

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI
TOIMETISED

УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

675

ТАНКЕ DEFORMEERUVA КЕНА
МЕННААНИКА

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

МАТЕМААТИКА- JA МЕННААНИКААЛАСЕИД ТÕИД
ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893. a. VIIRIK 675 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

ТАНКЕ DEFORMEERUVA КЕНА МЕННААНИКА
МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО
ТЕЛА

МАТЕМААТИКА- JA МЕННААНИКА-
ALASEID TÕID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
И МЕХАНИКЕ

ТАРТУ 1984

Redaktsioonikolleegium:

Ü. Lepik (esimees), L. Ainola, K. Soonets (vast. toimetaja), K. Kenk, M. Kilp,
Ü. Lumiste, E. Reimers, E. Tamme

Редакционная коллегия:

Ю. Лепик (председатель), Л. Айнола, К. Соонетс (отв. редактор), К. Кенк,
М. Кильп, Ю. Лумисте, Э. Реймерс, Э. Тамме

Настоящее издание является межвузовским сборником
высших учебных заведений Эст. ССР

НАПРЯЖЕНИЯ И СМЕЩЕНИЯ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКАХ ИЗ ЛИНЕЙНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА, АРМИРОВАННЫХ УПРУГИМИ КОЛЬЦАМИ

М. Хейнлоо

Тартуский государственный университет

Рассмотрим армированные диски, являющиеся наборами из N связанных между собой чередующихся одноосных упругих и вязкоупругих колец. Подобные конструкции, под действием внутреннего и внешнего давлений, рассматривались в работе [2], где были получены формулы для определения напряжений и смещений в случаях, когда $N=2$ и $N=3$. В данной работе аналогичные формулы выводятся для указанных конструкций в случае их вращения с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси и для произвольного значения N .

1. Введем безразмерные величины v_i :

$$r_i = \frac{\rho_i}{l}; \quad \sigma_{r_i} = \frac{(\sigma^{\circ r})_i}{\rho}; \quad \sigma_{\theta_i} = \frac{(\sigma^{\circ \theta})_i}{\rho}; \quad p_s = \frac{p^{\circ s}}{\rho}; \quad \omega^* = \frac{\gamma \omega^2 l^2}{\rho};$$

$$\alpha_{N+1} = \frac{a_{N+1}}{l}; \quad \alpha_i = \frac{a_i}{l}; \quad u_i = \frac{u^{\circ i}}{l}; \quad E_i = \frac{E^{\circ i}}{\rho}; \quad \gamma_i = \frac{\gamma^{\circ i}}{\gamma};$$

где ρ , l и γ — характерные давление, линейный размер и удельная плотность; $E^{\circ i}$ и v_i ($i=1, 2, \dots, N$) — модули Юнга и коэффициенты Пуассона; $(\sigma^{\circ r})_i$, $(\sigma^{\circ \theta})_i$ и $u^{\circ i}$ — компоненты напряжений и смещений; a_i — внутренние радиусы; a_{N+1} — внешний радиус; $p^{\circ s}$ ($s=2, 3, \dots, N$) — реактивные давления на поверхностях контакта колец; ρ_i — текущие радиусы, причем $\rho_i \in [a_i, a_{i+1}]$; $\gamma^{\circ i}$ — удельные плотности материалов; ω — угловая скорость.

Если все кольца упругие, то для диска с номером i (нумерация начинается от внутреннего радиуса армированного диска) справедливы следующие выражения для напряжений и смещений [2]:

$$(\sigma_r)_i = C_{1i} - C_{2i}r^{-2i} - \frac{1}{8} (3 + \nu_i) \omega^* \gamma_i r^{2i}; \quad (1.1)$$

$$(\sigma_\theta)_i = C_{1i} + C_{2i}r^{-2i} - \frac{1}{8} (1 + 3\nu_i) \omega^* \gamma_i r^{2i}; \quad (1.2)$$

$$u_i = r_i E^{-i} \left[C_{1i} (1 - \nu_i) + C_{2i} (1 + \nu_i) r^{-2i} - \frac{1}{8} (1 - \nu_i^2) \omega^* \gamma_i r^{2i} \right], \quad (1.3)$$

где при $p_1 = p_{N+1} = 0$

$$C_{1i} = \frac{\alpha^2_i p_i - \alpha^2_{i+1} p_{i+1}}{\alpha^2_{i+1} - \alpha^2_i} + \frac{1}{8} (3 + \nu_i) \omega^* \gamma_i (\alpha^2_{i+1} - \alpha^2_i);$$

$$C_{2i} = \frac{(p_i - p_{i+1}) \alpha^2_i \alpha^2_{i+1}}{\alpha^2_{i+1} - \alpha^2_i} + \frac{1}{8} (3 + \nu_i) \omega^* \gamma_i \alpha^2_i \alpha^2_{i+1}.$$

Пользуясь условиями $u_k(\alpha_{k+1}) = u_{k+1}(\alpha_{k+1})$, где $k = 1, 2, \dots, N-1$, получим для определения реактивных давлений p_j ($j = 2, 3, \dots, N$) следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$d_{1k} p_k + p_{k+1} + d_{2k} p_{k+2} = M_k, \quad (1.4)$$

где $p_1 = p_{N+1} = 0$;

$$d_{1k} = -2\alpha^2_k (\alpha^2_{k+2} - \alpha^2_{k+1}) S^{-1}_k,$$

$$d_{2k} = -2n_k \alpha^2_{k+2} (\alpha^2_{k+1} - \alpha^2_k) S^{-1}_{k+1}. \quad (1.5)$$

$$M_k = 0,25 \omega^* \gamma_{k+1} (\alpha^2_{k+2} - \alpha^2_{k+1}) (\alpha^2_{k+1} - \alpha^2_k) \{ [(3 + \nu_{k+1}) \alpha^2_{k+2} + (1 - \nu_{k+1}) \alpha^2_{k+1}] n_k - q_k [(3 + \nu_k) \alpha^2_k + (1 - \nu_k) \alpha^2_{k+1}] \} S^{-1}_k;$$

$$S_k = [(1 + \nu_k) \alpha^2_k + (1 - \nu_k) \alpha^2_{k+1}] (\alpha^2_{k+2} - \alpha^2_{k+1}) + [(1 + \nu_{k+1}) \alpha^2_{k+2} + (1 - \nu_{k+1}) \alpha^2_{k+1}] (\alpha^2_{k+1} - \alpha^2_k) n_k;$$

$$n_k = E_k \cdot E^{-1}_{k+1}; \quad q_k = \gamma_k \cdot \gamma^{-1}_{k+1}.$$

При построении решения для диска из линейного вязкоупругого материала, армированного упругими кольцами, в отличие от работы [2], будем пользоваться решением системы (1.4) в виде формул Крамера ([1], стр. 53)

$$p_{k+1, N} = \Delta_{k, N-1} \cdot \Delta^{-1}_{N-1}; \quad (k = 1, 2, \dots, N-1), \quad (1.6)$$

где

$$\Delta_{N-1} = \begin{vmatrix} 1 & d_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_{12} & 1 & d_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_{13} & 1 & d_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d_{1, N-1} & 1 \end{vmatrix}$$

а $\Delta_{k, N-1}$ получается из Δ_{N-1} путем замены k -го столбца столбцом правой части системы (1.4).

Заменяя в выражениях (1.1)–(1.6), согласно принципу Вольтерра ([4], стр. 101), часть величин v_i и E_i соответствующими упругими операторами v_i^* и E_i^* и расшифровывая полученные операторные выражения, получим решение соответствующей задачи для вращающегося диска из линейного вязкоупругого материала, армированного упругими кольцами.

2. Рассмотрим теперь вращающиеся диски, в которых упругие кольца чередуются с вязкоупругими. Пусть упругий оператор E^{*-1}_i имеет вид

$$E^{*-1}_i = E^{-1}_i (1 + \lambda_i K^*), \quad (2.1)$$

где K^* — интегральный оператор типа Вольтерра. Параметры λ_i принимают значение 1 в вязкоупругих слоях и значение 0 в упругих слоях. Если предполагать, что вязкоупругая среда сжимается упруго [2], т. е.

$$(1 - 2v_s^*) E^{*-1}_s = (1 - 2v_s) E^{-1}_s; \quad 0 < v_s < 0,5, \quad (2.2)$$

где индекс s соответствует вязкоупругому кольцу, и подставить (2.1) в (2.2) получим, что операторы v_i^* принимают следующий вид:

$$v_i^* = v_i \frac{1 + \lambda^0_i K^*}{1 + \lambda_i K^*}, \quad (2.3)$$

где $\lambda^0_i = \lambda_i / 2v_i$. После замены упругих констант E^{-1}_i и v_i упругими операторами (2.1) и (2.3) соответственно, вместо коэффициентов d_{1k} , d_{2k} и M_k , определенных выражениями (1.5), получим следующие:

$$\begin{aligned} d^*_{1k} &= d_{1k} \frac{1 + \lambda_k K^*}{1 + d_k K^*}, \\ d^*_{2k} &= d_{2k} \frac{1 + \lambda_{k+1} K^*}{1 + d_k K^*}, \\ M^*_k &= M_k \frac{1 + \xi_k K^*}{1 + d_k K^*}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} d_k &= -\lambda_k d_{1k} - \lambda_{k+1} d_{2k} + \frac{1}{2} (\alpha^2_{k+1} - \\ &- \alpha^2_k) (\alpha^2_{k+2} - \alpha^2_{k+1}) (\lambda_k - n_k \lambda_{k+1}) / S_k, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \xi_k &= 0,5 [n_k \lambda_{k+1} (7\alpha^2_{k+2} + \alpha^2_{k+1}) - q_k \lambda_k (7\alpha^2_k + \alpha^2_{k+1})] \cdot \\ &\cdot \{ [(3 + v_{k+1}) \alpha^2_{k+2} + (1 - v_{k+1}) \alpha^2_{k+1}] n_k - \\ &- q_k [(3 + v_k) \alpha^2_k + (1 - v_k) \alpha^2_{k+1}] \}^{-1}. \end{aligned}$$

Если считать, что в вязкоупругих кольцах имеет место равенство $v^*_s = v_s$, (см. [2]), то, после замены величин E_i^{-1} упругими операторами (2.1), вместо d_{1k} , d_{2k} , M_k получим также (2.4), где теперь

$$d_k = -\lambda_k d_{1k} - \lambda_{k+1} d_{2k} + (\alpha^{2_{k+2}} - \alpha^{2_{k+1}}) (\alpha^{2_{k+1}} - \alpha^{2_k}) [\lambda_k (1 - \nu_k) - n_k \lambda_{k+1} (1 - \nu_{k+1})] / S_k, \quad (2.6)$$

$$\xi_k = \{n_k \lambda_{k+1} [(3 + \nu_{k+1}) \alpha^{2_{k+2}} + (1 - \nu_{k+1}) \alpha^{2_{k+1}}] - q_k \lambda_k [(3 + \nu_k) \alpha^{2_k} + (1 - \nu_k) \alpha^{2_{k+1}}]\} \{n_k [(3 + \nu_{k+1}) \alpha^{2_{k+2}} + (1 - \nu_{k+1}) \alpha^{2_{k+1}}] - q_k [(3 + \nu_k) \alpha^{2_k} + (1 - \nu_k) \alpha^{2_{k+1}}]\}^{-1}.$$

С помощью (2.4) вместо (1.6) получим

$$P_{k+1, N} = \Delta^*_{k, N-1} \cdot \Delta^{*-1}_{N-1}; \quad (k=1, 2, \dots, N-1), \quad (2.7)$$

где Δ^*_{N-1} и $\Delta^*_{k, N-1}$ — полиномы, записанные в виде определителей, причем Δ^*_{N-1} имеет следующий вид:

$$\Delta^*_{N-1} = \begin{vmatrix} 1+d_1 K^* & d_{21}(1+\lambda_2 K^*) & 0 & 0 \\ d_{12}(1+\lambda_2 K^*) & 1+d_2 K^* & 0 & 0 \\ 0 & d_{13}(1+\lambda_3 K^*) & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & d_{2, N-3}(1+\lambda_{N-2} K^*) & 0 \\ 0 & 0 & 1+d_{N-2} K^* & d_{2, N-2}(1+\lambda_{N-1} K^*) \\ 0 & 0 & d_{1, N-1}(1+\lambda_{N-1} K^*) & 1+d_{N-1} K^* \end{vmatrix},$$

а $\Delta^*_{k, N-1}$ получается из Δ^*_{N-1} после замены k -го столбца столбцом

$$\begin{matrix} M_1(1+\xi_1 K^*) \\ M_2(1+\xi_2 K^*) \\ M_3(1+\xi_3 K^*) \\ \dots \\ M_{N-3}(1+\xi_{N-3} K^*) \\ M_{N-2}(1+\xi_{N-2} K^*) \\ M_{N-1}(1+\xi_{N-1} K^*). \end{matrix}$$

Заметим, что $\Delta^*_{11} = 1 + d_1 K^*$ и $\Delta^*_{11} = M_1(1 + \xi_1 K^*)$. Непосредственно можно убедиться в том, что

$$P_{22} = \frac{\Delta^*_{11}}{\Delta^*_1} = \frac{M_1(1+\xi_1 K^*)}{1+d_1 K^*} = M_1 [1 - (d_1 - \xi_1) R^*(-d_1)], \quad (2.8)$$

где $R^*(-d_1) = K^*(1 + d_1 K^*)^{-1}$ — резольвентный интегральный оператор для K^* (см. [4]). Таким образом, в случае армированного диска, состоящего из одного упругого и одного вязкоупругого кольца, реактивное давление между кольцами вычисляется по формуле (2.8).

Разлагая при $N \geq 3$ полиномы Δ^*_{N-1} и $\Delta^*_{k, N-1}$ на множители типа $1 - x_{j, N-1} K^*$ и $1 - x_{jk, N-1} K^*$ соответственно, находим:

$$P_{k+1, N} = \frac{\Delta_{k, N-1}}{\Delta_{N-1}} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{1 - x_{jk, N-1} K^*}{1 - x_{j, N-1} K^*}, \quad (2.9)$$

где $x_{j, N-1}$ и $x_{jk, N-1}$ — корни полиномов $D_{N-1}(x)$ и $D_{k, N-1}(x)$ соответственно. Полином $D_{N-1}(x)$, записанный в виде определителя, имеет следующий вид:

$$D_{N-1}(x) = \begin{vmatrix} x+d_1 & d_{21}(x+\lambda_2) & \dots & 0 & 0 \\ d_{12}(x+\lambda_2) & x+d_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_{13}(x+\lambda_3) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{2, N-3}(x+\lambda_{N-2}) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & x+d_{N-2} & d_{2, N-2}(x+\lambda_{N-1}) \\ 0 & 0 & \dots & d_{1, N-1}(x+\lambda_{N-1}) & x+d_{N-1} \end{vmatrix},$$

а $D_{k, N-1}(x)$ получается из $D_{N-1}(x)$ после замены k -го столбца столбцом

$$\begin{matrix} M_1(x+\xi_1) \\ M_2(x+\xi_2) \\ M_3(x+\xi_3) \\ \dots \\ M_{N-3}(x+\xi_{N-3}) \\ M_{N-2}(x+\xi_{N-2}) \\ M_{N-1}(x+\xi_{N-1}). \end{matrix}$$

Далее предположим, что параметры $v_1, v_2, \dots, v_N; n_1, n_2, \dots, n_{N-1}$ и a_1, a_2, \dots, a_{N+1} имеют следующие границы:

$$0 < v_i < 0,5; \quad 0 < n_k < \infty; \quad 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{N+1} < \infty. \quad (2.10)$$

Отметим, что из (1.5) и (2.10) следует неравенство

$$0 < d_{1k} d_{2k} < 1. \quad (2.11)$$

Кроме этого, из (2.5), (2.6) и (2.10) получим, что для армированных дисков, в которых упругие кольца чередуются с вязкоупругими кольцами, имеем:

$$0 < d_k < 1. \quad (2.12)$$

Пользуясь теоремой Лапласа ([1], стр. 51), для $D_{N-1}(x)$ получим выражение:

$$D_{N-1}(x) = (x+d_{N-1})D_{N-2}(x) - d_{1, N-1}d_{2, N-2}(x+\lambda_{N-1})^2 D_{N-3}(x), \quad (2.13)$$

где $D_1(x) = x + d_1$ и $D_0(x) = 1$. С помощью неравенств (2.11) и (2.12) легко убедиться, что $D_2(-d_1), D_2(-d_2) < 0$ и $D_2(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, корни x_{12} и x_{22} полинома $D_2(x)$ имеют следующие границы:

$$x_{12} < \min(-d_1, -d_2), \quad \max(-d_1, -d_2) < x_{22}, \quad (2.14)$$

если считать, что $x_{12} < x_{22}$. Поскольку из (2.13) следует, что для $m = 1, 2, \dots, N-2$ и $N \geq 4$ имеем

$(-1)^{N-1+m} D_{N-1}(x_{m, N-2}) > 0$ и $D_{N-1}(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, а также $D_{N-1}(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, если $N-1$ — четное число и $D_{N-1}(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$, если $N-1$ — нечетное число, то корни $x_{1, N-1}, x_{2, N-2}, \dots, x_{N-1, N-1}$ полинома $D_{N-1}(x)$ имеют следующие границы: $x_{1, N-1} < x_{1, N-2}; x_{N-2, N-2} < x_{N-1, N-1}$ и $x_{q-1, N-2} < x_{q, N-1} < x_{q, N-2}$, где $q = 2, 3, \dots, N-2$, если считать, что $x_{1, N-1} < x_{2, N-1} < \dots < x_{N-1, N-1}$. Таким образом доказано, что корни полинома $D_{N-1}(x)$ вещественны и не равны между собой. Кроме этого, установлены границы этих корней.

В работе [5] доказана формула:

$$\prod_{k=1}^n \frac{1 - \lambda_k K^*}{1 - \alpha_k K^*} = 1 + \sum_{j=1}^n A_{jn} R^*(\alpha_j), \quad (2.15)$$

где $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$ и $n \geq 2$, а при $j \neq m$

$$A_{jn} = \prod_{k=1}^n (\alpha_j - \lambda_k) \prod_{m=1}^n (\alpha_j - \alpha_m)^{-1}, \quad (2.16)$$

и $R^*(\alpha_j) = K^*(1 - \alpha_j K^*)^{-1}$ — резольвентный интегральный оператор для K^* (см. [3]).

С помощью формулы (2.15) из (2.9) при $N \geq 3$ получим

$$P_{k+1, N} = \frac{\Delta_{k, N-1}}{\Delta_{N-1}} \left[1 + \sum_{j=1}^{N-1} A_{jk, N-1} R^*(x_{j, N-1}) \right], \quad (2.17)$$

где при $j \neq m$

$$A_{jk, N-1} = \prod_{i=1}^{N-1} (x_{j, N-1} - x_{ik, N-1}) \prod_{m=1}^{N-1} (x_{j, N-1} - x_{m, N-1})^{-1}.$$

Заметим, что при $j \neq m$

$$\begin{aligned} \Delta_{N-1} \prod_{m=1}^{N-1} (x_{j, N-1} - x_{m, N-1}) &= D'_{N-1}(x_{j, N-1}), \\ \Delta_{k, N-1} \prod_{i=1}^{N-1} (x_{j, N-1} - x_{ik, N-1}) &= D_{k, N-1}(x_{j, N-1}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где штрих означает производную по x . Пользуясь выражениями (1.6) и (2.18), формуле (2.17) можно придать окончательный вид:

$$P_{k+1, N} = p_{k+1, N} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{D_{k, N-1}(x_{j, N-1})}{D'_{N-1}(x_{j, N-1})} R^*(x_{j, N-1}). \quad (2.19)$$

Следует отметить, что формула (2.19) не содержит корней полиномов $D_{k, N-1}(x)$. Таким образом, необходимость их вычисления отпадает.

Отметим здесь также, что в работе [2] были найдены формулы для определения реактивных давлений, аналогичные формулам (2.8) и (2.18), в армированных дисках, состоящих из двух или трех чередующихся упругих и вязкоупругих колец, нагруженных внутренним и внешним давлениями.

В работе [5] доказана формула:

$$\prod_{k=1}^n \frac{x - \lambda_k}{x - \alpha_k} = 1 + \sum_{j=1}^n A_{jn} \frac{1}{x - \alpha_j}, \quad (2.20)$$

где $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$; $n \geq 2$ и A_{jn} определяются выражениями (2.16). Так как

$$\frac{D_{h, N-1}(x)}{D_{N-1}(x)} = \frac{\Delta_{h, N-1}}{\Delta_{N-1}} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{x - x_{jk, N-1}}{x - x_{j, N-1}}, \quad (2.21)$$

где $x_{j, N-1}$ и $x_{jk, N-1}$ — корни полиномов $D_{N-1}(x)$ и $D_{h, N-1}(x)$ соответственно. С помощью формул (1.6), (2.20) и (2.18) из (2.21) получим

$$\frac{D_{h, N-1}(x)}{D_{N-1}(x)} = p_{h+1, N} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{D_{h, N-1}(x_{j, N-1})}{D'_{N-1}(x_{j, N-1})} \cdot \frac{1}{x - x_{j, N-1}},$$

откуда находим:

$$\frac{D_{h, N-1}(0)}{D_{N-1}(0)} = p_{h+1, N} - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{D_{h, N-1}(x_{j, N-1})}{x_{j, N-1} D'_{N-1}(x_{j, N-1})}. \quad (2.22)$$

Если K^* — интегральный оператор Абеля, то справедлива формула (см. [4], стр. 37

$$R^*(z) \cdot 1 \approx -z^{-1} [1 - \exp(zt^*)]. \quad (2.23)$$

Здесь $t^* = [(1 + \alpha)\tau]^{(1+\alpha)}$, где $-1 < \alpha < 0$ и τ — время. С помощью выражений (2.22) и (2.23) из (2.19) находим формулу:

$$P_{h+1, N} \approx \frac{D_{h, N-1}(0)}{D_{N-1}(0)} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{D_{h, N-1}(x_{j, N-1})}{x_{j, N-1} D'_{N-1}(x_{j, N-1})} \exp(x_{j, N-1} t^*). \quad (2.24)$$

Эта формула имеет место при $N \geq 3$. Если $N = 2$, то из (2.8) и (2.23) получим непосредственно

$$P_{22} \approx M_1 [\xi_1/d_1 + (1 - \xi_1/d_1) \exp(-d_1 t^*)]. \quad (2.25)$$

Подставляя (2.8) или (2.19) в (1.1) и (1.2) вместо p_j ($j = 2, 3, \dots, N$), получим формулы для определения напряжений в каждом кольце. Аналогично из (1.3) находим выражения для определения смещений в упругих кольцах. Формулы для определения смещений в вязкоупругих кольцах можно найти из (1.3) после замены p_j выражениями (2.19) и применения следующей формулы умножения:

$$K^* R^*(x_{j, N-1}) = -[K^* - R^*(x_{j, N-1})]/x_{j, N-1}$$

в справедливости которой можно убедиться непосредственно. Поскольку эти формулы представляют малый интерес, их выражения здесь не приводятся.

В работах [2, 3] было установлено, что предположения (2.2) и $v^*_s = v_s$ (индекс s соответствует вязкоупругому кольцу) приводят со временем к качественно различным напряженным состояниям. Из (2.5), (2.6), (2.24) и (2.26) следует, что указан-

ного явления в случае вращающихся армированных дисков не наблюдается.

В заключение заметим, что при выборе механических характеристик материалов и геометрических размеров колец так, чтобы выполнялись условия $d_1' = \xi_1$ или $x_{j,N-1} = \xi_j$ ($j = 1, 2, \dots, N-1$) из (2.8) и (2.19) имеем: $P_{22}' = M_1$ и $P_{k+1,N} = p_{k+1,N}$, и реактивные давления в вязкоупругих дисках, армированных упругими кольцами, не изменяются со временем.

Литература

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Москва, 1968.
2. Немировский Ю. В., Хейнлоо М. Л. Напряженное состояние в многослойных сферических сосудах, цилиндрических трубах и круглых дисках из линейного вязкоупругого материала. — Мех. полимеров, 1973, № 1, 110—116.
3. Немировский Ю. В., Хейнлоо М. Л. Напряженное состояние в многослойных цилиндрических трубах из упруго сжимаемого нелинейного вязкоупругого материала. — Мех. полимеров, 1974, № 1, 66—74.
4. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва, 1977.
5. Хейнлоо М. Л. Алгебра дробно-рациональных функций и ее применение в задачах вязкоупругости. — Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 187, 64—71.

Поступило
15 I 1979

STRESSES AND DISPLACEMENTS IN THE VISCOELSTIC ROTATING DISKS, REINFORCED WITH ELASTIC RINGS

M. Heinloo

Summary

This work deals with the disks, consisting of an arbitrary number of con-joint uniaxial elastic and viscoelastic rings, examined. For similar disks the formulas for determination stresses and displacements are found out, when these disks are rotating with constant angular velocity around their axes.

К АЛГЕБРЕ РЕЗОЛЬВЕНТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИМЕНЯЕМОЙ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

М. Хейнлоо

Тартуский государственный университет

Алгебра резольвентных интегральных операторов делает принцип Вольтерра весьма эффективным средством для построения решений конструктивно-неоднородным или анизотропным конструкциям с вязкоупругими элементами [1—4]. Современное состояние этой алгебры отражено в монографиях [3, 4]. В данной работе дается дальнейшее развитие указанной алгебры.

Известно, что резольвентный интегральный оператор, соответствующий интегральному оператору Вольтерра K , может быть представлен в виде следующей рациональной дроби ([4], стр. 22)

$$\frac{K}{1 - \lambda K}, \quad (1)$$

где λ — произвольный параметр. Кроме дроби (1), рассмотрим еще дробь

$$\frac{1}{x - \lambda}, \quad (2)$$

где x — некоторая переменная.

Пусть $R(\lambda)$ обозначает, как дробь (1) (резольвентный интегральный оператор), так и дробь (2).

Для $R(\lambda)$ справедлива известная формула Работнова ([4], стр. 29)

$$R(\lambda)R(\alpha) = \frac{R(\lambda) - R(\alpha)}{\lambda - \alpha}; \quad \lambda \neq \alpha \quad (3)$$

Обобщением формулы (3) является формула Розовского [5]:

$$\prod_{k=1}^n R(\alpha_k) = \sum_{j=1}^n B_j^n R(\alpha_j); \quad \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n, \quad (4)$$

$$B^n_j = \prod_{m=1}^n (\alpha_j - \alpha_m)^{-1}; \quad j \neq m.$$

Доказательство формулы (4) для $R(\lambda)$ легко восстанавливается, пользуясь доказательством соответствующей формулы для Э-операторов работы [5]. При этом отметим, что в справедливости нетривиального равенства

$$\sum_{j=1}^{t-1} B^t_j = -B^t_t, \quad (5)$$

оставшимся в работе [5] недоказанным, легко убедиться. Для этого заметим сначала, что

$$\sum_{j=1}^{t-1} B^t_j = - \sum_{j=1}^{t-1} B^{t-1}_j \frac{1}{\alpha_t - \alpha_j}.$$

Далее, из формулы (4), записанной для дроби (2) при $n = t - 1$ и $x = \alpha_t$, получим

$$\sum_{j=1}^{t-1} B^{t-1}_j \frac{1}{\alpha_t - \alpha_j} = \prod_{k=1}^{t-1} \frac{1}{\alpha_t - \alpha_k} = B^t_t,$$

откуда и следует равенство (5).

Записывая формулу (3) в виде:

$$\frac{R(\alpha)}{R(\lambda)} = 1 + (\alpha - \lambda)R(\alpha), \quad (6)$$

получим формулу деления для $R(\lambda)$.

Пользуясь формулами (3) и (6), докажем теперь следующую формулу:

$$\prod_{k=1}^n \frac{R(\alpha_k)}{R(\lambda_k)} = 1 + \sum_{j=1}^n A^n_j R(\alpha_j), \quad (7)$$

где $n \geq 2$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$, а при $j \neq m$

$$A^n_j = \prod_{k=1}^n (\alpha_j - \lambda_k) \prod_{m=1}^n (\alpha_j - \alpha_m)^{-1}. \quad (8)$$

В справедливости формулы (7) можно убедиться методом математической индукции. С помощью формул (3) и (6) нетрудно установить, что формула (7) имеет место при $n = 2$. Пусть формула (7) имеет место при $n = t - 1 \geq 2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^t \frac{R(\alpha_k)}{R(\lambda_k)} &= \frac{R(\alpha_t)}{R(\lambda_t)} \prod_{k=1}^{t-1} \frac{R(\alpha_k)}{R(\lambda_k)} = \\ &= [1 + (\alpha_t + \lambda_t)R(\alpha_t)] \left[1 + \sum_{j=1}^{t-1} A^{t-1}_j R(\alpha_j) \right] = \end{aligned}$$

$$= \left[1 + \sum_{j=1}^{t-1} A^t_j R(\alpha_j) \right] + (\alpha_t - \lambda_t) \left[1 + \sum_{j=1}^{t-1} A^{t-1}_j (\alpha_t - \alpha_j)^{-1} \right] R(\alpha_t) =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^t A^t_j R(\alpha_j),$$

ибо из формулы (7), записанной для дроби (2), при $n = t - 1$ и $x = \alpha_t$ следует равенство:

$$1 + \sum_{j=1}^{t-1} A^{t-1}_j (\alpha_t - \alpha_j)^{-1} = \prod_{k=1}^{t-1} (\alpha_t - \lambda_k) (\alpha_t - \alpha_k)^{-1} = A^t_t (\alpha_t - \lambda_t)^{-1}.$$

Отметим, что формула (7) в случае дроби (2) была, по-видимому, впервые приведена в работе [2], где она сыграла важную роль при построении решения для многослойного цилиндра с упругими и вязкоупругими слоями. Для резольвентных интегральных операторов формула (7) ранее, по-видимому, не была известна.

Формула (7) позволяет вывести ряд новых формул, например, следующую:

$$\prod_{k=1}^n \frac{1 + \alpha_k R(\beta_k)}{1 + \mu_k R(\lambda_k)} = 1 + \sum_{j=1}^n D^n_j R(\beta_j) + \sum_{j=1}^n E^n_j R(\lambda_j - \mu_j); \quad (9)$$

где $n \geq 2$ и $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \dots \neq \beta_n \neq \lambda_1 - \mu_1 \neq \lambda_1 - \mu_2 \neq \dots \neq \lambda_n - \mu_n$, а

$$D^n_j = \prod_{k=1}^n \frac{(\beta_j - \lambda_k) (\beta_j - \beta_k + \alpha_k)}{\beta_j - \lambda_k + \mu_k} \prod_{m=1}^n (\beta_j - \beta_m)^{-1}; \quad j \neq m;$$

$$E^n_j = \prod_{k=1}^n \frac{(\lambda_j - \mu_j - \lambda_k) (\lambda_j - \mu_j - \beta_k + \alpha_k)}{\lambda_j - \mu_j - \beta_k} \prod_{m=1}^n (\lambda_j - \mu_j - \lambda_m + \mu_m)^{-1}.$$

Если $n = 1$, то вместо формулы (9) следует пользоваться формулой, приведенной в монографии ([4] стр. 30) для Э-операторов и которая для $R(\lambda)$ записывается в виде:

$$\frac{1 + \alpha_1 R(\beta_1)}{1 + \mu_1 R(\lambda_1)} = 1 + \frac{\alpha_1 (\beta_1 - \lambda_1)}{\beta_1 - \lambda_1 + \mu_1} R(\beta_1) +$$

$$+ \frac{\mu_1 (\beta_1 - \lambda_1 + \mu_1 - \alpha_1)}{\beta_1 - \lambda_1 + \mu_1} R(\lambda_1 - \mu_1). \quad (10)$$

$$\beta_1 \neq \lambda_1 - \mu_1.$$

В справедливости формул (9) и (10) нетрудно убедиться с помощью формулы (7), если заметить, что

$$\frac{1 + \alpha_k R(\beta_k)}{1 + \mu_k R(\lambda_k)} = \frac{R(\beta_k) R(\lambda_k - \mu_k)}{R(\lambda_k) R(\beta_k - \alpha_k)}.$$

В частных случаях из формулы (9) можно получить еще ряд формул, полезных при вычислениях. Так, например, в случае, когда $\mu_k = 0$, из (9) получим, что

$$\prod_{k=1}^n [1 + \alpha_k R(\beta_k)] = 1 + \sum_{j=1}^n C^n_j R(\beta_j),$$

где $n \geq 2$ и $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \dots \neq \beta_n$, а при $j \neq m$

$$C^n_j = \prod_{k=1}^n (\beta_j - \beta_k + \alpha_k) \prod_{m=1}^n (\beta_j - \beta_m)^{-1}.$$

Если $\alpha_k = 0$, то из (9) следует формула

$$\prod_{k=1}^n [1 + \mu_k R(\lambda_k)]^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^n G^n_j R(\lambda_j - \mu_j),$$

где $n \geq 2$ и $\lambda_1 - \mu_1 \neq \lambda_2 - \mu_2 \neq \dots \neq \lambda_n - \mu_n$, а при $j \neq m$

$$G^n_j = \prod_{k=1}^n (\lambda_j - \mu_j - \lambda_k) \prod_{m=1}^n (\lambda_j - \mu_j - \lambda_m + \mu_m)^{-1}.$$

В случае, когда $\beta_k = \lambda_k$ из (9) получим следующую формулу:

$$\prod_{k=1}^n \frac{1 + \alpha_k R(\lambda_k)}{1 + \mu_k R(\lambda_k)} = 1 + \sum_{j=1}^n H^n_j R(\lambda_j - \mu_j),$$

где $n \geq 2$ и $\lambda_1 - \mu_1 \neq \lambda_2 - \mu_2 \neq \dots \neq \lambda_n - \mu_n$, а при $j \neq m$

$$H_j = \prod_{k=1}^n (\lambda_j - \mu_j - \lambda_k + \alpha_k) \prod_{m=1}^n (\lambda_j - \mu_j - \lambda_m + \mu_m)^{-1}.$$

Рассмотрим теперь вычисление следующего выражения

$$\left[1 - \sum_{k=1}^n \Theta_k R(\lambda_k) \right]^{-1}. \quad (11)$$

В случае, когда $n = 1$ для (11) имеем:

$$[1 - \Theta_1 R(\alpha_1)]^{-1} = 1 + \Theta_1 R(\alpha_1 + \Theta_1). \quad (12)$$

Хотя формула (12) доказана в монографиях ([3] стр. 130) и ([4] стр. 29), отметим, что в ее справедливости можно убедиться и с помощью формулы (6)

$$[1 - \Theta_1 R(\alpha_1)]^{-1} = R(\Theta_1 + \alpha_1) R^{-1}(\alpha_1) = 1 + \Theta_1 R(\alpha_1 + \Theta_1).$$

Для вычисления (11) в случае, когда $n \geq 2$, можно пользоваться формулой, приведенной в монографиях ([3, 4]) для Э-операторов и которая для $R(\lambda)$ записывается в виде:

$$\left[1 - \sum_{k=1}^n \Theta_k R(\lambda_k) \right]^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^n M_j R(\alpha_j), \quad (13)$$

если $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$.

Предполагая, что $\Theta_k \neq 0$ в монографиях ([3] стр. 130) и ([4] стр. 38) показано, что в (13) величины α_j следует считать корнями уравнения

$$1 - \sum_{j=1}^n \Theta_j (\alpha - \lambda_j)^{-1} = 0 \quad (14)$$

и коэффициенты M_j — решением системы линейных уравнений:

$$1 + \sum_{j=1}^n M_j (\lambda_k - \alpha_j)^{-1} = 0; \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Заметим, что, принимая в формуле (7) в случае дроби (2) $x = \lambda_k$, имеем:

$$1 + \sum_{j=1}^n A^n_j (\lambda_k - \alpha_j)^{-1} = 0,$$

откуда следует, что A^n_j — решение системы алгебраических уравнений (15). Таким образом, в (13) следует принять

$$M_j = A^n_j.$$

В справедливости формулы (13) можно убедиться также, если привести выражение разность в (11) к общему знаменателю, а затем разложить в полученной дроби полином в числителе на множители $1 - \lambda_k x$. В результате этих операций получим:

$$\left[1 - \sum_{k=1}^n \Theta_k R(\lambda_k) \right]^{-1} = \prod_{k=1}^n \frac{R(\alpha_k)}{R(\lambda_k)}, \quad (16)$$

где λ_k являются при $j \neq m$ корнями уравнения

$$\prod_{k=1}^n (\alpha - \lambda_k) - \sum_{j=1}^n \Theta_j \prod_{m=1}^n (\alpha - \lambda_m) = 0. \quad (17)$$

В случае, когда корни уравнения (17) различные, формула (13), в которой $M_j = A^n_j$, следует из (7) и (16).

Если в уравнении (17) имеем $\Theta_j \neq 0$, то это уравнение может быть представлено в виде (14). В монографии ([4], стр. 39) показано, что при $\Theta_j > 0$ корни уравнений (14) и (17) различные, а при $\Theta_j > 0$ и $\alpha_k < 0$ эти корни различные и отрицательные. Если $\Theta_j = 0$ при некотором значении индекса j , то из (17) получим, что $\alpha = \lambda_j$ и из формулы (8) следует, что и $A^n_j = 0$.

Пользуясь формулами (4) и (13), легко показать, что имеет место формула

$$\left[1 - \kappa \prod_{k=1}^n R(\lambda_k) \right]^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^n A^n_j R(\alpha_j),$$

если $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$, где α_j — корни уравнения

$$\prod_{k=1}^n (\alpha - \lambda_k) - \kappa \sum_{j=1}^n B^n_j \prod_{m=1}^n (\alpha - \lambda_m) = 0 \quad (18)$$

при $j \neq m$. Заметим, что из формулы (4), записанной для дроби (2) при $x = \alpha$ и $\lambda_m = \alpha_m$, а при $j \neq m$

$$\sum_{j=1}^n B^n_j \prod_{m=1}^n (\alpha - \lambda_m) = 1$$

и уравнение (18) принимает следующий вид:

$$\prod_{k=1}^n (\alpha - \lambda_k) - \kappa = 0.$$

Рассмотрим теперь формулу, доказанную Розовским в работе [5] для Э-операторов и которая для $R(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$\left[1 - \sum_{n=1}^s \kappa_n \prod_{k=1}^n R(\lambda_k) \right]^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^s M_j R(\alpha_j), \quad (19)$$

если $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$, где α_j — корни уравнения (17), где Θ_j теперь вычисляются по формуле

$$\Theta_j = \sum_{k=j}^s \kappa_k B^k_j. \quad (20)$$

Здесь следует принять $B^1_1 = 1$ и

$$B^k_j = \prod_{m=1}^k (\lambda_j - \lambda_m)^{-1}; \quad j \neq m.$$

Отметим, что в работе [5], а также в монографиях ([3] стр. 131) и ([4] стр. 44) для Θ_j в случае формулы (19) даны неправильные выражения. В работах ([3] стр. 131), ([4] стр. 44) и [5] имеются также одинаковые опечатки в системе уравнений, из которой следует найти коэффициент M_j . Этот коэффициент определяется из системы (15). Следовательно, в (19) нужно принять $M_j = A^n_j$. Отметим еще, что формулы, справедливые для $R(\lambda)$, будут справедливыми и для

$$P(\beta) = \frac{R(\lambda)}{1 - \beta R(\lambda)} = R(\beta + \lambda).$$

В качестве иллюстрации применения алгебры резольвентных интегральных операторов может служить, например, работа [2].

Литература

1. Немировский Ю. В. Уравнения изгиба и устойчивости армированных оболочек и пластин из вязкоупругого материала. — В сб.: Динамика сплош. среды. Вып. 4. Новосибирск, 1970, 50—63.
2. Немировский Ю. В., Хейнлоо М. Л. Напряженное состояние в многослойных цилиндрических трубах из упруго сжимаемого вязкоупругого материала. — Мех. полимеров, 1974, № 1, 66—74.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва, 1966.
4. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва, 1977.
5. Розовский М. И. Некоторые свойства специальных операторов, применяемых в теории ползучести. — Прикл. мат. и мех., 1959, 23, № 5, 978—980.

Поступило
23 III 1979

TO THE ALGEBRA OF RESOLVENT INTEGRAL OPERATORS, APPLIED IN THE THEORY OF LINEAR VISCOELASTICITY

M. Heinloo

Summary

In this work some essential additions to the proofs of the earlier proved formulas are made. In addition to this there have been new formulas created to be applied in finding solutions to constructive — nonhomogeneous or anisotropic constructions.

О ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ КРУЧЕНИИ

Т. Лийва

Таллинский политехнический институт

Рассмотрим тонкую упругую оболочку вращения отрицательной гауссовой кривизны, заделанную жестко на одном торце и подвергающуюся действию скручивающей пары M на другом торце (фиг. 1). В качестве координат на срединной поверхности возьмем длину дуги образующей s и угол φ в окружном направлении. Пусть оболочка замкнута в окружном направлении и ог-

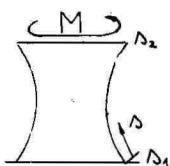


Рис. 1

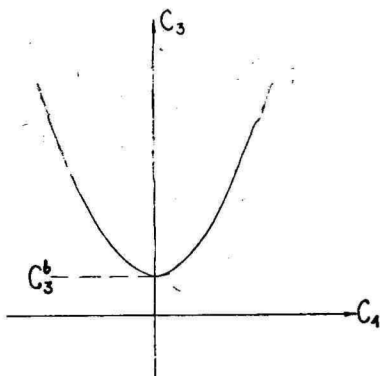


Рис. 2

раничена двумя параллелями $s = s_1$ и $s = s_2$. Начальное напряженное состояние предполагается осесимметричным и безмоментным. Известно [4], что в случае типичных конструктивных материалов геометрическая и физическая нелинейность дают в тангенциальных направлениях упругого элемента эффекты оди-

накового порядка. Отметим также техническую сложность таких задач и тот факт, что геометрически и физически нелинейная теория оболочек вращения при неосесимметричной деформации в литературе фактически отсутствует.

В данной статье исследуем кручение оболочки только в геометрически нелинейной постановке «в нетангенциальном направлении», т. е. рассматриваем изменение параметра нагрузки лишь в зависимости от прогибов оболочки. Геометрически нелинейная постановка задачи основывается на положении, что оболочки отрицательной гауссовой кривизны теряют свою устойчивость при значительно меньших нагрузках, чем остальные оболочки, т. е. оболочки отрицательной кривизны можем считать значительно менее жесткими в отношении внешних нагрузок. Это дает основание считать геометрическую нелинейность в рассматриваемой статье основной. Указанная постановка задачи находит подтверждение и в экспериментальной работе [6], где при сжатии и внутреннем давлении гиперболических оболочек пластические деформации не были обнаружены.

§ 1. Использование энергетического метода

Учитывая условия закрепления жесткой заделки краев (1.3) и (1.4) и результаты статьи [3], компоненты перемещений при неосесимметричной потере устойчивости u , v , w принимаем в следующем виде:

$$\begin{aligned} u &= C_1 \left| \frac{R_2}{R_1} \right|^{1/2} v_1^*(s) \sin \psi + \frac{1}{4} C_2 |\alpha| B v_2^*(s) \sin 2\psi, \\ v &= C_1 v_1^*(s) \sin \psi + \frac{1}{4} C_2 v_2^*(s) \sin 2\psi + C_3 \cdot N(s), \\ w &= C_1 m \frac{R_2}{B} v_1^*(s) \cos \psi + C_2 m \frac{R_2}{B} v_2^*(s) \cos^2 \psi. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь C_1 , C_2 , C_3 — варьируемые параметры, подлежащие определению,

$$v_1^*(s) = v_2^*(s) = \left| \frac{B}{R_2 \alpha} \right|^{1/2} x(s) = v^*(s); \quad x(s) = \sin a(s - s_2);$$

$$a = \frac{\pi}{s_2 - s_1}; \quad |\alpha| = \frac{1}{B} \left| \frac{R_2}{R_1} \right|^{1/2}; \quad N(s) = B \int_{s_1}^s \frac{ds}{B^3},$$

$$\Psi = \psi(s, \varphi) = m(\varphi - \varphi_0) - m \int_{s_1}^s |\alpha| ds;$$

$B = B(s)$ — расстояние точки срединной поверхности до оси вращения; R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны оболочки.

Вторые члены со множителем C_2 удовлетворяют линейным уравнениям равновесия оболочки, полученным после проектирования всех внутренних усилий оболочки на тангенциальные направления, причем член

$$C_2 m \frac{R_2}{B} v_2^*(s) \cos^2 \psi$$

отражает тенденцию оболочки выпучиваться внутрь. Член $C_3 N(s)$ в аппроксимации (1.1) соответствует начальному осесимметричному перемещению в окружном направлении.

Без ограничения общности считаем

$$R_1 < 0, \quad R_2 > 0. \quad (1.2)$$

Пусть на нижний неподвижный край оболочки ($s = s_1$) наложены условия жесткой заделки

$$\begin{aligned} u(s_1) &= 0, & w(s_1) &= 0, \\ v(s_1) &= 0, & \frac{\partial w}{\partial s}(s_1) &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

и на ее верхний край ($s = s_2$) — следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u(s_2) &= 0, & \frac{\partial w}{\partial s}(s_2) &= 0, \\ w(s_2) &= 0, & T_{12}^0(s_2) &= T_{12}(s_2), \end{aligned} \quad (1.4)$$

которые под действием суммы скручивающих сил

$$T_{12}^0 = \frac{\beta}{B^2}, \quad \beta = \frac{M}{2\pi},$$

допускают кручение контура верхнего края оболочки.

Варьирование полной энергии оболочки \mathcal{E} по параметрам перемещений позволяет определить зависимость между нагрузкой и этими параметрами. В соответствии с числом варьируемых параметров C_1 , C_2 и C_3 получаем три уравнения метода Ритца:

$$\begin{aligned} C_1^3 m^8 \frac{3}{4} b_1 + C_1 C_2^2 m^8 \frac{3}{2} b_1 - C_1 C_2 m^5 b_2 - \\ - C_1 C_3 m^4 \cdot 2(1 - \nu) b_4 + C_1 \cdot 8(1 - \nu^2) b_5 + \\ + C_1 \frac{1}{6} h^2 m^6 b_6 = 0, \\ C_1^2 C_2 m^8 \frac{3}{2} b_1 - C_1^2 m^5 \frac{1}{2} b_2 + C_2^3 m^8 \frac{3}{4} b_1 - C_2^2 m^5 \frac{3}{2} b_2 + \\ + C_2 m^2 b_3 - C_2 C_3 \cdot 2(1 - \nu) m^4 b_4 + \\ + C_2 h^2 m^6 \frac{2}{3} b_6 = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$C_1^2 m^4 (1 - \nu) b_4 + C_2^2 (1 - \nu) m^4 b_4 + \\ + 2 \left[2(1 + \nu) \frac{\beta}{Eh} - C_3 \right] \frac{(1 - \nu)}{(s_2 - s_1)} \frac{N(s_2)}{B(s_2)} = 0,$$

где ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; h — толщина оболочки;

$$b_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{R_2^4}{B^7} \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right)^2 \cdot v^{*4}(s) ds;$$

$$b_2 = \int_{s_1}^{s_2} v^{*3}(s) \frac{R_2^2}{B^4} \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) ds;$$

$$b_3 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{v^{*2}(s)}{B} \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} + 2\nu \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) ds;$$

$$b_4 = \int_{s_1}^{s_2} v^{*4}(s) |\alpha| \frac{R_2^2}{B^4} ds;$$

$$b_5 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{|\alpha| R_1^2 B^4}{R_2 (R_1 - R_2)^2} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 ds;$$

$$b_6 = \int_{s_1}^{s_2} v^{*2}(s) \frac{R_2^2}{B^5} \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right)^2 ds;$$

При аппроксимации начальных перемещений, вызываемых кручением, предположено, что

$$C_3 = 2(1 + \nu) \frac{\beta}{Eh}. \quad (1.6)$$

Такой же результат вытекает и из последнего уравнения системы (1.5) при $C_1 = C_2 = 0$.

Двумерная зависимость на $C_1 C_3$ -плоскости по первому уравнению системы (1.5) представлена на фиг. 2, где его тривиальное решение представлено как линия, совпадающая с ординатной осью. Здесь

$$C_3^b = \frac{48(1 - \nu^2) b_5 + h^2 m^6 b_6}{12(1 - \nu) m^4 b_4}. \quad (1.7)$$

Точка $C_3 = C_3^b$ является точкой разветвления, и формула (1.7) для ее вычисления точно совпадает с формулой верхней критической точки при потере устойчивости по линейной теории [3].

Теперь рассматриваем задачу в упрощенном виде, где множитель C_3 берется в качестве параметра нагрузки и не подвер-

нется варьированию. Зададим верхней критической нагрузке приращение Δ следующим образом:

$$C_3 m^4 \cdot 2(1-\nu) b_4 = 8(1-\nu^2) b_5 + \frac{1}{6} h^2 m^6 b_6 + \Delta, \quad (1.8)$$

и выразим множитель C_2 через параметр n соотношением

$$C_2 = m^{-3} \frac{b_2}{b_1} n. \quad (1.9)$$

После элементарных преобразований получим

$$\Delta \cdot m^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3} - n \right) \frac{b_1}{b_2^2} = -\frac{9}{4} n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \delta \cdot n, \quad (1.10)$$

где параметр

$$\delta = \frac{b_1 b_3}{b_2^2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} m^4 h^2 \frac{b_1 b_6}{b_2^2} - 8m^{-2} (1-\nu^2) \frac{b_1 b_5}{b_2^2} \quad (1.11)$$

характеризует геометрию оболочки. Из результата (1.10) следует, что при выполнении условия

$$\delta \geq 0 \quad (1.12)$$

всегда имеют место неравенства

$$\Delta \geq 0, \quad 0 \leq n < 2/3. \quad (1.13)$$

В самом деле, первое уравнение системы (1.5) получает тогда вид

$$C_1^2 m^8 \frac{3}{4} b_1 + m^2 \frac{b_2^2}{b_1} n \left(\frac{3}{2} n - 1 \right) = \Delta. \quad (1.14)$$

При $\delta \geq 0$ и $\Delta < 0$ (см. фиг. 3) имеем $n < 0$ и уравнение (1.14) не может быть удовлетворено. В предельном случае

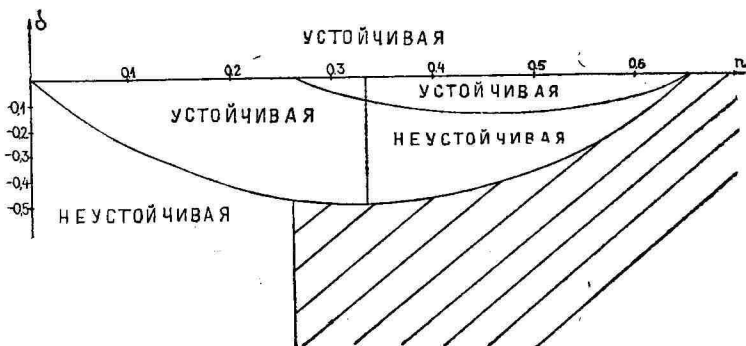


Рис. 3

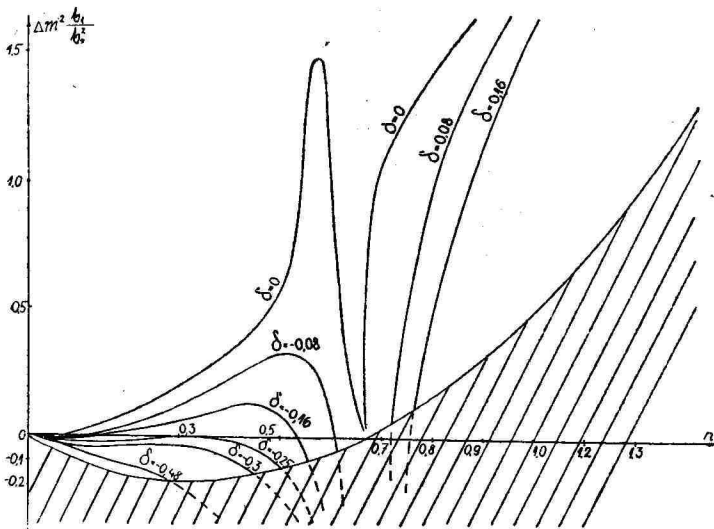


Рис. 4

$n = 2/3$ получим $\Delta = \infty$. Случай $n > 2/3$ практического интереса не представляет, ибо тогда возмущения около начального равновесного положения состоятся при значительно высшей нагрузке, чем верхняя критическая точка.

§ 2. Поведение оболочки в послекритической стадии

Условие устойчивости получает при $\delta^2 \mathcal{E} = 0$ вид (см. [1])

$$\delta^2 \mathcal{E} > 0. \quad (2.1)$$

Это означает, что вторая вариация полной энергии оболочки тогда и только тогда будет положительно определенной, когда детерминант формы $\delta^2 \mathcal{E}$ и все ее последовательно главные диагональные миноры D_{11} , D_{22} , ... больше нуля. Потеря устойчивости происходит в случае

$$\delta^2 \mathcal{E} = 0. \quad (2.2)$$

В окрестности точки $C_3 = C_3^b$ при выполнении условий (1.13) главный диагональный минор будет больше нуля, т. е.

$$D_{11} \equiv \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta C_1^2} \equiv \frac{6nm^2}{(2-3n)} \frac{b_2^2}{b_1} \left(-\frac{3}{4}n^2 - \frac{1}{2}n + \delta + \frac{2}{3} \right) > 0. \quad (2.3)$$

Детерминант D_{22} в такой же окрестности подчиняется условию

$$D_{22} \equiv D_{11} \frac{2m^2}{(2-3n)} \frac{b_2^2}{b_1} \left[\frac{n}{2} \left(-\frac{9}{2}n + 3 \right) (2-3n) + \delta \right] > 0. \quad (2.4)$$

Следовательно, при выполнении неравенства (1.12) послекритическая стадия оболочки всегда является устойчивой. Пользуясь неравенством Коши—Буняковского, можно показать, что

$$\frac{b_1 b_2}{b_2^2} > 1. \quad (2.5)$$

Это означает, что при $m \gg 1$ поведение оболочки в послекритической стадии будет устойчивым. Такой же результат в разных численных примерах при сжатии оболочки получился и в работах [2, 6].

Функциональная связь $\Delta = f(n)$ при различных $\delta < 0$ представлена на фиг. 3. Можно убедиться, что в случае

$$\Delta < -\frac{1}{6} m^2 \frac{b_2^2}{b_1} \quad (2.6)$$

система (1.5) не имеет вещественного решения (такая область на фиг. 3 заштрихована). В самом начале отрезка $n \in (0, 2/3)$ при любом $\delta < 0$ и оболочка переходит в неустойчивое равновесное состояние, ибо тогда

$$\delta^2 \mathcal{E} < 0. \quad (2.7)$$

Здесь

$$D_{11} = \frac{nm^2}{(2-3n)} \cdot \frac{b_2^2}{b_1} \left(\frac{45}{2} n^2 - 21n + 4 - 6\delta \right),$$

$$D_{22} = D_{11} \frac{2m^2}{(2-3n)} \frac{b_2^2}{b_1} \left(n - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{27}{2} n^2 - 9n - 3\delta \right). \quad (2.8)$$

Из теории устойчивости также известно, что оболочка может переходить в устойчивое закритическое равновесное состояние лишь после прохода нагрузки через критическую точку. Это означает, что $\Delta(n) m^{-2} b_1 / b_2^2$ должна достичь свой минимум в точке $n = n_1$, являющейся корнем алгебраического уравнения

$$D_{22}(n_1) = 0. \quad (2.9)$$

Кривые $D_{22}(n, \delta) = 0$, разделяющие зоны на (n, δ) -плоскости, устойчивые и неустойчивые, представлены на фиг. 4. При сравнении полученных результатов на фиг. 3 и 4 выясняется, что устойчивые и неустойчивые зоны на каждой фигуре не находятся в полном соответствии между собой. Для выяснения этого несоответствия следует добавить, что функциональная связь $\Delta = f(n)$ на фиг. 3 представлена лишь при некоторых фиксированных δ , хотя в конкретной практической задаче параметр δ ,

характеризующий геометрию оболочки, рассматривается также в качестве функции от числа m волн в окружном направлении, причем $\delta(m)$ имеет тенденцию к уменьшению при уменьшении m . Заштрихованная часть на фиг. 3 указывает область, где система уравнений (1.5) не имеет вещественного решения. Проведенное исследование основывалось на упрощенном варианте, где множитель C_3 не подчинялся варьированию. При точном анализе системы уравнений (1.5) получим следующее соотношение:

$$\Delta \cdot m^{-2} \frac{b_1}{b_2^2} \cdot \left[\frac{2}{3} - n \left(1 + \frac{4}{3} r \right) \right] = \\ = n^3 \left(-\frac{9}{4} + r \right) + n^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} r \right) + n \cdot l(\delta; r), \quad (2.10)$$

где

$$r = (1 - \nu) (s_2 - s_1) \frac{B(s_2)}{N(s_2)} \cdot \frac{b_4^2}{b_1}, \\ l = \delta \left(1 - \frac{4}{3} r \right) - \frac{8}{9} r. \quad (2.11)$$

При $r = 0$ функциональная связь (2.10) переходит в соотношение (1.10). В случае $r \ll 1$ критерий устойчивости (1.12) заменяется условием

$$l \geq 0, \quad (2.12)$$

причем вопрос точности остается невыясненным. В конкретных практических задачах можно численно сравнить критерии (1.12) (2.12).

Результаты рассматриваемой статьи дают основание утверждать, что послекритическая равновесная стадия при жесткой заделке оболочки вращения отрицательной гауссовой кривизны при $m \gg 1$ устойчива. Для перехода от устойчивой послекритической стадии в неустойчивую необходима и достаточна перемена знака параметра (1.11) (как функции от m) на отрицательный. Следовательно, переход оболочки от устойчивого равновесного состояния в неустойчивое может совершиться лишь после перестройки формы волнообразования по пути уменьшения числа волн в окружном направлении при малом m .

Проведенный в настоящей статье анализ позволяет утверждать, что при переходе с двумерной задачи (C_1, C_3) к трехмерной (C_1, C_2, C_3) верхняя критическая точка нагрузки остается неизменной, но в поведении оболочки в ее послекритической стадии могут происходить качественные изменения, где устойчивая ветвь равновесных форм в послекритической стадии, указанная на фиг. 2, может становиться неустойчивой.

Следует также отметить, что алгоритм, разработанный в настоящей статье, не подходит в случае пологих оболочек вращения, ибо тогда $\alpha \rightarrow 0$ при $R_1 \rightarrow -\infty$, и асимптотика по параметру m в величине ϕ не работает.

§ 3. Кручение тора

Рассмотрим оболочку в форме части тора, где гауссова кривизна отрицательна при следующих данных:

$$R_1 = -1; \quad \pi/4 \leq s \leq 3\pi/4,$$

$$h = 0,003, \quad 1,1 \leq L \leq 10,0,$$

причем

$$R_2 = B/\sin s, \quad B = L + R_1 \sin s$$

На фиг. 5 представлена зависимость между параметром нагрузки $\beta/(Eh)$ и прогибом w при разных L на параллели $s = \pi/2$. Здесь непрерывная линия соответствует решению системы (1.5), а прерывистая линия решению упрощенной системы (1.5), где множитель C_3 не подчинялся варьированию.

Для исследования устойчивости оболочки при изменении ее геометрии изменяем параметр L на вышеуказанном отрезке. Полученные результаты приводятся в следующей таблице:

Таблица 1

L	$m = 3$		$m = 8$		r	$\frac{\beta_{\min}}{Eh} 10^3$	m_*
	δ	l	δ	l			
1,1	0,644	0,466	2,93	2,44	0,102	0,01348	3
1,5	2,98	1,96	4,87	3,33	0,209	0,1392	8
1,8	33,8	23,9	62,6	44,4	0,217	0,2504	10
1,9	464	330	912	649	0,216	0,2918	11
2,0	175	125	364	260	0,214	0,3389	11
2,1	26,6	19,0	58,5	41,9	0,211	0,3848	12
3,2	0,683	0,374	2,13	1,49	0,171	1,087	15
4,1	0,392	0,190	1,18	0,887	0,144	1,879	17
5,5	0,313	0,164	0,783	0,562	0,114	3,479	19
7,5	0,301	0,200	0,569	0,438	0,0798	8,168	21
10	0,307	0,221	0,525	0,420	0,0660	11,22	23

Выясняется, что в рассматриваемом отрезке послекритическая стадия оболочек везде неустойчива. Видно также, что уточнение, связанное с параметром r , в основном меняет при решении нашего примера его количественную, но не так много качественную сторону. В таблице 1 заданы также минимальные верхние критические точки нагрузки $\beta_{\min}/(Eh)$ вместе с соответствующими числами волн m_* по параллели.

Следует добавить, что диаграмма «нагрузка-угол кручения» практически получается в нашем примере линейной и в данной статье не приведена. Вообще же вопрос о диаграмме «нагрузка-угол кручения» требует дальнейшего анализа.

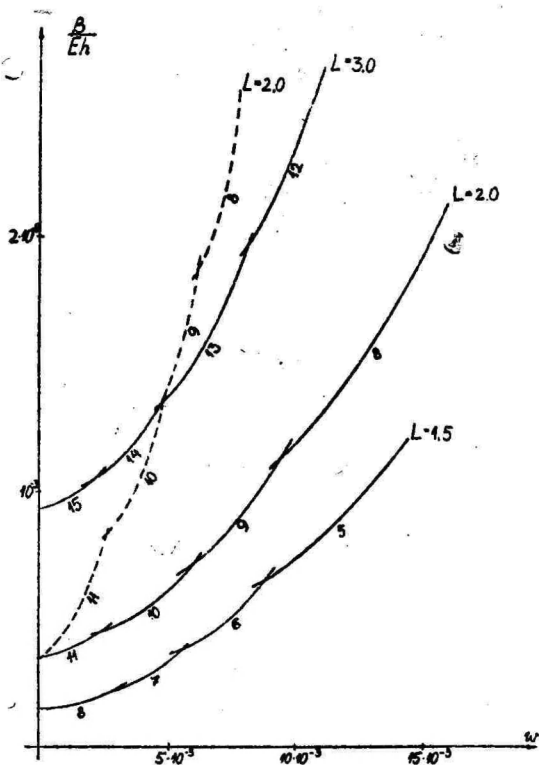


Рис. 5

Литература

1. Вольмир А. С. О критериях устойчивости оболочек. — В сб.: Расчет пространств. конструкций, 1964, 9, 286—319.
2. Лийва Т. В. О послекритической стадии оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны при сжатии. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1976, 393, 121—129.
3. Лийва Т. В., Товстик П. Е. О потере устойчивости оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны при кручении. Изв. АН СССР. — Мех. тверд. тела, 1973, № 6, 92—98.
4. Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К. Возникновение ударных волн в упругом полупространстве при одномерных нелинейных переходных волновых процессах, возбужденных непрерывным воздействием. Изв. АН СССР. — Мех. тверд. тела, 1973, № 1, 69—82.
5. Leet, K. M. Study of stability in the hyperbolic paraboloid. J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1966, 92, № 2, 121—142.
6. Veronda, D. R., Weingarten, V. L. Stability of pressurised hyperboloidal shells. J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1975, 101, № 7, 1585—1602.

Поступило
25 V 1979

ÜBER DAS NACHKRITISCHE STADIUM DER UMDREHUNGSSCHALEN DER NEGATIVEN GAUSSSCHIEFE BEI TORSION

T. Liiva

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel werden mit Hilfe von Ritz-Methode die Umdrehungsschalen der negativen Gausschiefe bei Torsion untersucht. Bei der Wahl der Koordinationsfunktionen werden Resultate des asymptotischen Integrierens angewendet. Es sei darauf hinzuweisen, daß bei den Umdrehungsschalen der negativen Gausschiefe die Einbeulungen beim Einbüßen der Stabilität die gesamte Mittelfläche umfassen, und somit sei die Zahl der Parallelwellen ziemlich gross. Die Anfangsspannung wird als achsensymmetrisch und membran vorausgesetzt. Im Artikel wird die Torsion der Schale nur in der geometrisch nichtlinearen Betrachtung erforscht, obwohl im Fall der typischen elastischen Konstruktiv-elemente geometrische und physische nichtlineare Betrachtung in den Tangenzialrichtungen die Effekte gleicher Ordnung gibt. Man kommt davon aus, dass die Schalen der negativen Gausschiefe ihre Standfestigkeit bei bedeutend kleineren Belastungen als die anderen Schalen einbüßen, somit ist es anzunehmen, daß die Schalen bedeutend weniger steif in bezug auf die Aussenbelastungen seien. Es wird anschliessend bewiesen, daß das nachkritische Benehmen aller Schalen der gegebenen Klasse im Fall der festeingespannter Ränder stabil sei, wenn die Wellenzahl in der Kreisrichtung mehr als eine Eins ist.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ДЕФОРМАЦИИ В ТВЕРДОЙ СРЕДЕ

Ю. Энгельбрехт

Таллинский политехнический институт

Введение

В уточненной теории переходных волновых процессов в сплошной деформируемой среде необходимо учесть все эффекты второго порядка [1]. Тогда оказывается возможным описать искажения волновых профилей, приводящие, например, к возникновению ударных волн или к появлению высокочастотной осцилляции (солитонов) [1, 3]. Такие математические модели упругих, вязкоупругих и др. сред, как правило, являются квазилинейными системами дифференциальных уравнений. Обычно исследованы решения таких систем в области непрерывных решений [2, 6, 7]. В данной работе формулируются основные принципы асимптотического анализа нелинейных переходных волновых процессов с учетом последовательного перехода из области непрерывных решений в область разрывных решений.

Из анализа нелинейных волновых процессов следует, что:

- а) возможно возникновение разрывных решений (ударных волн);
- б) принцип суперпозиции не действует на всех этапах анализа;
- в) не существует отдельных однотипных волн. Это приводит к выводу, что в нелинейной трехмерной теории упругости чисто одномерные волны не существуют.

Имея в виду измерения высокой точности, например, при решении обратных задач акустодиагностики на основе искажений импульса, все методы анализа нелинейной теории должны учесть упомянутые свойства и оценить эффекты связанности и взаимодействия отдельных волн. Таким требованиям отвечает лучевой метод анализа нелинейных волн совместно с анализом возможных разрывных решений.

§ 1. Постановка задачи

Нелинейные переходные волновые процессы в среде с диссипативными, дисперсионными и др. свойствами описываются матричным уравнением относительно вектора неизвестных полевых величин

$$I \frac{\partial U}{\partial t} + A^K \frac{\partial U}{\partial X^K} + \sum_p \varepsilon^{m(p)} B_{rs}^{\alpha\beta} \frac{\partial^p U}{\partial (X^\alpha)^r \partial (X^\beta)^s} + H = 0. \quad (1)$$

$$U = \|u_i\|; \quad A^K = \|a_{ij}^K\|, \quad B_{rs}^{\alpha\beta} = \|b_{rs\,ij}^{\alpha\beta}\|, \quad H = \|h_i\|,$$

$$A^K = A^K(X^K, U), \quad B_{rs}^{\alpha\beta} = B_{rs}^{\alpha\beta}(X^K, U), \quad H = H(X^K, U),$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n; \quad K = 1, 2, 3; \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3; \quad X^0 = t,$$

$$r + s = p \geq 2, \quad m \geq 1.$$

Здесь I — единичная матрица, ε — определенный малый параметр. Требуется найти асимптотическое решение уравнения (1) при гладких граничных условиях

$$U(X^K, t) |_{t=0} = \psi(X^K); \quad U(X^K, t) |_S = \Phi(X^\alpha), \quad (2)$$

где S — определенная поверхность в пространстве X^K . Для конкретности рассмотрим далее краевую задачу $\psi = 0, \Phi \neq 0$.

§ 2. Область непрерывных решений

Примем за основу

Предположение 1: представляется возможным разложение волнового вектора по степеням малого параметра

$$U = \sum_{i=0} \varepsilon^i U_i \quad (3)$$

или с учетом разных показателей изменяемости полевых величин

$$U = \sum_{j=0} \varepsilon^j U_j^+ + \varepsilon^t \sum_{k=0} \varepsilon^k U_k^-, \quad (4)$$

$$U_j^+ = \|u_j^+\| = \|u_i\|, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

$$U_k^- = \|u_k^-\| = \|u_i\|, \quad i = q+1, \dots, n;$$

Предположение 2: представляется возможным разложения

$$A^K = A^{K_0}(X^L) + \varepsilon A^{K_1}(X^L, U) + \dots,$$

$$B_{rs}^{\alpha\beta} = B_{rs0}^{\alpha\beta}(X^K) + \varepsilon B_{rs1}^{\alpha\beta}(X^K, U) + \dots, \quad (5)$$

$$H = H_0(X^K, U) + \varepsilon H_1(X^K, U) + \dots$$

С учетом (3) и (5) из (1) вытекает в первом приближении

$$I \frac{\partial U_0}{\partial t} + A^{K_0} \frac{\partial U_0}{\partial X^K} + H_0 = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) называем *линейным ассоциированным уравнением*.

Условие 1: *собственные значения матрицы A^{K_0} вещественны и конечны.*

Из этого условия следует гиперболичность ассоциированного уравнения, что в принципе является следствием волнового характера процесса. Уравнение (1) при этом может быть не строго гиперболическим.

Фронты волн, генерированных условием (2) с точностью ассоциированного уравнения (6) описываются соотношением

$$t = \varphi(X^K),$$

где φ — эйконал, определяемый из уравнения

$$|\text{grad } \varphi|^2 = c^{-2},$$

где c — скорость определенной волны.

Вектор $U(X^K, t)$ называется *описывающим развивающуюся волну*, если существует семейство распространяющихся поверхностей $\varphi(X^K) = \text{const}$ и скорости изменения компонент U или их производных малы, когда X^K движется вместе с такой поверхностью, и велики, когда X^K фиксирована. Тогда для развивающихся волн справедливо

$$U_n(X^K, t) = U_n(X^K, t - \varphi(X^K)). \quad (7)$$

Отметим, что в нелинейном случае (7) не допускает расчленения по фазовым функциям. Аналогично классическому лучевому методу сформулируем в данном случае принцип построения асимптотических решений основного уравнения (1): исходя из кинематики линейного ассоциированного уравнения, вдоль определенных ассоциированным уравнением лучей строятся уравнения переноса основной задачи, решение которых позволяет определить амплитудные факторы волнового процесса. Согласно этому принципу, волновой процесс разложен по отдельным волнам. Структура уравнения (1) приводит к тому, что уравнения переноса взаимосвязаны. Кроме того, возможно изменение фазовой скорости из-за нарушения принципа суперпозиции. Поэтому уравнение эйконала должно позволять учесть также изменение месторасположения фронта волны из-за взаимодействия. В этом случае в качестве дополнения к принципу принимается

$$t = \varphi(X^K) - \varepsilon \Phi_j(X^K, t),$$

где Φ_j — фазовые функции. Как показывает дальнейший анализ, для линейных волн без взаимодействия выполняется $\Phi_j = 0$.

Согласно вышеуказанному принципу, перейдем к лучевым координатам с учетом метода деформируемых координат

$$\xi_j = \varepsilon^l (t - \varphi(X^K) - \varepsilon \Phi_j(X^K, t)), \quad \tau^v = \varepsilon^{l+m(v)+1} X^v, \quad (8)$$

$$v \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

В общем случае $l=0$ (см. [4]) и $m(v)$ зависит от координаты X^v . Подставляя (3)—(5) и (8) в систему (1), получим, согласно методу возмущений, уравнения переноса вдоль определенных характеристик и условия определения фазовых функций. Для одномерной задачи получим, соблюдая (3) и (8) с $m(1)=0$

$$R(\alpha_i) = a_{0i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \tau^1} + a_{1i} \alpha_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_i} + \sum_{p=2} a_{2ip} \frac{\partial^p \alpha_i}{\partial \xi_i^p} + a_{3i} \alpha_i + f(\alpha_j) = 0, \quad (9)$$

$$\Phi_i(\xi_i) = \sum_{j \neq i} b_{1ij} \int_0^{\xi_j} \alpha_j(\xi, \tau^1) d\xi. \quad (10)$$

Здесь уравнение (9) — уравнение переноса 1-го порядка, соотношение (10) определяет фазовые функции, a_{ki} , a_{kip} и b_{kij} — коэффициенты; α_i — амплитудный фактор для компонент U_0 . Уравнения переноса n -го порядка имеют аналогичный вид.

Пример 1. Слабонеоднородная упругая среда, продольные волны. Имеем систему из двух уравнений переноса

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau^1} + a_{11} \alpha_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1} - a_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1} + a_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_2} + a_{31} \alpha_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \tau^2} + a_{12} \alpha_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_2} + a_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_2} - a_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1} - a_{31} \alpha_2 = 0,$$

и фазовая функция определяется в виде

$$\Phi_i = (-1)^{i+1} \frac{3}{4} (1+m_0) \int_0^{\xi_j} \alpha_j(\xi, \tau^j) d\xi,$$

где m_0 — соотношение модулей упругости третьего и второго порядков, a_1 , a_{11} , a_{12} и a_{31} — коэффициенты.

В случае направленного воздействия на ограниченной поверхности уместим одну координатную ось X^1 , по направлению к воздействиям учитываем (4) и (8). Тогда можно прийти к следующему утверждению: существует такой набор параметров l и $m(v)$, что в случае направленного воздействия из системы (1) для определенной волны можно построить уравнение переноса

с учетом дифракционной расходимости в поперечные направления. Если совокупность t и $m(\mathbf{v})$ не принадлежат этому набору, тогда из системы (1) вытекает либо чисто одномерное уравнение переноса, либо уравнение переноса не существует вообще. В конечном итоге получим:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} R(\alpha_i) = a_{*i} \Delta \alpha_i, \quad (11)$$

$$\Phi_i(\xi_i, \tau^2) = \sum_{j \neq i} b_{1ij} \int_0^{\xi_j} a_j(\xi, \tau^v) d\xi.$$

Здесь Δ — оператор Лапласа в поперечном направлении.

Если в одномерном случае фронт волны искривляется из-за взаимодействия только в плоскости X^1, t , то в случае квазиодномерного пучка (11) искривление имеет пространственный характер из-за неравномерного распределения энергии по поперечному сечению пучка. В нелинейной акустике жидкости уравнение (11) носит название уравнения Заболоцкой—Хохлова [1].

§ 3. Область разрывных решений

Уравнения переноса могут при определенных условиях привести к разрывному решению. Условия возникновения разрывного решения определяются из анализа уравнений переноса (9) и (11).

Пр и м е р 2. Модель нелинейного стандартного вязкоупругого тела. Разрыв в продольной волне возникает при условии

$$-\operatorname{sgn}(1+m_0) \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_i} > \lambda_{*1}, \quad \lambda_{*1} = \frac{1}{3} \varepsilon_1 (|1+m_0| \tau_0)^{-1}, \quad (12)$$

где τ_0 — время релаксации, λ_{*1} — критический градиент, ε_1 — безразмерный параметр, определяющий разницу между равновесной и мгновенной скоростями соответственно c_e и c_i , причем $\varepsilon_1 = c_i^2 c_e^{-2} - 1$.

Если разрыв действительно возникает, то следующий шаг анализа должен установить устойчивость разрыва. Для этого согласно методу сингулярных поверхностей необходимо построить уравнения переноса в разрывах [5]. В одномерном случае это приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно амплитудного фактора

$$\frac{d[\alpha_i]}{dt} = B_i[\alpha_i] \left(\operatorname{sgn}(1+m_0) \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_i} \Big|_0 + \lambda_{*2} \right), \quad (13)$$

где $B_i = \operatorname{const}$ и λ_{*2} — критический градиент. Критический градиент λ_{*2} может привести к более строгому условию устойчивости, чем условие возникновения ударной волны (12). Это обуславливается различием скоростей распространения.

Пример 3. Модель нелинейного вязкоупругого тела. Критический градиент определяется соотношением

$$\lambda_{*2} = \frac{2}{3} \varepsilon_1 (|1 + m_0| \tau_0 (1 + \varepsilon_1))^{-1}.$$

В случае направленного воздействия (пучка) в пространстве основой служит уравнение (11). Разрыв возникает в первую очередь на оси пучка и расширяется постепенно. Область расширения зависит от свойств среды и импульса. Поведение разрыва после формирования описывается уравнением второго порядка

$$\frac{d^2[\alpha_i]}{dt^2} + C_1 \frac{d[\alpha_i]}{dt} + C_2 [\alpha_i]^2 = 0, \quad (14)$$

которое решается при известных значениях $[\alpha_{1i}]_0$ и $d[\alpha_{1i}]/dt|_0$. Здесь $\alpha_{1i} = \alpha_i g(\tau^2)$, где $g(\tau^2)$ определяет поперечное распределение импульса. В зависимости от начальных данных и коэффициентов C_i возможен либо рост, либо уменьшение разрыва.

Пример 4. Модель стандартного вязкоупругого тела. Имеем

$$C_1 = -B_i \left(\operatorname{sgn}(1 + m_0) g(\tau^2) \frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial \xi_i} \Big|_0 + \lambda_{*2} \right),$$

$$C_2 = -\frac{3}{4} (1 + m_0) \varepsilon c_i a_{41} \frac{\partial^2 g}{\partial (\tau^2)^2}.$$

Продольная координата возникновения разрыва определяется соотношением

$$\tau_*^1 \sim -\operatorname{sgn}(1 + m_0) \left(g(\tau^2) \frac{\partial \alpha_i}{\partial \xi_i} \Big|_0 \right)^{-1}.$$

Литература

1. Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К. Нелинейные и линейные переходные процессы деформации термоупругих и упругих тел. Таллин, 1972.
2. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. Москва, 1975.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. Москва, 1977.
4. Энгельбрехт Ю. К. О теории нелинейных волновых процессов в диссипативной среде. Изв. АН СССР. — Мех. тверд. тела, 1977, № 2, 143—148.
5. Chen, P. J., Gurtin, M. E. On the growth of one-dimensional shock waves materials with memory. Arch. Ration. Mech. and Anal., 1970, 36, № 1, 33—46.
6. Germaine, P. Progressive waves. Jahrb. Dtsch. Ges. Luft- und Raumfahrt ev V. (DGLR), 1971. Köln, 1972, 11—30.
7. Taniuti, T. Reductive perturbation method and far field of wave equations. Progr. Theor. Phys., 1974, № 55, Suppl., 1—35.

Поступило
1 XII 1978

NONLINEAR TRANSIENT DEFORMATION WAVES IN SOLID MEDIUM

J. Engelbrecht

Summary

The main principles of the successive analysis of nonlinear transient deformation waves in a solid medium are presented. The boundary problem for the governing equation (1) is analysed. In the region of continuous solution the ray method is used. According to this method, the wave process is presented as a sum of single waves with nonlinear interaction between them. Making use of the ray coordinates (8), determined from the associated equation (6), the nonlinear transport equations (9) and the phase functions (10) are obtained. In the multidimensional case, the method of deformed variables is used. In the region of discontinuous solution (shock waves) the method of singular surfaces is used and the equations governing the evolution of the discontinuities are derived. For the one-dimensional and multi-dimensional cases the equations (13) and (14) are obtained correspondingly. In the case of a nonlinear dissipative medium the critical strain gradient is determined. The growth of a discontinuity is possible only in this case when the real strain gradient is bigger than the critical one.

О ЦИКЛИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ СТАРЕЮЩИХ МАТЕРИАЛОВ

К. Кенк

Таллинский политехнический институт

Введение

Взаимовлияние старения и знакопеременного циклического деформирования материалов к настоящему времени исследовалось лишь в работах [3, 6]. В этих работах рассматривалось циклическое нагружение в виде симметричных циклов постоянной амплитуды по напряжениям, которое чередовалось этапами старения в ненагруженном состоянии. Было обнаружено сильное влияние старения на поведение материала при циклическом деформировании.

В настоящей работе приводятся результаты дополнительных (по сравнению с [6]) экспериментов* на чередование циклического нагружения и старения стали 3. Они показывают, что при некоторых режимах нагружения параметр упрочнения λ , предложенный в [1] для описания поведения стареющих материалов, нуждается в уточнении. На основе анализа полученных экспериментальных данных в работе предлагается уточненное кинетическое уравнение для определения параметра состояния λ .

§ 1. Эксперимент со скачкообразным изменением амплитуды цикла

В опытах этапы «мягкого» знакопеременного кручения чередовались с этапами старения. Исследовалось влияние ступенчатого изменения амплитуды цикла. Образцы, аппаратура и методика измерений были такие же, как в [5].

На рисунках 1 и 2 приведены результаты испытания двух образцов. Верхняя кривая представляет деформацию в конце нечетных полуциклов, нижняя — в конце четных полуциклов, а расстояние между кривыми по вертикали — ширину петли пла-

* Эксперименты проводились в лаборатории прочности полимеров Ленинградского государственного университета.

стического гистерезиса. По горизонтальной оси отложено число полуциклов.

Для первого образца (рис. 1) старение проводилось после

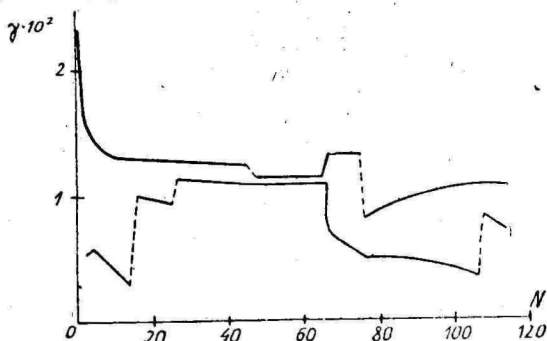


Рис. 1

15, 25, 46, 60, 76 и 107 полуциклов, а в 66-ом полуцикле была повышена амплитуда цикла с $1,5 \cdot 10^8$ на $1,87 \cdot 10^8$ н/м².

Для второго образца (рис. 2) старение проводилось после 13, 19, 40, 145, 157, 167, 171 и 175 полуциклов, а в 36-ом полуцикле амплитуда цикла была повышена с $1,35 \cdot 10^8$ на $1,5 \cdot 10^8$ н/м².

Характерным является сильное сокращение ширины петли пластического гистерезиса в результате каждого этапа старения.

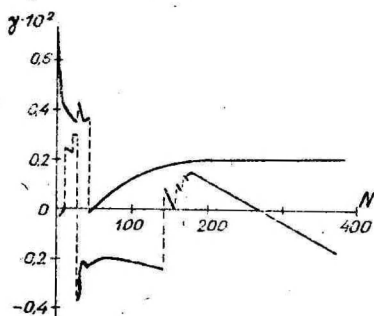


Рис. 2

Старение проводилось в течение 2,5 часов при 100°C с последующей выдержкой при комнатной температуре. Продолжительность выдержки при комнатной температуре варьировалась. Например, для второго образца после каждого из первых двух этапов старения при 100°C выдержка при комнатной температуре была 20 часов, а после следующих этапов старения 17, 21, 92, 385,5, 21,5 часов и 2,5 месяцев соответственно. Как видно из графиков, приведенных на рис. 2, разница в продолжительности вы-

держки при комнатной температуре после старения при 100°C не вызывает никаких качественных изменений в поведении материала. Это конечно можно утверждать лишь насчет рассмотренных сроков выдержки. У первого образца после каждого из трех первых этапов старения выдержка при комнатной температуре была 20 часов, а перед четвертым этапом нагрева образец выдерживался после циклического нагружения при комнатной температуре в течение трех суток, затем последовал нагрев по обычному режиму и снова выдержка в течение 20 часов при комнатной температуре. В результате всего этого ширина полупетли сократилась с $5,6 \cdot 10^{-4}$ на $4,3 \cdot 10^{-4}$. Изменение ширины полупетли на $1,3 \cdot 10^{-4}$, из-за малости, практически не регистрируется на рис. 1, и ширину петли с 47 по 65 полуцикл можно считать постоянной. Были проведены также эксперименты на дополнительных образцах с целью сократить ширину петли пластического гистерезиса до нуля. Несмотря на применение различных режимов, не удалось добиться сокращения ширины петли до нуля. Это позволяет утверждать, что ширина упругой области в пространстве напряжений после чередования старения и циклического знакопеременного нагружения всегда оставалась меньше удвоенной амплитуды цикла.

Следует отметить, что при циклическом нагружении после старения в конце каждого цикла достигается практически та же деформация, при которой материал состарился, и без дополнительной проверки может создаться впечатление, что петля установилась. В действительности же ширина петли часто увеличивается. Это происходит потому, что изменится, например, деформация после четных полуциклов, если последнее старение происходило после нечетного полуцикла. Для проверки непрерывности такого расширения петли второй образец в интервале с 175 по 400 полуцикл нагружался без промежуточных старений. С графиков рис. 2 наблюдается даже тенденция к увеличению интенсивности расширения петли с числом полуциклов, так как деформация после четных полуциклов уменьшается с числом полуциклов почти линейно, а деформация после нечетных полуциклов немного увеличивается. Такого рода малое расширение петли наблюдается уже и после первых этапов старения. Этот эффект может однако из-за малости остаться незамеченным или приписываться при малом числе циклов к погрешностям эксперимента. Старение же всегда привело к сокращению петли.

§ 2. Уточненное кинетическое уравнение для параметра состояния

В [1] для описания поведения стареющих материалов предлагалось ввести параметр λ с помощью кинетического уравнения

$$d\lambda = f(\lambda, \lambda_0, t) dt + d\lambda_0, \quad (2.1)$$

где $d\lambda_0 = (d\varepsilon^p_{\alpha\beta} d\varepsilon^p_{\alpha\beta})^{1/2}$ и $d\varepsilon^p_{ij}$ — тензор приращения пластической деформации. В [2] было установлено, что старение приводит к изотропному расширению поверхности нагружения, и поэтому последняя предлагалась в форме:

$$[(s_{\alpha\beta} - \rho_{\alpha\beta})(s_{\alpha\beta} - \rho_{\alpha\beta})]^{1/2} = \Phi(\lambda). \quad (2.2)$$

Нетрудно убедиться, что при «мгновенных» нагружениях параметр λ идентичен параметру λ_0 и растет монотонно в процессе пластического деформирования. Тем самым применение λ позволяет у материалов, нечувствительных к старению, описать монотонное циклическое упрочнение, а у стареющих материалов — упрочнение за счет старения и циклического деформирования.

Учет в уравнениях теории пластичности явлений, отмеченных в конце предыдущего параграфа, однако, невозможен при помощи параметра λ , введенного уравнением (2.1), так как при «мгновенных» нагружениях λ непрерывно возрастает, а $\Phi(\lambda)$ в (2.2) при расширении петли уменьшается. Если даже допустить, что $\Phi(\lambda)$, начиная с некоторого значения λ , будет уменьшаться, то добиться возможности увеличения $\Phi(\lambda)$ в последующем процессе старения можно лишь, допуская, что со временем λ уменьшается. Но такой подход не позволяет описать увеличение ширины упругой области до значений, превышающих значения ее, достигнутые в предыдущем.

Выше отмечалось, что ширину упругой области можно приблизить лишь к удвоенной амплитуде цикла, но путем повышения амплитуды цикла откроется новая возможность увеличения ширины упругой области и она может получить значения значительно более высокие, чем были достигнуты при предыдущем нагружении. Этих трудностей можно избежать, если параметр упрочнения ввести уравнением

$$d\lambda = f_1(\lambda, \lambda_0, t) dt + f_2(\lambda, \lambda_0, t) d\lambda_0. \quad (2.3)$$

Если функция f_2 , начиная с некоторого значения λ_0 , становится отрицательной, а f_1 — положительной, то можно описать переход к разупрочнению при мгновенных нагружениях и дальнейшее упрочнение за счет старения.

Следует отметить, что для описания поведения даже нестареющих материалов при различных режимах знакопеременного нагружения приходится применить структурные модели материала. При этом сложное поведение элемента среды можно описать, приписывая подэлементам сравнительно простые свойства, как это предлагается, например, в [4] для учета изменения температуры. Для описания поведения стареющих материалов при различных режимах чередования знакопеременного нагружения и старения, свойства, представленные уравнениями (2.2) и (2.3),

следует приписать не всему элементу материала, а подэлементам. Для учета изменения температуры в уравнение (2.3) следует включить еще и температуру. Но все это является предметом дальнейших исследований.

Литература

1. Арутюнян Р. А. К критерию циклического разрушения Коффина. Л., 1976, 8с. (Рукопись деп. в ВИНТИ 3 ноября 1976 г., № 3869-76 Деп.).
2. Арутюнян Р. А., Каменцева З. П. Упрочнение стареющих сплавов. Изв. АН СССР. — Мех. тверд. тела, 1976, № 4, 128—137.
3. Арутюнян Р. А., Каменцева З. П. Циклическое упрочнение стареющих сплавов. — В сб.: Исслед. по упругости и пластичности. Ленингр. ун-т, 1976, № 11, 121—127.
4. Кадашевич Ю. И., Кузмин М. А. Исследование неизометрической пластичности с учетом микропластической неоднородности. Изв. АН СССР. — Мех. тверд. тела, 1978, № 4, 88—96.
5. Кенк К. Р. О связи между напряжением и сдвигом при кручении. Инж. ж. — Мех. тверд. тела, 1968, № 5, 134—139.
6. Кенк К. Р., Арутюнян Р. А., Чебанов В. М. О влиянии нестабильных свойств на циклическое упрочнение пластической среды. — Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 487, 58—63.

Поступило
1 XII 1978

ON CYCLIC DEFORMATION OF TIME-HARDENING MATERIALS

K. Kenk

Summary

The experimental results of the cyclic sign-changing torsion and time-hardening of Steel 3 tubular specimens are analysed. The plastic hysteresis loop width was measured. The loading cycles were symmetrical with one abrupt change of the stress amplitude. The systematic time-hardening was registered. In the course of the cyclic deformation the width of the plastic hysteresis loop can under certain conditions also increase. This phenomenon is taken into account theoretically when making use of the special parameter λ in yield condition. The parameter λ is determined by the equation (2.3), where λ_0 is the Odquist's parameter.

ОБ ИЗГИБЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПОЛОГИХ АРОК

Э. Иыги

Тартуский государственный университет

В статье [3] изложена теория расчета упруго-пластических пологих арок под действием равномерного поперечного давления. Предполагается, что материал следует схеме линейного упрочнения, а геометрические зависимости являются нелинейными.

В данной заметке рассматривается задача об изгибе упруго-пластических пологих арок под действием равномерного поперечного давления при равномерном нагреве. Полученные уравнения решены в случае синусоидальной арки, если арка имеет прямоугольное поперечное сечение. При решении применяется метод Галеркина. Получены формулы для определения параметров, при которых происходит переход из чисто упругого состояния в упруго-пластическое.

В данной заметке используются обозначения и чертежи работы [3]. Допустим, что в середине арки возникает зона (I) пластических деформаций от сжатия.

В зоне упругих деформаций нормальное напряжение

$$\sigma = E(\varepsilon - z\omega''/l^2 - \beta t),$$

а в зоне пластических деформаций от сжатия

$$\sigma = E(1 - \lambda)(\varepsilon - z\omega''/l^2 - \beta t) - E\lambda\varepsilon_s.$$

Здесь t — разность температур, β — коэффициент линейного температурного расширения. Пусть ξ_1 определяет точку, где состоит переход от упругих деформаций к пластическим. Внутренние суммарные усилия равны:

$$N = E\lambda S_1 \omega''/l^2 - E\lambda F_1(\varepsilon_s + \varepsilon) + E\varepsilon F - E\beta t(F - \lambda F_1), \quad (1)$$

$$M = E(\lambda I_1 - I)\omega''/l^2 - E\lambda S_1(\varepsilon_s + \varepsilon) + E\lambda\beta t S_1; \quad (2)$$

Исходя из гипотезы плоских сечений, имеем:

$$\varepsilon_z = \varepsilon - z\omega''/l^2 - \beta t.$$

Так как z_1 определяет положение поверхности, разделяющей зоны упругих и пластических деформаций (от сжатия), получим

$$\varepsilon_s + \varepsilon = z_1\omega''/l^2 + \beta t. \quad (3)$$

На основе (3) формулы (1) и (2) примут вид

$$N = E\omega''[\lambda S_1 + z_1(F - \lambda F_1)]/l^2 - EF\varepsilon_s, \quad (4)$$

$$M = E\omega''[\lambda(I_1 - S_1 z_1) - I]/l^2. \quad (5)$$

Учитывая уравнения равновесия статьи [1] в виде

$$\begin{aligned} Q' &= -N[f'(l\xi) + \omega'']/l - ql, \\ N &= \text{const}, \\ M' &= Ql \end{aligned}$$

и относительную деформацию оси арки

$$\varepsilon = [u'l + \omega'f'(l\xi) + \omega''/2]/l^2,$$

получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} [\lambda(I_1 - S_1 z_1 - I)\omega'''' - 2\lambda S_1 z_1' \cdot \omega''' - \lambda[S_1 z_1'' + z_1 b(z_1)(z_1')^2]\omega'' = \\ = -Nl^2[f'(l\xi) + \omega'']/E - ql^4/E, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u'l = [Nl^2 - E\lambda S_1 \omega'' + E\lambda \varepsilon_s l^2 F_1]/[E(F - \lambda F_1)] - \\ - \omega'f'(l\xi) - (\omega'')^2/2 + \beta t l^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Полученные уравнения решаем в случае синусоидальной арки, если арка имеет прямоугольное поперечное сечение. Тогда

$$f(l\xi) = -a \sin \xi, \quad b(z) = b.$$

Перейдем к следующим безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} q^* &= ql^4/(EIa), \quad k^2 = -Nl^2/(EI), \quad \alpha = 4I/(Fa^2), \\ W &= \omega/h, \quad v = u/h, \quad c = a/h, \quad m = l/h, \\ r &= z_1/h, \quad n = \varepsilon_s m^2, \quad p = 12\beta t m^2. \end{aligned}$$

Уравнения (4), (6) и (7) получают соответственно следующий вид:

$$3[2\lambda r^2 - 2(2 - \lambda)r + \lambda/2]W'' - k^2 + 12n = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (2\lambda r^3 - 3\lambda r/2 - \lambda/2 + 1)W'''' + 3\lambda(4r^2 - 1)rW'''' + \\ + 3\lambda[(4r^2 - 1)r'' + 8r(r')^2]W''/2 + k^2W'' = \\ = c(q^* - k^2\pi^2 \sin \pi\xi), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} mv = c\pi W \cos \pi\xi - \frac{1}{2}(W')^2 + p/12 + k^2/[6(2\lambda r - 2 + \lambda)] - \\ - \lambda[4n(r + 1) - (4r^2 - 1)W'']/[4(2\lambda r - 2 + \lambda)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Для упругой области они применимы, если подставить

$$\lambda=0, \quad r=-1/2, \quad r'=r''=0.$$

Систему уравнений решим приближенно методом Галеркина, учитывая возникшие зоны. Этот метод позволяет получить простые формулы расчета изгиба и определить те параметры, при которых проявляются первые пластические деформации в середине пролета арки.

Условия шарнирного опирания будут удовлетворены, если искать решение в виде

$$W = W_0 \sin \pi \xi.$$

Здесь W_0 — безразмерный прогиб в середине арки. После преобразований из уравнения (9) получаем:

$$q^* = \pi^3 W_0 \{ \lambda \pi^2 [\xi_1 - (2\pi)^{-1} \sin \pi \xi_1 - 1/2] - 6\lambda C_1 + \pi^2 - k^2 \} / 4c + \pi^3 k^2 / 4, \quad (11)$$

где

$$C_1 = \int_{\xi_1}^{1/2} \{ [(4r^2 - 1)r'' + 8r(r')^2 - \pi^2 r(4r - 3)/3] \sin^2 \pi \xi + \pi r(4r^2 - 1) \sin 2\pi \xi \} d\xi.$$

Интегрируя (10) и удовлетворяя граничным условиям, найдем:

$$k^2 = [12\lambda B_2 - 3\pi^2 W_0 (W_0/2 - c) + p/2] / (2B_1 + \xi_1), \quad (12)$$

где

$$B_1 = \int_{\xi_1}^{1/2} (d\xi) / (2 - \lambda - 2\lambda r),$$

$$B_2 = \int_{\xi_1}^{1/2} [2n(r+1/2) + (r^2 - 1/4) W_0 \pi^2 \sin \pi \xi] (d\xi) / (2 - \lambda - 2\lambda r).$$

Уравнение (8) можем переписать в виде:

$$3\pi^2 W_0 [2\lambda r^2 - 2(2 - \lambda)r + \lambda/2] \sin \pi \xi + k^2 - 12n = 0:$$

Из этого уравнения определим координату ξ_1 , при которой начинается зона упруго-пластических деформаций (учитывая условия $\lambda=0$ и $r=-1/2$), величину r и ее производные

$$\xi_1 = \pi^{-1} \arcsin [(12n - k^2) / (6\pi^2 W_0)], \quad (13)$$

$$r = (2 - \lambda) / (2\lambda) - [(1 - \lambda) / \lambda^2 + (\sin \pi \xi_1) / (\lambda \sin \pi \xi)]^{1/2},$$

$$r' = [(2 - \lambda)r - \lambda r^2 - \lambda/4] \pi (\cot \pi \xi) / (2\lambda r - 2 + \lambda), \quad (14)$$

$$r'' = \{ \pi^2 [\lambda r^2 - (2 - \lambda)r + \lambda/4] - 2\lambda (r')^2 \} / (2\lambda r - 2 + \lambda) - 2\pi r' \cot \pi \xi.$$

Из системы (12) и (13), исключая k^2 , получим:

$$W_0 = 2D + 2\xi_1 \sin \pi \xi_1 + c - [(2D + 2\xi_1 \sin \pi \xi_1 + c)^2 - (12n - p) / (3\pi^2)]^{1/2}, \quad (15)$$

где

$$D = \int_{\xi_1}^{1/2} [\sin \pi \xi_1 + \lambda(r^2 - 1/4) \sin \pi \xi] (d\xi) / (1 - \lambda/2 - \lambda r).$$

Для вычисления прогиба и соответствующей нагрузки заданым ξ_1 , m , n и p . По формулам (11), (12) и (15) найдем q^* , k^2 и W_0 .

Формулы для определения параметров, при которых происходит переход из упругого состояния в упруго-пластическое, выводим из соотношений (11), (12) и (15) при условии $\xi_1 = 1/2$ и получим

$$\begin{aligned} k^2 &= 6(2n - \pi^2 W_0); \\ q^* &= \pi^3 [W_0(\pi^2 - k^2)/(4c) + k^2/4], \\ W_0 &= 1 + c - [(1+c)^2 - (12n - p)/(3\pi^2)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из уравнений расчета шарнирно опертых упруго-пластических пологих синусоидальных арок под влиянием равномерной поперечной нагрузки и равномерного нагревания (11), (12), (15) и (16), получим следующие частные случаи:

- 1) $p = 0$ (без нагрева) — результаты в статье [3],
- 2) $p = \lambda = 0$ (упругая арка без нагрева) в [1],
- 3) $\lambda = 0$ (упругая арка с учетом нагрева) в [2].

Литература

1. Григолюк Э. И. К расчету устойчивости пологих арок. — Инж. сб., 1951, 9, 177—200.
2. Григолюк Э. И. Тонкие биметаллические оболочки и пластины. — Инж. сб., 1953, 17, 69—120.
3. Иыги Э. А. Об устойчивости упруго-пластических пологих арок. — Мех. полимеров, 1968, 5, 887—896.

Поступило
11 I 1979

ZUR BIEGUNG EINES SCHWACH GEKRÜMMTEN ELASTISCH-PLASTISCHEN STABES

E. Jögi

Zusammenfassung

In der Arbeit [3] wird die Methode für Berechnung eines schwach gekrümmten elastisch-plastischen Stabes behandelt; wenn der Stab unter der Wirkung einer verteilten Last sich befindet.

Im vorliegenden Aufsatz werden die Resultate der Arbeit [3] verallgemeinert für den Fall, wenn der Stab auch unter der Wirkung gleichmässiger Temperatur sich befindet. Als Beispiel wird der in seinem Enden gelenkig gelagerte schwach-gekrümmte sinusförmige Stab mit einem Rechteckquerschnitt betrachtet. Bei der Lösung wird die Methode Galerkins gebraucht. In dem Aufsatz werden Formeln gegeben, aus denen die Last und die dazuhörige Durchbiegung berechnet werden können, wo die plastischen Deformationen im Stab beginnen.

ОБ УСЛОВИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ БАЛОК С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОПОРАМИ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

Ю. Лепик

Тартуский государственный университет

Для уменьшения податливости конструкции можно поставить к ней дополнительные опоры; их положение опеределяется так, чтобы некоторая характеристическая величина (например, наибольший прогиб) была минимальна. В случае статического нагружения эта задача решалась Мрузом и Розвани [6]; ими выведены также условия оптимальности для нелинейно упругой балки. Эти результаты нашли продолжение в работах [5, 8]. В работе Ю. Лепика [4] при помощи аппарата теории оптимального управления решена поставленная задача для произвольного критерия податливости. Условие оптимального положения опоры для жестко-пластической балки дано Прагером и Розвани в [7].

Во всех этих работах ограничивались случаем статического нагружения. Но в современной технике приходится нередко рассчитывать подверженные действию динамических нагрузок конструкции. Отсюда вытекает необходимость вывести условия оптимальности для задач динамики. Такие условия, применяя метод модальных решений, получены автором в работе [1]. Представляет интерес найти и класс более точных (немодальных) решений. Этот вопрос исследуется в данной статье, где исходят из теории оптимального управления с распределенными параметрами.

В первом параграфе дается постановка задачи. Во втором параграфе проблема формулируется как задача теории оптимального управления. Строится минимизируемый функционал, находится его вариация. Условия оптимальности приобретают более простой вид, если задача является самосопряженной; этот случай исследуется в § 3. В последнем, четвертом параграфе, изучаются балки из жесткопластического материала. Выведено условие оптимальности, которое является обобщением известного из статики условия Прагера—Розвани.

§ 1. Основные уравнения проблемы

Рассмотрим балку из нелинейно-упругого материала. Ось x направим по длине балки, для простоты ограничимся случаем, когда балка имеет постоянное поперечное сечение прямоугольной формы. В начальный момент времени балке сообщена некоторая поперечная скорость $v = v(x)$. Дальнейшее движение балки происходит согласно дифференциальным уравнениям

$$M' = Q, \quad Q' = \rho B h \ddot{w}, \quad (1.1)$$

где w — прогиб, M — изгибающий момент, Q — перерезывающая сила, ρ — плотность, B — ширина и h — высота балки. Штрихами обозначены производные по координате x , точками — производные по времени t .

Будем считать, что материал балки подчиняется определенному закону

$$\sigma = c |\varepsilon|^n \operatorname{sgn} \varepsilon = c |zk|^n \operatorname{sgn} (zk), \quad (1.2)$$

где σ — нормальное напряжение, $n \leq 1$ и c — неотрицательные постоянные, k — кривизна оси балки. Для балки прямоугольного поперечного сечения изгибающий момент вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} M &= 2cB |k|^n \operatorname{sgn} k \int_0^{h/2} z^{n+1} dz = \\ &= \frac{cB}{(n+2)2^{n+1}} h^{n+2} |k|^n \operatorname{sgn} k. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Так как $k = -w''$, то уравнение (1.3) можно представить в виде

$$w'' = A |M|^{1/n} \operatorname{sgn} M, \quad (1.4)$$

где

$$A = \frac{2}{h} \left[\frac{2(n+2)}{cBh^2} \right]^{1/n} \quad (1.5)$$

Ограничимся лишь случаем, когда краевые условия имеют вид

$$wQ = 0, \quad w'M = 0 \quad \text{при } x=0, \quad x=l.$$

Для уменьшения податливости балки поставим в некоторое сечение $x = s$ дополнительную опору. Будем считать, что реакции опоры выражаются формулами (см. фиг. 1)

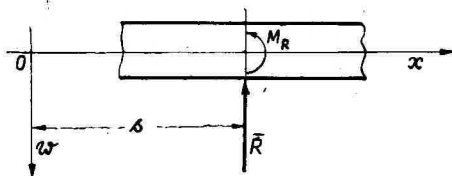


Рис. 1

$$R = \kappa_1 |w|^m \operatorname{sgn} w, \quad M_R = \kappa_2 |w'|^m \operatorname{sgn} w'. \quad (1.6)$$

Постоянные κ_1 и κ_2 обозначают коэффициенты жесткости опоры. Для жестких опор имеем соответственно $w(s) = 0$ и $\kappa_1 \rightarrow 0$ или $w'(s) = 0$ и $\kappa_2 \rightarrow \infty$. Случай $m = 1$ соответствует упругой опоре. При $0 < m < 1$ имеем нелинейно-упругую опору. Для опорных реакций R и M_R выполняются соотношения

$$\begin{aligned} Q(s+, t) - Q(s-, t) &= R(s, t), \\ M(s+, t) - M(s-, t) &= -M_R(s, t): \end{aligned} \quad (1.7)$$

С целью дать как можно более общую постановку задачи, возьмем минимизируемый функционал в виде

$$J = \int_0^l F[w(x, T), w'(x, T), h] dx. \quad (1.8)$$

Здесь T — некоторый характерный данной задаче момент времени. Его можно определить, например, из условия

$$\int_0^l \dot{w}(x, T) dx = 0. \quad (1.9)$$

Смысл этого требования заключается в следующем. Под действием заданного импульса начинаются затухающие колебания. В случае модального решения существует некоторый момент времени $t = T$, где скорости w' для всех точек становятся одновременно равными нулю. В рассматриваемом случае решение немодальное и в момент времени T некоторые участки балки продолжают движения вперед, а в остальных уже началось движение в обратном направлении. Другими словами, величина $w'(x, T)$ имеет различные знаки в разных участках длины балки. Естественно выбрать для T такой момент времени, когда средняя скорость равняется нулю.

В задачах оптимизации существуют еще ограничения (например, объем балки или наибольший прогиб могут быть заданы). В случае данной задачи допустим, что имеет место лишь одно ограничение, которое представим в интегральной форме

$$\int_0^l g[w(x, T), w'(x, T), \dot{w}(x, T), h] dx = V. \quad (1.10)$$

Значение постоянной V будем считать известным. Некоторые конкретные виды зависимостей (1.8) и (1.10) рассматриваются в дальнейшем.

§ 2. Вывод условий оптимальности

Сформулируем поставленную в § 1 задачу в терминах теории оптимального управления. Для этого введем следующие фазовые переменные:

$$z_1 = \omega, \quad z_2 = \omega', \quad z_3 = M, \quad z_4 = Q, \quad z_5 = \dot{\omega}.$$

Дифференциальные уравнения (1.1) и (1.4) можем теперь представить в виде

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2, & z_2' &= -A|z_3|^{1/n} \operatorname{sgn} z_3, & z_3' &= z_4, & z_4' &= \rho B h u_4, & z_5' &= u_1, \\ \dot{z}_1 &= z_5, & \dot{z}_2 &= u_1, & \dot{z}_3 &= u_2, & \dot{z}_4 &= u_3, & \dot{z}_5 &= u_4. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь символами u_1, u_2, u_3, u_4 обозначены по терминологии К. А. Лурье [3] параметрические переменные. В работе [3] показано, что при выводе необходимых условий стационарности можно не делать различия между параметрическими переменными и управлениями.

Имея в виду соотношения (1.6) — (1.7), получим условия разрыва в точке

$$\begin{aligned} z_3(s+, t) - z_3(s-, t) &= -\kappa_2 |z_2(s, t)|^m \operatorname{sgn} z_2, \\ z_4(s+, t) - z_4(s-, t) &= \kappa_1 |z_1(s, t)|^m \operatorname{sgn} z_1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Граничные и начальные условия можем представить в виде

$$\begin{aligned} z_1 z_4 = z_2 z_3 = z_5 z_4 &= 0 \quad \text{при } x=0, x=l; \\ z_1 = z_2 = 0, \quad z_5 = v(x) & \quad \text{при } t=0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Введем еще дополнительные фазовые переменные $y_1(x, T)$ и $y_2(x, T)$ так, чтобы

$$y_1' = z_5(x, T), \quad y_2' = g[z_1(x, T), z_2(x, T), z_5(x, T), h]; \quad (2.4)$$

Интегральные ограничения (1.9) и (1.10) удовлетворяются, если к уравнениям (2.4) прибавить граничные условия $y_1(0, T) = y_1(l, T) = y_2(0, T) = 0, \quad y_2(l, T) = V$.

Теперь получим следующую математическую задачу теории оптимального управления:

Минимизировать функционал

$$J = \int_0^l F[z_1(x, T), z_2(x, T), h] dx \quad (2.5)$$

при дифференциальных связях (2.1) и (2.4); полученное решение должно удовлетворять граничным и начальным условиям (2.3) и условиям разрыва (2.2). Координата опоры s является оптимизируемым параметром.

Для решения этой задачи построим вспомогательный функционал

$$I = J + \sum_{i=1}^5 I_i, \quad (2.6)$$

где

$$I_1 = \int_0^l \int_0^T \left[\sum_{j=1}^5 (\psi_j z_j' + \varphi_j \dot{z}_j) - H \right] dx dt,$$

$$I_2 = \int_0^T \left[(v_1 z_1 z_4 + v_2 z_2 z_3 + v_3 z_5 z_4) \Big|_{x=0} + \right. \\ \left. + (v_4 z_1 z_4 + v_5 z_2 z_3 + v_6 z_5 z_4) \Big|_{x=l} \right] dt,$$

$$I_3 = \int_0^l \{ v_7 z_1(x, 0) + v_8 z_2(x, 0) + v_9 [z_5(x, 0) - v(x)] \} dx,$$

$$I_4 = \int_0^T \{ \mu_1 [z_3(s+, t) - z_3(s-, t)] + \mu_2 |z_2(s, t)|^m \operatorname{sgn} z_2 + \\ + \mu_2 [z_4(s+, t) - z_4(s-, t)] - \mu_1 |z_1(s, t)|^m \operatorname{sgn} z_1 \} dt,$$

$$I_5 = \int_0^l \{ \gamma_1 [y_1' - z_5(x, T)] + \gamma_2 [y_2' - g] \} dx.$$

Здесь обозначено

$$H = \psi_1 z_2 - A \psi_2 |z_3|^{1/n} \operatorname{sgn} z_3 + \psi_3 z_4 + \psi_4 Q B h u_4 + \psi_5 u_1 + \\ + \varphi_1 z_5 + \varphi_2 u_1 + \varphi_3 u_2 + \varphi_4 u_3. \quad (2.7)$$

Коэффициенты $\psi_1, \dots, \psi_5, \varphi_1, \dots, \varphi_5, v_1, \dots, v_7, \mu_1, \mu_2, \gamma_1, \gamma_2$ суть множители Лагранжа.

Необходимое условие оптимальности требует, чтобы полная вариация функционала I равнялась нулю, т. е.

$$\Delta I = \delta I + \frac{\partial I}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial I}{\partial T} \Delta T = 0.$$

Введем еще вспомогательные обозначения

$$\Delta_s f = \delta f + \frac{\partial f}{\partial s} \Delta s, \quad \Delta_T f = \frac{\partial f}{\partial T} \Delta T.$$

Проведя варьирование величин, встречающихся в формуле (2.6), после нескольких преобразований приходим к соотношениям

$$\Delta J = \int_0^l \left[\frac{\partial F}{\partial z_1(x, T)} \Delta_T z_1(x, T) + \frac{\partial F}{\partial z_2(x, T)} \Delta_T z_2(x, T) + \frac{\partial F}{\partial h} \delta h \right] dx,$$

$$\Delta I_1 = - \int_0^l \int_0^T \left[\sum_{j=1}^5 \left(\psi_j z_j' + \varphi_j \dot{z}_j + \frac{\partial H}{\partial z_j} \right) \delta z_j + \frac{\partial H}{\partial h} \delta h + \right. \\ \left. + (\psi_5 + \varphi_2) \delta u_1 + \varphi_3 \delta u_2 + \varphi_4 \delta u_3 + (Q B h \psi_4 + \varphi_5) \delta u_4 \right] dx dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{j=1}^5 \left\{ (\psi_j \delta z_j) \Big|_{x=0}^{x=l} - [\psi_j (\Delta_s z_j - z_j' \Delta s)] \Big|_{x=s-}^{x=s+} \right\} dt +$$

$$+ \int_0^l \sum_{j=1}^5 \left\{ [\varphi_j (\Delta_T z_j - \dot{z}_j \Delta T)] \Big|_{t=T} - (\varphi_j \delta z_j) \Big|_{t=0} \right\} dx,$$

$$\begin{aligned} \Delta I_2 &= \int_0^T [(v_1 z_4 \delta z_1 + v_2 z_3 \delta z_2 + v_2 z_2 \delta z_3 + (v_1 z_1 + v_3 z_5) \delta z_4 + v_3 z_4 \delta z_5) |_{x=0} + \\ &+ (v_4 z_4 \delta z_1 + v_5 z_3 \delta z_2 + v_5 z_2 \delta z_3 + (v_4 z_1 + v_6 z_5) \delta z_4 + v_6 z_4 \delta z_5) |_{x=l}] dt, \\ \Delta I_3 &= \int_0^l [v_7 \delta z_1(x, 0) + v_8 \delta z_2(x, 0) + v_9 \delta z_5(x, 0)] dx, \\ \Delta I_4 &= \int_0^T \{ \mu_1 [\Delta_s z_3(s+, t) - \Delta_s z_3(s-, t) + \kappa_2 m | z_2(s, t) |^{m-1} \Delta_s z_2(s, t)] + \\ &+ \mu_2 [\Delta_s z_4(s+, t) - \Delta_s z_4(s-, t) - \kappa_1 m | z_1(s, t) |^{m-1} \Delta_s z_1(s, t)] \} dt, \\ \Delta I_5 &= - \int_0^l \left\{ \gamma_1' \Delta_T y_1 + \gamma_2' \Delta_T y_2 + \gamma_1 \Delta_T z_5(x, T) + \right. \\ &+ \gamma_2 \left[\frac{\partial g}{\partial z_1(x, T)} \Delta_T z_1(x, T) + \frac{\partial g}{\partial z_2(x, T)} \Delta_T z_2(x, T) + \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial g}{\partial z_5(x, T)} \Delta_T z_5(x, T) + \frac{\partial g}{\partial h} \delta h \right] \right\} dx. \end{aligned}$$

При выводе этих соотношений учтено то обстоятельство, что функции $z_1, z_2, z_5, y_1, y_2, F$ и g непрерывны при $x = s$.

Все вариации, встречающиеся в этих формулах, являются независимыми величинами и, следовательно, выражения, стоящие перед ними, должны равняться нулю. Выполняя эти требования, приходим к следующим группам уравнений:

1) Приравнивая нулю коэффициенты при вариациях $\delta z_j(x, t)$, приходим к сопряженной системе

$$\psi_j' + \dot{\varphi}_j = - \frac{\partial H}{\partial z_j} \quad (j=1, 2, 3, 4, 5).$$

Из независимости вариации $\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3$ и δu_4 находим, что

$$\varphi_2 = -\psi_5, \quad \varphi_3 = \varphi_4 = 0, \quad \varphi_5 = -\rho B h \psi_4. \quad (2.8)$$

Учитывая эти соотношения, а также формулу (2.7), можем сопряженную систему представить в форме

$$\psi_1' + \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \psi_2' - \dot{\psi}_5 = -\psi_1, \quad (2.9)$$

$$\psi_3' = A \psi_2 |z_3|^{1/n-1/n}, \quad \psi_4' = -\psi_3, \quad \psi_5' - \rho B h \psi_4 = -\varphi_1.$$

2) Приравнивая нулю коэффициенты при вариациях $\delta z_j(0, t)$ и $\delta z_j(l, t)$, получаем условия трансверсальности. Исключая из них множители Лагранжа v_1, \dots, v_6 , находим

$$\psi_2 z_2 = \psi_3 z_3, \quad \psi_4 z_4 = \psi_1 z_1 + \psi_5 z_5 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=l. \quad (2.10)$$

3) Члены с вариациями $\delta z_j(x, 0)$ дадут $\gamma_7 = \varphi_1(x, 0)$,

$$\gamma_8 = \varphi_2(x, 0) \quad \varphi_3(x, 0) = \varphi_4(x, 0) = 0, \quad \gamma_9 = \varphi_5(x, 0).$$

4) Члены с вариациями $\Delta_T z_j(x, T)$ приведут к уравнениям

$$\varphi_i + \frac{\partial(F - \gamma_2 g)}{\partial z_i} \Big|_{t=T} = 0 \quad (i=1, 2),$$

$$\varphi_3|_{t=T} = \varphi_4|_{t=T} = 0, \quad \left(\varphi_5 - \gamma_1 - \gamma_2 \frac{\partial g}{\partial z_5} \right) \Big|_{t=T} = 0. \quad (2.11)$$

Из этих соотношений можем определить множители Лагранжа γ_1 и γ_2 . В силу независимости вариаций $\Delta_T y_1$ и $\Delta_T y_2$, имеем $\gamma_1 = \text{const}$ и $\gamma_2 = \text{const}$.

5) Приравниваем теперь нулю коэффициенты при вариациях $\Delta_s z_j(s, t)$. Так как величины z_3 и z_4 могут иметь при $x = s$ разрывы, то следует отдельно рассмотреть вариации $\Delta_s z_j(s-, t)$ и $\Delta_s z_j(s+, t)$, если $j = 3$ или $j = 4$. Учитывая это обстоятельство, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \psi_1(s-, t) - \psi_1(s+, t) - \mu_2 \kappa_1 m |z_1(s, t)|^{m-1} &= 0, \\ \psi_2(s-, t) - \psi_2(s+, t) + \mu_1 \kappa_2 m |z_2(s, t)|^{m-1} &= 0, \\ \mu_1 = \varphi_3(s-, t) = \varphi_3(s+, t), \quad \mu_2 = \psi_4(s-, t) = \psi_4(s+, t). \end{aligned} \quad (2.12)$$

6) Коэффициент при вариации Δs приводит нас как уравнению

$$\int_0^T \sum_{j=1}^5 (\psi_j z_j') \Big|_{x=s-} dt = \int_0^T \sum_{j=1}^5 (\psi_j z_j') \Big|_{x=s+} dt. \quad (2.13)$$

7) Члены с вариацией ΔT дадут

$$\int_0^l \sum_{j=1}^5 (\varphi_j z_j) \Big|_{t=T} dx = 0. \quad (2.14)$$

8) Варьируя высоту балки, находим

$$\int_0^l \left[\frac{\partial(F - \gamma_2 g)}{\partial h} - \int_0^T \frac{\partial H}{\partial h} dt \right] dx = 0. \quad (2.15)$$

Из найденных уравнений (2.9) — (2.15) можем определить для оптимального проекта все интересующие нас величины (в том числе и множители Лагранжа). Задача поставлена нами в довольно общей форме: путем конкретизации функций F и g можно прийти к частным видам задачи. Например, при $F = Bh$ минимизируется объем балки; при $F = z_1(x, T)$ — средний прогиб в момент времени $t = T$; принимая $F = z_2(x, T)$, минимизируем прогиб на конце балки. Для выбора функции g также имеется много возможностей. Если, например, взять $g = h$, то задан

объем балки; в случаях $g = z_1(x, T)$, $g = z_2(x, T)$ и $g = z_5^2(x, T)$ заданы для момента времени $t = T$ средний прогиб, прогиб в конце балки или кинетическая энергия.

§ 3. Самосопряженные задачи

Удовлетворение всех соотношений (2.1)—(2.4) и (2.8)—(2.15) является весьма сложной проблемой. Но ее решение значительно упрощается, если задача является самосопряженной. Исследуем возможность получения такого класса решений. Ограничимся лишь случаем упругой балки, где $n = 1$. Полагая

$$\psi_1 = -z_4, \quad \psi_2 = z_3, \quad \psi_3 = -z_2, \quad \psi_4 = z_1, \quad \psi_5 = 0, \quad \varphi_1 = \rho B h z_5, \quad (3.1)$$

видим, что уравнения (2.1) и (2.9) совпадают. Для того, чтобы задача была самосопряженной, должны быть при (3.1) удовлетворены и остальные уравнения (2.10)—(2.15). Проверим выполнено ли это обстоятельство.

Нетрудно видеть, что при $m = 1$ уравнения (2.10) и (2.12) переходят в (2.2) и (2.3). Что касается соотношения (2.14), то согласно формулам (2.1) и (2.8) его можно представить в виде

$$\frac{1}{2} \int_0^h \rho B h z_5^2(x, T) dx - \frac{1}{2} \int_0^l z_1(x, T) z_4'(x, T) dx = 0. \quad (3.2)$$

Первый интеграл даст кинетическую энергию в момент времени T ; обозначим ее через K . Второй член интегрируем два раза по частям; учитывая при этом соотношения (1.7) и (2.1), находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l z_1(x, T) z_4'(x, T) dx = & \frac{1}{2} [R(T) w(s, T) + \\ & + M_R(T) w'(s, T)] - \frac{1}{2} \int_0^l A M^2(x, T) dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Так как $W = 0,5 A M^2$ есть удельная дополнительная энергия балки, то формула (3.2) приобретает вид

$$\frac{1}{2} (Rw + M_R w') \Big|_{x=s}^{t=T} = K + \int_0^l W(x, T) dx.$$

Это есть уравнение энергии для момента времени $t = T$. Следовательно, требование (3.2) выполняется автоматически. Формулу (2.15) можно рассматривать как уравнение для определения оптимального значения h и его удовлетворение никаких

принципиальных затруднений не причиняет. Далее переходим к уравнению (2.13). Так как

$$\sum_{j=1}^5 \psi_j z_j' = -2z_2 z_4' - 2W_1 + \rho B h z_1 z_5',$$

то можем написать его в форме

$$\int_0^T \{ z_2(s, t) [z_4(s+, t) - z_4(s-, t)] + W(s+, t) - W(s-, t) - \\ - \frac{1}{2} \rho B h z_1(s, t) [z_5(s+, t) - z_5(s-, t)] \} dt = 0, \quad (3.4)$$

Проведя интегрирование по частям, находим

$$\int_0^T z_1 z_5 dt = (z_1 z_5) \Big|_0^T - \int_0^T z_5^2 dt:$$

Учитывая, что величины z_1 и z_5 являются при $x = s$ непрерывными, можем уравнению (3.4) дать вид

$$\int_0^T [R(t) w'(s, t) + W(s+, t) - W(s-, t)] dt = 0. \quad (3.5)$$

В статике имеем условие оптимальности Мруза—Розвани [5]

$$R w'(s) + W(s+) - W(s-) = 0.$$

Полученные нами интегральные условия (3.5) можно рассматривать как обобщение условия Мруза—Розвани в случае динамического нагружения.

Наибольшие трудности возникают с удовлетворением условий (2.11), которые в случае подстановок (3.1) будут иметь вид

$$\frac{\partial (F - \gamma_2 g)}{\partial z_1(x, T)} = -\rho B h z_5(x, T); \quad \frac{\partial (F - \gamma_2 g)}{\partial z_2(x, T)} = 0, \quad (3.6)$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 \frac{\partial g}{\partial z_5(x, T)} = -\rho B h z_1(x, T).$$

Для заданных функций F и g должны найтись такие постоянные γ_1 и γ_2 , чтобы уравнения (3.6) были удовлетворены. Для класса задач, сформулированного в § 1 данной работы, система (3.6) несовместна и, следовательно, самосопряженных решений не существует. Уравнения (3.6) удастся удовлетворить лишь при модификации постановки оптимизационных задач. Например, если потребовать, чтобы $w'(x, T) \equiv 0$ для любого $x \in [0, l]$, то множитель Лагранжа γ — не постоянный, а является функцией от координаты x и, выбирая подходящие виды функций F и g , можно выполнить требования (3.6). Отметим еще, что равенство $w'(x, T) \equiv 0$ всегда выполняется в случае метода модальных решений.

§ 4. Балки из жестко-пластического материала

Найдем теперь условие оптимальности расположения опоры для балки из идеально жестко-пластического материала. Обозначим символом M_s предельный момент. В балке существуют некоторые участки, где $|M| < M_s$; совокупность этих участков обозначим через L_1 . Под символом L_2 будем понимать совокупность участков конечной длины, где $|M| = M_s$. Кроме того, в балке могут существовать дискретные значения $x = x_i$, где $|M| = M_s$ (пластические шарниры); множество таких значений x_i обозначим символом L_3 .

Уравнения движения (1.1) сохраняют свой прежний вид. Так как при $|M| < M_s$ балка остается жесткой, то имеем $w'''' = 0$ для $x \in L_1$. Из второго уравнения (1.1) вытекает, что $w'' = 0$ для $x \in L_2$.

Допустим снова, что в сечении $x = s$ имеется дополнительная опора. Для простоты будем считать, что $M_R = 0$; силу реакции опоры R опять определим согласно первой формуле из (1.6).

Под действием заданного поля начальных скоростей $w'(x, 0) = v(x)$ начинается движение балки. В отличие от нелинейно-упругого материала, где совершаются затухающие колебания, здесь можно указать некоторый момент времени $t = T$, когда движение балки полностью прекращается, т. е. $w'(x, T) = 0$ для любого $x \in [0, l]$. Учитывая этот факт, целесообразно определить функции F и g другим образом. Пусть $x = x_*$ есть некоторая заданная точка. Минимизируемый функционал возьмем в форме $F[w(x_*, T), w'(x_*, T), h]$. Функцию g , характеризующую приложенное к балке ограничение, выбираем в виде $g[w(x, T), w'(x, T), h] \leq S$ для любого $x \in [0, l]$.

Введем следующие фазовые переменные $z_1 = w$, $z_2 = w'$, $z_3 = M$, $z_4 = Q$, $z_5 = w''$ и $z_6 = w'''$. Теперь можем сформулировать следующую математическую задачу:

Минимизировать функционал

$$F[z_1(x_*, T), z_2(x_*, T), h] \quad (4.1)$$

при дифференциальных связях

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2, & z_2' &= u_1, & z_3' &= z_4, & z_4' &= \rho B h u_2, & z_5' &= z_6, & z_6' &= u_3, \\ \dot{z}_1 &= z_5, & \dot{z}_2 &= z_6, & \dot{z}_3 &= u_4, & \dot{z}_4 &= u_5, & \dot{z}_5 &= u_2, & \dot{z}_6 &= u_6; \end{aligned} \quad (4.2)$$

при краевых и начальных условиях

$$z_1 z_4 = z_2 z_3 = z_5 z_4 = z_6 z_3 = 0 \quad \text{при } x=0, \quad x=l,$$

$$z_1(x, 0) = z_2(x, 0) = 0; \quad z_5(x, 0) = v(x), \quad z_6(x, 0) = v'(x),$$

и при ограничениях

$$z_4(s+, t) - z_4(s-, t) = \kappa_1 |z_4(s, t)|^m \operatorname{sgn} z_4;$$

(4.3)

$$z_5(x, T) = 0, \quad g[z_1(x, T), z_2(x, T); h] \leq S \quad \forall x \in [0, l],$$

$$u_3 = 0 \quad \text{для } x \in L_1, \quad u_2 = u_4 = u_5 = 0 \quad \forall x \in L_2. \quad (4.4)$$

Для решения этой задачи введем гамильтониан

$$H = \psi_1 z_2 + \psi_2 u_1 + \psi_3 z_4 + \rho B h \psi_4 u_2 + \psi_5 z_6 + \psi_6 u_3 + \\ + \varphi_1 z_5 + \varphi_2 z_6 + \varphi_3 u_4 + \varphi_4 u_5 + \varphi_5 u_2 + \varphi_6 u_6 \quad (4.5)$$

и построим вспомогательный функционал

$$J = F + \sum_{i=1}^6 J_i, \quad (4.6)$$

где

$$J_1 = \int_0^l \int_0^T \left[\sum_{j=1}^6 (\psi_j z_j' + \varphi_j \dot{z}_j) - H \right] dx dt,$$

$$J_2 = \int_0^T \left[(v_1 z_1 z_4 + v_2 z_2 z_3 + v_3 z_5 z_4 + v_4 z_6 z_3) \Big|_{x=0} + \right. \\ \left. + (v_5 z_1 z_4 + v_6 z_2 z_3 + v_7 z_5 z_4 + v_8 z_6 z_3) \Big|_{x=l} \right] dt,$$

$$J_3 = \int_0^l \{ v_9 z_1(x, 0) + v_{10} z_2(x, 0) + v_{11} [z_5(x, 0) - \sigma(x)] + \\ + v_{12} [z_6(x, 0) - \sigma'(x)] \} dx,$$

$$J_4 = \int_0^T \mu [z_4(s+, t) - z_4(s-, t) - \kappa_1 |z_1(s, t)|^m \operatorname{sgn} z_1] dt,$$

$$J_5 = \int_0^T \left\{ \left[\int_0^l \lambda (z_3^2 - M_s^2 + \sigma^2) dx \right] + \sum_{i=1}^l \lambda_i [z_3^2(x_i, t) - M_s^2] \right\} dt,$$

$$J_6 = \int_0^l [\gamma_1 z_5(x, T) + \gamma_2 (g - S + \sigma_1^2)] dx.$$

В этих формулах коэффициенты ψ_j , φ_j , v_i , μ , λ , λ_i , γ_1 и γ_2 суть множители Лагранжа, а σ и σ_1 — некоторые, пока неизвестные, функции.

Вычислим полные вариации этих величин. Так как $z_5(x_*, T) = z_6(x_*, T) = 0$, то

$$\Delta F = \left[\frac{\partial F}{\partial z_1(x_*, T)} \frac{\partial z_1(x_*, T)}{\partial T} + \frac{\partial F}{\partial z_2(x_*, T)} \frac{\partial z_2(x_*, T)}{\partial T} \right] \Delta T + \\ + \frac{\partial F}{\partial h} \delta h = \frac{\partial F}{\partial h} \delta h.$$

Обозначим

$$\Delta x_i f = \delta f + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_i} \Delta x_i$$

и добавим к точкам разрыва $x = x_i$ точку $x = s$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\Delta I_1 = & - \int_0^l \int_0^T \left[\sum_{j=1}^6 \left(\psi_j' + \dot{\varphi}_j + \frac{\partial H}{\partial z_j} \right) \delta z_j + \frac{\partial H}{\partial h} \delta h + \psi_2 \delta u_1 + \right. \\
& \left. + (QBh\psi_4 + \varphi_5) \delta u_2 + \psi_6 \delta u_3 + \varphi_3 \delta u_4 + \varphi_4 \delta u_5 + \varphi_6 \delta u_6 \right] dx dt + \\
& + \sum_{j=1}^6 \int_0^T \left\{ (\psi_j \delta z_j) \Big|_{x=0}^{x=l} - \sum_{i=1}^h [\psi_j (\Delta_{x_i} z_j - z_j' \Delta x_i)] \Big|_{x=x_{i-}}^{x=x_{i+}} \right\} dt + \\
& + \sum_{j=1}^6 \int_0^l \left\{ [\varphi_j (\Delta_T z_j - z_j \Delta T)] \Big|_{t=T} - (\varphi_j \delta z_j) \Big|_{t=0} \right\} dx, \\
\Delta I_2 = & \int_0^T \left\{ [v_1 z_4 \delta z_1 + v_2 z_3 \delta z_2 + (v_2 z_2 + v_4 z_6) \delta z_3 + (v_1 z_1 + v_3 z_5) \delta z_4 + \right. \\
& \left. + v_3 z_4 \delta z_5 + v_4 z_3 \delta z_6] \Big|_{x=0} + [v_5 z_4 \delta z_1 + v_6 z_3 \delta z_2 + \right. \\
& \left. + (v_6 z_2 + v_8 z_6) \delta z_3 + (v_5 z_1 + v_7 z_5) \delta z_4 + v_7 z_4 \delta z_5 + v_8 z_3 \delta z_6] \Big|_{x=l} \right\} dt, \\
\Delta I_3 = & \int_0^l [v_9 \delta z_1(x, 0) + v_{10} \delta z_2(x, 0) + v_{11} \delta z_5(x, 0) + v_{12} \delta z_2(x, 0)] dx, \\
\Delta I_4 = & \int_0^T \mu [\Delta_s z_4(s^+, t) - \Delta_s z_4(s^-, t) - \kappa_1 m |z_1(s, t)|^{m-1} \Delta_s z_1(s, t)] dt, \\
\Delta I_5 = & 2 \int_0^l \int_0^T \lambda \left(z_3 \delta z_3 + \sigma \delta \sigma - M_s \frac{\partial M_s}{\partial h} \delta h \right) dx dt + \\
& + 2 \sum_{i=1}^h \int_0^T \lambda_i \left[z_3(x_i, t) \Delta_{x_i} z_3(x_i, t) - M_s \frac{\partial M_s}{\partial h} \delta h \right] dt, \\
\Delta I_6 = & \int_0^l \left\{ \gamma_1 \Delta_T z_5(x, T) + \gamma_2 \left[\frac{\partial g}{\partial z_1(x, T)} \Delta_T z_1(x, T) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial g}{\partial z_2(x, T)} \Delta_T z_2(x, T) + \frac{\partial g}{\partial h} \delta h + 2\sigma_1 \Delta_T \sigma_1 \right] \right\} dx.
\end{aligned}$$

Все пластические шарниры можно разделить на стационарные и нестационарные; в первом случае имеем $\Delta x_i = 0$, а во втором — $\Delta x_i \neq 0$. Во всех шарнирах фазовые переменные z_1 , z_3 и z_5 должны быть непрерывными, т. е.

$$\Delta_{x_i} z_j(x_i^-, t) = \Delta_{x_i} z_j(x_i^+, t)$$

при $j = 1, 3, 5$. Если в точке $x = x_i$ не приложена сосредоточенная сила, то также

$$\Delta_{x_i} z_4(x_i^-, t) = \Delta_{x_i} z_4(x_i^+, t).$$

Кроме того, в случае нестационарного шарнира имеем

$$\Delta_{x_i} z_2(x_i^-, t) = \Delta_{x_i} z_2(x_i^+, t).$$

Необходимое условие стационарности имеет опять вид $\Delta I = 0$. Учитывая независимость рассматриваемых вариаций, приходим к следующим уравнениям:

1) Из анализа членов, содержащих вариации δu_j , находим

$$\begin{aligned} \psi_2 = \varphi_6 &\equiv 0 \text{ для } x \in [0, l]; \\ u_3 &\equiv 0, \quad \varphi_3 = \varphi_4 \equiv 0, \quad \varphi_5 + \rho B h \varphi_4 \equiv 0 \text{ для } x \in L_1; \\ u_2 = u_4 = u_5 &\equiv 0, \quad \psi_6 \equiv 0 \text{ для } x \in L_2. \end{aligned}$$

2) Сопряженная система получает вид

$$\begin{aligned} \psi_j' + \varphi_j &= -\frac{\partial H}{\partial z_j} \quad (j=1, 2, 4, 5, 6) \\ \psi_3' &= \begin{cases} 0 & \text{для } x \in L_1 \\ 2\lambda z_3 & \text{для } x \in L_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

3) Условиями трансверсальности являются

$$\psi_2 z_2 + \psi_6 z_6 = \psi_3 z_3, \quad \psi_1 z_1 + \psi_5 z_5 = \psi_4 z_4 \text{ при } x=0 \text{ и } x=l. \quad (4.8)$$

4) Из независимости величин σ и σ_1 вытекают условия $\lambda \sigma = 0$ и $\gamma_2 \sigma_1 = 0$. Их можно переписать еще в форме

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \text{ для } x \in L_1 & \sigma &= 0 \text{ для } x \in L_2, \\ \gamma_2 &= 0 \text{ для } g(x, T) < S & \sigma_1 &= 0 \text{ для } g(x, T) = S. \end{aligned} \quad (4.9)$$

5) Приравнивая нулю коэффициенты при вариациях $\Delta x_i z_j$, находим

$$\begin{aligned} \psi_j(x_i+, t) &= \psi_j(x_i-, t), \quad (i=1, 2, \dots, k; j=1, 2, 4, 5), \\ \psi_3(x_i+, t) &= \psi_3(x_i-, t) + 2\lambda_i z_3(x_i, t), \\ \psi_6(x_i+, t) &= \psi_6(x_i-, t) = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

В случае стационарного шарнира имеем еще $\psi_2(x_i+, t) = \psi_2(x_i-, t) = 0$.

Те же соотношения имеют место и в точке приложения опоры $x = s$, если лишь первое из них заменить требованием

$$\psi_1(s+, t) - \psi_1(s-, t) = -\psi_4(s, t) \kappa_1 m |z_1(s, t)|^{m-1}. \quad (4.11)$$

Если пластического шарнира при $x = s$ не возникает, то имеем $\psi_3(s+, t) = \psi_3(s-, t)$.

6) В случае нестационарных шарниров коэффициенты при вариациях Δx_i дадут

$$\sum_{j=1}^6 \int_0^T (\psi_j z_j') \Big|_{z_i^-}^{z_i^+} dt = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k). \quad (4.12)$$

Такое же соотношение имеет место и при $x = s$.

7) Для момента времени $t = T$ получим соотношение

$$\sum_{j=1}^6 \int_0^l \varphi_j(x, T) \dot{z}_j(x, T) dx = 0. \quad (4.13)$$

Из (4.9) вытекает, что множитель Лагранжа γ_2 отличен от нуля только в точках, где $g = \max$. В этих точках имеем

$$\Delta_T g = \frac{\partial g}{\partial z_1(x, T)} \Delta_T z_1(x, T) + \frac{\partial g}{\partial z_2(x, T)} \Delta_T z_2(x, T) = 0.$$

Учитывая это условие и собирая все члены с вариациями $\Delta_T z_i(x, T)$, находим

$$\varphi_i(x, T) = 0, \quad \varphi_5(x, T) + \gamma_1 = 0, \quad (i=1, 2, 3, 4, 6). \quad (4.14)$$

8) Если высота балки h не задана, то коэффициент при вариации δh даст

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[\int_0^l \left(\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial h} + \lambda M_s \frac{\partial M_s}{\partial h} \right) dx + \sum_{i=1}^n \lambda_i M_s \frac{\partial M_s}{\partial h} \right] dt = \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial h} + \frac{1}{2} \int_0^l \gamma_2 \frac{\partial g}{\partial h} dx. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Постараемся опять написать для системы уравнений (4.7) — (4.15) самосопряженные решения. Уравнениям (4.7) приходится удовлетворять отдельно для множества точек L_1 и L_2 . Для $x \in L_1$ положим

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -z_4, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = -z_2, \quad \psi_4 = z_1, \quad \psi_5 = 0, \quad \psi_6' = \varphi_2, \quad \dot{\psi}_6 = -z_3, \\ \varphi_1 &= \rho B h z_5, \quad \dot{\varphi}_2 = z_4, \quad \varphi_2' = \rho B h z_5, \quad \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_6 = 0, \quad \varphi_5 = -\rho B h z_1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Если $x \in L_2$, то в этих формулах придется взять $\psi_1 = \psi_6 = \dot{\psi}_6 = 0$.

Надо еще показать, что при постановке (4.16) выполняются и остальные уравнения (4.8) — (4.14). Это нетрудно проверить непосредственно. Не удастся лишь выполнить условия (4.10) для $x \in L_2$ (это и понятно, так как $z_4(s+, t) = z_4(s-, t)$ и, следовательно, сила реакции R должна была бы равняться нулю). Отсюда можно сделать вывод, что точка приложения опоры $x = s$ не может находиться в области, где $|z_3| \equiv M_s$.

Дополнительного пояснения требует еще удовлетворение условий (4.12) и (4.13). Что касается условия (4.13), то под знаком интеграла стоит выражение

$$\varphi_1(x, T) \dot{z}_1(x, T) + \varphi_2(x, T) \dot{z}_2(x, T) + \varphi_5(x, T) \dot{z}_5(x, T).$$

В силу (4.14) имеем $\varphi_1(x, T) = \varphi_2(x, T) = 0$. Кроме того, так как ускорение в момент времени $t = T$ отсутствует, то и $\dot{z}_5(x, T) = 0$ и, следовательно, требование (4.13) выполняется¹.

Условие (4.12) имеет смысл лишь при $x \in L_1$. Для его проверки вычисляем интеграл

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 \int_0^T \psi_j z_j' dt &= \int_0^T (-2z_2 z_4 + \rho B h z_1 \dot{z}_5 - \psi_6 u_3) dt = \\ &= \rho B h (z_1 z_5) \Big|_0^T - \int_0^T (2z_2 z_4 + \rho B h z_5^2 + \psi_6 u_3) dt. \end{aligned}$$

Первый член в этом выражении равен нулю, так как $z_1(x, 0) = z_5(x, T) = 0$. Учитывая еще непрерывность величины z_5 и то обстоятельство, что в силу (4.10) имеем $\psi_6(x_i-, t) = \psi_6(x_i+, t) = 0$, можем условие (4.12) представить в форме

$$\int_0^T [(z_2 z_4) |_{x=x_i+} - (z_2 z_4) |_{x=x_i-}] dt = 0. \quad (4.17)$$

В точках $x = x_i \neq s$ имеем $z_4 = 0$ и требование (4.17) выполняется. В точке $x = s$ действует сила реакции R , вследствие чего фазовая переменная z_4 имеет там разрыв. Возвращаясь к первоначальному переменным, можем переписать условие (4.17) в форме

$$\int_0^T [Q(s+, t) w'(s+, t) - Q(s-, t) w'(s-, t)] dt = 0. \quad (4.18)$$

Как известно из работы Прагера—Розвани [7], в статике имеет место условие оптимальности $Q(s+) w'(s+) = Q(s-) w'(s-)$. Из формулы (4.18) теперь вытекает, что при динамическом нагружении это условие приобретает интегральную форму. Отметим, что полученное нами условие оптимальности (4.18) имеет место и для нелинейно-упругих опор.

Еще несколько слов о выборе функций F и g . Здесь опять имеется много возможностей. Принимая, например, $F = z(x_*, T)$ или $F = z_2(x^*, T)$, минимизируем остаточный прогиб или наклон прогиба в выбранной нами точке x_* . В случае $F = B h$ минимизируется объем балки. Подобные возможности имеются и для выбора функции g : при $g = z_1(x, T)$ или $g = z_2(x, T)$ заданы наибольший остаточный прогиб или наклон прогиба на отрезке $[0, l]$. В случае $g = h$ задан объем балки (здесь требовать выполнения уравнения (4.15) уже не надо).

¹ Из системы уравнений (1.1) и из краевых условий для M и Q вытекает, что в каждой фазе движения ускорение w'' является постоянным. Поэтому $z_5(x, T-) = w''(x, T-) < 0$, но в момент времени $t = T$ оно скачком приобретает нулевое значение.

§ 5. Заключительные замечания

При помощи теории оптимального управления с распределенными параметрами можно решать задачи оптимального положения опор для любого поля начальных скоростей. Но проведенное в данной статье исследование показало, что полученная система уравнений весьма сложна. Решение поставленной задачи можно значительно упростить, если задача является самосопряженной. В § 3 было показано, что в случае нелинейно упругих балок переход к самосопряженной задаче в большинстве случаев невозможен. Что касается жестко-пластических конструкций, то, как показано в § 4, здесь можно ввести самосопряженные переменные, но полученное условие оптимальности (4.18) мало пригодно для применения на практике: интегралы в формуле (4.18) можно в действительности вычислить лишь после решения задачи, и, таким образом, эта формула может служить лишь проверкой полученных результатов. Учитывая эти замечания, на наш взгляд, точное решение задач об оптимальном положении опор при динамических нагрузках малоперспективно.

Тем более заслуживает внимания метод модальных решений. Как показано в работе [1], здесь условия оптимальности сохраняют тот же самый вид, как в статике. Кроме простоты, в пользу метода модальных решений говорит еще хорошо известное обстоятельство, что в случае жестко-пластических конструкций всякое немодальное решение всегда переходит в модальное. При этом часто продолжительность немодальной фазы движения мала, вследствие чего модальное решение может обеспечить и необходимую точность. Для иллюстрации этого утверждения может служить задача, решенная в работе [2]: выяснилось, что в случае балки на двух опорах погрешность модального решения при определении оптимального положения опор и наибольшего прогиба равна лишь 2%.

Литература

1. Лепик Ю. Оптимальное проектирование неупругих балок с дополнительными опорами в случае динамического нагружения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 430, 132—143.
2. Лепик Ю. Определение оптимального положения опор для жестко-пластической балки в случае импульсного нагружения. Настоящий сборник, стр. 62—76.
3. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. Москва, 1975.
4. Lepik, U. Optimal design of beams with minimum compliance. Int. J. Non-Linear Mech., 1978, 13, 33—42.
5. Mróz, Z., Garstecki, A., Optimal design of structures with unspecified loading distribution. J. Optimiz. Theory and Appl., 1976, 20, № 3, 359—380.
6. Mróz, Z., Rozvany, G. I. N. Optimal design of structures with variable support conditions. J. Optimiz. Theory and Appl., 1965, 15, № 1, 85—101.

7. Prager, W., Rozvany, G. I. N. Plastic design of beams: Optimal locations of supports and steps in yield moment. *Int. J. Mech. Sci.*, 1975, 17, № 10, 627—631.
8. Rozvany, G. I. N., Mróz, Z. Column design: optimization of support conditions and segmentation. *J. Struct. Mech.*, 1977, 5, № 3, 279—290.

Поступило
19 IX 1978

ON THE OPTIMALITY CONDITIONS FOR BEAMS WITH ADDITIONAL SUPPORTS IN THE CASE OF DYNAMIC LOADING

U. Lepik

Summary

The compliance of beams can be increased by applying additional supports. The positions for these supports must be selected so as to minimize the value of some characteristic quantities (i. e. the volume of the beam or its maximal deflection). Such a problem was set up and solved for the static case in papers [6, 7]. For dynamic loading these results were generalized in [1].

In the paper [1] the method of mode form solutions was applied. The aim of the present paper is to get a class of more exact solutions. For this the optimal control theory of distributed parameter systems can be used. The beam is under impulsive loading; the initial deflection rate field is given.

For nonlinear-elastic beams the problem is set up in § 1 of the paper. The augmented functional, which must be minimized, is put together in § 2. Equating the variation of this functional to zero we obtain a set of equations, from which the optimal location of the support is to be found. These equations can be simplified considerably if we have a self-conjugate problem; this aspect is discussed in § 3.

In § 4 beams of rigid-plastic material are dealt with. Here another augmented functional is constructed. The necessary conditions for its minimum give us again a set of equations for determining the optimal location of the support. It is shown that under certain assumptions the problem is selfconjugate. For this case the optimality condition (4.18), which is a generalization of the Prager-Rozvany condition, is derived.

The last paragraph contains some concluding remarks. In the general case the system of obtained equations is very complicated. For self-conjugate problems optimality conditions can be derived, but they have an integral form and therefore their practical application is considerably more troublesome than in the case of the mode form solutions. It should be mentioned that for one example, which was solved by the author in paper [2], the mode form solution gave excellent results — the error in determining the optimal location of the support was less than 2 per cent.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ ОПОР ДЛЯ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ БАЛКИ В СЛУЧАЕ ИМПУЛЬСНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Ю. Лепик

Тартуский государственный университет

Проблема уменьшения податливости динамически нагруженных конструкций при помощи дополнительных опор исследовалась в работах автора [1, 2]. В этих работах выведены также условия оптимальности для жестко-пластических балок. В данной статье применение этих условий иллюстрируется в случае одной конкретной задачи — балки с консолями на двух опорах. Для решения этой проблемы сначала решается одна вспомогательная задача — изгиб консольной балки под действием равномерно распределенных скоростей (пока в литературе известно лишь решение для балки, по концу которой ударяет движущаяся в поперечном направлении масса). Решение этой задачи дается в § 1 работы. В § 2 выводятся результаты для балки на двух опорах. На основании этих решений составляются оптимальные проекты и определяется оптимальное положение опоры. Показывается, что условие оптимальности, выведенное в работе [2], выполняется. В § 3 поставленная задача решается методом модальных решений. Из проведенных вычислений вытекает, что точность, достигаемая методом модальных решений, вполне достаточна для инженерной практики.

§ 1. Динамический изгиб консольной балки под действием импульсного нагружения

Рассмотрим жестко-пластическую балку прямоугольного сечения. Длину балки обозначим через l_1 . Левый конец балки заделан, правый — свободен. Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ балке сообщается равномерная скорость v_0 (фиг. 1а). Дальнейшее движение балки происходит согласно дифференциальным уравнениям

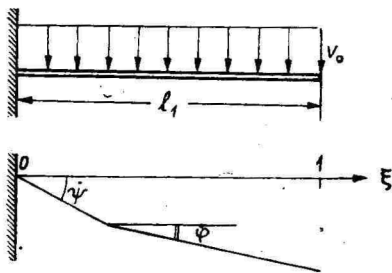


Рис. 1

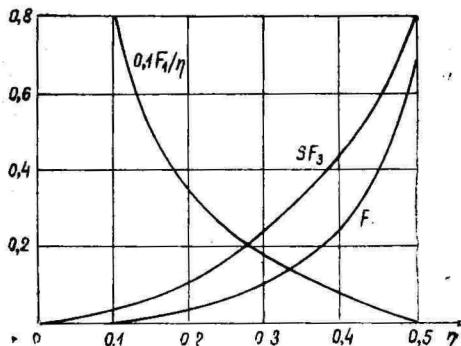


Рис. 2

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = m\omega'' \quad (1.1)$$

где ω — прогиб, M — изгибающий момент, Q — перерезывающая сила, m — масса балки на единицу длины; точками обозначены производные по времени. Распределение начальных скоростей $v_0 = \text{const}$ реализуется лишь при условии, что в балке возникают два пластических шарнира: 1) стационарный шарнир в сечении $x = 0$; 2) нестационарный шарнир, который начинает свое движение также из точки $x = 0$. Координату этого шарнира обозначим через $x_s = l_1 \eta$. В дальнейшем целесообразно перейти к безразмерной координате $\xi = x/l_1$. Учитывая вышесказанное, зададим эпюру скоростей в виде

$$\omega' = \begin{cases} l_1 \xi \psi & \text{для } \xi \in [0, \eta], \\ l_1 [\xi \varphi + \eta (\psi - \varphi)] & \text{для } \xi \in [\eta, 1]. \end{cases} \quad (1.2)$$

Смысл величин ψ и φ ясен из фиг. 1б. Ускорения находим, дифференцируя выражения (1.2) по времени,

$$\omega'' = \begin{cases} l_1 \xi \psi'' & \text{для } \xi \in [0, \eta], \\ l_1 [\xi \varphi'' + \eta (\psi'' - \varphi'')] + \eta' (\psi' - \varphi') & \text{для } \xi \in [\eta, 1]. \end{cases} \quad (1.3)$$

Теперь можем проинтегрировать уравнения (1.1). При этом должны быть выполнены следующие условия:

- 1) $M = -M_s$ при $\xi = 0$;
- 2) $M = M_s, Q = 0$ при $\xi = \eta$,
- 3) $M = Q = 0$ при $\xi = 1$.

Кроме того, величины M и Q должны быть непрерывными при $\xi = \eta$. Символом M_s обозначен предельный момент. Удовлетворяя всем этим требованиям, интегрированием уравнений (1.1) находим, что

$$M = \begin{cases} -M_s - (1/6)ml_1^3\psi''(3\eta^2\xi - \xi^3) & \text{для } \xi \in [0, \eta], \\ M_s + (1/12)ml_1^3\varphi''(\xi - \eta)^2(2\xi + \eta - 3) & \text{для } \xi \in [\eta, 1]. \end{cases} \quad (1.4)$$

Кроме того, получим уравнения

$$\begin{aligned} \psi''\eta^3 &= -N, & (1 - \eta)^3\varphi'' &= 2N, & N &= \frac{6M_s}{ml_1^3}, \\ (\psi' - \varphi')\eta' &= N \left[\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{(1 - \eta)^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Дифференцируя третье уравнение из (1.5) по времени и элиминируя величины ψ'' и φ'' из первых двух уравнений, приходим к дифференциальному уравнению

$$\eta'' = -\frac{(1 - \eta)^2\eta^2}{\eta(1 - 2\eta)};$$

Это уравнение легко интегрируется при помощи постановки $\eta' = z$, $\eta'' = zdz/d\eta$. В результате находим (C — постоянная интегрирования)

$$dt = \frac{1}{C} \frac{\eta e^{-\eta^2} d\eta}{\sqrt[4]{1 - 2\eta}}. \quad (1.6)$$

Вместо величины ψ' целесообразно ввести новую переменную $V = \eta\psi'$. Первое уравнение системы (1.5) приобретает теперь вид

$$\eta^2 V' - \eta V \eta' = -N.$$

Отсюда, учитывая формулу (1.6), получим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dV}{d\eta} - \frac{V}{\eta} = -\frac{N}{C} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta \sqrt[4]{1 - 2\eta}}. \quad (1.7)$$

Решением уравнения (1.7) является

$$V = C_1\eta + \frac{N}{C} \eta \int_{\eta}^{0.5} \frac{e^{-\eta^2} d\eta}{\eta^2 \sqrt[4]{1 - 2\eta}}. \quad (1.8)$$

Необходимо еще удовлетворить начальному условию $V(\eta = 0) = v_0/l_1$. Так как

$$\lim_{\eta \rightarrow 0+} \left(\eta \int_{\eta}^{0.5} \frac{e^{-\eta^2} d\eta}{\eta^2 \sqrt[4]{1 - 2\eta}} \right) = 1,$$

то из (1.8) находим $C = Nl_1/v_0$.

Интегрируем теперь второе уравнение из (1.5). Учитывая начальное условие $\varphi(0) = 0$ и зависимость (1.6), находим

$$\varphi = \frac{2N}{C} \int_0^{\eta} \frac{\eta e^{-\eta^2} d\eta}{(1-\eta)^3 \sqrt[4]{1-2\eta}}. \quad (1.9)$$

Нестационарный шарнир $\xi = \eta$ исчезает, если $\psi' = \varphi$. Обозначим этот момент времени через t_1 . В силу последнего уравнения системы (1.5) имеем $\eta(t_1) = 0,5$. Так как $\psi'(t_1) = V(t_1)/\eta(t_1) = 2V(t_1)$, то из равенства $\psi'(t_1) = \varphi'(t_1)$ находим

$$C_1 = \frac{2N}{C} \int_0^{0,5} \frac{\eta e^{-\eta^2} d\eta}{(1-\eta)^3 \sqrt[4]{1-2\eta}}.$$

Для краткости записи обозначим

$$\Phi(\eta) = \frac{e^{-\eta^2}}{\sqrt[4]{1-2\eta}}, \quad F_1(\eta) = \eta \int_{\eta}^{0,5} \frac{\Phi(\eta) d\eta}{\eta^2} \quad (1.10)$$

$$F_2(\eta) = \int_0^{\eta} \frac{\eta \Phi(\eta) d\eta}{(1-\eta)^3}, \quad F_3(\eta) = \int_0^{\eta} \Phi(\eta) \eta d\eta.$$

Найденные результаты (1.6), (1.8) и (1.9) можем теперь представить в виде

$$t = \frac{v_0}{N l_1} F_3(\eta), \quad \varphi = \frac{2v_0}{l_1} F_2(\eta), \quad (1.11)$$

$$V = \frac{v_0}{l_1} [2\eta F_2(0,5) + F_1(\eta)].$$

Так как $\Phi(0,5) = \infty$, то интегралы (1.10) являются при $\eta = 0,5$ несобственными. Их можно вычислить методом Канторовича. Для этого представим подинтегральную функцию в виде $Z(\eta)/(1-2\eta)^{3/4}$, причем функции Z и Z' являются при $\eta = 0,5$ ограниченными. Теперь имеем

$$\int_0^{0,5} \frac{z(\eta) d\eta}{\sqrt[4]{1-2\eta}} = \frac{2}{3} Z(0,5) + \int_0^{0,5} \frac{Z(\eta) - Z(0,5)}{\sqrt[4]{1-2\eta}} d\eta.$$

Значение интеграла справа можно найти численными методами.

Надо составить еще формулы для определения остаточного прогиба в момент времени t_1 . Учитывая соотношения (1.6) и (1.10), можем переписать зависимости (1.2) в форме

$$\frac{N}{v_0} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \begin{cases} \xi V \Phi(\eta) & \text{для } \xi \in [0, \eta], \\ [V + (\xi - \eta) \varphi] \eta \Phi(\eta) & \text{для } \xi \in [\eta, 1]. \end{cases} \quad (1.12)$$

При интегрировании этих зависимостей по η , следует иметь в виду, что «постоянные» интегрирования являются функциями от ξ . Вид этих функций определяем из условий непрерывности прогиба ω при $\xi = \eta$. В результате получим

$$\omega(\xi, t_1) = \frac{mv_0^2 l_1^2}{6M_s} W(\xi, t_1),$$

причем

$$W(\xi, t_1) = \int_0^{\xi} \Phi(\eta) [F_1(\eta) + 2\eta F_2(0,5) + 2(\xi - \eta) F_2(\eta)] \eta d\eta + \\ + \xi \int_{\xi}^{0,5} \Phi(\eta) [2\eta F_2(0,5) + F_1(\eta)] d\eta \quad \text{для } \xi \in [0; 0,5], \quad (1.13)$$

$$W(\xi, t_1) = \int_0^{0,5} \Phi(\eta) [F_1(\eta) + 2\eta F_2(0,5) + 2(\xi - \eta) F_2(\eta)] \eta d\eta \\ \text{для } \xi \in [0,5; 1].$$

Переходим теперь к исследованию второй фазы движения. Здесь имеем лишь один стационарный шарнир при заделке $\xi = 0$ и, следовательно, $\omega' = l_1 \xi \varphi'$ и $\omega'' = l_1 \xi \psi''$. Интегрируя опять уравнения (1.1) и удовлетворяя условиям $M(0, t) = -M_s$ и $M(l_1, t) = M'(l_1, t) = 0$, находим

$$M = -0,5M_s(2 + \xi)(1 - \xi)^2, \quad \psi'' = -0,5N. \quad (1.14)$$

Сравнивая второе уравнение из (1.14) с первым уравнением системы (1.5), видим, что в момент исчезновения шарнира $t = t_1$ угловое ускорение ψ'' уменьшается в 16 раз.

Интегрируем по времени второе уравнение системы (1.14). Учитывая, что $\psi'(t_1) = 2V(t_1) = 2v_0 F_2(0,5)/l_1$, находим

$$\psi'(t) = \frac{2v_0}{l_1} F_2(0,5) - \frac{N}{2} (t - t_1).$$

Из условия $\psi'(t_2) = 0$ определим момент времени остановки движения

$$t_2 = t_1 + \frac{4v_0}{N l_1} F_2(0,5). \quad (1.15)$$

Остаточный прогиб в момент времени $t = t_2$ равен

$$\omega(\xi, t_2) = \frac{mv_0^2 l_1^2}{6M_s} W(\xi, t_2),$$

где

$$W(\xi, t_2) = W(\xi, t_1) + 4F_2^2(0,5)\xi. \quad (1.16)$$

На фиг. 2 даны графики величин

$$F_3(\eta) = \frac{6M_s t}{m v_0 l_1^2}, \quad F_2(\eta) = \frac{m v_0^2 l_1 \varphi^*}{12M_s},$$

$$\frac{F_1(\eta)}{\eta} = \frac{m v_0^2 l_1 \psi^*}{12M_s} - F_2(0,5), \quad (1.17)$$

характеризующие в первой фазе изменение величины t , φ^* и ψ^* , как функций от безразмерной координаты шарнира.

Проведенные вычисления дали для коэффициента $F_2(0,5)$ значение 0,7127. Вычисляя по формулам (1.11) и (1.15) время движения в первой фазе t_1 и время полного движения t_2 , находим $t_1 = 0,159(v_0/Nl_1)$, $t_2 = 3,01(v_0/Nl_1)$. Безразмерные остаточные прогибы в конце балки равны $W(1, t_1) = 0,187$ и $W(1, t_2) = 2,22$. Учитывая малость отношения t_1/t_2 , можно ожидать, что движение в первой фазе мало влияет на форму остаточных прогибов в момент остановки движения: этот факт подтверждается и вычислениями: зависимость $W = W(\xi, t_2)$ практически является линейной.

§ 2. Оптимальный проект балки

Переходим теперь к решению задачи, указанной на фиг. 3. Размеры балки l_1 и l_2 и начальная скорость $v_0 = \text{const}$ заданы.

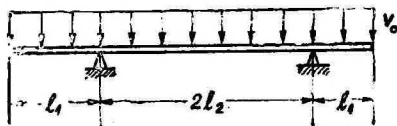


Рис. 3

Начало координат поставим в центр балки и введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad s = \frac{l_2}{l}, \quad l = l_1 + l_2. \quad (2.1)$$

В дальнейшем рассмотрим лишь правую половину балки, где $\xi \in [0, 1]$. В сечении $\xi = s$, по-видимому, должен возникнуть пластический шарнир. Таким образом, на начальном этапе движения, поставленная нами задача, распадается на две более простые задачи: 1) динамический изгиб двух консольных балок длины l_1 ; 2) изгиб защемленной балки длины $2l_2$. Первую задачу мы решили в § 1 настоящей работы. Решение второй задачи также известно, вследствие чего мы здесь ограничиваемся, в основном, лишь окончательными результатами.

Имеются две фазы движения: 1) в первой фазе возникает нестационарный шарнир в точке $\xi = \eta$, которая движется от опоры до середины балки, 2) во второй фазе имеем лишь стационарные шарниры при $\xi = 0$ и $\xi = s$. В первой фазе имеем

$$w = \begin{cases} v_0 & \text{для } \xi \in [0, \eta], \\ v_0 \frac{s - \xi}{s - \eta} & \text{для } \xi \in [\eta, s]. \end{cases}$$

Координата шарнира $\xi = \eta$ определяется из формулы

$$(s - \eta)^2 = \frac{2Nl_1}{v_0} (1 - s)^2 t, \quad (2.2)$$

где постоянная N определяется опять согласно соотношениям (1.5). Изгибающие моменты вычислим по формулам

$$M_i = \begin{cases} M_s & \text{для } \xi \in [0, \eta], \\ -M_s + M_s \frac{s - \xi}{(s - \eta)^3} [3(s - \eta)^2 - (s - \xi)^2] & \text{для } \xi \in [\eta, s]. \end{cases} \quad (2.3)$$

Прогибы можно вычислить по формулам

$$\frac{6M_s}{mv_0^2 l_1^2} w = \begin{cases} \frac{(s - \eta)^2}{2(1 - s)^2} & \text{для } \xi \in [0, \eta] \\ \frac{1}{2(1 - s)^2} (s - \xi)(s + \xi - 2\eta) & \text{для } \xi \in [\eta, s]. \end{cases} \quad (2.4)$$

Первая фаза заканчивается в момент времени $t = t_{1*}$, где $\eta = 0$. Из формулы (2.2) находим, что

$$t_{1*} = \frac{v_0 s^2}{2Nl_1(1 - s)^2}. \quad (2.5)$$

Остаточный прогиб при $t = t_{1*}$ равен

$$\frac{6M_s}{mv_0^2 l_1^2} w(\xi, t_{1*}) = \frac{s^2 - \xi^2}{2(1 - s)^2}. \quad (2.6)$$

Во второй фазе имеем

$$w = v_1 \left(1 - \frac{\xi}{s}\right), \quad v_1 = -\frac{6M_s}{ml_1^2} \left(\frac{1 - s}{s}\right)^2, \\ M = \frac{M_s}{s^3} (s^3 - 3s\xi^2 + \xi^3). \quad (2.7)$$

Движение прекращается при

$$t_{2*} = t_{1*} + \frac{v_0}{Nl_1} \left(\frac{s}{1-s} \right)^2 = \frac{3v_0}{2Nl_1} \left(\frac{s}{1-s} \right)^2. \quad (2.8)$$

Полный остаточный прогиб равен

$$\begin{aligned} w(\xi, t_{2*}) &= w(\xi, t_{1*}) + \frac{ml_1^2 v_0^2}{16M_s} \left(\frac{s}{1-s} \right)^2 \left(1 - \frac{\xi}{s} \right) = \\ &= \frac{mv_0^2 l_1^2}{48M_s} \frac{(s-\xi)(7s+4\xi)}{(1-s)^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

На основании зависимостей (1.13), (1.16) и (2.9) можем теперь найти остаточный прогиб в любой точке балки.

Возвратимся теперь к задаче о балке с консолями, указанной на фиг. 3. До некоторого момента времени средняя часть балки $0 \leq \xi \leq s$ и крайняя часть $s \leq \xi \leq 1$ движутся независимо друг от друга. При дальнейшем движении имеются следующие возможности:

1) Если $t_{2*} < t_2$, то средняя часть балки останавливается раньше крайней. При $t > t_{2*}$ средняя часть является жесткой, $w' = 0$ и из уравнений (1.1) и условий вытекает, что $M \equiv M_s$ и $Q \equiv 0$ для $\xi \in [0, s]$. Из формул (1.15) и (2.8) следует, что этот случай реализуется при $0 < s < 0,586$.

2) Рассмотрим теперь случай $t_{1*} < t_2 < t_{2*}$. Здесь скорости прогиба в крайней части $\xi \in [s, 1]$ приобретают нулевые значения прежде, чем средняя часть $\xi \in [0, s]$ останавливается. Но отсюда нельзя сделать вывод, что крайняя часть при $t = t_2$ не движется, так как в таком случае не удастся удовлетворить уравнениям (1.1), краевым условиям при $\xi = 1$ и условиям непрерывности изгибающего момента при $\xi = s$. Таким образом, придется предложить, что при $t > t_2$ крайняя часть продолжает движение в обратную сторону. Это длится до момента времени $t = t_3$, когда $w'(s-, t_3) = w'(s+, t_3)$ и пластический шарнир в сечении $\xi = s$ исчезает. При дальнейшем движении имеем лишь стационарный шарнир в сечении $\xi = 0$, а в остальной балка движется как жесткое тело. Это движение длится до момента полной остановки $t = t_f$. На основании формулы (1.15) и (2.5) этот случай имеет место при $s > 0,586$.

3) Возможен еще вариант, когда $t_2 < t_{1*}$. Здесь характер движения похож на предыдущий случай; разница лишь в том, что нулевые скорости в крайней части балки достигаются раньше, чем нестационарный шарнир $\xi = \eta_1$ достигает центра балки. Для реализации этого случая должно быть $s > 0,710$.

Поставим теперь оптимизационную задачу. Требуется найти такое положение опоры $\xi = s$, для которого балка была бы наиболее жесткой. Последнее требование можно сформулировать разными способами. В данной работе считается оптимальным такой проект, для которого остаточные прогибы в середине

балки и на ее свободном конце равны. Вычисления показывают, что такое равенство имеет место в диапазоне $s \in (0,586; 0,710)$. Поэтому в дальнейшем ограничиваемся лишь исследованием второго случая, где $t_{1*} < t_2 < t_{2*}$.

Начнем анализ этого случая определением момента времени $t = t_3$. Условие непрерывности величины w' при $\xi = s$ и $t = t_3$ имеет вид

$$\psi'(t_3) = -\frac{v_1(t_3)}{sl}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \psi'(t_3) &= \frac{2v_0}{l_1} F_2(0,5) - \frac{N}{2} (t_3 - t_1), \\ v_1(t_3) &= v_0 - \frac{6M_s}{ml^2s^2} (t_3 - t_{1*}), \end{aligned}$$

то с учетом формул (1.11) и (2.5) находим, что

$$t_3 = \frac{3,01 + 3z}{1 + 2z^3} \frac{v_0}{Nl_1}. \quad (2.10)$$

Вычислим теперь остаточный прогиб в центре балки $\xi = 0$. Из формулы (2.6) получаем

$$w(0, t_{1*}) = \frac{mv_0^2 l^2 s^2}{12M_s}. \quad (2.11)$$

На отрезке $t \in [t_{1*}, t_3]$ в силу формул (2.7) имеем

$$w(0, t_3) = w(0, t_{1*}) + (t_3 - t_{1*}) \left[v_0 - \frac{3M_s}{ml^2s^2} (t_3 - t_{1*}) \right].$$

С учетом формул (2.5) и (2.10)–(2.11) этот результат может быть представлен в виде

$$w(0, t_3) = \frac{mv_0^2 l^2 s^2}{12M_s} \left(1 + P - \frac{Pz}{4} \right), \quad P = \frac{6,02z^2 + 4z^3 - 1}{1 + 2z^3}. \quad (2.12)$$

При $t > t_3$ имеем

$$w(\xi, t) = v_2(t) \left(1 - \frac{\xi}{s} \right) \quad \text{для } \xi \in [0, 1]. \quad (2.13)$$

Продифференцируем это выражение по t и подставим его в уравнения (1.1). Интегрируя это уравнение и удовлетворяя условиям $M(0) = M_s$, $Q(0) = 0$, $M(s-) = M(s+)$, $M(1) = Q(1) = 0$, находим

$$M = \begin{cases} \frac{M_s - M_*}{2s^3} (2s^3 - 3s\xi^2 + \xi^3) + M_*, & \text{для } \xi \in [0, s], \\ \frac{M_s - M_*}{2s^3} [(1-s)^2(2+s) - 3(1-s)^2\xi - (s-\xi)^3] & \text{для } \xi \in [s, 1]. \end{cases} \quad (2.14)$$

Здесь символом M_* обозначен опорный момент

$$M_* = M(s) = \frac{M_s z^3}{1+z^3}. \quad (2.15)$$

Из формулы (2.15) вытекает, что для каждого $z > 0$ выполняется неравенство $0 < M_* < M_s$,

Для определения функций v_2 получим дифференциальное уравнение

$$v^2 = -\frac{3(M_s - M_*)}{m l^2 s^2},$$

интегралом которого является

$$v_2(t) = v_2(t_3) - \frac{3(M_s - M_*)}{m l^2 s^2} (t - t_3). \quad (2.16)$$

Так как в момент времени $t = t_f$ движение прекращается, то $v_2(t_f) = 0$. В силу формул (2.7) и (2.10) имеем

$$v_2(t_3) = v_1(t_3) = v_0(1 - 0,5P). \quad (2.17)$$

Теперь из (2.15) находим, что

$$t_f - t_3 = \frac{m v_0 l^2 s^2}{3 M_s} \left(1 - \frac{P}{2} \right) (1 + z^3). \quad (2.18)$$

Интегрируя по времени уравнение (2.13) и учитывая при этом соотношения (2.12) и (2.16)–(2.18), получаем

$$\omega(0, t_f) = \frac{m v_0^2 l^2 s^2}{12 M_s} \left[1 + P - \frac{P^2}{4} + 2 \left(1 - \frac{P}{2} \right)^2 (1 + z^3) \right]; \quad (2.19)$$

Переходим к вычислению остаточного прогиба в точке $\xi = 1$. На основании результатов первого параграфа имеем

$$\omega(1, t_1) = 0,187 \frac{m v_0^2 l^2 (1-s)^2}{6 M_s}. \quad (2.20)$$

На отрезке $t \in [t_1, t_3]$ скорость прогиба равна

$$\omega'(\xi, t) = l_1 \xi \psi'(t) = \xi [2v_0 F_2(0,5) - 0,5 N l_1 (t - t_1)].$$

Интегрируя это выражение по времени и принимая $\xi = 1$ и $t = t_3$ находим

$$\omega(1, t_3) = \omega(1, t_1) + 2v_0 F_2(0,5) (t_3 - t_1) - 0,25 N l_1 (t_3 - t_1)^2.$$

Учитывая формулы (1.11), (2.10) и (2.20), можем дать этому результату вид

$$\omega(1, t_3) = \frac{m v_0^2 l^2 (1-s)^2}{12 M_s} [4F_2(0,5) P_1 - 0,5 P_1^2 + 0,374], \quad (2.21)$$

где

$$P_1 = \frac{3,01 + 3z}{1 + 2z^3} - F_3(0,5).$$

Таким же путем находим для отрезка $t \in [t_3, t_f]$

$$\omega(1, t_s) = \omega(1, t_3) - \frac{z}{l} \left[v_2(t_3) (t_f - t_3) - \frac{3(M_s - M^*)}{2ml^2s^2} (t_f - t_3)^2 \right].$$

При помощи формул (2.15), (2.17), (2.18) и (2.21) этот результат может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \omega(1, t_F) = & \frac{mv_0^2 l^2 s^2}{12M_s} z \left\{ z \left[4F_2(0,5) P_1 - \frac{P_1^2}{2} + 0,374 \right] - \right. \\ & \left. - 2 \left(1 - \frac{P}{2} \right)^2 (1 + z^3) \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Приравнивая правые части формул (2.19) и (2.22), приходим к следующему уравнению для определения величины z :

$$\begin{aligned} 1 + P - \frac{P^2}{4} + 2(1+z)(1+z^3) \left(1 - \frac{P}{2} \right)^2 = \\ = z^2 [4F_2(0,5) P_1 - 0,5 P_1^2 + 0,374]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Решением этого уравнения является $z = 0,675$, чему соответствует значение $s = 0,597$. Вычисляя наибольший прогиб по формулам (2.19) или (2.22), находим $\omega(0, t_f) = \omega(1, t_f) = 2,20(v_0^2/Nl_1)$. Выпишем еще для оптимального проекта моменты времени, характеризующие отдельные фазы движения. Переходя к безразмерному времени $\tau_i = Nl_1 t_i / v_0$, находим, что $\tau_1 = 0,16$; $\tau_2 = 3,01$; $\tau_{1*} = 1,10$; $\tau_{2*} = 3,29$; $\tau_3 = 3,12$; $\tau_f = 4,59$.

В работе [2] выведено условие оптимальности в виде

$$\int_0^{t_f} Q(s-, t) \omega'(s-, t) dt = \int_0^{t_f} Q(s+, t) \omega'(s+, t) dt. \quad (2.24)$$

Проверим, выполняется ли это условие для рассматриваемой задачи. Вычисляя интегралы в формуле (2.24) для отдельных фаз движения, находим

$$\int_0^{t_{1*}} Q(s-, t) \omega'(s-, t) dt = 24Ks^2,$$

$$\int_{t_{1*}}^{t_3} Q(s-, t) \omega'(s-, t) dt = KPs^2(24 + 6P - P^2),$$

$$\int_{t_3}^{t_f} Q(s-, t) \omega'(s-, t) dt = 24Ks^2 \left(1 - \frac{P}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left[1 + P - \frac{P^2}{2} + 2 \left(1 - \frac{P}{4} \right)^2 (1 + z^3) \right], \end{aligned}$$

$$\int_0^{t_1} Q(s+, t) w'(s+, t) dt = 48K(1-s)^2 \int_0^{0.5} \Phi(\eta) G(\eta) d\eta,$$

$$\int_{t_1}^{t_3} Q(s+, t) w'(s+, t) dt = 24K(1-s)^2 P_1 \left[G(0,5) + F_2(0,5) P_1 - \frac{P_1^2}{12} \right],$$

$$\int_{t_1}^{t_f} Q(s+, t) w'(s+, t) dt = 48Ks \left(1 - \frac{P}{2} \right) (1 - z^2).$$

$$\cdot \left\{ 1 - s \left[G(0,5) + 2F_2(0,5) P_1 - \frac{P_1^2}{4} \right] - \frac{2}{3z} \left(1 - \frac{P}{2} \right)^2 (1 + z^3) \right\}.$$

В этих формулах обозначено

$$K = \frac{m^2 v_0^2 l^2}{576 M_s}, \quad G(\eta) = \int_0^\eta \Phi(\eta) [2\eta F_2(0,5) + F_1(\eta)] d\eta.$$

Проводя соответствующие вычисления, увидим, что в случае оптимального проекта $s = 0,597$ условие (2.24) в самом деле выполняется.

§ 3. Метод модальных решений

Решим поставленную задачу еще методом модальных решений. Для этого зададим скорость прогиба в виде $w' = \Phi(t) W(\xi)$, где

$$W(\xi) = \begin{cases} W_0(1 - \xi/s) & \text{для } \xi \in [0, s], \\ \psi(\xi - s) & \text{для } \xi \in [s, 1]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Безразмерные величины ξ и s определим опять по формулам (2.1). Вычисляя ускорение w'' и подставляя это выражение в уравнения движения (1.1), находим $\Phi' = -\lambda^2$ и $\Phi = \Phi_0 - \lambda^2 t$. Символом λ^2 обозначена некоторая постоянная. Принимая $\Phi_0 = 1$, из условия $\Phi(t_f) = 0$, находим время движения $t_f = 1/\lambda^2$.

Интегрируя уравнения (1.1) и удовлетворяя условиям

$$M(0) = M(s), \quad M(s) = -M(s), \quad M(1) = 0, \quad Q(0) = Q(1) = 0,$$

получаем

$$M = \begin{cases} \frac{M_s}{s^3} (s^3 - 3s\xi^2 + \xi^3) & \text{для } \xi \in [0, s], \\ -\frac{M_s}{2(1-s)^3} (2 + \xi - 3s)(1 - \xi)^2 & \text{для } \xi \in [s, 1]. \end{cases}$$

Кроме того, имеем

$$W_0 = \frac{6M_s}{m\lambda^2 l^2 s^2}, \quad \psi = \frac{3M_s}{m\lambda^2 l^2 (1-s)^3}. \quad (3.2)$$

Будем опять считать оптимальным такое решение, для которого $w(0) = w(1)$. На основании формул (3.1) — (3.2) находим

$$s_{\text{opt}} = \frac{2^{1/2}}{1 + 2^{1/2}} = 0,586; \quad (3.3)$$

Если хотим вычислить величину остаточного прогиба, нам придется определить коэффициент λ^2 . Наиболее целесообразным для этого является способ, предложенный Мартином и Саймондсом [3]. Авторы работы [3] показали, что метод модальных решений обеспечивает наибольшую точность, если выполняется условие

$$\int_s m v_i v_i^* ds = \int_s m v_i^* v_i^* ds. \quad (3.4)$$

Здесь символами v_i и v_i^* отмечены начальные скорости для действительных и модальных решений. В наших обозначениях формула (3.4) принимает вид

$$v_0 \int_0^1 W(\xi) d\xi = \int_0^1 W^2(\xi) d\xi. \quad (3.5)$$

Учитывая соотношения (3.1) и (3.2), вычислим интегралы в формуле (3.5). В результате находим

$$\lambda^2 = \frac{2M_s}{m v_0 l_1^2} \frac{1 + 4z^3}{1 + 2z}, \quad z = \frac{1 - s}{s}. \quad (3.6)$$

Остаточный прогиб в центре $\xi = 0$ равен

$$w(0, t_f) = W_0 \int_0^{t_f} \Phi(t) dt = \frac{W_0}{2\lambda^2} = \frac{v_0^2}{N l_1} \frac{z^2}{2\lambda^4}.$$

В случае оптимального решения $s = 0,586$ имеем $z = 2^{1/2}$ и

$$w(0, t_f) = 2,25 \frac{v_0^2}{N l_1}. \quad (3.7)$$

Сравнивая данные, определяемые формулами (3.3), (3.7), с точными результатами, полученными в § 3, видим, что при определении положения опоры s и максимального остаточного прогиба $w(0, t_f)$ погрешность метода модальных решений $\sim 2\%$. Но при этом следует иметь в виду, что поставленная оптимизационная задача очень легко решается при помощи метода модальных решений, в то время, как точное решение задачи связано с довольно длинными и громоздкими вычислениями (которые были выполнены в §§ 1—2 данной работы). Все это говорит в пользу применения метода модальных решений при решении подобных оптимизационных задач.

Проведя вычисления, убеждаемся в том, что в случае решения (3.3) выполняется и условие оптимальности $Q(s-)W'(s-) = Q(s+)W'(s+)$, выведенное в работе [4] и обобщенное на случай динамического нагружения в [1].

Отметим еще, что применение условий оптимальности интегрального типа может привести к парадоксам. Выясним это на следующем примере. Вычисляя начальную кинетическую энергию K_0 на основании соотношений (3.1) и (3.2), находим

$$K_0 = \frac{3M_s^2}{2m\lambda^4 l^3} \left[\frac{4}{s^3} + \frac{1}{(1-s)^3} \right]. \quad (3.8)$$

Средний остаточный прогиб \bar{u} определяется формулой

$$\bar{u} = \left(\int_0^l m \omega^2(x, t_f) dx \right)^{1/2} = \frac{1}{\lambda^2} \sqrt{0,5 K_0}.$$

Исключая величину λ^2 , находим

$$\left(\frac{K_0}{\bar{u}} \right)^2 = \frac{3M_s^2}{m l^3} \left[\frac{4}{s^3} + \frac{1}{(1-s)^3} \right]. \quad (3.9)$$

Допустим теперь, что величины K_0 и \bar{u} заданы, а разыскивается такое положение опор, для которых объем балки минимален. Последнее условие можно заменить требованием $M_s = \min$. В таком случае из формулы (3.4) вытекает, что выражение, стоящее в квадратных скобках должно иметь максимальное значение; это имеет место при $s = 0$ или $s = 1$. Исследуем эти решения подробнее. Если, например, $s \rightarrow 0$, то из выражений (3.2) и (3.9) следует, что $M_s \sim s^{1.5}$, $\lambda \sim s^{-0.25}$, $W_0 \sim 1$, $\psi \sim s^2$. Для такого «оптимального проекта» опоры весьма близки друг другу, изгибается лишь часть балки между опорами. Для такого проекта интегральный прогиб \bar{u} равен нулю даже для бесконечной малой величины M_s . Аналогичный случай имеет место и при $s = 1$. Но если требовать, чтобы выражение в квадратных скобках в формуле (3.9) имело минимум, то опять приходим к оптимальному значению, определяемому формулой (3.3).

Литература

1. Лепик Ю. Оптимальное проектирование неупругих балок с дополнительными опорами в случае динамического нагружения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 430, 132—143.
2. Лепик Ю. Об условии оптимальности балок с дополнительными опорами при динамических нагрузках. Настоящий сборник, стр. 45—61.
3. Martin, J. B., Symonds, P. S. Mode approximations for impulsively loaded rigid-plastic structures. J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1966, № EM5, 43—64.

4. Prager, W., Rozvany, G. I. N. Plastic design of beams: Optimal locations of supports and steps in yield moment. *Int. J. Mech. Sci.*, 1975, 17, № 10, 627-631.

Поступило
14 III 1979

DETERMINATION OF THE OPTIMAL LOCATION OF SUPPORTS IN THE CASE OF AN IMPULSIVELY LOADED RIGID-PLASTIC BEAM

U. Lepik

Summary

A rigid-plastic beam on two variable supports is considered. The beam is subjected to a constant initial velocity field. The locations of supports with the minimal residual deflections are being sought.

Before dealing with this question we must solve an auxiliary problem: the dynamic bending of a rigid-plastic cantilever beam under a constant initial transverse velocity field. It has been done in § 1 of this paper.

In § 2 the main problem (see Fig. 3) is discussed. It is shown that depending upon the location of the supports three variants of motion are possible. From these only one, which leads to the optimal solution, is discussed in detail. It will take place if the nondimensional coordinate of the support a belongs to the interval $(0.586; 0.710)$. This motion consists of three stages: (i) the central and outward parts of the beam move independently; (ii) the outer part starts moving in the opposite direction; (iii) the whole beam moves as a rigid body with a plastic hinge in the centre. Formulae for residual deflections are found. Such locations of supports, for which residual deflections in the centre and in the free ends of the beam are equal, will be considered optimal. The optimal value of s was found to be 0.597. In paper [2] the optimality condition (2.23) was given. It is shown that this condition holds good for the problem considered in the present paper.

In § 3 the same problem is solved by the method of mode form solutions. The calculations, carried out in § 3, show that this method, in spite of its simplicity, guarantees good exactness, the error in calculating the location of the support and the residual deflection in the centre of the beam was about 2 per cent.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СТУПЕНЧАТО- ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

И. Вайникко и К. Соонетс

Тартуский государственный университет

Изучается поведение свободно опертой цилиндрической оболочки ступенчато-переменной толщины при динамическом нагружении (на оболочку действует или кратковременная нагрузка или оболочка имеет заданную начальную кинетическую энергию). Ищутся параметры оболочки, при которых остаточный прогиб минимален среди оболочек равного объема. Задача решается в случае жестко-пластического материала методом модальных решений [6]. Аналогичные задачи для балок и круглых пластин с различными способами закрепления и видами нагрузок решены в работах [1—5].

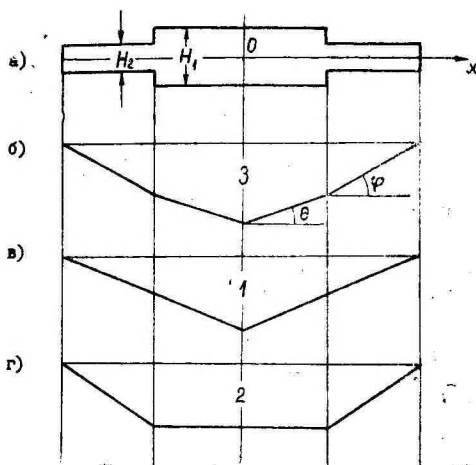


Рис. 1

1. Основные соотношения. Рассмотрим свободно опертую цилиндрическую оболочку радиуса R двухступенчатой толщины (размеры и координаты указаны на фиг. 1). Материал оболочки считается жестко-пластическим, условие текучести аппроксимируется прямоугольником (см. в безразмерных величинах на фиг. 2), где внешний прямоугольник соответствует цент-

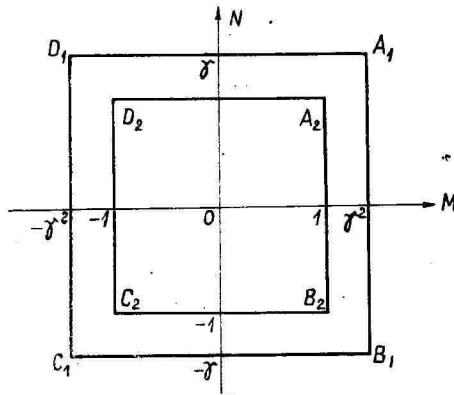


Рис. 2

ральной части оболочки. Рассматриваются два способа нагружения: 1) оболочка нагружена кратковременным равномерно распределенным внутренним давлением интенсивности P , которое снимается в момент τ_0 ; и 2) оболочке сообщается в начальный момент времени кинетическая энергия K_0 . Следует подобрать параметры A и H_1/H_2 так, чтобы при постоянном объеме оболочки $V_0 = 4\pi R[H_1 A + H_2(L - A)]$ остаточный прогиб в середине оболочки W_f оказался минимальным.

Дальнейшие рассуждения проводим в безразмерных величинах, используя следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{X}{L}, & a &= \frac{A}{L}, & \gamma &= \frac{H_1}{H_2}, \\
 t &= \frac{\tau}{\tau_0}, & \omega &= \frac{RQ}{\sigma^2 \tau_0^2} W, & p &= \frac{4\pi R^2 L}{V_0 \sigma_0} P, \\
 M &= \frac{M_x}{M_0''}, & N &= \frac{N_\varphi}{N_0''}, & Q &= \frac{L}{M_0''} Q_x;
 \end{aligned}$$

$\alpha = 16\pi L^3/V_0$ — геометрический параметр оболочки; $\Delta = 1 + a(\gamma - 1)$;

$$M_0' = \sigma_0 H_1^2/4, \quad M_0'' = \sigma_0 H_2^2/4, \quad N_0' = \sigma_0 H_1, \quad N_0'' = \sigma_0 H_2 —$$

соответственно предельный изгибающий момент и круговая сила для центральной и крайней частей оболочки, σ_0 и q — предел текучести и плотность материала, M_x , Q_x , N_ϕ — изгибающий момент, поперечная и круговая силы. Дифференцирование по безразмерному времени обозначим точкой над величиной.

Дифференциальное уравнение движения оболочки в безразмерных величинах примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \alpha \Delta N = -\alpha \Delta^2 p + \alpha \Delta h(x) \omega'', \quad (1)$$

$$h(x) = \begin{cases} \gamma, & 0 \leq x \leq a, \\ 1, & a \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Предположим, что в оболочке могут появиться шарнирные окружности в сечениях $x=0$ и $x=a$, а остальные части поворачиваются вокруг них как твердые тела (фиг. 16). В таком случае скорость прогиба равняется

$$\omega' = \begin{cases} (1-a)\phi' + (a-x)\theta', & 0 \leq x \leq a, \\ (1-x)\phi', & a \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2)$$

где θ и ϕ — углы поворота, указанные на фиг. 16. Согласно методу модальных решений ускорение прогиба — постоянная величина во времени и при этом

$$\phi/\theta = \phi'/\theta' = \phi''/\theta'' = \lambda.$$

Если сечения $x=0$ и $x=a$ в предельном состоянии, то им соответствуют на прямоугольнике текучести угловые режимы B_1 и B_2 . Изгибающий момент M должен быть непрерывным, а сила N претерпевает скачок в сечении $x=a$ при переходе в условия текучести от внешнего прямоугольника на внутренний квадрат в точку B_2 . Таким образом,

$$N = \begin{cases} \gamma, & 0 \leq x \leq a, \\ 1, & a \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Проинтегрируем уравнение (1), подставляя туда выражение ускорения прогиба ω'' из формулы (2), обозначая $S = \theta''$ и $T = \phi''$. При этом учтем граничные условия $M(1) = M'_x(0) = 0$. В результате получим на отрезке $[0, a]$:

$$M(x) = M(0) + \frac{1}{2} \alpha \Delta x^2 \left[\gamma - p \Delta + \gamma(1-a)T + \gamma \left(a - \frac{1}{3}x \right) S \right];$$

на отрезке $[a, 1]$:

$$M(x) = M(a) + \alpha \Delta (x-a) \left\{ a\gamma + \frac{1}{2} (x-a) - \frac{1}{2} p \Delta (x+a) + \right.$$

$$+ \left[a\gamma(1-a) + \frac{1}{6} (3-2a-x)(x-a) \right] T + \frac{1}{2} a^2 \gamma S \}.$$

В этих формулах

$$M(0) = \alpha \Delta (a_{11}S + a_{12}T - b_{11} - b_{12}p),$$

$$M(a) = \alpha \Delta (a_{21}S + a_{22}T - b_{21} - b_{22}p),$$

$$a_{11} = \frac{1}{6} a^2 \gamma (a-3), \quad a_{12} = (1-a) \left[\frac{1}{2} a\gamma (a-2) - \frac{1}{3} (1-a)^2 \right],$$

$$a_{21} = \frac{1}{2} a^2 \gamma (a-1), \quad a_{22} = \frac{1}{3} (1-a)^2 (a-1-3a\gamma),$$

$$b_{11} = \frac{1}{2} [a\gamma(2-a) + (1-a)^2], \quad b_{12} = -\frac{1}{2} \Delta,$$

$$b_{21} = \frac{1}{2} (1-a)(1-a+2a\gamma), \quad b_{22} = -\frac{1}{2} \Delta (1-a^2).$$

2. Нахождение ускорений. Изгибающие моменты в характерных сечениях $x=0$ и $x=a$ не могут превышать предельных значений: $M(0) \leq \gamma^2$ и $M(a) \leq 1$. Равенство имеет место в предельном состоянии и тогда появляются шарнирные окружности. С учетом выражений для моментов будем иметь

$$а) \quad a_{11}S + a_{12}T \leq b_1, \tag{3}$$

$$б) \quad a_{21}S + a_{22}T \leq b_2;$$

$$b_1 = \gamma^2 / \alpha \Delta + b_{11} + b_{12}p, \quad b_2 = 1 / \alpha \Delta + b_{21} + b_{22}p.$$

Возможны три типа появления пластических шарниров.

1) Предельный момент достигается лишь в сечении $x=0$ (фиг. 1б). Тогда $S=T$ и в первом из неравенств (3) имеем равенство, откуда

$$S=T = \frac{b_1}{a_{11} + a_{12}}. \tag{4}$$

2) Лишь в сечении $x=a$ момент $M(a) = 1$ (фиг. 1г). В данном случае $S=0$ и второе из неравенств (3) даст

$$T = \frac{b_2}{a_{22}}. \tag{5}$$

3) Предельное состояние достигается одновременно в обоих сечениях $x=0$ и $x=a$. Тогда найдем из системы (3) ускорения

$$SD = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}; \quad TD = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}; \tag{6}$$

$$D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

В дальнейшем снабдим в случае необходимости величины S и T индексами, указывающими номер типа появления шарниров.

3. Изучение механизма движения оболочки. Если оболочка нагружена давлением p в промежутке времени $[0, 1]$, то в этой фазе движение ускоренное, причем $S \geq 0$ и $T \geq 0$. После снятия нагрузки начинается вторая фаза движения. Во второй фазе воспользуемся для нахождения ускорений также формулами (4—6), полагая в них $p = 0$. Вторая фаза заканчивается прекращением движения в момент t_f , который определится из условия $\Theta'(t_f) = \Phi'(t_f) = 0$. Остаточный прогиб в середине оболочки получим путем интегрирования уравнения (2) по времени

$$f_p = w(t_f, 0) = [(1 - a)\varphi(t_f) + \Theta(t_f)]. \quad (7)$$

Величины $\varphi(t)$ и $\Theta(t)$ находим путем двукратного интегрирования уравнений $\varphi'' = T$ и $\Theta'' = S$, учитывая различные значения T и S в отдельных фазах движения и удовлетворяя условиям непрерывности скоростей при переходе от одной фазы к другой. Эта методика изложена в [3]. При анализе механизмов движения оболочки следует учитывать требование неотрицательности скорости пластической работы на шарнирных окружностях, что приводит к условию выпуклости формы прогиба $\Phi \geq \Theta$. Расчеты показывают, что при оптимальном проекте всегда реализуется комбинация 2 + 3 + 1, т. е. вначале появляются шарнирные окружности только при $x = a$ и ускорение найдем по формуле (5). Такой тип движения продолжается до снятия нагрузки p в момент времени $t = 1$. Во второй фазе $1 \leq t \leq t_1$ появляются шарнирные окружности в центре $x = 0$ и в сечении $x = a$ и ускорения найдем по формулам (6). Момент t_1 определяем из условия, что шарнир в сечении $x = a$ останавливается и тогда $\Phi'(t_1) = \Theta'(t_1)$, а также в дальнейшем $\Phi'(t) = \Theta'(t)$. Далее движется цилиндр с одной шарнирной окружностью при $x = 0$ до остановки в момент t_f , при котором $\Theta'(t_f) = 0$. Обозначая угловые ускорения S и T , вычисленные при $p = 0$, через U и V соответственно, получим

$$t_1 = 1 + \frac{T_2}{U_3 - V_3}, \quad (8)$$

$$t_f = \left(1 - \frac{U_3}{V_1}\right)t_1 + \frac{U_3}{V_1} \quad (9)$$

при условии, что $U_3 > V_3$ и $U_3 > 0$. Углы поворота в формуле (7) для данного случая определяются следующим образом:

$$\Theta(t_f) = \frac{1}{2} V_1 t_f^2 + (U_3 - V_1) \left(t_f - \frac{1}{2} t_1\right) t_1 - U_3 \left(t_f - \frac{1}{2}\right); \quad (10)$$

$$\Phi(t_f) = \frac{1}{2} V_1 t_f^2 + (V_3 - V_1) \left(t_f - \frac{1}{2} t_1\right) t_1 + (T_2 - V_3) \left(t_f - \frac{1}{2}\right).$$

4. Поведение оболочки при заданной начальной энергии. Если оболочке сообщена начальная кинетическая энергия K_0 , то имеем

$$K_0 = 2\pi R_0 \int_0^L H(X) \left(\frac{dW}{d\tau} \right)^2 dX \quad \text{при} \quad \tau=0: \quad (11)$$

Это условие используем для нахождения начальных угловых скоростей $\Theta(0) = \Theta_0$ и $\Phi(0) = \Phi_0$. Движение оболочки замедляющее, угловые ускорения определены формулами (4)–(6) при $p = 0$, также должно быть $T \leq S \leq 0$. При первой форме движения $M(a) \leq 1$. Это условие определяет область в плоскости параметров a и γ , в которой реализуется форма 1:

$$6(\gamma^2 - 1) + a\Delta\gamma a^2 [3 + (3 - a)S] \leq 0. \quad (12)$$

Вторая форма движения реализуется при $M(0) \leq \gamma^2$, откуда получим дополнительное требование:

$$2(\gamma^2 - 1) + a\Delta\gamma a^2 [1 + (1 - a)T] \geq 0. \quad (13)$$

Третья форма движения имеет место, если одновременно $M(0) = \gamma^2$ и $M(1) = 1$, причем необходимо соблюдать выполнение условия выпуклости формы прогиба

$$T/S = \lambda > 1. \quad (14)$$

В данном случае происходит движение оболочки только в одной фазе в промежутке времени $[0, t_f]$. Момент прекращения движения $t_f = \Phi_0/|T|$, углы поворота звеньев оболочки в этот момент равняются

$$\Phi(t_f) = \frac{\Phi_0^2}{2|T|}, \quad \Theta(t_f) = \frac{1}{\lambda} \Phi(t_f).$$

При втором типе деформирования $\Theta(t) \equiv 0$. Подставляя в равенство (11) выражение скорости прогиба (2) и проведя интегрирование, получим выражение начальной угловой скорости. Затем получим остаточный прогиб по формуле (7). Примем за параметр остаточного прогиба величину

$$f_k = \frac{LV_0\sigma_0}{2RK_0} \omega(t_f, 0).$$

Тогда окончательно при первой ($\lambda = 1$) и третьей формах деформирования

$$f_k = 3\Delta \frac{(1-a)\lambda + a}{|S|} F_1^{-1};$$

а при второй форме

$$f_k = \frac{1-a}{|T|} F_2^{-1},$$

где

$$F_1 = \lambda(1-a)[\lambda(1-a)(1-a+3a\gamma) + 3a^2\gamma] + a^3\gamma,$$

$$F_2 = (1-a)^2(1-a+3a\gamma).$$

В случае оболочки постоянной толщины следует движение оболочки считать происходящим по первой форме и остаточный прогиб в центре равен $f_m = 2a/(a+2)$. Также можно найти точное решение, определяющее распределение прогиба. В первой стадии движения оболочки подвижная шарнирная окружность перемещается от сечения $x=1$ в сторону середины. Во второй стадии существует в середине стационарная шарнирная окружность. В первой стадии поле скоростей прогиба имеет вид

$$w(x, t) = \begin{cases} v_1(t), & 0 \leq x \leq s \\ v_1(t) \frac{1-x}{1-s(t)}, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Во второй стадии имеем $\dot{w} = v_2(t)(1-x)$. Проинтегрируя дифференциальные уравнения движения и удовлетворяя условиям $M(s) = 1$, $M(1) = 0$, $Q(s) = 0$, узнаем закон перемещения шарнирной окружности $s = s(t)$, также функции $v_1(t)$ и $v_2(t)$. Остаточный прогиб в середине оболочки определится формулой

$$f_c = \frac{\alpha(\alpha+8)}{(\alpha+2)(\alpha+6)}.$$

5. Обсуждение результатов. Оптимальные значения параметров a и γ при некоторых значениях α и p приведены в таблице 1. Там же указано отношение остаточного прогиба к прогибу оболочки постоянной толщины (модальное решение), который равен

$$w_c = \frac{3}{4} p \left(\frac{p}{p_c} - 1 \right), \quad p_c = 1 + \frac{2}{\alpha}.$$

Здесь p_c означает статическую предельную нагрузку.

Как видно, оптимальные значения для a и γ мало зависят от параметра оболочки α и нагрузки p . Минимум прогиба достигается на границе между типами 2+2 и 2+3+1.

При заданной начальной кинетической энергии превалируют первая и вторая формы движения оболочки и в узкой области плоскости возможны одновременно все три формы движения. Оказалось, что оптимальным является проект $a = 0,90$; $\gamma = 2,40$ независимо от параметра оболочки α . В таблице 2 приводятся

Таблица 1

α	ρ	a	γ	w_f/w_c
2	3	0,76	1,59	0,51
	4	0,76	1,59	0,56
	5	0,77	1,62	0,57
	6	0,77	1,62	0,58
3	3	0,77	1,63	0,56
	4	0,78	1,66	0,58
	5	0,79	1,69	0,59
	6	0,79	1,69	0,60
4	3	0,79	1,70	0,58
	4	0,79	1,70	0,59
	5	0,79	1,70	0,60

Таблица 2

α	f_k/f_m	f_k/f_c
2	0,51	0,801
4	0,51	0,838
8	0,51	0,895
16	0,51	0,937

отношения, характеризующие отношение минимального остаточного прогиба ступенчатой оболочки к прогибу оболочки постоянной толщины (модальное и точное решения). Минимальный прогиб достигается на линии раздела между различными формами при второй форме. Это имеет место при условии:

$$4(\gamma^2 - 1)[(1 - a)^2 + 3a\gamma] - 6a^2\gamma(2\gamma^2 - 1) = a\Delta\gamma a^2(1 - a)^2.$$

Приведенное соотношение является уравнением оптимальности для цилиндрической оболочки: перемещаясь вдоль этой кривой вблизи оптимальной точки (0,90; 2,40) значения прогибов изменяются лишь незначительно. Окажется, что это уравнение оптимальности применимо и в случае силового нагружения.

Как видно, ступенчатая оболочка способствует уменьшению остаточных прогибов. Решение рассматриваемой задачи с учетом подвижных шарнирных окружностей даст возможность лучше оценить приемлемость модальных решений при оптимизации ступенчатой формы цилиндрической оболочки. Нахождение точного решения связано с серьезными математическими трудностями, особенно в случае силовой нагрузки.

Литература

1. Вайникко И., Соонетс К. Об оптимальном проектировании балки ступенчато-переменной толщины под действием динамической сосредоточенной нагрузки. — Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 487, 29—36.
2. Сакков Э. К оптимальному проектированию жестко-пластической свободной балки ступенчато-переменной толщины под действием динамической нагрузки. — Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 487, 40—44.
3. Соонетс К., Вайникко И. О динамическом изгибе жестко-пластических круглых пластинок. — Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 430, 123—132.
4. Соонетс К., Хартикайнен А. Оптимизация динамически нагруженной жестко закрепленной балки ступенчато-переменной толщины. — Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 487, 45—51.

5. Lepik, U., Mróz, Z. Optimal design of plastic structures under impulsive and dynamic pressure loading. *Int. J. Solid Structures*, 1977, 13, 657—674.
6. Martin, J. B., Symonds, P. S. Mode approximations for impulsively-loaded rigid-plastic structures. *J. Eng. Mech. Div., Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.*, 1966, 95, № EM 5, 43—64.

Поступило
25 IV 1979

OPTIMAL DESIGN OF CYLINDRICAL SHELLS OF PIECEWISE CONSTANT THICKNESS UNDER DYNAMIC LOAD

I. Vainikko and K. Soonets

Summary

Simply supported cylindrical shells under a short-time load or kinetic energy are studied. A distribution of thickness granting minimal residual deflection in the middle of the shell has been found. The material of the shells under consideration is rigid plastic of square yield condition. The method of modal solutions has been applied, i. e. accelerations are constant. Numerical examples are presented.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КОНИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК КУСОЧНО-ПОСТОЯННОГО ПРОФИЛЯ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Ю. Кирс

Таллинский политехнический институт

Введение

В статье исследуются жестко-пластические конические и сферические оболочки кусочно-постоянного профиля, шарнирно опертые снизу и свободные по верхней грани. Цель статьи — выработать метод для вычисления параметров U и ψ , минимизирующих остаточный прогиб при координате $r = A$, если заданы начальная кинетическая энергия и объем оболочки. Здесь u — радиус окружности скачкообразного изменения толщины и ψ — отношение толщин h_2/h_1 . Аналогичная задача для балки решена в статье [2]. Там рассмотрена и трехступенчатая балка. Оказалось, что полученный выигрыш весьма незначительный по сравнению с двухступенчатой.

§ 1. Основные соотношения для конической оболочки

Рассмотрим коническую оболочку, вид которой дан на рис. 1. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (rN_1) &= N_2 + \frac{rh_i q}{\cos \alpha} \frac{\partial^2 V}{dt^2}, \\ \frac{\partial}{\partial r} (rS) &= -N_2 \tan \alpha + \frac{r}{\cos \alpha} \left(h_i q \frac{\partial^2 W}{dt^2} - P \right), \\ \frac{\partial}{\partial r} (rM_1) &= M_2 + \frac{rS}{\cos \alpha}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где N_1 и N_2 — осевое и трансверсальное усилия, M_1 и M_2 — изгибающие моменты, r — координата оболочки, S — перерезывающая сила, α — угол наклона оболочки, q — плотность ма-

териала, V — перемещение вдоль образующей, W — перемещение (прогиб), перпендикулярное к срединной поверхности, P — внешняя нагрузка, h_i — толщина оболочки, причем $i = 1$ при $A \leq r \leq Y$ и $i = 2$ при $Y \leq r \leq R$.

Поверхность текучести образует на плоскостях N_1N_2 и M_1M_2 два наклонных квадрата (рис. 2). Это условие было предложено

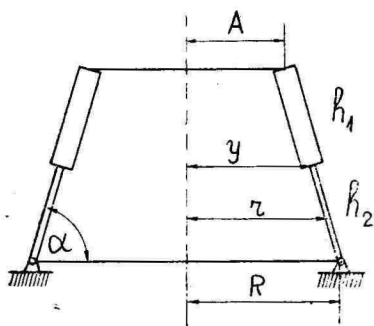


Рис. 1

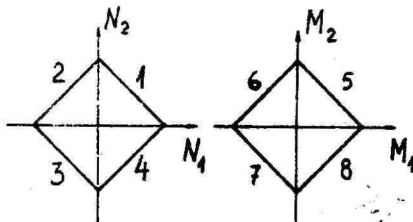


Рис. 2

в статье [1]. Движение оболочки происходит во внутреннюю сторону. Поэтому предполагаем, что реализуется пластическое состояние 3 + 5, откуда

$$N_2 = -N_1 - \sigma_0 h_i; \quad M_2 = -M_1 + \sigma_0 h_i^2 / 4, \quad (1.2)$$

где σ_0 — предел текучести материала. Ввиду ассоциированного закона течения, вектор скорости деформации направлен перпендикулярно к поверхности текучести. Обобщенные деформации оболочки суть

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial V}{\partial r} \cos \alpha, & \varepsilon_2 &= (V \cos \alpha - W \sin \alpha) / r, \\ \kappa_1 &= 0,25 h_i \cos^2 \alpha (\partial^2 W / \partial r^2), & \kappa_2 &= -\frac{h_i \cos^2 \alpha}{4r} \frac{\partial W}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Граничные условия: на верхней окружности радиуса $r = A$ имеем $N_1 = M_1 = S = 0$, а на нижней ($r = R$) имеем $M_1 = W = \dot{W} = V = \dot{V} = 0$. Здесь точка u символа обозначает дифференцирование по времени t .

§ 2. Первый тип деформирования

Вся оболочка находится в пластическом состоянии. Исследуем сначала область $A \leq r \leq Y$. Для решения задачи подставляем в систему (1.1) усилие N_2 и момент M_2 из уравнений (1.2),

где $h_i = h_1$. Из ассоциированного закона течения следует, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и $\kappa_1 = \kappa_2$ и с учетом (1.3) получим дифференциальные уравнения для перемещений V и W :

$$r \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial W}{\partial t} \tan \alpha,$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial r^2 \partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t}.$$

Отсюда, учтя граничные условия, находим:

$$W = E(r^2 - R^2),$$

$$V = -E \tan \alpha (r - R)^2, \quad (2.1)$$

где $E = \lambda t + \mu$. Что касается вторых производных W'' и V'' , то они не зависят от времени t . Перемещения V и W имеют вид

$$W = (0,5\lambda t^2 + \mu t)(r^2 - R^2),$$

$$V = -(0,5\lambda t^2 + \mu t)(r - R)^2 \tan \alpha.$$

Подставляем в систему (1.1) производные по времени W'' и V'' и введем новые переменные $z_1 = N_1 r^2$, $z_2 = rS$, $z_3 = M_1 r^2$. Теперь основная система приобретает вид

$$\frac{\partial z_1}{\partial r} = -\sigma_0 h_1 r - \frac{h_1 Q \lambda \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} (r^4 - 2r^3 R + R^2 r^2);$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial r} = \frac{z_1 \tan \alpha}{r^2} + \sigma_0 h_1 \tan \alpha + \frac{h_1 Q \lambda}{\cos \alpha} (r^3 - R^2 r),$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial r} = \frac{\sigma_0 h_1^2 r}{4} + \frac{z_2 r}{\cos \alpha}.$$

Решая эти уравнения с учетом граничных условий, получим выражения для усилий N_1 , S_1 и M_1 (они приводятся ниже в безразмерном виде).

Рассмотрим теперь область $Y \leq r \leq R$. Подставляем неизвестные N_2 и M_2 из уравнений (1.2) в систему (1.1), учитывая, что $h_i = h_2$. Перемещения V и W определены формулами (2.1). Интегрируем основные уравнения аналогично первому случаю. Константы интегрирования определим из условий непрерывности функций N_1 , S и M_1 при $r = Y$. Из условия $M_1(R) = 0$ можно определить параметр λ :

$$\lambda = -\frac{5\sigma_0 \cos^2 \alpha \cdot F_1}{2QF_2}, \quad (2.2)$$

где

$$F_1 = 3h_1 \cos^2 \alpha [\gamma^2 (R^2 - Y^2) + Y^2 - A^2] +$$

$$+ 4 \sin \alpha [(2A + R)(A - R)^2 - (1 - \gamma)(2Y + R)(Y - R)^2]$$

$$F_z = 5 \cos^2 \alpha [(1 - \gamma)(R^2 - Y^2)^3 + (A^2 - R^2)^3] + \\ + \sin^2 \alpha [(A - R)^3(5A + R) - (1 - \gamma)(Y - R)^3(5Y + R)].$$

Поле начальных скоростей определим по формуле

$$W \cdot |_{t=0} = \mu (r^2 - R^2):$$

С течением времени скорость деформации уменьшается, так как $W \cdot < 0$. В момент $t = t_1 = -\mu/\lambda$ оболочка остановится. Остаточный прогиб $G = W|_{t=t_1, r=A}$ на верхнем крае равен

$$G = -\frac{\mu^2}{2\lambda} (A^2 - R^2). \quad (2.3)$$

Для окончательного определения функции G нужно вычислить еще параметр μ . Для этого составим выражение кинетической энергии оболочки в начальный момент времени. Дифференциал кинетической энергии элемента оболочки

$$dK = \frac{dM}{2} (W \cdot^2 + V \cdot^2),$$

где $dM = 2\pi \rho h_i r dr / \cos \alpha$. Теперь

$$K_0 = K|_{t=0} = \frac{\pi \rho h_1}{\cos \alpha} \int_A^Y (W \cdot^2 + V \cdot^2) r dr + \frac{\pi \rho h_2}{\cos \alpha} \int_Y^R (W \cdot^2 + V \cdot^2) r dr.$$

Подставляя сюда функции $W \cdot$ и $V \cdot$ из системы (2.1) и производя вычисления, получим

$$K_0 = \frac{\pi \rho h_1 \mu^2}{\cos \alpha} \left[\frac{(1 + \tan^2 \alpha)}{6} ((1 - \gamma)(Y^2 - R^2)^3 - (A^2 - R^2)^3) + \right. \\ \left. + \frac{2 \tan^2 \alpha}{15} ((A - R)^3(6RA^2 + 3R^2A + R^3) - \right. \\ \left. - (1 - \gamma)(Y - R)^3(6RY^2 + 3R^2Y + R^3)) \right]. \quad (2.4)$$

Отсюда можно выразить параметр μ . Переходим к безразмерным величинам. Из выражения объема оболочки

$$B = \frac{\pi}{\cos \alpha} [h_1(Y^2 - A^2) + h_2(R^2 - Y^2)],$$

и отношения $\gamma = h_2/h_1$ выразим

$$h_1 = \frac{B \cos \alpha}{\pi R^2 \Delta}, \quad h_2 = \frac{\gamma B \cos \alpha}{\pi R^2 \Delta},$$

где

$$\Delta = \frac{Y^2}{R^2} - \frac{A^2}{R^2} + \gamma \left(1 - \frac{Y^2}{R^2} \right).$$

Введем переменные

$$y = Y/R, \quad a = A/R, \quad x = r/R.$$

Вместо параметра λ используем величину

$$L = \frac{\lambda}{Q_1}; \quad Q_1 = \frac{\sigma_0}{QR^3}.$$

Получим

$$L = -\frac{5\Phi_1}{2\Phi_2},$$

где через Φ_1 и Φ_2 обозначены величины F_1 и F_2 , выраженные в новых переменных.

Обозначим $q = \mu/Q_2$, где

$$Q_2 = \sqrt{\frac{K_0}{QR^4}}.$$

Из равенства (2.4) с учетом выражений для h_2 и Q_2 получим

$$q = \sqrt{\frac{\Delta}{D}};$$

где

$$D = \frac{1}{6} (1 + \tan^2 \alpha) [(1 - \gamma)(y^2 - 1)^3 - (a^2 - 1)^3] + \\ + \frac{2}{15} \tan^2 \alpha [(a - 1)^3 (6a^2 + 3a + 1) - \\ - (1 - \gamma)(y - 1)^3 (6y^2 + 3y + 1)].$$

Вместо функции G , определенной в (2.3), теперь надлежит минимизировать функцию

$$z = \frac{q^2(1 - a^2)}{2L}, \quad (2.5)$$

где

$$z = \frac{G}{Q_3}; \quad Q_3 = \frac{K_0 R}{\sigma_0 B}.$$

Вместо усилия N_1 и момента M_1 используем безразмерные величины n_1 и m_1 , которые определяются по формулам

$$n_1 = \frac{N_1}{Q_4}, \quad m_1 = \frac{M_1}{Q_5}, \\ Q_4 = \frac{\sigma_0 B \cos \alpha}{\pi R^2}, \quad Q_5 = \frac{\sigma_0 B \cos \alpha}{\pi R}.$$

В промежутке $a \leq x \leq y$ получаются уравнения

$$n_1 = \frac{a^2 - x^2}{2x^2\Delta} + \frac{L \sin \alpha}{\Delta x^2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{a^5}{5} - \frac{x^5}{5} - \frac{a^4}{2} + \frac{x^4}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{x^3}{3} \right),$$

$$m_1 = \frac{c(x^2 - a^2)}{8x^2\Delta^2} + \frac{\sin \alpha}{6x^2\Delta \cos^2 \alpha} (x^3 - 3a^2x + 2a^3) +$$

$$+ \frac{L \sin^2 \alpha}{\Delta \cos^4 \alpha} \left(\frac{a^4}{2x} - \frac{a^5}{5x} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^3}{30} - \frac{a^3}{3x} - \frac{x^2}{24} + \frac{a^4}{8} - \right.$$

$$\left. - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^5}{5x^2} + \frac{a^6}{12x^2} + \frac{a^4}{8x^2} \right) +$$

$$+ \frac{L}{24\Delta \cos^2 \alpha} \left(x^4 - 3x^2 - 3a^4 + 6a^2 + \frac{2a^6}{x^2} - \frac{3a^4}{x^2} \right).$$

В области $a \leq x \leq y$ должны выполняться условия

$$n_1 \geq -1/\Delta, \quad m_1 \leq c/4\Delta^2.$$

В промежутке $y \leq x \leq 1$ результаты таковы:

$$n_1 = \frac{1}{2\Delta x^2} \left[-\gamma x^2 + a^2 - y^2(1 - \gamma) \right] +$$

$$+ \frac{2L \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \left[\left(\frac{a^5}{5} - \frac{a^4}{2} + \frac{a^3}{3} \right) - \gamma \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right) - \right.$$

$$\left. - (1 - \gamma) \left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^4}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \right],$$

$$m_1 = \frac{1}{x^2\Delta \cos^2 \alpha} \left[\frac{\cos^2 \alpha \cdot c}{8\Delta} \left[\gamma^2(x^2 - y^2) + y^2 - a^2 \right] + \right.$$

$$+ \frac{\sin \alpha}{6} \left[(1 - \gamma)(3xy^2 - 2y^3) + (2a^3 - 3a^2x) + \gamma x^3 \right] +$$

$$+ \frac{L}{24} \left[\gamma(x^6 - 3x^4) + (1 - \gamma)(3y^4 - 2y^6 + 3x^2y^4 - 6x^2y^2) + \right.$$

$$\left. + x^2(6a^2 - 3a^4) + 2a^6 - 3a^4 \right] +$$

$$+ L \cdot \tan^2 \alpha \left[\frac{a^6}{12} - \frac{a^5}{5} + \frac{a^4}{8} - (1 - \gamma) \left(\frac{y^6}{12} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^4}{8} \right) - \right.$$

$$- x \left(\frac{a^5}{5} - \frac{a^4}{2} + \frac{a^3}{3} \right) + (1 - \gamma) x \left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^4}{2} + \frac{y^3}{3} \right) +$$

$$+ x^2 \left(\frac{a^4}{8} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{4} \right) - (1 - \gamma) x^2 \left(\frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{4} \right) -$$

$$\left. \left. - \gamma \left(\frac{x^6}{120} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^4}{24} \right) \right] \right].$$

При $y \leq x \leq 1$ решение является статически допустимым, если

$$n_1 \geq -\gamma/\Delta, \quad m_1 \leq \gamma^2 c/4\Delta^2, \quad (2.6)$$

и кинематически допустимым, если справедливы неравенства $\epsilon_1' < 0$, $\epsilon_2' < 0$, $\kappa_1' > 0$ и $\kappa_2' > 0$. Они выполнены при $E < 0$, а это дает $\mu < 0$ и $\lambda > 0$.

§ 3. Второй тип деформирования

Центральная часть $a \leq x \leq y$ остается жесткой до конца деформирования, остальная часть находится в пластическом состоянии в режиме 3 + 5 (фиг. 2), где $N_2 = -N_1 - \sigma_0 h_2$ и $M_2 = -M_1 + 0,25\sigma_0 h_2^2$. Заменяя неравенства равенствами, получим

$$\begin{aligned} N_2 &= -N_1 - \sigma_0 h_2 - P_1, \\ M_2 &= -M_1 + 0,25\sigma_0 h_2^2 + T. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Режимы для функций N_1 и N_2 видны на рис. 3. Для M_1 и M_2 можно нарисовать аналогичную схему.

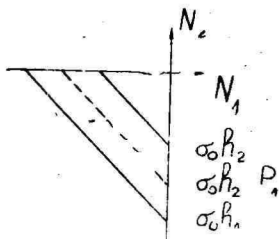


Рис. 3

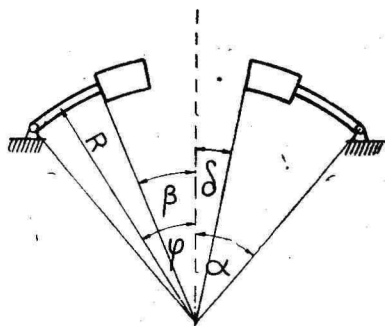


Рис. 4

Исследуя центральную часть, получим из условий $\epsilon_1' = \epsilon_2' = -\kappa_1' = \kappa_2' = 0$ следующие выражения:

$$W'' = \lambda \cos \alpha, \quad V'' = \lambda \sin \alpha. \quad (3.2)$$

Теперь надо опять решить систему (1.1), подставляя туда функции N_2 и M_2 из формул (3.1), затем V'' и W'' из (3.2), взяв $P = 0$ и $i = 1$. Для определения констант интегрирования используем граничные условия при $r = A$ (см. § 1). Значения функций P_1 и T вычисляем при помощи условий

$$N_1(Y) = -\sigma_0 h_2 (1 - \xi_1), \quad M_1(Y) = 0,25 \sigma_0 h_2^2 (1 - \xi_2). \quad (3.3)$$

Константы ξ_1 и ξ_2 определяются так, чтобы статические неравенства (2.6) при $y \leq x \leq 1$ не были нарушены. При практическом решении на ЭВМ надо взять для ξ_1 и ξ_2 нулевые начальные значения. Затем решается задача, проверяя в промежутке $Y \leq r \leq R$ через какой-то шаг Δr выполнение статических требований для функций N_1 и M_1 . Если они где-то нарушены, то решается второй тип сначала, выбирая параметры ξ_1 и ξ_2 следующим образом:

$$\xi_1^{(n+1)} = \xi_1^{(n)} + \Delta \xi_1, \quad \xi_2^{(n+1)} = \xi_2^{(n)} + \Delta \xi_2.$$

На отрезке $Y \leq r \leq R$ уравнения (3.3) являются граничными условиями для определения констант интегрирования. Третье условие найдем, решая систему (1.1). Получим

$$S|_{r=Y} = \left(1 - \frac{A}{Y}\right) (\sigma_0 h_2 + P_1) \tan \alpha + \frac{(Y^2 - A^2)}{2Y} h_1 \rho \lambda - \\ - \frac{\tan \alpha}{2Y^2} (\sigma_0 h_2 + P_1) (Y - A)^2 + \\ + \frac{\tan^2 \alpha}{3Y} h_1 \rho \lambda \left(\frac{Y^2}{2} + \frac{A^3}{Y} - \frac{3}{2} A^2\right),$$

$$\sigma_0 h_2 + P_1 = \frac{2}{3(A^2 - Y^2)} [h_1 \rho \lambda \tan \alpha (A^3 - Y^3) - 3\sigma_0 h_2 Y^2 (1 - \xi_1)].$$

Решение является допустимым, если $P_1 < \sigma_0 (h_1 - h_2)$. При $Y \leq r \leq R$ имеем

$$W^r = \lambda \cos \alpha \frac{(R^2 - r^2)}{(R^2 - Y^2)}, \quad V^r = \frac{\lambda \sin \alpha}{(R^2 - Y^2)} \cdot (R - r)^2.$$

При $r = Y$ выполнены условия непрерывности только для функции W и ее производных. Поэтому окружность $r = Y$ является, так сказать, полушарнирной. Чтобы получить выражения для функций N_1 , S и M_1 , интегрируем опять систему (1.1), сделав необходимые подстановки, и определим константы интегрирования вышеописанным методом. Параметр λ вычислим из условия $M_1(R) = 0$. Переходя к безразмерным величинам, получим наконец

$$L = - \frac{\gamma \cos \alpha \cdot \Phi_3}{2\Phi_4}, \\ \Phi_3 = \frac{\gamma c \cdot \cos^2 \alpha}{4\Delta} [1 + y^2 (1 - 2\xi_2)] + \\ + \frac{\sin \alpha}{3} (1 - y) [(1 - y)^2 + 3y(1 + y) - 6y^2 \xi_1],$$

$$Q_a = \frac{\gamma \sin^2 \alpha (1-y)^4 (1+5y)}{60(1+y)} +$$

$$+ \frac{\gamma \cos^2 \alpha}{12} (1-y^2)^2 + \frac{1}{4} (y^2 - a^2) (1-y^2).$$

Остаточный прогиб при $r = A$ равен

$$z = -\frac{q^2 \cos \alpha}{2L};$$

где

$$q = \sqrt{\frac{6\Delta(1-y^2)^2}{D}},$$

$$D = 3(y^2 - a^2)(1-y^2)^2 + \gamma \cos^2 \alpha (1-y^2)^3 +$$

$$+ \gamma \sin^2 \alpha [6(1-y^4) + \frac{8}{5}(3y^5 + 5y^3 - 8)] +$$

$$+ (1-y^2)(7+4y^2+y^4);$$

В этом случае $Q_1 = \sigma_0 / (qR)$, $q = \mu / Q_2$ и $Q_2^2 = K_0 / (qB)$. Параметр μ вычислен из выражения начальной кинетической энергии оболочки. Решение является допустимым, если $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $n_1 \geq -\sqrt{\Delta}$ и $m_1 \leq \gamma^2 c / (4\Delta^2)$.

§ 4. Результаты вычислений

Для численного решения задачи надо задавать параметры α , c и a . Затем управляющим параметрам γ и y припишем начальные значения (в данной статье взяты $\gamma_0 = 0,1$ и $y_0 = a$). Тогда решается задача первого типа, вычисляя через данный шаг Δx все значения усилия n_1 и момента m_1 . Каждый раз проверяется выполнение необходимых условий. Если какое-то условие нарушено, то переходят ко второму типу. Выполнение соответствующих неравенств здесь достигается подходящим выбором значений постоянных ξ_1 и ξ_2 . Если задача решена до конца для данных значений параметров γ и y , и найден прогиб z , то увеличим параметр y на δy и повторим решение до $y = 1$. Затем увеличим параметр γ на $\delta \gamma$ и вычислим значения функции z при $y \in [a, 1]$. Значения параметров y и γ для наименьшего элемента множества $\{z_i\}$ определяют оптимальный проект оболочки.

Пример 1. Пусть $\alpha = \pi/10$, $c = 0,4$ и $a = 0,5$. Полученные значения функции z даны в таблице 1. Выясняется, что минимальное значение $z = 2,111$ достигается при $\gamma = 0,45$ и $y = 0,70$. Для оболочки постоянной толщины $h_1 = h_2$ имеем $z = 4,645$. Экономия составляет 54,5%. В таблице непрерывной линией изображена граница между первым и вторым типом, под линией

Таблица 1

δ						
0,55	4,242	4,098	4,038	4,025	4,057	4,132
0,50	4,129	4,003	3,942	3,934	3,976	4,065
0,45	4,033	3,893	2,411	2,414	3,894	3,996
0,40	3,922	2,487	2,260	2,326	2,381	3,924
0,35	2,211	2,334	2,452	2,561	2,657	2,727
0,30	2,343	2,529	2,707	2,875	3,026	3,148
	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85

Таблица 2

δ						
0,65	2,134	2,088	2,060	2,051	2,060	2,086
0,60	2,102	2,050	2,020	2,011	2,023	2,055
0,55	2,067	2,009	0,905	0,904	1,985	2,023
0,50	2,028	0,940	0,948	0,956	0,965	1,991
0,45	1,984	0,981	1,000	1,021	1,040	1,058
0,40	0,936	1,031	1,066	1,101	1,135	1,167
	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85

— второй тип, над линией — первый. Минимальный прогиб достигается на границе этих типов в случае второго типа деформирования.

Пример 2. Пусть $\alpha = \pi/4$, $c = 0,04$ и $a = 0,5$. Результаты даны в таблице 2.

Минимум достигается при втором типе деформирования с параметрами $\gamma = 0,55$ и $y = 0,75$. Минимальное значение параметра прогиба $z = 0,904$. Экономия составляет 60,5%.

§ 5. Пологая сферическая оболочка с отверстием

Настоящая задача решается аналогично предыдущей, причем граничные условия и кривые текучести такие же как у конической оболочки. Вид оболочки изображен на фигуре 4. Уравнения движения запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} z_1' &= -\sigma_0 h_k \sin 2\varphi + z_2 \sin \varphi + 2h_i \sigma_0 L f_2 \sin^2 \varphi, \\ z_2' &= 2\sigma_0 h_k \sin \varphi + 2h_i \sigma_0 L f_1 \sin \varphi, \\ z_3' &= \frac{\sigma_0 h_N^2}{2} \sin 2\varphi + R z_2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Толщина оболочки $2h_1$ при $\delta \leq \varphi \leq \beta$ и $2h_2$ при $\beta \leq \varphi \leq \alpha$. Режимы 3 и 5 (см. фиг. 2) дают следующие уравнения для усилия N_2 и момента M_2 :

$$N_2 = -N_1 - 2\sigma_0 h_k, \quad M_2 = -M_1 + \sigma_0 h_N^2. \quad (5.2)$$

В формулах (5.1) и (5.2) толщина h_i является элементом множества (h_1, h_2) , а h_k и h_N — элементами множества (h_1, h_2, h_3, h_4) . В системе (5.1) введены переменные

$$z_1 = N_1 \sin^2 \varphi, \quad z_2 = S \sin \varphi, \quad z_3 = M_1 \sin^2 \varphi.$$

Для нахождения переменных V и W опять использован метод модальных решений: $W = \psi(t) \cdot f_1(\varphi)$ и $V = \psi(t) \cdot f_2(\varphi)$, где $\psi(t) = \lambda t^2/2 + \mu t$. Здесь λ и μ — константы, которые вычисляются позднее. В системе (5.1) параметр $L = \lambda/Q_0$ с $Q_0 = \sigma_0/\rho R$.

При первом типе деформирования вся оболочка находится в пластическом состоянии. При $\delta \leq \varphi \leq \beta$ в формулах (5.1) и (5.2) имеем $i = k = N = 1$. Из ассоциированного закона течения и из условий $V(\alpha) = W(\alpha) = 0$ вытекает, что $f_2 = 0$ и $f_1 = \cos \varphi - \cos \alpha$. При $\beta \leq \varphi \leq \alpha$ в системах (5.1) и (5.2) индексы $i = k = N = 2$, функции f_1 и f_2 остаются неизменными. Затем можно интегрировать систему (5.1), причем постоянные интегрирования определим из условий $N_1(\delta) = M_1(\delta) = S(\delta) = 0$. Решив систему (5.1) для промежутка $\beta \leq \varphi \leq \alpha$, вычислим константы интегрирования из условий непрерывности функций N_1 , S и M . После этого определяется константа L из условия $M_1(\alpha) = 0$. Если еще переходить к безразмерным величинам, то определяющие уравнения получатся следующие: при $a \leq x \leq y$:

$$n_1 = \frac{b(B_1 + T_1)}{\sin^2 \alpha x} \left\{ -2 \cos \alpha x + \frac{L}{3} (B_1 + T_1) (3U_1 + 2B_1 - T_1) \right\},$$

$$m_1 = n_1 + \frac{b}{\sin^2 \alpha x} (\cos^2 \alpha a - \cos^2 \alpha x) (1 + b);$$

при $y \leq x \leq 1$:

$$n_1 = \frac{b}{\sin^2 \alpha x} \left\{ T_1 \left[-2\gamma \cos \alpha x + \frac{\gamma L}{3} (3U_1 - T_1) T_1 + B_1 (2 + L(2U_1 + B_1)) \right] + B_1 \left[-2 \cos \alpha y + \frac{LB_1}{3} (2B_1 + 3U_1) \right] \right\},$$

$$m_1 = n_1 + \frac{b}{\sin^2 \alpha x} [(1 + b) B_1 B_2 + \gamma T_1 T_2 (1 + \gamma b)], \quad (5.3)$$

$$L = -3F_1/F_2,$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \cos \alpha a - \cos \alpha y, & B_2 &= \cos \alpha a + \cos \alpha y, \\ U_1 &= \cos \alpha y - \cos \alpha, & U_2 &= \cos \alpha y + \cos \alpha, \\ T_1 &= \cos \alpha y - \cos \alpha x, & T_2 &= \cos \alpha y + \cos \alpha x, \\ x &= \varphi/\alpha, & a &= \delta/\alpha & y &= \beta/\alpha, \\ n_1 &= N_1/2\sigma_0 R, & m_1 &= M_1/2\sigma_0 R^2, \\ F_1 &= B_1 B_2 (1 + b) + \gamma U_1 U_2 (1 + \gamma b) - 2 \cos \alpha (\gamma U_1 + B_1), \\ F_2 &= 2\gamma U_1^3 + 3U_1 B_1 (2U_1 + B_1) + B_1^2 (2B_1 + 3U_1), \\ b &= c/8000 (B_1 + \gamma U_1). \end{aligned}$$

Объем оболочки равен

$$B_0 = 4\pi R^2 [h_1 (\cos \delta - \cos \beta) + h_2 (\cos \beta - \cos \alpha)],$$

откуда получим

$$h_1 = B_0 / 4\pi R^2 \Delta, \quad h_2 = \gamma B_0 / 4\pi R^2 \Delta,$$

где $\Delta = B_1 + \gamma U_1$. При численном решении задачи задают параметры оболочки α , a и c , причем

$$c = \frac{1000 B_0}{\pi R^3}.$$

Данное решение является допустимым, если при $a \leq x \leq y$ усилие $n_1 \geq -2b$ и момент $m_1 \leq 2b^2$, а при $y \leq x \leq l$ усилие $n_1 \geq -2b\gamma$ и момент $m_1 \leq 2b^2\gamma^2$. Для всего множества оболочек, имеющих одинаковые параметры α , δ и R , но различные γ и β , объем B_0 и начальная кинетическая энергия K_0 одинаковы. Энергия вычисляется по формуле

$$K_0 = 2\pi R^2 h_1 \rho \mu^2 \left[\int_0^\beta (\cos \varphi - \cos \alpha)^2 \sin \varphi d\varphi + \right. \\ \left. + \gamma \int_\beta^\alpha (\cos \varphi - \cos \alpha)^2 \sin \varphi d\varphi \right],$$

откуда

$$K_0 = \frac{2\pi}{3} R^2 h_1 \rho \mu^2 F_3, \quad (5.4)$$

$$F_3 = \gamma U_1^3 + B_1^3 + 3U_1 B_1 (U_1 + B_1). \quad (5.5)$$

Остаточный прогиб в конечный момент времени $t = t_1$ при $\varphi = \delta$ вычислим по формуле

$$G = - \frac{\mu^2 (\cos \delta - \cos \alpha)}{2\lambda}.$$

Сюда подставляем выражения λ и μ из (5.3) и (5.4). Минимизации подлежит функция

$$z = - \frac{3\Delta (U_1 + B_1)}{F_3 L};$$

где $z = G/j$ и $j = K_0 R / B_0 \sigma_0$.

При втором типе центральная часть остается жесткой. При $\delta \leq \varphi \leq \beta$ в формулах (5.1) и (5.2) возьмем $K = 3$, $N = 4$, $i = 1$, $f_1 = \cos \varphi$ и $f_2 = \sin \varphi$, причем $h_1 \leq h_3 \leq h_2$ и $h_1 \leq h_4 \leq h_2$. В отличие от первого типа имеем добавочные условия: $N_1(\beta) = 2\sigma_0 h_2 (1 - \xi_1)$ и $M_1(\beta) = \sigma_0 h_2^2 (1 - \xi_2)$. При $\beta \leq \varphi \leq \alpha$ возьмем $i = K = N = 2$, $f_2 = 0$, а $f_1 = \cos \beta (\cos \varphi - \cos \alpha) / U_1$. Постоянные интегрирования определим из условий непрерывности при $\varphi = \beta$. Из вышеуказанных добавочных условий получим уравнения для вычисления постоянных h_3 и h_4 . Константы

ξ_1 и ξ_2 определяются также, как для конической оболочки. Уравнения для второго типа получаются в виде:

$$z = -\frac{3\Delta \cos \alpha a}{L(3B_1 + \gamma U_1 \cos^2 \alpha y)}$$

$$L = -\frac{\gamma F_4}{2F_5 U_1}$$

$$F_4 = U_1(U_1 + \gamma b U_2) + 2 \sin^2 \alpha y \left[\gamma b (1 - \xi_2) + \frac{U_1}{\cos \alpha y} (1 - \xi_1) \right],$$

$$F_5 = \frac{\gamma}{3} U_1 \cos \alpha y + \frac{B_1}{\cos \alpha y},$$

$$n_1 = \frac{b}{\sin^2 \alpha x} \left[T_1 (-2\gamma \cos \alpha x + \right. \\ \left. + \frac{\gamma L \cos \alpha y \cdot T_1}{3U_1} \cdot (2 \cos \alpha y + \cos \alpha x - 3 \cos \alpha) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\cos \alpha y} (\gamma (1 - \xi_1) \sin^2 \alpha y + LB_1) - 2\gamma (1 - \xi_1) \sin^2 \alpha y \right],$$

$$m_1 = n_1 + \frac{\gamma b}{\sin^2 \alpha x} [(1 + \gamma b) T_1 T_2 + 2(1 - \xi_1 + \gamma b (1 - \xi_2)) \sin^2 \alpha y].$$

При численных расчетах сначала проверяется возможность реализации первого типа, а если какое-то статическое неравенство нарушено, то переходят ко второму типу.

Численный пример был решен при параметрах $\alpha = 0,1$, $a = 0,50$ и $c = 0,40$. Минимальное значение функции $z = 0,1614$ достигается при $\gamma = 0,40$ и $y = 0,80$.

Литература

1. Jones, N., Ich, N. T. The Load Carrying Capacities of Symmetrically Loaded Shallow Shells. *Int. J. Solids and Struct.*, 1972, 8, 1339—1351.
2. Lepik, U., Mróz, Z. Optimal Design of Plastic Structures under Impulsive and Dynamic Pressure Loading. *Int. J. Solids and Struct.*, 1977, 13, № 7, 657—674.

Поступило
29 XII 1978

OPTIMAL DESIGN OF PLASTIC CONICAL AND SPHERICAL SHELLS UNDER IMPULSIVE LOADING

J. Kirs

Summary

The outer edge of the shells is hinged, the inner — free. Initial kinetic energy and volume are prescribed. The yieldcurve has a shape of inclined squares in the planes of forces and moments. Using the associated flow rule such values to the parameters γ and y are found in which the final deflections of the shells are minimum. A solution and numerical examples are given in this paper.

ЛИНЕЙНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

Э. Сакс

Тартуский государственный университет

В настоящей работе исследуется вязкоупругое кручение тел вращения под действием окружных касательных усилий, распределенных по поверхности тела по любому закону, при помощи метода аппроксимаций Ильюшина [2]. Автору не известны исследования о кручении тел вращения, в которых учитывалась бы линейная ползучесть материала. Метод аппроксимаций [2] позволяет строить приближенное решение квазистатических задач вязкоупругости при наличии точного решения упругой задачи. Однако в случае задач кручения тел вращения оказывается, что этот метод дает математически точное решение вязкоупругой задачи.

Иллюстрируем метод Ильюшина на примере кручения цилиндрического вала, нагруженного крутящим моментом $M(t)$, приложенным на одном торце и распределенным окружным боковым касательным усилием постоянной интенсивности $\tau(t)$, приложенным на участке длины d боковой поверхности около другого торца. Остальная часть боковой поверхности и другой торец свободны от нагрузок. Введем цилиндрическую систему координат $r\theta z$ так, что начало координат находится на свободном от нагрузок торце, а другой торец находится в сечении $z = l$, где l — длина вала. Согласно вышесказанному, заданы следующие краевые усилия:

$$\tau_{z\theta}(r, 0, t) = 0, \quad 0 < r < R, \quad (1)$$

$$\tau_{z\theta}(r, l, t) = \frac{2M(t)}{\pi R^4} r, \quad 0 < r < R, \quad (2)$$

$$\tau_{r\theta}(R, z, t) = \begin{cases} \tau(t) = -\frac{M(t)}{2\pi R^2 d}, & 0 < z < d, \\ 0, & d < z < l. \end{cases} \quad (3)$$

В выражениях (1)–(3) величина R — радиус вала.

Сперва необходимо построить точное решение соответствующей упругой задачи, пренебрегая свойствами вязкости. Решение построим с помощью функции напряжений $\varphi(r, z)$, удовлетворяющей уравнению (см. [1], стр. 511)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad (4)$$

Компоненты напряжений вычисляются по формулам:

$$\tau_{z\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (5)$$

Согласно краевым условиям (1)–(3), ищем решение уравнения (4) в виде¹

$$\varphi(r, z, t) = D(t) z r^4 + r^2 \sum A_k(t) I_2(k\pi r/l) \sin k\pi z/l, \quad (6)$$

где I_m — модифицированная функция Бесселя первого рода целочисленного порядка m , которая дифференцируется по формуле (см. [5], стр. 777)

$$\frac{d}{dx} [x^{\pm m} I_m(x)] = x^{\pm m} I_{m \mp 1}(x). \quad (7)$$

С помощью формул (5)–(7) находим:

$$\tau_{r\theta}(R, z, t) = -DR^2 - \frac{\pi}{l} \sum k A_k I_2\left(k\pi \frac{R}{l}\right) \cos k\pi \frac{z}{l}. \quad (8)$$

Чтобы определить коэффициенты² D и A_k разложим краевое условие (3) в ряд Фурье по косинусам:

$$\tau_{r\theta}(R, z, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_0^{\infty} a_k \cos k\pi \frac{z}{l}, \quad (9)$$

где

$$a_0 = -\frac{M(t)}{\pi R^2 l}; \quad (10)$$

$$a_k = -\frac{M(t)}{k\pi^2 R^2 d} \sin k\pi \frac{d}{l}. \quad (11)$$

Сравнив разложения (8) и (9), с учетом (10) и (11), определим значения коэффициентов:

$$D = \frac{M(t)}{2\pi R^4 l}, \quad A_k = \frac{M(t) l}{\pi^3 R^2 d k^2} \frac{\sin k\pi d/l}{I_2(k\pi R/l)}. \quad (12)$$

Используя выражения (12) и формулы (6) и (5), определим распределение компонент напряжений:

¹ Всюду \sum означает $\sum_{k=1}^{\infty}$.

² Свободный индекс k принимает все натуральные значения.

$$\tau_{z\theta}(r, z, t) = \frac{M(t)}{\pi R^2} \left[2 \frac{zr}{R^2 l} + \frac{1}{\pi d} \sum \frac{1}{k} \frac{I_1(k\pi r/l)}{I_2(k\pi R/l)} \sin k\pi \frac{d}{l} \sin k\pi \frac{z}{l} \right], \quad (13)$$

$$\tau_{r\theta}(r, z, t) = -\frac{M(t)}{2\pi R^2} \left[\frac{r^2}{R^2 l} + \frac{2}{\pi d} \sum \frac{1}{k} \frac{I_2(k\pi r/l)}{I_2(k\pi R/l)} \sin k\pi \frac{d}{l} \cos k\pi \frac{z}{l} \right]. \quad (14)$$

С помощью разложений (13) и (14) с точностью до аддитивной постоянной найдем (см. [1], стр. 515) углы поворота точек вала:

$$\psi(r, z, t) = \frac{M(t)}{2\pi R^2 G} \left[\frac{4z^2 - r^2}{2R^2 l} - \frac{2l}{\pi^2 d r} \sum \frac{1}{k^2} \frac{I_1(k\pi r/l)}{I_2(k\pi R/l)} \sin k\pi \frac{d}{l} \cos k\pi \frac{z}{l} \right], \quad (15)$$

где G — модуль сдвига.

Чтобы применить метод аппроксимаций в линейной теории вязкоупругости [2], надо в упругом решении заменить все упругие постоянные материала через две независимые константы: модуля всестороннего сжатия

$$B = E/[3(1 - 2\nu)]$$

и коэффициента

$$\omega = (1 - 2\nu)/(1 + \nu),$$

где E и ν — модуль Янга и коэффициент Пуассона, соответственно. Идея метода аппроксимации состоит в том, что компоненты напряжений, перемещений и т. п. в упругом решении почти всегда с достаточной для практики степенью точности могут быть аппроксимированы трехчленами по степеням ω :

$$F(\omega) = F^{(0)} + F^{(1)}\omega + F^{(-1)}\omega^{-1}.$$

В нашем случае для единственного коэффициента упругости получим

$$\frac{1}{G} = \frac{2}{3B\omega},$$

т. е. метод аппроксимаций [2] в данном случае точен. Далее, ко всем функциям (13)–(15) применяется интегральное преобразование Лапласа—Карсона

$$f^*(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (16)$$

со свойствами ([5], стр. 228): если $f(t) = c = \text{const}$, то $f^*(p) = c$; если $f(t)$ задана в виде свертки

$$f(t) = \int_0^{\infty} F(t-s) d\omega(s), \quad (17)$$

то ее изображение $f^*(p)$ равно произведению изображений под-интегральных функций

$$f^*(p) = F^*(p) \cdot \omega^*(p) \quad (18)$$

и наоборот.

Переходим к решению соответствующей вязкоупругой задачи. Считается, что компоненты напряжений и деформаций связаны уравнением Больцмана для сдвигов³ [2]

$$\gamma_{x\theta}(t) = 2 \int_0^t \Pi(t-s) d\tau_{x\theta}(s), \quad (19)$$

и законом Гука для объемной деформации, где $\Pi(t) = 0,5\gamma(t)/\tau_h$ — функция ползучести при чистом сдвиге, $\tau_h = \text{const}$. С другой стороны, по теории упругости

$$\gamma_{x\theta} = \frac{1}{G} \tau_{x\theta} = \frac{2}{3B\omega} \tau_{x\theta}. \quad (20)$$

Применяя теперь преобразование (16) к (19) и (20), найдем, что

$$\frac{1}{\omega^*(p)} = 3B\Pi^*(p).$$

Теперь, исходя из решения упругой задачи и прибегая к обратному преобразованию Лапласа—Карсона с применением формул (17) и (18), можно выписать распределение углов поворота для линейной вязкоупругой задачи:

$$\psi(r, z, t) = \frac{1}{\pi R^2} \left[\frac{4z^2 - r^2}{2R^2 l} - \frac{2l}{\pi^2} \frac{dr}{dr} \sum \frac{1}{k^2} \frac{I_1(k\pi r/l)}{I_2(k\pi R/l)} \cdot \sin k\pi \frac{d}{l} \cos k\pi \frac{z}{l} \right] \int_0^t \Pi(t-s) dM(s); \quad (21)$$

Поскольку компоненты напряжений (13) и (14) от модулей упругости не зависят, для них распределение по координатам и времени будет таким же, как и в случае упругой задачи. Интегрированием соотношения (19) по частям получим

$$\gamma_{x\theta}(t) = 2\Pi(0)\tau_{x\theta}(t) + 2 \int_0^t \Pi'(t-s)\tau_{x\theta}(s) ds.$$

С другой стороны, по теории наследственности Больцмана—Вольтерры (см. [3], стр. 36) для сдвигов имеет место соотношение

$$\gamma_{x\theta}(t) = \frac{1}{G} \tau_{x\theta}(t) + \int_0^t K(t-s)\tau_{x\theta}(s) ds. \quad (22)$$

³ В (19) и далее x принимает значения z и r .

Из последних двух формул следует

$$\Pi(0) = \frac{1}{2G}, \quad \Pi'(t) = \frac{1}{2G} K(t), \quad \Pi(t) = \frac{1}{2G} \left[1 + \int_0^t K(t) dt \right]. \quad (23)$$

Интегрируя теперь (21) по частям, получаем, с учетом формул (23), равенство

$$\int_0^t \Pi(t-s) dM(s) = \frac{1}{2G} \left[M(t) + \int_0^t K(t-s) M(s) ds \right], \quad (24)$$

которое следует подставить в формулу (21) для углов поворота. При постоянных по времени напряжениях $\tau_{x\theta}(t) = \tau_{x\theta}$ (это имеет место при $M(t) = \text{const}$) формула (22) сводится к следующей:

$$\gamma_{x\theta}(t) = \frac{\tau_{x\theta}}{G} \left[1 + \int_0^t K(s) ds \right]. \quad (25)$$

Дифференцируя обе части формулы (25) по времени, находим, что функция влияния

$$K(t) = \frac{G}{\tau_{x\theta}} \frac{d\gamma_{x\theta}(t)}{dt},$$

пропорциональна скорости ползучести при постоянных по времени напряжениях. Эта формула открывает возможность экспериментального определения функции влияния K .

Закон ползучести (22) можно обращать. Это приведет к уравнению релаксации напряжений

$$\gamma_{x\theta}(t) = G \left[\gamma_{x\theta}(t) - \int_0^t T(t-s) \gamma_{x\theta}(s) ds \right]; \quad (26)$$

где T является ядром уравнения (26), а K — его резольвентой. Рассматривая процесс релаксации, из формул (26) вытекает, что функция влияния

$$T(t) = - \frac{1}{G\gamma_{x\theta}} \frac{d\tau_{x\theta}(t)}{dt},$$

пропорциональна скорости релаксации напряжений при постоянных по времени деформациях. Функции T и K связаны интегральным уравнением Вольтерры второго рода

$$K(t) = T(t) + \int_0^t T(t-s) K(s) ds.$$

Если для ядра T найдена резольвента K , то уравнение (22) является решением уравнения (26), и наоборот, уравнение (26) будет решением уравнения (22), если для ядра K уравнения (22) найдена резольвента T . Вследствие того, что функции влияния K и T являются слабосингулярными (т. е. $K(0) = \infty$ и $T(0) = \infty$, но $\int_0^t K(t) dt < \infty$ и $\int_0^t T(t) dt < \infty$), вычисление

интегралов в правой части формулы (24) может представлять определенные трудности. Часто за функцию влияния T выбирают (см. [6], стр. 228)

$$T(t) = Ae^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (27)$$

Ее резольвентой будет [4]

$$K(t) = \frac{e^{-\beta t}}{t} \sum \frac{[A\Gamma(\alpha)t^k]^\alpha}{\Gamma(k\alpha)}. \quad (28)$$

В учебном пособии [3] приведены таблицы и графики функций (27) и (28) и их интегралов для большого набора параметров A , α , β и времени t . Эти таблицы могут существенно облегчать вычисление интегралов в правой части формулы (24). Аналогично решаются другие задачи о вязкоупругом кручении тел вращения, если для них известны решения соответствующих упругих задач.

Литература

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. Москва, 1963.
2. Ильюшин А. А. Метод аппроксимаций для расчета конструкций по линейной теории термовязкоупругости. Мех. полимеров., 1968, № 2, 47—55.
3. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. Москва, 1976.
4. Колтунов М. А., Безухов В. Н. Анализ ползучести ортотропного стеклопластика. Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1963. № 6, 64—70.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва, 1977.
6. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Москва—Ленинград, 1949.

Поступило
2 II 1979

LINEAR CREEP OF BODIES OF REVOLUTION IN TORSION

E. Saks

Summary

The axisymmetrical torsion of bodies of revolution at the linear creep law is studied. It is considered that the torque is realised by arbitrary quasistatic forces which are applied on the surface of the body. As an example the torsion of a cylindrical body is investigated, if the torque is acting on a butt-end of the body and on the part of lateral surface near the other butt-end. The other cases may be solved analogously, if the exact solutions of according elastic problems are known.

НЕКОТОРЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Г. Гольст

Таллинский политехнический институт

Введение

На кафедре теоретической механики Таллинского политехнического института, начиная с 1964 года, разрабатывался метод решения задач механики, названный «уравнением возможной мощности» [1]. На основе этого метода в статье проводится исследование движения твердого тела и системы тел. Выводятся дифференциальные уравнения поступательного, вращательного и свободного движения твердого тела. Дан пример составления дифференциальных уравнений движения двухскатного экипажа.

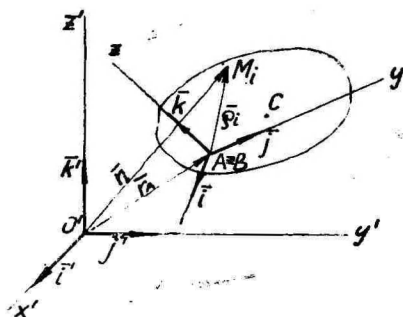
Значения индексов:

$i = 1, 2, \dots, N$, где N — число материальных точек в механической системе,

$j = 0, 1, \dots, s$, где s — число степеней свободы системы,

$n = 1, 2, \dots, p$, где p — число тел (подсистем), входящих в механическую систему,

$k = 0, 1, \dots, k_n$, где k_n — число переходных параметров для n -го тела.



§ 1. Твердое тело

Пусть A — произвольная точка пространства, неизменно связанная с телом (рис. 1), \mathbf{q}_i — радиус-вектор от точки A до i -той точки тела, $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенный вектор угловой скорости тела. Тогда вектор скорости i -той точки тела выразится так:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_i), \quad (1.1)$$

где \mathbf{v}_A — скорость точки A . Скорости \mathbf{v}_A и \mathbf{v}_i учитываем относительно избранной инерциальной координатной системы отсчета $O'x'y'z'$ (орты i', j', k'), которую считаем неподвижной. Дифференцируя (1.1) по времени получим ускорение точки:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}'_A + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{q}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}'_i.$$

Далее, учтя $\mathbf{v}'_A = \mathbf{a}_A$ и $\mathbf{q}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_i$, получим

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{q}_i + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{q}_i) \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{q}_i. \quad (1.2)$$

Последнее получается из равенства векторного исчисления

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}.$$

Из (1.1) получим выражение для возможной скорости

$$\{\mathbf{v}_i\} = \{\mathbf{v}_A\} + \{\boldsymbol{\omega}\} \times \mathbf{q}_i. \quad (1.3)$$

Подставив выражение (1.3) в уравнение возможной мощности¹ [1]:

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \{\mathbf{v}_i\} = \sum \mathbf{F}_i \cdot \{\mathbf{v}_i\}, \quad (1.4)$$

получим

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot [\{\mathbf{v}_A\} + \{\boldsymbol{\omega}\} \times \mathbf{q}_i] = \sum \mathbf{F}_i \cdot [\{\mathbf{v}_A\} + \{\boldsymbol{\omega}\} \times \mathbf{q}_i].$$

Раскрывая квадратные скобки и учтя свойство векторноскалярного умножения $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$, а также, что

$$\sum m_i \mathbf{a}_i = M \mathbf{a}_C,$$

где M — масса тела, \mathbf{a}_C — ускорение центра масс, $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}^e$ — главный вектор внешних сил, $\sum \mathbf{q}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}^e_A$ — главный момент внешних сил относительно точки A , получим

$$M \mathbf{a}_C \cdot \{\mathbf{v}_A\} + \{\boldsymbol{\omega}\} \cdot \sum \mathbf{q}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}^e \cdot \{\mathbf{v}_A\} + \{\boldsymbol{\omega}\} \cdot \mathbf{M}^e_A \quad (1.5)$$

Введем понятие количества движения тела:

$$\mathbf{K} = \sum m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_C. \quad (1.6)$$

Дифференцируя (1.6) по времени, получим

$$\dot{\mathbf{K}} = M \dot{\mathbf{v}}_C = M \mathbf{a}_C.$$

¹ Всюду Σ — знак суммирования по индексу i от 1 до N .

Введем понятие главного момента количества движения тела относительно точки A

$$L_A = \sum q_i \times m_i v_i. \quad (1.7)$$

Дифференцируя (1.7) по времени и учтя $q'_i = v_i - v_A$, имеем

$$\begin{aligned} L'_A &= \sum q_i \times m_i v'_i + \sum q_i \times m_i a_i = \\ &= \sum (v_i - v_A) \times m_i v_i + \sum q_i \times m_i a_i = \\ &= \sum (-v_A \times m_i v_i) + \sum q_i \times m_i a_i = \\ &= M(v_C \times v_A) + \sum q_i \times m_i a_i, \end{aligned}$$

откуда

$$\sum q_i \times m_i a_i = L'_A + M[v_A \times (\omega \times \rho_C)], \quad (1.8)$$

где ρ_C радиус-вектор из точки A до центра масс C . Следовательно, уравнение (1.5) можно переписать в следующем виде

$$K \cdot \{v_A\} + \{\omega\} \cdot (L_A + Mv_A \times v_C) = F^e \cdot \{v_A\} + M^e_A \cdot \{\omega\}. \quad (1.9)$$

Если тело свободное, где возможные скорости $\{v_A\}$ и $\{\omega\}$ могут иметь независимо друг от друга произвольные значения, то из (1.9) получим дифференциальные уравнения движения тела:

$$K = F^e, \quad (1.10)$$

$$L'_A + Mv_A \times v_C = M^e_A. \quad (1.11)$$

Выражение для возможной производной от кинетической энергии $\{T\}$ будет (см. [1]):

$$\{T\}' = K \cdot \{v_A\} + (L'_A + Mv_A \times v_C) \cdot \{\omega\}, \quad (1.12)$$

или

$$\{T\}' = Ma_C \cdot \{v_A\} + [L'_A + Mv_A \times (\omega \times \rho_C)] \cdot \{\omega\}. \quad (1.13)$$

Сделаем еще одно преобразование. Пусть $q_i = \rho_C + c_i$, где c_i — радиус-вектор из центра масс до i -той точки. Тогда

$$L_A = \sum (\rho_C + c_i) \times m_i v_i = \rho_C \times Mv_C + L_C,$$

где L_C — главный момент количеств движения относительно центра масс C . Отсюда

$$L'_A = q'_C \times Mv_C + \rho_C \times Ma_C + L'_C;$$

$$q'_C = v_C - v_A,$$

следовательно,

$$L'_A + Mv_A \times v_C = L'_C + M\rho_C \times a_C,$$

и (1.12) можем переписать в виде

$$\{T\}' = K \cdot \{v_A\} + (L'_C + M\rho_C \times a_C) \cdot \{\omega\}. \quad (1.14)$$

Кроме неподвижной или инерциальной системы отсчета используем еще координатную систему $Axyz$ (орты i, j, k), неиз-

менно связанную с телом. Эта система имеет то преимущество, что координаты точек x_i, y_i, z_i постоянны, также постоянны и моменты инерции. Ее особенно полезно использовать при изучении вращательного движения.

Кроме двух названных координатных систем будем использовать также систему $Bxyz$ (орты i, j, k), произвольно движущуюся в пространстве (рис. 1). Проведем радиусы-векторы из точки O' в точки B и M_i и соответственно обозначим их r_B и r_i , а также радиус-вектор q_i из B в M_i . Тогда

$$q_i = r_i - r_B,$$

откуда дифференцированием получим

$$\dot{q}_i = v_i - v_B.$$

При изучении движения тела будем иметь в виду точку тела A , которая в данный момент времени пусть совпадает с точкой B . Ее скорость обозначим v_A . В общем случае $v_A \neq v_B$. Вычислим теперь выражение $\sum q_i \times m_i a_i$ относительно системы $Bxyz$. Главный момент количества движения относительно точки B будет:

$$L_B = L_A = \sum q_i \times m_i v_i. \quad (1.15)$$

Дифференцируя (1.15) получим

$$\begin{aligned} L_B &= \sum \dot{q}_i \times m_i v_i + \sum q_i \times m_i a_i = \\ &= \sum (v_i - v_B) \times m_i v_i + \sum q_i \times m_i a_i = \\ &= \sum (v_i - v_B) \times m_i v_i + \sum q_i \times m_i a_i = \\ &= -M v_B \times v_C + \sum q_i \times m_i a_i, \end{aligned}$$

откуда

$$\sum q_i \times m_i a_i = L_B + M v_B \times v_C.$$

Так как в любой момент времени

$$\sum q_i \times \dot{m}_i a_i = \sum q_i \times F_i = M^e v_B = M^e v_A,$$

то можем уравнение (1.9) переписать в следующем виде:

$$K \cdot \{v_A\} + (L_B + M v_B \times v_C) \cdot \{\omega\} = F^e \cdot \{v_A\} + M^e v_B \cdot \{\omega\}, \quad (1.16)$$

откуда

$$\{T\} = K \cdot \{v_A\} + (L_B + M v_B \times v_C) \cdot \{\omega\}. \quad (1.17)$$

Найдем уравнения общего движения твердого тела в проекциях на координатные оси. Легче всего их получить, исходя из уравнений движения (1.10) и (1.11). Первое уравнение определяет поступательное движение тела в координатной системе $O'x'y'z'$. Второе уравнение определяет вращательное движение в системе координат $Axyz$. Рассмотрим подробнее каждое движение.

Поступательное движение. Проектируя (1.10) на координатные оси получим три уравнения:

$$\begin{aligned} K \cdot i' &= F^e \cdot i', \\ K \cdot j' &= F^e \cdot j', \\ K \cdot k' &= F^e \cdot k'. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K &= Mv_C; & v_C &= x_C' i' + y_C' j' + z_C' k'; \\ K &= Mx_C'' i' + My_C'' j' + Mz_C'' k'; \\ F^e &= F_x^e i' + F_y^e j' + F_z^e k', \end{aligned}$$

где F_x^e, F_y^e, F_z^e — проекции главного вектора внешних сил на координатные оси.

Из системы (1.18) получим непосредственно уравнения движения:

$$\begin{aligned} Mx_C'' &= F_x^e, \\ My_C'' &= F_y^e, \\ Mz_C'' &= F_z^e. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Вращательное движение. Проектируя (1.11) на координатные оси получим:

$$\begin{aligned} (L_A + Mv_A \times v_C) \cdot i &= M_A^e \cdot i, \\ (L_A + Mv_A \times v_C) \cdot j &= M_A^e \cdot j, \\ (L_A + Mv_A \times v_C) \cdot k &= M_A^e \cdot k, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где $M_A^e \cdot i = M_x^e$; $M_A^e \cdot j = M_y^e$; $M_A^e \cdot k = M_z^e$.

Таким образом, в правых частях уравнений (1.20) находятся главные моменты внешних сил относительно координатных осей. По (1.8)

$$L_A + Mv_A \times v_C = \sum Q_i \times m_i a_i. \quad (1.21)$$

Ускорение i -той точки a_i , получим из равенства (1.2).

Введем обозначения моментов инерции

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2), & I_{12} &= \sum m_i x_i y_i, \\ I_2 &= \sum m_i (x_i^2 + z_i^2), & I_{13} &= \sum m_i x_i z_i, \\ I_3 &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2), & I_{23} &= \sum m_i y_i z_i. \end{aligned}$$

Тогда (1.21) получит вид:

$$\begin{aligned} (L_A + Mv_A \times v_C) \cdot i &= M(Q_C \times a_A) \cdot i + I_1 \omega_1 + \\ &+ (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + I_{12} (-\omega_2^2 + \omega_1 \omega_3) + \\ &+ I_{13} (-\omega_3^2 - \omega_1 \omega_2) + I_{23} (\omega_3^2 - \omega_2^2); \end{aligned} \quad (1.22)$$

Путем циклической перестановки i, j, k и индексов 1, 2, 3, получим выражения для второго и третьего из равенств (1.20).

§ 2. Система тел

Для нахождения уравнений движения системы тел можно поступать аналогично случаю одного тела, т. е. найти независимые параметры скорости для всей системы и вычислить возможную мощность. Однако это может оказаться трудоемким. Фор-

мулы (1.12), (1.13), (1.14) и (1.17) даны для одного тела. Для использования их, целесообразно вычислить $\{T_n\}$ для каждого тела, входящего в систему, отдельно и потом суммировать

$$\{T\} = \sum \{T_n\}. \quad (2.1)$$

В этом случае полезно пользоваться [1] переходными параметрами скорости v_n^k , где $k = 0, 1, \dots, k_n$ — число переходных параметров скорости, которое может быть для каждого тела различным. Выразим v_n^k через независимые параметры для всей системы²

$$\begin{aligned} v_n^k &= a_{nj}^k v^j, \\ v_n^{k*} &= a_{nj}^{k*} v^j + a_{nj}^k v^j, \\ \{v_n^k\} &= a_{nj}^k \{v^j\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где a_{nj}^k — функция обобщенных координат и времени. Далее, подставим выражения (2.2) в (2.1) и суммируем.

§ 3. Пример

См. [2], стр. 35—39, 182—184 и 377—379.

Двухскатный (четырёхколесный) экипаж состоит из переднего двухколесного ската, к которому шарнирно прикреплен другой скат такого же устройства (см. рис. 2 и 3). Найти дифференциальные уравнения движения.

Разделим всю систему на две группы:

1) передний скат (рис. 2), состоящий из центрального тела A , с массой M и с центром тяжести в точке C_1 , и из двух колес C и D — однородных дисков с радиусом a и массой m ,

2) задний скат, состоящий из таких же частей, для которых все данные обозначены теми же буквами, что и у переднего

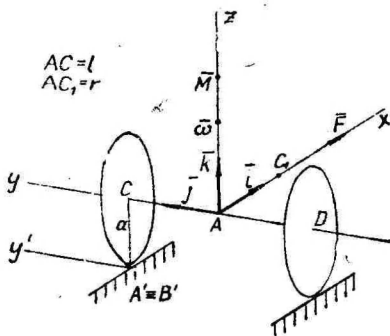
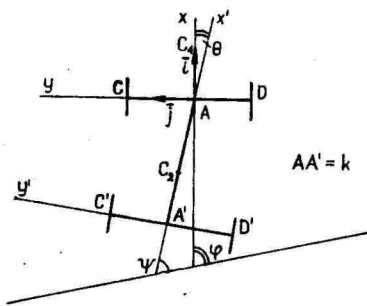


Рис. 2



² Здесь суммирование проводится по индексу j .

ската, только снабжены штрихами. Схема видна на рис. 3. Вычисляем $\{T_1\}$ для переднего ската и по аналогии получаем $\{T_2\}$ для заднего ската. Тогда $\{T\} = \{T_1\} + \{T_2\}$.

Рассмотрим передний скат.

а) Центральное тело. Вычислим $\{T_u\}$. Координатная система $Axyz$ движется вместе с центральным телом. Скорость точки A (пусть будет v) направлена по оси Ox :

$$v_A = vi.$$

Система вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью

$$\omega = \omega k.$$

Скорость i -той точки центрального тела

$$v_i = v_A + \omega \times \rho_i = vi + \omega (k \times \rho_i).$$

Независимыми параметрами скорости будут v и ω . Возможная скорость

$$\{v_i\} = \{v\}i + \{\omega\} (k \times \rho_i).$$

Ускорение i -той точки

$$\begin{aligned} a_i &= \dot{v}_i = \dot{v}i + v\dot{i} + \dot{\omega} (k \times \rho_i) + \omega (k \times \dot{\rho}_i); \\ \dot{i} &= \omega j; \quad \dot{\rho}_i = \omega \times \rho_i = \omega (k + \rho_i); \quad k \times (k \times \rho_i) = z_i k - \rho_i. \end{aligned}$$

Значит,

$$a_i = v\dot{i} + v\omega j + \dot{\omega} (k \times \rho_i) + \omega^2 (z_i k - \rho_i).$$

Для центрального тела получим:

$$\{T_u\} = \sum m_i a_i \cdot \{v_i\} = (Mv\dot{v} - Mr\omega^2) \{v\} + (Mrv\omega + I_z \dot{\omega}) \{\omega\}, \quad (3.1)$$

так как

$$\begin{aligned} i \cdot j &= 0; \quad \sum m_i i \cdot (k \times \rho_i) = \sum m_i \rho_i \cdot (i \times k) = -\sum m_i y_i = 0; \\ \sum m_i i \cdot (-\rho_i) &= -\sum m_i x_i = -Mr; \\ \sum m_i j \cdot (k \times \rho_i) &= \sum m_i x_i = Mr; \quad (k \times \rho_i) \cdot k = (k \times \rho_i) \cdot \rho_i = 0, \end{aligned}$$

где

I_z — момент инерции относительно оси Oz ,

$$I_z = \sum m_i (k \times \rho_i) \cdot (k \times \rho_i).$$

б) Левое колесо. Вычислим $\{T_{k1}\}$ по формуле (1.17). За исходную точку выберем точку касания колеса $A' \equiv B'$ с плоскостью. Так как $\{v'_{A'}\} = 0$, то первый член в (1.17) отпадает. Кроме того, $v_{B'} = v_C$ и $v_B \times v_C = 0$, второй член в скобках отпадает, остается

$$\{T_{k1}\} = L_{B'} \cdot \{\omega'\}.$$

Под ω' подразумевается вектор угловой скорости колеса:

$$\begin{aligned}\omega' &= \omega_y j + \omega k, \\ v_C &= v_A + \omega k \times l j = (v - \omega l) i;\end{aligned}\quad (3.2)$$

$$\omega_y = \frac{v_C}{a} = \frac{v - \omega l}{a};$$

$$\begin{aligned}\{\omega'\} &= \{\omega_y\} j + \{\omega\} k = \frac{1}{a} \{v\} j + \{\omega\} \left(k - \frac{l}{a} j \right); \\ L_{B'} &= I_d \omega k + I_{y'} \omega_y j = I_d \omega k + I_{y'} \frac{v - \omega l}{a} j,\end{aligned}\quad (3.3)$$

где I_d — момент инерции колеса относительно диаметра;

$$I_{y'} = I_y + m a^2,$$

где I_y — момент инерции относительно оси Oy . Следовательно,

$$L_{B'} = I_d \omega k + I_{y'} \frac{v - \omega l}{a} j - I_{y'} \frac{v - \omega l}{a} \omega i, \quad (3.4)$$

так как $j = -\omega i$ и $k' = 0$. Из (3.3) и (3.4) получим по (3.2):

$$\{T_{k1}\} = I_{y'} \frac{v - \omega l}{a^2} \{v\} + \left(I_d \omega - I_{y'} \frac{l(v - \omega l)}{a^2} \right) \{\omega\}; \quad (3.5)$$

в) Для правого колеса имеем, если в (3.5) заменить l на $-l$:

$$\{T_{k2}\} = I_{y'} \frac{v + \omega l}{a^2} \{v\} + \left(I_d \omega + I_{y'} \frac{l(v + \omega l)}{a^2} \right) \{\omega\}.$$

Следовательно,

$$\{T_{k1}\} + \{T_{k2}\} = 2I_{y'} \frac{v}{a^2} \{v\} + \left(2I_d \omega + 2I_{y'} \frac{l^2}{a^2} \omega \right) \{\omega\}. \quad (3.6)$$

Суммируя (3.1) и (3.6), выражая при этом $I_{y'} = I_y + m a^2$, получим для переднего ската:

$$\begin{aligned}\{T_1\} &= \left[\left(M + 2m + \frac{2}{a^2} I_y \right) v - M r \omega^2 \right] \{v\} + \\ &+ \left[\left(I_z + 2I_d + 2m l^2 + \frac{2l^2}{a^2} I_y \right) \omega + M r v \omega \right] \{\omega\}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Для заднего ската получим аналогично:

$$\begin{aligned}\{T_2\} &= \left[\left(M' + 2m' + \frac{2}{a'^2} I_{y'} \right) v' - M' r' \omega'^2 \right] \{v'\} + \\ &+ \left[\left(I_z' + 2I_d' + 2m' l'^2 + \frac{2l'^2}{a'^2} I_{y'} \right) \omega' + M' r' v' \omega' \right] \{\omega'\}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

В формуле (3.8) надо v' , ω' , $\{v'\}$ и $\{\omega'\}$ выразить через v , ω , $\{v\}$ и $\{\omega\}$. Из рис. 3 найдем

$$\begin{aligned} v' &= v \cos \theta; & v' &= v' \cos \theta - v \theta' \sin \theta; \\ \omega' &= \frac{v \sin \theta}{k}; & \omega' &= \frac{v' \sin \theta + v \theta' \cos \theta}{k}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\{v'\} = \{v\} \cos \theta; \quad \{\omega'\} = \{v\} \frac{\sin \theta}{k}.$$

Подставляя значения (3.9) в (3.8), получим выражение для $\{T_2\}$, содержащее в качестве переменных v , ω и θ . Но все эти три переменные не являются независимыми. Из рис. 3 видно, что $\varphi = \psi + \theta$, или $\omega = \psi' + \theta'$, но, с другой стороны, по (3.9) имеем $\psi' = \omega' = vk^{-1} \sin \theta$, и, следовательно,

$$\omega = \theta' + \frac{v \sin \theta}{k}. \quad (3.10)$$

С помощью (3.10) можно угловую скорость ω исключить из выражений для $\{T_1\}$ и $\{T_2\}$. Тогда остаются две независимые переменные: v и θ .

Пусть на передний скат действует сила $F = Fi$, приложенная в точке A , и вращательный момент $M = M_z k$. Тогда возможная мощность сил

$$\{N\} = F\{v\} + M_z\{\omega\}. \quad (3.11)$$

После исключения ω , v' и ω' в (3.7), (3.8) и (3.11), учитывая независимость параметров $\{v\}$ и $\{\theta\}$ получим дифференциальные уравнения движения двухскатного экипажа в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left[\left(M + 2m + 2 \frac{I_y}{a^2} \right) + \left(M' + 2m' + 2 \frac{I_{y'}}{a'^2} \right) \cos^2 \theta + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{k^2} \left(I_z + 2I_d + 2m'l^2 + 2I_{y'} \frac{l'^2}{a'^2} \right) \sin^2 \theta \right] v' + \\ & \quad + \left[- \left(M' + 2m' + 2 \frac{I_{y'}}{a'^2} \right) + \frac{1}{k^2} \left(I_z + 2I_d + 2m'l^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2I_{y'} \frac{l'^2}{a'^2} \right) \right] \cdot v \theta' \sin \theta \cos \theta - Mr \left(\theta' + \frac{v \sin \theta}{k} \right)^2 = F, \\ & \left(I_z + 2I_d + 2ml^2 + 2I_{y'} \frac{l^2}{a^2} \right) \cdot \frac{d}{dt} \left(\theta' + \frac{v \sin \theta}{k} \right) + \\ & \quad + Mrv \left(\theta' + \frac{v \sin \theta}{k} \right) = M_z. \end{aligned}$$

Решение этой задачи было проведено с учетом двух независимых параметров: скорости v и угловой скорости ω , без введения уравнений связей. В работе [2] эта задача решена с помощью восьми обобщенных координат и шести уравнений связей.

§ 4. Выводы

Метод уравнивания возможной мощности применим в теории динамики твердого тела и системы тел. В основу решения положены не обобщенные координаты, а параметры скорости, которые не создают различия между голономными и неголономными системами. Полученные общие решения на основе уравнивания возможной мощности позволяют составить дифференциальные уравнения движения твердого тела и системы тел. Многие задачи, где обычно используются уравнения связей, могут решаться без них. Заметное преимущество данного метода возникает при наличии неголономных уравнений связей, линейных относительно параметров скорости. Тогда число независимых расчетных параметров равно числу степеней свободы и поэтому отпадают уравнения связей. Для твердых тел и систем тел с неголономными связями предложенный метод во многих случаях является более эффективным по сравнению с другими методами.

Литература

1. Гольст Г. К., Рельвик Х. А., Сильде О. М. Уравнение возможной мощности в теоретической механике. Таллин, 1978.
2. Лурье А. И. Аналитическая механика. Москва, 1961.
3. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. Москва, 1967.

Поступило
12 XII 1978

EINIGE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER BEWEGUNG DES STARREN KÖRPERS

G. Golst

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag werden aus der Gleichung der möglichen Leistung (1.4) entsprechende Gleichungen (1.5), (1.9) und (1.16) für den starren Körper abgeleitet, woher man die vektoriell Bewegungsgleichungen (1.10), (1.11) und (1.19), (1.22) in Koordinaten findet. Nebenbei werden auch Systeme starrer Körper behandelt und wird ein Beispiel gegeben.

УРАВНЕНИЕ ВОЗМОЖНОЙ МОЩНОСТИ В ДИНАМИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Х. Рельвик

Таллинский политехнический институт

Введение

В книге [4] подробно освещены основы аналитической механики систем с переменными массами. Основы метода уравнения возможной мощности в достаточно подробном виде впервые изложены в статье [7], где дано определение возможной скорости, начато решение проблемы, исходя из параметров скорости и базисных векторов. В работах [3, 5, 7, 8] находятся некоторые исследования, связанные с уравнением возможной мощности. В книге [2] дан метод уравнения возможной мощности в его современном виде. То же, но в меньшем объеме, можно найти в учебном пособии [1].

В настоящей статье, исходя из уравнения возможной мощности, выводятся некоторые уравнения динамики переменной массы, в частности уравнение Мещерского.

Во всей статье знак Σ обозначает сумму по индексам $i, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ и κ от 1 до N , где N — число материальных точек системы или подсистемы. Знак суммы по индексу j для краткости будет опущен и действие сложения видно из факта, что этот индекс повторяется в выражениях наверху и снизу (тензорная запись суммы).

§ 1. Понятие точки переменной массы

Будем пользоваться понятием точки переменной массы по определению В. С. Новоселова (см. [4], стр. 13): под *материальной точкой переменной массы* понимаем такую переменную систему постоянной массы, размерами которой пренебрегаем и которую считаем сосредоточенной во все время движения в области,двигающейся поступательно с некоторой геометрической точкой вспомогательной системы координат.

Если за точку переменной массы принимаем твердое тело переменной массы в случае пренебрежения его размерами, то в качестве вспомогательной системы следует выбирать координатную систему, жестко связанную с этим телом. Тогда относительные скорости и ускорения относительно тела будут равны относительным скоростям и ускорениям относительно вспомогательной системы, равны будут и кориолисовы ускорения (см. [4], стр. 13).

§ 2. Уравнение возможной мощности

Будем пользоваться уравнением возможной мощности (см. [1, 2])

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \{\mathbf{v}_i\} = \sum \mathbf{F}_i \cdot \{\mathbf{v}_i\}, \quad (2.1)$$

где $\{\mathbf{v}_i\}$ — возможная скорость i -той точки механической системы, \mathbf{a}_i — ускорение и m_i — масса этой точки, а \mathbf{F}_i — приложенная к i -той точке сила. При этом под *вектором возможной скорости* понимаем совокупность всех векторов скорости, которую материальная точка могла бы иметь в данный момент времени при наличии данных связей. В общем случае возможная скорость

$$\{\mathbf{v}_i\} = \{v^j\} \mathbf{u}_{ij} \quad (j=0, 1, \dots, s), \quad (2.2)$$

где s — число степеней свободы механической системы, v^j — параметры скорости, общие для всей рассматриваемой системы, а \mathbf{u}_{ij} — базисные векторы, свои для каждой материальной точки системы. В частном случае, если в равенстве (2.2) $\{v^0\} = 0$, получим виртуальную скорость

$$\{\mathbf{v}_i\}^* = \{v^j\} \mathbf{u}_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, s). \quad (2.3)$$

§ 3. Обозначение масс, скоростей и ускорений

Пусть имеется точка переменной массы в смысле определения пункта 1. Внутри основного тела корпуса находятся частицы, некоторые из которых могут покинуть корпус и, наоборот, некоторые другие частицы из окрестности основного тела могут присоединяться к нему. Вспомогательная система координат прикреплена к основному телу. Пусть, далее,

m_0 — масса основного тела (корпуса);

m_α — массы частиц, движущихся конечной скоростью;

Δm_β — массы частиц, скорость которых изменяется ударно;

Δm_γ — массы частиц, могущих присоединяться к основному телу;

Δm_δ — массы частиц, могущих покинуть основное тело;

\mathbf{v} и \mathbf{a} — скорость и ускорение основного тела.

Тогда

$$v_{\alpha} = v + v_{\alpha r}, \quad (3.1)$$

$$a_{\alpha} = a + a_{\alpha r} + a_{\alpha c}, \quad (3.2)$$

скорость массы Δm_{κ} , где $\kappa = \beta, \gamma, \delta$ до удара в момент Δt

$$v_{\kappa 1} = v + v_{\kappa r 1}, \quad (3.3)$$

скорость массы Δm_{κ} после удара в момент $t + \Delta t$

$$v_{\kappa 2} = v + v_{\kappa r 2}, \quad (3.4)$$

среднее ускорение массы Δm_{κ} в промежутке времени Δt выражается через скорости (3.3) и (3.4) следующим образом:

$$a_{\kappa} = \frac{v_{\kappa 2} - v_{\kappa 1}}{\Delta t} = \frac{v_{\kappa r 2} - v_{\kappa r 1}}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

Возможные скорости получим из равенств (3.1) и (3.3) формальным прибавлением фигурных скобок:

$$\{v_{\kappa}\} = \{v\} + \{v_{\kappa r}\} \quad (\kappa = \alpha, \beta, \gamma, \delta). \quad (3.6)$$

Отметим, что в следующих рассуждениях ничего не изменится, если для получения возможных скоростей (3.6) пользоваться скоростями (3.4) вместо (3.3).

§ 4. Вывод уравнения движения

Составим уравнение возможной мощности (2.1), учитывая, что к материальным точкам приложены силы F_{κ} , где $\kappa = \beta, \gamma, \delta$, F_0 и F_{α} :

$$\begin{aligned} m_0 a \cdot \{v\} + \sum m_{\alpha} a_{\alpha} \cdot \{v_{\alpha}\} + \sum \Delta m_{\kappa} a_{\kappa} \cdot \{v_{\kappa}\} = \\ = F_0 \cdot \{v\} + \sum F_{\alpha} \cdot \{v_{\alpha}\} + \sum F_{\kappa} \cdot \{v_{\kappa}\} \quad (\kappa = \beta, \gamma, \delta). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подставим теперь в уравнение (4.1) возможные скорости (3.6), где за независимые векторы выбраны $\{v\}$, $\{v_{\alpha r}\}$ и $\{v_{\kappa r 1}\}$ с $\kappa = \beta, \delta, \gamma$:

$$\begin{aligned} (m_0 a + \sum m_{\alpha} a_{\alpha} + \sum \Delta m_{\kappa} a_{\kappa}) \cdot \{v\} + \sum m_{\alpha} a_{\alpha} \cdot \{v_{\alpha r}\} + \sum \Delta m_{\kappa} a_{\kappa} \cdot \{v_{\kappa r 1}\} = \\ = (F_0 + \sum F_{\alpha} + \sum F_{\kappa}) \cdot \{v\} + \sum F_{\alpha} \cdot \{v_{\alpha r}\} + \sum F_{\kappa} \cdot \{v_{\kappa r 1}\}. \end{aligned}$$

На основе независимости и произвольности величин в фигурных скобках выпишем уравнение движения (см. $\{v\}$):

$$\begin{aligned} m_0 a + \sum m_{\alpha} a_{\alpha} + \sum \Delta m_{\kappa} a_{\kappa} = \\ = F_0 + \sum F_{\alpha} + \sum F_{\kappa} \quad (\kappa = \beta, \gamma, \delta). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Другие уравнения (см. $\{v_{\alpha}\}$ и $\{v_{\kappa r 1}\}$) в связи с рассматриваемой проблемой интереса не представляют и мы их опустим.

Известно, что из суммы в правой части уравнения (4.2) исключаются внутренние силы. Обозначим окончательное зна-

чение этой суммы (главный вектор внешних сил) через F . Подставляя ускорения (3.2) и (3.5), получим

$$m\mathbf{a} + \sum m_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha r} + \sum m_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha C} + \sum m_{\kappa} (\mathbf{v}_{\kappa r2} - \mathbf{v}_{\kappa r1}) = \mathbf{F} \quad (\kappa = \beta, \gamma, \delta), \quad (4.3)$$

где $m = m_0 + \sum m_{\alpha}$ и $m_{\kappa} = \lim (\Delta m_{\kappa} / \Delta t)$ при $\Delta t \rightarrow \infty$.

Перепишем уравнение (4.3) в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R},$$

где

$$\mathbf{R} = -\sum m_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha r} - 2\sum \omega \times m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha r} - \sum m_{\kappa} (\mathbf{v}_{\kappa r2} - \mathbf{v}_{\kappa r1}) \quad (\kappa = \beta, \gamma, \delta).$$

Как известно (см. [4], стр. 12—13), \mathbf{R} называется реактивной силой, ее второй член $-2\sum \omega \times m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha r}$ есть сила Кориолиса и последняя сумма $\sum m_{\kappa} (\mathbf{v}_{\kappa r2} - \mathbf{v}_{\kappa r1})$ — импульсная или ударная сила.

Отметим, что в задачах практики часто отсутствует параметр v^0 и в выводах вместо возможной скорости (2.2) можно пользоваться виртуальной скоростью (2.3).

§ 5. Частный случай — уравнение Мещерского

В частном случае, когда точку переменной массы образуют только центральное тело и одна масса типа γ (или δ), из уравнения (4.3) получим

$$m\mathbf{a} + m_{\gamma} (\mathbf{v}_{\gamma r2} - \mathbf{v}_{\gamma r1}) = \mathbf{F}. \quad (5.1)$$

Учитывая еще, что в данном случае $\mathbf{v}_{\gamma r2} = 0$ и $\mathbf{v}_{\gamma r1} = \mathbf{v}_r$, то получим уравнение Мещерского

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad (5.2)$$

где $\mathbf{R} = m' \mathbf{v}_r$ — реактивная сила и $m' = m_{\gamma}$.

Поскольку уравнение Мещерского находится в программе втузов, то представляет интерес его вывод, независимо от § 4.

Пусть материальная точка переменной массы состоит из масс m и dm , движущихся со скоростями \mathbf{v} и \mathbf{u} соответственно, причем скорость \mathbf{u} мы можем выразить как сумму переносной и относительной скоростей, т. е.

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_r.$$

Тогда ускорение массы dm при $dt \neq 0$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{dt} = -\frac{\mathbf{v}_r}{dt} \quad (5.3)$$

и уравнение возможной мощности (2.1) принимает вид

$$m\mathbf{a} \cdot \{\mathbf{v}\} + dm\mathbf{a}_1 \cdot (\{\mathbf{v}\} + \{\mathbf{v}_r\}) = (\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_e) \cdot \{\mathbf{v}\} + (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_e) \cdot \{\mathbf{v}_r\},$$

где F_0 и F_1 — внешние силы, действующие на массы m и dm соответственно, а F_e — сила взаимодействия масс m и dm . Отсюда на основе произвольности и независимости параметров $\{v\}$ и $\{v_r\}$ получим

$$ma + dma_1 = F, \quad (5.4)$$

где через F обозначена результирующая внешних сил. Но с учетом ускорения (5.3) уравнение (5.4) дает

$$ma = F + R,$$

где реактивная сила

$$R = m'v_r.$$

Литература

1. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О. Уравнение возможной мощности в теоретической механике. Таллин, 1978.
2. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О. Основные вопросы аналитической механики. Уравнение возможной мощности. Таллин, 1979.
3. Гольст Г., Сильде О. Дифференциальные принципы механики на основе уравнения возможной мощности. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 487, 75—81.
4. Новоселов В. С. Аналитическая механика систем с переменными массами. Ленинград, 1969.
5. Рельвик Х. Некоторые вопросы динамики неголономных систем. Автореферат дисс. Таллин, 1975.
6. Сильде О., Тийкма Б. К вопросу о применении в механике теоремы кинетической энергии. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1968, A261, 3—16.
7. Сильде О., Тийкма Б. Метод уравнения возможной мощности. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1970, A293, 95—110.
8. Тийкма Б. А. Об уравнении мощностей. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1965, A222, 55—62.

Поступило
10 X 1978

THE EQUATION OF POSSIBLE POWER IN VARIABLE MASS POINT DYNAMICS

H. Relvik

Summary

Proceeding from the equation of possible power there are given some equations of variable mass point dynamics, in the particular case the Meshchersky equation. It presents one more possibility of using the equation of possible power.

УРАВНЕНИЕ ВОЗМОЖНОЙ МОЩНОСТИ В ТЕОРИИ УДАРА

Х. Рельвик

Таллинский политехнический институт

Введение

Основы метода уравнения возможной мощности в достаточно подробном виде впервые изложены в статье [7], где дано определение возможной скорости, начато решение проблемы, исходя из параметров скорости и базисных векторов. В работах [3, 4, 5, 7, 8] приводятся некоторые исследования, связанные с уравнением возможной мощности. В книге [2] дан метод уравнения возможной мощности в его современном виде. То же, но в меньшем объеме, можно найти в учебном пособии [1]. Настоящая статья имеет целью показать, что уравнение возможной мощности успешно применимо и в теории удара, и применением метода выводятся основные формулы.

§ 1. Уравнение возможной мощности

Уравнение возможной мощности имеет вид

$$\sum m_i \mathbf{a}_i \cdot \{\mathbf{v}_i\} = \sum \mathbf{F}_i \cdot \{\mathbf{v}_i\}, \quad (1.1)$$

где $\{\mathbf{v}_i\}$ — возможная скорость i -той точки механической системы, т. е. совокупность всех векторов скорости, которую материальная точка могла бы иметь в данный момент времени при наличии данных связей. Возможная скорость выражается в виде

$$\{\mathbf{v}_i\} = \{v^j\} \mathbf{u}_{ij} \quad (j=0, 1, \dots, s), \quad (1.2)$$

или в случае одной материальной точки

$$\{\mathbf{v}\} = \{v^j\} \mathbf{u}_j \quad (j=0, 1, \dots, s), \quad (1.3)$$

где s — число степеней свободы системы, v^j — параметры скорости, общие для всей рассматриваемой системы, а \mathbf{u}_{ij} — базисные векторы, свои для каждой материальной точки системы.

§ 2. Материальная точка под действием ударной силы

Пусть на материальную точку массы m действуют силы F и $F_{y\delta}$, первая из которых умеренной величины, а $F_{y\delta} \gg F$, как это принято в теории удара. Тогда уравнение возможной мощности (1.1) получит вид

$$ma \cdot \{v\} = (F + F_{y\delta}) \cdot \{v\}$$

или приближенно

$$m(u - v) \cdot \{v\} = S \cdot \{v\}, \quad (2.1)$$

где $S = F_{y\delta} \cdot \Delta t$ — импульс ударной силы. Здесь мы пользовались средним ускорением $a = (u - v)/\Delta t$ в промежутке времени Δt . Из уравнения возможной мощности (2.1) можно получить уравнения движения материальной точки в двух видах. Непосредственно имеем векторный вид

$$m(u - v) = S,$$

а с учетом разложения (1.3) получим скалярный вид

$$m(u - v) \cdot u_j = S \cdot u_j \quad (j=0, 1, \dots, s),$$

так как параметры $\{v^j\}$ произвольны и независимы.

В дальнейшем будем рассматривать только ударные силы и индекс $y\delta$ везде опускаем.

§ 3. Удар материальной точки о неподвижную гладкую плоскость

Пусть материальная точка массы m падает под углом α на гладкую неподвижную плоскость (рис. 1). Пусть v — началь-

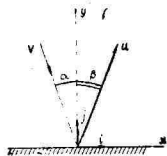


Рис. 1

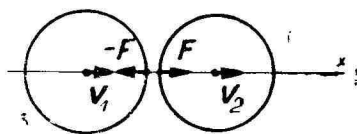


Рис. 2

ная скорость точки и u — ее конечная скорость. Теория удара отличает две фазы: первая фаза от начальной скорости до момента, когда вертикальная составляющая скорости равна нулю, и вторая фаза от конца первой фазы до получения конечной скорости. Длительность фаз обозначим соответственно через Δt_I и Δt_{II} . Вообще индексы I и II будут указывать фазу, к кото-

рой какая-то величина относится. Например, N_I — нормальная реакция плоскости в первой фазе.

Рассмотрим обе фазы вместе. Тогда v — начальная, а u — конечная скорость и среднее ускорение $a = (u - v)/\Delta t$, где промежуток времени $\Delta t = \Delta t_I + \Delta t_{II}$. Уравнение возможной мощности (1.1) принимает вид

$$ma \cdot \{v\} = N \cdot \{v\} \quad (3.1)$$

или при помощи разложения (1.2)

$$m(u - v) \cdot (\{v_x\}i + \{v_y\}j) = S \cdot (\{v_x\}i + \{v_y\}j),$$

где $S = N \cdot \Delta t$. Отсюда на основе независимости и произвольности параметров $\{v_x\}$ и $\{v_y\}$ получим два уравнения

$$m(u \sin \beta - v \sin \alpha) = 0, \quad (3.2)$$

$$m(u \cos \beta + v \cos \alpha) = S. \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.2) найдем конечную скорость

$$u = v \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad (3.4)$$

а из уравнения (3.3) можно получить значение импульса S .

Рассмотрим еще первую фазу удара. Здесь начальная скорость $v = v_x i + v_y j$, конечная скорость $v^* = v_x^* i$ и среднее ускорение $a_I = (v^* - v)/\Delta t_I = [(v_x^* - v_x)i - v_y j]/\Delta t_I$. Горизонтальная сила отсутствует и нет причины предполагать, чтобы в первой фазе проекции v_x^* конечной скорости равнялась нулю. В течение удара обязательно происходит проскальзывание (точнее говоря, удар без проскальзывания возможен лишь при $\alpha = \beta = 0$). Уравнение возможной мощности (3.1) принимает вид

$$m \left(\frac{v_x^* - v_x}{\Delta t_I} i - \frac{v_y}{\Delta t_I} j \right) \cdot (\{v_x\}i + \{v_y\}j) = N_I \cdot (\{v_x\}i + \{v_y\}j);$$

откуда на основе произвольности и независимости величин в фигурных скобках выпишем только нужное нам уравнение

$$-mv_y = N_I \cdot \Delta t_I$$

или

$$mv \cos \alpha = S_I. \quad (3.5)$$

Сравнивая равенства (3.5) и (3.3), получим

$$mu \cos \beta = S_{II},$$

но так как $S_{II} = kS_I$, то

$$kv \cos \alpha = u \cos \beta \quad (3.6)$$

и дальше из равенств (3.4) и (3.6) получим

$$k = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}.$$

§ 4. Прямой центральный удар двух шаров

Пусть два шара с массами m_1 и m_2 движутся, как показано на рис. 2, причем $v_1 > v_2$. Рассмотрим первую фазу удара. Средние ускорения шаров будут соответственно $a_1 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}_1)/\Delta t_I$ и $a_2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}_2)/\Delta t_I$, где \mathbf{u} — общая скорость шаров в конце фазы. Считая движение первого шара переносным, выразим скорость второго шара через сумму

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{21}.$$

Тогда для возможной скорости второго шара имеем аналогичную зависимость

$$\{\mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{v}_1\} + \{\mathbf{v}_{21}\}, \quad (4.1)$$

и уравнение возможной мощности (1.1) получит вид

$$m_1 \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}_1}{\Delta t_I} \cdot \{\mathbf{v}_1\} + m_2 \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}_2}{\Delta t_I} \cdot (\{\mathbf{v}_1\} + \{\mathbf{v}_{21}\}) = F_I \cdot \{\mathbf{v}_{21}\},$$

так как $F_I \cdot \{\mathbf{v}_2\} - F_I \cdot \{\mathbf{v}_1\} = F_I \cdot \{\mathbf{v}_{21}\}$. Отсюда на основе независимости и произвольности возможных скоростей $\{\mathbf{v}_1\}$ и $\{\mathbf{v}_{21}\}$ получим два уравнения

$$m_1(\mathbf{u} - \mathbf{v}_1) + m_2(\mathbf{u} - \mathbf{v}_2) = 0, \quad (4.2)$$

$$m_2(\mathbf{u} - \mathbf{v}_2) = F_I \cdot \Delta t_I = S_I. \quad (4.3)$$

Из уравнения (4.2) получим конечную скорость в конце фазы

$$\mathbf{u} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.4)$$

Рассмотрим вторую фазу аналогичным образом. Средние ускорения шаров будут соответственно $a_1 = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u})/\Delta t_{II}$ и $a_2 = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u})/\Delta t_{II}$, где \mathbf{u} — общая скорость в начале, а \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 — разные скорости шаров в конце фазы. Уравнение возможной мощности (1.1) имеет теперь вид

$$m_1 \frac{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}}{\Delta t_{II}} \cdot \{\mathbf{v}_1\} + m_2 \frac{\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}}{\Delta t_{II}} \cdot (\{\mathbf{v}_1\} + \{\mathbf{v}_{21}\}) = F_{II} \cdot \{\mathbf{v}_{21}\}. \quad (4.5)$$

Здесь может оказаться, что возможные скорости второй фазы надо обозначить через символы $\{\mathbf{u}_i\}$. Но это только вопрос обозначения и никакого влияния на результаты не может иметь. Мы имеем право применять возможные скорости $\{\mathbf{v}_i\}$ для описывания как первой, так и второй фазы, а, наконец, и для всего

удара, состоящего из обеих фаз, как уже сделано в § 3. По независимости и произвольности величин $\{v_1\}$ и $\{v_{21}\}$ получим из уравнения (4.5):

$$m_1(u_1 - u) + m_2(u_2 - u) = 0, \quad (4.6)$$

$$m_2(u_2 - u) = F_{II} \cdot \Delta t_{II} = S_{II}, \quad (4.7)$$

а дальше из равенств (4.4) и (4.6) имеем

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Учитывая зависимость $S_{II} = k S_I$, получим из равенств (4.3) и (4.7):

$$m_2(u - v_2)k = m_2(u_2 - u),$$

$$u_2 = (k+1)u - kv_2,$$

и с учетом формулы (4.4) —

$$u_2 = v_2 - (1+k) \frac{m_1}{m_1+m_2} (v_2 - v_1). \quad (4.8)$$

Аналогичные операции дают

$$u_1 = v_1 - (1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} (v_1 - v_2). \quad (4.9)$$

Пользуясь обозначением

$$V = \frac{1+k}{m_1+m_2} (v_1 - v_2),$$

можно формулы (4.8) и (4.9) написать в более компактной форме:

$$u_1 = v_1 - m_2 V,$$

$$u_2 = v_2 + m_1 V.$$

§ 5. Косой удар двух гладких шаров

Пусть два шара движутся, как показано на рис. 3. Направим ось x через центры шаров. Тогда ударные силы имеют проекцию только на эту ось.

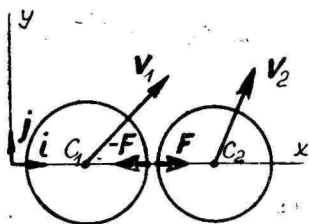


Рис. 3

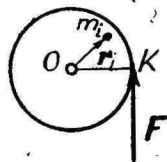


Рис. 4

В первой фазе начальные скорости будут $v_1 = v_{1x}i + v_{1y}j$ и $v_2 = v_{2x}i + v_{2y}j$, конечная скорость имеет для каждого шара одинаковую составляющую по направлению удара (оси x): $u_1^* = u_x^*i + u_{1y}^*j$ и $u_2^* = u_x^*i + u_{2y}^*j$. Уравнение возможной мощности (1.1) получит вид

$$m_1 \frac{u_1^* - v_1}{\Delta t_I} \cdot (\{v_{1x}\}i + \{v_{1y}\}j) + m_2 \frac{u_2^* - v_2}{\Delta t_I} \cdot (\{v_{2x}\}i + \{v_{2y}\}j) = \\ = -F_I \cdot (\{v_{1x}\}i + \{v_{1y}\}j) + F_I \cdot (\{v_{2x}\}i + \{v_{2y}\}j). \quad (5.1)$$

Так как произвольные параметры в фигурных скобках друг от друга не зависят, то уравнение (5.1) дает:

$$m_1(u_x^* - v_{1x}) = -F_I \cdot \Delta t_I, \quad m_1(u_{1y}^* - v_{1y}) = 0, \\ m_2(u_x^* - v_{2x}) = F_I \cdot \Delta t_I, \quad m_2(u_{2y}^* - v_{2y}) = 0. \quad (5.2)$$

Для второй фазы получим аналогично: начальные скорости $u_1^* = u_x^*i + u_{1y}^*j$ и $u_2^* = u_x^*i + u_{2y}^*j$. Уравнение возможной мощности будет

$$m_1 \frac{u_1 - u_1^*}{\Delta t_{II}} \cdot (\{v_{1x}\}i + \{v_{1y}\}j) + m_2 \frac{u_2 - u_2^*}{\Delta t_{II}} \cdot (\{v_{2x}\}i + \{v_{2y}\}j) = \\ = -F_{II} \cdot (\{v_{1x}\}i + \{v_{1y}\}j) + F_{II} \cdot (\{v_{2x}\}i + \{v_{2y}\}j). \quad (5.3)$$

На основе произвольности и независимости величин в фигурных скобках уравнение (5.3) даст систему

$$m_1(u_{1x} - u_x^*) = -F_{II} \cdot \Delta t_{II}, \quad m_1(u_{1y} - u_{1y}^*) = 0, \\ m_2(u_{2x} - u_x^*) = F_{II} \cdot \Delta t_{II}, \quad m_2(u_{2y} - u_{2y}^*) = 0. \quad (5.4)$$

После разрешения системы (5.2) и (5.4) найдем:

$$u_{1y} = u_{1y}^* = v_{1y}, \\ u_{2y} = u_{2y}^* = v_{2y}, \\ u_x^* = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}, \\ u_{1x} = v_{1x} - (1+k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}), \\ u_{2x} = v_{2x} - (1+k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_{2x} - v_{1x}).$$

§ 6. Вращающееся твердое тело под действием ударной силы

Пусть к телу (рис. 4) в точке K приложена сила F . Уравнение возможной мощности (1.1) в данном случае имеет вид

$$\Sigma m_i a_i \cdot \{v_i\} = F \{v_K\}, \quad (6.1)$$

где $v_i = \omega \times r_i$ — скорость i -той точки тела, v_K — скорость точки приложения силы, a_i — ускорение i -той точки тела. Соответствующие скорости точек после действия ударной силы обозначим через u с тем же индексом, что они имели до удара. Начальная угловая скорость тела — ω , конечная угловая скорость — ω' и среднее угловое ускорение за промежуток времени Δt будет $\varepsilon_z = (\omega_z' - \omega_z)/\Delta t$.

Известно (см., например, [2]) что уравнение (6.1) после преобразований получит вид $I_z \varepsilon_z \{\omega_z\} = m_z(F) \{\omega_z\}$, или

$$J_z(\omega_z' - \omega_z) = m_z(S).$$

Это и есть уравнение вращения тела под действием ударной силы.

§ 7. Удар двух дисков, вращающихся вокруг параллельных осей

Пусть два вращающихся диска (рис. 5) зацепляются в некоторый момент времени в точке K , находящейся на прямой O_1O_2 , соединяющей центры дисков. Концом первой фазы будем

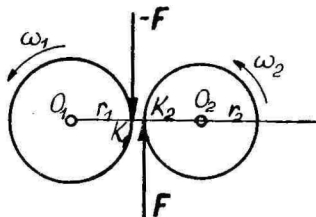


Рис. 5

считать момент, когда скорости точек K_1 и K_2 равны (K_1 — точка K на диске 1 и K_2 — на диске 2). Угловые скорости дисков в начале удара ω_1 и ω_2 , в конце первой фазы ω_1^* и ω_2^* , а в конце удара — ω_1' и ω_2' . Средние угловые ускорения дисков будут $\varepsilon_{I1} = (\omega_1^* - \omega_1)/\Delta t_{I1}$ и $\varepsilon_{2I} = (\omega_2^* - \omega_2)/\Delta t_{2I}$ в первой фазе и $\varepsilon_{I1} = (\omega_1' - \omega_1^*)/\Delta t_{I1}$ и $\varepsilon_{2II} = (\omega_2' - \omega_2^*)/\Delta t_{2II}$ во второй фазе.

Уравнение возможной мощности (1.1) здесь имеет вид

$$\sum m_{1i} a_{1i} \cdot \{v_{1i}\} + \sum m_{2i} a_{2i} \cdot \{v_{2i}\} = -F \cdot \{v_{K_1}\} + F \cdot \{v_{K_2}\}. \quad (7.1)$$

Подставляя возможные скорости $\{v_{1i}\} = \{\omega_1\} \times r_{1i}$ и $\{v_{2i}\} = \{\omega_2\} \times r_{2i}$, получим из уравнения (7.1):

$$J_1 \varepsilon_{1z} \{\omega_{1z}\} + J_2 \varepsilon_{2z} \{\omega_{2z}\} = -m_{O_1}(\mathbf{F}) \{\omega_{1z}\} + m_{O_2}(\mathbf{F}) \{\omega_{2z}\}.$$

Отсюда на основе независимости и произвольности возможных параметров скоростей $\{\omega_{1z}\}$ и $\{\omega_{2z}\}$ получим два уравнения

$$J_1 \varepsilon_{1z} = -m_{O_1}(\mathbf{F}), \quad (7.2)$$

и

$$J_2 \varepsilon_{2z} = m_{O_2}(\mathbf{F}). \quad (7.3)$$

Подставляя сюда угловые ускорения, получим для первой фазы из формул (7.2) и (7.3) соответственно:

$$J_1(\omega_{1z}^* - \omega_{1z}) = -m_{O_1}(\mathbf{S}_I),$$

$$J_2(\omega_{2z}^* - \omega_{2z}) = m_{O_2}(\mathbf{S}_I):$$

Для второй фазы по тем же формулам найдем:

$$J_1(\omega_{1z}' - \omega_{1z}^*) = -m_{O_1}(\mathbf{S}_{II}),$$

$$J_2(\omega_{2z}' - \omega_{2z}^*) = m_{O_2}(\mathbf{S}_{II}).$$

Из рис. 5 найдем зависимости

$$m_{O_2}(\mathbf{S}) = -\frac{r_2}{r_1} m_{O_1}(\mathbf{S}),$$

и

$$\omega_{2z}^* = -\frac{r_1}{r_2} \omega_{1z}^*.$$

Учитывая еще, что $S_{II} = kS_I$, получим окончательно систему уравнений с неизвестными ω_{1z}^* , ω_{1z}' , ω_{2z}' и $m_{O_1}(\mathbf{S}_I)$, решением которой является

$$\omega_{1z}^* = \frac{r_2(J_1 r_2 \omega_{1z} - J_2 r_1 \omega_{2z})}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2},$$

$$\omega_{1z}' = \omega_{1z} - (1+k) \frac{r_1 J_2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2} (r_1 \omega_{1z} + r_2 \omega_{2z}),$$

$$\omega_{2z}' = \omega_{2z} - (1+k) \frac{r_2 J_1}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2} (r_1 \omega_{1z} + r_2 \omega_{2z}),$$

$$m_{O_1}(\mathbf{S}_I) = \frac{r_1 I_1 I_2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2} (r_1 \omega_{1z} + r_2 \omega_{2z}).$$

Литература

1. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О. Уравнение возможной мощности в теоретической механике. Таллин, 1978.
2. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О. Основные вопросы аналитической механики. Уравнение возможной мощности. Таллин, 1979.
3. Гольст Г., Сильде О. Дифференциальные принципы механики на основе уравнения возможной мощности. — Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 487, 75—81.

4. Рельвик Х. Некоторые вопросы динамики неголономных систем. Автореферат дисс., Таллин, 1975.
5. Рельвик Х., Сильде О. Метод уравнения возможной мощности с применением объекта неголономности. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1973, 345, 63—74.
6. Сильде О., Тийкма Б. К вопросу о применении в механике теоремы кинетической энергии. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1968, A261, 3—16.
7. Сильде О., Тийкма Б. Метод уравнения возможных мощностей. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1970, A293, 95—110.
8. Тийкма Б. Об уравнении мощностей. Тр. Таллин. политехн. ин-та, 1965, A222, 55—62.

Поступило
11 XII 1978

THE EQUATION OF POSSIBLE POWER IN THE PERCUSSION THEORY

H. Relvik

Summary

The equation of possible power has already been observed in a good number of papers, but as yet there is no example in the field of the percussion theory. In the present paper it is shown that it can successfully be used in this sphere too.

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Хайтин

Таллинский политехнический институт

Введение

В работе [1] дано несколько способов для нахождения уравнений движения механических систем. В настоящей статье приводятся формулы, позволяющие получить уравнения движения с меньшим объемом вычислений.

§ 1. Абсолютно твердое тело

Для составления дифференциальных уравнений движения тела вводим вспомогательную прямоугольную координатную систему $Vxyz$ с осями i, j и k (см. рис. 1), движущуюся в про-

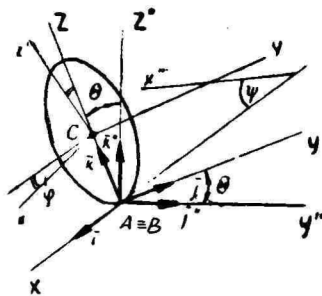


Рис. 1

странстве определенным образом. Вектор угловой скорости координатной системы $Vxyz$

$$\Omega = \theta_1 i + \theta_2 j + \theta_3 k \quad (1)$$

и вектор скорости точки B

$$\mathbf{v}_B = v_{Bx}\mathbf{i} + v_{By}\mathbf{j} + v_{Bz}\mathbf{k}. \quad (2)$$

За независимые параметры скорости возьмем проекции вектора угловой скорости тела

$$\omega = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k} \quad (3)$$

и вектора скорости точки A (точка A в данный момент совпадает с точкой B и, в общем случае, является переменной точкой тела)

$$\mathbf{v}_A = v_{Ax}\mathbf{i} + v_{Ay}\mathbf{j} + v_{Az}\mathbf{k}. \quad (4)$$

Положение центра масс тела определяется радиус-вектором

$$\mathbf{q}_C = x_C\mathbf{i} + y_C\mathbf{j} + z_C\mathbf{k}.$$

Для скорости и ускорения i -той точки тела соответственно имеем

$$\mathbf{v}_i = v_{Ax}\mathbf{i} + v_{Ay}\mathbf{j} + v_{Az}\mathbf{k} + \omega_1(\mathbf{i} \times \mathbf{q}_i) + \omega_2(\mathbf{j} \times \mathbf{q}_i) + \omega_3(\mathbf{k} \times \mathbf{q}_i), \quad (5)$$

$$\mathbf{a}_i = v'_{Ax}\mathbf{i} + v'_{Ay}\mathbf{j} + v'_{Az}\mathbf{k} + \Omega \times \mathbf{v}_A + \omega_1(\mathbf{i} \times \mathbf{q}_i) + \omega_2(\mathbf{j} \times \mathbf{q}_i) + \omega_3(\mathbf{k} \times \mathbf{q}_i) + (\Omega \times \omega) \times \mathbf{q}_i + \omega \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_B), \quad (6)$$

где радиус-вектор i -той точки

$$\mathbf{q}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}, \quad (7)$$

и

$$\dot{\mathbf{i}} = \Omega \times \mathbf{i}, \quad \dot{\mathbf{j}} = \Omega \times \mathbf{j}, \quad \dot{\mathbf{k}} = \Omega \times \mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_B.$$

Из выражения (6), с учетом (1)–(5) и (7) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i = [& v'_{Ax} + \theta_2 v_{Az} - \theta_3 v_{Ay} + \omega_2 z_i - \omega_3 y_i + (\theta_3 \omega_1 - \theta_1 \omega_3) z_i - \\ & - (\theta_1 \omega_2 - \theta_2 \omega_1) y_i + \omega_2 (v_{Az} - v_{Bz}) - \omega_3 (v_{Ay} - v_{By}) + \\ & + (\omega_1 x_i + \omega_2 y_i + \omega_3 z_i) \omega_1 - \omega^2 x_i] \mathbf{i} + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

где точки обозначают остальные составляющие при \mathbf{j} и \mathbf{k} , которые получаются циклической перестановкой индексов и координат.

Уравнения движения можно получить из уравнения возможной мощности (см. [1], формулы (2.34)–(2.36)), т. е.

$$E_j \{v^j\} = Q_j \{v^j\}, \quad (9)$$

где, в случае твердого тела, $j = 1, 2, \dots, 6$, а параметры возможной скорости $\{v^j\}$ и базисные векторы \mathbf{u}_{ij} получаются из выражения (5) (для сравнения см. [1] стр. 70–72).

Теперь искомые формулы, служащие для вычисления величин E_j , после учета (8) и суммирования по всем точкам тела, принимают вид:

$$\begin{aligned} E_1 = \Sigma m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{i} = \\ = M [v'_{Ax} + \theta_2 v_{Az} - \theta_3 v_{Ay} + \omega_2 z_C - \omega_3 y_C + (\theta_3 \omega_1 - \theta_1 \omega_3) z_C - \\ - (\theta_1 \omega_2 - \theta_2 \omega_1) y_C + \omega_2 (v_{Az} - v_{Bz}) - \omega_3 (v_{Ay} - v_{By}) + \\ + (\omega_1 x_C + \omega_2 y_C + \omega_3 z_C) \omega_1 - \omega^2 x_C]; \end{aligned} \quad (10)$$

E_2 и E_3 можно получить из E_1 путем циклической перестановки индексов 1, 2, 3; x, y, z и координат x_C, y_C, z_C ;

$$\begin{aligned}
 E_4 = \Sigma m_i a_i \cdot (i \times Q_i) = & \\
 = J_1 (\omega_1^2 + \theta_2 \omega_3 - \theta_3 \omega_2) + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 - & \\
 - J_{12} (\omega_2^2 - \omega_1 \omega_3 + \theta_3 \omega_1 - \theta_1 \omega_3) - J_{13} (\omega_3^2 + \omega_1 \omega_3 + \theta_1 \omega_2 - \theta_2 \omega_1) + & \\
 + J_{23} (\omega_3^2 - \omega_2^2) + M y_C [v_{Az} + \theta_1 v_{Ay} - \theta_2 v_{Ax} + \omega_1 (v_{Ay} - v_{By}) - & \\
 - \omega_2 (v_{Ax} - v_{Bx})] - M z_C [v_{Ay} + \theta_3 v_{Ax} - \theta_1 v_{Az} + \omega_3 (v_{Ax} - v_{Bx}) - & \\
 - \omega_1 (v_{Az} - v_{Bz})]; & \quad (11)
 \end{aligned}$$

E_5 и E_6 можно аналогично получить из E_4 путем циклической перестановки индексов и координат.

В этих формулах приняты следующие обозначения: m_i — масса i -той точки, M — масса тела, J_1, J_2 и J_3 — моменты инерции относительно координатных осей, соответственно Bx, By и Bz , а J_{12}, J_{13} и J_{23} — центробежные моменты инерции.

Процесс дальнейшего нахождения уравнений движения с помощью (9) аналогичен приведенным в работе [1], стр. 37, 45.

В качестве примера рассмотрим качение однородного круглого диска на горизонтальной плоскости. Эта задача решена и в работе [1] (см. пример 3—4, стр. 74). Воспользуемся полученными там выражениями.

$$\begin{aligned}
 \omega = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k; \quad \Omega = \omega_1 i + \omega_3 \operatorname{tg} \Theta j + \omega_3 k; \\
 v_B = r (\omega_2 - \omega_3 \operatorname{tg} \Theta) i; \quad v_A = 0; \quad Q_C = r k.
 \end{aligned}$$

Подставляя их в выражения (10) и (11) для E_4, E_5 и E_6 и учитывая моменты инерции диска, получим

$$\begin{aligned}
 E_4 = (I_1 + Mr^2) \omega_1^2 - (I_2 + Mr^2) \omega_2 \omega_3 + I_1 \omega_3^2 \operatorname{tg} \Theta, \\
 E_5 = (I_2 + Mr^2) \omega_2^2 + Mr^2 \omega_1 \omega_3, \\
 E_6 = I_1 \omega_3^2 - I_1 \omega_1 \omega_3 \operatorname{tg} \Theta + I_2 \omega_1 \omega_2.
 \end{aligned}$$

Обобщенные силы вычисляются также, как в [1]. В результате имеем

$$Q_4 = Mgr \sin \Theta, \quad Q_5 = Q_6 = 0.$$

Учитывая, что возможная скорость $\{v_A\} = 0$, а $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}$ независимы, на основании (9) получим уравнения движения диска в виде

$$E_4 = Q_4, \quad E_5 = 0, \quad E_6 = 0.$$

Из приведенного примера выясняется, что объем вычислений при составлении дифференциальных уравнений движения с помощью формул (10) и (11), уменьшается по сравнению с решением в работе [1].

§ 2. Система тел

В случае системы тел можно придерживаться указаний, данных в § 3.6 книги [1]. Дополнительно к ним для каждого тела выбирается своя система V_{xyz} и соответственно свои параметры. Параметры возможной скорости каждого тела или группы тел необходимо выразить через независимые параметры, которые являются общими для всей системы тел. Для каждого тела или группы тел с помощью формул (10) и (11) подсчитываются E_{ip} , где i — индекс тела, p — индекс, соответствующий параметру скорости v^p_i . Левая часть уравнения возможной мощности, после суммирования и приведения к независимым параметрам возможной скорости, приобретает вид $\{T\} = E_j\{v_j\}$, где $j = 0, 1, 2, \dots, s$, а s — число степеней свободы системы.

Возможная мощность $\{N\}$ вычисляется аналогично изложенному в [1] для всей системы в общих параметрах скорости. Уравнения движения получаются из равенства $\{T\} = \{N\}$.

Из сказанного следует, что и для системы тел объем вычислений сокращается по сравнению со способами, предложенными в работе [1], стр. 105.

Литература

1. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О. Основные вопросы аналитической механики. Таллин, 1979.

Поступило
28 V 1979

EINIGE FORMELN FÜR DIE HERLEITUNG DER DIFFERENTIAL- GLEICHUNGEN DER BEWEGUNG MECHANISCHER SYSTEME

A. Haitin

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag werden allgemeine Formeln (10) und (11) für die Herleitung der Differentialgleichungen der Bewegung mechanischer Systeme gegeben.

СОДЕРЖАНИЕ

М. Хейнлоо. Напряжения и смещения во вращающихся дисках из линейного вязкоупругого материала, армированных упругими кольцами	3
М. Хейнлоо. К алгебре резольвентных интегральных операторов, применяемой в линейной теории вязкоупругости	11
Т. Лийва. О послекритической стадии оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны при кручении	18
Ю. Энгельбрехт. Нелинейные волновые процессы деформации в твердой среде	29
К Кенк. О циклическом деформировании стареющих материалов	36
Э. Ийги. Об изгибе упруго-пластических пологих арок	41
Ю. Лепик. Об условии оптимальности балок с дополнительными опорами при динамических нагрузках	45
Ю. Лепик. Определение оптимального положения опор для жесткопластической балки в случае импульсного нагружения	62
И. Вайникко, К. Соонетс. Оптимальное проектирование цилиндрической оболочки ступенчато-переменной толщины при динамическом нагружении	77
Ю. Кирс. Оптимальное проектирование жесткопластических конических и сферических оболочек кусочно-постоянного профиля при импульсном нагружении	86
Э. Сакс. Линейная ползучесть тел вращения при кручении	99
Г. Гольст. Некоторые дифференциальные уравнения движения твердого тела	105
Х. Рельвик. Уравнение возможной мощности в динамике материальной точки переменной массы	115
Х. Рельвик. Уравнение возможной мощности в теории удара	120
А. Хайтин. Некоторые формулы для нахождения дифференциальных уравнений движения механических систем	129

Ученые записки Тартуского государственного университета. Выпуск 675. Механика твердого деформируемого тела. Труды по математике и механике. На русском языке. Резюме на английском и немецком языках. Тартуский государственный университет. ЭССР, 202400, г. Тарту, ул. Юликооли, 18. Ответственный редактор К. Соонетс. Корректор Л. Оноприенко. Сдано в набор 20. 06. 1979. Подписано к печати 11. 06. 84. МВ 05981. Формат 60×90/16. Бумага печатная № 2. Высокая печать. Литературная. Учетно-издательских листов 7,65. Печатных листов 8,5. Тираж 450. Заказ № 2498. Цена 1 руб. 20 коп. Типография им. Х. Хейдеманна, ЭССР, 202400, г. Тарту, ул. Юликооли, 17/19. II