Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Marcus Lõo

Loenduva arvu viiludega määratud Banachi ruumid

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Johann Langemets

Tartu 2021

Loenduva arvu viiludega määratud Banachi ruumid

Bakalaureusetöö

Marcus Lõo

Lühikokkuvõte. Aastal 2010 tõid A. Avilés, V. Kadets, M. Martín, J. Merí ja V. Shepelska sisse loenduva arvu viiludega määratud Banachi ruumi mõiste, et üldistada Asplundi ja Radon–Nikodými omadusega separaableid Banachi ruume. Bakalaureusetöös tutvutakse üksikasjalikult loenduva arvu viiludega määratud ruumidega ning muuhulgas tõestatakse, et see omadus on kolme ruumi omadus.

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: viilud, Radon–Nikodými omadus, Daugaveti omadus.

Slicely countably determined Banach spaces

Bachelor's thesis

Marcus Lõo

Abstract. In 2010, A. Avilés, V. Kadets, M. Martín, J. Merí and V. Shepelska introduced the concept of slicely countably determined Banach spaces in order to generalize separable Banach spaces which are Asplund or have the Radon–Nikodým property. In this bachelor's thesis we present slicely countably determined spaces in detail and also we shall prove that this property is a three-space property.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier Analysis, functional analysis.
Keywords: slices, Radon–Nikodým property, Daugavet property.

Sisukord

Sissejuhatus

Bakalaureusetöö on referatiivne teoreetiline uurimus Banachi ruumide geomeetria vallas.

Aastal 2010 tõid A. Avilés, V. Kadets, M. Martín, J. Merí ja V. Shepelska sisse loenduva arvu viiludega määratud Banachi ruumi mõiste, et üldistada Asplundi ja Radon–Nikodými omadusega separaableid Banachi ruume.

Definitsioon (vrd [AKMMS10, Definition 2.5 ja 3.1])**.** Olgu X Banachi ruum. Kumerat tõkestatud hulka $A \subset X$ nimetatakse *loenduva arvu viiludega määratud hulgaks*, kui leidub hulga A viilude jada $\{S_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ nii, et iga hulga A viil sisaldab mingit hulka S_n.

Separaablit Banachi ruumi X nimetatakse *loenduva arvu viiludega määratud ruumiks*, kui ruumi X iga kumer tõkestatud alamhulk on loenduva arvu viiludega määratud hulk.

Töö eesmärgiks on põhiliselt artiklile [AKMMS10] toetudes anda üksikasjalik ülevaade loenduva arvu viiludega määratud hulkade struktuurist ja omadustest.

Bakalaureusetöö sisuline osa on jaotatud kolmeks paragrahviks. Esimeses paragrahvis toome välja töös vajaminevaid hästi tuntud tulemusi ja mõisteid Banachi ruumide teooriast: nõrk topoloogia, viilud, Schauderi baas, tingimatu baas, Hahn–Banachi teoreem ja eraldamisteoreem, lahtise kujutuse printsiip ja absoluutse normi mõiste.

Teises paragrahvis uurime loenduva arvu viiludega määratud hulga struktuuri ning erinevaid samaväärseid tingimusi loenduva arvu viiludega määratud hulgaks olemiseks. Näitame, et iga separaabel ja hambuv hulk on loenduva arvu viiludega määratud hulk. Osutub, et iga separaabli lokaalselt ühtlaselt kumera ruumi ühikkera on loenduva arvu viiludega määratud. Selle tulemuse abil saame tõestada, et mis tahes separaabel Banachi ruum on ekvivalentselt ümbernormeeritav nii, et tema ühikkera on LVM-hulk. Tõestame ka, et kui Banachi ruumil on 1-tingimatu baas, siis selle ruumi ühikkera on loenduva arvu viiludega määratud. Negatiivse näitena tõestame, et iga separaabli Daugaveti omadusega Banachi ruumi ühikkera ei ole loenduva arvu viiludega määratud.

Viimases paragrahvis defineerime loenduva arvu viiludega määratud ruumi mõiste ja tõestame, et Asplundi ja Radon–Nikodými omadusega separaablid

Banachi ruumid on loenduva arvu viiludega määratud ruumid. Bakalaurusetöö lõpetuseks tõestame, et loenduva arvu viiludega määratud ruumi omadus on kolme ruumi omadus.

Töös vaatleme mittetriviaalseid Banachi ruume üle korpuse $\mathbb{R}$. Kasutatavad tähistused on Banachi ruumide teoorias standardsed. Banachi ruumi X kinnist ühikkera ja ühiksfääri tähistame vastavalt sümbolitega B_X ja S_X. Lahtist kera keskpunktiga x ja raadiusega r tähistame sümboliga $B^\circ(x, r)$. Kõigi ruumil X pidevate lineaarsete funktsionaalide hulka tähistame X^*. Kui Z on Banachi ruumi X kinnine alamruum, siis vastavat faktorruumi tähistame sümboliga X/Z.

Hulga $A \subset X$ lineaarset katet tähistame sümboliga $\operatorname{lin}(A)$ ja kumerat katet sümboliga $\operatorname{conv}(A)$, nende sulundeid vastavalt $\overline{\operatorname{lin}}(A)$ ja $\overline{\operatorname{conv}}(A)$. Hulga A diameetrit tähistame sümboliga $\operatorname{diam}(A)$. Hulga $B \subset X$ ja $x \in X$ korral tähistame $\operatorname{dist}(x, B) = \inf\{\|x - b\| : b \in B\}$.

Kõiki pidevaid lineaarseid operaatoreid ruumist X Banachi ruumi Y tähistame sümboliga $\mathcal{L}(X, Y)$. Kujutuse $T\colon X \to Y$ tuuma tähistame sümboliga $\ker T$.

1 Eelteadmised

1.1 Nõrk topoloogia ja viilud

Olgu X Banachi ruum.

Definitsioon 1.1. *Nõrk topoloogia* on ruumi X vähim topoloogia, mille suhtes iga funktsionaal $x^* \in X^*$ on pidev.

Osutub (vt [Meg98, lk 213]), et elemendi $x \in X$ ümbruste baasi nõrgas topoloogias moodustavad lahtised hulgad kujul

$$\{y \in X \colon |x_i^*(x-y)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\},$$

kus $n \in \mathbb{N}$, $x_1^*, \dots, x_n^* \in S_{X^*}$ ja $\varepsilon > 0$.

Definitsioon 1.2. Olgu $A \subset X$. Öeldakse, et $U \subset X$ on suhteliselt (nõrgalt) lahtine A alamhulk, kui leidub (nõrgalt) lahtine hulk $V \subset X$ nii, et $U = V \cap A$.

Definitsioon 1.3. Olgu $A \subset X$ mittetühi, kumer ja tõkestatud hulk. Hulga A *viiluks* nimetatakse hulka

$$S(A, x^*, \alpha) = \{x \in A \colon x^*(x) > \sup_{a \in A} x^*(a) - \alpha\},$$

kus $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$.

Märgime, et hulga A viil on alati mittetühi suhteliselt nõrgalt lahtine A alamhulk.

Definitsioon 1.4. Olgu $A \subset X$ kumer tõkestatud hulk ja $S_1, \dots, S_m$, $m \in \mathbb{N}$, hulga A viilud. Hulga A *viilude $S_1, \dots, S_m$ kumeraks kombinatsiooniks* nimetatakse hulka

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda_n S_n,$$

kus, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ ja $\sum_{n=1}^{m} \lambda_n = 1$.

Lemma 1.5 (Bourgain'i lemma, vt [AKMMS10, Lemma 2.16])**.** *Olgu $K \subset X$ tõkestatud kinnine kumer hulk. Siis iga mittetühi suhteliselt nõrgalt lahtine K alamhulk sisaldab mingit hulga K viilude kumerat kombinatsiooni.*

Märkus 1.6 (vt [AKMMS10, Remark 2.17])**.** Bourgain'i lemmas võib loobuda hulga K kinnisuse nõudest.

Tõepoolest, olgu A tõkestatud ja kumer ning $U \subset A$ mittetühi suhteliselt nõrgalt lahtine, st leidub nõrgalt lahtine $V \subset X$ nii, et $U = V \cap A$.

Vaatleme hulka $\tilde{U} = V \cap \overline{A}$, mis on suhteliselt nõrgalt lahtine hulgas $\overline{A}$. Lemmast 1.5 saame, et leiduvad hulga $\overline{A}$ viilud $S_1, \ldots, S_m$ ja kordajad $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, $\sum_{n=1}^m \lambda_n = 1$ nii, et $\sum_{n=1}^m \lambda_n S_n \subset \tilde{U}$. Paneme tähele, et $S_n \cap A$ on hulga A viil. Eelneva põhjal ja hulga A kumeruse tõttu saame, et

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda_n (S_n \cap A) \subset \Big(\sum_{n=1}^{m} \lambda_n S_n\Big) \cap A \subset \tilde{U} \cap A = V \cap A = U.$$

Lemma 1.7. *Olgu $A, B \subset X$ kumerad tõkestatud hulgad ning $C = \operatorname{conv}(A \cup B)$. Siis iga hulga C viilu S korral $S \cap A \neq \emptyset$ või $S \cap B \neq \emptyset$.*

Tõestus. Fikseerime viilu $S := S(C, x^*, \alpha)$, kus $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$. Olgu $\tilde{c} \in S$, siis

$$x^*(\tilde{c}) > \sup_{c \in C} x^*(c) - \alpha.$$

Oletame vastuväiteliselt, et $S \cap A = \emptyset$ ja $S \cap B = \emptyset$ ehk $S \cap (A \cup B) = \emptyset$. Kuna $\tilde{c} \in C$, siis leiduvad $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, $\sum_{n=1}^m \lambda_n = 1$ nii, et $\tilde{c} = \sum_{n=1}^m \lambda_n d_n$, kus $d_n \in A \cup B$ iga $n \in \{1, \ldots, m\}$ korral. Samuti teame, et $d_n \notin S$ iga $n \in \{1, \ldots, m\}$ korral. Järelikult

$$x^*(\tilde{c}) = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x^*(d_n) \leq \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \Big(\sup_{c \in C} x^*(c) - \alpha\Big) = \sup_{c \in C} x^*(c) - \alpha,$$

mis on vastuolus elemendi $\tilde{c}$ viilu S kuulumisega. □

Lemma 1.8. *Olgu $A \subset X$ mittetühi kumer tõkestatud hulk ja S hulga A viil. Siis on hulk $A \setminus S$ kumer ja suhteliselt kinnine A alamhulk.*

Tõestus. Olgu $S = S(A, x^*, \alpha)$ hulga A viil, kus $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$. Paneme tähele, et

$$A \setminus S = \{x \in A \colon x^*(x) \leq \sup_{a \in A} x^*(a) - \alpha\}.$$

Veendume esmalt hulga $A \setminus S$ kumeruses. Olgu $x, y \in A \setminus S$ ja $\lambda \in [0,1]$ ning näitame, et

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A \setminus S.$$

Kasutades funktsionaali x^* lineaarsust saame ja teadmist, et $x, y \in A \setminus S$, saame

$$\begin{aligned}
x^*(\lambda x + (1-\lambda)y) &= x^*(\lambda x) + x^*((1-\lambda)y) = \lambda x^*(x) + (1-\lambda)x^*(y) \\
&\leq \lambda(\sup_{a\in A} x^*(a) - \alpha) + (1-\lambda)(\sup_{a\in A} x^*(a) - \alpha) \\
&= \lambda \sup_{a\in A} x^*(a) - \lambda\alpha + \sup_{a\in A} x^*(a) - \alpha - \lambda \sup_{a\in A} x^*(a) + \lambda\alpha \\
&= \sup_{a\in A} x^*(a) - \alpha,
\end{aligned}$$

järelikult on hulk $A \setminus S$ kumer.

Veendume, et $A\setminus S$ on suhteliselt kinnine A alamhulk. Olgu $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A\setminus S$ koonduv jada, mille piirelemendiks on $x_0 \in A$. Kinnisuseks teeme kindlaks, et $x_0 \in A \setminus S$.

Teame, et iga naturaalarvu n korral kehtib $x^*(x_n) \leq \sup_{a\in A} x^*(a) - \alpha$. Funktsionaal x^* on pidev, seega saame piirile minnes, et $x^*(x_0) \leq \sup\limits_{a\in A} x^*(a) - \alpha$, st $x_0 \in A \setminus S$, nagu vaja. □

1.2 Schauderi baas

Definitsioon 1.9 (vt [FHHMZ11, Definition 4.6])**.** Olgu X lõpmatumõõtmeline Banachi ruum. Jada $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ nimetatakse ruumi X *Schauderi baasiks*, kui iga $x \in X$ korral leiduvad üheselt määratud skalaarid $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ nii, et $x = \sum_{n=1}^{\infty} r_n e_n$. Jada $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ nimetatakse *baasjadaks*, kui $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ on ruumi $\overline{\text{lin}}(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})$ Schauderi baasiks.

Olgu X ja Y Banachi ruumid.

Märkus 1.10. Pole raske näha, et kui ruumil X on Schauderi baas, siis X on separaabel. Selleks piisab tähele panna, et hulk, mis sisaldab kõiki lõplikke ruumi X baaselementide lineaarkombinatsioone, mille kordajad on ratsionaalsed, on tihe ruumis X (vt teoreemi 2.21 tõestust).

Näide 1.11. Ruumide c_0 ja ℓ_p, $1 \le p < \infty$, Schauderi baasi moodustab hulk $\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, kus

$$e_n = (\underbrace{0, \ldots, 1,}_{n \text{ komponenti}} 0, \ldots).$$

Sellist baasi nimetatakse kanooniliseks baasiks ruumides c_0 ja ℓ_p.

Definitsioon 1.12. Olgu jada $\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ Schauderi baas ruumis X. Funktsionaali $e_m^* \in X^*$, $m \in \mathbb{N}$, mis on defineeritud võrdusega

$$e_m^*(x) = e_m^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty} r_n e_n\Big) = r_m \text{ iga } x = \sum_{n=1}^{\infty} r_n e_n \in X \text{ korral,}$$

nimetatakse *koordinaatfunktsionaaliks.*

Definitsioon 1.13. Öeldakse, et rida $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ruumis X koondub *tingimatult*, kui mis tahes jada $\{\varepsilon_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, kus $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, korral rida $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ koondub.

Definitsioon 1.14 (vt [FHHMZ11, Definition 4.35])**.** Olgu $\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ ruumi X Schauderi baas. Baasi $\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ nimetatakse *tingimatuks*, kui iga $x \in X$ korral tema esitus $x = \sum_{n=1}^{\infty} r_n e_n$ koondub tingimatult. Jada ruumis X nimetatakse *tingimatuks baasjadaks*, kui ta on tingimatuks baasiks ruumile $\overline{\text{lin}}(\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\})$.

Lause 1.15 (vt [FHHMZ11, Proposition 4.36])**.** *Jada $\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ ruumis X on tingimatu baasjada parajasti siis, kui leidub $K \ge 1$ nii, et iga $m \in \mathbb{N}$ ja kõikide skalaaride $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$ ning $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ korral*

$$\Big\|\sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n r_n e_n\Big\| \le K \Big\|\sum_{n=1}^{m} r_n e_n\Big\|.$$

Vähimat arvu K lausest 1.15 nimetatakse tingimatuks baasikonstandiks. Sellisel juhul öeldakse, et ruumil X on K-tingimatu baas.

Näide 1.16. On lihtne näha, et ruumide c_0 ja ℓ_p, $1 \le p < \infty$ kanooniline baas on 1-tingimatu.

Vaatleme nüüd ruumi c_0 baasi $\{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ (vt [FHHMZ11, lk 200]), mille iga baasivektor avaldub kujul

$$f_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

kus $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ on ruumi c_0 kanooniline baas. Näitame, et baas $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ pole tingimatu. Fikseerime $K \geq 1$. Võtame

$$r_1 = \varepsilon_1 = 1,\ r_2 = \varepsilon_2 = -1,\ r_3 = \varepsilon_3 = 1,\ r_4 = \varepsilon_4 = -1, \dots .$$

Siis peab iga naturaalarvu m korral kehtima

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n r_n f_n \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{m} f_n \right\| = m \leq K = \left\| \sum_{n=1}^{m} r_n f_n \right\| .$$

Kuna K on eelnevalt fikseeritud, siis leidub $m \in \mathbb{N}$ nii, et $m > K$, mis on vastuolu. Järelikult pole ruumi c_0 baas $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ tingimatu.

Definitsioon 1.17 (vt [FHHMZ11, Fact 4.22])**.** Olgu jada $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ Banachi ruumi X jada ning $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ Banachi ruumi Y jada. Öeldakse, et jadad $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ja $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ on *ekvivalentsed* parajasti siis, kui leiduvad $C_1, C_2 > 0$ nii, et iga $m \in \mathbb{N}$ ja kõikide skalaaride $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ korral kehtib

$$C_1 \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n e_n \right\|_X \leq \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n f_n \right\|_Y \leq C_2 \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n e_n \right\|_X .$$

1.3 Lisateadmisi Banachi ruumide kohta

Olgu X ja Y Banachi ruumid.

Definitsioon 1.18. Öeldakse, et normid $\|\cdot\|$ ja $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ on Banachi ruumis X *ekvivalentsed*, kui leiduvad $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ nii, et

$$\lambda_1 B_{(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)} \subset B_{(X, \|\cdot\|)} \subset \lambda_2 B_{(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)}.$$

Teoreem 1.19 (Hahn–Banachi teoreem, vt [OO91, lk 165])**.** *Olgu Z Banachi ruumi X alamruum. Kui $z^* \colon Z \to \mathbb{R}$ on pidev lineaarne funktsionaal, siis leidub talle pidev lineaarne jätk $x^* \colon X \to \mathbb{R}$ nii, et $\|z^*\| = \|x^*\|$.*

Järeldus 1.20 (Teoreem piisavast arvust funktsionaalidest, vt [OO91, lk 170])**.** *Iga $x \in X$ korral leidub $x^* \in X^*$ nii, et $\|x^*\| = 1$ ja $x^*(x) = \|x\|$.*

Teoreem 1.21 (Eraldamisteoreem, vt [FHHMZ11, Theorem 2.12])**.** *Olgu A_1 ja A_2 ruumi X mittetühjad kumerad hulgad. Kui A_1 on kompaktne, A_2 kinnine ja $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, siis leidub $x^* \in S_{X^*}$ nii, et*

$$\min\{x^*(x) \colon x \in A\} > \sup\{x^*(x) \colon x \in B\}.$$

Teoreem 1.22 (Lahtise kujutuse printsiip, vt [OO91, lk 145])**.** *Olgu $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sürjektiivne. Siis on A lahtine, kusjuures on olemas selline arv $M > 0$, et iga $y \in Y$ korral leidub $x \in X$ nii, et $y = Ax$ ja $\|x\| \leq M \|y\|$.*

Definitsioon 1.23. Öeldakse, et $\|\cdot\|_N$ ruumil $X \times Y$ on *absoluutne*, kui leidub kujutus $N \colon [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ nii, et iga $x \in X$ ja $y \in Y$ korral

$$\|(x, y)\|_N = N(\|x\|, \|y\|).$$

Absoluutne norm on *normaliseeritud*, kui $N(1, 0) = N(0, 1)$. Ruumi $X \times Y$ varustatud absoluutse normiga $\|\cdot\|_N$ tähistame $X \oplus_N Y$.

Näide 1.24. Iga p-norm

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}, & \text{kui } 1 \leq p < \infty, \\ \max\{\|x\|, \|y\|\}, & \text{kui } p = \infty, \end{cases}$$

on absoluutne normaliseeritud norm.

Teoreem 1.25. *Olgu $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) T on sürjektsioon, kusjuures iga $y \in Y$ korral

$$\|y\| = \inf\{\|x\| : x \in X,\ Tx = y\};$$

(ii) kujutus

$$\tilde{T} \colon X / \ker T \ni x + \ker T \longmapsto Tx \in Y,$$

on isomeetriline isomorfism.

2 Loenduva arvu viiludega määratud hulgad

Käesoleva paragrahvi eesmärkideks on tutvustada loenduva arvu viiludega määratud hulga mõistet, uurida vastava hulga struktuuri ning tuua nii positiivseid kui ka negatiivseid näiteid loenduva arvu viiludega määratud hulkadest.

2.1 LVM-hulga mõiste ja samaväärsed tingimused

Selles paragrahvis defineerime esmalt üldise hulga määravuse mõiste, millest lähtume terve töö vältel. Lisaks esitame hulga määravuseks mitmeid tarvilikke ja piisavaid tingimusi.

Olgu X Banachi ruum.

Definitsioon 2.1 (vt [AKMMS10, Definition 2.1])**.** Olgu A kumer tõkestatud hulk ruumis X. Öeldakse, et hulga A osahulkade jada $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ on *hulka A määrav*, kui iga sellise hulga $B \subset A$, kus $B \cap V_n \neq \emptyset$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, kehtib sisalduvus $A \subset \overline{\mathrm{conv}}(B)$.

Lemma 2.2. *Olgu $A \subset X$ kumer tõkestatud hulk ning $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ hulga A osahulkade jada. Siis järgmised väited on samaväärsed.*

(i) $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ *on hulka A määrav;*

(ii) *iga jada* $\{v_n \colon n \in \mathbb{N},\ v_n \in V_n\}$ *korral kehtib* $A \subset \overline{\mathrm{conv}}(\{v_n \colon n \in \mathbb{N},\ v_n \in V_n\})$*;*

(iii) *iga kumera hulga $B \subset A$, kus $B \cap V_n \neq \emptyset$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, kehtib*

$$A \subset \overline{\mathrm{conv}}(B) = \overline{B}.$$

Tõestus. $(i) \implies (ii)$. Olgu $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ hulka A määrav ja fikseerime jada $\{v_n \colon n \in \mathbb{N},\ v_n \in V_n\}$. Paneme tähele, et

$$\{v_n \colon n \in \mathbb{N},\ v_n \in V_n\} \subset A \quad \text{ja} \quad \{v_n \colon n \in \mathbb{N},\ v_n \in V_n\} \cap V_n \neq \emptyset$$

iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Järelikult, $A \subset \overline{\mathrm{conv}}(\{v_n \colon n \in \mathbb{N},\ v_n \in V_n\})$.

(ii) $\implies$ *(iii)*. Fikseerime kumera hulga $B \subset A$ nii, et B lõikab iga hulka V_n. Olgu $v_n \in B \cap V_n$ iga naturaalarvu n korral. Siis eelduse ja sulundi monotoonsuse tõttu

$$A \subset \overline{\mathrm{conv}}(\{v_n \colon n \in \mathbb{N},\ v_n \in V_n\}) \subset \overline{\mathrm{conv}}(B) = \overline{B}.$$

(iii) $\implies$ *(i)*. Fikseerime hulga $B \subset A$ nii, et B lõikab iga hulka V_n. Paneme tähele, et kuna A on kumer, siis

$$B \subset \mathrm{conv}(B) \subset A.$$

Eelduse põhjal lõikab ka hulk $\mathrm{conv}(B)$ iga hulka V_n. Tingimusest *(iii)* saame, et

$$A \subset \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{conv}(B)) = \overline{\mathrm{conv}}(B).$$

$\square$

Lemma 1.8 abil tõestame veel ühe samaväärse tingimuse hulga määravuseks.

Lause 2.3 (vt [AKMMS10, Proposition 2.2])**.** *Olgu $A \subset X$ kumer tõkestatud hulk. Hulga A osahulkade jada $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ on hulka A määrav parajasti siis, kui iga hulga A viil sisaldab mingit hulka V_n.*

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et hulga A osahulkade jada $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ on hulka A määrav, st iga $B \subset A$ korral, kus B lõikab iga hulka V_n, kehtib sisalduvus $A \subset \overline{\mathrm{conv}}(B)$. Peame tõestama, et iga hulga A viil sisaldab ühte hulkadest V_n.

Oletame vastuväiteliselt, et leidub selline hulga A viil S, mis ei sisalda ühtegi hulka V_n:

$$S = S(A, x^*, \alpha) = \{x \in A \colon x^*(x) > \sup_{a \in A} x^*(a) - \alpha\},$$

kus $\alpha > 0$ ning $x^* \in S_{X^*}$. Lemma 1.8 põhjal on hulk $A \setminus S$ on kumer ja suhteliselt kinnine A alamhulk.

On selge, et $A \setminus S$ lõikab kõiki hulki V_n. Seega jada $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ määravuse tõttu kehtib sisalduvus $A \subset \overline{\mathrm{conv}}(A \setminus S) = A \setminus S$, mis on vastuolu, sest viil S on alati mittetühi.

Piisavus. Olgu hulga A osahulkade jada $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ selline, et iga hulga A viil sisaldab ühte hulkadest V_n. Peame tõestama, et see osahulkade jada on hulka

A määrav.

Olgu $B \subset A$ selline, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $B \cap V_n \neq \emptyset$. Tõestuse lõpetuseks piisab tõestada sisalduvus $A \subset \overline{\text{conv}}(B)$.

Esmalt paneme tähele, et kuna B lõikab igat hulka V_n, lõikab hulk B ka iga hulga A viilu. Põhjendame seda väidet. Oletame, et B ei lõika mingit hulga A viilu S_0. Eelduse põhjal leidub $m \in \mathbb{N}$ nii, et $V_m \subset S_0$. Sellisel juhul kehtib $B \cap V_m = \emptyset$, mis on vastuolus eeldusega. Seega kehtib $B \cap S \neq \emptyset$, kus S on hulga A suvaline viil.

Nüüd saame tõestada sisalduvuse $A \subset \overline{\text{conv}}(B)$. Selleks oletame vastuväiteliselt, et leidub $a_0 \in A$ nii, et $a_0 \in A \setminus \overline{\text{conv}}(B)$. Valime hulgad A_1 ja A_2 järgmiselt:

$$A_1 = \{a_0\}, \quad A_2 = \overline{\text{conv}}(B).$$

On selge, et A_1 ja A_2 on kumerad ning $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Paneme tähele veel, et A_1 on kompaktne ja A_2 on kinnine. Järelikult, teoreemi 1.21 põhjal leidub $x^* \in S_{X^*}$ nii, et

$$x^*(a_0) > \sup_{x \in A_2} x^*(x)$$

Paneme tähele, et

$$x^*(a_0) > \sup_{x \in A_2} x^*(x) \geq \sup_{x \in B} x^*(x),$$

sest $A_2 = \overline{\text{conv}}(B) \supset B$. Range võrratuse tõttu leidub $\alpha > 0$ nii, et

$$x^*(a_0) - \alpha > \sup_{x \in B} x^*(x) \tag{2.1}$$

Teisalt, kuna iga hulga A viil S lõikab hulka B, siis ka $S(A, x^*, \alpha) \cap B \neq \emptyset$. Toetudes viilu definitsioonile, saame, et leidub $b_0 \in B$, mis rahuldab tingimust

$$x^*(b_0) > \sup_{a \in A} x^*(a) - \alpha \geq x^*(a_0) - \alpha. \tag{2.2}$$

Võrratustest (2.1) ja (2.2) saame, et

$$x^*(a_0) - \alpha > \sup_{x \in B} x^*(x) > x^*(b_0) > x^*(a_0) - \alpha,$$

mis on vastuolu. Järelikult peab kehtima sisalduvus $A \subset \overline{\mathrm{conv}}(B)$. $\square$

Esitame eelnevalt tõestatud lause abil veel ühe samaväärse kuju hulga määravuseks.

Lause 2.4. *Olgu $A \subset X$ kumer ja tõkestatud hulk. Hulga A osahulkade jada $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ on hulka A määrav parajasti siis, kui iga kinnine kumer hulk K, mis lõikab iga hulka V_n, lõikab ka kõiki hulga A viile.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu K selline kinnine kumer hulk, mis lõikab iga hulka V_n ning olgu S suvaline hulga A viil. Kuna jada $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ on määrav, siis lause 2.3 põhjal $V_{n_0} \subset S$ mingi $n_0 \in \mathbb{N}$ korral, seega ka $K \cap S \neq \emptyset$.

Piisavus. Tõestamiseks piisab lause 2.3 põhjal näidata, et iga hulga A viil S korral leidub $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et $V_{n_0} \subset S$.

Oletame vastuväiteliselt, et leidub viil $S = S(A, x^*, \alpha)$ nii, et iga naturaalarvu n korral $V_n \not\subset S$, st leidub $v_n \in V_n \setminus S$.

Moodustame nüüd kinnise kumera hulga $K := \overline{\mathrm{conv}}(\{v_n \colon n \in \mathbb{N}\})$, kusjuures on selge, et $K \cap V_n \neq \emptyset$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Siis eelduse põhjal $K \cap S \neq \emptyset$ ehk leidub $x \in K \cap S$. Olgu $\varepsilon > 0$ selline et

$$x^*(x) - \varepsilon > \sup_{a \in A} x^*(a) - \alpha. \tag{2.3}$$

Leiame $m \in \mathbb{N}$, $v_{n_i} \in V_{n_i}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ nii, et

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_{n_i} \right\| \leq \varepsilon.$$

Kuna $v_{n_i} \notin S$ iga $i \in \{1, \ldots, m\}$ korral, siis

$$x^*(v_{n_i}) \leq \sup_{a \in A} x^*(a) - \alpha.$$

Nüüd

$$
\begin{aligned}
x^*(x) &= x^*\Big(x + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_{n_i} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_{n_i}\Big) \\
&= x^*\Big(x - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_{n_i}\Big) + x^*\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_{n_i}\Big) \\
&\leq \Big\| x - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_{n_i} \Big\| + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^*(v_{n_i}) \\
&\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big(\sup_{a \in A} x^*(a) - \alpha \Big) \\
&= \varepsilon + \sup_{a \in A} x^*(a) - \alpha.
\end{aligned}
$$

Mis on vastuolu võrratusega (2.3). □

Toome nüüd kaks piisavat tingimust hulga määravuseks.

Lemma 2.5 (vt [AKMMS10, Remark 2.3])**.** *Olgu $A \subset X$ kumer ja tõkestatud. Eeldame, et*

(a) leidub selline jada $\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset A$ nii, et $A \subset \overline{\text{conv}}(\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\})$;

(b) iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub hulkade jada $\{V_{n,m} \colon m \in \mathbb{N}\} \subset A$ nii, et iga $B \subset A$ korral, mis lõikab hulka $V_{n,m}$ iga $m \in \mathbb{N}$ korral, kehtib $a_n \in \overline{\text{conv}}(B)$.

Siis hulkade jada $\{V_{n,m} \colon n, m \in \mathbb{N}\} \subset A$ määrab hulka A.

Tõestus. Veendume, et hulkade jada $\{V_{n,m} \colon n, m \in \mathbb{N}\} \subset A$ määrab hulka A, st iga $B \subset A$ korral, mis lõikab hulka $V_{n,m}$ iga $n, m \in \mathbb{N}$ korral, kehtib sisalduvus $A \subset \overline{\text{conv}}(B)$.

Fikseerime $B \subset A$ ning eeldame, et $V_{n,m} \cap B \neq \emptyset$ iga $n, m \in \mathbb{N}$ korral. Nüüd eelduste põhjal $A \subset \overline{\text{conv}}(\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\})$ ning iga $n \in \mathbb{N}$ korral $a_n \in \overline{\text{conv}}(B)$. Järelikult kehtib

$$
A \subset \overline{\text{conv}}(\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}) \subset \overline{\text{conv}}(B).
$$

□

Vahetult lemmast 2.5 saame järgmise abitulemuse.

Lemma 2.6 (vt [AKMMS10, Remark 2.4]). *Olgu $A \subset X$ separaabel kumer tõkestatud hulk. Eeldame, et iga $a \in A$ korral leidub hulkade jada $\{V_m^a \colon m \in \mathbb{N}\} \subset A$ nii, et kehtib $a \in \overline{\operatorname{conv}}(B)$ iga $B \subset A$ korral, mis lõikab hulka V_m^a iga $m \in \mathbb{N}$ korral. Siis, võttes tiheda alamhulga $\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset A$, on hulga A osahulkade jada $\{V_m^{a_n} \colon n, m \in \mathbb{N}\}$ hulka A määrav.*

Anname nüüd selle bakalaureusetöö põhidefinitsiooni.

Definitsioon 2.7 (vt [AKMMS10, Definition 2.5]). Kumerat tõkestatud hulka $A \subset X$ nimetatakse *loenduva arvu viiludega määratud hulgaks* ehk *LVM-hulgaks*, kui leidub hulka A määrav hulkade jada, mis koosneb hulga A viiludest.

Lemma 2.8 (vt [AKMMS10, Remark 2.7]). *Banachi ruumi X kumer tõkestatud alamhulk A on LVM-hulk parajasti siis, kui hulga A sulund on LVM-hulk.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu A LVM-hulk, st leidub hulka A määrav osahulkade jada $\{S_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, kus $S_n = S(A, x_n^*, \alpha_n)$, $x_n^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Näitame, et viilude jada $\{S_n' \colon n \in \mathbb{N}\}$, kus $S_n' = S(\overline{A}, x_n^*, \alpha_n/2)$, $n \in \mathbb{N}$, on määrav hulga $\overline{A}$ jaoks.

Olgu $S = S(\overline{A}, x^*, \alpha)$ fikseeritud hulga A sulundi viil. Tõestuse lõpetuseks piisab lause 2.3 abil näidata, et S sisaldab ühte hulkadest S_n'. Paneme tähele, et

$$S\Big(\overline{A}, x^*, \frac{\alpha}{2}\Big) \cap A = S\Big(A, x^*, \frac{\alpha}{2}\Big),$$

mis tähendab, et vaadeldav ühisosa on hulga A viil. Lause 2.3 põhjal leidub naturaalarv $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et $S(A, x^*, \frac{\alpha}{2}) \supset S_{n_0}$. Paneme tähele, et sulundi monotoonsuse tõttu kehtib

$$\overline{S_{n_0}} \subset \overline{S\Big(A, x^*, \frac{\alpha}{2}\Big)} = \Big\{x \in \overline{A} \colon x^*(x) \geq \sup_{a \in \overline{A}} x^*(a) - \frac{\alpha}{2}\Big\}.$$

Veelgi enam, $\overline{S(A, x^*, \frac{\alpha}{2})} \subset S$. Tõepoolest, olgu $x \in \overline{S(A, x^*, \frac{\alpha}{2})}$, siis

$$\begin{aligned} x^*(x) &\geq \sup_{a \in \overline{A}} x^*(a) - \frac{\alpha}{2} \\ \iff x^*(x) - \frac{\alpha}{2} &\geq \sup_{a \in \overline{A}} x^*(a) - \alpha \\ \implies x^*(x) &> \sup_{a \in \overline{A}} x^*(a) - \alpha, \end{aligned}$$

seega sisalduvus kehtib. Samuti on selge, et $\overline{S_{n_0}} \supset S'_{n_0}$, millest saame kokkuvõttes, et $S'_{n_0} \subset S$.

Piisavus. Olgu hulga A sulundi osahulkade jada $\{S(\overline{A}, x_n^*, \alpha_n) \colon n \in \mathbb{N}\}$ hulka $\overline{A}$ määrav. Tõestame, et jada $\{S(A, x_n^*, \alpha_n) \colon n \in \mathbb{N}\}$ määrab hulka A.

Olgu $B \subset A$ selline, mis lõikab igat viilu $S(A, x_n^*, \alpha_n)$. Siis B lõikab ka igat viilu $S(\overline{A}, x_n^*, \alpha_n)$, seega

$$\overline{\mathrm{conv}}(B) \supset \overline{A} \supset A.$$

$\square$

Veendume nüüd, et kumerate hulkade korral võime LVM-hulga puhul viilud asendada samaväärselt suhteliselt nõrgalt lahtiste hulkadega või viilude kumerate kombinatsioonidega.

Lause 2.9 (vt [AKMMS10, Proposition 2.18])**.** *Olgu $A \subset X$ kumer ja tõkestatud hulk. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) A on LVM-hulk;

(ii) Leidub hulka A määrav jada $\{W_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset A$, mis koosneb hulga A mittetühjadest suhteliselt nõrgalt lahtistest hulkadest;

(iii) Leidub hulka A määrav jada $\{K_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset A$, mis koosneb hulga A viilude kumeratest kombinatsioonidest.

Tõestus. Olgu $A \subset X$ kumer tõkestatud hulk. Iga hulga A viil on suhteliselt nõrgalt lahtine hulk, seega $(i) \implies (ii)$ ja $(i) \implies (iii)$ on selged.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Olgu jada $\{K_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ hulka A määrav, kusjuures jada liikmed on hulga A viilude kumerad kombinatsioonid. Seega iga $n \in \mathbb{N}$ korral leiduvad viilud $\{S_{n,m}\colon m = 1,\dots,k_n\}$ ja mittenegatiivsed arvud $\{\lambda_{n,m}\colon m = 1,\dots,k_n\}$, kus $\sum_{m=1}^{k_n} \lambda_{n,m} = 1$, nii, et $\sum_{m=1}^{k_n} \lambda_{n,m} S_{n,m} = K_n$. Näitame, et viilude jada $\{S_{n,m}\colon n \in \mathbb{N}, 1 \le m \le k_n\}$ on hulka A määrav.

Olgu $B \subset A$ selline, et B lõikab hulka $S_{n,m}$ iga $n,m \in \mathbb{N}$ korral. Siis leidub $b_{n,m} \in B \cap S_{n,m}$. Valides $a_n = \sum_{m=1}^{k_n} \lambda_{n,m} b_{n,m}$, näeme, et $a_n \in \operatorname{conv}(B) \cap K_n$. Järelikult teame, et $\operatorname{conv}(B) \cap K_n \neq \emptyset$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Kuna jada $\{K_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ määrab hulka A, siis

$$\overline{\operatorname{conv}}(B) = \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{conv}(B)) \supset A.$$

Seega on jada $\{S_{n,m}\colon n,m \in \mathbb{N}\}$ hulka A määrav.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Oletame nüüd, et hulka A määrab jada $\{W_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subset A$, mille liikmed on hulga A mittetühjad suhteliselt nõrgalt lahtised hulgad. Kasutades lemmat 1.5, saame leida igas hulgas W_n viilude kumera kombinatsiooni K_n. Seega, korrates $(iii) \implies (i)$ tõestust saame, et A on LVM-hulk. □

Märkus 2.10. Kumeruse eeldust lauseses 2.9 ei saa üldiselt ära jätta. Tõepoolest, V. Kadets, A. Peréz ja D. Werner näitasid, et leidub mittekumeraid hulki, mis pole LVM-hulgad, aga millel leidub suhteliselt nõrgalt lahtistest hulkadest koosnev jada, mis määrab seda hulka (vt [KPW18, Proposition 2.6]).

2.2 Positiivsed näited LVM-hulkadest

Selles paragrahvis esitame mitmeid piisavaid tingimusi LVM-hulgaks olemiseks ja tõestame, et mis tahes separaabel Banachi ruum on ekvivalentselt ümbernormeeritav nii, et tema ühikkera on LVM-hulk.

Olgu X Banachi ruum.

Lause 2.11. *Kui X^* on separaabel, siis iga kumer tõkestatud hulk $A \subset X$ on LVM-hulk.*

Tõestus. Olgu $A \subset X$ kumer ja tõkestatud. Kuna X^* on separaabel, siis leidub tihe alamhulk $\{x_n^*\colon n \in \mathbb{N}\}$ hulgas S_{X^*}. Vaatleme viile $S_{n,m} = S(A, x_n^*, 1/m)$, kus $n,m \in \mathbb{N}$. Lause 2.3 põhjal piisab näidata, et iga hulga A viil sisaldab ühte viilu $S_{n,m}$.

Fikseerime viilu $S = S(A, x^*, \alpha)$, $x^* \in S_{X^*}$, $\alpha > 0$ suvaliselt.

Kuna A on tõkestatud, siis leidub $M > 0$ nii, et $\|x\| \leq M$ iga $x \in A$ korral. Samuti saame X^* separaablusest leida $x^*_{n_0}$ nii, et $\left\|x^* - x^*_{n_0}\right\| \leq \alpha/(3M)$, ehk kehtib $|x^*_n(x) - x^*(x)| < \alpha/3$ iga $x \in A$ korral.

Leiame $m_0 \in \mathbb{N}$ nii, et $1/m < \alpha$. Näitame, et $S_{n_0,m_0} \subset S$. Olgu $x \in S_{n_0,m_0}$. Siis

$$\begin{aligned} x^*(x) &\geq x^*_{n_0}(x) - \frac{\alpha}{3} > \sup_{a \in A} x^*_{n_0}(x) - \frac{1}{m_0} - \frac{\alpha}{3} \geq \sup_{a \in A} x^*(x) - \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{m_0} - \frac{\alpha}{3} \\ &\geq \sup_{a \in A} x^*(x) - \alpha. \end{aligned}$$

Seega $x \in S$, nagu vaja. □

Definitsioon 2.12. Olgu A Banachi ruumi X kinnine kumer tõkestatud alamhulk. Punkti $a \in A$ nimetatakse *hammaspunktiks*, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub viil $S(A, x^*, \alpha)$ $(x^* \in S_{X^*}, \alpha > 0)$ nii, et

$$\operatorname{diam}\Big(S(A, x^*, \alpha)\Big) \leq \varepsilon \text{ ja } a \in S(A, x^*, \alpha).$$

Kõiki hulga A hammaspunkte tähistame sümboliga $\operatorname{dent}(A)$. Hulka A nimetatakse *hambuvaks*, kui kehtib võrdus $A = \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{dent}(A))$ (vt [GGMS87, III.3]).

Näide 2.13. Banachi ruumi ℓ_2^2 iga ühiksfääri punkt on hammaspunkt.

Näide 2.14. Banachi ruumi ℓ_1^2 ühiksfääri punkt (x, y) on hammaspunkt parajasti siis, kui

$$(x, y) \in \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}.$$

Lause 2.15 (vt [AKMMS10, Proposition 2.8])**.** *Olgu A Banachi ruumi X kinnine kumer tõkestatud alamhulk. Kui A on separaabel ja hambuv, siis A on LVM-hulk.*

Tõestus. Olgu A separaabel ja hambuv. Kuna iga separaabli hulga alamhulk on separaabel, siis on ka $\operatorname{dent}(A)$ separaabel, st leidub loenduv hulk $\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, mis on tihe hulgas $\operatorname{dent}(A)$.

Vaatleme iga $n, m \in \mathbb{N}$ korral selliseid hulga A viile $S_{n,m}$, mille korral

$$\operatorname{diam}\big(S_{n,m}\big) \leq \frac{1}{m} \text{ ja } a_n \in S_{n,m}.$$

Selliseid viile leidub hammaspunktide a_n definitsiooni tõttu.

Valitud viilude jada $\{S_{n,m}\colon n, m \in \mathbb{N}\}$ on hulka A määrav. Selleks paneme tähele, et kui $B \subset A$ lõikab kõiki viile $S_{n,m}$, siis iga naturaalarvu n korral $a_n \in \overline{B}$. Viimase sisalduvuse tõestamiseks piisab näidata, et iga $\varepsilon > 0$ leidub $y \in B$ nii, et $\|a_n - y\| \leq \varepsilon$.

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kuna a_n on hammaspunkt, siis leidub viil S_{n,m_0} nii, et

$$\operatorname{diam}\big(S_{n,m_0}\big) \leq \varepsilon \text{ ja } a_n \in S_{n,m_0}.$$

Lisaks sellele on teada, et $S_{n,m_0} \cap B \neq \emptyset$, st leidub $b \in B$ nii, et

$$\|b - a_n\| \leq \operatorname{diam}\big(S_{n,m_0}\big) \leq \varepsilon.$$

Järelikult, $a_n \in \overline{B}$.

Kasutades hulga A hambuvust ning kumera sulundi omadusi, saame

$$A = \overline{\operatorname{conv}}\big(\operatorname{dent}(A)\big) = \overline{\operatorname{conv}}\big(\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}\big) \subset \overline{\operatorname{conv}}\big(\overline{B}\big) = \overline{\operatorname{conv}}(B).$$

Seega A on LVM-hulk. □

Järgmiseks eesmärgiks on näidata (vt lause 2.20), et iga separaabel Banachi ruum on ümbernormeeritav nii, et uus ühikkera on LVM-hulk. Selle eesmärgi saavutamiseks tutvume esmalt lokaalselt ühtlaselt kumera punkti mõistega.

Definitsioon 2.16. Olgu X Banachi ruum ja $x \in S_X$. Punkti x nimetatakse *lokaalselt ühtlaselt kumeraks punktiks* ehk *LÜK-punktiks*, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \left(y \in S_X \wedge \frac{\|x + y\|}{2} > 1 - \delta \implies \|x - y\| < \varepsilon \right).$$

Öeldakse, et ruum X on *lokaalselt ühtlaselt kumer* ehk *LÜK*, kui iga $x \in S_X$ on LÜK-punkt.

Näide 2.17. Banachi ruumid ℓ_p^2, $1 < p < \infty$, on LÜK-ruumid.

Lemma 2.18. *Olgu $x \in S_X$. Kui x on LÜK-punkt, siis x on hammaspunkt.*

Tõestus. Olgu $x \in S_X$ LÜK-punkt. Peame tõestama, et

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists S(B_X, x^*, \alpha) \left(x \in S(B_X, x^*, \alpha) \wedge \operatorname{diam}\big(S(B_X, x^*, \alpha)\big) \leq \varepsilon \right).$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Järelduse 1.20 abil saame leida $x^* \in S_{X^*}$ nii, et $x^*(x) = 1$. Kuna x on LÜK-punkt, siis leidub $\delta > 0$ nii, et

$$y \in S_X \wedge \frac{\|x + y\|}{2} > 1 - \delta \implies \|x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Olgu $\gamma \in (0, \delta)$ ja vaatleme viilu $S = S(B_X, x^*, \gamma)$. On selge, et $x \in S$.
Paneme tähele, et kui $z \in S$, siis

$$\left\| z - \frac{z}{\|z\|} \right\| = \left\| \frac{z(\|z\| - 1)}{\|z\|} \right\| = |\|z\| - 1| \left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = |\|z\| - 1| \leq \gamma.$$

Märkame, et kasutades tagurpidi kolmnurga võrratust ning funktsionaali x^* lineaarsust, saame

$$\begin{aligned} \frac{\left\| x + \frac{z}{\|z\|} \right\|}{2} &\geq \frac{\|x + z\| - \left\| z - \frac{z}{\|z\|} \right\|}{2} \geq \frac{x^*(x) + x^*(z) - \gamma}{2} \\ &> \frac{1 + 1 - \gamma - \gamma}{2} > 1 - \gamma. \end{aligned}$$

Et x on LÜK-punkt, saame viimasest võrratusest

$$\left\| x - \frac{z}{\|z\|} \right\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Valime $\gamma = \min\{\varepsilon/4, \delta/2\}$ ja olgu $a, b \in S(B_X, x^*, \gamma)$ suvalised. Siis

$$\begin{aligned} \|a - b\| \leq \|a - x\| + \|x - b\| &= \left\| a - x + \frac{a}{\|a\|} - \frac{a}{\|a\|} \right\| + \left\| x - b + \frac{b}{\|b\|} - \frac{b}{\|b\|} \right\| \\ &< \left\| a - \frac{a}{\|a\|} \right\| + \left\| \frac{a}{\|a\|} - x \right\| + \left\| x - \frac{b}{\|b\|} \right\| + \left\| \frac{b}{\|b\|} - b \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Järelikult, diam $\big(S(B_X, x^*, \gamma)\big) \leq \varepsilon$, nagu vaja. $\square$

Lause 2.19 (vt [AKMMS10, Example 2.10])**.** *Olgu X separaabel ja LÜK Banachi ruum. Siis B_X on LVM-hulk.*

Tõestus. Kui X on separaabel ja LÜK, siis lemma 2.18 põhjal $\mathrm{dent}(S_X) = S_X$. Kuna $\mathrm{dent}(S_X) \subset \mathrm{dent}(B_X)$, siis

$$B_X = \overline{\mathrm{conv}}(S_X) = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{dent}(S_X)) = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{dent}(B_X)).$$

Seega B_X on hambuv ja lause 2.15 põhjal on B_X LVM-hulk. $\square$

Lause 2.20 (vt [AKMMS10, Example 2.11])**.** *Iga separaabli Banachi ruumi X korral leidub ekvivalentne norm $|||\cdot|||$ ruumil X nii, et ühikkera $B_{(X,|||\cdot|||)}$ on LVM-hulk.*

Tõestus. On teada, et iga separaabli Banachi ruumi korral leidub ekvivalentne norm $|||\cdot|||$ nii, et ruum $(X, |||\cdot|||)$ on LÜK (vt [DGZ93, Theorem 2.2.6]). Järelikult, lause 2.19 põhjal on ruumi $(X, |||\cdot|||)$ ühikkera LVM-hulk. $\square$

Näitame nüüd, et mis tahes 1-tingimatu baasiga Banachi ruumi ühikkera on LVM-hulk.

Teoreem 2.21 (vt [KMMW13, Theorem 3.1])**.** *Olgu X selline Banachi ruum, millel on 1-tingimatu baas. Siis B_X on LVM-hulk.*

Tõestus. Olgu $\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ 1-tingimatu baas ja $\{e_n^* \colon n \in \mathbb{N}\}$ koordinaatfunktsionaalid. Vaatleme hulka $D = \{\sum_{n=1}^k q_n e_n \colon k \in \mathbb{N},\ q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{Q}\}$. On selge, et D on loenduv ning D on tihe ruumis X, sest $\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ on ruumi X Schauderi baas. Järelikult, $\hat{D} = D \cap B_X$ on hulga B_X loenduv ja tihe alamhulk.

Olgu $a \in \hat{D},\ a = \sum_{n=1}^k q_n e_n$ ja $x \in B_X,\ x = \sum_{n=1}^\infty r_n e_n$. Siis iga $n \in \{1, \ldots, k\}$ ja $m \in \mathbb{N}$ korral

$$|e_n^*(x - q)| = |e_n^*(x) - e_n^*(q)| = |r_n - q_n| < \frac{1}{m} \iff \max_{1 \leq n \leq k} |r_n - q_n| < \frac{1}{m}.$$

Järelikult saame defineerida iga $a = \sum_{n=1}^{k} q_n e_n \in \hat{D}$ ja $m \in \mathbb{N}$ korral suhteliselt nõrgalt lahtised ümbrused kujul

$$U(a,m) := \Big\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} r_n e_n \in B_X \colon \max_{1 \le n \le k} |x_n - q_n| < \frac{1}{m} \Big\}.$$

Vaatleme moodustatud hulkade jada $\{U(a,m) \colon a \in \hat{D},\ m \in \mathbb{N}\}$. Kuna $\hat{D}$ on loenduv, siis on jada $\{U(a,m) \colon a \in \hat{D},\ m \in \mathbb{N}\}$ loenduv. Näitame, et hulga B_X määrab jada $\{U(a,m) \colon a \in \hat{D},\ m \in \mathbb{N}\}$, mistõttu lause 2.9 põhjal saame, et B_X on LVM-hulk.

Lemma 2.4 tõttu piisab selleks näidata, et iga kinnine kumer hulk hulga B_X alamhulk, mis lõikab kõiki hulki $U(a,m)$, lõikab igat B_X viilu.

Fikseerime kinnise kumera hulga $V \subset B_X$ nii, et $V \cap U(a,m) \neq \emptyset$ iga $a \in \hat{D}$ ja $m \in \mathbb{N}$ korral ja viilu $S(B_X, x^*, \alpha)$ suvaliselt.

Valime nüüd $a = \sum_{n=1}^{k} q_n e_n \in \tilde{D} \cap S(B_X, x^*, \alpha/4)$. Kuna $V \cap U(a,m) \neq \emptyset$ iga $m \in \mathbb{N}$ korral, siis leidub selline $m_0 \in \mathbb{N}$ ja $x = \sum_{n=1}^{\infty} r_n e_n \in V \cap U(a, m_0)$, et

$$\max_{1 \le n \le k} |x_n - q_n| < \frac{1}{m_0} < \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{1}{2^k}.$$

Seega

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n=1}^{k} r_n e_n - a \Big\| &= \Big\| \sum_{n=1}^{k} r_n e_n - \sum_{n=1}^{k} q_n e_n \Big\| \le \sum_{n=1}^{k} \|(r_n - q_n) e_n\| \\ &= \sum_{n=1}^{k} |r_n - q_n| \, \|e_n\| < \sum_{n=1}^{k} \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{1}{2^k} < \frac{\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Viimasest saame hinnangu

$$\frac{\alpha}{4} > \Big\| \sum_{n=1}^{k} r_n e_n - a \Big\| \ge \Big| x^* \Big(\sum_{n=1}^{k} r_n e_n - a \Big) \Big|,$$

mistõttu

$$x^* \Big(\sum_{n=1}^{k} r_n e_n \Big) > x^*(a) - \frac{\alpha}{4} > 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Tuletame meelde, et baasi $\{e_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ 1-tingimatus tähendab (vt lause 1.15), et kõikide märkide $\varepsilon_n\in\{-1,1\},\ n\in\mathbb{N}$ korral

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n r_n e_n\Big\| = \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} r_n e_n\Big\|.$$

Võtame kuni indeksini k märgid $\varepsilon_1=\dots=\varepsilon_k=1$ ning ülejäänud indeksite korral $-1=\varepsilon_{k+1}=\varepsilon_{k+2}=\dots$. Siis

$$1\geq\|x\| = \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} r_n e_n\Big\| = \Big\|\sum_{n=1}^{k} r_n e_n - \sum_{n=k+1}^{\infty} r_n e_n\Big\| \geq \Big|x^*\Big(\sum_{n=1}^{k} r_n e_n - \sum_{n=k+1}^{\infty} r_n e_n\Big)\Big|.$$

Nüüd saame leitud hinnangutest, et

$$\begin{aligned}
x^*(x) &= x^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty} r_n e_n\Big) = x^*\Big(\sum_{n=1}^{k} r_n e_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} r_n e_n\Big)\\
&= x^*\Big(\sum_{n=1}^{k} r_n e_n\Big) + x^*\Big(\sum_{n=1}^{k} r_n e_n\Big) - x^*\Big(\sum_{n=1}^{k} r_n e_n - \sum_{n=k+1}^{\infty} r_n e_n\Big)\\
&= 2x^*\Big(\sum_{n=1}^{k} r_n e_n\Big) - x^*\Big(\sum_{n=1}^{k} r_n e_n - \sum_{n=k+1}^{\infty} r_n e_n\Big)\\
&> 2\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big) - 1 = 1-\alpha,
\end{aligned}$$

mis tähendab, et $x\in V\cap S(B_X,x^*,\alpha)$ ehk V lõikab viilu $S(B_X,x^*,\alpha)$. □

Senini pole teada, et kas iga K-tingimatu baasiga, kus $K>1$, Banachi ruumi ühikkera on LVM-hulk (vrd [KPW18, Problem 4]).

2.3 Negatiivsed näited LVM-hulkadest

Käesolevas paragrahvis tõestame, et Daugaveti omadusega Banachi ruumi ühikkera pole loenduva arvu viilude määratud. Samuti näitame, et loenduva arvu viiludega määratud hulga alamhulk ei tarvitse olla loenduva arvu viiludega määratud.

Olgu X ja Y Banachi ruumid.

Definitsioon 2.22 (vt [Wer01, Lemma 2.2])**.** Öeldakse, et ruumil X on *Daugaveti omadus*, kui iga viilu $S = S(B_X, x_0^*, \alpha_0)$, iga $x_0 \in S_X$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $x \in S$ nii, et

$$\|x + x_0\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Näide 2.23. Banachi ruumid $C[0,1]$ ja $L_1[0,1]$ on Daugaveti omadusega (vt [Wer01, lk 77]).

Näitamaks, et Daugaveti omadusega ruumi ühikkera pole LVM-hulk, kasutame järgmist tulemust.

Lemma 2.24 (vt [KSSW00, Lemma 2.8])**.** *Olgu X Daugaveti omadusega Banachi ruum. Siis ruumi X iga lõplikumõõtmelise alamruumi Y_0, iga $\varepsilon > 0$ ja iga viilu $S(B_X, x_0^*, \alpha_0)$ korral leidub viil $S(B_X, x_1^*, \alpha_1) \subset S(B_X, x_0^*, \alpha_0)$ nii, et kehtib võrratus*

$$\|y + tx\| \geq (1-\varepsilon)(\|y\| + |t|) \quad \forall y \in Y_0, \quad \forall x \in S(B_X, x_1^*, \alpha_1), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lause 2.25 (vt [AKMMS10, Example 2.13])**.** *Olgu X Daugaveti omadusega separaabel Banachi ruum. Siis B_X ei ole LVM-hulk.*

Tõestus. Fikseerime $x_0 \in S_X$ ja suvalise ühikkera viilude jada $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$. Näitame, et leidub jada $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, mille puhul iga n korral $x_n \in S_n$ ning kehtib $x_0 \notin \overline{\mathrm{lin}}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) \supset \overline{\mathrm{conv}}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$. Sellisel juhul oleme näidanud, et ei ole olemas viilude jada, mis määrab hulka B_X (vt lemmat 2.2, jadade kuju).

Olgu $Y_1 = \mathrm{lin}\{x_0\}$ ja $\varepsilon_1 = 1/4$. Siis lemma 2.24 põhjal leidub $x_1 \in S_1$ nii, et

$$\|y + tx_1\| \geq \Big(1 - \frac{1}{4}\Big)(\|y\| + |t|) \quad \forall y \in Y_1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Olgu nüüd $Y_2 = \mathrm{lin}\{x_0, x_1\}$ ja $\varepsilon_2 = 1/4^2$ ning rakendame lemmat 2.24 uuesti. Siis leidub $x_2 \in S_2$, et

$$\|y + tx_2\| \geq \Big(1 - \frac{1}{4^2}\Big)(\|y\| + |t|) \quad \forall y \in Y_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Analoogiliselt jätkates saame iga $n \in \mathbb{N}$ korral leida $x_n \in S_n$ nii, et

$$\|y + tx_n\| \geq \Big(1 - \frac{1}{4^n}\Big)(\|y\| + |t|) \quad \forall y \in \mathrm{lin}\{x_k : k < n\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Näitame, et nüüd jada $\{x_n \colon n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ on ekvivalentne jadaruumi ℓ_1 kanoonilise baasiga $\{e_n \colon n \in \mathbb{N}\}$.

Viimase tõestamiseks näitame definitsiooni 1.17 põhjal, et leiduvad $C_1, C_2 > 0$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ ja kõikide skalaaride $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ korral

$$C_1 \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|_{\ell_1} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_{i-1} \right\|_X \leq C_2 \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|_{\ell_1}. \tag{2.5}$$

Esmalt veendume, et võime võtta $C_2 = 1$. Fikseerime $n \in \mathbb{N}$ ning $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ suvaliselt. Siis

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_{i-1} \right\|_X &\leq \sum_{i=1}^{n} \|a_i x_{i-1}\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \, \|x_{i-1}\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\|_{\ell_1}. \end{aligned}$$

Jäänud on tõestada võrratuste ahela (2.5) vasakpoolne võrratus. Näitame, et võime võtta

$$C_1 := \prod_{i=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{4^i}\Big).$$

On selge, et kui $n = 1$, siis see võrratus kehtib. Olgu nüüd $n \geq 2$. Siis paneme tähele, et $\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i-1} \in \operatorname{lin}\{x_k \colon k < n\}$, järelikult saame (2.4) põhjal hinnangu

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_{i-1} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i-1} + a_n x_{n-1} \right\| \geq \Big(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\Big) \left(\left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| + |a_n| \right).$$

Saadud avaldist saame edasi hinnata.

$$\begin{aligned} \Big(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\Big) \left(\left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{i-1} \right\| + |a_n| \right) &= \Big(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\Big) \left(\left\| \sum_{i=1}^{n-2} a_i x_{i-1} + a_{n-1} x_{n-2} \right\| + |a_n| \right) \\ &\geq \Big(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\Big) \Big(1 - \frac{1}{4^{n-2}}\Big) \left(\left\| \sum_{i=1}^{n-2} a_i x_{i-1} \right\| + |a_{n-1}| + |a_n| \right). \end{aligned}$$

Samal viisil jätkates on lihtne näha, et saame hinnangu

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| &\geq \left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)\left(1-\frac{1}{4^{n-2}}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{4}\right)(\|a_1 x_0\| + |a_2| + \ldots + |a_n|) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{4^i}\right)\left(|a_1|\,\|x_0\| + \sum_{i=1}^{n}|a_i|\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{4^i}\right)\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| \geq \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4^i}\right)\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\|.\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme tõestanud tingimuse (2.5), st jada $\{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ on ekvivalentne jadaruumi ℓ_1 kanoonilise baasiga $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Kuna x_0 on baasivektor, ei avaldu ta teiste baasivektorite lineaarkombinatsioonina, teisisõnu kehtib

$$x_0 \notin \overline{\operatorname{lin}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

□

Tänini on lahtine küsimus, et kas lisaks Daugaveti omadusega separaablitele Banachi ruumidele on veel separaableid ruume, mille ühikkera ei ole LVM-hulk (vt [AKMMS10, lk 4879]).

Näide 2.26. LVM-hulga alamhulk ei tarvitse olla LVM.

Tõestus. Vaatame Banachi ruumi $C[0,1]$ normiga $\|\cdot\|_\infty$. Teame, et $C[0,1]$ on separaabel Daugaveti omadusega Banachi ruum (vt näide 2.23). Nüüd lause 2.20 põhjal leidub ruumil $C[0,1]$ ekvivalentne norm $|||\cdot|||$ nii, et $A := B_{(C[0,1],|||\cdot|||)}$ on LVM-hulk.

Et normid $\|\cdot\|_\infty$ ja $|||\cdot|||$ on ekvivalentsed ruumil $C[0,1]$, leiduvad $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ nii, et

$$\lambda_1 B_{(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)} \subset B_{(C[0,1],|||\cdot|||)} \subset \lambda_2 B_{(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)}.$$

Võtame $C := \lambda_1 B_{(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)}$. Sellisel juhul $C \subset A$, kusjuures A on LVM-hulk. Lause 2.25 põhjal pole $B_{(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)}$ LVM-hulk, millest omakorda järeldub, et ka C pole LVM-hulk.

Näide on tõestatud. □

Paragrahvi lõpetuseks märgime, et kui A ja B on Banachi ruumis kinnised kumerad LVM-hulgad, siis üldiselt $A \cap B$ (vt [KPW18, Theorem 2.2]), $A \cup B$ (vt [KPW18, Theorem 2.9]) ega $A + B$ (vt [KPW18, Theorem 2.7]) ei tarvitse olla LVM-hulgad.

3 Loenduva arvu viiludega määratud ruumid

Selles paragrahvis toome kõigepealt sisse loenduva arvu viiludega määratud ruumi mõiste ja näiteid taolistest ruumidest. Paragrahvi eesmärgiks on tõestada, et loenduva arvu viiludega määratud ruumiks olemine kolme ruumi omadus.

3.1 LVM-ruumi mõiste ja näited

Definitsioon 3.1 (vt [AKMMS10, Definition 3.1])**.** Separaablit Banachi ruumi X nimetatakse *loenduva arvu viiludega määratud ruumiks* ehk *LVM-ruumiks*, kui ruumi X iga kumer tõkestatud alamhulk on LVM-hulk.

Märkus 3.2. Olgu X ja Y Banachi ruumid. Kui X on LVM-ruum ja X on isomeetriliselt isomorfne ruumiga Y, siis ka Y on LVM-ruum.

Kõigepealt näitame, et jadaruumid ℓ_p, kus $1 \leq p < \infty$, on LVM-ruumid. Selleks on meil vaja sisse tuua Radon–Nikodými omadus, millest saab põhjaliku ülevaate J. Martsinkevitši magistritööst [Mar14].

Definitsioon 3.3 (vt [DU77, lk 218, 10a])**.** Banachi ruumil X on *Radon–Nikodými omadus*, kui ruumi X iga kinnine kumer tõkestatud alamhulk on hambuv.

Lause 3.4 (vt [AKMMS10, Example 3.2.(a)])**.** *Iga Radon–Nikodými omadusega separaabel Banachi ruum on LVM-ruum.*

Tõestus. Olgu X Radon–Nikodými omadusega separaabel Banachi ruum. Näitame, et suvaline ruumi X kumer tõkestatud alamhulk A on LVM-hulk.

1. Kui A on kinnine, siis eelduste kohaselt on A hambuv. Kuna A on ka separaabel, siis lause 2.15 põhjal A on LVM-hulk.

2. Kui A on lahtine, siis $\overline{A}$ on kinnine ja 1. osa põhjal $\overline{A}$ on LVM-hulk. Nüüd lemma 2.8 põhjal ka A on LVM-hulk.

□

Näide 3.5. Banachi ruum ℓ_p, kus $1 \leq p < \infty$, on LVM-ruum. Kuna ℓ_1 on separaabel kaasruum ja iga $1 < p < \infty$ korral ℓ_p on refleksiivne Banachi ruum (vt [OO91, lk 173]), siis on nendel ruumidel Radon–Nikodými omadus [DU77, lk 218] ning lause 3.4 põhjal on nad LVM-ruumid.

Järgmisena näitame, et LVM-ruumide klass üldistab ka klassikalist Asplundi ruumide klassi.

Definitsioon 3.6 (vt [DU77, lk 213])**.** Banachi ruumi X nimetatakse *Asplundi ruumiks*, kui tema kaasruumil X^* on Radon–Nikodými omadus.

Näide 3.7. Banachi ruum c_0 on Asplundi ruum, sest tema kaasruum on ℓ_1 (vt [OO91, lk 163]) ja ruumil ℓ_1 on näite 3.5 põhjal Radon–Nikodými omadus.

Lause 3.8. *Iga separaabel Asplundi ruum on LVM-ruum.*

Tõestus. Olgu X separaabel Asplundi ruum. Siis kaasruum X^* on ka separaabel (vt [FHHMZ11, Theorem 8.6]), mistõttu lause 2.11 põhjal on suvaline ruumi X kumer tõkestatud alamhulk LVM-hulk ehk X on LVM-ruum. $\square$

Meenutame, et lause 2.25 põhjal Daugaveti omadusega separaablid Banachi ruumid ei ole LVM-ruumid. Tänini ei ole teada, kas iga separaabel Banachi ruum, mis pole LVM-ruum, on ekvivalentselt ümbernormeeritav nii, et tal on Daugaveti omadus (vt [KPW18, Problem 1]).

Teoreemist 2.21 teame, et mis tahes 1-tingimatu baasiga Banachi ruumi ühikkera on LVM-hulk. Jadaruumide c_0 ja ℓ_p, kus $1 \leq p < \infty$, kanooniline baas on 1-tingimatu ning näite 3.5 ja lause 3.8 põhjal on nad ka LVM-ruumid. Siiski jääb lahtiseks, kas iga 1-tingimatu baasiga Banachi ruum on LVM-ruum (vt [AKMMS10, Question 7.4 (a)]).

3.2 LVM-ruumiks olemine on kolme ruumi omadus

Definitsioon 3.9 (vt [CG97, lk 5])**.** Olgu X Banachi ruum, Z ruumi X kinnine alamruum ja (P) Banachi ruumi omadus. Öeldakse, et (P) on *kolme ruumi omadus*, kui sellest, et ruumidel Z ja X/Z on omadus (P), järeldub, et ruumil X on omadus (P).

Näide 3.10. On teada, et separaablus (vt [CG97, Theorem 2.4.h]), refleksiivsus (vt [CG97, Theorem 4.1.a]), Asplundi ruumiks olemine (vt [CG97, Theorem 4.11.a]) ja Radon–Nikodými omadus (vt [CG97, Theorem 6.5.h]) on kolme ruumi omadused.

Lemma 3.11 (vt [AKMMS10, Lemma 3.5])**.** *Olgu X separaabel Banachi ruum. Kui ruumi X iga lahtine kumer tõkestatud alamhulk on LVM-hulk, siis X on LVM-ruum.*

Tõestus. Kehtigu lemma eeldused. Paneme esiteks tähele, et ruumi X iga mittetühja sisemusega kumer tõkestatud alamhulk on LVM-hulk. Tõepoolest, oletame, et A on fikseeritud kumer tõkestatud ruumi X alamhulk, kusjuures $A^\circ \neq \emptyset$. Kuna A on kumer, siis on hulga A sisemuse sulund võrdne hulga A sulundiga. Kasutades lemmat 2.8, kehtib

$$\begin{aligned} A \text{ on LVM-hulk} &\iff \overline{A} \text{ on LVM-hulk} \\ &\iff \overline{A^\circ} \text{ on LVM-hulk} \\ &\iff A^\circ \text{ on LVM-hulk.} \end{aligned}$$

Eelduse kohaselt on ruumi X iga lahtine kumer tõkestatud hulk LVM. Sellest saame, et hulk A° on LVM. Ülaltoodud samaväärsuste ahelast järeldub, et A on LVM-hulk.

Vaatleme nüüd üldist juhtu. Olgu $A \subset X$ kumer ja tõkestatud. Näitame, et A on LVM-hulk.

Kuna X on separaabel, siis saame leida jada $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset A$, mis on tihe hulgas A. Fikseerime jada $\{\varepsilon_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, kus $\varepsilon_n > 0$ iga naturaalarvu n korral ja $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.
Tähistame iga $m, n \in \mathbb{N}$ korral $A_{n,m} := \operatorname{conv}(B^\circ(x_n, \varepsilon_m) \cup A)$. On selge, et iga $m, n \in \mathbb{N}$ korral $A_{n,m} \supset A$ ja $A^\circ_{n,m} \neq \emptyset$, sest $B^\circ(x_n, \varepsilon_n) \subset A_{n,m}$. Sellest, et $A_{n,m}$ sisemus on mittetühi, saame esimese tähelepaneku põhjal, et $A_{n,m}$ on LVM-hulk. Järelikult leidub hulka $A_{n,m}$ määrav viilude jada $\{S^k_{n,m} \colon k \in \mathbb{N}\}$.

Hulga $A_{n,m}$ ehitusest ja lemma 1.7 põhjal tuleneb, et kas $S^k_{n,m} \cap B^\circ(x_n, \varepsilon_m) \neq \emptyset$ või $S^k_{n,m} \cap A \neq \emptyset$ (vt lemmat 1.7).

Olgu $K_{n,m}$ kõikide indeksite $k \in \mathbb{N}$ hulk, mille korral $S^k_{n,m}$ lõikab hulka A ning tähistame $\tilde{S}^k_{n,m} = S^k_{n,m} \cap A$ iga $k \in K_{n,m}$ korral. Vahetult viilu definitsioonist tuleneb, et $\tilde{S}^k_{n,m}$ on hulga A viil. Lisaks paneme tähele, et iga $k \notin K_{n,m}$ korral lõikab viil $S^k_{n,m}$ hulka $B^\circ(x_n, \varepsilon_m)$.

Näitame nüüd, et viilude jada

$$\{\tilde{S}^k_{n,m} \colon n, m \in \mathbb{N}, k \in K_{n,m}\}$$

on hulka A määrav. Olgu $B \subset A$ selline, et $B \cap \tilde{S}^k_{n,m} \neq \emptyset$ iga $n, m \in \mathbb{N}$ ja $k \in K_{n,m}$ korral ja $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ on tihe hulgas A, saame leida sellise indeksi $n_0 \in \mathbb{N}$ ja $b \in B$, et $\|b - x_{n_0}\| < \varepsilon$. Tõestuse alguses fikseerisime nulliks koonduva positiivsete arvude jada $\{\varepsilon_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, järelikult leidub indeks m_0 nii, et $\varepsilon_{m_0} < \varepsilon/2$.

Vaatleme viile $S^k_{n_0,m_0}$, kus $k \in K_{n,m}$. Eelduse põhjal lõikab B kõiki viile $S^k_{n,m}$, seega hulk B lõikab viilu $S^k_{n_0,m_0}$ iga $k \in K_{n,m}$ korral. Teisalt teame, et iga $k \notin K_{n,m}$ korral viil $S^k_{n_0,m_0}$ lõikab kera $B^\circ(x_{n_0}, \varepsilon_{m_0})$.

Viimaste järelduste põhjal näeme, et hulk

$$B_{n_0,m_0} := B \cup B^\circ(x_{n_0}, \varepsilon_{m_0}) \subset A_{n,m}$$

lõikab viile $S^k_{n_0,m_0}$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Kuna viilude jada $\{S^k_{n_0,m_0} \colon k \in \mathbb{N}\}$ määrab hulka A_{n_0,m_0}, siis kehtib

$$\overline{\text{conv}}(B_{n_0,m_0}) \supset A_{n_0,m_0} \supset A.$$

Lihtne on kontrollida, et kehtivad järgmised sisalduvused:

$$B^\circ(x_{n_0}, \varepsilon_{m_0}) \subset B^\circ(x_{n_0}, \varepsilon/2) \subset B^\circ(b, \varepsilon).$$

Järelikult, $B_{n_0,m_0} \subset B + \varepsilon B_X$, millest saame, et

$$\overline{\text{conv}}(B + \varepsilon B_X) \supset A.$$

Lõpetuseks, kuna $\varepsilon > 0$ on fikseeritud suvaliselt, siis saame ka soovitud sisalduvuse $\overline{\text{conv}}(B) \supset A$. $\square$

Nüüd oleme valmis tõestama selle paragrahvi põhitulemuse.

Teoreem 3.12 (vt [AKMMS10, Theorem 3.6]). *Olgu X Banachi ruum ning Z tema kinnine alamruum. Kui Z ja X/Z on LVM-ruumid, siis X on LVM-ruum.*

Tõestus. Tähistame $Y := X/Z$ ja faktorkujutust $q\colon X \to Y$. Lemma 3.11 põhjal piisab näidata, et mis tahes lahtine kumer tõkestatud hulk A on LVM-hulk. Kuna ruumid Y ja Z separaablid ja separaablus on kolme-ruumi omadus (vt näide 3.10), siis X on separaabel. Järelikult, lemma 2.6 ja lause 2.9 abil piisab näidata, et iga $a \in A$ korral leidub jada $\{V_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ hulga A suhteliselt nõrgalt lahtistest hulkadest nii, et kui $B \subset A$ ja B lõikab iga hulka V_n, kehtib $a \in \overline{\operatorname{conv}}(B)$.

Fikseerime lahtise kumera tõkestatud hulga $A \subset X$ ning $a \in A$. Tähistame $A_a := \{x \in A\colon q(x) = q(a)\}$. Suvalise $x \in A_a$ korral võrdus $q(a) = q(x)$ tähendab, et $a + Z = x + Z$ ehk $x - a \in Z$. Teisisõnu, $A_a = (Z + a) \cap A$.

Defineerime selle abil hulgad

$$U_a := \{x - a \in Z\colon x \in A\} \subset Z.$$

Pole raske näha, et A_a on lahtine, kumer ja tõkestatud hulk. Seega ka U_a on lahtine, kumer ja tõkestatud hulk.

Eelduste põhjal Z on LVM-ruum, millest omakorda saame, et U_a on LVM-hulk. Järelikult leidub hulka U_a määrav viilude jada $\{\hat{S}_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, kus $\hat{S}_n = S(U_a, z_n^*, \alpha_n)$, $z_n^* \in S_{Z^*}$ ja $\alpha_n > 0$. Teoreemi 1.19 tõttu teame, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub funktsionaali z_n^* jätk x_n^* nii, et $x_n^* \in S_{X^*}$. Moodustame nende abil viilud $S_n = S(A_a, x_n^*, \alpha_n)$. Näitame, et viilude jada $\{S_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ määrab hulka A_a.

Fikseerime jada $\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ nii, et $x_n \in S_n \subset A_a$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. See tähendab, et $x_n \in A$ ja $x_n = z_n + a$, kus $z_n \in U_a$. Et $x_n \in S_n$, siis

$$x_n^*(x_n) = x_n^*(z_n + a) > \sup_{b \in A_a} x_n^*(b) - \alpha_n,$$

millest omakorda saame, kasutades operaatori x_n^* lineaarsust ning teadmist, et x_n^* on funktsionaali z_n^* jätk,

$$z_n^*(z_n) + x_n^*(a) > \sup_{z \in U_a} z_n^*(z) + x_n^*(a) - \alpha_n.$$

Järelikult,

$$z_n^*(z_n) > \sup_{z \in U_a} z_n^*(z) - \alpha_n.$$

ehk $z_n \in \hat{S}_n$. Kuna viilude jada $\{\hat{S}_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ on hulka U_a määrav, siis kehtib

$$U_a \subset \overline{\operatorname{conv}}(\{z_n \colon n \in \mathbb{N},\ z_n \in \hat{S}_n\}). \tag{3.1}$$

Näitame, et $A_a \subset \overline{\operatorname{conv}}(\{x_n \colon n \in \mathbb{N},\ x_n \in S_n\}$. Olgu $b \in A_a$ ja $\varepsilon > 0$. Siis $b \in A$ ja $b = z + a$, kus $z \in U_a$. Viimasest järeldub, et $b - a = z \in U_a$. Sisalduvuse (3.1) tõttu iga $\varepsilon > 0$ korral leidub kumer kombinatsioon $\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i$, kus $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ nii, et

$$\left\| z - \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \right\| \leq \varepsilon.$$

Nüüd paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \left\| z - \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \right\| &= \left\| b - a - \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_n - a) \right\| = \left\| b - a - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_n + \sum_{i=1}^n \lambda_i a \right\| \\ &= \left\| b - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_n \right\| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

mis tähendabki, et $b \in \overline{\operatorname{conv}}(\{x_n \colon n \in \mathbb{N}, x_n \in S_n\})$.

Oleme näidanud, et leidub hulka A_a määrav viilude jada $\{S_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Olgu $\{\tilde{S}_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ nende viilude laiendused hulgale A, st $\tilde{S}_n = \tilde{S}_n(A, x_n^*, \alpha_n)$.

Vaatleme nüüd iga $n \in \mathbb{N}$ korral kumerat tõkestatud hulka $q(\tilde{S}_n) \subset Y$. Paneme tähele, et $\tilde{S}_n$ on lahtine, sest A on lahtine ja $\tilde{S}_n = W_n \cap A$, kus W_n on nõrgalt lahtine. Et faktorkujutus on sürjektiivne, siis teoreemi 1.22 abil saame, et ka $q(\tilde{S}_n)$ on lahtine.

Ühtlasi, kuna Y on LVM-ruum, siis $q(\tilde{S}_n)$ on LVM-hulk, st leidub hulka $q(\tilde{S}_n)$ määrav viilude jada $\{S_{n,m} \colon m \in \mathbb{N}\}$. Olgu $V_{n,m} := \tilde{S}_n \cap q^{-1}(S_{n,m})$ iga $n, m \in \mathbb{N}$ korral. Siis $V_{n,m} \subset A$ on suhteliselt nõrgalt lahtine, sest nii $\tilde{S}_n$ kui ka $q^{-1}(S_{n,m})$ on hulga A suhteliselt nõrgalt lahtised alamhulgad.

Viimaks näitame, et A on LVM-hulk. Fikseerime kumera $B \subset A$, mille korral $B \cap V_{n,m} \neq \emptyset$ iga $n, m \in \mathbb{N}$ (vt lemma 2.2). Piisab näidata, et $a \in \overline{\operatorname{conv}}(B)$.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline ning $B_\varepsilon := \{x \in A\colon \operatorname{dist}(x, B) < \varepsilon\}$. On selge, et B_ε on lahtine ja kumer ning lõikab kõiki hulki $V_{n,m}$.

Paneme tähele, et fikseeritud $n \in \mathbb{N}$ korral

$$B_\varepsilon \cap V_{n,m} = B_\varepsilon \cap \tilde{S}_n \cap q^{-1}(S_n, m) \neq \emptyset,$$

millest saame, et

$$q(B_\varepsilon \cap \tilde{S}_n) \cap S_{n,m} \neq \emptyset.$$

Teame, et viilud $\{S_{n,m}\colon m \in \mathbb{N}\}$ määravad hulka $q(\tilde{S}_n)$ ja $q(B_\varepsilon \cap \tilde{S}_n) \subset q(\tilde{S}_n)$, seega

$$\overline{\operatorname{conv}}(q(B_\varepsilon \cap \tilde{S}_n)) = \overline{q(B_\varepsilon \cap \tilde{S}_n)} \supset q(\tilde{S}_n).$$

Märkame, et $B_\varepsilon \cap \tilde{S}_n$ on lahtine ja kumer. Kuna faktorkujutus on lineaarne ja lahtine, siis on ka hulk $q(B_\varepsilon \cap \tilde{S}_n)$ lahtine ja kumer. Järelikult hulga $\overline{q(B_\varepsilon \cap \tilde{S}_n)}$ sisemus ühtib hulgaga $q(B_\varepsilon \cap \tilde{S}_n)$. Veelgi enam, kuna $q(\tilde{S}_n)$ on lahtine, siis

$$q(B_\varepsilon \cap \tilde{S}_n) = \left(\overline{q(B_\varepsilon \cap \tilde{S}_n)}\right)^\circ \supset \left(q(\tilde{S}_n)\right)^\circ = q(\tilde{S}_n) \supset q(S_n).$$

Paneme tähele, et viil S_n on A_a alamhulk, st kui $x \in S_n$, siis kehtib $q(x) = q(a)$, millest saame, et $q(S_n) = \{q(a)\}$. Seega $q(a) \in q(B_\varepsilon \cap \tilde{S}_n)$, ehk leidub $x_n \in B_\varepsilon \cap \tilde{S}_n$ nii, et $q(x_n) = q(a)$, mistõttu kehtib ka $x_n \in B_\varepsilon \cap S_n$. Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral $x_n \in S_n$ ja viilud $\{S_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ määravad hulka A_a, siis

$$A_a \subset \overline{\operatorname{conv}}(\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}) \subset \overline{\operatorname{conv}}(B_\varepsilon) = \overline{B_\varepsilon}$$

Oleme saanud, et $A_a \subset \overline{B}_\varepsilon$ iga $\varepsilon > 0$ korral, millest järeldub, et $\overline{B} \supset A_a \ni a$, mida oligi tarvis tõestada. □

Teoreemist 3.12 järeldub kergesti järgmine LVM-ruumide stabiilsustulemus.

Järeldus 3.13. *Olgu X ja Y LVM-ruumid. Siis otsesumma $X \oplus_N Y$ on LVM-ruum.*

Tõestus. Olgu X ja Y LVM-ruumid. Paneme tähele, et X (vastavalt Y) on isomeetriliselt isomorfne ruumiga $X \oplus_N \{0\}$ (vastavalt $\{0\} \oplus_N Y$). Teoreemi 3.12

rakendamiseks piisab meil märkuse 3.2 põhjal näidata, et $(X \oplus_N Y)/(X \oplus_N \{0\})$ on isomeetriliselt isomorfne ruumiga $\{0\} \oplus_N Y$. Defineerime

$$T\colon (X \oplus_N Y) \ni (x, y) \mapsto (0, y) \in (\{0\} \oplus_N Y).$$

Paneme tähele, et T on pealekujutus ja $\ker(T) = X \oplus_N \{0\}$, millest saame, et $(X \oplus_N Y)/(X \oplus_N \{0\})$ isomeetriliselt isomorfne ruumiga $\{0\} \oplus_N Y$ (vt teoreem 1.25). $\square$

Kasutatud kirjandus

[AKMMS10] A. Avilés, V. Kadets, M. Martín, J. Merí ja V. Shepelska, *Slicely countably determined Banach spaces*, Trans. Am. Math. Soc. **362** (2010), no. 9, 4871–4900.

[CG97] J. M. F. Castillo ja M. González, *Three-space problems in Banach space theory*, vol. 1667, Berlin: Springer, 1997.

[DGZ93] R. Deville, G. Godefroy ja V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Harlow: Longman Scientific & Technical; New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.

[DU77] J. Diestel ja J. J. Uhl, *Vector measures*, vol. 15, American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 1977.

[FHHMZ11] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos ja V. Zizler, *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis*, Berlin: Springer, 2011.

[GGMS87] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey ja W. Schachermayer, *Some topological and geometrical structures in Banach spaces*, vol. 378, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 1987.

[KMMW13] V. Kadets, M. Martín, J. Merí ja D. Werner, *Lushness, numerical index 1 and the Daugavet property in rearrangement invariant spaces*, Can. J. Math. **65** (2013), no. 2, 331–348.

[KPW18] V. Kadets, A. Pérez ja D. Werner, *Operations with slicely countably determined sets*, Funct. Approximatio, Comment. Math. **59** (2018), no. 1, 77–98.

[KSSW00] V. M. Kadets, R. V. Shvidkoy, G. G. Sirotkin ja D. Werner, *Banach spaces with the Daugavet property*, Trans. Am. Math. Soc. **352** (2000), no. 2, 855–873.

[Mar14] J. Martsinkevitš, *Radon-Nikodými omadus*, magistritöö, Tartu Ülikool, 2014.

[Meg98] R. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, vol. 183, Springer-Verlag, New York, 1998.

[OO91] E. Oja ja P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu, TÜ trükikoda, 1991.

[Wer01] D. Werner, *Recent progress on the Daugavet property*, Ir. Math. Soc. Bull. **46** (2001), 77–97.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Marcus Lõo,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   „Loenduva arvu viiludega määratud Banachi ruumid“,

   mille juhendaja on Johann Langemets, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguste kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Marcus Lõo

18.05.2021