Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Kristo Väljako

Monomorfismid moodulite kategooriates

Matemaatika ja statistika eriala
Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja: prof. Valdis Laan

Tartu 2018

Monomorfismid moodulite kategooriates

Magistritöö

Kristo Väljako

Lühikokkuvõte. Magistritöös on uuritud monomorfisme erinevates moodulite kategooriates. Mooduleid vaadeldakse üle assotsiatiivsete ringide. Välja toodud ja tõestatud on monomorfismide kirjeldused kõikide parempoolsete moodulite kategoorias Mod_R, unitaarsete moodulite kategoorias UMod_R ja püsivate moodulite kategoorias FMod_R. Lõpuks on tõestatud, et püsivate moodulite kategooria objektide alamobjektide hulk moodustab modulaarse võre. Monomorfismide kirjeldused ning alamobjektide võre modulaarsus on tõestatud Valdis Laane ja Ülo Reimaa artiklit „Monomorphisms in categories of firm acts" eeskujuks võttes, kus on tõestatud analoogilised tulemused polügoonide jaoks üle poolrühma. Teadaolevalt on need teoreemid uued tulemused, mida pole varem moodulite juhul tõestatud.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Märksõnad: Moodulid, kategooriad, ringid, võred.

Monomorphisms in Categories of Modules

Master's thesis

Kristo Väljako

Abstact. In this master's thesis monomorphisms in different categories of modules have been studied. Modules have been considered over associative rings. Descriptions of monomorphisms in the category of all right modules Mod_R, in the category of unitary modules UMod_R and in the category of firm modules FMod_R have been given and proved. Finally, it is proved that, in the category of firm modules, the set of subobjects of an object forms a modular lattice. The descriptions of monomorphisms and the modularity of the lattice of subobjects has been proved by following analogous results for acts over semigroups from an article by Valdis Laan and Ülo Reimaa titled "Monomorphisms in categories of firm acts". To our knowledge, these theorems are new results, which have not been proved before for modules.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic theory, algebra, group theory.

Key words. Modules, categories, rings, lattices.

Sisukord

Peatükk 1

Sissejuhatus

Vaadeldes mingite algebraliste struktuuride kategooriat, kus morfismideks on nende struktuuride vahelised homomorfismid, on üheks loomulikuks küsimuseks see, et millised on selles kategoorias erinevat tüüpi monomorfismid ja epimorfismid. Teatavasti võib mistahes kategoorias vaadelda erinevat tüüpi monomorfismide klasse (näiteks regulaarsed, ekstremaalsed, ranged ja vasakult pööratavad monomorfismid), mis üldiselt ei pruugi kokku langeda. Sama kehtib epimorfismide korral.

Käesoleva magistritöö eesmärk on uurida monomorfisme erinevates moodulite kategooriates, kusjuures mooduleid on vaadatud üle assotsiatiivsete ringide, mis ei pruugi omada ühikelementi. Teadupoolest on kõik injektiivsed moodulite homomorfismid monomorfismid. Näiteks kõikide parempoolsete R-moodulite kategoorias Mod_R on homomorfismi injektiivsus samaväärne selle monomorfismiks olemisega. Kuid antud töös on vaadeldud mõnda selle kategooria alamkategooriat, kus monomorfismide kirjeldus tuleb erinev. Erilist tähelepanu on pööratud püsivate moodulite kategooriale, kus leidub mitte-injektiivseid monomorfisme. Püsivate moodulite kategoorias on toodud monomorfismide kirjeldus ning lõpuks on selle kirjelduse abil näidatud, et püsivate objektide alamobjektide hulk moodustab modulaarse võre.

Järgnevalt anname ülevaate antud magistritöö sisust ja struktuurist.

Esimeses peatükis on tutvustatud kategooria mõistet. Lisaks on siin ära toodud mitmed levinud ning töös hiljem vaja minevad kategooriateoreetilised mõisted ja tulemused. Selle peatüki kirjutamiseks on kasutatud paljuski eestikeelset raamatut [8], kuid mõned definitsioonid on võetud ingliskeelsest raamatust [1].

Teises peatükis on tutvustatud levinud ning selle töö teema jaoks vajalikke algebralisi struktuure: ringe, mooduleid ja võresid. Kõigi nende struktuuride kohta on toodud definitsioonid ja mitmed tulemused nende kohta. See peatükk põhineb eeskätt raamatutele [6] ja [7]. Erilist tähelepanu peaks pöörama paragrahvile, mis räägib ringi Dorroh laiendist. Antud mõistet ei ole eestikeelses kirjanduses varem vaadeldud. Käesolev käsitlus põhineb Joe Lee Dorroh originaalartiklile [4], mis ilmus juba aastal 1932.

Kolmandas peatükis on tutvustatud moodulite tensorkorrutist, mida on eestikeelses kirjanduses eelnevalt väga vähe puudutatud. Siin on toodud moodulite tensorkorrutise definitsioon ning mitmed lihtsamad omadused, mida on eestikeelses kirjanduses samuti vähe puudutatud.. Lisaks on ära toodud ka konstruktsioon, kuidas tihti moodulite tensorkorrutis saadakse. See peatükk põhineb eeskätt raamatul [2]. On kasutatud ka raamatut [12], kus on kirjutatud vektorruumide tensorkorrutisest, mis on moodulite tensorkorrutisele mitmete omaduste poolest sarnane.

Neljandas peatükis on toodud antud töö põhitulemused. Autorile (ning ta juhendajale) teadaolevalt peaks kõik siin toodud teoreemid (väljaarvatud monomorfismide kirjeldusele kõigi moodulite kategoorias, lause 5.1.3) olema originaalsed tulemused. Siinsed teoreemid on tõestatud artikli [9] eeskujul. Antud artiklis on tõestatud analoogilised tulemused teatavate polügoonide jaoks üle poolrühmade ning antud töös on tõestatud nende tulemuste analoogid moodulite juhu jaoks.

Peatükk 2

Kategooriateooria

Selles peatükis tutvume kategooria definitsiooniga ning mitmete hiljem vajaminevate kategooriateoreetiliste mõistetega. Antud peatükk põhineb raamatutel [8] ja [1].

2.1 Kategooria definitsioon

Definitsioon 2.1.1. Kategooria koosneb kahte tüüpi suurustest – objektidest ja morfismidest. Kui $\mathcal{A}$ on kategooria, siis tema objektid moodustavad klassi, mida tähistame $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Mistahes järjestatud objektipaariga (A, B) on seotud hulk $\mathrm{Mor}(A, B)$, mida nimetatakse *morfismide hulgaks objektist A objekti B*, nii et:

1. kui $(A, B) \neq (A', B')$, siis $\mathrm{Mor}(A, B) \cap \mathrm{Mor}(A', B') = \varnothing$;
2. kui $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ ja $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$, siis eksisteerib nende kompositsioon $g \circ f \in \mathrm{Mor}(A, C)$;
3. kui morfismide kompositsioonid $(h \circ g) \circ f$ ja $h \circ (g \circ f)$ eksisteerivad, siis nad on võrdsed;
4. mistahes objekti A korral leidub hulgas $\mathrm{Mor}(A, A)$ selline morfism 1_A, et $f \circ 1_A = f$ ja $1_A \circ g = g$ iga $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ ja iga $g \in \mathrm{Mor}(C, A)$ korral.

Morfismi $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ tähistame ka $f\colon A \to B$ ning $\mathrm{Mor}(\mathcal{A})$ on kõikide kategooria $\mathcal{A}$ morfismide klass. Vahel tähistame asjaolu, et A on kategooria $\mathcal{A}$ objekt ka lühemalt $A \in \mathcal{A}$.

Definitsioon 2.1.2. Morfisme $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ ja $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$ nimetatakse **isomorfismideks**, kui kehtivad tingimused $f \circ g = 1_B$ ja $g \circ f = 1_A$.

Sümboliga $\mathrm{Iso}(\mathcal{A})$ tähistame kõikide isomorfismide klassi kategoorias $\mathcal{A}$.

Definitsioon 2.1.3. Kategooriat nimetatakse **konkreetseks kategooriaks**, kui tema objektid on hulgad (harilikult mingi struktuuriga), morfsmid on kujutused (mis harilikult säilitavad vaadeldavat struktuuri), morfsmide komponeerimine on kujutuste järjestrakendamine ja ühikmorfsmid on samasusteisendused.

2.2 Monomorfismid

Definitsioon 2.2.1. Kategooria $\mathcal{A}$ morfismi $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ nimetatakse **monomorfismiks**, kui mistahes $g, h \in \mathrm{Mor}(C, A)$ korral

$$f \circ g = f \circ h \quad \Longrightarrow \quad g = h.$$

Seega monomorfismid on nii öelda *vasakult taandatavad* morfismid. On lihtne näha, et igas kehtib järgmine tulemus.

Lause 2.2.2. *Igas konkreetses kategoorias on injektiivsed morfismid monomorfismid.*

Monomorfismiga duaalne mõiste on *epimorfism*, mis on paremalt taandatav morfism.

Definitsioon 2.2.3. Kategooria $\mathcal{A}$ morfismi $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ nimetatakse **epimorfismiks**, kui mistahes $g, h \in \mathrm{Mor}(B, C)$ korral

$$g \circ f = h \circ f \quad \Longrightarrow \quad g = h.$$

Lause 2.2.4. *Igas konkreetses kategoorias on sürjektiivsed morfismid epimorfismid.*

2.2.1 Regulaarsed ja ekstremaalsed monomorfismid

Definitsioon 2.2.5. Monomorfismi f nimetatakse **ekstremaalseks**, kui sellest, et $f = g \circ e$ ja e on epimorfism järeldub, et e on isomorfism.

Definitsioon 2.2.6. Morfismide $g, h \in \mathrm{Mor}(B, C)$ **võrdsustajaks** nimetatakse objekti A koos morfismiga $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, kui

1. $g \circ f = h \circ f$;
2. kui morfismi $e \in \mathrm{Mor}(M, B)$ korral kehtib võrdus $g \circ e = h \circ e$, siis leidub parajasti üks morfism $m \in \mathrm{Mor}(M, A)$ nii, et $e = f \circ m$.

Asjaolu, et f koos objektiga A on morfismide g, h võrdsustaja, märgitakse $(f, A) \approx \mathrm{Eq}(g, h)$. Eelnevas definitsioonis nimetatakse tingimust 2 ka **võrdsustaja universaalomaduseks** ning selle kohaselt peab võrdsustaja puhul järgnev diagramm kommuteeruma (joonis 2.1).

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C \\
M \arrow[u, dashed, "m"] \arrow[ur, "e"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Joonis 2.1

Lause 2.2.7. *Kui (f, A) on võrdsustaja, siis morfism f on monomorfism.*

TÕESTUS. Olgu $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ (koos objektiga A) morfismide $g, h \in \mathrm{Mor}(B, C)$ võrdsustaja ja olgu morfismid $k, e \in \mathrm{Mor}(D, A)$ sellised, et $f \circ k = f \circ e$. Tulenevalt võrdsustaja definitsioonist kehtib

$$g \circ (f \circ k) = h \circ (f \circ k).$$

Seega peab leiduma üheselt määratud $m \in \mathrm{Mor}(D, A)$ nii, et $f \circ m = f \circ k$. Morfismi m rolli sobivad aga nii k kui ka e. Tulenevalt morfismi m ühesusest, siis $k = e$, mistõttu f on monomorfism. ∎

Definitsioon 2.2.8. Morfismi $f\colon A \to B$ nimetatakse **regulaarseks monomorfismiks**, kui see koos objektiga A on mingite morfismide $g, h\colon B \to C$ võrdsustaja.

Lause 2.2.9. *Iga regulaarne monomorfism on ekstremaalne monomorfism.*

TÕESTUS. Olgu $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ regulaarne monomorfism, seega leiduvad morfismid $g, h \in \mathrm{Mor}(B, C)$ nii, et f on nende võrdsustaja. Lisaks kehtigu $f = k \circ e$, kus $e \in \mathrm{Mor}(A, E)$ on epimorfism ja $k \in \mathrm{Mor}(E, B)$ mingi morfism. Sel juhul kehtib

$$(h \circ k) \circ e = h \circ (k \circ e) = h \circ f = g \circ f = g \circ (k \circ e) = (g \circ k) \circ e.$$

Järelikult $h \circ k = g \circ k$, kuna e on epimorfism. Seega tulenevalt võrdsustaja definitsioonist leidub täpselt üks morfism $m\colon E \to A$ nii, et $k = f \circ m$. Paneme tähele, et

$$f \circ 1_A = f = k \circ e = (f \circ m) \circ e = f \circ (m \circ e).$$

Kuna f on tänu lausele 2.2.7 monomorfism, siis $1_A = m \circ e$. Teiselt poolt paneme tähele, et

$$1_E \circ e = e = e \circ 1_A = e \circ (m \circ e) = (e \circ m) \circ e.$$

Millest järeldub, et $1_E = e \circ m$, kuna e on epimorfism. Kokkuvõttes saime, et e on isomorfism, millest tuleneb, et f on ekstremaalne monomorfism. ∎

Seega näeme, et kui f on regulaarne monomorfism, siis on ta ka ekstremaalne monomorfims, millest omakorda järeldub, et f on monomorfism.

2.3 Alamkategooriad

Definitsioon 2.3.1. Kategooria $\mathcal{A}$ **alamkategooria** $\mathcal{B}$ koosneb

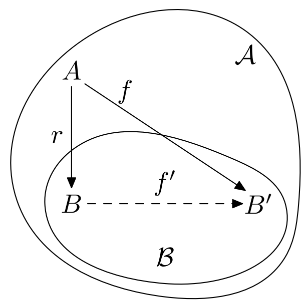
1. kategooria $\mathcal{A}$ objektide klassi $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ alamklassist $\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$;
2. iga objektipaari $(B, B') \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ jaoks leiduvast hulgast $\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B') \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, B')$ nii, et
   (a) kui $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B')$ ja $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B', B'')$, siis $g \circ f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B'')$,
   (b) iga $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ korral $1_B \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B)$.

Definitsioon 2.3.2. Kategooria $\mathcal{A}$ alamkategooriat $\mathcal{B}$ nimetatakse **täielikuks alamkategooriaks**, kui iga kahe objekti $B, B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ korral on kategoorias $\mathcal{B}$ kõik morfismid objektist B objekti B', mis ka kategoorias $\mathcal{A}$ s.t.

$$B, B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B') = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, B').$$

Definitsioon 2.3.3. Öeldakse, et kategooria $\mathcal{A}$ alamkategooria $\mathcal{B}$ on **reflektiivne alamkategooria**, kui iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ jaoks leiduvad $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja $r \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ nii, et

$$\forall B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})\, \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B')\, \exists! f' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B') \colon \quad f' \circ r = f.$$



Joonis 2.2

Lause 2.3.4. *Olgu $\mathcal{B}$ kategooria $\mathcal{A}$ reflektiivne alamkategooria ja $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B, B')$. Siis*

1. *f on monomorfism kategoorias $\mathcal{A}$ parajasti siis, kui f on monomorfism kategoorias $\mathcal{B}$,*
2. *f on morfismide $g, h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B', B'')$ võrdsustaja kategoorias $\mathcal{A}$ parajasti siis, kui f on nende morfismide võrdsustaja kategoorias $\mathcal{B}$.*

Tõestus.

1. ($\Longrightarrow$)
   Tuleneb otse definitsioonist ning kehtib igas alamkategoorias.
   ($\Longleftarrow$)
   Olgu $f\colon B \to B'$ monomorfism kategoorias $\mathcal{B}$ ja kehtigu $f \circ g = f \circ h$, kus $g, h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$. Siis leidub objekt $B'' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja $r \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B'')$ nii, et iga $\overline{B} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja $u \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, \overline{B})$ jaoks leidub täpselt üks morfism $f'\colon B'' \to \overline{B}$ nii, et $f' \circ r = u$.

   Rakendame seda omadust morfismidele g ja h, nimelt leiduvad ühesed morfismid $k_g, k_h\colon B'' \to B$ kategoorias $\mathcal{B}$ nii, et $k_g \circ r = g$ ja $k_h \circ r = h$. Sel juhul

   $$(f \circ k_g) \circ r = f \circ g = f \circ h = (f \circ k_h) \circ r.$$

   Vastavalt ühesusele $f \circ k_g = f \circ k_h$. Kuna f on monomorfism kategoorias $\mathcal{B}$, siis $k_g = k_h$. Seega $g = h$.

2. ($\Longrightarrow$)
   Ilmne.
   ($\Longleftarrow$)
   Olgu $f\colon B \to B'$ morfismide $g, h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B', B'')$ võrdsustaja kategoorias $\mathcal{B}$. Vaatleme objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ koos morfismiga $e \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B')$, mille korral $g \circ e = h \circ e$.

   Vastavalt reflektiivse alamkategooria definitsioonile leiduvad objekt $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja morfism $r \in \mathrm{Mor}_{A}(A, C)$ nii, et leidub täpselt üks selline morfism $e' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(C, B')$, et $e' \circ r = e$. Tulenevalt aga asjaolust, et f (koos objektiga B) on võrdsustaja alamkategoorias $\mathcal{B}$, saame, et leidub ühene morfism $f' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(C, B)$ nii, et $f \circ f' = e'$. Paneme tähele, et kehtivad võrdused

   $$f \circ (f' \circ r) = (f \circ f') \circ r = e' \circ r = e,$$

   mis tähendab, et morfism $f' \circ r\colon A \to B$ muudab vajaliku kolmnurga kommutatiivseks.

   Oletame, et leidub veel teinegi morfism $r' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ nii, et $f \circ r' = e$. Sel juhul $f \circ r' = f \circ (f' \circ r)$. Kuna f on kategoorias $\mathcal{B}$ monomorfism tänu lausele 2.2.7, siis, vastavalt antud teoreemi osale 1, on ta monomorfism ka kategoorias $\mathcal{A}$. Järelikult $r' = f' \circ r$. Sellega oleme tõestanud, et morfism $f' \circ r\colon A \to B$ on ühene, mistõttu paar (f, B) on võrdsustaja kategoorias $\mathcal{A}$.

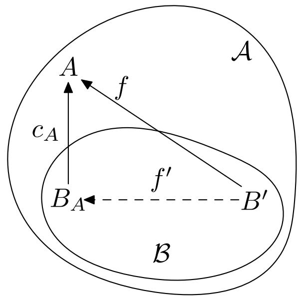
■

Järeldus 2.3.5. *Olgu $\mathcal{B}$ kategooria $\mathcal{A}$ reflektiivne alamkategooria. Kui kategoorias $\mathcal{A}$ monomorfismid ja regulaarsed monomorfismid langevad kokku, siis ka kategoorias $\mathcal{B}$ langevad monomorfismid ja regulaarsed monomorfismid kokku.*

Järgnevalt anname ka reflektiivse alamkatgooria duaalse mõiste definitsiooni.

Definitsioon 2.3.6. Öeldakse, et kategooria $\mathcal{A}$ alamkategooria $\mathcal{B}$ on **koreflektiivne alamkategooria**, kui iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral leiduvad objekt $B_A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ ja morfism $c_A\colon\ B \to A$ nii, et

$$\forall B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})\, \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(B', A)\, \exists! f' \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B', B_A)\colon \quad c_A \circ f' = f.$$



Joonis 2.3

2.4 Funktorid ja loomulikud teisendused

Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kategooriad ning olgu F eeskiri, mis seab kategooria $\mathcal{A}$ igale objektile A vastavusse kategooria $\mathcal{B}$ üheselt määratud objekti $F(A)$ ja kategooria $\mathcal{A}$ igale morfismile f kategooria $\mathcal{B}$ üheselt määratud morfismi $F(f)$. Edaspidi nimetame sellist eeskirja kujutuseks.

Definitsioon 2.4.1. Kujutust $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ nimetatakse **(kovariantseks) funktoriks** kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$, kui:

1. iga $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A')$ korral $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(A), F(A'))$;

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}: & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, mapsto, "F"'] & A' \arrow[d, mapsto, "F"] \\
\mathcal{B}: & F(A) \arrow[r, "F(f)"] & F(A')
\end{tikzcd}$$

Joonis 2.4

2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ mistahes morfismide f ja g korral, mida saab kategoorias $\mathcal{A}$ komponeerida;

3. iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

Definitsioon 2.4.2. Olgu $F, G\colon\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ kaks (kovariantset) funktorit kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$. **Loomulik teisendus** $\eta\colon\ F \to G$ funktorist F funktorisse G on kategooria $\mathcal{B}$ morfismide süsteem $(\eta_A\colon\ F(A) \to G(A))_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})}$, mis on idekseeritud $\mathcal{A}$ objektide järgi, mille korral $\eta_{A'} \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A$ kategooria $\mathcal{A}$ iga morfismi $f\colon\ A \to A'$ korral.

Kui η on loomulik teisendus, siis järgmine diagramm kommuteerub (joonis 2.5).

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & G(A')
\end{tikzcd}$$

Joonis 2.5

Peatükk 3

Ringid, moodulid, võred

Selles peatükis tutvustan ma tuntud algebralisi struktuure: ring, moodul ja võre. See peatükk on kirjutatud eeskätt raamatute [6] ja [7] põhjal.

3.1 Ringid

3.1.1 Ringi definitsioon

Definitsioon 3.1.1. Hulka R nimetatakse **ringiks**, kui temas on defineeritud kaks binaarset algebralist tehet, liitmine $+\colon R \times R \to R$ ja korrutamine $\cdot\colon R \times R \to R$ nii, et kehtivad tingimused:

1. $\forall r, s, t \in R\colon \quad (r+s)+t = r+(s+t)$,
2. $\exists 0 \in R \, \forall r \in R\colon \quad 0+r = r+0 = r$,
3. $\forall r \in R \, \exists -r \in R\colon \quad r+(-r) = -r+r = 0$,
4. $\forall r, s \in R\colon \quad r+s = s+r$,
5. $\forall r, s, t \in R\colon \quad (rs)t = r(st)$,
6. $\forall r, s, t \in R\colon \quad (r+s)t = rt+st \quad \& \quad r(s+t) = rs+rt$.

Muuhulgas on paar $(R, +)$ Abeli rühm.

Definitsioon 3.1.2. Ringi R nimetatakse **ühikelemendiga ringiks**, kui temas leidub element 1 nii, et iga elemendi $r \in R$ korral

$$1r = r1 = r.$$

Elementi 1 nimetatakse ringi R **ühikelemendiks**.

Näide 1. Olgu X mittetühi hulk, siis $(\mathcal{P}(X); \Delta, \cap)$ on ring, mille ühikelemendiks on X. (Sümbol $\mathcal{P}(X)$ tähistab hulga X potentshulka ning Δ sümmeetrilist vahet.) $\square$

Ringi R korral tähistame

$$RR := \{r_1 r_1' + \ldots + r_k r_k' \mid k \in \mathbb{N},\ r_1, r_1', \ldots, r_k, r_k' \in R\}.$$

Definitsioon 3.1.3. Ringi R nimetatakse **idempotentseks**, kui $R = RR$.

Seega ring R on idempotentne, kui tema iga element r on esitatav summana korrutistest:

$$r = r_1 r_1' + \ldots + r_k r_k',$$

kus $r_1, \ldots, r_k, r_1', \ldots, r_k' \in R$. Iga ühikelemendiga ring on idempotente, kuid vastupidine ei kehti.

Näide 2. Olgu X lõpmatu hulk ja $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ tema kõigi lõplike alamhulkade hulk. Siis $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(X); \Delta, \cap)$ on ring, milles ei ole ühikelementi, kuid mis on idempotentne, sest $A = A \cap A$ hulga X iga lõpliku alamhulga A korral. $\square$

Näide 3. Vaatleme ringi $\mathbb{Z}_n$ otseasme $\prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}_n$ alamhulka R, mis koosneb jadadest $(a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$, milles on lõplik arv nullist erinevaid komponente. Siis R on ring komponenthaaval defineeritud tehete suhtes. Selles ringis ei ole ühikelementi, kuid ta on idempotentne, sest iga element esitub idempotentide summana. Näiteks

$$\begin{aligned}(\overline{0}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{0}, \ldots) &= (\overline{0}, \overline{3}, \overline{0}, \overline{0}, \ldots) + (\overline{0}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{0}, \ldots) = \\ &= (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \ldots) + (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \ldots) + (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \ldots) + \\ &\quad + (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \ldots) + (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \ldots).\end{aligned}$$

$\square$

3.1.2 Dorroh laiend

Kui R on ring, $r \in R$ ja $x \in \mathbb{N}$, siis defineeritakse korrutis

$$xr := \underbrace{r + r + \ldots + r}_{x \text{ liidetavat}}.$$

Lisaks sellele loetakse, et $0r = 0$, kus esimene null on täisarv ja teine on ringi R nullelement, ning defineeritakse

$$(-x)r := x(-r) = \underbrace{(-r) + (-r) + \ldots + (-r)}_{x \text{ liidetavat}}.$$

Sellega on defineeritud ringi elemendi r ja mistahes täisarvu $z \in \mathbb{Z}$ korrutis zr. Lihtne on veenduda, et mitahes $z \in \mathbb{Z}$ ja $s, r \in R$ korral

$$x(rs) = (xr)s = r(xs).$$

Järgneva definitsiooni olen kirja pannud J. L. Dorroh[1] 1932. aastal ilmunud artikli [4] põhjal.

Definitsioon 3.1.4. Ringi R **Dorroh laiendiks** nimetatakse ringi $(R \times \mathbb{Z}; +, \cdot)$, kus liitmine $+$ ja korrutamine $\cdot$ on defineeritud järgnevalt:

$$\begin{aligned}(r, z) + (s, x) &:= (r + s, z + x),\\ (r, z) \cdot (s, x) &:= (rs + zs + xr, zx).\end{aligned}$$

Lause 3.1.5. *Dorroh laiend on ühikelemendiga ring.*

Tõestus. Olgu R ring. Vaatleme selle ringi Dorroh laiendit $(R \times \mathbb{Z}; +, \cdot)$. Ilmselt on hulk $(R \times \mathbb{Z}; +)$ Abeli rühm. Olgu $(r, z), (s, x), (t, y) \in R \times \mathbb{Z}$, siis

$$\begin{aligned}((r, z) + (s, x)) \cdot (t, y) &= (r + s, z + x) \cdot (t, y) =\\ &= \big((r + s)t + (z + x)t + y(r + s), (z + x)y\big) =\\ &= \big((rt + zt + yr) + (st + xt + ys), zy + xy\big) =\\ &= (rt + zt + yr, zy) + (st + xt + ys, xy) =\\ &= (r, z) \cdot (t, y) + (s, x) \cdot (t, y).\end{aligned}$$

Teine distributiivsuse seadus tuleb analoogiliselt.

Uurime, kas defineeritud korrutis on assotsiatiivne. Olgu $(r, z), (s, x), (t, y) \in R \times \mathbb{Z}$, siis

$$\begin{aligned}\big((r, z) \cdot (s, x)\big) \cdot (t, y) &= (rs + zs + xr, zx) \cdot (t, y) =\\ &= \big((rs + zs + xr)t + (zx)t + y(rs + zs + xr), zxy\big) =\\ &= (rst + zst + xrt + zxt + yrs + yzs + yxr, zxy) =\\ &= \big(rst + rxt + rys + zst + zxt + zys + xyr, zxy\big) =\\ &= \big(r(st + xt + ys) + z(st + xt + ys) + xyr, zxy\big) =\\ &= (r, z) \cdot \big(st + xt + ys, xy\big) =\\ &= (r, z) \cdot \big((s, x) \cdot (t, y)\big).\end{aligned}$$

Seega Dorroh laiendi korrutamine on assotsiatiivne. Järelikult on Dorroh laiend $R \times \mathbb{Z}$ ring. Temas on ka ühikelement $(0, 1)$. Tõepoolest, olgu $(r, z) \in R \times \mathbb{Z}$, siis

$$(r, z) \cdot (0, 1) = (r0 + z0 + 1r, z1) = (r, z).$$

Analoogiliselt ka $(0, 1) \cdot (r, z) = (r, z)$. ■

[1] Joe Lee Dorroh – USA matemaatik

Dorroh laiendiga seotud põhiteoreemi jaoks toon ära ringide homomorfismi definitsiooni.

Definitsioon 3.1.6. Olgu R ja S ringid. Kujutust $f\colon\ R \to S$ nimetatakse *ringide homomorfismiks*, kui ta on kooskõlas kõikide tehetega, s.t.

$$\begin{aligned} f(r_1 + r_2) &= f(r_1) + f(r_2), \\ f(r_1 \cdot r_2) &= f(r_1) \cdot f(r_2), \\ f(0) &= 0, \end{aligned}$$

mistahes $r_1, r_2 \in R$ korral.

Järgnevalt on toodud teoreem, millest tuleb välja, miks Dorroh laiend on kasulik ringide uurimise juures.

TEOREEM 3.1.7 (Dorroh)**.** *Iga ringi saab sisestada ühikelemendiga ringi.*

TÕESTUS. Vaatleme kujutust

$$f\colon R \to R \times \mathbb{Z}, \quad f(r) = (r, 0).$$

Ilmselt on see injektiivne. Olgu $r, s \in R$, siis

$$\begin{aligned} f(r+s) &= (r+s, 0) = (r+s, 0+0) = (r, 0) + (s, 0) = f(r) + f(s), \\ f(rs) &= (rs, 0) = (rs + 0s + 0r, 0 \cdot 0) = (r, 0) \cdot (s, 0) = f(r) \cdot f(s). \end{aligned}$$

Seega on kujutus f ringide homomorfism. Kokkuvõttes saab ringi R sisestada ringi $R \times \mathbb{Z}$ injektiivse homomorfismi f abil. ∎

3.2 Moodulid

3.2.1 Mooduli definitsioon

Olgu R ring.

Definitsioon 3.2.1. Hulka M nimetatakse **parempoolseks R-mooduliks**, kui temal on defineeritud liitmine $+\colon M \times M \to M$ ja kujutus $\cdot\colon M \times R \to M$, mis rahuldavad tingimusi:

1. paar $(M; +)$ on Abeli rühm,
2. $\forall m, n \in M\ \forall r \in R\colon \quad (m+n)r = mr + nr$,

3. $\forall m \in M\, \forall r, s \in R$: $\quad m(r+s) = mr + ms$,
4. $\forall m \in M\, \forall r, s \in R$: $\quad m(rs) = (mr)s$.

Kui M on parempoolne R-moodul, siis kirjutatakse ka M_R.

Näide 1. Olgu S ring. Vaatleme otseastet $S^n = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \mid s_1, s_2, \ldots, s_n \in S\}$. Hulk S^n on parempoolne moodul üle ruutmaatriksite ringi $\mathrm{Mat}_{n,n}(S)$, kus liitmine on defineeritud komponenthaaval ning kujutus $S^n \times \mathrm{Mat}_{n,n}(S) \to S^n$ on defineeritud kui tavaline maatriksite korrutamine

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n) \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} s_k q_{k1}, \sum_{k=1}^{n} s_k q_{k2}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} s_k q_{kn} \right).$$

□

Analoogiliselt defineeritakse ka **vasakpoolne R-moodul**. Moodulit M, mis on korraga nii parempoolne R-moodul kui vasakpoolne S-moodul ja mis rahuldab tingimust

$$(sm)r = s(mr)$$

iga $m \in M$, $s \in S$ ja $r \in R$ korral, nimetatakse **bimooduliks**. Ring R on ise ka R-moodul R_R, kui vajalikud kujutused $R \times R \to R$ defineerida ringi liitmis- ja korrutamistehte abil. Mooduli M_R korral tähistame

$$MR := \{m_1 r_1 + \ldots + m_k r_k \mid k \in \mathbb{N},\ m_1, \ldots, m_k \in M,\ r_1, \ldots, r_k \in R\}.$$

Definitsioon 3.2.2. R-mooduli M_R alamhulka N nimetatakse **alammooduliks**, kui ta on kinnine mooduli M tehete suhtes, s.t.

1. $\forall m, n \in M$: $(m, n \in N \implies m + n \in N)$,
2. $\forall m \in M\, \forall\, r \in R$: $(m \in N \implies mr \in N)$.

Mooduli M_R ja tema alammoodulite $N, N_1, N_2 \subseteq M$ korral tähistame

$$m + N := \{m + n \mid n \in N\}, \quad (m \in M),$$
$$N_1 + N_2 := \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in N_1,\ n_2 \in N_2\}.$$

Definitsioon 3.2.3. Olgu N R-mooduli M_R alammoodul. Hulka $M/N = \{m + N \mid m \in M\}$, kus tehted on defineeritud järgnevalt:

$$(m_1 + N) + (m_2 + N) := (m_1 + m_2) + N, \quad m_1, m_2 \in M,$$
$$(m + N)r := (mr) + N, \quad m \in M, r \in R,$$

nimetatakse mooduli M **faktormooduliks** alammooduli N järgi.

Faktormooduli M/N elementi $m+N$ tähistame lühidalt $[m]$. Lihtne on veenduda, et kehtib järgmine tulemus.

Lemma 3.2.4. *Olgu M/N faktormoodul ja $m_1, m_2 \in M$. Siis $[m_1] = [m_2]$ parajasti siis, kui $m_1 - m_2 \in N$.*

3.2.2 Moodulite homomorfismid

Definitsioon 3.2.5. Olgu M_R ja N_R parempoolsed R-moodulid. Kujutust $f\colon\ M \to N$ nimetatakse parempoolsete R-moodulite **homomorfismiks**, kui iga $m_1, m_2, m \in M$ ja iga $r \in R$ korral kehtivad

$$\begin{aligned} f(m_1 + m_2) &= f(m_1) + f(m_2), \\ f(mr) &= f(m)r. \end{aligned}$$

Kõigi R-moodulite homomorfismide hulka moodulist M moodulisse N tähistame $\mathrm{Hom}_R(M, N)$. Kõigi parempoolsete R-moodulite kategooriat tähistame Mod_R, kus objektideks on R-moodulid ja morfismideks on R-moodulite homomorfismid. Kõigi vasakpoolsete R-moodulite kategooriat tähistame sümboliga ${}_R\mathsf{Mod}$. Kui M_R on parempoolne R-moodul, siis hulka $\mathrm{Hom}_R(R, M)$ võib vaadelda parempoolse R-moodulina tehete suhtes, mis on defineeritud järgmiselt:

$$\begin{aligned} (f + g)(r) &:= f(r) + g(r) \\ (f \cdot s)(r) &:= f(sr), \end{aligned}$$

kus $f, g \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$ ja $r, s \in R$.

Lemma 3.2.6. *Olgu M_R parempoolne R-moodul. Siis kujutus $\lambda_M\colon\ M \to \mathrm{Hom}_R(R, M)$, mis on defineeritud võrdusega*

$$(\lambda_M(m))(r) := mr,$$

kus $m \in M$ ja $r \in R$, on parempoolsete R-moodulite homomorfism.

Tõestus. Olgu $M_R \in \mathsf{Mod}_R$. Vaatleme lemmas defineeritud kujutust λ_M. Kontrollime, kas kujutus λ_M on kooskõlas mooduli M tehetega. Olgu $m_1, m_2, m \in M$ ja $s, r \in R$. Sel juhul

$$\begin{aligned} (\lambda_M(m_1 + m_2))(r) = (m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r = (\lambda_M(m_1) + \lambda_M(m_2))(r), \\ (\lambda_M(ms))(r) = (ms)r = m(sr) = \lambda_M(m)(sr) = (\lambda_M(m) \cdot s)(r). \end{aligned}$$

Seega λ_M on R-moodulite homomorfism. ■

Sümboliga CMod_R tähistame kategooria Mod_R täielikku alamkategooriat, mille objektideks on sellised moodulid M_R, mille korral λ_M on bijektiivne (s.t. parempoolsete R-moodulite isomorfism). Sellist kategooriat on vaadeldud näiteks artiklis [11] ja teistes L. Maríni[2] artiklites.

3.2.3 Unitaarsed moodulid

Definitsioon 3.2.7. Parempoolset R-moodulit M_R nimetatakse **unitaarseks**, kui $MR = M$, s.t.

$$\forall m \in M\, \exists k \in \mathbb{N}\, \exists m_1, \ldots, m_k \in M\, \exists r_1, \ldots, r_k \in R\colon \quad m = m_1 r_1 + \ldots + m_k r_k.$$

Sümboliga UMod_R tähistame kõigi unitaarsete parempoolsete R-moodulite kategooriat.

Ringi R idempotentsus on samaväärne sellega, et moodul R_R on unitaarne.

Lause 3.2.8. *Olgu R ühikelemendiga ring. Siis moodul M_R on unitaarne parajasti siis, kui iga $m \in M$ korral $m1 = m$.*

Tõestus.
$(\Longrightarrow)$
Olgu M_R unitaarne ja $m \in M$. Sel juhul leiduvad $m_1, \ldots, m_k \in M$ ja $r_1, \ldots, r_k \in R$ nii, et $m = m_1 r_1 + \ldots + m_k r_k$. Järelikult

$$\begin{aligned} m1 &= (m_1 r_1 + \ldots + m_k r_k)1 = (m_1 r_1)1 + \ldots + (m_k r_k)1 = m_1(r_1 1) + \ldots + m_k(r_k 1) = \\ &= m_1 r_1 + \ldots + m_k r_k = m. \end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$
Kehtigu iga $m \in M$ korral $m1 = m$. Sel juhul $MR = M$ ehk M_R on unitaarne. ∎

Lemma 3.2.9. *Olgu R idempotentne ring. Kui N_1 ja N_2 on mooduli M_R unitaarsed alammoodulid, siis ka $N_1 + N_2$ on M_R unitaarne alammoodul.*

Tõestus. Näitame, et $N_1 + N_2$ on alammoodul. Olgu $n, m \in N_1 + N_2$, siis leiduvad $n_1, m_1 \in N_1$ ja $n_2, m_2 \in N_2$ nii, et $n = n_1 + n_2$ ja $m = m_1 + m_2$, lisaks olgu $r \in R$. Sel juhul

$$\begin{aligned} n + m &= (n_1 + n_2) + (m_1 + m_2) = (n_1 + m_1) + (n_2 + m_2) \in N_1 + N_2, \\ nr &= (n_1 + n_2)r = n_1 r + n_2 r \in N_1 + N_2. \end{aligned}$$

[2]Leandro Marín – Hispaania matemaatik

Kokkuvõttes on $N_1 + N_2$ kinnine mooduli M tehete suhtes.

Paneme tähele, et

$$(N_1 + N_2)R = N_1R + N_2R = N_1 + N_2.$$

Seega alammoodul $N_1 + N_2$ on unitaarne. ■

Lemma 3.2.10. *Unitaarse mooduli faktormoodul on unitaarne.*

TÕESTUS. Olgu M_R unitaarne moodul ja N tema alammoodul. Vaatleme elementi $m \in M$. Kuna M on unitaarne, siis leiduvad $m_1, \dots, m_k \in M$ ja $r_1, \dots, r_k \in R$ nii, et $m = m_1r_1 + \ldots + m_kr_k$. Nüüd vaatleme faktormoodulit $A_R := M/N$ ning selle elementi $[m]$. Siis

$$[m] = [m_1r_1 + \ldots + m_kr_k] = [m_1r_1] + \ldots + [m_kr_k] = [m_1]r_1 + \ldots + [m_k]r_k.$$

Seega moodul A_R on unitaarne. ■

Lemma 3.2.11. *Kui R on idempotentne ring ja M_R moodul, siis MR on suurim mooduli M_R alammoodul, mis on unitaarne.*

TÕESTUS. Kirjutame välja hulga MR kuju

$$MR = \left\{ \sum_{h=1}^{k} m_hr_h \,\middle|\, k \in \mathbb{N},\ r_h \in R,\ m_h \in M \right\}.$$

Nüüd näitame, et MR on alammoodul. Olgu $a, b \in MR$, siis leiduvad $k, l \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_l \in M, b_1, \dots, b_k \in M$ ja $r_1 \dots, r_l, t_1, \dots, t_k \in R$ nii, et $a = a_1r_1 + \ldots + a_lr_l$ ja $b = b_1t_1 + \ldots + b_kt_k$. Vaatleme liitmist:

$$a+b = (a_1r_1+\ldots+a_lr_l)+(b_1t_1+\ldots+b_kt_k) = a_1r_1+\ldots+a_lr_l+b_1t_1+\ldots+b_kt_k \in MR.$$

Vaatleme mooduli korrutamist:

$$as = (a_1r_1 + \ldots + a_kr_k)s = a_1(r_1s) + \ldots + a_k(r_ks) \in MR.$$

Seega MR on alammoodul. Moodul MR unitaarne, sest $(MR)R = M(RR) = MR$. Näitame, et MR on suurim unitaarne alammoodul. Selleks vaatleme unitaarset alammoodulit X. Olgu $x \in X$. Kuna X on unitaarne, siis leiduvad $x_1, \dots, x_k \in X$ ja $s_1, \dots, s_k \in R$ nii, et $x = x_1s_1 + \ldots + x_ks_k$. Sel juhul aga $x \in MR$. See tähendab, et $X \subseteq MR$. Seega tõesti MR on suurim unitaarne alammoodul. ■

TEOREEM 3.2.12. *Igat parempoolset R-moodulit saab vaadelda unitaarse parempoolse $(R \times \mathbb{Z})$-moodulina, kus $(R \times \mathbb{Z})$ on ringi R Dorroh laiend.*

TÕESTUS. Olgu $M \in \mathsf{Mod}_R$. Defineerime ringi $R \times \mathbb{Z}$ elementidega korrutamise $\cdot\colon M \times (R \times \mathbb{Z}) \to M$ järgnevalt

$$m \cdot (r, z) = mr + zm,$$

kus $m \in M$, $r \in R$ ja $z \in \mathbb{Z}$. Kusjuures korrutis zm on defineeritud võrdusega

$$zm = \operatorname{sgn}(z)\underbrace{(m + \ldots + m)}_{|z| \text{ liidetavat}}.$$

Selliselt defineeritud korrutis rahuldab kõiki vajalikke mooduli aksioome. Olgu $m, n \in M$ ja (r, z),$(s, x) \in R \times \mathbb{Z}$, siis

$$\begin{aligned}
(m + n)(r, z) &= (m + n)r + z(m + n) = mr + nr + zm + zn = \\
&= (mr + zm) + (nr + zn) = m(r, z) + n(r, z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m((r, z) + (s, x)) &= m(r + s, z + x) = m(r + s) + (z + x)m = mr + ms + zm + xm = \\
&= (mr + zm) + (ms + xm) = m(r, z) + m(s, x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m((r, z) \cdot (s, x)) &= m(rs + zs + xr, zx) = m(rs + zs + xr) + (zx)m = \\
&= (mr + mz)s + x(mr + mz) = (m(r, z))(s, x).
\end{aligned}$$

Lisaks on moodul $M_{(R\times\mathbb{Z})}$ unitaarne, kuna iga $m \in M$ korral

$$m = m0 + 1m = m(0, 1).$$

■

Lause 3.2.13. *Abeli rühma $(R \times \mathbb{Z}; +)$ võib vaadelda parempoolse R-moodulina, kus kujutus $(R \times \mathbb{Z}) \times R \to R \times \mathbb{Z}$ on defineeritud võrdusega*

$$(r, z)s := (rs + zs, 0).$$

TÕESTUS. Olgu R ring. Vastavalt lausele 3.1.5 on ringi R Dorroh laiend $R \times \mathbb{Z}$ Abeli rühm liitmise suhtes. Uurime, kas ka ülejäänud mooduli tingimused on täidetud. Olgu $(r_1, z_1), (r_2, z_2), (r, z) \in R \times \mathbb{Z}$ ja $s_1, s_2, s \in R$, siis

$$\begin{aligned}
((r_1, z_1) + (r_2, z_2))\, s &= (r_1 + r_2, z_1 + r_2)s = ((r_1 + r_2)s + (z_1 + r_2)s, 0) = \\
&= ((r_1 + z_1)s, 0) + ((r_2 + z_2)s, 0) = (r_1, z_1)s + (r_2, z_2)s,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r, z)(s_1 + s_2) &= (r(s_1 + s_2) + z(s_1 + s_2), 0) = ((rs_1 + zs_1) + (rs_2 + zs_2), 0) = \\
&= (rs_1 + zs_1, 0) + (rs_2 + zs_2, 0) = (r, z)s_1 + (r, z)s_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((r, z)s_1)\, s_2 &= (rs_1 + zs_1, 0)s_2 = ((rs_1 + zs_1)s_2 + 0s_2, 0) = \\
&= ((rs_1)s_2 + (zs_1)s_2, 0) = (r(s_1 r_2) + z(s_1 s_2), 0) = (r, z)(s_1 s_2).
\end{aligned}$$

Seega on kõik definitsioonis 3.2.1 toodud tingimused täidetud ning Dorroh laiend $R \times \mathbb{Z}$ on parempoolne R-moodul. ■

3.3 Võred

3.3.1 Võre definitsioon

Annan siinkohal kaks esmapilgul erinevat definitsiooni võrele.

Definitsioon 3.3.1. Osaliselt järjestatud hulka L nimetatakse **võreks**, kui selle igal kahel elemendil $a, b \in L$ leidub ülemine raja $\sup(a, b)$ ja alumine raja $\inf(a, b)$.

Definitsioon 3.3.2. Hulka L koos kahe binaarse tehtega $\wedge$ ja $\vee$ nimetatakse võreks, kui iga $a, b, c \in L$ korral kehtivad:

1. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$,
2. $a \vee b = b \vee a$,
3. $a \vee a = a$,
4. $(a \vee b) \wedge a = a$,
5. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,
6. $a \wedge b = b \wedge a$,
7. $a \wedge a = a$,
8. $(a \wedge b) \vee a = a$.

Osutub, et need kaks definitsiooni langevad kokku, kui võtta

$$\sup(a, b) := a \vee b,$$
$$\inf(a, b) := a \wedge b.$$

Selle fakti tõestuse võib leida raamatust [7] (Teoreem 8.1.4). Kõikide võrede kategooriat tähistatakse Lat.

Definitsioon 3.3.3. Võret L nimetatakse **täielikuks**, kui tema igal mittetühjal alamhulgal leidub alumine ja ülemine raja.

Järgnevalt toon ära ühe kasuliku lause, mille tõestuse võib leida raamatust [3] (teoreem 2.31).

Lause 3.3.4. *Järjestatud hulk L on täielik võre parajasti siis, kui hulga L igal mittetühjal alamhulgal on olemas alumine raja ning hulk L sisaldab suurimat elementi.*

Definitsioon 3.3.5. Võret L nimetatakse **modulaarseks**, kui iga $a, b, c \in L$ korral

$$a \leqslant c \implies (a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c).$$

3.3.2 Võrede isomorfsus

Definitsioon 3.3.6. Olgu $(P, \leqslant)$ ja $(Q, \leqslant')$ osaliselt järjestatud hulgad. Öeldakse, et kujutus $f\colon P \to Q$ on

1. **järjestust säilitav**, kui
$$\forall a, b \in P : \big(a \leqslant b \implies f(a) \leqslant' f(b)\big),$$
2. **sisestus**, kui
$$\forall a, b \in P : \big(a \leqslant b \iff f(a) \leqslant' f(b)\big).$$

Definitsioon 3.3.7. Osaliselt järjestatud hulki $(P, \leqslant)$ ja $(Q, \leqslant')$ nimetatakse **isomorfseteks**, kui leiduvad järjestust säilitavad kujutused $f\colon\ P \to Q$ ja $g\colon\ Q \to P$ nii, et $g \circ f = 1_P$ ja $f \circ g = 1_Q$.

Definitsioon 3.3.8. Võresid L ja L' nimetatakse **isomorfseteks**, kui leiduvad alumisi ja ülemisi rajasid säilitavad kujutused $f\colon\ L \to L'$ ja $g\colon\ L' \to L$ nii, et $g \circ f = 1_L$ ja $f \circ g = 1_{L'}$.

Lihtne on näha, et kehtib järgmine tulemus.

Lause 3.3.9. *Kehtivad järgmised väited:*

1. *osaliselt järjestatud hulgad P ja Q on isomorfsed parajasti siis, kui leidub sürjektiivne sisestus $f\colon\ P \to Q$;*

2. *kui osaliselt järjestatud hulgad P ja Q on isomorfsed ja Q on võre, siis ka P on võre, mis on isomorfne võrega Q.*

Peatükk 4

Moodulite tensorkorrutis

Selles peatükis tutvustan moodulite tensorkorrutist. Selleks olen põhiliselt kasutanud raamatut [2].

4.1 Üldine definitsioon

Olgu R ring ning M_R parempoolne R-moodul ja ${}_RN$ vasakpoolne R-moodul.

Definitsioon 4.1.1. Olgu A Abeli rühm. Kujutust $\beta\colon M \times N \to A$ nimetatakse **R-tasakaalustatuks**, kui kehtivad järgnevad tingimused:

1. $\forall m_1, m_2 \in M \, \forall n \in N\colon\; \beta(m_1 + m_2, n) = \beta(m_1, n) + \beta(m_2, n)$,
2. $\forall m \in M \, \forall n_1, n_2 \in N\colon\; \beta(m, n_1 + n_2) = \beta(m, n_1) + \beta(m, n_2)$,
3. $\forall m \in M \, \forall n \in N \, \forall r \in R\colon\; \beta(mr, n) = \beta(m, rn)$.

Definitsioon 4.1.2. Olgu T Abeli rühm ja $\tau\colon M \times N \to T$ R-tasakaalustatud kujutus. Paari (T, τ) nimetatakse moodulite M_R ja ${}_RN$ **tensorkorrutiseks**, kui iga Abeli rühma A ja iga R-tasakaalustatud kujutuse $\beta\colon M \times N \to A$ korral leidub parajasti üks Abeli rühmade homomorfism $f\colon T \to A$ nii, et $\beta = f \circ \tau$.

Seega, kui paar (T, τ) on tensorkorrutis, siis järgnev diagramm kommuteerub iga abeli rühma A ja R-tasakaalustatud β korral (joonis 4.1).

$$\begin{tikzcd}
& M \times N \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
T \arrow[rr, dashed, "f"'] & & A
\end{tikzcd}$$

Joonis 4.1

Moodulite M_R ja ${}_RN$ tensorkorrutise (T, τ) korral tähistame $M \otimes_R N := T$ või ka lihtsalt $M \otimes N$ ning iga elemendi $(m, n) \in M \times N$ korral $m \otimes n := \tau(m, n)$. Kusjuures edaspidi nimetame tensorkorrutiseks ka lihtsalt Abeli rühma $M \otimes_R N$.

Osutub, et moodulite M_R ja ${}_RN$ tensorkorrutis on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud.

Lause 4.1.3. *Kui (T, τ) ja (T', τ') on kaks moodulite M_R ja ${}_RN$ tensorkorrutist, siis leidub Abeli rühmade isomorfism $f\colon\ T \to T'$ nii, et $\tau' = f \circ \tau$.*

TÕESTUS. Olgu (T, τ) ja (T', τ') kaks moodulite M_R ja ${}_RN$ tensorkorrutist. Seega leiduvad ühesed Abeli rühmade homomorfismid f ja g nii, et järgnevad diagrammid kommuteeruvad.

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \\ T \arrow[rr, "f"'] & & T' \end{tikzcd}$$

Joonis 4.2

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\tau'"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ T' \arrow[rr, "g"'] & & T \end{tikzcd}$$

Joonis 4.3

Lisaks kommuteeruvad ka kolmnurgad järgmises diagrammis.

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[d, "\tau'"] \arrow[dr, "\tau"] & \\ T \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "1_T"'] & T' \arrow[r, "g"] & T \end{tikzcd}$$

Joonis 4.4

Seega ühesuse nõude tõttu $g \circ f = 1_T$, analoogiliselt ka $f \circ g = 1_{T'}$. Järelikult on tensorkorrutised (T, τ) ja (T', τ') Abeli rühmadena isomorfsed. ∎

4.2 Moodulite tensorkorrutise konstruktsioon

Selles paragraahvis tutvustan ühte väga levinud viisi, kuidas konstrueerida moodulite tensorkorrutist. Olgu R ring ning M_R parempoolne R-moodul ja ${}_RN$ vasakpoolne R-moodul. Vaatleme hulka

$$\mathbb{Z}^{(M \times N)} := \{f\colon\ M \times N \to \mathbb{Z} \mid f(m, n) \neq 0 \text{ lõpliku arvu paaride } (m, n) \text{ korral } \}.$$

On lihtne näha, et hulk $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ on Abeli rühm liitmise

$$(f+g)(m,n) := f(m,n)+g(m,n), \quad (m,n)\in M\times N$$

suhtes. Selle Abeli rühma nullelement on nullkujutus

$$c_0\colon\ M\times N\to\mathbb{Z}, \quad (m,n)\mapsto 0.$$

Vaatleme kujutusi $x_{(m,n)}\colon\ M\times N\to\mathbb{Z}$, kus $(m,n)\in M\times N$, mis on defineeritud järgnevalt

$$x_{(m,n)}(m',n') := \begin{cases} 1, & ((m',n')=(m,n)),\\ 0, & ((m',n')\neq(m,n)).\end{cases}$$

Ilmselt iga $(m,n)\in M\times N$ korral $x_{(m,n)}\in\mathbb{Z}^{(M\times N)}$. Abeli rühm $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ on vaba (s.t. temas leidub baas), kusjuures tema baas on hulk

$$\mathcal{B} := \{x_{(m,n)}\mid (m,n)\in M\times N\}.$$

Tähistame

$$\begin{aligned} kx_{(m,n)} &:= \underbrace{x_{(m,n)}+\ldots+x_{(m,n)}}_{k \text{ liidetavat}}, \quad k\in\mathbb{N},\\ zx_{(m,n)} &:= -(|z|x_{(m,n)}), \quad z\in\mathbb{Z}^-,\\ 0x_{(m,n)} &:= c_0,\\ \mathbb{Z}x_{(m,n)} &:= \{zx_{m,n}|z\in\mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Baasi iga elemendi $x_{(m,n)}$ korral on hulk $\mathbb{Z}x_{(m,n)}$ Abeli rühma $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ alamrühm. Abeli rühm $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ esitub alamrühmade $\mathbb{Z}x_{(m,n)}$ sisemise otsesummana, s.t.

$$\mathbb{Z}^{(M\times N)} = \dot{\sum_{(m,n)\in M\times N}} \mathbb{Z}x_{(m,n)} = \left\{\sum_{h=1}^{k} z_h x_{(m_h,n_h)} \middle| k\in\mathbb{N},\ z_h\in\mathbb{Z},\ (m_h,n_h)\in M\times N\right\}. \tag{4.2.1}$$

Seega koosneb hulk $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ lõplikest üheselt määratud summadest. Vaatleme hulga $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ alamrühma K, mis on genereeritud järgnevate elementide poolt:

$$\begin{gathered} x_{(m_1+m_2,n)}-x_{(m_1,n)}-x_{(m_2,n)},\\ x_{(m,n_1+n_2)}-x_{(m,n_1)}-x_{(m,n_2)},\\ x_{(mr,n)}-x_{(m,rn)}, \end{gathered}$$

kus $m_1,m_2,m\in M$, $n_1,n_2,n\in N$ ja $r\in R$. Iga $f\in\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ korral tähistame

$$[f] := f+K = \{f+g\mid g\in K\}.$$

Vaatleme faktorrühma

$$T := \mathbb{Z}^{(M\times N)}/K = \left\{[f]\middle|f \in \mathbb{Z}^{(M\times N)}\right\},$$

millel liitmistehe on defineeritud võrdusega

$$[f_1] + [f_2] = [f_1 + f_2],$$

kus $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}^{(M\times N)}$. Lisaks defineerime kujutuse $\tau\colon\ M \times N \to T$ võrdusega

$$\tau(m, n) := [x_{(m,n)}] = x_{(m,n)} + K.$$

Lause 4.2.1. *Eelnevalt konstrueeritud paar (T, τ) on moodulite M_R ja ${}_RN$ tensorkorrutis.*

Eelnev lause on tõestatud raamatus [2] (lause 19.2). Kuna vastavalt lausele 4.1.3 on erinevad moodulite M_R ja ${}_RN$ tensorkorrutised isomorfsed, siis võib tensorkorrutise $(M \otimes_R N, \tau)$ korral alati üldisust kitsendamata eeldada, et see on saadud siin punktis toodud konstruktsiooni abil.

Toome sisse tähistuse

$$m \otimes n := [x_{(m,n)}],$$

kus $m \in M$ ja $n \in N$. Kuna elemendid $x_{(m,n)}$ on rühma $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ moodustajad, siis elemendid $m \otimes n$ on faktorrühma $M \otimes N$ moodustajad.

4.3 Moodulite tensorkorrutise omadused

Lause 4.3.1. *Tensorkorrutise $M \otimes_R N$ iga element on esitatav lõpliku summana moodustajatest:*

$$\sum_{h=1}^{k} m_h \otimes n_h, \quad (k \in \mathbb{N},\ m_h \in M,\ n_h \in N). \tag{4.3.1}$$

Lisaks kehtivad järgnevad omadused:

1. $\forall m_1, m_2 \in M\, \forall n \in N\colon\ (m_1 + m_2) \otimes n = (m_1 \otimes n) + (m_2 \otimes n)$,
2. $\forall m \in M\, \forall n_1, n_2 \in N\colon\ m \otimes (n_1 + n_2) = (m \otimes n_1) + (m \otimes n_2)$,
3. $\forall m \in M\, \forall n \in N\, \forall r \in R\colon\ mr \otimes n = m \otimes rn$,
4. $0 \otimes 0$ *on Abeli rühma* $M \otimes N$ *nullelement,*
5. $\forall m \in M\, \forall n \in N\colon\ -(m \otimes n) = (-m) \otimes n$.

TÕESTUS. Vaatleme tensorkorrutist $M \otimes N$. Vastavalt lausele 4.1.3 võime eeldada, et see on saadud kasutades konstruktsiooni eelmisest paragrahvist. Seega on tensorkorrutis $M \otimes N$ faktorrühm $\mathbb{Z}^{(M\times N)}/K$ eelmises paragraahvis kirjeldatud alamrühma K järgi. Mistõttu iga element avaldub kujul

$$\left[\sum_{h=1}^{k} z_h x_{(m_h,n_h)}\right] = \sum_{h=1}^{k} z_h [x_{(m_h,n_h)}] = \sum_{h=1}^{k} z_h (m_h \otimes n_h),$$

kus $k \in \mathbb{N}$, $z_h \in \mathbb{Z}$ ja $(m_h, n_h) \in M \times N$. Lisaks, kui mingi $h \in \{1, \dots, k\}$ korral $z_h \neq 1$, siis võime liidetavat $m_h \otimes n_h$ lisada summasse $|z_h|$ korda ning vajadusel saab miinusmärgi viia liidetava $m_h \otimes n_h$ sisse (vastavalt omadusele 5).

Vastavalt definitsioonile iga $m \in M$ ja $n \in N$ korral $m \otimes n = \tau(m, n)$, kus τ on tasakaalustatud kujutus. Omadus 1 kehtib kuna

$$(m_1 + m_2) \otimes n = \tau(m_1 + m_2, n) = \tau(m_1, n) + \tau(m_2, n) = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n,$$

kus $m_1, m_2 \in M$ ja $n \in N$. Omaduste 2 ja 3 tõestused on analoogilised.

Vaatleme omadust 4. Olgu $m \in M$ ja $n \in N$, siis

$$\begin{aligned} m \otimes n + 0 \otimes 0 = m \otimes n + 0 \otimes (0n) = m \otimes n + (00) \otimes n = m \otimes n + 0 \otimes n = \\ = (m + 0) \otimes n = m \otimes n. \end{aligned}$$

Vaatleme omadust 5. Olgu $m \in M$ ja $n \in N$, siis

$$m \otimes n + (-m) \otimes n = (m + (-m)) \otimes n = 0 \otimes n = (00) \otimes n = 0 \otimes (0n) = 0 \otimes 0.$$

Seega $-(m \otimes n) = (-m) \otimes n$. ■

Tensorkorrutistega tegeledes tuleb tähelepanu pöörata asjaolule, et elemendi esitus kujul (4.3.1) ei ole üldiselt ühene.

Lause 4.3.2. *Kui $\beta\colon\ M \times N \to A$ on tasakaalustatud kujutus, siis eeskiri*

$$f\colon\ M \otimes N \to A, \quad \sum_{h=1}^{k} m_h \otimes n_h \mapsto \sum_{h=1}^{k} \beta(m_h, n_h)$$

defineerib kujutuse.

TÕESTUS. Me peame veenduma, et f on korrektsetselt defineeritud. Tensorkorrutise definitsiooni põhjal leidub parajasti üks Abeli rühmade homomorfism $g\colon\ M \otimes N \to A$ nii, et kolmnurk

$$\begin{tikzcd}
 & M \times N \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
M \otimes N \arrow[rr, "g"'] & & A
\end{tikzcd}$$

Joonis 4.5

on kommutatiivne. Järelikult iga $m \in M$ ja $n \in N$ korral

$$g(m \otimes n) = (g \circ \tau)(m, n) = \beta(m, n).$$

Kuna g on Abeli rühmade homomorfism, siis

$$g\left(\sum_{h=1}^{k} m_h \otimes n_h\right) = \sum_{h=1}^{k} \beta(m_h, n_h).$$

Seega ilmselt $g = f$, mistõttu eeskiri f on korrektselt defineeritud. ■

Lause 4.3.3. *Olgu M_R parempoolne R-moodul, ${}_RN_R$ (R, R)-bimoodul ja ${}_RO$ vasakpoolne R-moodul. Siis leidub Abeli rühmade isomorfism $\alpha\colon\ (M \otimes_R N) \otimes_R O \to M \otimes_R (N \otimes_R O)$, kusjuures*

$$\alpha((m \otimes n) \otimes o) = m \otimes (n \otimes o).$$

Eelnev lause on tõestatud raamatus [2] (lause 20.8).

Lemma 4.3.4. *Olgu M_R parempoolne R-moodul ja ${}_RN_S$ bimoodul. Tensorkorrutis $M \otimes N$ on parempoolne S-moodul, kus iga $m = \sum_{h=1}^{k} m_h \otimes n_h \in M \otimes N$ ja $s \in S$ korral on defineeritud*

$$ms = \left(\sum_{h=1}^{k} m_h \otimes n_h\right) s := \sum_{h=1}^{k} m_h \otimes (n_h s). \tag{4.3.2}$$

Tõestus. Olgu M_R parempoolne R-moodul ja ${}_RN_S$ (R, S)-bimoodul. Vaatleme tensorkorrutist $M \otimes N$. Vastavalt tensorkorrutise definitsioonile on algebraline struktuur $(M \otimes N; +)$ Abeli rühm. Olgu $s \in S$. Vaatleme kujutust

$$\beta\colon\ M \times N \to M \otimes N, \quad \beta(m, n) = m \otimes (ns).$$

Näitame, et kujutus β on tasakaalustatud. Olgu $m_1, m_2, m \in M$, $n_1, n_2, n \in N$, $r \in R$ ja $s \in S$, siis

$$\begin{aligned}
\beta(m_1 + m_2, n) &= (m_1 + m_2) \otimes (ns) = m_1 \otimes (ns) + m_2 \otimes (ns) = \beta(m_1, n) + \beta(m_2, n), \\
\beta(m, n_1 + n_2) &= m \otimes (n_1 + n_2)s = m \otimes (n_1 s + n_2 s) = m \otimes (n_1 s) + m \otimes (n_2 s) = \\
&= \beta(m, n_1) + \beta(m, n_2), \\
\beta(mr, n) &= (mr) \otimes (ns) = m \otimes s(ns) = m \otimes (rn)s = \beta(m, rn).
\end{aligned}$$

Seega kujutus β on R-tasakaalustatud. Lause 4.3.2 põhjal leidub korrektselt defineeritud kujutus

$$M \otimes N \to M \otimes N, \quad \sum_{h=1}^{k} m_h \otimes n_h \mapsto \sum_{h=1}^{k} m_h \otimes (n_h s).$$

Olgu $m, m' \in M \otimes N$, sel juhul leiduvad $m_1, \ldots, m_k, m'_1, \ldots, m'_\ell \in M$ ja $n_1, \ldots, n_k$, $n'_1, \ldots, n'_\ell \in N$ nii, et

$$m = \sum_{h=1}^{k} m_h \otimes n_h \quad \text{ja} \quad m' = \sum_{h=1}^{\ell} m'_h \otimes n'_h.$$

Lisaks olgu $s, q \in S$. Siis kehtivad

$$\begin{aligned}
(m+m')s &= \left(\sum_{h=1}^{k} m_h \otimes n_h + \sum_{h=1}^{\ell} m'_h \otimes n'_h\right) s = \sum_{h=1}^{k} m_h \otimes (n_h s) + \sum_{h=1}^{\ell} m'_h \otimes (n'_h s) = \\
&= ms + m's, \\
m(s+q) &= \left(\sum_{h=1}^{k} m_h \otimes n_h\right)(s+q) = \sum_{h=1}^{k} (m_h \otimes n_h(s+q)) = \sum_{h=1}^{k} m_h \otimes (n_h s + n_h q) = \\
&= \sum_{h=1}^{k} (m_h \otimes (n_h s) + m_h \otimes (n_h q)) = \sum_{h=1}^{k} m_h \otimes (n_h s) + \sum_{h=1}^{k} m_h \otimes (n_h q) = \\
&= \left(\sum_{h=1}^{k} m_h \otimes n_h\right) s + \left(\sum_{h=1}^{k} m_h \otimes n_h\right) q = ms + mq, \\
m(sq) &= \left(\sum_{h=1}^{k} m_h \otimes n_h\right)(sq) = \sum_{h=1}^{k} (m_h \otimes n_h(sq)) = \sum_{h=1}^{k} m_h \otimes (n_h s)q = \\
&= \left(\sum_{h=1}^{k} m_h \otimes (n_h s)\right) q = (ms)q.
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes on $M \otimes N$ parempoolne S-moodul. ■

4.4 Moodulite homomorfismide tensorkorrutised

Olgu $(M \otimes_R N, \tau)$ ja $(M' \otimes_R N', \tau')$ R-moodulite tensorkorrutised ning olgu $f\colon\ M_R \to M'_R$ ja $g\colon\ {}_R N \to {}_R N'$ moodulite homomorfismid. Defineerime kujutuse $(f, g)\colon\ M \times N \to M' \otimes_R N'$ võrdusega

$$(f, g)(m, n) := f(m) \otimes g(n).$$

Näitame, et kujutus (f,g) on tasakaalustatud. Olgu $m_1, m_2, m \in M$, $n_1, n_2, n \in N$ ja $r \in R$, siis

$$\begin{aligned}
(f,g)(m_1+m_2,n) &= f(m_1+m_2)\otimes g(n) = (f(m_1)+f(m_2))\otimes g(n) = \\
&= f(m_1)\otimes g(n) + f(m_2)\otimes g(n) = (f,g)(m_1,n)+(f,g)(m_2,n), \\
(f,g)(m,n_1+n_2) &= (f,g)(m,n_1)+(f,g)(m,n_2), \\
(f,g)(mr,n) &= f(mr)\otimes g(n) = f(m)r\otimes g(n) = f(m)\otimes rg(n) = \\
&= f(m)\otimes g(rn) = (f,g)(m,rn).
\end{aligned}$$

Kuna kujutus (f,g) on tasakaalustatud, siis leidub vastavalt tensorkorrutise definitsioonile Abeli rühmade homomorfism $F\colon\ M\otimes_R N \to M'\otimes_R N'$ nii, et $F\circ\tau = (f,g)$. Järelikult

$$F(m\otimes n) = F(\tau(m,n)) = (f,g)(m,n) = f(m)\otimes g(n).$$

$$\begin{tikzcd}
 & M\times N \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "{(f,g)}"] & \\
M\otimes_R N \arrow[rr, "F"'] & & M'\otimes_R N'
\end{tikzcd}$$

Joonis 4.6

Homomorfismi F nimetame **moodulite homomorfismide f ja g tensorkorutiseks** ning tähistame $f\otimes g$. Kusjuures kehtib arvutusvalem

$$(f\otimes g)(m\otimes n) = f(m)\otimes g(n),$$

kus $m\otimes n \in M\otimes N$. Kuna vastavalt eelnevale konstruktsioonile on kujutus $f\otimes g$ Abeli rühmade homomorfism, siis iga $m \in M\otimes N$ korral, mis vastavalt lausele 4.3.1 avaldub summana $m=\sum_{h=1}^{k} m_h\otimes n_h$, kus $k\in\mathbb{N}$, $m_1,\dots,m_k\in M$ ja $n_1,\dots,n_k\in N$, kehtib

$$(f\otimes g)(m) = (f\otimes g)\left(\sum_{h=1}^{k} m_h\otimes n_h\right) = \sum_{h=1}^{k}(f\otimes g)(m_h\otimes n_h) = \sum_{h=1}^{k} f(m_h)\otimes g(n_h).$$

Lause 4.4.1. *Olgu M_R, M'_R, ${}_RN$ ja ${}_RN'$ moodulid ning $f_1, f_2, f \in \mathrm{Hom}_R(M,M')$ ja $g_1, g_2, g \in \mathrm{Hom}_R(N,N')$. Siis kehtivad järgnevad omadused:*

1. $(f_1+f_2)\otimes g = (f_1\otimes g)+(f_2\otimes g)$,
2. $f\otimes(g_1+g_2) = (f\otimes g_1)+(f\otimes g_2)$,
3. $f\otimes 0 = 0\otimes g = 0$,
4. $1_M\otimes 1_N = 1_{M\otimes_R N}$.

TÕESTUS. Olgu M_R, M'_R, ${}_RN$ ja ${}_RN'$ moodulid ning $f_1, f_2, f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ ja $g_1, g_2, g \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$. Näitame, et lause omadused kehtivad tensorkorrutise $M \otimes_R N$ moodustajatel $m \otimes n$. Kui kaks Abeli rühmade homomorfismi $A \to B$ langevad kokku moodustajatel, siis nad langevad kokku kõigil A elementidel ja seega on kujutustena võrdsed. Olgu $m \otimes n \in M \otimes N$.

1. Kehtib

$$\begin{aligned}((f_1 + f_2) \otimes g)(m \otimes n) &= ((f_1 + f_2)(m)) \otimes g(n) = (f_1(m) + f_2(m)) \otimes g(n) = \\ &= f_1(m) \otimes g(n) + f_2(m) \otimes g(n) = \\ &= (f_1 \otimes g)(m \otimes n) + (f_2 \otimes g)(m \otimes n).\end{aligned}$$

2. Analoogiline eelneva omadusega.

3. Kehtib

$$(f \otimes 0)(m \otimes n) = f(m) \otimes 0 = f(m) \otimes 00 = f(m)0 \otimes 0 = 0 \otimes 0,$$

s.t. kujutus $f \otimes 0$ viib elemendi $m \otimes n$ Abeli rühma $A' \otimes N'$ nullelemendiks. Järelikult viib ta kõik $M \otimes N$ elemendid nullideks. Seega $f \otimes 0$ on nullkujutus.

Võrdus $0 \otimes g = 0$ kehtib analoogiliselt.

4. Kehtib

$$(1_M \otimes 1_N)(m \otimes n) = 1_M(m) \otimes 1_N(n) = m \otimes n = 1_{M \otimes N}(m \otimes n).$$

■

Lause 4.4.2. *Olgu M_R, M'_R, M''_R, ${}_RN$, ${}_RN'$ ja ${}_RN''$ moodulid ning olgu $f\colon\ M_R \to M'_R$, $f'\colon\ M'_R \to M''_R$, $g\colon\ {}_RN \to {}_RN'$ ja $g'\colon\ {}_RN' \to {}_RN''$, siis kehtib võrdus*

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g).$$

TÕESTUS. Olgu $m \otimes n \in M \otimes N$. Sel juhul

$$\begin{aligned}((f' \otimes g') \circ (f \otimes g))(m \otimes n) &= (f' \otimes g')(f(m) \otimes g(n)) = f'(f(m)) \otimes g'(g(n)) = \\ &= ((f' \circ f)(m)) \otimes ((g' \circ g)(n)) = ((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(m, n).\end{aligned}$$

■

4.5 Tensorkorrutamise funktorid

Lause 4.5.1. *Olgu R ja S ringid ja ${}_RN_S$ bimoodul. Siis eeskiri*

$$\begin{tikzcd} M_R \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & M \otimes N \arrow[d, "f \otimes 1_N"] \\ M'_R \arrow[r, mapsto] & M' \otimes N \end{tikzcd}$$

Joonis 4.7

defineerib funktori $- \otimes {}_RN_S \colon \ \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{Mod}_S$.

Tõestus. Olgu F eeskiri, mille määrab diagramm joonisel 4.7. Iga $M_R \in \mathsf{Mod}_R$ korral leidub tensorkorrutis $M \otimes N$, mis on lemma 4.3.4 järgi parempoolne S-moodul, seega on eeskiri $F\colon \ \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R) \to \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S)$ kujutus. Näitame, et kujutus F rahuldab funktori definitsiooni 2.4.1 tingimusi.

1. Iga morfismi $f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Mod}_R}(M, M')$ korral leidub homomorfismide tensorkorrutis $F(f) = f \otimes 1_N \colon \ M \otimes N \to M' \otimes N$, mis ilmselt on morfism kategoorias Mod_S.

2. Olgu $f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Mod}_R}(M, M')$ ja $g \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Mod}_R}(M', M'')$, siis tänu lausele 4.4.2

$$F(g \circ f) = (g \circ f) \otimes 1_N = (g \circ f) \otimes (1_N \circ 1_N) = (g \otimes 1_N) \circ (f \otimes 1_N) = F(g) \circ F(f).$$

3. Olgu $M_R \in \mathsf{Mod}_R$. Sel juhul

$$F(1_M) = 1_M \otimes 1_N = 1_{M \otimes N}.$$

Kokkuvõttes on eeskiri F funktor, mida edaspidi tähistame $- \otimes {}_RN_S$. ■

Funktorit $- \otimes {}_RN_S$ nimetame edaspidi mooduliga ${}_RN_S$ **tensorkorrutamise funktoriks**. Käesolevas magistritöös huvitab meid eelkõige juhtum, kus ${}_RN_S = {}_RR_R$, s.t. funktor $- \otimes R\colon \ \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{Mod}_R$. Analoogiliselt saab bimooduli ${}_TM_R$ korral defineerida funktori ${}_TM_R \otimes -\colon \ {}_R\mathsf{Mod} \to {}_T\mathsf{Mod}$.

Peatükk 5

Põhitulemused

See peatükk sisaldab käesoleva magistritöö põhitulemusi.

5.1 Monomorfismid kõigi moodulite kategoorias

Kõigepealt anname monomorfismide kirjelduse kõigi parempoolsete R-moodulite kategoorias Mod_R. Selleks kasutame järgmist lemmat. Analoogilise lemma (vektorruumide korral) tõestuse võib leida raamatust [6] (lause 4.1.10).

Lemma 5.1.1. *Moodulite homomorfism* $f\colon M_R \to N_R$ *on injektiivne parajasti siis, kui* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$*, kus* $\operatorname{Ker} f = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$*.*

Lemma 5.1.2. *Olgu* R *ring, olgu* $\mathcal{C}$ *kategooria* Mod_R *täielik alamkategooria, ning olgu* $f \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(M_R, N_R)$*. Siis* f *on kategoorias* $\mathcal{C}$ *monomorfism parajasti siis, kui*

$$\forall u \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(P_R, M_R): \quad \Big(f \circ u = 0 \implies u = 0\Big). \tag{5.1.1}$$

Tõestus.
$(\implies)$
Kui f on monomorfism, siis tulenevalt definitsioonist nullkujutuse ja suvalise morfismi u korral kehtib

$$f \circ u = 0 = f \circ 0 \implies u = 0.$$

$(\impliedby)$
Kehtigu tingimus (5.1.1). Olgu u ja v sellised morfismid, et $f \circ u = f \circ v$. Sel juhul

$$f \circ u = f \circ v \implies f \circ u - f \circ v = 0 \underset{f \in \mathrm{Mor}}{\implies} f \circ (u - v) = 0 \underset{(5.1.1)}{\implies} u - v = 0 \implies u = v.$$

Seega f on monomorfism kategoorias $\mathcal{C}$. ∎

Lause 5.1.3. *Olgu R ring ja f mingi morfism kategoorias Mod_R. Siis järgmised väited on samaväärsed:*

1. *f on monomorfism,*
2. *f on ekstremaalne monomorfism,*
3. *f on regulaarne monomorfism,*
4. *f on injektiivne.*

Tõestus.
$(3 \implies 2 \implies 1)$
See tuleneb lausetest 2.2.9 ja 2.2.7.
$(1 \implies 4)$
Olgu $f\colon M_R \to N_R$ monomorfism kategoorias Mod_R ja olgu $m \in \operatorname{Ker} f$, s.t. $f(m) = 0$. Peame näitama, et $m = 0$. Vaatleme Dorroh laiendit $R \times \mathbb{Z}$ ja moodulit $(R \times \mathbb{Z})_R$ (vt. lauset 3.2.13). Defineerime kujutuse $k\colon (R \times \mathbb{Z})_R \to M_R$ võrdusega

$$k(r, z) := mr + zm.$$

Sel juhul, kui $(r, z), (s, x) \in R \times \mathbb{Z}$ ja $t \in R$, siis

$$\begin{aligned} k((r, z) + (s, x)) &= k(r + s, z + x) = m(r + s) + (z + x)m = mr + ms + zm + xm = \\ &= (mr + zm) + (ms + xm) = k(r, z) + k(s, x), \\ k((r, z)t) &= k(rt + zt, 0) = m(rt + zt) + 0m = (mr + zm)t = k(r, z)t. \end{aligned}$$

Järelikult k on moodulite homomorfism.

Paneme tähele, et

$$(f \circ k)(r, z) = f(mr + zm) = f(mr) + f(zm) = f(m)r + zf(m) = 0 + 0 = 0.$$

Seega $f \circ k = 0$, kust lemma 5.1.2 põhjal järeldub, et $k = 0$, kuna f on monomorfism. Nüüd

$$0 = k(0, 1) = m0 + 1m = m.$$

Järelikult $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ ning lemma 5.1.1 tõttu f on injektiivne.
$(4 \implies 3)$
Nüüd näitame, et injektiivsed homomorfismid on regulaarsed monomorfismid. Olgu $f\colon M_R \to N_R$ injektiivne homomorfism. Kuna Mod_R on konkreetne kategooria ning igas konkreetses kategoorias on injektiivsed homomorfismid ka monomorfismid. Seega f on monomorfism. Regulaarsuse tõestamiseks konstrueerime moodulite otsekorrutise $M_R \times N_R$ faktormooduli

$$C_R := (N_R \times N_R)/(\operatorname{Im} f \times \operatorname{Im} f) = \{(n, n') + (\operatorname{Im} f \times \operatorname{Im} f) \mid n, n' \in N\}.$$

Tähistame lühidalt

$$[(n, n')] := (n, n') + (\operatorname{Im} f \times \operatorname{Im} f).$$

Olgu $[(n_1, n_1')], [(n_2, n_2')] \in C$ ja $r \in R$, siis faktormooduli definitsiooni järgi

$$\begin{aligned} [(n_1, n_1')] + [(n_2, n_2')] &= [(n_1 + n_2, n_1' + n_2')], \\ [(n_1, n_2)]r &= [(n_1 r, n_2 r)]. \end{aligned}$$

Defineerime kujutused $g, h \colon N \to C$ järgnevalt

$$\begin{aligned} g(n) &:= [(n, 0)], \\ h(n) &:= [(0, n)]. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et kui $n_1, n_2 \in N$ ja $r \in R$, siis

$$\begin{aligned} g(n_1 + n_2) &= [(n_1 + n_2, 0)] = [(n_1, 0)] + [(n_2, 0)] = g(n_1) + g(n_2), \\ g(n_1 r) &= [(n_1 r, 0)] = [(n_1, 0)]r = g(n_1)r. \end{aligned}$$

Seega kujutus g ja, analoogiliselt ka h, on parempoolsete R-moodulite homomorfismid.

Olgu $m \in M$, siis vaadeldes otsekorrutise $N \times N$ elemente $(f(m), 0)$ ja $(0, f(m))$ näeme, et

$$(f(m), 0) - (0, f(m)) = (f(m), -f(m)) = (f(m), f(-m)) \in \operatorname{Im} f \times \operatorname{Im} f.$$

Seega lemma 3.2.4 tõttu $[(f(m), 0)] = [(0, f(m))]$. Nüüd

$$(g \circ f)(m) = g(f(m)) = [(f(m), 0)] = [(0, f(m))] = h(f(m)) = (h \circ f)(m),$$

mistõttu $g \circ f = h \circ f$.

Tähistame $\mathcal{N} := \{n \in N \mid g(n) = h(n)\}$ ning näitame, et $\operatorname{Im} f = \mathcal{N}$.
$(\subseteq)$
Olgu $n \in \operatorname{Im} f$. Sel juhul leidub $m \in M$ nii, et $n = f(m)$. Eelnevast teame, et

$$g(f(m)) = (g \circ f)(m) = (h \circ f)(m) = h(f(m)).$$

Järelikult $g(n) = h(n)$ ehk $n \in \mathcal{N}$.
$(\supseteq)$
Olgu $n \in \mathcal{N}$. Sel juhul $g(n) = h(n)$ ja

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f \times \operatorname{Im} f &= (0, 0) + \operatorname{Im} f \times \operatorname{Im} f = [(0, 0)] = g(n) - h(n) = [(n, 0)] - [(0, n)] = \\ &= [(n, -n)] = (n, -n) + (\operatorname{Im} f \times \operatorname{Im} f). \end{aligned}$$

Seega $(n, -n) \in \operatorname{Im} f \times \operatorname{Im} f$, järelikult $n \in \operatorname{Im} f$.

Kuna $\operatorname{Im} f = \{n \in N \mid g(n) = h(n)\}$, siis sisestus $\iota\colon \operatorname{Im} f \to N$ koos objektiga $\operatorname{Im} f$ on morfismide g ja h võrdsustaja. Nimelt olgu $O \in \mathsf{Mod}_R$ ja leidugu $e \in \operatorname{Mor}(O, N)$ nii, et $g \circ e = h \circ e$. Olgu $o \in O$, siis

$$g(e(o)) = (g \circ e)(o) = (h \circ e)(o) = h(e(o)),$$

seega $e(o) \in \operatorname{Im} f$, järelikult morfism $o \mapsto e(o)$ on ise võrdsustaja universaalomaduses nõutud ühene morfism objektist O objekti $\operatorname{Im} f$. Mistõttu paar $(\iota, \operatorname{Im} f)$ on tõesti morfismide g ja h võrdsustaja.

$$\begin{tikzcd}
Im\,f \arrow[rr, "\iota"] & & N_R \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C_R \\
& M_R \arrow[ul, dashed, "f'"] \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

Joonis 5.1

Seega eksisteerib täpselt üks homomorfism $f'\colon M_R \to \operatorname{Im} f$ nii, et $\iota \circ f' = f$. Kujutus f' on injektiivne, sest f on injektiivne. Kuna iga $m \in M$ korral $f(m) = \iota(f'(m)) = f'(m)$, siis f' on ka sürjektiine. Järelikult f' on moodulite isomorfism. Seega on ka f morfismide g ja h võrdsustaja, mistõttu f on regulaarne monomorfism. ∎

5.2 Monomorfismid unitaarsete moodulite kategoorias

Selles paragraahvis anname mononorfismide kirjelduse kategooria Mod_R täielikus alamkategoorias UMod_R, juhul kui R on idempotentne ring.

TEOREEM 5.2.1. *Olgu R idempotentne ring. Siis on morfism $f\colon M_R \to N_R$ kategoorias UMod_R monomorfism parajasti siis, kui*

$$\forall m \in M\colon \quad \Big(f(m) = 0 \quad \Longrightarrow \forall r \in R\colon \quad mr = 0\Big). \tag{5.2.1}$$

TÕESTUS.
$(\Longrightarrow)$
Olgu $f\colon M_R \to N_R$ monomorfism ja $f(m) = 0$. Vaatleme homomorfismi

$$\lambda_m\colon R_R \to M_R, \quad \lambda_m(r) = mr.$$

Kuna iga $r \in R$ korral

$$0 = 0r = f(m)r = f(mr) = f(\lambda_m(r)) = (f \circ \lambda_m)(r),$$

siis $f \circ \lambda_m = 0$. Et f on monomorfism, siis tänu lemmale 5.1.2 kehtib $\lambda_m = 0$ ehk

$$\forall r \in R \colon mr = 0.$$

$(\Longleftarrow)$
Kehtigu tingimus (5.2.1). Olgu $f \circ g = 0$, kus $g \colon X_R \to M_R$ ja $f \colon M_R \to N_R$ on morfismid kategoorias UMod_R. Võtame $x \in X$. Mooduli X_R unitaarsuse tõttu leiduvad $x_1 \ldots, x_k \in X$ ja $r_1, \ldots, r_k \in R$ nii, et $x = x_1 r_1 + \ldots + x_k r_k$. Kuna eelduse põhjal iga $i \in \{1, \ldots, k\}$ korral $f(g(x_i)) = 0$, siis tingimuse (5.2.1) põhjal $g(x_i) r_i = 0$ iga $i \in \{1, \ldots, k\}$ korral. Seega

$$g(x) = g(x_1 r_1 + \ldots + x_k r_k) = g(x_1) r_1 + \ldots + g(x_k) r_k = 0 + \ldots + 0 = 0.$$

Järelikult $g = 0$ ning lemma 5.1.2 põhjal f on monomorfism. ■

5.3 Monomorfismid püsivate moodulite kategoorias

Definitsioon 5.3.1. Parempoolset R-moodulit M_R nimetatakse **püsivaks** (*firm*), kui kujutus

$$\mu_M \colon M \otimes R \to M, \quad \mu_M \left(\sum_{h=1}^{k} m_h \otimes r_h \right) := \sum_{h=1}^{k} m_h r_h$$

on bijektiivne.

Näitame, et eelnev definitsioon on korrektne. Selleks paneme kõigepealt tähele, et kujutus $\beta \colon \; M \times R \to M, \; \beta(m, r) := mr$ on tasakaalustatud. Kuna moodul M on liitmise suhtes Abeli rühm, siis vastavalt tensorkorrutise definitsioonile leidub ühene Abeli rühmade homomorfism f nii, et $f \circ \tau = \beta$. Olgu $m \in M$ ja $r \in R$, siis

$$mr = \beta(m, r) = (f \circ \tau)(m, r) = f(m \otimes n).$$

Seega $f = \mu_M$. Vastavalt ühesusele ei saa selliseid homomorfisme rohkem olla ning seetõttu on μ_M korrektselt defineeritud.

Kõigi püsivate parempoolsete R-moodulite kategooriat tähistame FMod_R. Ringi R nimetatakse **püsivaks**, kui ta on püsiv parempoolse R-moodulina R_R.

Lihtne on aru saada, et mooduli M_R unitaarsus on samaväärne kujutuse μ_R sürjektiivne olemisega. Seega iga püsiv moodul on unitaarne ja FMod_R on kategooria UMod_R alamkategooria.

Lemma 5.3.2. *Olgu R püsiv ring. Siis $M \otimes_R R$ on püsiv parempoolne R-moodul iga parempoolse R-mooduli M_R korral ja leidub funktor*

$$- \otimes R \colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{FMod}_R.$$

TÕESTUS. Olgu M_R parempoolne moodul üle püsiva ringi R. Vastavalt lausele 4.3.3 leidub isomorfism $\alpha\colon (M\otimes R)\otimes R \to M\otimes(R\otimes R)$ nii, et $\alpha((m\otimes r)\otimes s) = m\otimes(r\otimes s)$. Kuna

$$\begin{aligned}((1_M\otimes\mu_R)\circ\alpha)((m\otimes r)\otimes s) &= (1_M\otimes\mu_R)(m\otimes(r\otimes s)) = m\otimes\mu_R(r\otimes s) = \\ &= m\otimes rs = (m\otimes r)s = \mu_{M\otimes R}((m\otimes r)\otimes s),\end{aligned}$$

iga $m\in M$ ja $r,s\in R$ korral, siis $\mu_{M\otimes R} = (1_M\otimes\mu_R)\circ\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
(M\otimes R)\otimes R \arrow[rr, "\mu_{M\otimes R}"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & M\otimes R \\
& M\otimes(R\otimes R) \arrow[ur, "1_M\otimes\mu_R"'] &
\end{tikzcd}$$

Joonis 5.2

Kujutus $\mu_R\colon\ R\otimes R\to R$ on bijektiivne, kuna ring R on vastavalt eeldusele püsiv. Seega on homomorfismde tensorkorrutis $1_M\otimes\mu_R = (M\otimes -)(\mu_R)$ isomorfism, sest iga funktor viib isomorfismi isomorfismiks. Järelikult on $\mu_{M\otimes R}$ bijektiivne, kuna ta avaldub kahe isomorfismi komposistsioonina.

Kokkuvõttes on moodul $M\otimes R$ püsiv ning seetõttu ilmselt leidub funktor $-\otimes R\colon \mathsf{Mod}_R\to\mathsf{FMod}_R$. ■

Lause 5.3.3 ([11, Teoreem 2.7]). *Kui R on idempotentne ring, siis kategooriad FMod_R ja CMod_R on ekvivalentsed.*

Lause 5.3.4. *Kui R on ring, siis CMod_R on kategooria Mod_R reflektiivne alamkategooria.*

Eelnev lause põhineb järeldusel, mis on toodud artiklis [10] pärast lauset 5.

Järeldus 5.3.5. *Kui R on idempotentne ring, siis kategoorias FMod_R langevad monomorfismid, regulaarsed monomorfismid ja ekstremaalsed monomorfismid kokku.*

TÕESTUS. Kuna lause 5.2.1 põhjal langevad monomorfismid, regulaarsed monomorfismid ja ekstremaalsed monomorfismid kokku kategoorias Mod_R, siis lause 5.3.4 ja järelduse 2.3.5 tõttu teevad nad seda ka kategoorias CMod_R. Sama peab kehtima kategooriaga CMod_R ekvivalentses kategoorias FMod_R. ■

Lemma 5.3.6. *Olgu R ring. Siis $\mu = (\mu_M)_{M\in\mathsf{Mod}_R}$ on loomulik teisendus funktorist $-\otimes R\colon\ \mathsf{Mod}_R\to\mathsf{Mod}_R$ funktorisse 1_{Mod_R}.*

TÕESTUS. Iga mooduli $M_R \in \mathsf{Mod}_R$ korral olgu kujutus $\mu_M\colon M \otimes R \to M$ defineeritud nii nagu definitsioonis 5.3.1. Siis on lihtne näha, et kehtib $\mu_M \in \mathrm{Mor}(M \otimes R, M_R)$, kusjuures $M \otimes R$ on parempoolne R-moodul tänu lemmale 4.3.4. Teiseks peame näitama, et iga $M_R, N_R \in \mathsf{Mod}_R$ ja iga $f \in \mathrm{Mor}(M_R, N_R)$ korral on diagramm joonisel 5.3 kommutatiivne.

$$\begin{tikzcd}
M \otimes R \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "f \otimes 1_R"'] & M \arrow[d, "f"] \\
N \otimes R \arrow[r, "\mu_N"'] & N
\end{tikzcd}$$

Joonis 5.3

Selleks vaatame suvalist elementi $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \otimes r_k \in M \otimes R$, sel juhul

$$\begin{aligned}
(f \circ \mu_M)\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \otimes r_k\right) &= f\left(\mu_M\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \otimes r_k\right)\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n} m_k r_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(m_k) r_k = \\
&= \mu_N\left(\sum_{k=1}^{n} f(m_k) \otimes r_k\right) = \mu_N\left((f \otimes 1_R)\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \otimes r_k\right)\right) = \\
&= (\mu_N \circ (f \otimes 1_R))\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \otimes r_k\right).
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes on μ loomulik teisendus funktorist $- \otimes R$ funktorisse 1_{Mod_R}. ■

Lause 5.3.7 ([10, Teoreem 13]). *Kui R on ring, siis kategooria FMod_R on koreflektiivne alamkategooria kategoorias Mod_R.*

Täpsemalt öeldes iga $M_R \in \mathsf{Mod}_R$ korral $\mu_M\colon\ M \otimes R \to M$ on selline, et

$$\forall M' \in \mathsf{FMod}_R \, \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{FMod}_R}(M'M) \, \exists! f' \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Mod}_R}(M', M \otimes R)\colon \quad \mu_M \circ f' = f.$$

Lause 5.3.8. *Olgu R püsiv ring. Kui $f\colon\ M \to N$ on monomorfism kategoorias Mod_R, siis $f \otimes 1_R$ on monomorfism kategoorias FMod_R.*

TÕESTUS. Olgu R püsiv ring ja $f\colon\ M \to N$ monomorfism kategoorias Mod_R. Uurime, kas morfism $f \otimes 1_R$ on monomorfism. Selleks leidugu kategoorias FMod_R morfismid $u, v\colon\ X \to M \otimes R$ nii, et

$$(f \otimes 1_R) \circ u = (f \otimes 1_R) \circ v. \tag{5.3.1}$$

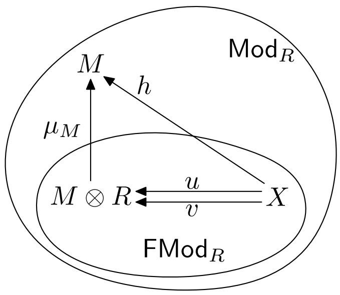
$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & M \otimes R \arrow[r, "f \otimes 1_R"] \arrow[d, "\mu_M"'] & N \otimes R \arrow[d, "\mu_N"] \\
& M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}
$$

Joonis 5.4

Nüüd komponeerime võrdust (5.3.1) mõlemalt poolt kujutusega μ_N ning arvutame μ_N definitsioonile tuginedes

$$
\mu_N \circ (f \otimes 1_R) \circ u = \mu_N \circ (f \otimes 1_R) \circ v,
$$
$$
f \circ \mu_M \circ u = f \circ \mu_M \circ v.
$$

Kuna vastavalt eeldusele on f monomorfism, siis eelnevast võrdusest saame $\mu_M \circ u = \mu_M \circ v$ ning tähistame $h := \mu_M \circ u$. Praeguseks oleme saanud joonisel 5.5 kujutatud olukorra.



Joonis 5.5

Tulenevalt lausest 5.3.7 teame, et FMod_R on kategooria Mod_R koreflektiivne alamkategooria. Seega vastavalt koreflektiivsuse definitsioonis olevale ühesuse nõudele saame, et $u = v$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et $f \otimes 1_R$ on monomorfism kategoorias FMod_R. ∎

Järgnevalt annan monomorfismide kirjelduse kategooria Mod_R reflektiivses alamkategoorias FMod_R, juhul kui R on püsiv ring.

TEOREEM 5.3.9. *Olgu R püsiv ring ja $f\colon M_R \to N_R$ morfism kategoorias FMod_R, siis on järgnevad väited samaväärsed:*

(1) f on monomorfism;
(2) f on ekstremaalne monomorfism;
(3) f on regulaarne monomorfism;

(4) Iga $m \in M$ korral

$$f(m) = 0 \implies \forall r \in R\colon mr = 0;$$

(5) $f = \mu_N(a \otimes 1_R)g$ mingi unitaarse mooduli A_R, injektiivse homomorfismi $a\colon A_R \to N_R$ ja isomorfismi $g\colon M_R \to A \otimes R$ korral;

(6) $f = h(a \otimes 1_R)g$ mingi injektiivse homomorfismi $a\colon A_R \to B_R$ ning isomorfismide $g\colon M_R \to A \otimes R$ ja $h\colon B \otimes R \to N_R$ korral.

TÕESTUS.
$((1) \iff (2) \iff (3))$
Järeldus 5.3.5.
$((1) \iff (4))$
Selle saab tõestada täpselt samamoodi nagu teoreemi 5.2.1.
$((2) \implies (5))$
Olgu f ekstremaalne monomorfism kategoorias FMod_R. Tulenevalt moodulite homomorfismiteoreemist, leiduvad sürjektiivne morfism $e\colon M_R \to A_R$ ja injektiivne morfism $a\colon A_R \to N_R$ nii, et $f = a \circ e$.

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"] & & N \\
M \otimes R \arrow[ur, "\mu_M"] \arrow[dr, "e \otimes 1_R"'] & & A \arrow[ur, "a"] & \\
 & A \otimes R \arrow[ur, "\mu_A"] \arrow[rr, "a \otimes 1_R"'] & & N \otimes R \arrow[uu, "\mu_N"']
\end{tikzcd}$$

Joonis 5.6

Unitaarse mooduli M_R faktormoodulina on moodul $A_R = M_R/\operatorname{Ker} f$ samuti unitaarne (lemma 3.2.10). Siiski A_R ei pruugi olla püsiv parempoolne R-moodul. Kasutades μ loomulikust, saame

$$f \circ \mu_M = a \circ e \circ \mu_M = a \circ \mu_A \circ (e \otimes 1_R) = \mu_N \circ (a \otimes 1_R) \circ (e \otimes 1_R).$$

Kuna M on püsiv, mistõttu μ_M on bijektiivne, siis

$$f = (\mu_N \circ (a \otimes 1_R)) \circ ((e \otimes 1_R) \circ \mu_M^{-1}).$$

Lemma 5.3.2 põhjal kuuluvad $M \otimes R$ ja $A \otimes R$ kategooriasse FMod_R. Kuna e on sürjektiivne, siis ka kujutus $e \otimes 1_R$ on sürjektiivne, ning seega on ta epimorfism kategoorias FMod_R. Siis on ka selle kompositsioon $(e \otimes 1_R) \circ \mu_M^{-1}$ mingi bijektsiooniga epimorfism. Nüüd kuna vastavalt eeldusele on f ekstremaalne monomorfism, siis on $g := (e \otimes 1_R) \circ \mu_M^{-1}$ isomorfism.

((5) $\implies$ (6))
See kehtib ilmselt, kui võtta $B_R := N_R$ ja $h := \mu_N$.
((6) $\implies$ (1))
Oletame, et $f = h \circ (a \otimes 1_R) \circ g$ mingi injektiivse homomorfismi $a\colon A_R \to B_R$ ning isomorfismide $g\colon M_R \to A \otimes R$ ja $h\colon B \otimes R \to N_R$ korral.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \\ A \otimes R \arrow[r, "a \otimes 1_R"'] & B \otimes R \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Joonis 5.7

Kuna kujutus a on injektiivne, siis lause 5.1.3 põhjal on a regulaarne monomorfism kategoorias Mod_R. Nüüd lause 5.3.8 tõttu on morfism $a \otimes 1_R$ regulaarne monomorfism kategoorias FMod_R. Kuna g ja h on isomorfismid, siis f on samuti regulaarne monomorfism. ■

5.4 Püsiva mooduli alamobjektide võre

Olgu $\mathcal{A}$ kategooria. Vaatleme selle kategooria monomorfismide klassil ekvivalentsusseost:

$$f \sim g \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists h \in \mathrm{Iso}(\mathcal{A})\colon\; f = g \circ h.$$

$$\begin{tikzcd} & A & \\ B \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & C \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

Joonis 5.8

Tähistame monomorfismi f ekvivalentsiklassi sümboliga $\overline{f}$ ja objekti $A \in \mathcal{A}$ korral tähistame $\mathrm{Sub}_{\mathcal{A}}(A) := \{\overline{f} \mid f\colon B \to A \text{ on monomorfism}\}$. Klass $\mathrm{Sub}_{\mathcal{A}}(A)$ on osaliselt järjestatud klass järjestusseosega

$$\overline{f} \leqslant \overline{g} \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists h \in \mathrm{Mor}(\mathcal{A})\colon f = g \circ h.$$

Sellist konstruktsiooni on vaadatud raamatus [8] (ptk. II.4), kus seost $\sim$ nimetatakse *alamobjektide isomorfsuseks*. Olgu $M_R \in \mathsf{FMod}_R$ ja tähistame

$$\mathcal{S}(M) := \mathrm{Sub}_{\mathsf{FMod}_R}(M).$$

Sümboliga $\mathcal{U}(M)$ tähistame, mooduli M_R kõigi unitaarsete alammoodulite hulka. Hulk $\mathcal{U}(M)$ on võre, kus supreemum ja infiimum on defineeritud järgnevalt:

$$\begin{aligned} B \vee C &:= B + C, \\ B \wedge C &:= (B \cap C)R, \end{aligned}$$

kus $B, C \in \mathcal{U}(M)$.

Lause 5.4.1. *Olgu R idempotentne ring ja $M_R \in \mathsf{Mod}_R$. Siis $\mathcal{U}(M)$ on sisalduvusseose suhtes täielik võre, kus iga $U \subseteq \mathcal{U}(M)$ korral*

$$\begin{aligned} \bigwedge U &= \left(\bigcap_{U^* \in U} U^* \right) R, \\ \bigvee U &= \sum_{U^* \in U} U^*. \end{aligned}$$

Tõestus. Kontrollime, et $(\mathcal{U}(M), \wedge, \vee)$ on täielik võre. Vastavalt lemmale 3.2.11 leidub võres $\mathcal{U}(M)$ suurim element, milleks on alammoodul MR. Olgu $U \subseteq \mathcal{U}(M)$ mittetühi alamhulk. Vaatleme hulka

$$V = (\cap U)R.$$

See hulk on mittetühi, kuna $0 \in \cap U$, ning $V \in \mathcal{U}(M)$. Kuna iga $U^* \in U$ korral $\cap U \subseteq U^*$, siis ka $V = (\cap U)R \subseteq U^* R = U^*$, seega V on alamhulga U alumine tõke. Oletame, et ka $\tilde{V} \in \mathcal{U}(M)$ on alamhulga U alumine tõke. Siis iga $U^* \in U$ korral $\tilde{V} \subseteq U^*$. Seega $\tilde{V} \subseteq \cap U$. Et $\tilde{V}$ on unitaarne, siis $\tilde{V} = \tilde{V}R \subseteq (\cap U)R = V$. Järelikult V on hulga U alumine raja. Nüüd vastavalt lausele 3.3.4 on $\mathcal{U}(M)$ täielik võre.

Näitame veel, et selles täielikus võres

$$\bigvee U = \sum_{U^* \in U} U^*.$$

Paneme tähele, et iga $\tilde{U} \in U$ korral $\tilde{U} \subseteq \sum_{U^* \in U} U^*$. Seega on $\sum_{U^* \in U} U^*$ hulga U ülemine tõke. Olgu $\tilde{V} \in \mathcal{U}(M)$ samuti hulga U ülemine tõke. Võtame elemendi $x \in \sum_{U^* \in U} U^*$. Siis leiduvad unitaarsed alammoodulid $U_1, \ldots, U_n \in U$ ja elemendid $u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n$ nii, et $x = u_1 + \ldots + u_n$. Kuna $\tilde{V}$ on hulga U ülemine tõke, siis $U_1 \subseteq \tilde{V}, \ldots, U_n \subseteq \tilde{V}$ ja seega $u_1, \ldots, u_n \in \tilde{V}$. Et $\tilde{V}$ on alammoodul, siis $x = u_1 + \ldots + u_n \in \tilde{V}$. Seega $\sum_{U^* \in U} U^* \subseteq \tilde{V}$. Järelikult on $\sum_{U^* \in U} U^*$ hulga U ülemine raja. ∎

Lause 5.4.2. *Olgu R idempotentne ring ja $M_R \in \mathsf{Mod}_R$. Siis võre $\mathcal{U}(M)$ on modulaarne.*

TÕESTUS. Olgu $A, B, C \in \mathcal{U}(M)$ sellised, et $A \subseteq C$. Uurin modulaarse võre defineerivat tingimust:

$$(A \vee B) \wedge C = ((A+B) \cap C)R \underset{(1)}{=} ((A \cap C) + (B \cap C))R \underset{(2)}{=} (A + (B \cap C))R =$$
$$\underset{(3)}{=} AR + (B \cap C)R = A + (B \cap C)R = A \vee (B \wedge C).$$

Näitame ükshaaval, et kehtivad järgnevad võrdused.

(1) Näitame, et $(A+B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C)$.
($\subseteq$)
Vaatleme elementi $x \in (A+B) \cap C$. Sel juhul leiduvad $a \in A \subseteq C$ ja $b \in B$ nii, et $a + b = x$. Kuna C on kinnine lahutamise suhtes, siis $x - a = b \in C$, mistõttu $x = a + b \in (A \cap C) + (B \cap C)$.
($\supseteq$)
Vaatleme elementi $y \in (A \cap C) + (B \cap C)$. Sel juhul leiduvad elemendid $a \in A$ ja $b \in B$ nii, et $a, b \in C$ ning $a + b = y$. Kuna C on kinnine liitmise suhtes, siis $a + b \in C$, mistõttu $y \in (A+B) \cap C$.

(2) Tuleneb eeldusest $A \subseteq C$.

(3) Olgu $a_1, \ldots, a_n \in A$, $b_1, \ldots, b_n \in B \cap C$ ja $r_1, \ldots, r_n \in R$. Sel juhul

$$(A + (B \cap C))R \ni (a_1 + b_1)r_1 + \ldots + (a_n + b_n)r_n =$$
$$= (a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n) + (b_1 r_1 + \ldots + b_n r_n) \in AR + (B \cap C)R.$$

Kokkuvõttes on võre $\mathcal{U}(M)$ modulaarne. ∎

Artiklis [5] on tõestatud järgmine teoreem.

TEOREEM 5.4.3 ([5, Teoreem 6]). *Kui R on ring ja M_R on püsiv moodul, siis $\mathcal{S}(M)$ on modulaarne võre.*

Järgnevas teoreemis näitame, et püsiva ringi R ja püsiva mooduli M_R korral on võred $\mathcal{S}(M)$ ja $\mathcal{U}(M)$ isomorfsed. Eelnevalt on artiklis [9] näidatud, et analoogiline olukord leiab aset ka püsivate poolrühmade ja polügoonide korral.

TEOREEM 5.4.4. *Olgu M_R püsiv parempoolne moodul üle püsiva ringi R. Siis $\mathcal{S}(M)$ on osaliselt järjestatud hulk ning modulaarne võre, mis on isomorfne võrega $\mathcal{U}(M)$.*

TÕESTUS. Defineerime kujutuse $\Psi \colon \mathcal{U}(M) \to \mathcal{S}(M)$ järgnevalt

$$\Psi(N_R) := \overline{\mu_M \circ (u_N \otimes 1_R)},$$

kus $N_R \in \mathcal{U}(M)$ ja $u_N\colon N \to M$ on sisestus. Vaatleme ekvivalentsiklassi $\overline{f} \in \mathcal{S}(M)$, kus $f\colon N_R \to M_R$ on monomorfism kategoorias FMod_R. Teoreemi 5.3.9 tingimuse (5) põhjal $f = \mu_M \circ (a \otimes 1_R) \circ g$ mingi unitaarse R-mooduli A_R, injektiivse homomorfismi $a\colon A_R \to M_R$ ja isomorfismi $g\colon N_R \to A \otimes R$ korral.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "u_N"] & M \\
N \otimes R \arrow[u, "\mu_N"] \arrow[r, "u_N \otimes 1_R"'] & M \otimes R \arrow[u, "\mu_M"']
\end{tikzcd}$$

Joonis 5.9

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "f"] & M \\
A \otimes R \arrow[u, "g"] \arrow[r, "a \otimes 1_R"'] & M \otimes R \arrow[u, "\mu_M"']
\end{tikzcd}$$

Joonis 5.10

Kirjutame kujutuse a kui kompositsiooni $a = a' \circ u_{a(A)}$,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a'"] & a(A) \arrow[r, "u_{a(A)}"] & M
\end{tikzcd}$$

Joonis 5.11

kus $a(A)$ on mooduli M_R unitaarne alammoodul ja $a'\colon x \mapsto a(x)$ on isomorfism.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes R \arrow[r, "a' \otimes 1_R"] \arrow[rr, bend left, "a \otimes 1_R"] \arrow[d, "\mu_A"'] & a(A) \otimes R \arrow[r, "u_{a(A)} \otimes 1_R"] \arrow[d, "\mu_{a(A)}"] & M \otimes R \arrow[d, "\mu_M"] \\
A \arrow[r, "a'"'] \arrow[rr, bend right, "a"'] & a(A) \arrow[r, "u_{a(A)}"'] & M
\end{tikzcd}$$

Joonis 5.12

Nüüd kasutades μ loomulikkust ja seda, et $a' \otimes 1_R$ ja g on isomorfismid, saame et

$$\begin{aligned}
\Psi(a(A)) &= \overline{\mu_M \circ (u_{a(A)} \otimes 1_R)} = \overline{u_{a(A)} \circ \mu_{a(A)}} = \overline{u_{a(A)} \circ \mu_{a(A)} \circ (a' \otimes 1_R)} = \\
&= \overline{u_{a(A)} \circ a' \circ \mu_A} = \overline{a \circ \mu_A} = \overline{\mu_M \circ (a \otimes 1_R)} = \overline{\mu_M \circ (a \otimes 1_R) \circ g} = \overline{f}.
\end{aligned}$$

Viimane tõestab kujutuse Ψ sürjektiivsuse.

Olgu $N_R, O_R \in \mathcal{U}(M)$ ja $N_R \subseteq O_R$. Vaatleme sisestust $v\colon N \to O$.

$$
\begin{tikzcd}
N \otimes R \arrow[r, "v \otimes 1_R"] \arrow[d, "\mu_N"'] \arrow[rr, bend left, "u_N \otimes 1_R"] & O \otimes R \arrow[r, "u_O \otimes 1_R"] \arrow[d, "\mu_O"] & M \otimes R \arrow[d, "\mu_M"] \\
N \arrow[r, "v"'] \arrow[rr, bend right, "u_N"'] & O \arrow[r, "u_O"'] & M
\end{tikzcd}
$$

Joonis 5.13

Nüüd $u_N = u_O \circ v$ ja

$$
\begin{aligned}
\Psi(N_R) = \overline{\mu_M \circ (u_N \otimes 1_R)} = \overline{\mu_M \circ ((u_O \circ v) \otimes 1_R)} = \overline{\mu_M \circ (u_O \otimes 1_R) \circ (v \otimes 1_R)} \leqslant \\
\leqslant \overline{\mu_M \circ (u_O \otimes 1_R)} = \Psi(O_R).
\end{aligned}
$$

Teiselt poolt, kui eeldada, et $\Psi(N_R) \leqslant \Psi(O_R)$, siis

$$\overline{u_N \circ \mu_N} = \overline{\mu_M \circ (u_N \otimes 1_R)} \leqslant \overline{\mu_M \circ (u_O \otimes 1_R)} = \overline{u_O \circ \mu_O}.$$

Seega leidub morfism $g\colon N \otimes R \to O \otimes R$ nii, et $u_N \circ \mu_N = u_O \circ \mu_O \circ g$. Kui $x \in N$ on suvaline, siis unitaarsuse tõttu teame, et leiduvad $x_1, \ldots, x_n \in N$ ja $r_1, \ldots, r_n \in R$ nii, et $x = x_1 r_1 + \ldots + x_n r_n$. Järelikult

$$x = u_N \left(\sum_{k=1}^{n} x_k r_k \right) = u_N \left(\mu_N \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes r_k \right) \right) = u_O \left(\mu_O \left(g \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes r_k \right) \right) \right) \in O$$

mistõttu $N \subseteq O$.

Sellega oleme näidanud, et Ψ on sürjektiivne sisestus ning seetõttu osaliselt järjestatud hulkade isomorfism. Kuna $\mathcal{U}(M)$ on modulaarne võre, siis $\mathcal{S}(M)$ on samuti modulaarne võre. (vt. lause 3.3.9). ■

Kirjandus

[1] J. Adámek, H. Herrlich, G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, University of Bremen, 2004.

[2] F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[3] B. A. Davey, H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[4] J. L. Dorroh, *Concerning Adjunctions to Algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1932), 85–88.

[5] J. Gonzalez–Ferez, L. Marìn, *Monomorphisms and kernels in the category of firm modules*, Glasgow Math. J. 52A (2010), 83–91.

[6] M. Kilp, *Algebra I*, Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2005.

[7] M. Kilp, *Algebra II*, Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 1998.

[8] M. Kilp, *Kategooriad*, Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2000.

[9] V. Laan, Ü. Reimaa, *Monomorphisms in categories of firm acts*, *ilmumas*.

[10] L. Marín, *The Construction of a Generator for R-DMod*, sarjast Lecture notes in pure and applied mathematics, vol. 210 (New York, Marcel–Dekker, 2000), 287–293.

[11] L. Marín, *Morita equivalence based on contexts for various categories of modules over associative rings*, J. P. A. A. 133 (1998), 219–232.

[12] P. Puusemp, *Üldalgebra alused*, TTÜ kirjastus, Tallinn, 2012.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Kristo Väljako,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose,
   „Monomorfismid moodulite kategooriates“,

   mille juhendaja on prof. Valdis Laan,

   1.1 reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2 üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 15.05.2018