

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Johanna Maria Kirss
Möbiuse funktsioonid intsidentsusalgebrates
Matemaatika
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: PhD Ülo Reimaa

TARTU 2022

MÖBIUSE FUNKTSIOONID INTSIDENTSUSALGEBRATES

Bakalaureusetöö
Johanna Maria Kirss

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös tutvustatakse Möbiuse funktsioone ning kirjeldatakse valemit nende leidmiseks teatud tingimusi täitvas konvolutsioonialgebras. Valemi kasutust demonstreeritakse, leides Möbiuse funktsioonid lokaalselt lõpliku osaliselt järjestatud hulga, kategooria ja monoidi intsidentsusalgebrates. Peale nende teemadega seotud näidete tuuakse välja elimineerimisprintsip kui Möbiuse inversioonivalemi erijuht.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Märksõnad. Koalgebra, konvolutsioonialgebra, Möbiuse funktsioon.

MÖBIUS FUNCTIONS IN INCIDENCE ALGEBRAS

Bachelor thesis
Johanna Maria Kirss

Abstract

The present bachelor's thesis introduces Möbius functions and describes a formula for determining them in certain convolution algebras. The use of the formula is shown by finding Möbius functions in the incidence algebras of locally finite posets, categories and monoids. In addition, the inclusion-exclusion principle is surveyed as a special case of the Möbius inversion formula.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.

Keywords. Coalgebra, convolution algebra, the Möbius function.

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Põhimõisted	4
1.1 Möbiuse inversioonivalem	4
1.2 Vektorruumide tensorkorrutis	5
1.3 Funktor $- \otimes -$	6
1.4 Vektorruumide tensorkorrutise omadusi	9
2 Konvolutsioonialgebrad ning nendes pööratavad elemendid	14
2.1 Algebra, koalgebra ja konvolutsioonialgebra	14
2.2 Rühmalaadsed elemendid ja filtratsioon	18
2.3 Pöördelemendi leidmine kirjeldatud koalgebras	21
3 Intsidentsusalgebrad	24
3.1 Osaliselt järjestatud hulga intsidentsusalgebra	24
3.2 Vähendatud intsidentsusalgebrad	25
3.3 Möbiuse funktsioonid intsidentsusalgebrates	29
3.4 Möbiuse funktsiooni arvutamine	31
3.5 Elimineerimisprintsip	36
3.6 Kategooria ja monoidi intsidentsusalgebra	38
Viited	42

Sissejuhatus

Möbiuse funktsioon, mida kirjeldas esimesena saksa matemaatik August Ferdinand Möbius 1832. aastal, on laialt tuntud arvuteoreetiline funktsioon, mis kirjeldab naturaalarvu n erinevate algarvuliste jagajate arvu paarsust. 1960ndatel aastatel üldistas funktsiooni naturaalarvudelt lokaalselt lõplikele osaliselt järjestatud hulkadele ning lokaalselt lõplikele kategooriatele itaalia-ameerika matemaatik Gian-Carlo Rota. Kuigi üldistus osaliselt järjestatud hulkadele on kõige laiemat kasutust leidnud, on Möbiuse funktsiooni veel abstraktsemalt käsitletud mitmel viisil. Hiljutises artiklis [4] annab J. Kock valemi Möbiuse funktsiooni arvutamiseks üldises konvolutsioonialgebras. Konvolutsioonialgebra $\text{Lin}(C, A)$ element ja koalgebra C peavad selle jaoks rahuldama teatud tingimusi, mis aitavad rekursiivse valemi abil leida pöördlemendi.

Käesolevas bakalaureusetöös antakse kolme peatüki jooksul ülevaade erinevatest Möbiuse funktsioonidest, mida saab leida, kasutades rekursiivset valemit artiklist [4]. Esimeses peatükis tutvustatakse põhimõisteid ja vajalikku teooriat. Kirjeldatakse Möbiuse funktsiooni ja sellega kaasnevaid mõisteid nagu Möbiuse inversioonivalem ja Dirichlet' konvolutsioon ning kolme alapeatükiga ehitatakse üles vajalik vektorruumide tensorskorrutiste teooria.

Teises peatükis tuuakse sisse algebra, koalgebra ja konvolutsioonialgebraga seotud mõisted. Lisaks defineeritakse koalgebra rühmalaadsed elemendid ja filtratsiooni ning tõestatakse mõned nende edasises olulised omadused. Lõpetuseks tõestatakse teoreem pöördlemendi leidmise kohta konvolutsioonialgebras, kui vastav koalgebra on filtreeritud ja täidab teatud tingimust rühmalaadsete elementide kohta.

Kolmas peatükk kirjeldab teise peatüki lõpus toodud tulemuse rakendusi. Alustuseks tutvustatakse osaliselt järjestatud hulga intsidentsusalgebrat ja selle vähenatud intsidentsusalgebrat. Seejärel kirjeldatakse Möbiuse funktsiooni arvutamist sõltuvalt intervalli struktuurist ning näidatakse, kuidas elimineerimisprintsip on erijuht Möbiuse inversioonivalemist. Lõpetuseks peatutakse kategooria intsidentsusalgebral, mis peale osaliselt järjestatud hulga annab ka lokaalselt lõpliku monoidi intsidentsusalgebra. Näidatakse, et teatud klassikalisematel erijuhtudel on monoidi ja osaliselt järjestatud hulga intsidentsusalgebrad isomorfsed.

1 Põhimõisted

Tutvustame selles peatükis esmalt Möbiuse funktsiooni ja inversioonivalemit tema arvuteoreetilises kontekstis; asjakohased definitsioonid võib leida ka õpikust [1]. Siis defineerime vektorruumide tensorikorrutise ning tõestame tema mõned omadused. Enamik tulemustest on moodulite kontekstis leitavad õpikust [2], kui pole märgitud teisiti.

1.1 Möbiuse inversioonivalem

Definitsioon 1.1. Möbiuse funktsioon $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ on defineeritud võrdusega

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{kui } n = 1, \\ 0, & \text{kui leidub algarv } p \text{ nii, et } p^2 \mid n, \\ (-1)^k, & \text{kui } n = p_1 \dots p_k, \text{ kus } p_1, \dots, p_k \text{ on paarikaupa erinevad algarvud.} \end{cases}$$

Tihti esineb Möbiuse funktsioon **Möbiuse inversioonivalemis**, mis ütleb, et kui suvaliste funktsioonide $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ korral kehtib

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \text{ iga } n \in \mathbb{N} \text{ jaoks,} \quad (1)$$

siis

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) \text{ iga } n \in \mathbb{N} \text{ jaoks.} \quad (2)$$

Kui aga defineerime Dirichlet' konvolutsiooni, saame seda valemit vaadata palju lihtsamal kujul. Funktsioonide $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ **Dirichlet' konvolutsiooniks** nimetatakse tehet

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{ab=n} f(a)g(b).$$

On lihtne veenduda, et järeldus (2) on samaväärne võrdusega $f = g * \mu$. Kui aga defineerime konstantse tseetafunktsiooni $\zeta(n) = 1$, siis näeme, et ka võrdus (1) on kirjeldatav konvolutsiooni abil – Möbiuse inversioonivalem on siis kujul

$$g = f * \zeta \Rightarrow f = g * \mu.$$

Teisisõnu võib Möbiuse inversioonivalemi kirjutada ka üsna lühidalt kujul $\mu * \zeta = \varepsilon$, kus ε on Dirichlet' konvolutsiooni ühik

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{kui } n = 1, \\ 0 & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

1.2 Vektorruumide tensorkorrutis

Olgu $\mathbb{K}$ korpus. Kõik edasises käsitletavat vektorruumid on üle korpusel $\mathbb{K}$.

Definitsioon 1.2. Vektorruumide V ja W **tensorkorrutis** on vektorruum U koos bilineaarse kujutusega $\phi : V \times W \rightarrow U$ nii, et kehtib järgmine universaalomadus: iga bilineaarse kujutuse $f_b : V \times W \rightarrow Z$ jaoks, kus Z on suvaline vektorruum, leidub üheselt määratud lineaarkujutus $f : U \rightarrow Z$ nii, et kommuteerub järgmine diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\phi} & U \\ & \searrow f_b & \swarrow f \\ & Z & \end{array} .$$

Teisisõnu, kujutus $\text{Lin}(U, Z) \rightarrow \text{Bilin}(V, W; Z)$, $f \mapsto f \circ \phi$, on isomorfism.

Lause 1.1. Vektorruumide tensorkorrutis on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud.

Tõestus. Oletame, et peale U leidub ka vektorruumide V ja W tensorkorrutis U' bilineaarse kujutusega $\phi' : V \times W \rightarrow U'$. Siis U' universaalomaduse järgi leidub üheselt määratud lineaarkujutus $\hat{\phi} : U \rightarrow U'$ nii, et kommuteerub diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\phi'} & U' \\ & \searrow \phi & \swarrow \hat{\phi} \\ & U & \end{array} .$$

See tähendab, et $\phi = \hat{\phi} \circ \phi'$. Samas U universaalomadust analoogselt rakendades saame, et $\phi' = \hat{\phi}' \circ \phi$ ja seega

$$1_U \circ \phi = \phi = \hat{\phi} \circ \hat{\phi}' \circ \phi.$$

Märkame, et $\hat{\phi} \circ \hat{\phi}' : U \rightarrow U$ on lineaarteisendus ja et U universaalomadust iseendale rakendades peab ϕ tegurdus $\phi = 1_U \circ \phi$ olema ühene. Seega $1_U = \hat{\phi} \circ \hat{\phi}'$. Sama arutlust analoogselt teisipidi korrates saame ka, et $1_{U'} = \hat{\phi}' \circ \hat{\phi}$, mis tähendab, et $\hat{\phi}$, $\hat{\phi}'$ on isomorfismid ehk U ja U' on isomorfsed. $\square$

Kui eelnevas on tensorkorrutist märgitud üldiselt tähistusega (U, ϕ) , siis tõestatud tulemus näitab, et vektorruumid V ja W määravad isomorfismi täpsuseni üheselt ära nende tensorkorrutise. Seega on loomulik märkida V ja W tensorkorrutist edaspidi kujul $(V \otimes W, \phi)$.

Peale isomorfismi täpsuseni ühesuse kehtib ka, et kui V ja W on kaks vektorruumi, siis neil eksisteerib tensorkorrutis $V \otimes W$. Selles tekstis me tensorkorrutise olemasolu ei näita.

Edasises vaatleme elementide $(v, w) \in V \times W$ kujutisi ϕ all – tähistame need kujul $\phi(u, v) =: u \otimes v$. Ruum $V \otimes W$ on moodustatud selliste elementide poolt, sest vastasel juhul võiksime seada bilineaarsele kujutusele $f_b : V \times W \rightarrow Z$ vastavusse rohkem kui ühe lineaarkujutuse $f : V \otimes W \rightarrow Z$, mille korral $f \circ \phi = f_b$. Kui ruumis leiduks element $x \in V \otimes W$, mis ei avaldu $u \otimes v$ lineaarkombinatsioonina, siis saame iga võimaliku kujutise $f(x) = z \in Z$ jaoks anda lineaarfunktsiooni $f_z : V \otimes W \rightarrow Z$ nii, et $f_z \circ \phi = f_b$.

Kasutame mõnikord ka kirja pilti $f(u \otimes v) = f_b(u, v)$, kus kujutisele $u \otimes v$ seatakse vastavusse mingisuguse kahe muutuja funktsiooni f_b väärtus kohal (u, v) . Selline tähistus on korrektne parajasti siis, kui f_b on bilineaarne funktsioon. Kujutus f tähistab siis lineaarkujutust, mis on universaalomaduse abil defineeritud f_b kaudu.

1.3 Funktor – $\otimes$ –

Mistahes korpuse $\mathbb{K}$ korral tähistame kõigi vektorruumide üle korpuse $\mathbb{K}$ kategooriat sümboliga $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$. Selles alapeatükis näitame, et vektorruumide tensorkorrutamine annab funktori $-\otimes- : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \times \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$. Selle tõestamiseks näitame aga esmalt järgmise tulemuse.

Lause 1.2. *Vektorruumide otsekorrutamine annab funktori*

$$-\otimes- : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \times \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}},$$

mis objekti (V, W) viib ruumide V ja W otsekorrutiseks $V \times W$ ning morfismi $(f, g) : (V, W) \rightarrow (V', W')$ kujutab morfismiks $f \times g : V \times W \rightarrow V' \times W'$, eeskirjaga

$$(v, w) \mapsto (f(v), g(w)).$$

Tõestus. Objektile $(V, W) \in (\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \times \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}})_0$ seab otsekorrutamine vastavusse vektorruumi $V \times W \in (\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}})_0$. Kontrollime, et morfismide kujutus säilitab ühikmorfisme ja komponeerimist.

Kategooriate otsekorrutise konstruktsiooni järgi on objekti (V, W) ühikmorfismiks $(1_V, 1_W)$. Kuna $1_V \times 1_W$ on defineeritud eeskirjaga

$$(v, w) \mapsto (1_V(v), 1_W(w)) = (v, w),$$

siis on tegemist tõesti objekti $V \times W$ ühikmorfismiga.

Fikseerime objektid (V, W) , (V', W') ja (V'', W'') ning morfismid $(f, g) : (V, W) \rightarrow (V', W')$, $(h, k) : (V', W') \rightarrow (V'', W'')$ kategoorias $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \times \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$. Siis nende morfismide kompositsioon on defineeritud kui $(h \circ f, k \circ g)$, mis kujutatakse morfismiks $(h \circ f) \times (k \circ g)$. Tahame näidata, et $(h \circ f) \times (k \circ g) = (h \times k) \circ (f \times g)$, ja tõepoolest, fikseerides $(v, w) \in V \times W$, saame,

et

$$\begin{aligned}
((h \circ f) \times (k \circ g))(v, w) &= ((h \circ f)(v), (k \circ g)(w)) \\
&= (h(f(v)), k(g(w))) \\
&= (h \times k)(f(v), g(w)) \\
&= ((h \times k) \circ (f \times g))(v, w).
\end{aligned}$$

□

Kuna elemendid kujul $v \otimes w$ moodustavad vektorruumi $V \otimes W$, siis võime tähele panna järgmist.

Lemma 1.3. *Kui $f, g: V \otimes W \rightarrow U$ on lineaarsed kujutused, mille korral*

$$f(v \otimes w) = g(v \otimes w)$$

iga $v \in V$ ja $w \in W$ jaoks, siis $f = g$.

Lause 1.4. *Fikseerime kategoorias $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \times \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ iga objekti (V, W) jaoks ruumide V ja W mingi tensorkorrutise $(V \otimes W, \phi_{V,W})$.*

Siis vektorruumide tensorkorrutamise annab funktori

$$- \otimes - : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \times \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}},$$

mis objekti (V, W) kujutab fikseeritud tensorkorrutise objektiks $V \otimes W$ ning morfismi $(f, g) : (V, W) \rightarrow (V', W')$ morfismiks $f \otimes g : V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$. Morfism $f \otimes g$ on sealjuures defineeritud kui unikaalne lineaarkujutus, mis paneb kommuteeruma diagrammi

$$\begin{array}{ccc}
V \times W & \xrightarrow{f \times g} & V' \times W' \\
\phi \downarrow & & \downarrow \phi' \\
V \otimes W & \xrightarrow{f \otimes g} & V' \otimes W'
\end{array}$$

ehk kui lineaarkujutus, mis on antud $v \in V$ ja $w \in W$ korral eeskirjaga

$$(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w).$$

Tõestus. Saame $f \otimes g$ nii defineerida, sest talle vastab kompositsioon $\phi' \circ (f \times g)$. Kuna ϕ' ja $f \times g$ on mõlemad bilineaarsed, siis on ka nende kompositsioon bilineaarne, ning seega saame kasutada $\phi' \circ (f \times g)$ peal universaalomadust.

Näitame nüüd, et eespool toodud eeskiri annab funktori ehk säilitab ühikmorfisme ning kompositsiooni.

Ühikmorfismi säilimine kehtib definitsiooni järgi: morfismile $(1_V, 1_W)$ seatakse vastavusse lineaarkujutus $1_V \otimes 1_W$, mille puhul

$$(1_V \otimes 1_W)(v \otimes w) = 1_V(v) \otimes 1_W(w) = v \otimes w.$$

Siin kasutame eelpool toodud lemmat, mille järgi see tingimus on piisav, et $1_V \otimes 1_W$ käituks kõigil $V \otimes W$ elementidel ühikmorfismina.

Kontrollime nüüd komponeerimise säilitamist. Fikseerime objektid (V, W) , (V', W') ja (V'', W'') ning morfismid $(f, g) : (V, W) \rightarrow (V', W')$, $(h, k) : (V', W') \rightarrow (V'', W'')$. Definitsiooni järgi kommuteerub diagramm

$$\begin{array}{ccccc} V \times W & \xrightarrow{f \times g} & V' \times W' & \xrightarrow{h \times k} & V'' \times W'' \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi' & & \downarrow \phi'' \\ V \otimes W & \xrightarrow{f \otimes g} & V' \otimes W' & \xrightarrow{h \otimes k} & V'' \otimes W'' \end{array}.$$

Kuna $(h \times k) \circ (f \times g) = (h \circ f) \times (k \circ g)$, siis ka kujutus $(h \circ f) \otimes (k \circ g)$ paneb diagrammi välise ruudu kommuteeruma. Kuna välist ruutu saab kommuteeruma panna parajasti üks lineaarne kujutus, siis

$$(h \circ f) \otimes (k \circ g) = (h \otimes k) \circ (f \otimes g),$$

mida oligi tarvis näidata. □

Lemma 1.5. *Kujutus*

$$\text{Lin}(A, B) \times \text{Lin}(A', B') \rightarrow \text{Lin}(A \otimes A', B \otimes B'), \quad (f, g) \mapsto f \otimes g$$

on bilineaarne.

Tõestus. Morfismi $f \otimes g$ definitsiooni, kujutuste punktiviisilise liitmise ning $\phi : V \times W \rightarrow V \otimes W$ bilineaarsuse järgi näeme, et

$$\begin{aligned} ((f_1 + f_2) \otimes g)(v \otimes w) &= (f_1 + f_2)(v) \otimes g(w) \\ &= (f_1(v) + f_2(v)) \otimes g(w) \\ &= f_1(v) \otimes g(w) + f_2(v) \otimes g(w) \\ &= (f_1 \otimes g + f_2 \otimes g)(v \otimes w) \end{aligned}$$

□

1.4 Vektorruumide tensorkorrutise omadusi

Lause 1.6. *Vektorruumide tensorkorrutis on assotsiatiivne ehk leidub isomorfism $\alpha : U \otimes (V \otimes W) \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$.*

Tõestus. Fikseerime $u \in U$ ja defineerime kujutuse $\beta_u : V \times W \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$, kus

$$(v, w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w.$$

Kuna $x \otimes y = \phi(x, y)$, siis $(u \otimes v) \otimes w = \phi(\phi(u, v), w)$. Kujutus ϕ on bilineaarne ja seega β_u on bilineaarne. Tensorkorrutise universaalomaduse järgi vastab talle järelikult lineaarne kujutus $\hat{\beta}_u : V \otimes W \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$.

Vaatleme nüüd kujutust $\beta : U \times (V \otimes W) \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$, kus

$$(u, x) \mapsto \hat{\beta}_u(x).$$

See kujutus on samuti bilineaarne, mistõttu talle vastab lineaarne kujutus $\alpha : U \otimes (V \otimes W) \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$, kus

$$\alpha(u \otimes (v \otimes w)) = (u \otimes v) \otimes w.$$

Näitame, et α on isomorfism. Defineerime analoogselt eeltooduga teistpidise kujutuse $\alpha' : (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$,

$$\alpha'((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes (v \otimes w).$$

Ilmselt ühtib kompositsioon $\alpha' \circ \alpha : U \otimes (V \otimes W) \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$ ruumi $U \otimes (V \otimes W)$ moodustavate elementide $u \otimes (v \otimes w)$ peal ühikteisendusega $1_{U \otimes (V \otimes W)}$. Seega $\alpha' \circ \alpha = 1_{U \otimes (V \otimes W)}$. Analoogne arutelu kehtib, kui vaadelda kompositsiooni $\alpha \circ \alpha'$, ning seega saame, et α ja α' on isomorfismid.

Näitame veel, et α ja α' on loomulikud isomorfismid komponentides U, V, W . Isomorfismi α jaoks tähendab see, et kommuteerub diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \otimes (V \otimes W) & \xrightarrow{\alpha_{U,V,W}} & (U \otimes V) \otimes W \\ f \otimes (g \otimes h) \downarrow & & \downarrow (f \otimes g) \otimes h \\ U' \otimes (V' \otimes W') & \xrightarrow{\alpha_{U',V',W'}} & (U' \otimes V') \otimes W' \end{array}.$$

Tõepoolest, fikseerides $u \otimes (v \otimes w)$, siis $\alpha : u \otimes (v \otimes w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w$ ning

$$((f \otimes g) \otimes h)((u \otimes v) \otimes w) = (f \otimes g)(u \otimes v) \otimes h(w) = (f(u) \otimes g(v)) \otimes h(w).$$

Teistpidi $f \otimes (g \otimes h) : u \otimes (v \otimes w) \mapsto f(u) \otimes (g(v) \otimes h(w))$ ning $\alpha : f(u) \otimes (g(v) \otimes h(w)) \mapsto (f(u) \otimes g(v)) \otimes h(w)$. Isomorfismi α' loomulikkust saame kontrollida analoogselt. $\square$

Tensorkorrutise assotsiatiivsus annab põhjuse edasises kasutada tähistust $U \otimes V \otimes W$, mis kätkeb endas ruume $U \otimes (V \otimes W)$ ja $(U \otimes V) \otimes W$ ning nendevahelist isomorfismi α .

Lause 1.7. *Vektorruumide tensorkorrutis on sümmeetriline ehk leidub isomorfism $V \otimes W \simeq W \otimes V$.*

Tõestus. Vaatleme vektorruume V, W ning $V \otimes W, W \otimes V$ vastavate bilineaarsete kujutustega $\phi : V \times W \rightarrow V \otimes W$ ja $\phi' : W \times V \rightarrow W \otimes V$.

Vaatleme bilineaarseid kujutusi $\beta : V \times W \rightarrow W \otimes V$ ja $\beta' : W \times V \rightarrow V \otimes W$, kus $\beta : (v, w) \mapsto w \otimes v$ ja $\beta' : (w, v) \mapsto v \otimes w$. Antud universaalomaduse järgi leiduvad üheselt määratud lineaarkujutused $\hat{\beta} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ ja $\hat{\beta}' : W \otimes V \rightarrow V \otimes W$, kus $\beta = \hat{\beta} \circ \phi$ ja $\beta' = \hat{\beta}' \circ \phi'$. Märkame, et $\beta = \phi \circ \gamma$ ja $\beta' = \phi' \circ \gamma^{-1}$, kus $\gamma : V \times W \rightarrow W \times V$ on $(v, w) \mapsto (w, v)$.

Vaatleme nüüd bilineaarset kujutust ϕ . Universaalomaduse järgi leidub täpselt üks lineaarkujutus $f : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$ nii, et $\phi = f \circ \phi$. Ilmselt sobib, et $f = 1_{V \otimes W}$. Samas ülaltoodu järgi kehtib ka, et

$$\phi = \beta' \circ \gamma = (\hat{\beta}' \circ \phi') \circ \gamma = \hat{\beta}' \circ (\phi' \circ \gamma) = \hat{\beta}' \circ \beta = (\hat{\beta}' \circ \hat{\beta}) \circ \phi.$$

Järelikult $\hat{\beta}' \circ \hat{\beta} = 1_{V \otimes W}$. Analoogselt saame arutleda teistpidi ning näidata seega, et $\hat{\beta} \circ \hat{\beta}' = 1_{W \otimes V}$. Seega on $\hat{\beta} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ ja $\hat{\beta}' : W \otimes V \rightarrow V \otimes W$ isomorfismid. $\square$

Näitame veel ühe omaduse - et vektorruumide tensorkorrutis on distributiivne üle vektorruumide otsesumma. Näitame selleks, et tensorkorrutamise funktor säilitab kõiki kopiire.

Lause 1.8. *Fikseerime $V \in \text{Vect}_{\mathbb{K}_0}$. Siis funktoiril $- \otimes V : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$ leidub parempoolne kaasfunktor $\text{Lin}(V, -) : \text{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{K}}$.*

Tõestus. Tahame näidata, et leidub bijektiivsete kujutuste

$$\varphi = (\varphi)_{U, W \in \text{Vect}_{\mathbb{K}_0}}, \quad \varphi_{U, W} : \text{Lin}(U \otimes V, W) \rightarrow \text{Lin}(U, \text{Lin}(V, W))$$

süsteem, mis on loomulik U ja W suhtes.

Olgu fikseeritud U ja W korral

$$\varphi_{U, W} : f \mapsto g, \quad \text{kus } (g(u))(v) := f(u \otimes v),$$

mille pöördkujutuseks on lihtsalt $\varphi_{U, W}^{-1} : g \mapsto f$, kus $f(u \otimes v) := (g(u))(v)$.

Näitame, et $\varphi_{U,W}$ on korrektselt defineeritud ehk et f, g on lineaarsed. Fikseerime $u, u' \in U$. Siis $\varphi_{U,W}$ puhul f lineaarsuse tõttu

$$\begin{aligned} g(u + u')(v) &= f((u + u') \otimes v) \\ &= f(u \otimes v + u' \otimes v) \\ &= f(u \otimes v) + f(u' \otimes v) \\ &= (g(u))(v) + (g(u'))(v). \end{aligned}$$

Teistpidi $\varphi_{U,W}^{-1}$ puhul tahame näidata, et kujutus $f_b(u, v) := (g(u))(v)$ on bilineaarne, mispuhul f on lineaarne kujutus, kus $f \circ \phi = f_b$. Tõepoolest

$$f_b(ku + u', v) = (g(ku + u'))(v) = (kg(u))(v) + (g(u'))(v) = f_b(u, v) + f_b(u', v)$$

ja

$$f_b(u, v + v') = (g(u))(v + v') = (g(u))(v) + (g(u))(v') = f_b(u, v) + f_b(u, v').$$

Näitame, et pere φ on loomulik U suhtes. Fikseerime $W \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}_0}$. Tahame näidata, et suvaliste objektide $U, U' \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}_0}$ ja morfismi $h : U' \rightarrow U$ korral kommuteerub diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lin}(U \otimes V, W) & \xrightarrow{\varphi_{U,W}} & \mathrm{Lin}(U, \mathrm{Lin}(V, W)) \\ \downarrow - \circ (h \otimes 1_V) & & \downarrow - \circ h \\ \mathrm{Lin}(U' \otimes V, W) & \xrightarrow{\varphi_{U',W}} & \mathrm{Lin}(U', \mathrm{Lin}(V, W)) \end{array} \quad .$$

Tõepoolest, kui vaatleme lineaarkujutust $f : U \otimes V \rightarrow W$, kus $u \otimes v \mapsto w(u, v)$, siis kehtib järgmine. Kujutus $\varphi_{U,W}(f) : U \rightarrow \mathrm{Lin}(V, W)$ on defineeritud eeskirjaga $u \mapsto (v \mapsto w(u, v))$ ning $\varphi_{U,W}(f) \circ h : U' \rightarrow \mathrm{Lin}(V, W)$ eeskirjaga $u' \mapsto (v \mapsto w(h(u'), v))$. Teisalt saame, et $f \circ (h \otimes 1_V) : U' \otimes V \rightarrow W$ on defineeritud kui $u' \otimes v \mapsto w(h(u'), v)$ ning seega $\varphi_{U',W}(f \circ (h \otimes 1_V)) : U' \rightarrow \mathrm{Lin}(V, W)$ on antud kui $u' \mapsto (v \mapsto w(h(u'), v))$. Järelikult diagramm kommuteerub.

Loomulikkuse W suhtes näitamiseks fikseerime objekti $U \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}_0}$, objektid $W, W' \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}_0}$ ja morfismi $k : W \rightarrow W'$. Näitame, et kommuteerub diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lin}(U \otimes V, W) & \xrightarrow{\varphi_{U,W}} & \mathrm{Lin}(U, \mathrm{Lin}(V, W)) \\ \downarrow k \circ - & & \downarrow \mathrm{Lin}(V, -) \circ - \\ \mathrm{Lin}(U \otimes V, W') & \xrightarrow{\varphi_{U,W'}} & \mathrm{Lin}(U, \mathrm{Lin}(V, W')) \end{array} \quad .$$

Kujutuse $f : U \otimes V \rightarrow W$, kus $u \otimes v \mapsto w(u, v)$, puhul on $\varphi_W(f)$ kujutus

$u \mapsto (v \mapsto w(u, v))$ ning $\text{Lin}(V, \varphi_W(f))$ on kujutus $u \mapsto (v \mapsto k(w(u, v)))$. Teisalt on $k \circ f$ kujutus $u \otimes v \mapsto k(w(u, v))$, millest $\varphi_{W'}$ annab kujutuse $u \mapsto (v \mapsto k(w(u, v)))$. Seega diagramm kommuteerub. $\square$

Definitsioon 1.3. Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategooriad ja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funktor. Ütleme, et funktor F **säilitab kõiki kopiire**, kui iga väikse kategooria $\mathcal{I}$ ning diagrammi $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ korral sellest, et $(L, (u_i)_{i \in I})$ on diagrammi D kopiir, järeldub, et $(F(L), (F(u_i))_{i \in I})$ on diagrammi $F \circ D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ piir.

Toome ära tulemuse, mille tõestus on antud tekstis [6].

Lemma 1.9. *Kui funktoril $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ leidub parempoolne kaasfunktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, siis F säilitab kõiki kopiire, mis kategoorias $\mathcal{C}$ olemas on.*

Olgu I väike kategooria, $D : I \rightarrow \mathcal{C}$ diagramm, $\text{colim}(D) = (L, (\iota_i)_{i \in I})$ diagrammi D kopiir ja $Q := (Q, (v_i)_{i \in I})$ suvaline kokoonus funktoril D . Siis kopiiri universaalomaduse järgi leidub täpselt üks morfism $m : \text{colim}(D) \rightarrow Q$ nii, et $m \circ \iota_i = v_i$. See, et funktor F säilitab kopiire, on samaväärne sellega, et kopiiri definitsiooni järgi antud kanooniline kujutus $m : \text{colim}(F \circ D) \rightarrow F(\text{colim } D)$ on isomorfism.

Antud juhul on selleks kanooniliseks kujutuseks morfism

$$m : \bigoplus_{i \in I} (U_i \otimes V) \rightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} U_i \right) \otimes V.$$

Kuna siin I on diskreetne kategooria, annab $D : I \rightarrow \mathcal{C}$ vektorruumid $U_i, i \in I$, mille kokorutis on $(\bigoplus_{i \in I} U_i, (\iota_i)_{i \in I})$. Siis ι_i viib elemendi $u_i \in U_i$ I -korteežiks, mille i -ndal kohal on u_i ja mujal nullid. Samas $F(\bigoplus_{i \in I} U_i, (\iota_i)_{i \in I}) = ((\bigoplus_{i \in I} U_i) \otimes V, (\iota_i \otimes 1_V)_{i \in I})$.

Teisalt on $F \circ D$ vektorruumide $U_i \otimes V$ kogu, mille kopiir $\text{colim}(F \circ D)$ on otsesumma $(\bigoplus_{i \in I} (U_i \otimes V), (\nu_i)_{i \in I})$, kus sisestused on $u_i \otimes v_i \mapsto (0, \dots, 0, u_i \otimes v_i, 0, \dots, 0)$. Seega on m unikaalne morfism, mille korral $m \circ \nu_i = \iota_i \otimes 1_V$. Sellest on näha, et m peab saama argumendiks I -korteeži $\nu_i(u_i \otimes v_i)$ ja andma tensorkorutise $(\iota_i(u_i)) \otimes v_i$. Lineaarselt saame funktsiooni m eeskirja siis laiendada kõigile otsesumma $\bigoplus_{i \in I} (U_i \otimes V)$ elementidele.

Järeldus 1.10. *Vektorruumide tensorkorutisel on nullelement $\{0\}$ ehk $\{0\} \otimes V \simeq \{0\}$ ning ta on distributiivne üle otsesumma.*

Tõestus. Kategoorias $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ on olemas kokorutised, milleks on vektorruumide otsesummad. Kuna funktor $-\otimes V : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ omab parempoolset kaasfunktorit, siis ta säilitab kõiki kopiire, sealhulgas kokorutisi kategoorias $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$. Seega funktor $-\otimes V$ säilitab otsesummasid ehk iga hulga I ning ruumide $U_i, i \in I$ korral

$$\bigoplus_{i \in I} (U_i \otimes V) \simeq \left(\bigoplus_{i \in I} U_i \right) \otimes V.$$

Nullelemendi leidumine järeldub sellest, et objekt $\{0\} \in \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}_0}$ on vektorruumide kategoorias null-aarne kokorrutis ning seega peab $- \otimes V$ ka teda säilitama. Teisisonu, siis kehtib $\{0\} \otimes V \simeq \{0\}$. $\square$

Järeldus 1.11. Kui $e_i, i \in I$, moodustavad ruumi V baasi ning elemendid $f_j, j \in J$ moodustavad ruumi W baasi, siis elemendid $e_i \otimes f_j$ moodustavad ruumi $V \otimes W$ baasi.

Tõestus. Fikseerime baasielemendid $e_i \in V, f_j \in W$ ning elemendi $e_i \otimes f_j \in V \otimes W$. Näitame, et leidub isomorfism, mis kujutab parajasti need elemendid $I \times J$ -maatriksiks E_{ij} , kus kohal ij on 1 ja mujal 0.

Kui U on vektorruum, siis temas baasi fikseerimine on samaväärne isomorfismi $U \rightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K}$ fikseerimisega, kus baasielement $b_i, i \in I$ kujutatakse I -korteežiks, mille i -ndal indeksil on ühikelement $1 \in \mathbb{K}$ ja mujal 0.

Seega leidub vektorruumide V ja W baaside fikseerimise korral isomorfism $V \otimes W \rightarrow \left(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{K} \right) \otimes \left(\bigoplus_{j \in J} \mathbb{K} \right)$, mis kujutab elemendid $e_i \otimes f_j$ neile vastavate I - ja J -korteežide tensorkorrutiseks.

Kuna vektorruumide tensorkorrutis on distributiivne üle vektorruumide otsesumma, siis leidub isomorfism $\left(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{K} \right) \otimes \left(\bigoplus_{j \in J} \mathbb{K} \right) \rightarrow \bigoplus_{i \in I, j \in J} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$. See isomorfism kujutab I - ja J -korteeži tensorkorrutise $I \times J$ -maatriksiks, kus i -ndal real j -ndas veerus on element $1 \otimes 1$, mujal $0 \otimes 0$.

Isomorfismi $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ abil saame konstrueerida isomorfismi

$$\bigoplus_{i \in I, j \in J} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \rightarrow \bigoplus_{i \in I, j \in J} \mathbb{K}.$$

See kujutab ülalkirjeldatud maatriksi selliseks $I \times J$ -maatriksiks, mille i -ndal real j -ndas veerus on 1 ning mujal 0.

Näeme, et täpselt elemendid $e_i \otimes f_j$ kujutatakse maatriksiteks E_{ij} , kus kohal ij on 1 ja mujal 0. Seega elemendid $e_i \otimes f_j$ annavad tõepoolest ruumi $V \otimes W$ baasi. $\square$

Nüüd on lihtne näidata veel, et $\mathbb{K}$ on vektorruumide tensorkorrutise ühikelementiks.

Lause 1.12. Vektorruumide tensorkorrutisel leidub ühikelement $\mathbb{K}$ ehk leiduvad isomorfismid $\rho : V \otimes \mathbb{K} \rightarrow V$ ja $\lambda : \mathbb{K} \otimes V \rightarrow V$.

Tõestus. Fikseerime lineaarkujutused $\rho : V \rightarrow V \otimes \mathbb{K}, v \mapsto v \otimes 1$ ja $\rho^{-1} : V \otimes \mathbb{K} \rightarrow V, v \otimes k \mapsto kv$. Näitame, et nad on üksteise pöördkujutused. Olgu e vektorruumi V baasielement. Siis $(\rho^{-1} \circ \rho)(e) = \rho^{-1}(e \otimes 1) = e1 = e$. Teistpidi, kui fikseerime ruumi $V \otimes \mathbb{K}$ baasielemendi $e \otimes 1$, siis $(\rho \circ \rho^{-1})(e \otimes 1) = \rho(e) = e \otimes 1$. Seega on tegemist pöördkujutustega.

Analoogselt saame valida $\lambda : V \rightarrow \mathbb{K} \otimes V$, $v \mapsto 1 \otimes v$ ja $\lambda^{-1} : \mathbb{K} \otimes V \rightarrow V$,
 $v \otimes k \mapsto kv$. □

Toome lisaks ära ühe vektorruumidega seotud definitsiooni, mis pole küll seotud tensorkorrutistega, kuid mida kasutame siiski peatükis 3.

Definitsioon 1.4. Olgu X hulk. Vaatleme kõigi selliste funktsioonide $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ hulka, kus nullist erinevateks elementideks kujutuvate elementide arv on lõplik. Tähistame selle hulga kui

$$\mathbb{K}\langle X \rangle := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \mid f^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\}) \text{ on lõplik}\}.$$

Kui vaadata sellel hulgal funktsioonide punktiviisilist liitmist ja skalaariga korrutamist, siis on hulgal vektorruumi struktuur. Teisisõnu, olgu

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (kf)(x) = k(f(x)),$$

kus $f, g \in \mathbb{K}\langle X \rangle$, $k \in \mathbb{K}$. Siis $\mathbb{K}\langle X \rangle$ on tõepoolest vektorruum.

2 Konvolutsioonialgebrad ning nendes pööratavad elemendid

Algebrate ja koalgebrate kohta käivad definitsioonid ja tulemused on toodud ka õpikus [10]. Konvolutsioonialgebrate ja viimase kahe peatüki tulemused pärinevad peamiselt artiklist [4].

Vaatleme järgnevas tekstis vahel koalgebrate C ja $C_1, C_2 \subseteq C$ korral ruumi $C_1 \bar{\otimes} C_2$. See on defineeritud kui ruum, mis on moodustatud selliste elementide $v \otimes w$ poolt, kus $v \in C_1$ ja $w \in C_2$.

2.1 Algebra, koalgebra ja konvolutsioonialgebra

Definitsioon 2.1. Algebra on kolmik (A, M, u) , kus A on vektorruum üle $\mathbb{K}$ ning $M : A \otimes A \rightarrow A$ (korrutamine), $u : \mathbb{K} \rightarrow A$ (ühik) on lineaarkujutused, mille korral kommuteeruvad assotsiatiivsust kirjeldav diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes (A \otimes A) & \xrightarrow{\alpha_A} & (A \otimes A) \otimes A & \xrightarrow{M \otimes 1_A} & A \otimes A \\ 1_A \otimes M \downarrow & & & & \downarrow M \\ A \otimes A & \xrightarrow{\quad M \quad} & & & A \end{array} \quad .$$

ja ühikuks olemise diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes A & & \\
 & u \otimes 1_A \nearrow & \downarrow M & \nwarrow 1_A \otimes u & \\
 \mathbb{K} \otimes A & & & & A \otimes \mathbb{K} \\
 & \searrow \lambda_A^{-1} & & \swarrow \rho_A^{-1} & \\
 & & A & &
 \end{array}$$

Näide 2.2. Olgu $A := \mathbb{K}$, mille korrutamiseks $M : \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ on korpuse elementide korrutamine $k \otimes l \mapsto kl$ ning ühikuks vektorruumi samasusteisendus $u : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, k \mapsto k$.

Assotsiatiivsuse diagramm tõepoolest kommuteerub, sest iga $k, l, m \in \mathbb{K}$ puhul

$$((M \otimes 1_{\mathbb{K}}) \circ M)(k \otimes l \otimes m) = (kl)m = k(lm) = ((1_{\mathbb{K}} \otimes M) \circ M)(k \otimes l \otimes m).$$

Teisisõnu on annab diagrammi kommuteerumine tehte M assotsiatiivsuse.

Koühiku diagrammi juures märkame, et $\rho_{\mathbb{K}}^{-1} = \lambda_{\mathbb{K}}^{-1} = M$, sest nende kõigi eeskirjaks on $k \otimes l \mapsto kl$. Ilmselt diagramm kommuteerub, sest $M(k \otimes l) = (M \circ (1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}}))(k \otimes l)$. Tagatipuks on veel näha, et $M : \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ on isomorfism, sest $\rho_{\mathbb{K}}^{-1}$ ja $\lambda_{\mathbb{K}}^{-1}$ on isomorfismid.

Definitsioon 2.3. Koalgebraks nimetame kolmikut (C, Δ, ϵ) , kus C on vektorruum ning $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ ja $\epsilon : C \rightarrow \mathbb{K}$ on lineaarkujutused, mille korral kommuteeruvad järgmised diagrammid

$$\begin{array}{ccccc}
 C \otimes (C \otimes C) & \xrightarrow{\alpha_C} & (C \otimes C) \otimes C & \xleftarrow{\Delta \otimes 1_C} & C \otimes C \\
 \uparrow 1_C \otimes \Delta & & & & \uparrow \Delta \\
 C \otimes C & \xleftarrow{\Delta} & & & C
 \end{array}$$

ja

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C \otimes C & & \\
 & \epsilon \otimes 1_C \nwarrow & \uparrow \Delta & \nearrow 1_C \otimes \epsilon & \\
 \mathbb{K} \otimes C & & & & C \otimes \mathbb{K} \\
 & \nwarrow \lambda_C & & \swarrow \rho_C & \\
 & & C & &
 \end{array}$$

Näide 2.4. Näites 2.2 nägime, M ja $1_{\mathbb{K}}$ on isomorfismid, mistõttu saame korpusel $\mathbb{K}$ näidata lihtsasti ka koalgebra struktuuri.

Olgu $C := \mathbb{K}$, kus kokorrutamiseks on korrutamistehte M pöördkujutus

$M^{-1} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$ eeskirjaga

$$k \mapsto k \otimes 1 = 1 \otimes k,$$

ning köühikuks on $\mathbb{K}$ -algebra $\mathbb{K}$ ühik $1_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$.

Kuna $\mathbb{K}$ kui algebra puhul definitsioonist 2.1 leitavad diagrammid kommuteerusid, siis kõigi morfismide pöördkujutuste võtmisel kommuteeruvad koalgebra diagrammid.

Definitsioon 2.5. Koalgebra C alamruumi D nimetatakse C **alamkoalgebraks**, kui kehtib, et $\Delta(D) \subseteq D \bar{\otimes} D$.

Definitsioon 2.6. Koalgebra C alamruumi I nimetatakse C **koideaaliks**, kui $\Delta(C) \subseteq I \bar{\otimes} C + C \bar{\otimes} I$ and $\epsilon(I) = \{0\}$.

Definitsioon 2.7. Olgu $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ ja $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ koalgebrad. Lineaarkujutus $f : C \rightarrow D$ on **koalgebra homomorfism**, kui kehtib, et $\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C$ ja $\epsilon_D \circ f = \epsilon_C$.

Järgmise teoreemi tõestus on leitav õpikust [10].

Teoreem 2.1. Olgu (C, Δ, ϵ) koalgebra, I tema koideaal ning $\pi : C \rightarrow C/I$ loomulik süürjektsioon. Siis

1. faktorruumil C/I on üheselt määratud koalgebra struktuur nii, et π on koalgebra homomorfism,
2. kui $f : C \rightarrow D$ on koalgebra homomorfism, siis $\text{Ker } f$ on koideaal ja
3. kui $I \subseteq \text{Ker } f$, siis leidub üheselt määratud koalgebra homomorfism $\bar{f}$ nii, et kommuteerub diagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{f} \\ & C/I & \end{array} .$$

Definitsioon 2.8. Olgu (C, Δ, ϵ) koalgebra ja (A, M, u) algebra. **Konvolutsioonialgebraks** nimetame lineaarkujutuste $C \rightarrow A$ vektorruumi $\text{Lin}(C, A)$, kus kahe elemendi $\phi, \psi \in \text{Lin}(C, A)$ korrutiseks on kujutuste kompositsioon

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{\phi \otimes \psi} A \otimes A \xrightarrow{M} A$$

ja ühikuks loeme kompositsiooni $u \circ \epsilon$.

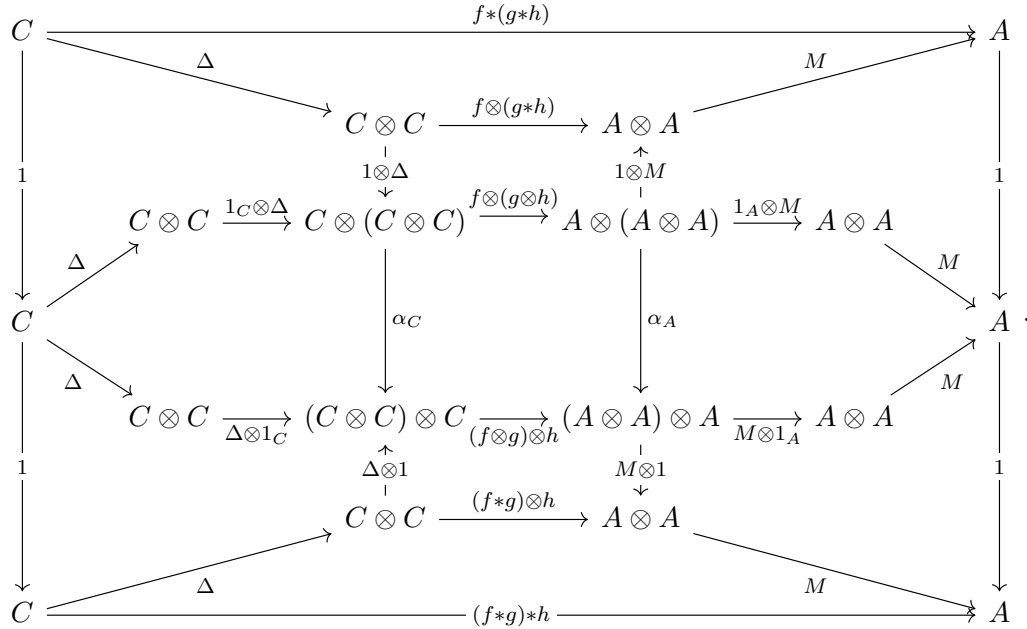
Tõestame, et konvolutsioonialgebra on tõepoolest algebra. Selleks vajame ühte abitulemust.

Lause 2.2. *Konvolutsioonialgebra on algebra.*

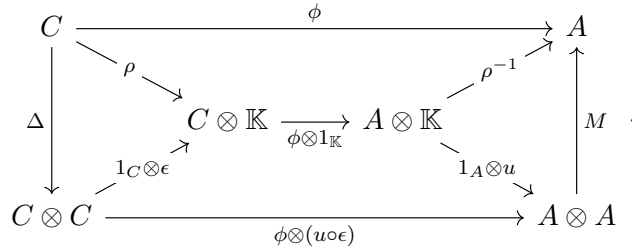
Tõestus. Kuna kahe vektorruumi C ja A puhul lineaarkujutuste hulk $\text{Lin}(C, A)$ on samuti vektorruum, siis piisab näidata, et konvolutsioonitehe on korrektselt defineeritud, assotsiatiivne, ühikuga, ja bilineaarne.

Kuna M , $f \otimes g$ ja Δ on kõik lineaarkujutused, siis on ka nende kompositsioon $f * g$ lineaarne. Seega on konvolutsioon korrektselt defineeritud.

Näitame, et konvolutsioon on assotsiatiivne ehk suvaliste lineaarkujutuste $f, g, h \in \text{Lin}(C, A)$ puhul kehtib, et $f * (g * h) = (f * g) * h$. Fikseerime need kujutused $f, g, h \in \text{Lin}(C, A)$. Siis saame rakendada avaldisele $f * (g * h)$ kaks korda konvolutsioonitehte $*$ definitsiooni ning assotsiaatori α loomulikkust korteežidel (U, V, W) . Selle abil näeme, et kommuteerub järgmine diagramm:



Näitame, et konvolutsioonitehte ühikuks on kujutus $u \circ \epsilon : C \rightarrow A$. Selleks näitame, et suvalise lineaarkujutuse $\phi \in \text{Lin}(C, A)$ korral $\phi * (u \circ \epsilon) = \phi$.



Näitame veel, et konvolutsioon on bilineaarne. Kasutame selleks kahte tulemust. Esiteks kasutame ülaltoodud lemmat 1.5 kujutuse

$$\text{Lin}(C, A) \times \text{Lin}(C, A) \rightarrow \text{Lin}(C \otimes C, A \otimes A), \quad (f, g) \mapsto f \otimes g$$

bilineaarsusest. Teiseks on lineaarsete kujutuste komponeerimine bilineaarne ehk lineaarkujutuste a, b, c ja skalaari k korral

$$(ka + b) \circ c = k(a \circ b) + a \circ c.$$

Fikseerime kujutused $f, f', g \in \text{Lin}(C, A)$ ja skalaari $k \in \mathbb{K}$. Tahame näidata, et $(kf + f') * g = k(f * g) + f' * g$. Siis

$$\begin{aligned} (kf + f') * g &= M \circ ((kf + f') \otimes g) \circ \Delta \\ &= M \circ (k(f \otimes g) + f' \otimes g) \circ \Delta \\ &= M \circ (k(f \otimes g)) \circ \Delta + M \circ (f' \otimes g) \circ \Delta \\ &= k(M \circ (f \otimes g) \circ \Delta) + M \circ (f' \otimes g) \circ \Delta \\ &= k(f * g) + (f' * g). \end{aligned}$$

Analoogselt saame näidata lineaarsust ka parempoolses muutujas ning seega on konvolutsioon bilineaarne. $\square$

Näide 2.9. Triviaalselt saab eelneva kahe näite põhjal anda nüüd konvolutsiooni-algebra $\text{Lin}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, mille konvolutsiooniks on

$$(\phi * \psi)(k) = \phi(k)\psi(1) = \phi(1)\psi(k) = k\phi(1)\psi(1)$$

ja ühikuks $1_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$.

Märkus 2.10. Vaatleme lineaarkujutusi $\text{Lin}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, mis on antud kui $\phi \mapsto \phi(1)$, ja $\mathbb{K} \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, kus $1 \mapsto 1_{\mathbb{K}}$. Siis kui $\phi(1) = k$, saame nende kujutuste komponeerimisel, et $\phi \mapsto k \mapsto k \cdot 1_{\mathbb{K}} = \phi(1)1_{\mathbb{K}}$. Kuna ϕ on lineaarne ning ta lähtehulk on $\mathbb{K}$, siis kehtib $\phi = \phi(1)1_{\mathbb{K}}$. Seega on toodud kujutused üksteise pöördlemendid ning konvolutsioonialgebra $\text{Lin}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ on isomorfne $\mathbb{K}$ -algebraga $\mathbb{K}$. Kujutuse $\text{Lin}(\mathbb{K}, A) \rightarrow A$, kus $\phi \mapsto \phi(1)$, tõttu on isomorfsed ka üldiselt algebra A ja konvolutsioonialgebra $\text{Lin}(\mathbb{K}, A)$.

2.2 Rühmalaadsed elemendid ja filtratsioon

Kirjeldame koalgebra rühmalaadseid elemente ning filtratsiooni. Kuigi tulemused on pärit artiklist [4], siis siin on välja kirjutatud ka täielikud tõestused.

Definitsioon 2.11. Koalgebra C nullist erinevat elementi $x \in C$ nimetatakse rühmalaadseks elemendiks, kui $\Delta(x) = x \otimes x$.

Lemma 2.3. Koalgebra C rühmalaadse elemendi $x \in C$ korral $\epsilon(x) = 1$.

Tõestus. Koühiku $\epsilon : C \rightarrow \mathbb{K}$ omaduseks on definitsiooni järgi, et $(1_C \otimes \epsilon) \circ \Delta = \rho$, kus $\rho : C \rightarrow C \otimes \mathbb{K}$ on isomorfism. Siin

$$((1_C \otimes \epsilon) \circ \Delta)(x) = (1_C \otimes \epsilon)(x \otimes x) = 1_C(x) \otimes \epsilon(x) = x \otimes k,$$

kus $k := \epsilon(x) \in \mathbb{K}$. Teisalt $\rho(x) = x \otimes 1$. Seega

$$\begin{aligned} x \otimes k = x \otimes 1 &\Leftrightarrow k(x \otimes 1) = x \otimes 1 \\ &\Leftrightarrow (k - 1)(x \otimes 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow k = 1 \vee x = 0. \end{aligned}$$

Kuna x on rühmalaadse elemendi definitsiooni järgi nullist erinev, siis peab kehtima, et $k = 1$ ehk $\epsilon(x) = 1$. $\square$

Definitsioon 2.12. Koalgebra C alamruumi D nimetatakse C **alamkoalgebraks**, kui kehtib, et $\Delta(D) \subseteq D \bar{\otimes} D$.

Definitsioon 2.13. Koalgebra **filtratsiooniks** alamkoalgebrate jada

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \dots = C,$$

kus iga $n \in \mathbb{N}_0$ korral

$$\Delta(C_n) \subset \sum_{i=0}^n C_i \bar{\otimes} C_{n-i}.$$

Sealjuures tähistagu $C_i \bar{\otimes} C_{n-i}$ sellist $C \otimes C$ alamruumi, mis on moodustatud elementide $x \otimes y$, $x \in C_i$, $y \in C_{n-i}$ poolt. Koalgebrat, millel on defineeritud filtratsioon, nimetame **filtreeritud koalgebraks**.

Definitsioon 2.14. Koalgebra C elemendi $x \in C$ **filtratsioonijärk** on vähim indeks $r \in \mathbb{N}_0$, mille korral $x \in C_r$.

Lemma 2.4. Rühmalaadse elemendi filtratsioonijärk on null.

Tõestus. Fikseerime koalgebras C sellise baasi X , et iga $i \in \mathbb{N}_0$ korral on ühisosa $X \cap C_i$ vektorruumi C_i baasiks. Järelduse 1.11 järgi on ruumi $C \otimes C$ baasiks siis $B := \{a \otimes b \mid a, b \in X\}$. Märkame, et ruumi $C_i \bar{\otimes} C_j$ baas on $\{a \otimes b \mid a \in C_i, b \in C_j\}$ – ilmselt on see hulk B alamhulgana lineaarselt sõltumatu ning on lihtne kontrollida, et sellised elemendid katavad ruumi. Toome sisse veel tähistuse $B_n := \{a \otimes b \mid a, b \in C_n\}$ ehk alamruumi $C_n \bar{\otimes} C_n$ baasi.

Olgu rühmalaadse elemendi x filtratsioonijärk $n \geq 0$. Siis $x \in C_n$ ja kui $r < n$, siis $x \notin C_r$. Teame, et $\Delta(x) = x \otimes x \in C_n \bar{\otimes} C_n$. Samas filtratsiooni definitsiooni järgi $\Delta(x) \in \sum_{i=0}^n C_i \bar{\otimes} C_{n-i}$.

Olgu x ruumi C_n baasivektor. Siis on $\Delta(x) = x \otimes x$ ruumi $C_n \bar{\otimes} C_n$ baasivektor. Järelikult ei saa teda avaldada teise $C_n \bar{\otimes} C_n$ baasivektorite $v \otimes w$, kus $v, w \in C_n$ ja $v \neq x$ või $w \neq x$, lineaarkombinatsioonina.

Teame, et $\Delta(x) = x \otimes x \in \sum_{i=0}^n C_i \bar{\otimes} C_{n-i}$ ehk leiduvad mingid elemendid $x_i \in C_i \bar{\otimes} C_{n-i}$ nii, et $x \otimes x = \sum_{i=0}^n x_i$. Samas kõik elemendid x_i on $C_i \bar{\otimes} C_{n-i}$ baasivektorite lineaarkombinatsioonid. Seega saame, et $x \otimes x$ avaldub mingite $C_n \bar{\otimes} C_n$ baasivektorite lineaarkombinatsioonina. Selleks lineaarkombinatsiooniks saab olla vaid $x \otimes x$, seega leidub mingi ruum C_i , $i \in \{0, \dots, n\}$, kus $x \in C_i$ ja $x \in C_{n-i}$. See aga on võimalik vaid siis, kui $i = n - i = n$ ehk kui $n = 0$. $\square$

Kuna tahame järgnevas kirjeldada mitu korda kokorrutamist, siis tähistame veel

$$\Delta^k(C) := (\underbrace{(1_C \otimes \dots \otimes 1_C \otimes \Delta)}_{k-1 \text{ korda}}) \circ \dots \circ (1_C \otimes \Delta) \circ \Delta(C).$$

Et kokorrutamine koassotsiatiivsuse tõttu on see samaväärne mistahes muus teguri Δ rakendamisega, siis kasutame siin igal sammul kõige parempoolsema teguri kokorrutamist. Tõestame selle kohta ka ühe lemma.

Lemma 2.5. *Filtreeritud koalgebras C kehtib sisalduvus*

$$\Delta^n(C_r) \subset \sum_{i_1 + \dots + i_n = r} C_{i_1} \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} C_{i_n}.$$

Tõestus. Tähistame loetavuse huvides suvalise $k \in \mathbb{N}_0$ korral

$$S_k := \sum_{i=0}^k C_i \bar{\otimes} C_{k-i}.$$

Paneme tähele, et siis filtratsiooni omadus on, et $\Delta(C_k) \subset S_k$.

Seega

$$\begin{aligned} (1_C \otimes \Delta)(S_r) &= (1_C \otimes \Delta) \left(\sum_{i=0}^r C_i \bar{\otimes} C_{r-i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^r (1_C \otimes \Delta)(C_i \bar{\otimes} C_{r-i}) \\ &= \sum_{i=0}^r C_i \bar{\otimes} \Delta(C_{r-i}). \end{aligned}$$

Kuna $\Delta(C_r) \subset S_r$, siis $\Delta^2(C_r) \subset (1_C \otimes \Delta)(S_r)$. Kuna $\Delta(C_{r-i}) \subset S_{r-i}$, siis järelikult

$$\Delta^2(C_r) \subset \sum_{i=0}^r C_i \bar{\otimes} S_{r-i} = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{r-i} C_i \bar{\otimes} C_j \bar{\otimes} C_{r-i-j}.$$

Niimoodi saame C_r kokorrutamist jätkata ning saamegi, et

$$\Delta^n(C_r) \subset \sum_{i_1+\dots+i_n=r} C_{i_1} \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} C_{i_n}.$$

□

Defineerime analoogselt algebra (A, M, u) jaoks n korda korrutamise kahes parempoolses teguris; tähistame seda $M^n : A^{\otimes n+1} \rightarrow A$.

2.3 Pöördelemendi leidmine kirjeldatud koalgebras

Teoreem 2.6. ([4], teoreem 4.3) Olgu C filtreeritud koalgebra, kus vektorruum C_0 on moodustatud rühmalaadsete elementide poolt. Kui $\phi \in \text{Lin}(C, A)$ kujutab kõik rühmalaadsed elemendid A ühikelemendiks, siis ta on konvolutsiooni suhtes pööratav.

Vaatleme jada $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ruumis $\text{Lin}(C, A)$, kus

$$\psi_0 = e, \quad \psi_k = e - \psi_{k-1} * (\phi - e). \quad (3)$$

Iga $c \in C$ korral on jada $(\psi_k(c))_{k \in \mathbb{N}_0}$ statsionaarne. Seetõttu on võimalik leida ϕ pöördelemendi ψ väärtus kohal c , kui rakendada rekursiivselt valemit

$$\psi = e - \psi * (\phi - e). \quad (4)$$

Teisisõnu on iga $c \in C$ puhul ψ kirjeldatav summaga

$$\psi = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (\phi - e)^{*n}, \quad (5)$$

sest selle osasummade jada $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ on punktiviisiliselt statsionaarne.

Tõestus. Märgime esmalt, et valemi (4) järgi

$$\begin{aligned} \psi = e - \psi * (\phi - e) &\Leftrightarrow \psi * \phi + \psi - \psi * e = e \\ &\Leftrightarrow \psi * \phi = e. \end{aligned}$$

Seega on niisuguse valemiga antud kujutus ψ on tõepoolest kujutuse ϕ vasakpoolne pöördelement. Näitame, et koalgebra iga elemendi $c \in C$ korral on võimalik ülaltoodud valemit järjest rakendades leida ψ väärtus kohal c .

Kui ψ definitsiooni n korda iseendale rakendada, siis saame ψ_n definitsiooni:

$$\begin{aligned}
\psi &= e - \psi * (\phi - e) \\
&= e - (e - \psi * (\phi - e)) * (\phi - e) \\
&= e - e * (\phi - e) + \psi * (\phi - e) * (\phi - e) \\
&= e - (\phi - e) + \psi * (\phi - e) * (\phi - e) \\
&= \dots \\
&= e - (\phi - e) + (\phi - e)^{*2} - (\phi - e)^{*3} + \dots + (-1)^n \psi * (\phi - e)^{*n} \\
&= \psi_n,
\end{aligned}$$

kus tähistus $*n$ tähendab n korda konvolutsiooni võtmist. Saame aga defineerida ψ ka nii, et ψ on ϕ parempoolne pöördelement - valemiga

$$\psi = e - (\phi - e) * \psi.$$

Paneme tähele, et ka sel juhul saame n korda ψ definitsiooni iseendale rakendades tulemuseks ψ_n . Seega saab iga $c \in C$ korral nii vasak- kui ka parempoolset valemit iseendale rakendades sama tulemuse.

Tahame näidata, et jada $(\psi_n(c))_{n \in \mathbb{N}_0}$ on mingist indeksist alates statsionaarne ehk leidub $N \in \mathbb{N}_0$ nii, et iga $k > N$ korral $\psi_k(c) = \psi_{k-1}(c)$. Selleks fikseerime mingid arvud $r, n \in \mathbb{N}_0$, kus n on suurem kui r , ning näitame, et $(\phi - e)^{*n}(C_r) = \{0\}$.

Kuna $(\phi - e)^{*n}$ on konvolutsiooni definitsiooni järgi esitatav kompositsioonina

$$C \xrightarrow{\Delta^n} C^{\otimes n} \xrightarrow{(\phi-e)^{\otimes n}} A^{\otimes n} \xrightarrow{M^n} A,$$

siis vaatleme esmalt kujutist $D := \Delta^n(C_r)$. Lemma 2.5 järgi kehtib, et

$$D \subset \sum_{i_1+\dots+i_n=r} C_{i_1} \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} C_{i_n}.$$

Tähistame $S := \sum_{i_1+\dots+i_n=r} C_{i_1} \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} C_{i_n}$.

Kuna aga $n > r$, siis peab alati leiduma mingi indeks $i_k = 0$ ehk igas liidetavas $C_{i_1} \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} C_{i_n}$ on üheks teguriks C_0 . Ilmselt kehtib, et kuna $D \subset S$, siis $(\phi - e)^{\otimes n}(D) \subset (\phi - e)^{\otimes n}(S)$. Samas

$$(\phi - e)^{\otimes n}(S) = \sum_{i_1+\dots+i_n=r} (\phi - e)(C_{i_1}) \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} (\phi - e)(C_{i_n}),$$

kus igas liidetavas on üheks teguriks $(\phi - e)(C_0)$.

Eelduse järgi on C_0 moodustatud rühmalaadsete elementide poolt, mille peal ϕ ja

e väärtused on võrdsed. Järelikult $(\phi - e)(C_0) = \{0\}$ ja

$$\sum_{i_1 + \dots + i_n = r} (\phi - e)(C_{i_1}) \bar{\otimes} \dots \bar{\otimes} (\phi - e)(C_{i_n}) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = r} \{0\} = \{0\}.$$

Järelikult $(\phi - e)^{\otimes n}(D) = \{0\}$.

Fikseerime elemendi $c \in C$ filtratsioonijärguga r . Siis $c \in C_r$ ja järelikult $((\phi - e)^{\otimes n} \circ \Delta^n)(c) = 0$. Et algebra A korrutamistehe M on lineaarne ja säilitab seega nullelementi, siis $M^n(0) = 0$. Järelikult on $(\phi - e)^{*n}(c)$ väärtus null.

Seega kui elemendi $c \in C$ filtratsioonijärk on r , siis

$$n > r \implies \psi_n(c) = \psi_{n-1}(c).$$

Järelikult on tõepoolest võimalik leida ϕ pöördelement ψ iga $c \in C$ korral. $\square$

3 Intsidentsusalgebrad

Osaliselt järjestatud intsidentsusalgebrate põhjalik käsitus on leitav õpikust [8] ja artiklist [4].

3.1 Osaliselt järjestatud hulga intsidentsusalgebra

Definitsioon 3.1. Olgu antud osaliselt järjestatud hulk P ja tema kaks elementi $x, y \in P$. Kui $x \leq y$, siis hulka $[x, y] \subset P$, kus

$$z \in [x, y] \Leftrightarrow x \leq z \leq y,$$

nimetatakse **intervalliks**.

Definitsioon 3.2. Ütleme, et osaliselt järjestatud hulk P on **lokaalselt lõplik**, kui kõik tema intervallid on lõplikud.

Intervalli $[x, y]$ pikkuseks nimetame temas leiduva maksimaalse ahela

$$x = z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_{n-1} \leq z_n = y$$

pikkust. Sealjuures kui ahelas on n elementi, siis tema pikkuseks loetakse $n - 1$.

Uurime edasises osaliselt järjestatud hulga P kõigi intervallide hulka ja tähistame seda $\text{int}(P)$.

Näide 3.3. Lokaalselt lõplikeks osaliselt järjestatud hulkadeks on näiteks $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$ ja lõpliku hulga X puhul $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

Märkus 3.4. Paneme tähele, et kahe lokaalselt lõpliku osaliselt järjestatud hulga $(P, \leq_P)$ ja $(Q, \leq_Q)$ puhul on ka nende otsekorrutis $(P \times Q, \leq)$, kus

$$(x_P, x_Q) \leq (y_P, y_Q) \Leftrightarrow x_P \leq_P y_P \wedge x_Q \leq_Q y_Q,$$

lokaalselt lõplik.

Definitsioon 3.5. Olgu P lokaalselt lõplik osaliselt järjestatud hulk. Vaba vektorruum $C_P := \mathbb{K}\langle \text{int}(P) \rangle$ on koalgebra, mille korrutamiseks on tehe

$$\Delta([x, y]) = \sum_{z \in [x, y]} [x, z] \otimes [z, y]$$

ja köühikuks on tehe

$$\epsilon([x, y]) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x = y, \\ 0 & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

Ülaldefineeritud koalgebrat nimetatakse lokaalselt lõpliku osaliselt järjestatud hulga P **intsidentsuskoalgebraks**.

Definitsioon 3.6. Konvolutsioonialgebrat $\text{Lin}(C_P, \mathbb{K})$ nimetatakse osaliselt järjestatud hulga P **intsidentsusalsebraks**. Konvolutsioonialgebra definitsiooni 2.8 järgi on konvolutsioonitehe $*$ siin

$$(\phi * \psi)([x, y]) = \sum_{z \in [x, y]} \phi([x, z])(\psi[z, y]).$$

Et $\mathbb{K}$ -algebra $\mathbb{K}$ ühikuks on samasusteisendus $1_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, siis konvolutsiooni ühikuks on intsidentsuskoalgebra koühik $\epsilon : C \rightarrow \mathbb{K}$.

Intsidentsuskoalgebras C_P saab leida nii rühmalaadsed elemendid kui ka filtratsiooni.

Näide 3.7. Moodustame intsidentsuskoalgebral C_P filtratsiooni järgmiselt. Olgu alamruum C_n moodustatud täpselt nende intervallide poolt, mille pikkus ei ületa $n + 1$ - näiteks ruum C_0 on siis moodustatud üheelemendiliste intervallide $[x, x]$ poolt. Ilmselt saame siis sisalduvused $C_0 \subset C_1 \subset \dots = C_P$. Veendume, et ruum C_n on alamkoalgebra. Tõesti, kui $[x, y] \in C_n$

$$\Delta([x, y]) = \sum_{z \in [x, y]} [x, z] \otimes [z, y]$$

puhul intervalli $[x, z]$ pikkus on i , siis intervalli $[z, y]$ pikkus ei saa ületada $n - i$. Seega kehtib, et

$$\Delta([x, y]) \in C_n \bar{\otimes} C_n \text{ ja } \Delta([x, y]) \in \sum_{i=0}^n C_i \bar{\otimes} C_{n-i}.$$

Sellise filtratsiooni järgi on intsidentsuskoalgebra C_P rühmalaadseteks elementideks üheelemendilised intervallid $[x, x]$, sest

$$\Delta([x, x]) = \sum_{z \in [x, x]} [x, z] \otimes [z, x] = [x, x] \otimes [x, x].$$

3.2 Vähendatud intsidentsusalsebrad

Definitsioon 3.8. Olgu $\sim$ ekvivalentsiseos hulgal $\text{int}(P)$. Kui hulga

$$\{[x, y] - [x', y'] \mid [x, y] \sim [x', y']\}$$

lineaarkate on koideaal koalgebras C_P , siis ütleme, et seos $\sim$ on **järjestusega kooskõlas**.

Tuletame meelde, et kaks osaliselt järjestatud hulka $(P, \leq_P), (P', \leq_{P'})$ on isomorf-
sed, kui leidub bijektsioon $p : P \rightarrow P'$ nii, et $x \leq_P y$ parajasti siis, kui $p(x) \leq_{P'} p(y)$.

Definitsioon 3.9. Ütleme, et kaks intervalli on **isomorfsed** ja tähistame $[x, y] \simeq [x', y']$, kui nad on isomorfsed osaliselt järjestatud hulkadena.

Edasises piisab vahel rääkida intervallide asemel vaid nende isomorfismiklassidest. Et seda käsitlust formaliseerida, näitame, et isomorfismiseose järgi saab intsident-suskoalgebrat faktoriseerida.

Lause 3.1. *Intervallide isomorfsusseos $\simeq$, kus ekvivalentseks loetakse isomorfsed intervallid, on järjestusega kooskõlas.*

Tõestus. Vaatleme hulka $I = \text{span}\{[x, y] - [x', y'] \mid [x, y] \simeq [x', y']\}$. Tahame näidata, et $\Delta(I) \subseteq C_P \bar{\otimes} I + I \bar{\otimes} C_P$ - selleks näitame, et moodustavad elemendid $[x, y] - [x', y']$, $[x, y] \simeq [x', y']$ kuuluvad ruumi $C_P \bar{\otimes} I + I \bar{\otimes} C_P$. Fikseerime kaks isomorfsed intervalli $[x, y], [x', y']$, kusjuures olgu nendevaheline isomorfism $p : [x, y] \rightarrow [x', y']$. Siis

$$\begin{aligned}
\Delta([x, y] - [x', y']) &= \Delta([x, y]) - \Delta([x', y']) \\
&= \sum_{z \in [x, y]} [x, z] \otimes [z, y] - \sum_{z' \in [x', y']} [x', z'] \otimes [z', y'] \\
&= \sum_{z \in [x, y]} [x, z] \otimes [z, y] - \sum_{z \in [x, y]} [x, z] \otimes [p(z), y'] \\
&\quad + \sum_{z \in [x, y]} [x, z] \otimes [p(z), y'] - \sum_{z' \in [x', y']} [x', z'] \otimes [z', y'] \\
&= \sum_{z \in [x, y]} [x, z] \otimes [z, y] - \sum_{z \in [x, y]} [x, z] \otimes [p(z), y'] \\
&\quad + \sum_{z' \in [x', y']} [x, p^{-1}(z')] \otimes [z', y'] - \sum_{z' \in [x', y']} [x', z'] \otimes [z', y'] \\
&= \sum_{z \in [x, y]} [x, z] \otimes ([z, y] - [p(z), y']) \\
&\quad + \sum_{z' \in [x', y']} ([x, p^{-1}(z')] - [x', z']) \otimes [z', y'] \\
&= \sum_{z \in [x, y]} [x, z] \otimes ([z, y] - [p(z), p(y)]) \\
&\quad + \sum_{z' \in [x', y']} ([p^{-1}(x'), p^{-1}(z')] - [x', z']) \otimes [z', y'].
\end{aligned}$$

Fikseerime mingid intervallide elemendid $z \in [x, y]$ ja $z' \in [x', y']$. On ilmne, et $[x, z] \in C_P$ ja $[z', y'] \in C_P$, mis tähendab, et meil on vaja vaid näidata isomorfisme

$[z, y] \simeq [p(z), p(y)]$ ning $[x', z'] \simeq [p^{-1}(x'), p^{-1}(z')]$. See on aga lihtne – nende intervallide vahelisteks isomorfismideks on vastavad $p : [x, y] \rightarrow [x', y']$ ahendid: $p|_{[z, y]}$ ja $p|_{[p^{-1}(x'), p^{-1}(z')]}$. Seega tõepoolest kehtib, et

$$[z, y] - [p(z), p(y)], [x', z'] - [p^{-1}(x'), p^{-1}(z')] \in I.$$

Järelikult $\Delta([x, y] - [x', y']) \in C \bar{\otimes} I + I \bar{\otimes} C$. □

Näitame ka, et seos, mida kasutame hiljem elimineerimisprintsipi illustreerimisel, on järjestusega kooskõlas. Tähistame seda $\sim$ nagu üldist järjestusega kooskõlalist seost; edasises on märgitud, kumba tõlgendust on mõeldud.

Lause 3.2. *Vaatleme osaliselt järjestatud hulka $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ning selle intsidentsuskoalgebrat $C_{\mathcal{P}(X)}$. Seos $\sim$, kus*

$$[S, T] \sim [S', T'] \Leftrightarrow T \setminus S = T' \setminus S',$$

on järjestusega kooskõlas. Sama käib osaliselt järjestatud hulkade $(\mathbb{N}, |)$ ja $(\mathbb{N}_0, \leq)$ kohta, kus defineerime seose $\sim$ kui

$$[m, n] \sim [m', n'] \Leftrightarrow n/m = n'/m'$$

või

$$[m, n] \sim [m', n'] \Leftrightarrow n - m = n' - m'.$$

Tõestus. Näitame esmalt, et seotud intervallide $[S, T] \sim [S', T']$ jaoks leidub bijektsioon $p : [S, T] \rightarrow [S', T']$ nii, et iga alamintervalli $[R_1, R_2]$ puhul $[R_1, R_2] \sim [p(R_1), p(R_2)]$. Olgu selleks kujutuseks

$$p(R) = S' \cup (R \setminus S).$$

Kujutus p on injektiivne, sest kui mingi kahe osahulga $S \subseteq R_1, R_2 \subseteq T$ puhul $p(R_1) = p(R_2)$, siis

$$S' \cup (R_1 \setminus S) = S' \cup (R_2 \setminus S) \Leftrightarrow R_1 \setminus S = R_2 \setminus S \Leftrightarrow R_1 = R_2.$$

Esimene samaväärsus tuleneb sellest, et S' ja $R_1 \setminus S$ on ühisosata (nagu ka S' ja $R_2 \setminus S$), ning teine sellest, et $S \subseteq R_1, R_2$.

Kujutus p on surjektiivne, sest saame iga $S' \subseteq R' \subseteq T'$ korral vaadelda tema originaali

$$R := (R' \setminus S') \cup S,$$

mille puhul tõepoolest

$$\begin{aligned} p(R) &= S' \cup (((R' \setminus S') \cup S) \setminus S) \\ &= S' \cup (R' \setminus S') \\ &= R'. \end{aligned}$$

Vaatleme nüüd intervalli $[R_1, R_2] \subseteq [S, T]$ ja näitame, et see on ekvivalentne intervalliga $[p(R_1), p(R_2)]$. Selle jaoks peame näitama, et $p(R_2) \setminus p(R_1) = R_2 \setminus R_1$. Viimaks kehtib tõesti, et

$$\begin{aligned} (S' \cup (R_1 \setminus S)) \setminus (S' \cup (R_2 \setminus S)) &= (R_1 \setminus S) \setminus (R_2 \setminus S) \\ &= R_2 \setminus R_1 \end{aligned}$$

ehk $[R_1, R_2] \sim [p(R_1), p(R_2)]$.

Fikseerime nüüd hulgast

$$I = \text{span}(\{[S, T] - [S', T'] \mid [S, T] \sim [S', T']\})$$

elemendi $[S, T] - [S', T']$. Siis

$$\begin{aligned} \Delta([S, T] - [S', T']) &= \Delta([S, T]) - \Delta([S', T']) \\ &= \sum_{R \in [S, T]} [S, R] \otimes [R, T] - \sum_{R' \in [S', T']} [S', R'] \otimes [R', T'] \\ &= \sum_{R \in [S, T]} [S, R] \otimes [R, T] + \sum_{R \in [S, T]} [S, R] \otimes [p(R), p(T)] \\ &\quad - \sum_{R \in [S, T]} [S, R] \otimes [p(R), p(T)] - \sum_{R' \in [S', T']} [S', R'] \otimes [R', T'] \\ &= \sum_{R \in [S, T]} [S, R] \otimes ([R, T] - [p(R), p(T)]) \\ &\quad + \sum_{R' \in [S', T']} ([S', R'] - [p(S), p(R')]) \otimes [R', T']. \end{aligned}$$

Seega tõepoolest kehtib, et $\Delta([S, T] - [S', T']) \in C \bar{\otimes} I + I \bar{\otimes} C$ ehk $\Delta(I) \subseteq C \bar{\otimes} I + I \bar{\otimes} C$.

Tõestus käib analoogselt teiste osaliselt järjestatud hulkade korral, kus võtame bijektsioonideks vastavalt $p(m) = (n/m)m'$ ja $p(m) = (n - m) + m'$. $\square$

Paneme muuhulgas tähele, et selle lause seos $\sim$ on täpsem kui seos $\simeq$, sest kaks intervalli $[S, T], [S'', T'']$ võivad olla isomorfsed, kuid ei pruugi kehtida, et $T \setminus S = T'' \setminus S''$.

Et need seosed on järjestusega kooskõlas ning kehtib teoreem 2.1, kehtib järgmine

lemma.

Lemma 3.3. *Olgu (C_P, Δ, ϵ) intsidentsuskoalgebra. Alamruumi $I = \text{span}\{[x, y] - [x', y'] \mid [x, y] \simeq [x', y']\}$ järgi faktoriseeritud vektorruum, mida tähistame $C_P/\simeq$, on koalgebra. Kui $\pi : C_P \rightarrow C_P/\simeq$ on loomulik sürjektsioon, siis ruumi $C_P/\simeq$ kokorutis $\Delta_\simeq$ ja koühik $\epsilon_\simeq$ on antud loomulikult viisil:*

$$\Delta_\simeq(\pi([x, y])) = (\pi \otimes \pi)(\Delta([x, y])) \quad \text{ja} \quad \epsilon_\simeq(\pi([x, y])) = \epsilon([x, y]).$$

Analoogselt on kokorutamise ja koühik defineeritud ka lauses 3.2 toodud seose $\sim$ järgi faktoriseeritud ruumi $C_P/\sim$ korral.

Definitsioon 3.10. Olgu $\sim$ järjestusega kooskõlaline seos hulgal $\text{int}(P)$. Lokaalselt lõpliku osaliselt järjestatud hulga P **vähendatud intsidentsuskoalgebraks** seose $\sim$ järgi nimetame koalgebrat $C_P/\sim$.

Definitsioon 3.11. Olgu $\sim$ järjestusega kooskõlaline seos. Siis nimetatakse konvolutsioonialgebrat $\text{Lin}(C_P/\sim, \mathbb{K})$ osaliselt järjestatud hulga P **vähendatud intsidentsusalgebraks** seose $\sim$ järgi.

Näide 3.12. Vähendatud intsidentsuskoalgebra $C_P/\simeq$ saame filtreerida analoogselt intsidentsuskoalgebra C_P filtratsiooniga näites 3.7 – see tähendab, saame intervalli $[x, y]$ isomorfismiklassi filtratsioonijärgu võtta intervalli pikkuse.

On näha, et kui C_P on filtreeritud näite 3.7 järgi, siis sürjektsioon $\pi : C_P \rightarrow C_P/\simeq$ säilitab intervallide filtratsioonijärke. See tähendab, et kui mingi intervalli $[x, y]$ filtratsioonijärk on r , siis sama kehtib ka selle intervalli isomorfismiklassi puhul.

Järeldub, et kuna kõik üheelemendilised intervallid on isomorfsed, siis rühmalaadseks elemendiks on koalgebras $C_P/\simeq$ üheelemendiliste intervallide $[x, x]$ isomorfismiklass. C_0 on moodustatud siis selle ühe isomorfismiklassi poolt.

Näide 3.13. Sama filtratsioon on defineeritav ka lauses 3.2 defineeritud seose $\sim$ puhul.

3.3 Möbiuse funktsioonid intsidentsusalgebrates

Definitsioon 3.14. Lokaalselt lõpliku osaliselt järjestatud hulga P intsidentsusalgebra $\text{Lin}(C_P, \mathbb{K})$ **tseetafunktsiooniks** nimetatakse funktsiooni $\zeta : C_P \rightarrow \mathbb{K}$, kus

$$\zeta([x, y]) = 1.$$

Lause 3.4. Tseetafunktsioonil leidub pöördement $\mu : C_P \rightarrow \mathbb{K}$, kus

$$\mu([x, y]) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x = y \\ -\sum_{z \in [x, y], z \neq y} \mu([x, z]) & \text{muul juhul.} \end{cases} \quad (6)$$

Tõestus. Olgu P lokaalselt lõplik osaliselt järjestatud hulk ja C_P tema intsident-suskoalgebra, milles leidub filtratsioon, mis vastab teoreemi 2.6 eeldustele (vt näide 3.12). On ka ilmne, et tseetafunktsiooni väärtus rühmalaadsetel elementidel $[x, x]$ on 1, mistõttu on kõik teoreemi 2.6 eeldused täidetud. Seega valemi (4) järgi

$$\mu = \epsilon - \mu * (\zeta - \epsilon).$$

Et rühmalaadsed elemendid on siin üheelemendilised intervallid, siis

$$\mu([x, x]) = \epsilon([x, x]) - \mu([x, x])(\zeta([x, x]) - \epsilon([x, x])) = 1 - 1 \cdot 0 = 1.$$

Kui $[x, y]$ aga ei ole rühmalaadne element - kui $x \neq y$ -, siis saame, et

$$\mu([x, y]) = \epsilon([x, y]) - \sum_{z \in [x, y]} \mu([x, z])(\zeta - \epsilon)[z, y] = - \sum_{z \in [x, y], z \neq y} \mu([x, z]).$$

Seega kehtib tõepoolest valem (6). $\square$

Lemma 3.5. *Olgu $\sim$ järjestusega kooskõlaline seos ja $\pi : C_P \rightarrow C_P/\sim$ loomulik surjektsioon. Siis $\text{Lin}(C_P/\sim, \mathbb{K})$ on isomorfne $\text{Lin}(C_P, \mathbb{K})$ alamalgebraga, kuhu kuuluvad funktsioonid, mis käituvad ekvivalentsetel intervallidel samamoodi.*

Tõestus. Kategoorias $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ on surjektiivsed lineaarkujutused epimorfismideks, mille tõttu π on epimorfism. See tähendab, et lineaarkujutuste $f_1, f_2 : C_P/\sim \rightarrow V$ korral $f_1 \circ \pi = f_2 \circ \pi \Rightarrow f_1 = f_2$. Vaatleme kujutust

$$\text{Lin}(\pi, A) : \text{Lin}(C_P/\sim, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Lin}(C_P, \mathbb{K}), \quad \phi_{\sim} \mapsto \phi_{\sim} \circ \pi.$$

Siis on π epimorfismiks olemise tõttu kujutus $\text{Lin}(\pi, A)$ injekttiivne.

Kuna π on koalgebra homomorfism, siis kehtib, et $\Delta_{C_P/\sim} \circ \pi = (\pi \otimes \pi) \circ \Delta_{C_P}$ ja $\epsilon_{C_P/\sim} \circ \pi = \epsilon_{C_P}$.

$$\begin{aligned} (\phi *_{C_P} / \sim \psi) \circ \pi &= m \circ (\phi \otimes \psi) \circ \Delta_{C_P/\sim} \circ \pi \\ &= m \circ (\phi \otimes \psi) \circ (\pi \otimes \pi) \circ \Delta_{C_P} \\ &= m \circ ((\phi \circ \pi) \otimes (\psi \circ \pi)) \circ \Delta_{C_P} \\ &= (\phi \circ \pi) *_{C_P} (\psi \circ \pi) \end{aligned}$$

ja $\epsilon_{C_P/\sim} \circ \pi = \epsilon_{C_P}$. Seega on $\text{Lin}(\pi, A)$ injekttiivne algebrate homomorfism, mistõttu kehtib, et $\text{Lin}(C_P/\sim, \mathbb{K})$ on isomorfne oma kujutisega, mis on omakorda algebra $\text{Lin}(C_P, \mathbb{K})$ alamalgebra. $\square$

Seega on vähendatud intsidentsualgebrad isomorfsed intsidentsusalgebra teatud alamalgebratega, kusjuures nendesse alamalgebratesse kuuluvad täpselt need funktsioonid, mis käituvad ekvivalentsetel intervallidel samamoodi.

Sellest tuleb välja, et kuna tseetafunktsioon käitub kõigil intervallidel samamoodi ehk kuulub vähendatud intsidentsusalegebra alamalgebrasse ning tal on seoste $\simeq$ ja $\sim$ puhul vähendatud intsidentsusalebras pöördelement $\mu_{\sim}$, siis see pöördelement ühtib Möbiuse funktsiooniga intsidentsusalebras. Teisisõnu peab kehtima, et nende seoste puhul $\mu = \mu_{\sim} \circ \pi$. Möbiuse funktsiooni saame siis igas vähendatud intsidentsusalebras defineerida kui

$$\mu_{C_P} = \mu_{C_P/\sim} \circ \pi.$$

3.4 Möbiuse funktsiooni arvutamine

Selle teksti näidetest on otse valemist (6) lihtne arvutada Möbiuse funktsiooni osaliselt järjestatud hulgal $(\mathbb{N}, \leq)$.

Näide 3.15. Naturaalarvudel loomuliku järjestuse järgi $(\mathbb{N}, \leq)$ on

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{kui } n = 1, \\ -\sum_{d < n} \mu(d) & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

ehk

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{kui } n = 1, \\ -1, & \text{kui } n = 2, \\ 0 & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

Möbiuse inversioonivalem ütleb siis siin, et

$$\text{kui } f(n) = \sum_{m \leq n} g(m), \text{ siis } g(n) = f(n) - f(n-1).$$

Keerulisema struktuuriga intervallide puhul ei ole aga pelgalt rekursiivse valemi abil Möbiuse funktsiooni väärtuse arvutada enam nii lihtne.

Et uurida, kuidas see valem avaldub erinevates osaliselt järjestatud hulkades, toome ära mõned võredegast seotud tulemused.

Esmalt kirjeldame, kuidas intsidentsusalebraid saab vaadata ka vaba vektorruumi konstruktsiooni ja koalgebraid kasutamata.

Definitsioon 3.16. Lokaalselt lõpliku osaliselt järjestatud hulga P **intsidentsusalebraks** nimetatakse hulka

$$\{f : P \times P \rightarrow \mathbb{K} \mid f(x, y) = 0, \text{ kui } x \not\leq y\},$$

millel on antud konvolutsioonitehe ning ühik kujul

$$(f * g)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y), \quad e(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x = y \\ 0 & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

See definitsioon on aga ekvivalentne meie kasutatava definitsiooniga.

Lause 3.6. *Olgu P lokaalselt lõplik osaliselt järjestatud hulk. Definitsioonis 3.6 ja definitsioonis 3.16 kirjeldatud intsidentsusalgebrad on isomorfsed.*

Tõestus. Tähistame meie tekstis üldiselt kasutatavat intsidentsusalgebrat 3.6 kui I_1 ja äsja defineeritud intsidentsusalgebrat 3.16 kui I_2 . Olgu nende konvolutsioonitehted vastavalt $*_1$ ja $*_2$ ning olgu nende konvolutsiooniühikud vastavalt e_1 ja e_2 .

Vaatleme funktsiooni

$$\phi : I_2 \rightarrow I_1, \quad (\phi(f))([x, y]) = f(x, y).$$

Näitame, et see funktsioon on bijektiivne lineaarkujutus ning et ta säilitab konvolutsiooni ja selle ühikut.

Alustame bijektiivsusest. Kehtigu, et $\phi(f) = \phi(g)$. Siis iga intervalli $[x, y]$ peal $(\phi(f))([x, y]) = (\phi(g))([x, y])$ ehk kui $x \leq y$, siis $f(x, y) = g(x, y)$. Teame I_2 definitsiooni järgi aga, et kui $x \not\leq y$, siis $f(x, y) = g(x, y) = 0$. Järelikult $f = g$.

Fikseerime $g \in I_1$. Olgu siis

$$f(x, y) = \begin{cases} g([x, y]), & \text{kui } x \leq y. \\ 0, & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

Siis $\phi(f) = g$.

Fikseerime kaks funktsiooni $f, g \in I_2$. Siis

$$(\phi(f + g))([x, y]) = (f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y) = (\phi(f))([x, y]) + (\phi(g))([x, y]).$$

Olgu $k \in \mathbb{K}$. Siis

$$(\phi(kf))([x, y]) = (kf)(x, y) = k(f(x, y)).$$

Viimaks näitame, et ϕ on algebrate isomorfism – et säilivad konvolutsioon ja selle

ühik. Samade $f, g \in I_2$ jaoks

$$\begin{aligned}
(\phi(f *_1 g))([x, y]) &= (f *_1 g)(x, y) \\
&= \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y) \\
&= \sum_{z \in [x, y]} (\phi(f))([x, z])(\phi(g))([z, y]) \\
&= (\phi(f)) *_2 (\phi(g))([x, y]).
\end{aligned}$$

Konvolutsiooni ühiku puhul

$$(\phi(e_2))([x, y]) = e_2(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x = y \\ 0 & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

Seega tõepoolest $(\phi(e_2)) = e_1$. Algebrad I_1 ja I_2 on isomorfsed. $\square$

Lemma 3.7. *Lokaalselt lõpliku osaliselt järjestatud hulga P intervall $[x, y]$ on lõplik võre.*

Tõestus. Piisab näidata, et intervalli igal kahel elemendil on ülemine ja alumine raja.

Olgu $z, z' \in [x, y]$. Kui $z \leq z'$, siis on nende alumiseks rajaks z ja ülemiseks rajaks z' .

Oletame, et z, z' ei ole võrreldavad. Siis leidub lõplik arv elemente $w \in [z, y]$ ja lõplik arv elemente $w' \in [z', y]$. Valime neist välja elemendid, mis on mõlemas intervallis – siis saame mingid $n \in \mathbb{N}$ elementi $w_1, \dots, w_n$ nii, et $z, z' \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n \leq y$. Valime neist w_1 endale ülemiseks rajaks.

Analoogselt saab arutleda alumise raja kohta. $\square$

Järeldus 3.8. *Intsidentsusalgebra C_P alamkoalgebra $C_{[x, y]}$ on isomorfne mingi lõpliku võre L intsidentsusalgebraga $L \times L \rightarrow \mathbb{K}$.*

Võtame teadmiseks järgmise lemma.

Lemma 3.9. *Olgu P lokaalselt lõplik hulk, $[x, y] \in P$ ja olgu $\mu_P, \mu_{[x, y]}$ Möbiuse funktsioonid intsidentsusalgebrates $C_P, C_{[x, y]}$. Siis sisestuse $\iota : C_{[x, y]} \rightarrow C_P$ puhul*

$$\mu_{[x, y]} = \mu_P \circ \iota.$$

Kuna tekstides [3] ja [8] on Möbiuse funktsioon $\mu : L \times L \rightarrow \mathbb{K}$ mingi lõpliku võre L korral, siis oli eelnenud tulemusi vaja. Nende abil saame rakendada järgmisi tulemusi intsidentsusalgebras $\text{Lin}(C_P, \mathbb{K})$ - illustreerida, kuidas intervalli struktuur võreana mõjutab Möbiuse funktsiooni väärtusi.

Kohandame siia õpikus [9] toodud tulemuse 3.8.5:

Lause 3.10. Olgu antud intervall $[x, y]$ ning olgu c_i selliste alamhulkade $\{x_0, \dots, x_i\} \subseteq [x, y]$ arv, kus $x = x_0 < \dots < x_i = y$. Siis

$$\mu([x, y]) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots$$

Tõestus. Olgu intervalli $[x, y]$ pikkus mingi $n \in \mathbb{N}$. Valemist

$$\mu = e - \mu * (\zeta - e),$$

saame, et

$$\begin{aligned} \mu([x, y]) &= e([x, y]) - (\zeta - e)([x, y]) + (\zeta - e)^{*2}([x, y]) \\ &\quad - (\zeta - e)^{*3}([x, y]) + \dots + (-1)^n (\zeta - e)^{*n}([x, y]) \\ &= e([x, y]) - (\zeta - e)([x, y]) + \sum_{z \in [x, y]} (\zeta - e)([x, z])(\zeta - e)([z, y]) \\ &\quad - \sum_{\substack{z, w \in [x, y] \\ z \leq w}} (\zeta - e)([x, z])(\zeta - e)([z, w])(\zeta - e)([w, y]) + \dots \end{aligned}$$

Kuna

$$(\zeta - e)([x, y]) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = y \\ 1, & \text{kui } x \neq y, \end{cases}$$

siis on näha, et $(\zeta - e)^{*n}([x, y])$ loendab täpselt lause sõnastuses kirjeldatud $[x, y]$ alamhulki. $\square$

Lemma 3.11. Olgu $(P, \leq_P)$ ja $(Q, \leq_Q)$ lokaalselt lõplikud osaliselt järjestatud hulgad ning vaatame nende otsekorrutisest saadud osaliselt järjestatud hulka $P \times Q$. Siis

$$\mu_{P \times Q}([(x_P, x_Q), (y_P, y_Q)]) = \mu_P([x_P, y_P])\mu_Q([x_Q, y_Q]).$$

Tõestus. Alustuseks on näha, et kui hulgad P ja Q on lokaalselt lõplikud, siis on seda ka otsekorrutis $P \times Q$, mistõttu saame vaadata tema intsidentsuslgebrat.

Defineerime tseetafunktsiooni $\zeta_{P \times Q}$, kus $[(x, x'), (y, y')] \mapsto 1$. Näitame, et funktsioon

$$f((x_P, y_P), (x_Q, y_Q)) := \mu_P([x_P, y_P])\mu_Q([x_Q, y_Q])$$

on tseetafunktsiooni pöördelement:

$$\begin{aligned}
& (\zeta_{P \times Q} * f)([(x_P, x_Q), (y_P, y_Q)]) \\
&= \sum_{(z_P, z_Q) \in [(x_P, x_Q), (y_P, y_Q)]} \zeta_{P \times Q}([(x_P, x_Q), (z_P, z_Q)]) f((z_P, z_Q), (y_P, y_Q)) \\
&= \sum_{(z_P, z_Q) \in [(x_P, x_Q), (y_P, y_Q)]} \zeta_P([x_P, z_P]) \mu_P([z_P, y_P]) \zeta_Q([x_Q, z_Q]) \mu_Q([z_Q, y_Q]) \\
&= \left(\sum_{z_P \in [x_P, y_P]} \zeta_P([x_P, z_P]) \mu_P([z_P, y_P]) \right) \left(\sum_{z_Q \in [x_Q, y_Q]} \zeta_Q([x_Q, z_Q]) \mu_Q([z_Q, y_Q]) \right) \\
&= (\zeta_P * \mu_P)([x_P, y_P]) (\zeta_Q * \mu_Q)([x_Q, y_Q]) \\
&= e_P([x_P, y_P]) e_Q([x_Q, y_Q]) \\
&= e_{P \times Q}([(x_P, x_Q), (y_P, y_Q)]).
\end{aligned}$$

Kuna tseetafunktsiooni pöördfunktsioon on Möbiuse funktsioon, siis kehtibki, et $f = \mu_{P \times Q}([(x_P, x_Q), (y_P, y_Q)])$. $\square$

Illustreerime tõestatavat tulemust järelausega Möbiuse funktsiooni kohta hulgal $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

Järeldus 3.12. *Olgu X lõplik hulk. Siis*

$$\mu([\emptyset, \mathcal{P}(X)]) = (-1)^{|X|}.$$

Tõestus. Olgu $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Siis

$$\mathcal{P}(X) \simeq \mathcal{P}(\{x_1\}) \times \dots \times \mathcal{P}(\{x_n\}),$$

mis tähendab, et

$$\mu_{\mathcal{P}(X)} = \mu_{\mathcal{P}(\{x_1\}) \times \dots \times \mathcal{P}(\{x_n\})} = \mu_{\mathcal{P}(\{x_1\})} \cdot \dots \cdot \mu_{\mathcal{P}(\{x_n\})}.$$

Kuna üheelemendilise hulga $\{*\}$ korral $\mu(\mathcal{P}(\{*\})) = -1$, siis saamegi, et $\mu(\mathcal{P}(X)) = (-1)^n$. $\square$

Definitsioon 3.17. Öeldakse, et osaliselt järjestatud hulga P element y **katab** elementi x , kui intervallis $[x, y]$ on täpselt kaks elementi. Kui hulgas P on vähim element $\mathbf{0}$, siis seda katvat elementi nimetatakse **aatomiks**.

Toome ära lause, mille tõestus on leitav õpikust [8], ning mis illustreerib, miks Möbiuse funktsioon on 0, kui $p^2 \mid n$.

Lause 3.13. *Olgu L lõplik võre vähima elemendiga $\mathbf{0}$ ja suurima elemendiga $\mathbf{1}$. Kui L aatomite ülemine raja ei ole $\mathbf{1}$, siis*

$$\mu(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = 0.$$

Järeldus 3.14. Kui intervalli $[x, y] \in C_P$ korral x aatomite ülemine raja ei ole y , siis $\mu([x, y]) = 0$.

Märkus 3.18. Osaliselt järjestatud hulkadel $(\mathbb{N}, |)$, $(\mathbb{N}_0, \leq)$ ja $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ leidub vähim element $\mathbf{0}$. Hulgaks $\mathbb{N}_0$ on selleks arv 0, hulgaks $\mathbb{N}$ arv 1 ja hulgaks $\mathcal{P}(X)$ tühi hulk. Iga intervall $[x, y]$ on nendes osaliselt järjestatud hulkades isomorfne mingi intervalliga $[\mathbf{0}, z]$. Edasises vaatleme nende osaliselt järjestatud hulkade vähendatud intsidentsuskoalgebraid. Sõltuvalt kontekstist kasutame selleks kas seost $\sim$ või $\simeq$ ja samastame $[\mathbf{0}, z]$ ekvivalentsiklassi esindaja lihtsalt tema elemendiga z . Kuna Möbiuse funktsioon toimib samasuguselt iga kahe isomorfse intervalli peal, siis ei ole ekvivalentsiseose valik oluline μ jaoks, vaid Möbiuse inversioonivalemis kasutatavate teiste funktsioonide puhul.

Näide 3.19. Möbiuse klassikaline funktsioon on

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{kui } n = 1 \\ -\sum_{d|n, d \neq n} \mu(d) & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

Näitame veel Möbiuse funktsiooni osaliselt järjestatud hulgaks $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ ning lõpetame peatüki, näidates, kuidas Möbiuse inversioonivalem vastavas intsidentsusalgebras annab elimineerimisprintsii.

Näide 3.20. Möbiuse funktsioon lõpliku hulga osahulkade hulgal $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ on

$$\mu(T) = \begin{cases} 1, & \text{kui } T = \emptyset \\ -\sum_{S \subset T, S \neq T} \mu(S) & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

3.5 Elimineerimisprintsii

Lõpetuseks illustreerime, kuidas sobivaid funktsioone intsidentsusalgebrast valides on võimalik saada elimineerimisprintsii. Seda konstruktsiooni on võimalik leida ka raamatust [7].

Näide 3.21. Vaatleme mingit n hulga koosnevat süsteemi $\{A_i\}_{i=1}^n$. Meenutame, et elimineerimisprintsii aitab leida nende hulkade ühendi võimsust:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \right).$$

Olgu siin lokaalselt lõplikuks osaliselt järjestatud hulgaks $P := (\mathcal{P}([n]), \subseteq)$, kus $[n] = \{1, \dots, n\}$. Faktoriseerime selle lauses 3.2 toodud seose järgi. Siis on seose ekvivalentsiklassid üheselt määratud intervalli $[\emptyset, T]$ elemendi T järgi ning saame edasises vaadata tehteid hulga $[n]$ osahulkadel, kasutamata intervallide tähistust.

Siis saame defineerida vastava intsidentsus algebra $\text{Lin}(C_P/\sim, \mathbb{K})$, kus

$$(\phi * \psi)(T) = \sum_{R \subseteq T} \phi(R) \psi(T \setminus R).$$

Leiame kaks funktsiooni $f, g \in \text{Lin}(C_P, \mathbb{K})$, mille korral $g = f * \zeta$. Siis $f = g * \mu$, millest saame liidetavaid ümber tõstes elimineerimisprintsibi.

Esiteks defineerime funktsiooni $f : [n] \rightarrow \mathbb{Z}$, kus

$$f(S) = \begin{cases} 0, & \text{kui } S = [n] \\ |\bigcap_{j \in [n] \setminus S} A_j \setminus \bigcup_{i \in S} A_i| & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

See funktsioon annab sellise ühisosa võimsuse, mis on moodustatud ainult nende hulkade poolt, mille indeksid on hulgas $[n] \setminus S$. Näiteks kehtib, et kui $n = 3$ ja $S = \{1\}$, siis $f(S) = |(A_2 \cap A_3) \setminus A_1|$.

Defineerime nüüd funktsiooni g summana $g(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)$. Siis

$$g(S) = \begin{cases} |\bigcup_{i \in S} A_i|, & \text{kui } S = [n] \\ |\bigcap_{j \in [n] \setminus S} A_j| & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

Lühidalt määrab osahulk S ära mingid indeksid $i_1, \dots, i_k \in [n] \setminus S$. Funktsioon f annab siis hulga $\bigcap_{j \in [n] \setminus S} A_j \setminus \bigcup_{i \in S} A_i$ võimsuse, kus elemendid kuuluvad täpselt igasse hulka $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ ja mitte ühessegi teise hulka. Siis liidab g kokku kõik võimsused $f(T)$, kus $T \subseteq S$, ja saab kokku hulkade $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ ühisosa võimsuse. Jätuks eelmisele näitele kehtib siin $g(\{1\}) = f(\emptyset) + f(\{1\}) = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |(A_2 \cap A_3) \setminus A_1| = |A_2 \cap A_3|$.

Möbiuse inversioonivalemi järgi siis

$$f(S) = \sum_{T \subseteq S} g(T) \mu(S \setminus T) = \sum_{T \subseteq S} g(T) (-1)^{|T|+1}.$$

See tähendab, et

$$\begin{aligned} f([n]) = \sum_{T \subseteq [n]} g(T) (-1)^{|T|+1} &\Leftrightarrow 0 = \sum_{T \subseteq [n]} g(T) (-1)^{|T|+1} \\ &\Leftrightarrow g([n]) = \sum_{T \subset [n]} g(T) (-1)^{|T|+1} \\ &\Leftrightarrow \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \right). \end{aligned}$$

3.6 Kategooria ja monoidi intsidentsusalgebra

Möbiuse funktsiooni ja inversioonivalemit saab leida ka kategooriatel. Möbiuse funktsiooni kategoorial saab aga defineerida ka teisiti, selle alapeatüki tulemused ja teised lähenemised on leitavad artiklis [5].

Definitsioon 3.22. Olgu antud väike kategooria $\mathcal{C}$, mille objektide hulgaks on $\mathcal{C}_0$ ja morfismide hulgaks on $\mathcal{C}_1$. Ütleme, et kategooria $\mathcal{C}$ on **lokaalselt lõplik**, kui iga tema morfismi $f : x \rightarrow y$ jaoks leidub lõplik arv morfismipaare (f_1, f_2) nii, et $f = f_2 \circ f_1$.

Definitsioon 3.23. Lokaalselt lõpliku kategooria $\mathcal{C}$ **intsidentsuskoalgebraks** nimetame vaba vektorruumi $C_{\mathcal{C}} := \mathbb{K}\langle \mathcal{C}_1 \rangle$, millel on defineeritud kokorrutamine

$$\Delta(f) = \sum_{f=f_2 \circ f_1} f_1 \otimes f_2$$

ja koühik

$$\epsilon(f) = \begin{cases} 1, & \text{kui leidub } A \in \mathcal{C}_0 \text{ nii, et } f = \text{id}_A, \\ 0 & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

Definitsioon 3.24. Nimetame lokaalselt lõpliku kategooria $\mathcal{C}$ **tseetafunktsiooniks** lineaarkujutust $\zeta : C_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{K}$, kus iga morfismi $f \in \mathcal{C}_1$ korral kehtib, et $\zeta(f) = 1$.

Selleks, et saaksime leida tseetafunktsioonile pöördelendi tulemust 2.6 kasutades, nõuame kategoorialt veel järgmist tingimust – see võimaldab meil defineerida filtratsiooni nii, et $\mathcal{C}_0$ on tõepoolest moodustatud rühmalaadsete elementide poolt.

Definitsioon 3.25. (vrd [5]) Lokaalselt lõplikku kategooriat nimetatakse **Möbiuse kategooriaks**, kui iga morfismi $f \in \mathcal{C}_1$ puhul leidub vaid lõplik arv lõplikke jadasid $(f_1, \dots, f_k)$ nii, et $f = f_k \circ \dots \circ f_1$ ja ükski tegur f_i ei ole ühikmorfism.

Paneme tähele, et Möbiuse kategoorias ei saa olla ühikmorfismidest erinevaid isomorfisme ega idempotente (morfisme f , mille puhul $f = f \circ f$).

Näide 3.26. Defineerime Möbiuse kategoorial $\mathcal{C}$ filtratsiooni järgmiselt. Olgu ruum C_n moodustatud täpselt nende morfismide poolt, mille pikimas ühikmorfismideta tegurduses ei ole üle n morfismi.

Sellisel juhul on ruum C_0 moodustatud ühikmorfismide poolt; näiteks ruum C_k on aga moodustatud selliste morfismide poolt, mille pikim tegurdus on $f = f_k \circ \dots \circ f_1$ mingite mitte-ühikmorfismide $(f_1, \dots, f_k)$ jaoks. On näha, et siis saame sisalduvused $C_0 \subset C_1 \subset \dots = C_{\mathcal{C}}$.

Ruum C_n on alamakoalgebra. Olgu $f \in C_n$ ja olgu tema pikim tegurdus $f = g_n \circ \dots \circ g_1$. Kokorrutades f , saame, et

$$\Delta(f) = \sum_{f_2 \circ f_1 = f} f_1 \otimes f_2.$$

Fikseerime sellest summast mingi liidetava $f_1 \otimes f_2$. Kui kehtiks, et $f_1 \notin C_n$, siis peaks tal leiduma mingi pikem mittetriviaalne tegurdus $f_1 = h_m \circ \dots \circ h_1$, $m > n$. Siis aga oleks ka morfismil f pikem tegurdus, mis on vastuolus eeldusega.

Analoogselt saame näidata, et kokorrutis $\Delta(f)$ kuulub ruumi $\sum_{i \leq n} C_i \bar{\otimes} C_{n-i}$. Kui $f = f_1 \otimes f_2$ ja f_1 filtratsioonijärk on $i \leq n$, siis ei saa kehtida, et f_2 filtratsioonijärk on suurem kui $n - i$. Vastasel juhul oleks f pikim mittetriviaalne tegurdus pikem kui n morfismi.

Siin näeme, et rühmalaadseteks elementideks on ühikmorfismid 1_A , kus $A \in \mathcal{C}_0$. Nende puhul $\Delta(1_A) = 1_A \otimes 1_A$. Märkame, et kuna ühikmorfismidel ei saa olla mittetriviaalseid tegurdusi, siis on nende filtratsioonijärk 0. Kui aga on antud ühikmorfismist erinev morfism f , siis leidub tal vähemalt üks tegurdus $f = f$. Seega on $\mathcal{C}_0$ moodustatud rühmalaadsete elementide poolt.

Definitsioon 3.27. Intsidentsusalgebraks kategoorial $\mathcal{C}$ nimetame konvolutsioonialgebrat $(\text{Lin}(C_{\mathcal{C}}, \mathbb{K}), *, \epsilon)$. Rakendades vastavat definitsiooni 2.8, saame siin, et kujutuste $\phi, \psi \in \text{Lin}(C_{\mathcal{C}}, \mathbb{K})$ konvolutsiooniks on

$$(\phi * \psi)(f) = \sum_{f=f_2 \circ f_1} \phi(f_1)\psi(f_2)$$

ning konvolutsiooni ühikuks on koalgebra $C_{\mathcal{C}}$ ühik $\epsilon : C_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{K}$.

Järeldus 3.15. Möbiuse funktsioon Möbiuse kategooria $\mathcal{C}$ intsidentsusalgebral on

$$\mu(f) = \sum_{\substack{f_2 \circ f_1 = f \\ f_1 \neq f}} \mu(f_1) \quad (7)$$

Tõestus. Olgu $\mathcal{C}$ Möbiuse kategooria, mille intsidentsuskoalgebral on antud näites 3.26 kirjeldatud filtratsioon. Siis kehtivad kõik teoreemi 2.6 eeldused, mis tähendab, et saame arvutada Möbiuse funktsiooni valemi

$$\mu = \epsilon + \mu * (\zeta - \epsilon)$$

järgi. Kui f on ühikmorfism, siis $\zeta(f) = \epsilon(f)$, mistõttu $\mu(f) = \epsilon(f) = 1$. Kui f ei ole ühikmorfism, siis kehtib, et $\epsilon(f) = 0$, ja seega

$$\mu(f) = (\mu * (\zeta - \epsilon))(f) = \sum_{f_2 \circ f_1 = f} \mu(f_1)(\zeta - \epsilon)(f_2).$$

Kui mingi liidetava korral $f_1 = f$, siis f_2 on ühikmorfism. Nendel puhkudel taas $(\zeta - \epsilon)(f_2) = 0$ ja seega saamegi Möbiuse funktsioonile valemi (7). $\square$

Valides sobiva kategooria $\mathcal{C}$, saame seda definitsiooni kasutada näiteks osaliselt järjestatud hulga ja monoidi intsidentsusalgebra defineerimiseks.

Näide 3.28. Olgu P osaliselt järjestatud hulk. Vaatleme kategooriat $\mathcal{P}$, mille objektideks on P elemendid ning objektide $x, y \in \mathcal{P}_0$ vahel on morfism $x \rightarrow y$ parajasti siis, kui $x \leq y$.

Olgu sellel kategoorial omadus 3.22. Siis leidub talle vastavas osaliselt järjestatud hulgas iga $x, y \in P$ korral lõplik arv elemente $z \in P$ nii, et $x \leq z \leq y$; teisisõnu on osaliselt järjestatud hulk P lokaalselt lõplik.

Märkame, et igale kahele elemendile $x, y \in P$ vastab täpselt üks intervall $[x, y]$, kui $x \leq y$, ja ei vasta ühtegi intervalli, kui $x \not\leq y$. Samamoodi on iga kahe objekti $x, y \in \mathcal{P}$ vahel morfism $x \rightarrow y$ parajasti siis, kui $x \leq y$. Seega on osaliselt järjestatud hulga P intervallid ja kategooria $\mathcal{P}$ morfismid üksühises vastavuses.

Defineerime kategooria intsidentsuskoalgebra järgi koalgebra struktuuri P intervallide peal, mille järgi saame, et

$$\Delta([x, y]) = \sum_{z \in [x, y]} [x, z] \otimes [z, y], \quad \epsilon([x, y]) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x = y, \\ 0 & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

Näeme, et see on täpselt samasugune osaliselt järjestatud hulga intsidentsuskoalgebra definitsiooniga 3.5 – järelikult ühtivad osaliselt järjestatud hulga ning osaliselt järjestatud hulga kui kategooria intsidentsuskoalgebra definitsioonid.

Näide 3.29. Olgu M monoid. Defineerime kategooria $\mathcal{M}$, kus on üks objekt $\{*\}$ ning selle morfismideks on monoidi elemendid $m \in M$, kusjuures ühikmorfismiks on monoidi ühikelement. Kahe morfismi $m, n \in \mathcal{M}_1$ kompositsioon on defineeritud kui nende morfismidele vastavate elementide korrutise morfism ($m \circ n = mn$).

Olgu sellel kategoorial omadus 3.22. Siis on talle vastav monoid M selline, kus iga elemendi $m \in M$ jaoks on lõplik arv elemendipaare (a, b) , $a, b \in M$ nii, et $m = ab$. Kui defineerime monoidi M peal koalgebra C_M täpselt vastavalt kategooria $\mathcal{M}$ intsidentsuskoalgebrale, siis saame, et

$$\Delta_{C_M}(m) = \sum_{ab=m} a \otimes b, \quad \epsilon_{C_M}(m) = \begin{cases} 1, & \text{kui } m = 1, \\ 0 & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

Monoidi intsidentsuskoalgebras on seega definitsiooni 2.8 järgi konvolutsioon

$$(\phi * \psi)(m) = \sum_{ab=m} \phi(a)\psi(b)$$

mille ühik on monoidi intsidentsuskoalgebra ühik $\epsilon : C_M \rightarrow \mathbb{K}$.

On näha, et monoidi $(\mathbb{N}, \cdot)$ intsidentsuskoalgebra konvolutsioon vastab täpselt esimeses peatükis antud Dirichlet' konvolutsioonile. Lihtne on lisaks kontrollida järgmist tulemust, kus $[x, y]$ tähistab intervalli ekvivalentsiklassi kõnealuse seose järgi.

Lemma 3.16. *Vaatleme osaliselt järjestatud hulka $P := (\mathbb{N}, |)$. Seose 3.2 järgi vähendatud intsidentsuskoalgebra $C_P/\sim$ on isomorfne monoidi $M := (\mathbb{N}, \cdot)$ intsidentsuskoalgebraga C_M , kusjuures isomorfismiks on $\overline{[1, m]} \mapsto m$.*

Täpselt analoogse tulemuse saab tõestada ka $(\mathbb{N}_0, \leq)$ ja $(\mathbb{N}_0, +)$ jaoks.

Lemma 3.17. *Vaatleme osaliselt järjestatud hulka $P := (\mathbb{N}_0, \leq)$. Seose 3.2 järgi vähendatud intsidentsuskoalgebra $C_P/\sim$ on isomorfne monoidi $M := (\mathbb{N}_0, +)$ intsidentsuskoalgebraga C_M , kusjuures isomorfismiks on $\overline{[0, m]} \mapsto m$.*

Viited

- [1] T.M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer New York, 1998 (viidatud lehel [4](#)).
- [2] M.F. Atiyah ja I. G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley-Longman, 1969 (viidatud lehel [4](#)).
- [3] S. A. Joni ja G.-C. Rota. „Coalgebras and Bialgebras in Combinatorics“. *Studies in Applied Mathematics* 61 (1979), lk. 93–139 (viidatud lehel [33](#)).
- [4] J. Kock. „From Möbius inversion to renormalisation“. *Commun. Number Theory Phys.* 14.1 (2020), lk. 171–198. ISSN: 1931-4523 (viidatud leheküljed [3](#), [14](#), [18](#), [21](#), [24](#)).
- [5] T. Leinster. „Notions of Möbius inversion“ (2012). DOI: [10.48550/ARXIV.1201.0413](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1201.0413). URL: <https://arxiv.org/abs/1201.0413> (viidatud lehel [38](#)).
- [6] E. Riehl. *Category Theory in Context*. Dover Publications, 2017 (viidatud lehel [12](#)).
- [7] Gian-Carlo Rota. *Gian-Carlo Rota on Combinatorics. Introductory Papers and Commentaries*. Birkhäuser Boston, 1995 (viidatud lehel [36](#)).
- [8] E. Spiegel ja C. O'Donnell. *Incidence Algebras*. Taylor & Francis, 1997 (viidatud leheküljed [24](#), [33](#), [35](#)).
- [9] R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*. 2. väljaanne. Köide 1. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2011 (viidatud lehel [33](#)).
- [10] M.E. Sweedler. *Hopf Algebras*. W. A. Benjamin, 1969 (viidatud leheküljed [14](#), [16](#)).

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Johanna Maria Kirss,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose “Möbiuse funktsioonid intsidentsusalgebrates”, mille juhendaja on Ülo Reimaa, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Johanna Maria Kirss

10. mai 2022

Lihtlitsentsi pole tarvis allkirjastada.