

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TEHNOLOOGIATEADUSKOND

Füüsika Instituut

Sandhra-Mirella Valdma

**VALGUSE LEVIKU NUMBRILINE MODELLEERIMINE
MURDUMISNÄITAJA GRADIENDIGA
MATERJALISTRUKTUURIDES**

Bakalaureusetöö (12 EAP)

Juhendaja: vanemtead. Heli Lukner

Tartu 2013

Sisukord

1	Sissejuhatus	4
2	Ülevaade tehislikest optilistest materjalidest	7
2.1	Murdumine kahe erinevat tüüpi materjali piirpinnal	8
2.2	Valguse levimine vasakukäelistes materjalides	9
2.2.1	Doppleri efekt	9
2.2.2	Vavilov-Cherenkovi efekt	10
2.3	Veselago-Pendry lääts	11
2.4	Optiline peitmine	13
2.5	Transformatsioonioptika	15
2.5.1	Sfäärilise peidiku koordinaatteisendus	18
2.5.2	Silindrilise peidiku koordinaatteisenduse tuletamine	19
2.6	Näiteid kirjandusallikates välja pakutud peidikutest	20
3	Ülevaade kasutatavast tarkvarapaketi COMSOL Multiphysics	23
3.1	COMSOLis mudeli konstrueerimise etapid	23
3.2	RF moodul	24
3.3	RF moodulis kasutatavad ääritingimused	25
4	Murdumisnäitaja gradiendiga materjalide modelleerimine tarkvarapaketi COMSOL abil	27
4.1	Tutvumine COMSOLiga, jälgides kiirte käiku läbi sfäärilise peidiku	27
4.2	Silindriliste peidikute modelleerimine COMSOLis	29
4.2.1	Artiklite tulemuste põhjal loodud silindriliste peidikute simulatsioonid	29
4.2.2	Elektromagnetlainete sageduse ja peidiku raadiuste suhte mõju peitmisele	34
4.2.3	Erinevate ääritingimuste mõju peitmisele	35
4.3	Teisi teemaga seotud COMSOLi simulatsioone	39
4.3.1	Negatiivse murdumisnäitajaga materjalist luubi simuleerimine	39
4.3.2	Veselago läätse simuleerimine	40

5	Ideid edasiseks	42
6	Kokkuvõte	44
7	Kasutatud kirjandus	45
8	Summary	47

1 Sissejuhatus

Valguse ja aine vahelise vastastikmõju uurimisega on inimkond tegelenud juba üle kolme tuhande aasta. Nii vanaks hinnatakse Assüüriast leitud vanimat läätse. Hiljem on optika arengu mootoriks olnud astronoomia ja vajadus optiliste vaatlusseadmete järele. Vaatamata valguse uurimise pikale ajaloole, on tänapäevane teooria kujunenud viimase paarisaja aastaga. Suurima läbimurde tegi 19. sajandil James Clerk Maxwell, kes elektri- ja magnetvälju uurides avastas nende vahelised seosed, mida tänapäeval tuntakse kui Maxwelli võrrandeid. Analüüsides oma võrrandite lahendeid vaakumis jõudis ta järeldusele, et valgus on elektromagnetlaine, mida saab kirjeldada lainevõrrandiga. Kui varasemalt kirjeldati valguse levikut keskkonnas, mis vaadeldavas spektri piirkonnas on läbipaistev, optilist tihedust väljendava murdumisnäitaja n kaudu, siis Maxwell näitas, et murdumisnäitaja $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ on otseselt seotud aine omaduste – aine dielektrilise ϵ ja magnetilise μ läbitavusega. [1]

1887. aastal uuris Lord Rayleigh põhjalikult läbipaistvaid kihilisi struktuure, mille kihtidel on erinevad murdumisnäitajad. Ta avastas, et sellisel materjalil on erilised optilised omadused, mis tulenevad mitmekordselt peegeldunud lainetest ning nende interferentsist. Lihtsamad näited sellistest struktuuridest on peegeldumisvastane ja kõrge peegelduvusega kate. Peegeldumisvastase katte murdumisnäitaja peab olema väiksem kui ainel, millele ta kantakse, ning kihi paksus veerand pealelangeva kiirguse lainepikkusest katte materjalis. Nii toimub kiirte peegeldumisel pealmiselt kilelt ning katte ja alusmaterjali piirpinnal interferentsi tõttu tagasipeegelduse kustutamine. Sellele lisaks avastas ta, et kindla sagedusega valguse jaoks saab disainida sellise struktuuri, kus valgus peegeldub täielikult. [1] Selliselt perioodiliselt korrastatud tehisklikke struktuure, mida valmistatakse valdavalt dielektrikutest, hakati kutsuma footonkristallideks. Nende kihtide periood on tavaliselt samas suurusjärgus pealelangeva elektromagnetlaine lainepikkusega. Laine levimise iseärasusi footonkristallides saab selgitada Braggi hajumisega perioodilises struktuuris. [2]

Enne Maxwelli käsitlust arvati, et murdumisnäitaja, mis on defineeritud kui aine optiline tihedus, saab omada vaid positiivseid väärtuseid. 1968. aastal avaldas Viktor G. Veselago artikli, kus ta analüüsis valguse käitumist hüpoteetilises aines, millel on negatiivne dielektriline ja magnetiline läbitavus, ning jõudis järeldusele, et faasikiirus ja energia leviku suund on sellises aines vastupidised. Sellest tulenevalt saaks sellist ainet, millele Veselago omistas termini „*vasakukäeline materjal*“, nimetada „*negatiivse murdumisnäitajaga aineks*“.

Tollal jäid tema tulemused suurema vastukajata, kuna sellised materjale ei eksisteerinud. [1][3]

Vasakukäeliste materjalide ehk metamaterjalide valmistamine optilisest pikema lainepikkusega elektromagnetkiirguse jaoks on saanud võimalikuks alles viimasel paarkümnel aastal. Tasapisi nihkuvad struktuuride mõõtmed väiksemaks ja lainepikkused lähemale optilisele piirkonnale. Selle tõttu on huvi teema vastu viimaste aastatega pidevalt suurenenud.

Metamaterjale defineeritakse raamatutes ja artiklites erinevalt. Kreeka keeles omab sõna „meta“ tähendust „üle“. Erinevad autorid on üksmeelel, et metamaterjalide näol on tegemist materjalidega, mis erinevad tavalistest materjalidest oma omaduste poolest ning neid saab luua ainult tehislikult. Negatiivse μ ja ε metamaterjalide kohta kasutatakse ka termineid: vasakukäelised, negatiivse murdumisnäitajaga ja topelt negatiivsed materjalid. Nende mõistete tagamaid tutvustatakse lähemalt järgmises peatükis.

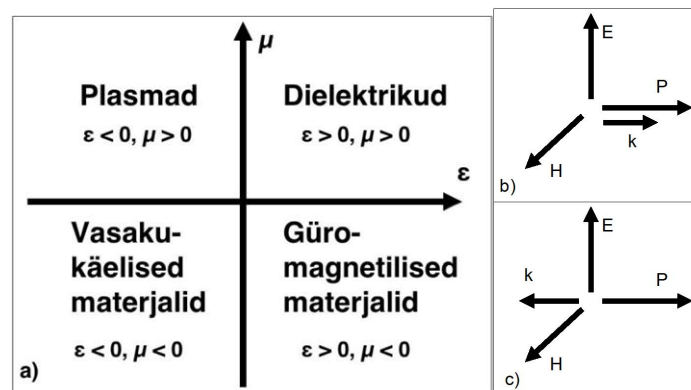
Metamaterjale valmistatakse tehislikest struktuuridest, mille mõõtmed on ligikaudu suurusjärgu võrra väiksemad pealelangeva elektromagnetlainelise lainepikkusest. Seejuures võib footonkristalliline struktuur käituda metamaterjalina, kuid mitte kõik footonkristallid ei ole metamaterjalid. Laine leviku kirjeldamiseks metamaterjalides kasutatakse makroskoopilisi parameetreid nagu dielektriline ja magnetiline läbitavus, mille väärtused olenevad tugevalt materjalide struktuurist. Nii on võimalik saavutada ka negatiivseid väärtuseid ja selle tulemusena tekitada negatiivset murdumist. Negatiivset murdumist käsitleme põhjalikumalt järgmistes peatükkides. Üldisuse huvides märgime ära, et negatiivset murdumisnäitajat on võimalik saavutada ka kiraalsetest elementidest koosneva struktuuri (nn kiraalne metamaterjal) abil, kuid see temaatika jääb väljapoole antud töö raamidest. [2]

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks on uurida valguse levikut murdumisnäitaja gradiendiga materjalstruktuurides, mis on teostatavad tehislike materjalide abil. Eesmärki silmas pidades käsitleb kirjanduse ülevaade peatükis 2 metamaterjalide ja muutuva murdumisnäitajaga keskkondade kirjeldamist üldiselt ning seonduvaid teemasid nagu optiline peitmine ja transformatsioonioptika. Kolmandas peatükis tehakse lühiülevaade töös kasutatavast tarkvarapaketi COMSOL Multiphysics 4.3a, mille kasutuspädevuse saavutamine valguse leviku simuleerimisel muutuva murdumisnäitajaga optilistes struktuurides oli teiseks töö eesmärgiks. Peatükis 4 esitatakse omandatud kogemuse varal valguse levimise numbrilised simulatsioonid murdumisnäitaja gradiendiga ainestruktuurides

läbi artiklite [4], [5] tulemuste reprodutseerimise COMSOL tarkvarapaketiga. Lisaks uuritakse erinevate ääritingimuste mõju simulatsiooni tulemustele. Viimases peatükis kirjeldatakse käesoleva töö edasiarendamise võimalusi ning ideid edasiseks.

2 Ülevaade tehislimest optilistest materjalidest

Esmakordselt uuris dielektrilise ϵ ning magnetilise läbitavuse μ positiivsete ja negatiivsete väärtuste mõju aine optilistele omadustele ja murdumisnäitajale 1968. aastal V. Veselago artiklis [3]. Joonis 1 kujutab koordinaatsüsteemi, mille telgedele on kantud dielektriline ja magnetiline läbitavus. Suurem osa teadaolevaid materjale, põhiliselt dielektrikud, kuuluvad selle diagrammi esimesse veerandisse, kus nii ϵ kui ka μ on positiivsed. Teise veerandisse ($\epsilon < 0, \mu > 0$) võivad kuuluda nii gaasilised kui tahked plasmad, milles kiirgus saab levida lühiajaliselt ning millelt toimub tagasipeegeldumine. Näiteks väärismetallidel (kuld, hõbe) ilmneb see omadus infrapuna ja nähtava spektri sageduste korral. Kõik negatiivse murdumisnäitajaga materjalid paiknevad selle diagrammi kolmandas veerandis, kus nii dielektriline kui magnetiline läbitavus on negatiivsete väärtustega, mida täpsemalt kirjeldatakse järgnevatel peatükkides. Viimasesse veerandisse kuuluvad magnetilised plasmad, mis on neelavad ja võimaldavad ainult lainete lühiajalist levikut. Looduses esinevad stabiilsed ained paiknevad sellel diagrammi esimeses veerandis ning teisi dielektrilise ja magnetilise läbitavuse kombinatsioonidega materjale saab toota tehislikult. Metamaterjalideks loetakse kõiki looduses mitte esinevaid materjale, see termin hõlmab märgatavalt suuremat materjalide hulka kui negatiivse murdumisnäitajaga materjalid ehk üldises mõttes kõik metamaterjalid ei ole negatiivse murdumisnäitajaga materjalid. [6]



Joonis 1. a) Materjalide klassifikatsioon. Elektromagnetlainet kirjeldavad vektorid b) paremakäelises materjalis c) vasakukäelises materjalis

Kuna negatiivset murdumist on võimalik saavutada ainult metamaterjalide disainimisega, siis kirjeldatakse järgnevalt selliste ainete omadusi ja vastastikmõju valgusega. Dielektrilise ja magnetilise läbitavuse negatiivsete väärtuste korral jääb Maxwelli seos murdumisnäitaja jaoks kehtima, aga uue aine omadused peaksid siiski märgatavalt erinema positiivsete parameetrite väärtustega ainest. Monokromaatse tasalaine korral on näha, et elektrivälja, magnetvälja ja lainevektor moodustavad Maxwelli võrrandites parema käe kolmiku. Kui aine dielektriline ja

magnetiline läbitavus võtta samaaegselt negatiivseks, siis moodustub vastavatest vektoritest vasaku käe kolmik (vt Joonis 1). Selle põhjal defineeriski Veselago paremakäelised ja vasakukäelised materjalid. Nende vektorite suunakoosinustest moodustatud maatriksi determinandi p , mille väärtust kasutatakse mitmete valemite defineerimisel, väärtus on 1 või -1. [3]

2.1 Murdumine kahe erinevat tüüpi materjali piirpinnal

Kui valgus levib ühest keskkonnast teise, siis peavad alati jääma kehtima järgmised tingimused (elektrivälja ja magnetvälja tangentsiaalkomponentide võrdsus, elektrinihke ja magnetvälja induksiooni normaalkomponentide võrdsus lineaarsel, homogeesel ja isotroopsel juhul): [7]

$$\begin{aligned} E_{t1} &= E_{t2}, & H_{t1} &= H_{t2} \\ \varepsilon_1 E_{n1} &= \varepsilon_2 E_{n2}, & \mu_1 H_{n1} &= \mu_2 H_{n2}, \end{aligned}$$

kus alaindeks n tähistab pinnanormaali sihilist komponenti ja t puutujasihilist komponenti; 1. ja 2. keskkonnas. Nendest järeldub, et kui neil materjalidel on erinev käelisus, siis elektrivälja ja magnetvälja tugevuste x ja y komponendid säilitavad oma suuna, aga z komponendi ehk pinnanormaali sihilise komponendi suund ja seega ka märk muutub. Tavalise materjali ning metamaterjali piirpinnal toimuva murdumise tulemusena, murdub kiir sama suure nurga võrra (kui tavalise murdumise korral) keskristsirge suhtes negatiivses suunas (vt Joonis 2). Peegelduva kiire siht ja nurk ei olene materjalist, millelt peegeldumine toimub. [3]

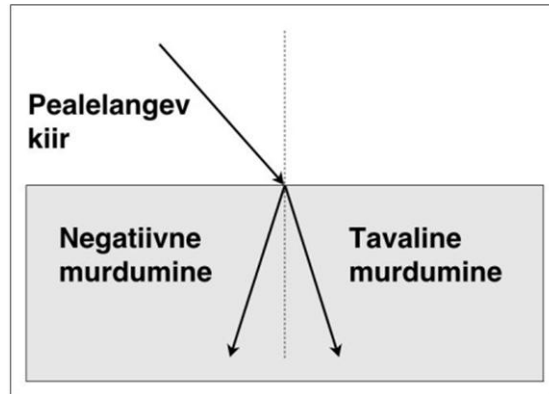
Negatiivse murdumise olemasolu põhjustab ka vajaduse täiendada Snelli seadust, mis üldkujul avaldub:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

Selleks, et eristada murdumist erinevate käelisustega materjalide vahel tuleb arvestada täpsustatud Maxwelli seosega:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = n_{21} = \frac{p_2}{p_1} \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \right|,$$

kus p_1 ja p_2 on eelnevalt mainitud determinandi väärtused vastavate materjalide jaoks. Sellest seosest järeldub, et murdumisel kahe erineva käelisusega materjali piirpinnal omandab suhteline murdumisnäitaja negatiivse märgi. [3]



Joonis 2. Negatiivne murdumine

2.2 Valguse levimine vasakukäelistes materjalides

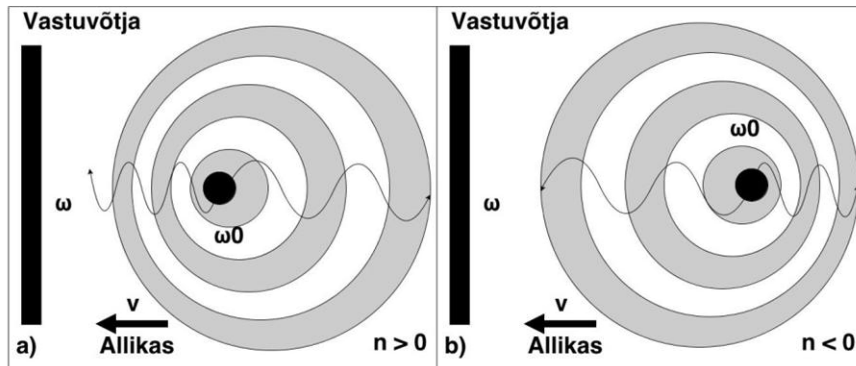
Elektromagnetlaine levikul aines kirjeldab energia edasikandumise suunda Poyntingi vektor, mis on defineeritud elektrivälja ja magnetvälja vektorite vektorkorrutise kaudu. Nende kolme vektori suund ei olene sellest, kas tegemist on metamaterjaliga või mitte. Küll aga sõltub materjali omadustest lainevektori suund, mis näitab tasalainekomponentide levimise suunda (vt Joonis 1). Paremakäelise materjali korral on lainevektor samas suunas Poyntingi vektoriga, vasakukäelise materjali korral on faasikiirus negatiivne ning seega vastassuunas energia levikuga. [3]

2.2.1 Doppleri efekt

Negatiivse murdumisnäitajaga materjalides avalduvad senituntud füüsikalised nähtused nagu Doppleri efekt ja Cherenkovi kiirgus teisel või pööratud kujul. Negatiivse murdumisnäitajaga materjalides esineb pööratud Doppleri efekt. Üldtuntud Doppleri efekti korral, kui vastuvõtja ja kiirgusallikas liiguvad teineteise poole, on vastuvõtja poolt registreeritud sagedus suurem, kui allika poolt kiiratud sagedus. Negatiivse murdumisnäitajaga materjalis, erinevalt positiivse murdumisnäitajaga materjalist, registreerib vastuvõtja sageduse, mis on väiksem kiiratud sagedusest (vt Joonis 3). Doppleri efekti valemi parandamiseks on Veselago sinna lisanud vastava determinandi väärtuse kujul:

$$\omega = \omega_0(1 - p \frac{v}{u}),$$

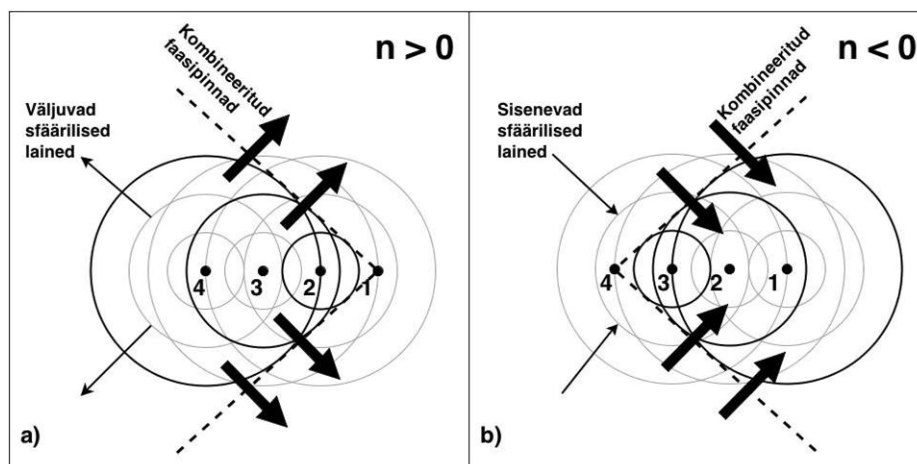
kus ω on vastuvõtja poolt registreeritud sagedus, ω_0 allika poolt kiiratud laine sagedus, v vastavalt detektori ja allika kiirus teineteise suhtes ja u energia levimise kiirus, mis loetakse alati positiivseks. [1][3]



Joonis 3. a) Doppleri efekt tavalises materjalis b) Doppleri efekt metamaterjalis

2.2.2 Vavilov-Cherenkovi efekt

Teiseks nähtuseks, millel esineb pöördefekt, on Vavilov-Cherenkovi efekt. Cherenkovi kiirgus emiteeritakse juhul, kui laetud osake liigub aines kiiremini valguse faasikiirusest vastavas aines. Liikuvad osakesed ergastavad aine aatomid, mis põhiolekusse tagasi minnes kiirgavad. Lainefrondi poolt moodustatud koonuse tekkimist illustreerib Joonis 4a. Osake liigub punktist 4 punkti 1 ning neist punktidest kiirguvad sfäärilised lained, mille põhjal saab moodustada lainefrondi. Sarnane nähtus esineb kui vaadelda sõitva mootorpaadi taha tekkivat koonust. Kiirguse koonuse nurka on võimalik leida geometriast ning see avaldub kujul: $\sin\theta = \frac{u}{v}$, kus θ on nurk osakese liikumise sihi ja lainefrondi vahel, u kiirguse faasikiirus ning v osakese kiirus. Nii võib avaldada ka nurga, mis jääb osakese levimissihi ja kiirguse lainevektori sihi vahele: $\cos\theta_0 = \frac{u}{v} = \frac{c}{nv}$.

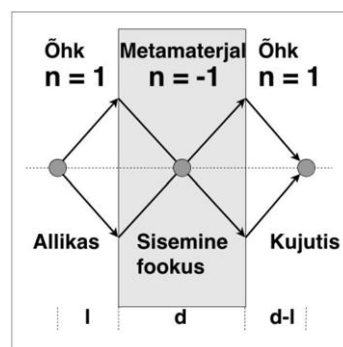


Joonis 4. Vavilov-Cherenkovi efekt ja tema pöördefekt. Osake liigub punktist 4 punkti 1.

Vasakukäelises materjalis on kiirguse koonus suunatud tahapoole võrreldes osakese liikumise suunaga, sellepärast et faasikiirus on negatiivne ning suunatud allika poole (vt Joonis 4b). Et eelnevad valemid kehtiksid peab nad alati sarnaselt Doppleri efekti valemitega läbi korrutama vastava determinandi väärtusega. [1][3]

2.3 Veselago-Pendry lääts

Esmakordselt kirjeldas negatiivse murdumisnäitajaga lääts V. Veselago, kes näitas, et tasaparalleelset negatiivse murdumisnäitajaga plaati, mis asub kahe materjali vahel, on võimalik kasutada läätsena (vt Joonis 5). Pärast metamaterjalikihi ehk Veselago lääts läbimist, on võimalik koondada punktallikast lähtuvaid hajuvaid kiiri. Erinevalt tavalisest läätses jääb paralleelne kiirte kimp pärast Veselago lääts läbimist endiselt paralleelseks. Esemekujutis tekib nii metamaterjali kihi sees, kui ka järgnevas keskkonnas plaadist kaugusel $d-l$, kus d on metamaterjali kihi paksus ja l punktallika kaugus metamaterjalist. Sellele lisaks näitas Veselago oma artiklis, et materjalide murdumisnäitajate vastandmargiliste, kuid absoluutväärtuselt võrdsete murdumisnäitajatega keskkondade piirpinnal peegeldumist ei toimu. Metamaterjalidest tehtud kumerläätsed muutuvad hajutavaks ning nõgusläätsed koondavaks. [3][8]

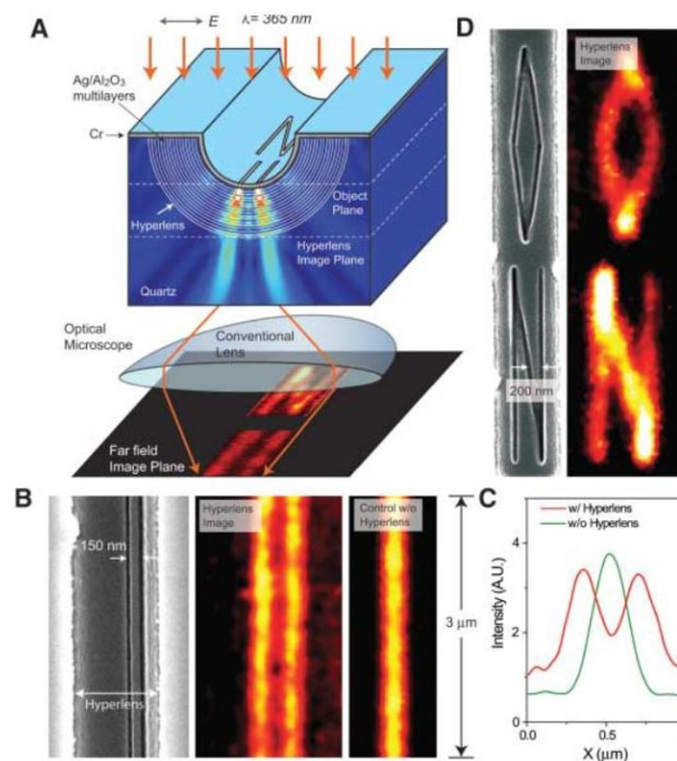


Joonis 5. Veselago lääts

Veselago ei täheldanud selle lääts ühte olulist omadust, mis mille pani kirja J.Pendry alles 2000. aastal artiklis [9]. Selles artiklis võttis ta kasutusele mõiste superlääts, mis kujutab endas negatiivse murdumisnäitajaga materjalist lääts. Erinevalt tavapärastest läätsedest, mis suudavad valguse koondada alasse, mille suurus on samas suurusjärgus kasutatava valguse lainepikkusega (lahutusvõimet piirab difraktsioon), suudab superlääts saavutada paremat lahutust. Valguse difraktsioonist tulenev lahutusvõime piir on põhjustatud kaugväljas (allika ava suurusega võrreldes lõpmatuses) olevate ruumilist informatsiooni kandvate lainete

hajumisest. See toob kaasa eri allika punktide difraktsioonimaksimumide kattumise. Objekti punktid on eristatavad ainult siis, kui kahe punkti difraktsiooni peamaksimumide minimaalne vahekaugus on määratud nii, et ühe punkti peamaksimum kattub teise punkti esimese miinimumiga. [1][7][9]

Mitmete praktiliste rakenduste tõttu on uuritud erinevaid võimalusi lainepikkusest parema lahutusega läätsede valmistamiseks. Üks näide Veselago läätsede edasiarendusest on toodud artiklis [10]. Erinevalt algsetest negatiivse murdumisnäitajaga materjalidest valmistatud plaadikujulistest läätsedest, on see tehtud poolsilindrikujulisest kihilisest kilestruktuurist (vt Joonis 6A). [8][10]



Joonis 6. A. Superläätsede ülesehitus kihilise struktuurina, millesse on lõigatud kuvatavad objektid. B. Pildil näidatud sisselõigatud joonte paigutus. Kõrval pildid mõõdetud intensiivsusaotused (koos superläätsesega ja ilma). C. Joonisel on kujutatud intensiivsusaotus (roheline joon ilma superläätsesega, punane joon koos superläätsesega). D. Suvaliselt valitud kujuga objekti kujutamine superläätsesega.

Läätsede valmistamisel on kasutatud vahelduvaid kvartsi pinnale kasvatatud alumiiniumoksiidi ja hõbeda kihte paksusega 35 nm. Superläätsede pealispind on kaetud kroomiga, mille sisse on lõigatud soovitud muster, mis on uuritavaks objektiks. Eksperimendis on valitud objektiks jooned läbimõõduga 35 nm ja vahekaugusega 150 nm (vt Joonis 6B). Lõigatud aukude kujutiste tekitamisel kasutatakse lainepikkust 365 nm. Valgus levib aukudest metamaterjali ning lõigete suurendatud kujutised tekivad radiaalsihis läätsede pinnal. Kui kujutised on saanud

suuremaks difraktsiooni piirist, siis on neid võimalik edasi suurendada, kasutades tavalist optilist mikroskoopi. Joonis 6C kujutab graafiliselt koordinaadist sõltuvat intensiivsuse jaotust nii superläätsuga kui ilma selleta. Difraktsiooni tõttu pole ainult mikroskoobiga võimalik neid kujutisi eristada. Demonstreeritud optiline superlääts avab uued huvitavad võimalused näiteks biomolekulide kujutamiseks või nanolitograafiaks, mille abil saaks valmistada nanoelektronika komponente. [8][10]

2.4 Optiline peitmine

Esemete nähtamatuks tegemine ehk optiline peitmine on tänu (ulme)kirjanikele ja inimfantaasiale saanud osaks folkloorist. Nähtamatuse idee on intrigeeriv nii põhimõttelisest, turvalisuse kui ka võimu saavutamise eesmärgist lähtuvalt. Ideeliselt, kuid fantastikute ettekujutusest oluliselt väiksemates mõõtmetes, pakuvad selleks võimaluse metamaterjalid. Kuidas täpselt, uurimegi käesolevas peatükis.

Metamaterjalid kui tehislikud liitstruktuurid on loonud uusi võimalusi elektromagnetlainega manipuleerimiseks. Nende materjalide omadused ei ole enam piiratud keemilise koostise ja atomaarse ülesehitusega, vaid nende struktuuriosade kuju ja suurusega, mis võimaldab luua uut funktsionaalsust. Metamaterjalide omadusi mõjutavad lisaks struktuurile ka valguse mõjul tekkivad plasmonid. Pinnaplasmonid tekitavad metalli ja dielektriku piirpinnal levivate pinnalainetena, mis on omakorda tekitatud vabade laengukandjate pikivõnkumisest metallis. Metallil pinnal tekivad negatiivselt ja positiivselt laetud piirkonnad, mille vahel tekib elektriväli, mis põhjustab pinnalainete levimise. Pinnaplasmonite genereerimise ja uurimisega tekkinud uurimissuund plasmoonika on näidanud, et murdumisnäitaja väärtust on võimalik kontrollida üle laia väärtuste vahemiku – positiivsest negatiivseni. See võimaldab konstrueerida struktuure, mille sisse jääv piirkond on mingis elektromagnetlainete spektri piirkonnas, sh optilises, nähtamatu. Füüsikaliselt mõistetakse optilise nähtamatuse all seda, kui peidik ei hajuta elektromagnetlaineid nende langemise ja läbimise sihis. [11][12]

Elektromagnetilise nähtamatuse mõistet on kirjanduses käsitlema hakatud alles suhteliselt hiljuti, viimase kümnendi jooksul. Praeguseks on kujunenud kaks võimalikku käsitlust: aktiivne ja passiivne optiline peitmine. Aktiivne käsitlus hõlmab eseme taga asuvat tausta kuvamist eseme ees asuvale ekraanile, milleks võib olla inimesel seljas olev mantel (vt Joonis 7). See annab eseme ees asuvale vaatajale illusiooni läbipaistvusest. Seda meetodit on korduvalt püüdnud ellu rakendada nii teadlased kui sõjavägi. [11]



Joonis 7. Aktiivse peitmise meetod [11]

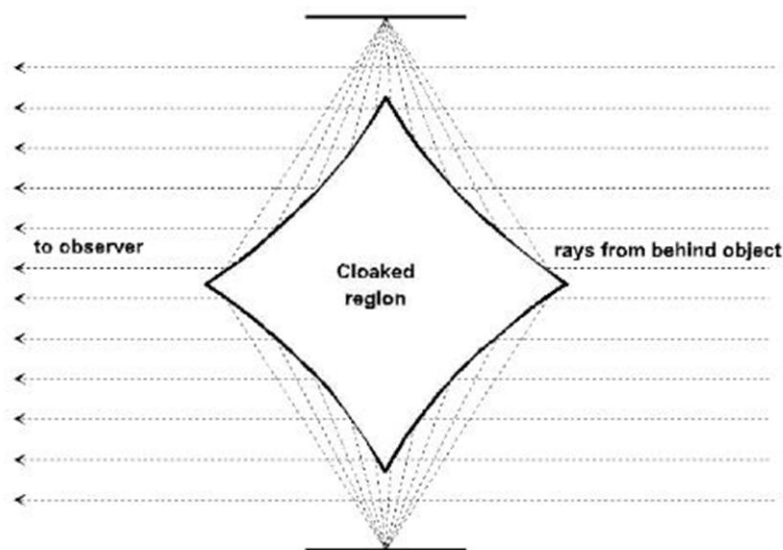
Erinevalt aktiivsest, tugineb passiivne meetod peitmiseks objekti sisemistel omadustel, mis muudavad viisi, kuidas objekt pealelangevat valgust hajutab. Sellel käsitlusel saab omakorda eristada kaht erinevat haru: esimene, kus objekt on peidetud peegeldusi mõõtvate seadmete eest ning teine, kus objekt on nähtamatu (ehk ei hajuta ega neela) ka teda läbivaid laineid.

Esimesel juhul vähendatakse märgatavalt objekti hajumise ristlõiget, parimal juhul vähendades seda kuni nullini, kus objekt enam üldse ei hajuta pealelangevaid välju. Selle saab saavutada siis, väga neelavaid materjale kasutades. Meetod on rakendatav ainult siis, kui kiirgaja ja vastuvõtja asuvad samas kohas ja tuvastamismeetodi idee seisneb objektilt peegeldunud lainete detekteerimises. Kui selline ese jääks allika ja vastuvõtja vahele, siis ta siiski blokeeriks kiiratud laineid. Vastuvõtja küll ei teaks millise objektiga on tegemist, aga ta näeks selle objekti varju. Kirjeldatud tehnoloogiat kasutatakse näiteks luurelennukitel, mis on disainitud sellise kujuga, et tagasi hajumine oleks väike, ning selle lisaks on kaetud spetsiaalse musta neelava värviga. Lennukite asukoha detekteerimiseks kasutatakse radareid, mis kiirgavad raadiosagedustel ning objektidelt peegeldunud kiirguse kaudu saavad kindlaks teha nende objektide asukoha ja kiiruse. Objekte, millel on peaaegu olematu tagasipeegeldus, radarid detekteerida ei suuda. [1][11]

Teisel juhul laseb objekt kas valguse tema teekonda mõjutamata läbi või juhib valguse mingist ruumi piirkonnast mööda. Materjali, mis juhib valguse mingist ruumi piirkonnast mööda, saab kasutada optilise peitmise kattena ning peitmise headust ei mõjuta peidetava objekti enda parameetrid. Hea näide geomeetrisel optikal põhinevast peidikust esitab Joonis 8. Vastav konstruktsioon koosneb neljast silindrilisest paraboolsest ja kahest tasapeeglist, mis sellise paigutuse korral tekitavad ees oleva vaatleja jaoks nähtamatuse efekti. Peidik töötab kõigi lainepikkuste jaoks, aga ainult väga väikese vaatlemisnurkade vahemiku

korral. Kuna kiired läbivad erinevad teepikkused, on neil ajaline hiline mine, mis on probleemiks ka mitmetel teistel sarnasel ideel baseeruvatel peidikutel. [1][11]

Praeguseks on tänu uute metamaterjalide leiutamisele saavutatud olukord, kus valguse lainepikkusega lähedaste mõõtmetega asjade peitmine on saanud võimalikuks. Materjalide murdumisnäitaja sageduse sõltuvuse tõttu saavad sellised peidikud töötada ainult kindlate lainepikkuste korral. See tähendab seda, et peidikusse sisse ja sellest välja ei saa vaid kindel lainepikkus. Samas teistel lainepikkustel on kommunikatsioon suuremate või väiksemate häiritustega võimalik. Praeguseks on eksperimente läbi viidud põhiliselt raadiolainetega. Optilises piirkonnas on läbi viidud vaid numbrilisi simulatsioone. [1][11]



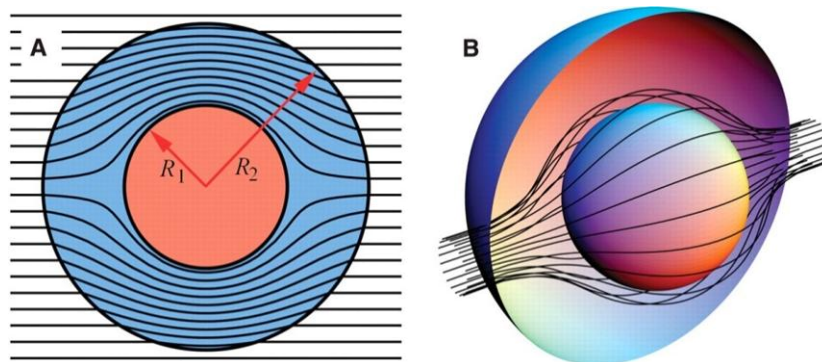
Joonis 8. Peeglitega optiline peidik [11]

2.5 Transformatsioonioptika

Metamaterjalidest optiliste peidikute areng sai alguse 2006-ndal aastal, kui J. Pendry pakkus oma artiklis [13] välja matemaatilise kirjelduse elektromagnetlainetega manipuleerimiseks mittehomo geenses anisotroopses keskkonnas. Ta nimetas uue valdkonna transformatsioonioptikaks. Transformatsioonioptika on uuenduslik valdkond, mille eesmärgiks on disainida materjalistruktuure, mis täidaks meie ootused iseäraliku valguse levimistee saavutamiseks. Kasutades transformatsioonioptikat, mis on avanud uue võimaluse elektromagnetlainete kontrollimiseks, saab murdumisnäitaja muutusega kujundada elektromagnetlainete levimist ruumis. Selle abil on võimalik kirjeldada negatiivset murdumist ning disainida superläätsi ja optilisi peidikuid. Nende omaduste saavutamiseks peab

spetsiaalselt kujundatud materjal rakendama elektromagnetlainete koordinaatteisenduse. Tegemist on sarnase füüsilise nähtusega nagu gravitatsiooniline ruumi kõverdumine. See annab võimaluse intuiitiivselt kujundada laiendatud materjali paremeetritega ruumis optilisi seadmeid. Meetodi rakendamiseks tuleb defineerida mõne geomeetrilise parameetriga tehislikku ruumi, mille materjali omadusi saab transformatsioonide abil tuletada. Transformatsioonioptika on võimas tööriist optikule-teoreetikule, kuid uudsete optiliste elementide loomine kujutab väljakutset materjaliteadlastele disainitud murdumisnäitaga muutusega footonkristall- või peene ainestruktuuri loomiseks.

Optilise peidiku disainimiseks kujutatakse auguga (peidetava osaga) ruumi, kus kiired, mis peaksid läbima peidiku sisemust, on justkui kokku pressitud peidiku kesta (vt Joonis 9). Sellist meetodit kasutades on võimalik tuletada nähtamatust lubava materjali omadused füüsilises ruumis. [6][11]



Joonis 9. A. 2D läbilõige kiirte teekonnast läbi sfäärilise peidiku. B. Sama peidiku 3D vaade [13]

Homogeenses ruumis levivad valguskiired mööda sirgeid jooni. Peidik peab mõjutama kiire teekonda niimoodi, et see leviks mööda kõverjoonelist trajektoori ja pöörduks esemest möödumise järel tagasi esialgsele levimise sihile. Selle saavutamiseks on vaja teha ruumi koordinaatteisendus (vt Joonis 10). Teisenduse idee on sarnane relatiivsusteoorias kasutatavaga. Igale punktile algse koordinaatsüsteemis vastab punkt uues teisendatud koordinaatsüsteemis, mida saab kolmemõõtmelisel juhul kirjutada kujul $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$, kus u, v, w on uue koordinaadid ning x, y, z algse Cartesiusse koordinaadid. Maxwelli võrrandid jäävad teisendustel muutumatuks, see ei kehti aga dielektrilise ja magnetilise läbitavuse väärtuste kohta. Invariantsuse näitamiseks esitame vastava probleemi kirjeldamiseks olulised Maxwelli võrrandid konstantse sageduse ω jaoks (eeldades sinusoidaalse ajasõltuvusega ehk ajas harmoonilist välja) kujul:

$$\nabla \times \mathbf{E} + i\omega\mu\mathbf{H} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} = 0,$$

milles \mathbf{E} on elektrivälja vektor, \mathbf{H} magnetvälja tugevuse vektor. Koordinaatteisenduse korral säilitavad need võrrandid oma kuju:

$$\nabla' \times \mathbf{E}' + i\omega\mu'\mathbf{H}' = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H}' + i\omega\varepsilon'\mathbf{E} = 0,$$

kus vastavad elektrivälja ja magnetvälja tugevused uutes koordinaatides avalduvad algsete kaudu kujul:

$$E'_i = Q_i E_i, \quad H'_i = Q_i H_i,$$

kus E'_i on elektrivälja i -nda komponendi väärtus uues koordinaadistikus ning E_i algsetes koordinaatsüsteemis (sama kehtib magnetvälja tugevuse H kohta). Nagu eelnevalt mainitud on vastava probleemi kirjeldamisel olulised teisendused dielektrilise ja magnetilise läbitavuse jaoks, mis avalduvad uutes koordinaatides kujul:

$$\varepsilon^{i'i'} = \varepsilon^{ii} \frac{Q_1 Q_2 Q_3}{Q_i^2}, \quad \mu^{i'i'} = \mu^{ii} \frac{Q_1 Q_2 Q_3}{Q_i^2},$$

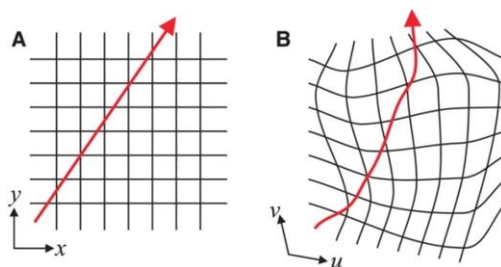
$$\text{kus } Q_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2$$

ning, q_i on vastav uus koordinaat, praegusel juhul u , v või w . Seda teisendust saab kirjutada ka üldkujul Jakobiaani $\Lambda_i^{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ kaudu:

$$\varepsilon^{i'j'} = \frac{\Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} \varepsilon^{ij}}{|\det(\Lambda_i^{i'})|}, \quad \mu^{i'j'} = \frac{\Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} \mu^{ij}}{|\det(\Lambda_i^{i'})|}.$$

Isotroopse keskkonna puhul saab teisenduse avaldada meetrika tensori $g^{i'j'} = \Lambda_k^{i'} \Lambda_l^{j'} \delta^{kl}$ (δ^{kl} tähistab Kroneckeri deltat) kaudu:

$$\varepsilon^{i'j'} = \frac{g^{i'j'} \varepsilon_r}{\sqrt{|\det(g^{i'j'})|}}, \quad \mu^{i'j'} = \frac{g^{i'j'} \mu_r}{\sqrt{|\det(g^{i'j'})|}}. \quad [5][11][13]$$



Joonis 10. Koordinaatteisendus A. Välja joon Cartesiuse koordinaatides. B. Kõverdunud välja joon uutes koordinaatides. [13]

2.5.1 Sfäärilise peidiku koordinaatteisendus

Üks elektromagnetlainete eest peitmise võimalusi on kasutada metamaterjalist valmistatud õõnsat sfääri või silindrit. Vastav optiline peidik kujutab sfääri, mille metamaterjalist kesta sees valgus oma levikul peidetavast esemest ümbert mööda juhitakse (vt Joonis 9). Huvi selliste peidikute teoreetilisteks ja praktilisteks uuringuteks on suur. Tehtud on nii numbrilisi simulatsioone, kui neil baseeruvad metamaterjale.

Hea ülevaate koordinaatteisenduste kaudu sfäärilise peidiku materjali omaduste tuletamisest, annab A.Maradudini kirjutatud raamat „Structured Surfaces as Optical Metamaterials“ [11], mille põhjal koostati järgnev kokkuvõte. Kuna teisendused dielektrilise ja magnetilise läbitavuse jaoks on samad, esitatakse tulemusi ainult dielektrilise läbitavuse jaoks. Siin ja edaspidi ei korrata tulemusi magnetilise läbitavuse jaoks, kui need just ei erine dielektrilise läbitavuse omadest.

Sfäärilise peidiku kujundamiseks on esiteks vaja teisendada Cartersiuse koordinaatides avaldatud vaakumi dielektriline läbitavus sfäärilistesse koordinaatidesse:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

kus x, y, z on Cartesiuse koordinaatides ja r, θ, φ sfäärilistes. Saadav dielektriline läbitavus avaldub kujul:

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 r^2 \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_0}{\sin \theta} \end{pmatrix}.$$

Järgmise etapina tuleb kujundada seest tühi sfäär, mille sisemusse ei jõuaks elektromagnetlained. Selle saavutamiseks peab sfääri välimisel pinnal olema dielektriline läbitavus võrdne vaakumi dielektrilise läbitavusega ning sfääri sisemisel pinnal nulliga. Tehakse koordinaatteisendus, kus uued koordinaadid avalduvad kujul:

$$r' = a + r \frac{b-a}{b}, \quad \theta' = \theta, \quad \varphi' = \varphi,$$

kus r, θ, φ on sfäärilistes koordinaatides, r', θ', φ' on uutes koordinaatides ning a sfääri sisemine raadius ja b välimine raadius. Leitud dielektriline läbitavus avaldub kujul:

$$\varepsilon'' = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \left(\frac{b}{b-a}\right) (r' - a)^2 \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 \left(\frac{b}{b-a}\right) \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_0}{\sin \theta} \left(\frac{b}{b-a}\right) \end{pmatrix}.$$

Tulemuste kasutamiseks tuleb need renormaliseerida jagades läbi meetrika tensoriga $g_{i'j'} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & r'^2 \sin \theta \end{pmatrix}$$
 ning suhtelise dielektrilise läbitavuse leidmiseks jagada tulemus läbi

vaakumi dielektrilise läbitavusega. Sfäärilise peidiku materjali suhteline dielektriline läbitavus avaldub kujul:

$$\varepsilon'' = \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{b-a}\right) \frac{(r'-a)^2}{r'^2} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{b}{b-a}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{b}{b-a}\right) \end{pmatrix}. [11]$$

2.5.2 Silindrilise peidiku koordinaatteisenduse tuletamine

Järgenas esitatakse omal käel läbi tehtud koordinaatteisendus (sfäärilise peidiku näitel) silindrilise peidiku jaoks lõpmata pika seest tühja metamaterjalist silindri eeldusel. Silindri raadiusteks on vastavalt b (välimine) ja a (sisemine). Dielektrilise läbitavuse teisendus Cartesiuse koordinaatidest silindrilistesse ($x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$; $z = z$), kus

$$Q_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = 1,$$

$$Q_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = r^2,$$

$$Q_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

avaldub kujul:

$$\varepsilon^{11'} = \varepsilon^{11} \frac{Q_1 Q_2 Q_3}{Q_1^2} = \varepsilon_0 r, \quad \varepsilon^{22'} = \varepsilon^{22} \frac{Q_1 Q_2 Q_3}{Q_2^2} = \varepsilon_0 \frac{1}{r}, \quad \varepsilon^{33'} = \varepsilon^{33} \frac{Q_1 Q_2 Q_3}{Q_3^2} = \varepsilon_0 r.$$

Et peidiku välimisel pinnal $\varepsilon = \varepsilon_0$ ja sisemisel pinnal $\varepsilon = 0$, avaldub silindrilise peidiku kujundamiseks sobiv koordinaatteisendus kujul:

$$r' = a + r \frac{b-a}{b}, \quad \theta' = \theta, \quad z' = z.$$

kus r, θ, z on silindrilistes koordinaatides, r', θ', z' on uutes koordinaatides.

$$Q_1^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial r'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial r'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r'}\right)^2 = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2,$$

$$Q_2^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \theta'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta'}\right)^2 = 1,$$

$$Q_3^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial z'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z'}\right)^2 = 1.$$

Selle põhjal saadud uue kujundatud ruumi dielektrilise läbitavuse komponendid avalduvad:

$$\varepsilon^{11''} = \varepsilon_0 r \left(\frac{b-a}{b}\right), \quad \varepsilon^{22''} = \varepsilon_0 \frac{1}{r} \left(\frac{b}{b-a}\right), \quad \varepsilon^{33''} = \varepsilon_0 r \left(\frac{b}{b-a}\right),$$

kus ülaindeksid näitavad dielektrilise läbitavuse maatriksi rea ja veeru numbreid.

Viimaks tuleb veel teha meetrika tensori $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ abil renormaliseerimine, mille

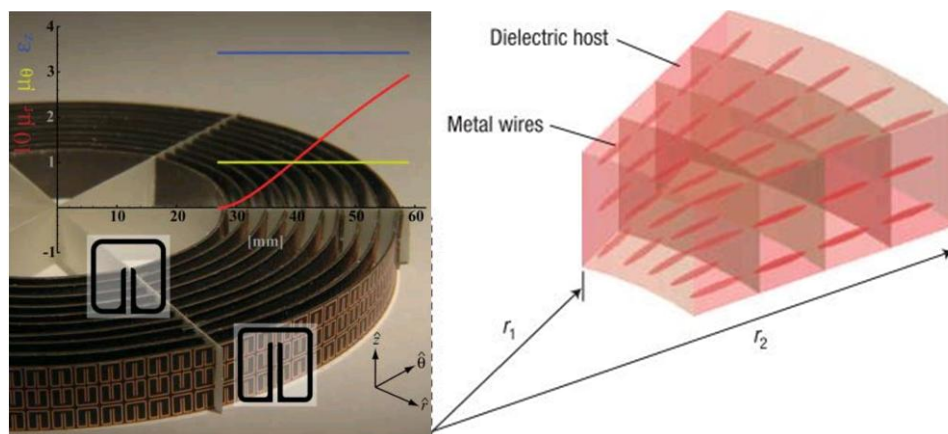
abil saadakse tulemuseks vajaliku metamaterjali suhteline dielektriline läbitavus. Tulemus on ka kooskõlas raamatus [11] tooduga

$$\varepsilon'' = \begin{pmatrix} \frac{r'-a}{r'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r'}{r'-a} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{b}{b-a}\right)^2 \frac{r'-a}{r'} \end{pmatrix}.$$

2.6 Näiteid kirjandusallikates välja pakutud peidikutest

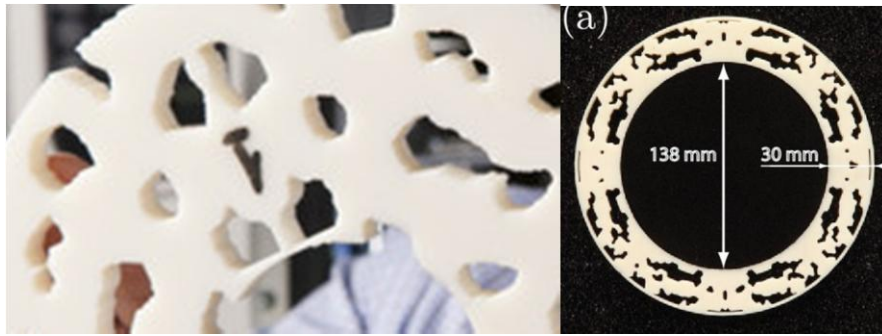
Üks esimesi metamaterjalidest peidikuid valmistati 2006. aastal D. Schurigi ja tema töörühma poolt. Vastav silindriline peidik suutis peita kitsas mikrolainete vahemikus paarikümne millimeetrise raadiusega vasest silindrit. Selline kooslus vähendas samaaegselt hajumist ning objekti poolt tekitatavat varju. Peidiku efektiivsuse kontrollimiseks mõõdeti katseliselt peidikut läbiva elektrivälja pilt ning võrreldi seda COMSOLi abil simuleerituga. Vastav peidik koosnes nõ ühikrakkudest, mis läbisid diagonaalselt silindri keskosa, ning painutatud sektoritest. Ühikrakkudeks olid väikesed millimeetri suurusjärgus olevad metallist kujundid (vt Joonis 11, vasakpoolne paneel). Jooniselt võib näha, et muutuva dielektrilise ja magnetilise läbitavuse saavutamiseks ühikrakkude kuju kihiti muutub. [14]

Teistsuguse ülesehitusega silindriline peidik, mis kujutab endas kihilist hõbedast metalltorusid sisaldavat dielektrikut (räni), pakuti välja aasta hiljem. Kirjedatud struktuur võimaldas saavutada peitmiseks vajaliku muutuva dielektrilise ja magnetilise läbitavuse väärtused (vt Joonis 11 parempoolne paneel). Sarnaselt eelnevaga oli valitud peidetavaks objektiks metallist silinder raadiusega r_1 . Objekti peideti He-Ne laseri $632.8nm$ lainepikkusega valguse eest. Lainevälja simulatsioonide uurimisel leiti, et selline peidik tekitab suhteliselt vähest hajumist ja interferentsi. Sellise lainepikkuse kasutamiseks pidid silindri raadiused olema skaleeritud väiksemaks. Sobivad väärtused olid paari mikromeetri suurusjärgus. [15]



Joonis 11. Vasakul taustal: muutuvatest ühikrakkudest koosnev silindriline peidik mikrolainete jaoks [14]. Paremal: läbilõige dielektrikust metalltorudega peidikust [15].

Uut lähenemist on kirjeldatud äsja, 15.05.2013, ilmunud artiklis [16]. Peidik on valmistatud erikujuliste aukudega dielektrikust, mille materjali suhteline dielektriline läbitavus on konstantne ($\epsilon = 2.45$) ning suhteline magnetiline läbitavus läheneb ühele nagu suuremal osal looduslikel mittemagneetuvatel materjalidel. Kirjeldatav peidik on sarnaselt eelmistega tehtud mikrolainete piirkonna jaoks. Joonis 12 parempoolsel paneelil on toodud peidiku mõõtmed. Selline parameetrite valik erineb transformatsioonioptikas kasutatud ideest. Transformatsioonioptika teisendusi rakendades esineb valguse levikul läbi materjalide intensiivsuse kadu, mis on tingitud ainete metallilistest omadustest (magnetilise läbitavuse suurest väärtusest). See muutub eriti oluliseks spektri nähtavas piirkonnas, kus lainepikkused on väikesed. Kuna vastaval peidikul seda probleemi ei esine, siis on tulevikus võimalik luua sarnase lähenemisega peidikuid ka optilise piirkonna jaoks. Sellise erikujulise struktuuri tekitamiseks on kasutatud 3D printimist (vt Joonis 12 vasakpoolne paneel). Kasutades sobivat aukude konfiguratsiooni on peidikut võimalik lihtsalt reprodutseerida.



Joonis 12. Vasakul: Foto 3D prinditud peidikust [17]. Paremäl: Sama 3D prinditud peidiku ülesehitus. [16]

3 Ülevaade kasutatavast tarkvarapaketist COMSOL Multiphysics

Tarkvarapaketti COMSOL Multiphysics 4.3a kasutatakse füüsika- ja inseneeriaprobleemide simuleerimiseks. Comsol'i algoritm(id) tegelevad erinevate kasutaja poolt defineeritud ääritingimustega diferentsiaalvõrrantide lahendamiseiga lõplike elementide meetodil (*finite element method – FEM*). Lõplike elementide meetod kujutab endast piirväärtusprobleemidele lähendatud lahenduste leidmist. Lõplike elementide meetodi rakendamisel jaotatakse terve uuritav pind paljudeks väikesteks alampindadeks, mille lahendite lähendamise kaudu leitakse lahend suurema pinna jaoks.

COMSOL võimaldab kasutada kaheksat füüsikamoodulit: vahelduv- ja alalisvoolu (*AC/DC*), akustika (*Acoustics*), keemiliste ühendite transpordi (*Chemical Species Transport*), elektrokeemia (*Elektrochemistry*), vedelike voolamise (*Fluid Flow*), soojusülekanne (*Heat Transfer*), raadiosagedusete (*Radio Frequency – RF*), tugevusarvutuste (*Structural Mechanics*), matemaatika (*Mathematics*) moodulit, mis jagunevad omakorda erinevateks harudeks. Iga haru alla on COMSOLis eelnevalt sisse defineeritud kasutatava füüsika jaoks olulised diferentsiaalvõrrandid, mida saab ise manuaalselt muuta ja täiendada. Lisaks sellele on programmil joonestustarkvarade (*CAD*) ja arvutustarkvara MathLab tugi. Vastava tarkvarapaketi eelis ja eripära võrreldes teistega on võimalus rakendada mitut füüsikamoodulit korraga. Käesolevas töös kasutatakse eraldi simulatsioonide tegemiseks matemaatika mooduli alla kuuluvat osakeste jälgimist ning RF mooduli alla käivat elektromagnetlainete simuleerimist sagedusdomeenis.

Nii COMSOLi kasutama õppimisel kui ka käesoleva peatüki ülevaate kirjutamisel on kasutatud COMSOLi poolt koostatud kasutusjuhendeid („*COMSOL Multiphysics: User's Guide*“ [18], „*COMSOL Multiphysics: Physics Builder User's Guide*“ [19] ja „*COMSOL Multiphysics: Reference Guide*“ [20]).

Kõik simulatsioonid on läbi viidud COMSOL Multiphysics versiooniga 4.3a, arvutil Dell Latitude E6420, millel on 4GB RAM mälu ja protsessor kiirusega 2.5GHz.

3.1 COMSOLis mudeli konstrueerimise etapid

COMSOLi mudeli konstrueerimine koosneb kindlatest etappidest. Kuna tarkvara on väga mahukas ning paljude võimalustega, tuuakse järgnevalt loetelu ainult selle töö juurde käivatest tähtsamatest mudeli koostamise etappidest.

- Simulatsiooni ruumi dimensioonide valimine (3D, telgsümmeetriline 2D, 2D, telgsümmeetriline 1D, 1D, 0D),
- Soovitud füüsikamooduli/te lisamine,
- Valitud füüsikamoodulile soovitud uurimistüübi (parameetrite) valimine,
- Globaalsete parameetrite ja muutujate defineerimine,
- Geomeetria joonestamine kasutades COMSOLi sisseehitatud võimalusi või CADi failist jooniste lisamine,
- Mudeli domeenidele materjalide lisamine sisseehitatud loendist (~2500 eeldefineeritud parameetritega materjali) või materjalide lisamine välisest loendist,
- Valitud uurimistüübile ääritingimuste lisamine,
- Geomeetriaale sobiva lõplikest elementidest koosneva võrgustiku defineerimine.

3.2 RF moodul

Tegemist on küll nime poolest raadiosageduste mooduliga, aga tegelikult sobib see kasutamiseks erinevates sageduspiirkondades. Moodulit kasutatakse põhiliselt valguse leviku simuleerimiseks lainejuhtides, optiliste fiibrites, footonkristallides ja teistes optilistes elementides. Uurimispiirkondadena saab valida näiteks sagedusdomeeni või ajast sõltuvat laine leviku uurimise. Käesolevas töös on RF mooduli simulatsioonid tehtud sagedusdomeenis. [21]

Võrrandid, mida COMSOL sagedusdomeenis simulatsioonide tegemisel lahendab, on kergelt tuletatavad Maxwelli võrranditest:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

kus nihkevool $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ (σ tähistab juhtivust) ning lineaarsete materjalide jaoks kehtivad $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, kus \mathbf{D} on elektrinihke vektor ja \mathbf{B} magnetinduktsiooni vektor. Asendades, avalduvad need valemid kujul:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Nagu eelnevalt transformatsioonioptikaski, eeldatakse ka siin ajas harmoonilist lainet kujul:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y, z)e^{j\omega t}, \quad \mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}(x, y, z)e^{j\omega t}.$$

Kasutades veel teadmisi, et lainearv vaakumis avaldub kujul $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{c_0}$, saab eelnevatest valemitest tuletada COMSOLis kasutatava võrrandi elektrivälja jaoks (magnetvälja tugevuse jaoks saab kasutada sama tuletuskäiku):

$$\nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 (\varepsilon_r - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon_0}) \mathbf{E} = 0.$$

Kõikides käesolevas töös tehtud simulatsioonidel on juhtivus valitud nulliks ning uuritakse ainult elektrivälja z-komponenti (pinna normaali sihilist).

3.3 RF moodulis kasutatavad ääritingimused

Arvutuspiirkonna lõplike mõõtmete tõttu tuleb elektromagnetlainete leviku modelleerimisel võtta arvesse simulatsiooni ääritingimusi, mille valimine on eelduseks simulatsioonide loomisel. Lisaks väliste äärte omaduste defineerimisele saab neid kasutada ka mudeli teiste äärte parameetrite kirjeldamiseks. Selles peatükis on koostatud lühikokkuvõtte käesolevas töös kasutatavatest ääritingimustest ning nende teooriast. [21]

Ideaalne elektrijuht (*Perfect Electric Conductor – PEC*) on ääritingimus, mis teostab elektrivälja vektriga tehte $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$, kus \mathbf{n} on normaali sihiline vektor ja \mathbf{E} elektrivälja vektor. Seda kasutatakse kadudeta metallilise pinna simuleerimiseks. Ta toetab indutseeritud elektri pinnavoole ja seega kõik indutseeritud elektriväljad, mis suubuvad PECi, on automaatselt tasakaalustatud indutseeritud pinnavoolude poolt. Need tekitavad suubunud väljaga võrdse amplituudiga, aga vastupidese suunaga, uue elektrivälja. PECile langev tasalaine peegeldub sealt tagasi. See on COMSOLis vaikimisi joonisel kõikide joonte ääritingimuseks. [21]

Ideaalne magnetjuht (*Perfect Magnetic Conductor – PMC*) on ääritingimus, mis teostab magnetvälja tugevuse vektoriga tehte $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$, kus \mathbf{n} on normaali sihiline vektor ja \mathbf{H} magnetvälja vektor. Ta on erijuht pinnavoolude ääritingimusest, mis seab magnetvälja tangentsiaalse komponendi ja sellest tulenevalt ka pinnavoolu tiheduse nulliks. Tuleb tähele panna, et elektrivälja suubumine ääritingimusele on keelatud, kuna seda ei ole võimalik tasakaalustada indutseeritud pinnavoolude poolt. Tangentsiaalne magnetvälja komponent muutub ääritingimusel nulliks, mis teeb tangentsiaalse elektrivälja komponendi katkendlikuks. Tehniliselt käitub PMC magnetvälja jaoks samamoodi kui PEC elektrivälja jaoks. [21]

Neid ääritingimusi nimetatakse vastavalt tugevaks (Dirchlet') ja pehmeks (Neumanni) tingimuseks. Näiteks PEC kujutab endas tugevat ääritingimust elektrilise tasalaine jaoks ($E_z = 0$) ja PMC vastavalt pehmet ääritingimust ($\frac{\partial E_z}{\partial n} = 0$); ääritingimused vahetavad rollid magnetlainete jaoks. [22]

Ideaalselt sobitatud kiht (*Perfectly Matched Layer* – PML) on pigem eriomadustega lisapiirkond, mitte ääritingimus. Selliste omadustega piirkond lisatakse geomeetria abil simulatsiooni äärtesse ning ta neelab pealelangeva kiirguse, tekitamata peegeldusi. PMLi rakendamiseks on vaja RF moodulil teha koordinaatseisendus kujul: $t' = \left(\frac{t}{\Delta\omega}\right)^n (1 - i)\lambda F$, kus t' on uus koordinaat, t vana koordinaat, $\Delta\omega$ PML regiooni laius, λ pealelangeva kiirguse lainepikkus ning F skaleerimise faktor (kirjeldab neeldumist). PMLi kasutamise juures on tähtis, et äärte geomeetria joonistatakse õigesti ning PMLi rakendades valitakse sobiv koordinaatsüsteem (Cartesiuse, silindriline või sfääriline). Erinevalt teistest ääritingimustest, mis suudavad neelata vaid tasalaine rist või paralleelkomponente, suudab see domeen neelata igasuguse geomeetria ja kujuga laineid. See on kasulik arvestades, et uuritavad metamaterjalid võivad põhjustada peegeldumisi ja interferentsi. [21]

Erinevate ääritingimuste mõju simulatsioonidele uuritakse käesoleva töö raames peatükis 4.2.3.

4 Murdumisnäitaja gradiendiga materjalide modelleerimine tarkvarapaketi COMSOL abil

Füüsikaliste probleemide numbriline simuleerimine on tänu arvutusvõimsuse järjepidevale kasvule ning heale ligipääsetavusele uurimis-ja arendustöö valdkonnas tähtsal kohal. Numbriline analüüs võimaldab uurida uusi komponente neid valmistamata ja seeläbi on võimalik suhteliselt kiiresti ning odavalt leida parimad parameetrite väärtused või lahendused uuritavale probleemile.

Lähtuvalt arvutustöö mahust ja spetsiifikast võib numbriliseks simuleerimiseks kas kirjutada sobiv programm ise või kasutada juba väljatöötatud tarkvara. Ise programmi kirjutamiseks peavad olema põhjalikud teadmised programmeerimisest ning eksisteerib võimalus, et programmeerimise vea tõttu saadakse vigaseid tulemusi. Teisalt, olemasolev tarkvara ei pruugi vastata arvutuste spetsiifikale või on selle kasutamine väga ressursimahukas.

Käesolevas töös on uuritud TÜ-s litsentis alusel ligipääsetava tarkvarapaketi COMSOL Multiphysics 4.3a rakendatavust murdumisnäitaja gradiendiga materjalstruktuuride numbriliseks uurimiseks. COMSOL valiti eesmärgiga kasutada võimalikult efektiivselt ära olemasolevat ressursi ning hoida kokku aega programmikoodi kirjutamiselt. Valik langes COMSOL'i kasuks osalt ka seetõttu, et seda rakendatakse laialdaselt metamaterjalide disainimise ja uurimisega seotud töödes. Sellest lähtuvalt sai käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks COMSOL'i tarkvara tundma õppimine ja evitamine elektromagnetlainete levi uurimiseks muutuva murdumisnäitajaga optilistes struktuurides.

4.1 Tutvumine COMSOLiga, jälgides kiirte käiku läbi sfäärilise peidiku

Selles alapeatükis koostatud ülevaade ja simulatsioon on tehtud juhendi [23] põhjal. Vastavas mudelis defineeriti astmeliselt muutuv murdumisnäitaja, mille kaudu selgitati kõverjoonelistel pindadadel kasutatavat silumistehnikat. Valdavalt leiab see rakendust läätsede simuleerimisel. Selline teguviis aitab märgatavalt kokku hoida arvutustele kuluvat aega samal ajal reaalsusele piisavalt lähedast olukorda kujutades. Kuna reaalses ei ole võimalik saavutada ühtlaselt ja pidevalt muutuvat murdumisnäitajat, siis vastava näite põhjal on võimalik õppida simuleerima olukordi, kus murdumisnäitaja muutub astmeliselt (näiteks kihiliste struktuuride korral).

Kuna tarkvaral ei ole otsest moodust kiirte teekonna kuvamiseks, siis kasutati simuleerimiseks matemaatika mooduli alla kuuluvat osakeste jälgimise (*Particle Tracing*) haru. Uuemale

tarkvara versioonile 4.3b on lisatud eraldiseisev geomeetriselise optika moodul. *Particle tracing* võimaldab kujutada teekonda, mis osake, liikudes alguspunktist lõpppunkti, läbib. Osakeste süsteemi ajalist liikumist kirjeldavaid Hamiltoni võrrandeid saab rakendada footonitele ning seeläbi kujutada valguskiire käiku matejralis. Otsese analoogina Hamiltoni võrranditele pandi kirja võrrandid footonite jaoks, kus lainevektor \mathbf{k} on võrdeline Hamiltoni võrrandites impulsimomendiga \mathbf{p} ning valguse sagedus ω mängib vastavalt Hamiltoniaani rolli. Klassikaline Hamiltoniaan avaldub kujul:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},$$

kus t on aeg ning \mathbf{q} üldistatud koordinaat. Analoogiat kasutades tuletati võrrandid footonite süsteemi jaoks kujul:

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}.$$

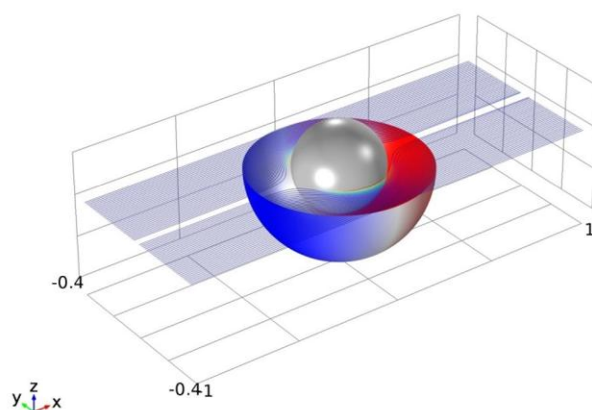
Geomeetriselises optikas avaldub sagedus $\omega = \frac{c|\mathbf{k}|}{n}$, kus n on aine murdumisnäitaja. Kuna peidiku murdumisnäitaja on anisotroopne (sarnaselt transformatsioonioptikas tuletatule), on mugavam avaldada lainevektor sfäärilistes koordinaatides:

$$\begin{bmatrix} k_r \\ k_\vartheta \\ k_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix},$$

kus esimeses maatriksis on lainevektori komponendid uutes koordinaatides, teises sfäärilise teisenduse Jakobiaan ning kolmandas lainevektori kompoendid Cartesiuse koordinaatides. Sellest tulenevalt avaldati nurksagedus kujul:

$$\omega = c \left(\frac{k_r^2}{n_r^2} + \frac{k_\vartheta^2}{n_\vartheta^2} + \frac{k_\varphi^2}{n_\varphi^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sfäärilise peidiku sisemiseks raadiuseks oli valitud $0.2m$ ja välimiseks $0.4m$. Kiirte käigu uurimisel ei ole lainepikkus oluline. Tehes läbi juhendis kirja pandud mudeli koostamise etapid ning sisestades mudelisse vastavad muutujad koos sobivate teisendustega saadi järgmine tulemus (vt Joonis 13).



Joonis 13. Kiired läbimas sfäärilist peidikut

4.2 Silindriliste peidikute modelleerimine COMSOLis

Teiseks võimalikuks peidikute realisatsiooniks on lõpmata pikad silindrilised metamaterjalist peidikud. Selliste peidikute simuleerimiseks rakendame peatükis 2.5.2 transformatsioonioptika abil tuletatud dielektrilise ja magnetilise läbitavuse matrikseid.

4.2.1 Artiklite tulemuste põhjal loodud silindriliste peidikute simulatsioonid

Järgnevas kirjeldame artiklites [4] ja [5] käsitletud silindriliste peidikute reprodutseerimist COMSOLIS ja võrdleme oma simulatsioonide tulemusi artiklites esitatutega. Kuna COMSOL ei suuda lõpmatult pika silindri juhtu kolmedimensiooniliselt lahendada, siis probleemide lihtsustamiseks on kirjandusallikate eeskujul kasutatud simuleerimiseks silindri läbilõiget.

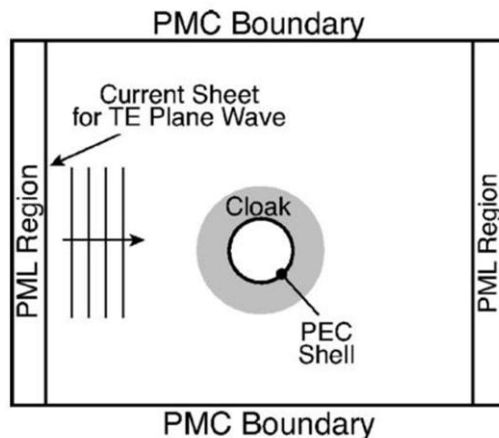
Esimene vaadeldav transformatsioonioptikal baseeruva silindrilise peidiku simulatsioon pärineb aastast 2006. artiklist [4]. Simulatsiooni ülesehitust illustreerib Joonis 14. Elektrilise tasalaine allikaks valiti arvutuspiirkonna vasak serv, ülemisele ja alumisele servale (lainefrondiga risti) lisati PML, paremale PMC ning peidiku sisse PEC kiht. Lõplike elementide meetodist tulenevate ebatäpsuste tõttu jõuab osa kiirgust siiski peidiku sisse. Ideaalis omab sisemise PEC kihita peidik samu peitmise omadusi (muudab lainevälja kuju samamoodi) kui PEC kihiga peidik. [4]

Simulatsiooni tehti 2GHz sageduse ja 1V/m tugevuse elektrivälja jaoks. Selle tõttu on valitud kõigi järgnevat simulatsioonide värviskaalad -1 kuni 1 . Saadud tulemused on skaleeritavad optilisse piirkonda. Peidiku sisemiseks diameetriks oli antud 0.2m (1.33 lainepikkust) ning

välamiseks $0.4m$ (2.67 lainepikkust). Kuna artikli ilmumise ajal ei võimaldanud COMSOL arvutusi läbi viia silindrilistes koordinaatides, siis uuritavas artiklis teisendati transformatsioonioptikast saadud ϵ ja μ tagasi Cartesiuse koordinaatidesse kujul:

$$\begin{aligned}\epsilon^{11} &= \epsilon^{11''} \cos^2 \theta + \epsilon^{22''} \sin^2 \theta, \\ \epsilon^{12} = \epsilon^{21} &= (\epsilon^{11''} - \epsilon^{22''}) \sin \theta \cos \theta, \\ \epsilon^{22} &= \epsilon^{11''} \sin^2 \theta + \epsilon^{22''} \cos^2 \theta, \\ \epsilon^{33} &= \epsilon^{33''},\end{aligned}$$

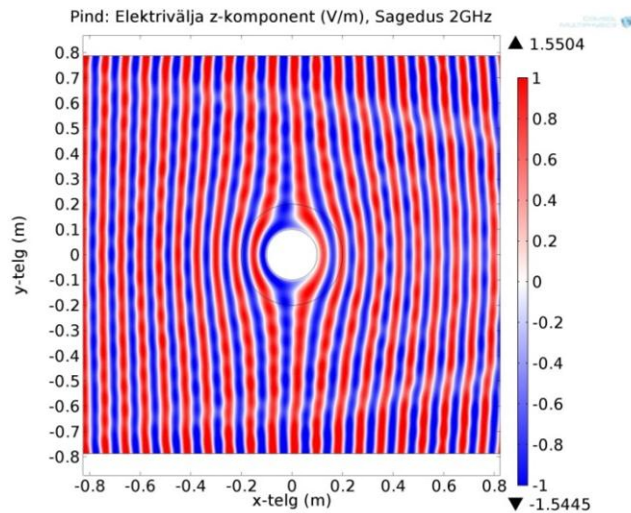
kus $\epsilon^{11''}, \epsilon^{22''}, \epsilon^{33''}$ on peatükis 2.5.2 saadud ϵ'' maatriksi vastavad komponendid, $\epsilon^{11}, \epsilon^{12}, \epsilon^{21}, \epsilon^{22}, \epsilon^{33}$ on uued Cartesiuse koordinaatidesse teisendatud maatriksi komponendid (maatriksite kõikide ülejäänud komponentide väärtused on nullid) ning nurk $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$. [4] Käesoleva töö tegemise käigus leiti võimalus silindrilise koordinaatsüsteemi sisestamiseks, mis võimaldas sisestada ϵ ja μ peatükis 2.5.2 esitatud kujul. Koordinaatsüsteemi muutmine ei mõjutanud simulatsiooni tulemust. [4]



Joonis 14. Simulatsiooni ülesehitus[4].

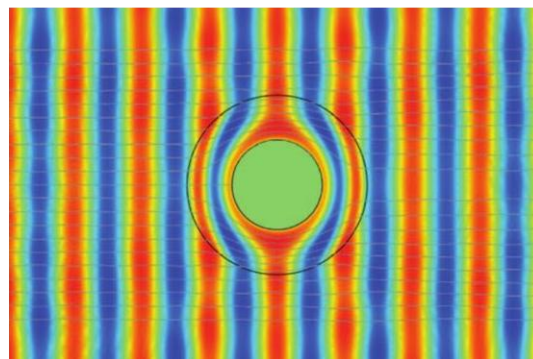
Kuna materjali parameetrite sisestamiseks on COMSOLis mitmeid võimalusi, siis algselt defineeriti vastavate ϵ ja μ väärtustega materjalid. See põhjustas mitmetunniseid arvutusi, mis lõppesid programmi hangumisega, sest kasutatava arvuti tehnilised parameetrid ei olnud arvutuste läbiviimiseks piisavad. Kuna artikli [5] simulatsioonid olid läbi viidud sarnase jõudlusega arvutiga, siis otsiti teisi võimalusi probleemi lahendamiseks. Lahendusena katsetati peatükis 2.5.2 saadud materjali parameetrite sisestamist lainevõrrandisse. Saadud simulatsiooni tulemusi esitab Joonis 15, kust on näha, et ka väljaspool peidiku piirkonda on

laineväli paindunud. Probleemi analüüsis jõuti järeldusele, et lõplike elementide meetodi rakendamine ühe lainevõrrandiga mudelile, põhjustab moondunud tulemust. Lõplikest elementidest koostatud võrgustiku tõttu ei saavutata COMSOLi arvutused peidku pinnal vaakumiga võrdseid ϵ ja μ väärtuseid, mille tõttu väljaspool peidiku domeeni on vaakumist erinevad ϵ ja μ . Selle probleemi lahendamiseks defineeriti kaks lainevõrrandit erinevate domeenide jaoks. Üks metamaterjalist silindri jaoks ning teine vaakumi jaoks (silindri ümber ja sees). See lähenemine lahendas probleemi.

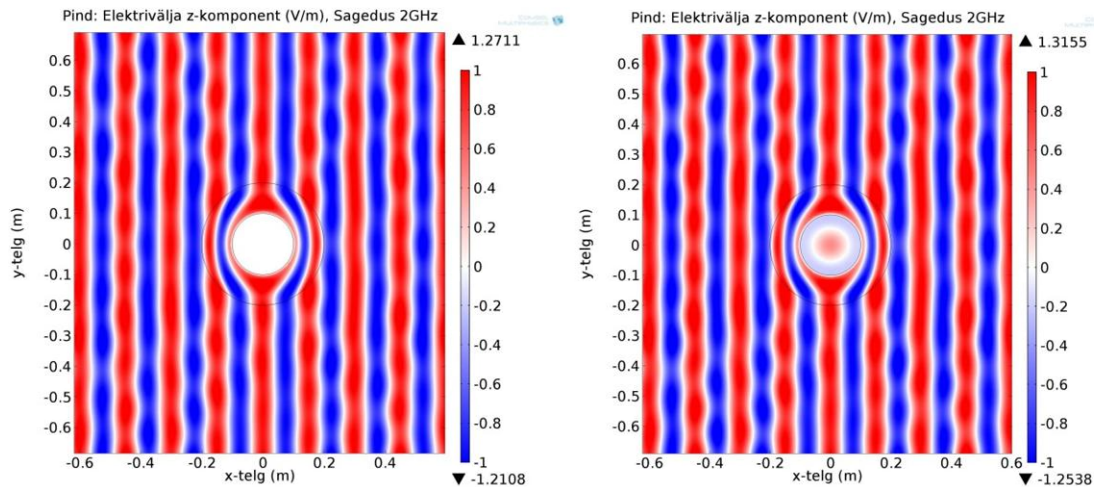


Joonis 15. Ühe üldise tuletatud parameetritega lainevõrrandi simulatsioon

Joonis 16 kujutab artiklist pärit simulatsiooni tulemust ning Joonis 17 samadel tingimustel käesoleva töö autori poolt simuleeritud versiooni, kusjuures värviskaala on taotuslikult valitud erinev. Tulemused on heas kooskõlas. Veendumaks, et silindri sees olev PEC kihti ei muuda lainevälja kuju, esitab Joonis 17 vastavate simulatsioonide võrdlused. Jooniselt võime näha, et artiklis esitatud väide on tõene. Täpsemalt analüüsitakse ääritingimuste mõju alapeatükis 4.2.3.



Joonis 16. Artiklist [4] pärit silindrilise peidiku simulatsioon.



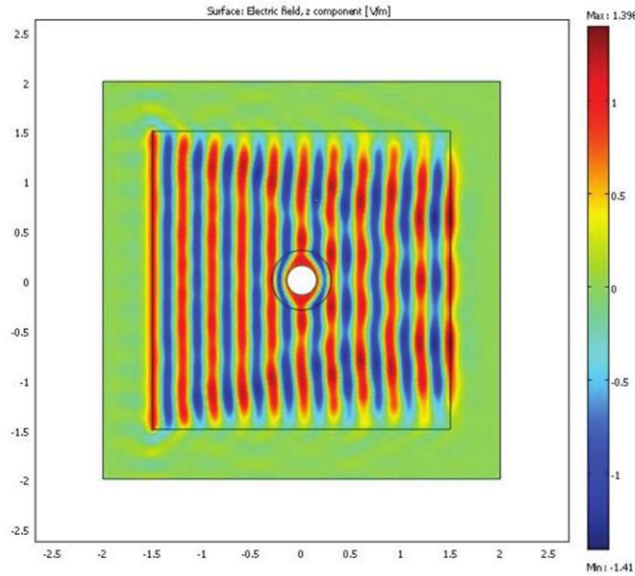
Joonis 17. Vasakul: Silindrilise peidiku simulatsioon ääritingimusega PEC (silindri sisemisel äärel). Paremalt: Sama simulatsiooni ilma PEC-ita

Artiklis [5], mis on avaldatud 2012. aastal, on antud hea ülevaade transformatsioonioptikast ning nii ringi- kui ka ruudukujulise läbilõikega peidikute COMSOLi simulatsioonidest. Artikli [4] ja [5] põhjal tehtud simulatsioonide põhiline erinevus seisneb ääritingimuste valikus. Samaselt eelneva artikliga olid ka selles ϵ ja μ avaldatud Cartesiuse koordinaatides, mille järel tarkvarapaketi COMSOL 4.x versioonides ei ole enam vajadust.

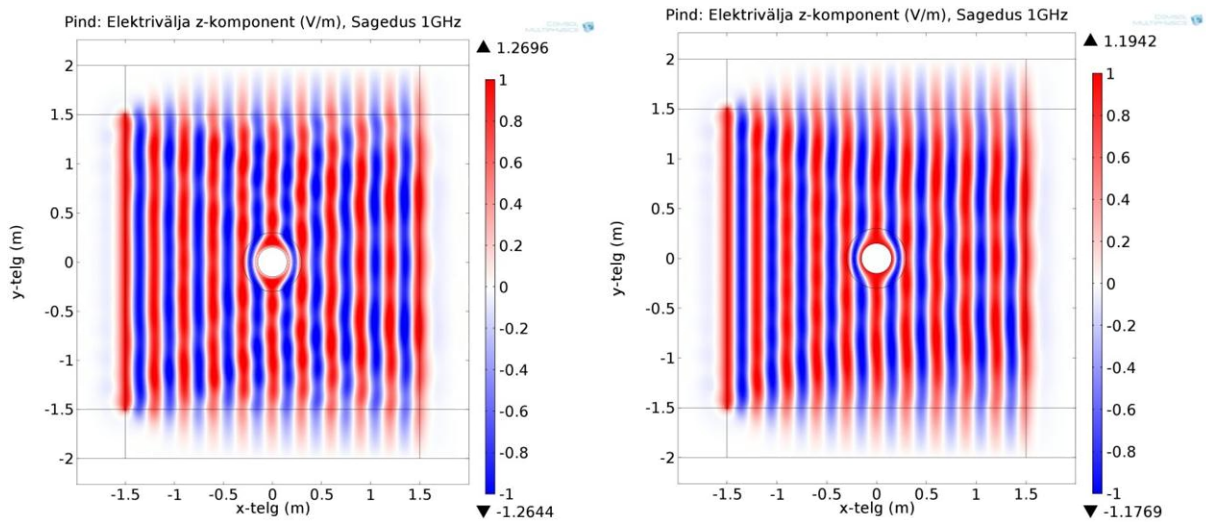
Simulatsiooni ülesehitus on järgmine: silindri sisemine raadius on $0.15m$, välimine raadius $0.3m$ ning arvutusdomeeni, mille ümber on paigutatud $0.5m$ paksusega PML küljepikkus $3m$. Kuna artiklis ei ole märgitud, millist ääritingimust on kasutatud silindri sees, siis kasutati artikli [4] analüüsile tuginedes PEC kihti. Simulatsiooni vasakule ruudu äärel on lisatud elektrivälja sagedusega $1GHz$, tugevusega $1V/m$ ning võrgustiku tegemiseks on kasutatud tahulisi (*quadratic*) elemente.

Joonis 17 ja Joonis 19 demonstreerivad, et käesoleva töö raames on antud simulatsiooni tulemusi õnnestunud reprodutseerida.

Simulatsioonide ääritingimuste valikust oleneb peidiku läbimisel pealelangeva lainevälja muundumine (vt Joonis 17 ja Joonis 19). Põhjus seisneb, nagu märgitud 3.3 peatükis, PEC ja PMC konstruktsioonide erinevuses. Nimelt, elektrivälja jaoks toimub PEC kihilt peegeldumine ja PMC kihil pealelangeva välja tangentsiaalkomponendi võrdsustamine nulliga.

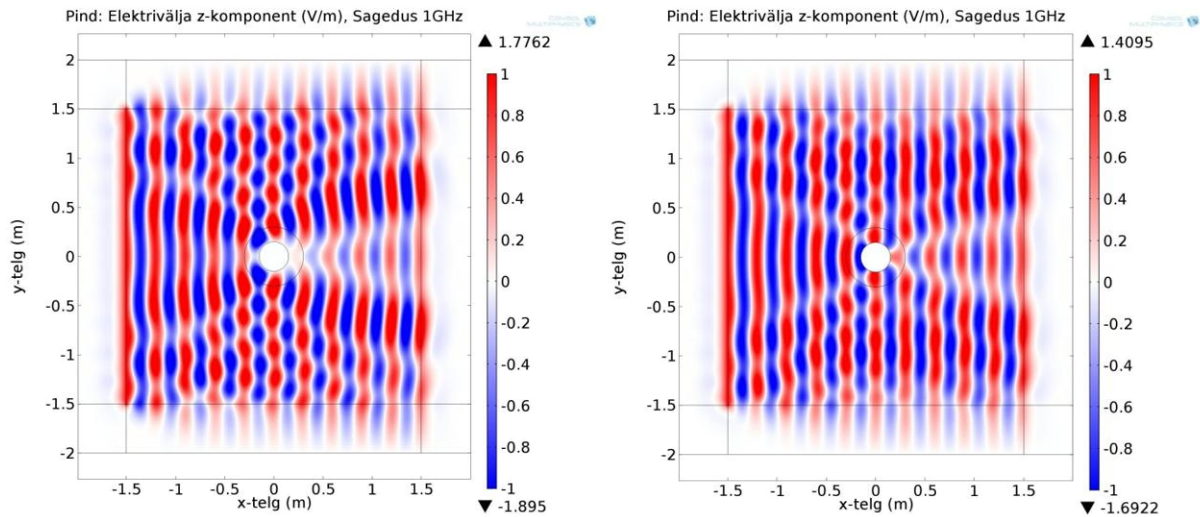


Joonis 18. Silindrilise peidiku (elektrivälja z-komponendi) simulatsioon artiklist [5]



Joonis 19. Vasakul: Silindriline peidik (elektrivälja z-komponent) sisemise ääritingimusega PMC. Paremalt: Silindriline peidik (elektrivälja z-komponent) sisemise ääritingimusega PEC.

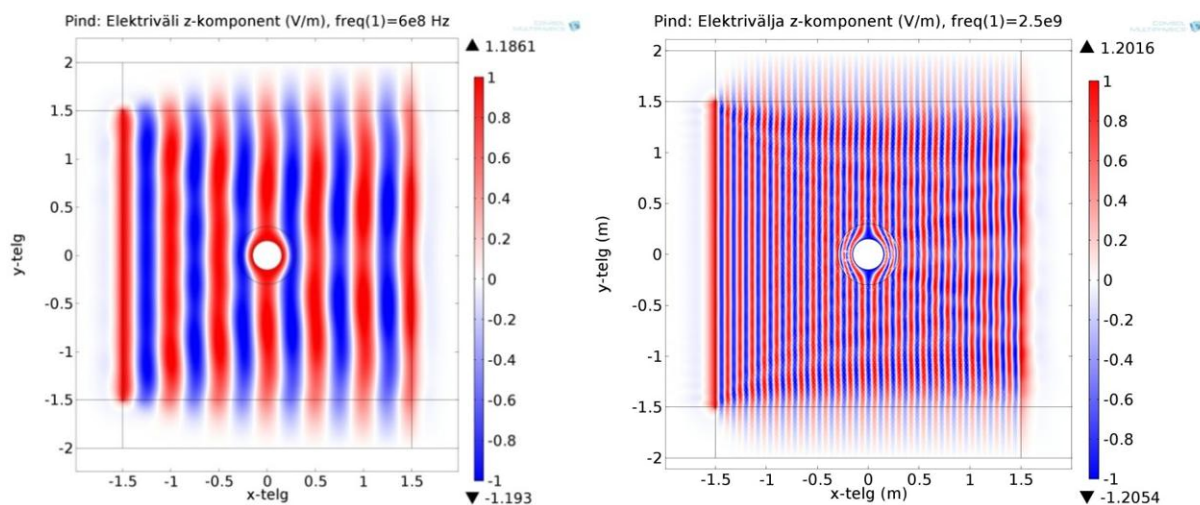
Näitamaks, et tühjas ruumis asetsevad PEC ja PMC silinder ise ei käitu peidikuna, vaid põhjustavad moonutusi välja ruumilises jaotuses. Koostati simulatsioonid, kasutades artikli [5] geometriat, kus ei ole defineeritud peidiku piirkonda koos transformeeritud dielektrilise ja magnetilise läbitavusega. Elektrivälja, mille sageduseks oli 1GHz ja tugevuseks 1V/m , lähtus simulatsiooni vasakult äärelt. Simulatsioonide tulemusi illustreerib Joonis 20. Näeme, et mõlemad silindrid põhjustavad lainete tugevat interfereerumist ning silindrite taha tekib madalama elektrivälja z-komponendi intensiivsusega ala. Põhjalikult käsitletakse silindri sisemuses kasutatavate ääritingimuste mõju pealelangevale väljale artiklis [22].



Joonis 20. Vasakul: Metamaterjalist katteta PEC silinder. Paremalt: Metamaterjalist katteta PMC silinder

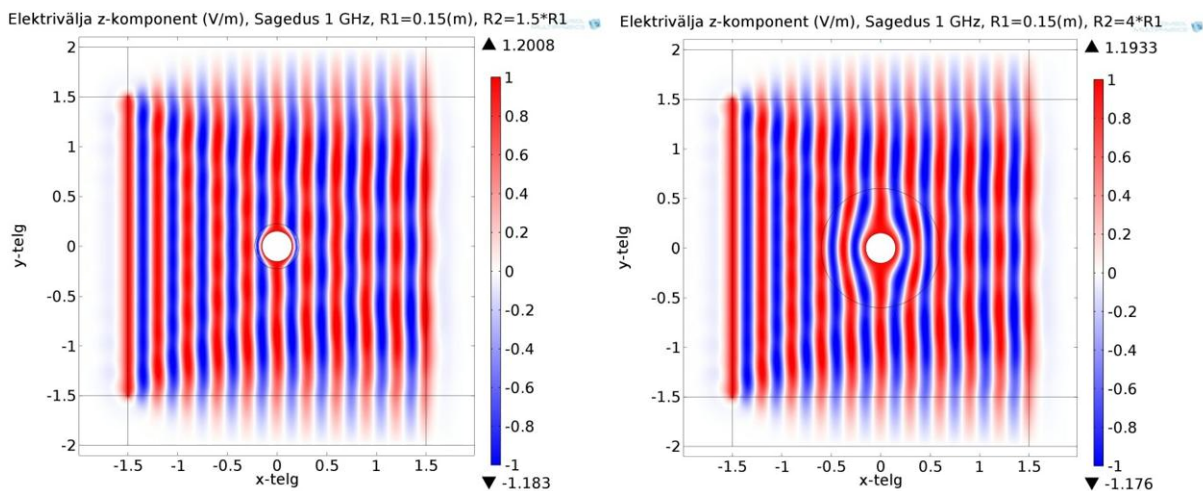
4.2.2 Elektromagnetlaine sageduse ja peidiku raadiuste suhte mõju peitmisele

Kuna peidikute peitmisomadused sõltuvad sagedusest [16], siis käesoleva töö raames varieeriti artikli [5] põhjal loodud simulatsioonis sagedust (vt Joonis 18). Teisi parameetreid ei muudetud. Sageduste 0.6GHz ja 2.5GHz korral peitmise omadused säilivad suhteliselt heas lähenduses, kuigi on märgata väikest muutust (vt Joonis 21). Nimelt tekitavad sellised peidikud suurema sagedusega laine korral peidiku taga hajumist ja interferentsi. Nagu mainitud peatükis 2.6, siis see tuleneb suurest suhtelise magnetilise läbitavuse väärtusest. Kindlasti pakuksid huvi ka simulatsioonid kõrgemate sageduste jaoks, aga arvuti tehnilised parameetrid ei võimaldanud suuremate sagedustega elektromagnetlainete simuleerimist vastava geomeetria korral.



Joonis 21. Vasakul silindrilise peidiku simulatsioon sageduse 0.6GHz korral ja paremal pool sageduse 2.5GHz korral.

Järgmisena uurisime raadiuste suhte varieerimise mõju samale simulatsioonile. Kuna transformatsiooni optikas pressitakse ruum silindri kesta sisse nii, et saavutatakse sobivad dielektriline ja magnetiline läbitavus, siis võib eeldada, et raadiuste suhte muutmine ei mõjuta peitmise headust. Joonis 22 kujutab kaht simulatsiooni, millest ühe korral on valitud raadiuste suhteks 1.5 ning teise korral 4. Nagu joonistelt on näha, paksema metamaterjalist silindri kihi korral painutatakse elektrivälja kihi sees vähem kui õhema kihi korral. See tulemus on oodatav, sest paksema kihi korral peabki dielektrilise ja magnetilise läbitavuse väärtused muutuma aeglasemalt.



Joonis 22. Vasakul: Silindrilise peidiku simulatsioon raadiuse suhtega 1.5. Paremal: sama simulatsioon raadiuste suhtega 4.

4.2.3 Erinevate ääritingimuste mõju peitmisele

Eelnevast peatükist võis näha, et mudeli ääritingimuste valik muudab lainevälja kuju märgatavalt ning sellepärast otsustasime koostada käesoleva peatüki, kus uuritakse ja analüüsitakse erinevate ääritingimuste mõju peitmisele. Nende paremaks mõistmiseks koostati käesoleva töö raames ülevaatlikud Tabel 1 ja Tabel 2, milles on kujutatud erinevate ääritingimustega simulatsioonid. Simulatsioonide tegemisel on kasutatud artikli [5] geomeetria ning varieeritud on vaid silindri sisemisi ja arvutuspiirkonna välimisi ääritingimusi. Kuna PEC ja PMC tingimused on elektrivälja ja magnetvälja suhtes antisümmeetrilised ning praeguste simulatsioonide tegemiseks on kasutatud elektrivälja, siis magnetvälja simuleerimisel tuleks kõik PEC kihid vahetada PMC kihtideks ja vastupidi. Kõikidel joonistel on kujutatud elektrivälja z-komponendi väärtusi värviskaala abil xy-tasandil.

Tabel 1 tulpades on ära toodud silindrilise peidiku sisemise pinna ääritingimus (ilma ääritingimusest, PEC või PMC) ning ridades simulatsioonipiirkonna välisäärite ääritingimused (kõigil kolmel küljel PEC, PMC või PML). Sellele lisaks on koostatud Tabel 2, kus on kombineeritud välisääritel mitmeid erinevaid ääritingimusi. Näiteks tähis ääres PMC, otsal PML tähendab, et lainefrondiga risti olevatele külgedele on lisatud PMC ning otsmisele äärelle, kuhu laine suubub, PML.

Esimese asjana saab Tabel 1 ja Tabel 2 esimest ja teist tulpa võrreldes kohe märkida, et artiklis [4] toodud märkus, et PEC kiht silindri sees ei mõjuta peidikust väljuvat lainevälja, kehtib igal juhul. PEC kiht ei lase valgust peidiku sisemusse. Pealelangev laine indutseerib PEC-il samasuguse laine nagu peaks tekitama olukorral kui laine jõuaks peidiku sisemusse. Ideaalsel juhul ei tohi valgus peidikusse jõuda (tulenevalt teisendusest), viga tekib lõplike elementide meetodi kasutamisest.

Lisaks ilmestab Tabel 1 analüüsimine, et parim tulemus saavutatakse väliste PML äärtega (tabeli esimene rida) ning sisemise ja välimiste PMC äärtega mudeli abil. Kui eesmärgiks on saada kõige lähedasemat simulatsiooni ideaalsele peidikule, siis tuleks valida mudeli kõikideks ääritingimusteks PMC, mille korral lainevälja kuju säilib ning maksimaalne elektrivälja tugevuse väärtus ei suurene (st ei toimu interfeerumist).

Nüüd võiks oletada, et Tabel 1 esimese rea viimane (sisemise PMC ja väliste PML tingimustega) või Tabel 2 teise ning kolmanda rea viimased (sisemise PMC ja väliste PMC ning PMLi variatsioonidega tingimused) käituvad sama moodi. Erinevus tuleb arvatavasti sisse aga sellest, et kuigi PML peaks suutma neelata iga nurga all langevad lainet, tekib ikka lõplike elementide meetodi tõttu väike häiritus, mis äärmistel PMC kihtidel peegeldumise tõttu võimendub, sest siis ei lange PMC-le enam tasalainet.

PEC-il indutseeritud laine tekkimist kirjeldab kõige paremini Tabel 1 teine rida, kus kõik simulatsiooni välised ääred on PEC-id. Piltidelt on näha, et lainefrondiga risti olles seab PEC elektrivälja tangentsiaalse komponendi nulliks, aga mudeli parempoolsel otsal toimub täielik peegeldumine ning selle tõttu saab vaadelda kõigil kolmel simulatsioonil seisulaine tekkimist. Seda saab järeldada ka faktist, et algne elektrivälja tugevus $1V/m$ on suurenenud umbes $30V/m$. Selle tõttu ei saa PEC-i kasutada simulatsiooni parempoolse ääritingimuseks.

Tabel 1 kolmanda rea kahes esimese tulbas tekkiv tugev häiritus on põhjustatud sellest, et peidiku sisse jõudev väli või sisemise PEC kihi poolt indutseeritud väli põhjustab laineväljas

häiritusi ja interfereerumist, mida välised PMC kihid võimendavad (elektrivälja tugevuse väärtused ulatuvad $20V/m$). Võimendamine tekib peegeldustest PMC kihil. Nimelt kuna PMC ja PEC kihid teostavad arvutusi ainult tasalainete jaoks, siis väikegi häiritus väljas võimendatakse peegeldustega äärtel. See oli ka põhjus miks paarkümmend aastat tagasi kujundati PML-tingimus. Nimelt PML suudab laineid neelata iga langemisnurga all.

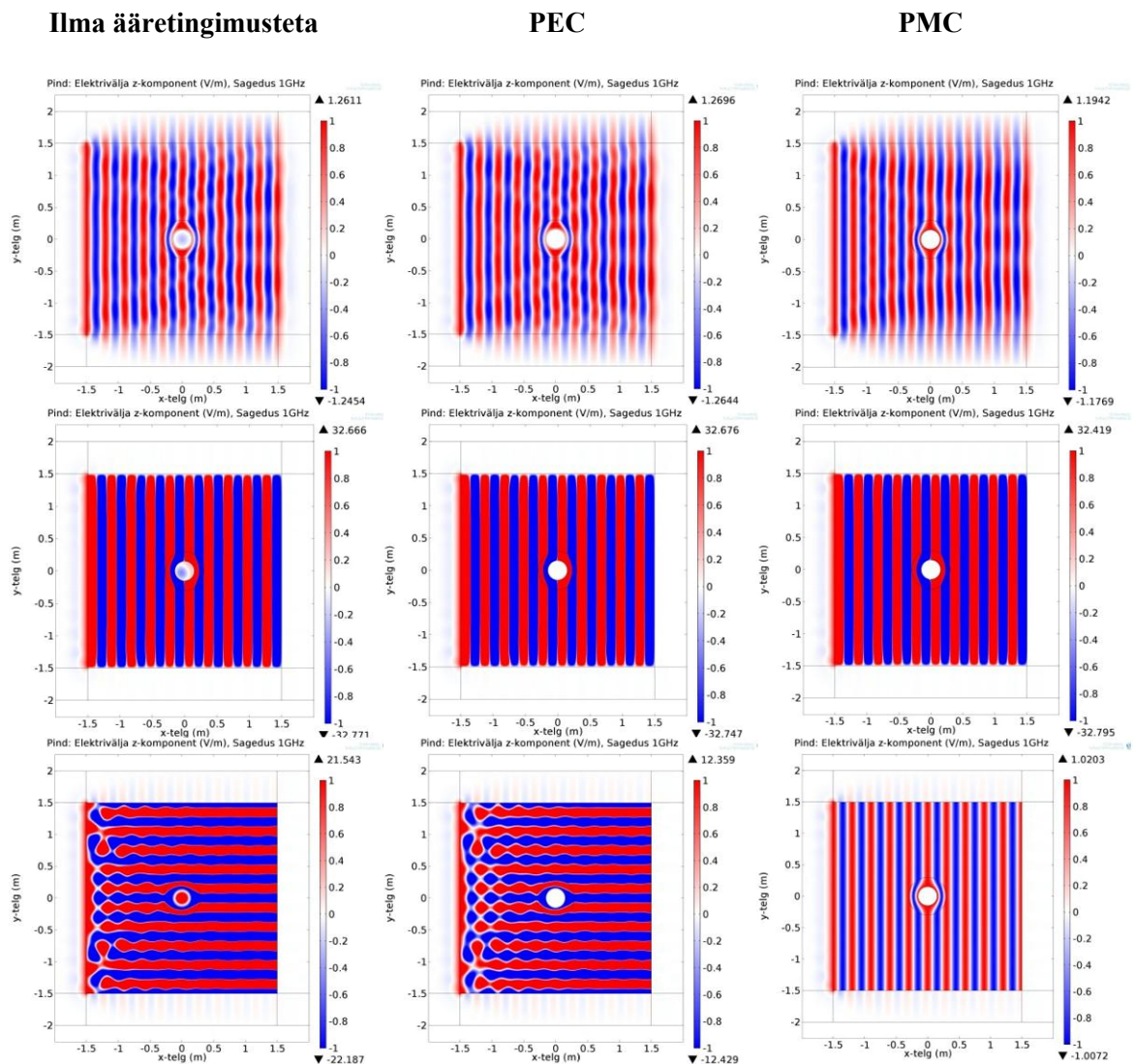
Tabel 1. Ääritingimuste võrdlus

Sees/
välis-
äärtel

PML

PEC

PMC



Tabel 2. Mudeli domeeni välisäärte ääritingimuste kombineerimine ja võrdlemine

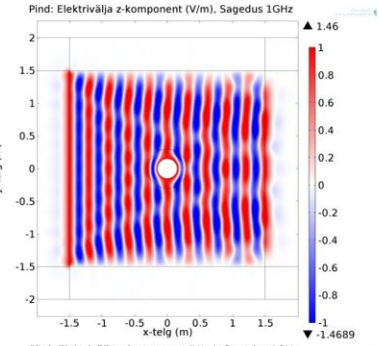
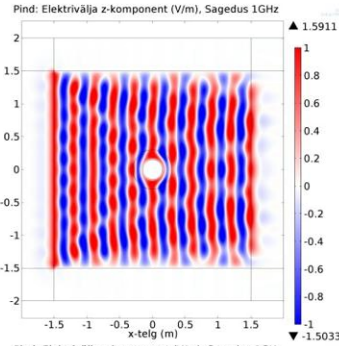
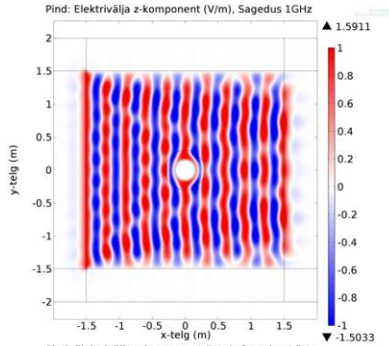
Sees/
välis-
äärte

Ilma ääritingimusteta

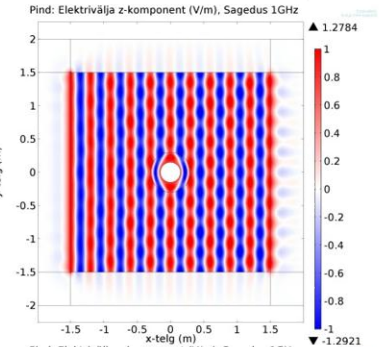
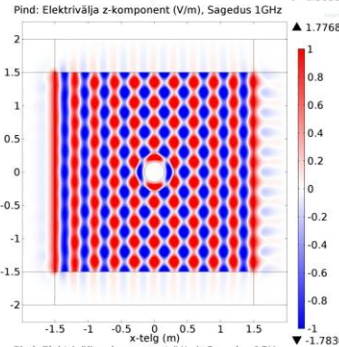
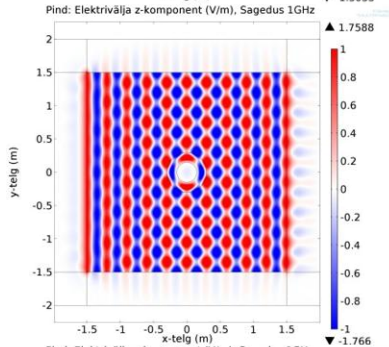
PEC

PMC

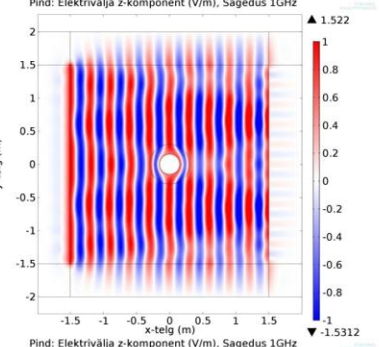
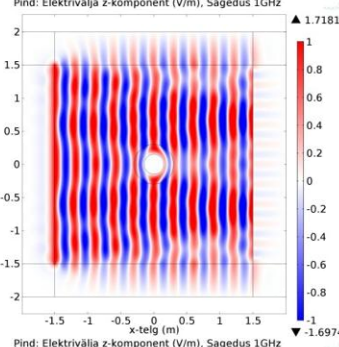
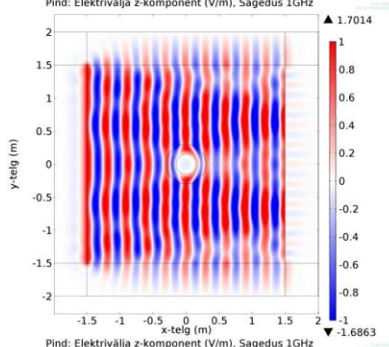
Ääres
PEC,
otsal
PML



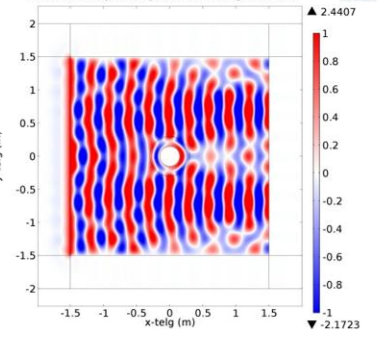
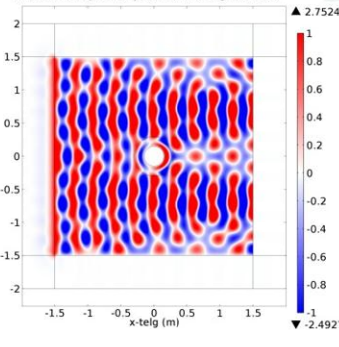
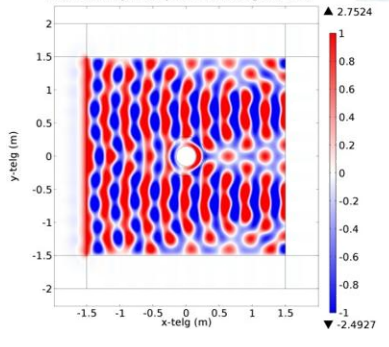
Ääres
PMC,
otsal
PML



Ääres
PML,
otsal
PMC



Ääres
PEC,
otsal
PMC



Üldiselt on tabelitest näha, et sisemine PMC ääritingimus tekitab lainevälja levimises vähem häiritusi kui PEC tingimusi. See on tingitud sellest, et PMC võrdsustab elektrivälja tugevuse tangentsiaalse komponendi nulliga ja väli ei ole pidev. Seega paremate peitmistulemuste saavutamiseks on õigem silindri siseküljel kasutada PMC ääritingimust. Samas kui soovida

kujutada reaalselt juhtu, kus peidik on ideaalilähedane ning selle sisse on asetatud metallist silinder, sobib selle demonstreerimiseks paremini PEC tingimus.

Järeldusena saab mainida, et käesoleva peidiku modelleerimiseks sobivad kõige paremini simulatsioonide ülesehitused, mida kirjeldavad Tabel 1 esimene rida (välise PML tingimusega), kolmanda rea kolmas tulp (kõik PMC ääritingimused) ning Tabel 2 esimese (ääres PEC, otsal PML) ja teine (ääres PML, otsal PMC) rida. Teistsuguste ääritingimuste korral on häiritused laineväljas märgatavalt suuremad. Seega ääritingimuste mõistmine ning selle tulemusena õigete ääritingimuste valimine kindlate probleemide lahendamiseks on kahtlemata tarvilik.

4.3 Teisi teemaga seotud COMSOLi simulatsioone

4.3.1 Negatiivse murdumisnäitajaga materjalist luubi simuleerimine

J. Pendry tuvustas oma loengus [24] huvitavat kontseptsiooni, kuidas disainida negatiivse murdumisnäitajaga materjalist suurendusklaas. Käesoleva töö raames simuleeriti 2D läbilõiget metamaterjalist negatiivse murdumisnäitajaga sfäärilist, mis suutis suurendada selle sees olevat eset. Simulatsiooni tegemiseks vajalikud ε ja μ väärtused olid antud vastavalt piirkondade kaupa:

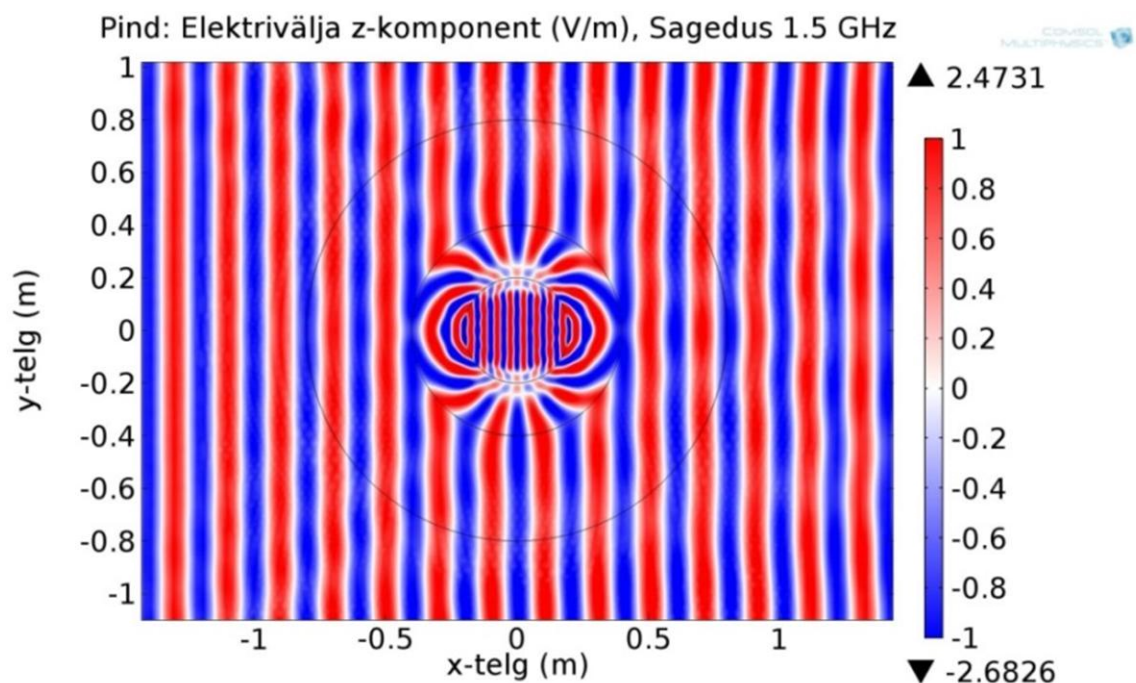
$$\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon^{33} = \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2, \quad 0 < r < r_3$$

$$\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon^{33} = -\left(\frac{r_2}{r}\right)^2, \quad r_3 < r < r_2$$

$$\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon^{33} = 1, \quad r_2 < r < \infty$$

kus $\varepsilon^{11}, \varepsilon^{22}, \varepsilon^{33}$ tähistavad suhtelise dielektrilise läbitatvuse maatriksi diagonaalil asetsevaid väärtusi, r silindrilist või sfäärilist koordinaati, r_3 sisemist raadiust, r_2 välimist raadiust ning r_1 suurendatud kujutise raadiust. Kuna suurenduse avaldumist on keerukas demonstreerida, vaatleme olukorda, kus sfäärilise raadiusega r_1 olevad lained koondatakse sfääri raadiusega r_3 . Simulatsioonis levib elektrivälja vasakult paremale ning kõige suurema raadiusega ringi sees olevad lained koondatakse suurendusklaasi sisse (vt Joonis 23). Sellise suurendusklaasi suurendus on alati $\left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2$. [24]

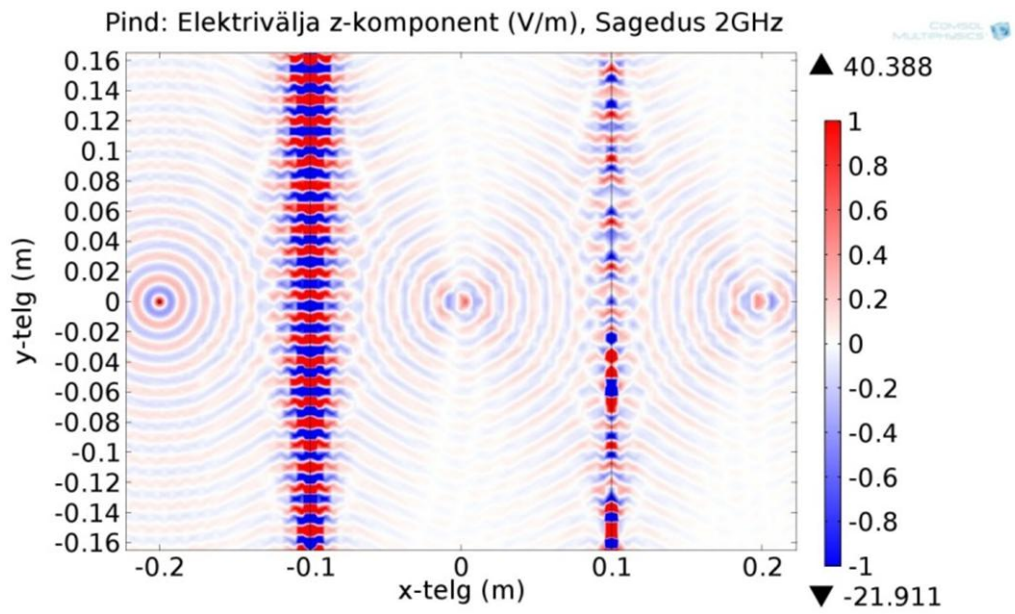
Kuna allikas ei täpsustatud simulatsiooni ülesehitust, valisime vastavad parameetrid ise. Ülesehitus oli järgmine: sfääri välimine läbimõõt $0.4m$, sisemine $0.2m$, simulatsioonidomeeni külje pikkus $3m$ ning seda ümbritseva PML ääre paksus $0.5m$. Selline ülesehitus valiti, kuna nimetatud piirkonna käitumisega oleme varasemast hästi kursis. Kuigi simulatsiooni tulemus sagedusest ei sõltu, st suurenduse väärtus ja kvaliteet jäävad samaks, tehti valitud raadiuste jaoks COMSOLis sageduste varieerimine (*parametric sweep*), et saavutada silmale kõige paremini vaadeldav pilt. Geomeetria suurustest tulenevalt valiti sagedus GHz suurusjärgus. Sagedust varieeriti vahemikus $0.5GHz$ kuni $2.GHz$ sammuga $0.1GHz$ ning sobivaimaks sageduseks valiti $1.5GHz$ (vt Joonis 23). Joonisel on hästi näha, kuidas tasalaine koondatakse sfääri sisemusse.



Joonis 23. Negatiivse murdumisnäitajaga materjalist loop.

4.3.2 Veselago läätse simuleerimine

Teiseks prooviti modelleerida Veselago läätse (vt Joonis 5) käitumist sfäärilise laine korral. Vasakukäelise materjali paksuseks valiti $0.2m$ ning punktallikas sagedusega $2GHz$, elektrivälja tugevusega $1V/m$ asetati läätsest $0.1m$ kaugusele vasakule. Ka laineoptika korral materjali sisse ning paremale punktvalgusallika kujutised (vt Joonis 24). Juhime tähelepanu intensiivsete pinnaplasmonide tekkele metamaterjali pinnal. Vasakpoolsel metamaterjali pinnal tekib pinnaplasmonite tõttu elektrivälja maksimaalse tugevusega $40V/m$.



Joonis 24. Veselago läätse simuleerimine laineoptikaga

5 Ideid edasiseks

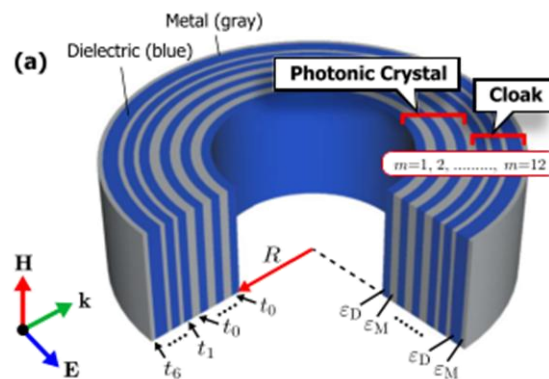
Saavutamaks reaalsele materjalidele sarnasemaid omadusi on eelnevalt tuletatud dielektrilise ja magnetilise läbitavuse väärtuste maatrikseid lihtsustatud kasutades erinevaid teisendusi. 2012. aastal ilmunud artiklis [25] kirjeldati numbriliselt kihilisest (metall ja dielektrik) struktuurist koosneva silindrilise peidiku mudelit, mis suutis oma sisemust ühe kindla lainepikkuse eest varjata, aga samas võimaldas teisel lainepikkusel suhtlust väliskeskkonnaga. Joonis 25 kujuta peidiku struktuuri ülesehitust. Erinevalt käesolevas töös kasutatud teisendustest esitati artiklis lihtsustatud parameetrid kujul:

$$\varepsilon^{11} = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2 \left(\frac{r-a}{r}\right)^2, \quad \varepsilon^{22} = \left(\frac{b}{b-a}\right)^2, \quad \varepsilon^{33} = 1,$$

mille põhjal kasutati tuletatud teisendust kihiliste struktuuride jaoks kujul:

$$\varepsilon^{11} = \frac{\eta+1}{1} \left(\frac{1}{\varepsilon_D} + \frac{\eta}{\varepsilon_M}\right)^{-1}, \quad \varepsilon^{22} = \frac{\varepsilon_D + \eta\varepsilon_M}{1+\eta}, \quad \varepsilon^{33} = 1,$$

kus η näitab kihtide paksuste suhet, ε_D dielektriline läbitavus dielektrikukihis ja ε_M metallis. Mõlemad läbitavused sõltuvad sagedusest, mis põhjustab peitmisomaduste kadumist teistel lainepikkustel. Lihtsustatud parameetritega peidikus on kiirte teekond sama, aga vastav teisendus põhjustab tagasipeegelduse [15].



Joonis 25. Footonkristalliga silindrilise peidiku ülesehitus [25]

Artiklis [25] kasutati peidiku modelleerimiseks teistsugust arvutusprogrammi kui käesoleva töö eelnevates peatükkides. Tegemist oli lõplike vahede meetodiga aja esituses (*finite-difference time-domain*). Käesoleva töö raames ei õnnestunud vastava artikli tulemusi reprodutseerida, kuna COMSOL kasutab probleemide lahendamiseks lõplike elementide meetodit. Seega saaks tööd arendada otsides võimalusi eelnevalt kirjeldatud peidiku simuleerimiseks COMSOLis ning seeläbi saavutada oskus sarnaste peidikute disainimiseks.

Sellise peidiku modelleerimisoskuse saavutamine pakuks töö autorile huvi kuna tulevikus võib osutada võimalikuks Füüsika Instituudi kiletehnoloogide laboriga koostöös sarnaseid peidikuid valmistada ning uurida nende mõju valguse levikule katseliselt.

Kuna uudseid peidikuid tehakse ka grafeeni kihtidest [26], siis edasiarendusena sellest tööst võiks uurida ja leida selgitus ränioksiid-grafeen-hafniumoksiid kilestruktuuri ebaootuspärasele käitumisele ellipsomeetri kui optilise mõõteseadme all. Ka sellise struktuuri uurimist saab teostada COMSOLi simulatsioonide põhjal.

VALGUSE LEVIKU NUMBRILINE MODELLEERIMINE MURDUMIS- NÄITAJA GRADIENDIGA MATERJALISTRUKTUURIDES

Sandhra-Mirella Valdma

6 Kokkuvõte

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks oli numbriliselt simuleerida murdumisnäitaja gradiendiga materjalstruktuure optiliste peidikute näitel ning saavutada antud valdkonnas levinud tarkvarapaketi COMSOL Multiphysics kasutuspädevus.

Käesolevas bakalaureusetöös:

- koostati ülevaade tehislikest optilistest materjalidest ning nende vastastikmõjust valgusega. Kirjeldati valguse levikut negatiivse murdumisnäitajaga materjalides, optilise peitmise ideed ning selle saavutamiseks vajalikku transformatsioonioptikat;
- transformatsioonioptika käsitluses tehti läbi silindrilise peidiku teisendus, mis võimaldas mõista töö praktilises osas simuleeritavate optiliste peidikute tööpõhimõtet;
- koostati ülevaade kasutatavast tarkvarapaketist COMSOL ning selle raadiosageduste moodulist ja vastava mooduli ääritingimuste teooriast ja tööpõhimõttest;
- omandati oskus COMSOLi osakeste jälgimise ja raadiosageduste moodulite abil numbriliselt simuleerida valguse levikut muutuva murdumisnäitajaga keskkonnas. Selle tõestuseks on optilisi peidikuid kirjeldavate numbriliste simulatsioonide ([4] ja [5]) edukas reprodutseerimine;
- analüüsiti lainelevi probleemide uurimisel kasutatavate ääritingimuste ja keskkondade mõju laineväljale. Selle tarvis simuleeriti silindrilise peidiku mudelit erinevate ääritingimuste ja koosluste korral.

Käesoleva töö autor avaldab tänu oma juhendajale Heli Luknerile tema alati toetava oleku ning motiveeriva suhtumise eest. Kindlasti soovib töö autor tänada ka labori juhatajat Peeter Saarit olemast inspireerivaks eeskujuks ning Peeter Piksarve, kes pakkus võimaluse tutvuda füüsikalise optika labori tööga.

7 Kasutatud kirjandus

- [1] S. A. Ramakrishna and T. M. Grzegorzczuk, *Physics and Applications of Negative Refractive Index Materials*. CRC Press, 2009.
- [2] B. Wang, “Wave propagation in photonic crystals and metamaterials : surface waves , nonlinearity and chirality,” Iowa State University, 2009.
- [3] V. G. Veselago, “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and m ,” *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, no. 4, pp. 509–514, 1968.
- [4] S. a. Cummer, B.-I. Popa, D. Schurig, and D. R. Smith, “Full-wave simulations of electromagnetic cloaking structures,” *Physical Review E*, vol. 74, no. 3, p. 036621, Sep. 2006.
- [5] J. Li and Y. Huang, “Mathematical Simulation of Cloaking Metamaterial Structures 1 Introduction The mathematical formulation,” *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 4, no. 1, pp. 93–101, 2012.
- [6] T. Jun, D. R. Smith, and R. Liu, Eds., *Metamaterials: Theory, Design and Applications*. Springer, 2010.
- [7] E. Hecht, *Optics*, Second Edi. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1987.
- [8] L. Solymar and E. Shamonina, *Waves in Metamaterials*. Oxford University Press, 2009.
- [9] J. Pendry, “Negative refraction makes a perfect lens,” *Physical review letters*, vol. 85, no. 18, pp. 3966–9, Oct. 2000.
- [10] Z. Liu, H. Lee, Y. Xiong, C. Sun, and X. Zhang, “Far-field optical hyperlens magnifying sub-diffraction-limited objects.,” *Science (New York, N.Y.)*, vol. 315, no. 5819, p. 1686, Mar. 2007.
- [11] A. A. Maradudin, Ed., *Structured Surfaces as Optical Metamaterials*. Cambridge University Press, 2011.
- [12] A. Loot, “Pinnaplasmonite ja kullakile karakteriseerimine Kretschmanni skeemiga,” Tartu Ülikool, 2012.
- [13] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, “Controlling Electromagnetic Fields,” *Science*, vol. 312, no. 5781, pp. 1780–1782, 2006.
- [14] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. a Cummer, J. B. Pendry, a F. Starr, and D. R. Smith, “Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies.,” *Science (New York, N.Y.)*, vol. 314, no. 5801, pp. 977–80, Nov. 2006.
- [15] W. Cai, U. K. Chettiar, A. V. Kildishev, and V. M. Shalaev, “Optical cloaking with metamaterials,” *Nature Photonics*, vol. 1, no. 4, pp. 224–227, Apr. 2007.

- [16] Y. Urzhumov, N. Landy, T. Driscoll, D. Basov, and D. R. Smith, “Thin low-loss dielectric coatings for free-space cloaking,” *Optics Letters*, vol. 38, no. 10, p. 1606, May 2013.
- [17] R. Merritt, “Do-It-Yourself Invisibility with 3-D Printing,” *Center For Metamaterials And Integrated Plasmonics Newsletter*, 2013. [Online]. Available: <http://www.metamaterials.duke.edu/news/do-it-yourself-invisibility-3-d-printing>.
- [18] “COMSOL Multiphysics User’s Guide,” 2012. [Online]. Available: <http://nf.nci.org.au/facilities/software/COMSOL/4.3/doc/pdf/mph/COMSOLMultiphysicsUsersGuide.pdf>.
- [19] “COMSOL Multiphysics: Physics Builder User’s Guide,” 2012. [Online]. Available: <http://nf.nci.org.au/facilities/software/COMSOL/4.3/doc/pdf/mph/PhysicsInterfaceBuilderUsersGuide.pdf>.
- [20] “COMSOL Multiphysics Reference Guide,” 2012. [Online]. Available: <http://nf.nci.org.au/facilities/software/COMSOL/4.3a/doc/pdf/mph/COMSOLMultiphysicsReferenceGuide.pdf>.
- [21] “The RF Module User’s Guide,” 2012. [Online]. Available: <http://nf.nci.org.au/facilities/software/COMSOL/4.3/doc/pdf/rf/RFModuleUsersGuide.pdf>.
- [22] Y. a Urzhumov, N. B. Kundtz, D. R. Smith, and J. B. Pendry, “Cross-section comparisons of cloaks designed by transformation optical and optical conformal mapping approaches,” *Journal of Optics*, vol. 13, Feb. 2011.
- [23] Y. Urzhumov, “Ideal Cloak,” 2012. [Online]. Available: http://www.comsol.com/showroom/downloadfile/model/11721/version/comsol43a/file/models.particle.ideal_cloak.pdf.
- [24] J. Pendry, “The Schrödinger lecture 2012 - Metamaterials: new horizons in electromagnetism.” [Online]. Available: http://www.youtube.com/watch?v=ogNKRQCH1Kk&list=PLkUq_qVGmwpO5vRgHHzCVDM1r9l5KjTQi.
- [25] N. Okada and J. B. Cole, “Cylindrical invisibility cloak based on photonic crystal layers that permits communication with the outside,” *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 29, no. 12, pp. 3344–3348, 2012.
- [26] M. Farhat, C. Rockstuhl, and H. Bağcı, “A 3D tunable and multi-frequency graphene plasmonic cloak,” *Optics Express*, vol. 21, no. 10, p. 12592, May 2013.

MODELLING OPTICAL WAVE PROPAGATION IN MATERIAL STRUCTURES WITH GRADIENT REFRACTIVE INDEX

Sandhra-Mirella Valdma

8 Summary

The aim of this thesis was to study gradient refractive index material structures on the example of cloaking and to master using software package COMSOL Multiphysics to numerically simulate the propagation of the optical waves in such material structures.

In this thesis:

- a summary on man made optical materials and their interaction with light was written. Moreover wave propagation in negative refractive index materials along with the idea of optical cloaking and the theory of transformation optics necessary to achieve it were described;
- based on the knowledge of transformation optics a coordinate transformation for a silindrical cloak was derived. This enabled us to comprehend the working priciples of optical cloaks modelled in this thesis;
- overview of software package COMSOL and its radio frequency module's and boundary conditions' theory and working principles was given;
- competence in using particle tracing and radio frequency modules to simulate wave propagation in gradient refractive index materials was gained. To demonstrate that numerical simulations of optical cloaks ([4] ja [5]) were successfully reproduced;
- the effect of boundary conditions and environments used to model wave propagation on wave field in computational region was analysed. To demonstrate that the boundary conditions and environments were varied in simulated cylindrical cloak model.

The author of this thesis would like to thank her supervisor Heli Lukner for her supportive and motivational attitude. Certainly, the author wishes to thank Peeter Saari for being an inspiring leader and Peeter Piksarv, who offered the opportunity to participate in the physical optics laboratory work.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Sandhra-Mirella Valdma

(sünnikuupäev: 24.01.1991)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

„Valguse leviku numbriline modelleerimine murdumisnäitaja gradiendiga materjalstruktuurides“,

mille juhendaja on Heli Lukner,

1.1.reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2.üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **30.05.2013**