ELEMENTA

CALCULI VARIATIONUM

EJUSQUE USUS IN SOLVENDIS PROBLEMATIBUS ANALYTICIS ET GEOMETRICIS.

COMMENTATIO MATHEMATICA

QUAM

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS AUCTORITATE

AD GRADUM

DOCTORIS PHILOSOPHIAE

IN CAESAREA UNIVERSITATE LITTERARUM DORPATENSI

RITE ADIPISCENDUM

SCRIPSIT ET PUBLICE DEFENDET

CAROLUS EDUARDUS SENFF,

DR. PHIL. MATH. ET PUR. ET APPLIC. P. P. E.

DORPATI LIVONORUM,

TYPIS J. C. SCHUENMANNI MDCCCXXXVIII.

IMPRIMATUR

haec dissertatio ea conditione, ut, simulac typis excusa fuerit, quinque exempla collegio libris explorandis constituto tradantur.

Dorpati Livon. d. 7. m. Dec. 1838.

Introductio.

Calculus variationum originem traxit e nonnullis problematibus ad theoriam maximorum et minimorum pertinentibus, quae sublimioris naturae sunt, quam ea hujus generis problemata, quae adhibito vulgari calculo differentiali resolvi solent. Dum enim in his problematibus tota res in eo versatur, ut quantitatis variabilis valorem vel plurium variabilium valores determinemus, quibus maximus minimusve valor functionis earum respondeat, in illis sublimioribus problematibus ea alicujus functionis forma, sive ea inter plures variabiles intercedens relatio quaeritur, qua statuta quantitas quaedam, cujus valor ex illa functionis forma seu ex illa relatione pendeat, maxima vel minima evadat. — Jam Newtonus [1]) curvam per tangentes construere docuit ita formatam, ut solidum, quod ejus revolutione circa axem describitur, se-

1) Philosophiae naturalis principia mathematica auct. J. Newtono, primo edita an. 1686. Lib. II. Propos. XXXIV. Scholion.

cundum axis directionem in fluido motum minimam patiatur resistentiam. Propria tamen hujusmodi quaestiones instituendi methodus primum a mathematicis inventa est in solvendo illo problemate celeberrimo, quod de brachystochrona sive de curva, in qua corpus grave brevissimo tempore a dato puncto ad datum descendat, Joh. Bernouillius anno 1696 omnibus, qui tunc temporis florebant, mathematicis proposuerat [1]). Methodus haec eo nitebatur, quod curva quaesita secundum principia calculi differentialis ex infinite parvis elementis rectis composita concipiebatur et incrementum investigabatur, quod quantitas illa, quae maxima vel minima evadere deberet, duobus elementis contiguis infinite parum mutatis caperet, quod incrementum quum nihilo aequassent, aequatio formam curvae determinans eruebatur. Mox vero difficiliora hujus generis problemata aggressi sunt mathematici, in quibus inter omnes curvas ejusdem longitudinis ea invenienda erat, quae quantitatem quandam ex ipsius forma pendentem maximam vel minimam redderet, ad quae problemata solvenda illam methodum applicabat Jacob. Bernouillius [2]), eo modo eam amplificans, ut tria curvae elementa contigua mutaret. Problemata haec, in quibus maximum vel minimum non absolutum sed modo relativum quaerebatur, propter illam conditionem aequalis longitudinis curvarum isoperimetrica vocabant, quo nomine tamen etiam omnia hujus generis problemata, etsi vel alia vel nulla conditio cum maximi minimive proprietate conjuncta esset, complectebantur. Totam illam methodum complete pertractavit, innumeris exemplis illustravit et valde amplificavit

1) Acta Eruditorum edita Lipsiae an. 1696 pag. 269.

2) Analysis magni problematis isoperimetrici auct. Jac. Bernouillio, Basiliae an. 1701.

Eulerus [1]) applicando eam ad quaestiones multo difficiliores, quam quas antea tractaverant mathematici. In omnibus enim his problematibus quantitas, quae maxima vel minima evadere debet, necessarie, uti postea videbimus, per formulam integralem exhibetur, quae sub signo integrationis functiones indeterminatas earumque differentialia continet. Mathematici vero ante Eulerum modo in tales incubuerunt quaestiones, ubi in formula integrali praeter ipsas functiones indeterminatas earum differentialia primi ordinis occurrebant, dum in illo opere Euleriano investigatio ad differentialia superiorum ordinum extenditur, quin etiam ad tales casus, ubi formula illa alias formulas integrales involvit, et praeterea omnes quaestiones de maximis et minimis relativis ingeniosa quadam ratione ad quaestiones de absolutis reducuntur. — Quamquam vero Eulerus, quod ad regulas formulasque in solvendis problematibus isoperimetricis inservientes pertinet, nihil fere optandum reliquerat, tamen eas inveniendi ratio ab eo adhibita ex geometricis et analyticis considerationibus mixta et valde complicata fuit, ita ut brevis et concinna formulas illas eruendi methodus maxime desideraretur. Cui desiderio tandem satisfecit Lagrangius methodum mere analyticam exhibens, simplicem et generalem, qua investigatio omnium formularum, ad maxima minimaque sublimioris illius naturae determinanda pertinentium, brevissima et elegantissima ratione absolveretur, quin etiam multo majora praestarentur. Ipse vero hujus methodi auctor illustrissimus primum [2]) modo agendi

1) Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti auct. L. Eulero, Lausannae et Genevae, ann. 1744.

2) Miscellanea Taurinensia Tom. II. ann. 1760 — 1762 pag. 173, et Tom. IV. ann. 1766 — 1769 pag. 163.

rationem indicavit, qua in applicando calculo suo novo utendum esset, nec vero ejus principiis, ut ita dicam, philosophicis stabiliendis ullam operam navavit. Eam ob causam alii mathematici munus susceperunt hujus methodi principia perscrutandi et clariora reddendi, ante omnes vero Eulerus ipse, qui novum illum calculum, cui nomen calculi variationum inter omnes mathematicos nunc usitatum imposuit [1]), cum in opere suo de calculo integrali [2]) tum in pluribus commentationibus pertractavit, quarum unam [3]) praecipue hic laudare debeo, in qua calculum variationum ad principia calculi differentialis revocare conatus est. Hanc rei tractandae rationem duce Eulero plures mathematici secuti sunt et Lagrangius ipse postea calculi sui principia hunc in modum explicavit [4]), et equidem in dissertatione mea hanc viam ingressurus sum, quia verum, uti mihi videtur, accessum ad abscondita hujus calculi principia aperuit. Nova illa Lagrangii methodus sive calculus variationum non modo omnes illas formulas suppeditat, quas ad solvenda problemata isoperimetrica Eulerus jam evolvit, sed etiam generaliori forma eas exhibet, ita ut limites curvae inveniendae, quae maximi minimive proprietate gaudeat, etiam variabiles assumi queant. Praeterea verum etiam in multis aliis investigationibus iisque gravissimis plurimum valet, ut in eruendis aequationibus conditionalibus, quibus cognoscitur, num functio plurium variabilium integrabilis sit nec ne, praecipue vero in problematibus mechanicis, ad quae solvenda Lagrangius in opere suo immortali Mechanica ana-

---

1) Novi Commentarii Petropolit. Tom. X. an. 1766 pag. 51.

2) Institutionum calculi integralis volumen III. auct. L. Eulero. Petropoli .1770.

3) Novi Commentarii Petropol. Tom. XVI. ann. 1772 pag. 85.

4) Leçons sur le calcul des fonctions par Lagrange. Paris 1806. Leçon 22me.

lytica inscripto ubique calculum variationum adhibuit, ejusque adjumento omnia theoremata hujus scientiae profundae et sublimis ex uno principio deduxit. — Methodus ipsa etiam magis exculta est a Laplacio[1]) et Legendrio[2]) qui de dignoscendis casibus, in quibus maximum vel minimum locum haberet, scripserunt, deinde etiam a Poissonio[3]), qui et totam rem complete pertractavit et primus variationem integralis duplicis sive functionis, quae duas e se invicem non pendentes variabiles implicat, in forma generalissima exhibuit, cujus variationis investigandae rationem denique ad solitas calculi methodus reduxit et ad functiones plurium variabilium applicavit Ostrogratskius[4]).

Jam rem arduam aggressurus sum, ut elementa hujus calculi difficilis et complicati quam brevissime exponam ejusque usum in solvendis gravissimis problematibus analyticis et geometricis ostendam. Elegi vero hanc rem in dissertatione mea tractandam et propterea, quod in plurimis calculi differentialis et integralis compendiis, in quibus de calculo variationum etiam agitur, ejus principia non satis dilucide exposita inveniuntur, et ob eam etiam causam, quod haec res propter absconditam ejus naturam ad peculiarem hujus dissertationis finem praecipue apta mihi visa est.

Commentatio mea igitur in duas partes distributa est, quarum prior tractat calculi nostri elementa, altera ejus usum in solvendis problematibus exponit.

1) Nova acta eruditorum Lips. 1772. pag. 193.

1) Mémoires de l'Académie des sciences de Paris 1786 pag. 7.

1) Mémoires de l'Acad. des sciences de Paris 1833 pag. 223.

1) Mémoires de l'Acad. imperiale de St. Petersb. 1835 pag. 35.

Pars prior.

Elementa calculi variationum.

§ 1. Calculus variationum est methodus investigandi mutationem, quam functio quaedam patitur, si vel ejus forma vel etiam formae functionum in ea implicatarum infinite parum mutantur. Si e. g. $u = \int_0^x y\sqrt{1+p^2}\,dx$ designat integrale inter limites 0 et x sumptum, in quo y est functio ipsius x sive $= \varphi x$, et $p = \frac{dy}{dx}$, valor hujus formulae non modo e valore ipsius x, sed etiam e forma functionis φx pendebit, itaque si haec infinite parum mutatur, valor ipsius u quoque mutabitur, et incrementum infinite parvum, quod inde capit integrale u, ejus **variatio** vocatur. Ut rem geometrica consideratione illustremus, sumamus curvam, cujus aequatio $y = \varphi x$, in qua illud integrale igitur certum accipiat valorem, jam vero alteram fingamus curvam paululum ab illa discrepantem, valor integralis pro ea alius evadet, et differentia infinite parva inter hunc et illum integralis valorem, ejus variatio erit. Variationem functionis usitato more per characterem δ ei praescriptum designabimus.

§ 2. Omnem mutationem ad formam functionis spectantem velut e mutatione alterius cujuslibet argumenti, de quo functio aliqua ratione arbitraria pendeat, ortam statuere licet. Facile enim perspicitur semper talem fingi posse functionem duarum variabilium $F(x,\theta)$, quae pro certo quodam valore ipsius θ, e. g. pro $\theta = \alpha$, induat formam φx, mutando vero valorem ipsius θ in quamlibet aliam formam ψx abeat. Ita e. g. functio $(1-\theta)\varphi x + \theta . \psi x$ pro $\theta = 0$ fit φx, pro $\theta = 1$ vero ψx, et crescente ipsius θ valore a 0 usque ad 0, sensim ab altera forma in alteram transit. Mutationem igitur infinite parvam formae functionis φx sive ejus variationem e mutatione infinite parva valoris ipsius θ, sive e differentiatione functionis $F(x,\theta)$ respectu ipsius θ deducere licet, ita ut, posito $\varphi x = F(x,\alpha)$, ejus variatio $\delta\varphi x$ sit $= \overset{\theta}{d}F(x,\theta).d\theta.$ pro $\theta = \alpha$ *). Ad hujus variationis indolem melius perspiciendam, exhibeamus functionem $F(x,\theta)$ hac forma generali:

$$\varphi x + \chi x(\theta - \alpha) + \psi x(\theta - \alpha)^2 + \text{etc.}$$

in qua functiones omnino arbitrarias χx, ψx, etc. continet, et pro $\theta = \alpha$ re vera transit in φx, differentiando respectu θ et postea sumendo $\theta = \alpha$ nanciscimur

$$\overset{\theta}{d}\,F(x,\theta).\, d\theta = \chi x . d\theta,$$

itaque variationem ipsius φx, quae per $\chi x . d\theta$ repraesentetur, videmus esse ipsam functionem omnino arbitrariam ipsius x, ductam in aliquam quan-

---

*) Differentialia particularia functionis e pluribus variabilibus pendentis velut $u = f(x,y,z,)$, quae vulgo denotantur per $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$, hic brevitatis causa semper designabimus hoc modo: $\overset{x}{d}u$, $\overset{y}{d}u$, $\overset{z}{d}u$.

titatem infinite parvam, nec re vera ullam mutationem quoad formam functionis fingere possumus, quae sit generalioris naturae.

Etiam functiones duarum vel plurium variabilium in variationibus earum investigandis eodem modo tractare licet. Quodsi igitur statuimus functionem $\varphi(x,y)$ esse $= F(x,y,\theta)$ pro $\theta = \alpha$, erit ejus variatio

$$\delta\varphi(x,y) = \overset{\theta}{d} F(x,y,\theta).d\theta \quad \text{pro } \theta = \alpha,$$

quae tali modo facile pro functione ipsorum x et y omnino arbitraria (i. e. cujus forma nequaquam ad formam functionis φ adstricta est) cognoscitur.

Quin etiam secundum hanc rem considerandi rationem de variationibus superiorum ordinum sermo esse possit, ita ut $\delta\delta(\varphi x)$ sit $= \overset{\theta}{d^2} F(x,\theta).d^2\theta$, pro $\theta = \alpha$, et sic porro, in tales vero inquirere usque adhuc saltem superfluum videatur.

§ 3. Spectando igitur functionem quamlibet vel unius vel plurium variabilium, tamquam casum specialem generalioris functionis, quae praeter illas variabiles aliud adhuc argumentum indeterminatum arbitraria quadam ratione implicet, ejus variatio sive mutatio quoad formam revocata est ad differentiationem respectu illius argumenti indeterminati. Hoc argumentum, si postea ejus mentionem faciamus necesse erit, semper per θ designabimus.

Jam ex notis calculi differentialis principiis sequitur esse:

$$\overset{\theta}{d}\left(\overset{x}{d}F(x,\theta)\,dx\right).\, d\theta = \overset{x}{d}\left(\overset{\theta}{d}F(x,\theta).\, d\theta\right).\, dx,$$

posito vero $F(x,\alpha) = \varphi x$, substituendo in hac aequatione α pro θ, quum

$\overset{x}{d}F(x,\theta).\,dx$ sit functio, quae pro $\theta = \alpha$ transeat in $d\varphi x$, aequationis pars prior evadit $\delta d\varphi x$, pars altera $d\delta\varphi x$, nanciscimur ergo

$$\delta d\varphi x = d\delta\varphi x,$$

quod theorema fundamentale in calculo variationum habendum est. Inde nullo negotio etiam hoc generalius deducitur

$$\delta d^n \varphi x = d^n \delta\varphi x, \tag{I}$$

nam $\delta d^n \varphi x = d\delta d^{n-1}\varphi x = d^2 \delta d^{n-2}\varphi x = \ldots\ldots = d^n \delta\varphi x$.

Integrando vero aequationem $\delta d\varphi x = d\delta\varphi x$ accipimus $\int\delta d\varphi x = \delta\varphi x + Const.$ sive ponendo $d\varphi x = fx.dx$, quo fit $\varphi x = \int fxdx$, habemus.

$$\int\delta fx.\,dx = \delta\int fx.\,dx + Const.$$

et sumendo integralia inter certos limites, quo *Const.* evanescit, pervenimus ad hoc theorema:

$$\delta\int_a^{a'} fx.\,dx = \int_a^{a'} \delta fx.\,dx, \tag{II}$$

quod aeque est gravissimum in calculo variationum.

Facile etiam perspicitur, haec theoremata sine ulla mutatione ad functiones plurium variabilium extendi posse, ita ut habeamus

$$\delta\,\overset{x}{d^n}\,\overset{x}{d^m}\varphi(x,y) = \overset{x}{d^n}\,\overset{y}{d^m}\,\delta\varphi(x,y)$$

$$\delta\int_b^{b'}\int_a^{a'} f(x,y).\,dx\,dy = \int_b^{b'}\int_a^{a'} \delta f(x,y).\,dx\,dy.$$

§ 4. Consideremus nunc variationem alicujus functionis, quae plures functiones formas suas mutantes earumque functiones derivatas in se contineat, quae tamen omnes ex uno argumento pendeant, ut haec:

$$u = \varphi\,(x, y, z, y', z', y'', z'', \text{ etc.}),$$

ubi y et z sint functiones ipsius x, et $y' = \frac{dy}{dx}$, $z' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dy^2}$, $z'' = \frac{d^2z}{dx^2}$ et sic porro.

Quodsi hujus functionis variatio tantum prodit e mutanda ratione, qua y et z, ideoque etiam y', z', etc. ab x pendeant, hae quantitates modo augendae sunt suis variationibus infinite parvis δy, δz, $\delta y'$, $\delta z'$ etc.; itaque si per differentiationem solitam nanciscimur

$$du = Xdx + Ydy + Zdz + Y'dy' + Z'dz' + Y''dy'' + Z''dz'' + \text{etc.},$$

denotantibus X, Y, Z, Y', Z', etc. respective differentalia particularia $\overset{x}{du}$, $\overset{y}{du}$, $\overset{z}{du}$, $\overset{y'}{du}$, etc. ita sumpta, ac si x, y, z, y', z', etc. non ex se invicem pendeant, variatio ipsius u, uti nullo negotio intelligitur, erit

$$\delta u = Y\delta y + Z\delta z + Y'\delta y' + Z'\delta z' + Y''\delta y'' + Z''\delta z'' + \text{etc.} \qquad \text{(III)}$$

ubi pro $\delta y', \delta z', \delta y'', \delta z''$, etc. etiam ponere licet $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d\delta z}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, $\frac{d^2\delta z}{dx^2}$, etc.

Sin autem illa etiam ratio, qua qnantitates x, y, z, y', z', etc. inter se connexae sunt in functione u, sive relatio ipsa inter x, y, z, y', z', etc., quae charactere φ designatur, formam suam mutat, ad illam formulam pro variatione ipsius u inventam adjiciendum est membrum ex illa formae mutatione ortum, quod per (δu) denotare volumus, ubi manifestum est, (δu) exhibere functionem omnino arbitrariam ipsorum x, y, z, y', z', etc. — Completam ipsius u variationem tunc secundum nostra principia inde derivare debemus, quod non solum y et z complectuntur variabilem indeterminatam θ, sed etiam ipsa functio φ spectatur tamquam forma specialis, quam induat functio generalior $F(\theta, x, y, z, y', z'$, etc.$)$ posito $\theta = \alpha$. Hujus enim functionis differentiatio respectu ipsius θ suppeditat

$$dF.\,d\theta + \overset{y}{dF}\,\overset{\theta}{dy}.\,d\theta + \overset{y}{dF}\,\overset{\theta}{dz}.d\theta + \overset{y'}{dF}\,\overset{\theta}{dy'}.d\theta + \text{etc.},$$

quae formula pro $\theta = \alpha$ transit in hanc:

$$(\delta u) + Y\delta y + Z\delta z + Y'\delta y' + Z'\delta z' + \text{etc.}, \qquad \text{(IV)}$$

quae completam variationem ipsius u repraesentat, si et forma functionis φ et formae functionum y et z mutantur.

§ 5. Formula (III), quae ipsius u variationem e sola mutatione functionum y et z progredientem exhibet, substituendo in ea pro y', z', y'', z'', etc. earum valores $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, etc. et respiciendo aequationem (I) transit in hanc:

$$\begin{aligned}\delta u = {} & Y\delta y + Y'\frac{d\delta y}{dx} + Y''\frac{d^2\delta y}{dx^2} + Y'''\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \text{etc.} \\ & + Z\delta z + Z'\frac{d\delta z}{dx} + Z''\frac{d^2\delta z}{dx^2} + Z'''\frac{d^3\delta z}{dx^3} + \text{etc.}\end{aligned} \qquad \text{(V)}$$

Facile vero perspicitur esse

$$Y'\frac{d\delta y}{dx} = \frac{d(Y'\delta y)}{dx} - \frac{dY'}{dx}\delta y$$

$$Y''\frac{d^2\delta y}{dx} = \frac{d\left(Y''\frac{d\delta y}{dx}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dY''}{dx}\delta y\right)}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2}\delta y$$

$$Y'''\frac{d^3\delta y}{dx} = \frac{d\left(Y'''\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dY'''}{dx}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\frac{d^2Y'''}{dx^2}\cdot\delta y\right)}{dx} - \frac{d^2Y'''}{dx^3}\cdot\delta y$$

etc. etc. etc.

transformando igitur simili modo et eas partes, quae ad variabilem z pertinent, formula nostra abit in hanc:

$$\begin{aligned}\delta u = &\left(Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \frac{d^2Y'''}{dx^3} + \text{etc.}\right)\delta y + \left(Z - \frac{dZ'}{dx} + \frac{d^2Z''}{dx^2} - \frac{d^3Z'''}{dx^3} + \text{etc.}\right)\delta z \\ &+ \frac{d\left[\left(Y' - \frac{dY''}{dx} + \frac{d^2Y'''}{dx^2} - \text{etc.}\right)\delta y\right]}{dx} + \frac{d\left[\left(Z' - \frac{dZ''}{dz} + \frac{d^2Z'''}{dx^2} - \text{etc.}\right)\delta z\right]}{dx} \\ &+ \frac{d\left[\left(Y'' - \frac{dY'''}{dx} + \text{etc.}\right)\frac{d\delta y}{dx}\right]}{dx} + \frac{d\left[\left(Z'' - \frac{dZ'''}{dx} + \text{etc.}\right)\frac{d\delta z}{dx}\right]}{dx} \\ &+ \frac{d\left[\left(Y''' - \text{etc.}\right)\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right]}{dx} + \frac{d\left[\left(Z''' - \text{etc.}\right)\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right]}{dx} \\ &\qquad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}\end{aligned} \tag{VI}$$

quae formula in ejusmodi formam reducta est, ut omnes ejus partes, exceptis duabus primis, sint differentialia completa, unde postea in evolvendis variationibus integralium magnam utilitatem capiemus. Ceterum vero ex symmetria hujus formulae, quae in partibus et ad y et ad z pertinentibus cernitur, facile perspicere possumus, quomodo ea applicanda sit ad functiones, quae plures etiam quam duas functiones formas suas mutantes involvant.

§ 6. Quamquam usque adhuc variabili x nullam dedimus variationem, tamen si eam spectamus tamquam functionem alterius cujuslibet argumenti t, uti semper licitum est hujus functionis formam etiam variatam concipere possumus, unde prodit variatio δx, quae pro functione arbitraria argumenti t, vel etiam ipsius argumenti x habenda est. Tunc igitur variatio ipsius $u = \varphi(x, y, z, y', z', \text{etc.})$, posito formam functionis φ immutatam manere, quo (δu) fiat $= 0$, hoc modo exprimetur:

$$\delta u = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + Y'\delta y' + Z'\delta z' + \text{etc.} \tag{VII}$$

In hac vero formula variationes δy, δz, $\delta y'$, $\delta z'$, etc. non eandem quam in §§ praecedentibus significationem habent, quia nunc partim etiam affectae sunt variatione ipsius x nec ea de causa $\delta y'$ sive $\delta\frac{dy}{dx}$ amplius erit $= \frac{d\delta y}{dx}$, et sic porro, quum dx quoque varietur. Tamen relationem, quae inter has et illas variationes intercedat, facile perspiciemus. Ponamus $y = fx$ et denotemus variationem ipsius y e sola mutatione formae functionis f prodeuntem per (δy), ita ut (δy) nunc idem valeat, quod in §§ praec. simplex signum δy, erit secundum formulam (IV)

$$\delta y = (\delta y) + x'\delta x.$$

Eodem modo etiam habebimus $\delta z = (\delta z) + z'\delta x$, $\delta y' = (\delta y') + y''\delta x$, $\delta z' = (\delta z') + z''\delta x$, et vice versa

$$(\delta y) = \delta y - y'\delta x, \qquad (\delta z) = \delta z - z'\delta x,$$
$$(\delta y') = \delta y' - y''\delta x, \qquad (\delta z') = \delta z' - z''\delta x,$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Quum vero quantitates (δy), (δz), $(\delta y')$, $(\delta z')$, etc. omnino congruant cum iis, quas in §§. praec. per δy, δz, $\delta y'$ $\delta z'$, etc. designavimus habetur

$$(\delta y') = \frac{d(\delta y)}{dx}, \quad (\delta z') = \frac{d(\delta z)}{dx}, \quad (\delta y'') = \frac{d^2(\delta y)}{dx^2}, \quad (\delta z'') = \frac{d^2(\delta y)}{dx^2}, \text{ etc.}$$

itaque erit

$$\delta y' - y''\delta x = \frac{d(\delta y - y'\delta x)}{dx}, \qquad \delta z' - z''\delta x = \frac{d(\delta z - z'\delta x)}{dx},$$
$$\delta y'' - y'''\delta x = \frac{d^2(\delta y - y'\delta x)}{dx^2}, \qquad \delta z'' - z'''\delta x = \frac{d^2(\delta x - z'\delta x)}{dx^2},$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Quod hic quasi a priori demonstravimus, etiam a posteriori probari potest per differentiationem rite institutam. Quum enim nunc dx aeque ac x varietur, habebimus

$$\delta y' = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{\delta dy}{dx} - \frac{dy\,\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta y}{dx} - y'\frac{d\delta x}{dx}$$

ac perinde erit $\delta y'' = \frac{d\delta y'}{dx} - y''\frac{d\delta x}{dx}$, $\delta y''' = \frac{d\delta y''}{dx} - y'''\frac{d\delta x}{dz}$, etc., unde deducitur

$$\delta y' - y''\delta x = \frac{d\delta y}{dx} - \left(y'\frac{d\delta x}{dx} + y''dx\right) = \frac{d\delta x}{dx} - \frac{d(y'\delta x)}{dx} = \frac{d(\delta y - y'\delta x)}{dx}$$

eodemque modo $\delta y'' - y'''\delta x = \frac{d(\delta y' - y''\delta x)}{dx} = \frac{d^2(\delta y - y'\delta x)}{dx^2}$, et sic porro.

Exhibeamus jam aequationem (VII) in hac forma:

$$\begin{aligned} dx = {} & (X + Yy' + Zz' + Y'y'' + Z'z'' + \text{ etc. })\,\delta x \\ & + Y(\delta y - y'\delta x) + Y'(\delta y' - y''\delta x) + Y''(\delta y'' - y'''\delta x) + \text{ etc.} \\ & + Z(\delta z - z'\delta x) + Z'(\delta z' - z''\delta x) + Z''(\delta z'' - z'''\delta x) + \text{ etc.} \end{aligned}$$

et substituamus pro $\delta y' - y''\delta x$, $\delta z' - z''\delta x$, $\delta y'' - y'''\delta x$, etc. eorum valores modo erutos, tunc, quum $X + Yy' + Zz' + Y'y'' + Z'z'' + \text{etc.}$ sit $= \frac{du}{dx}$, nanciscemur

$$\begin{aligned} \delta u = {} & \frac{du}{dx}\delta x + Y(\delta y - y'\delta x) + Y'\frac{d(\delta y - y'\delta x)}{dx} + Y''\frac{d^2(\delta y - y'\delta x)}{dx^2} + \text{ etc.} \\ & + Z(\delta z - z'\delta x) + Z'\frac{d(\delta z - z'\delta x)}{dx} + Z''\frac{d^2(dz - z'\delta x)}{dx^2} + \text{ etc.}, \end{aligned}$$

quae formula pro δu inventa, quum omnino congruat cum formula (V), adjecto ad illam membro $\frac{du}{dx}\delta x$ et loco δy posito $\delta y - y'\delta x$, per similem etiam transformationem, qua illa transiit in formulam (VI), haec accipit formam:

$$\delta u = \frac{du}{dx}\delta x + \left(Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \text{etc.}\right)(\delta y - y'\delta x) + \left(Z - \frac{dZ'}{dx} + \frac{d^2Z''}{dx^2} - \text{etc.}\right)(\delta z - z'\delta x)$$

$$\text{(VIII)} \quad + \frac{d\left[\left(Y - \frac{dY''}{dx} + \text{etc.}\right)(\delta y - y'\delta x)\right]}{dx} + \frac{d\left[\left(Z - \frac{dZ''}{dx} + \text{etc.}\right)(\delta z - z'\delta x)\right]}{dx}$$

$$+ \frac{d\left[\left(Y'' - \text{etc.}\right)\frac{d(\delta y - y'\delta x)}{dx}\right]}{dx} + \frac{d\left[\left(Z'' - \text{etc.}\right)\frac{d(\delta z - z'\delta x)}{dx}\right]}{dx}$$

$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Haec est formula generalior pro variatione functionis u, quae formulam (VII), quum ponendo $\delta x = 0$ in illam abeat, velut casum specialem complectitur, et propter ejus formam ad integrationem adaptatam in sequentibus nobis maximo usui erit.

§. 7. Progrediamur nunc ad determinandam variationem functionis, quae alteram e duobus argumentis pendentem cum ejus differentialibus particularibus involvit, ut haec:

$$u = \varphi(x, y, z, z', z_{,}, z'', z'_{,}, z_{,,}, \text{etc.}),$$

ubi $z = f(x,y)$, $z' = \overset{x}{d}z$, $z_{,} = \overset{y}{d}z$, $z'' = \overset{x}{d^2}z$, $z'_{,} = \overset{xy}{dd}z$, $z_{,,} = \overset{y}{d^2}z$, etc.

Quodsi ponimus, solius functionis f formam mutari, quo quantitates z, z', $z_{,}$ etc. varientur, et ipsius u differentiale completum ita repraesentamus $du = Xdx + Ydy + Zdz + Z'dz' + Z_{,}dz + Z''dz'' + Z'_{,}dz'_{,} + Z_{,,}dz_{,,} + \text{etc.}$, ubi X, Y, Z, $Z_{,}$, Z', etc. respective sunt differentialia particularia ipsius u respectu x, y, z, z', $z_{,}$ etc., ita sumpta ac si hae variabiles nequaquam e se invicem pendeant, functionis u variatio in hac forma exhibebitur:

$$\delta u = Z\delta z + Z'\delta z' + Z_{,}\delta z_{,} + Z''\delta z'' + Z'_{,}\delta z'_{,} + Z_{,,}\delta z_{,,} + \text{etc.} \qquad \text{(IX)}$$

Variatio δz hic secundum §. 2 pro functione arbitraria ipsarum x et y habenda est, et ejusdem generis etiam sunt variationes $\delta z'$, $\delta z_{,}$, $\delta z''$, etc. Sequitur vero ex principiis ibidem statutis, esse $\delta z' = \delta \overset{x}{d} z = \overset{x}{d} \delta z$, $\delta z_{,} = \delta \overset{y}{d} z = \overset{y}{d} \delta z$, $\delta z'' = \delta \overset{x}{d}{}^2 z = \overset{x}{d}{}^2 \delta z$, etc., quo fit

$$\delta u = Z \delta z + Z' \overset{x}{d} \delta z + Z_{,} \overset{y}{d} \delta z + Z' \overset{x}{d}{}^2 \delta z + Z_{,}' \overset{x}{d} \overset{y}{d} \delta z + Z_{,,} \overset{y}{d}{}^2 \delta z + \text{etc.}$$

Hanc formulam eadem ratione, quam supra transformantes formulam (V) in (VI) secuti sumus, in aliam formam ad usum commodiorem redigere possimus, sed majoris concinnitatis causa antea eam ad casum generaliorem accommodare placet, ubi etiam x et y variantur. Tales variationes inde ortas fingere possumus, quod x et y spectemus tamquam functiones duarum aliarum variabilium t et v, quarum relatio ad x et y nunc mutatur, ita ut variationes δx et δy habendae sint functiones harum variabilium t et v, sive etiam ipsarum x et y. Functionis u variatio tunc in hac forma exhibenda est:

$$\delta u = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z + Z' \delta z' + Z_{,} \delta z_{,} + Z'' \delta z'' + \text{etc.} \qquad \text{(X)}$$

ubi tamen variationes δz, $\delta z'$, $\delta z_{,}$ etc. jam generaliorem, quam quae iis hucusque tributa erat, significationem acceperunt, quum non amplius tantum e mutanda forma functionis $f(x,y)$ progrediantur, sed etiam e variandis valoribus ipsarum x et y. Quodsi igitur eas variationes, quas quantitates $z, z', z_{,}$ etc. e sola mutatione formae functionis $f(x,y)$ ducunt, denotamus per (δz), $(\delta z')$, $(\delta z_{,})$, etc., hae quantitates eaedem sunt, quae initio hujus § designavimus per δz, $\delta z'$, $\delta z_{,}$ etc., ideoque erit

$$(\delta z') = \overset{x}{d}(\delta z),\ (\delta z_{,}) = \overset{y}{d}(\delta z),\ (\delta z'') = \overset{x}{d}{}^2(\delta z),\ (\delta z_{,}') = \overset{x}{d}\overset{y}{d}(\delta z),\ (\delta z_{,,}) = \overset{y}{d}{}^2(\delta z) \text{ etc.} \qquad \text{(XI)}$$

Ex formula (IV) vero sequitur esse

$$\delta z = (\delta z) + \overset{x}{d}z\delta x + \overset{y}{d}z\delta y = (\delta z) + z'\delta x + z_{,}\delta y$$

$$\delta z' = (\delta z') + \overset{x}{d}z'\delta x + \overset{y}{d}z'\delta y = (\delta z') + z''\delta x + z_{,}'\delta y$$

$$\delta z_{,} = (\delta z_{,}) + \overset{x}{d}z_{,}\delta x + \overset{y}{d}z_{,}\delta y = (\delta z_{,}) + z_{,}'\delta x + z_{,,}\delta y$$

etc. etc.

unde deducitur

$$(\delta z) = \delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y, \quad (\delta z)' = \delta z' - z''\delta x - z_{,}'\delta y, \quad (\delta z_{,}) = \delta z - z_{,}'\delta x - z_{,,}\delta y$$

$$(\delta z'') = \delta z'' - z'''\delta x - z_{,}''\delta y, \quad (\delta z_{,}') = \delta z_{,}' - z_{,}''\delta x - z_{,,}'\delta y, \quad (\delta z_{,,}) = \delta z_{,,} - z_{,,}'\delta x - z_{,,,}\delta y$$

et sic porro, quibus valoribus substitutis in (XI), introducta brevitatis causa significatione

$$\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y = \omega$$

nanciscimur

$$\delta z' - z''\delta x - z_{,}'\delta y = \overset{x}{d}\omega, \qquad \delta z_{,} - z_{,}'\delta x - z_{,,}\delta y = \overset{y}{d}\omega \qquad \text{(XII)}$$

$$\delta z'' - z'''\delta x - z_{,}''\delta y = \overset{x}{d^2}\omega, \quad \delta z_{,}' - z_{,}''\delta x - z_{,,}'\delta y = \overset{xy}{dd}\omega, \quad \delta z_{,,} - z_{,,}'\delta x - z_{,,,}\delta y = \overset{y}{d^2}\omega$$

etc. etc. etc.

Quodsi jam aequationem (X) in hanc formam redigimus

$$\delta u = (X + Zz' + Z'z'' + Z_{,}z_{,}' + \text{etc.})\delta x + (Y + Zz_{,} + Z'z_{,}' + Zz_{,,} + \text{etc.})\delta y$$
$$+ Z(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y) + Z'(\delta z' - z''\delta x - z_{,}'\delta y) + Z_{,}(\delta z - z_{,}'\delta x - z_{,,}\delta y)$$
$$+ Z''(\delta z'' - z'''\delta x - z_{,}''\delta y) + \text{etc.}$$

pro quantitatibus $(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)$, $(\delta z' - z''\delta x - z_{,}'\delta y)$, etc. substituere possumus earum valores modo inventos, itaque respectu habito ad aequationes

$$X + Zz' + Z'z'' + Z_{,}z_{,}' + \text{etc.} = \overset{x}{du}$$

$$Y + Zz_{,} + Z'z_{,}' + Z_{,}z_{,,} + \text{etc.} = \overset{y}{du}$$

pervenimus ad hanc formulam:

$$\delta u = \overset{x}{du}\,\delta x + \overset{y}{du}\,\delta y + Z\omega + Z'\overset{x}{d}\omega + Z_{,}\overset{y}{d}\omega + Z''\overset{x}{d^2}\omega + Z_{,}'\overset{xy}{dd}\omega + \text{etc.} \qquad \text{(XIII)}$$

in qua differentialia particularia $\overset{x}{du}$ et $\overset{y}{du}$ ita sumenda sunt, ut in iis formandis quantitates $z, z', z_{,,}$ etc. quae in u implicatae sunt, tamquam functiones ipsarum x et y tractentur.

Huic formulae cum formula (IX) maxima est similitudo, potest enim haec ex illa deduci, adjectis terminis $\overset{x}{du}\delta x$ et $\overset{y}{du}\delta y$ ac posita loco δz quantitate ω sive $\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y$. Haec tamen illa generalior est, quam ut casum specialem, ubi $\delta x = 0$ et $\delta y = 0$, complectitur.

Jamjam formulae (XIII) talem induere volumus formam, in qua postea eam ad investigandas variationes integralium duplicium in usum vocare possimus. Observemus in hunc finem esse

$$Z'\overset{x}{d}\omega = \overset{x}{d}(Z'\omega) - \overset{x}{d}Z'.\omega$$

$$Z_{,}\overset{y}{d}\omega = \overset{y}{d}(Z_{,}\omega) - \overset{y}{d}Z_{,}.\omega$$

$$Z''\overset{x}{d^2}\omega = \overset{x}{d}(Z''\overset{x}{d}\omega) - \overset{x\,x}{d}(dZ''.\omega) + \overset{x}{d^2}Z''.\omega$$

$$Z_{,}'\overset{yx}{dd}\omega = \overset{x}{d}(Z_{,}'\overset{y}{d}\omega) - \overset{y\,x}{d}(dZ_{,}'.\omega) + \overset{y\,x}{dd}Z_{,}'.\omega$$

$$= \overset{y}{d}(Z_{,}'\overset{x}{d}\omega) - \overset{x\,y}{d}(dZ_{,}'.\omega) + \overset{x\,y}{dd}Z_{,}'.\omega$$

$$Z_{,,}\overset{y}{d^2}\omega = \overset{y}{d}(Z_{,,}\overset{y}{d}\omega) - \overset{y\,y}{d}(dZ_{,,}.\omega) + \overset{y}{d^2}Z_{,,}.\omega$$

etc. etc.

quibus substitutionibus factis formula (XIII) statim in hanc transformatur:

$$\delta u = \overset{x}{d}u\delta x + \overset{y}{d}u\delta y + (Z - \overset{x}{d}Z' - \overset{y}{d}Z_{,} + \overset{x}{d}{}^2 Z'' + \overset{xy}{dd}Z'_{,} + \overset{y}{d}{}^2 Z_{,,} - \text{etc.})\,\omega$$
$$+ \overset{x}{d}[(Z' - \overset{x}{d}Z'' - \tfrac{1}{2}\overset{y}{d}Y'_{,} + \text{etc.})\omega]$$
$$+ \overset{y}{d}[(Z_{,} - \overset{y}{d}Z_{,,} - \tfrac{1}{2}\overset{x}{d}Z'_{,} + \text{etc.})\omega]$$
$$+ \overset{x}{d}[(Z'' - \text{etc.})\overset{x}{d}\omega + (\tfrac{1}{2}Z'_{,} - \text{etc.})\overset{y}{d}\omega] \qquad \text{(XIV)}$$
$$+ \overset{y}{d}[(\tfrac{1}{2}Z'_{,} - \text{etc.})\overset{x}{d}\omega + (Z_{,,} - \text{etc.})\overset{y}{d}\omega]$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

ubi notandum est, loco unius vel alterius valoris pro $Z'_{,}\overset{xy}{dd}\omega$ statuti, ad symmetriam formnlae conservandam, dimidiam amborum valorum summam introductam esse.

§. 8. Methodum nostram, qua in eruenda variatione functionis u usi sumus, simili modo etiam ad generaliorem casum adhiberi posse, ubi haec functio aliam e pluribus variabilibus pendentem involvat, facile intelligitur. Statuamus enim functionem u complecti variabiles e se invicem non pendentes x, y, z, etc., et functionem ex iis compositam v cum ejus differentialibus particularibus $\overset{x}{d}v, \overset{y}{d}v$, etc., ac ponamus non modo functionem v sed etiam quantitates x, y, z, etc. variari, eo modo ut $\delta v, \delta x, \delta y, \delta z$, etc. sint functiones indeterminatae ipsarum x, y, z, etc. Quodsi tunc per differentiationem ita institutam, ac si x, y, z, etc., v, $\overset{x}{d}v$, $\overset{y}{d}v$ etc. e se invicem non penderent, invenitur:

$$du = Xdx + Ydy + Zdz + \text{etc.} + Vdv + V_x d(\overset{x}{d}v) + V_y d(\overset{y}{d}v) + V_z d(\overset{z}{d}v) + \text{etc.}$$
$$+ V_{x,x} d(\overset{x}{d}{}^2 v) + V_{x,y} d(\overset{xy}{dd}v) + V_{x,z} d(\overset{xz}{dd}v) + \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc}$$

habebimus posito

$$\omega = \delta v - \overset{x}{d}v.\delta x - \overset{y}{d}v.\delta y - \overset{z}{d}v.\delta z - \text{etc.}$$

pro variatione functionis u hanc formulam:

$$\begin{aligned}\delta u = \overset{x}{d}u.\delta x + \overset{y}{d}u.\delta y + \overset{z}{d}u\delta z + \text{etc.} + V\omega + V_x \overset{x}{d}\omega + V_y \overset{y}{d}\omega + V_z \overset{z}{d}\omega + \text{etc.}\\ + V_{x,x} \overset{x}{d^2}\omega + V_{x,y} \overset{xy}{dd}\omega + V_{z,x} \overset{xy}{dd}\omega + \text{etc.} \qquad \text{(XV)}\\ \text{etc.} \qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

ubi differentialia $\overset{x}{d}u$, $\overset{y}{d}u$, $\overset{z}{d}u$, etc. ita sumenda sunt, ut quantitas v ejusque differentialia ut functiones ipsarum x, y, z, etc. tractentur. Haec formula etiam similem transformationem, ac formula (XIII) admittit.

§. 9. Evolvimus in §.§. praec. formulam completam pro variatione functionis u, quae aliam e duobus vel pluribus argumentis pendentem et formam suam mutantem, ejusque differentialia particularia complectitur, posito haec ipsa argumenta etiam variari, ad quem finem pervenimus, nullis regulis statutis de variationibus talium differentialium particularium formandis. Quas regulas nunc investigandas nobis proponimus, et perducemur hac ratione quasi a posteriori ad illas formulas (XII), quibus investigationes §.§. praecedentium praecipue nituntur.

Si est v functio variabilium e se invicem non pendentium x, y, z, etc. et designamus functionum v, $\overset{x}{d}v$, $\overset{y}{d}v$, $\overset{z}{d}v$, etc. variationes quoad formam charactere Δ, earum variationes completas vero charactere δ, erit

$$\begin{aligned}\delta v &= \Delta v + \overset{x}{d}v.\delta x + \overset{y}{d}v.\delta y + \overset{z}{d}v.\delta z + \text{etc.}\\ \delta \overset{x}{d}v &= \Delta \overset{x}{d}v + \overset{x}{d}v.\delta x + \overset{yx}{dd}v.\delta y + \overset{zx}{dd}v.\delta z + \text{etc.}\\ \delta \overset{y}{d}v &= \Delta \overset{y}{d}v + \overset{xy}{dd}v.\delta x + \overset{y}{d^2}v.\delta q + \overset{zy}{dd}v.\delta z + \text{etc.}\\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

differentiando vero primam harum aequationum respectu x, y, z, etc. nanciscimur

$$\overset{x}{d}\delta v = \overset{x}{d}\Delta v + \overset{x}{d^2}v.\delta x + \overset{xy}{dd}v.\delta y + \overset{xz}{dd}v.\delta z + \text{etc.} + \overset{x}{d}v.\overset{x}{d}\delta x + \overset{y}{d}v.\overset{x}{d}\delta y + \overset{z}{d}v.\overset{x}{d}\delta z + \text{etc.}$$

$$\overset{y}{d}\delta v = \overset{y}{d}\Delta v + \overset{yx}{dd}v.\delta x + \overset{y}{d^2}v.\delta y + \overset{yz}{dd}v.\delta z + \text{etc.} + \overset{x}{d}v.\overset{y}{d}\delta x + \overset{y}{d}v.\overset{y}{d}\delta y + \overset{z}{d}v.\overset{y}{d}\delta z + \text{etc.}$$

ete. etc. etc.

ex quibus aequationibus cum prioribus comparatis, quum sit $\overset{x}{\Delta}dv = \overset{x}{d}\Delta v$, $\overset{y}{\Delta}dv = \overset{y}{d}\Delta v$, etc., statim deducuntur hae formulae:

$$\begin{aligned}
\overset{x}{\delta}dv &= \overset{x}{d}\delta v - \overset{x}{d}v\,\overset{x}{d}\delta x - \overset{y}{d}v\,\overset{x}{d}\delta q - \overset{z}{d}v\,\overset{x}{d}\delta z - \text{etc.} \\
\overset{y}{\delta}dv &= \overset{y}{d}\delta v - \overset{x}{d}v\,\overset{y}{d}\delta x - \overset{y}{d}v\,\overset{y}{d}\delta q - \overset{z}{d}v\,\overset{y}{d}\delta z - \text{etc.} \qquad \text{(XVI)} \\
\overset{z}{\delta}dv &= \overset{z}{d}\delta v - \overset{x}{d}v\,\overset{z}{d}\delta x - \overset{y}{d}v\,\overset{z}{d}\delta q - \overset{z}{d}v\,\overset{z}{d}\delta z - \text{etc.} \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

quae regulam generalem exhibent, quam in formandis variationibus differentialium particularium sequi debemus.

Quodsi vero haec deductio formularum (XVI), quam modo dedimus, non satis dilucida et stricta videatur, accuratiorem etiam demonstrationem earum afferre possumus, quo consilio refugere debemus ad prima calculi nostri principia, quibus variationes formandi ratio ad differentiationem secundum argumentum indeterminatum reducta est.

Exhibita functione v in hac forma $f(x, y, z, \text{etc.})$, statuere licet, $f(x, y, z, \text{etc.})$ esse formam peculiarem, quam induat functio $F(\lambda, x, y, z, \text{etc.})$ pro $\lambda = \alpha$, quum vero ex hypothesi nostra x, y, z, etc. quoque varientur, earum loco ponamus quantitates x', y', z', etc., quae pro $\lambda = \alpha$ abeant in illas ideoque hujus formae sint:

$$x' = x + \varphi(x,y,z,\text{etc.})(\lambda-\alpha) + \varphi.(x,y,z,\text{etc.})(\lambda-\alpha)^2 + \text{etc.}$$
$$y' = y + \psi(x.y,z,\text{etc.})(\lambda-\alpha) + \psi(x,y,z,\text{etc.})(\lambda-\alpha)^2 + \text{etc.} \qquad (1)$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

ita ut generalius habeamus $v = f(x, y, z, \text{etc.}) = F(\lambda, x', y', z', \text{etc.})$ pro $\lambda = \alpha$. Designando tunc functionis F differentiale completum respectu ipsius λ, ita sumptum, ut etiam x', y', z', etc. tamquam functiones hujus argumenti tractentur, per $\overset{\lambda}{[dF]}$, habebimus:

$$\delta v = \overset{\lambda}{[dF]}.\,d\lambda \quad \text{pro } \lambda = \alpha \qquad (2)$$

et simili modo, quum differentialia particularia $\overset{x}{dv}, \overset{y}{dv}, \overset{z}{dv}$, etc. derivari debeant ex his $\overset{x'}{dF}, \overset{y'}{dF}, \overset{z'}{dF}$, etc. ponendo $\lambda = \alpha$, concluditur esse

$$\delta\overset{x}{dv} = [d\overset{\lambda}{}\overset{x'}{dF}].\,d\lambda, \quad \delta\overset{y}{dv} = [\overset{\lambda}{d}\overset{y'}{dF}].\,d\lambda, \text{ etc. } \quad \text{pro } \lambda = \alpha \qquad (3)$$

differentialibus respectu λ in eodem sensu generaliori acceptis. Qua ratione $\delta v, \delta\overset{x}{dv}, \delta\overset{y}{dv}$, etc. exhibebunt harum functionum variationes completas quum e mutanda forma functionis v, tum e variandis argumentis x, y, z, etc. progredientes. Quantitatum x, y, z, etc. variationes perinde etiam inveniuntur hae:

$$\delta x = \overset{\lambda}{dx'}d\lambda, \quad \delta y = \overset{\lambda}{dy'}d\lambda, \quad \delta z = \overset{\lambda}{dz'}.d\lambda, \text{ etc. } \quad \text{pro } \lambda = \alpha, \qquad (4)$$

quae opera aequationum (1) facile cognoscuntur pro functionibus arbitrariis ipsarum x, y, z, etc.

Jam ex notis calculi differentialis principiis deducitur esse

$$\overset{\lambda}{[dF]}\,d\lambda = \overset{\lambda}{dF}.d\lambda + \overset{x'}{dF}.\overset{\lambda}{dx'}.d\lambda + \overset{y'}{dF}.\overset{\lambda}{dy'}.d + \overset{z'}{dF}.\overset{\lambda}{dz'}.d\lambda + \text{etc.}$$

denotante $\overset{\lambda}{dF}$ simplex differentiale secundum λ, in quo formando variabiles x', y', z', etc. tamquam ex hoc argumento non pendentes spectantur.

Quodsi hanc aequationem differentiamus respectu x, ubi et x' et y' et z' etc. velut functiones ipsius x tractandae sunt, nanciscimur

$$\begin{aligned}
\overset{x}{d}[\overset{\lambda}{dF}]\,d\lambda = {} & (\overset{x'\lambda}{ddF}.d\lambda + \overset{x'\;\;\lambda}{d^2F}.dx'.d\lambda + \overset{x'y'\;\lambda}{ddF}.dy'.d\lambda + \overset{x'z'\;\lambda}{ddF}.dz'.d\lambda + \text{etc.})\,\overset{x}{dx'} \\
& + (\overset{y'\lambda}{ddF}.d\lambda + \overset{y'x'\;\lambda}{ddF}.dy'.d\lambda + \overset{y'\;\;\lambda}{d^2F}.dy'.d\lambda + \text{etc.})\,\overset{x}{dy'} \\
& + (\overset{z'\lambda}{ddF}.d\lambda + \overset{z'x'\;\lambda}{ddF}.dx'.d\lambda + \overset{z'y'\;\lambda}{ddF}.dy'.d\lambda + \text{etc.})\,\overset{x}{dz'} \qquad (5) \\
& \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\
& + \overset{x'}{dF}.\overset{x\,\lambda}{d}(dx'.d\lambda) + \overset{y'}{dF}\,\overset{x\,\lambda}{d}(dy'.d\lambda) + \overset{z'}{dF}\,\overset{x\,\lambda}{d}(dz'.d\lambda) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

formando vero functionis $\overset{x'}{dF}$ differentiale completum respectu λ, pervenimus ad hanc aequationem

$$\overset{\lambda\,x'}{[ddF]}\,d\lambda = \overset{\lambda x'}{ddF}.d\lambda + \overset{x'\;\;\lambda}{d^2F}.dx'.d\lambda + \overset{y'x'\;\lambda}{ddF}.dy'.d\lambda + \overset{z'x'\;\;\lambda}{ddF}.dz'.d\lambda + \text{etc.}$$

cujus pars dextra omnino congruit cum coefficiente quantitatis $\overset{x}{dx'}$ in aequatione (5). Substituamus igitur in hac aequatione pro coefficiente ipsius $\overset{x}{dx'}$ quantitatem $\overset{\lambda\,x'}{[ddF]}d\lambda$ et ponamus postea $\lambda = \alpha$. Inde tota haec aequatio (5), quum ex aequationibus (1) sequatur pro $\lambda = \alpha$ fieri $\overset{x}{dx'} = 1$ et $\overset{x}{dy'}, \overset{x}{dz'}$, etc. $= 0$, respectu habito ad aequationes (2), (3) et (4), in hanc formam simpliciorem contrahitur:

$$\overset{x}{d}\delta v = \delta\overset{x}{d}v + \overset{x}{d}v.\overset{x}{d}\delta x + \overset{y}{d}v.\overset{x}{d}\delta y + \overset{z}{d}v.\overset{x}{d}\delta z + \text{etc.}$$

unde prodit formula jam antea inventa:

$$\delta\overset{x}{d}v = \overset{x}{d}\delta v - \overset{x}{d}v.\overset{x}{d}\delta x - \overset{y}{d}v.\overset{x}{d}\delta y - \overset{z}{d}v.\overset{x}{d}\delta z - \text{etc.}$$

Permutatis inter se x, y, z, etc. ex hac etiam ceterae formulae (XVI) nullo negotio deducuntur. *)

§. 10. Ex aequationibus (XVI) statim deducere possumus etiam formulas pro variationibus differentialium particularium superiorum ordinum substituendo tantum in iis pro v vel $\overset{x}{d}v$, vel $\overset{y}{d}v$, vel $\overset{x}{d}{}^2v$, etc. Facilius vero ad hunc finem pervenimus, si antea aequationes illas in hanc formam redigimus:

$$\delta\overset{x}{d}v - \overset{x}{d}{}^2v.\delta x - \overset{yx}{dd}v.\delta y - \overset{zx}{dd}v.\delta z - \text{etc.} = \overset{x}{d}(\delta v - \overset{x}{d}v.\delta x - \overset{y}{d}v.\delta y - \overset{z}{d}v.\delta z - \text{etc.})$$

$$\delta\overset{y}{d}v - \overset{xy}{dd}v.\delta x - \overset{y}{d}{}^2v.\delta y - \overset{zy}{dd}v.\delta z - \text{etc.} = \overset{y}{d}(\delta v - \overset{x}{d}v.\delta y - \overset{y}{d}v.\delta y - \overset{z}{d}v.\delta z - \text{etc.})$$

etc. etc.

Ponendo nunc in his aequationibus $\overset{x}{d}v$ pro v, nanciscimur

---

*) Eulerus ipse in formanda variatione differentialis particularis in errorem incidit, commutans hoc cum quotiente differentiali $\frac{dv}{dx}$, quo modo invenitur $\delta\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{d\delta v}{dx} - \frac{dv.d\delta x}{dx\,dx}$ quod idem valet, ac si $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d\delta z}{dx}$, etc. nihilo aequentur sive ponatur variationes δy, δz, etc. e variabili x non pendere. Poissonius primus formulas (XVI) invenit pro duobus argumentis x et y, ex iisque deduxit formulam (XIII.) pro variatione functionis, quae aliam e duobus argumentis pendentem complectitur. Qua in disquisitione tamen omnino aliam viam eamque satis complicatam persecutus est, variabiles x et y tamquam functiones duarum aliarum variabilium spectans. Ostrogratskius (vid. Introd.) has formulas generalissima forma exhibuit, aequando in $d\delta v$ et δdv singulos coefficientes ipsarum dx, dy, dz, etc. Nostra rem tractandi ratione earum investigatio ad simplicia calculi differentialis principia reducta esse videtur.

jam in praecedentibus omnia ad hanc rem brevissime expediendam praeparata sunt, et eam ob causam, quia multa ad has disquisitiones pertinentia non nisi in ipsis problematibus solvendis stricte exponi possunt.

Itaque, ut rem statim generaliori modo aggrediamur consideremus formulam integralem ita exhibitam:

$$U = \int_a^{a'} u dx$$

in qua u est functio data ipsarum x, y, z, y', z', y'', z'', etc., designantibus y et z functiones indeterminatas ipsius x, et y', z', y'', z'', etc. earum functiones derivatas, uti in §. 4, et salvis denotationibus hujus §. sit

$$du = Xdx + Ydy + Zdz + Y'dy' + Z'dz' + Y''dy'' + Z''dz'' + \text{etc.}$$

Ex theorematibus in §. 3. statutis et demonstratis sequitur esse

$$\delta U = \delta\int_a^{a'} udx = \int_a^{a'} \delta u . dx$$

substituto jam pro δu ejus valore ex formula (VI), quum omnes hujus formulae partes signo differentiationis affectae integrationem admittant, designando valorem, quem functio quaelibet P ab x pendens pro $x = a$ accipiat, per $[P]_a$, nanciscimur

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_a^{a'} \Big[(Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2 Y''}{dx^2} - \text{etc.})\, \delta y + (Z - \frac{dZ'}{dx} + \frac{d^2 Z''}{dx^2} - \text{etc.})\, \delta z \Big] dx \\ & + \Big[(Y' - \frac{dY''}{dx} + \text{etc.}) \delta y + (Z' - \frac{dZ''}{dx} + \text{etc.}) \delta z + (Y'' - \text{etc.}) \frac{d\delta y}{dx} + \text{etc.} \Big]_{a'} \\ & - \Big[(Y' - \frac{dY''}{dx} + \text{etc.}) \delta y + (Z' - \frac{dZ'}{dx} + \text{etc.}) \delta z + (Y'' - \text{etc.}) \frac{d\delta y}{dx} + \text{etc.} \Big]_a \end{aligned} \quad \text{(XVII)}$$

quae formula nobis suppeditat variationem integralis U, si haec modo e mutata forma functionum y et z in u implicatarum prodit. Hanc vero formulam e duabus partibus valde diversis conflatam esse videmus, quarum una signo integrationis affecta, altera hoc libera est. Haec altera pars enim manifesto tantum e valoribus pendet, quos quantitates y, z, y', z', etc. et δy, δz, etc. pro limitibus a et a' accipiunt, ideoque nullo modo adstricta est ad formas functionum y et z earumque mutationes, quum diversissimae functiones ipsius x earumque derivatae eosdem valores accipere possint pro $x = a$ vel a'. Quin etiam haec pars omnino evanescit, si valores ipsarum y et z pro integralis limitibus a et a' non variatas esse ponimus, quia tunc etiam variationes δy et δz in his limitibus nihilo aequari debent. Prior pars vero formulae (XVII), cui signum integrationis praescriptum est, quo nequaquam liberari potest, nisi pro δy et δz certas functiones ipsius x assumamus, etiam alia pro aliis harum variationum valoribus evadet. Haec pars itaque re vera e mutatis formis functionum y et z pendet, nec uti altera pars ex solis mutatis earum valoribus, qui limitibus a et a' respondent. Quae differentia inter ambas partes formulae (XVI), quod ad ejus usum attinet, maximi momenti est.

§. 12. Posuimus in §. praec. modo formas functionum y et z mutari, limites vero, inter quos integrale U sumptum sit, non variatos esse. Tamen etiam variationem formulae integralis, quae e mutatis valoribus limitum progreditur, simul cum illa explorare possumus, etsi U non explicite tamquam functio horum limitum nobis data sit. Ex notis enim integralium definitorum proprietatibus sequitur esse

$$\int_{a+\delta a}^{a'+\delta a'} \varphi x . dx = \int_{a}^{a'} \varphi(x+\delta x) . d(x+\delta x)$$

ubi δx quamlibet functionem ipsius x, etsi non infinite parvam, repraesentare potest. Quodsi igitur ipsius U variationem δU quum ex mutandis formis functionum y et z, tum ex variandis valoribus limitum prodeuntem investigaturi sumus, modo quantitatem x sub signo integrationis sua etiam variatione augeamus oportet, unde prodit

$$\delta U = \int_a^{a'} \delta(udx) = \int_a^{a'} (\delta u.dx + u.d\delta x)$$

ubi tamen δu exhibet eam hujus functionis variationem, in qua etiam quantitas x variata est. Substituendo igitur pro δu ejus valorem e formula (VIII), et respiciendo id, quod $\int(du.\delta x + u.d\delta x)$ est $= u\delta x$, nanciscimnr pro nostra significatione

$$\delta U = \int_a^{a'} [(Y - \frac{dY'}{dx} + \frac{d^2Y''}{dx^2} - \text{etc.})(\delta y - y'\delta x) + (Z - \frac{dZ'}{dx} + \frac{d^2Z''}{dx^2} - \text{etc.})(\delta z - z'\delta x)]dx$$

$$+ [u]_{a'} \delta a' - [u]_a \delta a \qquad \text{(XVIII)}$$

$$+ [(Y' - \frac{dY''}{dx} + \text{etc.})(\delta y - y'\delta x) + (Z' - \frac{dZ''}{dx} + \text{etc.})(\delta z - z'\delta x) + \text{etc.}]_{a'}$$

$$- [(Y' - \frac{dY''}{dx} + \text{etc.})(\delta y - y'\delta x) + (Z' - \frac{dZ''}{dx} + \text{etc.})(\delta z - z'\delta x) + \text{etc.}]_a$$

Etiam in hac formula pars signi integrationis immunis a parte hoc signo affecta discerni debet. Illa enim re vera non amplius e forma functionum y et z pendet, sed modo e limitibus a et a' et e valoribus b et b', c et c', quos y et z in illis accipiunt, et quum nunc hi limites etiam arbitraria qualibet ratione varientur, inter a, b, c et inter a', b', c' relationes arbitrarias statuere possumus, quae nullo modo ad relationem generalem inter x, y, z adstrictae sunt. Ea vero hujus formulae pars, quae sub signo integrali invenitur, nequaquam differt ab eadem parte formulae (XVII), quum $\delta y - y'\delta x$ et $\delta z - z'\delta x$ hic idem significant, quod ibidem δy et δz (vide §. 6). Haec omnia vero in adhibendis formulis nostris ad solutionem geometricorum problematum, de quibus in altera hujus commentationis parte agemus, multo clariora reddere licet.

§. 13. Superest, ut nonnulla etiam de investigandis variationibus integralium multiplicium afferamus, quam disquisitionem tamen modo in integralibus duplicibus instituere volumus, quum ea quae de his valeant, cum levibus mutationibus etiam ad multiplicia referri possint. Exploremus igitur variationem formulae integralis duplicis

$$U = \iint u.dxdy$$

in qua u est functio data quantitatum $x, y, z, z', z_{,}$ etc., denotante z functionem indeterminatam ipsarum x et y, et $z', z_{,}, z''$, etc. ejus differentialia particularia, uti in §. 7, sit etiam

$$du = Xdx + Ydy + Zdz + Z'dz' + Z_{,}dz_{,} + Z''dz'' + \text{etc.}$$

Quodsi statim eum casum consideramus, quo praeter formam functionis z etiam limites hujus integralis mutantur, habebimus

$$\delta U = \iint \delta(u.dxdy) = \iint(\delta u.dxdy + u.\delta(dxdy)) \qquad \text{(XIX)}$$

ubi pro δu ejus valor e formula (XIV) sumendum est. Valorem variationis $\delta(dxdy)$ vero accuratius examinare debemus, ad quem finem refugiamus rursus ad nostra calculi variationum principia, ex quibus salvis significationibus §. 9 hanc variationem explorare debemus per differentiationem ipsius $dx'dy'$ rerpectu argumenti λ, quod postea ponitur $= \alpha$. Nanciscimur hoc modo

$$\overset{\lambda}{d}(dx'dy') = dy'\overset{\lambda}{d}dx_{,} + dx'\overset{\lambda}{d}dy' = dy'\overset{\lambda}{d}dx' + dx'\overset{\lambda}{d}dy'$$

ubi, quum dx' ita sumptum sit, ac si y' constans esset, et vice versa, etiam in formando $\overset{\lambda}{ddx'}$ eadem hypothesis, puta $dy' = 0$ admitti debet. Itaque valor ipsius $\overset{\lambda}{ddx'}$ ex his aequationibus est deducendus

$$\overset{\lambda}{ddx'} = \overset{x\lambda}{ddx'}.dx + \overset{y\lambda}{ddx'}.dy$$

$$0 = \overset{x}{dy'}dx + \overset{y}{dy'}.dy$$

te postea λ ponendum $= \alpha$, quod quum statim fieri possit, quo altera aequatio abeat in $dy = 0$, e priore accipimus $\overset{\lambda}{ddx'} = \overset{x}{d\delta x}.dx$. Eodem modo sequitur pro $\lambda = \alpha$ esse $\overset{\lambda}{ddy'} = \overset{y}{d\delta y}.dy$, unde pro variatione ipsius $dxdy$ prodit

$$\delta(dxdy) = (\overset{x}{d\delta x} + \overset{y}{d\delta y})dxdy$$

Haec agendi ratio facile etiam ad plures variabiles extenditur, quo modo pervenimus ad hanc generaliorem formulam

$$\delta(dx\,dy\,dz\ldots) = (\overset{x}{d\delta x} + \overset{y}{d\delta y} + \overset{z}{d\delta z} + \text{etc.})\,dx\,dx\,dz\ldots$$

Ponentes jam valorem pro $\delta(dxdy)$ inventum, in aequatione (XIX) accipimus

$$\delta U = \iint (du + u\overset{x}{d\delta x} + u\overset{y}{d\delta y})\,dx\,dy$$

et substituentes in hac pro δu ejus valorem ex aequatione (XIV) et integrantes semel omnes partes, quae integrationem admittunt, quum sit

$$\iint (\overset{x}{du}\,\delta x + u\,\overset{x}{d\delta x})\,dx\,dy = \int u\delta x.dy \quad \text{et} \quad \iint (\overset{y}{du}\,\delta y + u\,\overset{y}{d\delta y})\,dx\,dy = \int u\delta y\,dx$$

nanciscimur

$$\delta U = \iint \left(Z - \overset{x}{d}Z' - \overset{y}{d}Z_{,} + \overset{x}{d^2}Z'' + \overset{xy}{dd}Z_{,}' + \overset{y}{d}Z_{,,} - \text{etc.}\right)\omega\, dx\, dy$$

$$+ \int u\delta x dy + \int u\delta y dx + \int \left(Z' - \overset{x}{d}Z'' - \tfrac{1}{2}\overset{y}{d}Z_{,}' + \text{etc.}\right)\omega\, dy$$

$$+ \int \left(Z_{,} - \tfrac{1}{2}\overset{x}{d}Z_{,}' - \overset{y}{d}Z_{,,} + \text{etc.}\right)\acute{\omega}\, dx$$

$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Haec formula, in qua $\omega = \delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y$ (vide §. 7), exhibet variationem completam integralis duplicis, si et forma functionis z, quam involvit, et valores limitum, inter quos sumitur, variati ponuntur. Etiam in hac formula partem, quae duobus signis integrationis affecta est, omnino discernere debemus ab iis partibus, quae modo unum tale signum continent, in his enim jam pro z et pro x vel y ii valores substituti sunt, quos in limitibus accipiunt, itaque non amplius pendent e ratione generali, qua hae quantitates inter se connexae sunt, sed modo ex ea, quae in limitibus locum habet. Hujus vero formulae naturam dilucidius exponere non nisi adhibitis considerationibus geometricis audemus, itaque proferamus hanc rem in alteram commentationis nostrae partem, quum hac priori modo principia calculi variationum mere analytica statuere in animo habuerim.

THESES.

1. Errant, qui existimant vires, quas vocamus physicas, non veras sed modo fictas phaenomenorum causas esse.

2. Quaeque litterarum disciplina sua propria veritates demonstrandi ratione uti debet.

3. Quantitates imaginariae eodem jure, quo reales ad demonstranda theoremata a mathematicis adhibentur.

4. Omnis mutatio in rerum natura tempus requirit.

5. Omnes scientiae Mathesi egent, Mathesis nulla.