EESTI NSV TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

MATEMAATILISED TEADUSED 5 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Я. Х. САРВ

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

ГИЗ „НАУЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА“

EESTI NSV TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

MATEMAATILISED TEADUSED **5** МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Я. Х. САРВ

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

ГИЗ „НАУЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА“
ТАРТУ, 1948

TRÜ GEOMEETRIA KATEEDER
Juhataja: prof. J. SARV

Уравнение прямой в пространстве.

Прямая в пространстве определяется двумя в ней пересекающимися плоскостями, следовательно, двумя линейными уравнениями в координатах точки. Равным образом прямая определяется двумя на ней лежащими точками и, следовательно, двумя линейными уравнениями в координатах плоскости. В настоящей работе показано, что внешнее произведение этих уравнений является одним, вполне определяющим уравнением для прямой, аналогично уравнениям плоскости и точки. При этом на примерах подчёркивается значение этого нововведения для числовых выкладок. Рассматриваемое уравнение само по себе не ново: это — уравнение специального линейного комплекса, для которого определяемая этим уравнением прямая является осью.

1. Обозначения.

Применяем правую систему ортогональных однородных координат t, x, y, z и обозначаем точки прописными латинскими буквами, прямые — строчными, а плоскости, как правило, — строчными греческими. Только основные плоскости — несобственную или бесконечно удалённую, yz, zx и xy — придётся, по требованию метода сокращённых обозначений, обозначать латинскими буквами

$$t=0, \quad x=0, \quad y=0 \quad \text{и} \quad z=0.$$

Для основных точек — начала координат и несобственных точек координатных осей — взяты буквы O, U, V, W, так что общее уравнение плоскости и точки пишется в виде:

$$Ot+Ux+Vy+Wz=0.$$

Это — уравнение плоскости, если постоянные O, U, V, W — координаты плоскости, и уравнение точки, если постоянные t, x, y, z — координаты точки. Из этого уравнения следуют уравнения для основных точек:

$$O = 0, \quad U = 0, \quad V = 0 \text{ и } W = 0.$$

Векторы обозначаем жирным шрифтом или стрелкой над буквами, скалярное произведение без особого знака между факторами, векторное — наклонным крестиком. Компоненты вектора обозначаем той же самой строчной буквой обыкновенного шрифта с индексами, например:

$$\mathbf{a} = (a_1\, a_2\, a_3).$$

Подобным образом обозначаем также координаты точки:

$$A = (a_0\, a_1\, a_2\, a_3)$$

и плоскости

$$\alpha = (\alpha_0\, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3).$$

2. Арифметический и геометрический смысл уравнений и координат плоскости и точки.

Уравнением данной плоскости называется линейное уравнение, которое удовлетворяется координатами всех лежащих на этой плоскости точек и только ими, уравнением же точки — то, которое удовлетворяется координатами всех проходящих через эту точку плоскостей и только ими. Арифметически называются однородными координатами плоскости коэфициенты в её уравнении, как и координатами точки — коэфициенты в её уравнении. Геометрически же три неоднородные декартовы координаты точки x, y, z представляют расстояния этой точки от собственных основных плоскостей. Введённая для однородности четвёртая координата t является равным образом расстоянием от несобственной основной плоскости, если измерять это расстояние соответственным расстоянием единичной точки:

$$M = (1\,1\,1\,1) = O + U + V + W = 0.$$

Но частное от деления расстояния любой собственной точки от безгранично удаляющейся плоскости на расстояние единичной точки от неё же в пределе стремится к единице, так что

$$t = 1, \text{ при неоднородных } x, y \text{ и } z.$$

Координаты плоскости аналогично оказываются пропорциональными расстояниям основных точек от этой плоскости, измеренным соответственными расстояниями от единичной плоскости

$$\mu=(1\ 1\ 1\ 1)=t+x+y+z=0.$$

Ведь по нормальному уравнению любой такой единичной плоскости (с нормирующим делителем $\sqrt{3}$) и по нормальному уравнению любой собственной плоскости

$$\pi=pt+x\cos\widehat{x\pi}+y\cos\widehat{y\pi}+z\cos\widehat{z\pi}=0$$

оказывается, что $\overline{\pi O}:\overline{\mu O}=\sqrt{3}p$, а для какой-нибудь точки P оси x-ов, если π отсекает от этой оси отрезок a, имеем

$$\overline{\pi P}:\overline{\mu P}=(\overline{OP}-a)\cos\widehat{x\pi}:(\overline{OP}+1)\cos\widehat{x\mu}\xrightarrow[P\to U]{}\cos\widehat{x\pi}:\cos\widehat{x\mu}=\sqrt{3}\cos\widehat{x\pi}.$$

Подобным же образом

$$\overline{\pi V}:\overline{\mu V}=\sqrt{3}\cos\widehat{y\pi} \quad \text{и} \quad \overline{\pi W}:\overline{\mu W}=\sqrt{3}\cos\widehat{z\pi},$$

так что, действительно,

$$p:\cos\widehat{x\pi}:\cos\widehat{y\pi}:\cos\widehat{z\pi}=\frac{\overline{\pi O}}{\overline{\mu O}}:\frac{\overline{\pi U}}{\overline{\mu U}}:\frac{\overline{\pi V}}{\overline{\mu V}}:\frac{\overline{\pi W}}{\overline{\mu W}}.$$

Левая сторона нормального уравнения плоскости представляет собою расстояние от этой плоскости той точки, нормальные координаты которой (при $t=1$) это уравнение содержит. Таким образом равенство этой левой части нулю является лишь выражением того геометрического факта, что расстояние точек плоскости от той же плоскости равняется нулю.

Назовём уравнение точки нормальным, если коэфициент при O равен единице ($t=1$), и нормальными координатами плоскости π — числа: $p=\overline{\pi O}$, $\cos\widehat{x\pi}$, $\cos\widehat{y\pi}$ и $\cos\widehat{z\pi}$. Тогда левая часть нормального уравнения точки представляет собою расстояние этой точки от той плоскости, нормальные координаты которой это уравнение содержит, и равенство этой левой части нулю выражает лишь то обстоятельство, что расстояние точки от всякой её содержащей плоскости равняется нулю.

Быть может, после этих замечаний, уравнение начала координат в виде:

$$O=0$$

станет для нашего поколения — ровно сто лет спустя после Плюкера — столь же содержательным и привычным, как, например, уравнение плоскости yz

$$x = 0.$$

Ведь наше уравнение означает, с одной стороны, что расстояние до точки O равняется нулю, а с другой, что в общем уравнении

$$Ot + Ux + Vy + Wz = 0$$

коэфициент при t равняется нулю, прочие же коэфициенты не определены; но такое уравнение:

$$Ux + Vy + Wz = 0$$

действительно, представляет все плоскости, проходящие через начало координат. Равным образом, например, уравнение:

$$U = 0$$

означает, что расстояние до несобственной точки оси x-ов равняется нулю, или что имеет место уравнение

$$Ot + Vy + Wz = 0$$

с неопределёнными O, V и W, которое, действительно, выражает плоскости, паралельные оси x-ов.

3. Сложение уравнений.

Приравнивая сумму левых частей двух равенств сумме их правых частей, получим новое равенство. Отсюда уже следует допустимость умножения уравнения — точнее всех членов уравнения — на любое число, отличное от нуля. Ведь и иррациональные числа применимы только посредством их рациональных приближений.

Назовём множителем плоскости π число k_π, определяемое равенством:

$$k_\pi^2 = \pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2,$$

т. е. нормирующий делитель уравнения плоскости

$$\pi = \pi_0 t + \pi_1 x + \pi_2 y + \pi_3 z = 0,$$

так что уравнение плоскости без множителя, т. е. с множителем 1, является нормальным уравнением плоскости. — Таким же образом назовём множителем точки A число

$$k_A = a_0,$$

т. е. нормирующий делитель уравнения точки

$$A = a_0 O + a_1 U + a_2 V + a_3 W = 0,$$

так что уравнение точки без множителя, т. е. с множителем 1, является нормальным уравнением точки.

Складывая линейные уравнения, получаем линейное уравнение, — другими словами: сумма плоскостей есть плоскость, сумма точек — точка.

Складывание собственных плоскостей рассматривается в методе сокращённых обозначений, а складывание собственных точек — скрытым образом при делении отрезка прямой в данном отношении. Остаётся выяснить значения сумм собственных плоскостей с несобственной, как и сумм несобственных точек и собственных с несобственными.

Пусть уравнение собственной плоскости π (с множителем)

$$k_\pi \pi = \pi_0 t + \pi_1 x + \pi_2 y + \pi_3 z = 0$$

сложено с уравнением несобственной плоскости ϱ

$$k_\varrho \varrho = \varrho_0 t = 0$$

в уравнение плоскости-суммы

$$k_\pi \pi + k_\varrho \varrho = (\pi_0 + \varrho_0) t + \pi_1 x + \pi_2 y + \pi_3 z = 0.$$

Эта плоскость-сумма параллельна слагаемой собственной плоскости π, ибо у них коэфициенты при x, y и z тождественны. Поэтому у них общий множитель k_π, квадрат которого

$$k_\pi^2 = \pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2.$$

Расстояние плоскости-суммы от начала координат O есть

$$\overline{O(k_\pi \pi + k_\varrho \varrho)} = -(\pi_0 + \varrho_0) : k_\pi,$$

а расстояние слагаемой π

$$\overline{O\pi} = -\pi_0 : k_\pi.$$

Поэтому плоскость-сумма от сложения собственной плоскости π с несобственной ϱ отстоит от слагаемой собственной на расстоянии

$$-(\pi_0 + \varrho_0) : k_\pi + \pi_0 : k_\pi = -\varrho_0 : k_\pi,$$

равном частному от деления множителя несобственной плоскости на множитель собственной с обратным знаком, если множителем несобственной плоскости считать коэфициент при t в её уравнении.

Пусть уравнение собственной точки A

$$a_0 A = a_0 O + a_1 U + a_2 V + a_3 W = 0$$

сложено с уравнением несобственной точки B

$$k_B B = b_1 U + b_2 V + b_3 W = 0$$

в уравнение точки-суммы S:

$$k_S S = a_0 A + k_B B = a_0 O + (a_1 + b_1) U + (a_2 + b_2) V + (a_3 + b_3) W = 0.$$

Точка-сумма S лежит на прямой AB, так как косинусы направления этой прямой, по определению несобственной точки, пропорциональны координатам несобственной точки b_1, b_2, b_3 и с ними пропорциональны также проекции отрезка AS на осях координат:

$$(a_1 + b_1) : a_0 - a_1 : a_0 = b_1 : a_0; \quad (a_2 + b_2) : a_0 - a_2 : a_0 = b_2 : a_0;$$
$$(a_3 + b_3) : a_0 - a_3 : a_0 = b_3 : a_0.$$

Квадрат длины этого отрезка выражается:

$$(b_1 : a_0)^2 + (b_2 : a_0)^2 + (b_3 : a_0)^2 = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) : a_0^2.$$

Таким образом, сумма собственной точки с несобственной отстоит от слагаемой собственной на расстоянии, равном частному от деления множителя несобственной точки на множитель собственной, если множителем несобственной точки считать квадратный корень из суммы квадратов её координат (так что множитель несобственной точки есть 1, если за её координаты принять косинусы направления на неё).

Пусть сложены несобственные точки

$$k_B B = b_1 U + b_2 V + b_3 W = 0$$

и

$$k_C C = c_1 U + c_2 V + c_3 W = 0.$$

Тогда их сумма,

$$k_B B + k_C C = (b_1 + c_1) U + (b_2 + c_2) V + (b_3 + c_3) W = 0,$$

есть также несобственная точка, и именно на несобственной прямой BC, ибо направления OB, OC и $O\,(k_B B + k_C C)$, как перпендикулярные плоскостям одного пучка:

$$b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0,$$

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0$$

и

$$(b_1 + c_1)x + (b_2 + c_2)y + (b_3 + c_3)z = 0,$$

идут по одной плоскости, которая пересекает несобственную плоскость по несобственной прямой BC. Так как углы между плоскостями равны углам между их перпендикулярами, то по плоскостям этого одного пучка, множители которых тождественны с множителями вышеуказанных несобственных точек, направление на сумму двух несобственных точек делит угол между направлением на одну слагаемую и направлением на другую на две части, у которых синусы обратнопропорциональны множителям этих слагаемых.

Согласно понятию о сложении уравнений, уравнение плоскости или точки показывает, как эта плоскость или точка составлена из основных плоскостей или точек.

4. Ориентация.

Прямая AB с этой записью по Мёбиусу понимается с ориентацией, то есть расстояния по этой прямой в направлении от A к B считаются положительными, а в направлении от B к A отрицательными. Ориентация плоскости ABC при правой системе декартовых координат понимается так, что расстояния от этой плоскости считаются положительными только в ту сторону от неё, откуда круговой порядок точек A, B, C виден „против часовой стрелки". В „правой системе" из „положительного октанта" таким образом видны круговые порядки основных точек UWV, OUV, OVW, OWU.

Итак, у плоскости с ориентацией имеется положительная сторона и отрицательная. Две пересекающиеся плоскости α и β образуют при прямой пересечения $\alpha\beta$ 4 двугранных угла. Если эти плоскости имеют ориентацию, то среди этих четырёх углов имеется единственный между положительной стороной α и отрицательной β. Этот угол $\widehat{\alpha\beta}$ считается положительным, а угол $\widehat{\beta\alpha}$ — отрицательным, т. е. мы имеем углы с ориентацией, и расстояния по прямой $\alpha\beta$ считаются положительными только в направлении поступательного движения при повороте на положительный угол правого винта, осью которого служит эта прямая.

Три пересекающиеся плоскости α, β, γ, вместе со своей ориентацией, определяют ориентацию точки их пересечения $\alpha\beta\gamma$ на тот случай, когда эта запись заменяет левую часть уравнения в сумме нескольких точек, где имеет значение положительность или отрицательность данной записи. Точку $\alpha\beta\gamma$ считаем положительной, если прямая $\alpha\beta$ направлена сквозь плоскость γ с отрицательной стороны этой плоскости на положительную. Тогда $\beta\alpha\gamma$ будет отрицательна, а $\beta\gamma\alpha$ и $\gamma\alpha\beta$ положительны и потому равнозначны с $\alpha\beta\gamma$.

5. Умножение уравнений.

Выражаем равнозначность знаком равенства и считаем равнозначными следующие записи в основных плоскостях и точках:

$$xyz = yzx = zxy = -yxz = -zyx = -xzy = O$$
$$tzy = zyt = ytz = -zty = -yzt = -tyz = U,$$

и так же для V и W;

$$UWV = WVU = VUW = -WUV = -UVW = -VWU = t,$$
$$OUV = UVO = VOU = -UOV = -OVU = -VUO = z,$$

и так же для y и x;

$$OU = -UO = yz = -zy,$$
$$UV = -VU = tz = -zt$$

и подобные же выражения для прочих собственных и несобственных основных прямых.

Эти записи напоминают арифметические произведения, но с тою особенностью, что произведение меняет свой знак при перестановке двух множителей. В согласии с этой особенностью очевидна ещё другая, а именно, что произведение теряет смысл при равенстве двух множителей, ибо AA или $\alpha\alpha$ не определяют прямой, как ABA или AAB не определяют плоскости, и $\alpha\beta\alpha$ или $\alpha\alpha\beta$ — точки. Оказывается, что такие альтернирующие комбинации левых частей линейных уравнений, действительно, обладают главным свойством произведения — дистрибутивностью — лишь при наличии соответственных условий. Для доказательства дистрибутивности вообще, достаточно доказать дистрибутивность в отношении двух множителей, из которых один — одночлен, другой — двухчлен.

Пусть имеем произведение собственной точки

$$A=0$$

на точку

$$D=B+\lambda C=0,$$

где B и C — собственные точки. Требуется доказать, что при соответственных условиях прямая

$$AD=A(B+\lambda C)=0$$

тождественна с прямой

$$s=AB+\lambda AC=0.$$

Для простоты предполагаем, что уравнения точек нормальные, т. е. координата однородности

$$t=1.$$

Тогда, как известно, точка D делит отрезок $\overline{BC}$ в отношении

$$\overline{BD}:\overline{DC}=\lambda.$$

В этом же отношении делится этот отрезок и первой прямой AD. Пусть вторая прямая s пересекает прямую BC в некоторой точке D'. Тогда из уравнения этой прямой следует, что $-\lambda$ равняется частному от деления двух произведений: произведения расстояния точки D' от прямой AB на множитель k_{AB} этой прямой и произведения расстояния той же точки от прямой AC на множитель k_{AC} этой прямой. Если множителями прямых AB и AC будут длины отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$k_{AB}=\overline{AB}$$
$$k_{AC}=\overline{AC},$$

то λ есть отношение площадей треугольников ABD' и $AD'C$, однако, как отношение отрезков BD и DC, оно равняется также отношению площадей треугольников ABD и ADC, откуда следует тождество точек D и D', следовательно и прямых AD и s.

Итак: альтернирующая комбинация точек AB, как выражение прямой, будет особым произведением этих точек, если при

$$A=0$$

и

$$B=0$$

нормальным множителем прямой

$$AB=0$$

признаётся именно длина отрезка AB. Это условие тем более приемлемо, что запись AB обыкновенно употребляется как для прямой AB, так и для длины отрезка AB.

Пусть имеем произведение собственной плоскости

$$\alpha = 0$$

на плоскость

$$\delta = \beta + \lambda\gamma = 0,$$

где β и γ вместе с α левые части нормальных уравнений собственных плоскостей. Требуется доказать, что при соответственных условиях прямая

$$\alpha\delta = \alpha(\beta + \lambda\gamma) = 0$$

тождественна с прямой

$$s = \alpha\beta + \lambda\alpha\gamma = 0.$$

Берём на прямой $\alpha\beta$ произвольную точку B и на $\alpha\gamma$ произвольную C. Пусть плоскость δ пересекает прямую BC в точке D, и прямая s в некоторой точке D'. Тогда плоскость δ делит двугранный угол $\beta\gamma$ в отношении

$$\sin\widehat{\beta\delta} : \sin\widehat{\delta\gamma} = \lambda.$$

Из уравнения прямой s следует, что $-\lambda$ равняется частному от деления двух произведений: произведения расстояния точки D' от прямой $\alpha\beta$ на множитель $k_{\alpha\beta}$ этой прямой и произведения расстояния той же точки от прямой $\alpha\gamma$ на множитель $k_{\alpha\gamma}$ этой прямой. Но первое произведение будет $\overline{\beta D'}$, а второе $\overline{\gamma D'}$, если множителями прямых $\alpha\beta$ и $\alpha\gamma$ будут

$$k_{\alpha\beta} = \sin\widehat{\alpha\beta},$$

$$k_{\alpha\gamma} = \sin\widehat{\alpha\gamma}.$$

Отсюда следует, что при этом условии точки D и D' тождественны, и потому тождественны также прямые $\alpha\delta$ и s. Итак: альтернирующая комбинация плоскостей $\alpha\beta$, как выражение прямой, будет особым произведением этих плоскостей, если при

$$\alpha = 0 \text{ и } \beta = 0$$

нормальных множителем прямой

$$\alpha\beta = 0$$

признаётся синус двугранного угла $\widehat{\alpha\beta}$.

Грассман назвал эти особые произведения **внешними**. Тот случай внешнего произведения, когда множителем является несобственная точка или несобственная плоскость, приводится, на основании сложения уравнений, к случаям только собственных множителей, ибо, обозначая единичные точки координатных осей в обыкновенном порядке через X, Y и Z, из уравнений

$$X = O + U = 0, \quad Y = O + V = 0, \quad Z = O + W = 0$$

получим

$$U = X - O = 0, \quad V = Y - O = 0, \quad W = Z - O = 0,$$

а из уравнения единичной плоскости

$$\mu = t + x + y + z = 0$$

следует

$$t = \mu - x - y - z = 0.$$

При выкладках этого приведения ради простоты никогда не применяют. Но здесь оно нам пригодится для выяснения значения множителя оси x-ов в её уравнении

$$OU = O(X - O) = OX = 0,$$

где множитель, как длина отрезка OX, по определению, равняется единице.

Ещё Мёбиус заметил эквивалентность несобственной точки и разности двух собственных с равными множителями. Впоследствии эта разность стала ценным орудием геометрии под названием **свободного вектора**. Внешнее произведение

$$tx = \mu x - yx - zx = 0,$$

как несобственная прямая, таким образом, эквивалентна **свободному единичному бивектору** и, следовательно, имеет множителем 1. К доказательству этого последнего утверждения обратимся в следующем параграфе.

6. Прямая в пространстве.

Прямая AB, как внешнее произведение точек A и B, имеет своим уравнением внешнее произведение уравнений этих точек:

$$A = a_0 O + a_1 U + a_2 V + a_3 W = 0$$

и

$$B = b_0 O + b_1 U + b_2 V + b_3 W = 0,$$

т. е.

$$AB = p_{01} OU + p_{02} OV + p_{03} OW + p_{23} VW + p_{31} WU + p_{12} UV = 0,$$

где

$$p_{01}OU = a_0 O\cdot b_1 U + a_1 U\cdot b_0 O = a_0 b_1 OU + a_1 b_0 UO =$$
$$= a_0 b_1 OU - a_1 b_0 OU = (a_0 b_1 - a_1 b_0) OU$$

и таким же образом вообще

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i = \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix}.$$

Как уравнение точки или плоскости является суммою уравнений основных точек или плоскостей, так и это уравнение прямой есть сумма уравнений основных прямых. В уравнении точки или плоскости коэфициенты основных точек или плоскостей называются однородными координатами для точки или плоскости, здесь таковыми же являются коэфициенты p_{ik} для прямой. Однородные координаты как у точки P, так и у плоскости π распадаются на две группы: три из них — p_1, p_2, p_3 или π_1, π_2, π_3 — можно назвать компонентами вектора направления, четвёртую — p_0 или π_0 — координатою положения. Вектор направления показывает, в каком направлении от начала координат находится определяемая точка или плоскость, но только координата положения делает возможным выражение квадрата расстояния до точки или плоскости

$$\overline{OP}^2 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) : p_0^2,$$
$$\overline{O\pi}^2 = \pi_0^2 : (\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_1^2).$$

Координаты прямой p представляют собою компоненты двух векторов: вектора направления прямой

$$\mathbf{p} = (p_{01}\, p_{02}\, p_{03})$$

и вектора положения

$$\overline{\mathbf{p}} = (p_{23}\, p_{31}\, p_{12}).$$

По выражениям компонентов эти векторы равняются

$$\mathbf{p} = (p_{01}\, p_{02}\, p_{03}) = a_0 b_0 \overrightarrow{AB}$$

и

$$\overline{\mathbf{p}} = (p_{23}\, p_{31}\, p_{12}) = a_0 b_0 \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}.$$

По свойству векторного произведения последний вектор перпендикулярен к плоскости OAB и, следовательно, также к вектору $\overrightarrow{AB}$, так что

$$\mathbf{p}\,\overline{\mathbf{p}} = p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0.$$

Отсюда видно, что две тройки чисел в определённом порядке могут быть координатами прямой в пространстве только тогда, когда они удовлетворяют этому условию. Вследствие этого условия и однородности p_{ik}, из них независимых только 4, так что прямых в пространстве — бесконечность в четвёртой степени.

Назовём *множителем прямой* p абсолютное значение вектора направления, т. е. число, квадрат которого равняется

$$k_p^2 = p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2 = \mathbf{p}^2,$$

а уравнение прямой назовём *нормальным*, когда множитель —1. *В нормальном уравнении прямой абсолютное значение вектора положения равняется расстоянию прямой от начала координат*, как удвоенная площадь треугольника с вершиной в начале координат и с единичным основанием на прямой.

Высота упомянутого треугольника перпендикулярна к обоим векторам прямой. Обозначим её основание на прямой буквою N. *Тогда при любом множителе прямой p эта её точка имеет координатами компоненты вектора* $(\mathbf{p} \times \overline{\mathbf{p}}) : \mathbf{p}^2$, так как этот вектор, по свойствам векторного произведения, перпендикулярен обоим векторам прямой и имеет направление от начала координат к прямой, тогда как абсолютное значение этого вектора вследствие деления как $\mathbf{p}$, так и $\overline{\mathbf{p}}$ на k_p, равняется упомянутой высоте.

Итак, из нашего единственного уравнения прямой p непосредственно следуют для неё *параметрические уравнения* в неоднородных координатах x, y, z, с параметром r (при $n_0 = 1$):

$$\begin{aligned} x &= n_1 + p_{01} r \\ y &= n_2 + p_{02} r \\ z &= n_3 + p_{03} r \end{aligned}$$

и посредством точки

$$M = (n_0 \quad n_1 + n_0 p_{01} \quad n_2 + n_0 p_{02} \quad n_3 + n_0 p_{03})$$

в однородных координатах t, x, y, z, с параметром λ:

$$\begin{aligned} t &= n_0 + n_0 \lambda \\ x &= n_1 + n_0 p_{01} + n_1 \lambda \\ y &= n_2 + n_0 p_{02} + n_2 \lambda \\ z &= n_3 + n_0 p_{03} + n_3 \lambda. \end{aligned}$$

При данной прямой

$$p = p_{01} OU + p_{02} OV + p_{03} OW + p_{23} VW + p_{31} WU + p_{12} UV = 0$$

и данной плоскости

$$\pi = dt + ax + by + cz = 0$$

(где для простоты координаты плоскости написаны без индексов, как данные числа d, a, b, c), их точка пересечения получается как внешнее произведение прямой на плоскость:

$$\begin{aligned} p\pi = & -p_{01} dU - p_{02} dV - p_{03} dW + p_{01} aO + p_{31} aW - p_{12} aV + p_{02} bO - \\ & - p_{23} bW + p_{12} bU + p_{03} cO + p_{23} cV - p_{31} cU = \\ & = (p_{01} a + p_{02} b + p_{03} c) O + (-p_{01} d + p_{12} b - p_{31} c) U + \\ & \qquad + (-p_{02} d - p_{12} a + p_{23} c) V + (-p_{03} d + p_{31} a - p_{23} b) W = 0. \end{aligned}$$

Умножение первого члена уравнения прямой на первый член уравнения плоскости даёт $p_{01} OUdt$, но прямая OU, пересекая несобственную плоскость в точке U, направлена с положительной стороны этой плоскости на отрицательную, откуда и следует $-U$, умноженная как на p_{01}, так и на d; умножение второго члена прямой на первый член плоскости даёт $p_{02} OVdt$, т. е. $OVt = -V$ с множителем $p_{02} d$, и т. д.

Внешнее произведение прямых

$$p = p_{01} OU + p_{02} OV + p_{03} OW + p_{23} VW + p_{31} WU + p_{12} UV = 0$$

и

$$p' = p'_{01} OU + p'_{02} OV + p'_{03} OW + p'_{23} VW + p'_{31} WU + p'_{12} UV = 0$$

даёт уравнение

$$\begin{aligned} (p_{23} p'_{01} + p_{31} p'_{02} + p_{12} p'_{03} + p_{01} p'_{23} + p_{02} p'_{31} + p_{03} p'_{12}) OUVW = \\ = (\bar{\mathbf{p}}\, \mathbf{p}' + \mathbf{p}\, \bar{\mathbf{p}}') OUVW = 0. \end{aligned}$$

При $\bar{\mathbf{p}}\, \mathbf{p}' + \mathbf{p}\, \bar{\mathbf{p}}' \neq 0$ это уравнение нашего пространства

$$OUVW = 0,$$

которое нас здесь не интересует. Но множитель этого уравнения равняется шестикратному объёму с ориентацией тетраэдра $NMN'M'$, где N' и M' точки второй прямой, аналогичные точкам N и M первой, т. е.

$$\bar{\mathbf{p}}\, \mathbf{p}' + \mathbf{p}\, \bar{\mathbf{p}}' = 6\, \overline{NMN'M'},$$

где получается положительное число тогда и только тогда, когда круговой порядок NMN' для внешнего наблюдателя направлен по часовой стрелке. Первым основанием этому равенству служит то обстоятельство, что объём всякого данного тетраэдра с ориентацией равняется сумме объёмов четырёх тетраэдров, имеющих общей вершиной начало координат, а основаниями грани данного тетраэдра с их ориентацией NMN', MNM', $N'MM'$, $M'NN'$ (так что общее ребро соседних граней имеет в них противоположную ориентацию). Вторым же основанием нашему равенству служит равенство объёма всякого тетраэдра шестой доле произведения трёх из какой-нибудь его вершины исходящих рёбер-векторов в порядке, согласном с порядком координатных осей. Таким образом, действительно,

$$6\,\overline{NMN'M'} = 6\,\overline{ONMN'} + 6\,\overline{OMNM'} + 6\,\overline{ON'MM'} + 6\,\overline{OM'NN'} =$$
$$= (\overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OM})\,\overrightarrow{ON'} + (\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON})\,\overrightarrow{OM'} - (\overrightarrow{ON'} \times \overrightarrow{OM'})\,\overrightarrow{OM} -$$
$$- \overrightarrow{ON}(\overrightarrow{OM'} \times \overrightarrow{ON'}) = (\overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OM})(\overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'}) +$$
$$+ (\overrightarrow{ON'} \times \overrightarrow{OM'})(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = \overline{\mathbf{p}}\,\mathbf{p}' + \overline{\mathbf{p}}\,\mathbf{p}.$$

Прямая, перпендикулярная двум данным прямым и секущая обе, определяется двумя плоскостями через неё, из которых одна содержит одну данную, другая — другую. Пусть данные прямые по-прежнему — p и p', их общая перпендикулярная секущая —p'', и текущие точки упомянутых двух плоскостей через неё —P и P'. Тогда уравнения этих плоскостей векториально напишутся:

$$(P - N)\,\mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{p}') = 0$$

и

$$(P' - N')\,\mathbf{p}' \times (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}) = 0.$$

В этих уравнениях при раскрытии первых скобок свободные члены (при неоднородных координатах) упрощаются:

$$-\overrightarrow{ON}[\mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{p}')] = -[(\mathbf{p} \times \overline{\mathbf{p}}) : \mathbf{p}^2]\,[(\mathbf{p}\,\mathbf{p}')\,\mathbf{p} - \mathbf{p}^2\,\mathbf{p}'] = (\mathbf{p} \times \overline{\mathbf{p}})\,\mathbf{p}'$$

и

$$-\overrightarrow{ON'}\,[\mathbf{p}' \times (\mathbf{p}' \times \mathbf{p})] = -[(\mathbf{p}' \times \overline{}') : \mathbf{p}'^2]\,[(\mathbf{p}'\,\mathbf{p})\,\mathbf{p}' - \mathbf{p}'^2\,\mathbf{p}] = (\mathbf{p}' \times \overline{\mathbf{p}}')\,\mathbf{p}.$$

Для примера составим уравнение перпендикулярной секущей прямых

$$p = -3OU - 2OV + OW + VW - WU + UV = 0$$

и

$$p' = OU + OV + OW + 2VW + WU - 3UV = 0.$$

Вычисляем

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{p} = (-3 \ \ -2 \ \ 1),\\
&\overline{\mathbf{p}} = (1 \ \ -1 \ \ 1),\\
&\mathbf{p}' = (1 \ \ 1 \ \ 1),\\
&\overline{\mathbf{p}}' = (2 \ \ 1 \ \ -3),\\
&\mathbf{p} \times \mathbf{p}' = (-3 \ \ 4 \ \ -1),\\
&\mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{p}') = (-2 \ \ -6 \ \ -18),\\
&\mathbf{p} \times \overline{\mathbf{p}} = (-1 \ \ 4 \ \ 5),\\
&(\mathbf{p} \times \overline{\mathbf{p}})\, \mathbf{p}' = -1 + 4 + 5 = 8.
\end{aligned}
$$

Итак, первая плоскость через общую перпендикулярную секущую имеет своим уравнением

$$8t - 2x - 6y - 18z = 0$$

или

$$4t - x - 3y - 9z = 0.$$

Для второй плоскости остаётся ещё вычислить

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{p}' \times (\mathbf{p}' \times \mathbf{p}) = (\mathbf{p} \times \mathbf{p}') \times \mathbf{p}' = (5 \ \ 2 \ \ -7),\\
&\mathbf{p}' \times \overline{\mathbf{p}}' = (-4 \ \ 5 \ \ -1),\\
&(\mathbf{p}' \times \overline{\mathbf{p}}')\, \mathbf{p} = 12 - 10 - 1 = 1.
\end{aligned}
$$

Следовательно, уравнение второй плоскости

$$t + 5x + 2y - 7z = 0$$

и уравнение общей перпендикулярной секущей прямых p и p', как внешнее произведение этих двух уравнений, будет

$$p'' = 21tx + 11ty - 19tz + 39yz - 52zx + 13xy = 0$$

или, по § 5,

$$p'' = 39OU - 52OV + 13OW + 21VW + 11WU - 19UV = 0.$$

Внешнее произведение уравнений двух *пересекающихся прямых* не даёт уравнения пространства, потому что множитель пространства там нуль. Но посредством преобразования координат можно плоскость, соединяющую эти прямые, сделать плоскостью

$$z = 0$$

и таким образом получить для них (пусть одна прямая a, другая — b) уравнения

$$
\begin{aligned}
a &= a_0 t + a_1 x + a_2 y = 0,\\
b &= b_0 t + b_1 x + b_2 y = 0.
\end{aligned}
$$

В пространстве это уравнения двух плоскостей, которые пересекаются с плоскостью z по этим прямым, так что уравнения a и b, как пространственных прямых, будут

$$a = a_0 tz + a_1 xz + a_2 yz = 0,$$
$$b = b_0 tz + b_1 xz + b_2 yz = 0.$$

Их внешнее произведение, очевидно, не имеет смысла, потому что в каждое частное произведение основная плоскость z вошла бы двукратно. Но если во втором уравнении вынесем за скобки этот двукратный множитель, то внешнее произведение первого уравнения на скобку второго даёт

$$(a_0 tz + a_1 xz + a_2 yz)(b_0 t + b_1 x + b_2 y) =$$
$$= (a_1 b_0 - a_0 b_1) V + (a_0 b_2 - a_2 b_0) U + (a_2 b_1 - a_1 b_2) O = 0,$$

т. е. уравнение точки

$$ab = (a_2 b_1 - a_1 b_2 \quad a_0 b_2 - a_2 b_0 \quad a_1 b_0 - a_0 b_1 \quad 0)$$

пересечения этих прямых. Таким образом *внешнее произведение уравнений двух пересекающихся прямых при сохранении членов, содержащих дважды одну основную плоскость или точку, разлагается на два множителя, из которых один, приравнённый нулю, даёт точку пересечения этих прямых, другой — соединяющую их плоскость.* При непреобразованных координатах это внешнее произведение вместе с разложением на эти два множителя — уравнение точки, умноженное отдельно на каждый член уравнения плоскости — получается следующим образом: в каждом частном произведении повторяющийся фактор из второго множителя переносится на последнее место с соответственным изменением знака произведения и с сокращением записи по равенствам $OUV = z$ и т. д.

Выпишем здесь это многочленное произведение уравнений наших пересекающихся прямых p и p'', обозначая для простоты

$$\mathbf{p} = (a \;\; b \;\; c), \quad \bar{\mathbf{p}} = (e \;\; f \;\; g):$$

$$\begin{aligned} pp'' &= (aOU + bOV + cOW + eVW + fWU + gUV) \cdot \\ &\cdot (a''OU + b''OV + c''OW + e''VW + f''WU + g''UV) = \\ &= (ba'' - ab'')zO + (ac'' - ca'')yO + (cb'' - bc'')xO + \\ &+ (ga'' - ag'')zU + (fa'' - af'')yU + (fg'' - gf'')tU + \\ &+ (gb'' - bg'')zV + (eb'' - be'')xV + (ge'' - eg'')tV + \\ &+ (fc'' - cf'')yW + (ec'' - ce'')xW + (ef'' - fe'')tW = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение точки пересечения, как множимое для z:

$$
\begin{aligned}
pp'' &= (ba'' - ab'')O + (ga'' - ag'')U + (gb'' - bg'')V + \\
&+ [(gb'' - bg'')(ef'' - fe''):(ge'' - eg'')]W = \\
&= -234O - 18U - 90V + (-90\cdot 32:40 = -72)W = 0,
\end{aligned}
$$

которое даёт

$$p\cdot p'' = \left(1\ \tfrac{1}{13}\ \tfrac{5}{13}\ \tfrac{4}{13}\right).$$

Первые три члена в этом уравнении — коэфициенты основной плоскости в нашем внешнем произведении. Четвёртый член составлен путём сравнения коэфициентов t, содержащих W и V. Равным образом можно было бы составить этот четвёртый член, сравнивая, например, соответственные коэфициенты x. Ибо

$$(ec'' - ce''):(eb'' - be'') = (ef'' - fe''):(ge'' - eg'')$$

или

$$
\begin{aligned}
&(ec'' - ce'')(ge'' - eg'') - (ef'' - fe'')(eb'' - be'') = \\
&= ec''ge'' - ce''ge'' - ec''eg'' + ce''eg'' - e^2f''b'' + fe''eb'' + ef''be'' - fbe''^2 = 0,
\end{aligned}
$$

как это следует из перпендикулярности вектора $\mathbf{p}$ с $\overline{\mathbf{p}}$:

$$ae + bf + cg = 0$$

и $\mathbf{p}''$ с $\overline{\mathbf{p}}''$:

$$a''e'' + b''f'' + c''g'' = 0,$$

если к этим двум равенствам присоединим ещё условие встречи прямых p и p'':

$$ae'' + bf'' + cg'' + ea'' + fb'' + gc'' = 0$$

и, помножив первое равенство на $-e''^2$, второе на $-e^2$, третье на ee'', сложим все. Так как мы взяли здесь из внешнего произведения пересекающихся прямых коэфициенты двух произвольных основных плоскостей в членах с теми же двумя произвольными основными точками и нашли эти коэфициенты пропорциональными в силу общих условий данных прямых, то тем самым доказана пропорциональность всех коэфициентов любой основной плоскости с коэфициентами любой другой основной плоскости при тех же основных точках. Следовательно, уравнение точки пересечения напишется также, например, в виде множимого для y:

$$
\begin{aligned}
p\overline{p}'' &= (ac'' - ca'')O + (fa'' - af'')U + [(fa'' - af'')(gb'' - bg''):(ga'' - ag'')]V + \\
&+ (fc'' - cf'')W = -78O - 6U + (-6\cdot -90: -18 = -30)V - 24W = 0.
\end{aligned}
$$

При множимом для z нам пришлось дополнить наше внешнее произведение членом $-72zW$, здесь же для $y: -30yV$. Чтобы уравнение точки пересечения иметь множимым для x или t, придётся ввести ещё дополнительные члены

$$[(cb'' - bc'') \cdot -18 : -234 = -26 : 13 = -2] xU$$

и

$$(40 \cdot -234 : -90 = 104) tO.$$

Мы имеем право ввести все 4 дополнительных члена потому, что их сумма равняется нулю, ибо

$$zW = OUVW = yV = xU = tO,$$

а сумма коэфициентов равняется нулю вследствие прежде отмеченной пропорциональности.

Для уравнения плоскости, соединяющей две пересекающиеся прямые, очевидно достаточно знать все члены с одной и той же основной точкой.

Точка и плоскость называются **взаимными** образами в отношении друг друга, так как внешнее произведение их уравнений даёт уравнение пространства. Поэтому взаимным образом прямой, соединяющей две точки, будет прямая пересечения двух плоскостей. Уравнение точки и уравнение плоскости суть уравнения, удовлетворяющиеся координатами всех тех и только тех взаимных образов, расстояние которых от этой точки или плоскости равняется нулю. Таково и уравнение прямой в пространстве. Ведь подставляя в уравнении прямой на место переменных OU, OV и т. д. координаты находящейся от неё на нулевом расстоянии, т. е. пересекающейся с ней взаимной прямой, — на место OU — коэфициент при tx, на место OV — коэфициент при ty и т. д., получим лишь условие пересечения. Очевидно, что **подстановка в левую часть уравнения одного образа координат взаимного с ним, даёт множитель пространства во внешнем произведении этих образов.** При нормальных уравнениях точки и плоскости результат подстановки, как известно, есть расстояние между ними, при нормальных уравнениях двух прямых — расстояние между ними, помноженное на синус угла, т. е. их **момент**, что следует из значения множителя пространства.

Левая часть уравнения точки или пространства как сумма уравнений основных точек или плоскостей, умноженных на соответственные координаты, показывает, как синтетически построить точку или плоскость, выраженную этим уравнением. Это построение рассматривается в обычных курсах при делении отрезка в данном отношении и в методе сокращённых обозначений.

Левая часть уравнения прямой показывает также синтетическое построение этой прямой. Но здесь имеется особенность: сумма уравнений двух непересекающихся прямых не есть уравнение прямой. Ибо при

$$p = (a\ b\ c\ e\ f\ g)$$

и

$$p' = (a'\ b'\ c'\ e'\ f'\ g')$$

их сумма

$$p + p' = (a + a'\ b + b'\ c + c'\ e + e'\ f + f'\ g + g')$$

даёт для условия прямой

$$(a + a')(e + e') + (b + b')(f + f') + (c + c')(g + g') = \mathbf{p}\,\overline{\mathbf{p}}' + \overline{\mathbf{p}}\,\mathbf{p}' \neq 0.$$

Вследствие этой особенности, для построения прямой по её уравнению необходимо сначала построить сумму первых трёх членов — трёх прямых, пересекающихся в начале координат, потом сумму остальных трёх несобственных прямых, и только тогда сумму этих двух сумм. Первая сумма прямой p есть, конечно, прямая с вектором направления $\mathbf{p}$ через начало координат.

Для построения второй и третьей суммы необходим конкретный — применимый для построения — смысл несобственной прямой и суммы несобственных прямых, как и собственной с несобственной.

Как несобственная точка эквивалентна свободному вектору, т. е. разности двух собственных точек с равными множителями, так и несобственная прямая — внешнее произведение двух несобственных точек — эквивалентна свободному бивектору или паре прямых, т. е. разности двух параллельных прямых с равными множителями, ибо таковы основные несобственные прямые. Например, UV эквивалентна разности прямых OX и YM_{xy}, где

$$Y = O + V = 0,\ M_{xy} = O + U + V = 0 \text{ и } X = O + U = 0,$$

ибо действительно

$$OX - YM_{xy} = O(O + U) - (O + V)(O + U + V) = -VU = UV.$$

Эта же несобственная прямая эквивалентна разности прямых kOX и kAB, где

$$A = O + V:k = 0 \text{ и } B = O + U + V:k = 0,$$

так как

$$kOX - kAB = kO(O + U) - k(O + V:k)(O + U + V:k) = -VU = UV.$$

Отсюда видно, что в эквивалентных парах множитель прямой произволен, но расстояние между прямыми обратно пропорционально множителю. Постоянное произведение множителя прямой пары на расстояние между прямыми назовём множителем пары. Пара

$$XM_{xy}-OY=(O+U)(O+U+V)-O(O+V)=UV$$

показывает, что направление прямой пары, эквивалентной данной несобственной прямой, произвольно в плоскости пары, пара же

$$ZM_{zx}-M_{yz}M=(O+W)(O+U+W)-(O+V+W)(O+U+V+W)=$$
$$=-VU=UV$$

показывает, что плоскости эквивалентных пар произвольны до параллельности, обусловленной прохождением через эквивалентную несобственную прямую.

Для построения суммы двух несобственных прямых можно брать эквивалентные им пары, где

1) прямые были бы без множителя, и потому множителями пар — расстояния между их прямыми, и

2) прямая пересечения плоскостей пар служила бы вычитаемой в первой паре и уменьшаемой во второй. Тогда в сумме эта общая прямая уничтожается, и суммою будет пара с уменьшаемой из первой пары и с вычитаемой из второй.

Множитель суммы вычисляется, конечно, как длина стороны треугольника по двум данным сторонам и углу между ними, т. е. углу между плоскостями складываемых пар.

Таким образом, сумма $p_{23}VW$ и $p_{31}WU$ имеет эквивалентную пару с плоскостью, косинусы углов которой с основными плоскостями пропорциональны числам p_{23}, p_{31}, 0, и с множителем, квадрат которого $p_{23}^2+p_{31}^2$, и, следовательно, у суммы всех трёх: $p_{23}VW$, $p_{31}WU$ и $p_{12}UV$ эти косинусы пропорциональны числам p_{23}, p_{31}, p_{12}, а квадрат множителя равен

$$\overline{\mathbf{p}}^2=p_{23}^2+p_{31}^2+p_{12}^2.$$

Эта плоскость параллельна сумме первых трёх членов прямой p, вследствие условия $\mathbf{p}\,\overline{\mathbf{p}}=0$. Беря её проходящей через эту сумму и вычитаемой в последней паре, равной этой сумме, получим прямую, которая, действительно, тождественна с p, имея $\mathbf{p}$ вектором направления и отстоя от начала координат на растоянии, квадрат которого $\overline{\mathbf{p}}^2:\mathbf{p}^2$, в направлении, перпендикулярном как к $\mathbf{p}$, так и к $\overline{\mathbf{p}}$.

Резюме работы.

Применение внешнего произведения к уравнениям точек или плоскостей в виде сокращённых обозначений позволяет в некотором смысле конкретизировать это практически важное, но Грассманом[1] слишком абстрактно введённое понятие. Для правила двойного фактора показана возможность как геометрико-синтетического (при пересечении прямой с плоскостью), так и аналитического (при внешнем произведении двух пересекающихся прямых) обоснования без всякого оттенка мистицизма, заметного как у Грассмана[2], так и у Уайтхэда[3], Мэмке[4] и Лотце[5].

---

1 H. Grassmann, Ausdehnungslehre (1844) § 36

2 H. Grassmann, Ausdehnungslehre (1862) Nr. 102—104

3 Whitehead, Treatise on Universal Algebra (1898) p. 185—188

4 Mehmke, Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung (1913) p. 124

5 Lotze, Punkt- und Vektor-Rechnung (1929) p. 48—49

Оглавление.

Vastutav toimetaja
G. Kangro.
Tehniline toimetaja
H. Kohu.

Ladumisele antud 27. IX 48. Trükkimisele antud 15. XI 48. Paberi kaust 67 × 95. 1/16. Trükipoognaid 1 3/4. Autoripoognaid 1,16. Arvestuspoognaid 1,17 MB 04120. Laotihedus trpg. 36 300. Tiraaž 2530. Trükikoja tellimus nr. 1865. Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4.

Цена 1 р. 75 к.