TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

KÕRGEMA MATEMAATIKA ÜLESANDED

II

TARTU 1972

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Matemaatika õpetamise metoodika kateeder

E. Mitt, O. Prinits, A. Vassil

KÕRGEMA MATEMAATIKA ÜLESANDED

II

TARTU 1972

Kinnitatud TRÜ Matemaatikateaduskonna nõukogus 19. mail 1972

Käesolev ülesannetekogu on koostatud Bioloogia-Geograafiateaduskonna I kursuse 2. semestri kõrgema matemaatika praktikumi jaoks. Ülesanded on jaotatud praktikumi teemade järgi töödeks.

Töö nr. 1. Hulgateooria põhimõisted.

Töö nr. 2. Matemaatilise loogika elemendid.

Töö nr. 3. Tõenäosuse mõiste.

Töö nr. 4. Tõenäosuse valemid.

Töö nr. 5. Maatriksid.

Töö nr. 6. Kahemuutuja funktsioonid.

Töö nr. 7. Osatuletised ja täisdiferentsiaal.

Töö nr. 8. Integraalid.

Kõik tööd on koostatud neljas võrdse raskusega variandis A, B, C ja D.

T ö ö nr. 1 - A

Hulgateooria põhimõisted

1. Kas $M = K$, kui

   a) $M = \{x \mid x$ on ühekohaline positiivne täisarv$\}$ ja $K = \{x \mid x < 10 \wedge x \in N\}$;

   b) $M = \{(1; 2), (2; 3)\}$ ja $K = \{(2; 1), (3; 2)\}$?

2. Leida

   a) $\{m, a, t, e, i, k\} \cup \{m, i, n, a\}$;

   b) $\{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{4, 8, 12\}$;

   c) $\{a^2, a^4\} \cup \{a^3, a^5\}$.

3. Leida

   a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10\}$;

   b) $\{ab, ac, ad\} \cap \{a, b, c\}$;

   c) $\{x, 2x, 3x\} \cap \{x, x^2, x^3\}$.

4. Esitada hulk elementide loetelu kaudu:

   a) $\{x \mid 7x^2 - 8x = 0\}$;

   b) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \wedge y - x = 1\}$;

   c) $\{(x, y) \mid x + y = m \wedge x - y = n\}$;

   d) $\left\{x \mid \frac{19x}{x + 1} + \frac{11x}{x - 1} = \frac{6}{x^2 - 1}\right\}$.

5. Ankeedi andmete põhjal õpib ühe kursuse üliõpilastest 36 inglise, 23 prantsuse, 15 saksa, 6 inglise ja prantsuse, 11 inglise ja saksa, 4 prantsuse ja saksa ning 1 kõiki kolme keelt. Leida üliõpilaste arv kursusel eeldusel, et igaüks õpib vähemalt ühte nimetatud keeltest.

6. Sajast üliõpilasest tegelevad 28 kergejõustikuga, 42 võrkpalliga, 30 korvpalliga, 10 kergejõustikuga ja võrkpalliga, 8 kergejõustiku ja korvpalliga, 5 võrk- ja korvpalliga, 3 kõigi nimetatud kolme alaga. Mitu üliõpilast
   a) tegeleb ainult ühe spordialaga,
   b) ei tegele ühegi spordialaga?

7. Venni diagrammil on kujutatud korrapäraste hulknurkade 14-nurkade hulk Y hulk ~~X~~ ja võrdkülgsete kolmnurkade hulk M. Diagrammi piirkonnad on tähistatud numbritega. Millised piirkonnad ei sisalda ühtegi elementi?

8. Tõestada, et
   a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
   c) $A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$;
   d) $\overline{A \setminus B} = \bar{A} \cap B$.

9. Saja üliõpilase kohta teostatud sotsioloogilise uurimuse tulemustest on üks osa esitatud järgmises tabelis.

	Ilus ja tark	Mitteilus ja tark	Ilus ja mittetark	Mitteilus ja mittetark
Blond	6	9	10	20
Brünett	7	11	15	9
Punapea	2	3	8	0

Tähistame hulki järgmiselt: B – blondid, T – brünetid, P - punapead, I - ilusad, R - mittetargad. Mitu üliõpilast kuulub igasse järgmisse hulka:

a) $B \cap I \cap R$, c) $P \cap \bar{R}$, e) $\overline{B \cup T}$,

b) T, d) $(T \cup P) \cap (I \cup \bar{R})$, f) $P \cap \bar{I} \cap R$?

T ö ö nr. 2 - A

Matemaatilise loogika elemendid

10. Leida lause tõeväärtus komponentlausete etteantud tõeväärtuste korral:

a) $\neg p \vee q$, kui $p = t$, $q = t$;

b) $x \wedge y \Rightarrow (x \Rightarrow \neg y)$, kui $x = v$, $y = t$;

c) $p \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, kui $p = v$, $q = v$, $r = t$.

11. Koostada lausete tõeväärtustabelid ja leida loogilised suhted iga lausepaari vahel:

a) $\neg p$, c) $p \wedge \neg q$,

b) $\neg q$, d) $\neg(\neg p \vee q)$.

12. Tõeväärtustabelite abil otsustada, kas lause on samaselt tõene, samaselt väär või kehtestatav:

a) $x \wedge y \Rightarrow x \vee y$,

b) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow [(y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \vee y \Rightarrow z)]$.

13. Kas laused on samaväärsed?

a) $(a \wedge b) \vee c$ ja $a \wedge (b \vee c)$

b) $\neg(x \Rightarrow \neg y)$ ja $\neg x \vee \neg y$

c) $p \Leftrightarrow \neg q$ ja $\neg(q \vee \neg p)$

14. Kohvikukülastaja kohta on teada järgmist: kui ta tellib tee, siis ei telli ta kohvi, ja kui ta sööb kooki, siis tellib ta kohvi, ja kui ta kooki ei söö, tellib ta vahukoore. Kelner toob lauale tee. Kas on tellitud ka vahukoor?

15. Perekond (isa, ema ja kolm tütart Liina, Riina ja Tiina) ostis televiisori. Lepiti kokku, et esimesel õhtul

hakatakse saateid vaatama selliselt:

1) kui isa vaatab saadet, siis ema teeb sedasama;
2) Riina ja Tiina vaatavad mõlemad või üks neist;
3) vaatab kas ema või Liina (mitte mõlemad);
4) vaatavad kas Liina ja Riina mõlemad või üks neist;
5) kui Tiina vaatab saadet, siis teevad seda ka isa ja Riina.

Kes perekonnaliikmetest vaatas sellel õhtul televiisorit?

16. Koostada lause etteantud tõeväärtuste järgi.

p	q	r	F_1	F_2
t	t	t	v	v
t	t	v	v	v
t	v	t	v	t
t	v	v	v	t
v	t	t	t	v
v	t	v	v	t
v	v	t	v	v
v	v	v	v	v

17. Olgu C, K, D kolm aritmeetilist operatsiooni. Operatsioon C tähendab arvu 2 lisamist antud arvule, K - antud arvu tõstmist ruutu ja D - 2-ga jagamist. Joonestada loogiliste võimaluste puu, mis näitab, millistes erinevates järjekordades võib teostada neid tehteid (iga operatsiooni rakendatakse vaid üks kord). Näidata võimalike erinevate järjekordade arv.

18. Teisendada liitlause

$$\neg[(p \wedge q) \Rightarrow \neg r]$$

nii, et märk " $\neg$ " esineks ainult komponentlausete ees.

19. Teisendada lause

$$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow \neg z) \Rightarrow (z \Rightarrow \neg x)$$

nii, et see sisaldaks ainult märke " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\neg$ ".

20. Teisendada lause

$$(x \Rightarrow z) \Rightarrow (y \wedge z)$$

nii, et see sisaldaks ainult märke " $\vee$ " ja " $\neg$ ".

21. Teisendada lause

$$x \vee y \Rightarrow (\neg x \Rightarrow z)$$

nii, et see sisaldaks ainult märke " $\wedge$ " ja " $\neg$ ".

22. Teisendada lause konjunktiivsele normaalkujule:

a) $p \vee (q \wedge r)$,

b) $x \vee x \wedge y \vee \neg x \wedge \neg y$.

23. Teisendada lause disjunktiivsele normaalkujule:

a) $a \wedge (a \Rightarrow b) \Rightarrow b$,

b) $(x \vee y) \wedge [\neg (x \wedge y) \vee z] \vee \neg z$,

c) $\neg (x \wedge y) \vee (x \Rightarrow y)$.

24. Disjunktiivsele normaalkujule teisendamisega tõestada, et lause on samaselt väär:

a) $(x \Rightarrow y) \wedge x \wedge \neg y$,

b) $\neg [\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$.

25. Konjunktiivsele normaalkujule viimisega tõestada, et lause on samaselt tõene:

a) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$,

b) $x \wedge \neg y \Rightarrow \neg (x \Rightarrow y)$.

26. Tõestada, et lause on samaselt väär:

a) $(a \Leftrightarrow b) \wedge (a \wedge \neg b \vee \neg a \wedge b)$,

b) $x \wedge \neg (y \Rightarrow x)$.

27. Näidata, et lause on samaselt tõene:

a) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$,

b) $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$.

28. Teisendada lause võimalikult lihtsale kujule:

a) $[\neg (\neg x \vee y) \Rightarrow x \vee y)] \wedge y$,

b) $(x \Rightarrow \neg y) \vee \neg (x \vee y)$.

29. Kasutades teisendusi otsustada, kas lause on kehtestatav:

a) $[(p \Rightarrow \neg q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg q$,

b) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \neg(p \Rightarrow r)$,

c) $x \vee y \Rightarrow z$.

30. Kasutades teisendusi otsustada, kas lause on samaselt tõene või samaselt väär:

a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$,

b) $(x \Rightarrow y) \wedge \neg y \Rightarrow \neg x$.

31. Näidata lausete

$(\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (y \wedge z)$ ja

$(x \Rightarrow y) \wedge z$

samaväärsus kahel viisil:

a) kasutades teisendusi,

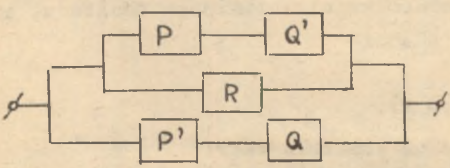
b) tõeväärtustabelite abil.

32. Joonestada skeem, mis vastab lausele:

a) $[(\neg p \wedge q) \vee r] \vee [p \vee (p \wedge q)]$,

b) $\neg r \wedge (q \vee p) \vee (\neg p \wedge q \vee p \wedge r)$.

33. Koostada lause, mis vastab antud skeemile.



34. Kasutades Venni diagrammi, teha kindlaks, kas lause on samaselt tõene või samaselt väär:

a) $p \vee \neg p$,

b) $(x \Rightarrow y) \wedge x \wedge \neg y$,

c) $a \wedge \neg(b \Rightarrow a)$.

35. Otsustada Venni diagrammide abil, kas laused on ekvivalentsed:

a) $p \wedge (q \vee r)$ ja $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,

b) $\neg(x \Rightarrow \neg y)$ ja $\neg x \vee \neg y$.

36. Otsustada Venni diagrammide abil, kas laused on samaväärsed või nende vahel kehtib järeldussuhe:

a) p ja $p \wedge q$,

b) $p \wedge \neg q$ ja $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \vee \neg q)$.

37. Otsustada tõeväärtustabelite abil, kas hulgad on võrdsed:

a) $\overline{A \setminus B}$ ja $\overline{A} \cap B$,

b) $(A \cup B) \setminus C$ ja $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

c) $M \cap \overline{N}$ ja $\overline{N \setminus M}$.

38. Millised järgmistest väljenditest on laused, millised predikaadid?

a) Sirge x on paralleelne sirgega y.

b) $|-5| > 0$.

c) $x^2 = y^2$.

d) $-3 > 3$.

39. Leida lause tõeväärtus:

a) eksisteerib vähemalt üks selline arv x, et $x + 3 = 5$;

b) eksisteerib mitte vähem kui üks selline arv x, et $ax = b$;

c) eksisteerib kaks ja ainult kaks niisugust arvu x, et $ax^2 + bx + c = 0$;

d) eksisteerib üks ja ainult üks sirge, mis läbib kaht antud punkti.

40. Sõnastada lause ja määrata selle tõeväärtus:

a) $(\exists x)(\forall y) | x + y = y$ (x, y on suvalised arvud);

b) $(\forall x)(\forall y) | [Q(x, y) \Rightarrow \neg(x \parallel y)]$;
(x, y on suvalised tasandid; $Q(x, y) \equiv$ "x lõikab y");

c) $(\forall y)(\exists x) | O(x, y)$ (x, y on suvalised inimesed, $O(x,y) \equiv$ "x on y isa").

41. Kirjutada lause kvantorite ja predikaatide abil ning määrata selle tõeväärtus:

a) eksisteerib selline arv x, mis rahuldab võrratust $x - 2 > 3x + 1$;

b) iga x korral $x - 2 > 3x + 1$;

c) ei leidu sellist ratsionaalarvu x, mille korral kehtib võrdus $x^2 = 2$;

d) igal hulkliikmel $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ on mitte vähem kui üks nullkoht.

T õ ö nr. 3 - A

Tõenäosuse mõiste

42. Sündmuseks A on märklaua tabamine esimese lasuga, sündmuseks B märklaua tabamine teise lasuga ja sündmuseks C märklaua tabamine kolmanda lasuga. Mis on nende sündmuste korrutiseks ja summaks?

43. Prantsuse looduseuurija Buffon (18. saj.) viskas münti 4040 korda. Vapp tuli esile 2048 korda. Leida vapi esiletuleku sagedus.

44. Leida tõenäosus selleks, et tähti k, l, e, e juhuslikult ritta ladudes saadakse sõna "leek".

45. Leida tõenäosus selleks, et kahe täringu korraga viskamisel saadud silmade summa on suurem kui 10.

46. Esimeses korvis on 4 valget ja 2 musta palli, teises 3 valget ja 5 musta palli. Kummastki korvist võetakse juhuslikult 1 pall. Leida tõenäosus selleks, et
    a) mõlemad pallid on valged,
    b) mõlemad pallid on mustad,
    c) üks pall on valge, teine must.

47. Täringut visatakse 2 korda. Leida tõenäosus selleks, et esimesel viskel saadakse 4, 5 või 6 silma ja teisel viskel 1, 2, 3 või 4 silma.

48. Müüdi 10 000 loteriipiletit. Võitude hulgas on 10 sajarublalist, 100 kümnerublalist ja 1000 esemelist võitu. Kui suur on võitmise tõenäosus? Kui suur on mittevõitmise tõenäosus?

49. On antud 5 pulka pikkusega 1, 3, 5, 7 ja 9 ühikut. Leida tõenäosus selleks, et nende hulgast juhuslikult võetud kolmest pulgast saab moodustada kolmnurga.

50. Kaardipakist, milles on 52 kaarti, võetakse huupi 5 kaarti. Leida tõenäosus selleks, et nende hulgas on

a) 4 ässa,

b) 4 ässa ja 1 kuningas,

c) 3 kümmet ja 2 soldatit,

d) 9, 10, soldat, emand ja kuningas,

e) 3 kaarti ühest mastist ja 2 mingist teisest mastist,

f) vähemalt 1 äss.

51. Kursusel on 30 noormeest ja 5 neidu. Eksamiruumi kutsutakse neist korraga 5 üliõpilast. Leida tõenäosus selleks, et kutsutute hulgas on üks neiu.

52. Koosolekust võtab osa 20 meest ja 5 naist, kes valivad endi hulgast kolmeliikmelise delegatsiooni. Leida tõenäosus selleks, et delegatsiooni kuulub 2 naist ja 1 mees.

53. 17 üliõpilast suunatakse praktikale. Neile on eraldatud Kohtla-Järvel 6, Kiviõlis ja Kundas 4 kohta. Leida tõenäosus selleks, et kolm ühes toas elavat üliõpilast saavad praktikale samasse linna, kui praktikakohtade valik toimub puhtjuhuslikult.

54. Arvud 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12 ja 13 kirjutatakse ühekaupa kaheksale ühesugusele kaardile. Leida tõenäosus selleks, et saadud kaartidel olevad arvud on ühisteguriga.

55. Seltskond, milles on 5 meest ja 10 naist, jaotatakse juhuslikult viieks kolmeliikmeliseks rühmaks. Leida tõenäosus selleks, et igas rühmas on 1 mees.

56. n-liikmeline seltskond istub laua ümber; neist 2 on meile tuttavad. Kui suur on tõenäosus, et meie tuttavad istuvad kõrvuti, kui kohad laua ümber valiti juhuslikult?

57. Instituudi õpperühmas on 14 mees- ja 8 naisüliõpilast. Neist kutsutakse korraga eksamiruumi 5. Leida tõenäosus selleks, et sisenejate hulgas on 2 naisüliõpilast.

58. Korvist, milles on õunu ja pirne, võetakse juhuslikult järjest kaks puuvilja. Sündmuseks A on pirni saamine esimesel korral, sündmuseks B pirni saamine teisel korral. Kas sündmused A ja B on sõltuvad?

59. Kas teineteist välistavad sündmused on sõltumatud?

60. Töökojas töötavad teineteisest sõltumatult 2 mootorit. Tõenäosus selleks, et tunni aja jooksul ei esine riket, on ühel mootoril 0,9, teisel - 0,85. Leida tõenäosus selleks, et mõlemad mootorid töötavad tunni aja jooksul häireteta.

61. Kaardipakist, milles on 36 kaarti, võetakse juhuslikult 1 kaart, pannakse see tagasi, segatakse kaarte ja võetakse veel kord üks kaart. Leida tõenäosus selleks, et mõlemad võetud kaardid on ühest ja samast mastist.

62. Abonent on unustanud telefoninumbri viimase numbri ja valib selle juhuslikult. Leida tõenäosus selleks, et tal ei tule helistada mitte rohkem kui kolme kohta. Leida sama tõenäosus juhul, kui abonendile meenub, et unustatud number on paaritu.

63. Urnis on 3 valget ja 7 musta kuuli. Leida tõenäosus selleks, et järjest valikuta võetud 2 kuuli on mõlemad valged.

64. Kastis on 10 kahekümnekopikalist, 5 viieteistkümnekopikalist ja 2 kümnekopikalist raha. Juhuslikult võetakse sealt 6 münti. Kui suur on tõenäosus, et saadud rahasumma ei ületa 1 rubla?

65. Nähtuse esiletuleku tõenäosus iga katse korral on 0,4. Kui suur on tõenäosus, et nelja katse korral tuleb nähtus esile vähemalt üks kord?

66. Ühes kastis on 6 musta ja 12 valget, teises 5 musta ja 15 valget kuuli. Mõlemast kastist võetakse üks kuul. Leida tõenäosus selleks, et neist vähemalt üks on valge.

67. Teate ühest punktist teise toimetamiseks saadeti teineteisest sõltumatult teele 2 käskjalga. Esimese käskjala sihtpunkti jõudmise tõenäosus on 0,9, teisel 0,8. Leida tõenäosus selleks, et teade jõuab pärale.

68. Üks lennuk, mis teeb põllul umbrohutõrjet, suudab umbrohu hävitada tõenäosusega 0,7, teine lennuk tõenäosusega 0,8. Kui suur on umbrohu hävitamise tõenäosus, kui põllul teevad umbrohutõrjet mõlemad lennukid?

69. Urnis on 8 kera vastavalt arvudega 1, 2, 3, 12, 13, 20, 30 ja 123. Võetakse huupi üks kera. Tähistame sümboliga A_k sündmuse, et saadud keral on number k ($k = 1, 2, 3$). Kas sündmused A_1, A_2, A_3 on sõltumatud?

T ö ö nr. 4 - A

Tõenäosuse valemid

70. Urnist, milles on 10 musta ja 5 valget kuuli, võetakse pimesi kuule ühekaupa. Kui suur on tõenäosus, et teine võetud kuulidest on valge?

71. Esimeses kastis on 5 standardset ja 2 defektiga detaili, teises 4 standardset ja 4 defektiga detaili. Esimesest kastist pannakse üks juhuslikult võetud detail teise kasti. Leida tõenäosus selleks, et seejärel teisest kastist huupi võetud detail on standardne.

72. Metallist valatakse kangidesse esimeses tsehhis 70 % ja teises 30 %, kusjuures esimese tsehhi toodangus on praaki 10 %, teise toodangus 20 %. Leida tõenäosus selleks, et juhuslikult võetud kang on defektideta.

73. Kaks spordiseltsi A ja B on kumbki esindatud kolme võistkonnaga (mehed, naised ja noored). A meeskond võidab 80 %-lise, A naiskond 40 %-lise ning A noortevõistkond 40 %-lise tõenäosusega. Kumma spordiseltsi võit on tõenäolisem (võitjaks loetakse see, kes saavutab vähemalt 2 võitu 3-st)?

74. Kastis on 3 detaili. Nende hulgast juhuslikult võetud detail osutus korrasolevaks ja pandi kasti tagasi. Leida tõenäosus selleks, et seejärel huupi võetud detail on samuti defektideta.

75. Metsas eksinu jõudis lagendikule, kust väljus 5 teed. On teada, et metsast väljapääsemise tõenäosus ühe

tunni jooksul on erinevatel teedel vastavalt 0,6; 0,3; 0,2; 0,1 ja 0,1. Leida tõenäosus selleks, et eksinu valis esimese tee, kui teame, et ta väljus metsast ühe tunni jooksul.

76. Sideliini kaudu antakse edasi kodeeritud tekstid tähtede A, B ja C abil. Erinevate tähtede edasiandmise tõenäosused on vastavalt 0,5; 0,3 ja 0,2. Moonutuste tõenäosused tähtede üleandmisel on vastavalt 0,01; 0,03; 0,02. On teada, et kahest tähest koosnev signaal võeti vastu moonutamata kujul. Leida tõenäosus selleks, et see signaal on AB.

77. Panka on saadetud 2000 rahapakki. Tõenäosus selleks, et pakk sisaldab ettenähtust vähem või rohkem rahamärke, on 0,0005. Leida tõenäosus selleks, et kontrollimisel avastatakse 4 ebatäpselt komplekteeritud pakki.

78. Telefoninumbri õigesti valimise tõenäosus on 0,95. Leida tõenäosus selleks, et seitsmest väljakutsest 6 on õiged.

79. Vaatluse all on 4 raadiot, milledest igaühe korrasoleku tõenäosus garantiitähtaja jooksul on 0,8. Koostada jaotusrida diskreetsele juhuslikule suurusele X, mille võimalikeks väärtusteks on garantiitähtaja jooksul korrasolevate raadiote arv.

80. Kauplusekülastaja teeb ostu tõenäosusega 0,65. Leida tõenäosus selleks, et kuuest külastajast neli teevad ostu.

81. Mitu sõltumatut katset tuleb teha, et tõenäoseim nähtuse esiletuleku arv oleks 51, kui selle nähtuse esiletuleku tõenäosus igal katsel on 0,64?

82. Ujumiskursustel õpib ujuma 75 % osavõtjatest. Leida tõenäosus selleks, et sajast osavõtjast õpib ujumiskursustel ujuma

a) mitte vähem kui 70 ja mitte rohkem kui 80 inimest;

b) mitte rohkem kui 70 inimest.

T ö ö nr. 5 - A

Maatriksid

83. Leida maatriksi astak:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & 3 & -4 & 9 & -2 \end{pmatrix}$, 6) $\begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

84. On antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Leida: a) $A \cdot B$, b) $B \cdot A$, c) $b \cdot A$, kui $b = -3$, d) $3 \cdot A - B$.

85. Leida maatriksite korrutis:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

86. Leida transponeeritud maatriks:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

87. Leida pöördmaatriks ja kontrollida tulemust maatriksite korrutamise teel:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

88. Lahendada võrrandisüsteem maatriksite abil:

a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 4x + 3y = 14, \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = 4 \\ 4x + 5y = 26, \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = -15, \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z + 8 = 0 \\ x + 2y + z - 3 = 0 \\ 5x + y - z - 5 = 0, \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 \qquad - 6x_4 = 9 \\ \qquad 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

T ö ö nr. 6 - A

Kahemuutuja funktsioonid

89. Leida funktsiooni

$$f(x, y) = \frac{x + 2y}{x - y}$$

väärtus kohal $x = 3$, $y = 1$.

90. Leida funktsiooni

$$v = s^{t^2-1} + t^{s^2-1}$$

väärtus, kui $s = 2$ ja $t = 1$.

91. Leida funktsiooni määramispiirkond:

a) $p = \ln qr$,

b) $z = x^2 + y^2 - 4$,

c) $f(x, y) = x - \arcsin y$,

d) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

92. Leida piirväärtus:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} (x^2 + y^2)$,

b) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$.

T ö ö nr. 7 - A

Osatuletised ja täisdiferentsiaal

93. Leida funktsiooni osatuletised:

a) $z = x^3y - y^3x$,

b) $z = \ln(x^2 + y^2)$,

c) $z = x^y$.

94. Leida funktsiooni

$$z = x^2 + y^2$$

osatuletised punktis (-2; 0,5).

95. Näidata, et funktsioon

$$T = \pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

rahuldab võrrandit

$$\ell\frac{\partial T}{\partial \ell} + g\frac{\partial T}{\partial g} = 0.$$

96. Leida y', kui funktsioon on antud võrrandiga

$$x^3y - y^3x = a^4.$$

97. Leida $\frac{dy}{dx}$ kohal $x = 6$ ja $y = 2$, kui y on antud võrrandiga

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0.$$

98. Leida kõvera

$$x^2 + y^2 = 10y$$

puutuja tõus selle kõvera lõikepunktis sirgega $x = 3$.

99. Leida y' ja y", kui

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

100. Leida funktsiooni täisdiferentsiaal:

a) $z = \arcsin \frac{x}{y}$,

b) $z = \arctan (xy)$.

101. Leida funktsiooni

$$z = x^3 + y^4$$

täisdiferentsiaali väärtus, kui $x = 1$, $y = 2$, $dx = 0,03$ ja $dy = -0,01$.

102. Leida Δz ja dz punktis $(2; 1)$, kui

$$z = \ln (x^2 + y^2)$$

ja $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = -0,1$.

103. Arvutada

$$1,02^{3,05}$$

ligikaudne väärtus.

104. Koonuse põhja raadius on $10,2(\pm 0,1)$ cm ja moodustaja $44,6(\pm 0,1)$ cm. Leida koonuse ruumala ja arvutada selle viga.

105. Näidata, et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

kui $z = x^y$.

106. Näidata, et

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2},$$

kui $s = \ln(\frac{1}{x} - \frac{1}{t})$.

107. Näidata, et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x - y},$$

kui $z = \frac{xy}{x - y}$.

108. Leida pinna

$$z = x^2 + 2y^2$$

puutujatasandi võrrand punktis $(1; 1; 3)$.

109. Leida pinna

$$z = x^4 + 2x^2y - xy + x$$

puutujatasandi ja normaali võrrandid punktis (1; 0; 2).

110. Leida funktsiooni

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$$

ekstreemumid.

111. Leida funktsiooni

$$z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$$

suurim ja vähim väärtus kinnises kolmnurgas, mis on piiratud koordinaattelgedega ja sirgega $x + y + 5 = 0$.

112. Uurida funktsiooni

$$z = x^m + y^m \quad (m > 1)$$

ekstreemumite suhtes, kui $x + y = 2$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

113. Jaotada positiivne arv a kolmeks positiivseks liidetavaks nii, et nende korrutis oleks suurim.

114. Leida tasandil

$$3x - 2z = 0$$

punkt, mille kauguste ruutude summa punktideni A(1; 1; 1) ja B(2; 3; 4) oleks vähim.

T ö ö nr. 8 - A

Integraalid

115. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^4}$

116. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$

117. $\int\limits_0^\infty x \sin x \, dx$

118. Leida joontega

$$y = x^2 \quad \text{ja} \quad y = x + 2$$

piiratud ala pindala.

119. Leida joontega

$$xy = 4, \quad x = y \quad \text{ja} \quad x = 4$$

piiratud ala pindala.

120. Leida piirkond, mille pindala on

$$\int\limits_0^a dy \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx.$$

Muuta integreerimise järjekorda ja arvutada pindala.

Arvutada integraal

121. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy$

122. $\iint\limits_{D} xy \, dx \, dy \quad (0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 2)$

123. $\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{y\,dx\,dy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$

124. Leida pindadega

$$x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \text{ ja } z = 0$$

piiratud keha ruumala.

125. Leida pindadega

$$z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \text{ ja } z = 0$$

piiratud keha ruumala.

126. Leida pindadega

$$z = a - x, \quad y^2 = ax \text{ ja } z = 0$$

piiratud keha ruumala.

127. Leida kolmekordse integraali abil pindadega

$$z = 4 - y^2, \quad z = y^2 + 2, \quad x = -1 \text{ ja } x = 2$$

piiratud keha ruumala.

128. Arvutada integraal

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz,$$

minnes üle silindrilistele koordinaatidele.

T õ õ nr. 1 - B

Hulgateooria põhimõisted

1. Kas M = K, kui
   a) $M = \{x \mid x$ on arvust 10 väiksem algarv$\}$ ja
   $K = \{1, 3, 5, 7\}$;
   b) $M = \{x \mid \frac{3}{2} < x < \frac{22}{3} \wedge x$ on täisarv$\}$ ja
   $K = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$?

2. Leida:
   a) $\{a, b, c\} \cup \{w, x, y, z\}$;
   b) $\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{2}{3}, 3, \frac{3}{4}\} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$;
   c) $\{k, l, mn\} \cup \{m\}$.

3. Leida:
   a) $\{10, 11, 12, \ldots, 19, 20\} \cap \{3, 9, 12, 15, 18\}$;
   b) $\{x, xy, y\} \cap \{2x, 3x\}$;
   c) $\{m, i, n, a\} \cap \{t, e, m, a\}$.

4. Esitada hulk elementide loetelu kaudu:
   a) $\{x \mid 5x^2 + 13x - 6 = 0\}$;
   b) $\{(x, y) \mid x^2 + 2y = 37 \wedge 6x - 2y = 18\}$;
   c) $\{(x, y) \mid 7x - 3y = 29 \wedge 2x + y = 12\}$;
   d) $\{x \mid \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0\}$.

5. Kursusel on 100 üliõpilast. Nendest õpib 28 inglise, 30 saksa, 42 prantsuse, 8 inglise ja saksa, 10 inglise ja prantsuse, 5 saksa ja prantsuse ning 3 saksa, inglise ja prantsuse keelt. Mitu üliõpilast

a) ei õpi ühtki nimetatud keelt,
b) õpib ainult prantsuse keelt,
c) õpib ainult inglise keelt,
d) õpib ainult saksa keelt?

6. Olümpiaadi lõpetamisel teatati järgmist:

a) $\frac{1}{12}$ kõigist osavõtjatest saab auhinna;

b) $\frac{1}{10}$ kõigist osavõtjatest on matemaatikaringi liikmed;

c) 75 % matemaatikaringi liikmetest saab auhinna;

d) 6 õpilast, kes on küll matemaatikaringi liikmed, ei saa auhinda.

Mitu õpilast võttis olümpiaadist osa?

7. Tasapinnalise kõvera punkte klassifitseeritakse järgmiste tunnuste alusel:

a) I järku tuletise märk vaadeldavas punktis (iseloomustab kahanemist või kasvamist);

b) II järku tuletise märk vaadeldavas punktis (iseloomustab kumerust või nõgusust selles punktis).

Joonistada Venni diagramm, kus oleksid näha kõik neli võimalust.

8. Tõestada, et

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$,
c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \dot{-} B$,
d) $A \setminus (B \setminus A) = \bar{B} \cap A$.

9. Klassi lastevanemate koosolekul oli 18 isa ja 24 ema - igal õpilasel vähemalt üks vanematest. Kümnel poisil ja kaheksal tüdrukul olid mõlemad vanemad, neljal poisil ja kolmel tüdrukul ainult ema, ühel poisil ja ühel tüdrukul ainult isa. Leida nende õpilaste arv, kellel on samas klassis õde või vend.

T õ õ nr. 2 - B

Matemaatilise loogika elemendid

10. Leida lause tõeväärtus komponentlausete etteantud tõeväärtuste korral:

a) $(a \vee \neg b) \Rightarrow (b \Rightarrow a)$, kui $a = v$, $b = t$;
b) $(\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee y)$, kui $x = t$, $y = v$;
c) $\neg(p \rightarrow q) \vee (\neg r \wedge q) \vee (r \Rightarrow \neg q)$, kui $p = t$, $q = t$, $r = v$.

11. Koostada lausete tõeväärtustabelid ja järjestada laused nii, et igast lausest järelduksid kõik temale järgnevad laused:

a) $\neg p \Leftrightarrow q$,
b) $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$,
c) $\neg[p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,
d) $p \vee q$,
e) $\neg p \wedge q$.

12. Tõeväärtustabelite abil otsustada, kas lause on samaselt tõene või samaselt väär või kehtestatav:

a) $x \Rightarrow x \wedge y$,
b) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x)$.

13. Kas laused on samaväärsed?

a) $\neg(p \Rightarrow \neg q)$ ja $\neg(p \vee q)$
b) $p \wedge \neg q$ ja $(\neg p \Rightarrow q) \vee \neg q$
c) $p \wedge (q \vee r)$ ja $(p \vee q) \Rightarrow r$

14. Perekond pole veel lõplikult otsustanud, kas puhkus veeta Moskvas, Leningradis või Riias. Lõpuks otsustati: kui Moskvasse ei sõideta, siis sõidetakse Leningradi, ja kui sõidetakse Moskvasse, siis sõidetakse ka Riiga, ja nad kas ei sõida Leningradi ja Riiga või sõidavad Moskvasse.

a) Kas perekond külastab kõiki kolme linna?
b) Kas nad sõidavad ainult Leningradi?
c) Kas nad sõidavad ainult Riiga?

15. Brošüüri autoril oli laspepõlves neli sõpra. Nende nimed olid Albert, Kalju, Tiit ja Toomas. Ühel sügispäeval astusid nad esimest korda üle kooliläve. Õpetaja ütles, et sellest päevast alates hakkab ta neid hüüdma ees- ja perekonnanimega. Ilmnes, et sõpradel on perekonnanimed samad mis eesnimedki, ainult nii, et kellelgi nende seast pole ees- ja perekonnanimi samad. Peale selle on teada, et Tiidu perekonnanimi ei olnud Albert. Leida iga poisi perekonnanimi, kui on teada, et selle poisi eesnimi, kelle perekonnanimi on Toomas, on selle poisi perekonnanimi, kelle eesnimeks on Kalju perekonnanimi.

16. Koostada lause etteantud tõeväärtuste järgi.

p	q	r	F_1	F_2
t	t	t	v	v
t	t	v	t	v
t	v	t	v	t
t	v	v	v	v
v	t	t	v	t
v	t	v	t	v
v	v	t	v	v
v	v	v	t	t

17. Menüüs on supid (aedviljasupp, puljong), praed (karbonaad, kanapraad, kala) ja magustoidud (jäätis, kompott). Lõunasöök koosneb kolmest toidust (supp, praad, magustoit). Joonestada loogiliste võimaluste puu.

a) Mitu erinevat lõunasööki saab tellida?

b) Mitu erinevat lõunasööki saab tellida siis, kui praeks on karbonaad?

c) Mitu erinevat lõunasööki võib saada, kui jäätist süüakse ainult siis, kui praeks on karbonaad?

18. Teisendada liitlause

$$\neg[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \vee r]$$

nii, et märk " $\neg$ " esineks ainult komponentlausete ees.

19. Teisendada lause

$$(x \Leftrightarrow y) \wedge (\neg x \Leftrightarrow \neg y) \Rightarrow (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$$

nii, et see sisaldab ainult märke " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\neg$ ".

20. Teisendada lause

$$\neg(x \Rightarrow y) \vee (\neg x \Rightarrow \neg y)$$

nii, et see sisaldab ainult märke " $\wedge$ " ja " $\neg$ ".

21. Teisendada lause

$$\neg x \wedge y \Rightarrow \neg y \wedge x$$

nii, et see sisaldaks ainult märke " $\vee$ " ja " $\neg$ ".

22. Teisendada lause konjunktiivsele normaalkujule:

a) $p \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q)$,

b) $x \wedge y \vee y \wedge z \vee z$.

23. Teisendada lause disjunktiivsele normaalkujule:

a) $(a \Leftrightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c)$,

b) $(x \Leftrightarrow y) \wedge (y \Leftrightarrow x) \Rightarrow (x \Leftrightarrow z)$,

c) $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$.

24. Disjunktiivsele normaalkujule teisendamisega tõestada, et lause on samaselt väär:

a) $x \wedge \neg(y \Rightarrow x)$,

b) $(\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \vee q)$.

25. Konjunktiivsele normaalkujule teisendamisega tõestada, et lause on samaselt tõene:

a) $x \wedge y \Rightarrow x$;

b) $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$.

26. Tõestada, et lause on samaselt väär:

a) $\neg[\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$,

b) $(q \wedge p) \wedge \neg(p \vee q)$.

27. Näidata, et lause on samaselt tõene:

a) $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$,

b) $p \wedge (q \vee r) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,

c) $(a \vee \neg b) \Rightarrow (\neg a \vee b)$.

28. Teisendada lause võimalikult lihtsale kujule:

a) $(x \Leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)$,

b) $\neg[(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow \neg x)$.

29. Kasutades teisendusi otsustada, kas lause on kehtestatav:

a) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$,

b) $(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge q)$,

c) $(a \vee \neg b) \wedge (b \Rightarrow \neg c)$.

30. Kasutades teisendusi otsustada, kas lause on samaselt tõene, samaselt väär või kehtestatav:

a) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,

b) $(a \wedge b) \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b)$.

31. Näidata lausete

$\neg x \vee x \wedge y \vee x \wedge z \vee \neg x \wedge y \vee \neg x \wedge z$ ja $x \Rightarrow y \vee z$

samaväärsust

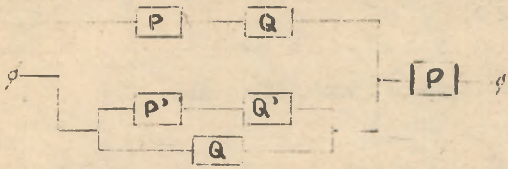
a) kasutades teisendusi,

b) tõeväärtustabelite abil.

32. Joonestada skeem, mis vastab lausele

a) $[(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)] \vee (\neg p \wedge \neg q)$,
b) $[(p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \vee (\neg p \wedge r)$.

33. Koostada lause, mis vastab antud skeemile.



34. Kasutades Venni diagrammi, teha kindlaks, kas lause on samaselt tõene või samaselt väär:

a) $\neg p \vee \neg q$,
b) $(a \wedge \neg b) \vee \neg a$,
c) $\neg[(p \Rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee q)]$.

35. Otsustada Venni diagrammide abil, kas laused on samaväärsed või nende vahel kehtib järeldussuhe:
a) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ ja $q \Rightarrow p$,
b) $p \wedge q$ ja $p \wedge \neg q$.

36. Otsustada Venni diagrammide abil, kas laused on samaväärsed või nende vahel kehtib järeldussuhe:

a) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ ja $q \Rightarrow p$,
b) $p \wedge q$ ja $p \wedge \neg q$.

37. Otsustada tõeväärtustabelite abil, kas hulgad on võrdsed:

a) $P \dot{-} Q$ ja $\overline{P \cap Q} \cup P$,
b) $A \cup \overline{B}$ ja $B \setminus \overline{A}$,
c) $\overline{P \setminus Q}$ ja $\overline{P} \cup Q$.

38. Millised järgmistest väljenditest on laused, millised predikaadid?

a) x on y isa
b) $2 + 3 = 4$

c) $x^0 = 1$

d) $z \geqslant 5$

39. Leida lause tõeväärtus:

a) eksisteerib mitte rohkem kui üks selline arv x, et $x + 3 > 5$;

b) eksisteerib ainult üks selline arv x, et $ax = b$;

c) eksisteerib mitte vähem kui kaks sellist arvu x, et $ax^2 + bx + c = 0$;

d) eksisteerib üks ja ainult üks tasand α, mis läbib kahte paralleelset sirget.

40. Sõnastada lause ja määrata selle tõeväärtus:

a) $(\forall x)(\forall y)(\exists z) \mid x + y = z$ (x, y, z on suvalised arvud);

b) $(\forall x)(\forall y) \mid [Q(x, y) \vee (x \parallel y)]$ (x, y on suvalised tasandid, $Q(x, y) \equiv$ "x lõikab [illegible]");

c) $(\exists x)(\forall y) \mid O(x, y)$ (x, y on suvalised inimesed, $O(x, y) \equiv$ "x on y isa").

41. Kirjutada lause kvantorite ja predikaatide abil ja määrata selle tõeväärtus:

a) igale naturaalarvule järgneb üks ja ainult üks naturaalarv;

b) eksisteerib niisugune arv x, et suvalise arvu a ja suvalise arvu b korral $x = a \cdot b$;

c) kolme erineva tasandi jaoks eksisteerib mitte rohkem kui üks ühine sirge.

T ö ö nr. 3 - B

Tõenäosuse mõiste

42. Lauamängu võib alustada, kui täringu viskamisel saadakse üks silm (sündmus A) või kuus silma (sündmus B). Mis on nende sündmuste summaks ja korrutiseks?

43. Esimese nelja tuhande naturaalarvu hulgas on 551 algarv Leida algarvude esinemise sagedus.

44. Maire valib 27 ladina tähestiku tähe hulgast juhuslikult 5 tähte. Kui suur on tõenäosus, et ta valib oma nimes esinevad tähed, tehes seda

    a) järjekorda arvestamata,
    b) õiges järjekorras?

45. Kotikeses on 3 kahekümnekopikalist ja 7 kolmekopikalist. Sellest kotikesest võetakse juhuslikult üks raha ning seejärel veel teine. Viimane osutub kahekümnekopikaliseks. Kui suur on tõenäosus, et ka esimene raha oli kahekümnekopikaline?

46. Visatakse korraga kahte täringut. Kui suur on tõenäosus, et saadakse

    a) kas 3, 7 või 12 silma;
    b) silmade arv, mis on väiksem kui 5;
    c) kas 10, 11, 12 või 13 silma?

47. Raha viskamisel tuli 3 korda järjest esile vapp. Kui suur on tõenäosus, et neljandal viskel tuleb vapp?

48. Kümnest loteriipiletist võidavad 2. Leida tõenäosus selleks, et viiest ostetud piletist

a) võidab 1,
b) võidavad 2,
c) võidab vähemalt 1.

49. Karbist, milles on 8 punast, 3 valget ja 9 sinist kuuli, võetakse juhuslikult 3 kuuli. Leida tõenäosus selleks, et

a) kõik võetud kuulid on punased,
b) kõik võetud kuulid on valged,
c) 2 võetud kuulidest on punased ja 1 valge,
d) vähemalt 1 võetud kuulidest on valge,
e) kuulid võeti järjekorras: punane, valge, sinine.

50. Kaardipakist, milles on 52 kaarti, võetakse juhuslikult 3 kaarti. Leida tõenäosus selleks, et saadud kaartide hulgas on

a) poti äss,
b) kuningas ja äss,
c) ainult üks äss,
d) kõik erinevatest mastidest,
e) igast mastist üks,
f) punaseid ja musti kaarte.

51. Professor nimetas rühmavanemale kolme üliõpilase nimed, keda ta kuuest konsultatsioonivajajast võtab jutule veel samal päeval. Rühmavanem aga unustas kutsutute nimed ja tegi kuue üliõpilase hulgast valiku huupi. Milline on tõenäosus selleks, et professori juurde läksid just need kolm üliõpilast, keda ta kutsus?

52. Viieliikmelisse uurimisrühma kandideeris 7 meest ja 3 naist. Kui suur on tõenäosus, et uurimisrühma võeti vähemalt üks naine, kui on teada, et komplekteerimine toimus loosimise teel?

53. Asutuse töötajatele eraldati puhkekodudesse L, P ja V vastavalt 5, 4 ja 3 tuusikut. Leida tõenäosus selleks, et tuusikusaajad A ja B sõidavad samasse puhkekodusse, kui on teada, et tuusikud jaotati tuusikusaajate vahel juhuslikult.

54. Urnist, milles on 4 valget, 5 musta ja 3 punast kuuli, võeti huupi 6 kuuli. Kui suur on tõenäosus, et võetuks osutuvad 2 valget, 3 musta ja 1 punane kuul?

55. Kaubasaadetises on 4 kõrgema ja 6 esimese sordi toodet. Leida tõenäosus selleks, et nende hulgast huupi võetud viie toote hulgas on 2 kõrgema sordi toodet.

56. Telefoninumber koosneb viiest numbrist. Leida tõenäosus selleks, et

a) kõik numbrid on erinevad,
b) kõik numbrid on paaritud.

57. Instituudi õpperühmas on 2 mees- ja 18 naisüliõpilast. Nimekirja järgi kutsutakse nendest 6 esimest dekaani juurde. Leida tõenäosus selleks, et kutsutute hulgas on 5 naisüliõpilast.

58. Urnis on v valget ja m musta kuuli. Sündmuseks A on musta kuuli saamine esimesel võtmisel, sündmuseks B valge kuuli saamine teisel võtmisel (esimest tagasi ei pandud). Kas sündmused A ja B on sõltuvad või sõltumatud?

59. A ja B on kaks teineteist välistavat sündmust, mis ei sõltu sündmusest C. Kas sündmus $A \cup B$ on samuti sõltumatu sündmusest C?

60. Kui suur on tõenäosus, et juhuslikult kirjutatud murd, mille lugejaks ja nimetajaks on kahekohalised täisarvud, taandub kahega?

61. Tõenäosus selleks, et tehase tootmisruumes tuleb nädala jooksul asendada üks elektripirn uuega, on 0,8, valmiskauba laoruumis aga 0,2. Kui suur on tõenäosus, et näda-

la jooksul tuleb mõlemas ruumis üks elektripirn uuega asendada?

62. Detail valmistatakse nelja operatsiooniga. Praagi esinemise tõenäosused üksikutel operatsioonidel on vastavalt 0,02; 0,01; 0,02 ja 0,03. Leida standardse detaili esinemise tõenäosus eeldusel, et praaktoote saamine ühel operatsioonil ei sõltu teisest operatsioonist.

63. Krossirajal tuli mootorratturil läbida teelõik AB 10 takistusega, milledest igaühe juures oli võistluse katkestamise tõenäosus 0,1; ülejäänud teelõigu BC läbimise tõenäosus oli 0,7. Leida tõenäosus selleks, et mootorrattur läbis kogu võistlustrassi AC.

64. Tööpäeva lõpul peab autobaasi saabuma 3 sõiduautot, 7 furgoonautot ja 10 tsisternautot. Autode tagasijõudmise järjekord on juhuslik. Arvutada tõenäosus selleks, et kolmandana saabunud auto on sõiduauto.

65. Märgi tabamise tõenäosus on ühe lasu korral 0,2. Mitu korda tuleb tulistada, et tõenäosus tabamiseks vähemalt ühel korral oleks mitte väiksem kui 0,6?

66. Kui suur on tõenäosus, et kaardipakist (32 kaarti) huupi tõmmatud kaart on kas poti mastist või pilt?

67. Üliõpilasel on vaja sooritada eksam inglise keelest ja ajaloost. Inglise keele eksami sooritamise tõenäosus on tal 0,4; vähemalt ühe eksami sooritamise tõenäosus 0,6 ja mõlema eksami sooritamise tõenäosus 0,1. Kui suure tõenäosusega sooritab üliõpilane ajalooeksami?

68. Visatakse kahte täringut. Leida tõenäosus selleks, et ühel neist tuleb 5 silma.

69. Urnis oli 5 kera vastavalt arvudega 1, 2, 3, 12 ja 123. Võetakse huupi üks kera. Tähistame sümboliga A_k sündmuse, et võetud keral on number k (k = 1, 2, 3). Kas sündmused A_1, A_2, A_3 on sõltuvad?

T õ õ nr. 4 - B

Tõenäosuse valemid

70. Tõenäosused selleks, et kahel tööpingil valmistatud detailid osutuvad mittekvaliteetseteks, on vastavalt 0,2 ja 0,3. Esimese pingi töökiirus on 2 korda suurem kui teisel. Kui suur on tõenäosus, et juhuslikult valitud detail on kvaliteetne?

71. Esimeses urnis on 2 valget ja 3 musta, teises 2 valget ja 2 musta ning kolmandas 3 valget ja 1 must kera. Üks esimesest urnist juhuslikult võetud kera asetati teise, seejärel teisest urnist üks kolmandasse ja lõpuks kolmandast üks kera esimesse urni. Kui suur on tõenäosus, et kerade koosseis jäi kõigis urnides endiseks?

72. Kauplusesse saabusid tooted, millest 25 % oli valmistatud vabrikus nr. 1, 35 % vabrikus nr. 2 ja 40 % vabrikus nr. 3. Nendes vabrikutes valmistatud tooted kuulusid esimesse sorti vastavalt tõenäosustega 0,75; 0,9 ja 0,8. Leida tõenäosus selleks, et kauplusest huupi valitud toode kuulub esimesse sorti.

73. Kastis on 6 tehases nr. 1 ja 9 tehases nr. 2 valmistatud detaili. Monteerija võtab kastist huupi 3 detaili. Leida tõenäosus selleks, et teisena võetud detail on valmistatud tehases nr. 2.

74. Esimeses kastis on 8 kvaliteetset ja 2 defektiga, teises 9 kvaliteetset ja 1 defektiga ning kolmandas 10 kvaliteetset detaili. Ühest kastist võeti huupi 3 detaili. Leida tõenäosus selleks, et detailid võeti teisest kastist, kui nendest 2 olid kvaliteetsed.

75. Ühes turismigrupis on 3 võõrkeele valdajat ja 2 mittevaldajat. Teises turismigrupis on neid vastavalt 4 ja 4. Esimesest grupist saadeti valikuta teise üks turist. Leida tõenäosus selleks, et nüüd teisest turismigrupist huupi valitud turist on võõrkeele valdaja.

76. Lattu saabunud detailidest on valmistatud esimeses vabrikus 20 %, teises 46 % ja kolmandas 34 %. On teada, et esimese vabriku toodangus leidub mittestandardseid detaile 3 %, teises 2 % ja kolmandas 1 %. Leida tõenäosus selleks, et juhuslikult võetud mittestandardne detail on valmistatud esimeses vabrikus.

77. Tõenäosus loteriil võitmiseks on 0,25. Leida tõenäosus selleks, et kaheksast ostetud piletist võidab kuus.

78. Abonent valib vajaliku telefoninumbri õigesti tõenäosusega 0,98. Leida tõenäosus selleks, et neljast väljakutsest valib abonent õigesti kolm.

79. Münti visati 4 korda. Leida tõenäosus vapi esiletulekuks kahel korral.

80. Tulistatakse 4 korda. Märgi tabamine ja mittetabamine on võrdvõimalikud. Leida tõenäosus selleks, et tabamiste arv on suurem mittetabamiste arvust.

81. Leida tõenäoseim sademeteta päevade arv septembrikuu esimeses dekaadis, kui mitmeaastaste vaatluste põhjal esineb septembris sademeid keskmiselt 11 päeval.

82. Kauplusesse toodi 56 kasti õunu. Tõenäosus selleks, et juhuslikult valitud kastis on kõik õunad standardsed, on 0,9. Leida tõenäoseim standardsete õuntega kastide arv.

T ö ö nr. 5 - B

Maatriksid

83. Leida maatriksi astak:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

84. On antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Leida: a) $A + 2B$, b) $A \cdot B$, c) $a \cdot A$, kui $a = -2$, d) $B \cdot A$.

85. Leida maatriksite korrutis:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

86. Leida transponeeritud maatriks:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

87. Leida pöördmaatriks ja kontrollida tulemust maatriksite korrutamise teel:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

88. Lahendada võrrandisüsteem maatriksite abil:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 36 \\ 3x - 4y = -14, \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 1, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 2z - 3 = 0 \\ 2x + 3y + 5z - 10 = 0 \\ 3x + 7y + 4z - 3 = 0, \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z + 10 = 0 \\ 5x + 2y + 3z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + 5z = 0, \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

T ö ö nr. 6 - B

Kahemuutuja funktsioonid

89. Leida funktsiooni
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
väärtus kohal $x = -3$, $y = 4$.

90. Leida funktsiooni
$$s = \sqrt[3]{uv} - \frac{1}{2} v^{u-1}$$
väärtus, kui $u = 4$ ja $v = 2$.

91. Leida funktsiooni määramispiirkond:

a) $w = \ln u + v$,

b) $z = \dfrac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$,

c) $u = 2x^2 + 2y^2 - 32$,

d) $z = \arcsin (3 - x^2 - y^2)$.

92. Leida piirväärtus:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \to -2}} (x^2 - y^2)$,

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to -1}} \dfrac{x + 1}{y - 1}$.

T ö ö nr. 7 – B

Osatuletised ja täisdiferentsiaal

93. Leida funktsiooni osatuletised:

    a) $z = \frac{x}{y}$,

    b) $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$,

    c) $z = \ln (x + \ln y)$.

94. Leida funktsiooni

    $$z = x^2 + xy + y^2$$

    osatuletised punktis (1; 2).

95. Näidata, et funktsioon

    $$z = \arctan \frac{y}{x}$$

    rahuldab võrrandit

    $$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

96. Leida y', kui y on antud võrrandiga

    $$xe^y + ye^x - e^{xy} = 0.$$

97. Leida $\frac{dy}{dx}$ kohal $x = 6$, $y = 8$, kui y on antud võrrandiga

    $$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0.$$

98. Leida kõvera

    $$x^3 + y^3 - 2axy = 0$$

    puutuja tõus punktis $x = y = a$.

99. Leida y' ja y'' kohal $x = 2$ ja $y = 0$, kui

    $$x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y + 2 = 0.$$

100. Leida funktsiooni täisdiferentsiaal:

a) $z = \frac{x + y}{x - y}$,

b) $u = x \cdot 2^y$.

101. Leida funktsiooni

$$z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

täisdiferentsiaali väärtus punktis (2; 1), kui $\Delta x = 0{,}01$ ja $\Delta y = 0{,}03$.

102. Leida Δz ja dz punktis (5; 3), kui

$$z = \arcsin \frac{y}{x}$$

ja $\Delta x = -0{,}5$; $\Delta y = 0{,}3$.

103. Arvutada

$$0{,}96^2 \cdot 1{,}02^3$$

ligikaudne väärtus.

104. Keha kaal õhus on $4{,}1(\pm 0{,}1)$ G ja vees $1{,}8(\pm 0{,}2)$ G. Leida keha tihedus ja arvutada selle viga.

105. Näidata, et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x},$$

kui $z = x^y$.

106. Näidata, et

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = -\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2,$$

kui $z = \sin\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$.

107. Näidata, et

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 s = 2,$$

kui $s = \ln(ax - bt)$.

108. Leida võrrand tasapinnale, mis puudutab pinda

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$$

ja on paralleelne tasandiga $x + y - z = 0$.

109. Leida pinna

$$z = 2x^2 + y^2$$

puutujatasandi ja normaali võrrandid punktis (1; 1; 3).

110. Leida funktsiooni

$$z = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y$$

ekstreemumid.

111. Leida funktsiooni

$$z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$$

suurim ja vähim väärtus ristkülikus, mille tipud on A(1; -3), B(1; 2), C(4; 2) ja D(4; -3).

112. Uurida funktsiooni

$$z = xy$$

ekstreemumite suhtes, kui $x^2 + y^2 = 2a^2$.

113. Läbi punkti (a; b; c) on kujutatud tasapind nii, et koordinaattasanditega ja selle tasapinnaga määratud tetraeedri ruumala on vähim. Leida kujutatud tasapinna võrrand.

114. Leida tasandil

$$x + y - 2z = 0$$

punkt, mille kauguste ruutude summa tasanditeni $x + 3z = 6$ ja $y + 3z = 2$ oleks vähim.

T ö ö nr. 8 - B

Integraalid

115. $\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\,dx \quad (a > 0)$

116. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

117. $\int_{c}^{\infty} e^{-x} \sin x\,dx$

118. Leida joontega

$y = \sin x$, $y = \cos x$ ja $x = 0$
piiratud ala pindala.

119. Leida joontega

$y = x^2$, $4y = x^2$ ja $y = 4$
piiratud ala pindala.

120. Leida piirkond, mille pindala on

$$\int_{0}^{a} dx \int_{x}^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy.$$

Muuta integreerimisjärjekorda ja arvutada pindala.

Arvutada integraal.

121. $\int_{2}^{4} dx \int_{x}^{2x} \frac{y}{x}\,dy$

122. $\iint\limits_{D} e^{x+y}\,dx\,dy \quad (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$

123. $\iint\limits_{D} x \sin(x + y)\,dx\,dy \quad (0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2})$

124. Leida pindadega

$y = 0,\ z = 0,\ 3x + y = 6,\ 3x + 2y = 12$ ja

$x + y + z = 6$

piiratud keha ruumala.

125. Leida pindadega

$z = x^2 + y^2,\ z = 0,\quad y = 1,\quad y = 2x \quad$ ja $\quad y = 6 - x$

piiratud keha ruumala.

126. Pöördsilindrit, mille teljeks on ordinaattelg ja raadiuseks r, lõigatakse pindadega

$\frac{x}{r} + \frac{y}{a} = 1,\quad x = 0,\quad y = 0 \quad$ ja $\quad z = 0.$

Leida tekkinud keha ruumala.

127. Leida pindadega

$z = x^2 + y^2,\quad z = x^2 + 2y^2,\quad y = x,\quad y = 2x$

ja $\quad x = 1$

piiratud keha ruumala.

128. Arvutada integraal, minnes üle sfäärilistele koordinaatidele

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

kus Ω on määratud võrratustega $z \geqslant 0$, $r^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

7

T õ õ nr. 1 - C

Hulgateooria põhimõisted

1. Kas M = K, kui

a) $M = \{x \mid x < 10 \wedge x$ on algarv$\}$ ja $K = \{2, 3, 5, 7\}$;
b) $M = \{(1; 2), (2; 3)\}$, $K = \{(2; 3), (1; 2)\}$?

2. Leida:

a) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$;
b) $\{10, 11, \ldots, 19, 20\} \cup \{3, 9, 12, 15, 18\}$;
c) $\{x, xy, y\} \cup \{2x, 3x, 4y\}$.

3. Leida:

a) $\{a, b, c, k, m\} \cap \{j, k, l, m\}$;
b) $\{x, xy, y\} \cap \{2x, 3x, 4x\}$;
c) $\{10, 20, 30, \ldots, 90, 100\} \cap \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$.

4. Esitada hulk loetelu kaudu:

a) $\{x \mid 2 + 3x - 2x^2 = 0\}$;
b) $\{(x, y) \mid x^2 = y + 26 \wedge 2x = y + 2\}$;
c) $\{(x, y) \mid 3x + 4y = 11 \wedge 5x + 6y = 17\}$;
d) $\left\{x \,\middle|\, \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{x(1 - x)} = \frac{x - 2}{x(x + 1)}\right\}$.

5. Sajast üliõpilasest õpib ainult saksa keelt 18, saksa keelt ja mitte inglise keelt 23, saksa ja prantsuse keelt 8, saksa keelt 26, prantsuse keelt 48, prantsuse ja inglise keelt 8, ei õpi ühtki nimetatud keelt 24

üliõpilast.

Mitu üliõpilast õpib

a) inglise keelt,
b) saksa ja inglise keelt, kuid mitte prantsuse keelt,
c) prantsuse ja inglise keelt, kuid mitte saksa keelt?

6. Küsitlusel selgus, et sajast õpilasest loeb ajakirja "Tehnika ja Tootmine" 50, ajakirja "Horisont" 40, ajakirja "Eesti Loodus" 25, ajakirju "Tehnika ja Tootmine" ning "Horisont" 15, ajakirju "Tehnika ja Tootmine" ning "Eesti Loodus" 10, ajakirju "Horisont" ja "Eesti Loodus" 5 ning kõiki kolme ajakirja 2 õpilast.

Mitu õpilast

a) loeb ainult ühte ajakirja,
b) ei loe ühtegi nimetatud ajakirja?

7. Kujutada Venni diagrammi abil hulknurkade, trapetsite, rööpkülikute, ristkülikute ja ruutude hulgad.

8. Tõestada, et

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
c) $A \mathbin{\dot{-}} (A \cap B) = A \setminus B$;
d) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

9. Hulkade A ja B kohta on teada, et

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
$A \cap B = \{4, 6, 3\}$;
$A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$;
$B \cup \{2, 4, 8\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Leida hulgad A ja B.

T ö ö nr. 2 - C

Matemaatilise loogika elemendid

10. Leida lause tõeväärtus komponentlausete etteantud tõeväärtuste korral:

a) $(a \vee \neg b) \Rightarrow (b \Rightarrow a)$, kui $a = t$, $b = t$;
b) $(\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee y)$, kui $x = v$, $y = t$;
c) $\neg(p \Rightarrow q) \vee (\neg r \wedge q) \vee (r \Rightarrow \neg q)$, kui $p = v$, $q = t$, $r = v$.

11. Koostada lause tõeväärtustabel:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$,
b) $(p \wedge q \wedge \neg z) \vee (p \wedge \neg q \wedge z)$,
c) $[(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge z)] \Rightarrow \neg(p \vee z)$.

12. Tõeväärtustabeli abil otsustada, kas lause on samaselt tõene, samaselt väär või kehtestatav:
a) $\neg x \wedge y \Rightarrow \neg y \wedge x$,
b) $y \wedge x \wedge \neg(x \vee y)$.

13. Kas laused on samaväärsed?

a) $p \wedge (q \vee r)$ ja $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
b) $\neg p \wedge \neg q$ ja $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
c) $\neg p$ ja $(p \vee q) \Rightarrow r$

14. Perekonnas on lõunasöögi suhtes kujunenud tavaks, et kui süüakse suppi, siis süüakse ka praadi, ja kui suppi ei sööda, siis süüakse magustoitu, ja kui süüakse salatit, siis ei sööda praadi. Kas lõunasöögiks on ka magustoit, kui salat on juba laual?

15. Neli õpilast – Mare, Hille, Leili ja Luule – võtsid osa võistlustest ja saavutasid neli esimest kohta. Küsimusele, mitmenda koha keegi saavutas, vastasid 3 tüdrukut:

a) Leili oli teine, Luule kolmas;
b) Leili oli esimene, Hille teine;
c) Mare oli teine, Luule neljas.

Igas nendest kolmest vastusest on üks osa õige, teine vale.

Mitmenda koha saavutas igaüks neljast õpilasest?

16. Koostada lause etteantud tõeväärtuste järgi.

p	q	r	F_1	F_2
t	t	t	v	v
t	t	v	t	v
t	v	t	t	v
t	v	v	v	t
v	t	t	v	v
v	t	v	v	v
v	v	t	v	t
v	v	v	t	v

17. Esimeses urnis on 2 musta ja 2 valget kuuli, teises 1 must ja 2 valget kuuli. Koostada loogiliste võimaluste tabel ja puu, kui võetakse juhuslikult üks urn ja sellest kaks kuuli

a) järjestikku,
b) korraga.

18. Teisendada liitlause

$\neg[x \wedge (\neg y \vee \neg z) \wedge z]$

nii, et märk " $\neg$ " esineb ainult komponentlausete ees.

19. Teisendada lause

$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$

nii, et see sisaldab ainult märke " $\wedge$ ", " $\vee$ " ja " $\neg$ ".

20. Teisendada lause

$(x \Leftrightarrow y) \vee x$

nii, et see sisaldab ainult märke " $\wedge$ " ja " $\neg$ ".

21. Teisendada lause

$(x \Leftrightarrow y) \wedge x$

nii, et see sisaldab ainult märke " $\vee$ " ja " $\neg$ ".

22. Teisendada lause konjunktiivsele normaalkujule:

a) $\neg p \vee (p \wedge \neg q) \vee q$,
b) $x \vee y \vee \neg z \wedge x \wedge y$.

23. Teisendada lause disjunktiivsele normaalkujule:

a) $p \wedge \neg(\neg q \wedge m) \wedge (r \vee s)$,
b) $x \vee y \Rightarrow \neg x \wedge y$,
c) $(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y)$.

24. Disjunktiivsele normaalkujule teisendamisega tõestada, et lause on samaselt väär:

a) $x \wedge y \vee \neg x \wedge \neg y \Leftrightarrow (\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee y)$,
b) $(a \Leftrightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c)$.

25. Konjunktiivsele normaalkujule teisendamisega tõestada, et lause on samaselt tõene:

a) $x \Rightarrow x \vee y$,
b) $(x \Rightarrow y) \wedge \neg y \Rightarrow \neg x$.

26. Tõestada, et lause on samaselt tõene:

a) $(\neg p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \vee q)$,
b) $x \wedge \neg(y \Rightarrow x)$,
c) $\neg [(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$.

27. Näidata, et lause on samaselt tõene:

a) $a \Rightarrow a \vee b$,
b) $(x \Rightarrow y) \wedge x \vee (x \Leftrightarrow y)$.

28. Teisendada lause võimalikult lihtsale kujule:

a) $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z) \Rightarrow (z \Rightarrow x)$,

b) $(x \wedge z) \vee (x \wedge \neg z) \vee (y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z)$.

29. Kasutades teisendusi otsustada, kas lause on kehtestatav:

a) $(q \wedge p) \wedge \neg(p \vee q)$,

b) $\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q)$,

c) $(x \vee y) \wedge z \Rightarrow \neg x \vee z$.

30. Kasutades teisendusi otsustada, kas lause on samaselt väär või kehtestatav:

a) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \neg(p \Rightarrow r)$,

b) $\neg[\neg p \Rightarrow (\neg p \vee q)]$.

31. Näidata lausete

$x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$ ja $y \Rightarrow (x \Rightarrow z)$

samaväärsust, kasutades

a) teisendusi,

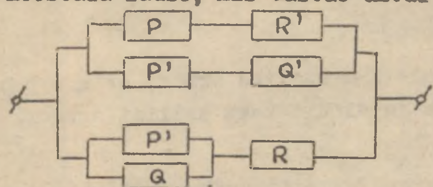
b) tõeväärtustabeleid.

32. Joonestada skeem, mis vastab lausele:

a) $[(p \vee q) \wedge \neg r] \vee [(\neg p \wedge r) \vee s]$,

b) $(r \wedge \neg p) \vee (\neg r \wedge p) \vee (r \wedge p)$.

33. Koostada lause, mis vastab antud skeemile.



34. Kasutades Venni diagrammi, teha kindlaks, kas lause on samaselt tõene:

a) $p \vee (\neg p \wedge q)$,

b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$,

c) $\neg[\neg p \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$.

35. Otsustada Venni diagrammi abil, kas laused on ekvivalentsed:

a) $\neg(q \wedge \neg p)$ ja $(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$,

b) $a \Rightarrow \neg b$ ja $\neg a \vee \neg b$.

36. Otsustada Venni diagrammi abil, kas laused on samaväärsed või nende vahel valitseb järeldussuhe:

a) $\neg p \wedge \neg q$ ja $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,

b) $\neg p$ ja $(p \vee q) \Rightarrow r$.

37. Otsustada tõeväärtustabelite abil, kas hulgad on võrdsed:

a) $\overline{\bar{A} \cup B}$ ja $A \setminus B$,

b) $M \cup \bar{P}$ ja $\bar{M} \setminus P$,

c) $\overline{P \cap \bar{Q}}$ ja $\bar{P} \setminus Q$.

38. Millised järgmistest väljenditest on laused, millised predikaadid?

a) $x^2 > 0$

b) $2^5 = 32$

c) $x + 2 < y - 3$

d) $|2| = 2$

39. Leida lause tõeväärtus:

a) eksisteerib ainult üks selline arv x, et $x + 3 > 5$;

b) eksisteerib kaks ja ainult kaks sellist arvu x, et $x^2 = 4$;

c) sirgel ja kolmnurgal on mitte vähem kui kaks ühist punkti.

40. Sõnastada lause ja määrata selle tõeväärtus:

a) $(\exists x)(\forall y) \mid x = 10 + y$ (x, y on suvalised arvud);

b) $(\forall x)(\exists y) \mid Q(x, y)$ (x, y on suvalised tasandid; $Q(x, y) \equiv$ "x lõikab y");

c) $(\forall x)(\exists y) \mid O(x, y)$ (x, y on suvalised inimesed, $O(x, y) \equiv$ "x on y isa").

41. Kirjutada lause kvantorite ja predikaatide abil ning määrata lause tõeväärtus:

a) eksisteerib selline arv x, et iga arvu a korral $a \cdot x = a$;

b) iga arvu a ja b jaoks eksisteerib selline arv x, et $a + b = x$;

c) iga kahe sirge x ja y jaoks eksisteerib üks punkt z, mis kuulub mõlemale sirgele.

T ö ö nr. 3 - C

Tõenäosuse mõiste

42. Tõnu, kelle käes olid piletid, lubas oodata Antsu ja Märti kino juures 5 minutit enne seansi algust. Leida sündmuste A ja M summa ning korrutis, kui sündmuseks A on Antsu tulek ja sündmuseks M Märdi tulek kokkulepitud ajal.

43. Tuhandest vastsündinust olid 517 poisid. Leida tüdrukute sünnisagedus.

44. Leida tõenäosus selleks, et tähti l, t, u, u juhuslikult ritta seades saadakse sõna "tuul".

45. Kuup, mille kõik tahud on värvitud, saeti tuhandeks väikeseks kuubikeseks. Leida tõenäosus selleks, et nende hulgast juhuslikult võetud kuubikesel

    a) on 2 värvitud tahku,
    b) on 3 värvitud tahku,
    c) pole ühtki värvitud tahku,
    d) pole ühtki värvimata tahku.

46. Karbis on 6 punast, 4 valget ja 5 sinist palli. Leida tõenäosus selleks, et juhuslikult võetud pall on

    a) punane,
    b) valge,
    c) sinine,
    d) mittepunane,
    e) punane või valge.

47. Münti visatakse järjest 2 korda. Kui suur on tõenäosus, et vapp tuleb esile kas esimesel või teisel viskel?

48. Müüdi n loteriipiletit, millest m võidavad. Leida tõenäosus võitmiseks, kui on ostetud k piletit.

49. Detailid pakitakse sajakaupa kastidesse. Kastitäis detaile tunnistatakse praagiks, kui sealt juhuslikult võetud viiest detailist kas või üks osutub praagiks. Kui suur on tõenäosus, et kast, milles on 5 % kõlbmatuid detaile, tunnistatakse praagiks?

50. Kaardipakist, milles on 52 kaarti, võetakse huupi 6 kaarti. Leida tõenäosus selleks, et nende hulgas on

a) poti äss,
b) iga masti esindajaid,
c) vähemalt 1 äss,
d) ainult 1 äss.

51. Laboratooriumis on 36 arvutuslükatit, millest 4 ei ole töökorras. Leida tõenäosus selleks, et kolme huupi võetud lükati hulgas üks ei ole töökorras.

52. Kastist, milles on 10 valget ja 30 musta kuuli, võetakse huupi 5 kuuli. Leida tõenäosus selleks, et nende hulgas on 3 musta.

53. Praktikakohti on üliõpilastele Tartus 20, Pärnus 5 ja Tallinnas 10. Leida tõenäosus selleks, et kolm üliõpilast A, K ja L satuvad praktikale samasse linna.

54. Peenral kasvab 40 valgeõielist ja 90 roosaõielist astritaime. Kui suur on tõenäosus, et juhuslikult võetud

a) kolm taime on roosaõielised,
b) kahest taimest üks on roosaõieline ja teine valgeõieline,
c) viiest taimest 2 on valgeõielised ja 3 roosaõielised?

55. Kastis on kolm paari musti ja 2 paari valgeid ühesuguseid kindaid. Leida tõenäosus selleks, et kaks huupi võetud kinnast moodustavad paari.

56. Kümme inimest, nende hulgas üks abielupaar, istub pingil. Leida tõenäosus selleks, et abikaasad asuvad kõrvuti, kui pingile istuti juhuslikus järjekorras.

57. Instituudi õpperühmas on 8 mees- ja 12 naisüliõpilast; neist 6 kutsutakse eksamiruumi. Leida tõenäosus selleks, et sisenejate hulgas on 4 naisüliõpilast.

58. Millised järgmistest sündmustest on üksteist välistavad:

a) nelja silma saamine ja kuue silma saamine ühel täringuviskel,

b) ühe silma saamine täringu esimesel viskel ja ühe silma saamine täringu teisel viskel?

59. A ja B on kaks teineteist välistavat sündmust, mis ei sõltu sündmusest C. Kas sündmus $A \cap B$ on samuti sõltumatu sündmusest C?

60. Täringut visatakse kaks korda. Leida tõenäosus selleks, et esimesel viskel saadi kuus silma ja teisel neli.

61. Klaasivabrikust piimakombinaadile saadetud pudelitest on 0,8 % katkised. Leida tõenäosus selleks, et kontrollimisel osutuvad katkisteks järjestikku kaks pudelit.

62. Lõigul AB on mootorratturite võidusõidurajal 12 takistust, kusjuures tõenäosus sõidu katkestamiseks iga tõkke juures on 0,1. Tõenäosus selleks, et mootorrattur läbib lõigu BC, on 0,7. Kui suur on tõenäosus, et mootorrattur ei peatu kogu raja AC ulatuses ühtki korda?

63. Vooluring koosneb kolmest järjestikusest elemendist, milledes katkestuse tekkimise tõenäosused on 0,1; 0,2 ja 0,3. Leida tõenäosus selleks, et vooluringis ei teki katkestust.

64. Urnist, milles on 5 valget ja 7 musta kera, võetakse järjestikku 3 kera. Leida tõenäosus selleks, et kolmandana võetud kera on valge.

65. Märklaua tabamise tõenäosus on 0,6. Mitu korda tuleb tulistada, et tõenäosusega 0,99 on märklauda vähemalt üks kord tabatud?

66. Raha visatakse järjest 2 korda. Kui suur on tõenäosus, et vapp tuleb esile kas esimesel või teisel viskel?

67. Merehädas oleva laeva meeskonnale heidetakse kahelt lennukilt langevarju abil varustust. Tõenäosused selleks, et varustus langeb laevale, on vastavalt 0,8 ja 0,7. Kui suur on tõenäosus, et vähemalt ühelt lennukilt heidetud varustus langeb laevale?

68. Igale 30-st ühesugusest žetoonist kirjutatakse üks kahekohalistest arvudest 11-st kuni 40-ni. Žetoonid segatakse ja võetakse juhuslikult 1 žetoon. Leida tõenäosus selleks, et sellel žetoonil on arv, mille teguriks on kas 2 või 3.

69. Urnis on 4 kera arvudega 1, 2, 3 ja 123. Võetakse huupi üks kera. Tähistame sümboliga A_k sündmuse, et sellel keral on number k ($k = 1, 2, 3$). Kas sündmused A_1, A_2, A_3 on sõltumatud?

T ö ö nr. 4 - C

Tõenäosuse valemid

70. Viiest urnist kahes on kummaski 2 valget ja 1 must kuul, ühes 10 musta kuuli ning ülejäänud kahes kummaski 1 must ja 3 valget kuuli. Võetakse juhuslikult 1 urn ja sellest huupi üks kuul. Kui suur on tõenäosus, et võetud kuul on valge?

71. Ühes kastis on 3 standardset ja 2 defektiga detaili, teises 4 standardset ja 4 defektiga detaili. Esimesest kastist üks juhuslikult võetud detail on pandud teise kasti. Millise tõenäosusega osutub nüüd teisest kastist huupi võetud detail standardseks?

72. Elektripirne valmistab 3 tehast. Esimene neist toodab üldisest elektripirnide tarvidusest 45 %, teine 40 % ja kolmas 15 %. Standardseid pirne on tehaste toodangutes vastavalt 70 %, 80 % ja 81 %. Kauplustesse saabub pirne müügiks kõigist kolmest tehasest. Leida tõenäosus selleks, et kauplusest ostetud pirn on standardne.

73. Rühmas on 25 üliõpilast. Nende teadmiste jooksvaks kontrollimiseks kutsutakse vastama juhuslikult valitud 3 üliõpilast. Leida tõenäosus selleks, et need said summaarseks hindeks 12 punkti, kui rühmas oli 5 väga hea õppeedukusega üliõpilast, kes alati vastavad viiele punktile, 10 hea õppeedukusega üliõpilast, kes saavad võrdse tõenäosusega hindeks 4 või 5 punkti, ja 10 rahuldavate teadmistega üliõpilast, kes saavad võrdse tõenäosusega hindeks 2, 3 või 4 punkti.

74. Kastis on neli detaili. Neist kontrolliti üht ja pandi tagasi. Leida tõenäosus selleks, et teisel korral võetud detail on defektita, kui esimene detail oli korras.

75. Võistlustest võttis osa 18 laskurit; neist 5 tabas märki tõenäosusega 0,8, 7 tõenäosusega 0,7, 4 tõenäosusega 0,6 ja 2 tõenäosusega 0,5. Juhuslikult valitud laskur tulistas, kuid ei tabanud. Leida tõenäosus tema kuulumiseks igasse nimetatud rühma.

76. Kaks jahimeest tulistavad korraga hunti. On teada, et esimesel jahimehel on tabamise tõenäosus 0,2, teisel 0,6. Esimese lasuga üks küttidest tabas. Leida tõenäosus selleks, et esimene kütt laskis mööda.

77. Seemnete idanemisprotsent on 90. Leida tõenäosus selleks, et seitsmest külvatud seemnest viis tärkab.

78. Tõenäosus autobussi õigeaegseks lõpp-peatusesse saabumiseks on 0,85. Leida tõenäosus selleks, et seitsmest järjestikusest autobussist viis jõuab lõpp-peatusesse õigeaegselt.

79. Korvi tabamise tõenäosus üksikviskel on 0,6. Korvpallur sooritab 6 sõltumatut viset. Leida tõenäosus selleks, et ta tabab vähemalt kahel korral.

80. Ajalehtede õigeaegselt sidejaoskonda saabumise tõenäosus on 0,85. Leida tõenäosus selleks, et viiest sidejaoskonnast vähemalt 4 saavad ajalehed õigeaegselt.

81. Märgi tabamise tõenäosus on 0,25. Tulistati 21 lasku. Leida tõenäoseim tabamuste arv.

82. Tõenäosus selleks, et kaugushüppaja hüpet arvestatakse, on 0,6. Leida tõenäoseim arvestatavate hüpete arv 15 hüppe korral.

T ö ö nr. 5 - C

Maatriksid

83. Leida maatriksi astak:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{pmatrix}$.

84. On antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ja } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leida: a) $3A + B$, b) $A \cdot B$, c) $B \cdot A$, d) $2 \cdot A$.

85. Leida maatriksite korrutis:

a) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2$, b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

86. Leida transponeeritud maatriks:

a) $(5 \quad 1 \quad 0 \quad -3)$, b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

87. Leida pöördmaatriks ja kontrollida tulemust maatriksite korrutamise teel:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

88. Lahendada võrrandisüsteem maatriksite abil:

a) $\begin{cases} 4x + y - 1 = 0 \\ x + 4y + 1 = 0, \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 8y + 34 = 0 \\ 2x - y - 9 = 0, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2z = -4 \\ 4y + z = 11, \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 4z = -15, \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5 \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2. \end{cases}$

9

T ö ö nr. 6 - C

Kahemuutuja funktsioonid

89. Leida funktsiooni

$$f = \frac{m}{\sqrt{m + n}} - mn$$

väärtus, kui $m = 2{,}5$ ja $n = 1{,}5$.

90. Leida funktsiooni

$$z = e^{\sin(x+y)}$$

väärtus, kui $x = y = \frac{\pi}{2}$.

91. Leida funktsiooni määramispiirkond:

a) $z = \sqrt{xy}$,

b) $u = \ln (s^2 + t^2)$,

c) $u = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$,

d) $z = y + \arcsin (x + 2)$.

92. Leida piirväärtus:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to -1}} \sqrt{x - y}$,

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{1 - xy}{x^2 + y^2}$.

T ö ö nr. 7 - C

Osatuletised ja täisdiferentsiaal

93. Leida funktsiooni osatuletised:

a) $u = e^{\frac{x}{y}}$,

b) $u = \sin(3x^2 + 5y - 4xy)$,

c) $z = xy \ln(x + y)$.

94. Leida funktsiooni

$z = x \cdot \arctan(y + 1)$

osatuletised punktis (-2; 0).

95. Näidata, et funktsioon

$z = y^2 \sin(x^2 - y^2)$

rahuldab võrrandit

$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$

96. Leida y', kui y on antud võrrandiga

$xy - \ln y = a.$

97. Leida $\frac{dy}{dx}$ kohal x = y = a, kui y on antud võrrandiga

$x^4y + xy^4 - ax^2y^2 = a^5.$

98. Leida punktid, milledes kõvera

$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$

puutuja on paralleelne x-teljega.

99. Leida y' ja y", kui

$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0.$

100. Leida funktsiooni täisdiferentsiaal:

a) $z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$,

b) $z = \sin(xy)$.

101. Leida funktsiooni

$$z = e^{xy}$$

täisdiferentsiaali väärtus punktis (1; 1), kui $\Delta x = 0{,}15$ ja $\Delta y = 0{,}1$.

102. Leida Δu ja du punktis (2; 1), kui

$$u = x^3 y^2$$

ja $\Delta x = -0{,}1$; $\Delta y = -0{,}1$.

103. Arvutada

$$1{,}04^{2{,}02}$$

ligikaudne väärtus.

104. Silindri raadius $R = 2$ dm ja kõrgus $H = 10$ dm. Pärast pikemaajalist seismist silinder deformeerus ja tema raadius oli 2,05 ning kõrgus 9,8 dm. Leida ruumala V muutumise ligikaudne väärtus ($\Delta V \approx dV$).

105. Näidata, et kehtib võrdus

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2},$$

kui $s = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right)$.

106. Näidata, et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} = 0,$$

kui $u = \arctan(2x - t)$.

107. Näidata, et

$$2\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t} = 0,$$

kui $z = 2\cos^2\left(x - \frac{t}{2}\right)$.

108. Leida koonuse $x^2 + y^2 = z^2$ normaali võrrandid punktis (3; 4; 5). Millises koonuse punktis normaal pole määratud?

109. Leida pinna

$$z = x^2 + 2y^2$$

puutujatasandi ja normaali võrrandid punktis, kus $x = y = 1$.

110. Leida funktsiooni

$$z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y$$

ekstreemumid.

111. Leida funktsiooni

$$z = xy\,(x + y + 1)$$

suurim ja vähim väärtus kinnises piirkonnas, mis on piiratud joontega $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$ ja $y = -\frac{3}{2}$.

112. Uurida funktsiooni

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

ekstreemumite suhtes, kui $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

113. Poolkerasse raadiusega R kujutada suurima ruumalaga risttahukas.

114. Leida vähima pindalaga risttahukas, mille ruumala on V.

T ö ö nr. 8 - C

Integraalid

Integreerida

115. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

116. $\int_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

117. $\int_{0}^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

118. Leida joontega

$y = \ln x, \quad x - y = 1 \quad \text{ja} \quad y = -1$

piiratud ala pindala.

119. Leida joontega

$y = x^2, \quad 4y = x^2 \quad \text{ja} \quad x = \pm 2$

piiratud ala pindala.

120. Leida piirkond, mille pindala on esitatud integraali

$$\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} dy$$

abil. Muuta integreerimise järjekorda ja arvutada pindala.

Arvutada integraal.

121. $\int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x\, dx$

122. $\iint\limits_{D} \frac{x^2}{1+y^2}\, dx\, dy \quad (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$

123. $\iint\limits_{D} x^2 y e^{xy}\, dx\, dy \quad (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2)$

124. Leida pindadega

$$z = x^2 + y^2, \quad x + y = 4, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad \text{ja} \quad z = 0$$

piiratud keha ruumala.

125. Leida pindadega

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad z = 0 \quad \text{ja} \quad x + y = 6$$

piiratud keha ruumala.

126. Leida pindadega

$$2y^2 = x, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1 \quad \text{ja} \quad z = 0$$

piiratud keha ruumala.

127. Leida kolmekordse integraali abil pindadega

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 2x^2 + 2y^2, \quad y = x^2 \quad \text{ja} \quad y = x$$

piiratud keha ruumala.

128. Arvutada integraal

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)\, dz,$$

minnes üle silindrilistele koordinaatidele.

T õ ö nr. 1 - D

Hulgateooria põhimõisted

1. Kas M = K, kui

a) $M = \{2, 6, 4, 8\}$ ja $K = \{x | x$ on ühekohaline arv$\}$;

b) $M = \{x | x$ jagub arvuga $10\}$ ja
$K = \{x | x$ jagub arvuga $5 \wedge x$ on paarisarv$\}$?

2. Leida:

a) $\{a, l, u, s\} \cup \{a, l, y, u, s\}$;

b) $\{2, 3, 5, 7, 11\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$;

c) $\{a, ab, abc\} \cup \{b, bc, bcd\}$.

3. Leida

a) $\{k, l, m, n\} \cap \{o, p, r, m\}$;

b) $\{a, a^2, a^4\} \cap \{a^3, a^5\}$;

c) $\{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{4, 8, 12\}$.

4. Esitada hulk elementide loetelu kaudu:

a) $\{x | x^2 + x - 2 = 0\}$;

b) $\{(x, y) | 2x^2 + 3y = 21 \wedge 6x - y = 13\}$;

c) $\{(x, y) | 2x + 3y = 12 \wedge x - 3y = -3\}$;

d) $\left\{x \middle| \frac{2}{1 - x^2} + \frac{1}{x(x - 1)} = \frac{x - 2}{-x(x + 1)}\right\}$.

5. 60 % kõrgema õppeasutuse üliõpilastest loeb ajakirja "Horisont", 50% ajakirja "Looming", 50 % ajakirja "Noorus", 30 % ajakirju "Horisont" ja "Looming", 20 % ajakirju "Looming" ja "Noorus", 30 % ajakirju "Hori-

sont" ja "Noorus" ning 10 % kõiki kolme ajakirja.

Mitu protsenti üliõpilastest

a) loeb ainult kahte nimetatud ajakirjadest,

b) ei loe ühtegi nimetatud ajakirjadest?

6. Ankeedi andmete põhjal õpib ühe kursuse üliõpilastest 28 inglise, 23 prantsuse, 23 saksa, 12 inglise ja saksa, 8 prantsuse ja saksa ning 5 kõiki kolme keelt. Leida üliõpilaste arv sellel kursusel eeldusel, et igaüks õpib vähemalt üht keelt.

7. Milline antud hulkadest vastab joonisel viirutatud osale?

a) $(X \cap Y) \cup M$

b) $X \cup (Y \cap M)$

c) $X \cap (Y \cup M)$

d) $(X \cap Y) \cap M$

e) $(X \cup Y) \cap M$

8. Tõestada, et

a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

c) $(A \dot{-} B) \dot{-} (A \cap B) = A \cup B$;

d) $\overline{\overline{A} \cup B} = A \setminus B$.

9. Inspekteerimisaruandes oli saja õpilase kohta märgitud, et neist õpib saksa ja inglise keelt 10, prantsuse ja inglise keelt 8, saksa ja prantsuse keelt 20, kõiki kolme keelt 5, inglise keelt 30, saksa keelt 23, prantsuse keelt 50.

Selle aruande esitanud inspektor vallandati. Miks?

T ö ö nr. 2 - D

Matemaatilise loogika elemendid

10. Leida lause tõeväärtus komponentlausete etteantud tõeväärtuste korral:

a) $(p \wedge \neg q) \Rightarrow (p \vee q)$, kui $p = v$, $q = v$;
b) $x \wedge y \Rightarrow (x \Rightarrow \neg y)$, kui $x = t$, $y = t$;
c) $p \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, kui $p = t$, $q = t$, $r = v$.

11. Koostada lausete tõeväärtustabelid ja leida loogilised suhted iga lausepaari vahel:

a) $a \wedge \neg a$,
b) $\neg a$,
c) $a \Rightarrow a \vee b$,
d) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg a$.

12. Tõeväärtustabeli abil otsustada, kas lause on samaselt tõene, samaselt väär või kehtestatav:

a) $(x \Leftrightarrow y) \vee x$,
b) $(x \vee y) \Rightarrow (x \Rightarrow y) \wedge (x \vee \neg y)$.

13. Kas laused on samaväärsed?

a) $(p \vee q) \Rightarrow r$ ja $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
b) $\neg(a \Rightarrow \neg b)$ ja $(a \wedge \neg b) \vee \neg a$
c) $\neg(a \wedge b \wedge \neg c)$ ja $c \wedge (\neg b \Rightarrow a)$

14. Kolm tütarlast - Anne, Vaike ja Heli - käisid demonstratsioonil. Üks nendest oli punases, teine valges ja kolmas sinises kleidis. Küsimustele, milline oli iga tütarlapse kleit, andis neid saatnud noormees järgmised vastused:

a) Anne oli punases kleidis;

b) Vaike ei olnud punases kleidis;

c) Heli ei olnud sinises kleidis.

Üks neist vastustest on tõene, kaks väärad. Millises kleidis oli iga tütarlaps?

15. Kui üliõpilane läheb pühapäeval kontserdile, siis ei lähe ta teatrisse, ja kui ta ei lähe suusatama, siis läheb ta teatrisse, ja kui ta läheb suusatama, siis ta istub ka natukese kohvikus. On teada, et üliõpilane läks kontserdile. Kas ta oli ka kohvikus?

16. Koostada lause etteantud tõeväärtuste järgi.

p	q	r	F_1	F_2
t	t	t	t	v
t	t	v	v	v
t	v	t	t	v
t	v	v	t	t
v	t	t	v	v
v	t	v	t	v
v	v	t	t	v
v	v	v	t	t

17. Televisioonistuudio režissöör koostab pooletunnise saate programmi, mis koosneb kirjanduskommentaarist, kergest muusikast ja teadetest (mitte üheaegselt), kusjuures igale saateliigile kulutatakse 5 minuti kordne aeg (5, 10, 15 jne. minutit).

Koostada loogiliste võimaluste tabel.

Leida:

a) mitu võimalust on anda kirjanduskommentaarile rohkem aega kui kergele muusikale;

b) mitu võimalust on anda kergele muusikale täpselt 5 minutit.

18. Teisendada liitlause

$$\neg(x \wedge y \vee \neg z)$$

nii, et märk " $\neg$ " esineb ainult komponentlausete ees.

19. Teisendada lause

$$(x \Rightarrow z) \Rightarrow (y \wedge z)$$

nii, et see sisaldab ainult märke " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\neg$ ".

20. Teisendada lause

$$(\neg a \Rightarrow b) \Rightarrow a \vee b$$

kujule, mis sisaldab ainult märke " $\wedge$ " ja " $\neg$ ".

21. Teisendada lause

$$(a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow \neg c) \Rightarrow (z \Rightarrow \neg a)$$

nii, et see sisaldab ainult märke " $\vee$ " ja " $\neg$ ".

22. Teisendada lause konjunktiivsele normaalkujule:

a) $\neg(p \vee q) \wedge p \wedge q \vee (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$,
b) $(x \Rightarrow y) \vee x \vee \neg y$.

23. Teisendada lause disjunktiivsele normaalkujule:

a) $\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q)$,
b) $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y)$,
c) $(x \vee y) \wedge z \Rightarrow \neg x \vee z$.

24. Disjunktiivsele normaalkujule teisendamisega tõestada, et lause on samaselt väär:

a) $\neg(x \Leftrightarrow y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$,
b) $(q \wedge p) \wedge \neg(p \vee q)$.

25. Konjunktiivsele normaalkujule viimisega tõestada, et lause on samaselt tõene:
a) $(x \Rightarrow y) \wedge x \Rightarrow y$,
b) $(x \Rightarrow y) \wedge x \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$.

26. Tõestada, et lause on samaselt väär:

a) $\neg(a \vee b) \Rightarrow (b \vee a)$,
b) $\neg[\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$.

27. Näidata, et lause on samaselt tõene:

a) $a \wedge b \Rightarrow a$,

b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$.

28. Teisendada lause võimalikult lihtsale kujule:

a) $\neg(\neg x \wedge \neg y) \vee (x \Rightarrow y) \wedge x$,

b) $\neg[x \wedge y \wedge (x \Rightarrow \neg y)]$.

29. Kasutades teisendusi otsustada, kas lause on kehtestatav:

a) $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p)$,

b) $[(x \vee y) \Rightarrow (x \vee y)] \wedge y$,

c) $(x \Rightarrow \neg y) \vee \neg(x \vee y)$.

30. Kasutades teisendusi otsustada, kas lause on samaselt tõene, samaselt väär või kehtestatav:

a) $(p \wedge \neg q) \wedge (p \Rightarrow q)$,

b) $x \vee y \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$.

31. Näidata lausete

$$(x \vee \neg y) \wedge (x \Rightarrow y) \quad \text{ja} \quad (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$$

samaväärsust

a) kasutades teisendusi,

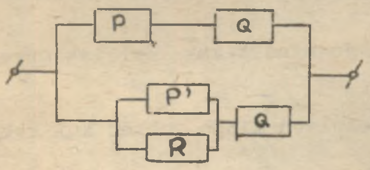
b) tõeväärtustabelite abil.

32. Joonestada skeem, mis vastab lausele

a) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee \neg p \wedge \neg q$,

b) $[\neg r \wedge (q \vee p)] \vee [(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

33. Koostada lause, mis vastab antud skeemile.



34. Kas tades Venni diagrammi, teha kindlaks, kas lause on samaselt tõene või samaselt väär:

a) $p \wedge \neg p$,

b) $(p \wedge q) \Longrightarrow (p \vee q)$,

c) $(q \wedge p) \wedge \neg(p \vee q)$.

35. Otsustada Venni diagrammide abil, kas laused on ekvivalentsed:

a) $p \vee (q \wedge r)$ ja $(p \vee q) \wedge r$,

b) $\neg a \vee b$ ja $\neg(\neg a \Rightarrow \neg b)$.

36. Otsustada Venni diagrammi abil, kas laused on samaväärsed või nende vahel kehtib järeldussuhe:

a) $p \wedge \neg q$ ja $p \wedge (q \vee r)$,

b) $p \wedge (q \vee r)$ ja $p \vee (q \wedge r)$.

37. Otsustada tõeväärtustabelite abil, kas hulgad on võrdsed:

a) $A \cap \bar{B}$ ja $\overline{B \setminus \bar{A}}$,

b) $P \cap \bar{Q}$ ja $(\bar{P} \cup \bar{Q}) \setminus Q$,

c) $P \mathbin{\dot{-}} \bar{Q}$ ja $\bar{P} \setminus \bar{Q}$.

38. Millised järgmistest väljenditest on laused, millised predikaadid?

a) Rööpküliku vastasküljed a ja b on võrdsed.

b) $2 + x = 4$.

c) $2^0 = 1$.

d) $-4 \leq 4$.

39. Leida lause tõeväärtus:

a) eksisteerib selline arv x, et $x + 3 > 5$;

b) eksisteerib mitte rohkem kui kaks sellist arvu x, et $x^2 = 4$;

c) eksisteerib kaks ja ainult kaks sellist arvu x, et $x^2 - 5x + 6 = 0$;

d) sirgel ja ringjoonel on mitte rohkem kui kaks ühist punkti.

40. Sõnastada lause ja määrata selle tõeväärtus:

a) $(\exists x)(\forall y) | x = y + 1$ (x, y, z on suvalised arvud);

b) $(\forall x)(\forall y) | [Q(x, y) \wedge (\exists z) | (z \parallel y) \Rightarrow Q(z, x)]$ (x, y, z on suvalised tasandid, $Q(x, y) \equiv$ "x lõikab y");

c) $(\exists y)(\forall x) | O(x, y)$ (x, y on suvalised inimesed, $Q(x, y) \equiv$ "x on y isa").

41. Kirjutada lause kvantorite ja predikaatide abil ning määrata lause tõeväärtus:

a) kahe arvu a ja b korral eksisteerib ainult üks selline arv x, et $a + x = b$;

b) iga arvu a ja b korral eksisteerib selline arv x, et $ax = b$;

c) eksisteerib mitte vähem kui kolm punkti, mis ei kuulu ühele sirgele.

T ö ö nr. 3 - D

Tõenäosuse mõiste

42. Sündmuseks A on kuue silma saamine täringu esimesel viskel, sündmuseks B kuue silma saamine täringu teisel viskel. Mis on nende sündmuste korrutiseks, summaks?

43. Urnis on 3 valget, 2 musta ja 5 punast kera. Leida tõenäosus selleks, et juhuslikult võetud kera on

a) punane,
b) mitte must.

44. Leida tõenäosus selleks, et tähti t, o, r, p, s juhuslikult ritta ladudes saadakse sõna "sport".

45. Korvis on kaht sorti õunu - sügisjoonikud ja kuldrenetid, kokku 60 õuna. Õuna juhuslikult võtmisel on kuldreneti saamise tõenäosus $\frac{1}{3}$. Kui palju on korvis sügisjoonikuid? Leida tõenäosus sügisjooniku saamiseks.

46. Kastis on 10 punast, 5 sinist ja 15 valget kuuli. Leida tõenäosus selleks, et juhuslikult valitud kuul on

a) värviline,
b) sinine,
c) mitte punane,
d) punane või sinine.

47. Täring on valmistatud nii, et iga tahu esiletulek on võrdeline temal oleva silmade arvuga (näiteks 6 silma tuleb esile 3 korda sagedamini kui 2 silma). Kui suur on tõenäosus, et ühel viskel saadakse paarisarv silmi?

48. Müüdi 1000 loteriipiletit, millest ühele langeb võit 500 rbl., kümnele á 100 rbl., viiekümnele á 20 rbl. ja sajale á 5 rbl. Leida tõenäosus selleks, et ühe pileti ostnud kodanik

a) võidab,

b) võidab mitte vähem kui 20 rbl.

49. Urnist, milles on 5 valget ja 4 musta kuuli, võetakse juhuslikult üks kuul, pannakse see tagasi ja võetakse veel üks kuul. Kui suur on tõenäosus, et mõlemad kuulid on mustad? Leida kahe musta kuuli saamise tõenäosus juhul, kui kuuli tagasi ei asetata.

50. Kaardipakis on 36 kaarti. Nende hulgast võetakse huupi kaks. Leida tõenäosus selleks, et saadud kaardid oleksid

a) mõlemad poti mastist,

b) samast mastist,

c) sama tugevusega,

d) 7 ja äss.

51. Rühmas on 25 üliõpilast. Nendest 8 õpib saksa ja 17 inglise keelt. Arvutada tõenäosus selleks, et rühma nimekirja esimene üliõpilane õpib saksa keelt.

52. 36 matkaja húlgas on 4 naist. Toiduvalmistajateks määrati huupi 3 inimest. Kui suur on tõenäosus, et neist 1 on naine?

53. Pimedal pööningul kuivab 2 paari halle, 6 paari musti ja 4 paari kirjusid sokke. Mitu sokki tuleb võtta, et nende seas oleks vähemalt 1 paar musti sokke? Arvutada tõenäosus selleks, et juhuslikult võetud 2 sokki

a) on musta värvi,
b) on sama värvi,
c) ei ole sama värvi.

54. Kastis on 3 läbipõlenud ja 7 korras elektripirni. Võetakse huupi järjest 3 pirni ning neid tagasi ei asetata. Leida tõenäosus selleks, et
a) võetakse vähemalt 1 korras pirn,
b) kõik 3 pirni on korras, kui esimene võetud pirnidest on korras.

55. Doominokomplektist võetakse juhuslikult 5 kivi. Leida tõenäosus selleks, et nende seas leidub vähemalt ühel kivipoolel kuus silma.

56. Leida tõenäosus selleks, et neljakohalises aastanumbris ei ole korduvaid numbreid.

57. Instituudi õpperühmas on 11 mees- ja 8 naisüliõpilast. Eksamiruumi kutsutakse neist korraga 5. Leida tõenäosus selleks, et kutsutute hulgas on 2 naisüliõpilast.

58. Millised järgnevatest sündmustest on üksteist välistavad?
a) Kaks laskurit tulistavad ühte ja samasse märklauda. Sündmuseks A on märklaua tabamine esimese laskuri poolt, sündmuseks B märklaua tabamine teise laskuri poolt.
b) Vapi ja kirja esiletulek raha ühekordsel viskamisel.

59. Kas sellest, et sündmus A sõltub sündmusest B, järeldub ka sündmuse B sõltuvus sündmusest A?

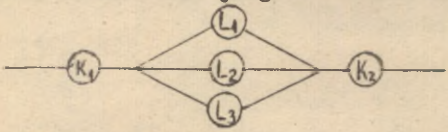
60. Leida tõenäosus selleks, et antud kaubasaadetisest juhuslikult võetud toode osutub esimesse sorti kuuluvaks, kui on teada, et 4 % saadetisest on praak ja 75% mittepraagilisest toodangust kuulub esimesse sorti.

61. Kahel laskuril on märklaua tabamise tõenäosused vastavalt 0,7 ja 0,8. Kui suur on tõenäosus, et nad mõlemad tabavad esimese lasuga?

62. Kolm lampi on lülitatud järjestikku. Pinge tõstmisel on pirnide läbipõlemise tõenäosused 0,3; 0,2 ja 0,2. Leida tõenäosus selleks, et pärast pinge tõstmist jäävad kõik lambid põlema.

63. Detaili valmistamise tehnoloogias on 3 operatsiooni, kus praagi tekkimise tõenäosused on vastavalt 0,01; 0,02 ja 0,03. Võimalus praakdetaili saamiseks ühe operatsiooni puhul ei sõltu praagi esinemisest teistel operatsioonidel. Leida standardse toote saamise tõenäosus.

64. Vooluahel on moodustatud järgneva skeemi kohaselt.



Aja T jooksul on elementide K_1, K_2, L_1, L_2 ja L_3 riknemise tõenäosused vastavalt 0,1; 0,2; 0,4; 0,7 ja 0,5. Leida voolu katkemise tõenäosus aja T vältel.

65. Raadiosignaalide vastuvõtmise tõenäosus on 0,8. Leida tõenäosus selleks, et neli korda korratud signaal võetakse vähemalt üks kord vastu.

66. Kaks üliõpilast lahendavad eraldi sama ülesannet. Kui suur on tõenäosus, et ülesanne nende poolt lahendatakse, kui esimene neist lahendab ülesande tõenäosusega 0,8 ja teine tõenäosusega 0,7?

67. Leida tõenäosus selleks, et juhuslikult võetud kahekohaline arv osutub jaguvaks kas 2, 5 või 10-ga.

68. Märgi tabamise tõenäosused kolme lasu puhul on vastavalt 0,4; 0,5 ja 0,7. Leida tõenäosus selleks, et märki tabab

a) üks laskudest,

b) vähemalt üks laskudest.

69. Urnis on 7 kera vastavalt arvudega 3, 5, 7, 35, 37, 57 ja 357. Võetakse huupi üks kera. Tähistame sümboliga A_k sündmuse, et võetud keral on number k (k = 3, 5, 7). Kas sündmused A_3, A_5, A_7 on sõltuvad?

T õ õ nr. 4 - D

Tõenäosuse valemid

70. Ühes kastis on 3 valget ja 3 musta, teises 4 valget ja 8 musta, kolmandas 7 valget ja 5 musta kuuli. Võetakse juhuslikult üks kast ja sellest huupi üks kuul. Kui suur on tõenäosus, et see kuul on valge?

71. Kahel tööpingil toodetakse ühesuguseid detaile, kusjuures esimesel pingil on praagi protsent 6 ja teisel 2. Esimese pingi võimsus on kaks korda suurem kui teisel. Toodetud detailid pannakse kokku. Leida tõenäosus selleks, et nende seast juhuslikult võetud detail ei ole praak.

72. Lattu saabusid õmblustooted, millest 20 % on valmistatud vabrikus K, 30 % vabrikus L ja 50 % vabrikus M. Tõenäosused, et vabrikutes valmistatud esemed kuuluvad esimesse sorti, on vastavalt 0,75; 0,9 ja 0,8. Leida tõenäosus selleks, et huupi võetud ese on esimesest sordist.

73. Üliõpilane läks eksamile, olles 25-st kordamisküsimusest ära õppinud 20. Talle esitati 3 küsimust. Leida tõenäosus selleks, et üliõpilane oskab vastata kõigile kolmele küsimusele.

74. Esimeses urnis on 5 valget ja 3 musta, teises 10 musta ning kolmandas 6 musta ja 1 valge pall. Juhuslikult võeti üks urnidest ja sellest valikuta 1 pall. Pall osutus valgeks. Leida tõenäosus selleks, et pall võeti

a) esimesest urnist,
b) teisest urnist,
c) kolmandast urnist.

75. Esimeses kastis on 2 rõngastatud ja 5 rõngastamata lindu, teises 12 rõngastatud ja 3 rõngastamata lindu. Juhuslikult võetud lind osutus rõngastatuks. Leida tõenäosus selleks, et lind võeti esimesest kastist.

76. On teada, et 5 % meestest ja 0,25 % naistest on värvipimedad. Arstlikul kontrollil osutus isik värvipimedaks. Kui suur on tõenäosus, et patsient oli mees, eeldusel, et
a) mehi ja naisi on ühepalju,
b) ta õpib ülikoolis, kus naisüliõpilasi on 66,7 %.

77. Telestuudios on 5 kaamerat. Tõenäosus selleks, et kaamera on vaadeldaval hetkel sisse lülitatud, on 0,6. Kui tõenäone on, et antud hetkel ei ole sisse lülitatud rohkem kui kolm kaamerat?

78. Laenutuspunktist laenutatud pokaalide tervena tagasitoomise tõenäosus on 0,6. Leida tõenäosus selleks, et kolmest tagasitoodud pokaalist kaks osutuvad terveteks.

79. Kolme raadiojaama vahel peetakse sidet, mis aeg-ajalt katkeb atmosfäärihäirete tõttu. Side katkemise tõenäosus kahe jaama vahel on 0,2. Leida tõenäosus selleks, et antud ajamomendil on side ainult kahe jaama vahel.

80. Töökojas on 12 mootorit. Kehtestatud töörežiimi kohaselt peab antud ajamomendil iga mootor töötama häireteta tõenäosusega 0,8. Leida tõenäosus selleks, et antud momendil töötavad häireteta mitte vähem kui 10 mootorit.

81. Kauplusesse toodud tolmuimeja korrasoleku tõenäosus on 0,96. Leida tõenäosus selleks, et viiest kaupluses olevast tolmuimejast on korras neli. Arvutada tõenäoseim korrasolevate tolmuimejate arv.

82. Mitu korda on vaja visata täringut, et tõenäoseim kahe silma esiletulekute arv oleks 32?

T ö ö nr. 5 - D

Maatriksid

83. Leida maatriksi astak:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 8 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

84. On antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Leida: a) $A - 3B$, b) $A \cdot B$, c) $B \cdot A$, d) $a \cdot A$.

85. Leida maatriksite korrutis:

a) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

86. Leida transponeeritud maatriks:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

87. Leida pöördmaatriks ja kontrollida tulemust maatriksite korrutamise teel:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

88. Lahendada võrrandisüsteem maatriksite abil:

a) $\begin{cases} 2x - 7y = -12 \\ 3x + 9y = 21, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + 3z = 4 \\ x + y + z = 5, \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z + 10 = 0 \\ 5x + 2y + 3z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + 5z = 0, \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - y + 2 = 0 \\ 7x + 9y - 5 = 0, \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_2 - x_4 = 1. \end{cases}$

T ö ö nr. 6 – D

Kahemuutuja funktsioonid

89. Leida funktsiooni

$$f(x, y) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

väärtus kohal $x = 5$, $y = 3$.

90. Leida funktsiooni

$$z = \left[\frac{\arctan(x + y)}{\arctan(x - y)}\right]^2$$

väärtus, kui $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ ja $y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

91. Leida funktsiooni määramispiirkond:

a) $z = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y}$,

b) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$,

c) $s = \frac{10}{\sqrt{3v^2 + 3t^2 - 27}}$,

d) $z = \arcsin \frac{y - 1}{x}$.

92. Leida piirväärtus:

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ y \to 7}} \log(x + y)$,

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{x}$.

T ö ö nr. 7 - D

Osatuletised ja täisdiferentsiaal

93. Leida funktsiooni osatuletised:

a) $u = x^2 + 3xy + 4y^2$,

b) $z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$,

c) $s = \arctan \frac{u}{v}$.

94. Leida funktsiooni

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

osatuletised punktis (3; 3).

95. Näidata, et funktsioon

$$z = \ln (x^2 + y^2)$$

rahuldab võrrandit

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

96. Leida y', kui y on antud võrrandiga

$$yx^2 = e^y.$$

97. Näidata, et võrdusest

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

järeldub, et

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}} = 0.$$

98. Leida punktid, milledes kõvera

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2$$

puutuja on paralleelne y-teljega.

99. Leida kõverale

$$x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

puutuja punktis $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.

100. Leida funktsiooni täisdiferentsiaal:

a) $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$,

b) $u = \ln \tan \frac{x}{y}$.

101. Leida funktsiooni

$$z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$$

täisdiferentsiaali väärtus punktis (3; 4), kui $\Delta x = 0{,}1$ ja $\Delta y = 0{,}2$.

102. Leida Δu ja du punktis (2; 1), kui

$$u = 3x^2 + xy - y^2 + 1$$

ja $\Delta x = 1$; $\Delta y = 2$.

103. Arvutada $\ln (\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1)$ ligikaudne väärtus.

104. Täisnurkse kolmnurga kaatetid mõõdeti täpsusega 0,1 cm ning saadi 7,5 ja 18 cm. Arvutada hüpotenuusi pikkus ja selle absoluutne viga.

105. Näidata, et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

kui $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$.

106. Näidata, et

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 s = \frac{2s}{9},$$

kui $s = \sqrt[3]{ax + bt}$.

107. Näidata, et

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x},$$

kui $z = e^{\frac{x}{y}}$.

108. Määrata nurgad, mis moodustuvad koordinaattelgede ja pinna $x^2 + y^2 - xz - yz = 0$ punktist (0; 2; 2) tõmmatud normaali vahel.

109. Leida pinna $z = xy$ (hüperboolne paraboloid) puutujatasandi ja normaali võrrandid punktis (1; 2; 2).

110. Leida funktsiooni

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

ekstreemumid.

111. Leida funktsiooni

$$z = x^2y\,(4 - x - y)$$

suurim väärtus kolmnurgas, mis on piiratud sirgetega $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

112. Uurida funktsiooni

$$z = a\cos^2 x + b\cos^2 y$$

ekstreemumite suhtes, kui $y - x = \frac{\pi}{4}$.

113. Leida risttahukakujulise basseini mõõtmed nii, et tema pindade katmiseks kuluks vähim hulk materjali, kui basseini ruumala on V.

114. Leida suurima ruumalaga risttahukas, mille pindala on S.

T ö ö nr. 8 - D

Integraalid

Integreerida

115. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\,(x+1)}$

116. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$

117. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$

118. Leida joontega $y^2 = 4 + x$ ja $x + 3y = 0$ piiratud ala pindala.

119. Leida joontega

$xy = 1$, $xy = 8$, $y^2 = x$ ja $y^2 = 8x$

piiratud ala pindala.

120. Leida piirkond, mille pindala on

$$\int_{-2}^{0} dy \int_{y^2-4}^{0} dx.$$

Muuta integreerimise järjekorda ja arvutada pindala.

Arvutada integraal

121. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} dy$

122. $\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{dxdy}{(x + y + 1)^2}$ $(0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 1)$

123. $\iint\limits_{\mathcal{D}} x^2y \cos (xy^2) \, dxdy$ $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \; 0 \leq y \leq 2)$

124. Leida pindadega

$z = x + y + a, \quad y^2 = ax, \quad x = a, \quad z = 0$ ja $y = 0$

(kui $y > 0$)

piiratud keha ruumala.

125. Leida pindadega

$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad 2x + 3y - 12 = 0$ ja

$z = \frac{1}{2} y^2$

piiratud keha ruumala.

126. Leida pindadega

$z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1$ ja $z = 0$

piiratud keha ruumala.

127. Leida kolmekordse integraali abil pindadega

$z = \ln (x + 2), \quad z = \ln (6 - x), \quad x = 0,$

$x + y = 2$ ja $x - y = 2$

piiratud keha ruumala.

128. Arvutada integraal

$$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz,$$

minnes üle sfäärilistele koordinaatidele.

Sisukord

Töö nr. 1-A. Hulgateooria põhimõisted 4
Töö nr. 2-A. Matemaatilise loogika elemendid 7
Töö nr. 3-A. Tõenäosuse mõiste 13
Töö nr. 4-A. Tõenäosuse valemid 17
Töö nr. 5-A. Maatriksid 20
Töö nr. 6-A. Kahemuutuja funktsioonid 22
Töö nr. 7-A. Osatuletised ja täisdiferentsiaal 23
Töö nr. 8-A. Integraalid 26

Töö nr. 1-B. Hulgateooria põhimõisted 28
Töö nr. 2-B. Matemaatilise loogika elemendid 30
Töö nr. 3-B. Tõenäosuse mõiste 36
Töö nr. 4-B. Tõenäosuse valemid 40
Töö nr. 5-B. Maatriksid 42
Töö nr. 6-B. Kahemuutuja funktsioonid 44
Töö nr. 7-B. Osatuletised ja täisdiferentsiaal 45
Töö nr. 8-B. Integraalid 48

Töö nr. 1-C. Hulgateooria põhimõisted 50
Töö nr. 2-C. Matemaatilise loogika elemendid 52
Töö nr. 3-C. Tõenäosuse mõiste 58
Töö nr. 4-C. Tõenäosuse valemid 62
Töö nr. 5-C. Maatriksid 64
Töö nr. 6-C. Kahemuutuja funktsioonid 66
Töö nr. 7-C. Osatuletised ja täisdiferentsiaal 67
Töö nr. 8-C. Integraalid 70

Töö nr. 1-D. Hulgateooria põhimõisted 72
Töö nr. 2-D. Matemaatilise loogika elemendid 74
Töö nr. 3-D. Tõenäosuse mõiste 80
Töö nr. 4-D. Tõenäosuse valemid 85
Töö nr. 5-D. Maatriksid 88
Töö nr. 6-D. Kahemuutuja funktsioonid 90
Töö nr. 7-D. Osatuletised ja täisdiferentsiaal 91
Töö nr. 8-D. Integraalid 94

Э. Митт, О. Принито, А. Вассил

ЗАДАЧИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

II

На эстонском языке

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Vastutav toimetaja E. Aadusoo

Korrektor M. Raisma

TRÜ rotaprint 1972. Paljundamisele antud 18.VII 1972. Trükipoognaid 6,25. Tingtrükipoognaid 5,8. Arvestuspoognaid 4,89. Trükiarv 300. Paber 30x42. 1/4. Tell. nr. 763.

Hind 25 kop.

Hind 25 kop.