TARTU ÜLIKOOL
Matemaatika-informaatikateaduskond
Matemaatilise statistika instituut

Annika Krutto

Stabiilsete jaotuste parameetrite hindamine

Magistritöö

Juhendaja: prof. Tõnu Kollo

Tartu 2003

SISUKORD

Sissejuhatus

Stabiilsed jaotused on lai tõenäosusjaotuste klass, millel on palju matemaatiliselt huvitavaid omadusi. Selle jaotuste klassi eristas Paul Levy aastal 1920, kui ta tegeles sõltumatute sama jaotusega juhuslike suuruste summa uurimisega. Seepärast nimetatakse neid tihti ka Levy jaotusteks. Kuna Vilfredo Pareto tegi hiljem stiili mõttes olulisi täiendusi, siis on kasutusel ka termin Levy-Pareto jaotused. Tegemist on neljaparameetrilise jaotuse klassiga, mille tuntud erijuhud on normaaljaotus ja Cauchy jaotus. Stabiilsed jaotused on sobivateks mudeliteks mitmetes eluvaldkondades, eelkõige füüsikas ning majandusteaduses. Stabiilsete jaotuste kasutamist praktikas takistab analüütilise jaotusfunktsiooni puudumine. See raskendab jaotuste parameetrite määramist, mis on vajalik modelleerimisülesannetes. Viimastel aastakümnetel on esitatud stabiilsetest jaotustest palju uurimusi, kuid sobivat lahendust parameetrite hindamisele praktiliseks kasutamiseks ei ole veel leitud.

Käesoleva töö eesmärk on anda üks meetod stabiilsete jaotuste parameetrite hindamiseks. Vastavat meetodit nimetatakse üldistatud momentide meetodiks. Meetodi kasutamist praktikas raskendab meetodile sobivate argumentide leidmine. Seega lisaks teoreetilistele avaldistele pakutakse argumente praktiliseks kasutamiseks.

Töö koosneb kahest peatükist ning viiest lisast. Esimene peatükk annab ülevaate stabiilsete jaotuste teoreetilistest omadustest – jaotuse definitsioon, põhiomadused, parameetrid ning jaotuste saba kirjeldus. Peatükk põhineb peagi ilmuval raamatul, Nolan (2002), ning raamatul Золотарев (1983), mis on üks enimviidatud stabiilseid jaotusi uuriv väljaanne. Teises peatükis esitab autor stabiilsete jaotuste parameetrite hindamismeetodi, selgitab stabiilsete jaotuste simuleerimist ning uurib meetodi rakendamist erinevate jaotuste korral. Teises peatükis on kasutatud erinevaid uurimusi: Kozubowski (1999), Nolan (2002) ja Weron (2001). Praktiliste näidete osas on kasutatud Eesti Liikluskindlustuse andmeid. Lisas 1 on toodud arvutamiseks kasutatud programmid, lisas 2 on näited stabiilsetest jaotustest, lisas 3 on näited üldistatud momentide meetodi rakendamisest, lisas 4 on esitatud töös uuritud kahjuandmete histogrammid ning lisas 5 on esitatud kahjuandmetest hinnatud jaotuse histogrammid.

Arvutuste läbiviimiseks on kasutatud statistikapaketti R, kuna see on vabavara ning võimaldab kõiki vajalike arvutusi.

Kokkuvõtteks võib öelda, et töö alguses püstitatud eesmärk täideti. Töös on antud teoreetiline meetod parameetrite hindamiseks ning leiti ka võimalused meetodi rakendmaiseks praktikas.

I PTK STABIILSED JAOTUSED

1.1 Definitsioon, põhiomadused

Normaaljaotuse puhul on oluline omadus, et kahe normaaljaotusega juhusliku suuruse summa on normaaljaotusega juhuslik suurus. Käesolevas töös kasutame ühe ja sama jaotusega juhusliku suuruse *X* ja *Y* korral tähistust $X \overset{d}{=} Y$. Kui *X* on normaaljaotusega, siis sõltumatute normaaljaotusega juhuslike suuruste X_1 ja X_2, $X \overset{d}{=} X_i, i = 1,2$, jaoks leiduvad positiivsed konstandid *a* ja *b* nii, et

$$aX_1 + bX_2 \overset{d}{=} cX + d,$$

kus *c* on positiivne konstant ja *d* reaalarv. Oletame nüüd, et $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, siis ülaltoodud võrduse vasakul poolel on liidetavad jaotustega $N(a\mu, (a\sigma)^2)$ ja $N(b\mu, (b\sigma)^2)$ vastavalt ning paremal pool $X \sim N(c\mu + d, (c\sigma)^2)$. Keskväärtuste võrdsusest järeldub $a\mu + b\mu = c\mu + d$. Dispersioonide võrdsusest järeldub, et $(a\sigma)^2 + (b\sigma)^2 = (c\sigma)^2$. Seega saame suvaliste *a* ja *b* korral *c* ja *d* jaoks järgmised tingimused:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$
$$d = a + b - \mu\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Sel juhul on võrduse $aX_1 + bX_2 \overset{d}{=} cX + d$ vasak ja parem pool normaaljaotusega $N((a+b)\mu, (a^2 + b^2)\sigma^2)$.

Osutub, et taoline omadus kehtib ka rohkemate jaotuste korral. Ülalesitatud konstruktsioon ongi aluseks stabiilsete jaotuste definitsioonile.

Materjali esitamisel selles paragrahvis toetume raamatutele Nolan (2002), Золотарев (1983).

Definitsioon 1.1 *Juhuslik suurus X on stabiilne (üldises mõttes stabiilne), kui X sõltumatute koopiate X_1 ja X_2 korral kehtib suvaliste positiivsete konstantide a ja b korral seos*

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d\,, \tag{1.1}$$

kus c on mingi positiivne arv ja d on reaalarv.

Märkus. On selge, et toodud definitsiooni saab rakendada ka k sõltumatu koopia jaoks, kasutades ülaltoodud definitsiooni.

Kui $d=0$, siis öeldakse, et X on *kitsas mõttes stabiilne*. Juhuslik suurus X on *sümmeetriliselt stabiilne*, kui ta on stabiilne ja punkti 0 ümber sümmeetriliselt jaotunud, ehk $X = -X$. Mõiste stabiilne jaotus asemel kasutatakse mõnikord ka terminit *summa-stabiilne jaotus*, et eristada seda spetsiifilistest jaotuste klassidest, mis on moodustatud stabiilsete jaotuste baasil, näiteks *max-stabiilsed*, *min-stabiilsed* ja *geomeetriliselt stabiilsed* jaotused.

Stabiilsete jaotuste klassi puhul on probleemiks, et üldjuhul ei leidu analüütilisi avaldisi jaotusfunktsioonile ja tihedusfunktsioonile. On kolm stabiilsete jaotuste klassi kuuluvat jaotuste alamklassi, mille puhul see on võimalik: normaaljaotused, *Cauchy* jaotused ning *Levy* jaotused.

Definitsioon 1.2 *Juhuslik suurus X on normaaljaotusega,* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$*, kui vastav tihedusfunktsioon avaldub*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

Näide 1.3 *Juhuslik suurus X on Cauchy jaotusega,* $X \sim Cauchy(\gamma, \delta)$*, kui tema tihedusfunktsioon avaldub võrdusega*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-\delta)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Näide 1.4 *Juhuslik suurus X on Levi jaotusega,* $X \sim Levi(\gamma, \delta)$*, kui tema tihedusfunktsioon avaldub kujul*

$$f(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x-\delta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x-\delta)}\right), \quad \delta < x < \infty.$$

Näitame, et Cauchy jaotus kuulub stabiilsete jaotuste klassi. Selleks kasutame Cauchy jaotuse omadust $C(\gamma, \delta) \sim \delta + \gamma C(0,1)$. Seega võrduses (1.1) on Cauchy jaotuse puhul vasak pool jaotusega $a(\delta + \gamma C(0,1)) + b(\delta + \gamma C(0,1)) \stackrel{d}{=} (a+b)\delta + (a+b)\gamma C(0,1)$. Võrduse parem pool on jaotusega $c(\delta + \gamma C(0,1)) + d \stackrel{d}{=} c\delta + d + c\gamma C(0,1)$. Järelikult $c=a+b$ ja $d=0$ ning Cauchy jaotus on kitsas mõttes stabiilne.

Normaaljaotus ja Cauchy jaotus on sümmeetrilised ja tihedusfunktsiooni graafikud seega nn. kellukesekujulised. Erinevuseks on Cauchy jaotuse tunduvalt raskemad sabad. Kontrastina normaaljaotusele ja Cauchy jaotusele on Levi jaotus tugevalt kaldes paremale (mittesümmeetriline) ja kogu tõenäosusmass on kontsentreeritud piirkonda $x>0$. Lisaks sellele on jaotuse sabad veelgi raskemad kui Cauchy jaotuse puhul.

Kõik stabiilsed jaotused on kirjeldatavad karakteristliku funktsiooniga. Olgu juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon $F(x)$. Tema karakteristlik funktsioon defineeritakse võrdusega

$$\varphi(u) = E\exp\bigl(iuX\bigr) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iux)dF(x).$$

Karakteristlik funktsioon $\varphi(u)$ määrab juhusliku suuruse X jaotuse üheselt ning tal on palju matemaatiliselt kasulikke omadusi.

Enne stabiilsete jaotuste karakteristliku funktsiooni leidmist toome sisse mõningad tähistused ja esitame vajalikud abitulemused. Vaatame sõltumatute juhuslike suuruste süsteemi $\{X_{nj},\ j=1,\ 2,\ \dots,\ k_n\}$, $n=1,\ 2,\dots$ ja moodustame sobivate arvudega A_n tsentreeritud summad

$$Z_n = X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n} - A_n.$$

Eeldame, et ükski liige eraldi ei mõjuta summat oluliselt , see tähendab, et leidub $\varepsilon>0$ nii, et

$$\lim_{n\to\infty} \max\{P(\left|X_{nj}\right| > \varepsilon) : j = 1,2,\cdots,k_n\} = 0.$$

Tähistame juhuslike suuruste Z_n ja X_{nj} jaotusfunktsioonid vastavalt F_n ja F_{nj} ja olgu Δ kõigi selliste jaotusfunktsioonide G hulk, mis võivad olla jada F_n piirjaotusfunktsiooniks, kui $n\to\infty$.

Kasutame järgmisi teoreeme (Золотарев (1983)):

Teoreem 1.6 *Jaotuse G funktsioon kuulub perre Δ siis ja ainult siis, kui talle vastav karakteristlik funktsioon avaldub järgmisel kujul:*

$$\varphi(u) = \exp\left\{iua - bu^2 + \int_{x\neq 0}(e^{iux} - 1 - iu\sin(x))dH(x)\right\}, \tag{1.2}$$

kus a, b on positiivsed reaalarvud ja funktsioon H(x) on määratud kogu reaalteljel, välja arvatud punktis x=0. Lisaks on funktsioon H(x) kasvav piirkondades x<0 ja x>0, lähenedes nullile kui $|x| \to \infty$ *ja rahuldades tingimust*

$$\int_{0<|x|<1} x^2 dH(x) < \infty .$$

Avaldis (1.2) esitab karakteristliku funktsiooni $\varphi(u)$ kanoonilise kuju ning funktsiooni *H(x)* nimetatakse sealjuures jaotuse *G* spektraalfunktsiooniks.

Teoreem 1.7 *Suvalisele stabiilsele jaotusele G vastav spektraalfunktsioon H(x) avaldub kujul*

$$H(x) = \begin{cases} -C_1 x^{-\alpha}, & \text{kui } x > 0 \\ C_2(-x)^{-\alpha}, & \text{kui } x < 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

kus C_1, C_2, *α on mittenegatiivsed arvud ja 0<α<2.*

Järgnev teoreem esitab stabiilsete jaotuste karakteristliku funktsiooni.

Teoreem 1.8 *Mittekidunud jaotus G kuulub stabiilsete jaotuste perre siis ja ainult siis, kui temale vastav karakteristlik funktsioon avaldub kujul:*

$$\varphi(u) = \exp\left\{\gamma(iu\delta - |u|^{\alpha} + iu\omega(u,\alpha,\beta))\right\}, \tag{1.4}$$

kus

$$\omega(u,\alpha,\beta) = \begin{cases} |u|^{\alpha-1}\beta\tan(\alpha\frac{\pi}{2}), & \alpha \neq 1; \\ -\beta\frac{2}{\pi}\log|u|, & \alpha = 1 \end{cases}$$

ja parameetrid $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ *rahuldavad tingimusi* $0<\alpha\le 2$, $-1\le\beta\le 1$, $\gamma>0, -\infty<\delta<\infty$.

Tõestus.

Kuna stabiilsete jaotuste pere on alamhulk jaotuste peres *Δ*, siis funktsiooni φ täpsemaks uurimiseks kasutame avaldises (1.2) spektraalfunktsiooni *H(x)* kujul (1.3) ja arvutame vajalikud integraalid. Kui $0<\alpha<2$, siis saame

$$\log\varphi(u) = iua - bu^2 - C_1\int_0^{\infty}(e^{iux} - 1 - iu\sin x)dx^{-\alpha} + C_2\int_0^{\infty}(e^{-iux} - 1 + iu\sin x)dx^{-\alpha} = iua - bu^2 + C_1Q_{\alpha} + C_2\overline{Q}_{\alpha}\ . \tag{1.5}$$

Tähistame kompleksarvu *z* reaal- ja imaginaarosa vastavalt Re(*z*) ja Im(*z*). Vaatame piirkonnas Re(*s*)>0 ja Re(*p*)>0 järgmist funktsiooni

$$g_{\alpha}(s,p) = p\int_0^{\infty}(e^{-sx} - e^{px})x^{-\alpha}dx, \quad 0<\alpha<2\,.$$

Fikseeritud (*s*, *p*) korral on funktsioon $g_{\alpha}(s,p)$ pidev vahemikus $0<\alpha<2$ ning piirkonna rajal (Re(*s*)=0 ja Re(*p*)=0) on funktsioon $g_{\alpha}(s,p)$ pidev, kui α on fikseeritud. Integraali Q_{α} võrdlus funktsiooniga g_{α} näitab, et kui $s=i$, siis funktsiooni $g_{\alpha}(i,p)$ reaalosa kohal $p=-iu$ annab integraali Q_{α}:

$$Q_\alpha = \operatorname{Re} g_\alpha(i,p)\big|_{p=-iu}\ .$$

Funktsiooni g_α *(s,p)* avaldamine ilmutatud kujul pole raske. Valime esiteks $\alpha \neq 1$, siis saame ositi integreerimise abil, et

$$g_\alpha(s,p) = \frac{p}{1-p}\int_0^\infty (se^{-sx} - pe^{-px})x^{1-\alpha}dx = p\,\frac{\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha}(s^{\alpha-1} - p^{\alpha-1})\,.$$

Seejärel läheme piirile $\alpha \to 1$ ning sel juhul saame seose:

$$g_1(s,p) = p\log\left(\frac{p}{s}\right).$$

See protseduur annab meile Q_α jaoks avaldise:

$$Q_\alpha = \begin{cases} -|u|^\alpha\,\Gamma(1-\alpha)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2} - iu(1-|u|^{\alpha-1})\Gamma(1-\alpha)\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}, & \text{kui } \alpha \neq 1; \\ -|u|\dfrac{\pi}{2} - iu\log|u|, & \text{kui } \alpha = 1. \end{cases}$$

Tähistame

$$d = (C_1 + C_2)\Gamma(2-\alpha)\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}{1-\alpha}$$

(kui $\alpha=1$, siis *d* avaldamiseks vaatame juhtu $\alpha \to 1$), seega

$$|\varphi(u)| = \exp(-bu^2 - d|u|^\alpha)\,.$$

Näitame, et suurused *b* ja *d* ei saa olla samaaegselt nullist erinevad. Kuna *X* on stabiilse jaotusega, siis eksisteerib selline karakteristlik funktsioon $\psi(u)$ ja vastav jada normeerivate konstantidega A_n, B_n ($B_n \to \infty$), et

$$\psi^n\left(\frac{u}{B_n}\right)e^{-iuA_n} \to \varphi(u), \qquad \text{kui } n \to \infty\,.$$

Järelikult, $\left|\psi(uB_n^{-1})\right|^n \to \left|\varphi(u)\right|$. Eeldame, et *d>0*, sel juhul $B_n = n^{1/\alpha}h(n)$ (Золотарев (1983), lk 19). Seetõttu, suvalise $k \geq 1$ korral $\frac{B_n}{B_{nk}} \to k^{-1/\alpha}$, kui $n \to \infty$. Viimast koondumist rakendades saame, et

$$\left|\psi(uB_{nk}^{-1})\right|^{nk} = \left|\psi(u\frac{B_n}{B_{nk}}B_n^{-1})\right|^{nk} \to \left|\varphi(uk^{-1/\alpha})\right|^k .$$

Teiselt poolt, piiril peame saama tulemuseks $\left|\varphi(u)\right|$. Seega

$$\exp(-bu^2k^{1-\alpha/2} - d\left|u\right|^{\alpha}) = \exp(-bu^2 - d\left|u\right|^{\alpha}) ,$$

kus $k \geq 1$ on suvaline konstant. See võrdus saab kehtida vaid juhul kui b=0.

Tähistame

$$\gamma = \begin{cases} d, & \text{kui } C_1 + C_2 > 0; \\ b, & \text{kui } C_1 + C_2 = 0, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}, & \text{kui } C_1 + C_2 > 0; \\ 0, & \text{kui } C_1 + C_2 = 0, \end{cases}$$

$$\delta = \frac{1}{\lambda}(a + \tilde{a}),$$

kus

$$\tilde{a} = \begin{cases} (C_2 - C_1)\Gamma(1-\alpha)\sin(\dfrac{\alpha\pi}{2}), & \text{kui } \alpha \neq 1; \\ 0, & \text{kui } \alpha = 1. \end{cases}$$

Nüüd saame kirjutada valemi (1.5) meile vajalikul kujul (1.4). Avaldises (1.2) esitatud stabiilse jaotuse karakteristliku funktsiooni kanoonilisel kujul on üks ebameeldivat omadus: funktsioon φ, järelikult ka temaga sarnased jaotused perest G, on mittepidevad funktsioonid. Nagu nähtub funktsiooni $\omega(u, \alpha, \beta)$ definitsioonist, on sellised jaotused pidevad vaid punktides α=1, $\beta\neq$0. Vaadeldes piirprotsessi, kus $\alpha' \to 1\ (\alpha' \neq 1), \beta' \to \beta\ (\beta \neq 0), \delta' \to \delta, \gamma' \to \gamma$, ei saa me tulemuseks stabiilset jaotust ning tulemus ei pruugi määrata isegi tõenäosusjaotust, kuna kogu tõenäosusmass paikneb lõpmatult kaugesse piirkonda. Selle põhjuseks on tegelikult parameetri γ korrigeerimiseks sissetoodud suurus $\tilde{\alpha}$.

Valemi (1.4) modifikatsioon avaldub sel juhul järgmiselt:

$$\varphi(u) = \exp\left(\gamma(iu\delta - |u|^{\alpha} + iu\omega'(u, \alpha, \beta))\right) \ , \tag{1.6}$$

kus

$$\omega'(u, \alpha, \beta) = \begin{cases} (|u|^{\alpha-1} - 1)\beta \tan(\dfrac{\alpha\pi}{2}), & \text{kui } \alpha \neq 1; \\ -\beta \dfrac{2}{\pi} \log|u|, & \text{kui } \alpha = 1 \end{cases}$$

ja $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rahuldavad tingimusi $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $\gamma > 0, -\infty < \delta < \infty$.

On kerge näha, et funktsioon $\omega'(u, \alpha, \beta)$ on pidev. Parameetrid nende kahe avaldise puhul on seotud järgmiselt (erinevates allikates rõhutatakse parameetrite seotust vastava avaldisega):

$$\alpha_{(1.4)} = \alpha_{(1.6)},\ \beta_{(1.4)} = \beta_{(1.6)},\ \delta_{(1.4)} = \delta_{(1.6)} - \beta \tan(\frac{\alpha\pi}{2}),\ \gamma_{(1.4)} = \gamma_{(1.6)}.$$

Teoreemist 1.6 järeldub, et stabiilse jaotuse kirjeldamiseks on vaja 4 parameetrit: *stabiilsusindeks* (*index of stability*) ehk *karakteristlik eksponent* (*characteristic exponent*) $\alpha \in (0,2]$, *kalde- või asümmeetriaparameeter* (*skewness parameter*) $\beta \in [-1,1]$, *skaalaparameeter* (*scale parameter*) $\gamma > 0$ ja *paiknemisparameeter* (*location parameter*) $\delta \in R$. Mõnikord vaadeldakse tulemuse lihtsustamiseks ka juhtu $\gamma = 0$, et kirjeldada punkti $\delta \in R$ kõdunud jaotust.

Normaaljaotuse $N(\mu, \sigma^2)$ puhul on parameetrite väärtused $\alpha = 2,\ \beta = 0,$ $\gamma = \frac{\sigma}{\sqrt{2}},\ \delta = \mu$, *Cauchy* jaotuse $Cauchy(\gamma, \delta)$ puhul on ülejäänud parameetrite väärtusteks $\alpha = 1,\ \beta = 0$ ning *Levy* jaotuse $Levi(\gamma, \delta)$ korral on ülejäänud parameetrite väärtusteks $\alpha = 1/2,\ \beta = 1$.

1.2 Stabiilsete jaotuste parameetrite hindamine

Stabiilsete jaotuste kasutamisel on meil vaja hinnata nelja tundmatut parameetrit. Sageli loetakse parameeter α konstantseks, see sõltub uuritavast probleemist. Stabiilse jaotuse tähistamiseks on üldlevinud tähistus $S_\alpha(\beta,\gamma,\delta)$, kui konstant α on teada ja $S(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, kui α on tundmatu ehk samuti üks hinnatavatest parameetritest.

Stabiilse jaotuse parameetrite hindamiseks on kirjeldatud mitmeid erinevaid meetodeid. See on tekitanud kasutamisel mõningast segadust (erinevad definitsioonid, lähenemised, tähistused). Meetodite erinevus tuleneb uuritavate probleemide mitmekesisusest. On loomulik, et reaalse andmestiku kirjeldamisel kasutatakse teisi lähenemisi kui näiteks kitsalt stabiilsete jaotuste omaduste uurimisel.

Empiirilise valimi kvantiilide hindamisel põhineva kvantiilmeetodi (*The Quantile based method*) pakkusid esmakordselt välja Fama ja Roll (1971). See tehnika sobis vaid sümmeetrilistele jaotustele ning hinnang oli nihkega. Aastal 1995 esitasid Ma ja Nikias (1995) log-momentide meetodi (*FLOM -The Fractional lower moment method*) ja 1996 pakkusid Tsihrintzis ja Nikias (1996) veel ühe momentide meetodi üldistuse. Nagu eelpool näidatud, saab stabiilse jaotuse defineerida karakteristliku funktsiooni abil. See on andnud aluse erinevatele lähenemistele parameetrite hindamisel, mille põhimõte seisneb empiirilise ja teoreetilise karakteristliku funktsiooni võrdlemises (näiteks vähimruutude meetodil). Esimesena uuris sellist lähenemist aastatel 1980-1981 Koutrouvelis (1981). Hiljem arendas Kogon (1995) seda meetodit edasi pakkudes välja vähem arvutusi nõudva ning parema tulemuse andva algoritmi. Ka käesoleva töö teises peatükis esitatakse samale põhimõttele toetuv meetod. Selleks lisame mõned eelselgitused. Sõnastame järgnevalt teisel kujul teoreemi 1.8:

Teoreem 1.9 *Juhuslik suurus X on stabiilne siis ja ainult siis kui* $X \overset{d}{=} AZ + B$, *kus* $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $A > 0$, $B \in R$ *ja Z on juhuslik suurus karakteristliku funktsiooniga*

$$E\exp(iuZ) = \begin{cases} \exp(-|u|^{\alpha}[1 - i\beta \tan\frac{\pi\alpha}{2} sign(u)]), & \alpha \neq 1 \\ \exp(-|u|[1 + i\beta\frac{2}{\pi} sign(u)\ln|u|]), & \alpha = 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

Definitsioon 1.10 *Öeldakse, et juhuslik suurus X on stabiilse jaotusega* $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, *kui*

$$X \overset{d}{=} \begin{cases} \gamma Z + \delta & \alpha \neq 1 \\ \gamma Z + (\delta + \beta\frac{2}{\pi}\gamma\ln\gamma) & \alpha = 1 \end{cases}$$

kus $Z = Z(\alpha, \beta)$ *on määratud võrdusega* (1.7).

Definitsioon 1.11 *Juhusliku suuruse X~*$S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *karakteristlik funktsioon avaldub kujul*

$$\varphi(u) = \begin{cases} \exp(-\gamma^{\alpha}|u|^{\alpha}[1 - i\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2} sign(u)] + i\delta u), & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma|u|[1 + i\beta\frac{2}{\pi} sign(u)\ln|u|] + i\delta u), & \alpha = 1 \end{cases} \tag{1.8}$$

1.3 Tihedus- ja jaotusfunktsioonid

Stabiilsete jaotuste korral üldjuhul ei leidu ühest tihedus- ja jaotusfunktsiooni kuju, kuid palju on uuritud stabiilsete jaotuste teoreetilisi omadusi. Järgmine teoreem on üks stabiilsete jaotuste põhiomadusi (Nolan (2002)).

Teoreem 1.12 *Kõik (mittekidunud) stabiilsed jaotused on lõpmatult diferentseeruva tihedusfunktsiooniga pidevad jaotused.*

Stabiilsed jaotused on määratud kogu reaalteljel või poolteljel, viimane olukord tekib vaid juhul kui $\alpha < 1$ ja $\beta = 1$ või $\beta = -1$. Täpsed piirid on antud järgmise lemmaga (Nolan (2002)).

Lemma 1.13 S*tabiilne jaotus on määratud järgmistes piirkondades*

$$f(x|\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \begin{cases} \left[\delta - \gamma \tan\frac{\pi\alpha}{2}, \infty\right), & \alpha < 1 \text{ ja } \beta = 1; \\ \left(-\infty, \delta + \gamma \tan\frac{\pi\alpha}{2}\right], & \alpha < 1 \text{ ja } \beta = -1; \\ (-\infty, \infty), & \text{mujal}. \end{cases}$$

Konstant $\tan\frac{\pi\alpha}{2}$ esineb stabiilsete jaotustega tegeldes sageli, tuletame meelde kuidas see funktsioon käitub erinevate α väärtuste korral. Kui $\alpha \uparrow 1$ vasakult, siis funktsiooni väärtused lähenevad +∞, punktis $\frac{\pi}{2}$ ehk juhul $\alpha = 1$ on funktsiooni väärtus määramata ja kui $\alpha \downarrow 1$ paremalt, siis funktsiooni väärtused lähenevad -∞. Funktsiooni katkevus punktis $\alpha = 1$ põhjustab stabiilsete jaotuste uurimisel ebameeldivusi, kuid kui $|\beta| = 1$, siis lemmas 1.13 on määramispiirkonnaks reaalarvude hulk, kui $\alpha = 1$.

Omadus 1.14 (*Refleksiooni omadus*). *Olgu suvalise α, β korral Z ~ S(α, β). Siis*

$$S(\alpha,-\beta) \stackrel{d}{=} -S(\alpha,\beta).$$

Seega juhusliku suuruse Z(α, β) tihedus ja jaotusfunktsioon rahuldavad tingimusi

$f(x|\alpha,\beta;k) = f(-x|\alpha,-\beta;k)$ *ja* $F(x|\alpha,\beta;k) = 1 - F(-x|\alpha,-\beta;k)$.

Uurime kõigepealt juhtu, kui *β=0*. Reflektsiooni omaduse põhjal $f(x|\alpha,0;k) = f(-x|\alpha,0;k)$. Seega on tihedusfunktsioon ja jaotusfunktsioon sümmeetrilised nullpunkti ümbruses. Kui *α* väheneb, siis jaotuse sabad muutuvad raskemaks.

Kui *β > 0*, siis on jaotus kaldu nii, et jaotuse parem saba on raskem kui jaotuse vasak saba, st *P(X>x)>P(X<-x)* suurte *x > 0* korral (siin ja edaspidi kehtivad kõik väited saba kohta vaid absoluutväärtuselt suurte *x* jaoks). Kui *β=1*, siis on jaotus *täielikult paremale kaldu*. Reflektsiooni omaduse põhjal on jaotuse käitumine juhul *β < 0* peegeldus juhust *β > 0,* ehk jaotuse vasak saba on raskem. Kui *β=-1*, siis on jaotus *täielikult vasakule kaldu*.

Kui *α=2*, on tegemist normaaljaotusega. Kuna tan*(πα/2)=0*, siis karakteristlik funktsioon on reaalne ning seega on jaotus alati sümmeetriline, sõltumata *β* väärtusest. Üldiselt, mida vähem α erineb arvust 2, seda sümmeetrilisem on jaotus ja seda vähem avaldab mõju parameeter *β* (ja seda raskem on teda määrata).

1.4 Saba tõenäosused ja momendid

Kui α=2, siis on tegemist normaaljaotusega ja jaotuse käitumine on teada. Kui α<2, siis on saba omadused teada asümptootiliselt. Tähistame järgmise piirväärtuse $\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=1$ lühema avaldisega *h(x)~g(x)*, kus *x* läheneb ∞.

Teoreem 1.15 *Olgu X ~ S(α, β, γ, δ), kus 0 < α < 2 ja -1 < β ≤ 1. Kui x→∞, siis*

$$P(X > x) \sim \gamma^{\alpha} c_{\alpha}(1+\beta)x^{-\alpha};$$

$$f(x|\alpha,\beta;0) \sim -\alpha\gamma^{\alpha} c_{\alpha}(1+\beta)x^{-(\alpha+1)},$$

kus $c_{\alpha} = \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\frac{\Gamma(\alpha)}{\pi}$.

Reflektsiooni omaduse põhjal on teise saba omadused sarnased. Kõigi jaotuste korral, kui *α < 2* ja *β > -1* korral on saba tõenäosused ja tihedused asümptootiliselt määratud astmefunktsiooniga. (Kui *β=-1*, siis teoreemis 1.15 parem võrdub nulliga ja saba tõenäosused ei ole asümptootiliselt määratud astmefunktsiooniga).

Üldiselt öeldakse, et jaotus on raske sabaga kui sabad on raskemad eksponentjaotuse sabadest. Kui *α < 2*, siis on stabiilsetel jaotustel üks saba (juhul *α < 1* ja *β=± 1*) või kaks saba (kõik muud juhud), mis on asümptootiliselt raskete sabadega. Raskete sabade korral ei eksisteeri kõik momendi. Enamuse statistiliste probleemide puhul kasutatakse jaotuse kirjeldamiseks esimest järku momenti ehk keksväärtust *EX* ja ja hajuvuse karakteristikuna dispersiooni $DX=E(X^2)-(EX)^2$. Need statistikud ei ole üldjuhul sobivad raskete sabadega jaotuste korral, sest vastavad avaldised integraalkujul ei pruugi olla määratud. Nende asemel kasutatakse murrulisi (mittetäielikke) absoluutseid momente (*fractional absolute moments*): $E|X|^p = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p f(x)dx$. Kui $0 < \alpha < 2$, siis $E|X|^p$ on lõplik juhul $0 < p < \alpha$ ja $E|X|^p = +\infty$ kui $p \geq \alpha$.

Seega, kui $0 < \alpha < 2$, siis $E|X|^2 = EX^2 = +\infty$ ehk stabiilsel jaotusel ei ole määratud teist järku momenti ning seega ka dispersiooni. See komplitseerib stabiilsete jaotuste kasutamist praktiliste probleemide lahendamisel. Kui $1 < \alpha \leq 2$, siis $E|X| < \infty$, kuid samas, kui $\alpha \leq 1$, siis $E|X| = \infty$ ning ka keskväärtus on määramata. Kui $\alpha > 1$, saame esimest järku momendid leida karakteristliku funktsiooni diferentseerimise teel. Valemist (1.8) saame, et karakteristlik funktsioon avaldub

$$\varphi(u) = \exp\left\{-\gamma^\alpha |u|^\alpha \left[1 - i\beta sign(u) \tan\tfrac{\pi\alpha}{2}\right] + i\delta u\right\}$$

Leiame tuletise:

$$\varphi'(u) = \exp\left\{-\gamma^\alpha |u|^\alpha \left[1 - i\beta sign(u) \tan\tfrac{\pi\alpha}{2}\right] + i\delta u\right\} * (i\delta - \alpha\gamma^\alpha u^{\alpha-1}$$
$$+ \gamma^\alpha u^{\alpha-1} \beta sign(u) \tan\tfrac{\pi\alpha}{2} + \gamma^\alpha u^\alpha \beta \tan\tfrac{\pi\alpha}{2} sign'(u))$$

$$\varphi'(0) = i\delta$$

Seega

$$m_1(X) = EX = \frac{1}{i}\varphi\ (0) = \delta$$

Lause 1.10 *Kui $1 < \alpha \leq 2$, siis juhusliku suuruse $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ keskväärtus avaldub*

$$EX = \delta .$$

Seega, kui $\alpha > 1$, siis paiknemisparameetri δ hinnanguna saame kasutada valimi keskmist. Teiste parameetrite määramiseks esialgu meil eeskirja ei ole. Ka keskväärtuse kasutamiseks paiknemisparameetri hinnanguna peame kõigepealt hindama parameetri α väärtuse. Juhul kui $\alpha < 1$ ei ole ka paiknemisparameetri hindamiseks eeskirja. Järgnev peatükk tutvustab meetodit, mille abil saame hinnata kõiki stabiilse jaotuse parameetreid.

II PTK STABIILSE JAOTUSE PARAMEETRITE HINDAMINE

2.1 Üldistatud momentide meetod

Üldistatud momentide meetodiks parameetrite hindamisel nimetatakse meetodit, mille korral saadakse hinnangud lähtudes eeldusest, et teoreetilise ja empiirilise karakteristliku funktsiooni väärtused on võrdsed samade argumendite korral. Järgnev meetod on saadud modifitseerides Kozubowski (1999) esitatud meetodit. Meie eesmärk on avaldada jaotuse karakteristlikust funktsioonist jaotuse parameetrid ja seejärel hinnata neid empiirilise karakteristliku funktsiooni abil. Alustame definitsioonis 1.11 esitatud valemiga. Stabiilse jaotuse karakteristlik funktsioon $\varphi(u)$ avaldub kujul

$$\varphi(u) = \begin{cases} \exp\left\{-\gamma^{\alpha}|u|^{\alpha}\left[1 - i\beta sign(u)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right] + i\delta u\right\}, & \alpha \neq 1, \\ \exp\left\{-\gamma|u|\left[1 + i\beta sign(u)\frac{2}{\pi}\log|u|\right] + i\delta u\right\}, & \alpha = 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

kus $\alpha \in (0,2]$, $\beta \in [-1,1]$, $\gamma > 0$ ja $\delta \in R$.

Olgu $X_1,...,X_n$ sõltumatud juhuslikud suurused stabiilsete jaotuste klassist karakteristliku funktsiooniga (2.1). Juhuslikku funktsiooni

$$\hat{\varphi}_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{iuX_j} \tag{2.2}$$

nimetatakse *empiiriliseks karakteristlikuks funktsiooniks*. Keskväärtuse omadustest ja karakteristliku funktsiooni definitsioonist järeldub, et suurte arvude seaduse kohaselt $E[\hat{\varphi}_n(u)] = \varphi(u)$ ja $\hat{\varphi}_n(u) \to \varphi(u)$, kui $n \to \infty$. Olgu

$$v(u) = -\operatorname{Re}[\ln \varphi(u)] \tag{2.3}$$

(Re(z) ja Im(z) tähistavad vastavalt kompleksarvu z reaal- ja imaginaarosa).

Oletame järgnevalt, et $\alpha \neq 1$. Siis suvaliste positiivsete reaalarvude u_1 ja u_2, $u_1 \neq u_2$ korral võime kirjutada:

$$v(u_i) = -\operatorname{Re}\left[-\gamma^\alpha u_i^\alpha + i\beta\gamma^\alpha u_i^\alpha \tan\tfrac{\pi\alpha}{2} + i\delta u_i\right] = \gamma^\alpha (u_i)^\alpha, \qquad i = 1,2\,. \tag{2.4}$$

Logaritmime võrrandid ja lahendame tekkinud võrrandisüsteemi (2.4) α suhtes:

$$\begin{cases} \ln v(u_1) = \alpha \ln \gamma + \alpha \ln u_1 \\ \ln v(u_2) = \alpha \ln \gamma + \alpha \ln u_2 \end{cases}.$$

Siit

$$\alpha = \frac{\ln\left[\dfrac{v(u_1)}{v(u_2)}\right]}{\ln\left[\dfrac{u_1}{u_2}\right]}\,. \tag{2.5}$$

Asendades võrrandisüsteemi (2.4) esimeses võrrandis α tulemusega (2.5) saame järgmise võrduse:

$$\ln \upsilon(u_1) = \frac{\ln\left[\dfrac{v(u_1)}{v(u_2)}\right]}{\ln\left[\dfrac{u_1}{u_2}\right]}\left(\ln(\gamma) - \ln(u_1)\right).$$

Lahendame selle võrduse γ suhtes

$$\ln \gamma = \frac{\ln v(u_1) \ln[u_1 / u_2]}{\ln[v(u_1)/v(u_2)]} - \ln(u_1)\,.$$

Saame

$$\gamma = \exp\left[\frac{\ln(u_1)\ln[\nu(u_2)] - \ln(u_2)\ln[\nu(u_1)]}{\ln[\nu(u_1)/\nu(u_2)]}\right]. \tag{2.6}$$

Asendame avaldises $\nu(u)$ suuruse $\varphi(u)$ vastava empiirilise karakteristliku funktsiooniga $\hat{\varphi}_n(u)$. Selle tulemusena saame leida $\nu(u)$ hinnangu:

$$\begin{aligned}\hat{\nu}_n(u) &= -\mathrm{Re}\left[\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{iuX_j}\right)\right] \\ &= -\mathrm{Re}\left[\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left[\sum_{j=1}^{n}\cos(uX_j) + i\sum_{j=1}^{n}\sin(uX_j)\right]\right] \\ &= -\ln\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}\cos uX_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n}\sin uX_j\right)^2} \\ &= -\ln\left[\frac{1}{n}\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}\cos uX_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n}\sin uX_j\right)^2}\right].\end{aligned} \tag{2.7}$$

Kuna $\hat{\varphi}_n(u) \to \varphi(u),$ siis ka $\hat{\nu}_n(u) \to \nu(u),$ kui $n \to \infty$ ning seega parameetrite α ja γ hinnangud avalduvad:

$$\hat{\alpha} = \frac{\ln\left[\dfrac{\hat{\nu}(u_1)}{\hat{\nu}(u_2)}\right]}{\ln\left[\dfrac{u_1}{u_2}\right]} \tag{2.8}$$

ja

$$\hat{\gamma} = \exp\left[\frac{\ln(u_1)\ln[\hat{\nu}(u_2)] - \ln(u_2)\ln[\hat{\nu}(u_1)]}{\ln[\hat{\nu}(u_1)/\hat{\nu}(u_2)]}\right]. \tag{2.9}$$

Uurime funktsiooni $\ln(\varphi(u))$ imaginaarosa, olgu $l(u) = \mathrm{Im}[\ln\varphi(u)]$. Siis suvaliste positiivsete nullist erinevate arvude $u_3 \neq u_4$ korral saame, et

$$l(u_i) = \mathrm{Im}\left[-\gamma^\alpha u^\alpha + i\gamma^\alpha u_i^{\ \alpha}\beta \tan\tfrac{\pi\alpha}{2} + i\delta u_i\right] = \beta\gamma^\alpha u_i^\alpha \tan\tfrac{\pi\alpha}{2} + \delta u_i, \qquad i = 3{,}4. \tag{2.10}$$

Lahendame võrrandisüsteemi (2.10) parameetri δ suhtes:

$$\begin{cases} \gamma^\alpha \beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) = \dfrac{l(u_3) - \delta u_3}{u_3^\alpha} \\ \gamma^\alpha \beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) = \dfrac{l(u_4) - \delta u_4}{u_4^\alpha} \end{cases}.$$

Saame

$$\frac{l(u_3) - \delta u_3}{u_3^\alpha} = \frac{l(u_4) - \delta u_4}{u_4^\alpha},$$

kust

$$\delta = \frac{u_3^\alpha l(u_4) - u_4^\alpha l(u_3)}{u_3 u_4 (u_3^{\alpha-1} - u_4^{\alpha-1})}. \tag{2.11}$$

Kasutades esimest võrrandit võrrandisüsteemist (2.10) saame avaldise ka β jaoks (samaväärne oleks ka teise võrrandi kasutamine)

$$\beta = (l(u_3) - \delta u_3)\frac{1}{\gamma^\alpha u_3^\alpha}\cot(\tfrac{\pi\alpha}{2}). \tag{2.12}$$

Asendame avaldises $l(u)$ suuruse $\varphi(t)$ vastava hinnanguga $\hat{\varphi}_n(t)$, sel juhul

$$\hat{l}_n(u) = \mathrm{Im}\left[\ln(1/n\sum_{j=1}^{n} e^{iuX_j})\right] = \mathrm{Im}\left[\log 1/n + \ln\left[\sum_{j=1}^{n}\cos(uX_j) + i\sum_{j=1}^{n}\sin(uX_j)\right]\right] \tag{2.13}$$

$$= \arctan\frac{\sum_{j=1}^{n}\sin(uX_j)}{\sum_{j=1}^{n}\cos(uX_j)}.$$

Asendades saadud avaldise ning hinnangud $\hat{\alpha}, \hat{\gamma}$ võrdustesse (2.11) ja (2.12) saame hinnangud parameetrite β ja δ jaoks:

$$\hat{\delta} = \frac{u_3^{\hat{\alpha}} \hat{l}(u_4) - u_4^{\hat{\alpha}} \hat{l}(u_{34})}{u_3 u_4 (u_3^{\hat{\alpha}-1} - u_4^{\hat{\alpha}-1})}; \tag{2.14}$$

$$\hat{\beta} = (\hat{l}(u_3) - \hat{\delta} u_3) \frac{1}{\hat{\gamma}^{\hat{\alpha}} u_3^{\hat{\alpha}}} \cot(\tfrac{\pi\hat{\alpha}}{2}). \tag{2.15}$$

Sõnastame saadud tulemused järgmise lausena.

Lause 2.1 *Olgu juhuslik suurus X stabiilse jaotusega X~S(*$\alpha, \beta, \gamma, \delta$*) karakteristliku funktsiooniga*

$$\varphi(u) = \exp\left\{-\gamma^{\alpha} |u|^{\alpha} \left[1 - i\beta sign(u) \tan \tfrac{\pi\alpha}{2}\right] + i\delta u\right\}, \quad \alpha \neq 1.$$

Siis üldistatud momentide meetodi hinnangud jaotuse parameetritele $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *avalduvad järgmiste võrdustena*

$$\hat{\alpha} = \frac{\ln\left[\frac{\hat{v}(u_1)}{\hat{v}(u_2)}\right]}{\ln\left[\frac{u_1}{u_2}\right]};$$

$$\hat{\beta} = (\hat{l}(u_3) - \hat{\delta} u_3) \frac{1}{\hat{\gamma}^{\hat{\alpha}} u_3^{\hat{\alpha}}} \cot(\tfrac{\pi\hat{\alpha}}{2});$$

$$\hat{\gamma} = \exp\left[\frac{\ln(u_1)\ln[\hat{v}(u_2)] - \ln(u_2)\ln[\hat{v}(u_1)]}{\ln[\hat{v}(u_1)/\hat{v}(u_2)]}\right];$$

$$\hat{\delta} = \frac{u_3^{\hat{\alpha}} \hat{l}(u_4) - u_4^{\hat{\alpha}} \hat{l}(u_{34})}{u_3 u_4 (u_3^{\hat{\alpha}-1} - u_4^{\hat{\alpha}-1})}.$$

Märgime, et saades parameetri α hinnanguks $\hat{\alpha}$ =2, ei ole parameetri β hindamine eelpool toodud valemiga (2.15) võimalik, kuna valemis tekib määramatus ($\cot(\pi)$). Tegelikult ei oma sel juhul parameetri β väärtus tähtsust, kuna $\hat{\alpha}$ =2 korral on tegemist normaaljaotusega, mis on alati sümmeetriline, sõltumata β väärtusest.

Vaatame nüüd juhtu α=1. Sel juhul käitume parameetrite hindamisel sarnaselt. Vaatame funktsiooni $\upsilon(u) = -\operatorname{Re}[\ln(\varphi(u))] = \gamma|u|$. Eeldades, et u>0 saame

$$\gamma = \frac{\nu(u)}{u}. \tag{2.16}$$

Vaatame funktsiooni

$$l(u) = -\operatorname{Im}[\ln(\varphi(u))] = \gamma|u|\beta \frac{2}{\pi} sign(u)\ln(u) - \delta u .$$

Suvaliste positiivsete nullist erinevate arvude $u_3 \neq u_4$ korral saame, et

$$\frac{l(u_i)}{u_i} = \frac{2\gamma \ln(u_i)}{\pi}\beta - \delta, \quad i = 3,4 .$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi β ja γ suhtes, saame võrdused

$$\beta = \pi \frac{l(u_3)/u_3 - l(u_4)u_4}{2\gamma \ln(u_3/u_4)} \tag{2.17}$$

ja

$$\delta = \frac{l(u_3)}{u_3} + \frac{2}{\pi}\gamma\beta \ln(u_3). \tag{2.18}$$

Asendades saadud valemites $l(u)$ ja $\nu(u)$ vastavate hinnangutega $\hat{l}(u)$ ja $\hat{\nu}(u)$ saame γ, β, δ hinnangud. Esitame saadud hinnangud järgmises lauses.

Lause 2.2 *Olgu juhuslik suurus X stabiilse jaotusega X~S(*$1,\beta,\gamma,\delta$*) karakteristliku funktsiooniga*

$$\varphi(u) = \exp\left\{-\gamma|u|\left[1 + i\beta sign(u)\frac{2}{\pi}\log|u|\right] + i\delta u\right\}.$$

Siis üldistatud momentide meetodi hinnangud jaotuse parameetritele β,γ,δ *avalduvad järgmiste võrdustena*

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{v}(u)}{u}; \tag{2.19}$$

$$\hat{\beta} = \pi\frac{\hat{l}(u_3)/u_3 - \hat{l}(u_4)/u_4}{2\hat{\gamma}\ln(u_3/u_4)}; \tag{2.20}$$

$$\hat{\delta} = \frac{\hat{l}(u_3)}{u_3} + \frac{2}{\pi}\hat{\gamma}\hat{\beta}\ln(u_3). \tag{2.21}$$

Uurime, kuidas esituvad üldistatud momentide meetodil normaaljaotuse parameetrite hinnangud. Normaaljaotus on teatud mõttes stabiilse jaotuse piirjuht, kuna normaaljaotuse puhul on parameetrid α,β fikseeritud, $\alpha = 2$ ja $\beta = 0$. Keskväärtuseks μ on paiknemisparameeter ning standardhälve on seotud skaalaparameetriga, $\sigma = \gamma\sqrt{2}$. Normaaljaotuse karakteristlik funktsioon kui stabiilse jaotuse karakteristliku funktsiooni erikuju, on järgmine:

$$\varphi(u) = \exp(-\gamma^2 u^2 + i\delta u).$$

Seega, kui u_1 ja u_2 on mingid positiivsed arvud, siis saame eelpool sissetoodud funktsioonid $\upsilon(u)$ ja $l(u)$ avaldada kujul

$$\nu(u_1) = -\mathrm{Re}\left[\ln\varphi(u_1)\right] = \gamma^2 u_1^2$$

ja

$$l(u_2) = \mathrm{Im}\left[\ln\varphi(u_2)\right] = \delta u_2 .$$

Sel juhul parameetrid γ ja μ avalduvad võrdustega

$$\gamma = \frac{\sqrt{\nu(u_1)}}{u_1}$$

ja

$$\delta = \frac{l(u_2)}{u_2} .$$

Asendades saadud võrdustes $l(u)$ ja $\nu(u)$ vastavate hinnangutega $\hat{l}(u)$ ja $\hat{\nu}(u)$ saame hinnangud parameetritele γ, δ. Võtame saadud tulemused kokku järgmise lausega.

Lause 2.3 *Olgu juhuslik suurus X stabiilse jaotusega X~S(* $2{,}0,\gamma,\delta$ *) karakteristliku funktsiooniga*

$$\varphi(u) = \exp(-\gamma^2 u^2 + i\delta u) .$$

Siis üldistatud momentide meetodi hinnangud jaotuse parameetritele γ, δ *avalduvad järgmiste võrdustena*

$$\hat{\gamma} = \frac{\sqrt{\hat{\nu}(u_1)}}{u_1} \tag{2.22}$$

ja

$$\hat{\delta} = \frac{\hat{l}(u_2)}{u_2} . \tag{2.23}$$

Kuna normaaljaotuse korral on parameetrid α ja β ette antud, siis karakteristlikust funktsioonist me neid parameetreid ei hinda.

2.2 Üldistatud momentide meetodi rakendamine

Järgnevalt uurime, kuidas valida argumente u_i nii, et eelmises paragrahvis leitud valemid annaksid head parameetrite hinnangud. Selle uurimiseks genereerime erinevaid etteantud parameetritega stabiilseid jaotusi ning hindame üldistatud momentide meetodil genereeritud valimite parameetreid erinevate argumentide u_i korral. Arvutuste tegemiseks ja jaotuste simuleerimiseks kasutame statistikapaketti R.

2.2.1 Üldistatud momentide meetodi rakendamine normaaljaotuse korral

Uurime, kuidas töötab meetod normaaljaotuse korral. Genereerime erinevad normaaljaotused, olgu need $N(1,1), N(100,15), N(0.006,0.001)$ ehk stabiilsed jaotused $S(2,0,1/\sqrt{2},1)$, $S(2,0,15/\sqrt{2},100), S(2,0,0.001/\sqrt{2},0.006)$ ning valimimahuks võtame 500. Arvutame valemite (2.21) ja (2.22) põhjal hinnangud keskväärtusele ja standardhälbele.

Tuletame meelde, et keskväärtuse hinnanguks on paiknemisparameetri hinnang $\hat{\delta}$ ning standardhälbe hinnanguks on $\hat{\gamma}\sqrt{2}$. Programm (programm 1) valemite (2.22) ja (2.23) põhjal hinnangute arvutamiseks on esitatud lisas 1.

NÄIDE 2.1 Genereerime normaaljaotuse $N(1,1)$ valimimahuga 500. Normaaljaotuse karakteristliku funktsiooni põhjal saadud hinnangud(valemid (2.22) ja (2.23)) on esitatud tabelis 1. Vastav arvutusprogramm on antud lisas 1 (programm 1). Tabeli 1 põhjal võime öelda, standardhälbe hinnang muutub halvaks suurte u väärtuste korral. Valides sobiva argumendi, võime saada standardhälbe hinnangu väga täpselt. Keskväärtuse jaoks saame täpsed hinnangud väga väikeste argumendi väärtuste korral. Genereeritud jaotuse korral annab nii standardhälbele kui keskväärtusele parima hinnangu argument 0.01 või 0.001. Samas ka argumendi 1.5 puhul on tulemused päris head, kuid näiteks argumendi 2 korral on keskväärtuse hinnanguviga koguni 0.6.

u	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta} = \hat{\mu}$	$\hat{\sigma} = \hat{\gamma}\sqrt{2}$
0.5	0.67	1.03	0.95
0.9	0.71	0.93	1.00
0.2	0.74	1.00	1.05
0.01	0.70	1.01	0.99
0.001	0.71	0.98	1.00
2.0	0.69	-0.61	0.98
3.0	0.58	0.11	0.82
1.5	0.70	1.02	0.99
2.5	0.85	-0.42	1.20
2.7	0.73	0.05	1.03
2.3	0.76	-0.35	1.07
10.0	0.21	0.09	0.30
100.0	0.02	0.00	0.03

Tabel 1. Normaaljaotuse $N(1,1)$ parameetrite hinnangud.

■

NÄIDE 2.2 Genereerime normaaljaotuse $N(100,15)$ valimimahuga 500. Hinnangute leidmiseks (valemid 2.21 ja 2.22) kasutame lisa 1 programmi 1. Tulemused esitame tabelis 2.

u	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta} = \hat{\mu}$	$\hat{\sigma} = \hat{\gamma}\sqrt{2}$
0.5	3.89	1.90	5.50
50	0.04	0.02	0.06
0.001	10.20	100.17	14.42
0.0001	10.51	100.79	14.86
0.1	10.31	6.04	14.58
0.099	10.31	5.07	14.58

Tabel 2. Normaaljaotuse $N(100,15)$ parameetrite hinnangud.

Näeme tabelist 2, et täpseima hinnangu annavad argumendid arvu 0 lähedal. Juba argument 0.1 annab keskväärtuse jaoks ebatäpse hinnangu. Samas on vastav standardhälbe hinnang peaaegu õige. Seega, suurte väärtustega normaaljaotuse parameetritele õigete hinnangute saamiseks on vaja kasutada piisavalt väikseid argumente.

■

Vaatame järgmist näidet, kus hindame praktiliselt konstantset valimit.

NÄIDE 2.3 Genereerime normaaljaotuse $N(0.006, 0.001)$ valimimahuga 500. Hinnangute leidmiseks (valemid 2.21 ja 2.22) kasutame lisa 1 programmi 1. Tulemused on esitatud tabelis 3. Tabel 3 näitab, et väga väikese hajuvusega valimi korral (peaaegu konstant) on hinnang standardhälbele alati täpne, sõltumata argumendist. Keskväärtuse hinnang läheb liiga suurte argumentide korral paigast ära.

u	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta} = \hat{\mu}$	$\hat{\sigma} = \hat{\gamma}\sqrt{2}$
0.001	0.00072	0.006	0.001
0.099	0.00072	0.006	0.001
0.5	0.00072	0.006	0.001
2	0.00072	0.006	0.001
10	0.00072	0.006	0.001
100	0.00072	0.006	0.001
500	0.00072	0.0003	0.001
1000	0.00071	0.0002	0.001

Tabel 3. Normaaljaotuse $N(0.006, 0.001)$ parameetrite hinnangud.

■

Kokkuvõttes saame öelda, et piisavalt väikese hajuvusega andmete korral töötab meetod väga hästi, suurema hajuvuse ja keskväärtuse korral sõltub tulemuse headus argumentide valikust. Toodud näidete põhjal saab öelda, et argumentideks sobivad võimalikult nullilähedased arvud.

Uurime, kas meetod annab hinnangud parameetritele α, γ ja δ ka üldist stabiilse jaotuse karakteristliku funktsiooni kasutades. Arvutusprogramm (programm 2) hinnangute saamiseks valemite (2.8), (2.9) ja (2.14) põhjal on esitatud lisas 1. Valimimaht kõigis järgmistes näidetes genereeritud normaaljaotuste korral on 500.

NÄIDE 2.4 Hindame normaaljaotuse $N(1,1)$ parameetreid stabiilse jaotuse üldise karakteristliku funktsiooni põhjal (valemid 2.8, 2.9, 2.14). Programm 2 (lisa 1) põhjal saadud tulemused on esitatud tabelis 4.

u_1	u_2	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma} = \hat{\gamma}\sqrt{2}$	$\hat{\delta} = \hat{\mu}$	$\hat{\delta}$ ($\hat{\alpha}$ =2)
0.5	0.6	2.006	0.762	1.077	1.042	1.041
0.001	0.002	2	0.758	1.071	1.041	1.041
0.988	0.888	2.009	0.763	1.077	1.04	1.04
10	0.9	0.782	0.423	0.598	-1.427	1.138
2	3	0.803	1.293	1.828	5.721	-1.459
3	5	0.356	7.109	10.04	-0.829	0.308
2	2.1	1.355	0.878	1.242	-5.034	-2.089

Tabel 4. Normaaljaotuse $N(1,1)$ parameetrite hinnangud.

Märgime, et vastavalt meetodile ei pea me δ hindamisel kasutama samu argumente, mis parameetri α hindamisel, vaid võime otsida sobivamaid argumente u_3 ja u_4. Vaadates tabelit 4 on selge, et väärtused, mis sobivad α hindamiseks, annavad hea tulemuse ka δ korral. Võrreldes tulemusi tabeliga 1 näeme, et ka siin sobivad argumentideks väikesed väärtused. Samad argumendid määravad õigesti ka karakteristliku eksponendi α Märgime veel, et tabeli 1 ja tabeli 4 tulemused on praktiliselt kokkulangevad.

■

NÄIDE 2.5 Genereerime normaaljaotuse $N(100,15)$. Hindame jaotuse parameetreid stabiilse jaotuse üldise karakteristliku funktsiooni põhjal (valemid (2.8), (2.9), (2.14)). Programm 2 (lisa 1) põhjal saadud tulemused on esitatud tabelis 5.

u_1	u_2	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma} = \hat{\gamma}\sqrt{2}$	$\hat{\delta} = \hat{\mu}$	$\hat{\delta}$ **(** $\hat{\alpha}$ **=2)**
0.001	0.002	2	10.91	15.42	100.173	100.17
0.01	0.012	2	10.91	15.43	100.166	100.166
0.15	0.16	2.84	9.94	14.06	-70.62	-131.602
0.5	0.6	-0.527	0.23	0.32	-9.447	17.408
0.598	0.599	3.254	2.3	3.25	-49.75	-111.493
2	3	-0.019	1.09	1.55	-0.802	-0.056
10	0.9	0.017	7.26	10.26	0.0689	1.007
100	15	0.17	28.93	40.91	-0.007	0.078

Tabel 5. Normaaljaotuse $N(100,15)$ parameetrite hinnangud.

Võrreldes tulemusi tabeliga 2 näeme, et ka siin sobivad argumentideks vaid piisavalt väikesed väärtused, antud juhul kolm esimest argumentide paari. Sellised lähendid määravad õigesti ka karakteristliku eksponendi α. Võrreldes tabelit 5 tabeliga 2 võib öelda, et heade tulemuste saamiseks on argumentidele vaja seada kitsamad piirid - argumentide $u_1 = 0.598, u_2 = 0.599$ korral ei ole tabeli 5 tulemused enam nii täpsed nagu tabelis 2.

■

NÄIDE 2.6 Genereerime normaaljaotuse $N(0.006, 0.001)$. Hindame jaotuse parameetreid stabiilse jaotuse üldise karakteristliku funktsiooni põhjal (valemid (2.8), (2.9), (2.14)). Programm 2 (lisa 1) põhjal saadud tulemused on esitatud tabelis 6.

u_1	u_2	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma} = \hat{\gamma}\sqrt{2}$	$\hat{\delta} = \hat{\mu}$
0.001	0.002	2	0.0007	0.001	0.006
0.01	0.012	2	0.0007	0.001	0.006
0.08	0.09	2	0.0007	0.001	0.006
0.1	0.2	2	0.0007	0.001	0.006
0.15	0.16	1.999	0.0007	0.001	0.006
2	3	2	0.0007	0.001	0.006
100	200	1.99	0.0007	0.001	0.006

Tabel 6. Normaaljaotuse $N(0.006, 0.001)$ parameetrite hinnangud.

Võrreldes tabeli 6 tulemusi tabeliga 3 näeme, et ka siin sobivad argumentideks praktiliselt kõik arvud ning samal ajal määravad need õigesti ka karakteristliku eksponendi α. Sellised tulemused on ka oodatavad, kuna genereeritud valim on väga väikese hajuvusega.

■

Märgime, et hinnangud jäävad praktiliselt muutumatuks kui genereerime samade parameetritega jaotused uuesti. Illustreerime seda järgmise näitega.

NÄIDE 2.7 Esitame juhu $N(100{,}15)$ jaoks näite, kus uurime jaotuse parameetrite hinnanguid 100 sama jaotusega $N(100{,}15)$ valimi korral. Valemitele (2.8), (2.9), (2.14) vastav arvutusprogramm on esitatud lisas 1, programm 3. Argumentideks valime eelpool häid tulemusi andnud arvud $u_1 = 0.001, u_2 = 0.002$. Genereeritud 100 valimi põhjal saadud hinnangute kirjeldavad statistikud on järgmised:

- Parameetri α hinnangute kirjeldavad statistikud:

u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.001	0.002	2	2	2	2	2	2	0

- Parameetri $\gamma = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ hinnangute kirjeldavad statistikud:

u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.001	0.002	9.767	10.390	10.640	10.600	10.790	11.220	0.33

- Parameetri δ hinnangute kirjeldavad statistikud:

u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.001	0.002	98.39	99.51	99.98	99.98	100.40	101.20	0.63

Toodud tabelitest näeme, et hinnangud on väga väikese hajuvusega, seega genereerimise juhuslikkus hinnanguid ei mõjuta.

■

Märgime veel, et valimimahu suurendamisel või vähendamisel jäid hinnangud samuti praktiliselt muutumatuks. Kokkuvõtteks võime öelda, et üldistatud momentide meetodil võib normaaljaotuse parameetritele saada päris head hinnangud. Tulemused sõltuvad valimi hajuvusest ja parameetrite väärtustest. Ainus probleem on sobivate argumentide leidmine, toodud näidete põhjal võib öelda, et normaaljaotuse parameetrite hindamiseks sobivad argumentideks nullilähedased arvud (näiteks 0.001 ja 0.002).

2.2.2 Stabiilse jaotuse simuleerimine

Stabiilse jaotusega juhuslike suuruste simuleerimist klassikalisel meetodil takistab asjaolu, et ei leidu analüütilist avaldist jaotusfunktsioonile ja tema pöördfunktsioonile. Esimesena leidis jaotuse $S(\alpha,1,1,0), \alpha < 1$ simuleerimiseks meetodi Kanter (1975). Selgus, et seda saab edukalt laiendada ka üldjuhule. Chambers, Mallows ja Stuck (1976) esitasid vastavad valemid esimestena. Järgmine teoreem (Nolan (2001)) on stabiilse jaotuse simuleerimise aluseks.

Teoreem 2.4 *Olgu V ja W sõltumatud juhuslikud suurused, kus V on ühtlase jaotusega vahemikust* $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $V \sim U\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *ja W on eksponentjaotusega keskväärtusega* 1, $W \sim Exp(1)$ *ja* $0 < \alpha \le 2$.

- *Sümmeetrilisel juhul* ($\beta = 0$) *avaldub stabiilse jaotusega* $S = (\alpha,0,0,1)$ *juhuslik suurus X kujul*

$$X = \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha V}{(\cos V)^{1/\alpha}}\left[\dfrac{\cos(\alpha-1)V}{W}\right]^{(1-\alpha)/\alpha}, & \alpha \ne 1; \\ \tan V, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{2.24}$$

- *Mittesümmeetrilise stabiilse jaotusega* $S(\alpha,\beta,0,1)$ *juhuslik suurus X avaldub*

$$X = \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha(V_0+V)}{(\cos\alpha V_0 \cos V)^{1/\alpha}}\left[\dfrac{\cos(\alpha V_0+(\alpha-1)V)}{W}\right]^{(1-\alpha)/\alpha}, & \alpha \ne 1; \\ \dfrac{2}{\pi}\left[\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta V\right)\tan V - \beta\ln\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}W\cos V}{\frac{\pi}{2}+\beta V}\right)\right], & \alpha = 1, \end{cases} \tag{2.25}$$

kus $V_0 = \arctan(\beta\tan(\pi\alpha/2))/\alpha$ *ja* $-1 < \beta \le 1$.

Lause 2.5 *Kui* $X \sim S(\alpha,\beta,0,1)$, *siis*

$$Y = \begin{cases} \gamma X + \delta, & \alpha \neq 1; \\ \gamma X + \frac{2}{\pi}\beta\gamma\log\gamma + \delta, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{2.26}$$

on stabiilse jaotusega $S(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$.

Teoreemi 2.4 põhjal võime juhusliku suuruse $X \sim S(\alpha,\beta,1,0)$ simuleerimiseks kirja panna järgmise algoritmi, Weron (2001):

- Genereerime sõltumatud juhuslikud suurused $V \sim U\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ja $W \sim Exp(1)$.
- Arvutame

$$X = S_{\alpha,\beta}\frac{\sin(\alpha(V + B_{\alpha,\beta}))}{(\cos(V))^{1/\alpha}}\left(\frac{\cos(V - \alpha(V + B_{\alpha,\beta}))}{W}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}, \tag{2.27}$$

kus

$$B_{\alpha,\beta} = \frac{\arctan(\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2})}{\alpha},$$

$$S_{\alpha,\beta} = \sqrt{\left(1 + \left(\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)^2\right)^{1/\alpha}}.$$

Kui $\alpha = 1$ ja/või $\beta = 0$, siis avaldis (2.27) lihtsustub:

$$X = \tan V, \qquad \alpha = 1, \beta = 0;$$

$$X = \frac{\sin(\alpha V)}{(\cos(V))^{1/\alpha}}\left(\frac{\cos(V - \alpha V)}{W}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}, \qquad \alpha \neq 1, \beta = 0;$$

$$X = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta V\right)\tan V - \beta\log\left(\frac{\frac{\pi}{2}W\cos V}{\frac{\pi}{2} + \beta V}\right)\right], \qquad \alpha = 1, \beta \neq 0.$$

Juhusliku suuruse $Y \sim S(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ simuleerimiseks kasutame lauset 2.5.

Esitame järgnevalt paar näidet stabiilsete jaotuste kohta. Programm juhusliku suuruse $X \sim S(\alpha, \beta, 1, 0)$ simuleerimiseks on esitatud lisas 1 (programm 4), kus α, β on tähistatud vastavalt *a*, *b*. Programm juhusliku suuruse $Y \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ simuleerimiseks on esitatud lisas 1 (programm 5), kus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ on tähistatud vastavalt *a*, *b*, *c*, *d*.

Lisas 2 on esitatud nimetatud programmidega jaotustest $X \sim S(0.5, 0, 1, 0)$ ja $X \sim S(1.5, 0, 1, 0)$ simuleeritud valimite histogrammid, kui valimimaht on 1000. Märkame, et kuigi parameetritest on erinev vaid parameeter α, siis graafikute skaala on väga erinev. Kui normaaljaotuse puhul oleme harjunud, et valimi väärtuste ulatus on määratud standardhälbega (skaalaparameetriga), siis stabiilse jaotuse korral on valimi väärtuste ulatus mõjutatud eelkõige α väärtusest. Näeme, et $X \sim S(1.5, 1, 1, 0)$ korral on suurem osa valimi väärtusi vahemikus -6 kuni 6, kuid valimi $X \sim S(0.5, 1, 1, 0)$ korral on enamus väärtusi tunduvalt suuremas vahemikus, -5000 kuni 5000. Ka valimite sabad on erinevad. Valimi $X \sim S(0.5, 1, 1, 0)$ korral on suurim 10^7-järku üksikväärtus, valimi $X \sim S(1.5, 1, 1, 0)$ korral aga 10^2-järku väärtused. Kuna sümmeetriaparameeter $\beta = 0$, siis peaksid valimid olema sümmeetrilised, kuid α väärtus mängib ka siin rolli, tekitades valimitesse ebasümmeetrilisust. Märgime, et kui valida α =2, siis on valim täiesti sümmeetriline, sõltumata β väärtusest.

Märgime veel, et genereerides samade parameetrite väärtustega uued valimid, võivad tulemused olla märgatavalt erinevad, eriti just valimi sabade osas. Seega tuleb arvestada, et parameetrite hindamisel ei tule erinevate valimite hinnangud nii väikese hajuvusega (erinevusega), kui nägime normaaljaotuse korral.

2.2.3 Üldistatud momentide meetodi rakendamine stabiilse jaotuse korral

Simuleerides erinevaid stabiilseid jaotusi rakendame jaotuste parameetrite hindamiseks eespool kirjeldatud üldistatud momentide meetodit. Toome siinkohal uuesti ära vastavad hinnangute valemid lausest 2.1:

$$\hat{\alpha} = \frac{\ln\left[\dfrac{\hat{v}(u_1)}{\hat{v}(u_2)}\right]}{\ln\left[\dfrac{u_1}{u_2}\right]}$$

$$\hat{\gamma} = \exp\left[\frac{\ln(u_1)\ln[\hat{v}(u_2)] - \ln(u_2)\ln[\hat{v}(u_1)]}{\ln[\hat{v}(u_1)/\hat{v}(u_2)]}\right]$$

$$\hat{\delta} = \frac{u_3^{\hat{\alpha}}\hat{l}(u_4) - u_4^{\hat{\alpha}}\hat{l}(u_{34})}{u_3 u_4 (u_3^{\hat{\alpha}-1} - u_4^{\hat{\alpha}-1})}$$

$$\hat{\beta} = (\hat{l}(u_3) - \hat{\delta}u_3)\frac{1}{\hat{\gamma}^{\hat{\alpha}} u_3^{\hat{\alpha}}}\cot(\tfrac{\pi\hat{\alpha}}{2})$$

Saadud hinnangud ümardame parameetrite α ja β korral täpsusega 0.1, parameetrite δ, γ korral sõltuvalt väärtustest.

NÄIDE 2.8 Simuleerime (programm 4) stabiilse jaotuse S(0.5, 0.1, 1, 0) valimimahuga 1000. Esialgu omab mõtet vaid parameetri α väärtuste uurimine, kuna kõik ülejäänud parameetrid on α väärtustest sõltuvad. Kasutame arvutusteks programmi 2 (lisa 1). Tulemused on esitatud tabelis 7. Tabelist 7 näeme, et normaaljaotuse korral sobinud argumendid 0.001 ja 0.002 ei anna siin head tulemust. Samuti on tulemused hajuvamad. Valitud argumentide korral me õigele parameetri α väärtusele lähedast hinnangut ei saagi.

u_1	u_2	$\hat{\alpha}$
0.6	0.5	0.09
0.001	0.002	0.13
0.01	0.012	0.33
0.999	0.988	-0.32
0.05	0.051	-3.43
0.02	0.021	-0.44
0.015	0.016	-0.5
0.012	0.0123	-0.6
0.009	0.01	0.79

Tabel 7. Parameetri α hinnangud jaotusele S(0.5, 0.1, 1, 0).

■

Kuna stabiilse jaotuse genereerimisel märkisime, et samade parameetritega genereeritud valimid võivad teineteisest erineda, siis on uurimiseks mõttekas genereerida rohkem kui üks jaotus. Sobivate argumentide leidmiseks genereerime teatud arvu valimeid ja uurime α väärtusi kõigi nende valimite korral. Põhimõtteliselt sobib selliste arvutuste tegemiseks programm 3, kus normaaljaotuse genereerimise asendame stabiilse jaotuse genereerimisega (programm 5). Nii saadud programm 6 on esitatud lisas 1 (lisaks sellele on programmis esitatud avaldised ka γ, δ, β hinnangute leidmiseks (programmi lõpus), mida kasutame hiljem, kui nende arvutamiseks vajalikud parameetrid on hinnatud). Järgmistes näidetes genereerime valimeid 100 korda ning uurime nendest valmititest leitud hinnangute keskmisi. Saadud parameetrite hinnangud tähistame siiski $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$, kuigi tegemist on 100 hinnangu keskmistega.

NÄIDE 2.9 Simuleerime 100 korda stabiilset jaotust S(0.5, 0.1, 1, 0) valimimahuga 1000. Tulemused parameetri α hindamisel erinevate argumentide korral on esitatud tabelis 8. Tabel 8 tulemuste põhjal võib öelda, et hea hinnangu annavad mitmed argumendid. Otsustame argumentide valiku standardhälbest lähtuvalt. Valime argumendid, mille puhul standardhälve jääb alla 0.1. Sel juhul on sobivad argumentide paarid u_1=0.5, u_2=5, u_1=0.03, u_2=0.09 ja u_1=0.1, u_2=10. Nende põhjal saame parameetri α hinnangute keskmiseks $\hat{\alpha} = 0.5$.

u_1	u_2	Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.	St.dev
2.0	3.0	-0.37	0.32	0.49	0.49	0.66	1.50	0.26
1.5	2.0	-0.39	0.28	0.50	0.51	0.74	1.50	0.31
5.0	6.0	-2.78	-0.18	0.49	0.49	1.11	4.07	0.93
0.8	0.9	-1.35	0.10	0.48	0.48	0.85	2.30	0.55
2.0	2.2	-1.75	-0.07	0.52	0.54	1.11	3.13	0.82
2.0	5.0	-0.07	0.39	0.50	0.50	0.61	1.20	0.17
2.0	10.0	0.14	0.38	0.45	0.46	0.54	0.87	0.12
0.1	10.0	0.36	0.46	0.49	0.49	0.52	0.66	0.05
0.5	5.0	0.31	0.45	0.49	0.50	0.54	0.78	0.06
0.03	0.09	0.31	0.45	0.50	0.50	0.56	0.65	0.07

Tabel 8. Parameetri α hinnangute kirjeldavad statistikud jaotusele *S*(0.5, 0.1, 1, 0).

Hindame nüüd parameetrit γ, kusjuures γ hindamisel peame kasutama samu argumente, mis parameetri α hindamisel. Arvutame tulemused kõigi sobinud argumentide paaride korral. Kasutame programmi 5, andes ette fikseeritud $\hat{\alpha}$ =0.5 ja arvutades selle põhjal γ väärtused. Tulemused γ hindamisel on esitatud tabelis 9.

u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.5	5	0.55	0.88	0.98	0.997	1.1	1.57	0.17
0.1	10	0.67	0.88	1.01	1.03	1.15	1.62	0.2
0.03	0.09	0.51	0.81	0.99	1.02	1.24	1.89	0.29

Tabel 9. Parameetri γ hinnangute kirjeldavad statistikud jaotusele *S*(0.5, 0.1, 1, 0).

Tabeli 9 põhjal võime öelda, et parameetri γ hinnangute keskmine on 1, $\hat{\gamma} = 1$. Keskmise erinevus õigest väärtusest on väiksem kui 0.03. Määrame järgmisena parameetri δ, kusjuures hindamisel võime kasutada uusi argumenti u_3 ja u_4. Proovime, kuidas sobivad δ hindamiseks parameetrite α ja γ puhul kasutatud argumendid. Hindamisel kasutame programmi 5 (lisa 1), kus anname ette $\hat{\alpha}$ =0.5 ja $\hat{\gamma} = 1$. Tulemused δ hindamisel on esitatud tabelis 10.

u_3	u_4	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.5	5	-0.45	-0.07	0.0035	-0.0011	0.07	0.37	0.10
0.1	10	-0.25	-0.07	-0.0078	-0.0152	0.04	0.18	0.08
0.03	0.09	-0.23	-0.06	0.014	-0.0008	0.05	0.21	0.09

Tabel 10. Parameetri δ hinnangute kirjeldavad statistikud jaotusele *S*(0.5, 0.1, 1, 0).

Tabeli 10 põhjal selgub, et eespool kasutatud argumendid annavad ka δ korral hea hinnangu. Märgime, et hinnates parameetrit δ mingite teiste argumentide paariga ei ole tulemused nii head. Võime öelda, et parameetri δ hinnangute keskmine on 0, $\hat{\delta} = 0$. Keskmise erinevus õigest väärtusest on argumentide u_3=0.03, u_4=0.09 korral väiksem kui 0.0008. Hindame nüüd parameetrit β, kusjuures hindamisel peame kasutama samu argumente, mis δ hindamisel. Andes ette väärtused $\hat{\alpha}$ =0.5, $\hat{\gamma} = 1$ ja $\hat{\delta} = 0$ saame programmi 5 põhjal parameetri β jaoks tabelis 11 esitatud hinnangud (arvutame hinnangud taas kõigi sobivate argumentide korral):

u_3	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.5	-0.11	0.05	0.104	0.105	0.15	0.43	0.07
0.1	-0.19	0.05	0.100	0.098	0.15	0.34	0.08

Tabel 11. Parameetri β hinnangute kirjeldavad statistikud jaotusele *S*(0.5, 0.1, 1, 0).

Tabeli 11 põhjal selgub, et ka parameetri β jaoks saame päris head hinnangud, hinnangute keskmine on $\hat{\beta} = 0.1$.

Seega, erinevusega vähem kui 0.01 tegelikest väärtustest saame parameetrite hinnangute keskmisteks $\hat{\alpha} = 0.5, \hat{\gamma} = 1, \hat{\delta} = 0, \hat{\beta} = 0.1$.

■

Uurime, kuidas mõjutab parameetri α hinnanguid asümmeetriakordaja β. Genereerime erinevate asümmeetriakordajatega valimeid (valimimahuga 1000) 500 korda, kus teised muud parameetrid jätame muutumatuks. Valides erinevaid argumente hindame parameetrit α programmi 5 abil. Tulemused esitame tabelites 12, 13, 14, 15, kus esimeses kahes veerus on antud genereeritava standardse ($\delta = 0, \gamma = 1$) stabiilse jaotusega valimi parameetrid α ja β, seejärel argumentide paar ning viimastes veergudes on parameetri α hinnangute keskmine ja standardhälve.

α	β	u_1	u_2	Mean($\hat{\alpha}$)	St.dev ($\hat{\alpha}$)
0.2	1	0.5	5	0.2	0.04
0.2	1	0.03	0.09	0.2	0.06
0.2	1	0.4	0.8	0.2	0.1
0.2	0	0.5	5	0.2	0.04
0.2	0	0.03	0.09	0.2	0.06
0.2	0	0.4	0.8	0.2	0.1
0.2	-1	0.5	5	0.2	0.04
0.2	-1	0.03	0.09	0.2	0.06
0.2	-1	0.4	0.8	0.2	0.1

Tabel 12. Stabiilse jaotuse S(0.2, β,1,0) parameetri α hinnangud.

Tabelist 12 näeme, et $\alpha = 0.2$ puhul ei mõjuta valimi ebasümmeetrilisus hinnanguid, samuti on sobivad kõik argumentide paarid.

α	β	u_1	u_2	Mean($\hat{\alpha}$)	St. dev ($\hat{\alpha}$)
0.9	1	0.5	5	0.6	0.08
0.9	1	0.03	0.09	0.9	0.08
0.9	1	0.4	0.8	0.9	0.1
0.9	0	0.5	5	0.4	0.08
0.9	0	0.03	0.09	0.9	0.08
0.9	0	0.4	0.8	0.9	0.12
0.9	-1	0.5	5	0.6	0.08
0.9	-1	0.03	0.09	0.9	0.08
0.9	-1	0.4	0.8	0.9	0.1

Tabel 13. Stabiilse jaotuse S(0.9, β,1,0) parameetri α hinnangud.

Tabelist 13 näeme, et ka $\alpha = 0.9$ puhul ei mõjuta valimi ebasümmeetrilisus hinnanguid tulemusi, küll aga ei sobi enam kõik argumentide paarid - nimelt annab argumentide paar u_1=0.5, u_2=5 ebarahuldava tulemuse.

α	β	u_1	u_2	Mean($\hat{\alpha}$)	St. dev ($\hat{\alpha}$)
1.2	1	0.5	5	0.3	0.08
1.2	1	0.03	0.09	1.2	0.08
1.2	1	0.4	0.8	0.8	0.2
1.2	0	0.5	5	0.36	0.08
1.2	0	0.03	0.09	1.2	0.08
1.2	0	0.4	0.8	1.2	0.2
1.2	-1	0.5	5	0.1	0.09
1.2	-1	0.03	0.09	1.2	0.08
1.2	-1	0.4	0.8	0.8	0.26

Tabel 14. Stabiilse jaotuse S(1.2, β,1,0) parameetri α hinnangud.

Tabelist 14 näeme, et $\alpha = 1.2$ puhul mõjutab valimi ebasümmeetrilisus hinnanguid argumentide paari u_1=0.4, u_2=0.8 puhul. Sümmeetrilise valimi puhul annab see paar õige tulemuse, erinevalt ebasümmeetrilistest valimitest. Argumentide paar u_1=0.5, u_2=5 ei sobi taas hindamiseks.

α	β	u_1	u_2	Mean($\hat{\alpha}$)	St. dev ($\hat{\alpha}$)
1.9	1	0.5	5	0.2	0.08
1.9	1	0.03	0.09	1.9	0.08
1.9	1	0.4	0.8	1.3	0.2
1.9	0	0.5	5	0.2	0.08
1.9	0	0.03	0.09	1.9	0.08
1.9	0	0.4	0.8	1.4	0.2
1.9	-1	0.5	5	0.2	0.07
1.9	-1	0.03	0.09	1.9	0.07
1.9	-1	0.4	0.8	1.3	0.24

Tabel 15. Stabiilse jaotuse S(1.9, β,1,0) parameetri α hinnangud.

Tabelist 15 näeme, et $\alpha = 1.9$ puhul ei mõjuta valimi ebasümmeetrilisus hinnanguid, küll aga on ainus sobiv argumendipaar u_1=0.03, u_2=0.09.

Saadud tulemuste põhjal võime kokkuvõtvalt öelda, et meetodi tulemusi mõjutab eelkõige sobiv argumentide valik, mitte valimi sümmeetrilisus või ebasümmeetrilisus. Seniste arvutuste põhjal võime öelda, et üks sobiv argumentide paar parameetri α hindamiseks on u_1=0.03, u_2=0.09. Samuti võib märkida, et $\alpha < 1$ korral on argumentide valikul väiksem mõju. Võrreldes tulemusi normaaljaotuse analüüsiga on sobivad argumendid sarnased, see tähendab, et ka siin peavad argumendid heade hinnangute saamiseks olema piisavalt väikesed (kuid praegusel juhul ka piisavalt suured).

Uurime järgnevalt stabiilseid jaotusi olukorral, kus muudame skaala- ja paiknemisparameetreid. Eespool nägime, et stabiilse jaotuse korral võib ühe simuleeritud valimi põhjal saadud hinnang olla ebatäpne. Seepärast kasutame hindamiseks mitut valimit. Saadud hinnangud esitame kirjeldavate statistikute abil. Programm stabiilse jaotusega valimite genereerimiseks ja vastavate parameetrite hindamiseks on esitatud lisas 1 (programm 6). Valimimaht järgnevates näidetes on 1000.

NÄIDE 2.9 Simuleerime stabiilse jaotuse $S(1.6, -0.8, 6, -10)$ ja hindame jaotuse parameetreid üldistatud momentide meetodil. Alustame parameetri α hindamisest, kuna teised parameetrid on parameetrist α sõltuvad. Genereerime 100 valimit ja hindame iga valimi korral parameetri α. Esitame saadud 100 hinnangu kirjeldavad statistikud tabelis 16. Valime argumendid, mis eespool andsid häid tulemusi.

u_1	u_2	Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.	St.dev
0.03	0.09	1.07	1.47	1.66	1.64	1.83	1.98	0.23
0.04	0.8	1.43	1.56	1.61	1.61	1.66	1.81	0.08
0.07	2.8	1.25	1.41	1.46	1.46	1.50	1.65	0.07
0.5	5	0.78	0.9	0.96	0.96	1.00	1.15	0.08

Tabel 16. Jaotuse $S(1.6, -0.8, 6, -10)$ parameetri α hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist näeme, et eelpool häid tulemusi andnud argumentide paar u_1=0.03, u_2=0.09 annab ka siin üsna hea tulemuse, kuigi vastav standardhälve on suurem kui teistel hinnangutel. Samas selgus, et ka argumendid u_1=0.04, u_2=0.8 annavad täpse hinnangu väikese hajuvusega. Kaks viimast hinnangut on samuti väikese hajuvusega, kuid samas mitteõiged. Praegu valime teadlikult $\hat{\alpha}$ =1.6 ja sobivateks argumentideks u_1=0.04, u_2=0.8 või u_1=0.03, u_2=0.09. Edasi hindame parameetrit γ, märkides, et γ hindamisel peame kasutama samu argumente, mis sobisid α hindamisel. Kirjeldavad statistikud 100 genereeritud jaotuse γ hinnangute kohta esitame tabelis 17. Arvutamiseks kasutame programmi 7, kus anname ette väärtuse $\hat{\alpha}$ =1.6.

u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.04	0.8	6.08	6.70	6.90	6.92	7.15	8.21	0.35
0.03	0.09	6.29	6.69	6.95	6.91	7.11	7.47	0.23

Tabel 17. Jaotuse *S*(1.6, -0.8, 6, -10) parameetri γ hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Parameetri γ hinnangud argumentide korral, mis sobisid parameetri α hindamisel, ei anna päris õigeid tulemusi. Peame jääma hinnangu $\hat{\gamma} = 6.9$ või $\hat{\gamma} = 7$ juurde, kuigi tegelik väärtus on $\gamma = 6$. Järgmiseks hindame parameetreid δ ja β. Märgime, et võime valida uued argumendid. Tulemused 1000 genereeritud valimi kohta erinevate argumentide paaride korral, kui $\hat{\alpha}$ =1.6 ja $\hat{\gamma} = 7$, on esitatud tabelis 18.

u_3	u_4	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.04	0.8	-10.85	-10.05	-9.67	-9.71	-9.40	-8.48	0.48
0.03	0.09	-11.36	-10.22	-9.89	-9.90	-9.53	-8.77	0.52
0.07	2.8	-9.33	-8.54	-8.28	-8.28	-8.05	-7.25	0.35
0.5	5	-4.12	-1.84	-0.37	-0.08	1.54	4.20	2.2
0.3	3	-6.99	-5.20	-3.95	-2.45	-1.11	7.11	4.06

Tabel 18. Jaotuse *S*(1.6, -0.8, 6, -10) parameetri δ hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Eelpool märkasime, et enamasti sobisid parameetrite δ ja β hindamiseks samad argumendid, mis parameetrite α ja γ hindamiseks, sama kehtib ka praegu. Tabelist 18 selgub, et täpseima tulemuse annavad taas argumentide paarid u_1=0.03, u_2=0.09 ja

u_1=0.04, u_2=0.8. Sel juhul saame δ hinnangute keskmiseks $\hat{\delta} = -10$. Parameetri β hindamisel peame kasutama samu argumente. Uurime tulemusi taas mõlema sobinud argumentide paari korral. Tulemused 1000 genereeritud valimi kohta erinevate argumentide paaride korral, kui $\hat{\alpha}$ =1.6, $\hat{\gamma} = 7$ ja $\hat{\delta} = -10$, on esitatud tabelis 19.

u_3	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.04	-3.23	-0.70	-0.78	-0.77	-0.88	-1.09	0.15
0.03	-0.29	-0.63	-0.77	-0.77	-0.87	-1.18	0.19

Tabel 19. Jaotuse *S*(1.6, -0.8, 6, -10) parameetri β hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabeli 19 põhjal saame öelda, et eespool häid tulemusi andnud argumentide paarid sobivad ka parameetri β hindamisel, $\hat{\beta} = -0.8$; β hinnangute keskmine erineb parameetri β õigest väärtusest vähem kui 0.03.

Seega saime jaotuse *S*(1.6, -0.8, 6, -10) parameetrite hinnanguteks $\hat{\alpha}$ =1.6, $\hat{\beta} = -0.8$, $\hat{\gamma} = 7$ ja $\hat{\delta} = -10$.

■

NÄIDE 2.10 Simuleerime stabiilse jaotuse *S*(0.2, 0.5, 100, 150) ja hindame jaotuse parameetreid üldistatud momentide meetodil. Alustame taas parameetri α hindamisest ja kasutame eelpool häid tulemusi andnud argumentide paare. Tulemused 1000 genereeritud valimi kohta erinevate argumentide paaride korral on esitatud tabelis 20.

u_1	u_2	Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.	St.dev
0.03	0.09	0.01	0.15	0.19	0.19	0.23	0.41	0.07
0.04	0.8	0.11	0.17	0.19	0.19	0.22	0.33	0.04

Tabel 20. Jaotuse *S*(0.2, 0.5, 100, 150) parameetri α hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelis 20 saadud tulemused kinnitavad argumentide paari u_1=0.03, u_2=0.09 või u_1=0.04, u_2=0.8 sobivust parameetrite hindamisel. Keskmine hinnang erineb tegelikust vaid 0.01 võrra. Ümardades saame parameetri α hinnanguks õige väärtuse $\hat{\alpha}$ =0.2. Hindame nüüd parameetri γ väärtusi samade argumentide korral. Tulemused 1000 genereeritud valimi kohta erinevate argumentide paaride korral, kui $\hat{\alpha}$ =0.2, esitame tabelis 21.

u_1	u_2	Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.	St.dev
0.03	0.09	35.58	71.97	88.30	96.35	113.00	279.00	36.6
0.04	0.8	31.10	69.50	97.39	98.82	120.50	193.70	33.5

Tabel 21. Jaotuse *S*(0.2, 0.5, 100, 150) parameetri γ hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabel 21 annab parameetri γ jaoks rahuldavad tulemused, ümardades saame γ hinnanguks $\hat{\gamma} = 100$. Jätkame saadud hinnangute abil parameetrite δ ja β hindamist. Tulemused 1000 genereeritud valimi kohta paiknemisparameetri δ hindamisel erinevate argumentide paaride korral, kui $\hat{\alpha}$ =0.2 ja $\hat{\gamma} = 100$, on esitatud tabelis 22.

u_3	u_4	Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.	St.dev
0.03	0.09	-17.42	-14.13	-12.30	14.49	58.22	62.93	35.16
0.04	0.8	0.6984	1.3880	1.6370	1.6020	1.8330	2.6810	0.37
0.001	0.002	49.91	113.30	152.90	153.30	184.40	282.20	52.64
0.5	5	-0.49	-0.19	-0.04	-0.06	0.06	0.41	0.19
0.01	0.02	-219.7	197.0	203.9	179.4	209.9	223.1	98.57

Tabel 22. Jaotuse *S*(0.2, 0.5, 100, 150) parameetri δ hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Näeme tabelist 22, et paiknemisparameetri hindamisel eespool kasutatud argumendid praegu õiget keskmist hinnangut ei anna. Teame, et võime kasutada uusi argumente. Osutub, et päris hea tulemuse annab normaaljaotuse korral sobinud argumentide paar u_3=0.001, u_4=0.002. Kasutame hinnangut $\hat{\delta} = 153$. Jätkame parameetri β hindamisega, kus argumendina peame kasutama u_3=0.001. Tulemused 1000 genereeritud valimi kohta erinevate argumentide paaride korral, kui $\hat{\alpha}$ =0.2, $\hat{\gamma} = 100$ ja $\hat{\delta} = 153$, esitame tabelis 23.

u_3	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.001	0.08	0.41	0.50	0.49	0.58	0.94	0.16

Tabel 23. Jaotuse *S*(0.2, 0.5, 100, 150) parameetri β hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 23 näeme, et parameetri δ hindamiseks sobinud argument annab keskmise tasemel täpsusega 0.1 õige väärtuse ka parameetrile β, $\hat{\beta} = 0.5$. See on hea tulemus, seniste arvutuste kohaselt saab öelda, et kui parameeter δ on õigesti määratud siis õnnestub ka β hindamine.

■

Erinevaid valimeid võrreldes osutub, et juhtudel, kus skaala- või paiknemisparameeter on väga suured (piiri „väga suure“ jaoks on raske öelda, kuid see algab väärtusest suurusjärgus 100) meetod enam hästi ei tööta. Ka viimases näites valimi *Y*~*S*(0.2, 0.5, 100, 150) hindamisel ei õnnestunud parameetri δ määramine nii edukalt kui eelmiste näidete puhul. Mida suuremaks skaala- või paiknemisparameetri väärtused lähevad, seda raskem on hinnata parameetreid. Õigeid tulemusi ei pruugi saada juba parameetri α hindamisel, rääkimata teistest parameetritest. Illustreerime seda järgmise näitega.

NÄIDE 2.11 Simuleerime stabiilse jaotuse *S*(1.3, -1, 3000, -2000) ja hindame parameetrid üldistatud momentide meetodil. Alustame parameetri α hindamisest, kasutades programmi 6 (lisa 1). Tulemused 1000 genereeritud valimi kohta erinevate argumentide paaride korral esitame tabelis 24. Tabelist 24 selgub, et eelnevalt häid tulemusi andnud argumendid ei anna lähedast α hinnangut õigele väärtusele.

Tulemused ei parane proovides uusi argumente. Seega ei ole antud juhul praktiliselt võimalik leida argumente, mis annaksid parameetrile α õige hinnangu.

u_1	u_2	Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.	St.dev
0.03	0.09	-0.44	-0.14	0.01586	0.02933	0.18660	0.51200	0.2
0.001	0.002	-0.93	-0.16	0.02387	0.01752	0.18660	1.14100	0.35
0.5	5	-0.24	-0.05	0.01205	0.01646	0.07727	0.23950	0.1

Tabel 24. Jaotuse $S(1.3, -1, 3000, -2000)$ parameetri α hinnanguid kirjeldavad statistikud.

■

Kokkuvõtteks saame öelda, et hinnangute keskmine annab parameetritele õige hinnangu kui skaala- või paiknemisparameeter on piisavalt väike. „Hea“ valimi korral on nii saadud hinnangute täpsus autori arvates täiesti piisav. Esimene puudus meetodi rakendamisel on tulemuste sõltuvus skaala- ja paiknemisparameetri väärtusest. Teine probleem on õige hinnangu äratundmine. Eelpool nägime, et erinevate argumentide korral andis meetod erinevad tulemused. Kuna me simuleerimisel teadsime õigeid väärtusi, oli kerge otsustada, reaalse andmestiku korral me seda aga ei tea. Nägime, et standardhälve ei ole alati sobiv otsustamiskriteerium, kuna see võib õige hinnanguväärtuse korral olla suurem kui mitteõige korral. Samas selgus, et piisavalt heade jaotuste (väike skaala- ja paiknemisparameeter) korral töötasid hindamisel samad argumendid. Ka standardhälve oli nende argumentide korral siiski suhteliselt väikseim. Seega sai paragrahvi alguses püstitatud eesmärk osaliselt täidetud, see tähendab, et leidsime argumendid, mis annavad erinevate „heade“ valimite puhul üsna täpsed hinnangud. Märgime veel, et eespool toodud näited pole ainsad analüüsitud valimid, leitud argumendid sobisid tunduvalt rohkemate valimite korral, kuid materjali kontsentreerituse mõttes ei ole neid näiteid lisatud. Seega taandub ka õige hinnangu äratundmise probleem hindamisülesande lahendamisele „halbade“ valimite ehk väga suurte skaala– ja paiknemisparameetri väärtuste korral. Kolmas probleem on, et õige hinnangu leidsime seni kui mingi hulga valimite hinnangute keskmise. Tabelitest on näha, et saadud hinnangute miinimumid ja maksimumid võivad keskmisest tunduvalt erineda. Seega reaalsete andmete korral jääb oht, et me ei pruugi saada hinnangut õige parameetri väärtuse lähedale. Kuna reaalse andmestiku korral puudub genereerimisvõimalus, siis tegelikult me saadud hinnanguid usaldada ei saa. Neile probleemidele püüame vastuse leida järgmistes paragrahvides.

2.2.4 *Bootstrap* meetod

Eelmise paragrahvi lõpus kirjeldasime üldistatud momentide meetodiga seotud hindamisprobleeme. Üks probleemidest oli ühe valimi põhjal saadud hinnangute varieeruvus (hinnangud võivad sattuda mitte keskmise, vaid ka miinimumi või maksimumi lähedusse). Selle probleemi ühe võimaliku lahendusena kasutame *bootstrap* meetodit. *Bootstrap* meetod põhineb tagasipanekuga juhuslikul valikul lähtevalimist. Järjestades n-elemendilise valimi võtame sellest juhuslikult tõenäosusega $p=1/n$ elemente, kokku n korda, saades nii uue valimi mahuga n. Uus valim võib sisaldada korduvaid elemente esialgsest valimist. Pärast *bootstrap* meetodil valimi koostamist arvutame sellest meid huvitavate statistikute väärtused, antud juhul parameetrite $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hinnangud. Erinevates allikates on väidetud, et piisav arv uusi valimeid *bootstrap* meetodil on 100 kuni 300 valimit. Seega on meil pärast *bootstrap* meetodil genereeritud valimeid teatud arv parameetrite hinnanguid ja me võime esialgse valimi parameetrite hinnangud leida genereeritud valimite parameetrite hinnangute keskmisena.

Uurime, millise tulemuse saame *bootstrap* meetodiga ühe eespool sobinud argumentide paari u_1=0.03, u_2=0.09 korral. Kuna teised parameetrid on sõltuvad parameetrist α, siis hindame praegu vaid seda parameetrit. Programmi 4 abil genereerime standardsed ($\delta = 0, \gamma = 1$) stabiilsed jaotused valimimahuga 1000, kus muudame parameetreid α ja β. Programmi 8 abil moodustame saadud valimitest *bootstrap* meetodil 100 uut valimit. Tulemused on esitatud tabelis 25, kus esimeses kahes veerus on antud genereeritud jaotuse parameetrid, seejärel argumentide paar ning viimastes veergudes *bootstrap* meetodil 100 valimist saadud α hinnangute keskmine ja standardhälve. Tabelist 29 näeme, et bootstrap meetodiga ei pruugi me rahuldavat hinnangut saada. See tähendab, et tulemused sõltuvad esialgsest valimist. Kui esialgne simuleeritud valim annab üldistatud momentide meetodil tegelikust α väärtusest väga erineva tulemuse, siis ei pruugi ka *bootstrap* meetodil saadud uued valimid seda oluliselt parandada.

α	β	u_1	u_2	Mean($\hat{\alpha}$)	St. dev ($\hat{\alpha}$)
0.3	1	0.03	0.09	0.26	0.06
0.3	0	0.03	0.09	0.32	0.07
0.3	-1	0.03	0.09	0.42	0.06
0.8	1	0.03	0.09	0.92	0.12
0.8	0	0.03	0.09	0.93	0.11
0.8	-1	0.03	0.09	0.63	0.1
1.4	1	0.03	0.09	1.13	0.17
1.4	0	0.03	0.09	1.13	0.18
1.4	-1	0.03	0.09	1.12	0.17
1.8	1	0.03	0.09	1.98	0.19
1.8	0	0.03	0.09	1.99	0.29
1.8	-1	0.03	0.09	1.96	0.28

Tabel 25. Stabiilsest jaotusest S(α, β,1,0) *bootstrap* meetodil saadud parameetri α hinnangud.

Edasi uurime, kas mingite argumentide hulgale *bootstrap* meetodit rakendades saab mõistlikud hinnangud. Üldiselt ei saa *bootstrap* meetodi puhul rääkida üldsobivatest üksikutest argumentidest, kuna üksikvalimid on selleks liiga erinevad. Aga kui proovida mitut argumentide paari, siis võiksid tulemused paraneda. Lisas 3 on esitatud hulk tabeleid, kus erinevate argumentidega on püütud hinnata jaotuste parameetrit α *bootstrap* meetodil. Kõik valimid on simuleeritud kasutades programmi 4 ning seejärel on saadud valimitele rakendatud *bootstrap* meetodit programmiga 7. Lisas 3 esitatud tabelitest on näha, et *bootstrap* meetodi puhul on hinnangud oodatavalt vähemtäpsed kui eelmises paragrahvis. Siiski annavad eespool sobinud argumendid ka *bootstrap* meetodil häid hinnanguid, näiteks tabelid L2, L5, L6. Mainime, et kui $\alpha < 1$, siis sobivad hindamiseks mitmed argumendid, $\alpha > 1$ korral on vaja täpsemaid argumente. Nende tabelite (ja autori poolt lisaks arvutatud tabelite) põhjal sobib argumentidena kasutada näiteks järgmisi arvupaare:

u_1=0.03, u_2=0.09; u_1=0.04, u_2=0.05;

u_1=0.04, u_2=0.08; u_1=0.07, u_2=0.14.

Kui $\alpha > 1$, siis peavad argumendid olema piisavalt väikesed, üks argumentidest vähemalt 10^{-2} järku ning teine argument esimese argumendi mingi kordne või selle lähedane arv.
Kui $\alpha < 1$, siis võib kasutada ka suuremaid argumente, näiteks u_1=0.5, u_2=5 ja teisi samakordse erinevusega argumente, kus esimene argumente on ühest väiksem.

Järgnevalt jätkame simuleeritud valimite hindamist *bootstrap* meetodil, kuid proovime hinnata kõiki parameetreid, kasutades eespool loetletud argumentide paare.

NÄIDE 2.12 Simuleerime programmiga 5 jaotusest S(1.3, 0.5, 6, -10) valimi mahuga 1000. Moodustame *bootstrap* meetodil 200 valimit (programm 7). Alustame parameetri α hindamisest. Esitame tulemused tabelis 26.

u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.03	0.09	1.077	1.254	1.299	1.299	1.348	1.473	0.07
0.04	0.05	0.9421	1.2660	1.3770	1.3670	1.4760	1.7790	0.16
0.07	0.14	1.062	1.158	1.215	1.216	1.264	1.446	0.08
0.04	0.08	1.238	1.379	1.427	1.423	1.473	1.561	0.07

Tabel 26. Stabiilse jaotuse S(1.3, 0.5, 6, -10) parameetri α *bootstrap*–hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Kuigi eespool nägime, et õige hinnangu standardhälve ei pruugi alati olla vähim (sõltub argumentidest), otsustame siiski, et sobiva hinnangu valikukriteeriumiks on standardhälve. Täpseima hinnangu puhul peaks standardhälve olema väikseim. Tabelist 26 näeme, et standardhälbe alusel saame hinnanguteks $\hat{\alpha}$ =1.3 ja $\hat{\alpha}$ =1.4 (standardhälve on sama). Teiste argumentide tulemusi arvestades kaldub hinnang siiski $\hat{\alpha}$ =1.3 poole, sest argumentide u_1=0.07, u_2=0.14 korral saame hinnanguks vaid $\hat{\alpha}$ =1.2. Seega valime hinnanguks $\hat{\alpha}$ =1.3 ning vastavad argumendid on u_1=0.03, u_2=0.09. Hindame nüüd parameetrit γ, kasutades valitud argumente. Programm 7 abil saadud tulemused, kui $\hat{\alpha}$ =1.3, on kirjas tabelis 27.

u_1	u_2	Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.	St.dev
0.03	0.09	6.259	7.260	7.476	7.502	7.808	8.618	0.46

Tabel 27. Jaotuse *S*(1.3, 0.5, 6, -10) parameetri γ *bootstrap*–hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 27 saame skaalaparameetri γ hinnanguks $\hat{\gamma} = 7.5$ tegeliku γ =6 asemel. Seega ei ole hinnang kõige parem. Järgnevalt hindame parameetreid δ, β. Võime kasutada uusi argumente, kuid eespool nägime, et enamasti andsid parameetrite α ja γ korral sobinud argumendid hea tulemuse ka δ, β korral. Samuti lihtsustab selline argumentide valik meetodi kasutamist. Programmi 7 abil saadud tulemused parameetri δ hindamisel, kui $\hat{\alpha}$ =1.3 ja $\hat{\gamma} = 7.5$, on tabelis 28.

u_1	u_2	Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.	St.dev
0.03	0.09	-13.430	-10.780	-9.775	-9.861	-9.021	-7.085	1.24

Tabel 28. Jaotuse *S*(1.3, 0.5, 6, -10) parameetri δ bootstrap-hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabeli 28 põhjal saame hinnanguks päris täpse tulemuse, $\hat{\delta} = -9.9$ tegeliku $\delta = -10$ asemel. Kasutades samu argumente ja leitud hinnanguid $\hat{\alpha}$ =1.3, $\hat{\gamma} = 7.5$ ja $\hat{\delta} = -9.9$, leiame nüüd parameetri β. Programmi 7 abil saadud tulemused on esitatud tabelis 29.

u_1	u_2	Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.	St.dev
0.03	0.09	0.3756	0.4564	0.4873	0.4897	0.5225	0.6075	0.05

Tabel 29. Jaotuse *S*(1.3, 0.5, 6, -10) parameetri β *bootstrap*-hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 29 saame parameetri β jaoks hinnangu, $\hat{\beta} = 0.5,$ mis langeb kokku tegeliku parameetri väärtusega.

Arvutame nüüd hinnangud kasutades programmi 2, ehk leiame hinnangud vaid esialgset valimit kasutades, ilma *bootstrap* meetodita. Sel juhul on argumentide u_1=0.03, u_2=0.09 korral hinnanguteks $\hat{\alpha} = 1.3,$ $\hat{\gamma} = 7.6,$ $\hat{\delta} = -9.9,$ $\hat{\beta} = 0.5$.

■

NÄIDE 2.13 Simuleerime programmi 4 abil jaotusest S(0.8, 0, 1, 0) valimi mahuga 1000. Moodustame *bootstrap* meetodil 200 valimit (programm 7) ja hindame jaotuse parameetreid. Alustame parameetri α hindamisest. Esitame tulemused tabelis 30.

u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.03	0.09	0.68	1.09	1.17	1.16	1.24	1.42	0.11
0.04	0.05	0.68	1.22	1.39	1.41	1.61	2.13	0.29
0.07	0.14	0.69	0.8	0.89	0.88	0.96	1.13	0.11
0.04	0.08	0.69	0.996	1.06	1.07	1.15	1.35	0.12

Tabel 30. Stabiilse jaotuse *S*(0.8, 0, 1, 0) parameetri α *bootstrap*–hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 30 näeme, et standardhälbe alusel saame hinnanguteks $\hat{\alpha}$ =1.2, $\hat{\alpha}$ =1.1 ja $\hat{\alpha}$ =0.9 (standardhälve on sama). Kuna argumentide u_1=0.04, u_2=0.05 korral on standardhälve suurem, siis seda tulemust me ei kasuta. Teiste argumentide korral saadud tulemusi arvestades valime hinnanguks $\hat{\alpha}$ =1.1 ning vastavad argumendid on u_1=0.04, u_2=0.08. Hindame nüüd parameetrit γ, kasutades valitud argumente. Programmi 7 abil saadud tulemused, kui $\hat{\alpha}$ =1.1, on kirjas tabelis 31.

u_1	Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.	St.dev
0.04	1.43	1.86	2.02	2.02	2.18	2.63	0.22

Tabel 31. Jaotuse *S*(0.8, 0, 1, 0) parameetri γ *bootstrap*–hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 31 saame skaalaparameetri γ hinnanguks $\hat{\gamma} = 2$ tegeliku γ =1 asemel. Järgnevalt hindame parameetreid δ, β. Nagu eespool öeldud kasutame meetodi lihtsustamiseks parameetrite δ, β samu argumente, mis parameetrite α ja γ korral. Programmi 7 abil saadud tulemused parameetri δ hindamisel, kui $\hat{\alpha}$ =1.1 ja $\hat{\gamma} = 2$, on tabelis 32.

u_1	u_2	Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.	St.dev
0.04	0.08	-4.89	-0.6	0.71	0.79	2.22	6.60	0.21

Tabel 32. Jaotuse $S(0.8, 0, 1, 0)$ parameetri δ bootstrap-hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabeli 32 põhjal saame hinnanguks $\hat{\delta} = 0.8$ tegeliku $\delta = 0$ asemel. Kasutades samu argumente ja leitud hinnanguid $\hat{\alpha}$ =1.1, $\hat{\gamma} = 2$ ja $\hat{\delta} = 0.8$, leiame nüüd parameetri β. Programm 7 abil saadud tulemused on esitatud tabelis 33.

u_1	Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.	St.dev
0.04	0.01	0.05	0.07	0.07	0.08	0.1	0.02

Tabel 33. Jaotuse $S(0.8, 0, 1, 0)$ parameetri β *bootstrap*-hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 33 saame parameetri β hinnanguks $\hat{\beta} = 0.1$ tegeliku parameetri väärtuse $\hat{\beta} = 0$ asemel. Arvutame nüüd hinnangud kasutades programmi 2, ehk leiame hinnangud vaid esialget valimit kasutades, ilma *bootstrap* meetodita. Sel juhul on argumentide u_1=0.04, u_2=0.08 korral hinnanguteks $\hat{\alpha} = 1.06$, $\hat{\gamma} = 1.88$, $\hat{\delta} = 1.11$, $\hat{\beta} = 0.07$. Näeme, et parameetri γ hinnang on pisut täpsem kui *bootstrap* meetodil, parameetri δ hinnang aga vähemtäpsem.

■

Näited 2.12 ja 2.13 kinnitavad, et *bootstrap* meetod ei pruugi parandada hinnanguid. Tulemused on praktiliselt samad, mis esialgse valmi korral. Siiski on *bootstrap* meetodist abi õige hinnangu väljavalimisel, kuna saame uurida ka hinnangute standardhälvet.

2.2.5 Valimi „taandamine“

Paragrahvi 2.2.3 lõpus kirjeldasime „halbade“ valimite probleemi ehk üldistatud momentide meetodi mittetöötamist valimite korral, millel on suur skaala- või paiknemisparameeter. Üks võimalus probleemi lahendamiseks on valimi „taandamine“ ehk valimielementide jagamine teatud arvuga. Nimelt selgub, et valimielementide jagamisel valimi mediaaniga saab parameetrite hindamiseks taas kasutada üldistatud momentide meetod (esialgse valimi hinnangute saamiseks tuleb taandatud valimi hinnangud taas mediaaniga korrutada). Selgitame seda ideed järgmiste näidete abil.

Edasistes näidetes esitame kirjeldavate statistikutena vaid hinnangute keskmise ja standardhälbe. Hinnangute saamisel kasutame *bootstrap* meetodit.

NÄIDE 2.14. Simuleerime programmiga 4 jaotusest *S*(0.5, 0.2, 1200, 3500) valimi mahuga 1000 ja hindame parameetreid üldistatud momentide meetodil. Uurime kõigepealt valimi kirjeldavaid statistikuid:

Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.
-113800000	2925	3835	651600	6458	795100000

On selge, et paiknemisparameeter ei ole väiksem kui 100, seega on tegemist „halva“ valimiga. Maksimum (miinimum) on antud juhul 10^5 suurusjärku korda suurem kui mediaan, see viitab ka suurele skaalaparameetrile ja $\alpha < 1$. Uurime esmalt parameetri α hinnanguid taandamata valimi korral:

u_1	u_2	Mean	St.dev
0.03	0.09	1.64	2
0.04	0.08	-0.001	0.23
0.07	0.14	-0.8	0.1
0.04	0.05	0.9	0.8

Tabel 34. Stabiilse jaotuse *S*(0.5, 0.2, 1200, 3500) parameetri α *bootstrap*-hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 34 näeme, et eespool sobinud argumendid annavad väga erineva tulemuse. Ka teiste argumentidega parameetrit hinnates ei õnnestunud saada tegelikule väärtusele lähedast hinnangut.

Kasutame nüüd valimi taandamist. Vastavalt eespool toodud kirjeldavatele statistikutele on taandajaks 3835. Uurime järgnevalt teisendatud valimi parameetri α hinnanguid. Programmi 7 abil saadud tulemused esitame tabelis 35.

u_1	u_2	Mean	St.dev
0.03	0.09	0.41	0.09
0.04	0.08	0.58	0.12
0.07	0.14	0.54	0.12
0.04	0.05	0.88	0.33

Tabel 35. Taandatud valimi parameetri α *bootstrap*-hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Vaadates tabeli 35 tulemusi, näeme, et sobivat hinnangut on raske valida, kuna esimese kolme hinnangu puhul on standardhälve praktiliselt sama, kuid hinnangud erinevad. Sellisel juhul võib autori arvates hinnanguna kasutada sobivate hinnangute (hinnangute keskmiste) keskmist, mis praegu oleks 0.5. Seega saame parameetri α hinnanguks $\hat{\alpha} = 0.5$, mis on kooskõlas tegeliku väärtusega $\alpha = 0.5$. Valime parameetri γ hindamiseks argumendid u_1=0.07, u_2=0.14. Programmi 7 abil saadud tulemused, kui $\hat{\alpha} = 1.5$, esitame tabelis 36.

u_1	u_2	Mean	St.dev
0.07	0.14	0.33	0.07

Tabel 36. Taandatud valimi parameetri γ *bootstrap*–hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 36 näeme, et taandatud valimi parameetri γ hinnanguks saame $\hat{\gamma} = 0.33$. Korrutades saadud hinnangu arvuga 3838 saame esialgse valimi hinnanguks $\hat{\gamma} = 1266$ tegeliku $\gamma = 1200$ asemel. See hinnang ei ole nii täpne kui parameetri α puhul, kuid siiski vastuvõetav tulemus. Järgnevalt hindame parameetrit δ. Kasutame hindamisel kõiki eespool väljatoodud argumente. Programmi 7 abil saadud tulemused, kui $\hat{\alpha} = 0.5$ ja $\hat{\gamma} = 0.33$, esitame tabelis 37.

u_3	u_4	Mean	St.dev
0.07	0.14	0.73	0.39
0.03	0.09	0.86	0.4
0.04	0.08	0.2	0.54
0.04	0.05	-1.53	1.88

Tabel 37. Taandatud valimi parameetri δ *bootstrap*–hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 37 selgub, et saadud hinnangud on taas suhteliselt erinevad. Kaks viimast hinnangut võime arvestamata jätta, kuna standardhälve on liiga suur. Esimest kahest valime hinnanguks $\hat{\delta} = 0.86$, kuna hajuvus on võrreldes keskmisega väiksem. Selline hinnang annab esialgse valimi parameetri δ hinnanguks $\hat{\delta} = 3300$ tegeliku $\delta = 3500$ asemel. Kuigi see ei ole päris täpne, ei ole see ka ebarahuldav. Edasi hindame asümmeetriaparameetrit β. Hinnangud argumendi u_1=0.03 korral, kui $\hat{\alpha} = 0.5$, $\hat{\gamma} = 0.33$, $\hat{\delta} = 0.86$ esitame tabelis 38.

u_3	Mean	St.dev
0.03	0.18	0.09

Tabel 38. Taandatud valimi parameetri β *bootstrap*–hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 38 näeme, et sümmeetriakordaja β hinnanguks on $\hat{\beta} = 0.2$, mis on kooskõlas tegeliku väärtusega $\beta = 0.2$. Selline tulemus on väga hea.

Seega saime üldistatud momentide meetodil jaotuse *S*(0.5, 0.2, 1200, 3500) parameetrite hinnanguks $\alpha = 0.5, \beta = 0.2, \gamma = 1266, \delta = 3300$. Selliste tulemustega võib rahule jääda.

■

NÄIDE 2.15. Simuleerime programmiga 4 jaotusest *S*~(1.4, -0.5, 10000, 38000) valimi mahuga 1000 ja hindame jaotuse parameetreid üldistatud momentide meetodil. Uurime saadud valimi kirjeldavaid statistikuid.

Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.
-1387000	30590	43730	38490	53900	1946000

Valimi kirjeldusest võime järeldada, et lokatsiooniparameeter ei ole väiksem kui 100, samuti on valimi ulatus väga suur, mis viitab ka suurele skaalaparameetrile. Samas ei ole erinevus mediaani ja maksimumi vahel nii suur kui eelmises näites, mis vihjab $\alpha > 1$. Valimi mediaani ja maksimumi (miinimumi) erinevus on suurusjärku 10. Uurime esmalt taandamata valimi parameetri α hinnanguid, esitame need tabelis 39.

u_1	u_2	Mean	St.dev
0.03	0.09	0.17	0.19
0.07	0.14	0.01	0.35
0.04	0.08	-0.14	0.34
0.04	0.05	-0.92	1.1

Tabel 39. Stabiilse jaotuse *S*(1.4, -0.5, 10000, 38000) parameetri α *bootstrap*-hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 39 näeme, et eespool sobinud argumendid ei anna õiget hinnangut. Ka teiste argumentidega parameetrit hinnates ei õnnestunud saada tegelikule väärtusele lähedast hinnangut.

Läheme üle taandatud valimile. Vastavalt taandamise eeskirjale jagame valimi arvuga 43730. Taandatud valimist programmi 7 abil saadud parameetri α hinnangud on esitatud tabelis 40. Tabelist 40 näeme, et ka taandatud valimi puhul ei saa me erinevate argumentide korral samasid hinnanguid, kuid siiski tunduvalt täpsemad, kui taandamata valimi puhul. Väikseim standardhälve on hinnangul $\hat{\alpha} = 1.64$, kuid ka hinnangu $\hat{\alpha} = 1.45$ standardhälve on praktiliselt sama (ümardamisel on mõlemad standardhälbed 0.2). Sellisel juhul peame otsustama, kumb hinnang valida. Taas võib kasutada kõigi sobivate hinnangute keskmist, mis praegusel juhul annab hinnanguks $\hat{\alpha} = 1.5$ tegeliku $\alpha = 1.4$ asemel.

u_1	u_2	Mean	St.dev
0.03	0.09	1.45	0.23
0.04	0.08	1.44	0.26
0.07	0.14	1.61	0.58
0.04	0.05	1.64	0.15

Tabel 40. Taandatud valimist parameetri α *bootstrap*–hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Kasutades programmi 7, hindame järgnevalt parameetrit γ. Argumentidena kasutame mõlemaid eespool kasutatud argumentide paare. Tulemused esitame tabelis 41, kus $\hat{\alpha} = 1.5$.

u_1	u_2	Mean	St.dev
0.03	0.09	0.46	0.16
0.04	0.05	0.49	0.17

Tabel 41. Taandatud valimist parameetri γ *Bootstrap*–hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 40 saame parameetri γ hinnanguks $\hat{\gamma} = 3.1$. Korrutades saadud hinnangu esialgse valimi mediaaniga saame esialgse valimi hinnanguks $\hat{\gamma} = 20116$ tegeliku $\gamma = 10000$ asemel. Selline hinnang on ebatäpne. Uurime nüüd parameetri δ hinnangut, kui $\hat{\alpha} = 1.5$ ja $\hat{\gamma} = 0.46$. Programm 7 abil saadud tulemused esitame tabelis 42. Tabelist 42 näeme, et parameetri δ hinnangud on sarnased. Väikseim hajuvus on hinnangul $\hat{\delta} = 0.78$, kuid samas annavad teised argumendid praktiliselt sama standardhälbega (ümardamisel on see 0.1) tulemuseks ligikaudu $\hat{\delta} = 0.9$. Seega taas peame otsustama, milline hinnang valida. Kuna standardhälbe erinevus on väga väike, siis valime esinenud hinnangu $\hat{\delta} = 0.87$, mis on tulemuseks 2 juhul. Korrutades saadud hinnangu esialgse valimi mediaaniga saame esialgse valimi hinnanguks $\hat{\delta} = 38045$ tegeliku $\delta = 38000$ asemel. Seega on saadud hinnang päris täpne (kui $\alpha > 1$, siis $EX = \hat{\delta}$ ja paiknemisparameetri hinnangu headust saab uurida ka võrreldes valimi keskmisega, antud juhul on see $EX = 38490$, seega on hinnangud omavahel kooskõlas).

u_3	u_4	Mean	St.dev
0.03	0.09	0.87	0.12
0.04	0.05	0.89	0.12
0.04	0.08	0.78	0.08
0.07	0.14	0.87	0.12

Tabel 42. Taandatud valimist parameetri δ *Bootstrap*–hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Viimasena hindame parameetrit β kui $\hat{\alpha}=1.5$, $\hat{\gamma}=0.46$, $\hat{\delta}=0.87$. Argumentideks kasutame u_3=0.03 ja u_3=0.07. Selgub, et saadud hinnangud ei ole sugugi head, standardhälve on väga suur. Me teame, et võime argumentidena kasutada ka u_4=0.09 ja u_4=0.14 (vt. valemi 2.12 avaldamine, lk 25). Kõik tulemused esitame tabelis 43.

u_3	Mean	St.dev
0.03	-0.09	1.1
0.07	0.06	0.41
0.14	-0.3	0.2
0.09	-0.07	0.3

Tabel 43. Taandatud valimist parameetri β *Bootstrap*–hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 43 näeme, et ainus hinnang, millel on mõistlik standardhälve, on $\hat{\beta}=-0.3$. Seega saame parameetri β hinnanguks $\hat{\beta}=-0.3$ tegeliku väärtuse $\beta=-0.5$ asemel. See ei ole halb tulemus, kuid selle saamiseks kasutasime „kõrvalteid“.
Seega saime jaotuse *S*(1.4, -0.5, 10000, 38000) parameetrite hinnanguteks $\hat{\alpha}=1.5, \hat{\beta}=-0.3$, $\hat{\gamma}=20116$, $\hat{\delta}=38045$.

■

Toodud näidete põhjal võime öelda, et suurte skaala- ja paiknemisparameetri väärtustega valimi korral saame kasutada valmi „taandamist“ ning sel juhul on üldistatud momentide meetodil võimalik parameetrite hinnangud leida.

2.3 Kahjukindlustuse andmestik

Proovime üldistatud momentide meetodil hinnata kahjukindlustuse andmeid. Tegemist on Eesti Liikluskindlustusfondist pärit andmetega. Valimis on kokku 1023 kahju. Lisas 4 on esitatud kahjude histogrammid. Histogrammidelt on näha, et tegemist ei ole normaaljaotusega. Valim on paremale kaldu ning raske sabaga. See viitab täiesti paremale kaldu stabiilsele jaotusele $(\alpha < 1, \beta = 1)$. Uurime valimi kirjeldavaid statistikuid:

Min	1. Qu.	Median	Mean	3. Qu.	Max.
0	3632	7250	13580	13680	320000

Kirjeldavate statistikute ja histogrammi põhjal saame öelda, et tegemist „halva“ valimiga. Valimi mediaan on maksimumist ligikaudu 40 korda suurem. See viitab $\alpha > 1$, mis on vastuolus täiesti paremale kaldu jaotuse pildiga. Vastavalt kirjeldavatele statistikutele peame kasutama valimi taandamist. Taandajaks on mediaan ehk arv 7250. Uurime taandatud kahjuandmete hinnanguid üldistatud momentide meetodil, kasutades *bootstrap* meetodit. Programmi 7 abil saadud parameetri α hinnangud esitame tabelis 44.

u_1	u_2	Mean	St.dev
0.03	0.09	1.78	0.11
0.04	0.08	1.74	0.12
0.07	0.14	1.51	0.21
0.04	0.05	1.83	0.07

Tabel 44. Taandatud kahjuandmete parameetri α hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 44 näeme, et α hinnangud on sarnased, kõikide hinnangute puhul on $\alpha > 1.5$. Tulemustest valime väikseima standardhälbe põhjal $\hat{\alpha} = 1.8$, kus argumentideks olid u_1=0.04, u_2=0.05. Ka teised hinnangud ei ole oluliselt erinevad. Et võrrelda võimalike erinevusi γ hindamisel kasutame ka argumente u_1=0.03, u_2=0.09, kus hinnanguks on samuti $\hat{\alpha} = 1.8$. Programmi 7 abil saadud γ *bootstrap*-hinnangud esitame tabelis 45.

u_1	u_2	Mean	St.dev
0.03	0.09	1.53	0.19
0.04	0.05	1.59	0.18

Tabel 45. Taandatud kahjuandmete parameetri γ hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Vaadates tabelit, näeme, et parameetrite hinnangud on sarnased ning ka standardhälbed praktiliselt samad. Valides pisut väiksema standardhälbega hinnangu saame tabelist 45 saame parameetri γ hinnanguks $\hat{\gamma} = 1.59$. Korrutades saadud hinnangu arvuga 7250 saame esialgse kahjuandmete valimi skaalaparameetri hinnanguks $\hat{\gamma} = 11527$ (juhul $\hat{\gamma} = 1.53$ oleks esialgse valimi skaalaparameetri hinnanguks $\hat{\gamma} = 11092$). Hindame nüüd parameetrit δ kasutades argumente kõiki argumente ning väärtusi $\hat{\alpha} = 1.8$ ja $\hat{\gamma} = 1.59$. Programm 7 abil saadud *bootstrap*-hinnangud esitame tabelis 48.

u_3	u_4	Mean	St.dev
0.03	0.09	1.94	0.11
0.04	0.05	1.95	0.12
0.07	0.14	1.92	0.12
0.04	0.08	1.96	0.11

Tabel 47. Taandatud valimi parameetri δ *bootstrap*–hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Taas oleme olukorras, kus kõikide hinnangute standardhälbed on praktiliselt samad, kuid hinnangud pisut erinevad. Valime paiknemisparameetri hinnanguks hinnangute keskmise, mis oleks $\hat{\delta} = 1.9425$. Korrutades selle kahjuandmete mediaaniga 7250 saame kahjuandmete paiknemisparameetri hinnanguks $\hat{\delta} = 14083$. Selline tulemus on kooskõlas ka kahjude keskmisega (võime võrrelda, sest $\hat{\alpha} > 1$). Jätkame asümmeetriaparameetri β hindamisega, valides argumentideks kõik argumendid, kuna

δ hindamisel võime samuti kasutada kõiki toodud argumente. Programmi 7 abil saadud tulemused, kui $\hat{\alpha} = 1.8$, $\hat{\gamma} = 1.59$ ja $\hat{\delta} = 1.9425$ esitame tabelis 48.

u3	Mean	St.dev
0.03	2	1.9
0.09	2.1	0.64
0.07	1.95	0.82
0.14	2	0.38
0.04	2.1	1.49
0.08	2.1	0.61
0.05	2	1.1

Tabel 48. Taandatud valimi parameetri β *bootstrap*–hinnanguid kirjeldavad statistikud.

Tabelist 48 saame parameetri β hinnanguks $\hat{\beta} = 2$. See ei ole kooskõlas β piiridega, kuna β väärtus peab olema väiksem kui 1. Kuna kahjude histogrammilt on näha, et jaotus on täiesti paremale kaldu ehk . Samas ei ole kahjude ulatus (hajuvus) nii suur, et saaksime hinnanguks $\alpha < 1$. See tekitabki asümmeetriaparameetri hindamisel vastuolu ja annab liiga suure hinnanguväärtuse (kalde). Autori arvates võime antud juhul valida $\hat{\beta} = 1$. Tekkinud viga või vastuolu väheneks kahjude arvu suurendamisel, kus kahjuandmetes esineks ka suuremaid kahjusid.

Kokkuvõttes saime üldistatud momentide meetodil kahjude jaotuseks *S*~(1.8, 1, 11527, 14083).

Lisas 5 esitame jaotusest *S*~(1.8, 1, 11527, 14083) simuleeritud valimi histogrammid, valimimahuga 1023. On selge, et pilt ei ole vastav kahjuandmetele, sest saadud valimis on ka negatiivsed väärtused (kuna $\alpha > 1$, ei saa valim olla täiesti paremale kaldu). Vahemikus 0 kuni 50000 on saadud valimi ja kahjude histogrammid samuti erinevad, kuna $\hat{\alpha} = 1.8$, siis sarnaneb saadud jaotuse kuju normaaljaotusele. Valimite parempoolsed sabad on sarnased.

Summary

The estimation of stable distribution parameters

Annika Krutto

Stable distributions are a rich class of probability distributions that have many mathematically intriguing properties. The class was characterized by Paul Levy in the 1920's. Well known cases are normal distribution and Cauchy distribution. General stable distributions have four parameters. They have been proposed as models for many types of physical and economic systems. The lack of closed form expression for the pdf of general stable distributions makes the estimation of stable distribution parameters complicated. There are multiple parameterizations for stable laws but none of them is flawless.

This paper considers the estimation of stable distributions assuming, that the empirical and theoretical characteristic functions are equal for accord arguments. The method is called method of moments type estimators. The problem for practical using is to find the proper arguments. In this work we focus on finding this proper arguments.

The paper is divided into two chapters and has five appendix. Chapter one describes basic properties of stable distributions. Chapter two considers method of moments type estimators, introduces the simulation of stable random variables and gives a lot of practical examples.

The results of this work are the theoretical expression for the method of moments type estimators and supporting rules for practical using.

LISA 1. Programmid

Programm 1. Programm valemite (2.20) ja (2.21) põhjal hinnangute leidmiseks, kus *tunnus* on uuritav valim valimimahuga n. Suurused v ja l on vastavalt funktsioonid $v(u)$ ja $l(u)$, suurused k ja s vastavalt funktsioonides $v(u)$ ja $l(u)$ esinevad koosiinus- ja siinusfunktsioonid. Argumendi u väärtus muudetakse sobivalt enne programmi käivitamist.

```
v_0
l_0
k_0
s_0
  for (j in 1:n) {
  k_k+cos(u*tunnus[j])
  s_s+sin(u*tunnus[j])}
v_-log(1/n)-log(sqrt(k^2+s^2))
l_atan(s/k)
gamma_sqrt(v)/u
delta_l/u
```

Programm 2. Programm valemite (2.20) ja (2.21) põhjal hinnangute leidmiseks, kus *tunnus* on uuritav andmestik valimimahuga n. Suurused v ja l on vastavalt funktsioonid $v(u)$ ja $l(u)$, suurused k ja s vastavalt funktsioonides $v(u)$ ja $l(u)$ esinevad koosiinus- ja siinusfunktsioonid. Argumentide u_1 ja u_2 väärtus muudetakse sobivalt enne programmi käivitamist.

```
v_0
l_0
for (i in 1:2) {
 k_0
 s_0
  for (j in 1:n) {
  k_k+cos(u[i]*X[j])
  s_s+sin(u[i]*X[j])}
v[i]_-log(1/n)-log(sqrt(k^2+s^2))
l[i]_atan(s/k)}
alpha_log(v[1]/v[2])/log(u[1]/u[2])

gamma_exp((log(u[1])*log(v[2])- log(u[2])*log(v[1]))/log(v[1]/v[2]))
delta_((u[2]^alpha)*l[1]-(u[1]^alpha)*l[2])/((u[2]^alpha)*u[1]-(u[1]^alpha)*u[2])
beeta_(l[1]-delta*u[1])/tan(pi*alpha/2)/((gamma*u[1])^alpha)
```

Programm 3. Programm hinnangute leidmiseks, genereerides normaaljaotust $N(d,g)$ 100 korda. Hindamiseks kasutame valemeid (2.20) ja (2.21), kus *tunnus* on uuritav valim mahuga *n*. Suurused *v* ja *l* on vastavalt funktsioonid $v(u)$ ja $l(u)$, suurused *k* ja *s* vastavalt funktsioonides $v(u)$ ja $l(u)$ esinevad koosiinus- ja siinusfunktsioonid. Argumentide u_1 ja u_2 väärtus muudetakse sobivalt enne programmi käivitamist ning parameetrite väärtused *d, g* anname ette enne käivitamist. Lisaks sellele on programmis esitatud avaldised ka γ,δ leidmiseks (programmi lõpus), mida kasutame hiljem, kui nende arvutamiseks vajalikud parameetrid on hinnatud.

```
for (r in 1:100) {
X_rnorm(n, d, g)
v_0
l_0
for (i in 1:2) {
 k_0
 s_0
   for (j in 1:n) {
   k_k+cos(u[i]*X[j])
   s_s+sin(u[i]*X[j])}
v[i]_-log(1/n)-log(sqrt(k^2+s^2))
l[i]_atan(s/k)}
alpha[r]_log(v[1]/v[2])/log(u[1]/u[2])}


gamma[r]_exp((log(u[1])*log(v[2])- log(u[2])*log(v[1]))/log(v[1]/v[2]))}
delta[r]_((u[2]^alpha])*l[1]-(u[1]^alpha)*l[2])/((u[2]^alpha)*u[1]-(u[1]^alpha)*u[2])}
```

Programm 4. Programm stabiilse jaotuse *X~S*(*a*, *b*, 1, 0) valimimahuga *n* genereerimiseks.

```
V_runif(n,-pi/2,pi/2)
W_rexp(n,1)
S_(1+(b*tan(pi*a/2))^2)^(1/2*a)
B_atan(b*tan(pi*a/2))/a
X_S*sin(a*(V+B)) /(cos(V))^(1/a)*(cos(V-a*(V+B))/W)^((1-a)/a)
```

Programm 5. Programm stabiilse jaotuse *Y~S*(*a*, *b*, *g*, *d*) valimimahuga *n* genereerimiseks.

```
V_runif(n,-pi/2,pi/2)
W_rexp(n,1)
S_(1+(b*tan(pi*a/2))^2)^(1/2*a)
B_atan(b*tan(pi*a/2))/a
X_S*sin(a*(V+B)) /(cos(V))^(1/a)*(cos(V-a*(V+B))/W)^((1-a)/a)
Y_g*X+d
```

Programm 6. Programm standardse stabiilse jaotusega *Y~S*(*a*, *b*, *g*, *d*) valimi hinnangute leidmiseks, genereerides sama jaotusega valimeid 100 korda. Parameetrid *a*, *b*, *g*, *d* ja valmimahu *n* anname ette enne käivitamist, samuti argumendid u_1, u_2. Suurused *v* ja *l* on vastavalt funktsioonid *v*(*u*) ja *l*(*u*), suurused *k* ja *s* vastavalt funktsioonides *v*(*u*) ja *l*(*u*) esinevad koosiinus- ja siinusfunktsioonid. Lisaks sellele on programmis esitatud avaldised ka γ, δ, β leidmiseks (programmi lõpus), mida kasutame hiljem, kui nende arvutamiseks vajalikud parameetrid on hinnatud. Suurus *genarv* on genereeritavate valimite arv, mis tuleb enne programmi käivitamist ette anda.

```
for (r in 1:genarv) {
V_runif(n,-pi/2,pi/2)
W_rexp(n,1)
S_(1+(b*tan(pi*a/2))^2)^(1/2*a)
B_atan(b*tan(pi*a/2))/a
X_S*sin(a*(V+B)) /(cos(V))^(1/a)*(cos(V-a*(V+B))/W)^((1-a)/a)
Y_g*X+d
v_0
l_0
for (i in 1:2) {
 k_0
 s_0
   for (j in 1:n) {
   k_k+cos(u[i]*Y[j])
   s_s+sin(u[i]*Y[j])}
v[i]_-log(1/n)-log(sqrt(k^2+s^2))
l[i]_atan(s/k)}
alpha[r]_log(v[1]/v[2])/log(u[1]/u[2])}


gamma[r]_exp((log(u[1])*log(v[2])- log(u[2])*log(v[1]))/log(v[1]/v[2]))}
beeta1[r]_(l[1]-delta*u[1])/tan(pi*alpha/2)/((gamma*u[1])^alpha)}
```

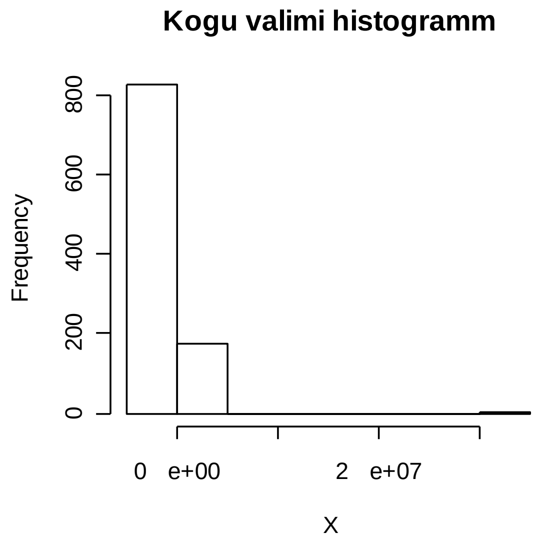
```
delta1[r]_((u[2]^alpha)*l[1]-(u[1]^alpha)*l[2])/((u[2]^alpha)*u[1]-(u[1]^alpha)*u[2])}
```

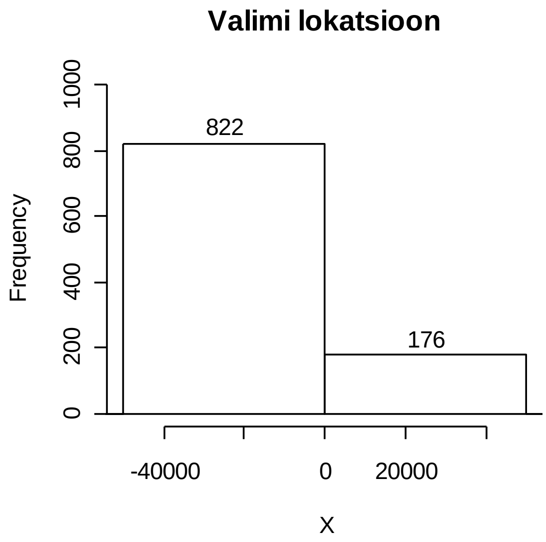
Programm 7. Valimist *X*, valimimahuga *n*, *Bootstrap* meetodil 200 juhusliku valimi saamine ja saadud valmite parameetrite hindamine. Ette tuleb anda valmimaht n ja argumendid u_1, u_2. Suurused *v* ja *l* on vastavalt funktsioonid $v(u)$ ja $l(u)$, suurused *k* ja *s* vastavalt funktsioonides $v(u)$ ja $l(u)$ esinevad koosiinus- ja siinusfunktsioonid. Lisaks sellele on programmis esitatud avaldised ka γ, δ, β hinnangute leidmiseks (programmi lõpus), mida kasutame hiljem, kui nende arvutamiseks vajalikud parameetrid on hinnatud.

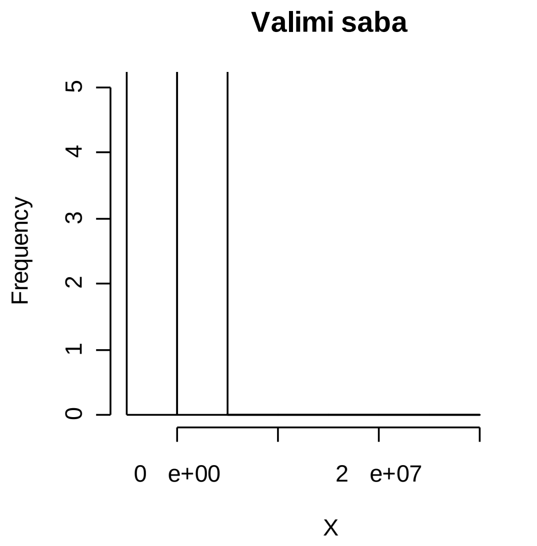
```
for (r in 1:200) {
 t_runif(n, 1/n,1)
 for (i in 1:n) {
 a_t[i]%/%(1/n)
 uus[i]_X[a]}
 v_0
 l_0
 for (j  in 1:2) {
  k_0
  s_0
    for (m  in 1:n) {
    k_k+cos(u[j]*uus[m])
    s_s+sin(u[j]*uus[m])}
 v[j]_-log(1/n)-log(sqrt(k^2+s^2))
 l[j]_atan(s/k)}
alpha[r]_log(v[1]/v[2])/log(u[1]/u[2])}

gamma[r]_exp((log(u[1])*log(v[2])- log(u[2])*log(v[1]))/log(v[1]/v[2]))}
beeta1[r]_(l[1]-delta*u[1])/tan(pi*alpha/2)/((gamma*u[1])^alpha)}
delta1[r]_((u[2]^alpha)*l[1]-(u[1]^alpha)*l[2])/((u[2]^alpha)*u[1]-(u[1]^alpha)*u[2])}
```

LISA 2. Näited simuleeritud stabiilsetest jaotustest

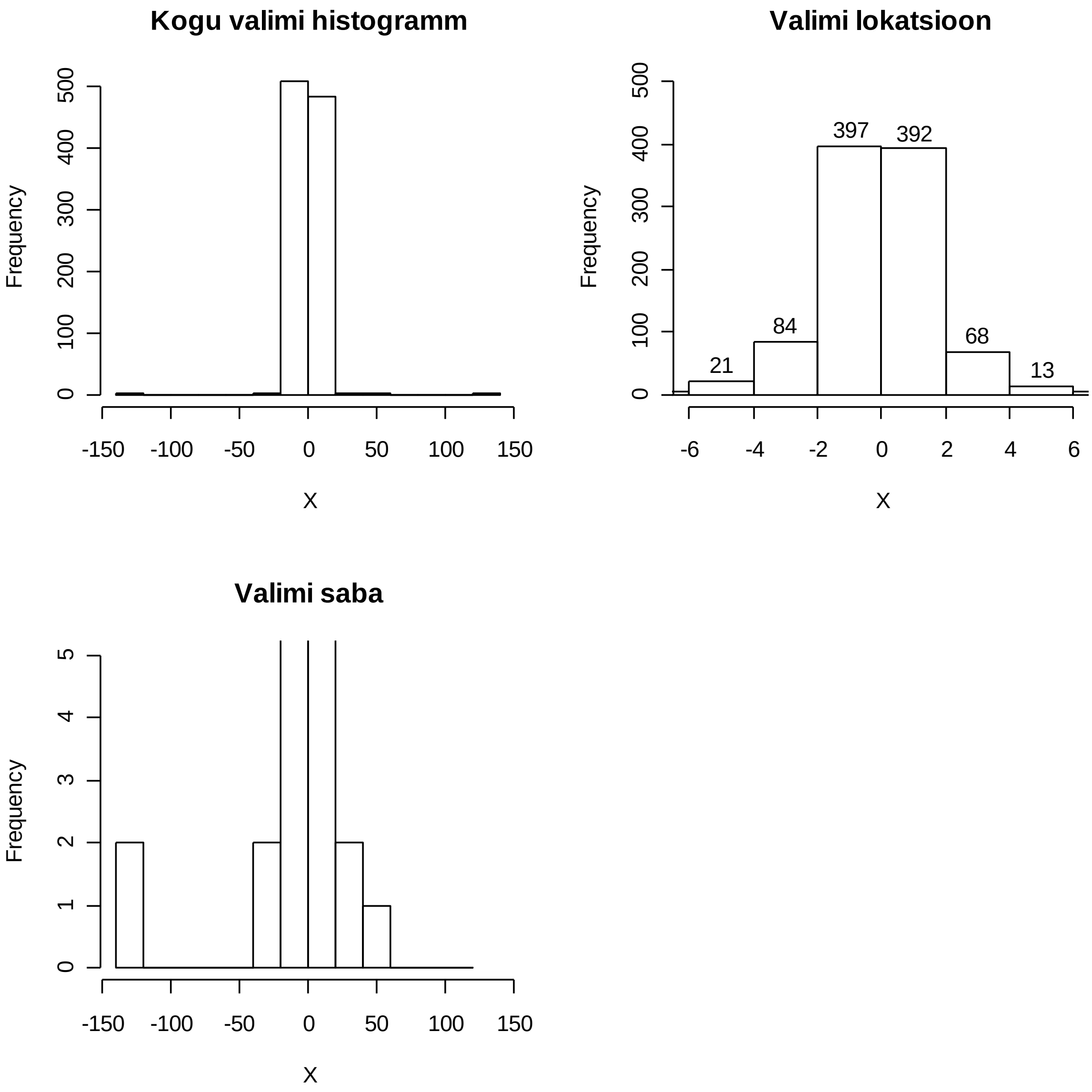
Graafik 1. Jaotusest $S(0.5,1,1,0)$ simuleeritud juhusliku valimi X histogrammid, valimimaht n=1000.







Graafik 1. Jaotusest $S(1.5,1,1,0)$ simuleeritud juhusliku valimi X histogrammid, valimimaht n=1000.



LISA 3. Üldistatud momentide meetodil parameetri α *bootstrap*-hinnangud

u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.03	0.09	0.92	1.26	1.46	1.48	1.73	1.95	0.27
0.5	0.5	0.86	0.92	0.98	0.97	1.01	1.20	0.07
0.07	0.04	1.91	1.96	1.99	2	2.03	2.18	0.05
0.04	1.2	1.60	1.76	1.75	1.75	1.77	1.87	0.05
0.03	1.5	1.31	1.45	1.52	1.54	1.62	1.83	0.11

Tabel L1. Stabiilsest jaotusest $S(1.7, 0.8, 1, 0)$ *bootstrap* meetodil tekitatud valimite parameetri α hinnangud. Esialgse valimi maht on 1000, uusi genereerisime valimeid 100.

u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.03	0.09	0.35	0.50	0.56	0.55	0.61	0.72	0.07
0.1	0.2	0.33	0.48	0.52	0.52	0.57	0.74	0.07
0.2	2.0	0.36	0.49	0.52	0.52	0.55	0.73	0.05
0.4	4.0	0.32	0.45	0.48	0.48	0.52	0.69	0.06
0.5	5.0	0.33	0.46	0.50	0.51	0.55	0.74	0.06
0.6	1.2	0.21	0.55	0.63	0.63	0.72	1.03	0.12
0.6	6.0	0.34	0.50	0.55	0.56	0.60	0.91	0.08
0.7	7.0	0.31	0.46	0.51	0.52	0.56	0.92	0.08
0.9	9.0	0.32	0.50	0.56	0.57	0.62	0.87	0.09

Tabel L2. Stabiilsest jaotusest $S(0.5, 0, 1, 0)$ *bootstrap* meetodil tekitatud valimite parameetri α hinnangud. Esialgse valimi maht on 1000, uusi genereerisime valimeid 100.

u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.5	5	0.43	0.55	0.58	0.59	0.62	0.76	0.05
0.1	10	0.44	0.50	0.52	0.52	0.54	0.64	0.03
0.6	6	0.35	0.46	0.49	0.49	0.52	0.67	0.04
0.7	2.1	0.40	0.55	0.60	0.60	0.65	0.79	0.07
0.4	4	0.41	0.51	0.53	0.54	0.56	0.66	0.04
0.6	1.2	0.28	0.53	0.58	0.58	0.64	0.85	0.09
0.5	2.5	0.46	0.57	0.60	0.60	0.63	0.82	0.05
0.4	2.8	0.39	0.53	0.56	0.56	0.59	0.71	0.04
0.4	1.6	0.45	0.60	0.64	0.64	0.67	0.81	0.05

Tabel L3. Stabiilsest jaotusest $S(0.6, 0.2, 1, 0)$ *bootstrap* meetodil tekitatud valimite parameetri α hinnangud. Esialgse valimi maht on 1000, uusi genereerisime valimeid 100.

u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.5	5	0.14	0.23	0.26	0.26	0.28	0.37	0.04
0.5	2.5	0.09	0.22	0.25	0.25	0.28	0.38	0.05
0.4	2.8	0.16	0.27	0.30	0.29	0.32	0.41	0.04
0.5	3.5	0.11	0.20	0.23	0.23	0.25	0.36	0.05
0.3	3	0.20	0.28	0.31	0.31	0.33	0.40	0.03
0.7	4.9	0.16	0.26	0.29	0.29	0.31	0.41	0.04

Tabel L4. Stabiilsest jaotusest $S(0.3, 0.5, 1, 0)$ *bootstrap* meetodil tekitatud valimite parameetri α hinnangud. Esialgse valimi maht on 1000, uusi genereerisime valimeid 100.

u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.5	5	0.70	0.82	0.86	0.86	0.89	1.08	0.06
0.4	2.8	0.72	0.79	0.82	0.82	0.85	0.94	0.04
0.3	2.1	0.77	0.85	0.88	0.88	0.91	1.00	0.05
0.5	2.5	0.72	0.79	0.82	0.82	0.86	0.94	0.05
0.7	4.9	0.70	0.81	0.86	0.87	0.91	1.22	0.08
0.8	1.6	0.55	0.83	0.88	0.88	0.94	1.13	0.10
0.8	8	0.59	0.72	0.77	0.77	0.82	0.95	0.07

Tabel L5. Stabiilsest jaotusest $S(0.8, -0.5, 1, 0)$ *bootstrap* meetodil tekitatud valimite parameetri α hinnangud. Esialgse valimi maht on 1000, uusi genereerisime valimeid 100.

u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.5	5	0.90	1.01	1.05	1.06	1.11	1.28	0.08
0.8	8	0.53	0.63	0.67	0.69	0.74	0.93	0.07
1.5	15	-0.08	0.06	0.12	0.12	0.18	0.40	0.09
0.001	0.002	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	0.00
0.05	0.06	1.30	1.67	1.72	1.75	1.93	1.99	0.18
0.05	0.5	1.44	1.56	1.67	1.66	1.76	1.90	0.11
0.01	0.02	1.95	1.97	1.98	1.98	1.99	2.00	0.01
0.01	0.05	1.85	1.89	1.92	1.93	1.98	2.00	0.04
0.03	0.09	1.36	1.71	1.74	1.78	1.94	1.99	0.16
0.04	0.07	1.45	1.62	1.74	1.76	1.94	1.98	0.16
0.04	0.05	1.60	1.73	1.80	1.82	1.95	1.99	0.10
0.04	1.2	1.55	1.69	1.73	1.74	1.80	1.94	0.08

Tabel L6. Stabiilse jaotusega $S(1.8, 0.5, 1, 0)$ valimist *Bootstrap* meetodil tekitatud valimite põhjal saadud parameetri α hinnangud. Valimimaht on 1000, uusi valimeid 100.

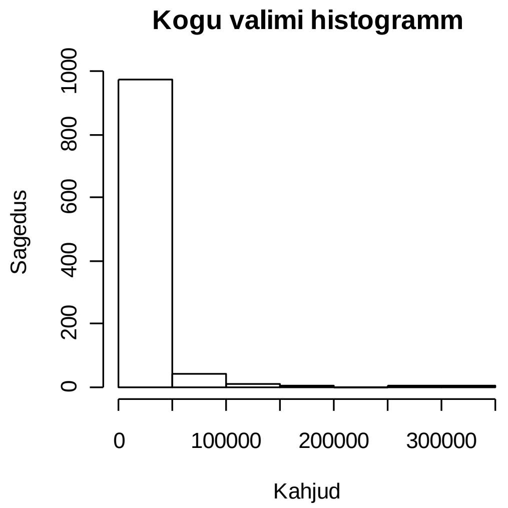
u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.5	5	0.81	0.93	0.99	0.99	1.04	1.16	0.07
0.9	9	0.41	0.52	0.57	0.58	0.63	0.82	0.08
0.4	2.8	1.11	1.25	1.29	1.30	1.36	1.60	0.09
0.05	0.06	-0.09	0.96	1.33	1.32	1.86	1.95	0.52
0.03	0.09	0.83	1.33	1.52	1.54	1.82	1.95	0.26
0.04	0.07	0.13	1.13	1.40	1.43	1.87	1.98	0.44
0.04	1.2	1.23	1.42	1.47	1.48	1.54	1.69	0.09
0.03	1.5	1.26	1.42	1.49	1.49	1.57	1.68	0.09

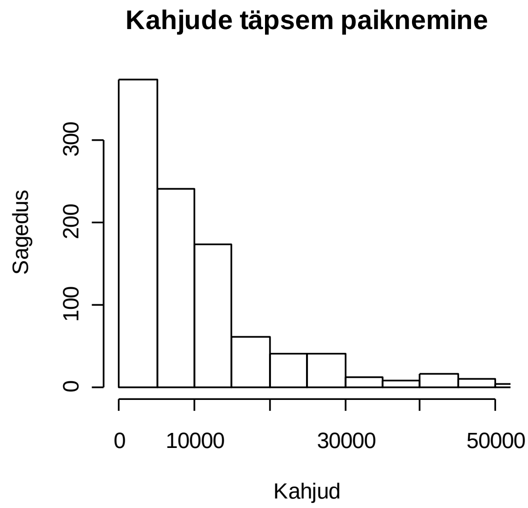
Tabel L7. Stabiilse jaotusega $S(1.5, 0, 1, 0)$ valimist *Bootstrap* meetodil tekitatud valimite põhjal saadud parameetri α hinnangud. Valimimaht on 1000, uusi valimeid 100.

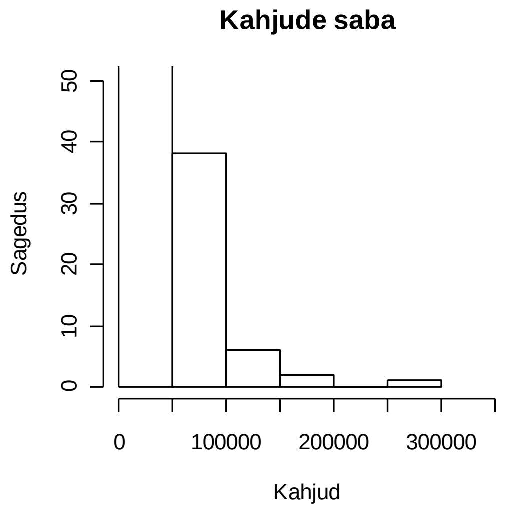
u_1	u_2	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	St.dev
0.03	0.09	1.53	1.67	1.73	1.72	1.78	1.95	0.08
0.04	0.8	1.18	1.33	1.37	1.37	1.42	1.56	0.07
0.04	0.05	-0.48	1.20	1.45	1.43	1.81	2.23	0.48
0.04	1.6	1.19	1.30	1.35	1.34	1.38	1.54	0.06
0.04	2	1.17	1.29	1.32	1.32	1.36	1.48	0.06
0.04	2.4	1.15	1.27	1.29	1.30	1.34	1.47	0.06
0.04	3.2	1.10	1.20	1.25	1.25	1.29	1.41	0.06

Tabel L8. Stabiilse jaotusega $S(1.3, 0.5, 1, 0)$ valimist *Bootstrap* meetodil saadud 200 valimi parameetri α hinnangute kirjeldavad statistikud erinevate argumentide korral.

LISA 4. Kahjuandmeid kirjeldavad histogrammid

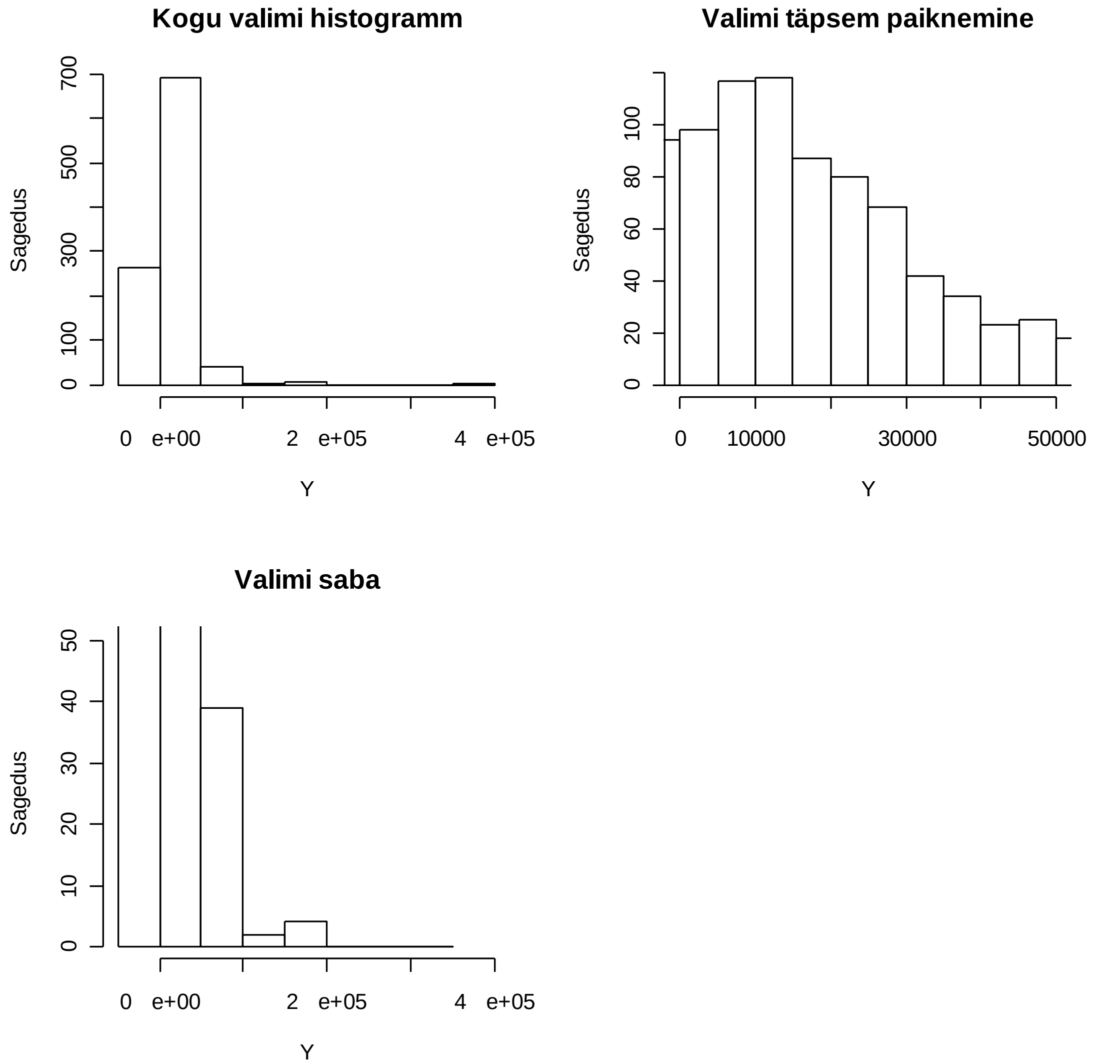






LISA 5. Kahjuandmetest hinnatud stabiilne jaotus

Graafik 1. Jaotusest *S*~(1.8, 1, 11527,14083) simuleeritud juhuliku valimi *Y* histogrammid, valmimaht *n*=1023.



Kasutatud kirjandus

1. Bates, S., McLaughlin S., (1997). The estimation of stable distribution parameters. In *IEEE Signal Processing Workshop on Higher-Order Statistics*.

2. Chambers, J.M., Mallows, C.L., Stuck, B.W. (1976). A method for simulating stable random variables. *Journal of the American Statistical Association*. **71(354)**:340-344.

3. Evans, M., Hastings, N., Peacock, B. (1993). *Statistical distributions* – 2nd edition. Wiley, New York.

4. Fama, E.F., Roll, R., (1978). Parameter estimates for symmetric stable distributions. *Journal of American Statistical Association*, **66(334)**:331-338.

5. Kanter, M. (1975). Stable densities under change of scale and total variation Inequalities. *Annals of Probability*, **3(4)**:697-707.

6. Kogan, S., Williams, D., (1995). One the characterization of impulsive noise with α=stable distributions using Fourier techniques. In *Proceedings of the 29th Asimolar Conference of signals, Systems and Computing*.

7. Kozubowski, T.J. (1999). Geometric stable laws: estimation and application. *Mathematical and Computer Modelling* **29**: 241-253.

8. Koutrouvelis, I.A., (1995). Regression-type estimation of the parameters of stable laws. *Journal of the American Statistical Association*, **75(372)**:918-928.

9. Ma, X., Nikias, C.L., (1995). Parameter estimation and blind channel identification in impulsive signal environments. *IEEE Transactions Signal Processing*, **43(12)**:2884-2897.

10. Nikias, C.L., Tsihrintzis, G.A. (1996). Fast estimation of the parameters of alpha-stable impulsive interference. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **44(6)**:1492-1503.

11. Nolan, J.P. (2002). *Stable distributions: models for heavy tailed fata*. http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf

12. Råde, L., Westergren, B. (1995). *Mathematics handbook for science and engineering* – 3rd edition. Studentlitteratur, Lund.

13. Weron, R. (1996). On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables. *Statistics & Probability Letters*. **28**:165-171.

14. Weron, R. (2001). Levy-stable distributions revisited: tail index >2 does not exclude the Levy-stable regime. *International Journal of Modern Physic*, **12(2)**:209-224.

15. Золотарев, В. М. (1983). *Одномерные устойчивые распределения*. Главная редакция физике - математической литературы, Москва.