Transformation und Ausmittelung

bestimmter Integrale.

Abhandlung

welche

mit Genehmigung einer hochverordneten

physiko-mathematischen Fakultät

der Kaiserlichen Universität Dorpat

pro venia legendi

öffentlich vertheidigen wird

Dr. **Helmling.**

Dorpat.

Gedruckt bei J. C. Schünmanns Wittwe und C. Mattiesen.

1851.

Der Druck ist unter der Bedingung gestattet, daß die gesetzliche Anzahl von Exemplaren der Censurbehörde übergeben werde.

Minding, d. Z. Decan
der physiko-mathematischen Facultät.

Dorpat, den 27. September 1851.

Der

Hochwohlgebornen Frau:

Frau Katharina von Löwis

Gebornen von Stakelberg

auf Kaipen

als Zeichen der Verehrung

und dankbaren Erinnerung

Der Verfasser.

Vorrede.

In der vorliegenden Abhandlung ist, wie in meiner früheren, der Standpunkt festgehalten, bestimmte Integrale, die durch die bekannten Hülfsmittel der Analysis nicht direkt ermittelt werden können, auf andre zurückzuführen, die entweder das mühselige Verfahren der mechanischen Quadratur nicht nothwendig machen, oder doch die Anwendung desselben erleichtern. Die ungewöhnliche Schwierigkeit, welche das Setzen verwickelter Formeln darbietet, ist Ursache, daß ein großer Theil der dem Folgenden vorausgehenden Untersuchungen unterdrückt werden mußte, deren Mittheilung zu einem andern Zeitpunkt erfolgen mag. Im Allgemeinen sind hier nur Integrale von der Form $\int_0^\infty e^{-ax^n} . f(x) . dx$ behandelt, auf welche das im Verlaufe der Abhandlung eingeschlagene eigenthümliche Verfahren allein anwendbar sein dürfte.

Zum Verständniß des Folgenden muß jedoch vorausgeschickt werden, daß in dem weggebliebenen Theil folgende im Verlaufe angewandten Integrale ermittelt worden sind, nämlich:

$$1)\quad \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} . \cos\beta x^2 dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} . \sqrt{\left(\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\alpha^2+\beta^2}\right)}$$

$$2)\quad \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} . \sin\beta x^2 . dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} . \sqrt{\left(\frac{-\alpha+\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\alpha^2+\beta^2}\right)}$$

und hieraus durch geeignete Substitution:

$$3)\quad \int_0^\infty e^{-\alpha\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}.\cos.\beta\left(x^2+\tfrac{1}{x^2}\right).dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi\cos\varphi}{\alpha}\right)}.e^{-2\alpha}.\cos\left(2\operatorname{tg}\varphi+\tfrac{1}{2}\varphi\right)$$

$$4)\quad \int_0^\infty e^{-\alpha\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}.\sin\beta\left(x^2+\tfrac{1}{x^2}\right).dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi\cos\varphi}{\alpha}\right)}e^{-2\alpha}\sin\left(2\operatorname{tg}\varphi+\tfrac{1}{2}\varphi\right)$$

wobei $\varphi = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{\beta}\right)$.

Ferner sind auf dem Wege der Variation der Constanten folgende Integrale erlangt worden:

$$5)\quad \int_0^\infty \frac{\cos a\,x^2.dx}{1+x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\int_a^\infty \sin(x^2-a^2).dx + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\int_a^\infty \frac{\sin(x^2-a^2).dx}{x^2}$$

$$6)\quad \int_0^\infty \frac{\sin a\,x^2.dx}{1+x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\int_a^\infty \sin(x^2-a^2).dx - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\int_a^\infty \frac{\sin(x^2-a^2).dx}{x^2}$$

Zerlegt man diese Integrale zur Rechten so ergeben sich 4 einfache Integrale, und wendet man auf sie die theilweise Integration an, so erhält man dafür halbconvergente Reihen, die für $a > 3$ sehr brauchbare Resultate liefern. Man findet:

$$7)\quad \int_a^\infty \sin(x^2-a^2)\,.\,dx = \frac{P}{2a}$$

$$8)\quad \int_a^\infty \frac{\sin(x^2-a^2)}{x^2}\,.\,dx = \frac{Q}{a}$$

wobei:

$$P = 1 - \frac{1\cdot3}{2^2.\,a^4} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2^4.\,a^8} - \ldots + R.$$

$$Q = \frac{1}{2.a^2} - \frac{1\cdot3\cdot5}{2^3.\,a^6} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2^5.\,a^{10}} - \ldots + S.$$

Die Ergänzungsglieder haben im Allgemeinen die Form:

$$\mathfrak{n}_\mu \cdot \mathbf{M} \cdot \int_a^\infty \cos^2 x \, . \, x^{-(\mu+1)} \, . \, dx \text{ und } \mathfrak{n}_\mu \cdot \mathbf{N} \int_a^\infty x^{-(\mu+1)} \, . \, \sin^2 x \, . \, dx$$

wo μ eine ungerade Zahl, $\mathfrak{n}_\mu = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots \mu}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1 \cdots 3 \cdot 5 \cdot \mu}{2^{\frac{\mu+1}{2}}}$

und M und N Funktionen von $\cos a^2$ und $\sin a^2$. sind.

In mehreren Fällen hat sich die Anwendung der sogenannten **halbconvergenten Reihen als sehr vortheilhaft** erwiesen, und es geben dieselben auch ohne **Beachtung des Restes** immer noch bessere Resultate als die bekannten **Näherungsformeln**, und selbst die mechanische Quadratur, wenn man nicht eine große Anzahl Abscissen zu Grunde legt. **Man muß** bei diesen Reihen so viel Glieder in Anspruch nehmen, als überhaupt dieselben noch abnehmen.

Dorpat, im September 1851.

Ein sehr einfaches Verfahren kann dazu dienen, sehr complicirte Integrale von der Form $\int_0^\infty e^{-q \cdot x^n} \cdot f(x) \cdot dx$ auf einfachere zurückzuführen. Das Wesen dieses Verfahrens läßt sich kurz so fassen:

Kennt man das Integral $\int_0^\infty e^{-\alpha^n x^n} \cdot (fx) \cdot dx = \varphi(\alpha)$, (wobei aber f(x) kein α enthalten darf) so ist allemal:

$$n \cdot \int_0^\infty e^{-\alpha^n} \cdot \alpha^{(n-1)} \varphi(\alpha) \cdot d\alpha = \int_0^\infty \frac{f(x) \cdot dx}{1+x^n}$$

1) Denn es sei $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha^n x^n} \cdot f(x) \cdot dx}{1+x^n} = y$, so ist

$$dy_\alpha = -n \cdot \alpha^{n-1} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha^n x^n} \cdot x^n \cdot f(x) \cdot dx}{1+x^n}$$ und folglich:

$$n \cdot \alpha^{n-1} y - dy_\alpha = n \cdot \alpha^{n-1} \varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$$

Das Integral dieser Differentialgleichung hat die Form:

$y = (c+u) \cdot e^{\alpha^n}$, wo u eine Funktion von α ist.

Man findet leicht: $u = -n \cdot \int_0^\alpha e^{-x^n} \cdot x^{n-1} \varphi(x) \cdot dx$, so daß:

$$y = \left(c - n \int_0^\alpha e^{-x^n} \cdot x^{n-1} \varphi(x) \cdot dx\right) e^{+\alpha^n}$$ wird.

Dividirt man nun auf beiden Seiten durch e^{α^n}, setzt man sodann $\alpha = \infty$, so verschwindet der Ausdruck zur Linken, und man erhält:

$$n \,.\, \int_0^{\infty} e^{-x^n} \,.\, x^{n} \,.'\, \varphi(x) \,.\, dx = c \,.$$

Es ist aber für $\alpha = o$, $y = c = \int_0^{\infty} \frac{f(x) \,.\, dx}{1+x^n}$, und darin liegt der oben ausgesprochene Satz.

2) Es sei z. B. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \,.\, \sin bx \,.\, dx}{1+x} = y$ so hat man

$dy_a = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \,.\, x \,.\, \sin bx \,.\, dx}{1+x}$ und also:

$$y - dy_a = \int_0^{\infty} e^{-ax} \,.\, \sin bx \,.\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Hieraus ist: $y = (c+u) \,.\, e^a$, wo u eine Funktion von a ist. Man findet: $u = -b \,.\, \int_0^a \frac{e^{-x} \,.\, dx}{b^2+x^2}$ und für $a = 0$

$c = \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{1+x} \,.\, dx$. Folglich ist nun:

$$b \,.\, \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \,.\, dx}{b^2+x^2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin bx \,.\, dx}{1+x}$$

oder wenn man links bx statt x setzt:

I) ... $\int_0^{\infty} \frac{e^{-bx} \,.\, dx}{1+x^2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin bx \,.\, dx}{1+x}$ und dadurch auch:

II) ... $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \,.\, \sin bx \,.\, dx}{1+x} = e^a \int_a^{\infty} \frac{e^{-bx} \,.\, dx}{1+x^2}$

Dem Integrale I zur Rechten kann man, wenn man $1+x=z$ setzt, auch noch die Form geben:

$$\text{III)} \ldots \int_0^\infty \frac{\sin b\,x \,.\, dx}{1+x} = \int_b^\infty \frac{\sin(z-b).}{z}\,dz$$

Dies letztere Resultat erhält man nach Minding auch direkt aus

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} \,.\, dx}{1+x^2} = y$$ wenn man nach b differentiirt, und die entstehende Differentialgleichung integrirt.

Aus $\int_0^\infty \frac{e^{-bx} \,.\, dx}{1+x^2} = \int_b^\infty \frac{\sin(z-b).\,dz}{z}$ folgt für $b=0$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \,.\, dx$$ und da $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\pi$ ist, so erhält man hierbei das bekannte Resultat:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \,.\, dx}{x} = \frac{1}{2}\pi$$

3) Ganz auf dieselbe Weise erhält man aus:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \,.\, \cos b\,x \,.\, dx}{1+x} = y,$$ durch Differentiiren nach a:

$$\text{IV)} \ldots \int_0^\infty \frac{e^{-bx} \,.\, x.dx}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{\cos b\,x.dx}{1+x} = \int_b^\infty \frac{\cos(x-b).dx}{x}$$ und

$$\text{V)} \ldots \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \,.\, \cos b\,x \,.\, dx}{1+x} = e^a \int_a^\infty \frac{e^{-bx} \,.\, x \,.\, dx}{1+x^2}$$

Aus IV folgt für

$$b=0, \int_0^\infty \frac{x \,.\, dx}{1+x^2} = \Big[\lg\sqrt{(1+x^2)}\Big]_0^\infty = \int_0^\infty \frac{\cos x \,.\, dx}{x} = \infty$$

wie sich dies auch von selbst versteht.

2*

4) Es sei ferner $\int_0^\infty e^{-x^n} . x^m . dx = k$, so ist wie man leicht findet: $\int_0^\infty e^{-\alpha^n x^n} . x^m . dx = \frac{k}{\alpha^{m+1}}$. Setzt man nun $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha^n x^n} . x^m . dx}{1+x^n} = y$, so erhält man auf dem bisherigen Wege $y = (c+u) . e^{\alpha^n}$, wo u eine noch zu bestimmende Funktion von α ist. Es ergiebt sich aber:
$u = -n.k. \int_0^\alpha e^{-x^n} . x^{n-m-2} . dx$. Für $\alpha = 0$, ist nun
$c = \int_0^\infty \frac{x^m . dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n . \sin\frac{m+1}{n}\pi}$, wenn $m < n-1$

Nach dem im Anfange erwähnten Satze ist also, wenn man durch e^{α^n} wegdividirt und $\alpha = \infty$ setzt:

$$n.k. \int_0^\infty e^{-x^n} . x^{n-m-2} . dx = c = \frac{\pi}{n . \sin\frac{m+1}{n}\pi} \quad \text{oder}$$

$$\text{VI)} \ldots \int_0^\infty e^{-x^n} . x^m . dx . \int_0^\infty e^{-x^n} . x^{n-m-2} . dx = \frac{\pi}{n^2 \sin\frac{m+1}{n}\pi}$$

Setzt man die Integrale in Gammafunktionen um, so liegt darin die bekannte Relation ausgesprochen:

$$\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) . \Gamma\left(1-\frac{m+1}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{m+1}{n}\pi} \; ; \quad m < n-1$$

Fragt man, in welchem Falle die Integrale in VI einander gleich werden, so ergiebt sich aus der Gleichung:

$m = n - m - 2 \ldots m = \frac{1}{2}n - 1$. Dann ist also:

$$\int_0^\infty e^{-x^n} \cdot x^{\frac{1}{2}n-1} \cdot dx = \frac{1}{n}\sqrt{\left(\frac{\pi}{\sin\frac{1}{2}\pi}\right)} = \frac{1}{n}\sqrt{\pi}$$

Setzt man aber $x^{\frac{1}{2}n} = z$, so fällt das Integral mit dem bekannten: $\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ zusammen. —

In Beziehung auf das vorgelegte Integral hat man ferner:

$$\text{VII)} \ldots \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha^n x^n} \cdot x^m . dx}{1+x^n} = n . e^{\alpha^n} \int_0^\infty e^{-x^n} \cdot x^m . dx \times \int_\alpha^\infty e^{-x^2} \cdot x^{n-m-2} . dx$$

so daß also, da man für die Gammafunktionen Tafeln hat, das Integral zur Linken von einer complementären Gammafunktion abhängt. Wenn a einen großen numerischen Werth hat, so kann man sich zur näherungsweisen Ermittelung des zweiten Integrals zur Rechten (VII) der in Abhandl. I. Nr. 1 gegebenen Formel bedienen. — Für $m=0$, $n=2$ hat man das daselbst unter Nr. 45 gegebene Resultat als einen speciellen Fall! —

5) Es sei ferner $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} \cdot \cos\beta x^2 . dx}{1+x^2} = y$, so ergiebt sich, wenn man nach α differentiirt: $y - dy_\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cdot \cos\beta x^2 . dx$

oder: $y - dy_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\alpha^2+\beta^2}\right)}$. Das Integral dieser Differentialgleichung ist aber $y=(c+u) \cdot e^\alpha$, wo u eine Funktion von α ist. Nach dem bisherigen Verfahren erhält man:

$$u = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_0^\alpha e^{-\alpha} \sqrt{\left(\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\alpha^2+\beta^2}\right)} . d\alpha \quad \text{und}$$

für $\alpha = 0$, $c = \int_0^\infty \frac{\cos\beta x^2 . dx}{1+x^2}$. Es ist also:

$$\text{VIII)} \ldots \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-x} \cdot \sqrt{\left(\frac{x+\sqrt{(x^2+\beta^2)}}{x^2+\beta^2}\right)} . dx = \int_0^\infty \frac{\cos\beta x^2 . dx}{1+x^2}$$

oder wenn man statt des Integrals zur Rechten den früher dafür gefundenen Ausdruck setzt:

$$\text{VIII a)} \ldots \int_0^\infty e^{-x} \cdot \sqrt{\left(\frac{x+(\sqrt{x^2+\beta^2})}{x^2+\beta^2}\right)} . dx =$$

$$2 . \int_{\sqrt{\beta}}^\infty \sin(x^2-\beta) . dx + \int_{\sqrt{\beta}}^\infty \frac{\sin(x^2-\beta) . dx}{x^2}$$

und für ein hinreichend großes β . . . .

$$\text{VIII b)} \ldots \int_0^\infty e^{-x} \cdot \sqrt{\left(\frac{x+\sqrt{(x^2+\beta^2)}}{x^2+\beta^2}\right)} . = \left(\frac{P+Q}{\sqrt{\beta}}\right).$$

6) Ganz eben so findet sich, wenn man von dem Integral:
$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} . \sin\beta x^2 . dx}{1+x^2}$ ausgeht:

$$\text{IX)} \ldots \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\pi}{2}} . \int_0^\infty e^{-x} \cdot \sqrt{\left(\frac{-x+\sqrt{(x^2+\beta^2)}}{x^2+\beta^2}\right)} dx =$$

$$\int \frac{\sin\beta x^2 . dx}{1+x^2} \quad \text{oder}$$

$$\text{IX a)} \ldots \int_0^\infty e^{-x} \cdot \sqrt{\left(\frac{-x+\sqrt{(x^2+\beta^2)}}{x^2+\beta^2}\right)} \ldots dx =$$

$$2 . \int_{\sqrt{\beta}}^\infty \sin(x^2-\beta) . dx - \int_{\sqrt{\beta}}^\infty \frac{\sin(x^2-\beta) . dx}{x^2}$$

und für einen hinreichend großen numerischen Werth von β

$$\text{IXb)} \;..\; \int^{\infty} e^{-x} \cdot \sqrt{\left(\frac{-x+\sqrt{(x^2+\beta^2)}}{x^2+\beta^2.}\right)} dx = \frac{P-Q}{\sqrt{\beta}}$$

($\sqrt{\beta} > 3$) wobei in den Reihen für **P** und **Q** überall $\sqrt{\beta}$ statt a gesetzt werden muß. Man kann den Integralen **VIII** und **IX** zur Linken auch, indem man $x = \beta . \operatorname{cotg} \varphi$ setzt, folgende Form geben: $\sqrt{(2\beta)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta \operatorname{cotg} \varphi} . \cos \tfrac{1}{2} \varphi . \frac{d\varphi}{(\sin \varphi)^{\frac{3}{2}}}$ und

$$\sqrt{(2\beta)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta \operatorname{cotg} \varphi} . \sin \tfrac{1}{2} \varphi . \frac{d\varphi}{(\sin \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Es ergiebt sich ferner für die zu Grunde gelegten Integrale:

$$\text{X)} \;..\; \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} . \cos \beta x^2 . dx}{1+x^2} = e^{\alpha} . \int_{\alpha}^{\infty} e^{-x} \cdot \sqrt{\left(\frac{x+\sqrt{(x^2+\beta^2)}}{x^2+\beta^2}\right)} dx$$

$$\text{XI)} \;..\; \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} . \sin \beta x^2 . dx}{1+x^2} = e^{\alpha} . \int_{\alpha}^{\infty} e^{-x} \cdot \sqrt{\left(\frac{-x+\sqrt{(x^2+\beta^2)}}{x^2+\beta^2}\right)} dx$$

Wenn man aber in den Integralen zur Linken $\operatorname{con} \beta x^2$ und $\sin \beta x^2$ in Reihen entwickelt, so lassen sich wenn β nicht sehr von der Einheit verschieden ist, daraus vermittelst der (Abhdl. I.) unter Nr. 45, und ff. aufgestellten Formeln für: $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} . x^{2m} . dx}{1+x^2}$ Reihen ableiten, die zur numerischen Berechnung ziemlich bequem sind, und durch welche dann die ungleich complicirteren Integrale zur Rechten ermittelt werden können. —

7) In ganz ähnlicher Weise, weshalb auch hier die Entwickelung übergangen werden mag, ergiebt sich, wenn man von den Integralen

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\varphi(x)} \cdot \cos\beta\varphi(x)\,.\,dx}{1+\varphi(x)} \text{ und } \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\varphi(x)} \cdot \sin\beta\varphi(x)\,.\,dx}{1+\varphi(x)}$$

wobei $\varphi(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ist, ausgeht, und $\frac{\beta}{x^2} = \operatorname{tg}\varphi$ setzt, nach einigen sich von selbst darbietenden Substitutionen:

$$\text{XI)} \ldots \int_0^\infty e^{-3x^2} \cdot \cos(2\operatorname{tg}\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi) \cdot \sqrt{(\cos\varphi)} \,.\, dx =$$

$$\frac{\cos 2\beta}{2\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \frac{\cos\beta x^2 \,.\, dx}{3+x^2} - \frac{\sin 2\beta}{2\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin\beta x^2 \,.\, dx}{3+x^2} \quad \text{und}$$

$$\text{XII)} \ldots \int_0^\infty e^{-3x^2} \cdot \sin(2\operatorname{tg}\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi) \cdot \sqrt{(\cos\varphi)}\, dx =$$

$$\frac{\cos 2\beta}{2\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \frac{\sin\beta x^2 \,.\, dx}{3+x^2} + \frac{\sin 2\beta}{2\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \frac{\cos\beta x^2 \,.\, dx}{3+x^2}$$

wobei $\frac{\beta}{x^2} = \operatorname{tg}\varphi$.

8) Es sei ferner $\int_0^\infty \frac{e^{-\varphi(x)} \cdot \cos cx^2 \,.\, dx}{1+x^2} = y$ wo $\varphi x = a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}$ so hat hat man $2ay - dy_a =$

$$2a \,.\, \int_0^\infty e^{-\varphi(x)} \cdot \cos cx^2 = \sqrt{\pi} \,.\, e^{-2bp} \cdot \cos(2bq + \tfrac{1}{2}\varphi) \cdot \sqrt{(\cos\varphi)}$$

wenn der Kürze wegen:

$$p = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\sqrt{\left(a^2 + \sqrt{(a^4+c^2)}\right)};\; q = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.\left(-a^2 + \sqrt{(a^4+c^2)}\right)$$

und $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{c}{a^2}$ gesetzt wird.

Das Integral der vorstehenden Differentialgleichung hat die Form $y = (c+u)\, e^{\alpha^2}$ wo u eine Funktion von a ist.

Differentiirt man die Gleichung, so ergiebt sich:

$$u = -\sqrt{\pi} \cdot \int_0^a e^{-x^2} \cdot e^{-2bp} \cdot \cos\left(2bq + \tfrac{1}{2}\varphi\right) \sqrt{(\cos\varphi)} \, . \, dx$$

wo in den Gleichungen für p, q und φ überall x an die Stelle von a zu setzen ist. Für $a = 0$ erhält man für C

$$C = \int_0^\infty \frac{e^{-\varphi(x)} \cdot \cos c x^2 . \, dx}{1 + x^2}$$ wobei jetzt $\varphi(x) = \frac{b^2}{x^2}$ ist.

Daher hat man nach dem oben gegebenen Satze:

XIII) $\ldots \sqrt{\pi} \cdot \int_0^\infty e^{-x^2} \cdot e^{-2bp} \cdot \cos\left(2bq + \tfrac{1}{2}\varphi\right) \cdot \sqrt{(\cos\varphi)} . dx =$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{b^2}{x^2}} \cdot \cos c x^2 . \, dx}{1 + x^2}.$$ Setzt man aber dies letztere Integral $= z$, und zugleich darin $\frac{1}{x}$ statt x, so hat man

$$dz_b = -2b \int_0^\infty \frac{e^{-b^2 x^2} . x^2 \cos \frac{c}{x^2} . \, dx}{1 + x^2}$$ und folglich:

$$2bz - dz_b = 2b \cdot \int_0^\infty e^{-b^2 x^2} \cdot \cos \tfrac{c}{x^2} . \, dx = \sqrt{\pi} \cdot e^{-b\sqrt{2c}} \cdot \cos b\sqrt{2c}$$

(Man vergleiche darüber Abhdl. I. Nr. 29 Seite 12).

Die Form des Integrals dieser Differentialgleichung ergiebt sich abermals $z = (C + \psi) \, e^{b^2}$ wo ψ eine Funktion von b ist.

Man erhält auf demselben Wege:

$$\psi = -\sqrt{\pi} \cdot \int_0^b e^{-x^2} \cdot e^{-x\sqrt{2c}} \cdot \cos x\sqrt{2c} . \, dx$$ während für $b = 0$

sich ergibt $C = \int_0^\infty \frac{\cos \frac{c}{x^2} . \, dx}{1 + x^2} = \int_0^\infty \frac{\cos c x^2 . \, dx}{1 + x^2}$ so daß man erhält für $b = \infty$ nach dem obigen Satze:

$$\text{XIV)} \ldots \sqrt{\pi} \cdot \int_0^\infty e^{-(x^2+x\sqrt{2c})} \cdot \cos x . \sqrt{2c}\, dx = \int_0^\infty \frac{\cos c x^2 dx}{1+x^2}$$

wobei man dem Integrale zur Linken, wenn man $2c^2$ statt c setzt, und den Exponenten zu einem Quadrate ergänzt, auch folgende Form geben kann:

$$\text{XIVa)} \ldots \sqrt{\pi} . \int_0^\infty e^{-(x^2+2cx)} . \cos 2cx . dx =$$

$$\sqrt{\pi} . e^{c^2} . \int_c^\infty e^{-x^2} . \cos 2c . (x-c) . dx = \int_0^\infty \frac{\cos 2c^2x^2 . dx}{1+x^2}$$

Vermittelst dieser Werthe von ψ und C findet man aber für z

$$\text{XV)} \ldots z = \sqrt{\pi} . e^{b^2} . \int_b^\infty e^{-(x^2+x\sqrt{2c})} . \cos x\sqrt{2c} . dx$$

oder auch wenn man $2c^2$ statt c setzt:

$$\text{XVa)} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{b^2}{x^2}} . \cos 2c^2 . x^2 . dx}{1+x^2} = \sqrt{\pi} . e^{b^2+c^2} . \int_b^\infty e^{-(x+c)^2} . \cos 2cx . dx$$

Dadurch erhält man schließlich für das Integral XIII

$$\text{XVI)} \int_0^\infty e^{-(x^2+2b\varphi(x))} . \cos f(x) . \sqrt{(\cos\vartheta)} . dx = e^{b^2+c^2} . \int_b^\infty e^{-(x+c)^2} . \cos 2cx . dx$$

wobei $\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(x^2+\sqrt{(x^4+4c^4)}\right)}$;

$$f(x) = b\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(-x^2+\sqrt{(x^4+4c^4)}\right)} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2c^2}{x^2}$$

und $\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{2c^2}{x^2}$ der Kürze wegen gesetzt worden ist.

Substituirt man in dem Integrale XVI zur Rechten $x-c$ statt x, so erhält man mit Rücksicht auf die Gränzen:

$$\int_b^\infty e^{-(x+c)^2} . \cos 2cx . dx = \int_{b+c}^\infty e^{-x^2} . \cos 2c(x-c) . dx$$

Dies letztere Integral, das auf zwei andre von der Form $\int_{b+c}^{\infty} e^{-x^2} . \cos 2cx . dx$ und $\int_{b+c}^{\infty} e^{-x^2} . \sin 2cx . dx$ zurückgeführt werden kann, läßt sich, im Falle daß $b+c$ einen großen numerischen Werth hat, $(b+c>5)$ näherungsweise bestimmen, wenn man auf das Integral $\int_{p\pm qi}^{\infty} e^{-x^2} . dx$ die theilweise Integration anwendet. Man wird dann zu einer Reihe geführt, welche mit der Nr. 1, Abhandl. I. übereinstimmt, wenn man dort überall $p\pm qi$ statt a setzt. Man hat nämlich wenn man statt $\cos 2cx$, $\sin 2cx$ ihre Exponentialausdrücke einführt:

XVII) . . $\int_{\mu}^{\infty} e^{-x^2} . \cos 2cx . dx =$

$$\frac{e^{-c^2}}{2} . \int_{\mu-ci}^{\infty} e^{-x^2} . dx + \frac{e^{-c^2}}{2} . \int_{\mu+ci}^{\infty} e^{-x^2} . dx$$ und

XVIII) . . $\int_{\mu}^{\infty} e^{-x^2} . \sin 2cx . dx =$

$$\frac{e^{-c^2}}{2i} . \int_{\mu-ci}^{\infty} e^{-x^2} . dx - \frac{e^{-c^2}}{2i} . \int_{\mu+ci}^{\infty} e^{-x^2} . dx$$

Bezeichnet man nun der Kürze wegen die Theile der Binomien $(p\pm qi)^{2n}$ mit $p_{2n} \pm iq_{2n}$, so daß:
$(p\pm qi)^{2n} = p_{2n} \pm iq_{2n}$ ist, und die Reihen:

$$1 - \frac{p_2}{2.(p^2+q^2)^2} + \frac{1.3.p_4}{2^2.(p^2+q^2)^4} - \frac{1.3.5.p_6}{2^3.(p^2+q^2)^6} + \ldots \text{mit } P$$

$$\frac{q_2}{2.(p^2+q^2)^2} - \frac{1.3.q_4}{2^2.(p^2+q^2)^4} + \frac{1.3.5.q_4}{2^3.(p^2+q^2)^6} - \ldots \text{mit } Q\text{*)}$$

*) Die Ergänzungsglieder erhält man nach Nr. 1, Abhandl. 1, wenn man dort statt a, im Ergänzungsgliede $p\pm qi$ setzt und nun den reellen Theil vom imaginären trennt.

ferner die Ausdrücke: $(p.\cos 2pq - q.\sin 2pq)$ und $(q.\cos 2pq + p.\sin 2pq)$ mit m und n, so ist:

$$\text{XIX)}\,..\int_{p\pm qi}^{\infty} e^{-x^2}.\,dx = e^{q^2}.\left\{\frac{e^{-p^2}.(mP-nQ)}{2.(p^2+q^2)} \pm i\,\frac{e^{-p^2}.(nP+mQ)}{2(p^2+q^2)}\right\}$$

Vermöge dieser Gleichung hat man daher, wenn man den reellen Theil vom imaginären trennt, indem man das Integral zur Linken zerlegt:

$$\text{XX)}\,..\int_{p}^{\infty} e^{-x^2}.\cos 2qx.\,dx = \tfrac{1}{2}.\frac{e^{-p^2}.(mP-nQ)}{p^2+q^2}$$

$$\text{XXI)}\,..\int_{p}^{\infty} e^{-x^2}.\sin 2qx.\,dx = \tfrac{1}{2}.\frac{e^{-p^2}.(nP+mQ)}{p^2+q^2}$$

Die hierbei vorkommenden Glieder p_{2n} und q_{2n} sind, wenn man wie gewöhnlich die Binomialcoefficienten mit $2n_1$, $2n_2$, $2n_3$ rc. . . . bezeichnet:

$p_{2n} = p^{2n} - 2n_2.\,p^{2n-2}q^2 + 2n_4.\,p^{2n-4}q^4 - \ldots\ldots +$

$q_{2n} = 2n_1.\,p^{2n-1}q - 2n_3.\,p^{2n-3}q^3 + 2n_5.\,p^{2n-5}q^5 - \ldots\ldots +$

Demnach wird in den eben vorgelegten Integralen, wo

$$p = b+c\,,\ q = c \text{ ist:}$$

Beispielshalber: $p_2 = b^2 + 2bc$; $q_2 = 2c.(b+c)$

$p_4 = (b+c)^2.\left\{b^2+2bc-5c^2\right\}+c^4$; $q_4 = 4bc.(b+c)(b+2c)$ . .

Wenn $b+c \overline{\overline{>}} 5$, so geben die Formen **XX** und **XXI** die Integralwerthe zur Linken auf 5—6 Decimalstellen genau, wenn man nur einige Glieder der Reihen P und Q nimmt.

9) Auf Integrale von derselben Form wird man geführt, wenn man das Integral:

$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-\varphi(x)}.\sin cx^2.dx}{1+x^2} = y$ zu Grunde legt, wobei $\varphi(x) = a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}$

Man findet auf demselben Wege, wie bei Nr. XIII

$$\text{XXII)} \;.\;.\; \int_0^\infty e^{-(x^2+2b\varphi(x))} \cdot \sin f(x) \cdot \sqrt{(\cos\vartheta)} \cdot dx = \int_0^\infty \frac{e^{-\psi(x)} \cdot \sin c\,x^2 \cdot dx}{1+x^2}$$

wo $\psi(x)=\frac{b^2}{x^2}$ und $\varphi(x)$ $f(x)$ und ϑ die oben angegebene Bedeutung haben.

Setzt man das zweite Integral zur Rechten $= z$, und zugleich $\frac{1}{x}$ statt x, so ergiebt sich mit Rücksicht auf Nr. 30 Abhandl. I. wenn man nach b differentiirt:
$z = (C+\psi)\, e^{b^2}$ wo ψ eine zu bestimmende Funktion von b ist. Für ψ findet man auf bekannte Weise:

$$\psi = -\sqrt{\pi} \cdot \int_0^\infty e^{-(x^2+x\sqrt{2c})} \cdot \sin x\sqrt{2c} \cdot dx\,.$$

Demnach hat man für $b=\infty$ nach dem obigen Satze:

$$\text{XXIII)} \;.\;.\; \sqrt{\pi} \cdot \int_0^\infty e^{-(x^2+\sqrt{2c})} \cdot \sin x\sqrt{2c} \cdot dx = \int_0^\infty \frac{\sin c\,x^2 \cdot dx}{1+x^2}$$

Somit erhält man ferner für z oder . . .

$$\text{XXIV)} \;.\;.\; \int_0^\infty \frac{e^{-\psi(x)} \cdot \sin c\,x^2 \cdot dx}{1+x^2} = \sqrt{\pi} \cdot \int_b^\infty e^{-(x^2+x\sqrt{2c})} \cdot \sin x\sqrt{2c} \cdot dx$$

wobei wie früher $\psi(x)=\frac{b^2}{x^2}$. Dadurch geht die Formel XXII, wenn man noch $2c^2$ statt c setzt, und das Integral zur Rechten etwas umformt, über in:

$$\text{XXV)} \int_0^\infty e^{-(x^2+2b\varphi(x))} \cdot \sin f(x) \cdot \sqrt{(\cos\vartheta)} \cdot dx = e^{b^2+c^2} \int_{b+c}^\infty e^{-x^2} \cdot \sin 2c \cdot (x-c)\,dx$$

Das Integral zur Rechten läßt sich für $b+c>5$ auf die Integrale XX und XXI zurückführen:

10) Auf Integrale von ähnlicher Form kömmt man, wenn man das Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-\varphi(x)} . dx}{1+x^4} = y$ nach a differentiirt, wobei wie oben $\varphi(x) = a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}$. Man erhält die Differentialgleichung:

$$y + d^2 y_a = \int_0^\infty e^{-\varphi(x)} . dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \cdot e^{-2b\sqrt{a}},$$

deren Integral, wie man bald findet, die Form hat:

$y = (c_1 + u) \cos a + (c_2 + v) . \sin a$, wo wie gewöhnlich u und v Funktionen von a sind. Nach bekannten Regeln ergibt sich:

$$u = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} . \int_0^{\sqrt{a}} \frac{e^{-2b\sqrt{a}} . \sin a . da}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\pi} . \int_0^{\sqrt{a}} e^{-2bx} . \sin x^2 . dx$$

und

$$v = +\frac{\sqrt{\pi}}{2} . \int_0^{\sqrt{a}} \frac{e^{-2b\sqrt{a}} . \cos a . da}{\sqrt{a}} = +\sqrt{\pi} . \int_0^{\sqrt{a}} e^{-2bx} . \cos x^2 . dx$$

Für $a=0$ hat man ferner:

$$c_1 = \int_0^\infty \frac{e^{-\psi(x)} . dx}{1+x^4} = \int_0^\infty \frac{e^{-b^2x^2} . x^2 . dx}{1+x^4} \text{ und eben so:}$$

$$c_2 = -\int_0^\infty \frac{e^{\psi(x)} . x^2 . dx}{1+x^4} = -\int_0^\infty \frac{e^{-b^2x^2} . dx}{1+x^4}$$

wobei $\psi(x)$ die unter Nr. 9 gegebene Bedeutung hat.

Nun ist nach Nr. 72 Abhandlung I. für $\varphi = 1$, $\varphi = b$:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-b^2x^2} . dx}{1+x^4} = \sqrt{\pi} . \int_b^\infty \sin(x^2 - b^2) . dx$$

und wenn man nach b differentiirt:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-b^2x^2} . x^2 . dx}{1+x^4} = \sqrt{\pi} . \int_b^\infty \cos(x^2 - b^2) . dx .$$

Setzt man nun im aufgegebenen Integral a^2 statt a, so ist vermittelst dieser Ausdrücke:

$$y = \sqrt{\pi} \cdot \cos a^2 \cdot \left\{ \int_b^\infty \cos(x^2-b^2) \cdot dx - \int_0^a e^{-2bx} \cdot \sin x^2 \cdot dx \right\}$$

$$- \sqrt{\pi} \cdot \cos a^2 \cdot \left\{ \int_b^\infty \sin(x^2-b^2) \cdot dx - \int_0^a e^{-2bx} \cdot \cos x^2 \cdot dx \right\}$$

Wenn man in Nr. **18** und **19** Abhandl. I, statt der Integrale zur Rechten ihre complementären setzt, so ergibt sich nach einigen Rechnungen:

$$\text{XXVI)} \ldots \int_0^\infty e^{-2bx} \cdot \cos x^2 \cdot dx = \int_b^\infty \sin(x^2-b^2) \cdot dx$$

$$\text{XXVII)} \ldots \int_0^\infty e^{-2bx} \cdot \sin x^2 \cdot dx = \int_b^\infty \cos(x^2-b^2) \cdot dx$$

Dadurch erhält man für y:

$$y = \sqrt{\pi} \cdot \cos a^2 \cdot \left\{ \int_0^\infty e^{-2bx} \cdot \sin x^2 \cdot dx - \int_0^a e^{-2bx} \cdot \sin x^2 \cdot dx \right\}$$

$$- \sqrt{\pi} \cdot \sin a^2 \cdot \left\{ \int_0^\infty e^{-2bx} \cdot \cos x^2 \cdot dx - \int_0^a e^{-2bx} \cdot \sin x^2 \cdot dx \right\}$$

$$= \sqrt{\pi} \cdot \cos a^2 \cdot \int_a^\infty e^{-2bx} \cdot \sin x^2 \cdot dx - \sqrt{\pi} \cdot \sin a^2 \cdot \int_a^\infty e^{-2bx} \cdot \cos x^2 \cdot dx$$

$$= \sqrt{\pi} \cdot \int_a^\infty e^{-2bx} \cdot \sin(x^2-a^2) \cdot dx \quad \text{und also:}$$

$$\text{XXVIII)} \ldots \int_0^\infty \frac{e^{-\varphi(x)} \cdot dx}{1+x^4} = \sqrt{\pi} \cdot \int_a^\infty e^{-2bx} \cdot \sin(x^2-a^2) \cdot dx$$

Hieraus ist für $a=0$, $b=0$, ...

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \sqrt{\pi} \cdot \int_0^\infty \sin x^2 \,.\, dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

wie dies auch schon anderweitig bekannt ist.

Die hierbei (XXVIII) auftretenden Integrale $\int_a^\infty e^{-2bx} \,.\, \sin x^2 \,.\, dx$ und $\int_a^\infty e^{-2bx} \,.\, \cos x^2 \,.\, dx$ können für hinreichend große Werthe von a und b, näherungsweise durch ähnliche Reihen wie die Integrale XX und XXI ermittelt werden, wobei wir jedoch nicht verweilen wollen.

13) Setzt man ferner das Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-\varphi x} \,.\, \cos cx^2 \,.\, dx}{1+x^4} = y$ $\left(\varphi(x) = a^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}\right)$ so ist $y - d^2y_c = \int_0^\infty e^{-\varphi(x)} \,.\, \cos cx^2 \,.\, dx = f(a, b, c)$ wobei $f(a, b, c) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot e^{-2bp} \,.\, \cos(2bq + \frac{1}{2}\varphi) . \sqrt{(\cos\varphi)}$ ist, wenn man wie oben: $p = \frac{1}{2}\sqrt{2} . \sqrt{(a^2 + \sqrt{(a^4 + c^2)})}$; $q = \frac{1}{2}\sqrt{2} . \sqrt{(-a^2 + \sqrt{(a^4 + c^2)})}$; $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{c}{a^2}$ setzt.

Das Integral der Differentialgleichung ist:

α) . . . $y = (c_1 + u)\, e^c + (c_2 + v)\, e^{-c}$ wo u und v Funktionen von c vorstellen. Man findet nach bekannten Regeln:

$$c_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2} \,.\, e^{-\frac{b^2}{x^2}}}{1+x^4}\, dx = c_2 \quad \text{und}$$

β) . . . $u = -\frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_0^c e^{-(c+2bp)} \,.\, \cos(2bq + \frac{1}{2}\varphi) . \sqrt{(\cos\varphi)}\, dc$

γ) . . . $v = +\frac{\sqrt{\pi}}{2a} \int_0^c e^{+c-2bp} \,.\, \cos(2bq + \frac{1}{2}\varphi) \sqrt{\cos\varphi} . dc$

Dividirt man in der Gleichung α, auf beiden Seiten durch e^{-c} weg, und setzt man dann $c = \infty$, so verschwindet das Produkt $e^{-c}y$. Das zweite Glied rechts nimmt zwar die Form an $\frac{\infty}{\infty}$. Es ergibt sich jedoch nach bekannten Regeln, daß auch dies Glied $= 0$ wird, so daß man schließlich erhält: $c_1 + u = 0$, oder:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot \int_0^\infty e^{-(x+2bp)} \cdot \cos(2bq + \tfrac{1}{2}\varphi) \cdot \sqrt{(\cos\varphi)} \cdot dx = \int_0^\infty \frac{e^{-\varphi(x)} \cdot dx}{1+x^4}$$

(wobei $\varphi(x)$ wie oben) und $p = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{(a^2 + \sqrt{(a^4+x^2)})}$; $q = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{(-a^2 + \sqrt{(a^4+x^2)})}$; $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{a^2}$ ist.

Setzt man statt des Integrals zur Rechten den früher dafür gefundenen Ausdruck, so erhält man:

$$\text{XXIX)} \int_0^\infty e^{-(x+2bp)} \cdot \cos(2bq + \tfrac{1}{2}\varphi) \cdot \sqrt{(\cos\varphi)} \cdot dx = \int_a^\infty e^{-2bx} \cdot \sin(x^2 - a^2) \cdot dx$$

In ähnlicher Weise läßt sich das Integral:

$\int_0^\infty e^{-(x+2bp)} \cdot \sin(2bq + \frac{1}{2}\varphi) \cdot \sqrt{(\cos\varphi)} \cdot dx$ behandeln, wenn man die Formeln **41**, Abhandl. I. berücksichtigt. —

12) Denkt man sich bei dem Integral $\int_0^\infty e^{-x^{2n}} \cdot \cos bx \cdot dx = f(b)$, $\cos bx$ in eine Reihe entwickelt so hat man eine Reihe von Integralen von der Form: $\int_0^\infty e^{-x^{2n}} \cdot x^{2m} \cdot dx = k_{2m}$

Setzt man nun ax statt x, so wird das Integral:

$$\int_0^\infty e^{-x^{2n}} \cdot x^{2m} \cdot dx = \int_0^\infty e^{-a^{2n} \cdot x^{2n}} \cdot x^{2m} \cdot a^{2m+1} \cdot dx = k_{2m} \text{ und also:}$$

$$\int_0^\infty e^{-a^{2n} \cdot x^{2n}} \cdot x^{2m} \cdot dx = \frac{k_{2m}}{a^{2m+1}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{k_{2m}}{a^{2m}}.$$

Auf diese Weise überzeugt man sich, daß wenn man hat:

$$\int_0^\infty e^{-x^{2n}} . \cos bx . dx = f(b),$$ dann auch sein muß:

$$\int_0^\infty e^{-a^{2n} . x^{2n}} . \cos bx . dx = \tfrac{1}{a} f\left(\tfrac{b}{a}\right).$$

Nun sei $\int_0^\infty \frac{e^{-a^{2n} x^{2n}} . \cos bx . dx}{1+x^{2n}} = y$; differentiirt man nach a, so wird: $dy_a = -2n . a^{2n-1} . \int_0^\infty \frac{e^{-a^{2n} . x^{2n}} . x^{2n} \cos bx . dx}{1+x^{2n}}$

und also: $2n . a^{2n-1} . y - dy_a = 2n . a^{2n-1} . \int_0^\infty e^{-a^{2n} . x^{2n}} . \cos bx . dx$

oder 1) $2n . a^{2n-1} . y - dy_a = 2n . a^{2n-2} . f\left(\tfrac{b}{a}\right)$.

Das Integral dieser Differentialgleichung hat die Form:

2) $y = (c + \psi)\, e^{a^{2n}}$, wo ψ wie gewöhnlich eine zu bestimmende Funktion von a ist. Man findet auf bekannte Weise: $\psi = -2n . \int_0^a e^{-x^{2n}} . x^{2n-2} f\left(\tfrac{b}{x}\right) . dx$;

für $a = 0$, wird $c = \int_0^\infty \frac{\cos bx . dx}{1+x^{2n}}$

Dividirt man nun die Gleichung 2) durch $e^{a^{2n}}$ auf beiden Seiten, und setzt man $a = \infty$ so verschwindet der Ausdruck links und man erhält:

$$\psi + c = 0, \text{ oder}$$

$$\text{XXX)} .. \int_0^\infty e^{-x^{2n}} . x^{2n-2} . f\left(\tfrac{b}{x}\right) . dx = \frac{1}{2n} . \int_0^\infty \frac{\cos bx . dx}{1+x^{2n}}$$

für $n = 1$, wird z. B. $f\left(\tfrac{b}{x}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{b^2}{x^2}}$ und folglich:

$$\int_0^\infty e^{-\varphi(x)} . dx = \tfrac{1}{2} . \int_0^\infty \frac{\cos bx . dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} . e^{-2b}$$

wie bekannt ist ($\varphi(x) = x^2 + \frac{b^2}{x^2}$). Da nach dem in der Abhandl. 1. Nr. 63 rc. Mitgetheilten das Integral $\int_0^\infty \frac{\cos bx.dx}{1+x^{2n}}$ immer in endlicher Form gefunden werden kann, so ist mithin auch das Integral $\int_0^\infty e^{-x^{2n}} . x^{2n-2}\varphi(\frac{b}{x}). dx$ in endliche Form zu ermitteln, obgleich die Funktion $f(\frac{b}{x})$ eine unendliche Reihe ist.

Es sei z. B. $n = 2$. Nun ist nach Nr. 63 Abhandl. 1.

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2ax . dx}{r^4 + 2r^2(\cos 2\mu)x^2 + x^4} = \pi \frac{e^{-2ru . \cos\mu} . \sin(\mu + 2ru\sin\mu)}{2r^3 \sin\mu}$$

Setzt man hierin $\mu = \frac{\pi}{4}$, $r = 1$, so ist $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos 2\mu = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin(\frac{\pi}{4} + 2a\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.(\cos u\sqrt{2} + \sin u\sqrt{2})$

also: $$\int_0^\infty \frac{\cos 2ax . dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2} . e^{-u\sqrt{2}} . (\cos u\sqrt{2} + \sin u\sqrt{2})$$

Daher hat man zuletzt:

$$\text{XXXI} \ldots \int_0^\infty e^{-x^4} . x^2 . \varphi(\tfrac{2a}{x}) . dx = \frac{\pi}{2} . e^{-u\sqrt{2}} . (\cos u\sqrt{2} + \sin u\sqrt{2})$$

13) Auf ähnliche Weise überzeugt man sich, daß wenn man hat: $\int_0^\infty e^{-x^{2n}} . \sin 2bx . dx = \psi(2b)$, alsdann auch ist:

$\int_0^\infty e^{-a^{2n}x^{2n}} . \sin 2bx . dx = \frac{1}{a}\psi(\frac{2b}{a})$. Wenn man nun

$\int_0^\infty e^{-a^{2n}x^{2n}} \cdot \frac{\sin 2bx \,.\, dx}{1+x^{2n}} = y$ setzt, so erhält man ganz auf demselben Wege wie vorher:

XXXII) . . $\int_0^\infty e^{-x^{2n}} \,.\, x^{2n-2} f\left(\frac{2b}{x}\right) . \, dx = \frac{1}{2n} . \int_0^\infty \frac{\sin 2bx \,.\, dx}{1+x^{2n}}$

Setzt man z. B. $n=1$, so ist mit Berücksichtigung der Formel 13 Abhandl. I:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \,.\, \sin 2bx \,.\, dx = \frac{1}{a} \,.\, f\left(\frac{2b}{a}\right) = \frac{e^{-\frac{b^2}{a^2}}}{2a} \int_0^{\frac{b}{a}} e^{+z^2} \,.\, dz$$

Folglich hat man nach dem im Eingange dieser Abhandlung erwähnten Satze:

XXXIII) $\int_0^\infty e^{-\varphi(x)} \left(\int_0^{\frac{b}{x}} e^{+z^2} \,.\, dz\right) . \, dx = \int_0^\infty \frac{\sin 2bx \,.\, dx}{1+x^2}$

wobei $\varphi(x) = x^2 + \frac{b^2}{x^2}$ und wenn man das implicirte Integral entwickelt:

XXXIV) $\int_0^\infty e^{-\varphi(x)} \left(\frac{b}{x} + \frac{b^3}{x^3 3} + \frac{b^5}{x^5.5.2!} + \frac{b^7}{x^7.7.3!} + \ldots\right) . \, dx =$

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2bx \,.\, dx}{1+x^2}$$

Da es nun wohl schwerlich gelingen dürfte das Integral zur Linken in endlicher Form zu erhalten, so leuchtet auch ein, warum man das Integral zur Rechten nicht in endlicher Form zu finden vermag, während doch $\int_0^\infty \frac{\cos 2bx \,.\, dx}{1+x^2}$ bekannt ist.

Von den Integralen $\int_0^\infty e^{-x^{2n}} \,.\, \cos z.x.dx$ und $\int_0^\infty e^{-x^{2n}} \,.\, \sin z.x.dx$ ist noch bemerkenswerth, daß sie particuläre Integrale sind der beiden Differentialgleichungen:

$$d^{2n-1}y_z = \frac{z}{2n} \cdot y \text{ und } 2n \cdot d^{2n-1}u_z = 1 + z \cdot u$$

wenn man $y = \int_0^\infty e^{-x^{2n}} \cdot \cos(z.x).dx$ und $\int_0^\infty e^{-x^{2n}} \cdot \sin(zx)dx = u$ setzt. —

14) Wenn man das Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2} \cdot \sin 2bx \cdot dx}{r^2+x^2} = y$ zweimal nach b differentiirt, so erhält man die Differentialgleichung: $r^2y - \frac{1}{4}d^2y_b = \frac{1}{2}e^{-b^2}\int_0^b e^{+x^2}.dx$, deren Integral die Form hat:

1) $y = (c+u)e^{2br} + (c_1+v)e^{-2br}$

Nach der bisher verfolgten Methode ergibt sich leicht:

2) $$u = -\frac{1}{2r} \cdot \int_0^b \left(e^{-(b^2+2br)}\int_0^b e^{z^2}.dz\right) db$$
$$= -\frac{e^{r^2}}{2r} \cdot \int_0^b \left(e^{-(x+r)^2}\int_0^x e^{z^2}.dz\right).dx$$

3) $$v = +\frac{1}{2r} \cdot \int_0^b \left(e^{-(b^2-2br)}\int_0^b e^{z^2}.dz\right) db =$$
$$+ \frac{e^{r^2}}{2r} \cdot \int_0^b \left(e^{-(x-r)^2}\int_0^x e^{z^2}.dz\right) dx$$

während $c + c_1 = 0$, $c - c_1 = \frac{1}{2r} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-x^2} \cdot x.dx}{r^2+x^2}$ gefunden wird, so daß: $c = -c_1 = \frac{e^{r^2}}{2r} \cdot \int_{r^2}^\infty \frac{e^{-z}}{z}.dz$ wird, wenn man das vorhergehende Integral gehörig umformt. —

Dividirt man nun in der Gleichung 1, links und rechts durch e^{2rb} weg, und setzt man sodann $b = \infty$, so verschwindet das Glied links, und man überzeugt sich bald, daß auch das zweite Glied zur Rechten $= 0$ wird, so daß man erhält

$$c + u = 0, \text{ oder:}$$

$$\text{XXXV)} \ldots \int_0^\infty \left(e^{-(x+r)^2} \int_0^x e^{z^2} . dz\right) dx = \int_{r^2}^\infty \frac{e}{z}^{-z} . dz$$

oder wenn man das implicirte Integral entwickelt

$$\text{XXXVI)} \int_0^\infty e^{-(x+r)^2} . \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} + \frac{x^7}{7.3!} \ldots + \right) dx = \int_{r^2}^\infty \frac{e}{z}^{-z} . dz$$

ein jedesfalls bemerkenswerther Ausdruck für den Integrallogarithmus. —

15) Das Integral $\int_0^\infty e^{-a^2x^2} . \cos 2ux . f(x^2)^{-1} . dx$, wobei: $f(x^2) = A + Bx^2 + Cx^4 + \ldots + x^{2n}$, läßt sich, wie ich früher gezeigt habe, in dem Falle daß $f(x^2)$ in reelle Faktoren des zweiten Grades von der Form $x^2 + r^2$ zerlegt werden kann, immer auf Integrale von der Form $\int_p^\infty e^{-x^2} . dx$ reduciren. Werden dagegen die Faktoren $x^2 + r^2$ imaginär, d. h. hat man es mit Integralen wie $\int_0^\infty e^{-a^2x^2} . \cos 2ax . \psi(x^2)^{-1} . dx$ zu thun, wo $\psi(x^2) = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha x^2 + x^4$, so kömmt man (vergl. darüber Abhdl. I. Formel 66) auf das Integral

$$\int_a^\infty e^{-\varphi(x^2)} . \sin\beta (x^2 - a^2) . dx \ldots \text{ wobei } \varphi(x^2) = \alpha x^2 + \frac{a^2}{x^2}$$

welches wiederum in zwei Integrale $\int_a^\infty e^{-\varphi(x^2)} . \cos \beta x^2 . dx$

$\int_a^\infty e^{-\phi(x^2)} . \sin\beta x^2 . dx$ zerfällt. Denkt man sich nun $\sin\beta x^2$ und $\cos\beta x^2$ in Reihen entwickelt, so kömmt man auf lauter Integrale von der Form $\int_a^\infty e^{-\phi(x^2)} . x^{2n} . dx$. Diese lassen sich aber jedesmal auf das Integral $\int_p^\infty e^{-x^2} . dx$ zurückführen, wie sogleich gezeigt werden soll. Die Transformation erlangt man, wenn man das Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-u^2x^2} . \cos 2\alpha x . dx}{r^2+x^2} = y$ einmal nach u differentiirt, die daraus hervorgehende Differentialgleichung integrirt, und dann wiederum nach α differentiirt und mit der entstehenden Differentialgleichung eben so verfährt. Setzt man alsdann die auf diesem Wege erhaltenen Resultate einander gleich, so hat man das Verlangte. Auf diesem Wege ergibt sich aber, wenn man der Kürze wegen die Ausdrücke $r^2x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}$, $ur+\frac{\alpha}{x}$ und $ur-\frac{\alpha}{x}$ der Reihe nach mit $\phi(x^2)$, ς und δ bezeichnet:

$$\text{XXXVII)} \int_u^\infty e^{-\phi(x^2)} . dx = \frac{1}{2r} \left\{ e^{2r\alpha} . \int_\varsigma^\infty e^{-x^2} . dx + e^{-2r\alpha} \int_\delta^\infty e^{-x^2} . \right\}$$

Differentiirt man diese Gleichung nach r, so ergeben sich wie man sieht Integrale von der Form $\int_u^\infty e^{-\phi(x^2)} . x^{2n} . dx$.

Zum Behufe bequemerer Differentiation nach r, kann man den Integralen zur Rechten, indem man rx statt x setzt, auch folgende Form geben:

$$\tfrac{1}{2}\cdot e^{2r\alpha}\int_s^\infty e^{-r^2x^2}dx + \tfrac{1}{2}\,e^{-2r\alpha}\int_d^\infty e^{-r^2x^2}dx$$

wo nun $s = u + \frac{\alpha}{ru}$; $d = u - \frac{\alpha}{ru}$

Ferner muß bemerkt werden, daß wenn in dem Integral $\int_a^b f(y)\,.\,dy$, a und b Funktionen einer zweiten Veränderlichen x sind, in Beziehung auf welche man das Integral differentiiren will, daß alsdann immer sein muß:

$$d\left(\int_a^b f(y)\,.\,dy\right)_x = \int_a^b d\big(f(y)\,.\,dy\big)_x + f(b)db_x - f(a)\,.\,da_x$$

Mit gehöriger Rücksicht auf diese Regel ergibt sich, wenn man der Kürze wegen die Ausdrücke:

$$e^{2r\alpha}\int_s^\infty e^{-r^2x^2}dx,\ e^{-2r\alpha}\int_d^\infty e^{-r^2x^2}dx \text{ und } e^{-r^2u^2-\frac{\alpha^2}{u^2}}$$

Der Reihe nach mit M, N und $e^{-\varphi(u^2)}$ bezeichnet:

$$\text{XXXVIII)}\int_u^\infty e^{-\varphi(x^2)}x^2.dx = \left(\tfrac{1}{4r^2}-\tfrac{\alpha}{2r}\right).M + \left(\tfrac{1}{4r^2}+\tfrac{\alpha}{2r}\right)N + \tfrac{u}{2r^2}.e^{-\varphi(u^2)}$$

XXXIX)

$$\int_u^\infty e^{-\varphi(x^2)}x^4.dx = \left\{\tfrac{1}{8r^4}+\tfrac{1}{4r^2}.\left(\alpha-\tfrac{1}{2r}\right)^2\right\}M + \left\{\tfrac{1}{8r^4}-\tfrac{1}{4r^2}\left(\alpha+\tfrac{1}{2r}\right)^2.\right\}N$$
$$+\ \tfrac{u}{2r^3}.\left\{u^2+\tfrac{3}{4r^2}\right\}\ e^{-\varphi(u^2)}$$

$$\text{XXXX)}\int_u^\infty e^{-\varphi(x^2)}.x^6.dx = A_6.M + B_6.N + D_6.e^{-\varphi(u^2)}$$

wo $A_6 = \frac{15}{16r^6} - \frac{r\alpha}{8r^4} + \frac{3\alpha^2}{4r^2} - \frac{\alpha^3}{2r}$; $B_6 = \frac{15}{16r^6} - \frac{5\alpha}{8r^4} - \frac{3\alpha^2}{4r^2} - \frac{\alpha^3}{2r}$ ꝛc.

Bezeichnet man auch in den vorhergehenden Gleichungen die Vorzahlen von M, N und $e^{-\varphi(u^2)}$ mit A_2, B_2, D_2, A_4, B_4, D_4, so erhält man durch fortgesetztes Differentiiren:

$$\text{XXXXI)} \int_u^\infty e^{-\varphi(x^2)} . \cos x^2 . dx = M . \left\{ A_1 - \frac{A_4}{2!} + \frac{A_8}{4!} - \ldots \right\}$$

$$+ N . \left\{ B_1 - \frac{B_4}{2!} + \frac{B_8}{4!} - \ldots \right\} + e^{-\varphi(u^2)} \left\{ \frac{D_1}{1!} - \frac{D_4}{2!} + \frac{D_8}{4!} - \right\}$$

XXXXII)

$$\int_u^\infty e^{-\varphi(x^2)} . \sin x^2 . dx = M . \left\{ A_2 - \frac{A_6}{3!} + \frac{A_{10}}{5!} - \ldots \right\} + N . \left\{ B_2 - \frac{B_6}{3!} + \frac{B_{10}}{5!} - \right\}$$

$$e^{-\varphi(u^2)} \left\{ D_2 - \frac{D_6}{3!} + \frac{D_{10}}{5!} - \ldots \right\}$$

Die in M und N vorkommenden Integrale lassen sich aber für einen hinreichend großen numerischen Werth von $ra - \frac{\infty}{u}$ leicht vermittelst der Abhandl. I Formel 1 gegebenen Reihe ermitteln so daß man erhält für die Ausdrücke M und N selber:

$$\text{XXXXIII)}\ M = \frac{e^{-\varphi(u^2)}}{4s} \left\{ 1 - \frac{1}{2r^2.s^2} + \frac{1.3}{2^2.r^4s^4} - \frac{1.3.5}{2^3.r^6s^6} + \ldots \right\}$$

$$\text{XXXXIV)}\ N = \frac{e^{-\varphi(u^2)}}{4d} \left\{ 1 - \frac{1}{2r^2.d^2} + \frac{1.3}{2^2.r^4d^4} - \frac{1.3.5}{2^3.r^6d^6} + \ldots \right\}$$

wobei die Ergänzungsglieder die in derselben Formel gegebene Form haben.

Berichtigungen:

Seite 7 Zeile 2 statt $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, lies: $\cos x^2$ $\sin x^2$

„ 12 „ 16 „ $\int_0^{\infty}$ „ $\int_0^{\alpha}$

„ 13 „ 8 „ a „ α

„ 13 „ 8 „ $\int_{.}^{\infty}$ „ $\int_0^{\infty}$

„ 21 „ 10 „ $\int_0^{\infty}$ „ $\int_0^{b}$

„ 22 „ 3 von unten statt $\varphi = 1$, lies $\beta = 1$

Thesen.

1) Die Natur, d. h. die Welt der Erscheinungen weis't uns hin auf die Untersuchung des unendlich Kleinen.

2) Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist nichts anders als das Verhältniß unendlich kleiner Größen.

3) Der Ausdruck $\frac{1}{0}$ ist mehr als ein bloses Symbol.

4) Ein Dreieck ist ein Viereck.

5) Bei dem Versuche das Materielle zu erklären hat die dynamische Hypothese als größtes Hinderniß das Vorurtheil des Materiellen gegen sich.

6) Bei der atomistischen Hypothese führen Consequenzen nothwendig darauf hin, daß die Atome sich nicht berühren können.

7) Steht der vorhergehende Satz fest, so ist die Annahme einer an die Atome gebundenen Repulsivkraft unabweisbar.

8) Dann müssen wir der Wärme diese Repulsivkraft zuschreiben.

9) Alles Wägbare ist ein Gleichgewichtszustand zwischen attraktiven und repulsiven Kräften.