Das elliptische Potential.

Der

Kaiserlichen Universität zu Dorpat

bei der

Jubelfeier

ihres

funfzigjährigen Wirkens

am $^{12}/_{24}$. December 1852

mit dem Glückwunsch

der

kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst

überreicht

von

Dr. *M. G. von Paucker*,

b. Secr. d. Ges.

korr. Mitgliede der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg.

Mitau,

gedruckt bei J. F. Steffenhagen und Sohn.

1852.

Die Mécanique céleste hat ein sinnreiches Verfahren aufgedeckt, welches Kräfte die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirken aus einem durch Integration bestimmten Anziehungspotential mittels Differentiirung finden lässt. Siehe Livre II. 11 und Livre III. 4.

Sowohl Laplace selbst als spätere Mathematiker haben das Anziehungspotential vielfältig untersucht. Auf diese Theorie hier näher einzugehen wird nicht beabsichtigt. Es sollen nur einige eigenthümliche Umbildungen mitgetheilt werden — einzelne Werkstücke eines Systems auf einem vielleicht neuen Felde.

Nur die hauptsächlichsten Beziehungen sind ausgehoben. Das Bedürfniss der Kürze machte es rathsam alles zu unterdrücken was einer weitern Ausführung angehört, und der Leser leicht selbst einschalten mag.

Der Ausdruck den das Anziehungspotential vor der Integration hat, heisst das geometrische Potential. Dieses ist entweder ein lineäres welches dem Dreieck, oder ein elliptisches welches dem Kegelschnitt entspricht. Derjenige Theil des Potentials welcher sich bloss auf den Winkel bezieht heisst das Indicial. Dieses ist also ebenfalls entweder lineär oder elliptisch.

Ein im September d. J. der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg vorgelegter Aufsatz zeigt die Entwickelung des lineären Potentials nach Indicialen. Diese Reihe ist ausreichend um die Anziehung des Erdsphäroids zu bestimmen.

Hier wird zunächst diese erste Entwickelung kurz berührt. Daran wird eine zweite Entwickelung geknüpft, welche nach Potenzen der Seite fortschreitet. Man steigt so von dem einfachen Indicial zu dem allgemeinen lineären Indicial hinauf.

Die Bestimmung der Axen eines Kegelschnitts führt auf das elliptische Potential und Indicial. Einige Eigenschaften desselben werden angezeigt.

Als Anwendung wird die Aufgabe gewählt, die Anziehung eines gleichmässig dichten Ellipsoids auf einen äussern Ort aus der Oberflächenanziehung herzuleiten. Man sieht hier wie die Sätze von Maclaurin, Laplace und Ivory auf einem beträchtlichen Umwege zu demselben einfachen Ausdruck führen, welcher in dem obengedachten Aufsatz durch ein anderes nicht nur kürzeres sondern allgemeineres Verfahren ermittelt worden ist.

In einem Dreieck sei die feste Seite $= 1$, die bewegliche und veränderliche Seite $= r$, der beiderseitige Winkel $= \psi$, $\cos\psi = c$, $\sin\psi = c'$, die Gegenseite von ψ sei $= e$.

Die Einrichtung lässt sich immer so treffen dass r ein ächter Bruch ist. Man hat alsdann

$$c^2 + c'^2 = 1 \qquad r^2 + r'^2 = 1$$

$$e^2 = 1 - 2cr + r^2$$

In Bezug auf c ist

$$\text{das einfache Indicial} = \widehat{c}$$

$$\text{das einfache Subindicial} = \overset{*}{c}$$

$$x\, \overset{*}{c}_{x-1} = \frac{d\,\widehat{c}_x}{dc}$$

$$x\,(x+1)\, \widehat{c}_x - 2\,c\, \frac{d\,\widehat{c}_x}{dc} + c'^2\, \frac{d^2\,\widehat{c}_x}{dc^2} = 0.$$

$$x\,(x+3)\, \overset{*}{c}_x - 4\,c\, \frac{d\,\overset{*}{c}_x}{dc} + c'^2\, \frac{d^2\,\overset{*}{c}_x}{dc^2} = 0$$

Entwickelung des linearen Potentials P nach Indicialen

$$P = e^n = k_o - w_1\, k_1\, \widehat{c}_1 + w_2\, k_2\, \widehat{c}_2 \ldots$$

Die Grössen k enthalten bloss die Seite r, und heissen daher Potentialseiten.

$$A = 2\,r \left\{\frac{d\,P}{dr}\right\} + r^2 \left\{\frac{d^2\,P}{dr^2}\right\} - 2c \left\{\frac{d\,P}{dc}\right\} + c'^2 \left\{\frac{d^2\,P}{dc^2}\right\}$$

$$B = nr^2\, P - 2\,r^3 \left\{\frac{d\,P}{dr}\right\}$$

$$A\,r'^2 - (n+1)\,B = o$$

$$[x(x+1)+(n-x)(n+x+1)r^2]\,k_x$$
$$-(2r+2nr^3)\frac{d\,k_x}{d\,r} - r^2 r'^2 \frac{d^2 k_x}{d\,r^2} = 0$$

$$k_x = \mathfrak{p}_0 r^x + \mathfrak{p}_2 r^{x+2} \;\ldots\; \mathfrak{p}_y r^{x+y} + \mathfrak{p}_{y+2}\; r^{x+y+2} \;\ldots$$

$$(2x+y-n)(n+1-y)\mathfrak{p}_y + (y+2)(y+2x+3)\mathfrak{p}_{y+2} = 0$$

Bei $n = -1$ oder bei positiven n ist k ein abgeschlossener Ausdruck, dessen Gliederanzahl $= \frac{n+3}{2}$.

Bei $n = -3$ oder bei n grösser als -3 ist k eine unendliche Reihe welche durch Multiplikation mit einer Potenz von r' zu einem abgeschlossenen Ausdruck wird.

$$Q = \frac{r'^{\,2m-4}}{e^m}$$

$$A = 2r\left\{\frac{dQ}{dr}\right\} + r^2\left\{\frac{d^2Q}{dr^2}\right\} - 2c\left\{\frac{dQ}{dc}\right\} + c'^2\left\{\frac{d^2Q}{dc^2}\right\}$$

$$B = (m-4)\,r^2 Q - 2r^3\left\{\frac{dQ}{dr}\right\}$$

$$A r'^2 - (m-3)\,B = 0$$

Diese Gleichung stimmt mit der obigen für P, wenn $m - n = 4$ ist. Es sei also

$$Q = l_0 - w_1\, l_1\, \widehat{c}_1 + w_2\, l_2\, \widehat{c}_2 \;\ldots$$

so ergiebt sich für die Potentialseite l ein abgeschlossener Ausdruck bei $m =$ oder > 3.

Entwickelung des lineären Potentials P nach der Dreiecksseite r.

$$r^2\left\{\frac{d^2P}{dr^2}\right\} + c'^2\left\{\frac{d^2P}{dc^2}\right\} - (n-1)\,r\left\{\frac{dP}{dr}\right\} + (n-1)\,c\left\{\frac{dP}{dc}\right\} = 0$$

$$\frac{n}{2} = v \qquad \overset{x}{v} = \frac{v(v-1)\;..\;(v+1-x)}{1\;..\;2\;\;.\;\;.\;\;.\;\;x}$$

$$2^x \,.\, \overset{x}{v} = w_x$$

$$P = 1 - w_1 \widehat{C}_1\, r + w_2\, \widehat{C}_2\, r^2 \;\ldots\;.$$

Das lineäre Indicial $\widehat{C}$ ist bloss von c abhängig.

$$\widehat{C}_x = q_0 + q_2\, c^2 \ldots + q_y\, c^y + q_{y+2}\, c^{y+2} \ldots + c^x$$

$$x\,(x - n)\,\widehat{C}_x + (n - 1)\, c\, \frac{d\widehat{C}_x}{dc} + c'^2\, \frac{d^2\widehat{C}_x}{dc} = 0$$

$$(x - y)\,(x + y - n)\, q_y + (y + 1)\,(y + 2)\, q_{y+2} = 0$$

$$\widehat{C}_x^{(-1)} = \widehat{c}_x \qquad \widehat{C}_x^{(-3)} = \overset{*}{c}_x$$

d. h. das lineäre Indicial verwandelt sich bei $n = -1$ in das einfache Indicial, und bei $n = -3$ in das einfache Subindicial.

In diesen beiden Fällen ist also

$$\frac{1}{e} = 1 + \frac{1}{1}\,\widehat{c}_1\, r + \frac{1\,.\,3}{1\,.\,2}\,\widehat{c}_2\, r^2 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}\,\widehat{c}_3\, r^3 \ldots$$

$$\frac{1}{e^3} = 1 + \frac{3}{1}\,\overset{*}{c}_1\, r + \frac{3\,.\,5}{1\,.\,2}\,\overset{*}{c}_2\, r^2 + \frac{3\,.\,5\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3}\,\overset{*}{c}_3\, r^3 \ldots$$

Der obengedachte Aufsatz giebt die Koefficienten von $\widehat{c}_x$ und $\overset{*}{c}_x$ für alle x bis $= 13$.

Bei einem positiven n ist für alle Glieder deren Zeiger x gleich oder grösser als $n + 1$ ist, das lineäre Indicial $\widehat{C}_x$ durch $c'^{\,n+1}$ theilbar. Der Quotient $\widehat{D}_x$ ist ebenfalls ein lineäres Indicial, und zwar dasjenige welches dem negativen Exponenten $-(n + 2)$ entspricht. Mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen ist

$$e^n = 1 - w_1\, \widehat{C}_1\, r + w_2\, \widehat{C}_2\, r^2 \ldots \qquad \pm\, w_n\, \widehat{C}_n\, r^n$$

$$\mp\, w_{n+1}\, c'^{\,n+1}\, r^{n+1} \pm w_{n+2}\, c'^{\,n+2}\, \widehat{D}_1\, r^{n+2} \ldots$$

$$-\frac{n+2}{2} = \mathfrak{v} \qquad 2^x\, \overset{x}{\mathfrak{v}} = \mathfrak{w}_x$$

$$\frac{1}{e^{n+2}} = 1 - \mathfrak{w}_1\, \widehat{D}_1\, r + \mathfrak{w}_2\, \widehat{D}_2\, r^2 \ldots$$

$$\pm \frac{\widehat{C}^{(n)}_{n+x+1}}{c'^{\,n+1}} = \widehat{D}_x^{(n+2)} = \widehat{C}_x^{-(n+2)}$$

$$\text{Z. B.} - \frac{\widehat{C}^{(5)}_{10}}{c'^6} = \widehat{D}_4^{(7)} = \widehat{C}_4^{-(7)} = \frac{3}{143} - \frac{6}{13}\, c^2 + c^4$$

$$- \frac{\widehat{C}^{(5)}_{11}}{c'^6} = \widehat{D}_5^{(7)} = \widehat{C}_5^{-(7)} = \frac{11}{143}\, c - \frac{2}{3}\, c^3 + c^5$$

In einer Ellipse sei M die Mitte, O ein Ort des Umfangs, $MO = r$ der Halbmesser, F und F_1 die beiden Brennpunkte, $MF = MF_1 = f$ die Brennweite, $FO = \varrho$ und $F_1O = \varrho_1$ die beiden Leitstralen, der Winkel $FMO = \psi$, $\cos\psi = c$, $\sin\psi = c'$.

Die Normallinie der Ellipse theilt den Winkel FOF_1 in die Hälfte und trifft die grosse Axe in D. Um D sei ein Kreis beschrieben welcher den Halbmesser MO berührt. Aus M und O seien an diesen Kreis Berührende gezogen, welche in G zusammentreffen. Der Kreis D ist also dem Dreieck MOG eingeschrieben. Ein dem Dreieck FOF_1 umschriebener Kreis geht durch G. Die Seiten des Dreiecks MOG sind

$$MO = r \qquad OG = q \qquad MG = g = \frac{ff}{r}$$

$$q^2 = r^2 - 2dgr + g^2 \qquad d = \cos 2\psi = 1 - 2c^2$$

Die beiden Halbaxen seien a und b so ist

$$2\frac{a^2}{r} = r + q + g$$

$$2\frac{b^2}{r} = r + q - g$$

$$\varrho^2 = r^2 - 2crf + f^2 \qquad \varrho_1{}^2 = r^2 + 2crf + f^2$$

$$\frac{f}{r} = s \quad \frac{a}{r} = t \quad \frac{b}{r} = u \quad \frac{\varrho}{r} = e \quad \frac{\varrho_1}{r} = e_1 \quad \frac{q}{r} = E$$

$$e^2 = 1 - 2cs + s^2 \qquad e_1{}^2 = 1 + 2cs + s^2$$

$$E^2 = 1 - 2ds^2 + s^4$$

$$2t = e + e_1 \qquad 2t^2 = E + 1 + s^2 \qquad 2u^2 = E + 1 - s^2$$

In Bezug auf a sei das elliptische Potential $\mathfrak{P} = \left(\frac{a}{r}\right)^n = t^n$

$$s^2\left\{\frac{d^2t}{ds^2}\right\} + c'^2\left\{\frac{d^2t}{dc^2}\right\} = 0$$

$$\mathfrak{A} = s^2c\left\{\frac{d\mathfrak{P}}{ds}\right\} + sc'^2\left\{\frac{d\mathfrak{P}}{dc}\right\}$$

$$\mathfrak{B} = s^2\left\{\frac{d^2\mathfrak{P}}{ds^2}\right\} + c'^2\left\{\frac{d^2\mathfrak{P}}{dc^2}\right\}$$

$$(n-1)\mathfrak{A} - cs\mathfrak{B} = 0$$

Das elliptische Indicial $\widehat{\mathfrak{C}}_x = - c'^2 \widehat{\mathfrak{D}}_x$

Die Polynomialzahlen π sind

$$\pi_2 = -\frac{n}{2} \qquad \pi_4 = -\frac{n(6-n)}{2 \,.\, 4}$$

$$\pi_6 = -\frac{n(8-n)(10-n)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \qquad \pi_8 = -\frac{n(10-n)(12-n)(14-n)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8}$$

u. s. w.

Wenn $c = \cos\psi$ so ist das Potential von a:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = 1 + \pi_2 \widehat{\mathfrak{C}}_2 s^2 + \pi_4 \widehat{\mathfrak{C}}_4 s^4 \ldots$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = 1 - \pi_2 c'^2 \widehat{\mathfrak{D}}_2 s^2 - \pi_4 c'^2 \widehat{\mathfrak{D}}_4 s^4 \ldots$$

Wenn $c = \sin\psi$ so ist das Potential von b

$$\left(\frac{b}{r}\right)^n = 1 - \pi_2 \widehat{\mathfrak{C}}_2 s^2 + \pi_4 \widehat{\mathfrak{C}}_4 s^4 - \pi_6 \widehat{\mathfrak{C}}_6 s^6 \ldots$$

$$\left(\frac{b}{r}\right)^n = 1 + \pi_2 c'^2 \widehat{\mathfrak{D}}_2 s^2 + \pi_4 c'^2 \widehat{\mathfrak{D}}_4 s^4 + \pi_6 c'^2 \widehat{\mathfrak{D}}_6 s^6 \ldots$$

$$\widehat{\mathfrak{C}}_x = \mathfrak{q}_0 + \mathfrak{q}_2 c^2 \ldots + \mathfrak{q}_y c^y \ldots + c^x$$

$$\widehat{\mathfrak{D}}_x = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}_2 c^2 \ldots + \mathfrak{r}_y c^y \ldots + c^{x-2}$$

$$x(x-n)\, c\, \widehat{\mathfrak{C}}_x - (n-1)\, c'^2 \frac{d\widehat{\mathfrak{C}}_x}{dc} + c\, c'^2 \frac{d^2 \widehat{\mathfrak{C}}_x}{dc^2} = 0$$

$$(x-2)(x+2-n)\, c\, \widehat{\mathfrak{D}}_x + [(n-5)\, c^2 - (n-1)] \frac{d\widehat{\mathfrak{D}}_x}{dc} + c c'^2 \frac{d^2 \widehat{\mathfrak{D}}_x}{dc^2} = 0$$

$$(x-y)(x+y-n)\, \mathfrak{q}_y + (y+2)(y+2-n)\, \mathfrak{q}_{y+2} = 0$$

$$(x-y)(x+y-n)\, \mathfrak{r}_{y-2} + y(y-n)\, \mathfrak{r}_y = 0$$

Für jedes n ist $\widehat{\mathfrak{D}}_2^{(n)} = 1.$.

Die Gleichung der Ellipse

$$a^2 = r^2 (1 + \lambda^2 c^2) = b^2 (1 + \lambda^2) \qquad \text{für } \sin\psi = c$$

$$\text{oder } u^2 = 1 + (u^{-2} c^2 - 1)\, s^2$$

wird dadurch befriedigt dass:

$$\pi_x^{(-2)} + \pi_{x+2}^{(2)} = 0 \qquad c^2 \widehat{\mathfrak{C}}_x^{(-2)} - \widehat{\mathfrak{C}}_{x+2}^{(2)} = 0$$

Für die aufeinanderfolgenden elliptischen Indiciale und das einfache Indicial oder Subindicial gilt nachstehende Gleichung:

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{\mathfrak{S}}^{(-3)}_{x} + 2\,\frac{x}{2x+1}\,\widehat{\mathfrak{S}}^{(-5)}_{x-2} + 3\,\frac{(x-2)\,x}{(2x-1)\,(2x+1)}\,\mathfrak{S}^{(-7)}_{x-4} \\ +4\,\frac{(x-4)\,(x-2)x}{(2x-3)\,(2x-1)\,(2x+1)}\,\widehat{\mathfrak{S}}^{(-9)}_{x-6} \ldots + (\tfrac{1}{2}x+1)\,\frac{2.\,4\,\ldots\,.\,x}{(x+3)\,(x+5)\,\ldots(2x+1)} \end{array}\right\} = \overset{*}{c}_{x}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{\mathfrak{S}}^{(-3)}_{x} + \frac{x}{2x+1}\,\widehat{\mathfrak{S}}^{(-5)}_{x-2} + \frac{(x-2)x}{(2x-1)\,(2x+1)}\,\widehat{\mathfrak{S}}^{(-7)}_{x-4} + \frac{(x-4)\,(x-2)x}{(2x-3)\,(2x-1)\,(2x+1)} \\ \widehat{\mathfrak{S}}^{(-9)}_{x-6} + \frac{2\,.\,4\,\ldots\ldots\,x}{(x+3)\,(x+5)\,\ldots(2x+1)} \end{array}\right\} = \frac{\widehat{c}_{x+1}}{c}$$

Beispiel der Anwendung des elliptischen Pontentials:

Die Schwerkraft welche eine in sich abgeschlossene elliptische Schicht oder Schale auf irgend einen Ort ausübt, verschwindet wenn dieser Ort im Innern der Schale liegt. Betrachtet man also statt der elliptischen Schale ein massives Ellipsoid E_1, so ist die Anziehung desselben gegen einen innern Ort O gleich der Schwere dieses Orts zu einem Ellipsoid $E_{,,}$ auf dessen Oberfläche der Ort liegt, vorausgesetzt dass beide Ellipsoide eine gleichmässig vertheilte und gleiche Dichtigkeit haben, und dass sie einander ähnlich und ähnlichgestellt sind.

Wenn sie durch Umdrehung eines elliptischen Meridians um seine Axe entstanden sind, so wirkt die Schwere nur in der Ebene des Meridians. Das von dem Orte O auf die Umdrehungsaxe gezogene Loth sei $=$ X, die Schwere welche das Ellipsoid E_1 oder $E_{,,}$ in der Richtung dieses Loths bewirkt sei $= M_1$. Eben so sei das auf den Aequator gezogene Loth $=$ Y, die Schwere in der Richtung dieses Loths $= N_1$.

Die beiden einander ähnlichen Ellipsoide E_1 $E_{,,}$ haben eine gemeinsame Excentricität ε_1 so dass

$$\cos^2\varepsilon_1 = \frac{b_1^{\,2}}{a_1^{\,2}} = \frac{b_{,,}^{\,2}}{a_{,,}^{\,2}} = \frac{1}{1+\lambda_1^{\,2}} \qquad \lambda_1 = \operatorname{tg}\varepsilon_1$$

Die Grössen $\mathfrak{S}_1$ $\mathfrak{T}_1$ sind bloss von dieser Excentricität abhängig:

$$\tfrac{2}{3}\,\lambda_1^3\,\mathfrak{S}_1 = \varepsilon_1\,(1+\lambda_1^{\,2}) - \lambda_1 \qquad \tfrac{1}{3}\,\lambda_1^{\,3}\,\mathfrak{T}_1 = (1+\lambda_1^{\,2})\,(\lambda_1 - \varepsilon_1)$$

oder $$\frac{\mathfrak{S}_1}{1+\lambda_1^2} = 1 - 2 \,.\, {}^3\!/_5\, \lambda_1^2 + 3 \,.\, {}^3\!/_7\, \lambda_1^4 - 4 \,.\, {}^3\!/_9\, \lambda_1^6 \ldots$$

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{1+\lambda_1^2} = 1 - {}^3\!/_5\, \lambda_1^2 + {}^3\!/_7\, \lambda_1^4 - {}^3\!/_9\, \lambda_1^6 \ldots$$

Alsdann ist $M_1 = X \,.\, \mathfrak{S}_1 \qquad N_1 = Y \,.\, \mathfrak{T}_1$

Der Ort O liege auf der Oberfläche eines dem Ellipsoid E_1 confokalen Ellipsoids E von gleicher und gleichmässig vertheilter Dichtigkeit. Ihre gemeinsame Brennweite sei $= f$. Die Excentricität des Ellipsoids E sei ε, die Halbaxen seien a und b so ist

$$\lambda = \operatorname{tg} \varepsilon \qquad f = \lambda b = \lambda_1 b_1 \qquad f^2 = a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2$$

Zu dem Ort O auf der Oberfläche von E bestimmt man einen Ort o auf der Oberfläche von E_1 so dass beide einen gleichen elliptischen Winkel haben. Die von o auf die Axe und den Aequator gezogenen Lothe seien x und y so ist

$$\frac{X}{a} = \frac{x}{a_1} \qquad \frac{Y}{b} = \frac{y}{b_1}$$

So wie $M_1\ N_1$ die vom Ellipsoid E_1 auf den innern Ort O bewirkten Anziehungen sind, so seien M N die entsprechenden zu der Axe und dem Aequator senkrechten Anziehungen des Ellipsoids E auf den äussern Ort o.

Ivory fand aus Betrachtung der Integrale, dass unter den angezeigten Voraussetzungen die Anziehungen wie die Produkte der beiden Halbaxen sich verhalten, welche dem auf die Richtung der Anziehung senkrechten elliptischen Querschnitt angehören:

$$M = \frac{a\,b}{a_1\,b_1} M_1 = X \frac{a\,b}{a_1\,b_1} \mathfrak{S}_1 = x \frac{a\,a\,b}{a_1\,a_1\,b_1} \mathfrak{S}_1$$

$$N = \frac{a\,a}{a_1\,a_1} N_1 = Y \frac{a\,a}{a_1\,a_1} \mathfrak{T}_1 = y \frac{a\,a\,b}{a_1\,a_1\,b_1} \mathfrak{T}_1$$

Es sei also

$$\mathfrak{S} = \frac{r^3}{a_1\,a_1\,b_1} \mathfrak{S}_1 = \frac{\mathfrak{S}_1}{(1+\lambda_1^2)\,u_1^3}$$

$$\mathfrak{T} = \frac{r^3}{a_1\,a_1\,b_1} \mathfrak{T}_1 = \frac{\mathfrak{T}_1}{(1+\lambda_1^2)\,u_1^3}$$

so ist $M = x\,\dfrac{a^2 b}{r^3}\,\mathfrak{S}$, $N = y\,\dfrac{a^2 b}{r^3}\,\mathfrak{T}$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{u_1{}^3} - 2\,.\,{}^3/_5\,\frac{s^2}{u_1{}^5} + 3\,.\,{}^3/_7\,\frac{s^4}{u_1{}^7} - 4\,.\,{}^3/_9\,\frac{s^6}{u_1{}^9}$$

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{u_1{}^3} - {}^3/_5\,\frac{s^2}{u_1{}^5} + {}^3/_7\,\frac{s^4}{u_1{}^7} - {}^3/_9\,\frac{s^6}{u_1{}^9}$$

Die elliptischen Potentiale sind

$$\frac{1}{u_1{}^3} = 1 - \frac{3}{2}\,\widehat{\mathfrak{E}}_2^{(-3)} s^2 + \frac{3\,.\,9}{2\,.\,4}\,\widehat{\mathfrak{E}}_4^{(-3)} s^4 - \frac{3\,.\,11\,.\,13}{2\,.\,4\,.\,6}\,\widehat{\mathfrak{E}}_6^{(-3)} s^6 \ldots$$

$$\frac{1}{u_1{}^5} = 1 - \frac{5}{2}\,\widehat{\mathfrak{E}}_2^{(-5)} s^2 + \frac{5\,.\,11}{2\,.\,4}\,\widehat{\mathfrak{E}}_4^{(-5)} s^4 - \frac{5\,.\,13\,.\,15}{2\,.\,4\,.\,6}\,\widehat{\mathfrak{E}}_6^{(-5)} s^6 \ldots$$

$$\frac{1}{u_1{}^7} = 1 - \frac{7}{2}\,\widehat{\mathfrak{E}}_2^{(-7)} s^2 + \frac{7\,.\,13}{2\,.\,4}\,\widehat{\mathfrak{E}}_4^{(-7)} s^4 - \frac{7\,.\,15\,.\,17}{2\,.\,4\,.\,6}\,\widehat{\mathfrak{E}}_6^{(-7)} s^6 \ldots$$

u. s. w.

Wenn man diese elliptischen Potentiale in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ setzt und dabei die obigen Gleichungen zwischen den aufeinanderfolgenden elliptischen Indicialen berücksichtigt, so findet sich

$$\mathfrak{S} = 1 - \frac{3}{2}\,\overset{*}{c}_2\,s^2 + \frac{3\,.\,9}{2\,.\,4}\,\overset{*}{c}_4\,s^4 - \frac{3\,.\,11\,.\,13}{2\,.\,4\,.\,6}\,\overset{*}{c}_6\,s^6$$

$$\mathfrak{T} = 1 - \frac{3}{2}\,\frac{\widehat{c_3}}{c}\,s^2 + \frac{3\,.\,9}{2\,.\,4}\,\frac{\widehat{c_5}}{c}\,s^4 - \frac{3\,.\,11\,.\,13}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{\widehat{c_7}}{c}\,s^6$$

Ein kürzerer Weg zu diesen Ausdrücken zu gelangen ist in dem oben gedachten Aufsatz angezeigt, wo sie als einzelner Fall der allgemeinen Anziehung erscheinen, welche ein Rotationssphäroid von veränderlicher Dichtigkeit auf irgend einen äussern Ort ausübt.