$. Тем самым по предложению 3.4

$$\wedge(E^{O}(A))^* = (E^{O}(A), mA) = (E, mA) = E^*.$$

Наконец, $E = E^{cN}(A)$ влечет $E^* = (E, cA)$, и предложение доказано.

Предложение 3.5, в частности, обобщает теорему из [10]. Заметим еще, что при $E = E_0$ равенство $(E, mA) = E^*$ также достаточно для $E = E^{cN}(A)$.

Предложение 3.6. *Если* $E \subset E^{O}(A)$, *то*

$$(E_0, mA) = (E, mA) = (E^{O}(A), mA).$$

Доказательство. По предложению 19 из [12] имеем $E_0 = E^{cN}(A) = E_0^{cN}(A)$, по предложению 23 из [12] выполняется $E^{O}(A) = E_0^{O}(A)$. Доказательство следует теперь из предложения 3.5, так как $(E_0, mA) \supset (E, mA) \supset (E^{O}(A), mA)$.

Следствие 3.1. *Если* $E \subset E^{O}(A) \ni \delta$, *то при любом* E_2

$$((E, mA), E_2) \subset (mA, E_2)$$

Доказательство следует из предложений 3.6 и 2.4.

Заметим, что следствие 3.1 обобщает теорему 3.3 из [9].

Предложение 3.7. *Если* $E = E^{cN}(A)$, *то* $E^* = E^{*O}(A)$ *и* $(E^*)_0 = E^{*cN}(A)$.

Доказательство следует из предложений 3.4 и 3.5, и из предложения 19 из [12].

Предложение 3.8. *Если* $E = E^{cN}(A)$, *то* $(E^*)_0{}^* = E^{O}(A)$.

Доказательство следует из предложений 3.5 и 3.7.

Следствие 3.2. *Если* $E = E^{cN}(A)$, *то* $\wedge E^{**} = E^{O}(A)$.

Доказательство следует из леммы 23 из [12].

Предложение 3.9. *Если* $E = E_0$, *то*

$$(E, (E^*, mA)) = (E, (E^*, cA)) = (E, E^{cN}(A)).$$

Доказательство. Ясно, что $(E, (E^*, mA)) \supset (E, (E^*, cA)) \supset (E, E^{cN}(A))$. Пусть $\mu \in (E, (E^*, mA))$, т. е. $(A_n\mu\xi, \varphi) = O(1)$ для любых $\xi \in E$ и $\varphi \in E^*$. По принципу равномерной ограниченности и теореме Банаха—Штейнгауза $A_n\mu\xi \to \mu\xi$ в E при любом $\xi \in E$, т. е. $\mu \in (E, E^{cN}(A))$.

Следствие 3.3. *Если* $E = E_0$ *и* $E \subset (E^*, E_1)$, *то* $(E_1, mA) \subset (E, E^{cN}(A))$.

Доказательство. По предложениям 2.1 и 3.9 и включению $E \subset (E^*, E_1)$ имеем $(E_1, mA) \subset ((E^*, E_1), (E^*, mA)) \subset (E, (E^*, mA)) = (E, E^{cN}(A))$.

Заметим, что из следствия 3.3 вытекает теорема 5.2 из [9].

§ 4. Определяющие многообразия

В этом параграфе нашей конечной целью будет обобщение теоремы 4.3 из [9] на произвольные BK-пространства. Сперва введем для BK-пространства E понятие определяющего многообразия более общее, чем аналогичное определение 4.2 в [9].

Будем говорить, что банахово пространство $F \subset E^*$ есть *определяющее многообразие для* E, если полунорма

$$\|\xi\|_0 = \sup\{|(\xi, f)| : f \in S(F)\}$$

эквивалентна исходной норме на E.

Следующая теорема показывает, что определяющие многообразия встречаются довольно часто.

Теорема 4.1. *Пусть* $E = E^{cN}(A)$. *Тогда* $(E^*)_0$ — *определяющее многообразие для* E.

Доказательство. По лемме 3 из [12] норма в E эквивалентна норме в $E^o(A)$ для $\xi \in E$, а предложение 3.8 дает, что для $\xi \in E$ норма в $E^o(A)$ эквивалентна норме в $(E^*)_0{}^*$.

Следующая теорема есть обобщение теоремы 4.3 из [9].

Теорема 4.2. *Пусть* $F \subset E^*$ — *определяющее многообразие для* $E = E_0$. *Тогда* $(F, (E, mA)) = (E^*, (E, mA))$.

Доказательство. Ясно, что $(F, (E, mA)) \supset (E^*, (E, mA))$. Обратно, пусть $\mu \in (F, (E, mA)) = (F, E^{*o}(A))$, где последнее равенство имеет место на основании предложения 3.4. Тогда

$$\begin{aligned}\|A_{nm}\mu\|_{(E^*, E^*)} &= \sup\{|(A_{nm}\mu\xi, \varphi)| : \xi \in S(E), \varphi \in S(E^*)\} \sim \\ &\sim \sup\{|(A_{nm}\mu\xi, \varphi)| : \xi \in S(E),\ \varphi \in S(F)\} = \\ &= \|A_{nm}\mu\|_{(F, E^*)} = O_n(1).\end{aligned}$$

ибо $A_n\mu\varphi \in E^*$ для любого $\varphi \in F$. Но $\|A_{nm}\mu\|_{(E^*, E^*)} = \|A_{nm}\mu\|_{(E,E)}$, и поэтому, учитывая $E = E_0$, по теореме Банаха — Штейнгауза получаем $A_n\mu \in (E, E) \subset (E^*, E^*)$. Аналогично

$$\|A_n\mu\|_{(E^*, E^*)} \sim \|A_n\mu\|_{(F, E^*)} = O(1),$$

т. е. для любого $f \in E^*$ выполняется $\|A_n\mu f\| = O(1)$ в E^*.

§ 5. Инвариантность относительно сдвига

Под комплексным тригонометрическим пространством обычно понимается некоторое пространство формальных тригонометрических рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{int},$$

где $t \in [-\pi, \pi]$. Чтобы согласовать это понятие с понятиями BK-пространства и мультипликатора в § 1, нам придется рассматривать ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e^{(-1)^n \left[\frac{n}{2}\right] it}.$$

Таким образом, *инвариантность относительно сдвига* [4] тригонометрического пространства E означает, что при любом $t \in [-\pi, \pi]$ последовательность $\{\tau_n(t)\} \in (E, E)$, где

$$\tau_n(t) = e^{(-1)^n \left[\frac{n}{2}\right] it},$$

$$\sup\{\|\{\tau_n(t)\}\|_{(E,E)} : t \in [-\pi, \pi]\} < \infty.$$

Так как в пространстве [5] C функционалы φ_t с $(x, \varphi_t) = x(t)$ равномерно непрерывны на $[-\pi, \pi]$, то для инвариантности пространства E относительно сдвига достаточно включение $dV \subset (E, E)$. Более того, справедлива

Теорема 5.1. *Тригонометрическое ВК-пространство $E = E^o(A)$ или $E = E^{cN}(A)$ при некоторой A, инвариантно относительно сдвига тогда и только тогда, когда $(E, E) \supset dV$.*

Доказательство. Надо доказать только необходимость. Аналогично доказательству теоремы 4.1 из [9] можно из инвариантности относительно сдвига вывести равенство $(E, (dV, mA)) = (E, mA)$. Предположим, что найдется $\xi \in dV \setminus (E, E)$. По лемме 3, теореме 24 из [12] и предложению 3.5, имеем $((E, mA), mA) = E^o(A)$. Учитывая теорему 20 из [12] и предложение 3.1, получим $(E, E) = (E^o(A), E^o(A)) = (E, E^o(A))$. Тогда найдется $\eta \in E$, такое что $\eta\xi \notin E^o(A)$, т. е. найдется такой $\varphi \in (E, mA)$, что $\varphi\eta\xi \notin mA$. Таким образом, $\varphi\eta \notin (dV, mA)$ и $\varphi \notin (E, (dV, mA))$. Значит, E не инвариантно относительно сдвига. Теорема доказана.

Теорема 5.1 дает нам возможность обобщать теоремы 4.1, 4.2 и 4.4 из [9] относительно тригонометрических пространств на произвольные BK-пространства. Например, теорема 4.1 из [9] следует теперь из предложения 2.6. Аналогом теоремы 4.2 из [9] будет (вместе с предложением 2.6) следующая

Теорема 5.2. *Пусть $^\wedge E_1{}^* \subset (E, E)$ или $^\wedge E_1{}^* \subset ((E, cA), (E, cA))$ и $^\wedge E_1{}^* \ni \delta$, а $E = E_0$. Тогда $(E, E_1{}^{cN}(A)) = (E, cA)$.*

Доказательство. По предложению 2.4 мы имеем $(^\wedge E_1{}^*, cA) \subset cA$, и поэтому

$$(E, E_1{}^{cN}(A)) \subset (E, cA).$$

Пусть $\mu \in (E, cA)$. Тогда при любых $\varphi \in {}^\wedge E_1{}^*$ и $\xi \in E$ имеем $\mu\varphi\xi \in cA$. Таким образом, $(A_n\mu\xi, f)$ сходится при любом $f \in E_1{}^*$. При этом $A_n\mu\xi \in E_1$. Действительно, $A_{nm}\mu\xi \in E_1$ и $\|A_{nm}\mu\| \leqslant C_n$, поэтому по теореме Банаха — Штейнгауза $A_{nm}\mu\xi \to A_n\mu\xi$ в E_1 при каждом $\xi \in E$, т. е. $\mu\xi \in E_1{}^{cN}(A)$. Теорема доказана.

Аналогом теоремы 4.4 из [9] будет

---

[4] Мы определяем инвариантность относительно сдвига без требования сохранения нормы (ср. [8], опр. 1.5), а предположим только равномерную непрерывность сдвига.

[5] Будем пользоваться обозначениями [8] для комплексных тригонометрических пространств.

Теорема 5.3. *Пусть* $\delta \in E_1 \subset (E, E)$ *и* $A_n \in (E_1, (E_1)_0)$ *при каждом* n. *Тогда* $(E_1, (E, mA)) = ((E_1)_0, (E, mA)) = (E, mA)$.

Доказательство. Учитывая предложение 2.6 и

$$(E_1, (E, mA)) \subset ((E_1)_0, (E, mA)),$$

остается доказать, что $(E_1, (E, mA)) \supset ((E_1)_0, (E, mA))$. Возьмем $\mu \in ((E_1)_0, (E, mA))$ и $\xi \in E$. Тогда на основании леммы 2 и предложения 4 из [12] имеем $\xi\mu \in (E_1)_0^*$. Так как $A_n E_1 \subset (E_1)_0$, то для любого $\eta \in E_1$ имеем $(\eta, A_n^* \mu\xi) = (A_n \eta, \mu\xi)$, *где* $A_n^* \mu\xi \in E_1^*$ и из принципа равномерной ограниченности выводим

$$\|A_n^* \mu\xi\|_{E_1^*} = \|A_n^* \mu\xi\|_{(E_1)_0^*} = O(1).$$

Таким образом, $\mu\eta \in (E, mA)$ при каждом $\eta \in E_1$, т. е. $\mu \in (E_1, (E, mA))$. Теорема доказана.

Заметим еще, что теорема 5.1 является обобщением теорем 2 и 3 из [7]. Теорема 6 из [7] также следует из теоремы 5.1.

§ 6. Пространства $({}^\wedge E^*, FA)$, $E^F(A)$ и $E^{FN}(A)$

В этом параграфе предположим, что A обратима на F. Определенные в § 1 пространства $({}^\wedge E^*, FA)$, а также $E^F(A)$ и $E^{FN}(A)$ можно нормировать так, что они становятся BK-пространствами. Для $({}^\wedge E^*, FA)$ и $E^F(A)$ это очевидно, так как $E^F(A)$ — пересечение BK-пространств и $L(\delta_n) \subset E^F(A)$. Поэтому, для $\xi \in ({}^\wedge E^*, FA)$ положим

$$\|\xi\|_1 = \sup\{\|\xi\varphi\|_{FA} : \varphi \in S({}^\wedge E^*)\}, \tag{6.1}$$

а для $\xi \in E^F(A)$

$$\|\xi\|_2 = \|\xi\|_1 + \|\xi\|_E. \tag{6.2}$$

Для $\xi \in E^{FN}(A)$ обозначим

$$\|\xi\|_3 = \|\xi\|_E + \|\{\|A_n\xi - \xi\|\}\|_F. \tag{6.3}$$

Имеет место следующая

Теорема 6.1. *Пространство* $E^{FN}(A)$ *есть* BK-*пространство относительно нормы* (6.3).

Доказательство. Из свойств норм в E и F вытекает, что равенство (6.3) определяет норму в $E^{FN}(A)$. Возьмем из $E^{FN}(A)$ любую последовательность Коши ξ^s, т. е. пусть

$$\lim_{s,r} (\|\xi^s - \xi^r\|_E + \|\{\|A_n\xi^s - A_n\xi^r + \xi^r - \xi^s\|\}\|_F) = 0. \tag{6.4}$$

Тогда $\xi^r \to \xi$ в E. Так как

$$\big| \|A_n\xi^s - A_n\xi^r + \xi^r - \xi^s\| - \|A_n\xi^s - A_n\xi^{r+p} + \xi^{r+p} - \xi^s\| \big| \leqslant$$
$$\leqslant \|A_n\xi^{r+p} - A_n\xi^r + \xi^r - \xi^{r+p}\|,$$

то на основании (6.4) последовательность

$$\eta^r = \{\|A_n\xi^s - A_n\xi^r + \xi^r - \xi^s\|\}_{n=1}^{\infty}$$

сходится в F° при каждом s. Но F° у нас BK-пространство, и поэтому

$$\eta^r \to \{\|A_n\xi^s - A_n\xi + \xi - \xi^s\|\}$$

в F°. Таким образом, $\xi \in E^{FN}(A)$ и (6.4) дает теперь, что $\xi^s \to \xi$ в $E^{FN}(A)$. Теорема доказана.

Теорема 6.2. *Имеет место включение*

$$(E_0, (E_1)_0) \subset (E^{FN}(A), E_1^{FN}(A)).$$

Доказательство. Пусть $\mu \in (E_0, (E_1)_0)$ и $\xi \in E^{FN}(A)$. По лемме 1.1 имеем $\xi \in E_0$ и поэтому $\mu\xi \in E_1$. Неравенство

$$\|\mu\| \, \|A_n\xi - \xi\| \geqslant \|A_n\mu\xi - \mu\xi\|$$

дает теперь, что $\{\|A_n\mu\xi - \mu\xi\|\} \in F^\circ$, откуда $\mu\xi \in E_1^{FN}(A)$.

Следствие 6.1. *Справедливо* $(E, E_1) \subset (E^{FN}(A), E_1^{FN}(A))$.

Доказательство следует из предложения 3.1.

Лемма 6.1. *Пусть* $E \subset E^O(A)$ *и* $A_n \in (E, E) \subset (E_1, E_1)$. *Тогда* $E_1 \subset E_1^O(A)$.

Доказательство следует из неравенства

$$q\,\|A_n\|_{(E,E)} \geqslant \|A_n\|_{(E_1,E_1)},$$

где q — некоторая постоянная.

Оказывается, что пространство $E^{FN}(A)$ имеет базис суммирования, если $F = l_p \oplus L(\delta)$, c, c^λ, m^λ, где $\lambda_n \neq O(1)$. Заметим, что во всех этих случаях $\xi_n S_n \delta \to 0$, если $\xi \in F^\circ$.

Теорема 6.3. *Пусть* $E \subset E^O(A)$ *и для каждого* $\xi \in F^\circ$ *выполняется* $\xi_n S_n \delta \to 0$ *в* F. *Если* $F^{\circ cN}(S) = F^\circ$, *то* $E^{FN}(A)^{cN}(A) = E^{FN}(A)$.

Доказательство. Пусть $\xi \in E^{FN}(A)$. Тогда ввиду (6.3)

$$\|A_m\xi - \xi\|_3 = \|A_m\xi - \xi\|_E + \|\{\|A_nA_m\xi - A_n\xi - A_m\xi + \xi\|\}_{n=1}^{\infty}\|_F \leqslant$$

$$\leqslant \|A_m\xi - \xi\|_E + \|S_m(\{\|A_nA_m\xi - A_n\xi\|\}_{n=1}^{\infty})\|_F +$$

$$+ \|\,\|A_m\xi - \xi\|S_m\delta\|_F + \|R_m(\{\|A_nA_m\xi - A_m\xi\|\}_{n=1}^{\infty})\|_F +$$

$$+ \|R_m(\{\|A_n\xi - \xi\|\}_{n=1}^{\infty})\|_F \leqslant (K+1)(\|\,\|A_m\xi - \xi\|S_m\delta\|_F +$$

$$+ \|R_m(\{\|A_n\xi - \xi\|\}_{n=1})\|_F) + \|A_m\xi - \xi\|_E,$$

где $R_m = \delta - S_m$, а $K = \sup_n \|A_n\| < \infty$ на основании следствия 6.1 и леммы 6.1. Ввиду $\xi_n S_n \delta \to 0$ имеем $\lim_m \|A_m\xi - \xi\|\, S_m\delta = 0$ в F. Так как $F^\circ = F^{\circ cN}(S)$, то и $\lim_m R_m(\{\|A_n\xi - \xi)\}) = 0$ в F. Теорема доказана.

Займемся теперь изучением мультипликаторов пространств $(^\wedge E^*, FA)$, $E^F(A)$ и $E^{FN}(A)$. Имеет место теорема, аналогичная теореме 6.2.

Теорема 6.4. *Справедливо включение*

$$(E_0, (E_1)_0) \subset ((^\wedge E^*, FA), (^\wedge E_1^*, FA)).$$

Доказательство опирается на предложения 3.1, 3.2, 2.2, и на лемму 23 из [12].

Следствие 6.2. *Имеет место*

$$(E, E_1) \subset ((\wedge E^*, FA), (\wedge E_1^*, FA)).$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 6.1.

Предложение 6 из [12] дает необходимое и достаточное условие для принадлежности μ к мультипликатору (E, E_1), но это условие трудно проверяемое. Поэтому важно найти более простые условия. Такое достаточное условие дает нижеследующая теорема 6.5, так как мультипликаторы (FA, GB) для многих A, B и F, G известны [2—5, 16].

Теорема 6.5. *Имеет место включение*

$$(FA, GB) \subset ((\wedge E^*, FA), (\wedge E^*, GB)).$$

Доказательство следует непосредственно из предложения 2.1.

Оказывается, что при некоторых условиях норма $\|\xi\|_2$, заданная равенством (6.2), эквивалентна норме $\|\xi\|_1$ (см. (6.1)) на $E^F(A)$. Это поможет нам получить для пространств $E^F(A)_0$ и $E^G(B)_0$ результат, аналогичный теореме 6.5. Но прежде нам нужна следующая

Лемма 6.2. *Пространство $E^F(A)$ является замкнутым подпространством в $(\wedge E^*, FA)$ тогда и только тогда, когда при некотором $q > 0$ для всех $\xi \in E^F(A)$ выполняется неравенство*

$$\|\xi\|_1 \geqslant q\, \|\xi\|_E. \tag{6.5}$$

Доказательство. Пусть выполняется (6.5) и последовательность $\{\xi^s\} \subset E^F(A)$ сходится в $(\wedge E^*, FA)$ к некоторому $\xi \in (\wedge E^*, FA)$. Тогда (6.5) дает нам, что $\xi \in E$, т. е. $\xi \in E^F(A)$ и $E^F(A)$ замкнуто в $(\wedge E^*, FA)$. Обратно, пусть $E^F(A)$ замкнуто в $(\ E^*, FA)$. Тогда $\|\xi\|_2 \sim \|\xi\|_1$ на $E^F(A)$, откуда следует (6.5). Лемма доказана.

Теорема 6.6. *Пусть $(E^*)_0$ — определяющее многообразие для $E = E_0$, и $F \subset m$. Тогда $E^F(A)$ замкнуто в (E^*, FA).*

Доказательство. Из $FA \subset mA$ и леммы 2 из [12] следует, что $(E^*, FA) \subset \wedge E^{**}$, и поэтому, учитывая, что $(E^*)_0$ — определяющее многообразие, имеем

$$\|\xi\|_E \leqslant \|\xi\|_{\wedge E^{**}} \leqslant q \|\xi\|_1.$$

Для доказательства теоремы остается применить лемму 6.2.

Теперь мы можем доказать теорему, аналогичную теореме 6.5.

Теорема 6.7. *Пусть $(E^*)_0$ — определяющее многообразие для $E = E_0$. Тогда $(FA, GB) \subset (E^F(A)_0, E^G(B)_0)$.*

Доказательство следует из теорем 6.5 и 6.6 и из предложения 3.1.

Теперь сделаем еще одно предположение относительно пространства F, удовлетворяющего условиям леммы 1.1.

Предположение 6.1. *Если* $\xi \in F^\circ$, *где* $\xi_n = \sup\{|\xi^\alpha{}_n| : \alpha \in I\}$, *а* I — *некоторое множество, то* $\sup\{\|\xi^\alpha\| : \alpha \in I\} = \|\xi\|$.

Отметим, что предположению 6.1 удовлетворяют пространства $F = m, c, f, m^\lambda, c^\lambda$. Но пространства l_p при $p \geqslant 1$ не удовлетворяют предположению 6.1.

Следующая теорема позволяет установить для пространств $E^{FN}(A)$ и $E^{GN}(B)$ результат, аналогичный теоремам 6.5 и 6.7.

Теорема 6.8. *Если* F *удовлетворяет предположению* 6.1, *то* $E^{FN}(A)$ *замкнуто в* $E^F(A)$.

Доказательство. Из включения $E^{FN}(A) \subset E^F(A)$ и из предположения 6.1 следует эквивалентность норм $\|\xi\|_2$ и $\|\xi\|_3$ на $E^{FN}(A)$.

Следствие 6.3. *Пусть* F *и* G *удовлетворяют предположению* 6.1 *и для любого* $\xi \in F^\circ$ *выполняется* $\xi_n S_n \delta \to 0$ *в* F, *а* $E_0 = E^{cN}(A)$. *Тогда* $(FA, GB) \subset (E^{FN}(A), E^{GN}(B))$.

Доказательство. По теоремам 6.3 и 6.8 справедливо $E_0{}^F(A)_0 = E_0{}^{FN}(A) = E^{FN}(A) = E^F(A)_0$. Утверждение следствия следует из теоремы 6.7, так как по теореме 4.1 пространство $(E_0{}^*)_0$ — определяющее многообразие для E_0, а $E^{GN}(B) \supset E^G(A)_0 = E_0{}^G(A)_0$.

Здесь уместно привести еще один результат, обобщающий теорему 4.6 из [9].

Теорема 6.9. *Имеет место включение*

$$(E, E_1{}^{FN}(A)) \subset ({}^\wedge E_1{}^*, (E, FA)).$$

Доказательство. Возьмем $\mu \in (E, E_1{}^{FN}(A))$, $\xi \in E$ и $\varphi \in {}^\wedge E_1{}^*$. Тогда $\mu\xi\varphi \in FA$. Действительно, $\{\|A_n\mu\xi - \mu\xi\|\} \in F^\circ$ и поэтому $\{(A_n\mu\xi - \mu\xi, f)\} \in F^\circ$ при любом $f \in E_1{}^*$. Таким образом, $\mu\varphi \in (E, FA)$ и теорема доказана.

Следующая теорема выясняет более точно структуру пространств (E, FA) и $({}^\wedge E^*, FA)$.

Теорема 6.10. *Пусть пространство* F *удовлетворяет условиям леммы* 1.1.

(d) *Если* $E = E_0$, *то*

$$(E, FA) = \{\varphi \in E^* : \{(A_n\xi - \xi, \varphi)\} \in F^\circ \ \forall \xi \in E\}.$$

(e) *Если* $E \subset E^0(B)$ *и* $E_0{}^*{}_0$ *слабо секвенциально полно, то*

$$(E, FA) = \{\varphi \in E_0{}^*{}_0 : \{(A_n\xi - \xi, \varphi)\} \in F^\circ \ \forall \xi \in E\}.$$

(f) *Если* $E = E^{cN}(A)$, *то*

$$E^F(A) = \{\xi \in E : \{(A_n\xi - \xi, \varphi)\} \in F^\circ \ \forall \varphi \in E^*\}.$$

(g) *Если* E_0 *слабо секвенциально полно, то*

$$({}^\wedge E^*, FA) = \{\xi \in E_0 : \{(A_n\xi - \xi, \varphi)\} \in F^\circ \ \forall \varphi \in {}^\wedge E^*\}.$$

Доказательство. Если $\{(A_n\xi, f)\} \in F$, где $\xi \in E$ и $f \in E^*$, то на основании леммы 1.1 найдется число $\langle \xi, f\rangle$, так что

$$\lim (A_{n(k,\xi,f)}\xi, f) = \langle \xi, f\rangle, \tag{6.6}$$

где $\{n(k, \xi, f)\}$ — зависящая от ξ и f подпоследовательность последовательности натуральных чисел.

Если $E = E^{cN}(A)$, то $A_n\xi \to \xi$ при $\xi \in E$ и, следовательно, $\langle \xi, \varphi \rangle = (\xi, \varphi)$ для всех $\varphi \in E^*$, т. е. утверждение (f) доказано.

Пусть $\varphi \in (E, FA)$ и $E = E_0$. Тогда $A_n{}^*\varphi \in E^*$, по лемме 1.1 и по принципу равномерной ограниченности $\|A_n{}^*\varphi\| = O(1)$, и по лемме 2 из [12] получаем $\varphi \in E^*$. Если теперь $\xi^m \to \xi$ в E, то на основании следствия 1.1 имеем $\langle \xi^m, \varphi \rangle \to \langle \xi, \varphi \rangle$. Но (6.6) дает, что $\langle \delta^n, \varphi \rangle = (\delta^n, \varphi)$, поэтому $\langle \xi, \varphi \rangle = (\xi, \varphi)$ для всех $\xi \in E = E_0$. Тем самым утвреждение (d) доказано.

Пусть теперь выполнены предположения (e) и $\varphi \in (E, FA)$. Тогда по предложению 19 из [12] имеем $E_0 = E_0{}^{cN}(B)$, поэтому предложение 3.8 дает $E \subset E_0{}^*{}_0{}^*$. Так как $(\xi, A_n{}^*\varphi) = \lim_m(\xi, A_{nm}{}^*\varphi)$, $A_{nm}{}^*\varphi \in E_0{}^*{}_0$ и $E_0{}^*{}_0$ слабо секвенциально полно, то $A_n{}^*\varphi \in E_0{}^*{}_0$. По (6.6) имеем также $\langle \cdot, \varphi \rangle \in E_0{}^*{}_0$, и $\{\langle \delta^n, \varphi \rangle\} = \{\varphi_n\}$ означает, что $\langle \xi, \varphi \rangle = (\xi, \varphi)$ при всех $\xi \in E$. Таким образом, доказано и утверждение (e).

Если E_0 слабо секвенциально полно, то $A_n\xi \in E_0$ при $\xi \in (^\wedge E^*, FA)$, и по (6.6) имеем также $\xi \in E_0$. Аналогично доказательству утверждения (d) получим $\langle \xi, \varphi \rangle = (\xi, \varphi)$ для всех $\varphi \in {}^\wedge E^*$. Этим доказано утверждение (g) и теорема 6.10.

Следствие 6.4. *Если $F = m^\lambda$ с неограниченной скоростью λ, а $E = E_0$, то*

$$(E, FA) = E^{*FN}(A).$$

Доказательство следует из теоремы 6.10 и из принципа равномерной ограниченности.

Следствие 6.5. *Если $F = m^\lambda$ с неограниченной λ, а $E^*{}_0$ является определяющим многообразием для $E = E_0$, то*

$$(E^*, FA) = E^{FN}(A).$$

Доказательство. Так как $E^*{}_0$ есть определяющее многообразие для $E = E_0$, то $E^*{}_0{}^*{}_0 = E$. Теперь по следствию 6.4 имеем $(E^*{}_0, FA) = E^{FN}(A)$. Доказательство следствия 6.5 следует из включения $E^{FN}(A) \subset (E^*, FA) \subset (E^*{}_0, FA)$.

Замечание 6.1. В доказательстве следствия 6.5 надо (для BK-пространства E^*) использовать равенство

$$E^{FN}(A) = E_0{}^{FN}(A),$$

справедливость которого для произвольного BK-пространства E и BK-пространства F, удовлетворяющего условиям (a), (b) и (c) из § 1, следует из определения пространства $E^{FN}(A)$ и из леммы 1.1. Следствия 6.4 и 6.5 являются аналогом предложения 7 из [6], где речь идет о конкретных пространствах тригонометрических рядов.

Из следствия 6.5 вытекает следующее

Следствие 6.6. *Если $F = m^\lambda$, где λ неограничено, а $E^*{}_0$ — определяющее многообразие для $E = E_0$, то*

$$E^F(A) = E^{FN}(A).$$

Доказательство ввиду включения $(E^*, FA) \supset E^F(A) \supset$ $\supset E^{FN}(A)$ очевидно.

Следствие 6.5 дает возможность для $F = m^\lambda$ обобщить следствие 6.3. Имеет место

Следствие 6.7. *Если $F = m^\lambda$ и $G = m^\mu$ с неограниченными λ и μ, а E^*_0 — определяющее многообразие для E_0, то*

$$(FA, GB) \subset (E^{FN}(A), E^{GN}(B)).$$

Доказательство следует из теоремы 6.5, следствия 6.5 и замечания 6.1.

Литература

1. Кадец М. И., Базисы и х пространства коэффициентов. Доповiдi АН УРСР, 1964, **9**, 1139—1141.
2. Кангро Г., О множителях суммируемости типа Бора—Харди для заданной скорости I. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1969, **18**, № 2, 137—146.
3. Кангро Г., О множителях суммируемости типа Бора — Харди для заданной скорости II. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1969, **18**, № 4, 387—395.
4. Кангро Г., Множители суммируемости для рядов, λ-ограннченных методами Рисса и Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, **277**, 136—154.
5. Кангро Г., Теория суммируемости последовательностей и рядов. В сб. «Мат. анализ. т. 12. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1974, 5—70.
6. Сикк Я., О дополнительных пространствах коэффициентов Фурье со скоростью. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **335**, 222—235.
7. Скворцова М. Г., К теории множителей, преобразующих ряды Фурье. Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, 1959, **3**, 307—326.
8. Тыннов М.. T-дополнительные пространства коэффициентов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 65—81.
9. Тыннов М., Множители суммируемости, коэффициенты Фурье и мультипликаторы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 82—98.
10. Тыннов М., Сопряженные и дополнительные пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, **253**, 202—204.
11. Тяхт Т., Мультипликаторы базисов суммирования и множители суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **355**, 157—164.
12. Тяхт Т., Мультипликаторы и дополнительные пространства BK-пространств. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **374**, 141—154.
13. Goes, G., BK-Räume und Matrixtransformationen für Fourierkoeffizienten. Math. Z., 1959. **70**, 345—371.
14. Goes, G., Komplementäre Fourierkoeffizientenräume und Multipliaktoren. Math., Ann., 1959, **137**, № 5, 371—384.
15. Goes, G., Summen von FK-Räumen. Tohoku Math. J., 1974, **26**, 487—504.
16. Kurtz, J. C., Multipliers on some sequence spaces. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1972, **72**, 393—401.
17. Köthe, G., Topologische lineare Räume. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.
18. Lorentz, G. G., A contribution to the the theory of divergent sequences. Acta Math., 1948, **80**, 167—190.

Поступило
19 II 1976

BAASIGA *BK*-RUUMIDE MULTIPLIKAATORID

T. Täht

Resümee

Artiklis üldistatakse tööde [6—10, 14] tulemusi konkreetsete trigonomeetriliste ruumide multiplikaatorite ja täiendruumide kohta suvalistele *BK*-ruumidele.

MULTIPLIERS OF *BK*-SPACES

T. Täht

Summary

Let E, F and G be the BK-spaces including the sequence $\delta^n = \{\delta_{nk}\}$ for each $n = 1, 2, \ldots$. Denote

$$FA = \{\{\xi_k\} : \{\sum_n a_{nk}\xi_k\}_{n=1}^{\infty} \in F\},$$

where $A = (a_{nk})$ is a summability matrix, and

$$\wedge E^* = \{\{(\delta^n, f)\} : f \in E^*\}.$$

The properties of the multipliers (E, G), (E, FA) and (E^*, FA) are studied. In § 2—5 we discuss the cases $F = m$ and $F = c$. Some results of [7—10, 14] about complementary spaces and multipliers of the concrete spaces of trigonometric series are generalized to the BK-spaces. In § 6 we define the space

$$E^{FN}(A) = \{\xi \in E : \{\|A_n\xi - \xi\|\} \in F \cap c_0\}$$

where $A_n\xi = \{a_{nk}\xi_k\}$. It is shown (Theorem 6.1) that $E^{FN}(A)$ is a BK-space, if A is reversible on F and F satisfies some conditions. For example, F may be the space m, c, m^λ, c^λ (see [2, 4], $l_p \oplus L(\delta) = \{\{\xi_n\} \in c : \{\xi_n - \lim \xi_n\} \in l^p\}$, where $p \geqslant 1$, and f (see [18]). Some results of [6] are generalized to the BK-spaces.

МНОЖИТЕЛИ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ СО СТЕПЕНЬЮ

С. Барон

Кафедра математического анализа

Числовой ряд [1]

$$\sum u_n \tag{1}$$

называется *сходящимся абсолютно со степенью* $p \geqslant 1$, или $|E|_p$*-сходящимся*, если

$$\sum n^{p-1} |u_n|^p < \infty. \tag{2}$$

Отметим, что $|E_p|$-сходящийся ряд может расходиться. Таким является, например, ряд

$$\sum \frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}.$$

С другой стороны, если

$$nu_n = O(1), \tag{3}$$

то $|E|_p \subset |E|_r$ при $1 \leqslant p \leqslant r$, ибо из (3) вытекает

$$n^{r-1}|u_n|^r = n^{p-1}|u_n|^p (n|u_n|)^{r-p} = O(1) n^{p-1}|u_n|^p.$$

Следовательно, всякий абсолютно сходящийся ряд (1), удовлетворяющий условию (3), сходится абсолютно со степенью $p > 1$.

Пусть A — треугольный метод суммирования рядов с матрицей (a_{nk}) преобразования ряда в последовательность и с матрицей $(\overline{a}_{nk})$ преобразования ряда в ряд. Ряд (1) называется *абсолютно суммируемым со степенью* $p \geqslant 1$, или $|A|_p$*-суммируемым*, если ряд $\Sigma u'_n$ с

$$u'_n = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{nk} u_k \tag{4}$$

удовлетворяет условию (2), т. е. если (ср. [9] и [26], стр. 548)

$$\sum n^{p-1} |u'_n|^p < \infty. \tag{5}$$

Вопросы включения для $|A|_p$-суммируемости сложны.

Для метода Чезаро C^α порядка $\alpha > -1$ Флетт (см. [11], теорема 1) показал, что $|C^\alpha|_p \subset |C^\beta|_r$ при $r \geqslant p > 1$ для любого $\beta \geqslant \alpha + p^{-1} - r^{-1}$. В частности, $|C^\alpha|_p \subset |C^\beta|_p$ при $\beta > \alpha > -1$.

---

[1] Во всей заметке $\Sigma a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

С другой стороны, Флетт (см. [11], стр. 123) показал, что $|C^\alpha|_p \not\supset |C^\beta|_r$ при $r > p$ для любых $\alpha, \beta > -1$ и $|C^\alpha|_p \not\subset |C^\beta|_r$ при $r > p$ для любого $\beta < \alpha + p^{-1} - r^{-1}$. Далее, Флетт (см. [11], теорема 4) показал, что при $p > 1$ и $\alpha > 1/p$ всякий $|C^\alpha|_p$-суммируемый ряд (1) суммируем методом C^β, если он суммируем методом Абеля A и $\beta > \alpha - 1 + p^{-1}$.

В статье Боруэйна (см. [9], стр. 125) показано, что имеются методы A (регулярные и нерегулярные) такие, что $|A|_r \subset |A|_p$ при $r > p > 0$, однако (см. [9], теорема 11) для широкого класса методов Хаусдорфа H и любого A имеет место включение $|A|_p \subset |HA|_r$ при $r > p \geqslant 1$. Там же (стр. 135) для любого A доказано: если $\alpha > -1$, то $|C^\alpha A|_p \subset |C^\beta A|_r$ при $r \geqslant p \geqslant 1$ с $\beta > \alpha + p^{-1} - r^{-1}$ или при $r > p > 1$ с $\beta = \alpha + p^{-1} - r^{-1}$.

Ряд (1) называется $|\mathrm{A}|_p$-суммируемым (см. [11], стр. 113), если степенной ряд $\Sigma a_n x^n$ сходится при $0 \leqslant x < 1$ к $f(x)$ и

$$\int_0^1 (1-x)^{p-1} \left|\frac{d}{dx} f(x)\right|^p dx < \infty.$$

Абсолютная суммируемость со степенью $p \geqslant 1$ для других полунепрерывных методов определяется аналогично (см. [26] или [7]). Флетт (см. [11], теорема 2) показал, что $|C^\alpha|_p \subset |\mathrm{A}|_p$ при $p \geqslant 1$ для любого $\alpha > -1$, однако $|\mathrm{A}|_p \not\subset |\mathrm{A}|_r$ при $r \neq p$ (см. [24], стр. 185). Слепенчук и Ярковая (см. [8], теорема 5) нашли условия включения $|C^\alpha|_p \subset |K|_p$ при $p \geqslant 1$ для полунепрерывных методов K, сохраняющих сходимость, и показали (см. [8], теорема 9) равносильность методов $|C^\alpha|_p$ и Гельдера $|H^\alpha|_p$ при $p > 1$. Для полунепрерывного метода Рисса (R, λ, α) с $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ Мазхар [14] показал, что включение $|R, \lambda, \alpha|_p \subset$ $\subset |R, \lambda, \beta|_r$ при $r \geqslant p > 1$ имеет место, если $\alpha > 1 - p^{-1} > 0$ и $\beta \geqslant \alpha + p^{-1} - r^{-1}$.

Комплексные числа ε_n называются *множителями суммируемости типа* $(|A|_p, |B|_p)$, если для любого $|A|_p$-суммируемого ряда (1) ряд

$$\sum \varepsilon_n u_n \tag{6}$$

$|B|_p$-суммируем. Краткая запись: $\varepsilon_n \in (|A|_p, |B|_p)$.

Множители суммируемости других типов определяются и обозначаются аналогично. При $B = E$ говорят о *множителях сходимости.*

Множители суммируемости типов $(|A|, |B|_p)$ и $(|A|_p, B)$ и др. со степенью $p > 1$ для конкретных методов A и B найдены в ряде статей. Перечислим эти результаты. Мехди (см. [24], стр. 195) нашел множители суммируемости типа $(|C^\alpha|, |C^\beta|_p)$ при $\alpha = 0, 1, \ldots$ и $\beta \geqslant 0$. Для регулярных методов взвешенных средних Рисса $P = (R, p_n)$ с $p_n > 0$ и Вороного—Нёрлунда $Q = (WN, q_n)$ с $0 \leqslant q_n \downarrow$ Мазхар [17—19] нашел множители суммируемости типа $(|P|, |C^\beta|_p)$ при $\beta > -1$, типа $(|C^\alpha|_p, |P|)$ при $\alpha \geqslant 0$ и типа $(|C^\alpha|_p, |Q|)$ при $\alpha = 0, 1, \ldots$.

Мазхар (см. [21, 22], лемма 6) также показал, что $(n+1)^{-1} \in (|C^{\alpha+1}|_p, C^\alpha)$ при $\alpha > -1$. Слепенчук (см. [5], лемма, и [6], теоремы 1 и 2) нашел множители сходимости типа $(|E|_p, E)$. Мехди (см. [24], стр. 189) нашел множители суммируемости типа $(|C^\alpha|, |A|_p)$ при $\alpha \geqslant 0$.

Множители суммируемости типов $(|C^\alpha|_p, C^\beta)$ и $(|C^\alpha|_p, |C^\beta|)$ нашел Кольк [4] при $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots$ и типа $(|C^\alpha|_p, |C^\beta|)$ при любых $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ — Мазхар [20]. В их результатах множитель n^{p-1} условия (5) заменен более общим.

Некоторые теоремы об абсолютной суммируемости со степенью $p > 1$ ряда (6) доказаны в статьях [25, 16, 13, 10, 27].

Что касается множителей сходимости или суммируемости типов $(|A|_p, |B|_p)$ при $p > 1$, то здесь рассматривались лишь конкретные ε_n. Мазхар [15] для метода Рисса (R, λ, α) порядка $\alpha = 1, 2, \ldots$ показал, что $\lambda_n^{-\alpha+1-1/p} \in (|R, \lambda, \alpha|_p, |R, l, \alpha|_p)$ при $p > 1$ и $l_n = \exp \lambda_n$. Джейн [12] показывает, что $n^{-1} \ln(n+1) \in$ $\in (|C^1|_p, |Q|_p)$ при $p \geqslant 1$ и $q_n = (n+1)^{-1}$.

В настоящей заметке находим достаточные условия для того, чтобы $\varepsilon_n \in (|A|_p, |E|_p)$ при $p > 1$, где A — любой нормальный метод, удовлетворяющий условию Мура—Кангро (см. [1], стр. 165), и тем самым для рассматриваемого случая распространяем метод Мура—Кангро [3].

Нахождение таких условий сводится к исследованию некоторого матричного преобразования $G: l^p \to l^p$. Для такого преобразования известны лишь достаточные условия. А именно: как показал Мехди (см. [23], стр. 55—56), треугольная матрица $G = (\gamma_{nk})$ переводит любую последовательность $\{x_n\} \in l^p$ в последовательность $\{y_n\} \in l^p$ при выполнении условий

$$\sum_{k=0}^{n} |\bar{\gamma}_{nk}| = O(1), \qquad \sum_{n=k}^{\infty} |\bar{\gamma}_{nk}| = O(1). \tag{7}$$

Как обычно обозначим $q = p/(p-1)$,

$$(\alpha_{nk})^{-1} = (\eta_{nk}), \qquad (\bar{\alpha}_{nk})^{-1} = (\bar{\eta}_{nk}), \qquad \eta_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk},$$

$$D_n = \sup_k |\alpha_{n+k, n+k} \; \eta_{n+k, k}|.$$

Теперь может быть доказана

Теорема. *Пусть метод A нормален и удовлетворяет условию*

$$\sum n D_n < \infty. \tag{8}$$

Комплексные числа ε_n являются множителями сходимости типа $(|A|_p, |E|_p)$ при $p > 1$, если выполнены условия[2]

$$\varepsilon_n = O(\alpha_{nn}), \tag{9}$$

$$\varepsilon_n \eta_n = O(1/n), \tag{10}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} n^{1/q} |\varepsilon_n \eta_n| = O(k^{1/q}). \tag{11}$$

---

[2] Во всех оценках под знаком O свободные индексы $n, k = 1, 2, \ldots$.

Как следует из теоремы Кангро (см. [1], стр. 51), условия (10) и (11) выполнены для всех нормальных методов A, для которых $\alpha_{n0}=1$, т. е. для всех практически важных методов суммирования. Условие (8) Мура—Кангро также выполнено для многих методов суммирования, например, для всех методов A^{α} (см. [2], стр. 165), если существуют конечные D_n, для регулярных методов Чезаро C^{α}, и др. (см. [1], стр. 166—168).

Для доказательства теоремы обозначим

$$\alpha=1/p, \quad \beta=1/q,$$
$$x_0=u'_0, \quad x_k=k^{\beta}u'_k \quad (k\geqslant 1), \quad y_n=n^{\beta}\varepsilon_n u_n.$$

Тогда из (4) выводим

$$y_n=\sum_{k=0}^{n}\bar{\gamma}_{nk}x_k, \tag{12}$$

где

$$\bar{\gamma}_{n0}=n^{\beta}\varepsilon_n\bar{\eta}_{n0}, \quad \bar{\gamma}_{nk}=(n/k)^{\beta}\varepsilon_n\bar{\eta}_{nk} \quad (k\geqslant 1).$$

Так как $|y_n|^p=n^{p-1}|\varepsilon_n u_n|^p$, то $\varepsilon_n\in(|A|_p, |E|_p)$ тогда и только тогда, когда матричное преобразование (12) сохраняет l^p. Как сказано выше, для этого достаточно выполнение условий (7). К этим условиям приходим также, применяя теорему 1 статьи [7], если G сохраняет сходимость. Но условия (7) неэффективны. Поэтому наша главная задача: показать, что из эффективных условий (8)—(11) вытекают условия (7).

Начнем с первого из условий (7). Для этого заметим, что при помощи формулы (9.6) из [1] получаем

$$\bar{\gamma}_{n0}=n^{\beta}\varepsilon_n\eta_n, \quad \bar{\gamma}_{nk}=(n/k)^{\beta}\varepsilon_n(\eta_n-\sum_{\nu=0}^{k-1}\eta_{n\nu}) \quad (k\geqslant 1). \tag{13}$$

Отсюда и из условия (10) вытекает

$$\sum_{k=0}^{n}|\bar{\gamma}_{nk}|\leqslant n^{\beta}(2|\varepsilon_n\eta_n|\sum_{k=1}^{n}k^{-\beta}+B_n)=O(1)+n^{\beta}B_n,$$

где

$$B_n=|\varepsilon_n|\sum_{k=1}^{n}k^{-\beta}\sum_{\nu=0}^{k-1}|\eta_{n\nu}|.$$

Применяя условие (9), получаем

$$B_n=O(1)\sum_{k=1}^{n}k^{-\beta}\sum_{\nu=0}^{k}|a_{nn}\eta_{n\nu}|=O(1)\sum_{k=1}^{n}k^{-\beta}\sum_{\nu=0}^{k}D_{n-\nu}=$$

$$=O(1)\sum_{k=1}^{n}k^{-\beta}\sum_{\nu=n-k}^{n}D_{\nu}=O(1)(C_n+E_n),$$

где, положив $m=[n/2]$, имеем

$$C_n=\sum_{k=1}^{m}k^{-\beta}\sum_{\nu=n-k}^{n}D_{\nu}=O(n^{-1})\sum_{k=1}^{m}k^{-\beta}\sum_{\nu=n-k}^{n}\nu D_{\nu}.$$

Применяя условие (8), получаем

$$n^{\beta}C_n = O(n^{\beta-1})\sum_{k=1}^{m} k^{-\beta} = O(n^{\beta-1}m^{-\beta+1}) = O(1).$$

Далее, из условия (8) также выводим

$$n^{\beta}E_n = n^{\beta}\sum_{k=m}^{n} k^{-\beta}\sum_{\nu=n-k}^{n} D_{\nu} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=n-k}^{n} D_{\nu} = \sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)D_{\nu} = O(1).$$

Теперь рассмотрим второе из условий (7), которое ввиду представления (13) перепишем в виде

$$\sum_{n=k}^{\infty} n^{\beta}\left(|\varepsilon_n\eta_n| + \left|\varepsilon_n\sum_{\nu=0}^{k-1}\eta_{n\nu}\right|\right) = O(k^{\beta}) \qquad (k \geqslant 1).$$

Отсюда, применяя условие (11), видим, что остается доказать оценку

$$F_n = O(k^{\beta}),$$

где

$$F_n = \sum_{n=k}^{\infty} n^{\beta}\left|\varepsilon_n\sum_{\nu=0}^{k-1}\eta_{n\nu}\right|.$$

Далее, имеем

$$F_n = O(1)\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{\varkappa=0}^{n} A_{\varkappa}^{-\alpha}\sum_{\nu=0}^{k}|\varepsilon_n\eta_{n\nu}| = O(1)\,(G_k + H_k),$$

где

$$G_k = \sum_{\nu=0}^{k}\sum_{\varkappa=0}^{k} A_{\varkappa}^{-\alpha}\sum_{n=k}^{\infty}|\varepsilon_n\eta_{n\nu}|, \qquad H_k = \sum_{\nu=0}^{k}\sum_{\varkappa=k}^{\infty} A_{\varkappa}^{-\alpha}\sum_{n=\varkappa}^{\infty}|\varepsilon_n\eta_{n\nu}|.$$

Из условий (9) и (8) вытекает (ср. [1], стр. 166, или [3], стр. 968)

$$G_k = \sum_{\nu=0}^{k}\sum_{\varkappa=0}^{k} A_{\varkappa}^{-\alpha}\sum_{n=k-\nu}^{\infty}|\varepsilon_{n+\nu}\eta_{n+\nu,\nu}| = O(1)\sum_{\varkappa=0}^{k} A_{\varkappa}^{-\alpha}\sum_{\nu=0}^{k}\sum_{n=k-\nu}^{\infty} D_n =$$

$$= O(1)\sum_{\varkappa=0}^{k} A_{\varkappa}^{-\alpha}\sum_{n}(n+1)D_n = O(A_k^{1-\alpha}) = O(k^{\beta}).$$

Наконец, из условия (9) выводим

$$H_k = \sum_{\varkappa=k}^{\infty} A_{\varkappa}^{-\alpha}\sum_{\nu=0}^{k}\sum_{n=\varkappa-\nu}^{\infty}|\varepsilon_{n+\nu}\eta_{n+\nu,\nu}| = O(1)\,(K_k + L_k),$$

где

$$K_k = \sum_{\varkappa=k}^{\infty} A_{\varkappa}^{-\alpha}\sum_{n=\varkappa-k}^{\varkappa} A_{k+n-\varkappa}^{1}D_n, \qquad L_k = \sum_{\varkappa=k}^{\infty} A_{\varkappa}^{-\alpha}\sum_{n=\varkappa}^{\infty}(k+1)D_n.$$

Теперь из условия (8) и свойств чисел Чезаро (см. [1], стр. 70—72) следует

$$K_k \leq \sum_{n=0}^{k} D_n \sum_{\varkappa=k}^{n+k} A_{n+k-\varkappa}^{1} A_{\varkappa-k}^{-\alpha} + \sum_{n=k}^{\infty} D_n \sum_{\varkappa=n}^{n+k} A_{n+k-\varkappa}^{1} A_{\varkappa-n}^{-\alpha} =$$

$$= \sum_{n=0}^{k} A_n^{2-\alpha} D_n + A_k^{2-\alpha} \sum_{n=k}^{\infty} D_n = O(k^{\beta}) \sum_{n} nD_n = O(k^{\beta}),$$

ибо $2-\alpha = 1+\beta$. Из (8) также следует

$$L_k = (k+1) \sum_{n=k}^{\infty} D_n \sum_{\varkappa=k}^{n} A_{\varkappa}^{-\alpha} = (k+1) \sum_{n=k}^{\infty} D_n (A_n^{\beta} - A_{k-1}^{\beta}) =$$

$$= O(k) \sum_{n=k}^{\infty} n^{\beta-1} nD_n = O(k \cdot k^{\beta-1}) \sum_{n=k}^{\infty} nD_n = O(k^{\beta}).$$

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Барон С., Теоремы о множителях суммируемости для методов A^{α}. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, **253**, 165—178.
3. Кангро Г., Об обобщении одной теоремы Мура. Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 6, 967—969.
4. Кольк Э., Множители абсолютной обобщенной Чезаро-суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 136—144.
5. Слепенчук К. М., О линейном преобразовании одного класса рядов. В сб. «Исслед. по соврем. пробл. суммир. и приближ. функций и их прил.», Днепропетровск, 1973. **4**, 123—127.
6. Слепенчук К. М., О линейном преобразовании абсолютно сходящихся в степени $p > 1$ рядов. В сб. «Исслед. по соврем. пробл. суммир. и приближ. функций и их прил.», Днепропетровск, 1974, **5**, 126—132.
7. Слепенчук К. М., Удалая Н. И., Абсолютная суммируемость рядов матричными методами. I. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1974, № 6, 65—73.
8. Слепенчук К. М., Ярковая Т. Н., Теоремы включения на случай абсолютной и сильной суммируемости в степени p рядов. В сб. «Исслед. по соврем. пробл. суммир. и приближ. функций и их прил.», Днепропетровск, 1973, **4**, 138—147.
9. Borwein, D., On strong and absolute summability. Proc. Glasgow Math. Ass., 1960, **4**, № 3, 122—139.
10. Dwivedi, G. K., On the absolute Riesz summability factors of infinite series. Riv. mat. Univ. Parma, 1971, **12**, 145—150.
11. Flett, T. M., On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley. Proc. London Math. Soc., (3), 1957, **7**, № 25, 113—141.
12. Jain, R. K., The absolute harmonic summability factors of infinite series. Colloq. math. 1971, **23**, № 1, 157—164.
13. Lal, S. N., Singh, S. R., On the absolute summability factors in infinite series. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1969, **17**, № 11, 711—714.
14. Mazhar S. M., On an extension of absolute Ricsz summability. Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1960, **A26**, № 2, 160—167.

15. M a z h a r, S. M., A theorem on generalized absolute Riesz summability. Ann. Scuola norm. super. Riza. Sci. fis. e mat., 1965, **19**, № 4, 513—518.
16. M a z h a r, S. M., On $|C, 1|_k$ summability factors of infinite series. Acta scient. math., 1966, **27**, № 1—2, 67—70.
17. M a z h a r, S. M., On $|C, \beta|_k$ summability factors of infinite series. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1971, **57**, № 3, 275—286.
18. M a z h a r, S. M., On the absolute summability factors of infinite series. Tohoku Math. J., 1971, **23**, № 3, 433—451.
19. M a z h a r, S. M., Absolute Nörlund summability factors of infinite series. J. London Math. Soc., 1972, **4**, № 3, 563—570.
20. M a z h a r, S. M., On the absolute summability factors of infinite series. Indian J. Pure and Appl. Math., 1972, **3**, № 5, 840—854.
21. M a z h a r, S. M., Absolute Cesàro summability of infinite series. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1973, **22**, № 4, 350—357.
22. M a z h a r, S. M., Absolute Cesàro summability of infinite series. Ann. polon. math., 1973, **28**, № 2, 223—231.
23. M e h d i, M. R., Linear transformations between the Banach spaces L^p and l^p with applications to absolute summability. London, 1959.
24. M e h d i, M. R., Summability factors for generalized absolute summability. Proc. London Math. Soc., (3), 1960, **10**, № 38, 180—200.
25. P r a s a d, M. B., On the absolute Cesàro summability factors of infinite series. Rend. Circolo mat. Palermo, 1965, **14**, № 2, 189—194.
26. S r i v a s t a v a, P., On the concept of strong summability. Proc. Nat. Inst. Sci India, 1960, **A26**, № 5, 545—552.
27. V a r s h n e y, R. G., On generalized $|V, \lambda|$ summability factors of infinite series. Kōdai Math. Semin. Repts., 1969, **21**, № 3, 281—289.

Поступило
23 III 1976

ASTMEGA ABSOLUUTSE KOONDUVUSE TEGURID

S. Baron

R e s ü m e e

Olgu A — normaalne menetlus. Rida (1) nimetatakse astmega $p \geqslant 1$ absoluutselt A-summeeruvaks, ehk $|A|_p$-summeeruvaks, kui tema A-keskmised (4) täidavad tingimust (5). Töös tõestatakse: kui A rahuldab tingimust (8) ja ε_n rahuldavad tingimusi (9), (10) ja (11), siis iga $|A|_p$-summeeruva rea (1) korral rida (6) on sama astmega p absoluutselt koonduv.

ABSOLUTE CONVERGENCE WITH DEGREE FACTORS

S. Baron

S u m m a r y

Let A be a normal method. The series (1) is called absolutely A-summable with degree $p \geqslant 1$ or $|A|_p$-summable, if its A-means (4) fulfills the condition (5). In this paper the following result is proved: if A satisfies the condition (8) and ε_n satisfies the conditions (9), (10) and (11), then for every $|A|_p$-summable series (1) the series (6) is absolutely convergent with same degree p.

ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Э. Реймерс

Кафедра математического анализа

Введение

Пусть[1] $A=(a_{nk})$ — треугольная числовая матрица, $x=(x_k)$ — числовая последовательность, $y=\{y_n\}$ — последовательность, где

$$y_n=A_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{nk}x_k.$$

Пусть

$$D_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\nu=0}^{k}a_{n\nu}\right)u_{k+1},$$

где $u_k=\overline{\Delta}_k x_k$.

Множества $c=\{x=(x_k):\ \lim x_k=\xi\}$ и $a=\{x=(x_k):\ \Sigma|x_k-x_{k-1}|<\infty\}$ называют множествами сходящихся и абсолютно сходящихся последовательностей, а множества $cA=\{x=(x_k):\ y\in c\}$ и $aA=\{x=(x_k):\ y\in a\}$ — полями суммируемости и абсолютной суммируемости метода A, соответственно. Число $A(x)=\lim y_n$ называют A-суммой последовательности x.

Метод A называют регулярным, если $c\subseteq cA$ и $A(x)=\lim x_k$ при всех $x\in c$, и абсолютно регулярным, если $a\subseteq aA$ и $A(x)=\lim x_k$ при всех $x\in a$.

Метод $A=(a_{nk})$ регулярен тогда и только тогда, когда

1° $\lim\limits_{n}a_{nk}=0$,

2° $\lim\limits_{n}\sum\limits_{k=0}^{n}a_{nk}=1$,

3° $\sum\limits_{k=0}^{n}|a_{nk}|\leqslant M$,

---

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то они имеют значения 0, 1, 2, ... Ниже

$$\Sigma a_k=\sum_k a_k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k,\quad \lim a_k=\lim_{k\to\infty}a_k,\quad \overline{\Delta}_k x_k=x_k-x_{k-1}\quad (x_{-1}=0).$$

и абсолютно регулярен тогда и только тогда, когда выполнены условия 1°, 2° и

$$\sum_{n=p}^{\infty} \bar{\Delta}_n \sum_{\nu=p}^{n} a_{n\nu} \leqslant M.$$

В статье [1] автор доказал следующие теоремы тауберова типа.

Теорема A (см. [1], теорема 2.2.1). *Пусть метод A регулярен. Из $x \in cA$ следует $x \in c$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim D_n(x) = 0. \tag{0.1}$$

Теорема B (см. [1], теорема 2.2.2). *Пусть метод A абсолютно регулярен. Из $x \in aA$ следует $x \in a$ тогда и только тогда, когда*

$$\{D_n(x)\} \in a, \qquad \lim D_n(x) = 0. \tag{0.2}$$

Теорема C (см. [1], теорема 3.2.1). *Пусть метод A* регулярен *и числа $c_k \neq 0$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{c_k} \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} \right| \leqslant M. \tag{0.3}$$

Если $x = (x_k)$ удовлетворяет условию $c_k u_{k+1} = o(1)$, то из $x \in cA$ следует $x \in c$, причем $\lim x_k = A(x)$.

Теорема D (см. [1], теорема 3.2.2). *Пусть метод A абсолютно регулярен и числа $c_k \neq 0$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=p}^{\infty} \left| \bar{\Delta}_n \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{c_k} \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} \right| \leqslant M. \tag{0.4}$$

Если $x = (x_k)$ удовлетворяет условиям $(c_k u_{k+1}) \in a$ и $c_k u_{k+1} = o(1)$, то из $x \in aA$ следует $x \in a$.

В настоящей статье мы изучим более детально выполнимость условий этих теорем и дадим некоторые обобщения. В § 1 мы покажем, как выбирать числа c_k, чтобы условие (0.3) было выполнено, а также дадим рекуррентное соотношение между числами c_k. В § 2 мы распространим теоремы A и C на нетреугольные методы. В § 3 мы рассмотрим некоторые приложения полученных результатов к методам Чезаро (C, α) и Рисса (R, p_n).

§ 1. Рекуррентное соотношение для c_k

Пусть метод $A = (a_{nk})$ регулярен, треуголен и $a_{nk} \neq 0$. Пусть

$$\alpha_{nk} = \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} / a_{nk}.$$

Определим числа c_k равенством

$$c_k = \lim_n |a_{nk}|. \tag{1.1}$$

Оказывается, если

$$\sup_n |a_{nk}| \leqslant K c_k, \tag{1.2}$$

то условие (0.3) выполнено. Действительно, тогда $|a_{nk}| \leqslant K c_k$ и, ввиду регулярности метода A, будет

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \frac{1}{c_k} \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} \right| \leqslant K \sum_{k=0}^{n} |a_{nk}|^{-1} \left| \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} \right| = K \sum_{k=0}^{n} |a_{nk}| \leqslant KM.$$

Следовательно, из теоремы С вытекает

Теорема 1.1. *Пусть треугольный метод A регулярен, c_k определены равенством* (1.1) *и выполняется* (1.2). *Если* $c_k u_{k+1} = o(1)$, *то из $x \in cA$ следует $x \in c$, причем* $\lim x_k = A(x)$.

Из (1.2) видно, что c_k можно определить и равенством

$$c_k = \sup_n |a_{nk}|, \tag{1.3}$$

тогда также условие (0.3) выполнено и теорема С имеет место.

Теорема 1.2. *Пусть $a_{nk} > 0$ и c_k определены равенством* (1.1). *Тогда c_k удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$c_k = 1 + c_{k-1} \lim_n \frac{a_{nk-1}}{a_{nk}}. \tag{1.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из равенства

$$c_k = \lim_n \frac{a_{nk}}{a_{nk}} + \lim_n a_{nk-1} \frac{a_{nk-1}}{a_{nk}}.$$

§ 2. Обобщение результатов на нетреугольные матрицы

Пусть $A = (a_{nk})$ — произвольный регулярный метод суммирования. Как известно, для регулярности метода A необходимо и достаточно выполнения условий

1° $\lim_n a_{nk} = 0$,

2° $\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1$,

3° $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \leqslant M$.

Обозначим

$$A_{nm}(x)=\sum_{k=0}^{m}a_{nk}x_k,$$

$$E_{nm}(x)=\sum_{k=0}^{m}\Big(\sum_{\nu=0}^{k}a_{n\nu}\Big)a_{k+1},$$

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{k}a_{n\nu}\Big)u_{k+1}.$$

Если строка матрицы A конечна, т. е. $a_{np(n)}\neq 0$ и $a_{nk}=0$ при $k>p(n)$, то будем полагать, что

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{p(n)}\Big(\sum_{\nu=0}^{k}a_{n\nu}\Big)u_{k+1}. \tag{2.1}$$

Для каждой последовательности $x=(x_k)$ выполняется равенство

$$x_{m+1}\sum_{k=0}^{m}a_{nk}=A_{nm}(x)+E_{nm}(x). \tag{2.2}$$

Действительно,

$$x_{m+1}\sum_{k=0}^{m}a_{nk}=\sum_{k=0}^{m}a_{nk}\Big(x_k+\sum_{i=k}^{m}u_{i+1}\Big)=$$

$$=A_{nm}(x)+\sum_{k=0}^{m}a_{nk}\sum_{i=k}^{m}u_{i+1}.$$

Изменив порядок суммирования в последнем слагаемом, мы и получим (2.2).

Теорема 2.1. *Пусть метод A регулярен. Из $x\in cA$ следует $x\in c$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim E_n(x)=0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Если $x\in c$, то ввиду регулярности метода A существует предел $A_n(x)=\lim A_{nm}(x)$, причем $\lim x_m=\lim A_n(x)$. Из равенства (2.2) видим, что должен существовать конечный предел $E_n(x)=\lim E_{nm}(x)$, т. е. выполняется равенство

$$\lim_m x_{m+1}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}=A_n(x)+E_n(x). \tag{2.4}$$

Если имеет место равенство (2.1), то в (2.4) нужно считать, что $m\to p(n)$. Следовательно, при $n\to\infty$ должно выполняться условие (2.3).

Наоборот, если условие (2.3) выполняется для $x\in cA$, то из (2.2) получим (2.4), т. е. $x\in c$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть нетреугольная матрица* A *регулярна и* $a_{nk} > 0$. *Если* $x \in cA$ *и* $c_k u_{k+1} = O(1)$, *где* c_k *определены равенством* (1.3), *то* $x \in c$ *и* $\lim x_k = A(x)$.

Доказательство. Должно выполняться условие (2.3). Для этого ввиду равенства (2.4) величина $E_n(x)$ должна существовать. Мы имеем

$$E_n(x) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| |a_{nk}| |u_{k+1}| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| c_k |u_{k+1}| =$$

$$= O(1) \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| = O(1).$$

Из равенства (2.4) видно, что $x \in c$. Теорема доказана.

§ 3. Применения

Поставим вопрос: для каких методов $A = (a_{nk})$ числа $c_k = k + 1$ удовлетворяют условию (0.3), т. е. когда

$$\sum_{k=0}^{n}{}' \frac{1}{k+1} \left|\sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu}\right| \leqslant M. \tag{3.1}$$

Последнее условие выполняется, если

$$\left|\sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu}\right| \leqslant M \frac{k+1}{n+1}. \tag{3.2}$$

Следовательно, мы имеем следующую теорему как частный случай теоремы C.

Теорема 3.1. *Пусть треугольный регулярный метод* A *удовлетворяет условию* (3.2). *Если* $x \in cA$ *и* $ku_k = o(1)$, *то* $x \in c$, причем $\lim x_k = A(x)$.

Условие (3.2) выполнено, если

$$|a_{nk}| \leqslant M/(n+1). \tag{3.3}$$

Поэтому из теоремы 3.1 как частный случай вытекает следующая

Теорема 3.2 (Соколенко [2]). *Если треугольная матрица удовлетворяет условию* (3.3), *то из* $x \in cA$ *и* $ku_k = o(1)$ *следует* $x \in c$.

Рассмотрим теперь приложения рассмотренных выше теорем к классическим методам суммирования Чезаро (C, α) и Рисса (R, p_n), где мы получим известные результаты.

а) Метод Чезаро (C, α) определяется матрицей $A = (a_{nk})$, где

$$a_{nk} = A_{n-k}^{\alpha-1} / A_n^{\alpha}.$$

Здесь $A_0^\alpha = 1$, а при $n > 0$

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}.$$

При $\alpha \geqslant 0$ метод (C, α) регулярен, определение (1.1) дает известный результат

$$c_k = k+1,$$

а рекуррентное соотношение (1.3) принимает вид

$$c_k = 1 + c_{k-1}. \tag{3.4}$$

При $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ выполняется условие (1.2), следовательно, имеет место теорема 1.1. При $\alpha \geqslant 1$ непосредственно можно проверить выполнение условия (0.3), так как тогда

$$a_{nk} \leqslant \alpha/(\alpha+n).$$

Условия (3.3) и (3.2) будут также выполнены. Итак, теорема 1 имеет место при каждом $\alpha \geqslant 0$.

b) Метод взвешенных средних Рисса (R, p_n) определяется матрицей $A = (a_{nk})$, где

$$a_{nk} = p_k/P_n, \qquad P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \neq 0.$$

Для регулярности метода (R, p_n) необходимо и достаточно выполнение условий

1° $\lim |P_n| = \infty$,

2° $\sum_{k=0}^{n} |p_k|/P_n \leqslant M$,

и для абсолютной регулярности условий 1° и

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{p_n P_k}{P_n P_{n-1}} \right| \leqslant M.$$

При $p_k > 0$ определение (1.1) дает известный результат

$$c_k = P_k/p_k, \tag{3.5}$$

а рекуррентное соотношение (1.3) принимает вид

$$c_k = 1 + c_{k+1} p_{k+1}/p_k. \tag{3.6}$$

Условие (0.3) выполнено, если метод (R, p_n) регулярен. Значит теорема 1.1 имеет место для регулярного метода (R, p_n).

Если метод (R, p_n) абсолютно регулярен, то при (3.5) условие (1.2) также выполнено, т. е. для абсолютно регулярного метода (R, p_n) имеет место теорема D с c_k, определенными равенством (3.5).

Литература

1. Реймерс Э., Теоремы тауберова типа для матричных методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 43—51.
2. Соколенко А. И., О тауберовых теоремах для одного класса регулярных матриц. Укр. мат. ж., 1974, **26**, 832—836.

Поступило
15 XI 1976

TAUBERI TEOREEMID ARVRIDADE JAOKS

E. Reimers

Resümee

Käesolevas töös üldistatakse Tauberi tüüpi teoreemid mittekolmnurksele juhule tööst [1]. Samuti uuritakse töös [1] saadud tulemuste kehtivuse tingimusi ning vaadeldakse nende kehtivust Cesàro ja Rieszi menetluste korral.

TAUBERIAN THEOREMS FOR NUMBER SERIES

E. Reimers

Summary

Let $A=(a_{nk})$ be a triangular regular matrix method of summability in sequence-to-sequence form and cA its summability field. Denote by c the set of convergence sequences. Let

$$y_n=\sum_{k=0}^{n} a_{nk}x_k,$$

$$D_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu}\right)u_{k+1}.$$

In [1] the author proved the following theorems.

Theorem A (cf. [1], theorem 2.2.1). *The condition $x\in cA$ implies $x\in c$ if and only if* $\lim D_n(x)=0$.

Theorem C (cf. [1], theorem 3.2.1). *Let numbers $c_k\neq 0$ satisfy the condition* (0.3). *If $c_k u_{k+1}=o(1)$, then $x\in cA$ implies $x\in c$.*

In the present paper in § 1 we investigate how to choose the numbers c_k that the condition (0.3) will hold. Define c_k by the equality (1.1).

Theorem 1.1 *If condition (1.2) holds and $c_k u_{k+1}=o(1)$, then $x\in cA$ implies $x\in c$.*

The numbers c_k defined by the equality (1.1) satisfies the recurrence formula (1.3).

In § 2 the theorem A is generalized to the case of nontriangular matrices. In § 3 we obtain from the definition equality (1.1) the classical results for Cesàro method (C, α) that $c_k=k+1$ and for Riesz method (R, p_n) that $c_k=P_k/p_k$. The recurrence formulas (1.3) for these methods are (3.4) and (3.6), respectively.

К ВОПРОСУ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ПОСРЕДСТВОМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. Жук и Г. Натансон

Ленинградский государственный университет

В работе изучается точность приближения функций, заданных и равномерно непрерывных на вещественной оси **R**, сингулярными интегралами с положительными ядрами. Класс таких функций будем обозначать через C. Удалив из C постоянные, получим класс C_0. Аналогично определяются классы 2π-периодических функций $C(2\pi)$ и $C_0(2\pi)$.

Положим

$$\|f\| = \sup_{x\in R} |f(x)|, \qquad \omega(h, f) = \sup_{|t|\leqslant h} \|f(x+t) - f(x)\|.$$

Мы будем рассматривать функции В. А. Стеклова:

$$S_{h,1}(f) = S_{h,1}(x, f) = h^{-1} \int_{-h/2}^{h/2} f(x+t)\, dt,$$

а при $r > 1$

$$S_{h,r}(f) = S_{h,r}(x, f) = S_{h,1}(x, S_{h,r-1}(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) B_{h,r}(t)\, dt.$$

Всюду далее **N** — множество натуральных чисел.

Лемма 1. *Пусть функция K задана, суммируема и неотрицательна на* **R**, *причем*

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, dt = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |t| K(t)\, dt < +\infty. \tag{1}$$

Тогда, если $h > 0$, то

$$\sup_{f\in C_0} \frac{\left\|f - \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) K(t)\, dt\right\|}{\omega(h, f)} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{|t|}{h}\right] K(t)\, dt. \tag{2}$$

Доказательство. Ясно, что при $f \in C$ ввиду (1) будет

$$\|f-\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)K(t)\,dt\| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \omega(|t|,f)K(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \omega(h,f)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left[\frac{|t|}{h}\right]+1\right)K(t)\,dt=$$

$$=\omega(h,f)\left(1+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{|t|}{h}\right]K(t)\,dt\right).$$

Тем самым показано, что в (2) левая часть не превосходит правой. Для доказательства обратного неравенства, взяв $k>h^{-1}$, положим $g_k(t)=kt$ при $t\in[0,1/k]$, $g_k(t)=1$ при $t\in(k^{-1},h]$, $g_k(t)=g_k(t-h[t/h])+h[t/h]$ при $t>h$ и $g_k(t)=g_k(-t)$ при $t<0$. Нетрудно проверить, что $g_k\in C_0$, $\omega(h,g_k)=1$ и $g_k(t)\to[|t|/h]+1$ при $k\to\infty$ почти везде. Имеем далее

$$\sup_{f\in C_0}\frac{\|f-\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)K(t)\,dt\|}{\omega(h,f)} \geqslant \left|g_k(0)-\int_{-\infty}^{\infty} g_k(t)K(t)\,dt\right| \to$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left[\frac{|t|}{h}\right]+1\right)K(t)\,dt$$

при $k\to\infty$. Отсюда требуемое.

Теорема 1. *Пусть K — целая функция конечной степени не превосходящей 1, удовлетворяющая условиям (1) и $K(t)\geqslant 0$, $K(-t)=K(t)$.*

Для $\sigma>0$, $f\in C$ положим

$$I_\sigma(f)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)K(t)\,dt, \tag{3}$$

$$D=\sup_{f\in C_0}\frac{\|f-I_\sigma(f)\|}{\omega(h/\sigma,f)},$$

$$l(z)=\int_{-\infty}^{\infty} K(t)\cos zt\,dt.$$

Тогда при $h\in(0,2\pi]$

$$D=\frac{1}{2}+\frac{2}{h}\int_0^{\infty} tK(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{2}{hz^2}-\frac{1}{z}\cot\frac{hz}{2}\right)\cdot l(z)\,dz. \tag{4}$$

Доказательство. В силу леммы 1

$$D=1+2\int_0^\infty\left[\frac{t}{h}\right]K(t)\,dt.$$

Рассмотрим интеграл

$$I=\int_0^\infty\left[\frac{t}{h}\right]K(t)\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\left(\left[\frac{t}{h}\right]-\frac{t}{h}\right)K(t)\,dt+\frac{1}{h}\int_0^\infty tK(t)\,dt=I_1+I_2.$$

Имеем

$$I_1=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty P_n(t)\,K(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \hat{P}_n(z)\,\hat{K}(z)\,dz,$$

где

$$P_n(t)=\begin{cases}\left[\frac{t}{h}\right]-\frac{t}{h} & \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant nh,\\ 0 & \text{при} \quad t>nh,\end{cases}$$

$$\hat{g}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(t)\cos zt\,dt.$$

Заметим, что $\hat{K}(z)=(2\pi)^{-1/2}l(z)$. Далее,

$$\hat{P}_n(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{1}{hz^2}-\frac{1}{2z}\cot\frac{hz}{2}+\right.$$

$$\left.+\cos nhz\left(\frac{1}{2z}\cot\frac{hz}{2}-\frac{1}{hz^2}\right)-\frac{1}{2z}\sin nhz\right\}.$$

Таким образом, учитывая, что в силу теоремы Винера—Пэли $l(z)=0$ при $z>1$, получаем

$$\int_0^\infty \hat{P}_n(z)\hat{K}(z)\,dz=\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{hz^2}-\frac{1}{2z}\cot\frac{hz}{2}\right)l(z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1\cos nhz\left(\frac{1}{2z}\cot\frac{hz}{2}-\frac{1}{hz^2}\right)l(z)\,dz-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{\sin nhz}{z}\,l(z)\,dz.$$

Второе слагаемое справа стремится к нулю в силу теоремы Римана—Лебега, третье слагаемое стремится к 1/4, ибо $l(0)=1$. Следовательно, при $n\to\infty$

$$\int_0^\infty \hat{P}_n(z)\hat{K}(z)\,dz \to \frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{hz^2}-\frac{1}{2z}\cot\frac{hz}{2}\right)l(z)\,dz-\frac{1}{4}=I_1.$$

Итак,

$$D=1+2(I_1+I_2)=1+\frac{2}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{hz^2}-\frac{1}{2z}\cot\frac{hz}{2}\right)l(z)\,dz-$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{h}\int_0^\infty tK(t)\,dt.$$

Отсюда требуемое.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что доказательство теоремы проходит также в случае, когда $K=B_{h,r}$ — ядро В. А. Стеклова. Однако при этом, чтобы сходился последний интеграл в правой части (4) надо согласовать h из формулы (4) и шаг функции В. А. Стеклова. В результате при $h>0$ и $p\in\mathbf{N}$ получается соотношение

$$\sup_{f\in C_0}\frac{\|f-S_{h,r}(f)\|}{\omega(h/p,f)}=\frac{1}{2}+2p\int_0^\infty tB_{1,r}(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{p}{z^2}-\frac{1}{z}\cot\frac{z}{p}\right)\frac{\sin^r z}{z^r}\,dz.$$

Замечание 2. Пусть $h\in(0,2\pi)$. Тогда

$$B=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{1}{z}\left(\frac{2}{hz}-\cot\frac{hz}{2}\right)l(z)\,dz=$$

$$=2\sum_{k=1}^\infty\frac{h^{2k-1}|B_{2k}|}{(2k)!}(-1)^{k-1}K^{(2k-2)}(0),\qquad(5)$$

где B_{2k} — числа Я. Бернулли (см., например, [1], стр. 1090).

Для доказательства достаточно разложить котангенс в ряд Лорана и заметить, что в силу свойств преобразования Фурье

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 z^{2k-2}l(z)\,dz=(-1)^{k-1}K^{(2k-2)}(0).$$

Если при некотором $r \in \mathbf{N}$

$$\mu_r = \int_0^\infty t^r K(t)\,dt < \infty,$$

то функция l будет r раз непрерывно дифференцируема. Так как, кроме того, $l(z) = 0$ при $z > 1$, то $l(1) = l'(1) = \ldots l^{(r)}(1) = 0$. Ясно также, что $|l^{(r)}(z)| \leqslant 2\mu_r$. Поэтому

$$\left|\int_0^1 z^{2m-2} l(z)\,dz\right| \leqslant \frac{2\mu_r}{(2m-1)(2m)\ldots(2m-1+r)}.$$

Это неравенство позволяет хорошо оценить остаток ряда (5).

Замечание 3. Методом, аналогичным примененному при доказательстве теоремы 1, получается следующее утверждение. *Пусть числа ϱ_k таковы, что при всех t*

$$U(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \varrho_k \cos kt \geqslant 0.$$

Тогда при $p \in \mathbf{N}$ будет

$$\sup_{f \in C_0(2\pi)} \frac{\left\| f - \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,U(t)\,dt \right\|}{\omega\left(\frac{\pi}{pn}, f\right)} = \frac{1}{2} + \frac{2pn}{\pi} \int_0^\pi tU(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2pn}{\pi k^2} - \frac{1}{k} \cot \frac{k\pi}{2pn} \right) \{1 + (-1)^{k+1}\} \varrho_k.$$

Пример 1. Если K есть ядро Джексона—Валле-Пуссена, т. е.

$$K(t) = \frac{96}{\pi} \frac{\sin^4 \frac{t}{4}}{t^4},$$

то при $h \in (0, 2\pi]$ и $\sigma > 0$

$$D = \frac{1}{2} + \frac{12}{\pi} \left\{ \frac{\ln 2}{h} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|B_{2k}|(2^{2k}-1)}{(2k+2)!\,(2k-1)\,2k} \left(\frac{h}{2}\right)^{2k-1} \right\}.$$

Пример 2. Если K есть ядро Бомана—Коровкина [3], т. е.

$$K(t) = 4\pi \frac{\cos^2 \frac{t}{2}}{(t^2 - \pi^2)^2}, \tag{6}$$

то при[1] $h \in (0, 2\pi]$ и $\sigma > 0$

---

[1] Как обычно

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

$$D=\frac{1}{2}+\frac{2\operatorname{Si}\pi-\dfrac{4}{\pi}}{h}+$$
$$+\frac{4}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|B_{2k}|}{(2k)!}\left\{\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m C_{2k-2}^{2m}\frac{(2m)!(m+1)}{\pi^{2m}}+\right.$$
$$\left.+(-1)^{k-1}\frac{(2k-2)!k}{\pi^{2k-2}}\right\}h^{2k-1}.$$

Подставляя сюда $h=\pi$, находим $D\leqslant 1{,}3424$.

Лемма 2. *Пусть функции f и fg суммируемы на* $\mathbf{R}$, *причем для некоторого $h>0$ существуют такие постоянные C_1 и C_2, что $|g(t+u)|\leqslant C_1|g(t)|+C_2$ при $t\in\mathbf{R}$ и $|u|\leqslant h/2$. Тогда*

$$G\equiv\int_{-\infty}^{\infty}g(t)S_{h,1}(t,f)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}S_{h,1}(t,g)f(t)\,dt.$$

Доказательство. Имеем

$$G=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\left\{\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}f(t+u)\,du\right\}dt=$$
$$=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}du\int_{-\infty}^{\infty}g(t)f(t+u)\,dt=\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}du\int_{-\infty}^{\infty}g(t-u)f(t)\,dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}g(t-u)\,du\right\}f(t)\,dt.$$

Перестановка интегрирований законна, ибо функция $f(t)g(t-u)$ суммируема в полосе $t\in\mathbf{R}$, $|u|\leqslant h/2$. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-h/2}^{h/2}|f(t)g(t-u)|\,du\,dt\leqslant$$
$$\leqslant h\left\{C_1\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)g(t)|\,dt+C_2\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть суммируемая на* $\mathbf{R}$ *функция K удовлетворяет условиям:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(t)\,dt=1,\qquad\int_{-\infty}^{\infty}|t|\,|K(t)|\,dt<+\infty,\tag{7}$$

и при некотором $h>0$ функция В. А. Стеклова $S_{h,1}(t,K)\geqslant 0$ для всех t. Тогда для $\sigma>0$

$$\sup_{f\in C_0}\frac{\|f-I_\sigma(S_{h/\sigma,1}(f))\|}{\omega(h/\sigma,f)}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}|t|\,K(t)\,dt+\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{h}{2}-|t|\right)K(t)\,dt,$$

где I_σ определено равенством (3).

Доказательство. Имеем

$$I_\sigma(x, S_{h/\sigma,1}(f))=\int_{-\infty}^{\infty} S_{h/\sigma,1}\left(x+\frac{t}{\sigma}, f\right)K(t)\,dt.$$

Но $S_{h/\sigma,1}(x+t/\sigma, f)=S_{h,1}(t, F)$, где $F(t)=f(x+t/\sigma)$. Значит, в силу леммы 2,

$$I_\sigma(x, S_{h,1}(f))=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)S_{h,1}(t, K)\,dt.$$

Функция $S_{h,1}(K)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Поэтому искомый супремум равен

$$1+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{|t|}{h}\right]S_{h,1}(t, K)\,dt=1+H.$$

Снова применяем лемму 2:

$$H=\int_{-\infty}^{\infty} S_{h,1}\left(t, \left[\frac{|t|}{h}\right]\right)K(t)\,dt.$$

Нетрудно видеть, что

$$S_{h,1}\left(t, \left[\frac{|t|}{h}\right]\right)=\begin{cases}\dfrac{|t|}{h}-\dfrac{1}{2} & \text{при} \quad |t|\geqslant h/2,\\ 0 & \text{при} \quad |t|<h/2.\end{cases}$$

Поэтому

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{|t|}{h}-\frac{1}{2}\right)K(t)\,dt-\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{|t|}{h}-\frac{1}{2}\right)K(t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}|t|\,K(t)\,dt+\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{h}{2}-|t|\right)K(t)\,dt,$$

что и требовалось доказать.

Для того, чтобы оператор I_σ при $\sigma=n\in\mathbf{N}$, рассмотренный в теореме 2, переводил 2π-периодические непрерывные функции в тригонометрические полиномы порядка не выше $n-1$, в силу теоремы Винера—Пэли достаточно потребовать принадлежность ядра K классу целых функций конечной степени, не превосходящей 1. Возникает вопрос, существуют ли неположительные ядра K указанного класса, для которых $S_{\pi,1}(t, K) \geqslant 0$ при всех t. Приведём пример такого ядра. Положим

$$q(z)=\frac{\pi z}{2\sin 2^{-1}\pi z}\left\{(1-z)\cos \pi z+\frac{1}{\pi}\sin \pi z\right\}.$$

Ядро

$$Q(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 q(z)\cos zt\,dz$$

требуемое. Действительно,

$$J_n(x,f)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{t}{n}\right)Q(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} q\left(\frac{k}{n}\right)\cos kt\right\}dt.$$

Так как при достаточно больших n будет $q(1/n) > \cos(n+1)^{-1}\pi$ то по известному утверждению Фейера (см., например, [2], стр. 96) для этих n выражение в фигурных скобках не может быть неотрицательным. Значит, оператор J_n и, следовательно, ядро Q неположительны. С другой стороны, нетрудно проверить, что $S_{\pi,1}(Q)$ есть ядро Бомана—Коровкина.

Пример. Пусть $h > 0$ и $r \in \mathbf{N}$. Тогда

$$\sup_{f\in C_0}\frac{\|f-S_{h,r+1}(f)\|}{\omega(h,f)}=\frac{1}{2}+2\int\limits_0^{\infty} tB_{1,r}(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}(1-\cos z)\frac{\sin^r z}{z^{r+2}}\,dz.$$

Теорема 3. *Пусть суммируемая на* $\mathbf{R}$ *функция* K *удовлетворяет условиям* (7) *и при некотором* $h > 0$ *вторая функция В. А. Стеклова* $S_{h,2}(t, K) \geqslant 0$ *для всех* t.

Тогда для $\sigma > 0$

$$\sup_{f\in C_0}\frac{\|f-I_\sigma(S_{h/\sigma,2}(f))\|}{\omega(h/\sigma,f)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|K(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2h^2}\int\limits_{-h}^{h}(h-|t|)^2K(t)\,dt,$$

где I_σ *определено равенством* (3).

Доказательство. Как и в теореме 2, имеем

$$I_\sigma(x, S_{h/\sigma,2}(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+\frac{t}{\sigma}\right) S_{h,2}(t, K)\,dt.$$

Обозначив $q(t) = S_{h,1}(t, [|t|/h])$, находим

$$S_{h,1}(t, q) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2h^2}, & \text{если } |t|<h, \\ \dfrac{|t|}{h}-\dfrac{1}{2}, & \text{если } |t|\geqslant h. \end{cases}$$

Тогда искомый супремум равен

$$1+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{|t|}{h}\right] S_{h,2}(t, K)\,dt = 1+\int_{-\infty}^{\infty} S_{h,2}\left(t, \left[\frac{|t|}{h}\right]\right) K(t)\,dt.$$

Отсюда требуемое.

Замечание. Если ядро K неотрицательно, то

$$\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{h}{2}-|t|\right)K(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h}(h-|t|)^2 K(t)\,dt.$$

Поэтому для неотрицательных ядер, удовлетворяющих условиям теоремы 2, будет

$$\sup_{f\in C_0}\frac{\|f-I_\sigma(S_{h,1}(f))\|}{\omega(h/\sigma, f)} \leqslant \sup_{f\in C_0}\frac{\|f-I_\sigma(S_{h,2}(f))\|}{\omega(h/\sigma, f)}.$$

Теорема 4. *Пусть функции g, f, φ и K удовлетворяют следующим условиям: $\varphi''\in C$ и $\|\varphi''\|<+\infty$, область определения функции f содержит $\varphi(\mathbf{R})$. Пусть далее $\omega(h, f)\leqslant\omega(h)$, где ω — выпуклый вверх модуль непрерывности, $g=f\circ\varphi$, ядро $K(t)\geqslant 0$ для всех t и K суммируемо на $\mathbf{R}$,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,dt=1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} t^2K(t)\,dt<+\infty.$$

Тогда для любого $y\in\mathbf{R}$ и $\sigma>0$ будет

$$|g(y)-I_\sigma(y, g)| \leqslant \omega\left(\frac{|\varphi'(y)|}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|t|\,K(t)\,dt+\frac{\|\varphi''\|}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} t^2K(t)\,dt\right),$$

где I_σ определено равенством (3).

Доказательство. Заметим прежде всего, что при наших предположениях интеграл I_σ существует, ибо

$$|g(y)|\leqslant|g(0)|+\left(|\varphi'(0)|\,y+\frac{1}{2}\|\varphi''\|\,y^2+1\right)\omega(1).$$

Имеем далее

$$|g(y)-I_\sigma(y,g)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(\varphi(y))-f\left(\varphi\left(y+\frac{t}{\sigma}\right)\right)\right|K(t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\omega\left(\left|\varphi(y)-\varphi\left(y+\frac{t}{\sigma}\right)\right|\right)K(t)\,dt.$$

В силу интегрального неравенства Иенсена получаем отсюда

$$|g(y)-I_\sigma(y,g)|\leqslant\omega\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi(y)-\varphi\left(y+\frac{t}{\sigma}\right)\right|K(t)\,dt\right).$$

Последний интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi'(y)\frac{t}{\sigma}+\varphi''(\gamma)\frac{t^2}{2\sigma^2}\right|K(t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\varphi'(y)|}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|t|\,K(t)\,dt+\frac{\|\varphi''\|}{2\sigma^2}\int_{\infty}^{\infty}t^2K(t)\,dt.$$

Остальное ясно.

Замечание. Так как для любого модуля непрерывности $\omega(h)$ существует выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega_b(h)$ такой, что $\omega(h)\leqslant\omega_b(h)\leqslant 2\omega(h)$, то для произвольной равномерно непрерывной функции f будет

$$|g(y)-I_\sigma(y,g)|\leqslant 2\omega\left(\frac{|\varphi'(y)|}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|t|\,K(t)\,dt+\frac{\|\varphi''\|}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}t^2K(t)\,dt,f\right).$$

Применим теорему 4 в следующей ситуации: функция f непрерывна на $[-1,\ 1]$, $\varphi(y)=\cos y$, K — ядро Бомана—Коровкина (6), $\sigma=n\in\mathbf{N}$. Мы получим для $y\in[0,\pi]$

$$|g(y)-I_n(y,g)|\leqslant\omega\left(\frac{\sin y}{n}\left(2\operatorname{Si}\pi-\frac{4}{\pi}\right)+\frac{\pi^2}{2n^2}\right).$$

Полагая здесь $y=\arccos x$, найдем при $x\in[-1,1]$

$$|f(x)-I_n(\arccos x,\ f(\cos y))|\leqslant$$

$$\leqslant\omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\left(2\operatorname{Si}\pi-\frac{4}{\pi}\right)+\frac{\pi^2}{2n^2}\right). \qquad (8)$$

Подчеркнем, что $I_n(\arccos x, f(\cos y))$ есть алгебраический многочлен степени не выше $n-1$. Отметим еще, что в случае, когда $\varphi(y)=\cos y$ утверждение теоремы можно несколько уточнить.

Именно, вместо формулы Тейлора следует воспользоваться соотношением

$$\left|\varphi(y)-\varphi\left(y+\frac{t}{n}\right)\right| \leqslant \frac{|t|}{n}\sin y+\frac{t^2}{2n^2}|\cos y|.$$

Поэтому неравенство (8) можно заменить на следующую оценку

$$|f(x)-I_n(\arccos x,\ f(\cos y))| \leqslant$$
$$\leqslant \omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\left(2\operatorname{Si}\pi-\frac{4}{\pi}\right)+|x|\frac{\pi^2}{2n^2}\right),$$

где $x\in[-1,\ 1]$.

Теорема 5. *Пусть при* $k=0, 1, \ldots, n$ *числа* $x_k\in[a,b]$, *функции* l_k *неотрицательны на* $[a,b]$ *и при всех* x *из этого отрезка* $l_0(x)+\ldots+l_n(x)=1$. *Положим*

$$L(x,f)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\,l_k(x).$$

Тогда, если функция f *непрерывна на* $[a,b]$ *и ее модуль непрерывности* $\omega(h,f)\leqslant\omega(h)$, *где* ω *— выпуклый вверх модуль непрерывности, то для* $x\in[a,b]$ *справедлива оценка*

$$|f(x)-L(x,f)|\leqslant\omega\left(\sum_{k=0}^{n}|x-x_k|\,l_k(x)\right).$$

Доказательство. Используя сумматорное неравенство Иенсена, имеем

$$|f(x)-L(x,f)|\leqslant\left|\sum_{k=0}^{n}(f(x)-f(x_k))\,l_k(x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{n}\omega(|x-x_k|)\,l_k(x)\leqslant\omega\left(\sum_{k=0}^{n}|x-x_k|\,l_k(x)\right).$$

Пример. Пусть $[a,b]=[0,1]$ и

$$L(x,f)=B_n(x,f)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

— многочлен С. Н. Бернштейна. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}.$$

Следовательно, при наших предположениях

$$|f(x)-B_n(x,f)|\leqslant\omega\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right).$$

Пусть L^p — пространство измеримых функций, заданных на $\mathbf{R}$, для которых норма

$$\|f\|_p=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f|^p\right)^{1/p}<+\infty,\qquad \omega(h,f)_p=\sup_{|t|\leqslant h}\|f(x+t)-f(x)\|_p.$$

Результаты работы (до теоремы 3 включительно) могут быть распространены на пространство L^p, где $1 \leqslant p < \infty$, с тем отличием, что равенства для супремумов перейдут в оценки. Это отличие вызвано тем, что при переносе леммы 1 на указанный случай не удается построить экстремальную функцию. Например, теорема 1 в этом случае выглядит так:

Теорема 6. *Пусть K удовлетворяет условиям теоремы 1. Для $\sigma > 0$ и $1 \leqslant p < \infty$ положим*

$$D_p = \sup_{f \in L^p} \frac{\|f - I_\sigma(f)\|_p}{\omega(h/\sigma, f)_p}.$$

Тогда при $h \in (0, 2\pi]$

$$D_p \leqslant \frac{1}{2} + \frac{2}{h} \int_0^\infty t K(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{2}{hz^2} - \frac{1}{z} \cot \frac{hz}{2} \right) l(z)\, dz,$$

где I_σ определено равенством (3), *а l — та же функция, что и в теореме* 1.

Примечание при корректуре. Результаты настоящей работы были использованы в статье [4]. Статья [4] без ведома автора сокращена редакцией, издавшей ее. В частности, редакцией опущена история вопроса и сняты ссылки на нашу работу.

Литература

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, 1971.
2. Полиа Г., Сегё Г., Задачи и теоремы из анализа, т. 2. Москва, 1956.
3. Bohman, H., Approximate Fourier analysis of distribution functions. Arhiv mat., 1960, 4, № 1.
4. Мерлина Н. И., К вопросу приближения непрерывных периодических функций линейными положительными методами аппроксимации. В сб. «Управление, надежность и навигация», вып. 3, Саранск, 1976, 153—157.

Поступило
3 XII 1975

FUNKTSIOONIDE LÄHENDAMISEST POSITIIVSETE OPERAATORITEGA

V. Žuk ja G. Natanson

Resümee

Töös uuritakse hulgal **R** defineeritud ühtlaselt pidevate funktsioonide hulga lähendamise täpsust positiivse tuumaga singulaarsete integraalidega.

ABOUT THE QUESTION OF APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY MEANS OF POSITIVE OPERATORS

V. Žuk and G. Natanson

Summary

In the paper the exactness of the approximation of functions is considered that are uniformly continuous and given on the real axis by singular integrals with positive kernels.

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ КЛАССОВ $(X_{T\lambda},\ Y_{U\mu})$

Я. Сикк

Кафедра математического анализа

В настоящей статье продолжается изучение мультипликаторов для конструктивных пространств, рассмотренных автором в статьях [2, 3]. Здесь исследуются связи между мультипликаторами классов $(X_{T\lambda},\ Y_{U\mu})$ и пространствами $(X_{T\lambda},\ U)$ и (X, U^{μ}).

В статье мы пользуемся обозначениями и определениями статей [1, 2], например:

1) $X_{T\lambda}$ — некоторое *T^{λ}-конструктивное* пространство, т. е. пространство всех $f^{\circ} \in X$, для которых $\lambda_n \|\sigma_n f - f\|_X = O(1)$ (см. [2], стр. 164);

2) (X, T^{λ}) — пространство всех $f^{\circ} = (a_k, b_k)$, для которых ряд $\Sigma(a_k c_k + b_k d_k)$ является T^{λ}-ограниченным при каждом $(c_k, d_k) \in X$, причем, если при некоторых k все коэффициенты c_k, либо d_k, либо c_k и d_k вместе, равны нулю для всех $(c_k, d_k) \in X$, то при тех же k полагается соответсвенно a_k, либо b_k, либо a_k и b_k вместе, равным нулю для всех $(a_k, b_k) \in (X, T^{\lambda})$ (см. [1], определение 3).

Лемма 1. *Пусть $k = 1, 2, \ldots$, i — некоторое четное число и j — некоторое нечетное число, a — скорость $\lambda(l) = \{1, 1^l, 2^l \ldots\}$. Имеют место следующие равенства*

a) $L^p{}_{Z^k\lambda(k)} = W^k L^p$ *при* $p \in (1, \infty)$;

b) $(L_{\Psi})_{Z^i\lambda(i)} = W^i L_{\Psi}$;

c) $(L_{\Psi})_{Z^j\lambda(j)} = {}^{c}W^j L_{\Psi}$;

d) $(L_{\Phi})_{Z^{i-1}\lambda(i)} = W^i L_{\Phi}$;

e) $(L_{\Phi})_{Z^{j+1}\lambda(j)} = {}^{c}W^j L_{\Phi}$;

f) $L^p{}_{Z^{i+1}\lambda(i)} = W^i L^p$ *при* $p \in [1, \infty]$;

g) $L^p{}_{Z^{j+1}\lambda(j)} = {}^{c}W^j L^p$ *при* $p \in [1, \infty]$;

h) $L^p{}_{Z^{k+1}\mu\lambda(k)} = W^k \operatorname{Lip}(\alpha, p)$, *где* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *и* $\mu = \{n^{\alpha}\}$ *при* $\alpha \in (0, 1)$.

Доказательство см. [2], предложение 6 и следствие 5.1.

Лемма 2. *Пусть X — одно из пространств L_Φ, L_Ψ, $L^p(1 < p < \infty)$ или M, то при некоторых a_1, $a_2 \in [1/2, 1]$ имеет место равенство*

$$\|f\|_{(T\lambda)} = a_1 \sup_n \|\sigma_n f\|_{X^*} + a_2 \sup_n \lambda_n \|\sigma_n f - f\|_{X^*}. \qquad (1)$$

Доказательство см. [1], предложение 11.

Лемма 3. *Имеют место следующие равенства*

i) $(L_\Phi, T^\lambda) = L_{\Psi T\lambda}$;

j) $(L_\Psi, T^\lambda) = L_{\Phi T\lambda}$;

k) $(L, T^\lambda) = M_{T\lambda} = C_{T\lambda}$;

l) $(L^p, T^\lambda) = L^q{}_{T\lambda}$ *при* $1/p + 1/q = 1$;

m) $(M, T^\lambda) = L_{T\lambda} = (dV)_{T\lambda}$.

Доказательство. В работе [1] мы доказали, что равенства i)—m) имеют место, если T удовлетворяет условию

$$\sup_n \int_0^\pi |\tau_{n0}/2 + \sum_k \tau_{nk} \cos ku|\, du < \infty \qquad (2)$$

(см. [1], предложения 4, 5, 6 и 7). Однако оказывается, что доказательства этих предложений не изменятся, если потребовать, что T — произвольная треугольная матрица Теплица.

Лемма 4. *Пусть X — одно из пространств L_Ψ, L_Φ, L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, dV и M. Тогда пространство $X_{T\lambda}$ является инвариантным относительно сдвига.*

Доказательство. Пространства L_Φ, L_Ψ, C, dV, L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и M являются инвариантными относительно сдвига (см. [4], стр. 90). Следовательно, по предложению 10 статьи [1] пространства (L_Φ, T^λ), (L_Ψ, T^λ), (C, T^λ), (dV, T^λ), (L^p, T^λ) и (M, T^λ) также являются инвариантными относительно сдвига. Теперь, используя лемму 3, получаем утверждение леммы 4.

Обозначим

$$K^\circ = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \cos kx.$$

Теорема 1. *Пусть T удовлетворяет условию* (2). *Если $X_{T\lambda}$ — инвариантное относительно сдвига BK-пространство, то для того, чтобы последовательность ε была мультипликатором класса $(X_{U\lambda}, C_T)$, необходимо и достаточно, чтобы $K^\circ \in (X_{U\lambda}, T)$.*

Доказательство. В пространстве $X_{T\lambda}$ множество P является плотным. Используя теперь теоремы 4.1 и 4.2 из [4], получаем доказуемое, а также равенство

$$(X_{U\lambda}, C_T) = (X_{U\lambda}, (dV, T)).$$

Следствие 1.1. *Пусть T удовлетворяет условию* (2) *и X — одно из пространств L_Φ, L_Ψ, dV, L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и M. Последовательность ε тогда и только тогда является мультипликатором класса $(X_{U\lambda}, C)$, когда $K^\circ \in (X_{U\lambda}, T)$.*

Доказательство. Если T удовлетворяет условию (2), то $C_T = C$ (см. [1], стр. 226). Используя лемму 4 и теорему 1, получаем доказуемое.

Теорема 2. *Пусть X — одно из пространств L_Φ, L_Ψ, L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, M или dV. Тогда*

$$(M, (X_{U\lambda}, T)) = (C, (X_{U\lambda}, T)). \tag{3}$$

Доказательство равенства (3) следует из следствия 4.2 статьи Тыннова [4], так как в силу леммы 4 пространство $X_{T\lambda}$ является BK-пространством, инвариантным относительно сдвига.

Теорема 3. *Пусть $X_{U\mu}$ — инвариантное относительно сдвига BK-пространство. Тогда*

$$(dV, (X_{U\mu}, T)) = (L, (X_{U\mu}, T)), \tag{4}$$

причем условие $K^\circ \in (X_{U\mu}, T)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы $\varepsilon \in (L, (X_{U\mu}, T))$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, только здесь вместо теоремы 4.1 статьи [4] применяем теорему 4.4 из [4].

Следствие 3.1. *Пусть X — одно из пространств L_Φ, L_Ψ, L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, dV или M. Последовательность ε тогда и только тогда является мультипликатором класса $(L, (X_{U\lambda}, T))$, когда $K^\circ \in (X_{U\lambda}, T)$.*

Следствие 3.2. *Если $p \in [1, \infty]$ и $\alpha \in (0, 1)$, то последовательность ε тогда и только тогда является мультипликатором класса*

1) $(L, (\mathrm{Lip}\,(\alpha, p), T))$, *когда* $K^\circ \in (\mathrm{Lip}\,(\alpha, p), T)$;

2) $(L, (W^i\,\mathrm{Lip}(\alpha, p), T))$, *когда* $K^\circ \in (W^i\,\mathrm{Lip}\,(\alpha, p), T)$.

Теорема 4. *Пусть X — одно из пространств L_Φ или L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Тогда*

$$(dV, (X, T^\lambda)) = (E, (X, T^\lambda)), \tag{5}$$

причем условие $K^\circ \in (X, T^\lambda)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы $\varepsilon \in (L, (X, T^\lambda))$.

Доказательство. Необходимость утверждения, а также выполнимость равенства (5), непосредственно следуют из предложения 3 работы [3].

Достаточность. Если $K^\circ \in (X, T^\lambda)$, то в силу леммы 1

$$\sup_n \|\sigma_n K\|_{X^*} + \sup_n \lambda_n \|\sigma_n K - K\|_{X^*} = O(1).$$

Тогда

$$\sup_n \|\sigma_n K\|_{X^*} = O(1)$$

и

$$\sup_n \sup_{\|f\|_L \leqslant 1} \|\sigma_n(\varepsilon f)\|_{X^*} = \sup_n \sup_{\|f\|_L \leqslant 1} \sup_{\|h\|_X \leqslant 1} |\langle\langle \sigma_n(K_t), f\rangle, h\rangle| =$$
$$= \sup_n \sup_{\|h\|_X \leqslant 1} \|\langle \sigma_n(K_t), h\rangle\|_C =$$
$$= \pi^{-1} \sup_n \|\sigma_n K\|_{X^*}.$$

Следовательно, $\sup \|\sigma_n(\varepsilon f)\|_{X^*} = O(1)$. Теперь из теоремы Банаха—Штейнгауза получаем, что $\lim \sigma_n(\varepsilon f) = \varepsilon f$ является линейным непрерывным оператором. Но тогда и $T_n(\varepsilon f) = \lambda_n(\sigma_n(\varepsilon f) - \varepsilon f)$ является линейным непрерывным оператором. Рассуждая для оператора $T_n(\varepsilon f)$ аналогично, как для оператора $\sigma_n(\varepsilon f)$, получаем, что $\sup \lambda_n \|\sigma_n(\varepsilon f) - \varepsilon f\|_{X^*} = O(1)$. Следовательно, мы показали, что

$$\sup_n \|\sigma_n(\varepsilon f)\|_{X^*} + \sup_n \lambda_n \|\sigma_n(\varepsilon f) - \varepsilon f\|_{X^*} = O(1).$$

Теперь из леммы 2 непосредственно вытекает, что $\varepsilon f \in (X, T^\lambda)$.

Следствие 4.1. *Последовательность ε тогда и только тогда является мультипликатором класса*

1) $(L, L_{\Psi T\lambda})$, *когда* $K^\circ \in L_{\Psi T\lambda}$;
2) $(L, L_{T\lambda})$, *когда* $K^\circ \in L_{T\lambda}$;
3) $(L, L^p{}_{T\lambda})$, *когда* $K^\circ \in L^p{}_{T\lambda}$;
4) $(L, C_{T\lambda})$, *когда* $K^\circ \in C_{T\lambda}$.

Доказательство следует из леммы 4 и теоремы 4.

Следствие 4.2. *Пусть X — одно из пространств L_Φ или L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Тогда имеют место равенства*

1) $(L, (X, T^\lambda)) = (L, X^*{}_{T\lambda}) = (X, C_{T\lambda})$;
2) $(L, L^p{}_{T\lambda}) = (L^q, C_{T\lambda})$ *при* $1/p + 1/q = 1$;
3) $(L, \mathrm{Lip}(\alpha, p)) = (L^q, \mathrm{Lip}\,\alpha)$ *при* $\alpha \in (0, 1)$.

Доказательство следует при помощи лемм 1 и 3 из теоремы 4.

Следствие 4.3. *Пусть i — четное число, j — нечетное число и $l = 1, 2, \ldots$. Пусть кроме того X — одно из пространств W^lL^p при $p \in (1, \infty)$, W^lL_Φ, ${}^cW^jL_\Phi$, W^iC, ${}^cW^jC$, W^iL, $\mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$ или $W^l\,\mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $p \in [1, \infty]$. Последовательность ε тогда и только тогда является мультипликатором класса (L, X), когда $K^\circ \in X$.*

Доказательство следует из предложений 1 и 3 и из теоремы 4.

Литература

1. Сикк Я., О дополнительных пространствах коэффициентов Фурье со скоростью. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **355**, 222—235.
2. Сикк. Я., О некоторых T^λ-конструктивных пространствах и мультипликаторах класса $(X_{T\lambda}, X_{U_{11}})$. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **374**, 163—179.
3. Сикк Я., Мультипликаторы, T^λ-дополнительные пространства и коэффициенты Фурье некоторых классов функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, **374**, 180—185.
4. Тыннов М., Множители суммируемости, коэффициенты Фурье и мультипликаторы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 82—97.

Поступило
15 I 1976

MULTIPLIKAATORITE $(X_{T\lambda}, Y_{U\mu})$ KLASSID

J. Sikk

Resümee

Käesolev töö on autori artiklite [2, 3] jätk. Kasutades T^{λ}-konstruktiivsete ruumide, T-täiendruumide ja T^{λ}-täiendruumide omadusi kirjeldatakse artiklis mitmeid multiplikaatorite klasse.

MULTIPLIERS OF CLASSES $(X_{T\lambda}, Y_{U\mu})$

J. Sikk

Summary

This paper is a continuation of the papers [2, 3]. We use properties of T^{λ}-constructive, T-complementary and T^{λ}-complementary spaces for investigation of multipliers.

Let $\lambda = \{\lambda_n\}$ be a rapidity (a real sequence with $0 < \lambda_n \uparrow$). Let T and U be triangular Toepliz summability methods and let X be Banach space of real 2π-periodical Lebesgue integrable function. We define the T^{λ}-constructive space in case of the space X (briefly space $X_{T\lambda}$) as the set of all these $f \in X$, for with $\lambda_n \|\sigma_n f - f\|_X = O(1)$ (see [1], summary).

Lemma 1. *Let $k = 1, 2, \ldots$, let i be some even number, let j be some odd number and let $\lambda(l) = \{1, 1^l, 2^l, \ldots\}$ be the rapidity. Then relations* a)—h) *are satisfied.*

Some of the more important results proved are the following:

Corollary 1.1. *Suppose that T satisfies* (2) *and X is one of the spaces L_Φ, L_Ψ, $L^p\,(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, M or dV, then $\varepsilon \in (L, (X_{U\lambda}, C))$ iff $K^\circ \in (X_{U\lambda}, T)$.*

Corollary 3.1. *Let X be one of the spaces L_Φ, L_Ψ, $L^p\,(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, M or dV, then $\varepsilon \in (L, (X_{U\lambda}, T))$ iff $K^\circ \in (X_{U\lambda}, T)$.*

Corollary 4.1. *The ε is a multiplier of the class*

1) $(L, L_{\Psi T\lambda})$ *iff* $K^\circ \in L_{\Psi T\lambda}$;
2) $(L, L_{T\lambda})$ *iff* $K^\circ \in L_{T\lambda}$;
3) $(L, L^p{}_{T\lambda})$ *iff* $K^\circ \in L^p{}_{T\lambda}$;
4) $(L, C_{T\lambda})$ *iff* $K^\circ \in C_{T\lambda}$.

Corollary 4.2. *Let X be one of the spaces L_Φ or L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Then*

1) $(L, (X, T^\lambda)) = (L, X^*{}_{T\lambda}) = (X, C_{T\lambda})$;
2) $(L, L^p{}_{T\lambda}) = (L^q, C_{T\lambda})$;
3) $(L, \mathrm{Lip}(\alpha, p)) = (L^q, \mathrm{Lip}\,\alpha)$ *for* $1/p + 1/q = 1$ *and* $\alpha \in (0, 1)$.

Now, taking into account lemma 1, it will be easy to deduce many other results for multipliers.

О СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ОТЫСКАНИЯ АВТОКОЛЕБАНИИ

Г. Вайникко и П. Мийдла

Кафедра вычислительной математики

Сходимость приближенных методов для отыскания периодических решений дифференциальных уравнений подробно изучена в случае, когда период ω искомого решения известен [1, 7, 8—10]. Результаты этих работ, к сожалению, не применимы непосредственно к автономным уравнениям и системам, в которых период тоже подлежит определению. Дополнительная трудность, которая здесь возникает, состоит в том, что соответствующая линеаризированная задача всегда **вырождена** (т. е. имеет ненулевое решение).

В данной работе[1] рассматривается нелинейное автономное дифференциальное уравнение порядка m, при котором вырождение слабое (т. е. случай, когда линеаризированное уравнение имеет единственное в некотором смысле решение). Показывается, что приближенные методы сходятся тогда столь же хорошо, как в случае задач с известным периодом. Некоторые результаты в том же направлении получены в [5, 6].

§ 1. Постановка задачи. Основные предположения. Описание методов приближенного решения

Мы будем изучать сходимость методов коллокации, Галеркина и конечных разностей для отыскания периодических решений (автоколебаний) автономоного уравнения

$$f(z(\tau),\ z'(\tau),\ \ldots,\ z^{(m)}(\tau))=0. \tag{1}$$

Определению подлежит и неизвестный период ω искомого решения.

Заменой времени $t=2\pi\tau/\omega$ задача (1) сводится к нелинейной проблеме собственных значений

$$f(x(t),\lambda)=f(x(t),\ \lambda x'(t),\ \ldots,\ \lambda^m x^{(m)}(t))=0, \tag{2}$$

[1] Результаты работы докладывались на VII международной конференции по нелинейным колебаниям (Берлин, сентябрь 1975 г.).

в которой неизвестными являются 2π-периодическая функция $x(t) = z(\omega t/2\pi)$ и число $\lambda = 2\pi/\omega > 0$.

Предположим, что

1° задача (2) имеет решение $\{\lambda^*, x^*(t)\}$ (это равносильно тому, что задача (1) имеет решение $\{\omega^*, z^*(\tau)\}$);

2° функция $f(z_0, z_1, \ldots, z_m)$ непрерывно дифференцируема в области

$$\mathfrak{A} = \{(z_0, \ldots, z_m):\ \alpha_k < z_k < \beta_k,\ k=0, 1, \ldots, m\},$$

где α_k, β_k — некоторые числа, такие, что

$$\alpha_k < \min_t \lambda^{*k} x^{*(k)}(t),\quad \beta_k > \max_t \lambda^{*k} x^{*(k)}(t).$$

Покажем, что линеаризированное уравнение для (2) вырождено, если выполнены 1° и 2°. Итак, рассмотрим решение $\{\lambda^*, x^*(t)\}$ уравнения (2). Заметим, что решениями являются и все пары $\{\lambda^*, x_\Theta\}$ где $x_\Theta = x_\Theta(t) = x^*(t+\Theta)$ и $\Theta \in [0, 2\pi]$. Так как

$$f(x^*(t+\Theta), \ldots, \lambda^{*m} x^{*(m)}(t+\Theta)) = 0\quad \forall\Theta \in [0, 2\pi],$$

то и

$$\frac{d}{dt} f(x^*(t), \lambda^*) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial f(x^*(t), \lambda^*)}{\partial z_k} \lambda^{*k} x^{*(k+1)}(t) = 0,$$

т. е. $u^*(t) = x^{*\prime}(t)$ является решением линеаризированного уравнения. Это обстоятельство и заставляет нас искать новые возможности подхода к проблеме нахождения автоколебаний автономного уравнения.

В настоящей работе мы требуем, чтобы

3° вырождение задачи (1) (задачи (2)) слабое, т. е. линеаризированное уравнение

$$Bu := \sum_{k=0}^{m} b_k(t) u^{(k)}(t) = 0,\qquad b_k(t) := \frac{\partial f(x^*(t), \lambda^*)}{\partial z_k} \cdot \lambda^{*k},$$

имеет в классе 2π-периодических функций лишь одно линейно независимое решение, а именно $u^* = x^{*\prime}(t)$. Кроме того, пусть $b_m(t) \neq 0$ для всех t.

Опишем теперь приближенные методы решения задачи (2). В случае методов коллокации и Галеркина приближенное решение разыскивается в виде тригонометрического многочлена

$$x_n(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=0}^{n} (c_k \cos kt + d_k \sin kt). \tag{3}$$

Коэффициенты c_k и d_k и параметр λ по методу коллокации определяются из условий

$$\begin{gathered} f(x_n(t_i), \ldots, \lambda^m x_n^{(m)}(t_i)) = 0,\qquad i=0, \ldots, 2n, \\ x_n(0) = a, \end{gathered} \tag{4}$$

где $t_i = il$, $l = 2\pi/(2n+1)$, а a — довольно произвольным образом задаваемое число, смысл которого состоит в следующем. Если $\{\lambda, x(t)\}$ — решение задачи (2), то, как мы уже выше отметили, решением будет и семейство $\{\lambda, x_\Theta(t)\}$ с $x_\Theta(t) = x(t+\Theta)$ и $\Theta \in [0, 2\pi]$. Условие $x(0) = a$ выделяет те периодические функции $x_\Theta(t)$, которые проходят через точку $(0, a)$. Поэтому число a в (4) следует выбрать из области значений функции $x(t)$. Это и будет нашим следующим основным предположением:

4° число a принадлежит области значений функции $x^*(t)$, причем $x^*(t_\alpha) = a$ и $x^{*\prime}(t_\alpha) \neq 0$.

Без ограничения общности можем далее считать, что $t_\alpha = 0$, так как по только что проведенным рассуждениям можем рассматривать соответствующий сдвиг решения.

В случае метода Галеркина коэффициенты c_k и d_k и параметр λ определяются из условий

$$\begin{gathered}\int_0^{2\pi} f(x_n(t), \lambda x_n'(t), \ldots, \lambda^m x^{(m)}(t))\varphi_i\,dt = 0, \qquad i = 0, \ldots, 2n, \\ x_n(0) = a,\end{gathered} \tag{5}$$

где $\varphi_{2k}(t) = \cos kt$ и $\varphi_{2k+1}(t) = \sin kt$.

Опишем, наконец, разностный метод. Положим $h = 2\pi/n$ и будем разыскивать параметр λ и 2π-периодическую сеточную функцию

$$x_h = (\ldots, x_{-1}^h, x_0^h, x_1^h, \ldots), \qquad x_j^h = x_{j+n}^h \qquad (j = 0, \pm 1, \ldots),$$

где $x_j^h \approx x(jh)$. Беря в основу какие-нибудь формулы численного дифференцирования

$$x^{(k)}(t) \approx h^{-k} \sum_{j=-r_k}^{s_k} b_{jk} x(t+jh) = h^{-k} \sum_{j=-r_k}^{s_k} b_{jk} U_h^j x(t) =: D_h^{(k)} x(t), \tag{6}$$

построим разностную задачу

$$\begin{gathered}f(D_h^{(0)} x_h, \lambda D_h^{(1)} x_h, \ldots, \lambda^m D_h^{(m)} x_h) = 0, \\ x_0^h = a.\end{gathered} \tag{7}$$

Первое уравнение в (7) представляет собой систему уравнений относительно n главных кородинат:

$$f(D_h^{(0)} x_j^h, \ldots, \lambda^m D_h^{(m)} x_j^h) = 0, \qquad j = 0, \ldots, n-1.$$

В заключение параграфа сформулируем еще два предположения.

5° Функция

$$y(t) := \frac{d}{d\lambda} f(x^*(t), \lambda x^{*\prime}(t), \ldots, \lambda^m x^{*(m)}(t))\big|_{\lambda=\lambda^*}$$

не принадлежит области значений $R(B)$ оператора B (см. 3°), т. е. не существует 2π-периодической функции $u(t)$, такой, что $Bu = y$.

Иногда мы используем и следующее предположение:

6° $f(z_0, z_1, \dots, z_m) = z_m - g(z_0, \dots, z_{m-1})$, т. е. уравнение (2) имеет вид $\lambda^m x^{(m)}(t) = g(x(t), \dots, \lambda^{m-1}x^{(m-1)}(t))$. Тогда $b_m(t) = \lambda^{*m} \neq 0$.

Вместо $g(x(t), \lambda x'(t), \dots, \lambda^{m-1}x^{(m-1)}(t))$ пишем часто просто $g(x(t), \lambda)$.

§ 2. Абстрактная теорема сходимости

Сформулируем здесь теорему, которую в дальнейшем будем использовать для доказательства сходимости описанных методов. Сама эта теорема доказана в [2, 10].

Пусть E, F, E_n, F_n $(n = 1, 2, \dots)$ — банаховы пространства, $p_n \in L(E, E_n)$, $q_n \in L(F, F_n)$ — операторы (связывающие отображения), для которых

$$\|p_n x\|_{E_n} \to \|x\|_E, \qquad \|q_n y\|_{F_n} \to \|y\|_F$$

при $n \to \infty$ для каждых $x \in E$ и $y \in F$. Будем говорить, что последовательность (x_n) элементов x_n из E_n *Р-сходится в пространстве* E к элементу x, если

$$\|x_n - p_n x\|_{E_n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Аналогично определяется Q-сходимость в пространстве F.

Если каждая подпоследовательность последовательности (x_n) имеет Р-сходящую подпоследовательность, то говорят, что последовательность *Р-компактна* (в E); так же определяется Q-компактность в F.

В общем случае, если не имеются в виду конкретные пространства и связывающие отображения, говорят о *дискретной сходимости* и *дискретной компактности*. Подробно дискретные сходимость и компактность изучены в [1, 2, 10].

Пусть $\Omega \subset E$ и $\Omega_n \subset E_n$ открытые множества. Рассмотрим уравнения $Ax = y$ и $A_n x_n = y_n$ (см. диаграмму).

$$\begin{array}{ccccccc}
x \in E & \supset & \Omega & \xrightarrow{A} & F & \ni & y \\
 & & \downarrow p_n & & \downarrow q_n & & \\
x_n \in E_n & \supset & \Omega_n & \xrightarrow{A_n} & F_n & \ni & y_n
\end{array}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *уравнение* $Ax = y$ *имеет решение* $x^* \in \Omega$; *оператор* $A : \Omega \subset E \to F$ *дифференцируем по Фреше в точке* x^* *и линейное уравнение* $[A'(x^*)]u = 0$ *имеет лишь нулевое решение* $u = 0$;

2) *операторы* $A_n : \Omega_n \subset E_n \to F_n$ *дифференцируемы по Фреше в соответствующих шарах* $\|x_n - p_n x^*\| \leq \delta$ *(где* $\delta > 0$ *не зависит от* n*); операторы* $A_n(p_n x^*) \in L(E_n, F_n)$ *фредгольмовы с нулевым индексом, и имеет место соотношение: для каждого* $\varepsilon > 0$

существует δ_ε *такое, что* $\|A_n'(x_n)-A_n'(p_nx^*)\|\leqslant\varepsilon$ *для всех* n, *как только* $\|x_n-p_nx^*\|\leqslant\delta_\varepsilon$;

3) $\|A_np_nx^*-q_nAx^*\|\to 0,\quad \|y_n-q_ny\|\to 0,\quad n\to\infty$;

4) $A_n'(p_nx^*)\to A'(x^*)$ *регулярно (собственно), т. е.* $\|A_n'(p_nx^*)\|\leqslant\mathrm{const}$, $\|[A_n'(p_nx^*)]p_nx-q_n[A'(x^*)]x\|\to 0$ $\forall x\in E$ *и имеет место соотношение:*

$\|x_n\|\leqslant\mathrm{const}$, $([A_n'(p_nx^*)]x_n)$ *Q-компактна* $\Rightarrow$ (x_n) *P-компактна.*

Тогда найдется такое $\delta_0\in(0,\delta]$, *что уравнение* $A_nx_n=y_n$ *имеет при почти всех* n *в шаре* $\|x_n-p_nx^*\|\leqslant\delta_0$ *единственное решение* x_n^*. *При этом* $\|x_n^*-p_nx^*\|\to 0$ *с оценкой*

$$c_1\|A_np_nx^*-y_n\|_{F_n}\leqslant\|x_n^*-p_nx^*\|_{E_n}\leqslant c_2\|A_np_nx^*-y_n\|_{F_n},$$

где c_1 *и* c_2 — *положительные константы.*

Нашей целью будет теперь применение этой теоремы для исследования приближенных методов, описанных в первом параграфе. Задачу (2) с дополнительным условием $x(0)=a$ будем рассматривать как операторное уравнение

$$A(\{\lambda, x(t)\})=A\begin{pmatrix}x\\ \lambda\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}f(x,\ \lambda x',\ \ldots,\ \lambda^m x^{(m)})\\ x(0)-a\end{pmatrix}=0. \qquad (8)$$

Оператор A действует из $U\times\mathbf{R}$ в $V\times\mathbf{R}$, где U и V — некоторые банаховы пространства, $\mathbf{R}$ — поле вещественных чисел. Пространства U и V выберем (см. § 3, § 4) так, чтобы оператор A был дифференцируемым по Фреше в точке $\{\lambda^*,\ x^*(t)\}$, причем

$$\left[A'\begin{pmatrix}x^*\\ \lambda^*\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}u\\ \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Bu+\mu\cdot y\\ u(0)\end{pmatrix}.$$

Здесь использованы обозначения из 3°; причем $\{\lambda^*,\ x^*(t)\}$ — решение уравнения $A(\{\lambda,x\})=0$, существующее по 1° и 4°.

Рассмотрим уравнение $[A'(\{\lambda^*,x^*\})](\{\mu,u\})=0$. Оно равносильно условиям $Bu+\mu y=0$, $u(0)=0$. Так как $y\notin R(B)$ (см. 5°), то $\mu=0$. По условию 3° имеем $u=cx^{*\prime}$. Из $u(0)=cx^{*\prime}(0)=0$ на основе 4° следует, что $c=0$. В итоге получаем, что уравнение $[A'(\{\lambda^*,x^*\})](\{\mu,u\})=0$ имеет лишь тривиальное решение.

§ 3. Сходимость методов коллокации и Галеркина

Перейдем к формулировкам и доказательствам основных результатов.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1°—6° (§ 1). *Тогда при почти всех* n *метод коллокации* $\{(3),\ (4)\}$ *определяет изолированное приближенное решение* $\{\lambda_n^*,\ x_n^*(t)\}$ *задачи* (2), *и*

$$|\lambda^*-\lambda_n^*|\leqslant c\varepsilon_n\to 0,\qquad \|x^*-x_n^*\|_{H^m}\leqslant c\varepsilon_n\to 0\qquad (n\to\infty), \qquad (9)$$

где

$$\varepsilon_n=\|x^{*(m)}-P_nx^{*(m)}\|_{L^2}.$$

Здесь P_n — проектор Лагранжа, соответствующий интерполированию тригонометрическими многочленами вида (3) по равноотстоящим узлам. Известно (см. [3]), что $\|P_n\|_{C\to L^2} \leqslant \mathrm{const}$, $P_n x \to x \quad \forall x \in C$.

Доказательство. Покажем, что выполнены предпосылки теоремы 1.

Рассмотрим пространства:

$U = H^m$ — пространство $m-1$ раз абсолютно непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функции $x(t)$, таких, что

$$\|x\|_{H^m} = \Big(\sum_{k=0}^{m} \|x^{(k)}\|^2_{L^2(0,2\pi)}\Big)^{1/2} < \infty;$$

эквивалентная норма определяется формулой

$$\|x\|'_{H^m} = \max_t \sum_{k=0}^{m-1} |x^{(k)}(t)| + \|x^{(m)}\|_{L^2(0,2\pi)};$$

$V = H^0 = L^2(0, 2\pi)$; функции $u \in L^2(0, 2\pi)$ считаем продолженными в периодические.

Задачу (2) с условием $x(0) = a$ рассмотрим в виде операторного уравнения $A(\{\lambda, x\}) = 0$ (см. (8)); метод коллокации $\{(3), (4)\}$ равносилен операторному уравнению

$$A_n(\{\lambda, x_n\}) = A_n\begin{pmatrix} x_n \\ \lambda \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda^m x_n^{(m)} - P_n g(x_n, \lambda) \\ x_n(0) - a \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда

$A: E = H^m \times \mathbf{R} \to H^0 \times \mathbf{R} = F$, $A_n: E_n = H^m \times \mathbf{R} \to H^0 \times \mathbf{R} = F_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Положим $p_n = q_n = I$ (единичные операторы в соответствующих пространствах).

1) Первое условие теоремы 1 при настоящем выборе пространств выполнено (см. § 2). Производная оператора A имеет вид

$$\left[A'\begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bu + \mu y \\ u(0) \end{pmatrix},$$

обозначения см. в 3°, § 1.

2) В произведении $U \times \mathbf{R}$ рассмотрим норму

$$\left\|\begin{matrix} x \\ \lambda \end{matrix}\right\|_{U\times\mathbf{R}} = \|x\|_U + |\lambda|.$$

В пространстве $U \times \mathbf{R}$ найдется шар

$$\|x_n - x^*\|_{H^m} + |\lambda - \lambda^*| \leqslant \delta,$$

в котором операторы A_n дифференцируемы по Фреше (см. 1°, 2°):

$$\left[A_n'\begin{pmatrix} x_n \\ \lambda \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda^m u^{(m)} - P_n \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial g(x_n(t),\lambda)}{\partial z_k} \lambda^k u^{(k)} + \mu \cdot P_n \frac{d}{d\lambda} f(x_n,\lambda) \\ u(0) \end{pmatrix}.$$

Оператор

$$B_1 = \lambda^{*m} \frac{d^m}{dt^m} : U \to V$$

фредгольмов и имеет индекс 0; вместе с ним такими же являются операторы

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$A_n'\begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_2 & P_n y \\ \varphi & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} B_2 & P_n y \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_n \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial g(x^*(t),\lambda^*)}{\partial z_k} \lambda^{*k} u^{(k)} + \mu \cdot P_n y \\ u(0) \end{pmatrix},$$

ибо последний оператор конечномерен.

Оценим далее разность

$$A_n'\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} - A_n'\begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix}$$

по норме пространства $L(E, F)$. Имеем

$$\left\| \left[A_n'\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} - A_n'\begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix} \right\|_F =$$

$$= \| (\lambda^m - \lambda^{*m}) u^{(m)} - P_n \sum_{k=0}^{m-1} g_k u^{(k)} + m \cdot \mu (\lambda^{m-1} x^{(m)} - \lambda^{*m-1} x^{*(m)}) -$$

$$- \mu P_n \left(\frac{d}{d\lambda} g(x,\lambda) - \frac{d}{d\lambda} g(x^*, \lambda^*) \right) \|_{L^2} \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda^m - \lambda^{*m}| \cdot \|u^{(m)}\|_{L^2} + m \cdot \|\lambda^{m-1} x^{(m)} - \lambda^{*m-1} x^{*(m)}\|_{L^2} \cdot |\mu| +$$

$$+ \|P_n\|_{C \to L^2} \cdot \|\sum_{k=0}^{m-1} g_k u^{(k)}\|_C +$$

$$+ \|P_n\|_{C \to L^2} \cdot \| \frac{d}{d\lambda} g(x,\lambda) - \frac{d}{d\lambda} g(x^*, \lambda^*) \|_C \cdot |\mu|,$$

где

$$g_k=\frac{\partial g(x,\lambda)}{\partial z_k}\lambda^k-\frac{\partial g(x^*,\lambda^*)}{\partial z_k}\lambda^{*k}.$$

Поскольку функции g_k и $dg(x,\lambda)/d\lambda$ равномерно непрерывны в области $\mathfrak{A}$ (см. 2° и 6°), а нормы $\|x\|_{H^m}$ и $\|x\|'_{H^m}$ эквивалентны, то приходим к оценке

$$\left\|\left[A_n'\begin{pmatrix}x\\ \lambda\end{pmatrix}-A_n'\begin{pmatrix}x^*\\ \lambda^*\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}u\\ \mu\end{pmatrix}\right\|\leqslant\varepsilon\cdot(\|u\|_{H^m}+|\mu|),$$

где

$$\varepsilon=c\cdot\max\Big\{|\lambda^m-\lambda^{*m}|,\ m\ \|\lambda^{m-1}x^{(m)}-\lambda^{*m-1}x^{*(m)}\|_{L^2},$$

$$\|P_n\|_{C\to L^2}\max_k\|g_k\|_C,\quad \|P_n\|_{C\to L^2}=\left\|\frac{d}{d\lambda}(g(x,\lambda)-g(x^*,\lambda^*))\right\|_C\Big\},$$

$\varepsilon\to 0$ при $\|x-x^*\|_{H^m}+|\lambda-\lambda^*|\leqslant\delta\to 0$. Стало быть, выполнено предположение 2) теоремы 1.

3) Имеем

$$\|P_n\|_{C\to L^2}\max_k\|g_k\|_C,\qquad \|P_n\|_{C\to L^2}\left\|\frac{d}{d\lambda}(g(x,\lambda)-g(x^*,\lambda^*))\right\|_C\Big\},$$

так как $\|P_nx-x\|_{L^2}\to 0$ для каждого $x\in C$. Свободные члены наших операторных уравнений равны нулю, т. е. выполнено и другое условие из 3).

4) Проверим теперь условия регулярной сходимости

$$A_n'\begin{pmatrix}x^*\\ \lambda^*\end{pmatrix}\to A'\begin{pmatrix}x^*\\ \lambda^*\end{pmatrix}.$$

Ограниченность норм

$$\left\|A_n'\begin{pmatrix}x^*\\ \lambda^*\end{pmatrix}\right\|$$

вытекает из 2°.

На основании сходимости $\|P_nx-x\|_{L^2}\to 0$ для $x\in C$ имеем при каждом $\{\mu,u\}\in E$ также

$$\left\|\left[A_n'\begin{pmatrix}x^*\\ \lambda^*\end{pmatrix}\right]p_n\begin{pmatrix}u\\ \mu\end{pmatrix}-q_n\left[A'\begin{pmatrix}x^*\\ \lambda^*\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}u\\ \mu\end{pmatrix}\right\|=$$

$$=\left\|\left[A_n'\begin{pmatrix}x^*\\ \lambda^*\end{pmatrix}-A'\begin{pmatrix}x^*\\ \lambda^*\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}u\\ \mu\end{pmatrix}\right\|\to 0.$$

Условие регулярности в настоящем случае примет вид:

$$\|x_n\|_{H^m}\leqslant\mathrm{const},\quad\left(\lambda^{*m}x_n^{(m)}-P_n\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\partial g(x^*,\lambda^*)}{\partial z_k}\lambda^{*k}x_n^{(k)}\right)$$

компактна в $L^2\Rightarrow(x_n)$ компактна в H^m.

Известно, что из $\|x_n\|_{H^m} \leqslant \text{const}$. (т. е. $\|x_n^{(k)}\|_{L^2} \leqslant \text{const}$ для $k=0, 1, \ldots, m$) вытекает компактность в C последовательности $(b_0 x_n + \ldots + b_{m-1} x_n^{(m-1)})$ (обозначения см. в 3°); так как $\|P_n\|_{C\to L^2} \leqslant \text{const}$ и $\|P_n x - x\|_{L^2} \to 0$ для каждого $x \in C$, то последовательность

$$\left(P_n \sum_{k=0}^{m-1} b_k x_n^{(k)}\right)$$

компактна в L^2. Учитывая предпосылку о компактности

$$\left(\lambda^{*m} x_n^{(m)} - P_n \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^{n(k)}\right)$$

в L^2, заключаем компактность последовательности $(x_n^{(m)})$ в L^2 (поскольку $\lambda^* \neq 0$), а также компактность (x_n) в H^m.

Мы установили, что выполнены все предположения теоремы 1. По теореме 1

$$\|x_n^* - x^*\|_{H^m} + |\lambda_n^* - \lambda^*| \leqslant c \cdot \left\| A_n \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} \right\| =$$
$$= c \cdot \left\| A_n \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} \right\| =$$
$$= c \cdot \|\lambda^{*m} x^{*(m)} - P_n g(x^*, \lambda^*) - \lambda^{*m} x^{*(m)} + g(x^*, \lambda^*)\|_{L^2} =$$
$$= c \cdot \|g(x^*, \lambda^*) - P_n g(x^*, \lambda^*)\|_{L^2} = c \cdot \|x^{*(m)} - P_n x^{*(m)}\|_{L^2} =$$
$$= c \cdot \varepsilon_n \to 0,$$

так как $\lambda^{*m} x^{*(m)} = g(x^*, \lambda^*) = g(x^*, \lambda^* x^{*\prime}, \ldots, \lambda^{*m-1} x^{*(m-1)})$. Отсюда получим нужные оценки (9) и соответствующие сходимости.

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Оценку (9) можно продолжить так (ср. [3]):

$$\varepsilon_n = \|x_n^{(m)} - x^{*(m)}\| \leqslant c' e_n(x^{*(m)}),$$

$$e_n(x^{*(m)}) \equiv \min_{a_k b_k} \max_t \left| x^{*(m)}(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right|$$

Погрешность $e_n(x^{*(m)})$ допускает оценку по теоремам Джексона (см. [3]), например, $e_n(x^{*(m)}) \leqslant c \cdot n^{-r}$, если $x^{*(m)} \in C^r$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1°—6°. *Тогда при почти всех n метод Галеркина* {(3), (5)} *определяет изолированное приближение* $\{\lambda_n^*, x_n^*(t)\}$ *решения задачи* (2). *Имеет место сходимость* (9) *с* $\varepsilon_n = \|x^{*(m)} - O_n x^{*(m)}\|_{L^2(0,2\pi)}$, *где* O_n — *ортопроектор в* L^2, *проектирующий на подпространство тригонометрических полиномов вида* (3).

Доказательство проводится аналогично теореме 2. Достаточно заметить только, что метод Галеркина {(3), (5)} равносилен операторному уравнению

$$A_n\begin{pmatrix} x_n \\ \lambda \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda^m x_n^{(m)} - O_n g(x_n, \lambda x_n', \ldots, \lambda^{m-1} x_n^{(m-1)}) \\ x_n(0) - a \end{pmatrix} = 0,$$

где O_n — ортопроектор в L^2, который тоже удовлетворяет условиям $\|O_n\|_{C\to L^2} \leqslant \mathrm{const}$ (даже $\|O_n\|_{L^2\to L^2} \leqslant 1$) и $\|O_n x - x\|_{L^2} \to 0$, $n\to\infty$, для каждого $x \in C$ (даже $x \in L^2$), т. е. тем же условиям, которым удовлетворяет использованный в теореме 2 проектор P_n. Следовательно, все рассуждения теоремы 2 проходят и в настоящем случае. Теорема 3 доказана.

§ 4. Сходимость метода конечных разностей

Перейдем к формулировке теоремы о сходимости разностного метода. В начале приведем некоторые обозначения. Известно, что $D_h^{(k)} x(t) \to x^{(k)}(t)$ для любой функции $x \in C^\infty$ тогда и только тогда, когда функция

$$\chi_k(\zeta) := \sum_{j=-r_k}^{s_k} b_{j,k} \zeta^j \qquad (\zeta \in \mathbf{C})$$

имеет k-кратный корень $\zeta_0 = 1$, причем $\chi_k^{(k)}(\zeta_0) = k!$. Остальные $r_k + s_k - k$ корней функции $\chi_k(\zeta)$ называются *характеристическими числами* формулы численного дифференцирования (6).

Обозначим $\partial_h = h^{-1}(U_h - I_h)$, где $I_h x_h = x_h$ и $(U_h x_h)_i = x_{i+1}^h$. Введем нормы

$$\|x_h\|_0 = \max_i |x_i^h|, \qquad \|x_h\|_m = \max_{0\leqslant k\leqslant m} \|\partial_h^k x_h\|_0.$$

Пусть, наконец, $p_h x = (\ldots, x(-h), x(0), x(h), x(2h), \ldots)$.

Теорема 4. *Пусть $D_h^{(k)} x(t) \to x^{(k)}(t)$ при $k = 0, \ldots, m$ для каждой $x \in C^\infty$, и пусть характеристические числа формулы численного дифференцирования* (6) *при $k = m$ по модулю отличны от единицы. Пусть выполнены условия* 1°—5°.

Тогда разностная задача (7) *при почти всех n определяет изолированное приближение $\{\lambda_l^*, x_h^*\}$ решения задачи* (2) *и*

$$|\lambda_h^* - \lambda^*| \leqslant c\cdot\varepsilon_h \to 0, \qquad \|x_h^* - p_h x^*\|_m \leqslant c\cdot\varepsilon_h \to 0,$$

где $c = \mathrm{const}$,

$$\varepsilon_h = \max_{0\leqslant k\leqslant m} \|D_h^{(k)} p_h x^* - p_h x^{*(k)}\|_0$$

— погрешность аппроксимации формул численного дифференцирования (6) *для функции $x^*(t)$*.

Доказательство опирается на теорему 1.

Положим

$$E = C^{(m)} \times \mathbf{R}, \quad F = C \times \mathbf{R}, \quad E_h = C_h^{(m)} \times \mathbf{R}, \quad F_h = C_h \times \mathbf{R};$$

$$\mathfrak{p}_n\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \mathfrak{p}_n\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_h x \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{где:}$$

C — пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой

$$\|x\|_0 := \|x\|_{\mathrm{C}} = \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |x(t)|;$$

$\mathrm{C}^{(m)}$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций,

$$\|x\|_m := \|x\|_{\mathrm{C}^{(m)}} = \max_{0\leqslant k\leqslant m} \|x^{(k)}(t)\|_0;$$

C_h и $\mathrm{C}_h^{(m)}$ — пространства 2π-периодических сеточных функций с введенными выше нормами соответственно $\|x_h\|_0$ и $\|x_h\|_m$.

Задачу (2) с дополнительным условием $x(0) = \alpha$ и разностную задачу (7) рассмотрим опять соответствующими операторными уравнениями

$$A\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(x, \lambda x', \ldots, \lambda^m x^{(m)}) \\ x(0) - \alpha \end{pmatrix} = 0,$$

$$A_h\begin{pmatrix} x_h \\ \lambda \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(D_h^{(0)}x_h, \lambda D_h^{(1)}x_h, \ldots, \lambda^m D_h^{(m)}x_h) \\ x_0^h - \alpha \end{pmatrix} = 0.$$

Покажем, что выполнены предположения теоремы 1.

1) При настоящем выборе пространств условие 1) теоремы 1 выполнено (см. § 2). Производная оператора A имеет вид

$$\left[A'\begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{\partial f(x^*, \lambda^*)}{\partial z_k} \lambda^{*k} u^{(k)} + \mu \cdot \dfrac{d}{d\lambda} f(x^*, \lambda^*) \\ u(0) \end{pmatrix}.$$

2) Операторы $A_h : \mathrm{C}_h^{(m)} \times \mathbf{R} \to \mathrm{C} \times \mathbf{R}$ дифференцируемы по Фреше в некоторой области $\mathfrak{A}_h = \{(x_h, \lambda) : \|x_h - p_h x^*\|_m + |\lambda - \lambda^*| \leqslant \delta\}$ (это вытекает из 2°); при этом производная $A_h'(\{\lambda, x_h\})$ действует по формуле

$$\left\{\left[A_h'\begin{pmatrix} x_h \\ \lambda \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_h \\ \mu \end{pmatrix}\right\}_i = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{m} f_{k,i}(x_h, \lambda) \lambda^k [D_h^{(k)} u_h]_i + \mu \cdot \dfrac{d}{d\lambda} f_i(x_h, \lambda) \\ u_0^h \end{pmatrix},$$

где

$$f_{k,i}(x_h, \lambda) = \partial f([D_h^{(0)}x_h]_i, \ldots, \lambda^m [D_h^{(m)}x_h]_i)/\partial z_k,$$

$$f_i(x_h, \lambda) = f([D_h^{(0)}x_h]_i, \ldots, \lambda^m [D_h^{(m)}x_h]_i).$$

Из равностепенной непрерывности функции $\partial f/\partial z_k$ вытекает и соотношение:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon, \quad \text{что} \quad \left\| A_h'\begin{pmatrix} x_h \\ \lambda \end{pmatrix} - A_h'\begin{pmatrix} p_h x^* \\ \lambda \end{pmatrix} \right\| \leqslant \varepsilon,$$

если только $\|x_h - p_h x^*\|_m + |\lambda - \lambda^*| \leqslant \delta_\varepsilon$.

Фредгольмовость операторов $A_h'(\{\lambda^*, p_h x^*\})$ вытекает из конечномерности пространств $C_h^{(m)}$ и C_h, причем $\dim C_h^{(m)} = \dim C_h = n$.

3) Поскольку $\|D_h^{(k)} p_h x^* - p_h x^{*(k)}\|_0 \to 0$ и f — непрерывная функция, то

$$\left\| A_h p_h \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} - q_h A \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} \right\|_0 =$$

$$= \|f(D_h^{(0)} p_h x^*, \ldots, \lambda^{*m} D_h^{(m)} p_h x^*) - p_h f(x^*, \ldots, \lambda^{*m} x^{*(m)}\|_0 =$$

$$= \max_i |f(D_h^{(0)} x^*(ih), \ldots, \lambda^{*m} D_h^{(m)} x^*(ih)) - f(x^*(ih), \ldots$$

$$\ldots, \lambda^{*m} x^{*(m)}(ih))| \to 0.$$

4) Проверим условия собственной сходимости. Имеем $\|A_h'(\{\lambda^*, p_h x^*\})\| \leqslant c$, так как фукнция $f_k = \partial f / \partial z_h$ непрерывны и ограничены. По нашим предположениям

$$\left\| \left[A_h' \begin{pmatrix} p_h x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} p_h u \\ \mu \end{pmatrix} - q_h \left[A' \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix} \right\|_0 \to 0 \quad \forall \begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix} \in C^{(m)} \times \mathbf{R}.$$

Условие регулярности выглядит так: $\|x_h\|_m \leqslant \text{const}$, и

$$\left(\sum_{k=0}^{m} p_h \frac{\partial f(D_h^{(0)} p_h x^*, \ldots, \lambda^{*m} D_h^{(m)} p_h x^*)}{\partial z_k} \lambda^{*k} D_h^{(k)} x_h \right)$$

Q-компактна с $C \Rightarrow (x_h)$ P-компактна в $C^{(m)}$.

Чтобы доказать это, заметим сначала, что если последовательности $(\partial_h^k x_h)$ Q-компактны в C ($k = 0, \ldots, m$), то последовательность (x_h) P-компактна в $C^{(m)}$.

Ясно также, что из неравенств $\|x_h\|_0 \leqslant \text{const}$, $\|\partial_h^k x_h\|_0 \leqslant \text{const}$ вытекает Q-компактность последовательности в C, так как последовательность ступенчатых функций $(x_n(t))$, $x_n(jh) = x_j^h$, относительно компактна в C. Отсюда заключаем, что если $\|x_h\|_m \leqslant \text{const}$, то последовательности $(\partial_h^k x_h)$, $k = 0, \ldots, m-1$, Q-компактны в C по 0-норме.

Известно [4], что следующие утверждения эквивалентны:

1) процесс численного дифференцирования (6) сходится;

2) $D_h^{(k)}$ представим в виде

$$D_h^{(k)} = \sum_{j=-r_k}^{s_k} \beta_{jk} U_h^j \partial_h^k, \qquad \text{где} \quad \sum_{j=-r_k}^{s_k} \beta_{jk} = 1.$$

Отсюда видно, что наряду с последовательностями $(\partial_h^k x_k)$ ($k = 0, \ldots, m-1$) Q-компактны в C и последовательности $(D_h^{(k)} x_h)$ ($k = 0, \ldots, m-1$). Поскольку последовательность

$$\left(\sum_{k=0}^{m} (p_h b_k) D_h^{(k)} x_h \right)$$

тоже Q-компактна в C (вторая предпосылка к условию регулярности), то Q-компактна с C и $(D_h^{(m)} x_h)$.

В работе [1] показано, что отсутствие на единичной окружности комплексной плоскости характеристических чисел формул численного дифференцирования (6) при $k=m$ влечет равносильность Q-компактности последовательностей $(D_h^{(m)}x_h)$ и $(\partial_h^m x_h)$. Отсюда заключаем и P-компактность (x_h) в $C_h^{(m)}$ по m-норме.

Этим доказано, что из условий теоремы 4 вытекают предпосылки теоремы 1. Таким образом, метод конечных разностей (7) определяет изолированное приближенное решение $\{\lambda_h^*, x_h^*\}$ уравнения (2).

Выведем оценку скорости сходимости. Для этого рассмотрим невязку

$$\left\| \Lambda_h p_h \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} - q_h A \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \| f(D_h^{(0)} p_h x^*, \ldots, \lambda^{*m} D_h^{(m)} p_h x^*) - q_h f(x^*, \ldots, \lambda^{*m} x^{*(m)}) \|_0 \leqslant$$

$$\leqslant c' \sum_{k=0}^{m} \| D_h^{(k)} p_h x^* - p_h x^{*(k)} \|_0 \leqslant m \cdot c' \cdot \varepsilon_h = c \cdot \varepsilon_h.$$

Здесь мы использовали условие 2°. Отсюда получаем оценки $\|x_h^* - x^*\| \leqslant c \cdot \varepsilon_h$, $|\lambda_h^* - \lambda^*| \leqslant c \cdot \varepsilon_h$.

Теорема 4 доказана.

Замечание 2. Теоремы 2—4 переносятся непосредственно и на случай автономных систем, т. е. на случай, когда x и f являются векторами. Тогда вместо условий $x_n(0) = \alpha$ в (4) и (5) и вместо $x_0^h = \alpha$ в (7) следует потребовать аналогичные условия для одного из координат вектор-функции $x_n(t)$ и векторной сеточной функции x_h; вместо $b_m(t) \neq 0$ в 3° надо сделать предположение об обратимости матрицы-функции $b_m(t)$ и т. д.

Литература

1. Вайникко Г. М., О сходимости разностного метода в задаче о периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, 15, № 1, 87—100.
2. Вайникко Г. М., Карма О. О., О сходимости приближенных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, 14, № 4, 828—837.
3. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. II. Москва, 1965.
4. Крейн С. Г., Шаблицкая Л. Н., Об устойчивости разностных схем для задачи Коши. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, 6, № 4, 648—664.
5. Стрыгин В. В., Применение метода Бубнова — Галеркина к задаче отыскания автоколебаний. Прикл. матем. и мех., 1973, 37, № 6, 1015—1019.
6. Стрыгин В. В., Цыганков А. И., Применение метода коллокации и разностного метода для отыскания автоколебаний дифференциально-разностных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, 14, № 3, 691—698.
7. Ронто Н. И., Применение метода коллокации для решения краевых задач. Укр. матем. ж., 1971, 23, № 3, 415—421.

8. S c h n e i d e r, K. R., Näherungsverfahren zur Ermittlung periodischer Lösungen von Systemen nichtlinearer periodischer Differentialgleichungen. Computing, 1972, 10, 63—82.
9. U r a b e, M., Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems. Arch. Rat Mech. and Anal., 1965, 20, 120—152.
10. V a i n i k k o, G., Konvergenzuntersuchungen der Näherungsmethoden für nichtlineare Operatorgleichungen und Eigenwertprobleme mit Anwendungen zum Differenzverfahren. Wiss. Schriftenreihe TH Karl-Marx-Stadt, 5. Tagung über Probl. und Meth. math. Phys., 1973, № 3, 501—531.

Поступило
1 III 1976

LÄHISMEETODITE KOONDUMISEST OMAVÕNKUMISÜLESANDES

G. Vainikko ja P. Miidla

Resümee

Käesolevas artiklis uuritakse kollokatsioonimeetodi, Galjorkini meetodi ja diferentsmeetodi koondumisest autonoomse võrrandi (1) perioodiliste lahendite leidmiseks, kusjuures leida tuleb ka periood ω. Näidatakse, et teatud lihtsamal juhul koonduvad lähismeetodid sama kiiresti, nagu mitteautonoomse võrrandi lahendamisel, kus periood ω on teada. Põhitulemused on ära toodud teoreemides 2—4.

ÜBER DIE KONVERGENZ DER NÄHERUNGSMETHODEN FÜR SCHWINGUNGSPROBLEME

G. Vainikko und P. Miidla

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Konvergenz der Kollokationsmethode, des Galerkin-Verfahrens und des Differenzenverfahren für die autonome Differentialgleichung (1) untersucht. Eine ω-periodische Lösung mit der unbekannten Periode ω ist gesucht. Wir zeigen, daß in einem einfachen Falle die Näherungsmethoden so schnell wie für nichtautonome Gleichungen mit der bekannten Periode ω konvergieren. Die Hauptergebnisse der Arbeit sind in den Sätzen 2—4 enthalten.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Саарнийт

Кафедра вычислительной математики

Введение

В статье исследуются возможности применения конечно-разностного метода при решении нелинейных краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений. Применение этого метода для решения линейных краевых задач рассматривалось, например, в [5]. Конечно-разностный метод строится в § 2 статьи. Переход в § 3 от первоначального уравнения к равносильной ему системе уравнений позволил более удобно исследовать в § 4 сходимость конечно-разностного метода и вывести оценку ее скорости. Полученные результаты иллюстрируются в § 5 двумя примерами. Проводимые в статье рассуждения основываются на понятиях дискретной сходимости пространств и операторов [1—3]. Для удобства изложения материала схема дискретной аппроксимации в нужной нам частной форме приводится в § 1 статьи.

§ 1. Основные понятия

Пусть даны банаховы пространства[1] $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{U}_h$, $h \in H$, и операторы $\boldsymbol{p}_h \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}_h)$, обладающие свойством

$$\|\boldsymbol{p}_h \boldsymbol{u}\| \to \|\boldsymbol{u}\|, \qquad h \in H, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}. \tag{1.1}$$

Будем говорить, что последовательность $\{\boldsymbol{u}_h\}_H$, $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{U}_h$, *дискретно сходится* к $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$, и писать $\boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u}$, $h \in H$, если $\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{p}_h \boldsymbol{u}\| \to 0$, $h \in H$. Заметим, что из сходимости (1.1) следует равномерная ограниченность норм операторов $\boldsymbol{p}_h$:

$$\|\boldsymbol{p}_h\| \leqslant c, \tag{1.2}$$

$c = \text{const}$ не зависит от h (см. [2]).

---

[1] Через H обозначаем некоторое множество индексов $h = 1/n$. Сходимость $\boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u}$, $h \in H$, означает сходимость при $h \to 0$, причем h пробегает множество H. Символом $\mathfrak{L}(U, X)$ обозначается множество линейных непрерывных операторов из U в X.

Будем говорить, что $\{\boldsymbol{u}_h\}_H$, $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{U}_h$, *дискретно компактна*, если для каждого бесконечного множества $H' \subset H$ существует такое бесконечное множество $H'' \subset H'$, что последовательность $\{\boldsymbol{u}_h\}_{H''}$ дискретно сходится к некоторому $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$.

Пусть даны банаховы пространства $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{X}_h$, $h \in H$, и операторы $\boldsymbol{q}_h \in \mathfrak{L}(X, \boldsymbol{X}_h)$ со свойством

$$\|\boldsymbol{q}_h \boldsymbol{x}\| \to \|\boldsymbol{x}\|, \qquad h \in H, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}. \tag{1.1'}$$

Для тройки $(X, \boldsymbol{X}_h, \boldsymbol{q}_h)$ можно также определить понятия дискретной компактности последовательностей $\{\boldsymbol{x}_h\}_H$, $\boldsymbol{x}_h \in X_h$. Если в дальнейшем потребуется уточнить, о каких пространствах идет речь, мы будем говорить о p-сходимости (p-компактности) и q-сходимости (q-компактности). Записываться будет это $\boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u}(p)$, $\boldsymbol{x}_h \to \boldsymbol{x}(q)$ соответственно.

Рассмотрим операторы $\boldsymbol{A} \in (\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{X})$ и $\boldsymbol{A}_h \in (\boldsymbol{U}_h \to \boldsymbol{X}_h)$ (вообще говоря нелинейные). Будем говорить, что последовательность операторов $\{\boldsymbol{A}_h\}_H := \{A_h : h \in H\}$ *дискретно сходится* к оператору $\boldsymbol{A}$, и писать $\boldsymbol{A}_h \to \boldsymbol{A}$, $h \in H$, если выполнено условие

$$\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{U}_h, \quad \boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{u}(p), \quad h \in H \Rightarrow \boldsymbol{A}_h \boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}(q), \quad h \in H. \tag{1.3}$$

Если $\boldsymbol{A}_h \to \boldsymbol{A}$, $h \in H$, и выполняется условие

$$\|\boldsymbol{u}_h\| \leqslant \text{const},\ h \in H,\ \{\boldsymbol{A}_h \boldsymbol{u}_h\}_H\ q\text{-компактна} \Rightarrow \\ \Rightarrow \{\boldsymbol{u}_h\}_H\ p\text{-компактна}, \tag{1.4}$$

то будем говорить, что $\{\boldsymbol{A}_h\}_H$ *регулярно сходится* к $\boldsymbol{A}$.

Последовательность $\{\boldsymbol{A}_h\}_H$ называется *компактно сходящейся* к $\boldsymbol{A}$, если $\boldsymbol{A}_h \to \boldsymbol{A}$, $h \in H$, и выполняется условие

$$\|\boldsymbol{u}_h\| \leqslant \text{const},\ h \in H \Rightarrow \{\boldsymbol{A}_h \boldsymbol{u}_h\}_H\ q\text{-компактна}. \tag{1.5}$$

Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{A}_h \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}_h, \boldsymbol{X}_h)$, $h \in H$, причем существуют обратные операторы $\boldsymbol{A}_h^{-1} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{X}_h, \boldsymbol{U}_h)$. Если $\boldsymbol{A}_h \to \boldsymbol{A}$, $h \in H$, и $\|\boldsymbol{A}_h^{-1}\| \leqslant \text{const}$, $h \in H$, то будем говорить, что последовательность $\{\boldsymbol{A}_h\}_H$ *устойчиво сходится* к оператору $\boldsymbol{A}$.

Пусть операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}_h$ представимы в виде сумм

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{K}, \boldsymbol{B} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{X}),$$

$$\boldsymbol{A}_h = \boldsymbol{K}_h + \boldsymbol{B}_h, \qquad \boldsymbol{K}_h, \boldsymbol{B}_h \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}_h, \boldsymbol{X}_h).$$

Лемма 1 (см. [1, 5]). *Пусть последовательность операторов $\{\boldsymbol{K}_h\}_H$ устойчиво сходится к оператору $\boldsymbol{K}$, а последовательность $\{\boldsymbol{B}_h\}_H$ компактно сходится к оператору $\boldsymbol{B}$. Тогда последовательность операторов $\boldsymbol{A}_h = \boldsymbol{K}_h + \boldsymbol{B}_h$, $h \in H$, регулярно сходится к оператору $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{B}$.*

Если предположить, что операторы $\boldsymbol{p}_h \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}_h)$ имеют правые обратные операторы $\boldsymbol{p}_h^{-1} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}_h, \boldsymbol{U})$, $\boldsymbol{p}_h \boldsymbol{p}_h^{-1} \boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u}_h$, то достаточные условия для компактной сходимости последовательности операторов $\boldsymbol{B}_h \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}_h, \boldsymbol{X}_h)$, $h \in H$, к оператору $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{X})$ дает

Лемма 2. *Пусть выполняется неравенство*

$$\|\boldsymbol{p}_h^{-1} \boldsymbol{u}_h\| \leqslant c\, \|\boldsymbol{u}_h\|, \qquad h \in H, \tag{1.6}$$

$c = \mathrm{const}$ *не зависит от* h. *Если оператор* $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{X})$ *вполне непрерывен и имеет место сходимость норм*

$$\|\boldsymbol{B}_h \boldsymbol{p}_h - \boldsymbol{q}_h \boldsymbol{B}\| \to 0, \quad h \in H, \tag{1.7}$$

в пространствах $\mathfrak{L}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{X}_h)$, *то последовательность операторов* $\{\boldsymbol{B}_h\}_H$ *компактно сходится к оператору* $\boldsymbol{B}$.

Доказательство. Пусть дана последовательность $\boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{U}_h$, $\|\boldsymbol{u}_h\| \leqslant \mathrm{const}$, $h \in H$. Тогда, согласно предпосылкам леммы, последовательность $\{\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_h^{-1}\boldsymbol{u}_h\}_H$ компактна в $\boldsymbol{X}$ и для каждого множества $H' \subset H$ существует подмножество $H'' \subset H'$ и элемент $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}$ такие, что $\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_h^{-1}\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}\| \to 0$, $h \in H''$. Но тогда $\boldsymbol{B}_h \boldsymbol{u}_h \to \boldsymbol{v}(q)$, $h \in H''$. Это вытекает при предположениях (1.6) и (1.7) из неравенства

$$\|\boldsymbol{B}_h \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{q}_h \boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{B}_h \boldsymbol{p}_h - \boldsymbol{q}_h \boldsymbol{B}\| \, \|\boldsymbol{p}_h^{-1}\boldsymbol{u}_h\| + \|\boldsymbol{q}_h\| \, \|\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_h^{-1}\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{v}\|.$$

Выполненность (1.5) для последовательности $\{\boldsymbol{B}_h\}$ доказана.

Из условия (1.5) следует равномерная ограниченность норм операторов $\boldsymbol{B}_h$. Дискретная сходимость $\boldsymbol{B}_h \to \boldsymbol{B}$, $h \in H$, следует теперь непосредственно из сходимости (1.7).

В настоящей статье мы будем рассматривать уравнения вида

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}, \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{K}_h \boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{F}_h \boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{f}_h, \quad \boldsymbol{f}_h \to \boldsymbol{f}(q), \quad h \in H, \tag{1.9}$$

где операторы $\boldsymbol{K} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{X})$ и $\boldsymbol{K}_h \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}_h, \boldsymbol{X}_h)$ имеют обратные $\boldsymbol{K}^{-1} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$, $\boldsymbol{K}_h^{-1} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{X}_h, \boldsymbol{U}_h)$, причем

$$\|\boldsymbol{K}_h^{-1}\| \leqslant c = \mathrm{const}, \quad h \in H. \tag{1.10}$$

Операторы $\boldsymbol{F} \in (\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{X})$ и $\boldsymbol{F}_h \in (\boldsymbol{U}_h \to \boldsymbol{X}_h)$ могут быть нелинейны. При таких предположениях имеет место

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) *уравнение* (1.8) *имеет решение* $\boldsymbol{u}^* \in \boldsymbol{U}$, *оператор* $\boldsymbol{F}$ *дифференцируем по Фреше в точке* $\boldsymbol{u}^*$ *и существует обратный оператор* $[\boldsymbol{K} + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}^*)]^{-1} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$;

2) *последовательности операторов* $\{\boldsymbol{K}_h\}$ и $\{\boldsymbol{F}_h\}$, $h \in H$, *дискретно сходятся к операторам* $\boldsymbol{K}$ *и* $\boldsymbol{F}$ *соответственно*;

3) *операторы* $\boldsymbol{F}_h$ *дифференцируемы по Фреше при* $\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{p}_h \boldsymbol{u}^*\| \leqslant \eta$, *где* $\eta > 0$ *не зависит от* h;

4) *для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется (независящее от* h) *число* $\eta' \in (0, \eta]$ *такое, что*

$$\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{p}_h \boldsymbol{u}^*\| \leqslant \eta' \Rightarrow \|\boldsymbol{F}_h'(\boldsymbol{u}_h) - \boldsymbol{F}_h'(\boldsymbol{p}_h \boldsymbol{u}^*)\| \leqslant \varepsilon, \quad h \in H;$$

5) *последовательность операторов* $\{\boldsymbol{F}_h'(\boldsymbol{p}_h \boldsymbol{u}^*)\}_H$ *компактно сходится к оператору* $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}^*)$;

6) *операторы* $\boldsymbol{K}_h + \boldsymbol{F}'_h(\boldsymbol{p}_h \boldsymbol{u}^*)$ *фредгольмовы*.

Тогда существуют числа h_0 *и* $\eta_0 \in (0, \eta]$ *такие, что при* $h \leqslant h_0$ *уравнение* (1.9) *имеет единственное решение* $\boldsymbol{u}_h^*$ *в шаре* $\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{p}_h \boldsymbol{u}^*\| \leqslant \eta_0$; *последовательность* $\{\boldsymbol{u}_h^*\}$ *р-сходится к* $\boldsymbol{u}^*$, *причем справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{u}_h^* - \boldsymbol{p}_h \boldsymbol{u}^*\| \leqslant c \cdot \|\boldsymbol{K}_h \boldsymbol{p}_h \boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{F}_h \boldsymbol{p}_h \boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{f}_h\|. \tag{1.11}$$

Доказательство. Утверждения теоремы вытекают непосредственно из леммы 1 и соответствующей теоремы (см. [1, 3]) о нелинейных операторных уравнениях вида

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{A}_h\boldsymbol{u}_h=\boldsymbol{f}_h, \quad h\in H.$$

§ 2. Конечно-разностный метод для функционально-дифференциальных уравнений

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u(t)$ из пространства

$$U_m=\left\{u: u\in C^{m-1}[0,1],\ \frac{d^m u}{dt^m}\in L(0,1)\right\},$$

удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d^m u(t)}{dt^m}=g(t,u), \quad 0<t<1, \tag{2.1}$$

и равенствам

$$\varphi_j u=0, \quad j=1,2,\ldots,m. \tag{2.2}$$

Здесь $C^{m-1}[0,1]$ — пространство $m-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций, $L(0,1)$ — пространство суммируемых функций, а $g(t,.)$ и φ_j — определенные на пространстве $C^{m-1}[0,1]$ (вообще нелинейные) функционалы, $j=1,2,\ldots m$, причем функционал $g(t,.)$ зависит от параметра $t\in(0,1)$. К задаче (2.1—2) сводятся, например, начальные и краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений как с отклонениями аргумента так и без них, начальные и краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений и пр.

В данной статье мы ограничимся подробным изучением следующей наиболее часто встречающейся задачи:

$$\frac{d^m u(t)}{dt^m}=f\left(t,\lambda_0(t)u,\ \ldots,\ \lambda_{m-1}(t)\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}\right), \quad 0<t<1, \tag{2.3}$$

$$\lambda_j u\equiv\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_{jk}\frac{d^k u}{dt^k}=0, \quad j=1,\ldots,m, \tag{2.4}$$

где $f(t,s_0,\ldots,s_{m-1})$ — функция, определенная при $0<t<1$, $-\infty<s_k<\infty$, а $\lambda_k(t)$, $0<t<1$, и λ_{jk} — линейные функционалы, определенные на пространстве $C[0,1]$ непрерывных функций, где $k=0,\ldots,m-1$ и $j=1,\ldots,m$.

Пусть

$$U=\{u: \ u\in C[0,1], \quad Du\in L(0,1)\}$$

— функциональное пространство с нормой

$$\|u\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|+\int_0^1|Du(t)|\,dt,$$

где $D = d/dt$. Введем пространство $C[0, \tau, 1]$ функций, непрерывных на $[0, 1]$ всюду, за исключением точки $\tau \in (0, 1)$, в которой у функций из $C[0, \tau, 1]$ может быть разрыв первого рода. Норму в этом пространстве определим равенством

$$\|u\| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |u(t)|.$$

Пусть выполняется

Условие I:

1) функция $f(t, s_0, \ldots, s_{m-1})$ и ее частные производные $(\partial/\partial s_k)f(t, s_0, \ldots, s_{m-1})$, $k = 0, \ldots, m-1$, непрерывны в полосе $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < s_k < \infty$, всюду, за исключением гиперплоскости $t = \tau$, $0 < \tau < 1$, на которой у функции и производных могут быть разрывы первого рода;

2) имеет место неравенство

$$\sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant 1 \\ -\infty < s_j < \infty,\ j=0,\ldots,m-1}} \left| \frac{\partial}{\partial s_k} f(t, s_0, \ldots, s_{m-1}) \right| \leqslant a_k, \quad k = 0, \ldots, m-1;$$

3) при $0 \leqslant t \leqslant 1$ равенства

$$\lambda_k(t) u = \Lambda_k u, \qquad k = 0, \ldots, m-1, \tag{2.5}$$

определяют линейные непрерывные операторы

$$\Lambda_k \in \mathfrak{L}(U, C[0, \tau, 1]);$$

4) $\lambda_{jk} \in \mathfrak{L}(U, R)$, $\quad k = 0, \ldots, m-1; \quad j = 1, \ldots, m$.

Для решения задачи (2.3—4) мы собираемся использовать метод конечных разностей. Опишем, как мы будем аппроксимировать задачу.

Зафиксируем некоторое натуральное число n. Числу n поставим в соответствие шаг $h = 1/n$. Введем множество U_h векторов (сеточных функций)

$$u_h = (u_h^i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in U_h = \mathbf{R}^{n+1}.$$

Компонентами u_h^i вектора u_h будем аппроксимировать значения функции $u \in U$ в узлах $t_i = ih$.

Введем вспомогательные векторные пространства U_{hk}, $k = 0, 1, \ldots, m$, векторов вида

$$u_{kh} = (u_{kh}^i)_{0 \leqslant i \leqslant n-k} \in U_{kh} = \mathbf{R}^{n-k+1}.$$

В частности, $U_{0h} = U_h$.

Пусть D_h — разностный аналог оператора дифференцирования, преобразующий вектор $u_{kh} \in U_{kh}$ с компонентами u_{kh}^i в вектор $D_h u_{kh} \in U_{k+1,h}$ с компонентами

$$(D_h u_{kh})^i = \frac{u_{kh}^{i+1} - u_{kh}^i}{h}, \qquad i = 0, \ldots, n-k-1.$$

Оператор j-кратного применения D_h будем обозначать через D_h^j. Отметим, что $D_h^j \in (U_{kh} \to U_{k+j,h})$. Снабдим пространства U_{kh} нормой

$$\|u_{kh}\| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-k} |u_{kh}^i| + h \sum_{i=0}^{n-k-1} |(D_h u_{kh})^i|, \quad k=0, 1, \ldots, m.$$

Пусть даны неотрицательные целые числа m_1 и m_2 такие, что $m_1 + m_2 = m$. Введем пространство X_h векторов

$$x_h = (x_h^i)_{m_1 \leqslant i \leqslant n-m_2} \in X_h = \mathbf{R}^{n-m+1}$$

с нормой

$$\|x_h\| = h \sum_{i=m_1}^{n-m_2} |x_h^i|.$$

Операторы дифференцирования D^k, $k = 0, 1, \ldots, m$, в уравнении (2.3) и условиях (2.4) мы будем аппроксимировать линейными разностными операторами $D_h^{(k)} \in (U_h \to X_h)$. В основу возьмем разностные выражения

$$D^k u(t) \approx h^{-k} \sum_{j=-\rho_k}^{\pi_k} b_j^k u(t+jh)$$

такие, что

$$\lim_{h \to 0} h^{-k} \sum_{j=-\rho_k}^{\pi_k} b_j^k u(t+jh) = D^k u(t) \qquad \forall u \in C^k. \tag{2.6}$$

Положим

$$(D_h^{(k)} u_h)^i = h^{-k} \sum_{j=-\rho_k}^{\pi_k} b_j^k u_h^{i+j} \tag{2.7}$$

для тех $i = m_1, \ldots, n - m_2$, в случае которых в (2.7) используются лишь компоненты вектора u_h. Если, например, вблизи граничных точек $t = 0$ и $t = 1$ выражение (2.7) не применимо, то там используем какую-нибудь другую (более «одностороннюю») формулу, тоже удовлетворяющую условию (2.6). Другими словами, величины ρ_k, π_k и b_j^k в (2.7) могут зависеть от индекса i.

Пусть $\sigma_i = (t_i - h/2,\ t_i + h/2) \cap [0, 1]$, $i = m_1, \ldots, n - m_2$. Через $|\sigma_i|$ обозначим длину интервала σ_i. Для аппроксимации правой стороны уравнения (2.3) построим оператор $f_h \in \in (U_h \to X_h)$,

$$(f_h u_h)^i = \frac{1}{|\sigma_i|} \int_{\sigma_i} f(t,\ \mu_{0h}^i(t) D_h^{(0)} u_h, \ldots, \mu_{m-1,h}^i(t) D_h^{(m-1)} u_h)\, dt, \tag{2.8}$$

$i = m_1, \ldots, n - m_2$, где $\mu_{kh}^i \in \mathfrak{L}(X_h,\ C[t_i - h/2,\ \tau, t_i + h/2])$, если $\tau \in \sigma_i$, и $\mu_{kh}^i \in \mathfrak{L}(X_h,\ C[t_i - h/2,\ t_i + h/2])$ при остальных i, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$. Как было показано в [4], из (2.6) вытекает представимость определенной равенством (2.7) величины в виде

$$(D_h^{(k)}u_h)^i = \sum_{j=-\rho_k}^{\pi_k-k} \beta_j^k (D_h^k u_h)^{i+j}, \tag{2.9}$$

где

$$\sum_{j=-\rho_k}^{\pi_k-k} \beta_j^k = 1. \tag{2.10}$$

Отсюда следует, что величины $\mu_{kh}^i(t) D_h^{(k-1)} u_h$ в выражении (2.8) мы можем заменить величинами

$$\lambda_{kh}^i(t) D_h^{k-1} u_h = \mu_{kh}^i(t) D_h^{(k-1)} u_h,$$

где $\lambda_{kh}^i \in \mathfrak{L}(U_{kh},\ C[t_i - h/2,\ \tau,\ t_i + h/2])$ при $\tau \in \sigma_i$, $\lambda_{kh}^i \in \mathfrak{L}(U_{kh},\ C[t_i - h/2,\ t_i + h/2])$ при остальных i, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Таким образом, мы имеем:

$$(f_h u_h)^i = \frac{1}{|\sigma_i|} \int_{\sigma_i} f(t,\ \lambda_{0h}^i(t) u_h,\ \ldots,\ \lambda_{m-1,h}^i D_h^{m-1} u_h)\, dt. \tag{2.11}$$

Аналогично мы выводим, что функционалы $\lambda_{jh} \in \mathfrak{L}(U_h, \mathbf{R})$, $j = 1, \ldots, m$, аппроксимирующие условия (2.4), имеют вид

$$\lambda_{jh} u_h = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_{jkh} D_h^k u_h, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{2.12}$$

где $\lambda_{jkh} \in \mathfrak{L}(U_{k-1,h},\ \mathbf{R})$.

Итак, мы ставим задаче (2.3—4) в соответствие задачу

$$D_h^{(m)} u_h = f_h u_h, \tag{2.13}$$

$$\lambda_{jh} u_h = 0, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{2.14}$$

В заключение опишем условия, налагаемые на операторы λ_{kh}^i и функционалы λ_{jh}, $i = m_1, \ldots, n - m_2$; $j - 1, \ldots, m$; $k = 0, \ldots, m-1$. Для этого введем операторы $p_{kh} \in \mathfrak{L}(U, U_{kh})$, $k = 0, \ldots, m$:

$$(p_{kh} u)^i = u(t_{i+k/2}), \qquad 0 \leqslant i \leqslant n - k, \tag{2.15}$$

где $t_{j+1/2} = (j + 1/2)h$. Пусть выполняется

Условие II:

1) имеет место сходимость

$$\sup_{\|u\| \leqslant 1} h \sum_{i=m_1}^{n-m_2} \frac{1}{|\sigma_i|} \int_{\sigma_i} |\lambda_k(t) u - \lambda_{kh}^i(t) p_{kh} u|\, dt \to 0$$

при $h \to 0$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$;

2) $\max\limits_{m_1 \leqslant i \leqslant n-m_2} \sup\limits_{t \in \sigma_i} |\lambda_{kh}^i(t) u_{kh}| \leqslant b_k \|u_{kh}\|$, где $b_k = \text{const}$ не зависит от h, $k = 0, \ldots, m-1$;

3) $|\lambda_{jk} u - \lambda_{jkh} p_{kh} u| \to 0$ при $h \to 0$ для $\forall u \in U$, $j = 1, \ldots, m$; $k = 0, \ldots, m-1$;

4) $|\lambda_{jkh} u_{kh}| \leqslant b_{jk} \|u_{kh}\|$, где $b_{jk} = \text{const}$ не зависит от h, $k = 0, \ldots, m-1$.

§ 3. Краевая задача для системы функционально-дифференциальных уравнений

Для применения в дальнейшем результатов § 1 нам целесообразно перейти от задачи (2.3—4) к равносильной краевой задаче для системы функционально-дифференциальных уравнений. Сделаем подстановку

$$u_k = D^k u, \quad k=0, \ldots, m-1. \tag{3.1}$$

Тогда задача (2.3—4) сводится к задаче

$$Du_k(t) = u_{k+1}(t), \quad k=0, 1, \ldots, m-2, \tag{3.2}$$

$$Du_{m-1}(t) = f(t, \lambda_0(t) u_0, \ldots, \lambda_{m-1}(t) u_{m-1}), \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_{jk} u_k = 0, \quad j=1, \ldots, m. \tag{3.4}$$

Введем пространство $\boldsymbol{U} = U^m$ вектор-функций

$$\boldsymbol{u} = (u_0, \ldots, u_{m-1}) \in \boldsymbol{U}$$

с нормой

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sum_{k=0}^{m-1} \|u_k\| = \sum_{k=0}^{m-1} [\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |u_k(t)| + \int_0^1 |Du_k(t)|\, dt].$$

и пространство $\boldsymbol{X} = (L(0,1))^m \times \mathrm{R}^m$ элементов

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m; \xi_1, \ldots, \xi_m) \in \boldsymbol{X}$$

с нормой ,

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{X}} = \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 |x_k(t)|\, dt + \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|.$$

Пусть выполняется условие I. Тогда равенство

$$f(t, \lambda_0(t) u_0, \ldots, \lambda_{m-1}(t) u_{m-1}) = \boldsymbol{\Phi u}$$

определяет оператор $\boldsymbol{\Phi} \in (\boldsymbol{U} \to L(0,1))$, а функционалы

$$\Lambda_j \boldsymbol{u} = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_{jk} u_k, \quad j=1, \ldots, m.$$

линейны и непрерывны в $\boldsymbol{U}$.

Обозначим через I оператор вложения из U в $L(0,1)$.

Замечание 1. Из теоремы Рисса вытекает, что вложение $U \subset L(0,1)$ вполне непрерывно.

Оператор дифференцирования D из U в $L(0,1)$ линеен и непрерывен. Таким образом, задачу (3.2—4) можно рассматривать как операторное уравнение вида (1.8) с операторами $\boldsymbol{K} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{X})$ и $\boldsymbol{F} \in (\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{X})$, определенными равенствами

$$\boldsymbol{K u}=(D u_0, \ldots, D u_{m-1}; u_0(0), \ldots, u_{m-1}(0)),$$
$$\boldsymbol{F u}=(-I u_1, \ldots, -I u_{m-1}, -\boldsymbol{\Phi u}; \Lambda_1 \boldsymbol{u}-u_0(0), \ldots, \Lambda_m \boldsymbol{u}-u_{m-1}(0)),$$

и свободным членом $\boldsymbol{f}=0$. При этом оператор $\boldsymbol{K}$ имеет обратный $\boldsymbol{K}^{-1} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{U})$.

Аналогичный переход проведем в случае конечно-разностной задачи (2.13—14). Сделаем подстановку

$$u_{kh}=D_h{}^k u_h \in U_{kh}, \quad k=0, 1, \ldots, m-1.$$

Определим пространство $\boldsymbol{U}_h=U_{0h} \times \ldots \times U_{m-1,h}$ векторов

$$\boldsymbol{u}_h=(u_{0h}, \ldots, u_{m-1,h}) \in \boldsymbol{U}_h=\mathbf{R}^{m \cdot n-m(m-3)/2},$$

где $u_{kh} \in U_{kh}$, $k=0, \ldots, m-1$. Снабдим пространство $\boldsymbol{U}_h$ нормой

$$\|\boldsymbol{u}_h\|=\sum_{k=0}^{m-1}\|u_{kh}\|=\sum_{k=0}^{m-1}\Big[\max_{0 \leqslant i \leqslant n-k}|u_{kh}{}^i|+h \sum_{i=0}^{n-k-1}|(D_h u_{kh})^i|\Big].$$

Правую сторону системы (2.13) мы можем теперь переписать в виде

$$(f_h u_h)^i=\frac{1}{|\sigma_i|} \int_{\sigma_i} f(t, \lambda_{0h}{}^i(t) u_{0h}, \ldots, \lambda_{m-1,h}{}^i(t) u_{m-1,h})\, dt=(\Phi_h \boldsymbol{u}_h)^i,$$

где $\Phi_h \in(\boldsymbol{U}_h \rightarrow X_h)$. Условия (2.14) примут вид

$$\Lambda_{jh} \boldsymbol{u}_h=\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_{jkh} u_{kh}=0, \quad j=1, \ldots, m.$$

Задачу (2.13—14) мы можем переписать в виде

$$D_h u_{kh}=u_{k+1,h}, \quad k=0, 1, \ldots, m-2, \tag{3.5}$$
$$D_h{}^{(1)} u_{m-1,h}=\Phi_h \boldsymbol{u}_h, \tag{3.6}$$
$$\Lambda_{jh} \boldsymbol{u}_h=0, \quad j=1, \ldots, m. \tag{3.7}$$

Оператор $D_h{}^{(1)} \in \mathfrak{L}(U_{m-1,h}, X_h)$ в уравнении (3.6) определяется согласно соотношению (2.9) равенством

$$(D_h{}^{(1)} u_{m-1,h})^i=\sum_{j=-\rho_h}^{\pi_h-m} \beta_j{}^m(D_h u_{m-1,h})^{i+j}.$$

При этом имеет место равенство (2.10).

Обозначим через X_{kh} пространства векторов

$$x_{kh}=(x_{kh}{}^0, \ldots, x_{kh}{}^{n-k}) \in X_{kh}=\mathbf{R}^{n-k+1},$$

$k=1, \ldots, m-1$, снабженные нормой

$$\|x_{kh}\|=h \sum_{i=0}^{n-k}|x_{kh}{}^i|.$$

Пространства X_{kh} эквивалентны пространствам U_{kh}. Поэтому оператор D_h можно рассматривать как действующий из U_{kh} в $X_{k+1,h}$. При этом

$$\|D_h\|_{\mathfrak{L}(U_{kh},\, X_{k+1,h})} \leqslant 1, \qquad h \in H.$$

Тождественный оператор I_{kh} в U_{kh} будем рассматривать как оператор вложения U_{kh} в X_{kh}.

Введем пространство $\boldsymbol{X}_h = X_{1h} \times \ldots \times X_{m-1,h} \times X_h \times \mathbf{R}^m$ элементов

$$\boldsymbol{x}_h = (x_{1h}, \ldots, x_{m-1,h}, x_h;\ \xi_1, \ldots, \xi_m) \in \boldsymbol{X}_h = \mathbf{R}^{mn-m(m-3)/2}$$

с нормой

$$\|\boldsymbol{x}_h\| = \sum_{k=1}^{m-1} \|x_{kh}\| + \|x_h\| + \sum_{j=1}^{m} |\xi_j| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} h \sum_{i=0}^{n-k} |x_{kh}{}^i| + h \sum_{i=m_1}^{n-m_2} |x_h{}^i| + \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|.$$

Задачу (3.5—7) можно теперь рассматривать как операторное уравнение (1.9) с операторами $\boldsymbol{K}_h \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{U}_h, \boldsymbol{X}_h)$ и $\boldsymbol{F}_h \in (\boldsymbol{U}_h \to \boldsymbol{X}_h)$, определенными равенствами

$$\boldsymbol{K}_h \boldsymbol{u}_h = (D_h u_{0h}, \ \ldots, \ D_h u_{m-2,h}, \ D_h{}^{(1)} u_{m-1,h}; \ u^0{}_{0h}, \ \ldots, \ u^0{}_{m-1,h}),$$

$$\boldsymbol{F}_h \boldsymbol{u}_h = (-I_{1h} u_{1h}, \ \ldots, \ -I_{m-1,h} u_{m-1,h}, \ -\Phi_h \boldsymbol{u}_h; \ \Lambda_{1h} \boldsymbol{u}_h - u^0{}_{0h}, \ \ldots$$
$$\ldots, \ \Lambda_{mh} \boldsymbol{u}_h - u^0{}_{m-1,h})$$

и свободным членом $\boldsymbol{f}_h \equiv 0$. Имеет место неравенство

$$\|\boldsymbol{K}_h\| \leqslant c, \tag{3.8}$$

$c = \text{const}$ не зависит от h.

Введем добавочное условие для оператора $D_h{}^{(1)}$, а тем самым и для конечно-разностного оператора $D_h{}^{(m)}$ в уравнении (2.13).

Условие III. Задача

$$D_h{}^{(1)} u_{m-1,h} = x_h, \qquad u^0{}_{m-1,h} = \xi,$$

имеет при любом векторе $(x_h, \xi) = (x_h{}^{m_1}, \ \ldots, \ x_h{}^{n-m_2}, \xi)$ единственное решение $u_{m-1,h} \in U_{m-1,h}$ и

$$\|u_{m-1,h}\| \leqslant c\,(\|x_h\| + |\xi|),$$

где $c = \text{const}$ не зависит от h.

Замечание 2. Условие III равнозначно исследованному в [1] условию (K) для оператора $D_h{}^{(m)}$.

Из условия III следует существование обратных операторов $\boldsymbol{K}_h{}^{-1} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{X}_h, \boldsymbol{U}_h)$, причем

$$\|\boldsymbol{K}_h{}^{-1}\| \leqslant c, \tag{3.9}$$

$c = \text{const}$ не зависит от h.

§ 4. Сходимость конечно-разностного метода

В этом параграфе мы докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть*

1) *задача* (2.3—4) *имеет решение* $u^* \in U_m$ *и выполняется условие* I;

2) *линеаризованная задача*

$$D^m u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial}{\partial s_k} f(t, \lambda_0(t) u^*, \ldots, \lambda_{m-1}(t) D^{m-1} u^*) \lambda_k(t) D^k u = 0, \tag{4.1}$$

$$\lambda_j u = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4.2}$$

имеет лишь нулевое решение;

3) $\int\limits_0^1 |\lambda_k(t+s) u - \lambda_k(t) u|\, dt < \varepsilon \|u\|, \quad k = 0, \ldots, m-1,$ (4.3)

для любого $u \in U$, *как только* $|s| < \delta(\varepsilon)$;

4) *задача* (2.13—14) *удовлетворяет условиям* II *и* III;

5) *для решения* u^* *имеет место сходимость*

$$\max_i \max_{t \in \sigma_i} |\lambda_k(t) D^k u^* - \lambda_{kh}{}^i(t) p_{kh} D^k u^*| \to 0, \quad h \in H, \tag{4.4}$$

где максимум берется по тем $i = m_1, \ldots, n - m_2$, *для которых* $\tau \notin \sigma_i$. *Тогда существуют числа* $h_0 > 0$ *и* $\delta_0 > 0$ *такие, что при* $h \leqslant h_0$ *задача* (2.13—14) *имеет единственное решение* $u_h^* \in U_h$, *удовлетворяющее неравенствам*

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n-k} |(D_h{}^k u_h{}^*)^i - D^k u^*(t_{i+k/2})| \leqslant \delta_0, \quad k = 0, \ldots, m-1,$$

$$h \sum_{i=0}^{n-m} \Big|(D_h{}^m u_h{}^*)^i - \frac{1}{h} \int\limits_{\sigma_{i+m/2}} D^m u^*(t)\, dt\Big| \leqslant \delta_0.$$

При этом имеют место сходимости

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n-k} |(D_h{}^k u_h{}^*)^i - D^k u^*(t_{i+k/2})| \to 0, \ h \in H, \quad k = 0, \ldots, m-1, \tag{4.5}$$

$$h \sum_{i=0}^{n-m} \Big|(D_h{}^m u_h{}^*)^i - \frac{1}{h} \int\limits_{\sigma_{i+m/2}} D^m u^*(t)\, dt\Big| \to 0, \ h \in H, \tag{4.6}$$

и справедливы оценки

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n-k} |(D_h{}^k u_h{}^*)^i - D^k u^*(t_{i+k/2})| \leqslant c \cdot \varepsilon_h, \quad h \in H, \quad k = 0, \ldots, m-1, \tag{4.7}$$

$$h \sum_{i=0}^{n-m} \Big|(D_h{}^m u_h{}^*)^i - \frac{1}{h} \int\limits_{\sigma_{i+m/2}} D^m u^*(t)\, dt\Big| \leqslant c \cdot \varepsilon_h, \quad h \in H, \tag{4.8}$$

где

$$\varepsilon_h=\sum_{k=1}^{m-1} h\sum_{i=0}^{n-k}\left|D^k u^*(t_{i+k/2})-\frac{1}{h}\int\limits_{\sigma_{i+k/2}} D^k u^*(t)\,dt\right|+$$

$$+h\sum_{i=m_1}^{n-m_2}\left|(D_h^{(1)}p_{m-1,h}D^{m-1}u^*)^i-\frac{1}{|\sigma_i|}\int\limits_{\sigma_i} D^m u^*(t)\,dt\right|+$$

$$+h\sum_{i=m_1}^{n-m_2}\left|(f_h p_{0h}u^*)^i-\frac{1}{|\sigma_i|}\int\limits_{\sigma_i} f(t,\lambda_0(t)u^*,\ \ldots,\ \lambda_{m-1}(t)D^{m-1}u^*)\,dt\right|+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}|\lambda_{jh}p_{0h}u^*-\lambda_j u^*|.$$

Замечание 3. Пусть решение задачи (2.3—4) имеет кусочно-непрерывную производную $D^{m+1}u^*$, пусть $m_1=m_2=m/2$ и оператор $D_h^{(m)}$ определяется равенством

$$(D_h^{(m)}u_h)^i=(D_h^m u_h)_{i-m/2},\qquad i=m/2,\ \ldots,\ n-m/2.$$

Если правая сторона уравнения (2.3) и условия (2.4) аппроксимируются так, что

$$h\sum_{i=m/2}^{n-m/2}\left|(f_h p_{0h}u^*)^i-\frac{1}{h}\int\limits_{\sigma_i} f(t,\lambda_0(t)u^*,\ \ldots,\lambda_{m-1}(t)D^{m-1}u^*)\,dt\right|\leqslant c\cdot h^2,$$

$$|\lambda_{jh}p_{0h}u^*-\lambda_j u^*|\leqslant c\cdot h^2,\qquad j=1,\ \ldots,\ m,$$

то оценки (4.7—8) принимают вид

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n-k}|(D_h^k u_h^*)^i-D^k u^*(t_{i+k/2})|\leqslant c\cdot h^2,\qquad k=0,\ \ldots,\ m-1,$$

$$h\sum_{i=0}^{n-m}\left|(D_h^m u_h^*)^i-\frac{1}{h}\int\limits_{\sigma_{i+m/2}} D^m u^*(t)\,dt\right|\leqslant c\cdot h^2.$$

При выводе утверждений теоремы 2 мы будем опираться на результаты § 1. Поэтому, прежде чем приступить к доказательству теоремы, построим операторы $\boldsymbol{p}_h\in\mathfrak{L}(\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{U}_h)$ и $\boldsymbol{q}_h\in\mathfrak{L}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{X}_h)$.

Оператор $\boldsymbol{p}_h$ определим следующим образом:

$$\boldsymbol{p}_h\boldsymbol{u}=(p_{0h}u_0,\ \ldots,\ p_{m-1,h}u_{m-1})\in\boldsymbol{U}_h,$$

где операторы $p_{kh}\in\mathfrak{L}(U,\ U_{kh})$, $k=0,\ \ldots,\ m-1$, определяются равенством (2.15).

При доказательстве теоремы 2 мы используем лемму 2. Поэтому нам потребуется правый обратный оператор $\boldsymbol{p}_h^{-1}\in\mathfrak{L}(\boldsymbol{U}_h,\ \boldsymbol{U})$ такой, чтобы выполнялось неравенство (1.6). Этому условию отвечает оператор

$$\boldsymbol{p}_h^{-1}=(p_{0h}^{-1},\ \ldots,\ p_{m-1,h}^{-1}),$$

ставящий векторам u_{kh}, $k=0, \ldots, m-1$, в соответствие в пространстве U ломаные с вершинами в точках $(u^i_{kh}, t_{i+k/2})$, $0 \leqslant i \leqslant n-k$.

Оператор $\boldsymbol{q}_h$ пусть ставит каждому элементу $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m; \xi_1, \ldots, \xi_m) \in \boldsymbol{X}$ в соответствие вектор

$$\boldsymbol{q}_h\boldsymbol{x} = (q_{1h}x_1, \ldots, q_{mh}x_m; \xi_1, \ldots, \xi_m) \in \boldsymbol{X}_h,$$

где

$$(q_{kh}x_k)^i = \frac{1}{h}\int\limits_{\sigma_{i+k/2}} x_k(t)\,dt, \quad i=0, \ldots, n-k; \quad k=1, \ldots, m-1,$$

$$(q_{mh}x_m)^i = \frac{1}{|\sigma_i|}\int\limits_{\sigma_i} x_m(t)\,dt, \quad i=m_1, \ldots, n-m_2.$$

Операторы $\boldsymbol{p}_h$ и $\boldsymbol{q}_h$ удовлетворяют условиям (1.1) и (1.1') (см. [2]).

Лемма 3. *Операторы $\boldsymbol{K}_h$, $h \in H$, дискретно сходятся к оператору $\boldsymbol{K}$.*

Доказательство. Операторы $\boldsymbol{K}_h$, $\boldsymbol{p}_h$ и $\boldsymbol{q}_h$, $h \in H$, равномерно ограничены. Поэтому нам достаточно доказать сходимость

$$\|\boldsymbol{K}_h\boldsymbol{p}_h\boldsymbol{u} - \boldsymbol{q}_h\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}\| \to 0, \quad h \in H, \tag{4.9}$$

для произвольного $\boldsymbol{u}$ из некоторого всюду плотного в $\boldsymbol{U}$ множества. Непосредственно проверяется, что сходимость (4.9) имеет место для вектор-функций $\boldsymbol{u}$ из множества $(C^1[0,1])^m$.

Доказательство теоремы 2. Покажем, что для уравнений

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{u} = 0, \tag{1.8'}$$

$$\boldsymbol{K}_h\boldsymbol{u}_h + \boldsymbol{F}_h\boldsymbol{u}_h = 0, \quad h \in H, \tag{1.9'}$$

с операторами $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{K}_h$ и $\boldsymbol{F}_h$, определенными в § 3, выполняются предпосылки теоремы 1.

Если задача (2.3—4) имеет решение $u^* \in U_m$, то уравнение (1.8') имеет решение

$$\boldsymbol{u}^* = (u^*, Du^*, \ldots, D^{m-1}u^*) \in \boldsymbol{U}.$$

Условие I гарантирует дифференцируемость операторов $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}_h$ по Фреше. При этом

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{v} = (-Iv_1, \ldots, -Iv_{m-1}, -\Phi'(\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{v}; \\ \Lambda_0\boldsymbol{v} - v_0(0), \ldots, \Lambda_{m-1}\boldsymbol{v} - v_{m-1}(0)),$$

$$\boldsymbol{F}_h'(\boldsymbol{u}_h)\boldsymbol{v}_h = (-I_{1h}v_{1h}, \ldots, I_{m-1,h}v_{m-1,h}, \Phi_h'(\boldsymbol{u}_h)\boldsymbol{v}_h; \\ \Lambda_{1h}\boldsymbol{v}_h - v^0_{0h}, \ldots, \Lambda_{mh}\boldsymbol{v}_h - v^0_{m-1,h}),$$

где

$$\Phi'(\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{v} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial}{\partial s_k} f(t, \lambda_0(t)u^*, \ldots, \lambda_{m-1}(t)D^{m-1}u^*)\lambda_k(t)v_k,$$

$$(\Phi'_h(\boldsymbol{u}_h)\boldsymbol{v}_h)^i=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{|\sigma_i|}\int_{\sigma_i}\frac{\partial}{\partial s_k}f(t,\ \lambda_{0h}{}^i(t)u_{0h},\ \ldots,\ \lambda^i_{m-1,h}(t)u_{m-1,h})\,(\lambda_{kh}{}^i(t)v_{kh})\,dt.$$

Обратимость оператора $\boldsymbol{K}+\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}^*)$ следует из условия, наложенного на задачу (4.1—2). Фредгольмовость операторов $\boldsymbol{K}_h+\boldsymbol{F}'_h(\boldsymbol{p}_h\boldsymbol{u}^*)$ очевидна.

Последовательность операторов $\{\boldsymbol{K}_h\}$ дискретно сходится к оператору $\boldsymbol{K}$ согласно лемме 3. Для доказательства сходимости $\boldsymbol{F}_h\to\boldsymbol{F}$, $h\in H$, выпишем, используя условия I и II, неравенство

$$\|\boldsymbol{F}_h\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{q}_h\boldsymbol{F}\boldsymbol{u}\|\leqslant\|\boldsymbol{F}_h\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{F}_h\boldsymbol{p}_h\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{F}_h\boldsymbol{p}_h\,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{q}_h\boldsymbol{F}\boldsymbol{u}\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\Big(1+a_kb_k+\sum_{j=1}^{m}b_{jk}\Big)\cdot\|u_{kh}-p_{kh}u_k\|_{U_{kh}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}h\sum_{i=0}^{n-k}\Big|u_k(t_{i+k/2})-\frac{1}{h}\int_{\sigma_{i+k/2}}u_k(t)\,dt\Big|+$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}a_k\cdot h\sum_{i=m_1}^{n-m_2}\frac{1}{|\sigma_i|}\int_{\sigma_i}\big|\lambda_k(t)u_k-\lambda_{kh}{}^i(t)\,p_{kh}u\big|\,dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m-1}|\lambda_{jk}u_k-\lambda_{jkh}p_{kh}u_k|+\sum_{j=1}^{m}|u_{j-1}(0)-u_{j-1}(t_{j-1/2})|.$$

Сходимость $\boldsymbol{F}_h\to\boldsymbol{F}$, $h\in H$, следует теперь из условия II. Условия I и II гарантируют, кроме того, выполненность предпосылки 4 теоремы 1.

Для завершения доказательства теоремы остается лишь доказать компактную сходимость последовательности операторов $\{\boldsymbol{F}'_h(\boldsymbol{p}_h\boldsymbol{u}^*)\}$, $h\in H$, к оператору $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}^*)$. Для этого используем лемму 2.

Из (4.3) следует полная непрерывность оператора $\Phi'(\boldsymbol{u}^*)\in\in\mathfrak{L}(\boldsymbol{U},\ L(0,1))$. Сходимость нормы

$$\sup_{\|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}\|\Phi_h{}'(\boldsymbol{p}_h\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{p}_h\boldsymbol{v}-q_{mh}\Phi'(\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{v}\|\to 0,\qquad h\in H,$$

вытекает при (4.4) из условий I и II. Согласно лемме 2, последовательность операторов $\Phi'_h(\boldsymbol{p}_h\boldsymbol{u}^*)\in\mathfrak{L}(\boldsymbol{U}_h,\ X_h)$, $h\in H$, компактно сходится к оператору $\Phi'(\boldsymbol{u}^*)$. Аналогично доказывается компактная сходимость операторов $I_{kh}\in\mathfrak{L}(U_{kh},\ X_{kh})$, $h\in H$, $k=1,\ \ldots,\ m-1$, к оператору вложения $I\in\mathfrak{L}(U,\ L(0,1))$. При этом используется полная непрерывность операторов I (см. замечание 1). Последовательность операторов $\{\boldsymbol{F}'_h(\boldsymbol{p}_h\boldsymbol{u}^*)\}$, $h\in H$, таким образом компактно сходится к оператору $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}^*)$.

Утверждения теоремы 2 следуют теперь из теоремы 1. При этом сходимость (4.5—6) и оценки (4.7—8) вытекают из неравенства (1.11). Теорема 2 доказана.

Замечание 4. Утверждения теоремы 2 остаются в силе при большем числе функционалов $\lambda_k(t)$ в уравнении (2.3), а также, если функция f и ее производные имеют любое конечное число разрывов первого рода на гиперплоскостях $t = \text{const}$.

§ 5. Приложения

1. Краевая задача для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Рассмотрим задачу

$$Du(t) = f(t, u(t), u(t-\tau)), \quad 0 < t < 1, \tag{5.1}$$

$$\alpha u(0) + \beta u(1) = 0, \tag{5.2}$$

$$u(t) = 0, \quad t < 0. \tag{5.3}$$

Здесь α, β, τ — заданные числа, $0 < \tau < 1$. Пусть функция $f(t, s_1, s_2)$ и ее первые производные по всем переменным непрерывны в полосе $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < s_k < \infty$, $k = 1, 2$, всюду, за исключением плоскостей $t = \tau_j$, $j = 1, \ldots, r$, на которых у функции и ее производных могут быть разрывы первого рода. Пусть

$$\sup_{\substack{0<t<1 \\ -\infty<s_1, s_2<\infty}} \left| \frac{\partial f(t, s_1, s_2)}{\partial s_k} \right| \leqslant a_k = \text{const}, \quad k = 1, 2.$$

В качестве приближенной задачи положим систему уравнений

$$\frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{h} = \frac{1}{|\sigma_i|} \int_{\sigma_i} f(t, u_h^i, u_h^{i-l})\, dt, \quad i = 0, \ldots, n-1, \tag{5.4}$$

$$\alpha u_h^0 + \beta u_h^n = 0, \tag{5.5}$$

где $l = [\tau/h]$ — целая часть числа τ/h, а $u_h^{i-l} = 0$ при $i < l$.

Непосредственно из теоремы 2 следует

Предложение 1. *Пусть задача* (5.1—3) *имеет решение* $u^* \in U$, *а линеаризованная задача*

$$Du(t) - \frac{\partial}{\partial s_1} f(t, u^*(t), u^*(t-\tau))\, u(t) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial s_2} f(t, u^*(t), u^*(t-\tau))\, u(t-\tau) = 0,$$

$$\alpha u(0) + \beta u(1) = 0,$$

$$u(t) = 0, \quad t < 0,$$

имеет лишь нулевое решение. Тогда существуют числа $h_0 > 0$ *и* $\delta_0 > 0$ *такие, что при* $h \leqslant h_0$ *задача* (5.4—5) *имеет единствен-*

ное решение $u_h^* \in U_h$, удовлетворяющее неравенствам

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} |(u_h^*)^i - u^*(t_i)| \leqslant \delta_0,$$

$$h\sum_{i=0}^{n-1} \Big|(D_h u_h^*)^i - \frac{1}{h}\int\limits_{\sigma_{i+1/2}} Du^*(t)\,dt\Big| \leqslant \delta_0,$$

и имеют место оценки

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} |(u_h^*)^i - u^*(t_i)| \leqslant c\cdot h,$$

$$h\sum_{i=0}^{n-1} \Big|(D_h u_h^*)^i - \frac{1}{h}\int\limits_{\sigma_{i+1/2}} Du^*(t)\,dt\Big| \leqslant c\cdot h.$$

Замечание 5. Утверждения предложения 1 обобщаются на уравнения с несколькими отклонениями аргумента, а также на случай отклонений $\tau < 0$ и $\tau = \tau(t)$ (ср. [5]).

2. Краевая задача для интегро-дифференциального уравнения. Рассмотрим задачу

$$D^2u = f(t, u, Du, K_0u, K_1Du), \qquad 0<t<1, \tag{5.6}$$

$$\sum_{k=0}^{1} (\alpha_{jk}D^k u(0) + \beta_{jk}D^k u(1)) = 0, \qquad j=1,\ 2, \tag{5.7}$$

где

$$K_l v = \int\limits_0^1 K_l(t,s)\,v(s)\,ds, \qquad l=0,1;$$

α_{jk}, β_{jk}, — заданные числа, $j = 1$, 2 и $k = 0$, 1. О функции $f(t, s_1, \ldots, s_4)$ предположим, что она и ее первые производные по всем переменным непрерывны в полосе $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < s_1, s_2, s_3, s_4 < \infty$, всюду, за исключением гиперплоскостей $t = \tau_j$, $j = 1, \ldots, r$, на которых у функции и ее производных могут быть разрывы первого рода. При этом

$$\sup_{\substack{0<t<1\\ -\infty<s_1,s_2,s_3,s_4<\infty}} \left|\frac{\partial f(t, s_1, s_2, s_3, s_4)}{\partial s_k}\right| \leqslant a_k = \mathrm{const}, \qquad k=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Пусть функции $K_j(t,s)$ и их производные $(\partial/\partial t)K_j(t,s)$, $j = 0, 1$, кусочно-непрерывны в квадрате $0 \leqslant t,\ s \leqslant 1$.

Для приближенного решения задачи (5.6—7) построим систему

$$(D_h^{(2)}u_h)^i = \frac{1}{h}\int\limits_{\sigma_i} f(t, u_h^i, (D_h^{(1)}u_h)^i, \lambda_{0h}^i(t)\,u_h, \lambda_{1h}^i(t)\,D_h^{(1)}u_h)\,dt, \tag{5.8}$$

$$i=1, \ldots, n-1,$$

$$\sum_{k=0}^{1} (\alpha_{jk}(D_h^{(k)}u_h)^0 + \beta_{jk}(D_h^{(k)}u_h)^n) = 0, \qquad j=1, 2. \tag{5.9}$$

Здесь

$$(D_h^{(2)}u_h)^i = \frac{u_h^{i+1} - 2u_h^i + u_h^{i-1}}{h^2}, \qquad i=1, \ldots, n-1;$$

$$(D_h^{(1)}u_h)^i = \frac{u_h^{i+1} - u_h^{i-1}}{2h}, \qquad i=1, \ldots, n-1,$$

$$(D_h^{(1)}u_h)^0 = \frac{-u_h^2 + 4u_h^1 - 3u_h^0}{2h},$$

$$(D_h^{(1)}u_h)^n = \frac{3u_h^n - 4u_h^{n-1} + u_h^{n-2}}{2h};$$

$$(D_h^{(0)}u_h)^i = u_h^i, \qquad i=0, \ldots, n;$$

$$\lambda_{lh}^i(t)v_h = \sum_{j=0}^{n} v_h^j \int_{\sigma_j} K_l(t,s)\,ds, \qquad t \in [t_{i-1/2}, t_{i+1/2}],$$

$$i=1, \ldots, n-1; \quad l=0, 1.$$

Из теоремы 2 вытекает

Предложение 2. *Пусть задача* (5.6—7) *имеет решение* $u^* \in U_2$, *а линеаризованная задача*

$$D^2u - \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial}{\partial s_l} f(t, u^*, Du^*, K_0u^*, K_1Du^*)\, D^{l-1}u -$$

$$- \sum_{l=3}^{4} \frac{\partial}{\partial s_l} f(t, u^*, Du^*, K_0u^*, K_1Du^*)\, K_{l-3}D^{l-3}u = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{1} (\alpha_{jk}D^k u(0) + \beta_{jk}D^k u(1)) = 0, \qquad j=1,2,$$

имеет лишь нулевое решение. Тогда существуют числа $h_0 > 0$ *и* $\delta_0 > 0$ *такие, что при* $h \leqslant h_0$ *задача* (5.8—9) *имеет единственное решение* $u_h^* \in U_h$, *удовлетворяющее неравенствам*

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n-k} |(D_h^k u_h^*)^i - D^k u^*(t_{i+k/2})| \leqslant \delta_0, \qquad k=0, 1,$$

$$h \sum_{i=1}^{n-1} \Big|(D_k^{(2)}u_h^*)^i - \frac{1}{h}\int_{\sigma_i} D^2u^*(t)\,dt\Big| \leqslant \delta_0.$$

Имеют место оценки

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n-k} |(D_h^k u_h^*)^i - D^k u^*(t_{i+k/2})| \leqslant c \cdot h^2, \qquad k=0, 1,$$

$$h \sum_{i=1}^{n-1} \Big|(D_k^{(2)}u_h^*)^i - \frac{1}{h}\int_{\sigma_i} D^2u^*(t)\,dt\Big| \leqslant c \cdot h^2.$$

Литература

1. Вайникко Г. М., Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
2. Вайникко Г. М., Дискретно компактные последовательности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, 14, № 3, 572—583.
3. Вайникко Г. М., Карма О. О., О сходимости приближенных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, 14, № 4, 828—837.
4. Крейн С. Г., Шаблицкая Л. И., Об устойчивости разностных схем для задачи Коши. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, **6**, № 4, 648—664.
5. Саарнийт И. Р., О решении методом конечных разностей краевой задачи для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, **16**, № 2, 372—384.

Поступило
5 III 1976

MITTELINEAARSETE FUNKTSIONAAL-DIFERENTLIAALVÕRRANDITE LIGIKAUDSEST LAHENDAMISEST

I. Saarniit

Resümee

Artiklis uuritakse mittelineaarsete funktsionaal-diferentsiaalvõrrandite rajaülesannete lahendamist diferentsmeetodil. Diferentsmeetodi koonduvuse uurimisel ja koonduvuse kiiruse hindamisel on kasutatud regulaarse aproksimatsiooni mõistet [1—3]. Saadud tulemusi on rakendatud hälbiva argumendiga diferentsiaalvõrrandi ja integraal-diferentsiaalvõrrandi korral.

ÜBER DIE ANNÄHERNDE LÖSUNG DER NICHTLINEAREN FUNKTIONAL-DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

I. Saarniit

Zusammenfassung

Im Artikel wird die Lösung der Randwertaufgaben für die nichtlinearen Funktional-Differentialgleichungen mit dem Differenzenverfahren untersucht. Bei der Untersuchung der Konvergenz und bei der Schätzung der Konvergenzgeschwindigkeit wird der Begriff der regulären Approximation [1—3] benutzt. Die Resultate werden im Satz 2 zusammengefaßt und auf die Differentialgleichungen mit abweichendem Argument und auf Integro-Differnetialgleichungen angewandt.

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

М. Фишер

Кафедра вычислительной математики

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant 2} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} K_{\alpha}(x, D^{\beta}u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad |\beta| \leqslant 2, \quad (12)$$

$$u\big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0 \quad (2)$$

где $\Gamma = \Omega/\Omega$ граница p-мерного единичного куба

$$\Omega = \{0 < x_i < 1, \ i = 1, \ldots, p\},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p), \ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p), \ \alpha_i, \beta_i = 0, 1, 2;$$

$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к границе Γ;

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p; \ x = (x_1, \ldots, x_p),$$

$$D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \ldots D_p^{\alpha_p}, \quad D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Будем предполагать, что уравнение (1) эллиптического типа, т. е.

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant 2} \frac{\partial K_{\alpha}}{\partial p_{\beta}} t_{\alpha} t_{\beta} \geqslant c_0 \sum_{|\alpha|\leqslant 2} t_{\alpha}^2,$$

где $c_0 = \text{const} > 0$, и в некоторой окрестности гиперкуба Ω

1) существует решение краевой задачи (1), (2), причем она в ней достаточно гладкая;

2) функции $K_{\alpha}(x, p_{\beta})$ достаточно раз непрерывно дифференцируемы.

При аппроксимации краевой задачи (1), (2) разностной краевой задачей пользуемся разностной сеткой

$$\bar{\omega} = \{x\colon x_i = k_i \cdot h, \ k_i = -1, 0, \ldots, N+1\}, \quad h = 1/N.$$

Обозначим множества внутренних и граничных узлов соответственно через

$$\omega = \bar{\omega} \cap \Omega, \quad \gamma = \bar{\omega} \cap \Gamma.$$

Введем еще подмножества

$$\omega_{+\alpha}=\{x\colon\ x_i=k_i\cdot h,\ k_i=1,\ \ldots,\ N-1+\alpha_i\},$$
$$\omega_{-\alpha}=\{x\colon\ x_i=k_i\cdot h,\ k_i=1-\alpha_i,\ \ldots,\ N-1\}.$$

Определим скалярные произведения и нормы на множестве ω на его частях

$$(u,v)=h^p\sum_{x\in\omega}u(x)v(x),\qquad [u,v]=h^p\sum_{x\in\bar\omega}u(x)v(x),$$

$$(u,v)_{\pm\alpha}=h^p\sum_{x\in\omega\pm\alpha}u(x)v(x),$$

$$\|u\|_2{}^2=\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}[(\bar\partial^\alpha u,\bar\partial^\alpha u)_{+\alpha}+(\partial^\alpha u,\partial^\alpha u)_{-\alpha}],$$

где ∂_i и $\bar\partial_i$ означают соответственно правые и левые разностные соотношения в i-том направлении и

$$\partial^\alpha=\partial_1{}^{\alpha_1}\ldots\partial_p{}^{\alpha_p}.$$

Аппроксимируем краевую задачу (1), (2) разностной краевой задачей

$$\Lambda y\equiv\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant 2}(-1)^{|\alpha|}[\bar\partial^\alpha A_\alpha(x,\partial^\beta y)+\partial^\alpha A_\alpha(x,\bar\partial^\beta y)]=f(x),\quad x\in\omega,$$

$$y|_\gamma=0,\qquad \partial_i\bar\partial_i|_\gamma=0,\qquad i=1,\ \ldots,\ p, \tag{4}$$

где сеточные функции $A_\alpha(x,p_\beta)$ получены сносом в точке сетки функцией $K_\alpha(x,p_\beta)$.

В предположении, что существует единственное решение разностной схемы (3), (4), будем исследовать аппроксимацию и сходимость разностной схемы (3), (4). Пусть y является решением схемы (3), (4), а u — решением задачи (1), (2). Тогда для разности $z=u-y$ получаем

$$\Lambda u-\Lambda y=\Psi,\qquad x\in\omega, \tag{5}$$

$$z|_\gamma=0,\qquad \partial_i\bar\partial_i z|_{x_i=0}=\varphi_{1i},\qquad \partial_i\bar\partial_i z|_{x_i=1}=\varphi_{2i}, \tag{6}$$

где

$$\psi=\Lambda u-f,\qquad \varphi_{1i}=\partial_i\bar\partial_i u|_{x_i=0},\qquad \varphi_{2i}=\partial_i\bar\partial_i u|_{x_i=1}.$$

Используя вышеприведенные условия, можно показать (см. [1]), что погрешность аппроксимации

$$\psi=\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\partial^\alpha\mu+\psi_0,$$

где

$$\mu=O(h^2),\qquad \psi_0=O(h^2),\qquad \varphi_{1i}=\varphi_{2i}=O(h^2).$$

Главная трудность при исследовании сходимости разностной схемы (3), (4) заключается в неоднородности условий (6). Чтобы избавиться от неоднородности построим вспомогательную функцию w, которая удовлетворяет условиям

$$w|_\gamma=0, \qquad \partial_i\bar{\partial}_i w|_{x_i=0}=\varphi_{1i}, \qquad \partial_i\bar{\partial}_i w|_{x_i=1}=\varphi_{2i}.$$

Нетрудно проверить, что этим условиям удовлетворяет функция

$$w=\sum_{i=1}^{p} w_i,$$

где

$$w_i=-\frac{x_i(1-x_i)(2-x_i)}{6}\,\partial_i\bar{\partial}_i V_i|_{x_i=0}+$$

$$+\frac{x_i(1-x_i)(1+x_i)}{6}\,\partial_i\bar{\partial}_i V_i|_{x_i=1},$$

$$V_i=u-(w_1+\ldots+w_{i-1}).$$

Теорема. *Пусть уравнение* (1) *удовлетворяет условию эллиптичности, выполнены условия* 1) *и* 2) *и*

$$\left|\frac{\partial K_\alpha}{\partial p_\beta}\right|\leqslant c_1=\mathrm{const}.$$

Тогда разностная схема (3), (4) *сходится к решению задачи* (1), (2) *со скоростью* $\|u-y\|_2=O(h^2)$, *где* u — *решение задачи* (1), (2), *а* y *решение схемы* (3), (4).

Доказательство. Обозначив $z-w=v$, где w — выше построенная функция и умножив равенство (5) скалярно на v, получим

$$(\Lambda u-\Lambda y, v)=(\psi, v).$$

Применяя для левой части этого равенства формулу Лагранжа, можно написать

$$(\Lambda'(\xi)z, v)=(\psi, v),$$

где

$$\Lambda'(\xi)z=\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}(-1)^{|\alpha|}(\bar{\partial}^\alpha a_\alpha+\partial^\alpha\bar{a}_\alpha),$$

$$a_\alpha=\sum_{|\beta|\leqslant 2}\frac{\partial A_\alpha(x,\partial^\beta\xi)}{\partial p_\beta}\partial^\beta z, \qquad \bar{a}_\alpha=\sum_{|\beta|\leqslant 2}\frac{\partial A_\alpha(x,\partial^\beta\xi)}{\partial p_\beta}\bar{\partial}^\beta z.$$

Теперь, из-за линейности оператора $\Lambda'(\xi)$ получим

$$(\Lambda'(\xi)(v+w), v)=(\Lambda'(\xi)v, v)+(\Lambda'(\xi)w, v)=(\Psi, v),$$

или

$$(\Lambda'(\xi)v, v)=(\Psi, v)-(\Lambda'(\xi)w, v). \tag{7}$$

Используя формулу суммирования по частям и условие эллиптичности, оценим левую часть равенства (7):

$$(\Lambda'(\xi)v, v)=\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant 2}\left(\frac{\partial A_\alpha(x, \bar\partial^\beta\xi)}{\partial p_\beta}\bar\partial^\beta v, \bar\partial^\alpha v\right)_{+\alpha}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant 2}\left(\frac{\partial A^\alpha(x, \partial^\beta\xi)}{\partial p_\beta}\partial^\beta v, \partial^\alpha v\right)_{-\alpha}\geqslant c_0\|v\|_2^2.$$

Значит,

$$c_0\|v\|_2^2\leqslant(\Psi, v)-(\Lambda'(\xi)w, v). \tag{8}$$

При оценке правой части неравенства (8) будем пользоваться неравенством

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2}(\bar\partial^\alpha v, \bar\partial^\alpha v)^{1/2}_{+\alpha}\leqslant M\sum_{|\alpha|=2}(\bar\partial^\alpha v, \bar\partial^\alpha v)^{1/2}_{+\alpha},$$

где $M=\text{const}$. Имеем

$$|(\psi, v)|=|(\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\partial^\alpha\mu_\alpha, v)+(\Psi_0, v)|\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant 2}|(\mu_\alpha, \bar\partial^\alpha v)_{+\alpha}+(\Psi_0, v)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant 2}(\mu_\alpha, \mu_\alpha)^{1/2}_{+\alpha}(\bar\partial^\alpha v, \bar\partial^\alpha v)^{1/2}_{+\alpha}+(\psi_0, \psi_0)^{1/2}(v, v)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant M_2^{1/2}\max(\mu_\alpha, \mu_\alpha)\sum_{|\alpha|\leqslant 2}(\bar\partial^\alpha v, \bar\partial^\alpha v)^{1/2}_{+\alpha}+(\psi_0, \psi_0)^{1/2}(v, v)^{1/2},$$

где M_2 — число слагаемых в последней сумме. Увеличив правую часть последнего неравенства, получим

$$|(\psi, v)|\leqslant\|v\|_2\{M_2^{1/2}\max_{|\alpha|\leqslant 2}(\mu_\alpha, \mu_\alpha)^{1/2}_{+\alpha}+(\psi_0, \psi_0)^{1/2}\}.$$

Оценим теперь второе скалярное произведение в правой части неравенства (8):

$$(\Lambda'(\xi)w, v)=\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant 2}\left(\frac{\partial A_\alpha(x, \bar\partial^\beta\xi)}{\partial p_\beta}\bar\partial^\beta w, \bar\partial^\alpha v\right)_{+\alpha}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant 2}\left(\frac{\partial A_\alpha(x, \partial^\beta\xi)}{\partial p_\beta}\partial^\beta w, \partial^\alpha v\right)_{-\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}c_1\max_{|\alpha|\leqslant 2}(\partial^\alpha w, \partial^\alpha w)^{1/2}_{-\alpha}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}(\partial^\alpha v, \partial^\alpha v)^{1/2}_{-\alpha}\leqslant$$

$$+\frac{1}{2}c_1\max_{|\alpha|\leqslant 2}(\bar\partial^\alpha w, \bar\partial^\alpha w)^{1/2}_{+\alpha}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}(\bar\partial^\alpha v, \bar\partial^\alpha v)^{1/2}_{+\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant c_1MM_2^{1/2}\|v\|_2\times$$

$$\times\max\{\max_{|\alpha|\leqslant 2}(\partial^\alpha w, \partial^\alpha w)^{1/2}_{-\alpha}, \max_{|\alpha|\leqslant 2}(\bar\partial^\alpha w, \bar\partial^\alpha w)^{1/2}_{+\alpha}\},$$

Теорема будет доказана, если убедимся, что последний максимум имеет порядок $O(h^2)$. Действительно, применяя формулу Тейлора к φ_{1i} и φ_{2i} с остаточным членом в интегральной форме, удается показать, что оба скалярных произведения в последнем скобочном соотношении имеют порядок $O(h^2)$. Итак, $\|v\|_2 = O(h^2)$ и $\|z\|_2 = \|v + w\|_2 \leqslant \|v\|_2 + \|w\|_2 = O(h^2)$.

Теорема доказана.

Литература

1. Лапин А. В., Ляшко А. Д., Исследование метода сеток для нелинейных эллиптических уравнений любого порядка. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1970, № 10, 37—43.
2. Тамме Э. Э., Об устойчивости разностных схем при решении некорректных задач методом квазиобращения. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, 12, № 5, 1319—1325.
3. Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем. Москва, 1971.

Поступило
9 III 1976

DIFERENTSMEETODI KOONDUVUSE UURIMINE 4. JÄRKU KVAASILINEAARSE RAJAÜLESANDE LAHENDAMISEL

M. Fischer

Resümee

Artiklis uuritakse diferentsskeemi (3), (4) rajaülesande (1), (2) lahendamiseks ja näidatakse, et skeemi (3), (4) lahend koondub rajaülesande (1), (2) lahendiks kiirusega $O(h^2)$.

ABOUT A CONVERGENCE OF THE DIFFERENCE METHOD IN THE BOUNDARY PROBLEM FOR FOURTH POWER QUASILINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

M. Fischer

Summary

For solving the boundary problem (1), (2) the difference method (3), (4) has been investigated. It is proved that the solution of (3), (4) converges to the solution of (1), (2) with velocity $O(h^2)$.

МЕРЫ НЕКОМПАКТНОСТИ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

М. Каменский

Кафедра вычислительной математики

§ 1. Введение

Пусть в банаховом пространстве E задана последовательность линейных ограниченных операторов A_n, сильно сходящаяся к ограниченному оператору A_∞. Тогда, как хорошо известно (см., например, [5]), нельзя, вообще говоря, гарантировать близость при достаточно большом n спектров операторов A_n и A_∞. Однако, как отмечается в [5], в ряде случаев, возникающих при изучении дифференциальных операторов, некоторые собственные значения λ_n операторов A_n сходятся к соответствующему собственному значению λ_∞ оператора A_∞, причем тотальная кратность всех λ_n, близких к λ_∞, при достаточно большом n равна кратности λ_∞. Достаточные (см. [1]), а затем и необходимые и достаточные условия такого поведения части собственных значений операторов A_n в терминах регулярной сходимости операторов $\lambda I - A_n$ (λ принадлежит некоторому подмножеству комплексной плоскости) были получены Г. Вайникко [2]. В § 3 настоящей статьи мы укажем другие необходимые и достаточные условия, формулируемые в терминах нормальных мер некомпактности (см. [7]); достаточные условия такого сорта имеются в [3]. Эти результаты можно применить, например, при изучении оператора сдвига по траекториям уравнений нейтрального типа.

§ 2. Обозначения, используемые понятия и факты

В этом параграфе мы приведем основные обозначения, а также некоторые используемые факты из теории мер некомпактности и уплотняющих операторов.

На протяжении всей статьи через E будет обозначаться вещественное или комплексное банахово пространство, через $\mathbf{C}$ — комплексная плоскость и через $K(\lambda, r)$ — замкнутый круг в $\mathbf{C}$ с центром в λ радиуса r.

Наряду с пространством E рассмотрим пространство BE — пространство ограниченных последовательностей $X = \{x_n\}$ элементов из E с нормой $\|X\| = \sup \|x_n\|$. Рассмотрим также подпространство

$$KE = \{X\colon\ X \in BE,\ \text{вполне ограничена}\}.$$

Пусть линейный оператор $\mathfrak{A} : BE \to BE$ и $\mathfrak{A}(KE) \subseteq KE$. Тогда определен оператор $\mathfrak{A}^+$, действующий в пространстве $E^+ = BE/KE$, задаваемый формулой: если $\mathfrak{X} \in E^+$, то $\mathfrak{A}^+(\mathfrak{X}) = \mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{Y} \ni \mathfrak{A}X$, $X \in \mathfrak{X}$.

Пусть A — ограниченный оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве E, тогда через $\sigma(A)$ и $\varrho(A)$ мы будем обозначать соответственно спектр и резольвентное множество оператора A.

Нормальной мерой некомпактности в пространстве E (см. [7]) называют любую полунорму Φ в BE, обращающуюся в нуль на элементах из KE и только на них.

§ 3. Основная теорема

На протяжении всего параграфа, если не оговорено противное, мы будем считать, что в комплексном банаховом пространстве E задана последовательность линейных ограниченных операторов A_n. Мы будем предполагать, что

(1) *операторы A_n сильно сходятся при $n \to \infty$ к линейному ограниченному оператору A_∞;*

(2) *существует $q \geqslant 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ вне $K(0, q+\varepsilon)$ каждый из операторов A_n, $n = 1, 2, \ldots, \infty$, имеет лишь конечное число точек спектра и эти точки могут быть только собственными значениями конечной кратности.*

Мы будем говорить, что последовательность $\{A_n\}$ *уплотняет с константой k по совокупности переменных относительно нормальной меры некомпактности Φ*, заданной в E, если для любой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset E$ выполнено неравенство $\Phi(\{A_n x_n\}) \leqslant k\Phi(\{x_n\})$.

Для формулировки основной теоремы нам потребуются проекторы Рисса, построенные по частям спектров операторов A_n, $n = 1, 2, \ldots, \infty$, лежащим вне $K(0, q)$. Опишем эти проекторы более подробно. Обозначим через Γ_ε границу $K(0, q+\varepsilon)$ и пусть

$$\Gamma_\varepsilon \cap \mathfrak{S}(A_n) = \varnothing, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty. \tag{3}$$

Тогда через $P_n(\varepsilon)$ обозначим проектор Рисса, задаваемый формулой

$$P_n(\varepsilon) = -(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\varepsilon} (\lambda I - A_n)^{-1}\, d\lambda.$$

Положим $A_n(\varepsilon) = A_n(I - P_n(\varepsilon))$.

В этом параграфе нас будет интересовать вопрос в каких случаях сходимость A_n к A_∞ удовлетворяет условию:

(M_q) *для любого* $\varepsilon > 0$ *такого, что для* Γ_ε *выполнены равенства* (3), *проекторы* $P_n(\varepsilon)$ *сходятся по норме к проектору* $P_\infty(\varepsilon)$, *а операторы* $[\lambda I - A_n(\varepsilon)]^{-1}$, *где* $\lambda \in \mathbf{C} \setminus K(0, q+\varepsilon)$, *сильно сходятся к оператору* $[\lambda I - A_\infty(\varepsilon)]^{-1}$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть выполнены требования* (1), (2). *Тогда для того, чтобы выполнялось условие* (M_q) *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\delta > 0$ *и любой подпоследовательности* $\{A_{n(k)}\}$ *последовательности* $\{A_n\}$ *существовала нормальная мера некомпактности* Φ *такая, что последовательность* $\{A_{n(k)}\}$ *уплотняет с константой* $q+\delta$ *по совокупности переменных относительно* Φ.

Доказательство. Необходимость. Мы опишем только построение нормальной меры некомпактности, относительно которой последовательность $\{A_n\}$ будет уплотнять по совокупности переменных с константой $q+\delta$. Для произвольной подпоследовательности $\{A_{n(k)}\}$ построение проводится аналогично, достаточно лишь рассмотреть эту подпоследовательность как самостоятельную последовательность.

Итак, по заданному $\delta > 0$ выберем $\varepsilon < \delta$ так, чтобы для контура Γ_ε были выполнены равенства (3) и рассмотрим оператор $\mathfrak{A}: BE \to BE$, определяемый следующим соотношением: если $X = \{x_n\}$, то

$$\mathfrak{A}X = \{A_n(\varepsilon)x_n\}. \tag{4}$$

Как нетрудно видеть, в силу требования (1) и принципа равномерной ограниченности оператор $\mathfrak{A}$ будет ограниченным оператором в BE.

Покажем теперь, что оператор $\mathfrak{A}$ определяет оператор $\mathfrak{A}^+$, действующий в E^+. Для этого достаточно показать, что оператор $\mathfrak{A}$ переводит KE в KE. Действительно, пусть $Y = \{y_n\}$ и $Y \in KE$, рассмотрим последовательность $\mathfrak{A}Y = \{A_n(\varepsilon)y_n\}$. Пусть n принадлежит некоторому бесконечному множеству N'. Выберем из последовательности $\{y_n : n \in N'\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{y_n : n \in N''\}$, $y_n \to y_\infty$ при $n \in N''$, $n \to \infty$. Тогда $A_n(\varepsilon)y_n - A_\infty(\varepsilon)y_\infty = A_n(\varepsilon)y_\infty - A_\infty(\varepsilon)y_\infty + A_n(\varepsilon)(y_n - y_\infty) \to 0$ при $n \in N''$, $n \to \infty$, т. е. $\{A_n(\varepsilon)y_n\}$ вполне ограничена.

Убедимся, что $|\sigma(\mathfrak{A}^+)| \leqslant q+\varepsilon$. Для этого достаточно доказать, что при $|\lambda| > q+\varepsilon$ оператор $\lambda\mathfrak{J} - \mathfrak{A}^+$ (здесь $\mathfrak{J}$ — тождественный оператор в E^+) переводит E^+ на E^+ и в нуль переводит только нулевой элемент θ.

Пусть $\mathfrak{Y} \in E^+$ и $|\lambda| > q+\varepsilon$. Рассмотрим уравнение

$$\lambda\mathfrak{X} - \mathfrak{A}^+\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}.$$

Возьмем $Y = \{y_n\}$ — представитель класса $\mathfrak{Y}$. Тогда в силу построения оператора $\mathfrak{A}^+$ существует последовательность $X = \{x_n\}$ такая, что

$$\lambda x_n - A_n(\varepsilon)x_n = y_n.$$

Так как операторы $[\lambda I - A_n(\varepsilon)]^{-1}$ сильно сходятся к оператору $[\lambda I - A_\infty(\varepsilon)]^{-1}$, то в силу принципа равномерной ограниченности $\|[\lambda I - A_n(\varepsilon)]^{-1}\|$, а, следовательно, и $\|x_n\|$ ограничены в совокупности, т. е. $X \in BE$. Рассмотрим класс $\mathfrak{X} \in E^+$, определяемый элементом X, тогда

$$\lambda\mathfrak{X} - \mathfrak{A}^+\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}.$$

Пусть теперь

$$\lambda\mathfrak{X} - \mathfrak{A}^+\mathfrak{X} = \vartheta, \tag{5}$$

$X = \{x_n\}$ — представитель класса $\mathfrak{X}$. Тогда в силу равенства (5) последовательность $\{y_n\}$, где $y_n = \lambda x_n - A_n(\varepsilon)x_n$, вполне ограничена, но тогда и последовательность $\{x_n\} \subset x_n = [\lambda I - A_n(\varepsilon)]^{-1}y_n$ вполне ограничена, т. е. $\mathfrak{X} = \vartheta$.

Итак, мы показали, что если $|\lambda| > q + \varepsilon$, то ограниченный оператор $\lambda\mathfrak{I} - \mathfrak{A}^+$ взаимнооднозначно отображает E^+ на E^+. Поэтому этот оператор ограниченно обратим, следовательно, $|\sigma(\mathfrak{A}^+)| \leqslant q + \varepsilon$ и поскольку $\varepsilon < \delta$, то в E^+ существует (см., например, [6]) норма $\|\cdot\|_+$ такая, что $\|\mathfrak{A}^+\|_+ \leqslant q + \delta$.

Рассмотрим теперь в E нормальную меру некомпактности Φ, задаваемую формулой

$$\Phi(\{x_n\}) = \|\mathfrak{X}\|_+,$$

где $\mathfrak{X}$ — элемент пространства E^+, определяемый последовательностью $X = \{x_n\}$.

Оценим $\Phi(\{A_n x_n\})$. Заметим, что последовательность $\{A_n P_\infty(\varepsilon)x_n\}$, а, следовательно, в силу сходимости по норме операторов $P_n(\varepsilon)$ к $P_\infty(\varepsilon)$ при $n \to \infty$ и последовательность $\{A_n P_n(\varepsilon)x_n\}$ вполне ограничена. Поэтому

$$\Phi(\{A_n x_n\}) = \Phi(\{A_n(\varepsilon)x_n\}) = \|\mathfrak{Y}\|_+, \tag{6}$$

где $\mathfrak{Y}$ — элемент E^+, определяемый последовательностью $Y = \{A_n(\varepsilon)x_n\}$. Но по определению оператора $\mathfrak{A}^+$ имеем $\mathfrak{Y} = \mathfrak{A}^+\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — элемент E^+, определяемый последовательностью $X = \{x_n\}$. Отсюда

$$\|\mathfrak{Y}\|_+ \leqslant \|\mathfrak{A}^+\|_+ \|\mathfrak{X}\|_+ \leqslant (q+\delta)\|\mathfrak{X}\|_+ = (q+\delta)\Phi(\{x_n\}). \tag{7}$$

Соединяя (6) и (7), получим требуемое.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Покажем сначала, что проекторы $P_n(\varepsilon)$ сходятся по норме к $P_\infty(\varepsilon)$, когда $n \to \infty$. Известно (см., например, [5], стр. 544), что для этого достаточно доказать следующую теорему. Зафиксируем произвольное $\delta < \varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{A_n\}$ удовлетворяет требованиям* (1), (2) *и для любой подпоследовательности $\{A_{n(k)}\}$ последовательности $\{A_n\}$ существует нормальная мера некомпактности Φ, относительно которой последовательность $\{A_{n(k)}\}$ уплотняет по совокупности переменных с константой $q + \delta$. Тогда*

(а) *если оператор A_∞ не имеет собственных значений в некотором замкнутом множестве $Z \subset \mathbf{C} \setminus K(0,\ q+\delta)$, то при достаточно большом n выполнено равенство $\sigma(A_n) \cap Z = \varnothing$;*

(б) *если оператор* A_∞ *имеет собственное значение* $\lambda_\infty \in \mathbf{C} \setminus K(0, q+\delta)$, *то для любого* $\mu > 0$ *существует* n_0 *такое, что при* $n \geqslant n_0$ *оператор* A_n *имеет хотя бы одно собственное значение* λ_n, *для которого выполнено неравенство* $|\lambda_n - \lambda_\infty| < \mu$;

(в) *если выполнены условия пункта* (б), *то для любого замкнутого круга* K (λ_∞, r) *такого, что*

$$K(\lambda_\infty, r) \cap K(0, q+\delta) = \varnothing, \qquad K(\lambda_\infty, r) \cap \mathfrak{S}(A_\infty) = \{\lambda_\infty\},$$

при достаточно большом n *для операторов* A_n *определены проекторы Рисса* P_n *по границе круга* $K(\lambda_\infty, r)$, *причем* P_n *сильно сходятся к* P_∞ *и выполнено равенство* $\dim P_n = \dim P_\infty$.

Прежде чем переходить к доказательству утверждения (а), мы докажем одну лемму.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и ограниченная последовательность векторов* $\{x_p\}$ *удовлетворяет равенству*

$$\lambda_p x_p = A_{n(p)} x_p + y_p, \tag{8}$$

где $y_p \to y_0$, *числа* λ_p *принадлежат ограниченному замкнутому множеству* $Z_1 \subset \mathbf{C} \setminus K(0, q+\delta)$, *а* $\{A_{n(p)}\}$ — *некоторая подпоследовательность последовательности* $\{A_n\}$. *Тогда последовательность* $\{x_p\}$ *вполне ограничена и существуют* $\lambda' \in Z_1$ *и вектор* x_0, *удовлетворяющие соотношению*

$$\lambda' x_0 = A_\infty x_0 + y_0, \tag{9}$$

причем λ' — *предельная точка последовательности* $\{\lambda_n\}$, *а* x_0 — *предельная точка последовательности* $\{x_p\}$.

Доказательство. Покажем, что из любой подпоследовательности $X = \{x_{p(k)}\}$ последовательности $\{x_p\}$ можно выбрать сходящуюся. Положим $r = \inf\{|\lambda| : \lambda \in Z_1\}$. Тогда $r > q + \delta$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{\lambda_{p(k)}\}$ сходится к некоторому $\lambda' \in Z_1$. Возьмем меру некомпактности Φ, относительно которой последовательность $\{A_{n(p(k))}\}$ уплотняет по совокупности переменных с константой $q + \delta$, и оценим $\Phi(X)$. Для этого выпишем цепочку неравенств:

$$\Phi(X) \leqslant \frac{|\lambda'|}{r} \Phi(X) = \frac{1}{r} \Phi(\{\lambda_{p(k)} x_{p(k)} : k = 1, 2, \ldots\}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{r} \Phi(\{A_{n(p(k))} x_{p(k)} + y_{p(k)} : k = 1, 2, \ldots\}) =$$
$$= \frac{1}{r} \Phi(\{A_{n(p(k))} x_{p(k)}\}) \leqslant \frac{q+\delta}{r} \Phi(X).$$

Отсюда вытекает, что $\Phi(X) = 0$, т. е. последовательность X вполне ограничена, поэтому из X можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, мы сохраним за ней обозначение $\{x_{p(k)}\}$. Тогда из (8) имеем

$$\lambda_{p(k)} x_{p(k)} = A_{n(p(k))} x_{p(k)} + y_{p(k)}. \tag{10}$$

Пусть $x_{p(k)} \to x_0$. Переходя в (10) к пределу при $k \to \infty$, получим (9).

Доказательство (а). В силу требования (2) каждый из операторов A_n в множестве Z имеет лишь конечное число точек спектра и эти точки являются собственными значениями конечной кратности. Допустим, что утверждение (а) неверно, тогда найдутся λ_p, $n(p)$ и x_p, $p = 1, 2, \ldots$, такие, что $\lambda_p \in Z$, $n(p) \to \infty$, $\|x_p\| = 1$ и $\lambda_p x_p = A_{n(p)} x_p$. Из принципа равномерной ограниченности вытекает, что величины $\|A_{n(p)}\|$ ограничены в совокупности и поэтому последовательность $\{\lambda_p\}$ ограничена. Но тогда из леммы 1 следует, что оператор A_∞ имеет в Z собственное значение, что противоречит условию пункта (а).

Перед доказательством пункта (б) мы докажем еще две леммы.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2 пункта* (а) *и множество Z ограничено, тогда при достаточно большом n и $\lambda \in Z$ операторы $(\lambda I - A_n)^{-1}$ определены и $\|(\lambda I - A_n)^{-1}\|$ ограничены в совокупности, причем выполнено следующее соотношение:*

$$(\lambda I - A_n)^{-1} y \to (\lambda I - A_\infty)^{-1} y \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

$y \in E$, равномерно относительно $\lambda \in Z$.

Доказательство. Первая часть утвреждения леммы вытекает из пункта (а) теоремы 2. Докажем вторую часть. Допустим противное, тогда существуют λ_p, x_p, y_p, $n(p)$, $p = 1, 2, \ldots$, $\lambda_p \in Z$, $\|x_p\| = 1$, $n(p) \to \infty$,

$$y_p = (\lambda_p I - A_{n(p)})^{-1} x_p \tag{11}$$

и $\|y_p\| \to \infty$ при $p \to \infty$. Положим $z_p = \|y_p\|^{-1} y_p$. Тогда из равенства (11) получим

$$\lambda_p z_p = A_{n(p)} z_p + \|y_p\|^{-1} x_p.$$

Но из леммы 1 вытекает, что существуют $\lambda' \in Z$ и z_0, $\|z_0\| = 1$, такие, что $\lambda' z_0 = A_\infty z_0$, а это противоречит условию пункта (а).

Покажем теперь, что для любых $y \in E$ с $\|y\| = 1$ и $\lambda \in Z$ выполнено следующее соотношение

$$(\lambda I - A_n)^{-1} y \to (\lambda I - A_\infty)^{-1} y$$

при $n \to \infty$ равномерно относительно λ. Пусть последнее неверно, тогда существуют $\mu_0 > 0$, $n(p)$ и $\lambda_p \in Z$ такие, что

$$\|(\lambda_p I - A_{n(p)})^{-1} y - (\lambda_p I - A_\infty)^{-1} y\| \geqslant \mu_0, \; p = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

Поскольку множество Z компактно, не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $\{\lambda_p\}$ сходится к некоторому $\lambda' \in Z$, тогда из неравенства (12) вытекает существование N такого, что

$$\|(\lambda_p I - A_{n(p)})^{-1} y - (\lambda' I - A_\infty)^{-1} y\| \geqslant \mu_0/2 \tag{13}$$

при всех $p \geqslant N$. Положим

$$x_p = (\lambda_p I - A_{n(p)})^{-1} y. \tag{14}$$

Из леммы 2 вытекает, что $\|x_p\|$ ограничены равномерно. Равенство (14) дает

$$\lambda_p x_p = A_{n(p)} x_p + y.$$

В силу леммы 1 существует подпоследовательность $\{x_{p(k)}\}$ последовательности $\{x_p\}$, сходящаяся к некоторому элементу x_0, удовлетворяющему равенству

$$\lambda' x_0 = A_\infty x_0 + y,$$

откуда $x_0 = (\lambda' I - A_\infty)^{-1} y$, т. е. $(\lambda_{p(k)} I - A_{n(p(k))})^{-1} y \to$ $\to (\lambda' I - A_\infty)^{-1} y$, что противоречит неравенству (13), выполненному при всех $p \geqslant N$.

Лемма 3. *Пусть простой замкнутый спрямляемый контур Γ содержится в $\varrho(A_\infty) \setminus K(0, q + \delta)$, тогда при достаточной большом n определены проекторы Рисса P_n оператора A_n по контуру Γ и $P_n x \to P_\infty x$ при $n \to \infty$ для любого $x \in E$.*

Доказательство. Первая часть утверждения вытекает из первой части утверждения леммы 2, из второй части следует:

$$\int_\Gamma (\lambda I - A_n)^{-1} x \, d \quad \to \int_\Gamma (\lambda I - A_\infty)^{-1} x \, d\lambda,$$

поэтому $P_n x \to P_\infty x$ для всех $x \in E$

Доказательство (б). Допустим противное, т. е. существуют μ_0 и $n(k)$, $k = 1, 2 \ldots$, такие, что операторы $A_{n(k)}$ не имеют в круге $K(\lambda_\infty, \mu_0)$ собственных значений. Пусть Γ_1 — граница круга $K(\lambda_\infty, \mu_0)$. Рассмотрим проекторы P_k, построенные по операторам $A_{n(k)}$ и контуру Γ_1.

Так как внутри Γ_1 есть точка спектра оператора A_∞, то $P_\infty \neq 0$ и существует $x \neq \Theta$, принадлежащий $P_\infty E$, но тогда

$$P_\infty x = x, \quad \text{а} \quad P_k x = \Theta, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

так как внутри Γ_1 нет точек спектра операторов $A_{n(k)}$. Поэтому $P_k x \not\to P_\infty x$, что противоречит лемме 3, это и доказывает пункт (б).

Прежде чем переходить к доказательству пункта (в) мы докажем его справедливость в одном частном случае.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2 пункта* (в) *и* $\dim P_\infty = 1$. *Тогда при достаточно большом n выполнено равенство* $\dim P_n = 1$.

Доказательство. Пусть e_∞ — нормированный собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_∞ оператора A_∞. Из утверждения (б) вытекает, что операторы A_n имеют собственные значения λ_n такие, что

$$\lambda_n \to \lambda_\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{15}$$

Пусть e_n — нормированный собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_n, докажем, что, если выполнено соотношение (15), то для любого $\mu > 0$ существует N такое, что при всех $n \geqslant N$ выполнено $\|e_n - e_\infty\| < \mu$, или $\|e_n + e_\infty\| < \mu$. Действительно, допустим противное, тогда существуют μ_0 и $n(p)$, $p = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\|e_{n(p)} - e_\infty\| \geqslant \mu_0 \quad \text{и} \quad \|e_{n(p)} + e_\infty\| \geqslant \mu_0. \tag{16}$$

Заметим, что для $e_{n(p)}$ выполнено равенство

$$\lambda_{n(p)}e_{n(p)}=A_{n(p)}e_{n(p)},$$

поэтому по лемме 1 существует нормированный вектор g, являющийся предельной точкой $\{e_{n(p)}\}$, такой, что

$$\lambda_\infty g=A_\infty g.$$

Но из неравенств (16) вытекает $\|g-e_\infty\|$, $\|g+e_\infty\|\geqslant\mu_0$, т. е. $g\neq\pm e_\infty$, что противоречит условию $\dim P_\infty=1$.

Из пункта (а) следует, что для всех собственных значений λ_n, лежащих в $K(\lambda_\infty, r)$, выполнено соотношение (15).

Покажем теперь, что при достаточно большом n подпространство собственных векторов, отвечающих собственным значениям, лежащим в $K(\lambda_\infty, r)$, одномерно. Допустим противное. Тогда существуют $n(k)$, где $k=1, 2, \ldots$, такие, что каждый оператор $A_{n(k)}$ имеет линейно независимые собственные векторы $e^1{}_k$ и $e^2{}_k$, которым отвечают собственные значения $\lambda^1{}_k$, $\lambda^2{}_k\in K(\lambda_\infty, r)$. В силу доказанного выше $\lambda^i{}_k\to\lambda_\infty$, можно считать, что $e^i{}_k\to e_\infty$ при $k\to\infty$, где $i=1, 2$.

Пусть H — инвариантное подпространство оператора A_∞, отвечающее части спектра $\sigma(A_\infty)\setminus\{\lambda_\infty\}$. Тогда $E=H\oplus L\{e_\infty\}$, где $L\{e_\infty\}$ — одномерное натянутое на e_∞ подпространство, l — непрерывный функционал на E такой, что $l(H)=0$ и $l(e_\infty)=1$. Рассмотрим совокупность проекторов Q_k, где $k=1, 2, \ldots, \infty$, определяемых формулой

$$Q_kx=x-l(x)\,[l(e^1{}_k)]^{-1}e^1{}_k.$$

Поскольку $e^1{}_k\to e_\infty$, то существует N такое, что при $k\geqslant N$ проекторы Q_k определены корректно и действуют из E в H. Заметим, что $Q_kx\to Q_\infty x$.

Рассмотрим последовательность операторов $\{Q_kA_{n(k)}: k\geqslant N\}$, действующих из H в H, и покажем, что эта последовательность удовлетворяет условиям теоремы 2.

Проверим требование (1). Пусть $x\in H$, покажем, что $Q_kA_{n(k)}x\to Q_\infty A_\infty x$ при $k\to\infty$, для этого выпишем неравенство

$$\|Q_kA_{n(k)}x-Q_\infty A_\infty x\|\leqslant\|Q_k\|\,\|A_{n(k)}x-A_\infty x\|+\|(Q_k-Q_\infty)A_\infty x\|.$$

Первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $k\to\infty$, так как последовательность $\{A_n\}$ удовлетворяет требованию (1), а $\|Q_k\|$ ограничены в совокупности. Второе слагаемое стремится к нулю в силу сильной непрерывности проекторов Q_k, отмеченной выше.

Требование (2) выполнено, поскольку, если $\lambda\in\mathbf{C}\setminus K(0, q)$ то оператор $\lambda I-Q_kA_{n(k)}$ представляет собой возмущение фредгольмова (в силу требования (2) для операторов A_n) оператора $\lambda I-A_{n(k)}$ одномерным оператором $l(A_{n(k)}\,\cdot)\,[l(e^1{}_k)]^{-1}e^1{}_k$.

Нам осталось проверить, что для любой подпоследовательности $\{Q_{k(p)}A_{n(k(p))}\}$ существует нормальная мера некомпактности Φ, относительно которой последовательность $\{Q_{k(p)}A_{n(k(p))}\}$ уплотняет по совокупности переменных с константой $q+\delta$.

Действительно, возьмем в качестве Φ нормальную меру некомпактности, относительно которой последовательность $\{A_{n(k(p))}\}$ уплотняет по совокупности переменных с константой $q+\delta$, тогда, так как для любой ограниченной последовательности $\{x_p\}$ последовательность $Y=\{l(A_{n(k(p))}x_p)[l(e^1{}_{k(p)})]^{-1}e^1{}_{k(p)}$ вполне ограничена, мы имеем следующие неравенства

$$\Phi(\{Q_{k(p)}A_{n(k(p))}x_p\})=\Phi(\{A_{n(k(p))}x_p\}-Y)\leqslant$$
$$\leqslant\Phi(\{A_{n(k(p))}x_p\})\leqslant(q+\delta)\Phi(\{x_p\}).$$

Итак, последовательность $\{Q_kA_{n(k)}\}$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Так как $Q_\infty A_\infty=A_\infty|_H$, то $\sigma(Q_\infty A_\infty)\cap K(\lambda_\infty, r)=\varnothing$, и поэтому из пункта (а) следует, что существует N_1 такое, что при $k\geqslant N_1$ выполнено равенство

$$\mathfrak{S}(Q_kA_{n(k)})\cap K(\lambda_\infty, r)=\varnothing. \tag{17}$$

Пусть $e^2{}_k=\alpha(k)e^1{}_k+Q_ke^2{}_k$. Из $\lambda^2{}_ke^2{}_k=A_{n(k)}e^2{}_k$ имеем

$$\lambda^2{}_k(\alpha(k)e^1{}_k+Q_ke^2{}_k)=\lambda^1{}_k\alpha(k)e^1{}_k+A_{n(k)}Q_ke^2{}_k,$$

или

$$\alpha(k)(\lambda^1{}_k-\lambda^2{}_k)e^1{}_k=\lambda^2{}_kQ_ke^2{}_k-A_{n(k)}Q_ke^2{}_k. \tag{18}$$

Применяя к обеим частям равенства (18) проектор Q_k, получим

$$\Theta=\lambda^2{}_kQ_ke^2{}_k-Q_kA_{n(k)}Q_ke^2{}_k.$$

Равенство (17) дает $Q_ke^2{}_k=\Theta$ при $k\geqslant N_1$, т. е. векторы $e^1{}_k$ и $e^2{}_k$ линейно зависимы, что противоречит предположению.

Из доказанного вытекает, что при достаточно большом n в круге $K(\lambda_\infty, r)$ лежит только одно собственное значение λ_n оператора A_n. Покажем теперь, что существует n_0 такое, что при $n\geqslant n_0$ собственное значение λ_n, лежащее в круге $K(\lambda_\infty, r)$, является простым. Допустим противное, т. е. существуют $n(k)\to\infty$ и векторы e_k и e'_k,

$$A_{n(k)}e_k=\lambda_ke_k, \tag{19}$$

$$A'_{n(k)}e'_k=\lambda_ke'_k+e_k, \tag{20}$$

причем векторы e_k и e'_k линейно независимы, $\|e_k\|=1$.

Рассмотрим проекторы Q'_k, задаваемые формулой

$$Q'_kx=x-l(x)[l(e_k)]^{-1}e_k.$$

Напомним, l — ограниченный линейный функционал, $l(e_\infty)=1$ и $l(H)=0$ (здесь e_∞ — нормированный собственный вектор оператора A_∞, отвечающий собственному значению λ_∞, а H — дополнительное инвариантное подпространство).

Как было показано выше, $\lambda_k\to\lambda_\infty$ и можно считать, что $e_k\to e_\infty$. Так же, как это было проделано для последовательности $\{Q_kA_{n(k)}\}$, можно показать, что последовательность $\{Q'_kA_{n(k)}\}$ операторов, действующих в H, удовлетворяет условиям теоремы 2 и поэтому в силу (а) при достаточно большом k точка λ_k не принадлежит спектру оператора $Q'_kA_{n(k)}$. Пусть

$$e'_k=\alpha(k)e_k+Q'_ke'_k.$$

Тогда из равенства (20) имеем

$$Q'_k A_{n(k)} e'_k = Q'_k (\lambda_k \alpha(k) e_k + \lambda_k Q'_k e'_k + e_k) = \lambda_k Q'_k e'_k,$$

а, с другой стороны, в силу (19)

$$Q'_k A_{n(k)} e'_k = Q'_k (\lambda_k \alpha(k) e_k + A_{n(k)} Q'_k e'_k) = Q'_k A_{n(k)} Q'_k e'_k.$$

Соединяя последние два равенства, получим

$$Q'_k A_{n(k)} Q'_k e'_k = \lambda_k Q'_k e'_k,$$

откуда $Q'_k e_k = \Theta$, т. е. присоединенный вектор e'_k линейно зависим с собственным вектором e_k, в чем противоречие, и лемма 3 полностью доказана.

Доказательство (в). Положим $L = P_\infty E$, $H = (I - P_\infty)E$. Нетрудно видеть, что можно возмутить оператор A_∞ конечномерным оператором B так, чтобы выполнялись условия: 1) $BH = \Theta$, 2) $BL \subset L$, 3) оператор $(A_\infty + B)|_L$ имеет $m = \dim L$ различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, лежащих внутри контура Γ', ограничивающего круг $K(\lambda_\infty, r)$.

Положим $P'_n = -(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma'} (\lambda I - A_n - B)^{-1} d\lambda$.

Можно выбрать B настолько малым по норме, что выполняется условие: 4) существует N такое, что для всех $n \geqslant N$ выполнено равенство $\dim P_n = \dim P'_n$. Действительно,

$$\| (\lambda I - A_n - B)^{-1} - (\lambda I - A_n)^{-1} \| \leqslant$$

$$\leqslant (\| (\lambda I - A_n)^{-1} \|)^2 (1 - \|B\| \, \| (\lambda I - A_n)^{-1} \|)^{-1} \|B\|,$$

в силу леммы 2 $\| (\lambda I - A_n)^{-1} \|$ ограничены в совокупности при $\lambda \in \Gamma'$, n больших некоторого N, поэтому P_n и P'_n близки по норме равномерно относительно n, и, следовательно, их размерности совпадают. Заметим, что $P'_\infty E = L$ и

$$P'_\infty = -(2\pi i)^{-1} \sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma(j)} (\lambda I - A_\infty - B)^{-1} d\lambda,$$

где $\Gamma_{(j)}$ — достаточно малые контуры, окружающие λ_j, (где $j - 1, 2, \ldots, m$). Выберем теперь N_1 так, чтобы

$$P'_n = -(2\pi i)^{-1} \sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma(j)} (\lambda I - A_n - B)^{-1} d\lambda,$$

и

$$\dim \Big(-(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(j)} (\lambda I - A_n - B)^{-1} d\lambda \Big) = 1$$

при $n \geqslant N_1$. Такой выбор возможен в силу утверждения (а) доказываемой теоремы и утверждения (в) для случая $m = 1$ (лемма 4). При таких n имеем $\dim P_n = \dim P'_n = m$.

Теорема 2 полностью доказана.

Для завершения доказательства достаточности в теореме 1 нам осталось показать, что для любого $x \in E$ выполнено

$$(\lambda I - A_n(\varepsilon))^{-1} x \to (\lambda I - A_\infty(\varepsilon))^{-1} x$$

при $n \to \infty$. Для доказательства последнего достаточно заметить, что так как в силу доказанного выше $P_n(\varepsilon)$ сходятся по норме к $P_\infty(\varepsilon)$, то последовательность операторов $A_n(\varepsilon) =$

$= A_n(I - P_n(\varepsilon))$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Воспользовавшись теперь леммой 2, получим требуемое.

Замечание. Теорема 1 остается справедливой и в случае вещественного пространства E.

Для доказательства необходимости нужно рассмотреть комплексификацию E_C пространства E и комплексификации $A^C{}_n$ операторов A_n (см., например, [4]) построить при помощи теоремы 3 нормальные меры некомпактности в E_C, а затем взять их сужения на $\mathrm{Re}\, E_C = E$. При доказательстве достаточности нужно также перейти к E_C и $A^C{}_n$, а в качестве соответствующих нормальных мер некомпактности Φ_C в E_C взять меры некомпактности, определяемые по мерам некомпактности Φ в E при помощи следующей формулы: $\Phi_c(X) = \max\{\Phi(\mathrm{Re}\, X),\ \Phi(\mathrm{Im}\, X)\}$.

Литература

1. Вайникко Г. М., Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. Тарту, 1970.
2. Вайникко Г. М., Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
3. Каменский М. И., К теории возмущений ограниченных операторов в банаховом пространстве. Сб. работ аспирантов, Воронеж. ун-т, 1974, № 2, 18—23.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
5. Като Т., Теория возмущений линейных операторов. Москва, 1972.
6. Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др., Приближенное решение операторных уравнений. Москва, 1969.
7. Садовский Б. Н., Предельно компактные и уплотняющие операторы. Успехи матем. наук, 1972, 21, вып. 1, 81—146.

Поступило
20 II 1976

MITTEKOMPAKTSUSE MÕÕDUD JA LINEAARSETE OPERAATORITE HÄIRITUSTEOORIA

M. Kamenski

Resümee

Normaalsete mittekompaktsuse mõõtude termineid kasutades formuleeritakse tarvilikud ja piisavad tingimused Rieszi projektorite koondumiseks normi järgi ning resolventide tugevaks koondumiseks teatud spetsiaalsete operaatorite jaoks, mis on konstrueeritud tugevalt koonduva operaatorite jada A_n järgi.

MEASURES OF NONCOMPACTNESS AND PERTURBATION THEORY OF LINEAR OPERATORS

M. Kamenski

Summary

Necessary and sufficient conditions of norm convergence of Riesz's projectors and strong convergence of resolvents of some operators constructed by operators A_n of a strong convergence sequence $\{A_n\}$ are formulated in terms of normal measures of noncompactness.

О ДИНАМИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК

К. Соонетс и И. Вайникко

Кафедра теоретической механики

Определение остаточных деформаций в конструкциях, подвергнутых динамическим нагрузкам представляет в последнее время серьезный интерес. В обзоре [3] обсуждаются работы, касающиеся динамического поведения круглых пластин и цилиндрических оболочек с помощью жестко-пластической модели тела. Методика исследования и полученные результаты при изучении динамического поведения неоднородной круглой пластины в статье [4] являются интересными.

В настоящей статье используется элементарная жесткопластическая теория в сочетании с методом модальных решений [1, 2] для нахождения остаточных прогибов круглой пластинки ступенчато-переменной толщины под действием динамической нагрузки прямоугольного типа. Соответствующая методика разработана З. Мрузем и Ю. Лепиком и использована ими для определения остаточных прогибов балки при импульсном нагружении и нагрузке прямоугольного типа. Описание методики и полученные результаты направлены в печать.

Авторы настоящей статьи благодарят проф. Ю. Лепика за постановку рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим свободно опертую круглую пластинку ступенчато-переменной толщины (рис. 1), на которую действует равномерная нормальная нагрузка средней интенсивности p прямоугольного типа. Нагрузка снимается в момент времени τ_1. Материал пластинки считается жестко-пластическим, подчиняющимся условию текучести Треска (рис. 3). Заданы объем пластинки ω и плотность материала ϱ. Требуется найти оптимальные распределения толщин h_1 и h_2, где $h_1 \geqslant h_2$, также радиус a внутренней части так, чтобы в момент τ_f прекращения движения пластинки остаточный прогиб W_f в центре оказался минимальным.

2. Основные соотношения. Ограничимся рассмотрением нагрузки средней интенсивности, при которой максимум изгибающего момента M_r достигается в центре пластинки. Выполненность этого условия проверяется в ходе вычислений с помощью неравенства $M_r''(0) \leqslant 0$. На основании элементарной жестко-пластической теории по принципу модальных решений осевое сечение пластинки (рис. 2) описывается уравнениями

$$W=\begin{cases}(R-a)\varphi+(a-r)\Theta, & 0\leqslant r\leqslant a,\\ (R-r)\varphi, & a\leqslant r\leqslant R,\end{cases} \tag{1}$$

где $\Theta=\Theta(\tau)$, $\varphi=\varphi(\tau)$, $\varphi\geqslant\Theta$. Скорости изменения кривизн выражаются в следующем виде:

$$\dot{\varkappa}_r=-\frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial r^2}=0, \quad \dot{\varkappa}_\Theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial \dot{W}}{\partial r}=\begin{cases}\dot{\Theta}/r, & 0\leqslant r\leqslant a,\\ \dot{\varphi}/r, & a\leqslant r\leqslant R.\end{cases} \tag{2}$$

В соответствии с принципом модальных решений ускорения $\Theta^{\cdot\cdot}=\mathrm{const}$ и $\varphi^{\cdot\cdot}=\mathrm{const}$.

Возможны три типа пластических механизмов.

1) тип. Пластический шарнир возникает только в центре пластинки (рис. 4a). В центре реализуется угловой режим A_1 на шестиугольнике Треска и

$$M_r(0)=M_\Theta(0)=M_{01}=\frac{\sigma_s h_1^2}{4}. \tag{3}$$

В сечениях $0\leqslant r<a$ реализуется режим A_1B_1 и в сечениях $a<r\leqslant R$ режим A_2B_2, то есть

$$M_r<M_{02}=\frac{1}{4}\sigma_s h_2^2. \tag{4}$$

2) тип. Центральная часть $0\leqslant r<a$ остается жесткой, при $r=a$ возникает шарнирная окружность (рис. 4 b) и реализуется режим A_2.

3) тип. Пластические шарниры возникают в центре B и в сечении A (рис. 4 c), которые находятся в угловых режимах A_1 и A_2. В сечениях $0<r<a$ и $a<r<R$ реализуются режимы A_1B_1 и A_2B_2 соответственно.

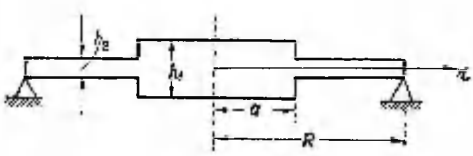


Рис. 1.

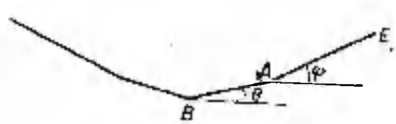


Рис. 2.

Интегрируем уравнения движения элемента пластинки

$$\begin{aligned}\frac{d(rQ)}{dr}&=-r(p-\varrho h\ddot{W}),\\ \frac{d(rM_r)}{dr}&=M_\Theta+rQ,\end{aligned} \tag{5}$$

учитывая соотношения (1).

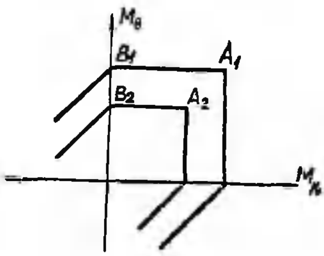


Рис. 3.

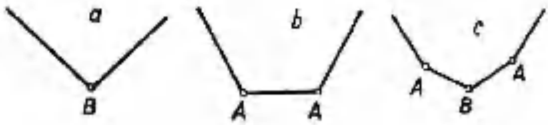


Рис. 4.

Пусть реализуется 3) тип пластических механизмов. Интегрируем уравнения (5) на отрезках $[0, a]$ и $[a, R]$ и учитываем граничное условие $M_r(R)=0$. Получим равенства

$$aM_r(a)=\frac{1}{4}\sigma_s h_1^2 a-\frac{1}{6}pa^3+\frac{\varrho h_1}{6}(R-a)a^3\ddot{\varphi}+\frac{\varrho h_1}{12}a^4\ddot{\Theta}, \tag{6}$$

$$-aM_r(a)=\frac{1}{4}\sigma_s h_2^2(R-a)-\frac{1}{6}p(R^3-a^3)+\frac{\varrho h_1 a^3}{6}(R-a)\ddot{\Theta}+$$
$$+\frac{\varrho}{12}[6h_1a^2(R-a)^2-h_2(3a^4-8Ra^3+6R^2a^2-R^4)]\ddot{\varphi}. \tag{7}$$

В дальнейшем введем следующие обозначения:

$$\alpha=\frac{a}{R},\quad \gamma=\frac{h_1}{h_2},\quad \Delta=1-\alpha^2(1-\gamma),\quad N=\frac{3\sigma_s\omega}{\pi\varrho R^5},\quad t=\frac{\tau}{\tau_1}, \tag{8}$$

$$S=\frac{\ddot{\Theta}}{\tau_1^2 N},\quad T=\frac{\ddot{\varphi}}{\tau_1^2 N},\quad P=\frac{2\pi R^6}{3\sigma_s\omega^2}p,\quad w=\frac{2W}{NR\tau_1^2}.$$

Из условия постоянства объема пластинки выразим толщины обеих частей пластинки в виде

$$h_2=\frac{\omega}{\pi R^2\Delta},\qquad h_1=\gamma h_2. \tag{9}$$

Условия (6) и (7) приобретают в новых обозначениях следующий вид:

$$l_0S+m_0T=n_0 \tag{10а}$$
$$l_1S+m_1T=n_1, \tag{10б}$$

$$l_0=\alpha^3\gamma\Delta,\qquad l_1=2\alpha^3\gamma\Delta(1-\alpha),$$
$$m_0=2\alpha^2\gamma\Delta(1-\alpha),\qquad m_1=\Delta(1-\alpha)^2[6\gamma\alpha^2+(1-\alpha)(1+3\alpha)],$$
$$n_0=P\alpha^2\Delta^2-\gamma^2+1,\qquad n_1=P\Delta^2(1-\alpha^3)-1.$$

3. Определение ускорений. Находим ускорения S и T в зависимости от типа пластических механизмов. При 1) типе $S=T$ и из уравнения, получаемого сложением (6) и (7), определим

$$S=T=\frac{P\Delta^2-\alpha(\gamma^2-1)-1}{\Delta\{\alpha^3\gamma(2-\alpha)+(1-\alpha)[2\alpha^2\gamma(3-2\alpha)+(1-\alpha)^2(1+3\alpha)]\}}. \tag{11}$$

Кроме того, должно быть выполнено неравенство (4), т. е. равенство (10а) заменится неравенством

$$(l_0+m_0)S-n_0<0. \tag{12}$$

При 2) типе $\ddot{\theta}=\text{const}$, $S=0$ и из равенства (10б) получим

$$T=\frac{n_1}{m_1}. \tag{13}$$

В случае 3) типа ускорения S и T удовлетворяют уравнениям (10) и из этой системы находим

$$S=\frac{m_1n_0-m_0n_1}{l_0m_1-l_1m_0};\qquad T=\frac{l_0n_1-l_1n_0}{l_0m_1-l_1m_0}. \tag{14}$$

4. Определение остаточного прогиба. При движении пластинки следует различать две фазы: в интервале времени $0\leqslant t\leqslant 1$ нагрузка $P\neq 0$ и при $1\leqslant t\leqslant t_f$ нагрузка снята. К концу первой фазы углы θ и φ, а также прогиб w в центре пластинки находим путем интегрирования соотношений

$$\ddot{\Theta}=N\tau_1^2S=\text{const},\qquad \ddot{\varphi}=N\tau_1^2T=\text{const}$$

в следующем виде

$$\begin{aligned}
&\dot{\Theta}(1)=N\tau_1^2S, &&\dot{\varphi}(1)=N\tau_1^2T,\\
&\Theta(1)=\frac{1}{2}N\tau_1^2S, &&\varphi(1)=\frac{1}{2}N\tau_1^2T,\\
&w(1)=\alpha S+(1-\alpha)T.
\end{aligned} \tag{15}$$

Во второй фазе происходит движение при $P=0$. Момент остановки t_f определяется из условий

$$\dot{\Theta}(t_f)=\dot{\varphi}(t_f)=0. \tag{16}$$

При движении пластинки могут реализоваться разные комбинации описанных выше типов пластических механизмов. В дальнейшем индексы 1, 2, 3 при ускорениях указывают номер типа пластического механизма. Ускорения, вычисленные при $P=0$, обозначим следующим образом:

$$U=S(P=0),\qquad V=T(P=0).$$

Во второй фазе движения скорости выражаются формулами

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta}&=\dot{\Theta}(1)+N\tau_1^2(t-1)U,\\
\dot{\varphi}&=\dot{\varphi}(1)+N\tau_1^2(t-1)V.
\end{aligned} \tag{17}$$

Интегрируя уравнения (17) с учетом начальных условий (15), получим $\theta(t_f)$, $\varphi(t_f)$ и затем находим остаточный прогиб в центре

$$w(t_f)=w_f=\frac{2}{NR\tau_1^2}\left[\alpha\Theta(t_f)+(1-\alpha)\varphi(t_f)\right]. \tag{18}$$

5. Анализ комбинаций пластических режимов. Исследуем, какие сочетания типов пластических режимов могут встречаться в протяжении всего движения. Комбинации типов укажем в виде суммы порядковых номеров перечисленных трех типов. В первой фазе движения должны быть ускорения неотрицательны и для того, чтобы пластинка сохранила выпуклую форму должно быть $T \geqslant S$.

Комбинация $1+1$. Это возможно, если выполняется неравенство (12) в первой и второй фазах движения. Момент прекращения движения находим из уравнений (16) и (17):

$$t_f = 1 - S_1/U_1. \tag{19}$$

Отсюда выяснится, что должно быть выполнено еще неравенство $U_1 < 0$. Интегрирование уравнений (17) дает

$$\theta(t_f) = \varphi(t_f) = \frac{1}{2} N S_1 \tau_1^2 (1 - S_1/U_1). \tag{20}$$

Комбинация $1+3+2$. Должно быть выполнено (12) для S_1. Вторая фаза после снятия нагрузки P распадается на два этапа. К концу первого этапа в момент $t = t_1$ перестанет работать шарнир B и на втором этапе движется центральная часть пластинки как жесткое тело. Момент t_1 определим из условия $\dot\vartheta(t_1) = 0$, что дает $t_1 = 1 - S_1/U_3$. Отсюда следует $U_3 < 0$. В интервале $1 < t \leqslant t_1$ должно быть $\dot\varphi > \dot\vartheta$, откуда вытекает требование $V_3 > U_3$. В момент $t = t_1$ имеем

$$\dot\varphi(t_1) = N\tau_1^2 S_1 (1 - V_3/U_3) \tag{21}$$

и для выполненности условия $\dot\varphi > \dot\vartheta$ должно быть $V_3 > 0$. На заключительном этапе движения $t_1 \leqslant t \leqslant t_f$ угол $\vartheta = \mathrm{const} = \vartheta(t_1)$ и $\ddot\varphi = N\tau_1^2 V_2$. Получим

$$\dot\varphi(t) = N\tau_1^2 [S_1(1 - V_3/U_3) + V_2(t - t_1)], \tag{22}$$

откуда с учетом (16)

$$t_f = t_1 - \frac{S_1}{V_2}\left(1 - \frac{V_3}{U_3}\right). \tag{23}$$

Учитывая требование $t_f > t_1$, должно быть $V_2 < 0$. Наконец,

$$\begin{gathered} \theta(t_f) = \theta(t_1) = \frac{1}{2} N\tau_1^2 S_1 \left(1 - \frac{S_1}{U_3}\right), \\ \varphi(t_f) = \frac{1}{2} N\tau_1^2 S_1 \left[1 - \frac{S_1}{U_3}\left(2 - \frac{V_3}{U_3}\right) - \frac{S_1}{V_2}\left(1 - \frac{V_3}{U_3}\right)^2\right]. \end{gathered} \tag{24}$$

Комбинация $3+1+2$. В первой фазе $T_2 > S_3$. На первом этапе второй фазы $(1 \leqslant t \leqslant t_1)$ должно быть $U_1 = V_1$ и также $\dot\vartheta(t) = \dot\varphi(t)$. С другой стороны,

$$\dot\theta(t) = N\tau_1^2 [S_3 + V_1(t - 1)], \qquad \dot\varphi(t) = N\tau_1^2 [T_3 + V_1(t - 1)]$$

и теперь должно быть $S_3 = T_3$. Мы пришли к противоречию, и данная комбинация реализоваться не может.

Аналогично приводят к противоречию многие другие комбинации. Из рассмотрения исключаются все комбинации, оканчивающиеся 3) типом, так как требование об одновременной остановке двух шарниров приводит к противоречию.

Реализоваться могут еще следующие комбинации: $2+2$, $2+3+1$, $3+3+1$, $3+3+2$, таким образом, всего шесть комбинаций. Приводим сводку результатов для возможных комбинаций режимов.

Комбинация $2+2$. Должны быть выполнены условия $T_2>0$, $V_2<0$. Получим

$$t_f=1-T_2/V_2,\qquad \varphi(t_f)=\frac{1}{2}N\tau_1^2T_2(1-T_2/V_2).$$

Комбинация $2+3+1$ реализуется в случае выполненности следующих условий: $U_3>V_3$, $U_3>0$, неравенство (12) для U_1. Моменты прекращения 3) типа режимов и движения следующие:

$$t_1=\frac{T_2}{U_3-V_3}+1,\qquad t_f=1+(t_1-1)\left(1-\frac{U_3}{U_1}\right). \tag{26}$$

Углы поворота в момент остановки

$$\theta(t_f)=\frac{1}{2}N\tau_1^2\frac{U_3T_2^2}{(U_3-V_3)^2}\left(1-\frac{U_3}{U_1}\right), \tag{27}$$

$$\varphi(t_f)=\frac{1}{2}N\tau_1^2\left[1+\frac{T_2}{U_3-V_3}\left(2+\frac{U_1V_3-U_3^2}{U_1(U_3-V_3)}\right)\right]. \tag{27}$$

Комбинация $3+3+1$. Должны быть выполнены условия $T_3>S_3$, $U_3>V_3$, неравенство (12) для U_1. Характерные моменты времени равняются

$$t_1=1-\frac{T_3-S_3}{V_3-U_3},\qquad t_f=1+(t_1-1)\left(1-\frac{U_3}{U_1}\right)-\frac{S_3}{U_1}. \tag{28}$$

Углы поворота в момент t_f определяются формулами

$$\theta(t_f)=\frac{1}{2}N\tau_1^2\left\{S_3-\frac{1}{V_3-U_3}\left[(T_3-S_3)\left(2S_3-\frac{U_3(T_3-S_3)}{V_3-U_3}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(S_3V_3-U_3T_3)^2}{U_1(V_3-U_3)}\right]\right\},$$

(29)

$$\varphi(t_f)=\frac{1}{2}N\tau_1^2\left\{T_3-\frac{1}{V_3-U_3}\left[(T_3-S_3)\left(2T_3-\frac{V_3(T_3-S_3)}{V_3-U_3}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(S_3V_3-U_3T_3)^2}{U_1(V_3-U_3)}\right]\right\}.$$

Комбинация $3+3+2$. Необходима выполненность условий $T_3 > S_3$, $V_3 > U_3$, $U_3 < 0$. Характерные моменты времени равняются

$$t_1 = 1 - \frac{S_3}{U_3}, \qquad t_f = t_1 + \frac{S_3V_3 - U_3T_3}{U_3V_2}. \tag{30}$$

Углы поворота равняются

$$\Theta(t_f) = \Theta(t_1) = \frac{1}{2} N\tau_1^2 S_3\left(1 - \frac{S_3}{U_3}\right),$$

$$\varphi(t_f) = \frac{1}{2} N\tau_1^2\left[T_3\left(1 - \frac{2S_3}{U_3}\right) + V_3\left(\frac{S_3}{U_3}\right) - \frac{(U_3T_3 - S_3V_3)^2}{U_3^2V_2}\right]. \tag{31}$$

При заданной нагрузке P можно найти α и γ так, чтобы остаточный прогиб был минимальным. Интерес представляют, конечно, только такие комбинации параметров α и γ, при которых нагрузка P превышает статическую предельную нагрузку для данной конструкции.

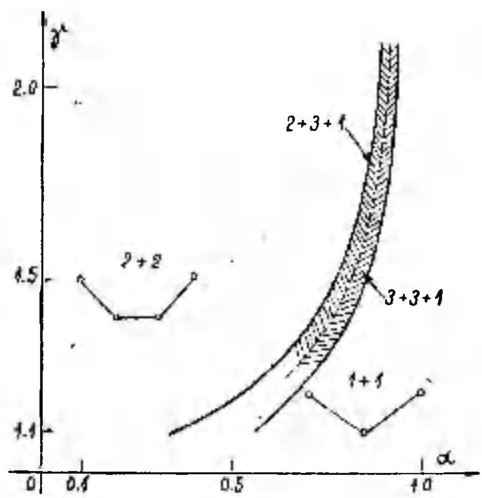


Рис. 5.

6. Анализ результатов вычислений. Было исследовано влияние параметров α и γ на поведение пластинки. В случае пластинки постоянной толщины для средних нагрузок реализуется лишь комбинация работы пластических режимов $1+1$. В случае пластинки ступенчато-переменной толщины превалирует комбинация $2+2$ и лишь в узкой зоне параметров реализуются комбинации $2+3+1$, $3+3+1$ (см. рис. 5).

Оптимальные проекты для нескольких параметров нагрузки приведены в таблице 1 (первые строчки при P).

Таблица 1

P	α	γ	w_f	Режим	w_f/w_c
2,1	0.900	1,9550	0,9542	$2+3+1$	0,41
	0,887	1,9560	0,9666	$2+2$	
2,5	0,890	1,9754	1,6012	$2+2+1$	0,43
	0,890	1,9755	1,6015	$2+2$	
3,0	0,890	1,9761	2,5972	$2+3+1$	0,43
	0,890	1,9763	2,5975	$2+2$	

Оказывается, что минимальной прогиб достигается на границе перехода от типа работы режимов $2+2$ к $2+3+1$. Из таблицы 1 видно, что разница в результатах мала. Это открывает возможность аналитического определения приближенно оптимального проекта. Также выяснилось, что оптимальный проект по α и γ мало чувствителен к изменению нагрузки. С ростом нагрузки наступит положение, когда максимум изгибающего момента достигается не в центре пластинки и настоящий метод анализа следует приспособить к этому.

При нагрузках, превышающих статическую предельную нагрузку $P_0 = 1$, для пластинки постоянной толщины возникают остаточные деформации. Для пластинки ступенчато-переменной толщины можно найти проекты, при которых прогибов не возникает. Например, при $P = 1,5$ в окрестности $1 > \alpha \geqslant 0,93$, $\gamma \geqslant 1,92$, пластинка останется плоской. Такие области (хотя более ограниченные) были обнаружены и при $P = 1,8$.

При постоянной высоте пластинки $\gamma = 1$ реализуется режим $1+1$ и $\alpha = 0$. Из формул (11) и (18) вытекает, что $w_c = P(P-1)$. В таблице 1 приведены отношения $w_f : w_c$. Видно, что в смысле остаточных прогибов пластинка ступенчато-переменной толщины много предпочтительнее.

Была оценена продолжительность работы отдельных типов пластических механизмов. Вспомним, что снятие нагрузки происходит в момент $t = 1$. В таблице 2 приведены моменты окончания работы отдельных типов пластических механизмов t_1 и моменты остановки пластинки t_f при некоторых значениях параметров пластинки.

Таблица 2

P	α	γ	Режим	t_1	t_f
2,0	1,2	0,62	$2+3+1$	1,386	1,837
		0,64	$3+3+1$	1,292	1,827
	1,6	0,82	$2+3+1$	1,637	1,803
		0,86	$3+3+1$	1,055	1,780
2,1	1,5	0,70	$2+2$	—	2,138
		0,80	$2+3+1$	1,546	1,861
		0,90	$1+$	—	1,951
2,5	2,0	0,90	$2+3+1$	2,052	2,282
3,0				2,435	2,749
5,0				3,968	4,016

Дольше всего длится фаза инерциального движения в случае режима $2+2$. В случае режимов $2+3+1$ и $3+3+1$ первый этап во времени занимает заметную долю из полного времени фазы инерциального движения.

Изложенный метод позволяет сравнительно легко определить оптимальный или к оптимальному достаточно близкий проект в смысле минимума наибольшего остаточного прогиба. Выяснилось, что использование конструкций ступенчато-переменной толщины эффективно.

Литература

1. Martin J. B., Symonds P. S., Mode approximations for impulsively-loaded rigid-plastic structures. J. Eng. Mech. Div., Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1966, **95,** № EM5, 43—64.
2. Martin J. B., Extremum principles for a class of dynamic rigid-plastic problems. Int. J. Solids and Struct., 1972, **8,** № 10, 1185—1204.
3. Мазалов В. Н., Немировский Ю. В., Динамика тонкостенных пластических конструкций. Пробл. динам. упруго-пласт. сред. 1975, **5,** 155—247.
4. Мазалов В. Н., Немировский Ю. В., Динамический изгиб круглых кусочно-неоднородных пластин. Сб. «Теория оболочек и пластин», М., 1973, 160—167.

Поступило
1 III 1976

JÄIK-PLASTSE ÜMMARGUSE PLAADI DÜNAAMILISEST PAINDEST

K. Soonets ja I. Vainikko

Resümee

Töös uuritakse impulsiivselt koormatud ümmarguse astmelise paksusega plaadi jääkläbipainde minimiseerimist sõltuvalt plaadi paksuse muutumisest. Ülesande lahendamisel kasutatakse jäik-plastset mudelit Tresca voolavustingimusega. Aluseks on võetud modaalsete lahendite meetod. Uuritakse võimalike plastsete režiimide kombinatsioone ja saadakse neile vastavalt plaadi deformeerumise aeg ning jääkläbipaine.

DYNAMISCHE ACHSENSYMMETRISCHE BIEGUNG DER STARR-PLASTISCHEN PLATTE

K. Soonets und I. Vainikko

Zusammenfassung

Es wird ein Optimierungsproblem der achsensymmetrischen Biegung unter impulsiver Belastung betrachtet. Das Material wird starr-plastisch mit Trescascher Fließbedigung genommen. Für die Bestimmung der Biegungsfläche wird die Separation der Variablen verwendet.

Die Stärke der abgesetzten Platte wird so optimiert, daß die größtebleibende Durchbiegung minimal wäre. Die Lösungsmethode widr durch ein Beispiel illustriert.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ НЕУПРУГИХ БАЛОК С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОПОРАМИ В СЛУЧАЕ ДИНАМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

Ю. Лепик

Кафедра теоретической механики

Для многих практических проблем важно уменьшить податливость конструкции. Одна возможность решения этой задачи— поставить к конструкции дополнительные опоры, положение которых выбирается так, чтобы жесткость конструкции была максимальной. Такая задача была поставлена и решена З. Мрузом и Г. Розвани [3], которые вывели также условия оптимальности. Случай жёстко-пластических балок рассматривался В. Прагером и Г. Розвани в [5]. Эти работы ограничиваются лишь статическими задачами. Представляет интерес обобщить полученные результаты для динамических нагрузок; такая попытка сделана в данной работе. При этом исходят из методики, выработанной в работе З. Мруза и Ю. Лепика [1]: применяется метод модальных решений, начальная кинетическая энергия и средний остаточный прогиб считаются заданными; оптимальные положения опор определяются из требований минимальности объема балки. Материал балки считается нелинейно-упругим, жестко-пластическим или нелинейно-вязким. Опоры могут быть жёсткие, упругие, нелинейно-упругие или нелинейно-вязкие, Доказывается, что условия оптимальности, выведенные в [3, 5], остаются применимыми и в случае динамического нагружения. Дается численный пример.

1. Постановка задачи. Рассмотрим балку из нелинейно-упругого материала или вязкого материала. Ось x направим по длине балки, условия опирания и форму поперечного сечения будем считать заданными. Площадь поперечного сечения S может быть и переменной, т. е. $S = S(x)$. К балке приложена импульсная нагрузка, начальная кинетическая энергия K_0 считается заданной.

Уравнения движения элемента балки имеют вид

$$M^{*\prime}=Q^*, \qquad Q^{*\prime}=\varrho Bh\ddot{w}, \qquad k=-w'', \tag{1.1}$$

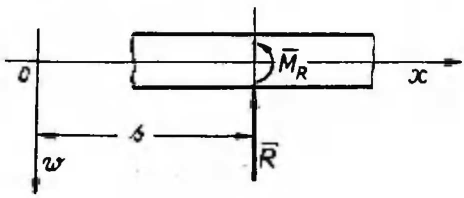
где w — прогиб, k — кривизна, M^* — изгибающий момент,

Q^* — перерезывающая сила, ϱ — плотность, B — ширина и h — высота балки. Штрихами обозначены производные по координате x, точками — производные по t.

В дальнейшем ограничимся лишь случаем, где краевые условия имеют вид:

$$wQ^*=0, \quad w'M^*=0 \text{ при } x=0, \; x=l. \tag{1.2}$$

Чтобы уменьшить податливость балки, поставим в некоторое сечение $x=s$ дополнительную опору. Силу реакции и



Фиг. 1.

опорный момент обозначим через R^* и M^*_R (фиг. 1). Рассмотрим нелинейно-вязкую балку с определяющим законом

$$\sigma=c\,|\dot{\varepsilon}|^n \operatorname{sgn}\dot{\varepsilon}=c\,|z\dot{k}|^n \operatorname{sgn}(z\dot{k}); \tag{1.3}$$

здесь σ — нормальное напряжение, c и $n<1$ — неотрицательные постоянные.

Для балки прямоугольного поперечного сечения изгибающий момент вычисляется по формуле

$$M^*=2cB\,|\dot{k}|^n \operatorname{sgn}\dot{k}\int\limits_0^{h/2} z^{n+1}\,dz=\frac{cB}{(n+2)\,2^{n+1}}\,h^{n+2}\,|\dot{k}|^n \operatorname{sgn}\dot{k}. \tag{1.4}$$

Представим скорость прогиба в модальной форме

$$\dot{w}(x,t)=v(x)\,\Phi(t). \tag{1.5}$$

Разделяя переменные, на основани (1.1) и (1.4) находим

$$M^*(x,t)=M(x)\,\Phi^n(t), \qquad Q^*(x,t)=Q(x)\,\Phi^n(t), \tag{1.6}$$

причем

$$M(x)=-\frac{cB}{(n+2)\,2^{n+1}}\,h^{n+2}\,|-v''|^n \operatorname{sgn} v''.$$

Разрешая это уравнение относительно v'', получим

$$v''=-A\,|M|^{1/n}\operatorname{sgn} M, \tag{1.7}$$

где

$$A=\frac{2}{h}\left[\frac{2(n+2)}{cBh^2}\right]^{1/n}. \tag{1.8}$$

Система дифференциальных уравнений (1.1) распадается на уравнения:

$$M'=Q, \quad Q'=-\varrho\lambda^2 Bhv, \tag{1.9}$$

$$\dot{\Phi}+\lambda^2\Phi^n=0, \tag{1.10}$$

где символом λ^2 обозначено собственное значение.

Уравнение (1.10) легко интегрируется (см. [1]). Если взять $\Phi(0)=1$, что начальная кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$K_0=\frac{1}{2}\int_0^l \varrho hB\dot{w}^2(x,0)\,dx=\frac{\varrho}{2}\int_0^l hBv^2(x)\,dx. \tag{1.11}$$

В работе [1] показано, что средний остаточный прогиб равняется

$$\bar{w}=\frac{\sqrt{2K_0}}{2-n}\frac{1}{\lambda^2}. \tag{1.12}$$

Таким образом, видим, что если считать величину $\bar{w}$ заданной, то задано и собственное значение λ^2.

Будем считать, что реакции опоры выражаются формулами

$$R^*=\varkappa_1\dot{w}^n, \quad M^*_R=\varkappa_2(\dot{w}')^n. \tag{1.13}$$

Постоянные $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ обозначают коэффициенты жесткости опоры. Для жестких опор имеем соответственно $\dot{w}(s)=0$ и $\varkappa_1\to\infty$ или $\dot{w}'(s)=0$ и $\varkappa_2\to\infty$.

Опять разделим переменные

$$R^*(s,t)=R(s)\Phi^n(t), \quad M^*_R(s,t)=M_R(s)\Phi^n(t), \tag{1.14}$$

причем

$$R(s)=\varkappa_1 v^n(s), \quad M_R(s)=\varkappa_2[v'(s)]^n.$$

Кроме того, имеем соотношения

$$Q(s+)-Q(s-)=R(s), \quad M(s+)-M(s-)=-M_R(s). \tag{1.15}$$

До сих пор мы рассматривали нелинейно-вязкий материал. На основании результатов работы [1] можно сказать, что формулы (1.7), (1.9), (1.11), (1.14), (1.15) применимы также для нелинейно-упругого материала, где $\sigma=c\,\varepsilon^n$.

Теперь мы можем поставить следующую задачу оптимизации. Выбрать такое положение дополнительной опоры $x=s$, при котором объем балки минимален для заданного среднего остаточного прогиба и заданной начальной кинетической энергии.

Критерием качества в данном случае является

$$V=\int_0^l Bh\,dx. \tag{1.16}$$

Величины B и h или постоянны или заданные функции от координаты x. При решении задачи оптимизации (1.16) придется удовлетворить дифференциальным уравнениям (1.7) и (1.9) и дополнительному условию (1.11)

2. Условия оптимальности. Поставленную в п. 1 задачу решаем методами теории оптимального управления. За фазовые переменные выбираем $y_1 = v$, $y_2 = v'$, $y_3 = M$, $y_4 = Q$. Параметрами, подлежащими оптимизации, выбираем $h(0)$ и s. С целью удовлетворить условию (1.11), введем еще дополнительную фазовую переменную y_5.

Теперь можем сформулировать следующую математическую задачу:

$$\int_0^l Bh\,\mathrm{d}x = \min \tag{2.1}$$

при

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -A\,|y_3|^{1/n}\,\mathrm{sgn}\,y_3,$$
$$y_3' = y_4, \quad y'_4 = -\varrho\lambda^2 Bhy_1, \quad y_5' = Bhy_1^2. \tag{2.2}$$

Краевые условия для $y_1, \ldots, y_4$ напишем в форме

$$a_j y_j(0) + b_j y_j(l) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{2.3}$$

Здесь a_j, b_j — некоторые постоянные; давая этим коэффициентам соответственно значения единица или нуль, приходим к краевым условиям (1.2).

На основании (1.11), имеем для переменной y_5 краевые условия $y_5(0) = 0$, $y_5(l) = 2K_0/\varrho$.

Из формул (1.13)—(1.15) вытекают еще условия разрыва

$$y_3(s+) - y_3(s-) = -\varkappa_2 y_2^n(s),$$
$$y_4(s+) - y_4(s-) = \varkappa_1 y_1^n(s). \tag{2.4}$$

Для решения задачи (2.1)—(2.5) построим функционал

$$\begin{aligned} L = \int_0^l \Big(\sum_{j=1}^5 \psi_j y_j' - H\Big)\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^4 \nu_j [a_j y_j(0) + b_j y_j(l)] + \\ + \nu_5 y_5(0) + \nu_6 [y_5(l) - 2K_0/\varrho] + \\ + \nu_7 [y_3(s+) - y_3(s-) + \varkappa_2 y_2^n(s)] + \\ + \nu_8 [y_4(s+) - y_4(s-) + \varkappa_1 y_1^n(s)]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В этой формуле гамильтониан

$$H = \psi_0 Bh + \psi_1 y_2 - \psi_2 A\,|y_3|^{1/n}\,\mathrm{sgn}\,y_3 +$$
$$+ \psi_3 y_4 - \psi_4 \varrho\lambda^2 Bhy_1 + \psi_5 Bhy_1^2. \tag{2.6}$$

Коэффициенты $\psi_0, \ldots, \psi_5$ и $\nu_1, \ldots, \nu_8$ суть множители Лагранжа. В случае оптимального решения полная вариация от L должна равняться нулю, т. е. $\Delta L = 0$. Методика вычисления вариации ΔL более подробно описана в соответствующих монографиях (см., например, [2]), поэтому здесь опустим промежуточные вычисления и выпишем лишь окончательные результаты. Из условия $\Delta L = 0$ вытекают следующие группы уравнений:

1) Сопряженная система

$$\psi_1' = \psi_4 \varrho \lambda^2 Bh - 2\psi_5 Bhy_1, \qquad \psi_2' = -\psi_1,$$
$$\psi_3' = A \frac{\partial}{\partial y_3} (\psi_2 |y_3|^{1/n} \operatorname{sgn} y_3), \tag{2.7}$$
$$\psi_4' = -\psi_3, \qquad \psi_5' = 0.$$

2) Условия трансверсальности

$$b_j \psi_j(0) + a_j \psi_j(l) = 0, \qquad j = 1, 2, 3, 4. \tag{2.8}$$

3) Условия разрыва

$$\psi_1(s-) - \psi_1(s+) = \varkappa_1 n y_1^{n-1}(s) \psi_4(s),$$
$$\psi_2(s-) - \psi_2(s+) = -\varkappa_2 n y_2^{n-1}(s) \psi_3(s). \tag{2.9}$$

Остальные сопряженные переменные $\psi_3, \ldots, \psi_5$ являются непрерывными в точке $x = s$.

4) Условие непрерывности гамильтониана

$$H(s-) = H(s+). \tag{2.10}$$

5) Условие

$$\int_0^l \frac{\partial H}{\partial h} dx = 0. \tag{2.11}$$

Уравнениям (2.7)—(2.9) можем удовлетворить, полагая

$$\psi_1 = -ny_4, \quad \psi_2 = ny_3, \quad \psi_3 = -y_2, \quad \psi_4 = y_1, \quad \psi_5 = 0{,}5 \varrho \lambda^2 (1-n). \tag{2.12}$$

В самом деле, постановкой (2.12) уравнения (2.7) и (2.9) переходят соответственно в уравнения (2.2) и (2.4), а условия (2.8) удовлетворяются вследствие краевых условий (1.2).

Следуя работе [3], введем дополнительную энергию. Учитывая формулу (1.7), находим

$$W = -\int_0^M v'' \, dM = \frac{nA}{n+1} |y_3|^{1+1/n}.$$

Теперь можем представить гамильтониан H в форме

$$H = \psi_0 Bh - (n+1)(y_2 y_4 + W + 0{,}5 \cdot \varrho \lambda^2 Bhy_1^2). \tag{2.13}$$

Условие непрерывности гамильтониана (2.10) дает

$$(y_2 y_4 + W)|_{x=s-} = (y_2 y_4 + W)|_{x=s+}.$$

С учетом (1.15) это требование можно переписать в форме

$$W(s+) - W(s-) + R(s) v'(s) = 0. \tag{2.14}$$

Это и есть условие оптимальности Мруза—Розвани, выведенное в работе [3]. В частном случае, когда опорный момент в сечении $x = s$ отсутствует, имеем $v'(s) = 0$. В случае $R(s) = 0$ из (2.14) вытекает, что $W(s-) = W(s+)$.

Таким образом, мы доказали, что условия оптимальности, данные Мрузом и Розвани для статической задачи, действительны также в случае импульсной нагрузки. Отметим еще, что авторы работы [3] ограничились случаем упругих опор; но наш анализ показывает, что те же условия оптимальности сохраняют силу также для неупругих опор типа (1.13).

3. Случай жестко-пластического материала. Полагая в формуле (1.3) показатель $n = 0$, приходим к случаю жестко-пластического материала. Результаты, полученные в п. 2, непосредственно не применимы при $n = 0$, так как во втором уравнении системы (2.2) показатель степени приобретает бесконечное значение. Поэтому этот случай требует специального рассмотрения.

Для простоты сузим постановку задачи. Во-первых будем считать ширину B и высоту h балки постоянными, кроме того, ограничимся случаем жесткой опоры, не принимающей опорного момента (т. е. $M_R = 0$). Пластическое деформирование возможно тогда, когда изгибающий момент M равен предельному $M_0 = 0{,}25 \cdot cBh^2$ (постоянная c теперь обозначает предел текучести материала). Нетрудно видеть, что конечные участки по длине не могут деформироваться пластически: на этих участках мы имели бы $M = M_0 = \text{const}$, но в таком случае невозможно удовлетворить уравнениям (1.9). Таким образом, пластическое деформирование происходит лишь в отдельных шарнирах, положение которых обозначим через x_i, причем $i = 1, 2, \ldots, m$.

В системе уравнений (2.1)—(2.4) придется теперь проделать следующие изменения: 1) второе уравнение из (2.2) заменить требованием $y'_2=0$; 2) вместо (2.4) взять равенства $y_3(s+) = y_3(s-)$, $y_4(s+) - y_4(s-) = R(s)$. Кроме того, должны быть выполнены условия $|y_3(x_i)| = M_0$.

Для функционала L выбираем

$$L = \int_0^l \left(\sum_{j=1}^{5} \psi_j y_j' - H\right) dx + \sum_{j=1}^{4} \nu_j [a_j y_j(0) + b_j y_j(l)] +$$
$$+ \nu_5 y_5(0) + \nu_6 [y_5(l) - 2K_0/\varrho] +$$
$$+ \nu_7 [y_4(s+) - y_4(s-) - R(s)] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \mu_i [y_3^2(x_i) - M_0^2], \tag{3.1}$$

где

$$H = \psi_0 Bh + \psi_1 y_2 + \psi_3 y_4 - \psi_4 \varrho\lambda^2 Bhy_1 + \psi_5 Bhy_1^2. \tag{3.2}$$

Проводя варьирование и удовлетворяя равенству $\Delta L = 0$, приходим к следующим результатам:

1) Сопряженная система (2.7) остается в силе, если третье уравнение заменить равенством $\psi'_3 = 0$.

2) Условия трансверсальности (2.8) сохраняют свой вид.

3) В точках $x = x_i$ имеем

$$\begin{aligned} &\psi_1(x_i-)=\psi_1(x_i+), \quad \psi_2(x_i-)=\psi_2(x_i+)=0, \\ &\psi_3(x_i-)-\psi_3(x_i+)=-2\mu_i y_3(x_i), \\ &\psi_4(x_i-)=\psi_4(x_i+). \end{aligned} \tag{3.3}$$

4) Для точки приложения опоры $x=s$ находим $\psi_4(s-) = \psi_4(s+) = 0$, кроме того, имеем:

а) $\psi_i(s-)=\psi_i(s+)$, $i=2, 3$ при $|y_3(s)|<M_0$;

б) $\psi_2(s-)=\psi_2(s+)=0$, $\psi_3(s-)-\psi_3(s+)=-2\mu_s y_3(s)$ (3.4)

при $|y_3(s)|=M_0$.

5) Условие непрерывности гамильтониана (2.10) выполняется.

6) Вместо формулы (2.11) получим

$$\int_0^l \left[\frac{\partial H}{\partial h}+2\left(\sum_{i=1}^{m}\mu_i\right)M_0\frac{\partial M_0}{\partial h}\right] \mathrm{d}x=0. \tag{3.5}$$

Эти формулы позволяют найти также множители Лагранжа μ_i, μ_s и ψ_0.

Этим соотношениям можно опять удовлетворить при помощи подставок (2.12), принимая там $n = 0$. Гамильтониан (3.2) получает теперь вид

$$H=\psi_0 Bh - y_2 y_4 - 0{,}5\varrho\lambda^2 Bhy_1^2. \tag{3.6}$$

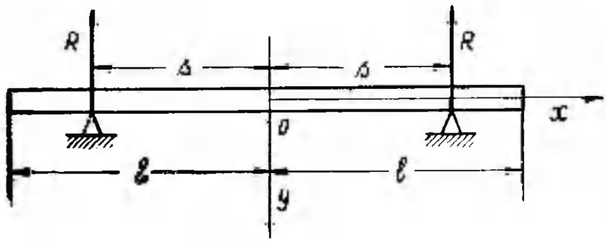
Из непрерывности величины H при $x = s$ вытекает, что непрерывным должно быть и произведение y_2y_4. Это требование может быть написано в форме

$$v'(s-)\cdot Q(s-)=v'(s+)Q(s+), \tag{3.7}$$

что совпадает с условием оптимальности, полученным для статической нагрузки В. Прагером и Г. Розвани в [5]. Для реализации условия (3.7) имеем две возможности: 1) $v'(s-) \neq v'(s+)$; тогда в сечении возникает пластический шарнир; и 2) $v'(s-) = v(s+) = 0$; балка в окрестности опоры жестка и горизонтальна.

4. Пример. Для иллюстрации вышеуказанной методики решаем следующую задачу. Упругая балка с постоянным поперечным сечением находится на двух жестких опорах (фиг. 2). Балка подвержена действию импульсного нагружения; начальная кинетическая энергия балки и средний остаточный прогиб заданы. Ищется такое положение опор $x = s$, при котором объем балки будет наименьшим.

Так как балка упруга, то $n = 1$ и из (1.8) вытекает, что $A = (EI)^{-1}$; причем E — модуль Юнга и $I = (1/12)Bh^3$ —



Фиг. 2.

момент инерции поперечного сечения. Первые четыре уравнения системы (2.2) дают

$$y_1^{\mathrm{IV}} = \frac{\varrho\lambda^2 hB}{EI} y_1.$$

Общим решением этого уравнения является

$$y_1^{\pm} = \frac{Rl^3}{\gamma^3 EI}(A^{\pm}\cos\gamma\xi + B^{\pm}\sin\gamma\xi + C^{\pm}\operatorname{ch}\gamma\xi + D^{\pm}\operatorname{sh}\gamma\xi). \qquad (4.1)$$

Здесь обозначено

$$\xi = \frac{x}{l}, \qquad r = \frac{s}{l}, \qquad \gamma^4 = \frac{12\varrho\lambda^2 l^4}{Eh^2}; \qquad (4.2)$$

знаки плюс-минус у постоянных интегрирования соответствуют случаям $\xi > r$ или $\xi < r$.

Для определения постоянных интегрирования $A^{\pm}$, $B^{\pm}$, $C^{\pm}$, $D^{\pm}$ и величин γ, r имеем следующие условия:

$$\begin{aligned} &y_1(r) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(1) = 0, \quad y_4(1) = 0,\\ &y_4(0) = 0, \quad y_1(r-) = y_1(r+), \quad y_2(r-) = y_2(r+), \qquad (4.3)\\ &y_3(r-) = y_3(r+), \quad y_4(r+) - y_4(r-) = R. \end{aligned}$$

Кроме того, должно быть выполнено условие оптимальности $y_2(r) = 0$. Удовлетворяя этим условиям, находим, что

$$\frac{\gamma^3 EI}{Rl^3} y_1 = A^- \cos\gamma\xi + C^- \operatorname{ch}\gamma\xi + \begin{cases} 0 & \text{при } \xi \leqslant r \\ 0{,}5[\sin\gamma(\xi - r) - \operatorname{sh}\gamma(\xi - r)] & \text{при } \xi \geqslant r, \end{cases} \qquad (4.4)$$

причем

$$A^- = \frac{\operatorname{ch}\gamma\cos\delta - \operatorname{sh}\gamma\sin\delta + \operatorname{ch}\gamma r}{\operatorname{sh}\gamma\cos\gamma + \operatorname{ch}\gamma\sin\gamma},$$

$$C^- = A^- \frac{\sin\gamma r}{\operatorname{sh}\gamma r}, \qquad \delta = \gamma(1 - r).$$

Для определения величин γr и γ получим трнасцендентные уравнения

$$\tan \gamma r + \operatorname{th} \gamma r = 0, \tag{4.5}$$

$$\sin \gamma r (\operatorname{ch} \gamma \cos \delta - \operatorname{sh} \gamma \sin \delta + \operatorname{ch} \gamma r) = \\ = \operatorname{sh} \gamma r (\cos \gamma \operatorname{ch} \delta + \sin \gamma \operatorname{sh} \delta + \cos \gamma r). \tag{4.6}$$

Эта система имеет бесконечное число решений. Двумя первыми решениями уравнения (4.5) являются $\gamma r = 2{,}365$ и $\gamma r = 5{,}498$. Определяя при помощи уравнения (4.6) величины γ и r, приходим к решениям, некоторые из которых указаны в таблице 1.

Таблица 1

γr	γ	r
2.365	4.24	0.56
	7.06	0.34
	10.22	0.23
	16.39	0.14
	18.90	0.12
5.498	7.37	0.75
	10.15	0.54
	19.46	0.28
	20.04	0.27

Численные результаты для четырех решений представлены на фиг. 3, где символами

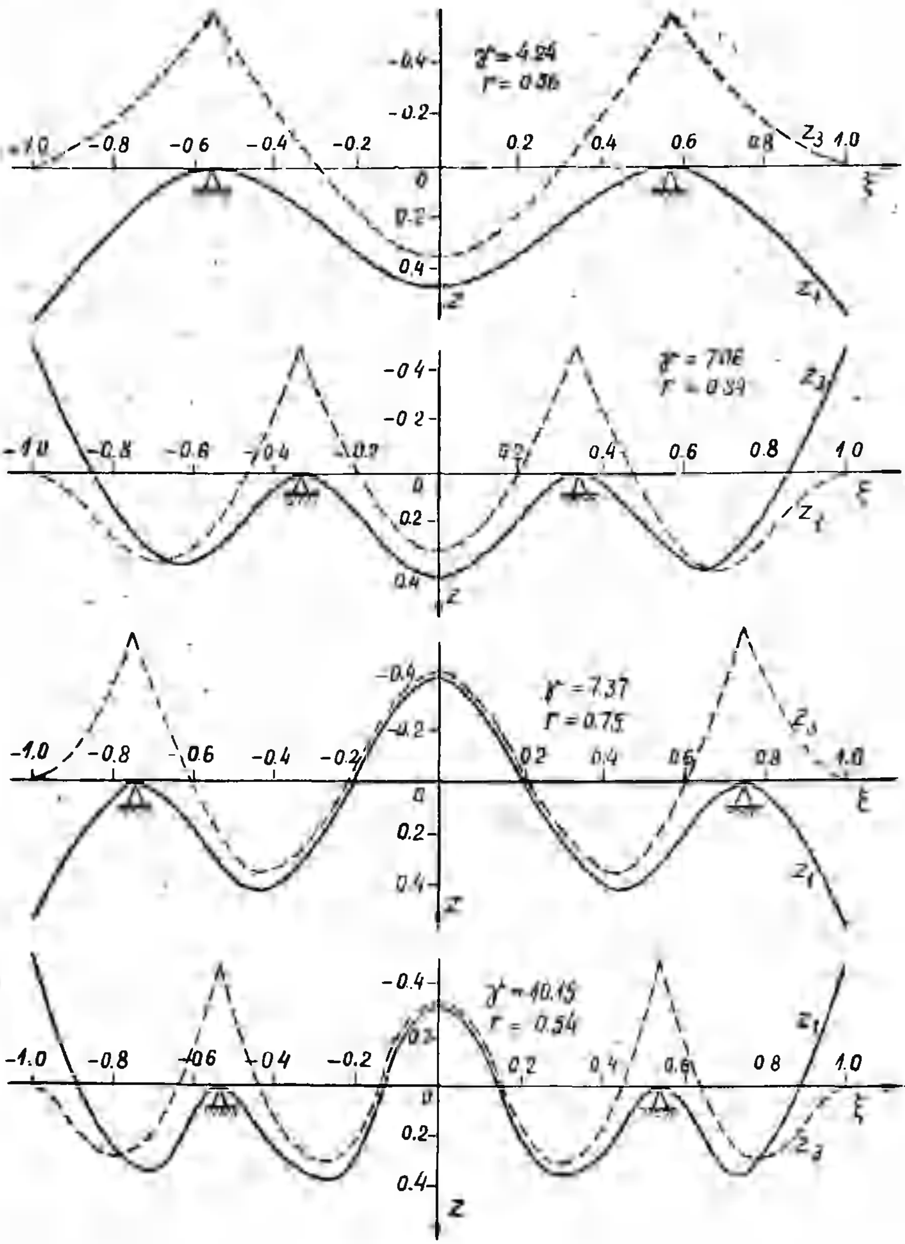
$$z_1 = \frac{EI\gamma^3 y_1}{Rl^3}, \quad z_3 = \frac{\gamma y_3}{Rl} \tag{4.7}$$

обозначены величины, характеризующие распределение прогиба и изгибающего момента в балке. Кривые $z_1 = z_1(\xi)$ на фиг. 3 отмечены сплошными линиями, а кривые $z_3 = z_3(\xi)$ — штрихованными линиями.

Реакцию опоры R вычислим согласно уравнению (1.11), которое в случае обозначений (4.2) и (4.6) получает вид

$$2K_0 = \varrho l B h \left(\frac{R^2}{2EI\gamma^3} \right)^2 \int_0^1 z_1^2 \, d\xi. \tag{4.8}$$

Переходим к обсуждению полученных результатов. Из последней формулы системы (4.2) выясняется, что $\gamma = \mathrm{const}/h^{1/2}$. Следовательно, для уменьшения объема придется выбирать γ как можно большим. (Например, из четырех проектов, указанных на фиг. 3, четвертый дает объем в 5,73 раз меньший, чем первый). С другой стороны, применить проекты, для которых реализуются высшие собственные числа, опасно. Дело в


γ = 4.24
Γ = 0.56
γ = 7.06
Γ = 0.39
γ = 7.37
Γ = 0.75
γ = 10.15
Γ = 0.54
ξ
z
z_1
z_3
-1.0
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Фиг. 1.

том, что то обстоятельство, какая форма движения реализуется в действительности, существенно зависит от распределения начальных скоростей. В начале движения имеет место немодальное движение, а потом движение переходит к движению по собственным формам. Так как в случае нашего решения поле скоростей в начальный момент времени не определено, нет основания предпочитать одну форму движения другой. Поэтому, на наш взгляд, оптимальным следует считать форму движения по основной собственной форме (случай первый из фиг. 3). Здесь мы имеем некоторую аналогию с задачей об устойчивости сжатого стержня, где при расчетах также применяют наименьшую критическую нагрузку.

Отметим еще, что вопрос о применении высших собственных частот в задачах оптимизации колебаний упругих балок исследовался Н. Ольховым [4].

Автор выражает благодарность Я. Леллепу за обсуждение данной работы.

Литература

1. Мруз З. С., Лепик Ю. Р., Оптимальное проектирование конструкций при импульсном нагружении. Механика полимеров, 1977, № 5.
2. Троицкий В. А., Оптимальные процессы колебаний механических систем. Ленинград, 1976.
3. Mróz, Z., Rozvany, G. I. N., Optimal design of structures with variable support conditions. J. Optimiz. Theory Appl., 1975, **15**, No. 1, 85—101.
4. Olhoff, N., Optimization of vibrating beams with respect to higher natural frequencies. J. Struct. Mech., 1976, **4**, No. 1, 87—122.
5. Prager, W., Rozvany, G. I. N., Plastic design of beams: Optimal locations of supports and steps in yield moment. Int. J. Mech. Sci., 1975, **17**, No. 10.

Поступило
17 I 1977

MITTEELASTSETE DÜNAAMILISELT KOORMATUD TALADE OPTIMAALNE PROJEKTEERIMINE LISATUGEDE KORRAL

Ü. Lepik

Resümee

Konstruktsioonide jäikust võib tunduvalt tõsta, kui kasutada sobivalt valitud listaugesid. Nende lisatugede optimaalse asendi määramist käsitlesid mittelineaarselt elastsete konstruktsioonide korral Mróz-Rozvany [4] ning jäikplastsete konstruktsioonide juhul Prager-Rozvany [5]. Käesoleva töö ülesandeks on neis töödes saadud optimaalsuse kriteeriumide üldistamine dünaamilise koormuse juhule.

Vaadeldakse impulsiivselt koormatud mittelineaarselt elastset või viskoosset tala. Kineetiline energia alghetkel on antud. Lisatoed on jäigad, mittelineaarselt elastsed või viskoossed. Tuleb leida niisugune tugede asend, mille puhul antud keskmisele läbipaindele vastav tala'ruumala on minimaalne.

Püstitatud ülesanne on lahendatud modaalsete lahendite meetodil. Kasutades optimaalset juhtimisteooriat näidatakse, et töödes [3, 5] tuletatud optimaalsuse tingimused kehtivad ka antud juhul.

Näitena vaadeldakse konstantse paksusega elastset tala kahel jäigal toel.

OPTIMAL DESIGN OF NONELASTIC BEAMS WITH ADDITIONAL SUPPORTS IN THE CASE OF DYNAMIC LOADING

Ü. Lepik

Summary

The stiffness of structures can be increased by applying additional supports whose location must be selected so as to maximize the global structural stiffness. Such a problem was set up and solved for non-linear elastic structures by Mróz and Rozvany [3], and for rigid-plastic structures by Prager and Rozvany [5]. The aim of the present paper is to generalize the obtained results for dynamic loading.

A non-linear elastic or non-linear viscous beam is subjected to a load impulse. The initial kinetic energy of the beam is given. The additional supports are rigid, non-linear elastic or non-linear viscous. For additional supports such a location must be found for which at a given mean deflection the volume of the beam is minimal.

The problem set up is solved by the method of modal solutions (see equation (1.5) of the present paper). By using the apparatus of the optimal control theory it is shown that the optimality conditions of the papers [3, 5] are valid also for impulsive loads.

As an example the case of an elastic beam with constant height laid on two rigid supports (Fig. 2) is discussed.

К ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ В СЛУЧАЕ ЛОКАЛЬНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Я. Леллеп

Кафедра теоретической механики

Вопросы оптимального проектирования круглых и кольцевых пластин при распределенных и сосредоточенных нагрузках рассматривались в ряде работ, среди которых отметим [1—5]. В работах [1, 2, 5] и в др. поставленные задачи решаются методами классического вариационного исчисления. В последнее время появилось несколько работ, в которых исследуется оптимизация неупругих пластин и оболочек вращения с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина. Применению принципа максимума при проектировании круглых жестко-пластических пластин минимального веса в случае распределенной нагрузки посвящены работы Ю. Лепика [3, 4].

Ниже определяется оптимальный проект круглой жестко-пластической пластины, подверженной действию сосредоточенной силы. Оптимальным считается проект, при котором несущая способность имеет максимальное значение при заданном значении общего веса (или массы). Задача решается методами теории оптимального управления.

§ 1. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим идеальную трехслойную модель круглой пластины радиуса R. Толщину заполнителя обозначим через H, а переменную толщину несущих слоев через h. Внешний край пластины считаем свободно опертым. Пусть пластина подвержена действию сосредоточенной силы P, приложенной в центре пластины. Предположим, что пластина выполнена из идеально-жестко-пластического материала, подчиняющегося условию текучести Треска.

Поставим следующую задачу: среди всех круглых пластин заданного веса (или массы) найти ту, которая имеет наибольшую несущую способность. Варьировать будем лишь толщину несущих слоев, а толщину заполнителя H считаем постоянной.

Допустим, что толщина h ограничена снизу и сверху соответственно величинами h_1 и h_2, Здесь h_1 и h_2 — заданные числа, причем, конечно, $h_1 < h_2$. Масса пластины (ее считаем заданной) выражается в виде

$$M = \pi[4\mu_1 \int_0^R hr\,dr + \mu_2 HR^2], \tag{1.1}$$

где μ_1 и μ_2 обозначают плотность несущих слоев и заполнителя соответственно.

Для удобства введем следующие безразмерные величины

$$\begin{aligned}
&\varrho = \frac{r}{R}; && u = \frac{h}{h_2}; && \delta = \frac{h_1}{h_2};\\
&p = \frac{P}{2\pi\sigma_0 H h_2}; && m_1 = \frac{M_r}{\sigma_0 H h_2}; && m_2 = \frac{M_\theta}{\sigma_0 H h_2};\\
&q = \frac{Q_r R}{\sigma_0 H h_2}; && m = \frac{1}{2\mu_1 h_2}\left(\frac{M}{\pi R^2} - \mu_2 H\right).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь M_r, M_θ — изгибающие моменты, Q_r — перерезывающая сила, а σ_0 — предел текучести материала. В безразмерных величинах (1.2) уравнения равновесия имеют вид

$$(\varrho m_1)' = m_2 - q\varrho; \qquad (q\varrho)' = 0, \tag{1.3}$$

где штрих обозначает дифференцирование по ϱ. Граничными условиями к системе (1.3) являются условия $m_1(1) = 0$ и $q(1) = = p$, причем $m_1(0) < \infty$ и $q(0) = \infty$.

§ 2. Анализ различных режимов

В качестве фазовых переменных x_1 и x_2 выбираем величины m_1 и $-q$. С учетом интегрального дополнительного условия (1.1) введем дополнительную переменную x_3. В результате из (1.1)—(1.3) получим

$$\begin{cases}
x_1' = \dfrac{1}{\varrho}(-x_1 + m_2) + x_2,\\
x_2' = -\dfrac{x_2}{\varrho},\\
x_3' = u\varrho.
\end{cases} \tag{2.1}$$

Системе (2.1) соответствуют граничные условия

$$x_1(0) < \infty, \quad x_3(0) = 0; \quad x_1(1) = 0; \quad x_2(1) = -p; \quad x_3(1) = m/2 \tag{2.2}$$

и ограничения $\delta \leqslant u \leqslant 1$.

В качестве управления выбираем u, а за время возьмем ϱ. Таким образом, в терминах теории оптимального управления задача (2.1), (2.2) является задачей Майера с фиксированным временем. Минимизировать следует здесь функционал $J = x_2(1)$; а через $-p$ обозначено минимальное значение функционала J.

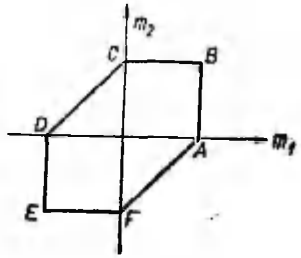


Рис. 1.

При решении поставленной задачи придется проанализировать режимы текучести BC и B (рис. 1).

1. Режим BC. В случае данного режима $m_2 = u$. Поэтому система (2.1) примет вид

$$x_1' = x_2 - \frac{1}{\varrho}(x_1 - u); \quad x_2' = -\frac{x_2}{\varrho}; \quad x_3' = u\varrho. \tag{2.3}$$

Системе (2.3) соответствует функция Гамильтона

$$H_* = \psi_1\left[x_2 - \frac{1}{\varrho}(x_1 - u)\right] - \psi_2\frac{x_2}{\varrho} + \psi_3 u\varrho.$$

Здесь $\psi_1 - \psi_3$ — т. н. сопряженные переменные, вычисляемые из системы

$$\psi_1' = \frac{\psi_1}{\varrho}; \quad \psi_2' = \frac{\psi_2}{\varrho} - \psi_1; \quad \psi_3' = 0.$$

Отсюда следует, что $\psi_1 = A_1\varrho$; $\psi_2 = -A_1 \ln \varrho + A_2$; $\psi_3 = A_3$, где $A_1 - A_3$ — постоянные интегрирования. Таким образом, гамильтониан примет вид

$$H_* = A_1(x_2\varrho - x_1) - \frac{x_2}{\varrho}(A_2 - A_1 \ln \varrho) + (A_1 + A_3\varrho)u.$$

Согласно принципу максимума Понтрягина функция H_* достигает максимума по u при каждом значении ϱ. Так как H_* является линейной относительно u, то u может принимать лишь значения δ и 1. Следовательно, управление u — кусочно-постоянная функция.

Для определения постоянных $A_1 - A_3$ имеются условия трансверсальности и условия непрерывности сопряженных переменных. Однако оказывается, что удовлетворение указанным условиям в данном случае не дает дополнительной информации ни о фазовых переменных, ни о точках переключения. Поэтому в дальнейшем сопряженные переменные не рассмотрим, а проанализируем некоторые логично возможные случаи.

Пусть сперва $u = \delta$. Решение системы (2.3) запишем в виде

$$x_1 = \frac{C_1}{\varrho} + C_2 + \delta; \quad x_2 = \frac{C_2}{\varrho}; \quad x_3 = \frac{\delta}{2}\varrho^2 + C_3, \tag{2.4}$$

где $C_1 - C_3$ — постоянные интегрирования.

Если $u=1$, то решение системы (2.3) примет вид

$$x_1=\frac{C_4}{\varrho}+C_5+1; \qquad x_2=\frac{C_5}{\varrho}; \qquad x_3=\frac{\varrho^2}{2}+C_6. \tag{2.5}$$

2. Режим B. В случае этого режима $x_1=u=m_2$. Поэтому систему (2.1) можно записать в виде

$$u'=x_2; \qquad x_2'=-\frac{x_2}{\varrho}; \qquad x_3'=u\varrho. \tag{2.6}$$

Уравнения (2.6) позволяют определить и управление u; таким образом здесь нельзя применить принцип максимума. Решением системы (2.6) является

$$\begin{aligned} &u=C_7+C_8\ln\varrho; \qquad x_2=\frac{C_8}{\varrho};\\ &x_3=\frac{\varrho^2}{2}\left[C_7+C_8\left(\ln\varrho-\frac{1}{2}\right)\right]+C_9. \end{aligned} \tag{2.7}$$

§ 3. Синтез задачи

Прежде чем перейти к составлению оптимальных проектов отметим, что фазовые переменные x_1, x_2, x_3 должны быть непрерывными, а управление u может претерпевать разрыв. Оказывается, что разумными являются два типа проектов.

1. Пусть управление (толщина несущих слоев) изменяется по закону (рис. 2а)

$$u=\begin{cases} 1, & 0\leqslant\varrho<\varrho_1, \quad (BC),\\ C_7+C_8\ln\varrho, & \varrho_1<\varrho<\varrho_2, \quad (B),\\ \delta, & \varrho_2<\varrho\leqslant 1, \quad (BC), \end{cases} \tag{3.1}$$

где ϱ_1 и ϱ_2 — т. н. точки переключения, определяемые ниже. Фазовые переменные в указанных трех областях представляются формулами (2.4), (2.5) и (2.7). Для определения постоянных C_1-C_9, ϱ_1, ϱ_2 и p воспользуемся граничными условиями (2.2) и условиями непрерывности фазовых переменных. В центральной части пластины $0\leqslant\varrho<\varrho_1$ согласно (2.2) и (2.5)

$$x_1=1+C_5; \qquad x_2=\frac{C_5}{\varrho}; \qquad x_3=\frac{\varrho^2}{2}. \tag{3.2}$$

Вблизи края $\varrho_2<\varrho\leqslant 1$ действительны соотношения (2.4). После определения постоянных C_1-C_3 из граничных условий (2.2) получим

$$x_1=(p-\delta)\left(\frac{1}{\varrho}-1\right); \qquad x_2=-\frac{p}{\varrho}; \qquad x_3=\frac{m}{2}-\frac{\delta}{2}(1-\varrho^2). \tag{3.3}$$

Величина x_2 может быть непрерывна в точках ϱ_1 и ϱ_2, если $C_5 = C_8 = -p$. Поэтому при $0 \leqslant \varrho < \varrho_1$ согласно (3.2)

$$x_1 = 1 - p; \qquad x_2 = -\frac{p}{\varrho}, \qquad x_3 = \frac{\varrho^2}{2} \tag{3.4}$$

и в области $\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$ согласно (2.7)

$$x_1 = C_7 - p \ln \varrho; \; x_2 = -\frac{p}{\varrho}; \; x_3 = C_9 + \frac{\varrho^2}{2}\left[C_7 - p\left(\ln \varrho - \frac{1}{2}\right)\right]. \tag{3.5}$$

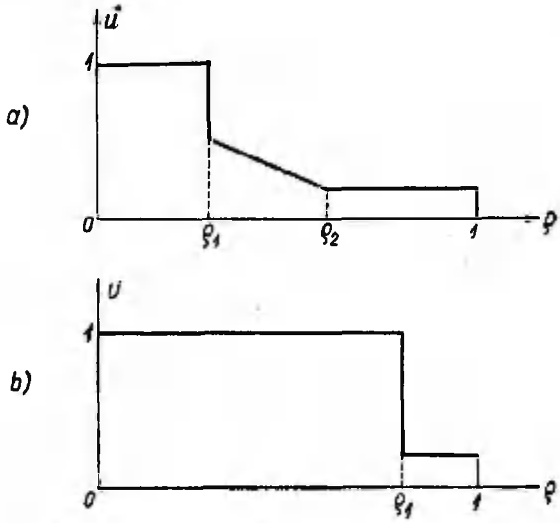


Рис. 2.

Удовлетворяя условиям непрерывности фазовых переменных x_1 и x_3 в точках переключения ϱ_1 и ϱ_2, получим постоянную

$$C_9 = \frac{p}{4}\varrho_1^2 \tag{3.6}$$

и два уравнения, связывающие величины p, ϱ_1 и ϱ_2:

$$p\left(1 + \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) + (p - \delta)\left(\frac{1}{\varrho_2} - 1\right) = 1; \tag{3.7}$$

$$\varrho_2^2\left[1 - p\left(\frac{1}{2} + \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)\right] + \frac{p}{2}\varrho_1^2 = m - \delta(1 - \varrho_2^2). \tag{3.8}$$

Имея в виду то, что при $\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$ имеем $x_1 = u$ и $\delta \leqslant u \leqslant 1$, а при $\varrho_2 < \varrho \leqslant 1$ должно быть $x_1 \leqslant \delta$, приходим к выводу, что $x_1(\varrho_2) = \delta$. Следовательно, к системе (3.7), (3.8) получим дополнительное соотношение

$$(p - \delta)\left(\frac{1}{\varrho_2} - 1\right) = \delta. \tag{3.9}$$

Уравнения (3.7)—(3.9) позволяют определить величины ϱ_1, ϱ_2 и p. Представим их в виде

$$\ln\left[\frac{2}{\delta\varrho_2^2}(1-\varrho_2)(m-\delta)-1\right]-2\left[1-\left(\frac{1}{\delta}-1\right)(1-\varrho_2)\right]=0; \tag{3.10}$$

$$\varrho_1=\varrho_2\exp\left[1-\left(\frac{1}{\delta}-1\right)(1-\varrho_2)\right]; \tag{3.11}$$

$$p=\frac{\delta}{1-\varrho_2}. \tag{3.12}$$

Из уравнения (3.10) можно вычислить при заданных значениях m и δ величину ϱ_2. Тогда из (3.11) и (3.12) находим соответственно ϱ_1 и p.

Оказывается, что данный проект является реальным в пределах $\delta\leqslant m\leqslant m_*$, где

$$m_*=\frac{1-3\delta+3\delta^2}{1-\delta}.$$

Если $m=m_*$, то $\varrho_1=\varrho_2=(1-2\delta)/(1-\delta)$. Так как масса пластины переменной толщины не может превышать массу пластины, имеющей максимальную толщину, и не может быть меньше массы пластины, имеющей минимальную толщину, то $\delta\leqslant m\leqslant 1$.

2. Если $m_*<m\leqslant 1$, то оптимальным является проект с кусочно-постоянной толщиной (рис. 2b). Таким образом, при $m_*<m$

$$u=\begin{cases}1, & 0\leqslant\varrho<\varrho_1, \quad (BC),\\ \delta, & \varrho_1<\varrho\leqslant 1, \quad (BC).\end{cases} \tag{3.13}$$

Вблизи края $\varrho_1<\varrho\leqslant 1$ как и прежде имеем

$$x_1=(p-\delta)\left(\frac{1}{\varrho}-1\right);\qquad x_2=\frac{-p}{\varrho};\qquad x_3=\frac{m}{2}-\frac{\delta}{2}(1-\varrho^2), \tag{3.14}$$

а при $0\leqslant\varrho<\varrho_1$ согласно (2.2) и (2.5) получим

$$x_1=1+C_5;\qquad x_2=\frac{C_5}{\varrho};\qquad x_3=\frac{\varrho^2}{2}. \tag{3.15}$$

Таблица 1

m	ϱ_1	ϱ_2	p	θ
0,2	0,164	0,724	0,363	0,551
0,3	0,373	0,804	0,509	0,589
0,4	0,525	0,837	0,614	0,651
0,5	0,642	0,857	0,698	0,716
0,6	0,735	0,870	0,770	0,779
0,7	0,814	0,880	0,835	0,838
0,8	0,882	0,888	0,894	0,895
0,9	0,943	—	0.948	0,949

Таблица 2

m	ϱ_1	ϱ_2	p	θ
0,4	0,368	0,468	0,564	0,709
0,5	0,534	0,555	0,674	0,742
0,6	0,655	—	0,758	0,791
0,7	0,756	—	0,829	0,844
0,8	0,845	—	0,892	0,897
0,9	0,926	—	0,948	0,949

Удовлетворяя условиям непрерывности фазовых переменных в точке $\varrho=\varrho_1$, находим с помощью (3.14), (3.15) постоянную $C_5=-p$ и

$$\varrho_1=\sqrt{\frac{m-\delta}{1-\delta}},\quad p=\delta+\varrho_1(1-\delta). \tag{3.16}$$

Проведены численные расчеты на основании формул (3.10)—(3.12) и (3.16). Результаты вычислений представлены в таблицах 1 и 2. Первая таблица соответствует случаю $\delta=0{,}1$, а вторая — случаю $\delta=0{,}3$. В таблицах строки, где величины ϱ_1 и ϱ_2 имеют различные значения, соответствуют первому типу проекта, а строчки, где ϱ_2 отмечено черточкой — второму типу. В таблицах величина $\vartheta=P_*/P$, где P_* и P несущие способности соответственно при пластинках постоянной и переменной толщины, имеющих одинаковые общие массы.

Известно, что

$$P_*=2\pi\sigma_0 H h_*, \tag{3.17}$$

где h_* — постоянная толщина несущих слоев. С помощью (1.1), (1.2) и (3.17) находим $\vartheta=m/p$. Обе таблицы показывают, что величина ϑ действительно меньше единицы.

Литература

1. Гопкинс Г., Прагер В., Пределы экономии материала в пластинках. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1956, № 6, 112—117.
2. Шилд Р., Методы оптимального проектирования при действии ряда независимых систем нагрузок. Механика. Период. сб. пер. ин. статей, 1964, № 2, 147—154.
3. Lepik, Ü., Minimum weight design of circular plates with limited thickness. Int. J. Non-Linear Mech., 1972, 7, № 4, 353—360.
4. Lepik, Ü. Application of Pontryagin's maximum principle for minimum weight design of rigid-plastic circular plates. Int. J. Solids and Struct., 1973, 9, № 5, 615—624.
5. Onat, E. T., Schumann, W., Shield, R. T., Design of circular plates for minimum weight. Z. angew. Math. und Phys., 1957, 8, № 6, 485—499.

Поступило
1 II 1976

OPTIMAALNE PROJEKTEERIMINE LOKAALSE KOORMUSE KORRAL

J. Lellep

Resümee

Vaadeldakse kahekihilist serva mööda vabalt toetatud ümmargust plaati, mille tsentrisse on rakendatud üksikjõud. Plaadi materjal on jäik-plastne ja allub Tresca tingimusele. Seatakse eesmärgiks leida kandvate kihtide paksuste niisugune muutumise seadus, mille puhu kandevõime omandab maksimaalse väärtuse etteantud kogukaalu korral. Ülesande lahendamisel võetakse aluseks L. S. Pontrjagini maksimumprintsiip.

OPTIMAL DESIGN OF PLATES SUBJECTED TO LOCAL LOADING

J. Lellep

Summary

A theoretical study about optimal design of circular sandwich plates subjected to concentrated loads has been undertaken. The material of the plates under observation is rigid-plastic and obeys the Tresca yield criterion. The aim of the analysis is to find the design of the plate, which has maximal load carrying capacity at a given weight. The problem is solved by the Pontryagin maximum principle.

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ ВАЛОВ С ВЫТОЧКАМИ

Ю. Немировский

Новосибирский государственный университет

Э. Сакс

Кафедра теоретической механики

Кручение упругих круглых валов рассмотрено во многих работах, многочисленные ссылки на которые даны в монографиях [1, 3]. Из более новых результатов отметим [5], в которой рассмотрен вопрос о концентрации напряжений на дне выточек различного вида. Упруго-пластическому кручению круглых валов с выточками посвящены работы [2, 6]. В статье [6], при использовании метода последовательных приближений, определены линии, разделяющие упругую и пластическую области для валов в виде гиперболоида вращения. Сходимость процедуры при этом существенно зависит от степени упрочнения: для идеально-пластического материала требуется провести очень большое количество итераций. В работе [2] для валов с малыми выточками при помощи метода малого геометрического параметра построено приближённое решение.

В данной работе рассматриваются осесимметричные задачи о кручении круглых цилиндрических валов с различными видами выточек конечного размера. Материал вала считается изотропным и подчиняющимся деформационной теории пластичности, с произвольным упрочнением при активном процессе нагружения. Будем рассматривать малые деформации. При решении указанных выше задач пользуемся методом, подробно описанным в работе авторов [4]. Цитируемый метод позволяет успешно исследовать любые виды окружных выточек, для которых на плоскости rz (естественно пользоваться цилиндрическими координатами $r\vartheta z$) можно построить регулярную сетку четырехугольников. Во всех практически важных случаях такую сетку построить удается. Отметим, что нерегулярная сетка (т. е. случай, когда два семейства линий, образовавших сетку, пересекаются под очень острым углом), особенно в областях концентрации напряжений, не обеспечивает достаточной точности аппроксимации.

Исследуем четыре вида выточек: полукруглые, полуэллиптические, треугольные и четырехугольные. Для сравнения между собой все четыре вида выточек выбираем с одинаковыми размерами $2h = l$, за исключением полуэллиптической выточки, для которой принимаем $h = l$, где h и l — соответственно глубина и ширина выточек. Кроме того, выбираем три различные значения для глубины выточек: $h/R = 0{,}1$; $0{,}3$; $0{,}5$. В последнем выражении R означает радиус вала. Во всех случаях принимаем, что торцевые сечения $z = \pm R$ (начало координат расположено в центре вала) поворачиваются вокруг оси вала z на заданный угол $\Psi = G_* G_0^{-1} \psi$, где G_* — такая константа с размерностью упругого модуля сдвига G_0, что величина относительного поворота $\psi = 1$ соответствует моменту возникновения пластических деформаций на дне выточки. Боковые поверхности валов, в том числе выточки, свободны от нагрузок. Вследствие симметрии

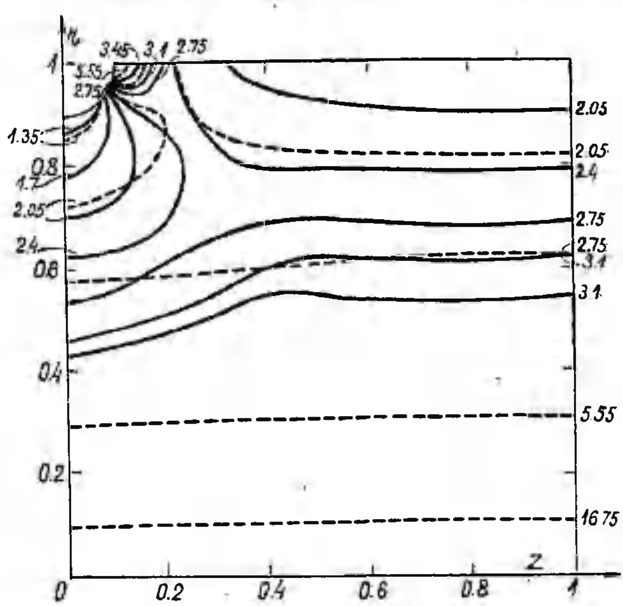


Рис. 1.

достаточно рассматривать область $r \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Без умаления общности принято, что поворот вала в начале координат равен нулю. Для определенности рассматриваем валы с двумя различными степенями упрочнения: идеально пластические и линейно упрочняющиеся с касательным модулем сдвига $G_p = 0{,}05\ G_0$ в области пластических деформаций.

Приступим к описанию полученных результатов. На рис. 1 рассмотрена полукруглая выточка глубины $h/R = 0{,}1$. Здесь сплошными и пунктирными линиями, соотвественно в случаях линейно упрочняющегося и идеально пластического материалов, представлены кривые, разделяющие упругие и пластические области деформации. Числа, относящиеся к этим графикам, указывают величину относительного поворота торцов ψ. Аналогичный смысл имеют линии и относящиеся к ним числа в случае других выточек (рис. 2—5). Более глубокие полукруглые выточки глубины $h/R = 0{,}3$ и $h/R = 0{,}5$ соответственно рассмотрены на рис. 2 и 3.

Проследим кинематику передвижения зон пластических деформаций по мере возрастания углов поворота торцов вала. Из графиков видно, что область пластических деформаций возникает сначала на дне выточки, и далее распространяется в глубину вала. В некоторый момент возникает другая область пластических деформаций около точки с координатами $r = z = R$. Сначала обе эти области разделены областью упругих деформаций, но при дальнейшем скручивании сливаются в одну область, которая будет разделять две области упругих деформаций (одна — около оси вала, другая — вблизи точки $r = R$, $z = l$). Если скручивание вала достаточно велико, то первая область

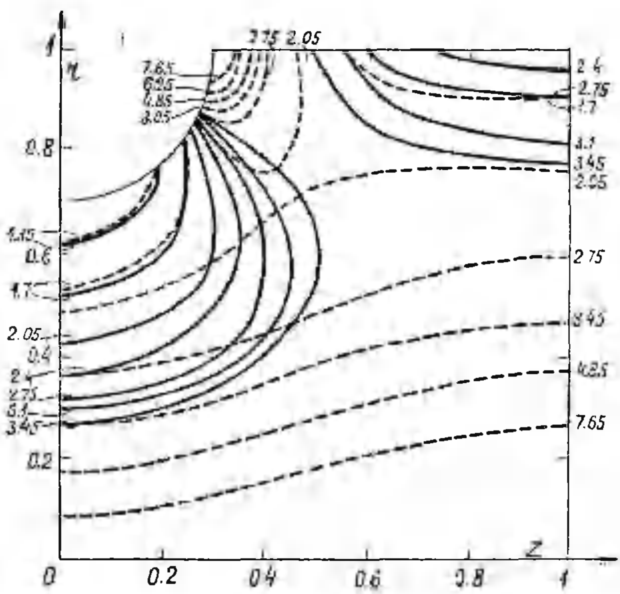
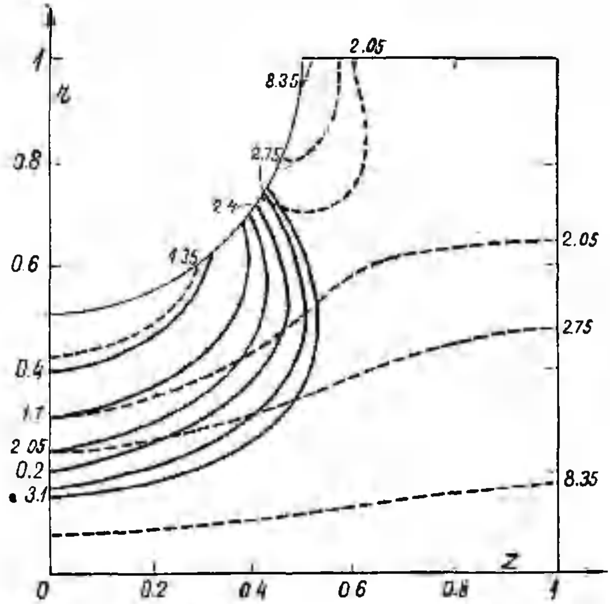


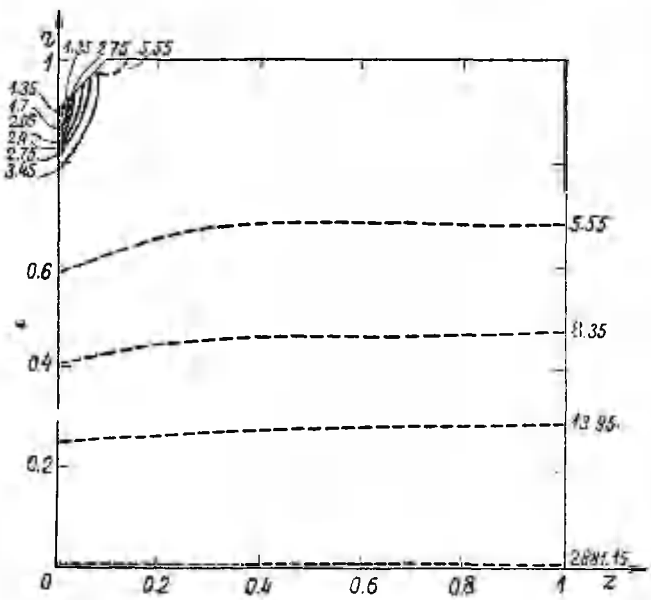
Рис. 2.

упругих деформаций стремится к оси вала, а вторая исчезает. Сравнив рисунки 1—3, видим, что чем меньше размер выточки, тем быстрее проходят описанные стадии. Результаты расчетов



2.05
8.35
2.75
2.4
1.35
2.05
2.75
8.35
0.8
0.6
0.4
1.7
2.05
0.2
3.1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
z

Рис. 3.



1.35
2.75
5.55
1.35
1.7
2.05
2.4
2.75
3.45
5.55
0.6
8.35
0.4
13.95
0.2
2881.15
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
z

Рис. 4.

для выбранной нами полуэллиптической выточки незначительно отличаются от результатов для полукруглой выточки, поэтому соответствующие кривые не приводим.

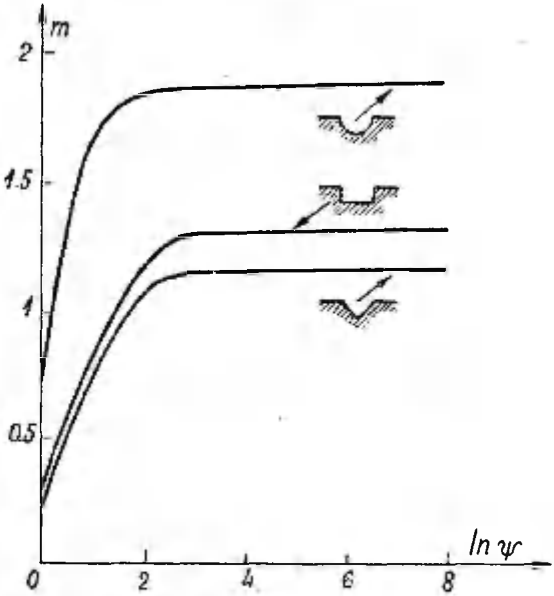


Рис. 5.

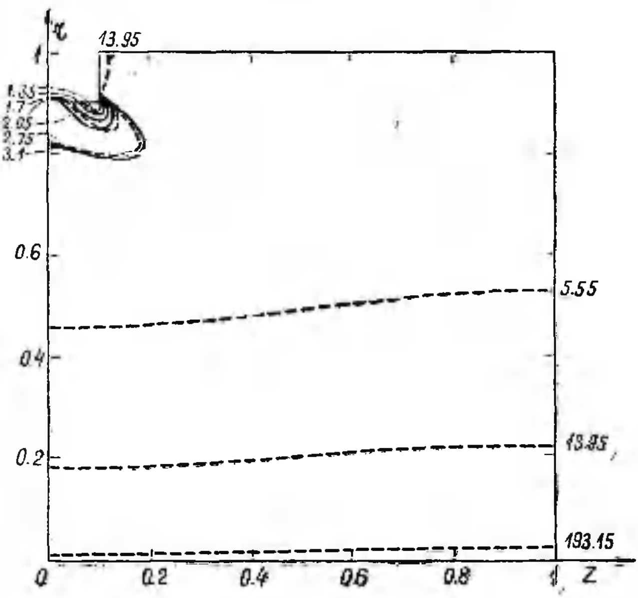


Рис. 6.

Качественно такая же картина наблюдается и в случаях треугольной и прямоугольной выточек (рис. 4 и 5). Здесь области пластических деформаций возникают в угловых точках выточки, и имеет место высокая концентрация напряжений. По мере увеличения поворота торца области пластических деформаций наиболее интенсивно развиваются в направлении биссектрисы к углу между образующими выточками.

Заманчиво было бы рассмотреть предельный случай выточки — круговую щель некоторой глубины. Последнюю можно получить, устремляя ширину выточек полуэллиптической, треугольной или прямоугольной форм к нулю. Однако во всех трех предельных случаях нарушается регулярность сетки, поэтому метод [4] будет расходиться.

Представим еще графики, показывающие величину безразмерного крутящего момента m в зависимости от относительного поворота ψ торца вала (рис. 6). Видно, что эти кривые при стремлении угла ψ к бесконечности стремятся к некоторой константе, которая определяет предельный крутящий момент вала. Значения величин G_*, введенных ранее, равны 0,648; 0,718; 0,813; 0,645; 0,666; соответственно для выточек, изображенных на рис. 1—5.

Литература

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л., Кручение упругих тел. Москва, 1963.
2. Качанов Л. М., Пластическое кручение круглых стержней переменного диаметра. Прикл. матем. и механ., 1948, **12**, № 4, 375—384.
3. Лехницкий С. Г., Кручение анизотропных и неоднородных стержней, Москва, 1971.
4. Немировский Ю. В., Сакс Э. Э., Упруго-пластическое кручение тел вращения. Пробл. прочности, 1974, № 12, 11—17.
5. Соляник-Красса К. В., О концентрации напряжений у мелких выточек при кручении вала. Прикл. механ., 1971, **7**, № 8, 36—44.
6. Davis, E. A., Tuba, I. S., Elastic-plastic solution for notched shafts in torsion. J. Appl. Mech., 1966, **33**, № 1, 79—84.

Поступило
1 II 1976

UURDEGA VARDA ELASTILIS-PLASTILINE VÄÄNE

E. Saks ja J. Nemirovski

Resümee

Töös vaadeldakse transversaalse uurdega silindrikujuliste varraste elastilist-plastilist väänet. Võrreldakse erineva suuruse ja kujuga uurete mõju pingejaotusele. Esitatakse kõverad, mis mitmesuguste väändenurkade korral eraldavad teineteisest varda elastsed ja plastsed piirkonnad. Tuuakse väändenurga ja -momendi vahelise sõltuvuse graafikud.

ELASTIC-PLASTIC TORSION OF NOTCHED SHAFTS

E. Saks and Yu. Nemirovsky

Summary

Some elastic-plastic torsion problems for notched cylindrical shafts are observed in the present paper. The comparison of the influence of the transverse notches of semicircular, semielliptic, triangular and rectangular forms is given. The curves separating elastic and plastic domains on an axial section of shafts depending on angles of revolution are presented. The graphs of relations between torsion moments and angles of revolution are given.

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

Ученые записки Тартуского государственного университета
Выпуск 430

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ
XIX

Функциональный анализ и приложения

На русском языке
Резюме на эстонском, английском и немецком языках
Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18
Ответственный редактор С. Барон
Корректоры В. Логинова, О. Мутт, К. Усталу

Сдано в набор 19/IV 1976. Подписано к печати 18/VIII 1977. Бумага типографская № 1, 60 × 90.1/16. Печ. листов 10,0 + 1 вклейка. Учетно-издат. листов 10,43. Тираж 450. МВ 05363. Заказ № 2228
Типография им. Ханса Хейдеманна, ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 17/19. II

Цена 1 руб. 60 коп.

2—2