Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond
Matemaatika instituut

Mai Simson

Matemaatika võimalikest rakendustest muusikas

Bakalaureusetöö

Juhendaja: prof. Mati Abel

Autor: . . . .

Juhendaja: . . . .

Lubatud kaitsmisele
Matemaatika instituudi juhataja: . . . .

Tartu 2013

Sisukord

Sissejuhatus

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks on anda lühiülevaadet matemaatika võimalikest rakendustest muusikas. Muusikateoreetikud kasutavad tihti muusika mõistmiseks matemaatika abi. Töös toomegi välja erinevad valdkonnad, kus saab muusika lahtiseletamiseks kasutada matemaatikat.

Antud bakalaureusetöö on kirjutatud referatiivses vormis ning valdavalt on kasutatud kas inglise- või venekeelseid materjale. Peamisteks allikateks on G. E. Šilovi "*Lihtne gamma*"([13]), I. Garšneki õpik "*Õhtumaade muusikalugu*"([4]), T.U. Fiore "*Music and Mathematics*"([3]) ning D. Bensoni "*Music: A Mathematical Offering*" ([2])

Bakalaureusetöö koosneb neljast peatükist. Esimeses peatükis anname definitsioonid töös kasutatavatele põhimõistetele. Teises peatükis on lühidalt kirjeldatud matemaatika ja muusika ühist arengut. Kolmandas peatükis kirjeldatakse logaritme ning ahelmurde kasutades muusikalist skaalat. Viimane, neljas peatükk keskendub matemaatika erinevatele rakendusvõimalustele muusikas. Lühidalt kirjeldatakse I. Xenakise poolt välja toodud intervallide hulga algebralisi omadusi, P. Boulezi teose "Struktuurid I" komponeerimiseks kasutatud teooriat, matemaatika ning astronoomia abil kirjutatud U. Sisaski kooriteost "Gloria Patri", erinevaid arvuteooria rakendusi teoste loomisel, fibonacci arvude esinemist ning siinuselise võnkumise kasutamist helilaine kirjeldamisel.

1 Põhimõisted

Kõigepealt esitame mõned põhimõisted, mida kasutame käesolevas töös.

Definitsioon 1.1. **Ahelmurd** on avaldis kujul

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \dots}}},$$

kus a_0 on täisarv ja a_k ning b_k on naturaalarvud.

Definitsioon 1.2. **Akord** on kolme või enama heli kooskõla. Akordide omavahelised seosed, sugulus ja kombineerimisvõimalused moodustavad klassikalise harmooniaõpetuse põhiosa.

Definitsioon 1.3. **Altereerimiseks** nimetatakse diatoonilise heli muutmist, so kõrgendamist või madaldamist, mida tähistatakse vastavate märkide kirjutamisega noodi ette.

Definitsioon 1.4. **Diatoonika** on helisüsteem, mis moodustub ainult alushelidest või mis tahes helistikus oleva helilaadi altereerimata astmetest. Diatoonilised on kõik seitsmehelilised heliread, mis on oktavi ulatuses täidetud viie tervetooni ja kahe pooltooniga, kusjuures pooltoonid on teineteisest eraldatud tervetoonidega.

Definitsioon 1.5. **Glissando** märgib helikõrguse sujuvat ja tavaliselt ulatuslikku muutumist instrumendi helistmikul. See saavutatakse näiteks sõrme libistamisega üle klaveriklahvide või harfikeelte.

Definitsioon 1.6. Muusikas mõistetakse **intervallina** kahe erineva heli diatooniliste astmete vahekaugust.

Definitsioon 1.7. **Inversiooniks** nimetatakse muusikalise intervalli ümberpööret. Seriaalse meetodi puhul nimetatakse inversiooniks üht reakujudest.

Definitsioon 1.8. **Modulatsioon** on üleminek uude helistikku.

Definitsioon 1.9. **Pentatoonika** on pooltoonideta viieheliline astmik. Pentatoonika struktuuri moodustavad klaveril mustad klahvid. Pentatoonikat kohtab sageli Idamaade muusikas, samuti Euroopa rahvamuusikas.

Definitsioon 1.10. Sideeriline tiirlemisperiood on ajavahemik, mille vältel taevakeha (planeedi, tähe) kaaslane teeb taevakeha ümber täistiiru tähistaeva kui taustsüsteemi suhtes.

Definitsioon 1.11. Tempereeritud häälestus on muusikas kasutatav häälestussüsteem, mille puhul jaotatakse oktav kaheteistkümneks võrdseks osaks.

Definitsioon 1.12. Tetrahord on neljast järjestatud helist koosnev kogum.

Definitsioon 1.13. Tonaalsus ehk üht helikõrgust (toonikat) või helikõrguste süsteemi (toonika kolmkõla) eriliselt esile tõstev laad.

Definitsioon 1.14. Transponeerimine on muusikateose ülekandmine ühest helistikust teise. Seda kasutatakse eriti vokaalmuusikas, et võimaldada erinevate hääleliikide lauljatel esitada samu palu.

2 Matemaatika ja muusika ühine areng

Matemaatika ajalugu hõlmab endas ka seoseid muusikaga ning heli füüsikaliste omadustega. Rääkides muusika ja matemaatika seostest jõuame tagasi aega vähemalt 6. sajandisse e.m.a seoses kreeka filosoofi Pythagorasega. Enamik inimesi teavad Pythagorast seoses Pythagorase teoreemiga, kuid see pole ainuke põhjus, miks me teda tänapäevani meenutame. Ta õppis ka muusikat ning uuris aritmeetilisi suhteid helikõrguste vahel. Arvatakse, et tema avastas seotuse numbrite ja helide vahel. Kuna inimkõrv ei suuda heli matemaatiliselt analüüsida, tuli Pythagorasel uurida vibreerivaid keeli. Ta avastas lihtsad seosed põhiheli ning tema ülemhelide vahel [5]. Muusika andis u 500 aastat e.m.a. tähelepanuväärseid impulsse arvuteooriale ja geomeetriale.

Juba 300 aastat e.m.a. leiutati tõusvad, laskuvad ja paigalseisvad helikõrgusintervallid, mille viis liitmistehte keelde Aristoxenos, pakkudes samas teoreetiliselt välja täieliku kromaatilise kaksteistheliastmiku. Paralleelselt on see jätkuks tööle pillikeele pikkuste multiplikatiivse keelega, mis on aditiivsete astmete keele tõlkeks. Järelikult mõjutab muusikateooria logaritmide (muusikalised intervallid) ning eksponentsiaalide (pillikeele pikkused) isomorfismi avastamist rohkem kui 15 sajandit enne nende avastamist matemaatikas, olles ka eelkäijaks Aristoxenose rühmateooriale [15].

Esimesel aastatuhandel m.a.j. leiutas Guido d'Arezzost helikõrguste ajas tähistamiseks noodijoonestiku ning noodipeade abil kahedimensionaalse ruumilise esitluse, ennetades kolm sajandit Oresmi koordinaate ning seitse sajandit Fermat' ning Descartesi suurejoonelist analüütilist geomeetriat [15]. Munk Guido võttis ka kasutusele meile tuntud noodinimed do-re-mi-fa-sol-la-si (esialgselt kasutati küll do asemel ut). Huvitav on, et Pythagorasest täiesti sõltumatult jõudis helikõrguse ja võnkuva pillikeele pikkuse seoseni ka prantsuse teoloog, filosoof, matemaatik ja muusikateoreetik Marin Mersenne (1588–1648).

Peale Marin Mersenne'i uuris kooskõlasid ka Jean-Philippe Rameau (1683–1764), kes oli samuti prantsuse helilooja ja muusikateoreetik. Tema harmooniateooria põhines asjaolul, et ta kuulis ühe noodi mängimisel samaaegselt erinevaid helisid.

18. sajandil hakati rohkem kasutama matemaatilisi arvutusmeetodeid, mis aitasid kaasa ka keelte võnkumise uurimisele. Brooke Taylor, kes leiutas Taylori valemi, leidis ka diferentsiaalvõrrandi kirjeldamaks keelte võnkumist, kasutades algtingimust. Ta

nägi, et selle diferentsiaalvõrrandi vastuseks tuleb siinuskõver.

Daniel Bernoulli (1700–1782) ja Leonhard Euler (1707–1783), kes olid šveitsi matemaatikud, samuti Jean Babtiste D'Alembert (1717–1783), kes oli prantsuse matemaatik, füüsik, filosoof ja muusikateoreetik, osalesid kõik silmapaistvalt matemaatikat ja muusikat puudutavates diskussioonides. 1751. aastal kasutas Bernoulli oma raamatus Rameau tähelepanekuid ning 1752. aastal avaldas D'Alembert raamatu "Elements of theoretical and practical music according to the principals of Monsieur Rameau, clarified, developed and simplified"[5].

Alates 1930. aastast võeti kasutusele väiksemad helikõrgusastmed nagu veerand-, kuuendik- jne toonid. Samal sajandil võeti kasutusele katkestamatud helikõrgused ja ajaastmikud, arvutades reaalarvude abil kõla omadusi.

Iannis Xenakise töö tulemusena leidsid heliloomingus 1960. aastal rakendust ka kompleksarvud [15].

3 Muusikaline skaala

Muusika aluseks on määratud helikõrgusega helid, mis vaadeldes füüsikalisest seisukohast väljendavad õhus määratud sagedusega võnkeprotsessi. Näiteks, helikõrgus la vastab protsessile sagedusega 440 Hz. Üldiselt on meie kõrv suuteline vastu võtma kõrgusi sagedusega 16 Hz kuni 20000 Hz. Anname alljärgnevalt sageduste tabeli klaveri enimkasutatud piirkonna, esimese oktavi kohta.

Toon	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
Sagedus (Hz)	262	294	330	349	392	440	494	523

Esmapilgul moodustavad nende toonide sagedused järgnevuse, milles on raske märgata mingit korrapärasust. Pealegi, kõik arvud peale 440 on irratsionaalarvud, tabelis on antud nende ümardused täisarvuni. Nii on sagedus, mis vastab esimese oktavi mi-le tegelikult mitte 330, vaid $329,63\ldots$

Tehes keelpillidel või ka klaveril eksperimente, on lihtne veenduda, et keel põhisagedusega fHz kiirgab samuti heli sagedusega $2f$Hz. Fakti, et ühe keele võnked kujutavad endast võnkeid sagedusega $f, 2f, 3f, \ldots$, on võimalik põhjendada ka teoreetiliselt. Kui näiteks haamrike lööb keelele pikkusega l kaugusele h tema lõpust, siis toonidel sagedusega $2f$ ja f aplituudide suhe on võrdne:

$$\frac{\frac{1}{4}\cdot\sin(\frac{2h\cdot\pi}{l})}{1+\sin(\frac{h\pi}{l})}.$$

Eespool antud valemi tekkimist on võimalik matemaatiliselt näidata, kuid käesolevas töös seda ei uurita[13].

Asume taas muusikalise skaala ülesehitamise juurde. On selge, et seda tuleks üles ehitada nii, et selles olevad toonid oleks omavahel kooskõlas. Kahekordse sagedusega toon kõlab kokku põhisagedusega tooniga (keel kõlab nagu üks tervik). Seega toome sisse tingimuse: muusikaline skaala peab sisaldama koos sagedusega f ka sagedust $2f$. Kui aga rääkida sagedustest, mis on väiksemad kui f, siis on loomulik nõuda, et skaalal oleks ka sagedus $\frac{f}{2}$. Intervalli antud heli ja topeltsagedusega heli vahel nimetatakse oktaviks.

Nüüd kontrollime veel üht üldist arusaama, mida oleks samuti vaja arvestada skaala ülesehitamisel. Tuleb tagada võimalus esitada mingit meloodiat kas kõrgemalt või madalamalt võrreldes originaaliga. Meloodiat, kui mitte arvestada rütmi, kirjeldatakse järjestikuste intervallidega. Viia meloodia kõrgemaks, tähendab taasesitada ta teiste helidega, vastavalt kõrgematega, kuid säilitades toonide sageduste suhte igas intervallis. Näiteks, kui me mängime meloodiat mi-do-mi-do-fa-mi-re esimeses oktavis, siis sagedused hertsides oleks:

$$330 - 262 - 330 - 262 - 349 - 330 - 294.$$

Kui viime selle muusika $3,5$ tooni kõrgemaks, saame si-sol-si-sol-do-si-la ning kuulamisel meloodia ei moonutu. Järjestikused sagedused oleks siis $494 - 392 - 494 - 392 - 523 - 494 - 440$. Pole raske kontrollida, et sageduste ligikaudsed suhted igas meloodia intervallis säilisid:

$$\frac{330}{262} = \frac{494}{392}; \qquad \frac{349}{262} = \frac{523}{392} \quad \text{jne.}$$

Oletame, et me ehitasime toonide skaala, mis vastab kahele tingimusele:

1) iga heli sagedusega f korral on skaalal ka helid sagedustega $2f$ ja $\frac{1}{2}f$

2) skaala võimaldab kõrgendada/madaldada meloodiat ilma moonutusteta.

Olgu ühe oktavi ulatuses toonide skaala järgmine:

$$f = f_0 < f_1 < \cdots < f_{m-1} < f_m = 2f.$$

Need helid ise moodustavad juba lihtsa meloodia. Viime ta kõrgemaks ilma moonutusteta nii, et alumine toon tõuseks f_0-lt f_1-le. Uus meloodia peab algama helist f_1 ning lõppema heliga f_{m+1}, mis on aga heli f_1 kordus oktavis. Heli f_{m+1} on juba kõrgem kui oktavi kõrgeim heli f_m, aga me väidame, et ta on esimene, mis järgneb f_m-le. Tõepoolest, kui meie skaalal oleks toon f', mis asuks f_m ja f_{m+1} vahel, siis sellel skaalal oleks ka toon $\frac{1}{2}f'$, kusjuures mittevastavusest

$$f_m < f' < f_{m+1}$$

järelduks, et

$$f_0 < \frac{1}{2}f' < f_1.$$

Siin aga saame vastuolu, sest vastavalt tingimustele, f_1 on esimene heli, mis järgneb f_0-le, seepärast ei saa f_m ja f_{m+1} vahel olla f'. Pärast ühe astme võrra transponeerimist saab meie meloodia vastavalt tingimustele olla kujutatud toonidega skaalal, alustades f_1-st ja lõpetades f_{m+1}-ga. Kuna algmeloodia koosneb m+1 erinevast helist, aga f_1-st f_{m+1}-ni on meie skaalal täpselt $m+1$ erinevat heli:

$$f_1, f_2, \ldots, f_m, f_{m+1},$$

siis uus meloodia oleks kujul

$$f_1 < f_2 < ... < f_m < f_{m+1}.$$

Kuna ta vastab algmeloodiale moonutusteta, on meil

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1}, \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2}, \cdots, \frac{f_m}{f_{m-1}} = \frac{f_{m+1}}{f_m},$$

ehk sama tähendab

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \cdots = \frac{f_m}{f_{m-1}} = \frac{f_{m+1}}{f_m}.$$

Me näeme, et sagedused $f_0, f_1, \ldots, f_m$ moodustavad geomeetrilise progressiooni ehk gemeetrilise jada. Leiame selle jada teguri. Tähistame selle tähega q. Sellisel juhul

$$f_m = q^m f_0 = 2f_0,$$

seega $q^m = 2$. Skaala ise on täielikult määratav juhul kui on teada arv m, st astmete arv sageduste f_0 ja $2f_0$ vahel. Edasise ülesehituse mugavuse pärast läheme üle sagedustelt $f_0, f_1, \ldots$, nende kahendlogaritmi juurde $\log_2 f_0, \log_2 f_1, \ldots$ Oktav $(f_0, 2f_0)$ läheb seejuures vahemikku $\log_2 f_0$ kuni $\log_2 f_0 + 1$, st pikkuse vahemikku 1, aga geomeetriline jada $f_0, f_1, \ldots, f_m$ läheb üle aritmeetiliseks jadaks $\log_2 f_0, \log_2 f_1, \ldots \log_2 f_m$ vahega $\log_2 \sqrt[m]{2} = \frac{1}{m}$. Sellisel juhul meie skaala logaritmide teljel koosneb punktidest

$$A, A + \frac{1}{m}, A + \frac{2}{m}, \ldots, A + 1,$$

kus $A = \log_2 f_0$. Nüüd aga peame kuidagi leidma arvu m. Selleks toome sisse järgmise tingimuse:

3) koos iga sagedusega f peab muusikalisel skaalal olema ka sagedus $3f$.

Kuna me leppisime eelnevalt kokku, et iga sagedusega f peab skaalal olema ka sagedus $\frac{1}{2}f$, siis näeme, et iga sagedusega f peab skaalal olema ka sagedus $\frac{1}{2}3f = \frac{3}{2}f$. See sagedus huvitab meid, sest ta asub täpselt vahemikus $(f, 2f)$, milles me oma skaalat ehitame. Niisiis, m–astmete arv ühes oktavis $f_0, 2f_0$ peab olema valitud nii, et üks saadud astmeteks langeks kokku sagedusega $\frac{3}{2}f$. K-astme logaritm on $A + \frac{k}{m}$, sageduse $\frac{3}{2}f_0$ logaritm on $A + \log_2 \frac{3}{2}$. Siit saame võrduse

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{k}{m}, \tag{1}$$

mis peab olema rahuldatud täisarvude k ja m korral. On aga kerge veenduda, et antud võrrand ei oma lahendeid ratsionaalarvude hulgas, teisiti öeldes $\log_2 \frac{3}{2}$ on irratsionaalarv, iga k ja m korral. Arvutades logaritmi (1), saame:

$$2^{\frac{k}{m}} = \frac{3}{2},$$

või viime astmesse m,

$$2^k = \left(\frac{3}{2}\right)^m$$

$$2^{k+m} = 3^m$$

Viimases võrduses vasak pool on kõikide täisarvude k ja m korral paarisarv, samas kui parempoolne osa on paaritu arv. Sel juhul viis meid meie printsiip vastuoludeni: logaritmilise skaala toonide ühtlane jaotus on vastuolus tingimusega, et skaalal asub koos sagedusega f ka sagedus $\frac{3}{2}f$. Intervalli $(f, \frac{3}{2}f)$ nimetatakse kvindiks. Me näeme, et ühtlasel logaritmilisel toonide skaalal on puhtad kvindid võimatud.

Tähendab, tuleb millestki loobuda – kas ühtlasest skaalast või puhastest kvintidest. Ühtlane skaala on vajalik meloodia üleviimiseks kõrgemaks või madalamaks ilma meloodiat moonutamata ning sellest me ei tahaks loobuda. Kergem on loobuda puhastest kvintidest: võime püüda moodustada astmeid ratsionaalarvudest $\frac{k}{m}$ võimalikult lähedale irratsionaalarvule $\log_2 \frac{3}{2}$, sest vastavate sageduste vahe on väiksem kui $1Hz$ ja see on kuulmise järgi mittetajutav. Määrame vajaliku arvutuse täpsuse. Kogu esimene oktav on vahemikus 262Hz kuni 523Hz, järelikult kogupikkuses ligikaudu 260Hz. Logaritmilisel skaalal vastab see vahemiku pikkusele 1. Sellisel juhul vastab 1Hz ligikaudu arvule 0,004 logaritmilisel skaalal. Me peame tagama arvude $\frac{k}{m}$ ja $\log_2 \frac{3}{2} = 0,585\ldots$ vahel vähima vahe, kui on pool teisest kohast pärast koma. Lisaks kvindile $\frac{3}{2}f$ on veel punkte intervallis $(f, 2f)$, milles oleks soovitav omada muusikalisi astmeid. Intervallid, mis on väljendatud vastavate sageduste suhete abil:

$$2(\text{oktav}), \frac{3}{2}(\text{kvint}), \frac{5}{4}(\text{terts}), \frac{4}{5}(\text{kvart}), \frac{5}{3}(\text{sekst}), \frac{9}{8}(\text{sekund}), \frac{15}{8}(\text{septim})$$

Kirjutame välja vastavad kahendlogaritmi väärtused:

$$\log_2 2 = 1; \qquad \log_2 \frac{3}{2} = 0,585; \qquad \log_2 \frac{4}{3} = 0,416;$$
$$\log_2 \frac{5}{3} = 0,737; \qquad \log_2 \frac{5}{4} = 0,323; \qquad \log_2 \frac{9}{8} = 0,169;$$

Oma ühtlase jaotusega skaala peame tegema võimalikult lähedale nendele arvudele, seejuures suurim neist on $\log_2 \frac{3}{2} = 0,585$, mis vastab kõige tavalisemale intervallile oktavi piires.

Ühtlaselt jaguneva ratsionaalarvude skaala ehituseks, mis on lähendatud irratsionaalarvudele, on hea kasutada ahelmurdu, st murdu kujul

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots}}}, \tag{2}$$

kus $a_1, a_2, \ldots$ on positiivsed täisarvud.

On teada, et iga arv lõigul $[0, 1]$ võib olla jagatud ahelmurdarvuks (mis on lõputu, kui a on irratsionaalne). Avaldisi, ilmselgelt ratsionaalseid, nimetatakse ahelmurru (2) lähismurdudeks

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \frac{1}{a_1 + {}^1 a_2 + \frac{1}{a_3}} \text{ jne.}$$

Ahelmurru lähismurd, mis on koostatud arvu a jaoks ,

$$\frac{1}{a+\frac{1}{a_2+\ldots+\frac{1}{a_n}}}=\frac{p_n}{q_n},$$

on arvust a mitte kaugemal kui $\frac{1}{q_n^2}$ ja mitte kaugemal kui mistahes murd $\frac{p}{q}$ nimetajaga, mis ei ületa q_n.

Leiame esimesed lähismurrud arvu $x=\log_2\frac{3}{2}$ jagunemisel ahelmurruks. Saame

$$2^x=\frac{3}{2}. \tag{3}$$

Kuna $x<1$, siis asendades $y=\frac{1}{x}$, saame $y>1$. Võrrand (3) on siis kujul

$$\left(\frac{3}{2}\right)^y=2. \tag{4}$$

On ilmne, et otsitav arv y on 1 ja 2 vahel (kuna $\frac{3}{2}^1=\frac{3}{2}<2$ ja $\frac{3}{2}^2=\frac{9}{4}>2$). Ütleme, et $y=1+\frac{1}{z}$. Sel juhul $\frac{1}{z}<1, z>1$. Võrrand (4) on siis kujul

$$\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}}=2,\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}}=\frac{4}{3},$$

kust

$$\left(\frac{4}{3}\right)^z=\frac{3}{2}. \tag{5}$$

On selge, et tundmatu z asub 1 ja 2 vahel (kuna $\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$ ja $\frac{4}{3}^2=\frac{16}{9}>\frac{3}{2}$). Eeldame, et $z=1+\frac{1}{u}$. Võrrand (5) saab siis kuju

$$\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}}=\frac{3}{2},\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}}=\frac{9}{8},$$

kust

$$\left(\frac{9}{8}\right)^u=\frac{4}{3}. \tag{6}$$

Siin on tundmatu u arvude 2 ja 3 vahel (kuna $(\frac{9}{8}^2=\frac{81}{64}<\frac{4}{3}$ ja $\frac{9}{8}^3=\frac{729}{512}>\frac{4}{3})$. Seepärast asendame $u=2+\frac{1}{v}$, kus $v>1$.

Võrrandist (6) saame

$$\frac{9}{8}^2\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{v}}=\frac{4}{3},\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{v}}=\frac{256}{243}$$

või

$$\left(\frac{256}{243}\right)^v=\frac{9}{8}. \tag{7}$$

Edasi on kergem arvutusi teha kümnendlogaritmidega. Logaritmides võrrandit (7), leiame

$$v(\log 256-\log 243)=\log 9-\log 8,$$

või kasutades kümnendlogaritmide ligikaudväärtusi saame

$$v(2,4082-2,3856)=0,9542-0,9031,$$

kust

$$0,0226v=0,0511.$$

On selge, et v on 2 ja 3 vahel. Arvutusi võib teha lõputult, aga me peatume siin. Tulemuseks saame

$$x=\frac{1}{y}=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{u}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{v}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}}.$$

See annab meile esimesed otsitavad ahelmurdude liikmed, mis võrduvad

$$\frac{1}{1}=1;\quad \frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{3}{5};\quad \text{ja}\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=\frac{7}{12}.$$

Esimesed 2 lähimurdu on väga ebatäpsed, kolmas

$$\frac{k}{m}=\frac{3}{5}=0,6000$$

annab juba suhteliselt väikese vea, $0,015$ arvestades meid huvitava avaldise suurusega $\log_2\frac{3}{2}=0,585$. Aga ka see ebatäpsus ületab meie soovitud vea 0,004 peaaegu 4 korda.

Peale selle, kui me vaatame vastavat skaalat arvudest, mis on $\frac{1}{5}$ kordsed, st arvudest

$$\frac{1}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{5}, \quad 1,$$

siis näeme, et mõned meid huvitavad arvud nagu $\log_2 \frac{5}{3} = 0,727$ ja $\log_2 \frac{9}{8} = 0,169$ asuvad kaugel skaala jaotusest.

Viimaks vaatleme võrdust $\frac{k}{m} = \frac{7}{12} = 0,583$, mis on juba suhteliselt lähedal otsitavale 0,585; viga 0,002 on pool lubatust. Jagades logaritmilise skaala kaheteistkümneks lõiguks pikkusega l, saame

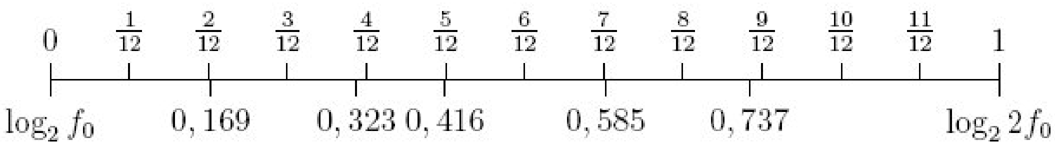
$$\frac{1}{12} = 0,083; \frac{2}{12} = 0,167; \frac{3}{12} = 0,250; \frac{4}{12} = 0,333; \frac{5}{12} = 0,418; \frac{6}{12} = 0,500;$$
$$\frac{7}{12} = 0,583; \frac{8}{12} = 0,667; \frac{9}{12} = 0,750; \frac{10}{12} = 0,833; \frac{11}{12} = 0,917; \frac{12}{12} = 1,000,$$

millest seitsmes on lähedane kvindile.

Me näeme, et meid huvitavad suurused

$$\log_2 \frac{4}{3} = 0,416; \quad \log_2 \frac{5}{3} = 0,737; \quad \log_2 \frac{5}{4} = 0,323; \quad \log_2 \frac{9}{8} = 0,169$$

satuvad joonisel 1 näidatud skaala punktide lähedale, kuigi mitte sellise täpsusega nagu $\log_2 \frac{3}{2}$. Sellisel vastab just 12-heliline skaala hästi meie nõuetele. Nüüd me oskame täielikult selgitada oktavi sageduste seaduspärasusi.

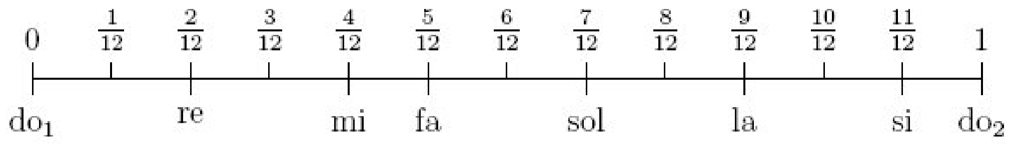


JOONIS 1

Esiteks, fikseerime 12-astmelise heliredeli tingimusega, et lähimate sageduste suhe, suurem väiksemaga, on püsiv ja võrdne

$$\sqrt[12]{2}.$$

Vastavat vähimat kahe heli vahelist intervalli nimetatakse pooltooniks, kaks kõrvuti asetsevat pooltooni moodustavad tooni (mitte segi ajada toon kui intervall ja toon kui fikseeritud sagedusega heli). Kogu oktav jaguneb 6 täistooniks ja 12 pooltooniks. Põhisagedused, mis on oktavis, saadakse väikeste sageduste $f_1, f_2, \ldots$ muutustega, mis on näidatud joonisel 1. Nii et heli sagedusega f_1 asemel vaatleme (joonis 2) lähimat täpset astet, milleks on $\frac{2}{12}$, f_2 asemel täpne aste on $\frac{4}{12}$ jne.



JOONIS 2

Kui oktavi alguse heli on do, siis järgnev põhiheli, mis erineb tooni võrra on re, veel tooni võrra kaugemal mi, järgmine pooltooni kaugemal fa. Need 4 järjestikust heli moodustavad tetrahordi. Oktavi teises pooles on teine tetrahord (sol-la-si-do), mis on nagu esimenegi samade sageduste suhetega. Just need sagedused, mida me vaatlesime alguses, figureerivad esimeses oktavis. Allolevas tabelis on näidatud sageduste kahendlogaritmid.

Toon	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
Sagedus (Hz)	262	294	330	349	392	440	494	523
$\log_2 f$	8,031	8,198	8,365	8,448	8,615	8,781	8,948	9,031
$\log_2 \frac{f}{f_0} = \log_2 f - \log_2 f_0$	0	0,167	0,334	0,417	0,584	0,75	0,917	1

Logaritmide vahed on just needsamad arvud, mis vastasid meie muusikalise skaala põhihelidele. Oleme selgeks teinud esimese oktavi struktuuri.

Lisaks seitsmele põhihelile on oktavis veel 5 abiheli, need kokku moodustavad 12-astmelise skaala. "Meloodia" põhihelidest do-re-mi-fa-sol-la-si-do moodustab nn naturaalse gamma do-mažoori. Viies meloodia ülespoole erinevatele kaugustele oktavi piires, sealjuures säilitades selles meloodias esinevaid intervalle, saame veel 11 gammat. Eksisteerib veel teisi gammasid, aga teistsuguste intervallide suhetega. Nii näiteks "loomulik gamma do-minoor" koosneb helidest do, re, mi-bemoll, fa, sol, la-bemoll, si-bemoll, do. Do-mažoori põhiastmed on do, mi, sol, mis moodustavad muusikalise keele do täieliku kooskõla. Do-minoori kolmkõla do, mi-bemoll, sol, saadakse mažoorse kolmkõla keskmise heli madaldamisega.

Ühtlase 12-astmelise logaritmilise muusikalise skaala ehitus on pikaajalise matemaatika ja muusika arenemise tulemus. On selge, et see ei saanud tekkida varem kui võeti kasutusele irratsionaalsed suurused ja logaritmid algebras. Nende teadmistega said teadlased tegutseda alles XVIII sajandil. Umbes aastal 1700 pakkus saksa muusik ja teadlane Andreas Werckmeister[1] välja eespoolkirjeldatud skaala ja valmistas esimese klaveri, mis oli häälestatud vastavalt sellele skaalale. Enne seda häälestati muusikainstrumente puhaste intervallide põhimõttel, mis tekitas raskusi teiste tonaalsuste kasutamisel ja tekitas modulatsioonidel probleeme. See omakorda seadis muusika arengule piirid. Alguses ei võtnud kõik kasutusele A.Werckmeisteri pakutud skaalat. Kuulus prantsuse filosoof Diderot oli selle vastu, ta arvas, et skaala ilma puhaste intervallideta ei saa olla muusika aluseks. XVIII sajandi suurim helilooja Johann Sebastian Bach tõestas oma töödega uue süsteemi elujõulisust. Ta lõi kahe köite jagu teoseid "Hästitempereeritud klaviir". Iga köide koosnes kahekümne neljast prelüüdist ja fuugast – 12 mažoorset ja 12 minoorset tonaalsust. Bachi teosed lõid uue ajastu muusika arengus, hilisemad heliloojad kasutasid juba uut süsteemi. Käesoleva ajani on selle süsteemi võimalused piiramatud.

Tänapäeval on olnud palju ettepanekuid suurendada pooltoonide arvu oktavis 24, 48 või 53ni selleks, et saada oktavi piires intervallid, mis on lähemal puhastele. Valmistatud on isegi eksperimentaalseid instrumente, ent muusikalisse praktikasse need veel jõudnud ei ole [13].

[1] Andreas Werckmeister (1645–1706) oli barokiaegne saksa organist, muusikateoreetik ja helilooja. Tema kirjutatud teostest on alles vaid voldik, milles on olemas teosed viiulile generaalbassi saatel. Werckmeister on pigem tuntud kui muusikateoreetik.

4 Matemaatika rakendusi muusikas

Kuni möödunud sajandi keskpaigani valitses kompositsioonis serialism, so muusika, kus samalaadsete muusikaliste elementide lõplikud rühmad korduvad teose vältel. Siinjuures rühmade järjestus võib olla erinev. Muusikateoreetikud analüüsivad helitöid, uurides, millised on ühe või teise autori töödes domineerivad helikõrgused, kas helitöödes esinevate helide rühmad on homogeensed (st kas rühma piires on noodid ühepikkused) või ei. Nende rühmade omaduste uurimine võib anda olulist teavet loodava või analüüsitava teose kui terviku esteetiliste väärtuste kohta, samuti helitöö autori omapära kohta.

Möödunud sajandi keskel hoogustus kompositsioonis matemaatika kasutamine. Püüti kategoriseerida muusikalisi objekte (helikõrgused ja nende rühmad, akordide hulgad, akordide järgnevuste hulgad jne) ja kirjeldada nendevahelisi seoseid (transleerimine, altereerimine, akordide pööramine, peegeldamine jne) [1].

4.1 Iannis Xenakise matemaatika ja muusika ühildamine

Iannis Xenakis (1922–2001) oli kreeka rahvusest arhitekt ning komponist, 20. sajandi avangardistlik helilooja ning muusikateoreetik. Ta õppis Ateena Tehnikaülikoolis arhitektiks ja laevainseneriks ning seejärel Pariisis kompositsiooni nimekate heliloojate juhendamisel. Ta tutvus õpingute jooksul matemaatika, kosmoloogia ja füüsika probleemidega ning püüdis neid rakendada ka oma loomingus. Tema muusikat iseloomustatakse sõnaga stohhastiline, selle matemaatikute kõnepruugist üle võetud mõistega tähistatakse juhuse ja statistilise seaduspära muusikat. Xenakise isikupärase stiili juured on arhitektuursetes konstruktsioonides ja matemaatilistes protsessides, näiteks teoses “Atrees” kümnele instrumendile on ta kasutanud muusika loomisel selliseid matemaatilisi tabeleid nagu näiteks Pascali kolmnurk. 20. sajandi keskel oli tema eriline huvi suunatud eelkõige tõenäosusarvutusele. Mõtlemine arhitektuurikategooriates andis talle aga kindluse väita, et mõtestatud tervik peab alati ehituma, ruumis ei saa olla suvalist punkti väljaspool loodusseadusi. Ta kritiseeris aastaid kasutusel olevat staatilist muusikat, milles ei arvestatud vormi loovat tegurit – aega. Muusikalise mõtte arengu seisukohalt oli määrav tähtsus punkti kammitsaist lahtirebimisel. Euroopa muusikas tuhande aasta jooksul kivistunud “noodi” mõiste juurest toimus areng uusi mõtteruume avava “joone”, “kaare” või “kõverani”. Kui seriaalses muusikas on iga noot määratud kahe parameetriga – helikõrguse ja heli kestvusega, siis Xenakis asendas noodi joontega (ka joonte parvega), mis omasid palju erinevaid helikõrgusi, pöörates vähem tähelepanu heli kestvusele. Ta leidis, et tolle ajani kasutatavad muusikalised konstandid tuli asendada muutujatega, tuues sisse uut liiki konstandid – heliparameetrid kui komplektid. Seega püüdis Xenakis muusikasse sisse tuua ka pidevuse mõiste, mida on lihtne realiseerida arvutite abil (glissando) [8],[9].

4.1.1 Intervallide hulga algebralised omadused

Siin alapeatükis uurime natuke Xenakise teooriat intervallide kohta. Vaatleme intervallide gruppe, mis nagu selgub, on isomorfsed naturaalarvude ekvivalentsiklassiga. Vaatleme järgnevalt 5 aksioomi, mis kehtivad intervallide hulga H korral:

1. Olgu H helikõrguste vaheliste (meloodiliste) intervallide hulk. Teame, et iga paari korral $(h_a, h_b \in H)$ saab leida kolmanda vastavuses oleva elemendi. Selleks on h_a summa h_b-ga, mida me märgime $h_a + h_b = h_c$ nii, et $h_c \in H$. Näiteks olgu meil kolm helikõrgust I, II ja III ning olgu $h_{I,II}$, $h_{II,III}$ intervallid pooltoonides, mis on vastavalt paaride (I,II) ja (II,III) vahel. Intervall $h_{I,III}$, mis on helide I ja III vahel on võrdne teise kahe intervalli pooltoonide summaga. Järelikult on meie hulk H liitmise suhtes kinnine.

2. Samuti saame veenduda, et hulk H on assotsiatiivne:

$$h_a + (h_b + h_c) = (h_a + h_b) + h_c = h_a + h_b + h_c.$$

3. Hulgas H leidub neutraalne element h_0 nii, et iga $h_a \in H$ korral kehtib

$$h_0 + h_a = h_a + h_0 = h_a.$$

   Elementi h_0 nimetatakse nullelemendiks. Helikõrguste korral kasutatakse iga intervalli puhul, mille toonide arv on 0, mõistet unisoon.

4. Iga h_a korral leidub pöördelement h'_a, mille korral kehtib

$$h'_a + h_a = h_a + h'_a = h_0 = 0.$$

   See tähendab, et iga suurendatud intervalli puhul saame leida vastava vähendatud intervalli nii, et nende kokkuliitmisel tekiks siiski unisoon.

5. Hulga H korral kehtib kommutatiivsus:

$$h_a + h_b = h_b + h_a$$

Tuleb välja, et hulk H, mis on meloodiliste intervallide hulk, vastab Abeli rühma tingimustele liitmise suhtes.

4.2 Pierre Boulez "Struktuurid"

Oliver Messiaeni[2] õpilane Pierre Boulez[3] võttis oma esimeses päris serialistlikus teoses "Struktuurid. I" (edaspidi "Struktuurid"), mis on kirjutatud kahele klaverile, kompositiooni aluseks helikõrguste seeria, mis oli aluseks olnud tema õpetaja poolt kirjutatud palale. Teos esitab väga selgelt neid konstruktsiooniprintsiipe, mida kasutati seriaalse muusika varajases staadiumis, seetõttu on selle ülesehitus väga läbinähtav ning hästi analüüsitav.

Esiteks, "Struktuuride" aluseks on 12-heliline seeria, mis, nagu eelpool on mainitud, on võetud Messiaeni teosest. See koosneb järgnevatest helidest:

$$\text{Es}, \quad \text{D}, \quad \text{A}, \quad \text{As}, \quad \text{G}, \quad \text{Fis}, \quad \text{E}, \quad \text{Cis}, \quad \text{C}, \quad \text{B}, \quad \text{F}, \quad \text{H}.$$

Silmatorkav on selle seeria homogeensus: intervall undeetsim esineb viiel korral, oktavist ja sekstist väiksemad intervallid puuduvad üldse. Olemasolevad intervallid deetsim ja septim esinevad kahel korral, noon ja sekst ühel korral. Väga iseloomulik on intervallirea viimane element – sekst, samuti mõlema septimi sümmeetriline asend teise ja eelviimase intervallina.

Teiseks moodustab Boulez sellest seeriast 11 võimalikku transpositsiooni ning paigutab need tabelina nii, et tekib 12×12 maatriks (numbrid tähistavad siin vastavaid seeria noote).

[2]Prantsuse helilooja Oliver Messiaen (1908–1992) õppis Pariisi konservatooriumis kompositsiooni ja orelit. Tema meelisinstrumendiks oli orel, millele on kirjutatud ka helilooja esimene trükis ilmunud teos "taevane osadus". Kohe pärast konservatooriumi lõpetamist pakuti Messiaenile Pariisi Püha Kolmainu katedraalis peaorganisti kohta ning helilooja jäi sinna enam kui viiekümneks aastaks. Heliloojana mõjus uuenduslikuna tema muusika rütmilise külje ümbermõtestamine [4, lk. 167–170]

[3]Pierre Boulez (1925) kuulub nende 20. sajandi suurte heliloojate hulka, kes mitme aastakümne vältel mõjutasid oluliselt kogu maailma muusikapilti. Oma muusikuteed alustas Boulez neljakümnendatel aastatel, õppides Pariisi Konservatooriumis. 1960. aastate keskel algas ka tema hiilgav dirigendikarjäär. Edasi oli muusikamaailm tunnistajaks Boulezi kiirele tähelennule – ta oli nii BBC sümfooniaorkestri kui ka New Yorgi Filharmoonikute peadirigent, hiljem Wagneri-pidustuste muusikajuht Bayreuthis ning aastast 1995 Chicago sümfooniaorkestri esimene külalisdirigent [4].

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
2 & 8 & 4 & 5 & 6 & 11 & 1 & 9 & 12 & 3 & 7 & 10 \\
3 & 4 & 1 & 2 & 8 & 9 & 10 & 5 & 6 & 7 & 12 & 11 \\
4 & 5 & 2 & 8 & 9 & 12 & 3 & 6 & 11 & 1 & 10 & 7 \\
5 & 6 & 8 & 9 & 12 & 10 & 4 & 11 & 7 & 2 & 3 & 1 \\
6 & 11 & 9 & 12 & 10 & 3 & 5 & 7 & 1 & 8 & 4 & 2 \\
7 & 1 & 10 & 3 & 4 & 5 & 11 & 2 & 8 & 12 & 6 & 9 \\
8 & 9 & 5 & 6 & 11 & 7 & 2 & 12 & 10 & 4 & 1 & 3 \\
9 & 12 & 6 & 11 & 7 & 1 & 8 & 10 & 3 & 5 & 2 & 4 \\
10 & 3 & 7 & 1 & 2 & 8 & 12 & 4 & 5 & 11 & 9 & 6 \\
11 & 7 & 12 & 10 & 3 & 4 & 6 & 1 & 2 & 9 & 5 & 8 \\
12 & 10 & 11 & 7 & 1 & 2 & 9 & 3 & 4 & 6 & 8 & 5
\end{pmatrix}$$

See maatriks on esimese klaveri partii muusikalise materjali aluseks.

Kolmandaks teeb Boulez seeria põhikujust inversiooni ehk peegelkuju. Inversioonist ja selle helistikulistest transpositsioonidest tekib teine analoogiline 12×12 maatriks, mis on teise klaveri muusikalise materjali aluseks:

$$\begin{pmatrix}
1 & 7 & 3 & 10 & 12 & 9 & 2 & 11 & 6 & 4 & 8 & 5 \\
7 & 11 & 10 & 12 & 9 & 8 & 1 & 6 & 5 & 3 & 2 & 4 \\
3 & 10 & 1 & 7 & 11 & 6 & 4 & 12 & 9 & 2 & 5 & 8 \\
10 & 12 & 7 & 11 & 6 & 5 & 3 & 9 & 8 & 1 & 4 & 2 \\
12 & 9 & 11 & 6 & 5 & 4 & 10 & 8 & 2 & 7 & 3 & 1 \\
9 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 & 12 & 2 & 1 & 11 & 10 & 7 \\
2 & 1 & 4 & 3 & 10 & 12 & 8 & 7 & 11 & 5 & 9 & 6 \\
11 & 6 & 12 & 9 & 8 & 2 & 7 & 5 & 4 & 10 & 1 & 3 \\
6 & 5 & 9 & 8 & 2 & 1 & 11 & 4 & 3 & 12 & 7 & 10 \\
4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 11 & 5 & 10 & 12 & 8 & 6 & 9 \\
8 & 2 & 5 & 4 & 3 & 10 & 9 & 1 & 7 & 6 & 12 & 11 \\
5 & 4 & 8 & 2 & 1 & 7 & 6 & 3 & 10 & 9 & 11 & 12
\end{pmatrix}.$$

Seejärel nummerdatakse 12 erinevat dünaamikaastet pppp-st ffff-ni. Need kirjutatakse kummagi partii dünaamika maatriksis kõrvaldiagonaalile ning veel kahele kõrvaldiagonaaliga ristuvale põikdiagonaalile. Dünaamikat tuleb kasutada vastavalt diagonaalidel paiknevatele numbritele. Esimese klaveri dünaamikat kujutab maatriks:

$$\begin{pmatrix}
 & & & & & & 7 & & & & & 12 \\
 & & & & & & & 9 & & & 7 & \\
 & & & & & & & & 6 & 7 & & \\
 & & & & & & & & 11 & 1 & & \\
 & & & & & & & 11 & & & 3 & \\
 & & & & & & 5 & & & & & 2 \\
7 & & & & & 5 & & & & & & \\
 & 9 & & & 11 & & & & & & & \\
 & & 6 & 11 & & & & & & & & \\
 & & 7 & 1 & & & & & & & & \\
 & 7 & & & 3 & & & & & & & \\
12 & & & & & 2 & & & & & &
\end{pmatrix}.$$

Järgmiseks nummerdatakse 12 erinevat artikulatsioonimärki. Ka need paigutatakse maatriksisse mööda diagonaali ja topeltristidena, ainult, et kõrvaldiagonaali asemel peadiagonaalile. Esimese klaveripartii artikulatsioonimärgid on järgmised:

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & 6 & & & & & & \\
 & 8 & & & 6 & & & & & & & \\
 & & 1 & 2 & & & & & & & & \\
 & & 2 & 8 & & & & & & & & \\
 & 6 & & & 12 & & & & & & & \\
6 & & & & & 3 & & & & & & \\
 & & & & & & 11 & & & & & 9 \\
 & & & & & & & 12 & & & 1 & \\
 & & & & & & & & 3 & 5 & & \\
 & & & & & & & & 5 & 11 & & \\
 & & & & & & & 1 & & & 5 & \\
 & & & & & & 9 & & & & & 5
\end{pmatrix}.$$

Edasi tehakse analoogiline operatsioon ka rütmi süstematiseerimiseks. Põhiühikuks on valitud kolmekümnekahendikvältus, mida korrutatakse arvudega 1 kuni 12. Seega originaalseeria on aritmeetiliselt kasvav järjend kolmekümnekahendiknoodist kuni punktiga veerandnoodini. Helilooja György Ligeti[4] sõnul tuleb siinkohal vastuolu, kuna heliklassiseeriate permuteerimisel jäävad intervallisuhted samaks, kuid vältuste permutatsioonid muudavad iga kord ka sisemisi proportsioone [10, lk. 4].

Sel moel on saadud "Struktuuride" kogu muusikaline materjal struktureeritud. Me näeme, et helilooja inspiratsioonil pole sedasorti süsteemis enam kohta, komponeerimine toimub vaid etteantud parameetrite järgi. Huvitav on, et Boulez'i köitis noorena matemaatika, mis ilmselt oli ka eelduseks taolise mõistuspärase muusikalise konstruktsiooni leiutamisele [4, lk. 185–188].

[4] G. Ligeti (1923) on Ungari helilooja. Tema muusikale on iseloomulik orkestraalsete klastrite kasutamine. Ta võttis oma loomingus kasutusele ka mõiste mikropolüfoonia, mis kujutab endast tihedat ja paljuhäälset orkestritekstuuri, milles kõik hääled on omavahel polüfooniliselt seotud, ent ükski neist pole häälte rohkuse tõttu kõlamassist eristatav. Lisaks heliloomingule tegeles Ligeti ka õpetamisega. Tema pedagoogiline tegevus on väga laiahaardeline – ta on õpetanud paljudes Euroopa muusikakõrgkoolides ning korraldanud pidevalt ka rahvusvahelisi meistrikursusi [4, lk. 210–212]

4.3 Urmas Sisaski universumi muusika

Järgnevalt uurime, kuidas Urmas Sisask[5] oma teostes matemaatikat ning astronoomiat kasutas.

Taevakehade sideerilise tiirlemisperioodi ja pöörlemisperioodi teisendamine helikõrgusteks avaldub kujul

$$P_{s1} = \frac{2^{x+6+2}}{P_s},$$

kus P_s on taevakeha sideeriline tiirlemisperiood või pöörlemisperiood sekundites. Oktavite arv -6 oktavist (hakates lugema esimesest oktavist, helivõnkesagedustel 1Hz–2Hz) allapoole on 2^x. Oktavite arv suurest oktavist allapoole on 2^{x+6} ning 2^{x+6+2} on oktavite arv esimesest oktavist allapoole. Taevakeha helikõrgus esimeses oktavis hertsides on P_{s1}. Tähistame

$$x = \frac{\log P_s}{\log 2}.$$

Taevakehade sideerilisest tiirlemisperioodist ja pöörlemisperioodist saadud taevakehade teoreetiliste helikõrguste noteerimisel arvu 2^{x+6} ja helikõrguste määramisel arvu 2^{x+6+2} ümardame logaritmide suhte täisarvuks suurema täisarvu suunas, st

$$x(\text{lähim täisarv}) > \frac{\log P_s}{\log 2}.$$

Veel on antud valemi kasutamisel vaja teada I oktavi võnkesagedusi hertsides tempereeritud süsteemis: $\mathrm{c_1}$[6] $= 261,6$ Hz, $\mathrm{cis_1}$ $(\mathrm{des_1}) = 277,2$Hz, $\mathrm{d_1} = 293,7$ Hz, $\mathrm{dis_1}$ $(\mathrm{es_1}) = 311,1$ Hz, $\mathrm{e_1} = 329,64$ Hz, $\mathrm{f_1} = 349,2$ Hz, $\mathrm{fis_1}$ $(\mathrm{ges_1}) = 369,9$ Hz, $\mathrm{g_1} = 392,6$ Hz, $\mathrm{gis_1}$ $(\mathrm{as_1}) = 415,3$ Hz, $\mathrm{a_1} = 440$ Hz, $\mathrm{b_1}(\mathrm{ais_1}) = 466,2$ Hz, $\mathrm{h_1} = 493,9$ Hz.

Kuna taevakehade teoreetiline helikõrgus ei ole tempereeritud süsteemis, siis taevakehade helikõrguste noteerimisel kasutatakse sümboleid

$c_1 \uparrow$ pisut kõrgem antud tempereeritud noodist;

[5] Urmas Sisask (1960) on helilooja ja harrastusastronoom, ta on üks omapärasemaid isiksusi eesti muusikaloos. Õppinud kompositsiooni. Teda köitis juba noorena tähistaevas, see on ka üks tema paljude teoste aluseid. Pärast Eesti Riikliku Konservatooriumi lõppu läks ta Jänedale, kus ta mõisa lossitorni tegi muusikatähetorni – planetaariumi, kus korraldab loeng-kontserte ja jätkab astronoomilisi vaatlusi, seostades neid muusikaga. Tal on valminud palju tähistaeva-ainelisi teoseid, mitmed neist klaverimuusika valdkonnast. [7, lk. 261-264]

[6] Siin on $\mathrm{c_1}$ – esimese oktavi c, $\mathrm{c_2}$ – teise oktavi c, c – väikse oktavi c, C– suure oktavi c.

$c_1\downarrow$ pisut madalam antud tempereeritud noodist;

$c_1 - cis_1$ antud tempereeritud nootide vahel.

Arvutame nüüd 9 planeedi (Maa, Merkuur, Veenus, Marss, Jupiter, Saturn, Uraan, Neptuun, Pluuto) tiirlemisel tekitatavad vastavad teoreetilised helid:

1) Maa tiirleb ümber Päikese perioodiga 1 aasta = 365,25 ööpäeva = 31 557 600 sekundit. Kasutades eespool antud valemeid, saame

$$x = \frac{\log 31557600}{\log 2} = 24,911 \sim 25, \quad \text{ja} \quad P_{s1} = \frac{2^{25+6+2}}{31557600} = 272,1986 Hz.$$

Kõige lähemal on saadud tulemus noodile $\mathrm{cis}_1 = 277,2$ Hz, seega sellest pisut madalam. Teoreetiline helikõrgus planeedi Maa tiirlemisel ümber Päikese on $\mathrm{cis}_1\downarrow$. See on 33 oktavit madalamal esimese oktavi vastavast noodist [14].

Kõikide teiste planeetide puhul on arvutuskäik analoogiline, seetõttu toome välja vaid tulemused.

2) Merkuur – tiirlemisperiood 7 600 521,4 sekundit – teoreetiline helikõrgus a_{31}.

3) Veenus – tiirlemisperiood 19 414 166,4 sekundit – teoreetiline helikõrgus cis_{31}.

4) Marss – tiirlemisperiood 59 355 072 sekundit – teoreetiline helikõrgus d_{32}.

5) Jupiter – tiirlemisperiood 374 335 776 sekundit – teoreetiline helikõrgus fis_{35}.

6) Saturn – tiirlemisperiood 929 595 744 sekundit – teoreetiline helikõrgus d_{36}.

7) Uraan – tiirlemisperiood 2 651 356 800 sekundit – teoreetiline helikõrgus gis_{38}.

8) Neptuun – tiirlemisperiood 5 199 897 600 sekundit – teoreetiline helikõrgus gis_{39}.

9) Pluuto – tiirlemisperiood 7 836 480 000 sekundit – teoreetiline helikõrgus cis_{39}.

Nagu näeme, siis osad helid korduvad, seetõttu on moodustatud koondatud helirida, mis tuues esimesse oktavisse näeks välja järgmine:

$$\mathrm{cis}_1, \quad \mathrm{d}_1, \quad \mathrm{fis}_1, \quad \mathrm{gis}_1 \quad \text{ja} \quad \mathrm{a}_1.$$

Tuleb välja, et saadud helirida on kasutusel Jaapanis ning tuntud ka kui Kumayoshi pentatoonika. Urmas Sisask võttis antud helirea oma kahekümne neljast laulust koosneva a capella kooriteose “Gloria Patri” aluseks [14].

4.4 Arvuteooria muusikas

Järgnevalt näitame, kuidas on omavahel seotud muusika ja arvuteooria. Muusikud ja matemaatikud kasutavad tähistust

$$\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

ja seda nimetatakse täisarvude hulgaks mooduli 12 järgi. Meid huvitavad täisarvud mooduli 12 järgi just seetõttu, et ühes oktavis on 12 heli. Lisaks huvitavad meid samuti täisarvud $\mod 7$, sest mažoorses või minoorses helireas on 7 helikõrgust, näiteks meil on klaveril esimese oktavi do-st teise oktavi do-ni 7 valget klahvi. Seega kasutatakse ka tähistust

$$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Lisaks tähistame oktavi helid arvudega $0 - 12$. Saame

$$\begin{gathered} C = 0, \quad Cis = Des = 1, \quad D = 2, \quad Dis = Es = 3, \quad E = 4, \quad F = 5, \\ Fis = Ges = 6, \quad G = 7, \quad Gis = As = 8, \quad A = 9, \quad Ais = B = 10, \quad H = 11. \end{gathered}$$

Nii saame näiteks C-duuri toonika akordi $\{C, E, G\}$ esitada kujul $\{0, 4, 7\}$. See C-duuri akord on osa Haydni[7] "Üllatussümfoonia" peateemast. Teema esimene osa on

$$\langle C, C, E, E, G, G, E, F, F, D, D, H, H, G\rangle,$$

mida saame kirjutada

$$\langle 0, 0, 4, 4, 7, 7, 4, 5, 5, 2, 2, 11, 11, 7\rangle.$$

Sulud $\langle\rangle$ on tavaliselt kasutusel muusikateoorias näitamaks, et noodid peavad asetsema antud järjekorras. Loogeliste sulgudega tähistatakse lihtsalt elementide hulka, mis ei ole järjestatud.

Transpositsioon ja inversioon on funktsioonid $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$, mida kasutavad paljud muusikud. Samuti saame teha ka analoogilised funktsioonid, mis kehtivad $\mathbb{Z}_7$ korral. Nii

[7]Franz Joseph Haydn (1732–1809) oli üks Viini klassikutest.

transpositsiooni kui ka inversiooni kasutatakse tavaliselt kas meloodia või ka akordide järgnevuse viimiseks teise helistikku. Kui me kuuleme meloodiat, milles on erinevad helikõrgused, siis tegelikult me kuuleme intervalle meloodianootide vahel. Need suhted helikõrguste vahel muudavadki meie jaoks meloodia huvitavaks. Transpositsioon võtab matemaatiliselt kokku selle, mida muusikud teevad kogu aeg – meloodia taasesitamine kõrgemalt või madalamalt ilma, et meloodias intervallide suhted muutuks. Inversioon on üks võimalustest, kuidas meloodiat varieerida.

Definitsioon 4.1. Olgu n täisarv $\mod 12$. Funktsiooni $T_n : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$, mis on defineeritud valemiga $T_n(x) = x + n \mod 12$, nimetatakse transpositsiooniks n astme võrra.

Näide 4.1. *Kasutades funktsioone* $T_5 : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$*, saame*

$$T_5(3) = 3 + 5 = 8$$

$$T_5(6) = 6 + 5 = 11$$

$$T_5(7) = 7 + 5 = 12 = 0$$

$$T_5(10) = 10 + 5 = 15 = 3.$$

Definitsioon 4.2. Olgu n täisarv $\mod 12$. Funktsiooni $I_n : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$, mis on defineeritud valemiga $I_n(x) = -x + n$ nimetatakse inversiooniks n järgi.

Näide 4.2. *Kasutades funktsioone* $I_7 : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ *korral, saame*

$$I_7(3) = -3 + 7 = 4$$

$$I_7(7) = -7 + 7 = 0$$

$$I_7(9) = -9 + 7 = -2 = 10.$$

Muusikas kasutatakse transponeerimist või inversiooni terve meloodialõigu suhtes, ehk funktsiooni rakendatakse hulga igale elemendile. Näiteks me saame transponeerida C-duuri kolmkõla 7 pooltooni võrra ja saame $T_7\{0, 4, 7\} = \{T_7(0), T_7(4), T_7(7)\} = \{0 + 7, 4 + 7, 7 + 7\} = \{7, 11, 2\}$. Märkame, et C-duuri akordist saab G-duuri akord.

4.4.1 Bachi fuuga

Johann Sebastian Bach[8] viis fuugakunsti uuele tasemele kirjutades 24 prelüüdi ja fuugat kõigis helistikes, mis on ühendatud kogumikeks “Hästitempereeritud klaviir I,II”. Fuuga on teos, mis algab ühe teemaga. See teema kordub teose vältel erinevates häältes. Iga fuuga sisaldab endas peateema transpositsioone ja inversioone.

Võtame endale analüüsimiseks “Fuuga 6 d-moll”, mis pärineb “Hästitempereeritud klaviir” esimesest kogumikust. Oma analüüsis üritame leida fuugas esinevaid transpositsioone ja inversioone. Fuuga peateema esitub kujul

$$P := \langle D, E, F, G, E, F, D, Cis, D, B, A\rangle = \langle 2, 4, 5, 7, 4, 5, 2, 1, 2, 10, 7, 9\rangle.$$

See teema algab 1. taktist ning kestab 3. takti alguseni. Põhiteema koosneb kaheteistkümnest noodist.

Kolmandas taktis tuleb teema ettekandele teises hääles kujul

$$R := \langle A, H, C, D, H, C, A, Gis, A, F, D, E\rangle = \langle 9, 11, 0, 2, 11, 0, 9, 8, 9, 5, 2, 4\rangle.$$

Näeme, et hulkade P ja R vahel on seos. Saame $S = T_7(P)$ ehk kui liidame igale P elemendile 7, saame hulga S.

Kuuendas taktis tuleb teema sellisel kujul nagu esialgu, ent oktav madalamalt. Kaheksandas taktis on

$$S := \langle E, F, G, A, F, B, G, Fis, G, Es, Cis, D\rangle = \langle 4, 5, 7, 9, 5, 10, 7, 6, 7, 3, 1, 2\rangle.$$

Siin esimesed 5 nooti oleks nagu $T_2(P)$, järgmised 5 nooti ning viimane nagu $T_5(P)$, üheteistkümnes noot aga ei sobi nendesse hulkadesse.

Nüüd proovime fuugast leida ka inversiooni. Esitame järgnevalt taktides 14 ja 22

[8] J. S. Bach (1685–1750) on barokiajastu helilooja. Ta kirjutas teoseid erinevais žanreis. Bach Kirjutas valdavalt vaimulikku muusikat. Eluajal tema loomingut ei hinnatud. 19. sajandil see taasavastati ning hakati järsku lugu pidama. Loomingu üks aluseid on suguvõsatraditsioon, suurema osa oma muusikaharidusest sai vanemalt vennalt, kelle juures ta orvuna elas. Tema tähtsamad teosed on “Missa h-moll”, Matteuse ja Johannese passioonid, umbes 300 kantaati, 6 Brandeburgi kontserti, “Hästitempereeritud klaviir I, II”, mis koosnevad prelüüdidest ja fuugadest klaverile, oreliteosed jpm.

esinevad meloodiad:

$$\langle E, D, Cis, H, D, Cis, E, F, E, A, C, B\rangle = \langle 4, 2, 1, 11, 2, 1, 4, 5, 4, 9, 0, 10\rangle.$$

$$\langle E, D, Cis, H, D, Cis, E, F, E, G, B, A\rangle = \langle 4, 2, 1, 11, 2, 1, 4, 5, 4, 7, 10, 9\rangle.$$

Need on peaaegu identsed, välja arvatud 3 viimast elementi. Paneme lisaks tähele, et esimesed 2 elementi on nagu hulgas P, ainult et vastupidises järjekorras. Kahekümne teise takti viimased 3 nooti on samad, mis P viimased 3 nooti, samuti vastupidises järjekorras. Arvutades $I_6(P)$ saame

$$\langle 4, 2, 1, 11, 2, 1, 4, 5, 4, 8, 11, 9\rangle.$$

Näeme, et see peaagu vastab taktides 14 ja 22 esinevaga. Vaid 3 viimast nooti on muudetud, et meloodia kõlaks paremini. Seega näeme, et käesolevas teoses on oluline roll ka inversioonil. Tegelikult koosneb ka ülejäänud teos esialgse meloodia transpositsioonidest ja inversioonidest [3].

4.4.2 Jäägiklassid ja oktavite jaotamine pooltoonideks

Järgnevalt vaatleme oktavi jaotamist pooltoonideks (analoogiliselt võimalik ka jaotamine veerandtoonideks, kuuendiktoonideks jne). Et anda helirea matemaatiline kirjeldus, kasutame aritmeetika põhiteoreemi, mille põhjal iga ühest suurem naturaalarv on ühesel viisil esitatav oma algarvuliste jagajate astmete korrutisena. Arvu 12 algarvulisteks jagajateks on 2 ja 3 ning algarvulisteks astmeteks on 3 ja 4.

Meil on taas kasutusel noodid C, Cis = Des, D, Dis = Es, F, Fis = Ges, G, Gis = As, A, Ais = B ja H. Kasutades neid, kirjutame välja nootide jäägiklassid 3 ja 4 järgi.

Need on järgmised:

$$3_0 = \{\mathrm{Dis, Fis, A, C}\}, 3_1 = \{\mathrm{E, G, Ais, Cis}\} \quad \text{ja} \quad 3_2 = \{\mathrm{F, Gis, H, D}\}$$

ning

$$4_0 = \{\mathrm{E, Gis, C}\}, \mathrm{n}_1 = \{\mathrm{F, A, Cis}\}, 4_2 = \{\mathrm{Fis, Ais, D}\} \quad \text{ja} \quad 4_3 = \{\mathrm{G, H, Dis}\}.$$

Kasutades saadud jäägiklasse, saame C-duuri esitada näiteks kujul

$$(\overline{3_2} \cap 4_0) \cup (\overline{3_1} \cap 4_1) \cup (3_2 \cap 4_2) \cup (\overline{3_0} \cap 4_3).$$

A-molli jaoks kasutame jäägiklasse kujul:

$$3_0 = \{\mathrm{C}, \mathrm{Dis}, \mathrm{Fis}, \mathrm{A}\},\ 3_1 = \{\mathrm{Cis}, \mathrm{E}, \mathrm{G}, \mathrm{Ais}\} \quad \text{ja} \quad 3_2 = \{\mathrm{D}, \mathrm{F}, \mathrm{Gis}, \mathrm{H}\}$$

ning

$$4_0 = \{\mathrm{Cis}, \mathrm{F}, \mathrm{A}\}, 4_1 = \{\mathrm{D}, \mathrm{Fis}, \mathrm{Ais}\},\ 4_2 = \{\mathrm{Dis}, \mathrm{G}, \mathrm{H}\} \quad \text{ja} \quad 4_3 = \{\mathrm{E}, \mathrm{Gis}, \mathrm{C}\}.$$

Arvestades seda võime a-molli kirja panna näiteks kujul

$$(3_0 \cap 4_0) \cup (3_1 \cap 4_2) \cup (3_2 \cap \overline{4_3}) \cup (\overline{3_2} \cap 4_3).$$

Et oleks võimalik transponeerida n pooltooni võrra, anname helireditelite kirjelduse sõltuvana pooltoonide arvust n. Duurhelirea võime esitada kujul

$$(\overline{3_{n+2}} \cap 4_n) \cup (\overline{3_{n+1}} \cap 4_{n+1}) \cup (3_{n+2} \cap 4_{n+2}) \cup (\overline{3_n} \cap 4_{n+3}).$$

ning mollhelirea kujul

$$(3_n \cap 4_n) \cup (3_{n+1} \cap 4_{n+2}) \cup (3_{n+2} \cap \overline{4_{n+3}}) \cup (\overline{3_{n+2}} \cap 4_{n+3}).$$

Siinjuures tuleb arvestada, et $3_{-3} = 30,\ 3_{-2} = 3_1,\ 3_{-1} = 3_2,\ 3_3 = 3_0,\ 3_4 = 3_1,$ $3_5 = 3_2$ jne ning $4_{-4} = 4_0,\ 4_{-3} = 4_1,\ 4_{-2} = 4_2,\ 4_{-1} = 4_3,\ 4_4 = 4_0,\ 4_5 = 4_1,$
$4_6 = 4_2,\ 4_7 = 4_3$ jne [1].

4.4.3 Kellaaritmeetika ja oktavi ekvivalentsus

Kui me vaatame kella, siis loendame numbreid ühest kaheteistkümneni ning alustame uuesti ühest. Seega näiteks $6 + 8$ puhul kelle aritmeetika järgi, me loeme edasi 6 arvu võrra alates kaheksast – $9, 10, 11, 12, 1, 2,$ ehk saame $6 + 8 = 2$. Arvu 12 asemel oleks parem kirjutada 0 ehk pärast 11 tuleb 0, mitte 12. Anname allpool ka tabeli sellise kellaaritmeetika jaoks.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 .

Sellise arvutusmeetodi puhul peaksime tavalise võrdusmärgi asemel kasutama kongruentsussümbolit "≡". Seega meie eelnevalt arvutatu tuleks esitada kujul

$$6 + 8 \equiv 2 \mod 12.$$

Üldisemalt saame kirjutada $a \equiv b \mod n$, mis tähendab, et $a - b$ jagub arvuga n.

Rühmateooria kohaselt moodustab kogum $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ rühma, mille nullelemendiks on 0 ja elemendi i pöördelement on $-i$ või $12 - i$ olenevalt sellest, kumb neist mahub vahemikku nullist kuni 11ni. Tähistame seda rühma $\mathbb{Z}/12$.

Kui nüüd tõmbame paralleele muusikaga, siis me võime väita, et arvud 0 kuni 1 esitavad intervalle kui pooltonide kordseid kaheteisttoonilises tempereeritud oktavis. Ehk kui me liidame igale arvule 1, saame pool tooni kõrgema noodi. Selliselt saame maatriksi

$$\begin{pmatrix} \text{C} & Cis & D & Es & E & F & Fis & G & Gis & A & B & H \\ \text{Cis} & D & Es & E & F & Fis & G & Gis & A & B & H & C \end{pmatrix} .$$

Seega saame kella puhul rakendatavat aritmeetikat samamoodi rakendada ka kaheteistkümnest helist koosneva oktavi puhul, kus 2 heli kuuluvad samasse helide klassi kui nad erinevad teineteisest mingi arvu oktavite võrra. Iga element $\mathbb{Z}/12$-s esindab erinevat heli 12-st heliklassist, kus element i tähistab pooltoonide arvu suurenemist.

On selge, et arv 12 ei ole kellaaritmeetikas väga eriline. Kui n on suvaline positiivne täisarv, siis saame alati moodustada rühma $\mathbb{Z}/n$, mille elemendid on täisarvud vahemikus 0-st kuni $(n-1)$-ni [2, lk. 319–320].

4.5 Fibonacci arvud ja kuldlõige muusikas

Mitmed muusikud on oma loomingus kasutanud nii kuldlõiget kui Fibonacci arve. Kuldlõige on arv x, mille saame lõigu pikkusega a ühikut jaotamisel osadeks pikkustega x ja $a-x$ ühikut nii, et

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}.$$

Siit saame, et

$$x=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)=0,6180339887a.$$

On teada, et USA helilooja ja muusikateadlane James Tenney (1934–2006) kasutas oma helitöös “For Ann” kuldlõiget selliselt, et tekitas arvuti abil järjestikuseid glissandosid, mis algasid helikõrgustel, kus iga järgneva ja eelneva alguse suhe moodustasid kuldlõike. Oma helitöödes kasutasid kuldlõiget ka ungari helilooja ja pianist Bela Bartok (1881–1945), prantsuse helilooja ja pianist Erik Satie (1966–1925) ning prantsuse helilooja Claude Debussy (1862–1918) ning paljud teised heliloojad.

Paljud heliloojad paigutavad teose kulminatsiooni vastavalt kuldlõikele, st kui on esitatud 61,8% palast [1].

Fibonacci arve esineb ka oktavis. Kui vaatleme oktavit C_1-st C_2-ni (C_2 kaasa arvatud), siis näeme, et oktavis on 13 nooti. Heliredel koosneb 8-st noodist, neist 5. ja 3. moodustavad helistiku toonikaakordist osa. Kolmas noot asub kahe astme kaugusel helistiku põhiastmest, mis on ühtlasi skaala esimene noot.

Lisaks koosneb klaverl skaala C_1-st C_2-ni 13 noodis, mis jaguneb 8 valgeks ning 5 mustaks klahviks. Mustad klahvid on jaotatud gruppideks 3 ja 2 kaupa.

Helistikus ehitatakse dominantakord 5. astmelt, mis on ühtlasi oktavi 13-st noodist kaheksas. Huvitav on, et arv $\frac{8}{13}=0,61538$, on ühtlasi väga lähedal kuldlõikele. Tavaline kolmeduurilugu, nt A-duuris koosneks siis akordidest, mis on üles ehitatud A-st, tema Fibonacci ja kuldlõike astmetest E ja D. Paneme aga tähele, et E on A-st kvindi kaugusel. A on aga D-st kvindi kaugusel, ehk E ja A moodustavad sama suhte nagu D ja A [11].

4.6 Siinuseline võnkumise kasutamine helilaine kirjeldamisel

Heli kõrguse ja vibratsioonikuju kirjeldamisel saab kasutada siinuselist võnkumist. Täpsemalt kasutame lihtsat harmoonilise võnkumise direfentsiaalvõrrandit. Diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y$$

lahenditeks on funktsioonid

$$y = Acos\sqrt{k}t + B\sin\sqrt{k}t.$$

Ülalpool antud diferentsiaalvõrrand näitab, mis juhtub kehaga, kui talle mõjuv jõud suunab ta tasakaaluasendi poole. Jõu suurus on võrdeline kaugusega tasakaaluasendist. Nüüd vaatame, kuidas saame diferentsiaalvõrrandi lihtsa harmoonilise võnkumise jaoks.

Olgu meil osake massiga m ning jõud suurusega F. Jõud surub keha tasakaaluasendi suunas $y = 0$. Jõu F suurus on võrdeline y kaugusega tasakaaluasendist,

$$F = -ky,$$

kus $k = const$. Newtoni seadusest, kus keha kiirendus on võrdeline talle mõjuva jõuga ja pöördvõrdeline keha massiga, saame teise võrduse,

$$F = ma,$$

kus

$$a = \frac{d^2y}{dt^2}$$

on osakeste kiirendus ja t on aeg. Neid võrrandeid omavahel kombineerides saamegi teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y. \tag{8}$$

Diferentsiaalvõrrandi (8) karakteristlikuks võrrandiks on

$$k^2 + \frac{k}{m} = 0,$$

millest

$$k^2 = -\frac{k}{m},$$

ehk

$$k_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}i$$

ja

$$k_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}i.$$

Seega diferentsiaalvõrrandi (8) kaks lineaarselt sõltumatut lahendit on

$$y_1 = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \text{ja} \quad y_2 = \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

ning üldlahend on

$$\bar{y} = Ay_1 + By_2 = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t. \tag{9}$$

Sellega oleme näidanud, et diferentsiaalvõrrandi (8) lahendiks on funktsioon kujul (9). Saadud funktsioonis peitubki vastus, miks me kasutame siinuselist võnkumist, mitte mõnda muud perioodilist võnkumist, mis liiguks sarnaselt kord ühele kord teisele poole tasakaaluasendit. Siinuselised võnkumised on perioodiliste võnkumiste harmoonilise analüüsi aluseks. See diferentsiaalvõrrand reguleerib mingi kindla punkti liikumist alusmembraanil kõrvas ning siit tulenevalt reguleerib inimese helitaju.

Sel teemal on pikemalt peatunud Triin Ree Tallinna Ülikoolist, kes oma bakalaureusetöös kirjeldab lihtsa harmoonilise võnkumise diferentsiaalvõrrandit ning samuti uurib pikemalt Fourier' analüüsi, mis tegeleb osavõnkumiste sageduste, amplituudide ja faaside leidmisega [12].

Possible Mathematical Applications in Music

Bachelor's thesis

Mai Simson

Summary

The aim of this bachelor's thesis is to give an overview of some mathematical applications which can be used in music. The thesis is mainly based on three books: "Simple Gamma" by Georgi Evgenevitš Šilov, "Occidents' History of Music" by Igor Garšnek and "Music: A Mathematical Offering" by Dave Benson.

The thesis consists of four chapters. In the first chapter we give definitions to different terms that are used in the thesis.

The second chapter briefly describes the common history in music and mathematics.

The aim of the third chapter is to explain the construction of the musical scale using logarithms and chain fractures.

The final chapter focuses on different mathematical applications used in music. We will discuss Iannis Xenakis's theory about the algebraic qualities of the intervals, the theory that Pierre Boulez used to compose his "Structures I", Urmas Sisask using mathematics and astronomy to compose his choir piece "Gloria Patri" and also some mathematical methods that could be used to describe music.

Viited

[1] Abel, M., *Matemaatikast muusikas.* Koolimatemaatika: XXXVI Matemaatikaõpetajate päevad, Tartu Ülikool, Tartu, 2009.

[2] Benson, D., *Music: A Mathematical Offering.* University of Aberdeen, Scotland, UK, 2008.

[3] Fiore,T.U., *Music and Mathematics.* University of Michigan, Michigan, 2003.

[4] Garšnek, I., *Õhtumaade muusikalugu. III. 20.sajand.* Avita, Tallinn, 2004.

[5] Hammond, J.K., *Mathematics of Music.* UW-L Journal of Undergraduate Research XIV, 2011.

[6] Eckhart,van den H., *Klassikalise muusika ABC.* Kirjastus Tänapäev, Tallinn, 2004.

[7] Kaarlep, A., *Eesti Muusikaajalugu. Kunstmuusika. Gümnaasiumiõpik.* Talmar ja Põhi, Tallinn, 2007.

[8] Kallastu, A., Valk-Falk, M., *Iannis Xenakise kunstide ja teaduste sulam.* Teater, muusika, kino, nr 5, 66-81.

[9] Kallastu, A., Valk-Falk, M. *Iannis Xenakise pärandist.* Teater, muusika, kino, nr 2, 55-62.

[10] Leetma, E., *Pierre Boulez "Structures I" kui euroopa totaalserialismi esikteos.* Tartu, 2003.

[11] Meisner, G. *Music and the Fibonacci Series and Phi*
http://www.goldennumber.net/music/

[12] Ree, T., *Matemaatikast muusikas.* Tallinna Ülikool, Tallinn, 2012.

[13] Šilov, G.E., *Lihtne gamma. Muusikalise skaala ehitus.* Nauka, Moskva, 1980.

[14] Sisask, U., *Gloria patri.* Eesti Muusikaühing, Tallinn, 1989.

[15] Xenakis, I., *Formalized Music. Thought and Mathematics in Composition.* Pendragon Press, Stuyesant NY, 1992.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Mai Simson (sünnikuupäev 16.01.1992),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose “Matemaatika võimalikest rakendustest muusikas”, mille juhendaja on prof Mati Abel,
   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu kuni autoriõiguse kehtivusaja tähtaja lõppemiseni:
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile;
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellekutaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **01.06.2013**