Ueber

# Systeme höherer complexer Zahlen.

Eine

behufs Erlangung des Grades eines

**Doctors der reinen Mathematik**

der physiko-mathematischen Fakultät der Kaiserl. Universität Dorpat

vorgelegte

Abhandlung

von

**Theodor Molien.**

Ordentliche Opponenten:

Mag. **P. Kadik.** — Priv.-Doc. Mag. **G. Grofe.** — Prof. Dr. **A. Kneser.**

**Dorpat.**

Druck von C. Mattiesen.

1892.

Gedruckt mit Genehmigung der physiko-mathematischen Facultät.
Dorpat, den 31. August 1892.
Nr. 116. Prodecan: Dr. Arthur von Oettingen.



# Ueber Systeme höherer complexer Zahlen.

Von

Theodor Molien in Dorpat.

## Einleitung.

Vorliegende Abhandlung betrifft diejenigen Zahlensysteme, deren Zahlen dem associativen und commutativen Gesetz der Addition und dem associativen und beiderseitig distributiven Gesetz der Multiplication unterliegen.

Es handelt sich um solche Eigenschaften, denen gemäss eine Charakterisirung und Aufzählung der Zahlensysteme erfolgen kann: die Auffindung einer Normalform, aus der leicht die Gleichheit oder Verschiedenheit gegebener Zahlensysteme geschlossen werden kann, ferner die Möglichkeit, Zahlensysteme ähnlichen Aufbau's, in Categorien vereint, gemeinsamer Behandlung zu unterwerfen. Ein weiterer Ansatz zur Aufzählung schien entbehrlich, setzt ja die grosse Mannigfaltigkeit möglicher Formen überhaupt jedem Aufzählungsversuch seine Grenzen. Diese Stellungnahme ist um so berechtigter, wenn erreicht ist, dass Zahlensysteme, die wohlbekannt und vielbehandelt sind, sich in charakteristischer Weise unter den andern hervorheben. In der That thut dies eine Categorie von Zahlensystemen, die ich ursprüngliche nenne und zu denen nächst Hamilton's Quaternionen auch die Nonionen Sylvester's gehören.

Von einschneidender Bedeutung kann, wie ein besonderer Fall zeigt, die Deutung eines Zahlensystems werden. Herr Dedekind*) hat eine ganze Classe von Zahlensystemen mit commutativer Multiplication**) durch den Hinweis auf ihre Identität mit Zahlkörpern erledigt. Aus diesem Gesichtspunkt sind die Grundzahlen dieser Zahlensysteme gewöhnliche mehrdeutige Grössen. Gleichen Erfolg haben bisherige Deutungsversuche der allgemeinen Zahlensysteme nicht aufzuweisen, wenngleich durch sie wirksame Hilfsmittel aufgedeckt worden sind.

*) Dedekind, Erläuterungen zur Theorie der sogenannten allgemeinen complexen Grössen. Gött. Nachr. 1887, pg. 1 ff.

**) Betrachtet zunächst von Weierstrass, Zur Theorie der aus $n$ Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Gött. Nachr. 1884 pg. 395 ff.; sodann von Schwarz ebenda pg. 516, Dedekind dgl. 1885 pg. 141, Hölder 1886 pg. 241 Petersen dgl. 1887 pg. 489.

In erster Linie steht hier Herrn Cayley's Theorie der Matrices*). Ihrem Wesen nach ist diese eine Theorie der linearen Transformationen, legt aber den Nachdruck mehr auf die Schicksale der Substitutionscoefficienten als der Veränderlichen. Die Matrix bildet die Zusammenfassung der Coefficienten der Transformation. Die Matrix lässt sich in Folge der Operationsdefinitionen in doppelter Weise zu einem Zahlensystem in Beziehung setzen. Es giebt jede operative Verbindung von Matrices, deren Elemente gleichen linearen homogenen Relationen unterworfen sind, eine Matrix derselben Art. So lassen sich einerseits die unabhängigen Elemente solcher Matrices als Parameter einer Zahl eines complexen Zahlensystems betrachten, andererseits lässt sich aber auch ein vollständiges System linear unabhängiger Matrices der eben geschilderten Art als System der Grundzahlen eines complexen Zahlensystems auffassen. Herr Cayley hat ein solches System von 4 binären Matrices angegeben, das das gegenseitige Verhalten der vier Grundzahlen der Quaternionen zeigt.**) Bei sonstiger Gleichartigkeit beider Auffassungen besitzt die erste den Vorzug, dass sie für die Anwendung bequemer ist. — Auf einen besondern Satz aus der in Rede stehenden Abhandlung komme ich weiter unten zu sprechen.

Legt man den Nachdruck, statt auf die Matrix der Coefficienten, auf die lineare Transformation selbst, so bemerkt man, dass lineare Transformationen, die zu einem Zahlensystem Veranlassung geben, eine Gruppe bilden. Der erste Hinweis auf die Gruppeneigenschaft der Zahlen eines Systems ist wohl die vielgenannte Stelle bei Herrn Poincaré***). Ausführliche Darlegungen der Beziehungen von Zahlensystemen zu Transformationsgruppen sind insbesondere gegeben in 2 Abhandlungen der Herren Scheffers†) und Study††). Von Interesse ist noch ein fernerer Punkt. Die algebraische Form, in die die Grunddefinitionen der Eigenschaften complexer Zahlensysteme herkömmlicher Weise eingekleidet werden, geht auf die Fassung von Eigenschaften des gewöhnlichen complexen Systems und der Quaternionen zurück. Die Erkenntniss der allgemeinern Form, die der

*) Cayley, A memoir on the Theory of Matrices. Phil. Trans. vol. 148. 1858, pg. 17 ff. Erwähnt werden müssen auch: Laguerre, Sur le calcul des systèmes linéaires. Journ. de l'Ec. le pol. t. 25. 1867 und die Arbeit von Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. Crelle's Journ. Bd. 84. 1877.

**) S. hierzu Éd. Weyr, Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices. Prager Sitzungsber. 1887, pg. 616 ff.

***) Poincaré, Sur les nombres complexes. Comptes rendus t. 99, 1884, pg. 740.

†) Scheffers, Zur Theorie der aus $n$ Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Ber. d. Sächs. Ges. d. W. 1889, pg. 290 ff.

††) Study, Complexe Zahlen und Transformationsgruppen. Ber. d. Sächs. Ges. d. W. 1889, pg. 176 ff.



Addition vermöge des associativen und commutativen Gesetzes zukommt, ergiebt sich erst aus der Theorie der Transformationsgruppen. Es bildet aber, wie Herr Schur*) gezeigt hat, der üblich gewordene Ausdruck die „canonische Form“ des allgemeinen Ausdrucks.

Berechnungen und Aufzählungen von Zahlensystemen sind unternommen worden von B. Peirce**), von Herrn Study***) und von Herrn Scheffers†). Peirce giebt Tabellen von Zahlensystemen, nach den Anzahlen der Grundzahlen geordnet, erkennt übrigens die Unzulänglichkeit dieses Standpunktes ausdrücklich an. Zahlensysteme mit eindeutiger Division und ohne solche werden von ihm als gleichwerthig erachtet. Bei Herrn Study und Herrn Scheffers treten die Zahlensysteme ohne eindeutige Division, mehr den Forderungen der Gruppentheorie entsprechend, in den Hintergrund. Vollständig aufgezählt werden von Herrn Study alle Zahlensysteme mit 4 und weniger Einheiten, wodurch Lücken, die bei Peirce sich finden, ausgefüllt werden. Ich habe mehrfach Gelegenheit gehabt, den Werth dieser Tabellen schätzen zu lernen. Herr Scheffers geht einen Schritt weiter, insofern er Regeln sucht, mit Hilfe deren aus den Zahlensystemen mit geringerer Anzahl von Grundzahlen solche mit grösserer Anzahl von Grundzahlen herzuleiten sind. Die Methode ist geeignet, alle Zahlensysteme zu finden, aber der Nachweis ist ungenügend geführt; es hätte gezeigt werden sollen, dass auch diejenigen Bedingungen, die der Discussion nicht unterworfen worden sind, einander nicht widersprechen.††) Seine Eintheilung der Zahlensysteme in Kegelschnittsysteme und Nichtkegelschnittsysteme lässt sich übrigens wohl verwenden zu Zwecken, auf die ich sogleich komme.

Herr Lie†††) lenkt gelegentlich die Aufmerksamkeit auf Zahlen-

*) Schur, Zur Theorie der aus $n$ Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen, Math. Ann. Bd. 33. 1888, pg. 99 ff.

**) B. Peirce, Linear Associative Algebra. Wash. 1870 und Am. Journ. of Math. vol. IV. 1881, pg. 97 ff.

***) Study, Zur Theorie der aus $n$ Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Gött. N. 1889, pg. 237 ff.

†) Scheffers, Berechnung von Zahlensystemen. Ber. d. Sächs. Ges. d. W. 1889, pg. 400 ff.

††) In einer neuern Abhandlung: Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen, in den Math. Ann., behandelt Herr Scheffers das gleiche Thema. Die Theorie der Nichtkegelschnittsysteme ist weiter als früher durchgeführt. — Seinen frühern Beweis aber, dass jedes „Kegelschnittsystem“ auch „Quaternionsystem“ sei, erklärt Hr. Scheffers für ungenügend. Die Ursache des Misslingens dieses Beweises liegt darin, dass Hr. Scheffers den nicht richtigen Satz zu beweisen sucht, jede Kegelschnittuntergruppe sei Untergruppe einer Quaternionuntergruppe. (Mai 1892.)

†††) Lie, Ueber irreductible Berührungstransformationsgruppen. Ber. d. Sächs. Ges. d. W. 1889, pg. 326.

systeme, deren zugeordnete Gruppe $G_n$ eine einfache Untergruppe $G_{n-1}$ besitzt. Diess sind dieselben Zahlensysteme, die ich im folgenden *ursprüngliche Zahlensysteme* nenne. Ich gehe allerdings von einer andern Definition aus; ich charakterisire sie dadurch, dass, wie auch die Productgleichungen eines solchen Zahlensystems transformirt werden mögen, unter diesen niemals die Productgleichungen eines Zahlensystems mit weniger Grundzahlen anzutreffen sind. Herr Lie hat bemerkt, dass solche Zahlensysteme mit 5, 6, 7, 8 Grundzahlen nicht existiren.

Meine Untersuchungen ergeben nun den Satz, *dass jedes ursprüngliche Zahlensystem nur eine quadratische Anzahl von Grundzahlen besitzt*, und weiter, *dass die einem solchen zugeordnete Gruppe identisch mit der Parametergruppe der allgemeinen linearen und homogenen Gruppe ist*. In anderer Ausdrucksweise heisst dies: jedes ursprüngliche Zahlensystem wird durch eine quadratische Matrix repräsentirt, deren Elemente von einander unabhängig sind.

Ein weiteres Hauptergebniss meiner Arbeit besteht in der Auffindung einer *Normalform* für jedes Zahlensystem. Diese Normalform gestattet *alle Zahlensysteme* derart *in Classen einzutheilen*, dass alle, unendlich vielen, Systeme jeder Classe durch ein System der Classe bestimmt sind. *Jeder Classe gehört ein einziges nach Scheffers'scher Terminologie „Nichtkegelschnittsystem" an, so dass die Nichtkegelschnittsysteme Repräsentanten aller Classen von Zahlensystemen werden.* In dieser Classification repräsentirt das gewöhnliche Zahlensystem die Classe der ursprünglichen Zahlensysteme.

Uebrigens muss ich bemerken, dass ich Herrn Lie's Definition der ursprünglichen Zahlensysteme, sowie den Ausdruck „Nichtkegelschnittsystem" nur an dieser Stelle gebrauche, zur grösseren Verdeutlichung meiner Resultate für diejenigen, denen diese Terminologie vertraut ist; im Verlaufe meiner Arbeit komme ich an keiner Stelle auf diese Ausdrucksform und die damit verbundenen Vorstellungen zurück.

Ich habe eine Eintheilung meiner Abhandlung in vier Abschnitte vollzogen, von denen der erste die allgemeine Discussion der Productgleichungen eines Zahlensystems bezweckt, während der zweite der Hauptsache nach die ursprünglichen Systeme, der dritte die zu Zahlensystemen gehörigen Gruppen und der vierte die Matrixdarstellung behandelt. Eingeleitet wird jeder Abschnitt von einem Paragraphen, der ein Résumé bereits bekannter Theorien bildet. Es schien diess Verfahren am geeignetsten die Einheitlichkeit der Untersuchungen zu wahren. Den Eingang des ersten Abschnitts bildet eine in der herkömmlichen Form gehaltene Darstellung der Definitionen und wesentlichsten Eigenschaften der Zahlensysteme; im dritten Abschnitt ist über das unentbehrlichste aus Herrn Lie's Theorie der stetigen Transformationsgruppen referirt worden, im vierten über die Haupteigenschaften der Matrices. Etwas mehr habe ich über den zweiten Abschnitt zu sagen. Von den Sätzen des ersten Paragraphen dieses Abschnitts ist der erste von Herrn Cayley in der schon genannten Abhandlung vom Jahre 1858 ohne Beweis mitgetheilt worden; Beweise desselben sind hernach von Herrn Sylvester*), Herrn Ed. Weyr**) und andern gegeben worden. Der zweite Satz geht, wie ich glaube, auf Herrn Killing***) zurück. Auf Grund dieser Sätze ergiebt sich für den zweiten Abschnitt als Fragestellung ein Eliminationsproblem, ähnlich demjenigen, das sich Herr Killing†) gestellt hat. Der Zweck der Entwicklungen ist, auf Grund von Irreductibilitätsbetrachtungen zu erweisen, dass ein ursprüngliches Zahlensystem eine quadratische Anzahl von Grundzahlen besitzt. Dann ist der weitere Satz über die ursprünglichen Zahlensysteme eine sehr einfache Folgerung aus dieser Eigenschaft. In den Bezeichnungen weiche ich an einigen Stellen von Herrn Killing ab. Ich habe mir gestattet, eine von ihm „charakteristische Gleichung" genannte Gleichung nach seinem Namen zu benennen und jene Bezeichnung auf zwei andere Gleichungen anzuwenden. Ausserdem sollte der Name „Ranggleichung" nicht so sehr an Herrn Killing's Rangbegriff erinnern; in dem von mir gemeinten Sinne wäre der Rang eines Zahlensystems identisch mit der Anzahl der linear unabhängigen Potenzen einer Zahl.



## Inhalt.



*) Sylvester, Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires. CR. 94, 1883, pg. 55.

**) Ed. Weyr, O základní větě v theorii matric. Prager Sitzungsber. 1884, pg. 148 ff.

***) Killing, Die Zusammensetzung der endlichen stetigen Transformationsgruppen, Math. Ann. 31. 1888, insbesondere pg. 271 ff.

†) Killing, l. c. pg. 259.

## I. Abschnitt.

## Zahlensysteme und bilineare Formen.

### § 1.

### Definition der Zahlensysteme und unmittelbare Folgerungen.

Sind $e_1 \dots e_n$ die $r$ Grundzahlen, aus denen ein Zahlensystem hergeleitet wird, so wird jede Zahl $x$ des Systems in folgender Weise geschrieben:

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n. \tag{1}$$

Die Grössen $x_1 \dots x_n$ sind gewöhnliche, reelle oder complexe Zahlen; sie mögen die Parameter der Zahl $x$ heissen. Als Basis des Zahlensystems werde die Gesammtheit der Zahlen $e_1 \dots e_n$ bezeichnet.

*Addition* zweier gegebener complexer Zahlen ist definirt als Bildung einer complexen Zahl, deren Parameter die Summen der entsprechenden Parameter der vorgelegten Zahlen sind. Ist also

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, \\ y &= y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n, \end{aligned} \tag{2}$$

so ist ihre Summe:

$$x + y = (x_1 + y_1)\, e_1 + \cdots + (x_n + y_n)\, e_n. \tag{3}$$

*Subtraction* ist die zur Addition inverse Operation; es ist

$$x - y = (x_1 - y_1)\, e_1 + \cdots + (x_n - y_n)\, e_n. \tag{4}$$

Multiplication einer complexen Zahl mit einer gewöhnlichen Zahl ist die Multiplication aller Parameter der complexen Zahl mit der gewöhnlichen Zahl.

In Stelle von $e_1 \dots e_n$ können jede beliebigen $n$ von einander linear unabhängigen Zahlen $e_1' \dots e_n'$ des Systems als Grundzahlen gewählt werden.



Sind

$$e_i' = \sum_k \alpha_{ki} e_k \quad (i, k = 1 \dots n) \tag{5}$$

$n$ derartige Zahlen, so verschwindet die Determinante

$$|\alpha_{ki}| \qquad (i, k = 1 \dots n)$$

nicht. Werden diese als Grundzahlen gewählt, so erhält die Zahl

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

die Form

$$y_1 e_1' + \cdots + y_n e_n'$$

und die Parameter $x_1 \cdots x_n$ lassen sich durch $y_1 \dots y_n$ in folgender Weise darstellen:

$$x_i = \sum_k \alpha_{ik} y_k \qquad (i, k = 1 \cdots n). \tag{6}$$

Eine Veränderung der Basis eines Zahlensystems ist also gleichbedeutend mit einer linearen Transformation der Parameter jeder dem Zahlensystem angehörigen Zahl. —

Bezüglich der *Bildung eines Productes aus complexen Zahlen* gilt *das distributive Gesetz:*

$$(x + y)(u + v) = xu + xv + yu + yv \tag{7}$$

und *das associative Gesetz*

$$(xu) \cdot v = x \cdot (uv), \tag{8}$$

während vom Bestehen eines commutativen Gesetzes ausdrücklich abgesehen wird.

Das distributive Gesetz der Multiplication verlangt, dass das Product zweier complexer Zahlen eine Zahl sei, deren Parameter sich als bilineare Formen darstellen, die mit Hilfe constanter Grössen aus den beiden Reihen der Parameter der Factoren gebildet sind. Setzt man

$$x' = xu, \tag{9}$$

so lassen sich $x_1' \dots x_n'$ durch die Gleichungen

$$x_i' = \sum_{k,l} a^i_{kl} x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \dots n) \tag{I}$$

darstellen*), die die Productgleichungen des Zahlensystems heissen mögen. Das associative Gesetz der Multiplication findet seinen Ausdruck in den Bedingungsgleichungen

$$\sum_s a^i_{sm} a^s_{kl} = \sum_s a^i_{ks} a^s_{lm} \qquad (i, k, l, m, s = 1 \dots n), \tag{II}$$

*) Der eine der 3 Indices jedes Coefficienten ist nach oben geschrieben worden. Dass später gelegentlich symbolische Potenzen in ebenderselben Weise geschrieben werden, wird hoffentlich zu Verwechselungen keine Veranlassung geben.

denen die constanten Coefficienten der Gleichungen (I) unterworfen sind.

Die *Division* als zur Multiplication inverse Operation wird durch Auflösung der Gleichungen (I) nach $x_1 \dots x_n$ oder nach $u_1 \dots u_n$ vollzogen; *damit dieselbe im Allgemeinen eindeutig sei, ist es nothwendig, dass keine der beiden Determinanten*

$$\text{(III)} \qquad \left|\sum_l a^i_{kl} u_l\right|, \quad \left|\sum_k a^i_{kl} x_k\right| \qquad (i,\ k,\ l = 1 \dots n)$$

*identisch verschwinde.* —

Der Begriff einer *Potenz* als eines Products einer Anzahl gleicher Factoren lässt sich zugleich mit der Bezeichnungsweise auf complexe Zahlen übertragen. So lässt sich schreiben:

$$x^2 = x \cdot x$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x^\nu = x^{\nu-1} \cdot x \qquad (\nu = 3,\ 4 \dots)$$

und es gilt die Gleichung:

$$\text{(10)} \qquad x^{\mu+\nu} = x^\mu \cdot x^\nu.$$

Demzufolge werden auch lineare Formen, gebildet aus den Potenzen einer Zahl $x$, so mit einander sich multipliciren lassen, als wären sie ganze rationale Functionen einer gewöhnlichen veränderlichen Grösse. —

Aus der Forderung der Eindeutigkeit der Division folgt:

Satz 1. *In jedem Zahlensystem giebt es eine feste Zahl $u^0$, die jede Gleichung*

$$\text{(11)} \qquad x = x u^0$$

*und ebenso jede Gleichung*

$$\text{(12)} \qquad x = u^0 x$$

*befriedigt.*

Denn ist die Zahl $z$ so beschaffen, dass keine der Determinanten (III) für dieselbe verschwindet, so muss diejenige Zahl $u^0$, die der Gleichung

$$\text{(13)} \qquad z = z u^0$$

genügt, auch jeder Gleichung

$$x = x u^0$$

genügen, da sich immer eine Zahl $y$ finden lässt, dass $x = yz$ wird. Desgleichen folgt aus (14) durch Multiplication mit einer beliebigen Zahl $x$:

$$z x = z u^0 x$$

und wenn durch $z$ dividirt wird:

$$x = u^0 x.$$



Schreibt man die Zahl $u^0$:

$$u^0 = (u^0)_1 e_1 + \cdots + (u^0)_n e_n,$$

so bestehen die beiden Gleichungensysteme:

$$x_i = \sum_{k,l} a^i_{kl} x_k (u^0)_l \qquad (i,\ k,\ l = 1 \dots n)$$

$$x_i = \sum_{k,l} a^i_{kl} (u^0)_k x_l \qquad (i,\ k,\ l = 1 \dots n)$$

unbeschränkt. Dies giebt das

Corollar. *Die Parameter der Zahl $u^0$ befriedigen die beiden Systeme von Gleichungen*

$$\text{(14)} \qquad \begin{aligned} \sum_l a^i_{kl} (u^0)_l &= \delta_{ik} \qquad (i,\ k,\ l = 1 \dots n), \\ \sum_l a^i_{lk} (u^0)_l &= \delta_{ik} \qquad (i,\ k,\ l = 1 \dots n). \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\delta_{ik}$, wie üblich die Null oder Eins, je nachdem $i$ und $k$ verschieden oder gleich sind.

Kann durch die Zahl $u$ dividirt werden, so giebt es eine Zahl $\bar{u}$, die der Gleichung

$$\text{(15)} \qquad \bar{u} \cdot u = u^0$$

genügt; diese mag als *zu $u$ reciproke Zahl* bezeichnet werden. Sie genügt auch der Gleichung

$$\text{(16)} \qquad u \cdot \bar{u} = u^0,$$

wie man sieht, wenn man (15) mit $u$ einerseits multiplicirt, und andererseits dividirt.

Die Zahlen $u^0$ und $\bar{u}$ lassen sich füglich auch als nullte und erste negative Potenz von $u$ betrachten. —

Die Darlegungen dieses einleitenden Paragraphen lassen erkennen, wodurch die Unterschiede zwischen verschiedenen Zahlensystemen bedingt sind. Charakteristisch für ein Zahlensystem sind die beständigen Grössen, mit Hilfe deren das Product zweier Zahlen des Systems gebildet wird, also die Coefficienten der mit (I) bezeichneten Gleichungen. Es bildet jedes System von Gleichungen (I), dessen Coefficienten den Bedingungen (II) und (III) unterworfen sind, das System der Productgleichungen eines Zahlensystems. Gleichheit der Productgleichungen zweier Zahlensysteme bedingt, wofern nicht ausdrücklich eine andere Unterscheidung vorliegt, die Gleichheit der Zahlensysteme selbst.

Eine Veränderung der Basis eines Zahlensystems bewirkt eine lineare Transformation der Parameter jeder dem Zahlensystem angehörigen Zahl; auf die Productgleichungen des Zahlensystems wirkt sie derart, dass die drei Reihen der Parameter $x_1' \ldots x_n'$; $x_1 \ldots x_n$; $u_1 \ldots u_n$ gleichzeitig einer und derselben linearen Transformation unterworfen werden.

Betrachtet man auch solche Zahlensysteme als gleich, deren Productgleichungen durch Aenderung der Basis des einen Systems gleich werden, so lässt sich die Aufgabe, alle Zahlensysteme anzugeben, dahin formuliren, dass alle Systeme von Gleichungen (I), deren Coefficienten den Bedingungen (II) und (III) unterliegen und die durch lineare Transformationen, die gleichzeitig auf alle drei Reihen von Parametern ausgeführt werden, nicht in einander übergehen, angegeben werden sollen.

Um diese Aufgabe lösen zu können, hat man eine Normalform des Systems der Gleichungen (I) zu definiren; eine solche auf Grund der allgemeinen Eigenschaften der Zahlensysteme aufzufinden, damit beschäftigt sich die ganze folgende Untersuchung. Es zeigt sich, dass die schliesslich gefundene Normalform allgemein genug ist, um die mühelose Aufstellung aller Zahlensysteme zu ermöglichen.

## § 2.

## Die begleitenden Zahlensysteme.

Jedes System von Gleichungen

$$x_i' = \sum_{k,l} a_{kl}^i x_k u_l \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots n), \tag{1}$$

dessen Coefficienten den Bedingungen

$$\sum_s a_{sm}^i a_{kl}^s = \sum_s a_{ks}^i a_{lm}^s \qquad (i,\ k,\ l,\ m,\ s = 1 \ldots n) \tag{2}$$

genügen und so beschaffen sind, dass keine der Determinanten

$$\left|\sum_l a_{kl}^i u_l\right|, \quad \left|\sum_k a_{kl}^i x_k\right| \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots n) \tag{3}$$

identisch verschwindet, lässt sich als System der Productgleichungen eines Zahlensystems betrachten und kann in diesem Sinne als zu einem Zahlensysteme gehörig bezeichnet werden. Diese Bemerkung veranlasst eine Begriffsbildung mit Hilfe folgenden Satzes:

Satz 2. *Lässt sich die Basis eines Zahlensystems so wählen, dass die r ersten Parameter des Productes zweier Zahlen bilinearen Formen gleich sind, die ausschliesslich mit Hilfe der r ersten Parameter der Factoren gebildet sind, so gehören diese r Gleichungen einem Zahlensystem zu.*

Denn falls die Productgleichungen des gegebenen Zahlensystems die Form



$$\begin{aligned} x_i' &= \sum_{k,l} a_{kl}^i x_k u_l && (i,\ k,\ l = 1 \ldots r) \\ x_{r+i}' &= \sum_{k,l} a_{kl}^{r+i} x_k u_l && \begin{pmatrix} i = 1 \ldots n-r \\ k,\ l = 1 \ldots n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

besitzen, so gehen die Gleichungen (2) für $i < r + 1$ unmittelbar in die Gleichungen

$$\sum_s a_{sm}^i a_{kl}^s = \sum_s a_{ks}^i a_{lm}^s \qquad (i,\ k,\ l,\ m,\ s = 1 \ldots r)$$

über. Desgleichen ist die eindeutige Auflösbarkeit der $r$ ersten Gleichungen (4) nothwendige Bedingung der eindeutigen Auflösbarkeit des Systems aller Gleichungen (4). Die $r$ ersten Gleichungen (4) gehören somit zu einem Zahlensystem mit $r$ Grundzahlen. Construirt man dieses Zahlensystem, so ist jede Zahl desselben durch eine Zahl des gegebenen Systems eindeutig bestimmt.

*Ein solches Zahlensystem soll als ein das gegebene System begleitendes bezeichnet werden.*

Es ergeben sich aus dieser Definition unmittelbar folgende Bemerkungen:

1) Besitzt ein Zahlensystem, das ein gegebenes Zahlensystem begleitet, ebenso viel Grundzahlen wie dieses, so ist es mit ihm identisch.

2) Ein Zahlensystem, das ein begleitendes System eines gegebenen Zahlensystems begleitet, begleitet auch das gegebene Zahlensystem.

3) Unter den begleitenden Systemen eines jeden Zahlensystems muss es ein solches geben, das von keinem weitern System ausser von sich selbst begleitet wird.

*Jedes Zahlensystem, das, ausser sich selbst, kein begleitendes Zahlensystem besitzt, soll ein ursprüngliches Zahlensystem genannt werden.* —

So lange ein Zahlensystem noch in beliebiger Form vorliegt, sind die Parameter einer Zahl eines begleitenden Systems lineare Formen der Parameter der entsprechenden Zahl des gegebenen Systems. Sind bei einem gegebenen Zahlensysteme mehrere begleitende Systeme vorhanden, so sind die Beziehungen letzterer zu einander in's Auge zu fassen. Diese sind Gegenstand folgenden Satzes:

Satz 3. *Bestehen zwischen den Parametern der Zahlen zweier begleitender Zahlensysteme eines gegebenen Systems genau q lineare Relationen, so besitzen die beiden begleitenden Systeme ein gemeinsames begleitendes System mit q Grundzahlen.*

Ist die Basis des gegebenen Zahlensystems beliebig gewählt, und besitzt das eine begleitende Zahlensystem $r$ Grundzahlen, das andere

$s+q$ Grundzahlen, so seien die Parameter der der Zahl $x$ entsprechenden Zahl des einen begleitenden Systems die linearen Formen

$$(5) \qquad y_i = \sum_k \alpha_{ik} x_k \qquad (i = 1 \dots r;\ k = 1 \dots n)$$

und die Parameter der entsprechenden Zahl des andern begleitenden Systems:

$$(6) \qquad z_j = \sum_k \beta_{jk} x_k \qquad (j = 1 \dots s+q;\ k = 1 \dots n).$$

Bestehen nun die $q$ linearen Relationen

$$(7) \quad \sum_i \mu_{hi} y_i = \sum_j \nu_{hj} z_j \quad (h = 1 \dots q;\ i = 1 \dots r;\ j = 1 \dots s+q)$$

zwischen den Parametern $y_1 \dots y_r$ und $z_1 \dots z_{s+q}$, so sind die $q$ linearen Formen von $x_1 \dots x_n$

$$\sum_{i,k} \mu_{hi} \alpha_{ik} x_k \qquad (h = 1 \dots q;\ i = 1 \dots r;\ k = 1 \dots n)$$

gleichzeitig zur Bildung von $y_1 \dots y_r$ und $z_1 \dots z_{s+q}$ verwandt worden. Man kann dann die Basis des Zahlensystems so wählen, dass diese Formen gerade $x_1 \dots x_q$ werden; die übrigen zur Bildung von $y_1 \dots y_r$ gebrauchten Formen können, als von jenen unabhängig als Parameter $x_{q+1} \dots x_r$ und die übrigen zur Bildung von $z_1 \dots z_{s+q}$ verwandten, als von den bisherigen ebenfalls linear unabhängig als Parameter $x_{r+1} \dots x_{r+s}$ gewählt werden.

Dann sind von den Productgleichungen des Zahlensystems

$$x_i' = \sum_{k,l} a^i_{kl} x_k u_l \qquad (i,\ k,\ l = 1 \dots n)$$

die $r$ ersten Gleichungen Productgleichungen des einen begleitenden Zahlensystems: es sind also $x_1' \dots x_r'$ bilineare Formen nur von $x_1 \dots x_r$ und $u_1 \dots u_r$. Desgleichen bilden die $q$ ersten Gleichungen zusammen mit der $r+1^{\text{ten}}$ bis zur $r+s^{\text{ten}}$ Gleichung die Productgleichungen des andern begleitenden Systems, es sind also $x_1 \dots x_q'$, $x_{r+1}' \dots x_{r+s}'$ bilineare Formen nur von $x_1 \dots x_q$, $x_{r+1} \dots x_{r+s}$ und $u_1 \dots u_q$, $u_{r+1} \dots u_{r+s}$. Dann sind aber $x_1' \dots x_q'$ nur aus $x_1 \dots x_q$ und $u_1 \dots u_q$ gebildet; es definiren also die $q$ ersten Productgleichungen des Zahlensystems ein begleitendes System und zwar ein solches, dass jedes der beiden gegebenen begleitenden Systeme begleitet.

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Satz 4. *Haben zwei begleitende Systeme eines gegebenen Zahlensystems ein gemeinsames begleitendes System mit $q$ Grundzahlen, doch keines mit mehr als $q$ Grundzahlen, so bestehen zwischen den Parametern entsprechender Zahlen derselben genau $q$ lineare Relationen.*



Es haben die entsprechenden Zahlen der beiden gegebenen begleitenden Systeme die $q$ Parameter der entsprechenden Zahl des gemeinsamen begleitenden Systems gemein, wodurch $q$ Relationen bereits gegeben sind; sollten ausser diesen noch weitere Relationen vorhanden sein, so liesse sich nach dem vorigen Satze ein gemeinsames begleitendes System mit mehr als $q$ Grundzahlen finden, was gegen die Voraussetzung ist.

Im Speciellen hat man

Corollar: *Haben zwei begleitende Systeme eines Zahlensystems kein gemeinsames begleitendes System, so sind die Parameter entsprechender Zahlen derselben linear von einander unabhängig.* —

Man kann des weitern das gegenseitige Verhalten dreier oder mehrer begleitender Systeme betrachten; doch ist es für die nächsten Zwecke überflüssig, mehr zu zeigen als die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Satz 5. *Haben von mehreren begleitenden Systemen eines Zahlensystems keine zwei ein begleitendes System gemein, so sind die Parameter entsprechender Zahlen aller dieser Systeme von einander linear unabhängig.*

Es seien $x_1 \dots x_r$ die Parameter der der Zahl $x$ entsprechenden Zahl eines der begleitenden Systeme, $x_{r+1} \dots x_s$ die der entsprechenden Zahl eines andern dieser begleitenden Systeme. Setzt man dann $x' = xu$, so wird jede lineare Form von $x_1' \dots x_s'$ die Summe einer bilinearen Form von $x_1 \dots x_r$, $u_1 \dots u_r$ und einer bilinearen Form von $x_{r+1} \dots x_s$, $u_{r+1} \dots u_s$ sein. Für ein drittes begleitendes System seien $y_1 \dots y_q$ die Parameter derjenigen Zahl, die der Zahl $x$ entspricht; es sind also $y_1 \dots y_q$ lineare Formen von $x_1 \dots x_n$. Ersetzt man in irgend einer linearen Form von $y_1 \dots y_q$ die Zahl $x$ durch die Zahl $x' = xu$, so geht diese Form in eine bilineare Form von $y_1 \dots y_q$ und $v_1 \dots v_q$ über, wo $v_1 \dots v_q$ die Parameter der der Zahl $u$ entsprechenden Zahl sind; diese bilineare Form ist zugleich als bilineare Form von $x_1 \dots x_n$ und $u_1 \dots u_n$ darstellbar. Dadurch dass für $u$ irgend eine bestimmte Zahl gewählt wird, wird die bilineare Form wieder eine lineare Form von $x_1 \dots x_n$ oder $y_1 \dots y_q$.

Sollte es eine lineare Form von $y_1 \dots y_q$ geben, die als lineare Form blos von $x_1 \dots x_r$ oder blos von $x_{r+1} \dots x_s$ sich darstellen lässt, so besässe nach dem 3. Satz das dritte begleitende System mit einem der beiden ersten begleitenden Systeme ein gemeinsames begleitendes System. Soll dies aber nicht stattfinden, so liesse sich doch noch denken, dass irgend eine lineare Form von $y_1 \dots y_q$ durch $x_1 \dots x_s$ darstellbar sei. Ersetzt man dann $x$ durch das Product $xu$, so geht diese lineare Form in die Summe einer bilinearen Form von

$x_1 \dots x_r;\ u_1 \dots u_r$ und einer bilinearen Form von $x_{r+1} \dots x_s;\ u_{r+1} \dots u_s$ über. Man kann dann $u$ so wählen, dass $u_{r+1} \dots u_s$ verschwinden. Es wird dann die bilineare Form zu einer linearen Form nur von $x_1 \dots x_r$ und diese ist zugleich lineare Form von $y_1 \dots y_q$. Dadurch wäre aber wiederum ein gemeinsames begleitendes System des ersten und dritten begleitenden Systems nachgewiesen; damit kein solches vorhanden sei, müssen $y_1 \dots y_q$ von $x_1 \dots x_s$ sonach linear unabhängig sein. Damit ist der Satz für drei begleitende Systeme bewiesen; man erkennt, dass durch Wiederholung derselben Schlussweise derselbe leicht auf mehr als drei begleitende Systeme erstreckt werden kann. —

Insbesondere besitzt dieser Satz Bedeutung für die begleitenden *ursprünglichen* Systeme eines Zahlensystems; *dies sind diejenigen begleitenden Systeme, die nach einer oben angegebenen Definition ausser sich selbst keine weiteren begleitenden Systeme besitzen.* Gemäss dem Satz 5 sind die Parameter der der Zahl $x$ entsprechenden Zahlen aller dieser Systeme linear unabhängig von einander. Man hat also zum Satz 5 das Corollar:

Corollar. *Die Basis eines jeden Zahlensystems kann so gewählt werden, dass die $r_1$ ersten Productgleichungen die Productgleichungen eines der begleitenden ursprünglichen Systeme werden, die $r_2$ folgenden die eines zweiten und so fort, bis unter den Productgleichungen des gegebenen Systems sich die Productgleichungen eines jeden begleitenden ursprünglichen Systems vorfinden.*

Die Kenntniss der begleitenden ursprünglichen Systeme ist nothwendig für die Aufsuchung aller begleitenden Systeme; sie ist auch wichtig für die Untersuchung des Zahlensystems selbst.

Der nächste Paragraph wird die Kriterien bringen, aus denen geschlossen werden kann, ob ein Zahlensystem ursprünglich ist oder nicht.

## § 3.

### Formen mit Polareigenschaft.

Eine lineare Form der Parameter der Zahl $x'$:

(1) $$g(x') = g_1 x_1' + \cdots + g_n x_n'$$

geht, wenn $x'$ durch das Product der Zahlen $x$ und $u$ ersetzt wird, in eine bilineare Form

(2) $$g(xu) = \sum_{i,k,l} g_i a_{kl}^i x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \dots n)$$

der Parameter $x_1 \dots x_n$ und $u_1 \dots u_n$ über. Die beiden Formen (1) und (2) bestimmen einander gegenseitig; sie sollen als einander entsprechende Formen bezeichnet werden; *jede der beiden werde als eine dem Zahlensystem*

$$x_i' = \sum_{k,l} a_{kl}^i x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \dots n)$$

*entstammende Form bezeichnet.*

Da eine lineare Transformation von $x_1' \dots x_n'$ nichts anderes als eine Aenderung der Basis des Zahlensystems ist, so wird eine bilineare Form, die einem Zahlensystem entstammt, diese Eigenschaft beibehalten, wenn beide Reihen ihrer Veränderlichen gleichzeitig einer und derselben linearen Transformation unterworfen werden. —

Werden in der Form

$$g(xu) = \sum_{i,k,l} g_i a_{kl}^i x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \dots m)$$

die Grössen $g_1 \dots g_n$ so gewählt, dass:

(3) $$\sum_i g_i (a_{kl}^i - a_{lk}^i) = 0 \qquad (i, k, l = 1 \dots n)$$

ist, so bildet die Form (2) die Polare einer quadratischen Form; sie werde dann als *dem Zahlensystem entstammende* ***Form mit Polareigenschaft*** bezeichnet. Discriminante der Form mit Polareigenschaft werde die in Gestalt einer Determinante $n^{\text{ten}}$ Grades geschriebene Discriminante derjenigen quadratischen Form genannt, deren Polare die Form mit Polareigenschaft bildet.

Zunächst ist zu beweisen:

Satz 6. *Jedem Zahlensystem entstammt mindestens eine Form mit Polareigenschaft.*

Die Form

(4) $$\sum_{i,k,l,s} a_{si}^i a_{kl}^s x_k u_l \qquad (i, s, k, l = 1 \dots n)$$

ist eine solche; dies folgt unmittelbar aus den Gleichungen II:

$$\sum_s a_{sm}^i a_{kl}^s = \sum_s a_{ks}^i a_{lm}^s \qquad (i, k, l, m, s = 1 \dots n)$$

wenn $m = i$ gesetzt und über $i$ summirt wird. Dass die Form (4) nicht identisch verschwindet, sieht man ein, wenn man $xu = u^0$ setzt. Nach dem Corollar des Satzes (1) ist:

$$\sum_k a_{kl}^i (u^0)_k = \delta_{il} \qquad (i, k, l = 1 \dots n);$$

es wird also für $xu = u^0$ die Form (4) den Werth $n$ erhalten. —

Die einem Zahlensystem entstammende bilineare Form $g(xu)$ ist eine lineare Form der Parameter von $xu$. Ersetzt man die Zahl $u$ durch das Product $vw$, so entsteht aus der Form eine trilineare Form

$$(5) \qquad g(x\,vw).$$

Diese kann einerseits als bilineare Form der Parameter von $x$ und $vw$, anderseits als die nämliche bilineare Form der Parameter von $xv$ und $w$ betrachtet werden, zufolge des associativen Gesetzes der Multiplication. Es ist also

$$(6) \qquad g(x\,.\,vw) = g(xv\,.\,w).$$

Besitzt die Form $g(xu)$ Polareigenschaft, so folgt hieraus, dass die trilineare Form (5) bei den cyklischen Vertauschungen von $x, v, w$ ungeändert bleibt, insbesondere die Gleichheit der Formen

$$(7) \qquad g(x\,.\,vw) = g(w\,.\,xv) = g(v\,.\,wx). \text{ --}$$

Die Gesammtheit aller einem Zahlensystem entstammenden Formen mit Polareigenschaft wird durch Auflösung der Gleichungen (3) nach $g_1 \ldots g_n$ gewonnen. Da nun auch den begleitenden Systemen des gegebenen Zahlensystems Formen mit Polareigenschaft entstammen und letztere in jener Gesammtheit enthalten sind, so wird die Beziehung einer bestimmten Form mit Polareigenschaft zu den begleitenden Systemen des näheren zu untersuchen sein.

— Es sei $g(xu)$ eine einem gegebenen Zahlensystem entstammende Form mit Polareigenschaft; die Unterdeterminanten $n-r-1^{\text{ter}}$ Ordnung ihrer Discriminante mögen sämmtlich verschwinden, ohne dass es alle Unterdeterminanten der nächst höheren Ordnung thun. Dann kann durch gemeinsame lineare Transformation von $x_1 \ldots x_n$ und $u_1 \ldots u_n$ die Form mit Polareigenschaft in die Gestalt:

$$(8) \qquad g(xu) = \sum_{k,l} g_{kl} x_k u_l \qquad (k, l = 1 \ldots r)$$

gebracht werden. Die damit verbundene Basisänderung möge die Productgleichungen des Zahlensystems in die Form

$$(9) \qquad x_i' = \sum_{k,l} a^i_{kl} x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

gebracht haben. Ersetzt man in der Form mit Polareigenschaft (8) $u$ durch $vw$, so folgt aus den Gleichungen (7) einerseits

$$(10) \qquad \sum_{k,l} g_{kl} x_k u_l = \sum_{k,l} g_{kl} v_k (wx)_l \qquad (k, l = 1 \ldots r)$$

und andererseits:

$$(11) \qquad \sum_{k,l} g_{kl} x_k u_l = \sum_{k,l} g_{kl} w_k (xv)_l \qquad (k, l = 1 \ldots r).$$



Setzt man nun, mit $G_{kl}$ die Adjuncte von $g_{lk}$ in der Determinante $|g_{kl}|\,(k, l = 1 \ldots r)$ bezeichnend,

$$x^{(i)} = \sum_k G_{ik} e_k, \qquad (i, k = 1 \ldots r),$$

so wird

$$g(x^{(i)} u) = u_i \qquad (i = 1 \ldots r).$$

Aus der Gleichung (10) folgt dann, dass $u_1 \ldots u_r$ lineare Formen von $v_1 \ldots v_r$, aus der Gleichung (11), dass sie lineare Formen von $w_1 \ldots w_r$ sind. Die $r$ ersten Productgleichungen für $u = vw$ sind also

$$(12) \qquad u_i = \sum a^i_{kl} v_k w_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots r);$$

sie zeigen, dass das gegebene Zahlensystem ein begleitendes System mit $r$ Grundzahlen besitzt.

*Dies begleitende System mag* mit Beziehung auf seine Herleitung *als ein aus der Form mit Polareigenschaft erzeugtes System bezeichnet werden.* Das Resultat dieser Ueberlegung als Satz gefasst, lautet:

Satz 7. *Verschwinden sämmtliche Unterdeterminanten $n-r-1^{\text{ter}}$ Ordnung der Discriminante einer einem gegebenen Zahlensystem entstammenden Form mit Polareigenschaft, ohne dass alle Unterdeterminanten $n-r^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden, so erzeugt die Form mit Polareigenschaft ein begleitendes System mit $r$ Grundzahlen.*

Hierzu kommt als Ergänzung:

Satz 8. *Jede Form mit Polareigenschaft entstammt dem von ihr erzeugten begleitenden System.*

Denn die Form (8) ist bilinear blos in den Parametern der Zahlen des von ihr erzeugten Systems $x_1 \ldots x_r$ und $u_1 \ldots u_r$.

Eine Folge dieser Sätze ist:

Satz 9. *Ein Zahlensystem, dem eine einzige Form mit Polareigenschaft entstammt und das sich aus dieser erzeugen lässt, ist ein ursprüngliches.*

Denn besässe ein derartiges Zahlensystem ein begleitendes System, so müsste die Form mit Polareigenschaft auch diesem entstammen, müsste also ein begleitendes System des gegebenen Systems erzeugen, was gegen die Voraussetzung ist.

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Satz 10. *Einem ursprünglichen Zahlensystem entstammt nur eine Form mit Polareigenschaft.*

Denn da ein ursprüngliches Zahlensystem kein begleitendes System besitzt, so kann jede ihm entstammende Form mit Polareigenschaft wieder nur das ursprüngliche Zahlensystem erzeugen; die Discriminante keiner solchen Form darf also verschwinden. Existirten nun zwei

Formen mit Polareigenschaft $g$ und $h$, so liesse sich doch aus ihnen eine Form $g + \mu h$ mit verschwindender Discriminante bilden. Da dies nicht geschehen darf, so kann nur eine Form mit Polareigenschaft vorhanden sein.

## § 4.

## Anhang.

### Auffindung aller ursprünglichen Zahlensysteme, die ein gegebenes System begleiten.

Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt hier anhangsweise, da sie, obwohl umfängliche Vorbereitungen erfordernd, zu Betrachtungen, die von den vorhergehenden wesentlich abweichen, keine Veranlassung giebt.

Die Untersuchungen des vorigen Paragraphen zeigen, dass die Aufgabe, alle ursprünglichen begleitenden Systeme eines gegebenen Zahlensystems aufzufinden, zurückgeführt werden kann auf die, die erzeugenden Formen mit Polareigenschaft dieser Systeme anzugeben.

Wie schon erwähnt, können durch Lösung des Systems linearer Gleichungen

$$\sum_i g_i (a^i_{kl} - a^i_{lk}) = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

alle dem Zahlensystem entstammenden Formen mit Polareigenschaft

$$\sum_{i,k,l} g_i a^i_{kl} x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

gefunden werden. Es mögen $g' \ldots g^{(\varrho)}$ ein vollständiges System von solchen linear unabhängigen Formen bilden. Aus ihnen muss sich linear jede andere Form zusammensetzen, insbesondere eine jede, die ein bestimmtes ursprüngliches begleitendes System erzeugt.

Zunächst ist es nothwendig, das Verhalten der begleitenden ursprünglichen Zahlensysteme zu den einzelnen Formen $g' \ldots g^{(\varrho)}$ festzustellen. Dies geschieht folgendermassen:

Satz a). Es seien $g$ und $h$ zwei Formen mit Polareigenschaft und das aus $h$ erzeugte System werde von einem ursprünglichen System begleitet, welches das aus $g$ erzeugte System nicht begleitet. Dann wird jedes System, welches aus einer Form mit Polareigenschaft $h + \mu g$ erzeugt wird, von dem in Rede stehenden ursprünglichen System begleitet.

Entsprechend dem Satz 3 kann die Basis des gegebenen Zahlensystems so gewählt werden, dass $x_1 \ldots x_r$ die Parameter einer Zahl des aus $g$ erzeugten Systems, $x_{r+1} \ldots x_s$ die Parameter einer Zahl des ursprünglichen Systems werden. Dann können die Grössen $u_1 \ldots u_n$ so gewählt werden, dass die Form $h$ in eine lineare Form von $x_{r+1} \ldots x_s$ allein übergeht. Die Form $h + \mu g$ geht dabei in eine lineare Form von $x_1 \ldots x_s$ über, etwa $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_s x_s$. Letztere ist eine lineare Form der Parameter einer Zahl des aus $h + \mu g$ erzeugten Systems.



Ersetzt man in dieser linearen Form $x_1 \ldots x_s$ durch $x_1' \ldots x_s'$, so geht sie, weil $x_1' \ldots x_r'$ nur von $x_1 \ldots x_r$, $u_1 \ldots u_r$ und $x_{r+1}' \ldots x_s'$ nur von $x_{r+1} \ldots x_s$; $u_{r+1} \ldots u_s$ abhängen, in die Summe zweier bilinearer Formen über. Diese wird wiederum dadurch, dass $u_1 \ldots u_s$ feste Werthe erhalten, eine lineare Form der Parameter einer Zahl des aus $h + \mu g$ erzeugten Systems, also auch insbesondere, wenn $u_1 \ldots u_r$ verschwinden. Dann aber ist diese Form blos lineare Form von $x_{s+1} \ldots x_r$ und es besitzen nach Satz 3 das aus $h + \mu g$ erzeugte System und das fragliche ursprüngliche System ein gemeinsames begleitendes System; dies aber kann kein anderes sein, als das ursprüngliche System selbst.

Dann folgt weiter:

Satz b). Sind $g' \ldots g^{(\varrho)}$ ein vollständiges System linear unabhängiger einem Zahlensystem entstammender Formen mit Polareigenschaft, und ist ferner $f$ eine Form mit Polareigenschaft, die ein bestimmtes begleitendes ursprüngliches System erzeugt, so muss mindestens eines der aus $g' \ldots g^{(\varrho)}$ erzeugten begleitenden Systeme von dem aus $f$ erzeugten System begleitet werden.

Denn die Form $f$ muss linear aus $g' \ldots g^{(\varrho)}$ gebildet werden können, etwa:

$$f = m' g' + \cdots + m^{(\varrho)} g^{(\varrho)}.$$

Begleitet nun das aus $f$ erzeugte System das aus $g^{(\varrho)}$ erzeugte System nicht, so begleitet es nach Satz a) das aus

$$f - m^{(\varrho)} g^{(\varrho)} = m' g' + \cdots + m^{(\varrho-1)} g^{(\varrho-1)}$$

erzeugte System. Würde es auch das aus $g^{(\varrho-1)}$ erzeugte System nicht begleiten und so fort, so müsste es doch schliesslich das aus $g'$ erzeugte System begleiten.

Für das weitere bedarf es des Hilfssatzes:

Satz c). Sind $g' \ldots g^{(\varrho)}$ Formen mit Polareigenschaft und ist $g$ eine aus ihnen linear zusammengesetzte Form, deren Discriminante nicht verschwindet, so giebt es mindestens eine Form von der Gestalt $g + \mu g^{(i)}$ mit verschwindender Discriminante.

Denn $g$ besitzt die Form

$$g = m' g' + \cdots + m^{(\varrho)} g^{(\varrho)}$$

und die Discriminante dieser Form wird rationale ganze Function von $m' \ldots m^{(\varrho)}$. Von diesen Grössen muss mindestens eine, etwa $m^{(i)}$, wirklich vorkommen. Setzt man dann die Discriminante von $g + \mu g^{(i)}$

gleich Null, so erhält man eine Gleichung in $\mu$, die wenigstens eine Wurzel $\mu_0$ besitzt; es verschwindet also die Discriminante von $g + \mu_0 g^{(i)}$.

Satz d). Erzeugt die Form $g$ ein Zahlensystem, dessen volles System linear unabhängiger Formen mit Polareigenschaft von $g' \dots g^{(\varrho)}$ gebildet wird, so lässt sich aus jedem Paar $g^{(i)}$, $g^{(k)}$ dieser Formen mindestens eine Form $g^{(i)} + \mu g^{(k)}$ mit verschwindender Discriminante bilden. Ist dann $f$ eine Form, die ein ursprüngliches begleitendes System erzeugt, so giebt es unter den aus den Formen $g^{(i)} + \mu g^{(k)}$ mit verschwindender Discriminante erzeugten Systemen mindestens eines, das von dem aus $f$ erzeugten System begleitet wird.

Dies ist sicher richtig, wenn die Discriminanten aller Formen $g' \dots g^{(\varrho)}$ verschwinden, da alsdann jedes $\mu$ gleich Null gesetzt werden kann, und mithin der Satz sich auf den Satz b) reducirt. Andernfalls muss die Discriminante wenigstens einer Form, etwa von $g^{(\varrho)}$, von Null verschieden sein. Sind dann die Formen:

$$h^{(i)} = g^{(i)} + \mu^{(i)} g^{(\varrho)} \qquad (i = 1 \cdots \varrho - 1)$$

solche, deren Discriminanten verschwinden, und erzeugt keine von ihnen ein System, das von dem aus $f$ erzeugten ursprünglichen System begleitet wird, so bilden $h' \dots h^{(\varrho-1)}$ mit $f$ zusammen ein vollständiges System linear unabhängiger Formen mit Polareigenschaft; es wird sich dann $g^{(\varrho)}$ durch

$$g^{(\varrho)} = f + h$$

darstellen lassen, wo $h$ eine lineare Form von $h' \dots h^{(\varrho-1)}$ ist. Dann aber giebt es eine Form $h^{(i)}$ derart, dass die Discriminante von

$$f + h + \mu h^{(i)}$$

oder, was dasselbe ist, von $\mu g^{(i)} + (1 + \mu \mu^{(i)}) g^{(\varrho)}$ verschwindet, wo $\mu$ eine bestimmte, von Null verschiedene, Grösse ist. Das aus dieser Form erzeugte System wird aber nach Satz b) von dem aus $f$ erzeugten ursprünglichen System begleitet.

Satz e). Erzeugt die Form $g$ ein Zahlensystem mit $\varrho$ unabhängigen Formen mit Polareigenschaft, und die Form $h$, deren Discriminante verschwindet, ein begleitendes System desselben, so entstammen letzterem weniger als $\varrho$ unabhängige Formen mit Polareigenschaft.

Denn das aus $h$ erzeugte System besitzt nach dem 7. Satze weniger Grundzahlen als das aus $g$ erzeugte; ihm kann somit die Form $g$ nicht entstammen, weil es sonst von dem aus $g$ erzeugten System begleitet würde.

Es ist nach diesen Sätzen zur Gewinnung der ein gegebenes Zahlensystem begleitenden ursprünglichen Systeme folgendermassen zu verfahren. Man sucht ein volles System linear unabhängiger dem gegebenen Zahlensystem entstammender Formen mit Polareigenschaft $g' \dots g^{(\varrho)}$ auf. Jede dieser Formen erzeugt ein begleitendes System $S_\varrho$, dem höchstens $\varrho$ Formen mit Polareigenschaft entstammen. Zu jedem dieser Systeme bildet man das vollständige System der Formen mit Polareigenschaft $h' \dots h^{(\sigma)}$. Dann bildet man alle Formen $h^{(i)} + \mu h^{(k)}$, deren Discriminanten verschwinden. Jede dieser Formen erzeugt ein begleitendes System $S_{\varrho-1}$, dem höchstens $\varrho - 1$ Formen mit Polareigenschaft entstammen. Es wird mindestens eines der Systeme $S_\varrho$, also auch mindestens eines der Systeme $S_{\varrho-1}$ von einem bestimmten ursprünglichen System begleitet, das das gegebene System begleitet. Mit den Systemen $S_{\varrho-1}$ ist in derselben Weise zu verfahren; man erhält Systeme $S_{\varrho-2}$ mit höchstens $\varrho - 2$ Formen mit Polareigenschaft. So fortfahrend gelangt man schliesslich zu Systemen $S_1$ mit nur einer Form mit Polareigenschaft. Jedes von diesen, als aus der ihm entstammenden Form mit Polareigenschaft erzeugt, ist nach dem 9ten Satze ein ursprüngliches; und zwar wird man so, wie leicht zu sehen ist, alle ursprünglichen Systeme, die das gegebene System begleiten, erhalten haben.



Lässt sich auch die Behandlung der in diesem Paragraphen gestellten Aufgabe in vielen Stücken vereinfachen, so ist doch das Wesentlichste erreicht dadurch, dass gezeigt wurde, wie den Productgleichungen eines Zahlensystems diejenige Form ertheilt werden kann, von der am Schluss des zweiten Paragraphen die Rede ist. Nämlich *nachdem alle ursprünglichen begleitenden Systeme gefunden sind, kann der Basis des gegebenen Zahlensystems eine solche Form ertheilt werden, dass unter den Productgleichungen des gegebenen Systems sich die Productgleichungen aller begleitenden ursprünglichen Systeme vorfinden.*

## II. Abschnitt.

### Zahlensysteme und algebraische Gleichungen.

### § 1.

### Lehnsätze.

Die Grundlage der weiteren Untersuchungen bilden zwei Determinantensätze, deren Beweis an dieser Stelle gegeben sei.

Die Bedingung dafür, dass die Gleichungen

(1) $$\omega x_i = \sum_k b_{ik} x_k \qquad (i, k = 1 \dots n)$$

ein nicht verschwindendes Lösungssystem besitzen, besteht in der Gleichung

(2) $$|b_{ik} - \delta_{ik}\,\omega| = 0 \qquad (i, k = 1 \cdots n),$$

wo, wie auch sonst üblich, $\delta_{ik}$ eine Grösse bedeutet, die Null ist, wenn $i$ und $k$ verschieden sind, und Eins, wenn $i$ und $k$ gleich sind. Diese Gleichung, nach Potenzen von $\omega$ entwickelt, möge

(3) $$\omega^n - B_1\omega^{n-1} + \cdots \pm B_n = 0$$

sein. Sodann werde folgende Bezeichnungsweise eingeführt:

(4) $$\begin{aligned} b_{ik}^2 &= \sum_l b_{il} b_{lk}, \qquad (i, k, l = 1 \ldots n) \\ b_{ik}^\nu &= \sum_l b_{il}^{\nu-1} b_{lk}, \qquad (\nu = 3, 4 \ldots) \end{aligned}$$

wozu noch der Symmetrie wegen die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} b_{ik}^1 &= b_{ik}, \\ b_{ik}^0 &= \delta_{ik} \end{aligned}\right. \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

kommen mögen.

Dann lautet der erste der zu beweisenden Sätze:

Satz 11. *Die Gleichungen:*

(5) $$b_{ik}^n - B_1 b_{ik}^{n-1} + \cdots \mp B_{n-1} b_{ik}^1 \pm B_n b_{ik}^0 = 0 \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

*sind Identitäten.*

Zum Beweise werde zunächst angenommen, die Grössen $b_{ik}$ seien von einander vollkommen unabhängig; dann sind die Wurzeln der Gleichung (3) von einander und von Null verschieden. Wird die zu einer dieser Wurzeln $\omega_h$ zugehörige Lösung der Gleichungen (1) mit

$$\alpha_{1h} \ldots \alpha_{nh}$$

bezeichnet, so verschwindet die Determinante

$$|\alpha_{jh}| \qquad (j, h = 1 \ldots n)$$

nicht, wie aus der speciellen Annahme ersichtlich, dass die $b_{ii}$ alle verschieden, die übrigen $b_{ik}$ aber Null seien. Aus den Gleichungen

(6) $$\omega_h \alpha_{ih} = \sum_k b_{ik} \alpha_{kh} \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

ergiebt sich unter Anwendung der Bezeichnungen (4)

(7) $$\omega_h^\nu \alpha_{ih} = \sum_k b_{ik}^\nu \alpha_{kh} \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1 \ldots n \\ \nu = 0, 1 \ldots \end{pmatrix},$$

und wenn

$$\beta_{ik} = b_{ik}^n - B_1 b_{ik}^{n-1} + \cdots \pm B_n b_{ik}^0$$

gesetzt wird, so folgt mit Rücksicht darauf, dass $\omega_h$ eine Wurzel der Gleichung (3) ist,

(8) $$0 = \sum_k \beta_{ik} \alpha_{kh} \qquad (i, k, h = 1 \ldots n),$$



ein Gleichungssystem, das nur dann bestehen kann, wenn

(9) $$\beta_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

ist. Da die Grössen $\beta_{ik}$ aus den von einander unabhängigen Grössen $b_{ik}$ rational gebildet sind, so müssen die Gleichungen (9) für jedes beliebige Werthsystem der $b_{ik}$ bestehen, also auch unter der Annahme beliebiger Beziehungen zwischen den Grössen $b_{ik}$. Der oben ausgesprochene Satz also ist allgemein richtig.

Der zweite Satz ist der folgende:

Satz 12. *Diejenige Gleichung, deren Wurzeln $\varrho$ die sämmtlichen Differenzen zwischen den Wurzeln der Gleichung*

$$|b_{ik} - \delta_{ik}\omega| = 0 \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

*sind, wird durch Elimination der Grössen $c_{ik}$ aus den Gleichungen*

(10) $$\varrho c_{ik} = \sum_l c_{il} b_{lk} - \sum_l b_{il} c_{lk} \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

*erhalten.*

Zunächst kann vollständige Unabhängigkeit der Grössen $b_{ik}$ angenommen werden. Da alsdann die aus den Lösungen der Gleichungen (6) gebildete Determinante $|\alpha_{jh}|$ nicht verschwindet, so kann jedem der Elemente $\alpha_{jh}$ eine Adjuncte $A_{hj}$ zugeordnet werden. Mit Hilfe dieser Grössen lässt sich das System der Gleichungen (10) in das ihm äquivalente System von Gleichungen

$$\varrho \sum_{i,k} A_{ji} c_{ik} \alpha_{kh} = \sum_{i,l,k} A_{ji} c_{il} b_{lk} \alpha_{kh} - \sum_{i,l,k} A_{ji} b_{il} c_{lk} \alpha_{kh}$$

umwandeln. Dies letztere aber geht vermöge der Gleichungen (6) nach leichter Umrechnung in:

(11) $$(\varrho - \omega_h + \omega_j) \sum_{i,k} A_{ji} c_{ik} \alpha_{kh} = 0 \qquad (h, j, i, k = 1 \ldots n)$$

über. Durch Elimination der Grössen $c_{ik}$ aus diesen Gleichungen oder, was dasselbe ist, des mit den $c_{ik}$ äquivalenten Grössensystems

$$c'_{jh} = \sum_{i,k} A_{ji} c_{ik} \alpha_{kh} \qquad (i, k, j, h = 1 \ldots n)$$

ergiebt sich

(12) $$\prod_{j,h} (\varrho - \omega_j + \omega_h) = 0 \qquad (j, h = 1 \ldots n),$$

also eine Gleichung, deren Wurzeln die sämmtlichen Differenzen zwischen Wurzeln der Gleichung (2) sind. Wird diese Gleichung nach Potenzen von $\varrho$ entwickelt, so lassen sich ihre Coefficienten als ganze rationale Functionen der Grössen $b_{ik}$ darstellen; sie muss dann wegen der Aequivalenz der Gleichungensysteme (10) und (11) identisch werden mit derjenigen Gleichung, die durch Elimination der Grössen $c_{ik}$ aus den Gleichungen (10) erhalten wird.

## § 2.

### Die charakteristischen Gleichungen eines Zahlensystems.

Die Bedingungen dafür, dass das Product zweier Zahlen einem der Factoren proportional sei, sind durch zwei algebraische Gleichungen gegeben, deren Eigenschaften in folgendem untersucht werden.

Damit, wenn $\omega$ eine gewöhnliche Grösse ist, die Gleichung

$$(1) \qquad \omega x = x u$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichungen

$$\omega x_i = \sum_{k,l} a^i_{kl} x_k u_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

lösbar seien, muss $\omega$ eine Wurzel der Gleichung

$$(2) \qquad \left| \sum_l a^i_{kl} u_l - \delta_{ik}\,\omega \right| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

sein. Ebenso muss, damit die Gleichung

$$(3) \qquad \omega x = u x$$

lösbar sei, $\omega$ eine Wurzel der Gleichung

$$(4) \qquad \left| \sum_l a^i_{lk} u_l - \delta_{ik}\,\omega \right| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

sein. *Die beiden Gleichungen (2) und (4) mögen die charakteristischen Gleichungen des Zahlensystems heissen.* Nach Potenzen von $\omega$ entwickelt mögen sie die Formen

$$(5) \qquad \omega^n - f_1\,\omega^{n-1} + \cdots \pm f_n = 0,$$

$$(6) \qquad \omega^n - g_1\,\omega^{n-1} + \cdots \pm g_n = 0$$

annehmen. Der erste Satz des vorigen Paragraphen zeigt die Bedeutung dieser Gleichungen; er giebt nämlich:

Satz 13. *Ersetzt man in einer der charakteristischen Gleichungen die Potenzen von $\omega$ durch die gleichhohen Potenzen der Zahl $u$, so ist die entstehende Gleichung eine Identität.*

Es werde

$$b_{ik} = \sum_l a^i_{kl} u_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

gesetzt. Dann lässt sich das Product einer beliebigen Zahl $x$ mit $u$ in folgender Weise schreiben:



$$x u = \sum_{i,k} b_{ik} x_k e_i \qquad (i, k = 1 \ldots n).$$

Daraus ergiebt sich:

$$x u^2 = \sum_{i,k} b^2_{ik} x_k e_i$$

und allgemein

$$x u^\nu = \sum b^\nu_{ik} x_k e_i. \qquad (i, k = 1 \ldots n).$$

Wird beachtet, dass hier $B_i = f_i$ $(i = 1 \ldots n)$ wird, so ergiebt der angezogene Satz:

$$(7) \qquad x u^n - f_1 x u^{n-1} + \cdots \pm f_n x = 0$$

und hieraus folgt, wenn $x$ durch die vermittelst des Satzes 1 definirte Zahl $u^0$ ersetzt wird:

$$(8) \qquad u^n - f_1 u^{n-1} + \cdots \pm f_n u^0 = 0.$$

Auf demselben Wege erhält man

$$(9) \qquad u^n - g_1 u^{n-1} + \cdots \pm g_n u^0 = 0.$$

Damit ist die Existenz der im Satze ausgesprochenen Beziehung erwiesen. —

Es ist nothwendig auf die Coefficienten der charakteristischen Gleichungen näher einzugehen. Dieselben haben nachstehende Eigenschaften:

1) Die Coefficienten der charakteristischen Gleichungen sind ganze rationale und homogene Functionen der Parameter $u_1 \ldots u_n$ desjenigen Grades, der durch den jeweiligen Index angegeben wird.

2) Es werde $u$ durch $u + \lambda u^0$ ersetzt. Da alsdann die Gleichungen

$$\omega x = x(u + \lambda u^0)$$

und

$$(\omega - \lambda) x = x u$$

identisch sind, so lässt sich der charakteristischen Gleichung

$$(10) \qquad \omega^n - f_1(u + \lambda u^0)\,\omega^{n-1} + \cdots \pm f_n(u + \lambda u^0) = 0$$

auch die Form

$$(11) \qquad (\omega - \lambda)^n - f_1(u)\,(\omega - \lambda)^{n-1} + \cdots \pm f_n(u) = 0$$

geben.

3) Multiplicirt man die Gleichung

$$\omega x = x u$$

mit $u$, so folgt

$$\omega^2 x = x u^2$$

und allgemein

(12) $$\omega^{\nu} x = x u^{\nu}.$$

Wird die Zahl $u^{\nu}$ in folgender Weise geschrieben

$$u^{\nu} = (u^{\nu})_1 e_1 + \cdots + (u^{\nu})_n e_n,$$

so folgt aus der Gleichung (2) dass die Wurzeln der Gleichung

$$\left| \sum_l a^i_{kl} (u^{\nu})_l - \delta_{ik}\, \omega' \right| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

oder

(13) $$\omega'^{\,n} - f_1(u^{\nu})\, \omega'^{\,n-1} + \cdots \pm f_n(u^{\nu}) = 0$$

die $\nu^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln der charakteristischen Gleichung (5) sind. Es ist also, wenn

$$f_1(u) = p_1 u_1 + \cdots + p_n u_n$$

gesetzt wird, die Grösse

$$f_1(u^{\nu}) = p_1 (u^{\nu})_1 + \cdots + p_n (u^{\nu})_n$$

die Summe der $\nu^{\text{ten}}$ Wurzelpotenzen der charakteristischen Gleichung (5), und somit sind die Coefficienten derselben charakteristischen Gleichung rationale ganze Functionen von

$$f_1(u),\ f_1(u^2) \ldots f_1(u^n).$$

4) Aus der Gleichung

$$\omega x = x u$$

folgt, wenn mit der zu $u$ reciproken Zahl $\bar{u}$ multiplicirt wird:

$$\frac{1}{\omega} \cdot x = x\, \bar{u}$$

und hieraus, dass die charakteristische Gleichung auch in der Form

(14) $$\left| \omega \sum_l a^i_{kl} \bar{u}_l - \delta_{ik} \right| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

geschrieben werden kann. Hieraus folgen die Relationen:

(15) $$f_i(\bar{u}) = \frac{f_{n-i}(u)}{f_n(u)} \qquad (i = 1 \cdots n-1).$$

Selbstredend lässt sich alles, was hier nur von einer charakteristischen Gleichung gezeigt wurde, auch auf die andre übertragen.

5) Den linearen Coefficienten der charakteristischen Gleichungen $f_1(u)$ und $g_1(u)$ gehören Formen mit Polareigenschaft zu. Von

$$g_1(u) = \sum_{i,k} a^i_{ki} u_k \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

ist es bereits im Beweise des $6^{\text{ten}}$ Satzes gezeigt worden; auf demselben Wege ist es auch für



$$f_1(u) = \sum_{i,k} a^i_{ik} u_k \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

nachweisbar.

6) Ersetzt man in der Form $f_1(u)$ die Zahl durch das Product mehrerer Zahlen, so bleibt die entstehende Form zufolge der Polareigenschaft von $f_1(vw)$ bei allen cyklischen Vertauschungen der Zahlen invariant. Wird demgemäss in $f_1(u^{\nu})$ gesetzt

$$u = v w,$$

so resultirt die Form

$$f_1(v w v \ldots w),$$

die durch cyklische Vertauschungen nur in sich oder in

$$f_1(w v w \ldots v)$$

übergeht. Die Form $f_1(u^{\nu})$ erhält also denselben Werth, wenn einmal $u = vw$ und einmal $u = wv$ gesetzt wird. Mit Rücksicht auf das unter Punkt 3 gesagte folgt, dass, wenn in einer charakteristischen Gleichung $u$ durch $vw$ ersetzt wird, die beiden Variabelnreihen $v_1 \ldots v_n$ und $w_1 \ldots w_n$ mit einander vertauschbar sind.

Insbesondere ist noch zu bemerken, dass:

(16) $$f_n(vw) = f_n(v) \cdot f_n(w)$$

ist, nach dem Multiplicationssatz der Determinanten.

## § 3.

### Die Theiler der charakteristischen Gleichungen.

Theiler einer charakteristischen Gleichung sei jede Gleichung genannt, deren Coefficienten rationale Functionen von $u_1 \ldots u_n$ sind und deren Product mit einer ebensolchen Gleichung eine charakteristische Gleichung ergiebt. Ein irreductibler Theiler ist ein solcher, der selbst keinen Theiler mit von $u_1 \ldots u_n$ rational abhängigen Coefficienten besitzt.

Es sei ein Theiler einer charakteristischen Gleichung in der Form

(1) $$\omega^m - h_1(u)\, \omega^{m-1} + \cdots \pm h_m(u) = 0$$

gegeben. *Es lässt sich dann zeigen, dass seine Coefficienten alle oben an den Coefficienten der charakteristischen Gleichungen nachgewiesenen Eigenschaften besitzen.*

Man erkennt leicht, dass dieselben

1) ganze (weil sonst Wurzeln einer charakteristischen Gleichung für endliche Werthe von $u_1 \ldots u_n$ unendlich würden) homogene Functionen von $u_1 \ldots u_n$ des durch den jeweiligen Index angegebenen Grades sind;

2) dass die Gleichungen

(2) $$\omega^m - h_1(u + \lambda u^0)\, \omega^{m-1} + \cdots \pm h_m(u + \lambda u^0) = 0$$

und

$$(3) \qquad (\omega-\lambda)^m - h_1(u)(\omega-\lambda)^{m-1} + \cdots \pm h_m(u) = 0$$

identisch sind. Denn die Gleichung (2) muss mit einem Theiler einer charakteristischen Gleichung, deren Unbekannte $\omega - \lambda$ ist, identisch sein. Ist dies etwa

$$(\omega-\lambda)^m - h_1'(u)(\omega-\lambda)^{m-1} + \cdots \pm h_m'(u) = 0,$$

so folgt durch Entwickelung dieser Gleichung und der Gleichung (2) nach Potenzen von $\lambda$ und Vergleichung der von $\lambda$ freien Glieder:

$$h_i'(u) = h_i(u) \qquad (i = 1 \ldots m).$$

3) Ersetzt man in der Gleichung (1) $u$ durch $u^\nu$, so erhält man eine Gleichung, deren Wurzeln die $\nu^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln von (1) sind. Dies erkennt man folgendermassen. Bildet man die Gleichung

$$(4) \qquad \omega'^m - h_1(u^m)\omega'^{m-1} + \cdots \pm h_m(u^m) = 0,$$

so sind ihre Wurzeln nach dem in Punkt 3 des vorigen Paragraphen gesagten jedenfalls $m^{\text{te}}$ Potenzen von gewissen Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_m$ einer charakteristischen Gleichung. Ersetzt man $u$ durch $u + \lambda u^0$ so folgt aus (4)

$$h_1\left((u+\lambda u^0)^m\right) = \sum_i (\omega_i + \lambda)^m \qquad (i = 1 \ldots m)$$

und hieraus durch Entwicklung nach Potenzen von $\lambda$ und Vergleichung

$$(5) \qquad h_1(u^\mu) = \sum_i \omega_i^\mu \qquad (\mu = 1 \ldots m).$$

Bildet man dann diejenige Gleichung, deren Wurzeln $\omega_1 \ldots \omega_m$ sind.

$$(6) \qquad \omega^m - h_1'(u)\,\omega^{m-1} + \cdots \pm h_m'(u) = 0$$

so sind gemäss den Gleichungen (5) die Coefficienten von (6) rationale Functionen von $h_1(u) \ldots h_1(u^m)$ und als solche rational in $u_1 \ldots u_n$; es genügt demzufolge (6) der Definition eines Theilers einer charakteristischen Gleichung. Es gilt ferner für jeden ganzzahligen Exponenten $\mu$ die Gleichung

$$(7) \qquad h_1(u^\mu) = \sum_i \omega_i^\mu \qquad (\mu = 1, 2 \ldots m, m+1 \ldots).$$

Denn wäre für einen Exponenten $\mu$, der grösser als $m$ ist, die Relation (7) nicht erfüllt, sondern $h_1(u^\mu)$ die Summe der $\mu^{\text{ten}}$ Potenzen irgend welcher anderen Wurzeln $\omega_1' \ldots \omega_m'$ einer charakteristischen Gleichung, so würde auf demselben Wege, auf dem die Gleichungen (5) erhalten werden,

$$h_1(u^k) = \sum_i \omega_i'^k \qquad (k = 1 \ldots, \mu)$$

folgen, was, da $\mu$ grösser als $m$ ist, den Gleichungen (5) widersprechen würde.



Aus dem Umstand, dass die Coefficienten von (6) rational durch $h_1(u) \ldots h_1(u^m)$ darstellbar sind, und mit Rücksicht auf die Gleichungen (7) folgt ferner, dass diejenige Gleichung, die aus (6) vermittelst der Ersetzung von $u$ durch $u^\nu$ entsteht, die $\nu^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln von (6) zu Wurzeln hat. Für $\nu = m$ wird diese Gleichung identisch mit der Gleichung (4), zufolge der Voraussetzung über die Wurzeln letzterer Gleichung; daraus folgt, dass auch (6) mit (1) identisch ist. Die Coefficienten von (1) sind also rationale Functionen von

$$h_1(u) \ldots h_1(u^m)$$

und es gehen die Wurzeln von (1), wenn $u$ durch $u^\nu$ ersetzt wird, in ihre $\nu^{\text{ten}}$ Potenzen über.

4) Dass die Wurzeln der Gleichung

$$(8) \qquad \omega'^m - h_1(\bar u)\,\omega'^{m-1} + \cdots \pm h_m(\bar u) = 0$$

die Reciproken der Wurzeln der Gleichung (1) sind, beweist man durch Entwickelung der zu $u + \lambda u^0$ reciproken Zahl $v$ nach negativen Potenzen von $\lambda$. Es ist

$$v = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{u^\nu}{\lambda^{\nu+1}},$$

woraus sich

$$h_1(v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{h_1(u^\nu)}{\lambda^{\nu+1}}$$

ergiebt. Andererseits wird durch analoge Reihenentwickelung mit Rücksicht auf die Gleichungen (7)

$$\sum_i \frac{1}{\omega_i + \lambda} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{h_1(u^\nu)}{\lambda^{\nu+1}} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

gefunden. Hiernach ist also $h_1(\bar u)$ gleich der Summe der Reciproken der Wurzeln von (1); ersetzt man ferner $u$ durch $u^\nu$, so wird $h_1(u^\nu)$ die Summe der $\nu^{\text{ten}}$ Potenzen dieser Reciproken, und da die Coefficienten von (8) rational von $h_1(\bar u) \ldots h_1(\bar u^m)$ abhängen, so sind in der That die Wurzeln von (8) zu den Wurzeln von (1) reciprok.

5) Setzt man in der Gleichung (1) in Stelle von $u$ das Product $vw$, so resultirt eine Gleichung, die sich bei Vertauschung von $v$ mit $w$ nicht ändert. Es kann nämlich, da die charakterischen Gleichungen bereits diese Eigenschaft besitzen, ein Theiler einer derselben bei Vertauschung von $v$ und $w$ nur wieder in einen Theiler übergehen. Da dies unabhängig von $v$ und $u$ geschieht, so findet es auch für $w = v^0$ statt. Hier sind aber die in einander übergehenden Theiler identisch, somit sind sie auch im Allgemeinen identisch. Da das von $\omega$ freie Glied eines Theilers Theiler des von $\omega$ freien Gliedes der charakte-

ristischen Gleichung ist, und letzteres bei der Substitution $u = vw$ in das Product $f_n(v) f_n(w)$ resp. $g_n(v) g_n(w)$ übergeht, so folgt

$$(9) \qquad h_m(vw) = h_m(v) \,.\, h_m(w).$$

Die in diesem Punkte erörterte Eigenschaft der Theiler hat in Bezug auf den linearen Coefficienten $h_1(u)$ besondere Wichtigkeit und verdient in Folge dessen als besondrer Satz formulirt zu werden, nämlich:

Satz 14. *Dem linearen Coefficienten eines jeden Theilers einer charakteristischen Gleichung gehört eine Form mit Polareigenschaft zu.*

Die irreductiblen Theiler der charakteristischen Gleichungen behandelt schliesslich der folgende Satz:

Satz 15. *Zwei irreductible Theiler der charakteristischen Gleichungen sind identisch, wenn ihre linearen Coefficienten in constantem Verhältnisse stehen.*

Sind diese Theiler

$$(10) \qquad \omega^m - h_1(u)\,\omega^{m-1} + \cdots \pm h_m(u) = 0,$$

$$(11) \qquad \omega^{m'} - h_1'(u)\,\omega^{m'-1} + \cdots \pm h'_{m'}(u) = 0,$$

so ist nach Punkt 2

$$h_1(u + \lambda u^0) = h_1(u) + m\,\lambda,$$
$$h_1'(u + \lambda u^0) = h_1'(u) + m'\lambda;$$

und da der Quotient dieser Grössen von $\lambda$ unabhängig sein soll, ist

$$m h_1'(u) = m' h_1(u)$$

und ferner

$$m h_1'(u^\nu) = m' h_1(u^\nu).$$

Es sind also die $m'^{\text{te}}$ Potenz von (10) und die $m^{\text{te}}$ Potenz von (11) identisch. Da nun die Gleichungen (10) und (11) irreductibel sein sollen, so müssen sie hiernach identisch sein.

## § 4.

## Die Ranggleichung eines Zahlensystems.

Die beiden, den charakteristischen Gleichungen entstammenden Relationen

$$(1) \qquad u^n - f_1 u^{n-1} + \cdots \pm f_n u^0 = 0$$

und

$$(2) \qquad u^n - g_1 u^{n-1} + \cdots \pm g_n u^0 = 0$$

können nicht unabhängig von einander sein. Es muss unter den positiven Potenzen von $u$ eine gewisse geringste geben, die sich linear durch alle niedrigern positiven Potenzen von $u$, einschliesslich der nullten, darstellen lässt mit Hilfe rational aus $u_1 \ldots u_n$ gebildeten



Coefficienten; dies sei die $m^{\text{te}}$ Potenz von $u$, und die Relation, die sie mit den niederen Potenzen von $u$ verbindet, sei

$$(3) \qquad u^m - h_1 u^{m-1} + \cdots \pm h_m u^0 = 0$$

Ersetzt man in dieser Relation die Potenzen von $u$ durch die gleichhohen Potenzen von $\omega$, so entsteht die algebraische Gleichung

$$(4) \qquad \omega^m - h_1 \omega^{m-1} + \cdots \pm h_m = 0,$$

*die die Ranggleichung des Zahlensystems heissen soll.* Dann gilt folgender Satz:

Satz 16. *Die Ranggleichung eines Zahlensystems ist Theiler jeder der beiden charakteristischen Gleichungen.*

Denn multiplicirt man die Relation (3) mit einer linearen Form der $n - m + 1$ ersten Potenzen von $u$, einschliesslich der nullten, so lassen sich die Coefficienten dieser Form so bestimmen, dass die Differenz zwischen diesem Product und der Relation (1) eine Relation ergiebt, die nur geringere Potenzen von $u$ enthält, als die $m^{\text{te}}$. Eine solche Relation existirt aber nicht; es muss also die in Rede stehende Differenz null sein. Da in dieser Ueberlegung $u$ wie eine gewöhnliche unbestimmte Grösse behandelt wird, so kann man in seine Stelle $\omega$ setzen, und wird die Betrachtung in Bezug auf die Relation (2) wiederholt, so ergiebt sich die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes.

Es besitzen dann die Coefficienten der Ranggleichung alle im vorigen Paragraphen erörterten Eigenschaften; insbesondere sind sie ganze rationale und homogene Functionen von $u_1 \ldots u_n$. —

Aus der Relation (3) lässt sich eine Lösung der Gleichung

$$(5) \qquad u \,.\, \bar{u} = u^0$$

herleiten, nämlich

$$(6) \qquad \bar{u} = \frac{h_{m-1} u^0 - \cdots \mp u^{m-1}}{h_m};$$

die Parameter der Zahl $u$ sind also homogene rationale Functionen von $u_1 \ldots u_n$ mit dem gemeinsamen Nenner $h_m$.

Es lässt sich beweisen:

Satz 17. *Die Parameter der zu $u$ reciproken Zahl $u$ sind rationale homogene Functionen der Parameter von $u$ mit einem gemeinsamen kleinsten Nenner, der dem von $\omega$ freien Gliede der Ranggleichung gleich ist.*

Um dies zu zeigen, werde in der Relation (3) $u$ durch $u + \lambda u^0$ ersetzt, wodurch dieselbe in

$$(7) \qquad (u + \lambda u^0)^m - h_1'(u + \lambda u^0)^{m-1} + \cdots \pm h'_m u^0 = 0$$

übergehe. Hier ist insbesondere

$$h'_m = \lambda^m + \lambda^{m-1} h_1 + \cdots \pm h_m.$$

Wird die zu $u + \lambda u^0$ reciproke Zahl mit $v$ bezeichnet, so ist

$$(8) \qquad v = \frac{h'_{m-1} \cdot u^0 - h'_{m-2} \cdot (u + \lambda u^0) + \cdots \mp (u + \lambda u^0)^{m-1}}{h'_m}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks lässt sich nach Potenzen von $u$ ordnen; geschieht dies, so werde erhalten

$$(9) \qquad v = \frac{j_{m-1} \cdot u^0 - j_{m-2} \cdot u + \cdots \mp u^{m-1}}{h'_m}.$$

Werden dann $n$ homogene ganze Functionen $t_1 \ldots t_n$ von $u_1 \ldots u_n$ so bestimmt, dass

$$t_1 (u^\nu)_1 + \cdots + t_n (u^\nu)_n = 0$$

für $\nu = 0, 1 \ldots m-2$ wird, dagegen

$$s = t_1 (u^{m-1})_1 + \cdots + t_n (u^{m-1})_n$$

nicht verschwindet, so wird

$$(10) \qquad t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n = \mp \frac{s}{h'_m}$$

ein Ausdruck, dessen Zähler von $\lambda$ unabhängig ist; diese Wahl von $t_1 \ldots t_n$ ist möglich, weil $m$ der Grad der Ranggleichung ist. Besässen nun der Zähler und Nenner der durch die Gleichung (6) definirten Parameter von $\bar{u}$ einen gemeinsamen Theiler vom Grade $\sigma$ in $u_1 \ldots u_n$, so müssten die Zahlen und Nenner der durch (8) definirten Grössen $v_1 \ldots v_n$ einen gemeinsamen Theiler besitzen, der als Theiler von $h'_m$ in $\lambda$ vom Grade $\sigma$ ist. Dieser Theiler müsste zufolge (10) auch in $s$ aufgehen; da aber $s$ von $\lambda$ unabhängig ist, so ist dies nicht möglich, und es ist $h_m$ der kleinste gemeinsame Nenner von $\bar{u}_1 \ldots \bar{u}_n$.

## § 5.

## Die Killing'sche Gleichung eines Zahlensystems.

*Die Bedingung dafür, dass die Gleichung*

$$(1) \qquad \varrho x = xu - ux$$

*eine Lösung besitze, bildet die Gleichung*

$$(2) \qquad \left| \sum_l (a^i_{kl} - a^i_{lk}) u_l - \delta_{ik} \varrho \right| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n),$$

*die ich die Killing'sche Gleichung des Zahlensystems nennen will.* Den Zusammenhang, in welchem sie mit den charakteristischen Gleichungen des Zahlensystems steht, zeigt folgender Satz:

Satz 18. *Die Wurzeln der Killing'schen Gleichung sind Differenzen zwischen den Wurzeln einer jeden der beiden charakteristischen Gleichungen.*



Setzt man zur Abkürzung

$$b_{ik}(x) = \sum_s a^i_{ks} x_s \qquad (i, k, s = 1 \ldots n),$$

so folgen vermöge der Bedingungsgleichungen

$$\sum_s a^i_{ks} a^s_{lm} = \sum_s a^i_{sm} a^s_{kl} \qquad (i, k, l, m, s = 1 \ldots n)$$

aus der Gleichung (1) die nachstehenden Gleichungen:

$$(3) \quad \varrho b_{ik}(x) = \sum_l b_{il}(x) b_{lk}(u) - \sum_l b_{il}(u) b_{lk}(x) \qquad (i, k, l = 1 \ldots n).$$

Dann aber lehrt der zweite Satz des ersten Paragraphen (Satz 12) dass $\varrho$ eine Differenz zwischen zwei Wurzeln der Gleichung

$$|b_{ik}(u) - \delta_{ik} \omega| = 0 \qquad (i, k = 1 \ldots n),$$

das heisst, einer charakteristischen Gleichung sein muss.

Analog ist der Nachweis hinsichtlich der zweiten charakteristischen Gleichung zu führen.

Da die Coefficienten der Killing'schen Gleichung rational von $u_1 \ldots u_n$ abhängig sind, so ergiebt sich unmittelbar das

Corollar. *Ist eine Wurzel der Killing'schen Gleichung Differenz zweier verschiedener Wurzeln eines irreductibeln Theilers einer charakteristischen Gleichung, so sind auch alle übrigen Differenzen zwischen verschiedenen Wurzeln desselben Theilers Wurzeln der Killing'schen Gleichung.* —

Einer besonderen Untersuchung bedürfen die verschwindenden Wurzeln der Killing'schen Gleichung. Die Gleichung

$$(5) \qquad 0 = xu - ux$$

besitzt immer wenigstens eine Lösung, nämlich $x = u^0$. Nennt man eine Zahl $x$, die diese Gleichung befriedigt, eine mit $u$ vertauschbare Zahl, so hat die Killing'sche Gleichung mindestens so viele verschwindende Wurzeln, als es linear von einander unabhängige mit $u$ vertauschbare Zahlen giebt. Diese Mindestzahl verschwindender Wurzeln kann indess überschritten werden und es liesse sich untersuchen, unter welchen Umständen dies stattfindet. Es reicht jedoch hin, wenn ein Fall nachgewiesen wird, in dem dies nicht geschieht und dies ist der folgende:

Satz 19. *Wird ein Zahlensystem durch eine Form mit Polareigenschaft erzeugt, so besitzt seine Killing'sche Gleichung ebensoviele verschwindende Wurzeln, als es linear unabhängige mit einer allgemein gewählten Zahl des Systems vertauschbare Zahlen giebt.*

Ist $w$ eine beliebige Zahl des Systems, so kann die Basis so gewählt werden, dass $e_1 \ldots e_r$ das volle System linear unabhängiger mit $w$ vertauschbarer Zahlen bilden. Die Form mit Polareigenschaft

$$(6) \qquad g(xu) = \sum_{i,k} g_{ik} x_i u_k \quad (i, k = 1 \ldots n),$$

deren Discriminante nicht verschwinden darf, erzeuge das gegebene Zahlensystem. Es können noch $e_{r+1} \ldots e_n$ so gewählt werden, dass die Form (6) die besondere Gestalt

$$(7) \quad g(xu) = \sum_{i,k} g_{ik} x_i u_k + \sum g_{r+j,\, r+h}\, x_{r+j}\, u_{r+h} \quad \begin{pmatrix} i, k = 1 \ldots r \\ j, h = 1 \ldots n-r \end{pmatrix}$$

erhält.

Wird nun

$$(8) \qquad u = vw - wv$$

gesetzt, so sollen zunächst die Parameter von $u$ durch die Parameter von $v$ ausgedrückt werden. Die Zahl $v$ kann in die beiden Theile $v' = v_1 e_1 + \cdots + v_r e_r$ und $v'' = v_{r+1} e_{r+1} + \cdots + v_n e_n$ zerlegt werden, und da zufolge der Wahl der Basis

$$v'w - wv' = 0$$

ist, so sind die Parameter von $u$ nur noch von $v_{r+1} \ldots v_n$ abhängig.

Es wird ferner in Consequenz der Polareigenschaft der Form (7):

$$(9) \qquad g(xu) = g\big((wx - xw)v\big)$$

sein. Bezeichnet man nun mit $G_{ki}$ die Adjuncte von $g_{ik}$ in der als Determinante geschriebenen Discriminante der Form (7) und setzt für $x$ den Werth

$$x^{(i)} = \sum_k G_{ki} e_k \qquad (i, k = 1 \ldots r)$$

so ist $x^{(i)}$ eine mit $w$ vertauschbare Zahl und zufolge (7) und (9) ergiebt sich:

$$(10) \qquad u_i = 0, \qquad (i = 1 \ldots r)$$

Wird ferner $x$ der Werth:

$$x^{(r+j)} = \sum_h G_{r+h,\, r+j}\, e_{r+h} \qquad (h, j = 1 \ldots n-r)$$

ertheilt, so folgt aus (7)

$$(11) \qquad u_{r+j} = \sum_l \beta_{jl} v_{r+l} \qquad (j, l = 1 \ldots n-r),$$

wo die Grössen $\beta_{jl}$ von $w$ irgend wie abhängig sind. Es darf die Determinante

$$|\beta_{jl}| \qquad (j, l = 1 \ldots n-r)$$



aber nicht verschwinden, denn sonst liessen sich $v_{r+1} \ldots v_n$ so bestimmen, dass ausser $u_1 \ldots u_r$ auch $u_{r+1} \ldots u_n$ verschwinden. Es wäre dann gemäss (8) eine so bestimmte Zahl $v$ mit $w$ vertauschbar; dies aber widerstreitet der Voraussetzung über die Wahl der Basis des Zahlensystems. Die Parameter der Zahl $u$ sind jetzt durch die Gleichungen (10) und (11) gegeben.

Setzt man jetzt $u = \varrho v$ und folglich

$$\varrho v = vw - wv,$$

so werden die Gleichungen (10) und (11):

$$(12) \qquad \begin{aligned} \varrho v_i &= 0 & (i &= 1 \ldots r) \\ \varrho v_{r+j} &= \sum_l \beta_{jl} v_{r+l} & (j, l &= 1 \ldots n-r) \end{aligned}$$

und wenn hieraus die Parameter $v_1 \ldots v_n$ eliminirt werden, so ist die Killing'sche Gleichung, gebildet für die Zahl $w$:

$$(13) \qquad \varrho^r |\beta_{jl} - \delta_{jl}\varrho| = 0 \qquad (j, l = 1 \ldots n-r).$$

Diese Gleichung besitzt, weil die Determinante $|\beta_{jl}|$ nicht verschwindet, genau $r$ verschwindende Wurzeln, also gerade ebenso viele, als es linear unabhängige mit $w$ vertauschbare Zahlen im Zahlensystem giebt.

## § 6.

## Die charakteristischen Gleichungen und Ranggleichungen begleitender Zahlensysteme.

Satz 20. *Bildet man zu einem gegebenen Zahlensystem ein begleitendes System, so ist eine charakteristische Gleichung des letztern ein Theiler der entsprechenden charakteristischen Gleichung des gegebenen Systems.*

Denn wählt man die Basis des gegebenen Zahlensystems so, dass die $r$ ersten Productgleichungen desselben die Productgleichungen des begleitenden Systems werden,

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_i' &= \sum_{k,l} a_{kl}^{i} x_k u_l & (i, k, l &= 1 \ldots r) \\ x_{r+i} &= \sum_{k,l} a_{kl}^{r+i} x_k u_l & \begin{pmatrix} i = 1 \ldots n-r \\ k, l = 1 \ldots n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

so ist unmittelbar ersichtlich, dass die charakteristische Gleichung des begleitenden Systems

$$(2) \qquad \Big|\sum_l a_{kl}^{i} u_l - \delta_{ik}\omega\Big| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots r)$$

die charakteristische Gleichung

$$\left|\sum_l a_{kl}^i u_l - \delta_{ik}\omega\right| = 0 \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

des gegebenen Systems theilt. Dasselbe gilt bezüglich der andern charakteristischen Gleichung. —

Was die Ranggleichung anlangt, so ist der entsprechende Satz auf anderm Wege zu erweisen:

Satz 21. *Die Ranggleichung eines begleitenden Systems ist Theiler der Ranggleichung des gegebenen Systems.*

Ist die Ranggleichung des gegebenen Systems

$$(3) \qquad \omega^m - h_1\omega^{m-1} + \cdots \pm h_m = 0$$

und die des begleitenden Systems

$$(4) \qquad \omega^{m'} - h_1'\omega^{m'-1} + \cdots \pm h_{m'}' = 0,$$

ferner $v$ diejenige Zahl des begleitenden Systems, die der Zahl $u$ des gegebenen Systems entspricht, so müssen die Relationen

$$v^m - h_1 v^{m-1} + \cdots \pm h_m v^0 = 0,$$
$$v^{m'} - h_1' v^{m'-1} + \cdots \pm h_{m'}' v^0 = 0$$

zusammen bestehen. Dies aber ist, wie im analogen Falle beim Beweise des Satzes 16 gezeigt wurde, nur möglich, wenn die Gleichung (4) die Gleichung (3) theilt. Uebrigens ist hierbei die Identität der Gleichungen (3) und (4) nicht ausgeschlossen. — Unter Rücksichtnahme auf die Sätze 14 und 15, welche aussagen, dass zum linearen Coefficienten jedes irreductibeln Theilers einer charakteristischen Gleichung eine Form mit Polareigenschaft gehört und zwar zu verschiedenen Theilern auch verschiedene Formen mit Polareigenschaft, können die begleitenden ursprünglichen Systeme eines Zahlensystems des Nähern untersucht werden. Zunächst hat man

Satz 22. *Die beiden charakteristischen Gleichungen eines ursprünglichen Zahlensystems sind Potenzen einer und derselben irreductibeln Gleichung.*

Denn aus der Existenz zweier verschiedener irreductibler Theiler der charakteristischen Gleichungen würde nach Satz 15 folgen, dass dem Zahlensystem zwei verschiedene Formen mit Polareigenschaft entstammen; dasselbe wäre dann nach Satz 10 kein ursprüngliches. Da die charakteristischen Gleichungen stets von gleichem Grade sind, so sind sie in diesem Falle identisch.

Satz 23. *Ein Zahlensystem, dessen Ranggleichung irreductibel ist, und welches sich aus dem linearen Coefficienten der Ranggleichung erzeugen lässt, ist ein ursprüngliches.*

Denn ein begleitendes Zahlensystem müsste mit dem gegebenen Zahlensystem die Ranggleichung gemein haben, da letztere irreductibel ist. Dann würde auch der lineare Coefficient der Ranggleichung dem begleitenden System entstammen; da derselbe aber das gegebene System erzeugt, so muss jedes begleitende System mit dem gegebenen System identisch, letzteres also ursprünglich sein.



Satz 24. *Die Ranggleichung eines ursprünglichen Zahlensystems ist irreductibel.*

Es sei

$$(5) \qquad \omega^m - h_1\omega^{m-1} + \cdots \pm h_m = 0$$

der irreductible Theiler der charakteristischen Gleichung eines ursprünglichen Zahlensystems. Aus dem linearen Coefficienten $h_1$, dem eine Form mit Polareigenschaft zugehört, muss sich das System erzeugen lassen. Ersetzt man nun $u$ durch die reciproke Zahl $\bar{u}$, so geht nach Punkt 4 des dritten Paragraphen $h_1(u)$ in:

$$(6) \qquad h_1(\bar{u}) = \frac{h_{m-1}(u)}{h_m(u)}$$

über. Setzt man dann $u = v \cdot w$, so wird $\bar{u} = \bar{w} \cdot \bar{v}$ und nach Punkt 5 desselben Paragraphen wird

$$(7) \qquad h_1(\overline{wv}) = \frac{h_{m-1}(\bar{v} \cdot \bar{w})}{h_m(\bar{v})\, h_m(\bar{w})}.$$

Setzt man hier $n$ linear unabhängige Zahlen für $w$, so erhält man $n$ linear unabhängige Formen von $\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n$, dargestellt als rationale Functionen von $v_1 \ldots v_n$ mit dem gemeinsamen Nenner $h_m(v)$. Nun ist nach Satz 17 der kleinste gemeinsame Nenner von $\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n$ das von $\omega$ freie Glied der Ranggleichung. Es muss also die Ranggleichung des Systems ein Theiler der Gleichung (5) sein; da letztere aber irreductibel ist, so ist die Ranggleichung mit ihr identisch.

Satz 25. *Die verschiedenen irreductibeln Theiler einer charakteristischen Gleichung eines Zahlensystems sind die Ranggleichungen der sämmtlichen das Zahlensystem begleitenden ursprünglichen Systeme.*

Denn da nach dem 21. Satze die Ranggleichung eines begleitenden Systems die Ranggleichung des gegebenen Zahlensystems theilt und letztere nach dem 16. Satze wiederum die charakteristischen Gleichungen des Zahlensystems theilt, so wird jede Ranggleichung eines begleitenden ursprünglichen Systems Theiler der charakteristischen Gleichungen des gegebenen Systems sein. Andererseits erzeugt der lineare Coefficient jedes irreductibeln Theilers einer charakteristischen Gleichung ein begleitendes System, dessen Ranggleichung eben dieser irreductible Theiler ist und welches demnach ursprünglich ist. Es besitzt also auch eine charakteristische Gleichung eines Zahlensystems keine andern irreductibeln Theiler, als solche, die Ranggleichungen der begleitenden ursprünglichen Systeme sind.

Daneben ergeben sich die Corollare:

Corollar I. *Jeder irreductible Theiler einer charakteristischen Gleichung ist Theiler der andern charakteristischen Gleichung und der Ranggleichung.*

Corollar II. *Die Coefficienten einer charakteristischen Gleichung sind homogene rationale Functionen nur von den Parametern der Zahlen der begleitenden ursprünglichen Systeme.*

In der That ist jeder irreductible Theiler einer characteristischen Gleichung als Ranggleichung eines ursprünglichen Systems nur abhängig von den Parametern einer Zahl des begleitenden ursprünglichen Systems.

## § 7.

### Die Killing'sche Gleichung eines ursprünglichen Zahlensystems.

Um vollständige Kenntniss von den Eigenschaften der ursprünglichen Zahlensysteme zu erhalten, muss man die Killing'sche Gleichung derselben ebenfalls in Betracht ziehen.

Bezeichnet man der Kürze halber diejenige Gleichung, deren Wurzeln die sämmtlichen Differenzen zwischen den Wurzeln einer andern Gleichung sind, als die Wurzeldifferenzengleichung der letzteren, so kann man zeigen:

Satz 26. *Die Killing'sche Gleichung eines Zahlensystems, das nur ein einziges begleitendes ursprüngliches System besitzt, ist Potenz der Wurzeldifferenzengleichung der Ranggleichung des begleitenden ursprünglichen Systems.*

Ist die Ranggleichung des begleitenden ursprünglichen Systems

$$\omega^m - h_1 \omega^{m-1} + \cdots \pm h_m = 0, \tag{1}$$

so ist die charakteristische Gleichung des gegebenen Zahlensystems Potenz dieser Gleichung und jede nicht verschwindende Wurzel der Killing'schen Gleichung nach Satz 18 Differenz zwischen Wurzeln der Gleichung (1). Nach dem Corollar desselben Satzes ist ferner die Killing'sche Gleichung des gegebenen Systems, abgesehen von den verschwindenden Wurzeln, Potenz der Wurzeldifferenzengleichung von (1). Es soll nun noch gezeigt werden, dass dies auch mit Rücksicht auf die verschwindenden Wurzeln statt hat.

Bildet man also die Wurzeldifferenzengleichung von (1):

$$\varrho^{m^2} - d_2 \varrho^{m^2-2} + \cdots = 0 \tag{2}$$

und entwickelt die Killing'sche Gleichung:

$$\left| \sum_l (a^i_{kl} - a^i_{lk})\, u_l - \delta_{ik}\varrho \right| = 0 \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots n \tag{3}$$



nach Potenzen von $\varrho$ in

$$\varrho^n - c_2 \varrho^{n-2} + \cdots = 0, \tag{4}$$

so ist der Quotient $c_2 : d_2$ eine ganze Zahl die anzeigt, wie oft jede nicht verschwindende Wurzel von (2) Wurzel von (4) ist. Der Coefficient $d_2$ der Gleichung (2) durch die Coefficienten der Gleichung (1) ausgedrückt, beträgt

$$d_2 = -2mh_2 + (m-1)\, h_1^2. \tag{5}$$

Durch dieselben Grössen muss sich der Coefficient $c_2$ der Killing'schen Gleichung ausdrücken lassen. Aus (3) findet man

$$2c_2 = \sum_{s,t,k,l} (a^s_{tk} - a^s_{kt})(a^t_{sl} - a^t_{ls})\, u_k u_l \qquad (s,\ t,\ k,\ l = 1 \ldots n)$$

und daraus

$$c_2 = \sum_{s,t,k,l} a^s_{tk} a^t_{ls}\, u_k u_l - \sum_{s,t,k,l} a^s_{kt} a^t_{sl}\, u_k u_l \qquad (s,\ t,\ k,\ l = 1 \ldots n). \tag{6}$$

Den Werth des ersten Theiles dieses Ausdrucks erhält man, wenn man in dem linearen Coefficienten der charakteristischen Gleichung $u$ durch $u^2$ ersetzt; derselbe ist demnach

$$\frac{n}{m}(-2h_2 + h_1^2).$$

Was den zweiten Theil des Ausdrucks anlangt, so muss auch er durch $h_1$ und $h_2$ darstellbar sein, also nach dem Corollar II des Satzes 25 nur von den Parametern einer Zahl des begleitenden ursprünglichen Systems abhängen. Sein Werth erschliesst sich aus der Bemerkung, dass aus der Form

$$\sum_{s,t,l} a^s_{kt} a^t_{sl}\, u_l \qquad (s,\ t,\ l = 1 \ldots n) \tag{7}$$

durch die Substitution $u = vw$ eine Form mit Polareigenschaft hervorgeht und desgleichen aus der Form

$$\sum_{s,t,k} a^s_{kt} a^t_{sl}\, u_k \qquad (s,\ t,\ k = 1 \ldots n). \tag{7a}$$

Es ist also der zweite Theil des Ausdrucks (6) eine quadratische Form solcher Grössen, denen Formen mit Polareigenschaft entsprechen und die linear aus den Parametern einer Zahl des begleitenden ursprünglichen Systems gebildet sind. Die einzige solche Grösse ist aber $h_1$, und es wird demzufolge der zweite Theil von (6) $\tau h_1^2$ werden, wenn mit $\tau$ eine noch näher zu bestimmende Constante bezeichnet wird. Es ist also:

$$c_2 = \frac{n}{m}(-2h_2 + h_1^2) + \tau h_1^2,$$

und da $c_2$ mit $d_2$ proportional sein muss, so ist $\tau = -\frac{1}{m^2}$ und

$$c_2 = \frac{n}{m^2} \cdot d_2. \tag{8}$$

Es ist also $\frac{n}{m^2}$ eine ganze Zahl und die Killing'sche Gleichung (4) ist die $\frac{n}{m^2}$ te Potenz der Wurzeldifferenzengleichung der Gleichung (1). Die Anzahl der verschwindenden Wurzeln der Killing'schen Gleichung ist dann durch $\frac{n}{m}$ gegeben. —

Handelt es sich nun darum, die Killing'sche Gleichung eines ursprünglichen Zahlensystems aufzufinden, so braucht man nach dem eben bewiesenen Satze nur die Anzahl der verschwindenden Wurzeln derselben zu kennen. Mit Rücksicht darauf, dass ein ursprüngliches Zahlensystem aus einer Form mit Polareigenschaft erzeugt wird, kann man den 19. Satz heranziehen. Nach diesem Satz muss die Anzahl der verschwindenden Wurzeln der Killing'schen Gleichung eines ursprünglichen Zahlensystems der Anzahl der mit einer allgemein gewählten Zahl des Systems vertauschbaren Zahlen gleich sein. Diese Anzahl wird zufolge nachstehenden Satzes gefunden:

Satz 27. *In einem ursprünglichen Zahlensystem bilden die linear unabhängigen Potenzen der Zahl $u$ das volle System linear unabhängiger mit $u$ vertauschbarer Zahlen.*

Ist nämlich die Ranggleichung des ursprünglichen Systems, die nach dem 24. Satze irreductibel ist, die Gleichung:

$$\omega^m - h_1(u)\,\omega^{m-1} + \cdots \pm h_m(u) = 0, \tag{9}$$

so hat jede mit $u$ vertauschbare Zahl $v$ die beiden Relationen

$$\begin{aligned} v^m - h_1(v)\,.\,v^{m-1} + \cdots \pm h_m(v)\,.\,v^0 &= 0, \\ u^m v^m - h_1(uv)\,.\,u^{m-1} v^{m-1} + \cdots \pm h_m(uv)\,.\,v^0 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

zu befriedigen. Durch Anwendung des Verfahrens, das zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers zweier rationaler Functionen dient, kann man aus diesen beiden Relationen eine dritte herleiten, die in $v$ von möglichst geringem Grade ist. Bei Anwendung dieses Verfahrens aber kann man $v$ wie eine gewöhnliche Grösse, $u$ wie eine Wurzel der Ranggleichung behandeln. Setzt man noch in Stelle von $v$ die Zahl $v^0 + \lambda v$ und ersetzt in den hierdurch umgeformten Relationen (10) die Potenzen von $v^0 + \lambda v$ durch die gleichhohen Potenzen einer gewöhnlichen Grösse $x$, die Potenzen von $u$ durch die gleichhohen Potenzen einer Wurzel $\omega$ der Ranggleichung, so geht die beschriebene Aufgabe in die über, die gemeinsamen Wurzeln der Gleichungen:



$$\begin{aligned} x^m - h_1(v^0 + \lambda v)\,x^{m-1} + \cdots \pm h_m(v^0 + \lambda v) &= 0, \\ \omega^m x^m - h_1(u + \lambda uv)\,\omega^{m-1} x^{m-1} + \cdots \pm h_m(u + \lambda uv) &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

aufzufinden. Diese Gleichungen können aber nicht mehr als eine gemeinsame Wurzel haben, da sie für $\lambda = 0$ in

$$\begin{aligned} (x-1)^m &= 0, \\ \omega^m x^m - h_1(u)\,\omega^{m-1} x^{m-1} + \cdots \pm h_m(u) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

übergehen, und da wegen der Irreductibilität der Ranggleichung die zweite Gleichung (11) nur eine Wurzel $x = 1$ hat. Die gemeinsame Wurzel der Gleichungen (10) kann, da sie rational durch die Coefficienten beider Gleichungen dargestellt wird, in die Form

$$x = p_0 + p_1\omega + \cdots + p_{m-1}\omega^{m-1}$$

gebracht werden. Es ist also auch

$$v^0 + \lambda v = p_0 u^0 + p_1 u + \cdots + p_{m-1} u^{m-1}, \tag{12}$$

womit der Satz, dass jede mit $u$ vertauschbare Zahl als lineare Form der niedrigsten unabhängigen positiven Potenzen von $u$ darstellbar ist, bewiesen ist.

Es ist danach mit Rücksicht auf den Satz 19 die Anzahl der verschwindenden Wurzeln der Killing'schen Gleichung eines ursprünglichen Zahlensystems gleich dem Grade der Ranggleichung des Zahlensystems; und unter Heranziehung des 26. Satzes folgt:

Satz 28. *Die Killing'sche Gleichung eines ursprünglichen Zahlensystems ist die Wurzeldifferenzengleichung der Ranggleichung.*

Da ferner der Grad der Killing'schen Gleichung des Zahlensystems gleich der Anzahl der Grundzahlen des Zahlensystems ist, so folgt weiter:

Satz 29. *Die Anzahl der Grundzahlen eines ursprünglichen Zahlensystems ist gleich dem Quadrat des Grades der Ranggleichung.*

Es sind dann auch die charakteristischen Gleichungen des ursprünglichen Zahlensystems identisch mit der ersten Potenz der Ranggleichung.

## § 8.

### Die Normalform des ursprünglichen Zahlensystems.

Es kommt nun darauf an, eine Normalform für die Productgleichungen eines ursprünglichen Zahlensystems zu finden. Zu einer solchen gelangt man, ausgehend von den Lösungen der Gleichung

$$\omega\,.\,x = xu. \tag{1}$$

Zunächst sei das vorgelegte Zahlensystem ein ganz beliebiges. Damit die Gleichung (1) eine Lösung besitze, muss $\omega$ eine Wurzel einer charakteristischen Gleichung sein. Verschwinden für diesen Werth von $\omega$ alle Unterdeterminanten der Determinante

$$\left|\sum_l a^i_{kl}\, u_l - \delta_{ik}\,\omega\right| \qquad (i,\ k,\ l = 1\ \ldots\ n)$$

bis ausschliesslich zur $r^{\text{ten}}$ Ordnung, so besitzt die Gleichung (1) $r$ linear unabhängige Lösungen

(2) $$x^{(1)}\ \ldots\ x^{(r)}.$$

Es bilden aber auch die Zahlen

(3) $$v\,x^{(1)}\ \ldots\ v\,x^{(r)}$$

ein volles System linear unabhängiger Lösungen der Gleichung (1), müssen sich daher linear aus den Lösungen (2) zusammensetzen lassen in der Form

(4) $$v\,x^{(i)} = \sum_k v_{ki}\, x^{(k)} \qquad (i,\ k = 1\ \ldots\ r),$$

wo die Grössen $v_{ki}$ lineare Formen von $v_1\ \ldots\ v_n$ sind. Wird statt $v$ das Product $v\,w$ gesetzt, so ergiebt sich eine doppelte Darstellung der Lösungen von (1), nämlich:

(5) $$v\,w\,x^{(i)} = \sum_k (v\,w)_{ki}\, x^{(k)} \qquad (i,\ k = 1\ \ldots\ r)$$

und

(6) $$v\,w\,x^{(i)} = \sum_{k,l} v_{kl}\, w_{li}\, x^{(k)} \qquad (i,\ k,\ l = 1\ \ldots\ r),$$

woraus

(7) $$(v\,w)_{ki} = \sum_l v_{kl}\, w_{li} \qquad (i,\ k,\ l = 1\ \ldots\ r)$$

zu schliessen ist. Es können dann durch Wahl eines bestimmten Werthes von $u$ die von $u$ abhängigen Coefficienten der linearen Formen $v_{ki}$ und $w_{ki}$ constant gemacht werden. Dann bilden die linear unabhängigen unter den Formen $v_{ik}$ die Parameter einer Zahl eines begleitenden Systems, dessen Productgleichungen die linear unabhängigen unter den Gleichungen (7) sind.

Es sei nun das vorgelegte Zahlensystem ein ursprüngliches mit $m^2$ Grundzahlen. Die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der Gleichung (1) kann dann nicht mehr als $m$ betragen, da die charakteristische Gleichung je $m$ gleiche Wurzeln hat; sie kann aber auch nicht weniger als $m$ betragen, weil sonst aus den Gleichungen (7) die Existenz eines begleitenden Systems mit weniger als $m^2$ Grundzahlen folgen würde. Es ist also $r = m$. Wie die $m^2$ Formen $v_{ki}$ aus den Parametern $v_1\ \ldots\ v_n$ linear zusammengesetzt sind, so lassen sich umgekehrt die Parameter $v_1\ \ldots\ v_n$ linear aus den $v_{ki}$ zusammensetzen.



Es kann daher die Basis $e_1\ \ldots\ e_n$ des ursprünglichen Zahlensystems durch eine Basis $e_{ik}$ $(i,\ k = 1\ \ldots\ m)$ ersetzt werden, so dass die Zahl $x$:

(8) $$x = \sum_{i,k} x_{ik}\, e_{ik} \qquad (i,\ k = 1\ \ldots\ m)$$

wird, und die Productgleichungen des Zahlensystems:

(9) $$x'_{ik} = \sum_l x_{il}\, u_{lk} \qquad (i,\ k,\ l = 1\ \ldots\ m).$$

Man hat also den Satz:

Satz 30. *Die Basis jedes ursprünglichen Zahlensystems von $m^2$ Grundzahlen kann so gewählt werden, dass die Productgleichungen die Gestalt*

$$x'_{ik} = \sum_l x_{il}\, u_{lk} \qquad (i,\ k,\ l = 1\ \ldots\ m)$$

*annehmen.*

## III. Abschnitt.

### Zahlensysteme und zu ihnen gehörige Gruppen.

#### § 1.

#### Beziehungen zur Theorie der Transformationsgruppen.

Nach Erledigung der ursprünglichen Zahlensysteme kann die Untersuchung der übrigen Zahlensysteme in Angriff genommen werden.

Es macht sich dabei sehr bald das Bedürfniss nach einer erweiterten Auffassung des Systems der Productgleichungen eines Zahlensystems geltend; man erzielt eine bedeutende Vereinfachung, wenn man sich von vornherein jetzt eine allgemeinere Aufgabe stellt, die der Theorie der Transformationsgruppen entspringt. Zuvörderst soll daher soviel als erforderlich über diejenigen Transformationsgruppen, die hier in Betracht kommen und über die Beziehung ihrer Theorie zur Theorie der Zahlensysteme berichtet werden.

Durch die $m$ Gleichungen:

(1) $$x'_i = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i,\ k = 1\ \ldots\ m),$$

deren Coefficienten lineare Formen von $n$ Parametern $u_1\ \ldots\ u_n$ sind, wird eine Schaar linearer Transformationen der Grössen $x_1\ \ldots\ x_m$ in $x'_1\ \ldots\ x'_m$ definirt. *Ergeben irgend zwei Transformationen der Schaar, nach einander ausgeführt*

$$x_i'' = \sum_l b_{il}(u)\, x_l' \qquad (i,\ l = 1 \ldots m),$$

$$x_l' = \sum_k b_{lk}(v)\, x_k \qquad (k,\ l = 1 \ldots m)$$

*immer wieder eine Transformation der Schaar, so bilden sämmtliche Transformationen der Schaar eine Gruppe.* Damit dies stattfinde, müssen $n$ Grössen $v_1' \ldots v_n'$ auffindbar sein, die den Gleichungen

$$(2) \qquad b_{ik}(v') = \sum_l b_{il}(u)\, b_{lk}(v) \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots m)$$

genügen. Es werden $x_1 \ldots x_m$ die Veränderlichen, $u_1 \ldots u_n$ die Parameter der Gruppe genannt.

Als wesentliche Bedingungen sind die beiden folgenden zu betrachten:

1) Die Grössen $b_{ik}(u)$ lassen sich nicht als lineare Formen von weniger als $n$ Parametern darstellen.

2) Die Determinante $|b_{ik}(u)|$ verschwindet nicht identisch.

Der ersten dieser Bedingungen zufolge müssen sich $u_1 \ldots u_n$ aus den $b_{ik}(u)$ berechnen lassen. Es müssen sich also auch aus den Gleichungen (2) die Parameter $v_1' \ldots v_n'$ als bilineare Formen von $u_1 \ldots u_n$ und $v_1 \ldots v_n$ berechnen lassen:

$$(3) \qquad v_i' = \sum_{k,l} a^i_{kl}\, u_k v_l \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots n).$$

Zwischen den constanten Coefficienten dieser Gleichungen müssen zufolge der identischen Gleichungen

$$\sum_{j,l} \big(b_{ij}(w) \,.\, b_{jl}(u)\big) \,.\, b_{lk}(v) = \sum_{j,l} b_{ij}(w) \,.\, \big(b_{jl}(u)\, b_{lk}(v)\big)$$
$$(i,\ j,\ k,\ l = 1 \ldots m)$$

Beziehungen bestehen; dieselben sind, wie leicht ersichtlich, die folgenden

$$(4) \qquad \sum_s a^i_{sl}\, a^s_{jk} = \sum_s a^i_{js}\, a^s_{kl} \qquad (i,\ j,\ k,\ l,\ s = 1 \ldots n).$$

Setzt man für den Augenblick:

$$c_{ik}(u) = \sum_j a^i_{jk}\, u_j \qquad (i,\ k,\ j = 1 \ldots n)$$

und

$$u_i' = \sum_{k,l} a^i_{kl}\, w_k u_l \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots n).$$



so folgt aus den Gleichungen (4):

$$(4\text{a}) \qquad c_{il}(u') = \sum_s c_{is}(w)\, c_{sl}(u) \qquad (i,\ l,\ s = 1 \ldots n).$$

Es definiren also auch die Gleichungen (3) eine Gruppe, deren Veränderliche $v_1 \ldots v_n$ sind: *die Parametergruppe der Gruppe* (1).

Die Bedingung, dass die Determinante $|b_{ik}(u)|$ nicht identisch verschwindet, verlangt die Auflösbarkeit der Gleichungen (1) nach $x_1 \ldots x_m$. Es sind daher auch die Gleichungen (2) im Allgemeinen sowohl nach den $b_{ik}(u)$, als auch nach den $b_{ik}(v)$ auflösbar. Da sich alsdann auch $u_1 \ldots u_n$ als rationale Functionen von $v_1' \ldots v_n'$ und $v_1 \ldots v_n$, oder $v_1 \ldots v_n$ als rationale Functionen von $v_1' \ldots v_n'$ und $u_1 \ldots u_n$ darstellen lassen, so müssen auch die Gleichungen (3) im Allgemeinen auflösbar sein, sowohl nach $u_1 \ldots u_n$, als auch nach $v_1 \ldots v_n$. Die Determinanten

$$(5) \qquad \Big|\sum_l a^i_{kl}\, v_l\Big| \quad \text{und} \quad \Big|\sum_l a^i_{lk}\, u_l\Big| \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots n)$$

dürfen daher nicht identisch verschwinden. Es wird dann auch eine Transformation der Gruppe mit den Parametern $(u^0)_1 \ldots (u^0)_n$ geben, die jedes Werthsystem der Veränderlichen $x_1 \ldots x_m$ in sich selbst transformirt, die *identische Transformation.* Die Gleichungen (3), deren Coefficienten den Bedingungen (4) genügen und für die die Determinanten (5) nicht identisch verschwinden, bilden das System der Productgleichungen eines Zahlensystems.

Es lässt sich also die Beziehung, in der die Gruppe (1) zu einem Zahlensystem steht, in folgende Worte fassen:

Satz 31. *Besitzen die Gleichungen einer Gruppe linearer und homogener Transformationen Coefficienten, die lineare Formen der Parameter sind, so bilden die Gleichungen der ihr zugehörigen Parametergruppe das System der Productgleichungen eines Zahlensystems.*

Die Gruppen der hier betrachteten besondern Art sollen *zu Zahlensystemen gehörige Gruppen* genannt werden. Jedem Werthsystem $u_1 \ldots u_n$ der Parameter der Gruppe entspricht eine Zahl $u$ des Zahlensystems; und zwar erhält man, wenn nach einer Transformation mit den Parametern $v_1 \ldots v_n$ eine Transformation mit den Parametern $u_1 \ldots u_n$ ausgeführt wird, eine Transformation, deren Parameterwerthe dem Producte der Zahlen $u$ und $v$ entsprechen. Der identischen Transformation der Gruppe entspricht die durch den Satz 1 definirte Zahl $u^0$. —

Man kann dem Satze des vorigen Paragraphen, von dem durch das bisherige bezeichneten Gesichtspunkte aus, die Fassung geben:

Satz 32. *Die Productgleichungen eines ursprünglichen Zahlensystems mit $m^2$ Grundzahlen sind die Gleichungen der Parameter-*

*gruppe der allgemeinen linearen homogenen Gruppe von m Veränderlichen.*

Als allgemeine lineare homogene Gruppe wird eine Gruppe:

$$x_i' = \sum_k u_{ik} x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m) \tag{6}$$

bezeichnet, deren Coefficienten sämmtlich von einander unabhängig sind. Die Gleichungen der Parametergruppe derselben sind:

$$v_{ik}' = \sum_l u_{il} v_{lk} \qquad (i, k, l = 1 \ldots m), \tag{7}$$

und diese sind gleichzeitig die Productgleichungen eines in der Normalform vorliegenden ursprünglichen Zahlensystems von $m^2$ Grundzahlen. — Es sei an dieser Stelle noch der später gelegentlich zur Verwendung kommende Begriff einer Untergruppe, soweit letztere zu einem Zahlensystem gehört, besprochen.

Werden die Parameter einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe

$$x_i' = \sum_k b_{ik}(u) x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m) \tag{8}$$

linearen Transformationen unterworfen, so entspricht jeder solchen eine Aenderung der Basis des zugehörigen Zahlensystems. Es kann nun eintreten, dass die Parameter $u_1 \ldots u_r, u_{r+1} \ldots u_n$ der Gruppe sich so wählen lassen, dass vermöge der Gleichungen der Parametergruppe

$$v_i' = \sum_{k,l} a_{kl}^i u_k v_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n),$$

wenn

$$u_{r+1} = \cdots = u_n = 0$$

und

$$v_{r+1} = \cdots = v_n = 0$$

gesetzt wird, auch

$$v_{r+1}' = \cdots = v_n' = 0$$

wird. Das Nullsetzen der Grössen $u_{r+1} \ldots u_n$ mag in den Coefficienten der Gruppe (8) dadurch angedeutet werden, dass in ihnen $u$ durch $\mathfrak{u}$ ersetzt wird. Verschwindet nun die Determinante

$$|b_{ik}(\mathfrak{u})| \qquad (i, k = 1 \ldots m)$$

nicht identisch, so bilden die Gleichungen

$$x_i' = \sum_k b_{ik}(\mathfrak{u}) x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m) \tag{9}$$

die Gleichungen einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe. Man überzeugt sich leicht, dass die Gleichungen (9) alle hierzu erforderlichen Eigenschaften aufweisen. Es wird dann *die Gruppe* (9) *eine Untergruppe der Gruppe* (8) genannt, und zwar eine zu einem Zahlensystem gehörige Untergruppe. Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass jede zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe in $m$ Veränderlichen Untergruppe der allgemeinen linearen und homogenen Gruppe in $m$ Veränderlichen ist.



## § 2.

### Begleitende Gruppen.

Die nähere Untersuchung der zu Zahlensystemen gehörigen Gruppen stützt sich hauptsächlich auf den Begriff der begleitenden Gruppen.

Lassen sich die Veränderlichen einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe so wählen, dass die Gleichungen der Gruppe die Gestalt

$$\begin{aligned} x_i' &= \sum_k b_{ik}(u) x_k \qquad (i, k = 1 \ldots p), \\ x_{p+i}' &= \sum_k b_{p+i,k}(u) x_k \qquad \binom{i = 1 \ldots m-p}{k = 1 \ldots m} \end{aligned} \tag{1}$$

erhalten, so definiren die $p$ ersten dieser Gleichungen ebenfalls eine Gruppe. Die Bedingungen hierfür, nämlich die Existenz eines Gleichungensystems

$$b_{ik}(v') = \sum_l b_{il}(u) b_{lk}(v) \qquad (i, k, l = 1 \ldots p) \tag{2}$$

und die Auflösbarkeit der $p$ Gleichungen nach $x_1 \ldots x_p$ sind bereits unter den Bedingungen der Gruppeneigenschaft von (1) enthalten. *Es soll die so erhaltene Gruppe eine die Gruppe* (1) *begleitende Gruppe genannt werden.* Ebenso zeigt sich, dass auch die Gleichungen

$$x_{p+i}' = \sum_k b_{p+i,p+k}(u) x_{p+k} \qquad (i, k = 1 \ldots m-p) \tag{3}$$

eine Gruppe definiren. Dieselbe soll als *eine Nebengruppe der Gruppe* (1) bezeichnet werden.

Durch einen, der Erzeugung begleitender Zahlensysteme analogen, Process lassen sich begleitende Gruppen einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe auffinden.

Bildet man eine lineare Form der abhängigen Veränderlichen der, in allgemeiner Form vorgelegten, Gruppe

$$x_i' = \sum_k b_{ik}(u) x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m), \tag{4}$$

so ist diese eine bilineare Form der unabhängigen Veränderlichen und der Parameter:

$$(5)\qquad \sum_i \alpha_i x_i' = \sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots m).$$

Definirt man die Parameter $u_1' \ldots u_n'$ durch die Gleichungen

$$b_{ik}(u') = \sum_l b_{il}(w)\, b_{lk}(u) \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots m)$$

und trägt sie in die Gleichung (5) ein, so geht letztere mit Rücksicht auf (4) in

$$(6)\qquad \sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(w)\, x_k' = \sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(u')\, x_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots m)$$

über. Aus dieser Gleichung wird eine begleitende Gruppe von (4) auf folgendem Wege gefunden. Lassen sich die $m$ Formen

$$\sum_i \alpha_i b_{ik}(u) \qquad (i,\ k = 1 \ldots m)$$

durch $p$ unabhängige lineare Formen von $u_1 \ldots u_n$ linear darstellen, etwa durch $\beta_1(u) \ldots \beta_p(u)$, so wird aus (6):

$$(7)\qquad \sum_j \beta_j(w)\, z_j' = \sum_j \beta_j(u')\, z_j \qquad (j = 1 \ldots m)$$

wo $z_1 \ldots z_p$ lineare Formen von $x_1 \ldots x_m$ sind. Durch lineare Transformation der Veränderlichen der Gruppe kann übrigens erreicht werden, dass diese Formen gerade gleich $x_1 \ldots x_p$ werden, so dass aus (7)

$$(8)\qquad \sum_j \beta_j(w)\, x_j' = \sum_j \beta_j(u')\, x_j \qquad (j = 1 \ldots m)$$

hervorgeht. Es lassen sich dann $w_1 \ldots w_n$ so wählen, dass alle Grössen $\beta_1(w) \ldots \beta_p(w)$ bis auf $\beta_i(w)$ verschwinden. Lässt man $i$ die Zahlen $1 \ldots p$ durchlaufen und beachtet, dass die Grössen $\beta_j(u')$ lineare Formen von $u_1 \ldots u_n$ werden, so folgt aus (8) das Gleichungensystem

$$(9)\qquad x_i' = \sum b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots p),$$

durch welches eine begleitende Gruppe von (4) definirt wird. Bezeichnet man diese Herleitung einer begleitenden Gruppe als Erzeugung derselben aus einer Form, so kann man sagen:

Satz 33. *Lässt sich eine lineare Form der abhängigen Veränderlichen einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe als bilineare Form von $p$ unabhängigen linearen Formen der Parameter und also auch von $p$ unabhängigen linearen Formen der unabhängigen Veränderlichen darstellen, so erzeugt sie eine Gruppe in $p$ Veränderlichen, die die gegebene Gruppe begleitet.*



Die Analogie mit dem Satze 7 fällt in die Augen. Uebrigens ist die Identität der gegebenen Gruppe mit der begleitenden Gruppe nicht ausgeschlossen. Ferner hat man in Analogie des Satzes 8 den Satz:

Satz 34. *Jede erzeugende Form einer begleitenden Gruppe ist lineare Form der Veränderlichen der begleitenden Gruppe.*

Denn die Gleichung (8) ist nur eine andere Form der Gleichung (6); es ist also:

$$\sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(w)\, x_k' = \sum \beta_j(w)\, x_j' \qquad \begin{pmatrix} i,\ k = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots p \end{pmatrix}$$

und wenn für $w_1 \ldots w_n$ die Parameter der identischen Transformation gesetzt werden, so folgt hieraus:

$$(10)\qquad \sum_i \alpha_i x_i' = \sum_j \beta_j(u^0)\, x_j' \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots p \end{pmatrix},$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

## § 3.

### Transitivität und Intransitivität.

Es machen sich, wie bei ähnlichen Untersuchungen, so auch hier die Unterschiede zwischen transitiven und intransitiven Gruppen geltend; doch gelingt es die Behandlung letzterer auf die ersterer zurückzuführen.

Eine Gruppe heisst transitiv, wenn es im Allgemeinen möglich ist, vermittelst einer Transformation derselben ein beliebig vorgegebenes Werthsystem der Veränderlichen $x_1 \ldots x_m$ in ein anderes beliebig vorgegebenes Werthsystem $x_1' \ldots x_m'$ überzuführen; sie heisst intransitiv, wenn dies im Allgemeinen nicht möglich ist.

Es ist danach eine zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe

$$(1)\qquad x_i' = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots m)$$

transitiv, wenn $x_1' \ldots x_m'$ als lineare Formen blos von $u_1 \ldots u_n$ betrachtet, von einander unabhängig sind; sie ist intransitiv, wenn $x_1' \ldots x_m'$ durch weniger als $m$ Formen von $u_1 \ldots u_n$, etwa $m - p$ unabhängige, linear sich darstellen lassen. —

Um dieser Frage näher zu treten, kann man die in folgender Weise aus der Gruppe (1) derivirte Gruppe benutzen.

Es seien $e_1 \ldots e_m$ $m$ veränderliche Grössen, die bei jeder linearen

Transformation von $x_1 \ldots x_m$ in $x_1' \ldots x_m'$ sich derart in $c_1' \ldots c_m'$ transformiren, dass

$$\sum_i c_i x_i = \sum_i c_i' x_i' \qquad (i = 1 \ldots m)$$

wird. Unterwirft man also die Grössen $x_1 \ldots x_m$ einer Transformation der Gruppe (1), so unterliegen die Grössen $c_1 \ldots c_m$ der Transformation

$$(2) \qquad c_k = \sum_i b_{ik}(u)\, c_i' \qquad (i,\ k = 1 \ldots m).$$

Die durch die Gleichungen (2) definirte Gruppe mag *die zur Gruppe* (1) *conjugirte Gruppe* genannt werden.

Man sieht sofort ein, dass, falls die Gruppe (1) eine begleitende Gruppe besitzt, auch ihre conjugirte Gruppe eine solche besitzt; und zwar wird die conjugirte Gruppe der begleitenden Gruppe Nebengruppe an der conjugirten Gruppe, während die conjugirte der Nebengruppe begleitende Gruppe der conjugirten Gruppe wird. Das über die Erzeugung begleitender Gruppen aus linearen Formen der Veränderlichen Gesagte findet auch auf die conjugirte Gruppe Anwendung.

Man kann nunmehr zeigen:

Satz 35. *Jede intransitive zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe besitzt eine transitive begleitende Gruppe.*

Ist nämlich die Gruppe:

$$x_i' = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots m)$$

intransitiv, so sind die $m$ Formen von $u_1 \ldots u_n$:

$$\sum_k b_{ik}(u)\, \alpha_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots m),$$

wie auch $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ gewählt sein mögen, nicht unabhängig von einander, sondern durch weniger als $m$, etwa $m - p$ lineare unabhängige Formen von $u_1 \ldots u_n$ linear darstellbar. Dann muss nach dem 33. Satze die lineare Form der Veränderlichen der conjugirten Gruppe

$$\sum_k \alpha_k c_k = \sum_{i,k} \alpha_k b_{ik}(u)\, c_i' \qquad (i,\ k = 1 \ldots m)$$

eine begleitende Gruppe der letztern in $m - p$ Veränderlichen erzeugen; es besitzt also auch die gegebene Gruppe eine begleitende Gruppe und zwar in $p$ Veränderlichen. Eine intransitive Gruppe besitzt also stets eine nicht mit ihr identische begleitende Gruppe. Da nun jede zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe von einer solchen Gruppe begleitet wird, die selbst keine weitere begleitende Gruppe



besitzt, so kann letztere jedenfalls nicht intransitiv sein und es besitzt somit jede zu einem Zahlensystem gehörige intransitive Gruppe eine begleitende transitive Gruppe. —

Es ist bereits oben die Parametergruppe

$$(3) \qquad v_i' = \sum_{k,l} a_{kl}^i\, u_k v_l \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots n)$$

einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe ihren Eigenschaften nach in einer Weise dargestellt worden, die hier zu Statten kommt. Die Gleichungen (3) als Productgleichungen eines Zahlensystems unterliegen linearen Transformationen nur in der Weise, dass jede lineare Transformation auf alle drei Reihen von Parametern gleichzeitig ausgeführt werden muss. Sieht man jedoch die Gleichungen (3) als Gleichungen einer Gruppe mit den Veränderlichen $v_1 \ldots v_n$ an, so sind $u_1 \ldots u_n$ die Parameter der Gruppe; lineare Transformationen der Veränderlichen der Gruppe sind dann solche, die gleichzeitig blos auf die Grössen $v_1 \ldots v_n$ und $v_1' \ldots v_n'$ ausgeführt werden. Fasst man die Parametergruppe in diesem Sinne, so besteht der Satz:

Satz 36. *Jede transitive zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe lässt sich als begleitende Gruppe ihrer Parametergruppe auffassen.*

Denn ist die Gruppe

$$(4) \qquad x_i' = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots m)$$

transitiv, so lassen sich $m$ Grössen $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ so wählen, dass die $m$ Grössen

$$z_i = \sum_k b_{ik}(v)\, \alpha_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots m)$$

von einander unabhängige lineare Formen von $v_1 \ldots v_n$ sind. Setzt man dann:

$$z_i' = \sum_k b_{ik}(v')\, \alpha_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots m),$$

indem man $v_1' \ldots v_n'$ durch die Gleichungen der Parametergruppe, oder was dasselbe ist, durch die Gleichungen

$$b_{ik}(v') = \sum_l b_{il}(u)\, b_{lk}(v) \qquad (i,\ k,\ l = 1 \ldots m)$$

definirt, so wird

$$(5) \qquad z_i' = \sum_k b_{ik}(u)\, z_k \qquad (i,\ k = 1 \ldots m).$$

Man kann nun offenbar die Gruppe (4) durch die ihr an Gestalt gleiche Gruppe (5) ersetzen. Letztere ist aber eine begleitende Gruppe der Parametergruppe von (4), da ihre Veränderlichen unabhängige lineare Formen der Veränderlichen der Parametergruppe sind. —

Der Vortheil, der aus dieser Betrachtung erwächst, liegt darin, dass zur weitern Untersuchung der Gruppen diejenigen Eigenschaften ihrer Parametergruppen, die durch die Untersuchung der Zahlensysteme bis jetzt bekannt sind, herangezogen werden können.

## § 4.

## Die ursprünglichen Gruppen.

Es wird sich jetzt darum handeln, die Eigenschaften derjenigen zu Zahlensystemen gehörigen Gruppen festzustellen, die ausser sich selbst keine begleitende Gruppen besitzen.

*Die allgemeine lineare und homogene Gruppe*

$$(1)\qquad x_i' = \sum_k u_{ik} x_k \qquad (i, k = 1 \ldots p)$$

*besitzt jedenfalls keine begleitende Gruppe*, da ihre Coefficienten von einander unabhängig sind. *Sie möge, der Kürze wegen, eine ursprüngliche Gruppe genannt werden*, mit Hindeutung auf ihre Zugehörigkeit zu einem ursprünglichen Zahlensystem. Es wird sich erweisen, dass diese die einzige Gruppe ist, die keine begleitende Gruppe besitzt.

Zunächst, als Vorbereitung, sei bewiesen:

Satz 37. *Jede Gruppe, deren Parametergruppe aus den Productgleichungen mehrer ursprünglicher Zahlensysteme gebildet wird, wird von einer zu einem ursprünglichen Zahlensystem gehörigen Gruppe begleitet.*

Es sei die Parametergruppe einer solchen Gruppe

$$(2)\qquad x_i' = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m)$$

durch

$$(3)\qquad v_i' = \sum_{k,l} a^i_{kl} u_k v_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots r),$$

$$v'_{r+i} = \sum_{k,l} a^{r+i}_{r+k\, r+l} u_{r+k} v_{r+l} \qquad (i, k, l = 1 \ldots n-r)$$

gegeben, so dass die $r$ ersten Gleichungen die Productgleichungen eines ursprünglichen Zahlensystems bilden, die übrigen Gleichungen aber von den in den ersten Gleichungen vorkommenden Parametern frei sind, wie entsprechend dem Corollar des Satzes 5 nach den Auseinandersetzungen des 4. Paragraphen im ersten Abschnitt geschehen kann. Bildet man nun, wie im 2. Paragraphen dieses Abschnitts, die daselbst mit (6) bezeichnete, eine begleitende Gruppe erzeugende, Gleichung



$$(4)\qquad \sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(w) x_k' = \sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(u') x_k \qquad (i, k = 1 \ldots n)$$

und ordnet sie nach den Parametern:

$$(5)\qquad \sum_i w_i\, \gamma_i(x') = \sum_i u_i'\, \gamma_i(x) \qquad (i = 1 \ldots m),$$

so sind zunächst wegen der Form der Gleichungen (3) $u_1' \ldots u_r'$ nur von $w_1 \ldots w_r$ und $u_1 \ldots u_r$ abhängig, die übrigen Parameter $u'_{r+1} \ldots u'_n$ von diesen aber unabhängig und es werden demgemäss $\gamma_1(x') \ldots \gamma_r(x')$ bilineare Formen nur von $\gamma_1(x) \ldots \gamma_r(x)$ und $u_1 \ldots u_r$. Da somit jede lineare Form von $\gamma_1(x') \ldots \gamma_r(x')$ nur von $u_1 \ldots u_r$ abhängig sein kann, so wird eine aus einer solchen Form erzeugte Gruppe nur $u_1 \ldots u_r$ zu Parametern haben, also zu einem ursprünglichen Zahlensystem gehören; denn es sind $u_1 \ldots u_r$ Parameter einer Zahl eines ursprünglichen Zahlensystems. Selbstredend ist bei diesem Beweise vorausgesetzt worden, dass $\gamma_1(x) \ldots \gamma_r(x)$ nicht sämmtlich vermöge der Wahl von $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ verschwinden. Es liegt zudem in dieser Voraussetzung keine Beschränkung.

Weiter ist zu zeigen:

Satz 38. *Jede zu einem ursprünglichen Zahlensystem mit $p^2$ Grundzahlen gehörige Gruppe wird von einer ursprünglichen Gruppe in $p$ Veränderlichen begleitet.*

Es sei die gegebene Gruppe

$$(6)\qquad x_i' = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \ldots m)$$

und ihre Parametergruppe liege in ihrer Normalform

$$(7)\qquad v'_{gh} = \sum_j u_{gj} v_{jh} \qquad (g, h, j = 1 \ldots p)$$

vor, die zugleich die Normalform der Productgleichungen des ursprünglichen Zahlensystems ist. Zieht man behufs Erzeugung einer begleitenden Gruppe die Gleichung (5) heran, hier wegen veränderter Indexbezeichnung von der Form

$$(8)\qquad \sum_{g,h} w_{gh}\, \gamma_{gh}(x') = \sum_{g,h} u'_{gh} \gamma_{gh}(x) \qquad (g, h = 1 \ldots p),$$

so ergiebt sich aus ihr wegen

$$u'_{gh} = \sum_j w_{gj} u_{jh} \qquad (g, h, j = 1 \ldots p)$$

durch Vergleichung der Coefficienten der Grössen $w_{gh}$:

(9) $$\gamma_{gh}(x') = \sum_j u_{hj}\gamma_{gj}(x) \qquad (g, h, j = 1 \ldots p).$$

Durch lineare Transformation der Veränderlichen der Gruppe (6) kann erreicht werden, dass für einen bestimmten Werth von $g$ die Formen $\gamma_{g1}(x) \ldots \gamma_{gp}(x)$ gerade den Grössen $x_1 \ldots x_p$ gleich werden; es sind dann unter den Gleichungen (9) auch die Gleichungen

(10) $$x'_g = \sum_j u_{gj} x_j \qquad (g, j = 1 \ldots p)$$

enthalten, und durch diese wird eine begleitende ursprüngliche Gruppe von (6) definirt.

Aus dem Beweisgange lässt sich ausserdem noch schliessen:

Corollar. *Gehören zwei ursprüngliche Gruppen zu einem und demselben ursprünglichen Zahlensystem, so kann erreicht werden, dass die entsprechenden Coefficienten in beiden Gruppen gleich werden.*

Auf Grund der beiden letzten Sätze lässt sich auch die Richtigkeit des allgemeinen Satzes zeigen:

Satz 39. *Jede zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe wird von einer ursprünglichen Gruppe begleitet.*

Nach den Sätzen 35 und 36 wird jede zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe von einer Gruppe begleitet, die sich ihrerseits als eine begleitende Gruppe ihrer Parametergruppe betrachten lässt. Man kann daher zum Beweise des Satzes von einer beliebigen begleitenden Gruppe der Parametergruppe ausgehen und zeigen, dass jede solche von einer ursprünglichen Gruppe begleitet wird.

Die Gleichungen der Parametergruppe als Productgleichungen eines Zahlensystems lassen sich so ordnen, dass die $r$ ersten unter ihnen die Productgleichungen aller begleitenden ursprünglichen Zahlensysteme werden

(11) $$\begin{aligned} v'_i &= \sum_{k,l} a^i_{kl} u_k v_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots r), \\ v'_{r+i} &= \sum_{k,l} a^{r+i}_{kl} u_k v_l \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots n - r \\ k, l = 1 \ldots n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ist eine solche Anordnung getroffen, so darf keine lineare Form von $v'_1 \ldots v'_n$ unabhängig von $v_1 \ldots v_r$ sein. Denn nach dem zweiten Corollar des Satzes 25 ist die Determinante

$$\left| \sum_l a^i_{kl} v_l \right| \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

als von $\omega$ freies Glied einer charakteristischen Gleichung des Zahlensystems (11), eine Form nur von $v_1 \ldots v_r$. Wäre nun eine lineare



Form von $v'_1 \ldots v'_n$ unabhängig von $v_1 \ldots v_r$, so müsste diese Determinante, nach einem bekannten Satze, für $v_{r+1} = \cdots = v_n = 0$, also auch identisch verschwinden. Letzteres aber darf keinesfalls geschehen.

Es sei nun durch

(12) $$z'_i = \sum_k b_{ik}(u) z_k \qquad (i, k = 1 \ldots m)$$

eine begleitende Gruppe der Parametergruppe (11) gegeben. Jede lineare Form ihrer Veränderlichen $z'_1 \ldots z'_n$ ist lineare Form von $v'_1 \ldots v'_n$ und lässt sich durch

(13) $$\sum_i \alpha_i v'_i = \sum_{i,k,l} \alpha_i a^i_{kl} u_k v_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots n)$$

wiedergeben. Die Coefficienten von $u_1 \ldots u_n$ auf der rechten Seite dieser Gleichung sind lineare Formen von $z_1 \ldots z_m$ und, als gleichzeitige Formen von $v_1 \ldots v_n$, nach dem eben gezeigten von $v_1 \ldots v_r$ abhängig. Dann muss eine lineare Form von $z_1 \ldots z_m$ existiren, die nur aus $v_1 \ldots v_r$ gebildet ist. Denn wäre dies nicht der Fall, so wären $z_1 \ldots z_m$ darstellbar als linear unabhängige Formen von $v_{r+1} \ldots v_n$, die um lineare Formen von $v_1 \ldots v_r$ vermehrt sind. Da man aber, ohne die Voraussetzungen über die Form der Gleichungen (11) zu tangiren, $v_{r+1} \ldots v_n$ um beliebige Formen von $v_1 \ldots, v_r$ vermehren kann, so hätte man es in der Hand $z_1 \ldots z_m$ zu blossen Formen von $v_{r+1} \ldots v_n$ zu machen. Da dies nun nicht angeht, so muss irgend eine Form von $z_1 \ldots z_m$ als lineare Form von $v_1 \ldots v_r$ darstellbar sein.

Eine solche Form

(14) $$\sum_i \beta_i v'_i = \sum_{i,k,l} \beta_i a^i_{kl} u_k v_l \qquad (i, k, l = 1 \ldots r)$$

wird eine begleitende Gruppe von (12) erzeugen. Da aber die erzeugende Form nur die Parameter $u_1 \ldots u_r$ enthält, so wird die Parametergruppe der erzeugten Gruppe nur von den $r$ ersten Gleichungen (11) gebildet werden, also aus den Productgleichungen mehrer ursprünglicher Zahlensysteme gebildet sein. Eine Gruppe solcher Art wird nach dem 37. Satze von einer zu einem ursprünglichen Zahlensysteme gehörigen Gruppe, und eine solche nach dem 38. Satze von einer ursprünglichen Gruppe begleitet.

Es wird also auch jede Gruppe, die sich als begleitende Gruppe ihrer Parametergruppe betrachten lässt, von einer ursprünglichen Gruppe begleitet und folglich, nach den bereits oben angezogenen Sätzen 35 und 36, überhaupt jede zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe.

— Was die Auffindung einer begleitenden ursprünglichen Gruppe an einer gegebenen Gruppe anlangt, so ist diese leicht auszuführen. Man bildet von den Gleichungen der gegebenen Gruppe

(15) $$x_i' = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \dots m)$$

ausgehend, die lineare Form der Veränderlichen

(16) $$\sum_i \alpha_i x_i' = \sum_{i\,k} \alpha_i b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \dots m)$$

und bestimmt $\alpha_1 \dots \alpha_m$ so, dass in dieser Form nur noch die Parameter einer Zahl eines einzigen begleitenden ursprünglichen Zahlensystems des zur Gruppe gehörigen Zahlensystems vorkommen; dies ist möglich zufolge dem eben bewiesenen Satze.

Dann erzeugt die Form (16), wenn das zum Beweise des 38. Satzes angewandte Verfahren eingehalten wird, eine begleitende ursprüngliche Gruppe der Gruppe (15). —

## § 5.

### Untersuchung einer besondern Gruppe.

Um in den weitern allgemeinen Untersuchungen, die sich an den vorigen Paragraphen anschliessen, keine Unterbrechung durch Beweise einiger nothwendiger specieller Sätze eintreten zu lassen, soll hier die Untersuchung einer besondern Gruppe eingeschaltet werden.

Es handelt sich um die Gruppe

(1) $$\begin{aligned} x_i' &= \sum_{k=1}^{p} b_{ik}(u)\, x_k && (i = 1 \dots p), \\ x_{p+i}' &= \sum_{k=1}^{p} b_{p+i\,k}(u)\, x_k + \sum_{k=1}^{m-p} b_{p+i\,p+k}(u)\, x_k && (i = 1 \dots m-p), \end{aligned}$$

deren begleitende Gruppe und deren Nebengruppe (siehe § 2) ursprünglich sind, und zwar insbesondere um die Eigenschaften der Coefficienten $b_{p+i\,k}(u)$.

Es werde zunächst vorausgesetzt, dass die Coefficienten $b_{p+i\,k}(u)$ sich linear durch die übrigen Coefficienten ausdrücken lassen: eine Annahme, auf die nachher jede andre Bedingung, der diese Coefficienten unterworfen sein können, zurückgeführt werden wird.

Dann kann durch Hinzufügung linearer Formen von $x_1 \dots x_p$ zu $x_{p+1} \dots x_m$ erreicht werden, dass die Gruppe (1) die Gestalt:

$$\begin{aligned} x_i' &= \sum_k b_{ik}(u)\, x_k && (i, k = 1 \dots p), \\ x_{p+i}' &= \sum_k b_{p+i\,p+k}(u)\, x_{p+k} && (i, k = 1 \dots m-p) \end{aligned}$$

erhält. Dies ist ein Specialfall folgenden Satzes:



Satz 40. *Die Veränderlichen einer Gruppe, deren Parametergruppe von den Productgleichungen einer oder mehrer ursprünglichen Zahlensysteme gebildet wird, können so gewählt werden, dass sich die Gruppe als ein System von ursprünglichen Gruppen darstellt.*

Vorausgesetzt, eine solche Gruppe

(2) $$x_i' = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \dots m)$$

besitze bereits eine begleitende Gruppe von der verlangten Form, so muss gezeigt werden, dass sie ausser dieser noch eine begleitende ursprüngliche Gruppe besitzt. Die Veränderlichen der bekannten begleitenden Gruppe seien $x_1 \dots x_q$, die Parametergruppe sei so geordnet, dass die Productgleichungen jedes ursprünglichen Zahlensystems gesondert auftreten.

Bildet man dann die Gleichung

(3) $$\sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(u)\, x_k' = \sum_{i,k} \alpha_i b_{ik}(u')\, x_k \qquad (i, k = 1 \dots m)$$

so, dass $\alpha_{q+1} \dots \alpha_m$ nicht sämmtlich verschwinden, und ordnet sie nach den Parametern, so muss irgend ein Parameter mit einer linearen Form von $x_1 \dots x_m$ multiplicirt sein, die nicht blos aus $x_1 \dots x_q$ gebildet ist. Nach der Anordnung der Parametergruppe ist dieser Parameter zugleich ein Parameter einer Zahl eines der ursprünglichen Zahlensysteme, etwa des Systems:

$$v_{gh}' = \sum_j u_{gj} v_{jh} \qquad (g, h, j = 1 \dots p).$$

Dann lässt sich die Gleichung (3) in der Form

$$\sum_{g,h} w_{gh} \gamma_{gh}(x') + \dots = \sum_{g,h,j} w_{gj} u_{jh} \gamma_{gh}(x) + \dots \qquad (g, h, j = 1 \dots p)$$

schreiben, und durch Vergleichung der Coefficienten kommt:

(4) $$\gamma_{gh}(x') = \sum_j u_{hj} \gamma_{gj}(x) \qquad (g, h, j = 1 \dots p).$$

Da irgend eine der Formen $\gamma_{gh}(x)$ nicht blos von $x_1 \dots x_q$ abhängt, so wird auch irgend eine der $p$ ursprünglichen Gruppen (4) die bekannte begleitende Gruppe von (2) nicht begleiten; da sie ursprünglich ist, wird auch keine lineare Relation zwischen ihren Veränderlichen und $x_1 \dots x_q$ bestehen, da sie sonst eine begleitende Gruppe mit der bekannten begleitenden Gruppe gemein hätte; es besitzt also thatsächlich die Gruppe (2) ausser der bekannten begleitenden Gruppe noch eine weitere begleitende ursprüngliche Gruppe und damit ist zugleich gezeigt, dass sie sich als System ursprünglicher Gruppen darstellen lässt.

Insbesondere lässt sich also auch die Gruppe (1), wenn ihre Parametergruppe aus den Productgleichungen eines oder zweier ursprünglichen Zahlensysteme gebildet wird, durch zwei ursprüngliche Gruppen darstellen; zudem ist gezeigt, wie ausser der bekannten begleitenden Gruppe die zweite begleitende Gruppe gefunden wird.

Weiter ist zu zeigen:

Satz 41. *In der Gruppe:*

$$x_i' = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}(u) x_k \qquad (i = 1 \dots p),$$

$$x_{p+i}' = \sum_{k=1}^{p} b_{p+ik}(u) x_k + \sum_{k=1}^{m-p} b_{p+ip+k}(u)\, x_{p+k} \qquad (i = 1 \dots m-p)$$

*deren begleitende Gruppe und deren Nebengruppe ursprünglich sind, sind die Coefficienten $b_{p+ik}(u)$ entweder unter einander und von den übrigen Coefficienten linear unabhängig, oder sie sind sämmtlich lineare Formen der übrigen Coefficienten.*

Die allgemeinste lineare Relation, der die Grössen $b_{p+ik}(u)$ unterworfen sein können, ist von der Form

$$\text{(5)} \qquad \sum_{i,k} \alpha_{ik} b_{p+ik}(u) = f(u),$$

wo $f(u)$ eine lineare Form der Coefficienten $b_{ik}(u)$ und $b_{p+ip+k}(u)$ bedeutet. Ersetzt man in dieser Gleichung entsprechend den Gleichungen der Parametergruppe

$$b_{ik}(v') = \sum_{l} b_{il}(u)\, b_{lk}(v) \quad (i, k, l = 1 \dots m)$$

die Parameter $u_1 \dots u_n$ durch $v_1' \dots v_n'$, so entsteht aus ihr die Gleichung:

$$\sum_{i,k,l} \alpha_{ik} b_{p+il}(u)\, b_{lk}(v) + \sum_{i,k,j} \alpha_{ik} b_{p+ip+j}(u)\, b_{p+jk}(v) = f(v')$$
$$\begin{pmatrix} i, j = 1 \dots m-p \\ k, l = 1 \dots p \end{pmatrix}.$$

Setzt man hier für die Grössen $b_{p+jk}(v)$ ihre Werthe, ausgedrückt durch die $b_{ik}(v)$, die $b_{p+ip+k}(v)$ und die übrigen Parameter der Gruppe, und vergleicht dann die Coefficienten von $b_{lk}(v)$, so erhält man das System der Gleichungen



$$\text{(6)} \qquad \sum_{i} \alpha_{ik} b_{p+il}(u) = f_l^{(k)}(u) \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \dots m-p \\ k, l = 1 \dots p \end{pmatrix},$$

wo durch $f_l^{(k)}(u)$ wiederum lineare Formen der $b_{ik}(u)$ und der $b_{p+ip+k}(u)$ bezeichnet sind. In derselben Weise die Coefficienten der Grössen $b_{p+ip+j}(u)$ vergleichend, erhält man die Gleichungen

$$\text{(7)} \qquad \sum_{k} \alpha_{ik}\, b_{p+jk}(v) = \varphi_j^{(i)}(v) \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1 \dots m-p \\ k = 1 \dots p \end{pmatrix}.$$

Aus jeder Relation (5) folgt also ein System von Relationen der Form (6) und eines der Form (7); die Relationen (6) enthalten nur Grössen $b_{p+ik}(u)$ von gleichem zweiten Index, die Relationen (7) solche von gleichem ersten Index. Die linke Seite jeder Relation geht in die linke Seite einer andern Relation über, wenn man den festen Index durch einen andern ersetzt.

Legt man also ein System von Relationen der Form (6):

$$\sum_{i} \alpha_i b_{p+ik}(u) = f_k(u) \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \dots m-p \\ k = 1 \dots p \end{pmatrix}$$

derjenigen Betrachtung zu Grunde, durch die die Relationen (7) aus (5) abgeleitet werden, so erhält man ein System von Relationen, in denen beide Indices der $b_{p+ik}(u)$ fest sind, also Relationen der Form:

$$\text{(8)} \qquad b_{p+ik}(u) = f_{ik}(u) \qquad (i = 1 \dots m-p;\ k = 1 \dots p),$$

wo die Grössen $f_{ik}(u)$ ebenfalls lineare Formen der $b_{p+ip+k}(u)$ und der $b_{ik}(u)$ bedeuten. Es versteht sich von selbst, dass die rechten Seiten der Gleichungen (5)—(8) sämmtlich oder zum Theil verschwinden können. Es sind also unter Voraussetzung einer linearen Relation der Form (5) alle Coefficienten $b_{p+ik}(u)$ lineare Formen der übrigen Coefficienten.

Hält man diesen Satz mit dem vorhergehenden Satz zusammen, so sieht man, dass in der Gruppe (1) entweder die Coefficienten $b_{p+ik}(u)$ von einander und von den übrigen unabhängig sind, oder aber die Veränderlichen der Gruppe so gewählt werden können, dass diese Coefficienten sämmtlich verschwinden. Einen andern Ausdruck erhält dies Resultat, wenn der im Schluss des ersten Paragraphen dieses Abschnittes erörterte Begriff der Untergruppe herangezogen wird. Da die Coefficienten $b_{p+ik}(u)$ unabhängig sind, so können sie zum Verschwinden gebracht werden, ohne dass die übrigen Coefficienten dadurch tangirt werden und es wird durch dies ihr Verschwinden eine Untergruppe der Gruppe (1) definirt. Man hat also:

Satz 42. *Die Veränderlichen der Gruppe*

$$x'_i = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i = 1 \ldots p),$$

$$x'_{p+i} = \sum_{k=1}^{p} b_{p+i\,k}(u)\, x_k + \sum_{k=1}^{m-p} b_{p+i\,p+k}(u)\, x_{p+k} \qquad (i = 1 \ldots m-p)$$

*mit ursprünglicher begleitender und ursprünglicher Nebengruppe können so gewählt werden, dass die Gruppe die Untergruppe*

$$x'_i = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \ldots p),$$

$$x'_{p+i} = \sum_k b_{p+i\,p+k}(u)\, x_{p+k} \qquad (i, k = 1 \ldots m-p)$$

*besitzt.*

In diesen Satz ist auch der Fall mit eingeschlossen, dass die Gruppe mit ihrer Untergruppe identisch ist.

## § 6.

## Die Normalform der zu Zahlensystemen gehörigen Gruppen.

Am Schluss des vierten Paragraphen ist gezeigt worden, wie eine begleitende ursprüngliche Gruppe bei einer gegebenen Gruppe gefunden wird. Ist eine solche gefunden, so kann die gegebene Gruppe in die Form

$$(1)\qquad \begin{aligned} x'_i &= \sum_k b_{ik}(u)\, x_k && (i, k = 1 \ldots p_1),\\ x'_{p_1+i} &= \sum_k b_{p_1+i\,k}(u)\, x_k && \begin{pmatrix} i = 1 \ldots m - p_1 \\ k = 1 \ldots m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gebracht werden, so dass die $p_1$ ersten Gleichungen die begleitende ursprüngliche Gruppe wiedergeben. Sucht man dann an der zugehörigen Nebengruppe

$$x'_{p_1+i} = \sum_k b_{p_1+i\,p_1+k}(u)\, x_{p_1+k} \qquad (i, k = 1 \ldots m - p_1)$$

eine begleitende ursprüngliche Gruppe auf und führt diejenige Transformation aus, durch die die Gleichungen letzterer zu den $p_2 - p_1$ ersten Gleichungen der Nebengruppe gemacht werden, so wird durch diese Transformation die Gruppe (1) in die Form



$$x'_i = \sum_k b_{ik}(u)\, x_k \qquad (i, k = 1 \ldots p_1),$$

$$x'_{p_1+i} = \sum_k b_{p_1+i\,k}(u)\, x_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots p_2 - p_1 \\ k = 1 \ldots p_2 \end{pmatrix},$$

$$x'_{p_2+i} = \sum_k b_{p_2+i\,k}(u)\, x_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots m - p_2 \\ k = 1 \ldots m \end{pmatrix}$$

gebracht. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erlangt die Gruppe (1) die schliessliche Gestalt:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x'_i &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{ik}(u) \,.\, x_k && (i = 1 \cdots p_1),\\ x'_{p_1+i} &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_1+i\,k}(u) \,.\, x_k + \sum_{k=1}^{p_2-p_1} b_{p_1+i\,p_1+k}(u)\, x_{p_1+k} && (i = 1 \cdots p_2 - p_1),\\ &\;\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots && \;\vdots\\ x'_{p_d+i} &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_d+i\,k}(u) \,.\, x_k + \sum_{k=1}^{p_2-p_1} b_{p_d+i\,p_1+k}(u)\, x_{p_1+k} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \sum_{k=1}^{m-p_d} b_{p_d+i\,p_d+k}(u)\, x_{p_d+k} && (i = 1 \cdots m - p_d). \end{aligned}$$

Diese ist so beschaffen, dass jede der $d + 1$ Gruppen

$$(3)\qquad x'_{p_g+i} = \sum_k b_{p_g+i\,p_g+k}(u)\, x_{p_g+k} \qquad (i, k = 1 \ldots p_{g+1} - p_g),$$

wo $g$ der Reihe nach gleich $0 \ldots d$ und $p_0 = 0$ zu setzen ist, ursprünglich ist. Die Coefficienten dieser Gruppen betreffend, sind die einer jeden von ihnen untereinander unabhängig. Haben zwei der Gruppen verschiedene Parametergruppen, so bestehen keine Beziehungen zwischen ihren Coefficienten. Haben dagegen zwei der Gruppen die Parametergruppe gemein, so kann stets vorausgesetzt werden, dass die entsprechenden Coefficienten gleich sind. Denn besitzt die Parametergruppe die Form

$$v'_{il} = \sum_l u_{il} v_{ik} \qquad (i, k, l = 1 \ldots p)$$

so lässt sich jede zu ihr gehörige ursprüngliche Gruppe in die Form

$$x'_{p_g+i} = \sum_k u_{ik}\, x_{p_g+k} \qquad (i, k = 1 \ldots p)$$

bringen, nach dem Corollar des 38. Satzes. —

Hat man einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe die Gestalt (2) ertheilt, so können doch noch innerhalb gewisser Grenzen die Veränderlichen beliebig geändert werden, insofern als die Form (2) einer Gruppe ihrem Wesen nach sich nicht ändert, wenn $x_{p_1+1}\dots x_{p_2}$ um lineare Formen von $x_1\dots x_{p_1}$, die Grössen $x_{p_2+1}\dots x_{p_3}$ um lineare Formen von $x_1\dots x_{p_2}$ u. s. w. vermehrt werden. Um von der Gestalt (2) einer Gruppe ausgehend eine Normalform derselben zu definiren, kann man also noch eine Beschränkung hinzufügen. Diese Beschränkung soll darin bestehen, dass unter den Transformationen der Gruppe auch alle Transformationen der Gruppe

$$(4)\qquad x'_{p_g+i}=\sum_k b_{p_g+ip_g+k}(u)\,x_{p_g+k}\qquad\begin{pmatrix}i,k=1\dots p_{g+1}-p_g\\ g=0\dots d\end{pmatrix}$$

enthalten sein sollen, dass also mit andern Worten, die Gruppe (2) die Untergruppe (4) besitzt.

Dass diese Bedingung wirklich zulässig ist, muss zunächst gezeigt werden. In der That lässt sich mit Hilfe des 42. Satzes der folgende beweisen:

Satz 43. *Die Veränderlichen jeder Gruppe von der Gestalt* (2):

$$(5)\qquad\begin{aligned}
x'_i&=\sum_{k=1}^{p_1}b_{ik}(u)\,x_k \qquad (i=1\dots p_1),\\
x'_{p_1+i}&=\sum_{k=1}^{p_1}b_{p_1+ik}(u)\,x_k+\sum_{k=1}^{p_2-p_1}b_{p_1+ip_1+k}(u)\,x_{p_1+k}\qquad (i=1\dots p_2-p_1),\\
&\;\;\vdots\\
x'_{p_d+i}&=\sum_{k=1}^{p_1}b_{p_d+ik}(u)\,x_k+\sum_{k=1}^{p_2-p_1}b_{p_d+ip_1+k}(u)\,x_{p_1+k}+\cdots\\
&\qquad\cdots+\sum_{k=1}^{m-p_d}b_{p_d+ip_d+k}(u)\,x_{p_d+k}\qquad (i=1\dots m-p_d),
\end{aligned}$$

*können so gewählt werden, dass die Gruppe die Untergruppe*

$$(6)\qquad x'_{p_g+i}=\sum_k b_{p_g+ip_g+k}(u)\,x_{p_g+k}\qquad (i,k=1\dots p_{g+1}-p_g)$$

*enthält.*

Wird vorausgesetzt, dass die zur begleitenden Gruppe

$$x'_i=\sum_k b_{ik}(u)\,x_k\qquad\begin{pmatrix}i,k=1\dots p_1\\ g=0\dots d\end{pmatrix}$$

gehörige Nebengruppe bereits in der verlangten Form sich vorfindet, so dass sie die Untergruppe



$$x'_{p_g+i}=\sum_k b_{p_g+ip_g+k}(u)\,x_{p_g+k}\qquad\begin{pmatrix}i,k=1\dots p_{g+1}-p_g\\ g=1\dots d\end{pmatrix}$$

enthält, so kann man in der gegebenen Gruppe den Parametern solche Bedingungen auferlegen, dass die Nebengruppe in diese ihre Untergruppe übergeht und gleichzeitig die gegebene Gruppe in eine ihrer Untergruppen. Deutet man in denjenigen Coefficienten der Gruppe, die nicht nothwendig verschwinden müssen in Folge der Bedingungen, die aber möglicherweise durch dieselben modificirt werden, dies Verhalten dadurch an, dass man $u$ durch u ersetzt, so hat die in Rede stehende Untergruppe der gegebenen Gruppe die Gestalt:

$$(7)\qquad\begin{aligned}
x'_i&=\sum_{k=1}^{p_1}b_{ik}(\mathrm{u})\,x_k\qquad (i=1\dots p_1),\\
x'_{p_1+i}&=\sum_{k=1}^{p_1}b_{p_1+ik}(\mathrm{u})\,x_k+\sum_{k=1}^{p_2-p_1}b_{p_1+ip_1+k}(u)\,x_{p_1+k}\qquad (i=1\dots p_2-p_1),\\
&\;\;\vdots\\
x'_{p_d+i}&=\sum_{k=1}^{p_d}b_{p_d+ik}(\mathrm{u})\,x_k+\sum_{k=1}^{m-p_d}b_{p_d+ip_d+k}(u)\,x_{p_d+k}\qquad (i=1\dots m-p_d).
\end{aligned}$$

Diese Untergruppe aber besitzt die $d$ begleitenden Gruppen

$$(8)\qquad\begin{aligned}
x'_i&=\sum_{k=1}^{p_1}b_{ik}(u)\,x_k\qquad (i=1\dots p_1),\\
x'_{p_g+i}&=\sum_{k=1}^{p_1}b_{p_g+ik}(\mathrm{u})\,x_k+\sum_{k=1}^{p_{g+1}-p_g}b_{p_g+ip_g+k}(u)\,x_{p_g+k}\qquad (i=1\dots p_{g+1}-p_g),\\
&(g=1\dots d).
\end{aligned}$$

Hier kann man nach dem 42. Satz erreichen, und zwar durch Hinzufügung linearer Formen von $x_1\dots x_{p_1}$ zu $x_{p_g+1}\dots x_{p_{g+1}}$, dass jede Gruppe (8) die Untergruppe

$$\begin{aligned}
x'_i&=\sum_k b_{ik}(u)\,x_k\qquad (i,k=1\dots p_1),\\
x'_{p_g+i}&=\sum_k b_{p_g+ip_g+k}(u)\,x_{p_g+k}\qquad (i,k=1\dots p_{g+1}-p_g)
\end{aligned}$$

besitzt; dann wird auch die gegebene Gruppe (5) die Untergruppe (6) besitzen. Damit hat die gegebene Gruppe die gewünschte Gestalt erhalten; man erkennt zugleich die Zulässigkeit der Voraussetzung über die Form der Nebengruppe; es ist die successive Anwendung der eben geführten Betrachtung, vermittelst deren man die Nebengruppe in jene Form bringt. —

Die jetzt erhaltene Form der Gruppe wurde schon oben als diejenige bezeichnet, die als *Normalform der zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe* definirt werden soll. Geeignet hierzu erweist sie sich durch die Einfachheit der zwischen ihren Coefficienten möglichen Relationen, von denen sofort die Rede sein soll. Dass eine Gruppe unendlich vieler Normalformen fähig sein kann, ist für das Allgemeine belanglos, und kann nur in speciellen Fällen das Bedürfniss nach der Auswahl einer besonders geeigneten Normalform erwecken.

Was die Coefficientenrelationen angeht, so ist zunächst durch die Wahl der Normalform die Möglichkeit einer Relation zwischen Coefficienten $b_{p_g+ip_h+k}(u)$, wo $g$ von $h$ verschieden ist, und Coefficienten $b_{p_g+ip_g+k}(u)$ ausgeschlossen. Weiter sind entweder entsprechende Coefficienten zweier von den bei der Normalform auftretenden ursprünglichen Gruppen einander gleich, oder alle Coefficienten beider ursprünglichen Gruppen sind unabhängig. Sodann kann gezeigt werden:

Satz 44. *Liegt eine zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe in der Normalform vor, so sind alle diejenigen Coefficienten $b_{p_g+ip_h+k}(u)$, die gemeinsame Indices $g$ und $h$ besitzen, von einander unabhängig oder verschwinden sämmtlich.*

Der Beweis verläuft analog dem Beweise des 41. Satzes. In den unter den Gleichungen der Parametergruppen sich vorfindenden Gleichungen

$$(9)\qquad b_{p_g+ip_h+k}(v') = \sum_l b_{p_g+ip_h+l}(u)\, b_{p_h+lp_h+k}(v) + \cdots$$
$$\cdots + \sum_j b_{p_g+ip_g+j}(u)\, b_{p_g+jp_h+k}(v)$$
$$(i, j = 1 \ldots p_{g+1} - p_g)$$
$$(k, l = 1 \ldots p_{h+1} - p_h)$$

sind die mittleren Glieder, die hier nicht hingeschrieben sind, unabhängig von den Coefficienten der bei der Normalform auftretenden ursprünglichen Gruppen. Existirt nun zwischen Coefficienten mit bestimmtem Indexpaar $g$, $h$ eine lineare Relation

$$(10)\qquad \sum_{i,k} \alpha_{ik}\, b_{p_g+ip_h+k}(u) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots p_{g+1} - p_g \\ k = 1 \ldots p_{h+1} - p_h \end{pmatrix},$$

so können entsprechend den Gleichungen (9) in dieser die Parameter $u_1 \ldots u_n$ durch $v_1' \ldots v_n'$ ersetzt werden. Da die entstandene Relation einerseits für jedes beliebig gewählte Werthsystem von $v_1 \ldots v_n$, andererseits für jedes beliebig gewählte Werthsystem von $u_1 \ldots u_n$ bestehen muss, so folgen durch Vergleichung der Coefficienten von



$b_{p_h+ip_h+k}(v)$ und von $b_{p_g+ip_g+j}(u)$ mit Null die beiden Relationensysteme

$$(11)\qquad \sum_i \alpha_{ik}\, b_{p_g+ip_h+l}(u) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots p_{g+1} - p_g \\ k, l = 1 \ldots p_{h+1} - p_h \end{pmatrix},$$

$$(12)\qquad \sum_k \alpha_{ik}\, b_{p_g+jp_h+k}(v) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1 \ldots p_{g+1} - p_g \\ k = 1 \ldots p_{h+1} - p_h \end{pmatrix},$$

Durch Anwendung des Verfahrens, durch welche die Relationen (12) aus (10) hergeleitet wurden, auf das Relationensystem (11) erhält man weiter

$$(13)\qquad b_{p_g+ip_h+k}(u) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots p_{g+1} - p_g \\ k = 1 \ldots p_{h+1} - p_h \end{pmatrix},$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Satz 45. *Relationen zwischen Coefficienten einer in der Normalebene vorliegenden Gruppe nehmen alle die Gestalt*

$$\sum_{g,h} \alpha_{gh}\, b_{p_g+ip_h+k}(u) = 0$$

*an, wo über gewisse Werthepaare $g$, $h$ zu summiren ist. Eine solche Relation hat, wenn sie für ein bestimmtes Indexpaar $i$, $k$ gilt, für alle Indexpaare $i$, $k$ zu gelten. Zudem müssen für jeden Index $g$, über den summirt wird, in allen Gruppen:*

$$x'_{p_g+i} = \sum_k b_{p_g+ip_g+k}(u)\, x_{p_g+k} \qquad (i, k = 1 \ldots p_{g+1} - p_g)$$

*entsprechende Coefficienten gleich sein und desgleichen muss für jeden Index $h$, über den summirt wird, in allen Gruppen*

$$x'_{p_h+i} = \sum_k b_{p_h+ip_h+k}(u)\, x_{p_h+k} \qquad (i, k = 1 \ldots p_{h+1} - p_h)$$

*Gleichheit entsprechender Coefficienten statthaben.*

Der Beweis folgt aus derselben Betrachtungsweise, aus der der vorhergehende Satz erwiesen wurde; da ausser einer gewissen Umständlichkeit in der Bezeichnung keine Schwierigkeiten auftreten, so sei es gestattet, ihn zu unterdrücken.

## IV. Abschnitt.

### Zahlensysteme und Matrices.

§ 1.

### Eigenschaften der Matrices.

Die Resultate des vorigen Abschnittes gewinnen bedeutend an Uebersichtlichkeit, wenn zur Darstellung der Gruppen Matrices benutzt werden.

*Eine Matrix soll nichts anderes sein, als eine umfassende Bezeichnung des Systems der Coefficienten eines Systems linearer Formen.* So bildet das System der Coefficienten der Formen

(1) $$y_i = \sum_k a_{ik} x_k \quad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n)$$

eine Matrix

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

oder kürzer geschrieben

(2) $$A = \| a_{ik} \| \quad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n).$$

Die Grössen $a_{ik}$ werden als Elemente der Matrix $A$ bezeichnet.

Es sollen die folgenden Operationsregeln für die Matrices gelten:

1. *Man multiplicirt eine Matrix mit einer Zahl, indem man ihre sämmtlichen Elemente mit dieser Zahl multiplicirt.*

Es ist also:

(3) $$M \| a_{ik} \| = \| M a_{ik} \| \quad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n)$$

Diese Operation entspricht der Multiplication des Systems der Formen

$$y_i = \sum_k a_{ik} x_k \quad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n)$$

mit der Zahl $M$.

2. *Die Summe zweier Matrices von gleichvielen wagerechten und gleichvielen senkrechten Reihen ist eine Matrix, deren Elemente die Summen entsprechender Elemente der beiden gegebenen Matrices sind.* So ist

(4) $$\| a_{ik} \| + \| a'_{ik} \| = \| a_{ik} + a'_{ik} \| \quad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n).$$

Dies entspricht der Addition entsprechender Formen der beiden Formensysteme



$$y_i = \sum_k a_{ik} x_k$$
$$y'_i = \sum_k a'_{ik} x_k \quad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n)$$

mit gemeinsamen unabhängigen Veränderlichen.

Als Matrix 0 wird eine Matrix bezeichnet, deren sämmtliche Elemente Null sind. Zwei Matrices sind gleich, wenn ihre Differenz Null ist.

3. *Das Product zweier Matrices, von denen die zweite so viele wagerechte Reihen hat, als die erste senkrechte Reihen besitzt, ist eine Matrix, deren in der $i^{ten}$ wagerechten und $k^{ten}$ senkrechten Reihe befindliches Element die Summe der Producte entsprechender Elemente der $i^{ten}$ wagerechten Reihe der ersten Matrix und der $k^{ten}$ senkrechten Reihe der zweiten Matrix ist.* So wird aus den Matrices

(5) $$\begin{aligned} A &= \| a_{il} \| \quad (i = 1 \ldots m;\ l = 1 \ldots n), \\ B &= \| b_{lk} \| \quad (l = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots p) \end{aligned}$$

das Product

(6) $$A B = \left\| \sum_l a_{il} b_{lk} \right\| \quad (i = 1 \ldots m;\ l = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots p)$$

gebildet. Dieser Productbildung entspricht die Ersetzung der unabhängigen Veränderlichen in den Formen

$$y_i = \sum_l a_{il} x_l \quad (i = 1 \ldots m;\ l = 1 \ldots n)$$

durch neue Veränderliche vermittelst der Formen

$$x_l = \sum_k b_{lk} z_k \quad (l = 1 \ldots n;\ k = 1 \ldots p).$$

Man bemerkt, dass vermöge dieser Operationsregeln die Addition dem associativen und commutativen Gesetz, die Bildung eines Productes aus Matrices dem associativen und distributiven Gesetz der Verknüpfung folgt. —

Bildet man aus den abhängigen Veränderlichen der Gleichungen

(7) $$y_i = \sum_k a_{ik} x_k \quad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n)$$

eine aus einer einzigen senkrechten Reihe bestehende Matrix

$$\eta = \begin{Vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{Vmatrix},$$

so lässt sich diese nach der Productregel der Matrices als Product von

$$A = \| a_{ik} \| \qquad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n)$$

mit der einreihigen Matrix

$$\xi = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|$$

darstellen, so dass in Stelle des Gleichungensystems (7) die einzige Gleichung zwischen Matrices

$$\eta = A\,\xi \tag{8}$$

tritt. —

## § 2.

### Darstellung der zu Zahlensystemen gehörigen Gruppen durch Matrices.

Sollen nun die Gleichungen einer zu einem Zahlensystem gehörigen Gruppe von der im sechsten Paragraphen des vorigen Abschnitts behandelten Form:

$$\tag{1} \begin{aligned} x_i' &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{ik}(u)\, x_k && (i = 1 \ldots p_1), \\ x_{p_1+i}' &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_1+i\,k}(u)\, x_k + \sum_{k=1}^{p_2-p_1} b_{p_1+i\,p_1+k}(u)\, x_{p_1+k} && (i = 1 \ldots p_2 - p_1), \\ &\ \vdots \\ x_{p_d+i}' &= \sum_{k=1}^{p_1} b_{p_d+i\,k}(u)\, x_k + \sum_{k=1}^{p_2-p_1} b_{p_d+i\,p_1+k}(u)\, x_{p_1+k} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \sum_{k=1}^{m-p_d} b_{p_d+i\,p_d+k}(u)\, x_{p_d+k} && (i = 1 \ldots m - p_d), \end{aligned}$$

durch Matrices dargestellt werden, so werde zuerst die Matrix der Coefficienten von $x_{p_h+1} \cdots x_{p_{h+1}}$ in denjenigen Gleichungen, durch die $x_{p_g+1}' \cdots x_{p_{g+1}}'$ gegeben sind, gebildet:

$$s_{gh}(u) = \| b_{p_g+i\,p_h+k}(u) \| \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \cdots p_{g+1} - p_g \\ k = 1 \cdots p_{h+1} - p_h \end{pmatrix}; \tag{2}$$

jede solche Matrix soll eine Elementarmatrix genannt werden.

Von den Elementarmatrices besitzen, wie unmittelbar ersichtlich, alle diejenigen, die den ersten Index gemein haben, gleich viele wagerechte und alle diejenigen, die den zweiten Index gemein haben, gleich viele senkrechte Reihen; alle Elementarmatrices $s_{gg}(u)$ endlich ebensoviel senkrechte als wagerechte Reihen. Bezeichnet man ferner mit $\xi_0 \ldots \xi_d$ die Matrices



$$\xi_g = \left\| \begin{matrix} x_{p_g+1} \\ \vdots \\ x_{p_{g+1}} \end{matrix} \right\|,$$

so folgt aus den Gleichungen (1), dass die Matrix $\xi_g'$ durch

$$\xi_g' = s_{g0}(u)\,\xi_0 + \cdots + s_{gg}(u)\,\xi_g \tag{3}$$

wiedergegeben wird, wobei die Operationszeichen im Sinne der für die Matrices geltenden Operationsregeln zu nehmen sind.

Die Gleichungen der Gruppe (1) erhalten auf diese Weise folgende Gestalt:

$$\tag{4} \begin{aligned} \xi_0' &= s_{00}(u)\,\xi_0, \\ \xi_1' &= s_{10}(u)\,\xi_0 + s_{11}(u)\,\xi_1, \\ &\ \vdots \\ \xi_d' &= s_{d0}(u)\,\xi_0 + s_{d1}(u)\,\xi_1 + \cdots + s_{dd}(u)\,\xi_d \end{aligned}$$

und die Gruppeneigenschaft der Gleichungen (1) oder (4) wird durch folgende Gleichungen zwischen Matrices wiedergegeben:

$$s_{gh}(v') = s_{gh}(u)\,s_{hh}(v) + \cdots + s_{gg}(u)\,s_{gh}(v) \qquad \begin{pmatrix} g = 0 \cdots d \\ h = 0 \cdots g \end{pmatrix}, \tag{5}$$

die den Gleichungen

$$b_{p_g+i\,p_h+k}(v') = \sum_l b_{p_g+i\,l}(u)\, b_{l\,p_h+k}(v) \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \cdots p_{g+1} - p_g \\ k = 1 \cdots p_{h+1} - p_h \\ l = p_h + 1 \cdots p_{g+1} \end{pmatrix}$$

entsprechen.

— Sind nun die Gleichungen (1) oder (4) die Gleichungen der Normalform der Gruppe, so sind die Elemente jeder Elementarmatrix $s_{gg}(u)$ untereinander unabhängig; ferner sind zwei Elementarmatrices $s_{gg}(u)$ und $s_{hh}(u)$ entweder gleich, oder ihre Elemente sind von einander unabhängig. Die Gruppe (4) besitzt dann ausserdem die Untergruppe:

$$\tag{6} \begin{aligned} \xi_0' &= s_{00}(u)\,\xi_0, \\ &\ \vdots \\ \xi_d' &= s_{dd}(u)\,\xi_d. \end{aligned}$$

Die Sätze 44 und 45 gehen in die folgenden über:

Satz 46. *Befindet sich eine zu einem Zahlensystem gehörige Gruppe in der Normalform (4), so sind die Elemente jeder nichtverschwindenden Elementarmatrix von einander unabhängig.*

Satz 47. *Jede Coefficientenrelation bei einer in der Normalform befindlichen Gruppe veranlasst eine Relation zwischen Elementarmatrices von der Form*

$$\alpha_1 s_{g_1 h_1}(u) + \cdots + \alpha_\nu s_{g_\nu h_\nu}(u) = 0, \tag{7}$$

*wo $a_1 \ldots a_\nu$ numerische Constanten sind, und zudem*

$$s_{g_1 g_1}(u) = \cdots = s_{g_\nu g_\nu}(u),$$
$$s_{h_1 h_1}(u) = \cdots = s_{h_\nu h_\nu}(u)$$

*ist.*

## § 3.

### Die Normalform der Zahlensysteme.

Von der Normalform einer Gruppe ausgehend kann man eine Normalform des zugehörigen Zahlensystems definiren. Nach den letzten Sätzen bilden die Elemente eines vollständigen Systems linear unabhängiger Elementarmatrices ein vollständiges System linear unabhängiger Formen der Parameter der Gruppe. Man wird also die Wahl der Basis des Zahlensystems so treffen können, dass die Elemente des vollständigen Systems unabhängiger Elementarmatrices direct den Parametern einer Zahl des Zahlensystems gleich werden.

Wählt man unter den Gleichungen

$$s_{gh}(v') = s_{gh}(u)s_{hh}(v) + \cdots + s_{gg}(u)s_{gh}(v) \qquad \begin{pmatrix} g = 0 \cdots d \\ h = 0 \cdots g \end{pmatrix}$$

diejenigen aus, deren linke Seiten von den unabhängigen Elementarmatrices gebildet sind, ersetzt die auf den rechten Seiten etwa auftretenden abhängigen Elementarmatrices durch die ihnen entsprechenden linearen Formen unabhängiger Elementarmatrices, so erhält man die linear unabhängigen Gleichungen der Parametergruppe, die zugleich die Productgleichungen des zugehörigen Zahlensystems sind. Diese Form eines Zahlensystems kann als seine Normalform betrachet werden. Die begleitenden ursprünglichen Zahlensysteme sind ihren Productgleichungen nach durch die verschiedenen unter den Gleichungen

$$s_{gg}(v') = s_{gg}(u)\, s_{gg}(v)$$

gegeben; ebenso leicht lassen sich die Productgleichungen der übrigen begleitenden Systeme angeben. Die beiläufige Lösung dieser Aufgabe erscheint hier von geringerer Bedeutung, als man Eingangs der Untersuchung geneigt war, ihr zuzuschreiben.

Es muss noch auf die Frage eingegangen werden, welchen Einfluss auf die Normalform eines Zahlensystems diejenige Gruppe besitzt, von der ausgehend diese Normalform definirt wurde. Es lässt sich zeigen:

Satz 48. *Befindet sich von zwei, zu einem und demselben Zahlensystem gehörigen, Gruppen die eine in ihrer Normalform, so lässt sich auch die andere so in ihre Normalform bringen, dass ihre Elementarmatrices sich linear durch die Elementarmatrices der ersten darstellen lassen.*



Die eine der Gruppen sei in ihrer Normalform:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \xi_0' &= s_{00}(u)\,\xi_0, \\ &\vdots \\ \xi_d' &= s_{d0}(u)\,\xi_0 + \cdots + s_{dd}(u)\,\xi_d; \end{aligned}$$

eine Normalform der andern Gruppe sei:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \xi_{d+1}' &= s_{d+1\,d+1}(u)\,\xi_{d+1}, \\ &\vdots \\ \xi_c' &= s_{c\,d+1}(u)\,\xi_{d+1} + \cdots + s_{cc}(u)\,\xi_c. \end{aligned}$$

Da die Parametergruppe beiden gemein ist, so wird von einer jeden ursprünglichen Gruppe der Form:

$$(3) \qquad \xi_{d+h}' = s_{d+h\,d+h}(u)\,\xi_{d+h}$$

die Parametergruppe durch irgend eine der Gleichungen

$$s_{gg}(v') = s_{gg}(u)\, s_{gg}(v)$$

gegeben sein, wo $g$ kleiner als $d+1$ ist. Zufolge dem Corollar des 38. Satzes wird man die Veränderlichen jeder Gruppe (3) dann so ändern können, dass die Matrix der Coefficienten gleich der, die Parametergruppe definirenden, Matrix $s_{gg}(u)$ wird. Dadurch wird die Normalform (2) in eine andre Normalform übergeführt, von der man zeigen kann, dass ihre Elementarmatrices thatsächlich nur linear aus den Elementarmatrices von (1) zusammengesetzt sind. Zieht man nämlich die Gruppe (1) mit der transformirten Gruppe (2) zu einer einzigen Gruppe zusammen, so besitzt die entstandene Gruppe ihre Normalform. Dann sind nach dem 47. Satze alle Elementarmatrices dieser Gruppe linear durch ein volles System unabhängiger Elementarmatrices darstellbar. Ein solches System aber lässt sich bereits aus den Gleichungen (1) auswählen, da die Gruppe (1) mit der Gesammtgruppe die Parametergruppe gemein hat; es werden also die Elementarmatrices von (2) durch die Elementarmatrices von (1) linear ausgedrückt werden.

— Nach diesem Satze ist es vollkommen gleichgültig, welche Gruppe unter allen zu einem bestimmten Zahlensystem gehörigen Gruppen behufs Untersuchung des Zahlensystems zu Grunde gelegt wird.

## § 4.

### Eine Classification der Zahlensysteme.

Den Abschluss der Untersuchung soll eine Classification der Zahlensysteme bilden, die auf Grund der gewonnenen Normalform ausgeführt werden kann.

*Zwei zu Zahlensystemen gehörige Gruppen:*

$$(1)\qquad \begin{aligned} \xi_0' &= s_{00}(u)\xi_0,\\ &\vdots\\ \xi_d' &= s_{d0}(u)\xi_0 + \cdots + s_{dd}(u)\xi_d \end{aligned}$$

*und*

$$(2)\qquad \begin{aligned} \eta_0' &= \sigma_{00}(u)\eta_0,\\ &\vdots\\ \eta_d' &= \sigma_{d0}(u)\eta_0 + \cdots + \sigma_{dd}(u)\eta_d \end{aligned}$$

*können in eine Art verwiesen werden, wenn jeder Gleichung*

$$(3)\qquad s_{gg}(u) = s_{hh}(u)$$

*eine Gleichung*

$$(4)\qquad \sigma_{gg}(u) = \sigma_{hh}(u)$$

*und ebenso jeder Gleichung*

$$(5)\qquad \alpha_1 s_{g_1h_1}(u) + \cdots + \alpha^\nu s_{g_\nu h_\nu}(u) = 0$$

*die unter den Bedingungen*

$$s_{g_1g_1}(u) = \cdots = s_{g_\nu g_\nu}(u),$$
$$s_{h_1h_1}(u) = \cdots = s_{h_\nu h_\nu}(u)$$

*existirt, eine Gleichung*

$$(6)\qquad \alpha_1 \sigma_{g_1h_1}(u) + \cdots + \alpha_\nu \sigma_{g_\nu h_\nu}(u) = 0$$

*entspricht und umgekehrt.*

Satz 49. *Alle Gruppen einer Art sind durch eine Gruppe der Art bestimmt.*

Als verschiedene Gruppen einer Art sind nur solche zu betrachten, deren Elementarmatrices verschiedene Anzahlen von Elementen besitzen. Aus einer Gruppe (1) kann man dann alle übrigen Gruppen derselben Art finden, indem man in Stelle jeder unabhängigen Matrix $s_{gg}(u)$ eine Matrix $\sigma_{gg}(u)$ setzt, die eine beliebige Anzahl von wagerechten Reihen von Elementen besitzt; weil die Matrices $\sigma_{gg}(u)$ quadratisch sind, ist dadurch die Anzahl der senkrechten Reihen mit bestimmt. Erfüllt man sodann die den Relationen (3) entsprechenden Relationen (4), so ist für jede Elementarmatrix $\sigma_{gh}(u)$ die Anzahl der senkrechten und wagerechten Reihen von Elementen bestimmt, da alle Matrices mit gleichem ersten Index gleich viele senkrechte Reihen und alle mit gleichem zweiten Index gleich viele wagerechte Reihen von Elementen besitzen. Da ferner die Relationen (5) und (6) unter solchen Nebenbedingungen bestehen, die bereits erfüllt wurden, so lassen sich schliesslich auch die den Relationen (5) entsprechenden Relationen (6) einführen.



Satz 50. *Haben zwei Gruppen verschiedener Arten die Parametergruppe gemein, so lässt sich zu jeder Gruppe der einen Art eine Gruppe der andern Art finden, die mit ihr die Parametergruppe gemein hat.*

Zwei Gruppen mit gemeinsamer Parametergruppe können nach dem 48. Satze derart in die Normalformen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} \xi_0' &= s_{00}(u)\xi_0,\\ &\vdots\\ \xi_d' &= s_{d0}(u)\xi_0 + \cdots + s_{dd}(u)\xi_d \end{aligned}$$

und

$$(8)\qquad \begin{aligned} \xi_{d+1}' &= s_{d+1\,d+1}(u)\xi_{d+1},\\ &\vdots\\ \xi_c' &= s_{c\,d+1}(u)\xi_{d+1} + \cdots + s_{cc}(u)\xi_c \end{aligned}$$

gebracht werden, dass die Elementarmatrices der einen Gruppe linear durch die Elementarmatrices der andern ausgedrückt sind. Zieht man nun die Gruppe (7) mit der Gruppe (8) in eine einzige Gruppe zusammen und ersetzt die unabhängigen Elementarmatrices von (7) so durch neue, dass aus (7) eine andre Gruppe ihrer Art hervorgeht, so geht auch die aus (7) und (8) zusammengesetzte Gruppe in eine andre Gruppe ihrer Art über, die die Parametergruppe mit der aus (7) entstandenen Gruppe gemein hat. Dadurch geht auch aus (8) eine Gruppe von einerlei Art mit (8) hervor, die mit der aus (7) entstandenen Gruppe die Parametergruppe gemein hat. —

Man wird *zwei Arten von Gruppen in eine Classe* verweisen können, *wenn jede Gruppe der einen Art die Parametergruppe mit einer Gruppe der andern Art gemein hat.* Rechnet man ferner *diejenigen Zahlensysteme, die zu den Gruppen einer Art gehören, zu einer Classe,* so kann man den 50. Satz auch so formuliren, dass alle Arten einer Classe von Gruppen zu einer und derselben Classe von Zahlensystemen gehören.

Nach allem diesem kann jede Classe von Zahlensystemen als durch eine beliebige Gruppe, die zu einem Zahlensystem der Classe gehört, definirt betrachtet werden. Insbesondere kann die definirende Gruppe so gewählt werden, dass die Gleichungen der Normalform (1) Gleichungen zwischen gewöhnlichen Grössen

$$(9)\qquad \begin{aligned} x_0' &= a_{00}(u)x_0,\\ &\vdots\\ x_d' &= a_{d0}(u)x_0 + \cdots + a_{dd}(u)x_d. \end{aligned}$$

Ein Zahlensystem, das zu einer solchen Gruppe gehört, hat die besondre Eigenschaft, dass die begleitenden ursprünglichen Systeme derselben nur je eine Basiszahl besitzen. Die Productgleichungen dieser ursprünglichen Systeme sind durch die unabhängigen unter den Gleichungen

$$a_{gg}(v') = a_{gg}(u)\, a_{gg}(v)$$

gegeben. Jeder Classe von Zahlensystemen gehört ein solches Zahlensystem an, und so mag dies Sonderresultat als letzter Satz dieser ganzen Untersuchung gefasst werden.

Satz 51. *Jedes Zahlensystem, dessen begleitende ursprüngliche Systeme nur je eine Basiszahl besitzen, definirt eine Classe von Zahlensystemen, so dass, wenn alle jene Systeme bekannt sind, dadurch überhaupt alle Zahlensysteme gegeben sind.*

Dass Schwierigkeiten von wesentlicher Art der Aufsuchung dieser, gewissermassen typischen, Zahlensysteme nicht im Wege liegen, geht schon aus andern Untersuchungen hervor und so mag diese Frage, als das Ziel, das ich mir gesteckt, überschreitend, hier unerörtert bleiben.

Dorpat, August 1891.

# Thesen.

1. Die Alten hatten keine irrationalen Zahlen.
2. Das sogenannte Archimedische Axiom ist die Euklidische Definition des Verhältnisses.
3. Galilei's Definition der Proportion zeigt den Untergang der antiken Methoden.
4. Die Untersuchung der kritischen Stellen der Funktionen wird durch keine andere Methode ersetzt.
5. Von den quadratischen Formen lassen nur die binären Klassencomposition zu.
6. Die Refraction an der Sonnenoberfläche bewirkt eine scheinbar ungleichmässige Rotation der Sonne.