

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI  
TOIMETISED

---

УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ

ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

---

836

ПРИМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИИ  
В АЛГЕБРЕ  
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ  
ГЕОМЕТРИИ

Matemaatika- ja mehaanikaalaseid töid

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED  
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ  
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS  
ALUSTATUD 1893.a. VIHK 836 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г

ПРИМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИИ  
В АЛГЕБРЕ  
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ  
ГЕОМЕТРИИ

Matemaatika- ja mehaanikaalaseid töid

ТАРТУ 1989

Redaktsioonikolleegium

Ü.Lepik (esimees), L.Ainola, T.Arak, K.Kenk, M.Kilp,  
E.Tiit, Ü.Lumiste, E.Reimers, G.Vainikko

Редакционная коллегия:

Д.Лепик (председатель), Л.Айнола, Т.Арак, К.Кенк,  
М.Килп, Э.Тийт, Ю.Думисте, Э.Реймерс, Г.Вайникко

Vastutav toimetaja: A.Fljaiser

## ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБР

М. Абель

Лаборатория прикладной математики

Хорошо известно (см. [12, 15, 18, 28, 29]), что каждая полная отделимая локально  $m$ -выпуклая алгебра является топологически изоморфной проективному пределу банаховых алгебр. Этот результат дал возможность перенести многие результаты, известные для банаховых алгебр, на случай полных отделимых локально  $m$ -выпуклых алгебр. Оказалось (см. §3), что полные отделимые локально  $m$ -( $\rho$ -псевдовыпуклые) алгебры являются топологически изоморфными проективным пределом  $\rho$ -банаховых алгебр. Поэтому представляет интерес изучить свойства проективных пределов топологических алгебр более общих, чем банаховы алгебры. В связи с этим, в §2 данной статьи и изучаются разного рода свойства проективных пределов топологических алгебр. В §4, при помощи результатов, доказанных в §2 и в §3, описываются некоторые свойства коммутативных полных отделимых локально  $m$ -( $\rho$ -псевдовыпуклых) алгебр, перенеся таким образом на этот класс топологических алгебр многие свойства, которыми обладают все коммутативные полные отделимые локально  $m$ -выпуклые алгебры и все коммутативные  $\rho$ -банаховы алгебры.

### §1. Основные понятия и обозначения

I. Пусть  $A$  - топологическая алгебра (т.е. линейное топологическое пространство над  $\mathcal{R}$  или  $\mathcal{C}$ , которое является ассоциативной алгеброй, и в которой умножение элементов (как билинейное отображение  $A \times A$  в  $A$ ) раздельно непрерывно);  $M_e(A)$  ( $M_2(A)$  и  $M(A)$ ) - множество всех максимальных регулярных левых (правых и двусторонних) идеалов алгебры  $A$ ;  $M_1(A)$  - подмножество тех идеалов в  $M(A)$ , коразмерность которых равна единице;  $m_1(A)$ ,  $m_2(A)$ ,  $m(A)$  и  $m_3(A)$  - подмножества замкнутых

идеалов в  $M_1(A)$ ,  $M_2(A)$ ,  $M(A)$  и  $M_1(A)$  соответственно и  $m_{L_2}(A) = m_L(A) \cap m_2(A)$ . Пусть далее  $Rad A$ ,  $rad_1 A$ ,  $rad A$  и  $rad_1 A$  — перечение идеалов множества  $M(A)$  (соответственно,  $M_1(A)$ ,  $m(A)$  и  $m_1(A)$ );  $Qinv A$  — множество всех квазирегулярных элементов алгебры  $A$  (т.е. тех элементов  $a \in A$ , для которых найдется такой элемент  $b \in A$ , что  $a + b - ab = b + a - ab = e_A$ , где  $e_A$  — нулевой элемент алгебры  $A$ ); если алгебра  $A$  содержит единицу, то  $Inv A$  — множество всех обратимых элементов алгебры  $A$ ;  $hom_A A$  — множество всех непрерывных гомоморфизмов  $A$  на  $K$  (где  $K$  — одно из полей  $R$  или  $C$ ) и  $hom A$  — подмножество нетривиальных гомоморфизмов в  $hom_A A$ . Если  $hom A$  непусто, то наделим его, как обычно, слабой топологией, т.е. топологией, в которой предбазу окрестностей нуля образуют множества

$$O(\varphi_0; \alpha, \varepsilon) = \{ \varphi \in hom A : |\varphi(a) - \varphi(a_0)| < \varepsilon \},$$

где  $a \in A$  и  $\varepsilon > 0$ . В этой топологии оно отделимо и вполне регулярно.

2. Пусть  $A$  — топологическая  $C$ -алгебра и  $a \in A$ . Если  $A$  содержит единицу  $e_A$ , то спектр  $sp_A(a)$  элемента  $a$  (относительно алгебры  $A$ ) определяется равенством

$$sp_A(a) = \{ \lambda \in C : a - \lambda e_A \notin Inv A \},$$

а если  $A$  не содержит единицу, то равенством

$$sp_A(a) = \{ \lambda \in C : a/\lambda \notin Qinv A \} \cup \{0\}.$$

При этом, число

$$r_A(a) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in sp_A(a) \}$$

называется спектральным радиусом элемента  $a$ . Известно (см., например, [1]), что во многих топологических алгебрах спектр каждого элемента непуст, но существуют и такие топологические алгебры, в которых это не так (см. [31], с.141-148, или [28], с.44).

3. Элемент  $a$  топологической  $C$ -алгебры  $A$  называется ограниченным, если найдется такое число  $\lambda \in C \setminus \{0\}$ , что множество  $\{(a/\lambda)^n : n \in \mathbb{N}\}$  ограничено в алгебре  $A$ .

Определим теперь те классы топологических алгебр, которые нужны в дальнейшем.

Топологическая алгебра  $A$  называется

а)  $Q$ -алгеброй, если множество  $Qinv A$  (а в случае, когда  $A$  содержит единицу, то множество  $Inv A$ ) открыто в алгебре  $A$ ;

б) алгеброй Валбрука, если она является  $Q$ -алгеброй, в которой квазиобращение элементов (в случае алгебр с едини-

цей обращение элементов) непрерывно;

в) локально псевдовыпуклой алгеброй (локально выпуклой алгеброй); если ее топология определена системой  $\{\rho_\alpha: \alpha \in \mathcal{O}\}$  непрерывных  $k_\alpha$ -однородных полунорм при  $0 < k_\alpha \leq 1$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  (соответственно, непрерывных полунорм);

г) локально  $m$ -псевдовыпуклой алгеброй (локально  $m$ -выпуклой алгеброй), если она локально псевдовыпукла (соответственно локально выпукла), и каждая полунорма  $\rho_\alpha$  удовлетворяет условию  $\rho_\alpha(ab) \leq \rho_\alpha(a)\rho_\alpha(b)$  для каждых  $a, b \in A$ ;

д) локально  $p$ -псевдовыпуклой алгеброй (локально  $m$ - $p$ -псевдовыпуклой) алгеброй, если она локально псевдовыпукла, (соответственно локально  $m$ -псевдовыпукла) и  $k_\alpha \equiv p$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ ;

е) поглощено псевдовыпуклой алгеброй (поглощено выпуклой алгеброй), если она локально псевдовыпукла (соответственно локально выпукла) и для каждых  $a \in A$  и  $\alpha \in \mathcal{O}$  найдутся такие положительные числа  $M(\alpha, a)$  и  $N(\alpha, a)$ , что  $\rho_\alpha(ab) \leq M(\alpha, a)\rho_\alpha(b)$  и  $\rho_\alpha(ba) \leq N(\alpha, a)\rho_\alpha(b)$  для всех  $b \in A$ ;

ё) алгеброй Фреше, если она метризуема и полна;

ж) локально ограниченной алгеброй (нормированной алгеброй), если ее топология определена непрерывной  $p$ -однородной нормой при  $0 < p \leq 1$  (соответственно, непрерывной нормой);

з)  $p$ -банаховой алгеброй (банаховой алгеброй), если она локально ограничена, отделима и полна (соответственно нормирована и полна).

Оказывается, что локально псевдовыпуклыми является кроме локально выпуклых алгебр и локально ограниченных алгебр еще многие топологические алгебры (см., например, [16], с. 157). Кроме того, топологическая  $\mathbb{C}$ -алгебра  $A$  называется алгеброй Гельфанда-Мазура, если для каждого  $M \in m_{\text{loc}}(A)$  факторалгебра  $A/M$  топологически изоморфна полю  $\mathbb{C}$ . Известно (см. [2] теорема 3.3.), что алгебрами Гельфанда-Мазура являются локально псевдовыпуклые  $\mathbb{C}$ -алгебры, все элементы которых ограничены; локально псевдовыпуклые  $\mathbb{C}$ -алгебры Валбрука; локально псевдовыпуклые  $\mathbb{C}$ -алгебры Фреше и поглощено псевдовыпуклые  $\mathbb{C}$ -алгебры.

4. Пусть  $\mathcal{O}$  - частично упорядоченное множество (т.е. множество, в котором для некоторых пар  $(\alpha, \beta)$  его элементов определено соотношение  $\alpha \leq \beta$  такое, что  $\alpha \leq \alpha$  и, если  $\alpha \leq \beta$  и  $\beta \leq \gamma$ , то  $\alpha \leq \gamma$ ), а  $\{A_\alpha: \alpha \in \mathcal{O}\}$  - семейство топологических алгебр. Если для каждой пары  $(\alpha, \beta) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$ , для которой  $\alpha \leq \beta$ , определены непрерывные гомоморфизмы  $k_\alpha^\beta$  от  $A_\beta$  в  $A_\alpha$  и при-

том так, что выполняются условия

а)  $k_{\alpha}^{\beta}$  является тождественным отображением на  $A_{\alpha}$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$

и

б)  $k_{\alpha}^{\beta} \circ k_{\beta}^{\gamma} = k_{\alpha}^{\gamma}$  для любых  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{O}$ , удовлетворяющих условию  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ .

то совокупность  $(A_{\alpha}; k_{\alpha}^{\beta}, \mathcal{O})$  называется проективной системой над  $\mathcal{O}$  топологических алгебр  $A_{\alpha}$  или обратным спектром над  $\mathcal{O}$  топологических алгебр  $A_{\alpha}$ , а множество

$$\{(a_{\alpha}) \in \prod_{\alpha \in \mathcal{O}} A_{\alpha} : k_{\alpha}^{\beta}(a_{\beta}) = a_{\alpha} \text{ всякий раз, когда } \alpha \leq \beta\}$$

называется проективным пределом этой системы или пределом обратного спектра этой системы и обозначается через  $\varprojlim (A_{\alpha}; k_{\alpha}^{\beta}, \mathcal{O})$  или коротко через  $\varprojlim A_{\alpha}$ . При этом,  $\varprojlim A_{\alpha}$  может оказаться пустым множеством. Но в случае, когда каждая алгебра  $A_{\alpha}$  в системе  $(A_{\alpha}; k_{\alpha}^{\beta}, \mathcal{O})$  имеет единицу  $e_{\alpha}$  и гомоморфизмы  $k_{\alpha}^{\beta}$  преобразуют единицу в единицу, то  $e = (e_{\alpha}) \in \varprojlim A_{\alpha}$ . Поэтому всюду в дальнейшем (если все алгебры  $A_{\alpha}$  имеют единицу) мы будем предполагать, дополнительно, что гомоморфизмы  $k_{\alpha}^{\beta}$  обладают этим свойством.

Пусть теперь  $\pi_{\alpha}$  - проекция  $\prod_{\alpha \in \mathcal{O}} A_{\alpha}$  на  $A_{\alpha}$  и  $\mu_{\alpha} = \pi_{\alpha} \circ \varprojlim A_{\alpha}$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Тогда отображения  $\mu_{\alpha}$  (так называемые канонические проекции проективного предела  $\varprojlim A_{\alpha}$ ) отображают  $\varprojlim A_{\alpha}$  в  $A_{\alpha}$  (не обязательно на  $A_{\alpha}$ ). Аналогично тому как в [II], с. 170 и в книге [18], с. 174, проективный предел  $\varprojlim A_{\alpha}$  системы  $(A_{\alpha}; k_{\alpha}^{\beta}, \mathcal{O})$  будем называть строго плотным, если  $\mu_{\alpha}(\varprojlim A_{\alpha})$  всюду плотно в  $A_{\alpha}$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ .

Наделив  $\varprojlim A_{\alpha}$  топологией  $\mathcal{T}$ , индуцированной из прямого произведения  $\prod_{\alpha \in \mathcal{O}} A_{\alpha}$ , и определяя на  $\varprojlim A_{\alpha}$  алгебраические операции поточечно как и в  $\prod_{\alpha \in \mathcal{O}} A_{\alpha}$  (т.е. определяя сложение и умножение элементов  $a = (a_{\alpha})$  и  $b = (b_{\alpha})$  из  $\varprojlim A_{\alpha}$  равенствами  $a + b = (a_{\alpha} + b_{\alpha})$  и  $ab = (a_{\alpha}b_{\alpha})$ , а умножение элемента  $a = (a_{\alpha}) \in \varprojlim A_{\alpha}$  на число  $\lambda \in K$  равенством  $\lambda a = (\lambda a_{\alpha})$ , заметим, что  $\varprojlim A_{\alpha}$  является замкнутым относительно определенных на нем алгебраических операций и (в топологии  $\mathcal{T}$ ) сложение элементов и умножение элементов на число непрерывны, а умножение элементов раздельно непрерывно (при этом умножение элементов в  $\varprojlim A_{\alpha}$  является непрерывным отображением, если умножение элементов в алгебрах  $A_{\alpha}$  непрерывно для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ ). Поэтому проективный предел проективной системы топологических алгебр является также топологической алгеброй.

## §2. Некоторые свойства проективных предел топологических алгебр

Свойства пределов топологических алгебр до сих пор довольно мало изучены. Кроме результатов, приведенных выше, известны только некоторые свойства проективных пределов, в основном локально выпуклых алгебр и локально  $m$ -выпуклых алгебр (см. [4, II, I2, I5, I8-20, 28, 29]). Целью данного параграфа является изложение свойств проективных пределов топологических (более общих, чем локально выпуклых) алгебр.

**Теорема I.** Пусть  $(A_\alpha; h_\alpha^p, \theta)$  - проективная система над  $\mathcal{O}$  отделимых топологических алгебр  $A_\alpha$ ,  $\varprojlim A_\alpha$  - проективный предел этой системы и  $\mu_\alpha$  - каноническая проекция  $\varprojlim A_\alpha$  в  $A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Если  $\varprojlim A_\alpha$  непуст, то элемент  $a \in \mathcal{Q} \text{inv } \varprojlim A_\alpha$  тогда и только тогда, когда  $\mu_\alpha(a) \in \mathcal{Q} \text{inv } A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Если, кроме того, предел  $\varprojlim A_\alpha$  строго плотен, то справедливы следующие утверждения:

а) если алгебра  $\varprojlim A_\alpha$  содержит единицу  $e = (e_\alpha)$ , то  $e_\alpha$  является единицей алгебры  $A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ , а если каждая алгебра  $A_\alpha$  содержит единицу  $e_\alpha$ , то  $e = (e_\alpha)$  является единицей алгебры  $\varprojlim A_\alpha$ ;

б) если  $\varprojlim A_\alpha$  содержит единицу, то  $a \in \mathcal{Z} \text{inv } \varprojlim A_\alpha$  тогда и только тогда, когда  $\mu_\alpha(a) \in \mathcal{Z} \text{inv } A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ ;

в) если  $K = \mathbb{C}$ , то спектр

$$\text{sp}_{\varprojlim A_\alpha}(a) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}} \text{sp}_{A_\alpha} \mu_\alpha(a) \quad (I)$$

для каждого  $a \in \varprojlim A_\alpha$ .

**Доказательство.** Пусть  $a = (a_\alpha) \in \mathcal{Q} \text{inv } \varprojlim A_\alpha$ . Тогда в  $\varprojlim A_\alpha$  существует элемент  $b = (b_\alpha)$  такой, что  $a \circ b = b \circ a = e \in \varprojlim A_\alpha$ . Так как проекции  $\mu_\alpha$  являются гомоморфизмами, то  $a_\alpha \circ b_\alpha = b_\alpha \circ a_\alpha = e_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Поэтому  $\mu_\alpha(a) \in \mathcal{Q} \text{inv } A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ .

Пусть теперь  $a = (a_\alpha) \in \varprojlim A_\alpha$  - такой элемент, для которого  $a_\alpha \in \mathcal{Q} \text{inv } A_\alpha$  при каждом  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Тогда для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  в  $A_\alpha$  существует элемент  $b_\alpha$ , удовлетворяющий условию  $a_\alpha \circ b_\alpha = b_\alpha \circ a_\alpha = e_\alpha$ . Теперь

$$a_\alpha \circ h_\alpha^p(b_\beta) = h_\alpha^p(a_\beta) \circ h_\alpha^p(b_\beta) = h_\alpha^p(a_\beta \circ b_\beta) = h_\alpha^p(e_\beta) = e_\alpha,$$

если  $\alpha \leq \beta$ . Поскольку квазиобратные элементы определены в алгебрах единственным образом, то  $h_\alpha^p(b_\beta) = b_\alpha$  при  $\alpha \leq \beta$ . В силу этого,  $b = (b_\alpha) \in \varprojlim A_\alpha$  является левым квазиобратным для элемента  $a$ . Аналогично имеет  $a$  и правый квазиобратный.

а) Пусть  $e = (e_\alpha)$  - единица алгебры  $\varprojlim A_\alpha$ . Тогда из  $a e = e a = a$  для каждого  $a = (a_\alpha) \in \varprojlim A_\alpha$  следует, что  $a_\alpha e_\alpha = e_\alpha a_\alpha = a_\alpha$ , для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Поэтому  $e_\alpha$  является единицей подалгебры  $A'_\alpha = \mu_\alpha(\varprojlim A_\alpha)$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Так как подалгебра  $A'_\alpha$  всюду плотна в  $A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  и каждая алгебра  $A_\alpha$  отделима, то  $e_\alpha$  является единицей и в алгебре  $A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ .

Пусть теперь  $e_\alpha$  - единица алгебры  $A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  и  $a_\alpha$  - любой элемент подалгебры  $A'_\alpha$  при фиксированном  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Тогда существует такой элемент  $a \in \varprojlim A_\alpha$ , что  $\mu_\alpha(a) = a_\alpha$ . Поскольку

$$h_\alpha^\beta(e_\beta) a_\alpha = h_\alpha^\beta(e_\beta) h_\alpha^\beta(a_\beta) = h_\alpha^\beta(e_\beta a_\beta) = a_\alpha$$

и

$$a_\alpha h_\alpha^\beta(e_\beta) = h_\alpha^\beta(a_\beta) h_\alpha^\beta(e_\beta) = h_\alpha^\beta(a_\beta e_\beta) = a_\alpha$$

при  $\alpha \neq \beta$ , то  $h_\alpha^\beta(e_\beta)$  является единицей подалгебры  $A'_\alpha$  при  $\alpha \neq \beta$ . По предположению  $A'_\alpha$  всюду плотна в  $A_\alpha$  и  $A_\alpha$  отделима. Поэтому  $h_\alpha^\beta(e_\beta)$  является также единицей алгебры  $A_\alpha$  и справедливо  $h_\alpha^\beta(e_\beta) = e_\alpha$  при  $\alpha \neq \beta$ . Значит,  $e = (e_\alpha) \in \varprojlim A_\alpha$  и  $a e = e a = a$  для каждого  $a \in \varprojlim A_\alpha$ . Таким образом,  $e$  является единицей алгебры  $\varprojlim A_\alpha$ .

б) Пусть  $\varprojlim A_\alpha$  содержит единицу  $e = (e_\alpha)$ . Тогда  $e_\alpha$  является единицей алгебры  $A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Если  $a \in \mathcal{U} \varprojlim A_\alpha$  то  $\mu_\alpha(a) \in \mathcal{U} A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ .

Пусть теперь  $a = (a_\alpha) \in \varprojlim A_\alpha$  - такой элемент, что  $a_\alpha \in \mathcal{U} A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Тогда  $a_\alpha$  имеет в  $A_\alpha$  обратный  $a_\alpha^{-1}$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  и справедливо

$$h_\alpha^\beta(a_\beta^{-1}) = [h_\alpha^\beta(a_\beta)]^{-1} = a_\alpha^{-1}$$

при  $\alpha \neq \beta$ . Поэтому  $a^{-1} = (a_\alpha^{-1}) \in \varprojlim A_\alpha$  является обратным к  $a$ .

в) Пусть  $a = (a_\alpha) \in \varprojlim A_\alpha$  и  $\lambda \in \text{sp}_{\varprojlim A_\alpha}(a)$ . Если  $\lambda \neq 0$ , то  $a/\lambda \notin \text{Qinv } \varprojlim A_\alpha$ . Поэтому  $a/\lambda \notin \text{Qinv } A_\alpha$  для некоторого  $\alpha \in \mathcal{O}$ , в силу чего  $\lambda \in \text{sp}_{A_\alpha}(a_\alpha)$  для этого  $\alpha$ . Пусть теперь  $\lambda = 0$ . Если  $\varprojlim A_\alpha$  не содержит единицу, то и некоторая из алгебр  $A_\alpha$  не содержит единицу. Поэтому  $0 \in \text{sp}_{A_\alpha}(a_\alpha)$  для этого  $\alpha$ . Но если  $\varprojlim A_\alpha$  содержит единицу, то единицу содержат все алгебры  $A_\alpha$ . Поэтому из  $a \notin \mathcal{U} \varprojlim A_\alpha$  следует, что  $a_\alpha \neq \mathcal{U} A_\alpha$  для некоторого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Таким образом,  $0 \in \text{sp}_{A_\alpha}(a_\alpha)$  для этого  $\alpha$ . Следовательно,  $\lambda$  принадлежит объединению спектров  $\text{sp}_{A_\alpha}(\mu_\alpha(a))$  при  $\alpha \in \mathcal{O}$ .

Пусть теперь  $\lambda$  принадлежит правой части равенства (I).

Тогда  $\lambda \in \text{sp}_{A_\alpha}(\alpha)$  для некоторого  $\alpha \in \mathcal{O}$ , скажем при  $\alpha = \alpha_0$ . Если  $\lambda \neq 0$ , то  $\alpha_0 \cdot \lambda \notin \text{Qinv } A_{\alpha_0}$ , в силу чего  $\alpha/\lambda \notin \text{Qinv } \varprojlim A_\alpha$ . Поэтому  $\lambda \in \text{sp}_{\varprojlim A_\alpha}(\alpha)$ . Пусть теперь  $\lambda = 0$ . Если одна из алгебр не содержит единицу, то и  $\varprojlim A_\alpha$  не содержит единицу и поэтому  $0 \in \text{sp}_{\varprojlim A_\alpha}(\alpha)$ . В случае, когда все алгебры содержат единицу, то и  $\varinjlim A_\alpha$  содержит единицу и из  $\alpha \notin \text{Inv } A_\alpha$  следует, что  $\alpha \notin \text{Inv } \varinjlim A_\alpha$ . Таким образом, и в этом случае  $0 \in \text{sp}_{\varprojlim A_\alpha}(\alpha)$ . Следовательно, равенство (I) имеет место.

По теореме I справедливо

**Следствие I.** Пусть  $(A_\alpha; \mathcal{R}_\alpha^B, \mathcal{O})$  - проективная система над  $\mathcal{O}$  отделимых топологических алгебр  $A_\alpha$ ,  $\varprojlim A_\alpha$  - проективный предел этой системы и  $\mu_\alpha$  - каноническая проекция  $\varprojlim A_\alpha$  в  $A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Если  $\varprojlim A_\alpha$  непуст, то

$$\text{Qinv } \varprojlim A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{O}} \mu_\alpha^{-1}(\text{Qinv } A_\alpha),$$

а если, кроме того,  $\varprojlim A_\alpha$  содержит единицу и является строго плотным, то

$$\text{Inv } \varprojlim A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{O}} \mu_\alpha^{-1}(\text{Inv } A_\alpha).$$

Хорошо известно, что элемент в коммутативной алгебре обратим, тогда и только тогда, когда он не содержится ни в одном максимальном идеале этой алгебры. Но описать все максимальные идеалы заданной алгебры часто оказывается очень сложным. В то же время описание всех элементов множества  $\text{hom } A$  топологической алгебры  $A$  оказывается во многих случаях довольно простой задачей. Поэтому в следующем дадим описание такого класса топологических алгебр  $A$ , в проективных пределах которых обратимость и квазиобратимость (следовательно и спектр каждого элемента) можно определить при помощи элементов пространства  $\text{hom } A$ .

**Теорема 2.** Пусть  $(A_\alpha; \mathcal{R}_\alpha^B, \mathcal{O})$  - проективная система над  $\mathcal{O}$  коммутативных отделимых  $\mathbb{Q}$ -алгебр Гельфанда-Мазура и  $\varprojlim A_\alpha$  - строго плотный проективный предел этой системы. Если  $\varprojlim A_\alpha$  непуст, то

- а) множество  $\text{hom } \varprojlim A_\alpha$  непусто;
- б)  $a \in \text{Qinv } \varprojlim A_\alpha$  тогда и только тогда, когда  $\varphi(a) \neq 1$  для каждого  $\varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$ ;
- в) если  $\varprojlim A_\alpha$  содержит единицу, то  $a \in \text{Inv } \varprojlim A_\alpha$  тогда и только тогда, когда  $\varphi(a) \neq 0$  для каждого  $\varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$ ;
- г) для каждого  $a \in \varprojlim A_\alpha$  справедливы

$$\text{sp}_{\varprojlim A_\alpha}(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha\} \quad (2)$$

и

$$\varrho_{\varprojlim A_\alpha}(a) = \sup \{|\varphi(a)| : \varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha\}; \quad (3)$$

д)  $\text{Rad } \varprojlim A_\alpha = \text{Rad}_1 \varprojlim A_\alpha = \text{rad}_1 \varprojlim A_\alpha = \text{rad } \varprojlim A_\alpha$ ;

е) радикалы  $\text{Rad } \varprojlim A_\alpha$  и  $\text{Rad}_1 \varprojlim A_\alpha$  замкнуты;

ж) если  $\varprojlim A_\alpha$  содержит единицу, то

$$\begin{aligned} U\{M : M \in M(\varprojlim A_\alpha)\} &= U\{M : M \in M_1(\varprojlim A_\alpha)\} = \\ &= U\{M : M \in m_1(\varprojlim A_\alpha)\} = \\ &= U\{M : M \in m(\varprojlim A_\alpha)\}. \end{aligned}$$

Доказательство. а) Так как каждая  $A_\alpha$  является коммутативной  $\mathbb{Q}$ -алгеброй Гельфанда-Мазура, то  $\text{hom } A_\alpha$  непусто для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Поэтому  $\varphi = \varphi|_{\mu_\alpha(\varprojlim A_\alpha)} \circ \mu_\alpha \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$  для каждого  $\varphi \in \text{hom } A_\alpha$  при фиксированном  $\alpha$ , ввиду всюду плотности  $\mu_\alpha(\varprojlim A_\alpha)$  в  $A_\alpha$ . Следовательно, множество  $\text{hom } \varprojlim A_\alpha$  непусто.

б) Пусть  $a \in \mathcal{Q} \cap \varprojlim A_\alpha$ . Тогда  $a + b = ab$  для некоторого элемента  $b \in \varprojlim A_\alpha$ . Поэтому  $\varphi(a) = (1 - \varphi(a))\varphi(b)$  для каждого  $\varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$ . Отсюда ясно, что  $\varphi(a) \neq 1$  для каждого  $\varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$ .

Пусть теперь  $\alpha = (\alpha_\alpha) \in \varprojlim A_\alpha$  - такой элемент, что  $\varphi(\alpha) \neq 1$  для каждого  $\varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$ . Если  $\alpha \notin \mathcal{Q} \cap \varprojlim A_\alpha$ , то по теореме I справедливо  $\alpha_\alpha \notin \mathcal{Q} \cap A_\alpha$  для некоторого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Учитывая это и коммутативность алгебры  $A_\alpha$ , множество  $\mathcal{J} = \{a_\alpha x + c : x \in A_\alpha\}$  образует в  $A_\alpha$  регулярный идеал и  $a_\alpha$  является единицей в  $A_\alpha$  по идеалу  $\mathcal{J}$  (см., например, [18], с. 66). Теперь найдется максимальный регулярный идеал  $M$  алгебры  $A_\alpha$ , содержащий  $\mathcal{J}$ . Так как  $A_\alpha$  является  $\mathbb{Q}$ -алгеброй Гельфанда-Мазура, то идеал  $M$  замкнут в  $A_\alpha$  и существует  $\varphi \in \text{hom } A_\alpha$  такой, что  $M = \ker \varphi$ . Поэтому  $\varphi = \varphi|_{\mu_\alpha(\varprojlim A_\alpha)} \circ \mu_\alpha \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$  и справедливо  $\varphi(\alpha) = \varphi(a_\alpha) = 1$  (ибо  $a_\alpha$  является в  $A_\alpha$  единицей по идеалу  $M$ ). Но это невозможно. Значит,  $\alpha \in \mathcal{Q} \cap \varprojlim A_\alpha$ .

в) Пусть  $a \in \mathcal{U} \cap \varprojlim A_\alpha$ . Тогда  $ab = 0$  для некоторого элемента  $b \in \varprojlim A_\alpha$ . Поэтому  $\varphi(a)\varphi(b) = 0$  для каждого  $\varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$ . Следовательно,  $\varphi(a) \neq 0$  для каждого  $\varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$ .

Пусть теперь  $\alpha = (\alpha_\alpha) \in \varprojlim A_\alpha$  - такой элемент, что  $\varphi(\alpha) \neq 0$  для каждого  $\varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$ . Если  $\alpha \notin \mathcal{U} \cap \varprojlim A_\alpha$ , то  $\alpha_\alpha \notin \mathcal{U} \cap A_\alpha$  для некоторого  $\alpha \in \mathcal{O}$  (по теореме I а) каждая

алгебра  $A_\alpha$  имеет единицу). Поэтому  $\mathcal{J} = \{a_\alpha x : x \in A_\alpha\}$  образует в  $A_\alpha$  идеал. Теперь найдется максимальный идеал  $M$  алгебры  $A_\alpha$ , содержащий  $\mathcal{J}$ . Опять ввиду того, что  $A_\alpha$  является  $\mathbb{Q}$ -алгеброй Гельфанда-Мазура, существует  $\varphi \in \text{hom } A_\alpha$  такой, что  $M = \ker \varphi$  и  $\varphi(a_\alpha) = 0$ , ибо  $a_\alpha \in M$ . В силу этого,  $\varphi = \varphi|_{\mu_\alpha(\varprojlim A_\alpha)}$  или  $\varphi_\alpha \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$  и справедливо  $\varphi_\alpha(a) = 0$ , что невозможно. Следовательно,  $a \in \mathcal{J} = \varprojlim A_\alpha$ .

г) Пусть  $a \in \varprojlim A_\alpha$  и  $\lambda \in \text{sp}_{\varprojlim A_\alpha}(a)$ . Если  $\lambda = 0$ , то  $\varphi(a) = \lambda$  при тривиальном гомоморфизме  $\varphi$  на  $\varprojlim A_\alpha$ . А если  $\lambda \neq 0$ , то  $a/\lambda \notin \mathcal{Q} \text{inv } \varprojlim A_\alpha$ . Поэтому  $\varphi(a/\lambda) = 1$  или  $\lambda = \varphi(a)$  для некоторого  $\varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$ . Значит,  $\lambda$  принадлежит правой части равенства (2).

Пусть теперь  $\lambda$  принадлежит правой части равенства (2). Тогда существует гомоморфизм  $\varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$  такой, что  $\lambda = \varphi(a)$ . Если  $\lambda \neq 0$ , то  $\varphi(a/\lambda) = 1$ . Поэтому  $a/\lambda \notin \mathcal{Q} \text{inv } \varprojlim A_\alpha$ . Таким образом  $\lambda$  всегда принадлежит  $\text{sp}_{\varprojlim A_\alpha}(a)$  и справедливо равенство (2). Поэтому справедливо и равенство (3).

д) Достаточно показать, что  $\text{rad}_l \varprojlim A_\alpha \subseteq \text{Rad } \varprojlim A_\alpha$ . Для этого пусть  $a \in \text{rad}_l \varprojlim A_\alpha$  - любой элемент. Тогда  $\varphi(a) = 0$  для каждого  $\varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$ . Поэтому  $a \in \mathcal{Q} \text{inv } \varprojlim A_\alpha$ . Значит,  $\text{rad}_l \varprojlim A_\alpha$  является идеалом алгебры  $\varprojlim A_\alpha$ , все элементы которого квазиобратимы в  $\varprojlim A_\alpha$ . Так как все такие идеалы алгебры  $\varprojlim A_\alpha$  принадлежат  $\text{Rad } \varprojlim A_\alpha$  (см. [24], с. 56), то и  $\text{rad}_l \varprojlim A_\alpha \subseteq \text{Rad } \varprojlim A_\alpha$ .

е) Справедливо по утверждению д).

ж) Достаточно показать только то, что

$$X_1 = \cup \{M : M \in \mathcal{M}(\varprojlim A_\alpha)\} \subseteq \cup \{M : M \in \mathcal{M}_1(\varprojlim A_\alpha)\} = X_2.$$

Для любого элемента  $a = (a_\alpha) \in X_1$  имеем  $a \notin \mathcal{J} = \varprojlim A_\alpha$ . Поэтому (по теореме 1 б))  $a_\alpha \notin \mathcal{J} = \varprojlim A_\alpha$  для некоторого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . В силу этого,  $a_\alpha$  принадлежит некоторому максимальному идеалу  $M$  алгебры  $A_\alpha$ . По предположению  $A_\alpha$  является коммутативной  $\mathbb{Q}$ -алгеброй Гельфанда-Мазура. Поэтому  $M = \ker \varphi$  для некоторого  $\varphi \in \text{hom } A_\alpha$ . Так как  $\varphi = \varphi|_{\mu_\alpha(\varprojlim A_\alpha)}$  или  $\varphi_\alpha \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$  и  $\varphi_\alpha(a) = a_\alpha$ , то  $a \in X_2$ .

По теореме 2 представляет интерес описание пространства  $\text{hom } \varprojlim A_\alpha$ . В силу этого докажем следующий результат:

Теорема 3. Пусть  $(A_\alpha; \mu_\alpha, \theta)$  - проективная система над направлением по возрастанию множеством  $\mathcal{O}$  топологических алгебр  $A_\alpha$  с непрерывным умножением,  $\varprojlim A_\alpha$  - строго плотный проективный предел этой системы и  $\mu_\alpha$  - каноническая проекция

$\varprojlim A_\alpha$  в  $A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Если предел  $\varprojlim A_\alpha$  и множества  $\text{hom } A_\alpha$  непусты, то<sup>1</sup>

$$\text{hom } \varprojlim A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}} (\text{hom } \varprojlim A_\alpha \cap [\mu_\alpha^{-1}((\text{hom } A_\alpha)^\circ)]^\circ) \quad (4)$$

и для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  существует непрерывное взаимно однозначное отображение  $\text{hom } A_\alpha$  на  $\text{hom } \varprojlim A_\alpha \cap [\mu_\alpha^{-1}((\text{hom } A_\alpha)^\circ)]^\circ$ . При этом, эти множества гомеоморфны для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ , если либо пространство  $\text{hom } \mu_\alpha(\varprojlim A_\alpha)$  локально равностепенно непрерывно, либо пространство  $\text{hom } A_\alpha$  компактно для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ .

Доказательство. Для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  положим

$$\mathcal{U}_\alpha = \mu_\alpha^{-1}((\text{hom } A_\alpha)^\circ)$$

и

$$\mathcal{X}_\alpha = \text{hom } \varprojlim A_\alpha \cap \mathcal{U}_\alpha^\circ.$$

Пусть далее  $\varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$  (множество  $\text{hom } \varprojlim A_\alpha$  непусто по предположению теоремы),  $A_\alpha = \mu_\alpha(\varprojlim A_\alpha)$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$  и  $\mathcal{V}$  — такая окрестность нуля алгебры  $\varprojlim A_\alpha$ , что  $\varphi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{O}$ . В силу направленности множества  $\mathcal{O}$  существуют  $\alpha_0 \in \mathcal{O}$  и окрестность нуля  $\mathcal{U}$  алгебры  $A_{\alpha_0}$  такие, что  $\mu_{\alpha_0}^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ . Если  $a \in \text{ker } \mu_{\alpha_0}$ , то из  $na \in \mu_{\alpha_0}^{-1}(\mathcal{U})$  следует, что  $na \in \mathcal{V}$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ . Поэтому  $|\varphi(a)| \leq 1/n$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  получаем, что  $a \in \text{ker } \varphi$ . Следовательно,  $\text{ker } \mu_{\alpha_0} \subset \text{ker } \varphi$ . Учитывая это, гомоморфизм  $\varphi$  и проекция  $\mu_{\alpha_0}$  определяют  $\varphi_{\alpha_0} \in \text{hom } A_{\alpha_0}^\circ$ , который удовлетворяет условию  $\varphi_{\alpha_0} \circ \mu_{\alpha_0} = \varphi$ . (Так как  $\mu_{\alpha_0}$  отображает открытые в  $\varprojlim A_\alpha$  подмножества на открытые в  $A_{\alpha_0}^\circ$ , то  $\varphi_{\alpha_0}$  непрерывен на  $A_{\alpha_0}^\circ$ ). По предположению умножение элементов в  $A_{\alpha_0}$  непрерывно и подалгебра  $A_{\alpha_0}^\circ$  всюду плотна в  $A_{\alpha_0}$ . Поэтому  $\varphi_{\alpha_0}$  имеет продолжение  $\overline{\varphi_{\alpha_0}} \in \text{hom } A_{\alpha_0}$  (см. [5], с. 4). Таким образом из  $a \in \mathcal{U}_\alpha$  следует, что  $\varphi(a) = \overline{\varphi_{\alpha_0}}(\mu_{\alpha_0}(a)) \in \mathcal{O}$ , в силу чего  $\varphi \in \mathcal{U}_{\alpha_0}^\circ$ . Значит, каждый гомоморфизм  $\varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$  определяет индекс  $\alpha_0 \in \mathcal{O}$ , такой, что  $\varphi \in \mathcal{X}_{\alpha_0}$ . Итак, справедливо равенство (4).

Пусть теперь  $\alpha \in \mathcal{O}$  и  $\varphi_\alpha$  — любой элемент пространства  $\text{hom } A_\alpha$ . Тогда  $\varphi_\alpha = (\varphi_\alpha|_{A_\alpha^\circ}) \circ \mu_\alpha$  является нетривиальным (ибо  $A_\alpha^\circ$  всюду плотна в  $A_\alpha$ ) непрерывным гомоморфизмом  $\varprojlim A_\alpha$  на  $\mathbb{K}$ . Легко заметить, что  $\varphi_\alpha \in \mathcal{X}_\alpha$ . Теперь для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  через

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем  $A^*$  обозначает сопряженное пространство алгебры  $A$ ,

$$E^\circ = \{\varphi \in A^* : |\varphi(a)| \leq 1 \quad \forall a \in E\}$$

для каждого подмножества  $E$  алгебры  $A$  и

$$M^\circ = \{a \in A : |\varphi(a)| \leq 1 \quad \forall \varphi \in M\}$$

для каждого подмножества  $M \subset A^*$ .

$\delta_\alpha$  обозначим отображение, определяемое на  $\text{hom} A_\alpha$  равенством  $\delta_\alpha(\varphi_\alpha) = \varphi_\alpha$ . Тогда  $\delta_\alpha$  является взаимно однозначным на  $\text{hom} A_\alpha$  ввиду всюду плотности  $A'_\alpha$  в  $A_\alpha$ . Оказывается, что  $\delta_\alpha$  является сюръекцией. Чтобы убедиться в этом, берем любой гомоморфизм  $\psi \in X_\alpha$ . Тогда  $\psi \in \text{hom} \varprojlim A_\alpha$  и  $|\psi(a)| \leq 1$  для каждого  $a \in Y_\alpha$ . Поскольку из  $a \in \ker \mu_\alpha$  следует  $na \in Y_\alpha$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ , то справедливо  $|\psi(a)| \leq 1/n$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ . Поэтому  $a \in \ker \psi$ . Значит,  $\ker \mu_\alpha \subseteq \ker \psi$ . Учитывая это, существует гомоморфизм  $\varphi_\alpha \in \text{hom} A_\alpha$  такой, что  $\delta_\alpha(\varphi_\alpha) = \psi$ . Следовательно,  $\delta_\alpha$  отображает  $\text{hom} A_\alpha$  взаимно однозначно на  $X_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ .

Чтобы показать непрерывность отображения  $\delta_\alpha$ , берем любой гомоморфизм  $\varphi_\alpha^0 \in \text{hom} A_\alpha$  и любую окрестность  $\mathcal{O}$  гомоморфизма  $\delta_\alpha(\varphi_\alpha^0)$  в  $X_\alpha$ . Тогда существуют  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  и такие, что

$$\mathcal{O}' = \bigcap_{k=1}^n \{ \psi \in \text{hom} \varprojlim A_\alpha : |(\psi - \delta_\alpha(\varphi_\alpha^0))(a_k)| < \varepsilon \} \cap X_\alpha \subset \mathcal{O}.$$

Так как

$$\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^n \{ \varphi_\alpha \in \text{hom} A_\alpha : |(\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^0)(\mu_\alpha(a_k))| < \delta \}$$

является окрестностью гомоморфизма  $\varphi_\alpha^0$  в  $\text{hom} A_\alpha$  и справедливо  $\delta_\alpha(\mathcal{U}) \subset \mathcal{O}$ , то отображение  $\delta_\alpha$  непрерывно.

Если пространство  $\text{hom} A_\alpha$  компактно, то непрерывно и обратное отображение  $\delta_\alpha^{-1}$ , ибо  $X_\alpha$  есть отделимое пространство. А в случае, когда пространство  $\text{hom} A'_\alpha$  локально равномерно непрерывно для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ , то отображение  $\rho_\alpha$ , определяемое равенством  $\rho_\alpha(\varphi_\alpha) = \varphi_\alpha|_{A'_\alpha}$  для каждого  $\varphi_\alpha \in \text{hom} A_\alpha$ , является гомеоморфизмом  $\text{hom} A'_\alpha$  на  $\text{hom} A'_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  (по предложению I из статьи [5]), ввиду непрерывности умножения элементов в  $A_\alpha$  и всюду плотности подалгебры  $A'_\alpha$  в  $A_\alpha$ . Легко заметить, что  $\delta_\alpha = \tau_\alpha \circ \rho_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ , где  $\tau_\alpha$  есть взаимно однозначное отображение  $\text{hom} A'_\alpha$  на  $X_\alpha$ , определяемое равенством  $\tau_\alpha(\varphi_\alpha) = \varphi_\alpha \circ \mu_\alpha$  для каждого  $\varphi_\alpha \in \text{hom} A'_\alpha$ . Поэтому отображение  $\delta_\alpha^{-1}$  непрерывно, если непрерывно отображение  $\tau_\alpha^{-1}$ . Чтобы показать непрерывность отображения  $\tau_\alpha^{-1}$ , берем любой гомоморфизм  $\psi_0 \in X_\alpha$  и любую окрестность  $\mathcal{U}$  гомоморфизма  $\tau_\alpha^{-1}(\psi_0)$  в  $\text{hom} A'_\alpha$ . Тогда найдутся числа  $m \in \mathbb{N}$  и  $\delta > 0$  и элементы  $a_1, \dots, a_m \in \varprojlim A_\alpha$  такие что

$$\mathcal{U}' = \bigcap_{j=1}^m \{ \varphi_\alpha \in \text{hom} A'_\alpha : |(\varphi_\alpha - \tau_\alpha^{-1}(\psi_0))(\mu_\alpha(a_j))| < \delta \} \subset \mathcal{U}.$$

Поскольку

$$W_\alpha = \prod_{\nu=1}^m \{ \psi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha : \|(\psi - \psi_0)(a_\kappa)\| < \delta \}$$

является окрестностью гомоморфизма  $\psi_0$  в  $\text{hom } \varprojlim A_\alpha$ , то  $W_\alpha = W_\alpha \cap X_\alpha$  является окрестностью гомоморфизма  $\psi_0$  в  $X_\alpha$ . Аналогично тому как и выше, каждый гомоморфизм  $\psi \in W_\alpha$  определяет гомоморфизм  $\varphi_\alpha \in \text{hom } A_\alpha$  такой, что  $\psi = (\varphi_\alpha | A_\alpha) \circ \mu_\alpha = \tau_\alpha(\varphi_\alpha | A_\alpha)$ . Поэтому  $\tau_\alpha^{-1}(\psi)(\mu_\alpha(a_\kappa)) = \psi(a_\kappa)$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Учитывая это, ясно, что  $\tau_\alpha^{-1}(W_\alpha) \in \mathcal{U}_\alpha^2$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Следовательно,  $\tau_\alpha^{-1}$  является непрерывным отображением.

**Следствие 2.** Пусть  $(A_\alpha; h_\alpha^p, \mathcal{O})$  - проективная система над направленным по возрастанию множеством  $\mathcal{O}$  топологических алгебр  $A_\alpha$  с непрерывным умножением,  $\varprojlim A_\alpha$  - строго плотный проективный предел этой системы и  $\mu_\alpha$  - каноническая проекция  $\varprojlim A_\alpha$  в  $A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Если предел  $\varprojlim A_\alpha$  и множества  $\text{hom } A_\alpha$  непусты, то

$$\text{rad}_1 \varprojlim A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{O}} \mu_\alpha^{-1}(\text{rad}_1 A_\alpha). \quad (5)$$

Кроме того, если  $\text{rad}_1 A_\alpha = \{\theta_{A_\alpha}\}$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ , то

$$\text{rad}_1 \varprojlim A_\alpha = \{\theta_{\varprojlim A_\alpha}\}.$$

**Доказательство.** Пусть  $a \in \text{rad}_1 \varprojlim A_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{O}$  и  $\varphi_\alpha \in \text{hom } A_\alpha$ . Поскольку  $(\varphi_\alpha | \mu_\alpha(\varprojlim A_\alpha)) \circ \mu_\alpha \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$ , то  $\mu_\alpha(a) \in \text{rad}_1 A_\alpha$ . Следовательно,  $a \in \mu_\alpha^{-1}(\text{rad}_1 A_\alpha)$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ .

Пусть теперь  $a \in \mu_\alpha^{-1}(\text{rad}_1 A_\alpha)$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  и пусть  $\varphi \in \text{hom } \varprojlim A_\alpha$ . Тогда (аналогично тому, как и в доказательстве теоремы 3) существуют  $\alpha \in \mathcal{O}$  и  $\varphi_\alpha \in \text{hom } A_\alpha$  такие, что  $\varphi = \varphi_\alpha | \mu_\alpha(\varprojlim A_\alpha) \circ \mu_\alpha$ . Поэтому  $\varphi(a) = 0$ . Следовательно,  $\alpha \in \text{rad}_1 \varprojlim A_\alpha$  и справедливо равенство (5). Теперь из  $\text{rad}_1 A_\alpha = \{\theta_{A_\alpha}\}$  следует  $\text{rad}_1 \varprojlim A_\alpha = \{\theta_{\varprojlim A_\alpha}\}$  по равенству (5).

**Следствие 3.** Пусть  $(A_k; h_k^n, \mathbb{N})$  - счетная проективная система топологических алгебр  $A_k$  с единицей и с непрерывным умножением и  $\varprojlim A_k$  - строго плотный проективный предел этой системы. Если для каждого  $k \in \mathbb{N}$  множества  $\text{hom } A_k$  равностепенно непрерывны, то  $\text{hom } \varprojlim A_k$  является  $\sigma$ -компактным пространством, а если каждая  $A_k$  является алгеброй Фреше, то  $\text{hom } \varprojlim A_k$  является хемикompактным пространством.

<sup>2</sup> Следует отметить, что обратное утверждение неверно, так как найдутся банаховы алгебры  $A_\alpha$ , для которых  $\text{rad}_1 A_\alpha \neq \{\theta_{A_\alpha}\}$ , но их проективный предел  $\varprojlim A_\alpha$  обладает свойством  $\text{rad}_1 \varprojlim A_\alpha = \{\theta_{\varprojlim A_\alpha}\}$  (см. [25], с. 460-462, [16], с. 147, [28], с. 36 или [29], с. 99).

Доказательство. По теореме 3 справедливо

$$\text{hom } \varprojlim A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\text{hom } \varprojlim A_k \cap [\mu_k^{-1}((\text{hom } A_k)^{\circ})])^{\circ}.$$

Поскольку множества  $\text{hom } A_k$  замкнуты (см., например, [18], с. 142), то они компактны по теореме Алаоглу-Бурбаки (см., например, [8], с. 109). Поэтому компактны и подмножества

$$\text{hom } \varprojlim A_k \cap [\mu_k^{-1}((\text{hom } A_k)^{\circ})]^{\circ}$$

пространства  $\text{hom } \varprojlim A_k$  для каждого  $k \in \mathbb{N}$  по теореме 3. Следовательно, пространство  $\text{hom } \varprojlim A_k$  представим в виде счетного объединения его компактных подмножеств, т.е. является  $\sigma$ -компактным пространством.

Пусть теперь  $A_k$  является алгеброй Фреше с единицей для каждого  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда, с одной стороны,  $\varprojlim A_k$  является алгеброй Фреше (полной по лемме 2.1 из [18], с. 84, и метризуемой по следствию 4.2.5 из книги [9]), следовательно (см. [18], с. 143) и спектрально бочечной алгеброй. С другой стороны, пространство  $\text{hom } \varprojlim A_k$  непусто (ввиду непустоты пространств  $\text{hom } A_k$ ). Поэтому  $\text{hom } \varprojlim A_k$  является хемикompактным пространством (по следствиям 6.1 и 1.1 (на с. 170 и 183) в книге [18]).

Следующая теорема дает описание тех проективных пределов  $\varprojlim A_\alpha$  топологических алгебр  $A_\alpha$ , пространство  $\text{hom } \varprojlim A_\alpha$  которых несвязно.

Теорема 4. Пусть  $(A_\alpha; \mu_\alpha^{\beta}, \mathcal{O})$  - проективная система над направленным по возрастанию множеством  $\mathcal{O}$  коммутативных отделимых  $\mathbb{Q}$ -алгебр Гельфанда-Мазура  $A_\alpha$  с единицей и с непрерывным умножением, удовлетворяющих условию

( $\alpha$ ) если пространство  $\text{hom } A_\alpha = F_\alpha^1 \cup F_\alpha^2$ , где  $F_\alpha^1$  и  $F_\alpha^2$  суть непустые непересекающиеся замкнутые подмножества, то в  $A_\alpha$  найдется такой идемпотент  $q_\alpha$ , что

$$\varphi(q_\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi \in F_\alpha^1, \\ 0 & \text{при } \varphi \in F_\alpha^2. \end{cases} \quad (6)$$

Кроме того, пусть  $\varprojlim A_\alpha$  - строго плотный проективный предел этой системы. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

- а) пространство  $\text{hom } \varprojlim A_\alpha$  несвязно;
- б) алгебра  $\varprojlim A_\alpha$  содержит нетривиальные (т.е. отличные от нуля и единицы) идемпотенты;
- в) алгебра  $\varprojlim A_\alpha$  является прямой суммой своих замкнутых идеалов.

Доказательство. а)  $\Rightarrow$  б). Пусть выполнено условие а). Тогда существуют такие непустые непересекающиеся замкнутые

подмножества  $F^1$  и  $F^2$  пространства  $\text{hom } \underline{\text{lim}} A_\alpha$ , что  $\text{hom } \underline{\text{lim}} A_\alpha = F^1 U F^2$ . Поскольку отображение  $\delta_\alpha$  с  $\alpha \in \mathcal{O}$ , определяемое равенством  $\delta_\alpha(\varphi) = (\varphi|A_\alpha) \circ \mu_\alpha$  для каждого  $\varphi \in \text{hom } A_\alpha$ , является (по теореме 3) непрерывной биекцией  $\text{hom } A_\alpha$  на  $X_\alpha = \text{hom } \underline{\text{lim}} A_\alpha \cap [\mu_\alpha^{-1}((\text{hom } A_\alpha)^\circ)]^\circ$ , то  $F_\alpha^1 = \delta_\alpha^{-1}(F^1 \cap X_\alpha)$  и  $F_\alpha^2 = \delta_\alpha^{-1}(F^2 \cap X_\alpha)$  являются такими непересекающимися замкнутыми подмножествами пространства  $\text{hom } A_\alpha$ , что  $\text{hom } A_\alpha = F_\alpha^1 U F_\alpha^2$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . При этом, одно из этих множеств  $F_\alpha^1$  или  $F_\alpha^2$  может оказаться пустым. Учитывая это, положим

$$a(\alpha) = \begin{cases} a_\alpha, & \text{если множества } F_\alpha^1 \text{ и } F_\alpha^2 \text{ непусты,} \\ \theta_{A_\alpha}, & \text{если множество } F_\alpha^1 \text{ пусто,} \\ e_\alpha, & \text{если множество } F_\alpha^2 \text{ пусто,} \end{cases}$$

где  $a_\alpha$  - элемент алгебры  $A_\alpha$ , удовлетворяющий условию (6). Тогда для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  справедливо

$$\varphi(a(\alpha)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \in F_\alpha^1, \\ 0, & \text{если } \varphi \in F_\alpha^2. \end{cases} \quad (7)$$

Теперь зафиксируем  $\alpha \in \mathcal{O}$  и положим  $d(\beta) = h_\alpha^\beta(a(\beta))$  при  $\alpha \leq \beta$ . Поскольку  $h_\alpha^\beta[(\text{hom } A_\beta)^\circ] \subseteq (\text{hom } A_\alpha)^\circ$  при  $\alpha \leq \beta$ , то

$$\mu_\beta^{-1}[(\text{hom } A_\beta)^\circ] \subseteq \mu_\alpha^{-1}[(\text{hom } A_\alpha)^\circ]$$

при  $\alpha \leq \beta$ . Поэтому из

$$(\mu_\alpha^{-1}[(\text{hom } A_\alpha)^\circ])^\circ \subseteq (\mu_\beta^{-1}[(\text{hom } A_\beta)^\circ])^\circ$$

при  $\alpha \leq \beta$  следует, что  $\delta_\alpha(F_\alpha^k) \subseteq \delta_\beta(F_\beta^k)$  при  $\alpha \leq \beta$ , где  $k=1,2$ . Кроме того, для каждых  $\varphi \in \text{hom } A_\alpha$  и  $a \in \underline{\text{lim}} A_\alpha$  имеем

$$\begin{aligned} \delta_\beta(\varphi \circ h_\alpha^\beta)(a) &= [((\varphi \circ h_\alpha^\beta)|A_\beta) \circ \mu_\beta](a) = \\ &= \varphi[h_\alpha^\beta(\mu_\beta(a))] = (\varphi \circ \mu_\alpha)(a) = \\ &= [(\varphi|A_\alpha) \circ \mu_\alpha](a) = \delta_\alpha(\varphi)(a), \end{aligned}$$

в силу чего  $\delta_\beta(\varphi \circ h_\alpha^\beta) = \delta_\alpha(\varphi)$  для каждого  $\varphi \in \text{hom } A_\alpha$ , если  $\alpha \leq \beta$ . Таким образом, если  $\varphi \in F_\alpha^k$ , то  $\delta_\beta(\varphi \circ h_\alpha^\beta) = \delta_\alpha(\varphi) \in F^k \cap X_\alpha \subseteq F^k \cap X_\beta$  при  $\alpha \leq \beta$ . Значит, если  $\varphi \in F_\alpha^k$ , то  $\varphi \circ h_\alpha^\beta \in F_\beta^k$  при  $\alpha \leq \beta$  и  $k=1,2$ . Учитывая это, имеем

$$\varphi(d(\alpha)) = (\varphi \circ h_\alpha^\beta)(a(\beta)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \in F_\alpha^1, \\ 0, & \text{если } \varphi \in F_\alpha^2. \end{cases}$$

Таким образом,  $\varphi(a(\alpha) - d(\alpha)) = 0$  по равенству (7) для каждого  $\varphi \in \text{hom } A_\alpha$ . В силу этого,

$$\varphi[a(\alpha)(a(\alpha) - d(\alpha))] = \varphi[(a(\alpha) - d(\alpha))a(\alpha)] = 0$$

для каждого  $\varphi \in \text{hom } A_\alpha$ . Значит,  $\beta(a) = a(\alpha)(a(\alpha) - d(\alpha))$

и  $\psi(a) = [a(\alpha) - d(\alpha)]a(\alpha)$  принадлежат  $Q \text{Inv } A_\alpha$  (см. доказательство теоремы 26) ибо  $A_\alpha$  является коммутативной  $Q$ -алгеброй Гельфанда-Мазура) для каждого  $\alpha \in O$ . Нетрудно заметить, что  $\rho(\alpha)$  и  $\gamma(\alpha)$  являются идемпотентами в  $A_\alpha$ . Поэтому  $\rho(\alpha) = \gamma(\alpha) = \theta_\alpha$  или  $d(\alpha) = a(\alpha)$  для каждого  $\alpha \in O$ . Таким образом  $a = (a(\alpha)) \in \varprojlim A_\alpha$ . Поскольку  $a$  является идемпотентом в  $\varprojlim A_\alpha$  и из  $\psi \in F^k$  следует  $\delta_{\alpha_k}^{-1}(\psi) \in F_{\alpha_k}^k$  для некоторого  $\alpha_k \in O$  (по теореме 3), то по равенству (7) имеем

$$\psi(a) = \delta_{\alpha_k}^{-1}(\psi)(\rho_{\alpha_k}(a)) = \delta_{\alpha_k}^{-1}(\psi)(a(\alpha_k)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi \in F_1^k \\ 0, & \text{если } \psi \in F_2^k \end{cases}$$

В силу этого,  $\varprojlim A_\alpha$  содержит нетривиальный идемпотент  $a$ .

б)  $\Rightarrow$  в). По теореме Ia) алгебра  $\varprojlim A_\alpha$  содержит единицу  $e$ . Пусть  $i$  - нетривиальный идемпотент алгебры  $\varprojlim A_\alpha$ . Тогда и  $j = e - i$  является нетривиальным идемпотентом алгебры  $\varprojlim A_\alpha$ . Поэтому  $i, j \notin \text{Inv } \varprojlim A_\alpha$  (если  $i$  (или  $j$ ) было бы обратим в  $\varprojlim A_\alpha$ , то из равенства  $ii^{-1} = e$  следовало противоречие  $e = i(ii^{-1}) = ie = i$ ). Положив теперь  $\mathcal{Y}_1 = i \varprojlim A_\alpha$  и  $\mathcal{Y}_2 = j \varprojlim A_\alpha$ , заметим, что  $e \notin \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2$ , в силу чего,  $\mathcal{Y}_1$  и  $\mathcal{Y}_2$  являются идеалами алгебры  $\varprojlim A_\alpha$ . Чтобы показать их замкнутость, берем  $a_0^k \in \varprojlim A_\alpha \setminus \mathcal{Y}_k$  при  $k=1,2$ . Тогда в алгебре  $\varprojlim A_\alpha$  существует сеть  $(a_\lambda^k)_{\lambda \in \Lambda}$  такая, что сеть  $(i_\lambda a_\lambda^k)_{\lambda \in \Lambda}$  сходится к  $a_0^k$  (здесь  $i_1 = i$  и  $i_2 = j$ ). Поскольку  $i_\lambda (i_\lambda a_\lambda^k) = i_\lambda a_\lambda^k$  для каждого  $\lambda \in \Lambda$ , то справедливо  $i_\lambda a_0^k = a_0^k \in \mathcal{Y}_k$ . Значит, идеалы  $\mathcal{Y}_1$  и  $\mathcal{Y}_2$  замкнуты.

Если  $a \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$ , то  $a = ia_1 = ja_2$ , где  $a_1, a_2 \in \varprojlim A_\alpha$ . В силу этого,  $ia_1 = i(ia_1) = (ij)a_2$ . Так как  $e = e^2 = (i+j)^2 = i + 2ij + j = e + 2ij$ , то  $ij = \theta_{\varprojlim A_\alpha}$ . Поэтому  $a = (ij)a_2 = \theta_{\varprojlim A_\alpha} a_2$ . Значит,  $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = \{\theta_{\varprojlim A_\alpha}\}$ . Учитывая вдобавок, что каждый элемент  $a \in \varprojlim A_\alpha$  представим в виде  $a = ia + ja$ , ясно, что  $\varprojlim A_\alpha$  является прямой суммой идеалов  $\mathcal{Y}_1$  и  $\mathcal{Y}_2$ .

в)  $\Rightarrow$  а). Пусть  $\varprojlim A_\alpha = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$ , где  $\mathcal{Y}_1$  и  $\mathcal{Y}_2$  суть замкнутые идеалы алгебры  $\varprojlim A_\alpha$ . Поскольку  $\varprojlim A_\alpha$  содержит единицу  $e$  по теореме I, то  $e = e_1 + e_2$ , где  $e_1 \in \mathcal{Y}_1$  и  $e_2 \in \mathcal{Y}_2$ . Тогда из  $e_1, e_2 \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$  следует, что  $e_1 e_2 = \theta_{\varprojlim A_\alpha}$ . Поэтому  $e_1 + e_2 = e = e_1^2 + e_2^2$ , в силу чего справедливы  $e_1^2 \equiv e_1$  и  $e_2^2 \equiv e_2$ . Если при этом один из элементов  $e_1$  или  $e_2$ , например,  $e_1$  является единицей алгебры  $\varprojlim A_\alpha$ , то  $e_2 = \theta_{\varprojlim A_\alpha}$ . Поэтому в этом случае  $\mathcal{Y}_1 = \varprojlim A_\alpha$ , что невозможно. Следовательно,  $e_1$  и  $e_2$  являются нетривиальными идемпотентами алгебры  $\varprojlim A_\alpha$ . Кроме того, для каждого  $\psi \in \text{Hom } \varprojlim A_\alpha$  имеют место равенства  $1 = \psi(e_1) + \psi(e_2)$ ,  $\psi(e_1)^2 = \psi(e_1)$  и  $\psi(e_2)^2 = \psi(e_2)$ . Поэтому

$\psi(e_1)$  и  $\psi(e_2)$  принимают только значения 0 и 1, причем  $\psi(e_2)=1$ , если  $\psi(e_1)=0$ , и  $\psi(e_1)=1$ , если  $\psi(e_2)=0$ .

Пусть теперь

$$F_1 = \{ \psi : \text{hom} \varprojlim A_\alpha : \psi(e_1) = 1 \}$$

и

$$F_2 = \{ \psi : \text{hom} \varprojlim A_\alpha : \psi(e_2) = 1 \}.$$

Тогда  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  и  $F_1 \cup F_2 = \text{hom} \varprojlim A_\alpha$ . Так как  $e - e_1 e_1 = e_2$  и  $e - e_2 e_2 = e_1$  не принадлежат  $\text{In} \varprojlim A_\alpha$  (ибо  $e_1$  и  $e_2$  суть нетривиальные идемпотенты в  $\varprojlim A_\alpha$ ) и

$\text{Rad} \varprojlim A_\alpha = \{ a \in \varprojlim A_\alpha : e + va \in \text{In} \varprojlim A_\alpha \ \forall v \in \varprojlim A_\alpha \}$  (см. [6] с.195), то  $e_1, e_2 \notin \text{Rad} \varprojlim A_\alpha$ . Теперь  $\text{rad}_1 \varprojlim A_\alpha = \text{Rad} \varprojlim A_\alpha$  по теореме 2 д). Поэтому  $e_1, e_2 \notin \text{rad}_1 \varprojlim A_\alpha$ . Следовательно, множества  $F_1$  и  $F_2$  непусты.

Чтобы показать замкнутость множеств  $F_1$  и  $F_2$ , берем любой гомоморфизм  $\psi_0 \in \varprojlim \text{hom} \varprojlim A_\alpha$   $F_k$  при  $k=1,2$ . Тогда найдется сеть  $(\psi_\lambda^k)_{\lambda \in \Lambda}$  элементов множества  $F_k$ , сходящаяся к  $\psi_0^k$  в топологии пространства  $\text{hom} \varprojlim A_\alpha$ . Поскольку в этой топологии отображения  $f_k$  с  $k=1,2$ , определенные на  $\text{hom} \varprojlim A_\alpha$  равенством  $f_k(\psi) = \psi(e_k)$ , непрерывны, то из  $f_k(\psi_\lambda^k) = 1$  при  $k=1,2$  для каждого  $\lambda \in \Lambda$  следует, что  $f_k(\psi_0^k) = \psi_0^k(e_k) = 1$ . Поэтому  $\psi_0 \in F_k$  при  $k=1,2$ . Таким образом множества  $F_1$  и  $F_2$  замкнуты, в силу чего пространство  $\text{hom} \varprojlim A_\alpha$  несвязно.

### §3. Полные отделимые локально $m$ -( $p$ -псевдовыпуклые) алгебры

В данном параграфе покажем, что каждая полная отделимая локально  $m$ -( $p$ -псевдовыпуклая) алгебра является топологически изоморфной проективному пределу  $p$ -банаховых алгебр. Для этого пусть  $p \in (0,1]$ ,  $A$  - полная отделимая локально  $m$ -( $p$ -псевдовыпуклая) алгебра и  $P_A = \{ p_\alpha : \alpha \in \mathcal{O} \}$  - насыщенная система непрерывных  $p$ -однородных полуноrm, определяющая ее топологию. Для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  пусть  $A_\alpha = A / \ker p_\alpha$  и  $\lambda_\alpha$  - естественный гомоморфизм  $A$  на  $A_\alpha$ . Для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  и  $a \in A$  положим  $q_\alpha[\lambda_\alpha(a)] = p_\alpha(a)$ . Тогда отображение  $q_\alpha$  с  $\alpha \in \mathcal{O}$  является  $p$ -однородной субмультипликативной нормой на  $A_\alpha$ . Поэтому каждая факторалгебра  $A_\alpha$  является  $p$ -нормированной алгеброй с непрерывным умножением. В силу этого, каждая  $A_\alpha$  имеет пополнение  $\tilde{A}_\alpha$  (известно (см., например, [10], с.461), что  $A_\alpha$  может не являться полной алгеброй), являющее  $p$ -банаховой алгеброй (см. [18], теорема 6.3).

Частичное предупорядочение на  $\mathcal{O}$  определим следующим образом: если  $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ , то считаем, что  $\alpha \leq \beta$  тогда и только тогда, когда  $\mu_\alpha \leq \mu_\beta$ . Таким образом  $\ker \mu_\alpha \subseteq \ker \mu_\beta$ , если  $\alpha \leq \beta$ . Далее, если  $\alpha \leq \beta$ , то гомоморфизмы  $h_\alpha^\beta$  из  $A_\beta$  в  $A_\alpha$  определим равенством  $h_\alpha^\beta[\pi_\beta(a)] = \pi_\alpha(a)$  для каждого  $a \in A$ . Тогда для каждых  $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$  гомоморфизмы  $h_\alpha^\beta$  непрерывны,  $h_\alpha^\alpha$  является тождественным отображением на  $A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  и  $h_\alpha^\beta \circ h_\beta^\gamma = h_\alpha^\gamma$  для каждых  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{O}$ , если  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ . Далее, для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  пусть  $\tau_\alpha$  обозначает топологический изоморфизм  $A_\alpha$  в  $\tilde{A}_\alpha$ , определенный пополнением алгебры  $A_\alpha$ . Поскольку  $\tau_\alpha \circ h_\alpha^\beta \circ \tau_\beta^{-1}$  является непрерывным гомоморфизмом  $\tau_\beta(A_\beta)$  в  $\tilde{A}_\alpha$  для каждых  $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$  с  $\alpha \leq \beta$ , то (по предложению I из статьи [5]) для каждых таких  $\alpha$  и  $\beta$  существует непрерывное продолжение  $\tilde{h}_\alpha^\beta$  гомоморфизма  $\tau_\alpha \circ h_\alpha^\beta \circ \tau_\beta^{-1}$ , отображающее  $\tilde{A}_\beta$  гомоморфно в  $\tilde{A}_\alpha$ . При этом,  $\tilde{h}_\alpha^\alpha$  является тождественным отображением на  $\tilde{A}_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  и  $\tilde{h}_\alpha^\beta \circ \tilde{h}_\beta^\gamma = \tilde{h}_\alpha^\gamma$  для каждых  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{O}$ , удовлетворяющих условию  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ . Следовательно,  $(\tilde{A}_\alpha; \tilde{h}_\alpha^\beta, \mathcal{O})$  является проективной системой над  $\mathcal{O}$  алгебр  $\tilde{A}_\alpha$ .

Пусть теперь  $\nu_\alpha = \tau_\alpha \circ \pi_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ ,  $\Phi$  - отображение  $A$  в  $\bar{A} = \prod \{A_\alpha; \alpha \in \mathcal{O}\}$ , определяемое равенством  $\Phi(a) = (\nu_\alpha(a))_{\alpha \in \mathcal{O}}$  для каждого  $a \in A$ , и  $\mu_\alpha$  - проекция  $\bar{A}$  на  $A_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Тогда  $\Phi$  является гомоморфизмом относительно поточечных алгебраических операций на  $\bar{A}$ . Кроме того, если  $a, a' \in A$  и  $\Phi(a) = \Phi(a')$ , то  $\mu_\alpha(a - a') = 0$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Поэтому  $a = a'$  (ввиду отделимости алгебры  $A$ ). Итак,  $\Phi$  является изоморфизмом  $A$  в  $\bar{A}$ . Поскольку  $\nu_\alpha = \mu_\alpha \circ \Phi$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ , где отображения  $\nu_\alpha$  непрерывны, то изоморфизм  $\Phi$  является непрерывным отображением. Чтобы показать непрерывность обратного отображения  $\Phi^{-1}$ , берем любое замкнутое подмножество  $\mathcal{U}$  алгебры  $A$  и любой элемент  $a \in A \setminus \mathcal{U}$ . Тогда существует окрестность  $\mathcal{O}(a)$  элемента  $a$  такая, что множество  $\mathcal{O}(a) \cap \mathcal{U}$  пусто. Тогда  $\nu_\alpha(\mathcal{O}(a))$  является окрестностью элемента  $\nu_\alpha(a)$  в  $\nu_\alpha(A)$ . Поэтому  $\nu_\alpha(\mathcal{O}(a)) = \mathcal{V} \cap \nu_\alpha(A)$  для некоторой окрестности  $\mathcal{V}$  элемента  $\nu_\alpha(a)$  в топологии алгебры  $\tilde{A}_\alpha$ . Предположим теперь, что  $\nu_\alpha(a) \in \text{cl}_{\tilde{A}_\alpha} \nu_\alpha(\mathcal{U})$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Тогда множество

$$\nu_\alpha(\mathcal{O}(a)) \cap \nu_\alpha(\mathcal{U}) = \mathcal{V} \cap \nu_\alpha(\mathcal{U})$$

непусто для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Поэтому непусто и множество  $\pi_\alpha(\mathcal{O}(a)) \cap \pi_\alpha(\mathcal{U})$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Последнее равносильно для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  непустоте множества

$$(\mathcal{O}(a) + \ker \mu_\alpha) \cap (\mathcal{U} + \ker \mu_\alpha).$$

Следовательно, для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  существует элемент  $a_\alpha \in A$ , который принадлежит этому пересечению. Таким образом, для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  справедливо  $a_\alpha = a^1 + e'_\alpha = a^2 + e''_\alpha$ , где  $a^1 \in \mathcal{O}(a)$ ,  $a^2 \in U$  и  $e'_\alpha, e''_\alpha \in \text{ker } \rho_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . В силу этого,  $\rho_\alpha(a^1 - a^2) = 0$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Но это равносильно условию  $a^1 = a^2$  (ввиду отделимости алгебры  $A$ ). Значит,  $a^1 \in \mathcal{O}(a) \cap U$ , что невозможно. Следовательно, для каждого замкнутого подмножества  $U \subset \bar{A}$  и элемента  $a \in A/U$  найдется такой индекс  $\alpha \in \mathcal{O}$ , что  $v_\alpha(a) \notin \rho_\alpha(U)$ , в силу чего  $\Phi$  является топологическим изоморфизмом  $A$  в  $\bar{A}$  (см.: например, [3], с. 131). Так как

$$\tilde{h}_\alpha^\beta(\rho_\beta(\Phi(a))) = \tilde{h}_\alpha^\beta(v_\beta(a)) = v_\alpha(a) = \rho_\alpha(\Phi(a))$$

при  $a \in A$  для любых  $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$  с  $\alpha \leq \beta$ , то  $\Phi(A) \subseteq \varprojlim A_\alpha$ .

Чтобы показать справедливость обратного включения, берем любой элемент  $(\tilde{a}_\alpha) \in \varprojlim \tilde{A}_\alpha$ . Тогда  $\tilde{a}_\alpha \in \tilde{A}_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  и  $\tilde{h}_\alpha^\beta(\tilde{a}_\beta) = \tilde{a}_\alpha$  всякий раз, когда  $\alpha \leq \beta$ . Поскольку  $\rho_\alpha \circ \tau_\alpha^{-1}$  является равномерно непрерывным отображением на  $v_\alpha(A)$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ , то для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  существует непрерывное продолжение  $\tilde{\rho}_\alpha$  отображения  $\tilde{\rho}_\alpha \circ \tau_\alpha^{-1}$  на  $\tilde{A}_\alpha$ , которое удовлетворяет условию

$$\tilde{\rho}_\alpha(v_\alpha(a)) = \rho_\alpha(a) \quad (8)$$

для каждого  $a \in A$ . Поэтому  $\tilde{\rho}_\alpha$  является  $\rho$ -однородной субмультипликативной нормой на  $\tilde{A}_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ .

Пусть теперь  $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$  такие, что  $\alpha \leq \beta$ . Тогда

$$\tilde{\rho}_\alpha(\tilde{h}_\alpha^\beta(v_\beta(a))) = \tilde{\rho}_\alpha(v_\alpha(a)) = \rho_\alpha(a) \leq \rho_\beta(a) = \tilde{\rho}_\beta(v_\beta(a))$$

для каждого  $a \in A$ . В силу этого и ввиду плотности  $v_\beta(A)$  в  $\tilde{A}_\beta$ , справедливо неравенство

$$\tilde{\rho}_\alpha(\tilde{h}_\alpha^\beta(\tilde{a}_\beta)) \leq \tilde{\rho}_\beta(\tilde{a}_\beta) \quad (9)$$

для каждого  $\tilde{a}_\beta \in \tilde{A}_\beta$  всякий раз, когда  $\alpha \leq \beta$ . Кроме того, для любых  $\alpha \in \mathcal{O}$  и  $n \in \mathbb{N}$  существуют элементы  $a(n, \alpha) \in A$  такие, что

$$\tilde{\rho}_\alpha(v_\alpha(a(n, \alpha))) - \tilde{a}_\alpha < 1/n. \quad (10)$$

Определим теперь на  $\mathbb{N} \times \mathcal{O}$  частичное предупорядочение следующим образом: считаем  $(n, \alpha) \leq (m, \beta)$  тогда и только тогда, когда  $n \leq m$  и  $\alpha \leq \beta$ . Далее, пусть  $\mathcal{O}$  - любая окрестность нуля алгебра  $A$ . Тогда существуют  $\varepsilon > 0$  и  $\gamma \in \mathcal{O}$  такие, что  $\{a \in A : \rho_\gamma(a) < \varepsilon\} \subset \mathcal{O}$ . Кроме того, пусть  $N > [\varepsilon/\varepsilon]$ ,  $m, n > N$  и  $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$  такие, что  $\gamma \leq \alpha$  и  $\gamma \leq \beta$ . Тогда

$$\begin{aligned} \rho_\gamma(a(n, \alpha) - a(m, \beta)) &= \tilde{\rho}_\gamma(v_\gamma(a(n, \alpha))) - v_\gamma(a(m, \beta)) \\ &\leq \tilde{\rho}_\gamma(v_\gamma(a(n, \alpha))) - \tilde{a}_\gamma + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{q}_\beta (v_\beta(a(m, \beta)) - \tilde{a}_\beta) \leq \\
& \leq \tilde{q}_\alpha [\tilde{h}_\alpha^\alpha (v_\alpha(a(n, \alpha)) - \tilde{a}_\alpha) + \\
& + \tilde{q}_\beta [\tilde{h}_\beta^\beta (v_\beta(a(m, \beta)) - \tilde{a}_\beta)]
\end{aligned}$$

по равенству (8) для таких  $\alpha$  и  $\beta$ . Учитывая это,

$$\begin{aligned}
p_\mu(a(n, \alpha) - a(m, \beta)) & \leq \tilde{q}_\alpha (v_\alpha(a(n, \alpha)) - \tilde{a}_\alpha) + \\
& + \tilde{q}_\beta (v_\beta(a(m, \beta)) - \tilde{a}_\beta) < \\
& < 1/n + 1/m < \varepsilon
\end{aligned}$$

по неравенствам (9) и (10). Значит, для каждой окрестности нуля  $\mathcal{O}$  алгебры  $A$  существует  $(N, \mu) \in \mathbb{N} \times \mathcal{O}$  такой, что

если  $(N, \mu) \leq (n, \alpha)$  и  $(N, \mu) \leq (m, \beta)$ . Таким образом

$$(a(n, \alpha))_{(n, \alpha)} \in \mathbb{N} \times \mathcal{O}$$

является сетью Коши в алгебре  $A$  и, ввиду ее полноты, сходится в  $A$ , скажем к  $\alpha$ . Тогда сеть  $(v_\alpha(a(n, \beta) - \alpha))_{(n, \beta)} \in \mathbb{N} \times \mathcal{O}$  сходится к нулю для каждого фиксированного  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Поэтому для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  существуют  $N_\alpha \in \mathbb{N}$  и  $\delta_\alpha \in \mathcal{O}$  такие, что

$$\tilde{q}_\alpha [v_\alpha(a(n, \beta) - \alpha)] < \varepsilon/2, \quad (\text{II})$$

если  $(N_\alpha, \delta_\alpha) \leq (n, \beta)$ . Фиксируем теперь  $\alpha \in \mathcal{O}$  и такие  $n \in \mathbb{N}$  и  $\beta \in \mathcal{O}$ , что  $N_\alpha < n$  и  $N < n$  и, кроме того,  $\alpha \leq \beta$  и  $\delta_\alpha \leq \beta$  (такое  $\beta$  всегда существует ввиду насыщенности системы  $P_A$ ). Тогда

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_\alpha [v_\alpha(a) - \tilde{a}_\alpha] & \leq \tilde{q}_\alpha [v_\alpha(a - a(n, \beta))] + \\
& + \tilde{q}_\alpha [v_\alpha(a(n, \beta)) - \tilde{a}_\alpha]
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_\alpha [v_\alpha(a(n, \beta)) - \tilde{a}_\alpha] & \leq \tilde{q}_\alpha [\tilde{h}_\alpha^\beta (v_\beta(a(n, \beta)) - \tilde{a}_\beta)] \leq \\
& \leq \tilde{q}_\alpha [v_\beta(a(n, \beta)) - \tilde{a}_\beta]
\end{aligned}$$

по неравенству (9). В силу этого,

$$\tilde{q}_\alpha [v_\alpha(a) - \tilde{a}_\alpha] < \varepsilon/2 + 1/n < \varepsilon \quad (\text{I2})$$

по неравенствам (10) и (II). Таким образом, неравенство (I2) имеет место для каждого  $\varepsilon > 0$  при каждом фиксированном  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Следовательно,  $v_\alpha(a) = \tilde{a}_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Поэто-

му  $(\tilde{A}_\alpha) = \Phi(a)$ .

В итоге доказан следующий результат:

**Теорема 5.** Пусть  $\rho \in (0, 1]$ ,  $A$  - полная отделимая локально  $m$ - $(\rho$ -псевдовыпуклая) алгебра (топология которой определена насыщенной системой  $\rho$ -однородных полунорм  $\{\rho_\alpha : \alpha \in \mathcal{O}\}$ ) и  $\tilde{A}_\alpha$  - пополнение факторалгебры  $A / \ker \rho_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$ . Тогда для любых  $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ , при котором  $\rho_\alpha \leq \rho_\beta$ , существуют такие непрерывные гомоморфизмы  $\tilde{h}_\alpha$  алгебры  $\tilde{A}_\beta$  в  $\tilde{A}_\alpha$ , что  $A$  является топологически изоморфной проективному пределу системы  $(\tilde{A}_\alpha; \tilde{h}_\alpha^\beta, \mathcal{O})$   $\rho$ -банаховых алгебр.

#### §4. Полные отделимые локально $m$ - $(\rho$ -псевдовыпуклые) алгебры

Пусть  $\rho \in (0, 1]$  и  $A$  - коммутативная полная отделимая локально  $m$ - $(\rho$ -псевдовыпуклая)  $\mathbb{C}$ -алгебра, топология которой определена насыщенной системой  $\tilde{P}_A = \{\rho_\alpha : \alpha \in \mathcal{O}\}$   $\rho$ -однородных полунорм. Для каждого  $\alpha \in \mathcal{O}$  пусть  $\tilde{A}_\alpha, \nu_\alpha, \tilde{\rho}_\alpha, \tilde{q}_\alpha$  и  $\Phi$  суть такие же как в §3. Тогда алгебры  $\tilde{A}_\alpha$  являются коммутативными  $\rho$ -банаховыми  $\mathbb{C}$ -алгебрами с  $\rho$ -однородной нормой  $\tilde{q}_\alpha$ . Поэтому каждая  $\tilde{A}_\alpha$  является коммутативной  $\mathbb{Q}$ -алгеброй Гельфанда-Мазура с непрерывным умножением, для которой множество  $\text{hom } \tilde{A}_\alpha$  непусто (см. [2], теорема 3.3., или [29], с. 17 и 22). В силу этого,  $\text{hom } \tilde{A}_\alpha$  равностепенно непрерывно (см. [18], с. 75). Кроме того,  $\text{cl}_{\tilde{A}_\alpha} \rho_\alpha(\Phi(a)) = \tilde{A}_\alpha$  для каждого  $a \in \mathcal{O}$ , алгебры  $\tilde{A}_\alpha$  обладают свойством  $(\alpha)$  теоремы 4 (см. [29], с. 72, или [27], с. 21) и множество  $\mathcal{O}$  направлено по возрастанию ( $\max(\rho_\alpha, \rho_\beta) \in \tilde{P}_A$  для любых  $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ , ввиду насыщенности системы  $\tilde{P}_A$ ). Следовательно, для проективной системы  $(\tilde{A}_\alpha; \tilde{h}_\alpha^\beta, \mathcal{O})$  все условия теорем 2 и 4 выполнены. Теперь, в силу теорем 2, 4 и 5 и следствия 3, справедлива

**Теорема 6.** Пусть  $\rho \in (0, 1]$ ,  $A$  - коммутативная полная отделимая локально  $m$ - $(\rho$ -псевдовыпуклая)  $\mathbb{C}$ -алгебра, для которой множество  $\text{hom } A$  непусто<sup>3</sup>. Тогда

а) элемент  $a \in \mathcal{O} \cap \text{im } A$  тогда и только тогда, когда  $\varphi(a) \neq 1$  для каждого  $\varphi \in \text{hom } A$ ;

б) если алгебра  $A$  содержит единицу, то элемент  $a \in \mathcal{U} \cap \text{im } A$  тогда и только тогда, когда  $\varphi(a) \neq 0$  для каждого  $\varphi \in \text{hom } A$ ;

в) для каждого элемента  $a \in A$  справедливы

$$\text{sp}_A(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \text{hom}_0 A\} \quad (13)$$

<sup>3</sup> В частности, когда  $A$  содержит единицу, то  $\text{hom } A$  непусто, (см. [2], теорема 4.2).

и

$$\rho_A(a) = \sup \{|\varphi(a)| : \varphi \in \text{hom} A\};$$

- г)  $\text{Rad} A = \text{Rad}_1 A = \text{rad}_1 A = \text{rad} A$ ;  
д) радикалы  $\text{Rad} A$  и  $\text{Rad}_1 A$  алгебры  $A$  замкнуты;  
е) если алгебра  $A$  содержит единицу, то

$$\begin{aligned} U\{M : M \in M(A)\} &= U\{M : M \in M_1(A)\} = \\ &= U\{M : M \in m_1(A)\} = \\ &= U\{M : M \in m(A)\}; \end{aligned}$$

ж) если алгебра  $A$  содержит единицу, то следующие утверждения равносильны;

- (а) пространство  $\text{hom} A$  несвязно;  
(б) алгебра  $A$  содержит нетривиальные идемпотенты;  
(в) алгебра  $A$  является прямой суммой своих замкнутых

идеалов;

з) если  $A$  является (не обязательно коммутативной) алгеброй Фреше с единицей, то  $\text{hom} A$  хемикompактное пространство.

**Следствие 4.** Пусть  $p \in (0, 1]$  и  $A$  - коммутативная полная отдeлимая локально  $m$ -( $p$ -псевдовыпуклая)  $\mathbb{C}$ -алгебра, для которой множество  $\text{hom} A$  непусто. Алгебра  $A$  является  $Q$ -алгеброй тогда и только тогда, когда  $\text{hom} A$  равностепенно непрерывно.

**Доказательство.** Если  $A$  является  $Q$ -алгеброй, то пространство  $\text{hom} A$  равностепенно непрерывно (см., например, [18], с. 75). Пусть теперь пространство  $\text{hom} A$  равностепенно непрерывно. Тогда  $\mathcal{V} = (1/2)(\text{hom} A)^0$  является окрестностью нуля алгебры  $A$  (см., например, [8], с. 107). В силу этого,  $\varphi(a) \neq 1$  для каждого  $\varphi \in \text{hom} A$ , если  $a \in \mathcal{V}$ . Следовательно,  $\mathcal{V} \subset Q_{\text{inv}} A$  по теореме 6а). Учитывая это,  $Q_{\text{inv}} A$  есть окрестность нуля алгебры  $A$ , в силу чего  $A$  является  $Q$ -алгеброй (см. [19], с. 55 или [18], с. 44).

**Следствие 5.** Пусть  $p \in (0, 1]$  и  $A$  - полупростая полная отдeлимая локально  $m$ -( $p$ -псевдовыпуклая)  $\mathbb{C}$ -алгебра, для которой множество  $\text{hom} A$  непусто. Алгебра  $A$  коммутативна тогда и только тогда, когда равенство (13) имеет место для каждого  $a \in A$ .

**Доказательство.** Если алгебра  $A$  коммутативна, то по теореме 6 в) имеет место равенство (13) для каждого  $a \in A$ .

Пусть теперь равенство (13) имеет место для каждого  $a \in A$  и пусть найдется  $a \in \text{rad}_1 A \setminus \text{Rad} A$ . Поскольку

$$\text{Rad } A = \{a \in A : \lambda a + ab \in \mathcal{Q} \text{inv } A \forall \lambda \in \mathbb{C}, b \in A\}$$

(см. [24], с. 55), то  $\lambda a + ab \notin \mathcal{Q} \text{inv } A$  для некоторых  $\lambda \in \mathbb{C}$  и  $b \in A$ . Поэтому  $1 \in \mathcal{S}(\lambda a + ab)$ . Следовательно, в силу (I3), найдется такой  $\varphi \in \text{Hom } A$ , что  $\lambda \varphi(a) + \varphi(a)\varphi(b) = 1$ . Но это невозможно, ибо  $\varphi(a) = 0$ . Таким образом,  $\text{rad}_1 A = \text{Rad } A = \{0\}$ . Учитывая это, алгебра  $A$  коммутативна, так как  $ab - ba \in \text{rad}_1 A$  для любых  $a, b \in A$ .

**Примечание.** Отметим, что теорема 6 известна в случае коммутативных полных отделимых локально  $m$ -выпуклых  $\mathbb{C}$ -алгебр с единицей. Именно, часть а) теоремы 6 в этом частном случае приведена в [15], с. 12; часть б) - [29], с. 94, и в [30], с. 131, часть в) - в [15], с. 12, в [19], с. 20, в [12], с. 230, в [29], с. 95, в [23], с. 283; части г) и д) - в [19], с. 19, в [12], с. 237, в [29], с. 98, и в [23], с. 283, (см. также [28], с. 33); часть е) - в [12], с. 231, часть ж) в [19], с. 43, в случае, когда, кроме того,  $A$  является алгеброй с инволюцией, и  $aa^* \in \mathcal{Q} \text{inv } A$  для каждого  $a \in A$ , и часть з) - в [15], с. 12, в [18], с. 170, и в [19], с. 22.

В случае, когда  $A$  является коммутативной  $p$ -банаховой  $\mathbb{C}$ -алгеброй с единицей, теорема 6 известна только в частности. В этом частном случае теорема 6б) приведена в [27], с. 344, и в [28], с. 13; теорема 6б) - в [14], с. 207, в [28], с. 16, в [7], с. 381, и в [29], с. 26; теорема 6ж) - в [29], с. 71. Кроме того, следствия 4 и 5 приведены в [18], с. 151, в [13], с. 602, и в [17], с. 586, в случае полной отделимой локально  $m$ -выпуклой алгебры.

Следует отметить, что свойствами а) - в) (следовательно и свойствами г) - е)) теоремы 6 обладают не все локально выпуклые алгебры Фреше и не все алгебры Гельфанда-Мазура. В [29], с. 126-128, приведен пример локально выпуклой алгебры Фреше, которая не обладает свойством б) теоремы 6. Далее, в [22], с. 67, приведен пример коммутативной поглощенно выпуклой  $\mathbb{C}$ -алгебры, которая не обладает свойством в) теоремы 6, а в [21] - пример коммутативной полной поглощенно выпуклой  $\mathbb{C}$ -алгебры с единицей и в [26], с. 155, и в [29], с. 144, пример коммутативной локально выпуклой алгебры Фреше, которые не обладают свойством д) теоремы 6. При этом, все коммутативные  $\mathbb{Q}$ -алгебры Гельфанда-Мазура обладают свойствами а) - в) теоремы 6. Доказательство этого утверждения приводится аналогично тому, как и доказательство свойств а) - в) теоремы 2 (в частности, в случае коммутативных локально выпуклых  $\mathbb{C}$ -алгебр Валбрука, свойство в) теоремы 2 доказано и в [18],

с. 76). Таким образом (по теореме 6) класс тех топологических  $\mathbb{C}$ -алгебр  $A$ , которые обладают свойством (I3) для каждого  $a \in A$ , шире, чем класс коммутативных  $\mathbb{Q}$ -алгебр Гельфанда-Мазура (ибо не все коммутативные локально  $m$ -выпуклые  $\mathbb{C}$ -алгебры являются  $\mathbb{Q}$ -алгебрами (см., например, [15], с. 59)), но не содержит все алгебры Гельфанда-Мазура. Учитывая это, теорема 2 г) является следствием более общего результата (см. [20], предложение 4): если все алгебры  $A_\alpha$  в проективной системе  $(A_\alpha; \varphi_\alpha^\beta, \theta)$  топологических алгебр обладают свойством

$$sp_{A_\alpha}(a_\alpha) = \{\varphi(a_\alpha) : \varphi \in \text{hom } A_\alpha\}$$

для каждого  $a_\alpha \in A_\alpha$ , то проективный предел  $\varprojlim A_\alpha$  этой системы обладает свойством (2).

#### Литература

1. Абель М. Топологические алгебры с непустым спектром элементов // Уч. зап. Тарт. ун-та (в печати).
2. Абель М., Кокк А. Локально псевдовыпуклые алгебры Гельфанда-Мазура // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат. 1988. Т.37. С. 377-386.
3. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. М.: Высшая школа, 1979.
4. Зимаков Н.П. К теории локально выпуклых алгебр // Ташкент гос. унив. Научн. Тр. (вопр. Матем). 1976. Т.490. С.118-122.
5. Кокк А. Описание гомоморфизмов топологических модуль-алгебр // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат. 1987. Т. 36. С.1-7.
6. Наймарк М.А. Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
7. Ся До-Шин. О локально ограниченных топологических алгебрах // Scientia Sinica. 1964. Т.13. С.375-390.
8. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир. 1971.
9. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
10. Arens R. A generalization of normed rings // Pacific J. Math. 1952. V.2. P.455-471.
11. Arens R. Dense inverse limit rings // The Mich. Math. J. 1958. V.5. P.169-182.
12. Beckenstein E., Narici L., Suffel Ch. Topological Algebras. North-Holland Math. Studies V.24. Amsterdam: North-

- Holland Publ. Comapny, 1977.
13. Bhatt S.J. On spectra and numerical ranges in locally  $m$ -convex algebras // Indian J.Pure and Appl. Math. 1983. V.14. N.5. P.593-603.
  14. Gramsch B. Integration und holomorphe funktionen in lokalbeschränkten Räumen // Math. Ann. 1965. Bd.162. S.190-210.
  15. Husain T. Multiplicative functionals on topological algebras. Boston-London-Melbourne: Pitman Advanced Publ. Programm, 1983.
  16. Khaleelulla S.M. Counterexamples in Topological Vector Spaces. Lect. Notes Math. V.936. Berlin - Heidelberg : Springer-Verlag, 1982.
  17. Killam E. The spectrum and the radical in locally convex algebras // Pacif. J. Math. 1962. V.12. P.581-588.
  18. Mallios A. Topological Algebras. Selected topics. North-Holland Mat. Stud. V.124. Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1986.
  19. Michael E.A. Locally multiplicatively-convex topological algebras // Mem. Amer. Math. Soc. 1952. V.11. P.1-79.
  20. Neubauer G. Einige Bemerkungen zur Theorie der maximalen Ideale // Math. Z. 1964. Bd.77. S.285-294.
  21. Oudadess M. Sur le radical de Jacobson dans les algèbres localement  $A$ -convexes // Math. Rept. Acad. Sci. Can. 1985. V.7. N.1. P.21-25.
  22. Oudadess M. Sur le spectre ponctuel dans les algèbres localement  $A$ -convexes // Bull. Soc. roy. sci. Liège. 1985. V.54. N.2. P.65-68.
  23. Page W. Topological Uniform Structures. New York: John Wiley & Sons, 1978.
  24. Rickart Ch., E. General Theory of Banach Algebras. New York: Van Nostrand, 1960.
  25. Rolewicz S. Example of semi-simple  $m$ -convex  $B_0$ -algebra, which is not a projective limit of semi-simple Banach algebras // Bull. Acad. Pol. Sci. 1963. V.11. P.459-462.
  26. Rolewicz S. Some remarks on radical in commutative algebras // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math. astronom et phys. 1967. V.15. P.153-155.
  27. Żelazko W. On the locally bounded and  $m$ -convex topological algebras // Stud. math. 1960. V.19. P.333-356.
  28. Żelazko W. Metric generalizations of Banach algebras.

- Rozpr. mat. V.47. Warszawa: PWN, 1965.
29. Żelazko W. Selected topics in topological algebras. Lect. Notes Ser. V.31. Aarhus univ., 1971.
  30. Żelazko W. On ideal theory in Banach and topological algebras // Monogr. Inst. mat. UNAM. 1984. V.15. N.4. P.1-151.
  31. Waelbroeck L. Topological vector spaces and algebras. Lect. Notes Math. V.230. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.

Поступило 12. 08. 1988

#### PROJECTIVE LIMITS OF TOPOLOGICAL ALGEBRAS

M. Abel

##### Summary

Some properties of the projective limit of topological algebras are considered in §2. In §3 it is proved that each complete locally  $m$ -( $p$ -pseudoconvex) Hausdorff algebra is topologically isomorphic with the projective limit of  $p$ -Banach algebras. As an application of results from §2 and §3 some properties of commutative complete locally  $m$ -( $p$ -pseudoconvex) Hausdorff  $\mathbb{C}$ -algebras are given in §4.

ФОРМАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И BRST-ИНВАРИАНТНЫМ  
ЛАГРАНЖИАМ.

В. А. Абрамов

Лаборатория прикладной математики

В данной работе описывается геометрический подход к нахождению BRST-инвариантных лагранжианов, возникающих в квантовой теории поля. Для этого используется понятие формальной геометрии, взятое из работы [4]. Впервые BRST-инвариантный лагранжиан был выписан при квантовании поля Янга - Миллса с помощью континуального интегрирования ([5], [6]). При этом потребовалось ввести дополнительные, антикоммутирующие поля, получившие название "духовых" полей или полей Фаддеева-Попова. Позже были найдены преобразования, так называемые BRST-суперсимметрии, нетривиальным образом перемешивающие классические поля и "духи" Фаддеева - Попова, относительно которых эффективный лагранжиан был инвариантен. Замечательным свойством BRST-суперсимметрий является их нильпотентность. Это позволило в целом ряде работ исследовать дифференциально-геометрическую структуру "духовых" полей и BRST-суперсимметрий на языке внешних дифференциальных форм ([7], [8], [11]). Недостатком этих построений, отмеченном в [10], явилось то обстоятельство, что они не отражали бесконечномерную структуру грассмановой алгебры, образующими которой служат поля Фаддеева-Попова. Это выразалось в том, что в разложении произвольного функционала по "духовым" полям имелись лишь члены конечного порядка. С целью устранить этот недостаток автором, в работах [1], [2], было введено, с помощью модифицированной грассмановой алгебры, бесконечномерное суперпространство, позволившее интерпретировать "духовые" поля, как нечётные координаты, эффективное действие, как чётный функционал, и BRST-суперсимметрии, как нечётное векторное поле на построенном суперпространстве. Однако, в данном подходе су-

шественную роль играют вопросы локальности рассматриваемых объектов, так как элементы бесконечномерной грассмановой алгебры строятся по ядрам некоторого класса операторов ([3]). В силу того, что квантовый эффективный лагранжиан  $\mathcal{L}_{eff}$ , соответствующий  $S_{eff}$  квантовому эффективному действию, должен быть локальным, приходится ограничить класс рассматриваемых операторов при построении бесконечномерной грассмановой алгебры классом дифференциальных операторов на соответствующих расслоениях ([1]). Это приводит к тому, что в пространстве всех функционалов на суперпространстве выделяется подпространство функционалов, имеющих вид полиномов от калибровочных полей  $\varphi^i$ , вспомогательных полей  $\psi^i$ , и полей Фаддеева-Попова  $c^i, \bar{c}^i$ , где  $1 \leq i \leq \dim \mathcal{G}$  и  $\mathcal{G}$  - калибровочная группа. Таким образом, естественно возникает супералгебра формальных многочленов от соответствующих символов и геометрические объекты на ней ([4]). Исследуемые объекты данной работы отличаются от построений в [4] тем, что кроме обычных полей добавляются антикоммутирующие и поэтому рассматриваемые величины принадлежат супергеометрии. В пункте 1 вводится супералгебра формальных полиномов над некоторым полем и определяются дифференциально-геометрические объекты на ней. Кроме того, доказывается необходимое для дальнейшего предложение о инвариантности многочлена. В пункте 2 дается интерпретация физических величин, таких как эффективный лагранжиан, BRST-суперсимметрии в терминах пункта 1 и показывается как, используя доказанное предложение о инвариантности многочлена, находить BRST-инвариантные эффективные лагранжианы. Рассмотрен конкретный пример поля Янга-Миллса в некоторой калибровке.

1. Рассмотрим три группы символов:

$$(I) R_u = \{ u, u_i, \dots, u_{i_1 \dots i_n}, \dots; u_{i_j}, u_{i_j j}, \dots, u_{i_j i_j \dots j_i}, \dots \},$$

$$(II) R_c = \{ c, c_i, c_{ij}, \dots, c_{i_1 \dots i_n}, \dots \},$$

$$(III) \bar{R}_c = \{ \bar{c}, \bar{c}_i, \bar{c}_{ij}, \dots, \bar{c}_{i_1 \dots i_n}, \dots \},$$

где  $1 \leq i \leq n$  и символы всех групп симметричны относительно произвольных перестановок индексов  $\{i_1 \dots i_n\}$ . Таким образом, если  $x_{i_1 \dots i_n}$  общее обозначение для символов  $R_u, R_c$  и  $\bar{R}_c$  то  $x_{i_1 \dots i_n} = x_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(n)}}$ , где  $\sigma$  некоторая перестановка множества  $\{1, \dots, n\}$ . Пусть  $\mathcal{O}(x)$  является ассоциативной алгеброй многочленов над полем  $C$  от некоммутирующих символов  $R_u, R_c$  и  $\bar{R}_c$ . Вводя обозначения,  $(M_n^K) = (i_n^K, i_n^{K'}, \dots, i_n^{K''})$  и многочлены вида

$$\bar{c}_{(M_n^K)}^{P_1} u_{(N_n^K)}^{P_1} c_{(L_n^K)}^{P_1} \dots \bar{c}_{(M_n^{K'})}^{P_2} u_{(N_n^{K'})}^{P_2} c_{(L_n^{K'})}^{P_2}, \quad (I.1)$$

где  $l = \kappa + q$ , мы сможем записать каждый элемент  $F(z)$  алгебры  $\mathcal{O}(z)$  в виде линейной комбинации одночленов вида (I.1) с коэффициентами из  $\mathbb{C}$ . Отметим, что числа  $p$  в записи (I.1) обозначают степень соответствующего элемента. По определению будем считать, что символы группы  $R_u$  являются чётными, то есть положим  $\pi(u; i_1, \dots, i_r) = \bar{0}$ , и символы групп  $R_c$  и  $\bar{R}_c$  нечётными, то есть  $\pi(c; i_1, \dots, i_r) = \bar{1}$ , где  $\bar{0}$  и  $\bar{1}$  элементы группы  $\mathbb{Z}_2$ . Чётность произвольного элемента  $F(z) \in \mathcal{O}(z)$ , разложенного в линейную комбинацию одночленов (I.1), определяется естественным образом. Относительно введённой чётности алгебра всех многочленов имеет вид

$$\mathcal{O}(z) = \mathcal{O}_0(z) \oplus \mathcal{O}_1(z),$$

где  $\mathcal{O}_0(z)$  подалгебра чётных многочленов и  $\mathcal{O}_1(z)$  подпространство нечётных многочленов. Таким образом,  $\mathcal{O}(z)$  является супералгеброй. Кроме понятия чётности определим "гостовское" число  $gh(F(z))$  для произвольного многочлена  $F(z) \in \mathcal{O}(z)$ , положив на образующих алгебры  $gh(u; i_1, \dots, i_r) = 0$ ,  $gh(c; i_1, \dots, i_r) = 1$ ,  $gh(\bar{c}; i_1, \dots, i_r) = -1$ . Отметим, что для произвольного многочлена  $F(z) \in \mathcal{O}(z)$  естественным образом определён сопряжённый многочлен  $\bar{F}(z) \in \mathcal{O}(z)$ .

Пусть  $[\mathcal{O}(z)]$  является коммутаторной супералгеброй Ли ассоциативной алгебры  $\mathcal{O}(z)$ , то есть введём скобку Ли следующим образом:

$$[F(z), F'(z)] = F(z) \cdot F'(z) - (-1)^{\chi(F)\chi(F')} F'(z) \cdot F(z),$$

где  $F(z), F'(z)$  произвольные однородные многочлены алгебры  $\mathcal{O}(z)$ . В супералгебре Ли  $[\mathcal{O}(z)]$  выделим подалгебру  $\mathcal{L}(z)$  левых многочленов от символов  $R_u, R_c$  и  $\bar{R}_c$ . Обозначим через  $der(\mathcal{L}(z))$  супералгебру Ли всех дифференцирований алгебры  $\mathcal{L}(z)$ , то есть  $\delta \in der(\mathcal{L}(z))$  является эндоморфизмом пространства  $\mathcal{L}(z)$  со свойством

$$\delta' [F(z), F'(z)] = [\delta' F(z), F'(z)] + (-1)^{\chi(F)\chi(\delta')} [F(z), \delta' F'(z)],$$

где  $\chi(\delta)$  чётность данного дифференцирования. Дифференцирование  $\delta \in der(\mathcal{L}(z))$  называется нильпотентным, если  $\delta^2 = \frac{1}{2}[\delta, \delta] = 0$ . Выделим дифференцирование  $\delta^B$ , соответствующее BRST-суперсимметрии, играющим важную роль в квантовой теории поля. Для этого определим  $\delta^B$  на образующих алгебры следующим образом:

$$\delta^B u_{i_1, i_2, \dots, i_r} = c_{i_1, i_2, \dots, i_r} + \sum_j [u_{i_1, i_2, \dots, i_r, j}, c_{j, i_1, \dots, i_r}], \quad (I.2)$$

$$\delta^B \bar{c}_{i_1, i_2, \dots, i_r} = u_{i_1, i_2, \dots, i_r}$$

$$\sigma^B c_{i_1 \dots i_r} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} [c_{i_1 \dots i_{r-1} \alpha}, c_{\alpha i_r \dots i_n}],$$

$$\sigma^B u_{i_1 \dots i_r} = 0,$$

$n \in \mathbb{N}$ . Из (1.2) следует, что  $\sigma^B$  нечётное дифференцирование и непосредственное вычисление показывает, что

$$(\sigma^B)^2 = \frac{1}{2} [\sigma^B, \sigma^B] = 0.$$

Предположим теперь, что  $z_{i_1 \dots i_r} = z_{i_1 \dots i_r}^d T_{\alpha}$ , где  $\{T_{\alpha}\}$  базис некоторой конечномерной алгебры Ли  $\underline{G}$ ,  $\dim \underline{G} = h$ , причём

$$[T_{\alpha}, T_{\beta}] = f_{\alpha\beta}^{\gamma} T_{\gamma},$$

и получающиеся символы  $u_{i_1 \dots i_r}^d$  и  $u_{i_1 \dots i_r}^d$  чётные, то есть  $\kappa(u_{i_1 \dots i_r}^d) = \bar{\kappa}(u_{i_1 \dots i_r}^d) = \bar{0}$  и символы  $c_{i_1 \dots i_r}^d$ ,  $\bar{c}_{i_1 \dots i_r}^d$  — нечётные то есть  $\kappa(c_{i_1 \dots i_r}^d) = \bar{\kappa}(\bar{c}_{i_1 \dots i_r}^d) = \bar{1}$ ; другими словами имеем

$$z_{i_1 \dots i_r}^d z_{j_1 \dots j_s}^{\beta} = (-1)^{\bar{\kappa}(z_{i_1 \dots i_r}^d) \bar{\kappa}(z_{j_1 \dots j_s}^{\beta})} z_{j_1 \dots j_s}^{\beta} z_{i_1 \dots i_r}^d.$$

Очевидно, что эта градуировка согласована со структурой супералгебры  $\mathcal{A}(z)$ . Пусть  $\mathcal{O}[z^d]$  есть алгебра всех многочленов от символов  $z_{i_1 \dots i_r}^d$ . Очевидно, что  $\mathcal{O}[z^d]$  супералгебра, то есть

$$\mathcal{O}[z^d] = \mathcal{O}_e[z^d] \oplus \mathcal{O}_o[z^d].$$

В силу построения, имеем  $[\mathcal{O}(z)] = \mathcal{O}(z^d) \otimes \underline{G}$ . Очевидно, что подалгебре  $\mathcal{L}(z) \subset [\mathcal{O}(z)]$  соответствует некоторая подалгебра в  $\mathcal{O}[z^d]$ , которую мы обозначим  $\mathcal{L}[z^d]$ . Тогда  $\mathcal{L}(z) \otimes \underline{G} = \mathcal{L}[z^d]$ .

Пусть  $d_{\mathcal{L}}(\mathcal{O}[z^d])$  супералгебра всех дифференцированных алгебры  $\mathcal{O}[z^d]$ . Выделим в ней подалгебру линейных дифференциальных операторов вида

$$\xi = \sum_{(M_1)_{\alpha}} F_{(M_1)_{\alpha}}(z) \frac{\partial}{\partial z_{i_1 \dots i_r}^d}, \quad (1.3)$$

где  $(M_1)_{\alpha} = (i_1 \dots i_r)$  и  $F_{(M_1)_{\alpha}}(z) \in \mathcal{O}[z^d]$ . Среди всех операторов данного вида выделим следующий

$$\partial_i = \sum z_{i_1 \dots i_r}^d \frac{\partial}{\partial z_{i_1 \dots i_r}^d}.$$

Из определения этого оператора следует, что

$$\partial_i z_{i_1 \dots i_r}^d = z_{i_1 \dots i_r}^d \delta_{i i_1} + z_{i_1 \dots i_r}^d \delta_{i i_2} + \dots + z_{i_1 \dots i_r}^d \delta_{i i_r} = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_r} z^d.$$

Дифференциальные операторы вида (1.3) называются векторными полями на супералгебре  $\mathcal{O}[z^d]$ . Чётность оператора или векторного поля вида (1.3) естественным образом определяется по структуре супералгебры  $\mathcal{O}[z^d]$ . Относительно коммутатора  $[\xi, \eta]$  пространство всех векторных полей становится супералгеброй Ли, которую мы обозначим через  $d_{\mathcal{L}}(\mathcal{O}[z^d])$ . Век-

торное поле  $\partial_i$  является очевидно чётным. Векторные поля, коммутирующие с полем  $\partial_i$  образуют подмодуль. Они характеризуются свойством

$$F_{i_1 \dots i_r}^{\partial_i}(z) = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_r} F^{\partial_i}(z).$$

Нечётное векторное поле называется нильпотентным, если  $\xi^2 = \frac{1}{2}[\xi, \xi] = 0$ . Каждому дифференцированию  $\sigma$  супералгебры  $\mathcal{L}(z)$  соответствует векторное поле на  $\mathcal{M}[z^4]$  или, точнее, на  $\mathcal{L}[z^4]$ . Так, введённому выше, дифференцированию  $\sigma^B$  соответствует нечётное векторное поле

$$\xi^B = \sum_{i_1, i_2} (c_{i_1 i_2}^A + \sum_{\beta \neq \gamma} f_{\beta \gamma}^A u_{i_1 i_2 i_3} c_{i_3 i_4 \dots i_r}) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 i_3}} + \sum_{i_1, i_2} u_{i_1 i_2}^A \frac{\partial}{\partial c_{i_1 i_2}^A} + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2} (f_{\beta \gamma}^A c_{i_1 i_2 i_3}^B c_{i_3 i_4 \dots i_r}^{\gamma}) \frac{\partial}{\partial c_{i_1 i_2}^A},$$

причём непосредственные вычисления показывают, что

$$[\xi^B, \partial_i] = 0, \quad [\xi^B, \xi^B] = 0,$$

то есть  $\xi^B$  нильпотентное векторное поле.

Следующей дифференциально-геометрической структурой, которая понадобится в дальнейшем, будут внешние дифференциальные формы на супералгебре  $\mathcal{M}[z^4]$ . Конечные суммы вида

$$\omega = \sum \omega_{(M_2)}^{\partial_i} dz_{(M_2)}^{\partial_i}, \quad \omega_{(M_2)}^{\partial_i} \in \mathcal{M}[z^4]$$

где  $dz_{(M_2)}^{\partial_i} = dz_{i_1 \dots i_r}^{\partial_i}$  новые символы чётность которых определим, положив  $\pi(dz_{i_1 \dots i_r}^{\partial_i}) = \bar{1}$ ,  $\pi(dz_{i_1 \dots i_r}^{\partial_j}) = \bar{0}$ , называются дифференциальными линейными формами на  $\mathcal{M}[z^4]$ . Значение формы на векторном поле  $\xi$  равно

$$\omega(\xi) = \sum F_{(M_2)}^{\partial_i} \omega_{(M_2)}^{\partial_i}.$$

Пространство линейных дифференциальных форм на  $\mathcal{M}[z^4]$  обозначим  $\Omega^1(\mathcal{M}[z^4])$ . Пространство  $\Omega^p(\mathcal{M}[z^4])$  дифференциальных форм  $p$ -го порядка определяется аналогичным образом. Внешний дифференциал имеет вид

$$d = \sum dz_{(M_2)}^{\partial_i} \frac{\partial}{\partial z_{(M_2)}^{\partial_i}}, \quad d^2 = 0.$$

**Предложение I.1** Если  $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M}[z^4])$  является замкнутой 1-формой на  $\mathcal{M}[z^4]$  и  $\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}[z^4])$  нильпотентное векторное поле, то

$$\xi \omega(\xi) = 0.$$

Доказательство сразу же следует из известной формулы дифференциальной геометрии, обобщенной на супергеометрию,

$$d\omega(\xi', \eta) = \xi' \omega(\eta) + \eta \omega(\xi') - \omega([\xi', \eta]),$$

где  $\xi', \eta$  — нечётные векторные поля на  $\mathcal{M}[z^4]$ . Действительно, левая часть при подстановке вместо  $\xi'$  и  $\eta$  поля  $\xi$

равна 0 в силу замкнутости формы, а член  $\omega([\xi, \xi])$  исчезает, в силу нильпотентности поля  $\xi$ .

2. В этом пункте, описанные выше объекты, используются для описания лагранжиана квантового калибровочного поля, а также его симметрий. Эффективный квантовый лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_d + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{FP},$$

где  $\mathcal{L}_d$  - классический лагранжиан калибровочного поля,  $\mathcal{L}_{gf} = -\delta^{\alpha\beta} y_\alpha + \frac{1}{2} b^{\alpha\beta} \xi^\alpha$  - член фиксирующий калибровку, где  $b^{\alpha\beta}$  вспомогательное поле и  $y_\alpha$  - калибровка,  $\mathcal{L}_{FP} = \bar{c}^\alpha \Delta(\psi_\alpha)$ , где  $c^\alpha$ ,  $\bar{c}^\alpha$  духовые поля и  $\Delta$  - оператор BRST-суперсимметрий. Если мы положим  $b^{\alpha\beta} = u^\alpha$ ,  $u^\alpha_i$  примем за классическое калибровочное поле, то  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  очевидно примет вид элемента супералгебры  $\mathcal{O}(\mathbb{Z}^4)$  (в действительности даже более того, элемента  $\mathcal{D}[\mathbb{Z}^4]$ ). Сопоставим BRST-оператору нильпотентное векторное поле  $\xi^B$ . Тогда имеем

$$\mathcal{L}_{qu} = \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{FP} = u^\alpha y_\alpha + \frac{1}{2} u^\alpha u^\beta - \bar{c}^\alpha \xi^B(y_\alpha) \quad (2.1)$$

где  $y_\alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{Z}^4)$ . Таким образом,  $\mathcal{L}_{qu} \in \mathcal{O}(\mathbb{Z}^4)$ . Несложно убедиться что  $\xi^B(\mathcal{L}_{qu}) = 0$ , то есть квантовая добавка лагранжиана  $\mathcal{L}_{qu}$  является BRST-инвариантной. Отметим, что  $\xi^B(\mathcal{L}_{qu}) = 0$  в силу того, что коэффициент при  $\partial u_{i_1, \dots, i_2}$  является инфинитезимальным калибровочным преобразованием. В статье [7] была отмечена необходимость нахождения BRST-инвариантных добавок. В физической литературе используется следующий метод: для фиксированного нильпотентного поля и найденного (например в теории Янга-Миллса) из иных соображений  $\mathcal{L}_{qu}$  ищется такой многочлен  $F$ , что  $\mathcal{L}_{qu} = \xi^B F$ . Затем, при исследовании другой теории поля (например теории струн) выписывается многочлен, структура которого аналогична  $F$ , и действием на него оператором BRST-суперсимметрий получают соответствующую добавку  $\mathcal{L}_{qu}$ , которая в силу нильпотентности BRST-суперсимметрий BRST-инвариантна. Геометрические построения, описанные в пункте I дают возможность сделать такой подход более общим. Перепишем  $\mathcal{L}_{qu} = \xi^B F$  в форме  $dF(\xi^B) = \mathcal{L}_{qu}$ , где  $d$  - внешний дифференциал и  $F \in \mathcal{O}(\mathbb{Z}^4)$ . Эта запись указывает на то, что искать  $\mathcal{L}_{qu}$  можно в более общем виде, то есть  $\mathcal{L}_{qu} = \omega(\xi^B)$ , где  $\omega$  дифференциальная линейная форма на  $\mathcal{O}(\mathbb{Z}^4)$ . При этом форма  $\omega$  должна удовлетворять условию BRST-инвариантности, то есть  $\xi^B \omega(\xi^B) = 0$ . Так как  $\xi^B$  нильпотентное поле, из предложения I.I следует, что форма  $\omega$  должна быть замкнутой. Если она точная, метод нахождения  $\mathcal{L}_{qu}$  сводится к

описанному выше. Таким образом показано, что каждая замкнутая линейная форма на  $A[x^i]$  определяет BRST-инвариантный лагранжиан. Отметим, что для лагранжиана (2.1) эта форма имеет вид

$$\omega = (y_i + \frac{1}{2} u^i) d\bar{c}^i - \bar{c}^i d y_i$$

причём она становится замкнутой после добавления члена вида  $\frac{1}{2} \bar{c}^i d u^i$ , который не влияет на вид  $\mathcal{L}_{g_0}$ , так как в  $\xi^B$  нет членов вида  $\Phi_{i_1 i_2}^a \partial u_{i_1 i_2}^a$ . Полученная форма уже является точной, то есть

$$\omega = d \left[ \bar{c}^i (y_i + \frac{1}{2} u^i) \right].$$

### Литература

1. Абрамов В.А., Лумисте Ю.Г. Суперпространство с подстилающим банаховым расслоением связностей и суперсимметрии эффективного действия // Изв. вузов. Математика. 1986. №1. С. 3-12.
2. Абрамов В.А. Суперпространство связностей и симметрии квантового эффективного действия. Препринт F-28, Отд. физ.-мат. и техн. наук АН ЭССР. Тарту. 1985.
3. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. М.; Физматгиз, 1965.
4. Гельфанд И.М., Дикий Л.А. Асимптотика резольвенты Штурм-Лиувилевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега-Де-Фриза // Усп. мат. наук. 1975. Т. 30. Вып. 5(185). С. 67-100.
5. Попов В.Н., Фаддеев Л.Д. Теория возмущений для калибровочноинвариантных полей. Препринт ИТФ АН УССР. Киев. 1967.
6. Фаддеев Л.Д. Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов // Теор. и мат. физ. 1969. Т.1. №1. С. 3-18.
7. Bonora L, Cotta-Ramusino P. Some remarks on BRS transformations // Comm. Math. Phys. 1983. V.87. P. 589-603.
8. Hoyos I., Quiros M., Ramirez Mittelbrun I., de Urries F. I. Superfiber bundle structure of gauge theories with Faddeev-Popov fields // J. Math. Phys. 1982. V.23. No 8 P. 1504-1510.
9. Kato M., Ogawa K. Covariant quantization of string based on BRS invariants // Nucl. Phys. B 212(2). 1983. P. 443-460
10. Leinaas J., Olausson K. Ghosts and geometry // Phys. Lett.

11. Thierry-Mieg Jean. Explicit classical construction of the Faddeev-Popov ghost field // Nuovo Cim. 1980. V. 56A, No 4, P. 396-404.

Поступило 21. 9. 1988.

#### FORMAL GEOMETRY AND BRST-INVARIANT LAGRANGIAN

V. Abramov

##### Summary

The formal geometry introduced by Gel'fand and Dikij is used in this paper for the description of BRST-invariant lagrangians. It is shown that every closed even form on the superalgebra of polynomials defines a BRST-invariant lagrangian. The 1-form which defines the Faddeev-Popov quantum lagrangian is obtained and it is shown that this 1-form is exact.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЭКВИВАРИАНТНОЙ  
ТОПОЛОГИИ

З. Баланов

Рижский политехнический институт

Введение

Многие задачи эквивариантной топологии (вычисление степени и числа Лефшеца эквивариантного отображения, эквивариантная гомотопическая классификация и др.) сводятся к проблеме продолжения эквивариантных отображений. Цель настоящей статьи - описать один общий подход к указанной проблеме и проиллюстрировать его некоторыми новыми теоремами в эквивариантной топологии, усиливающими, в частности, соответствующие результаты работ [I-5, II-I4, I6-I9, 2I, 25-29]. Заметим, что предлагаемый подход (его идея восходит к известной работе М.А. Красносельского [I6]), более геометричен, чем традиционный метод продолжения сечений подходящих расслоений (см., например, [2I]). Кроме того, мы надеемся, что его приложения не ограничиваются вопросами, затронутыми в настоящей статье.

Центральную роль в наших построениях играет следующее понятие.

Определение. Пусть топологическая группа  $G$  свободно действует на метрическом пространстве  $X$ . Пусть, далее,  $\mathcal{D} \subset X$  - замыкание своего открытого (в индуцированной топологии) подмножества  $\mathcal{D}_0$ . Назовем  $\mathcal{D}$  фундаментальной областью, если:

- (а)  $G(\mathcal{D}) = X$ ;
- (б)  $g(\mathcal{D}_0) \cap h(\mathcal{D}_0) = \emptyset$ ,  $g \neq h$ ,  $g, h \in G$ ;
- (в)  $X \setminus G(\mathcal{D}_0) = G(\mathcal{X} \setminus \mathcal{D}_0)$ .

Если, к тому же,  $\dim X = n < \infty$ , то должно выполняться также условие

$$(г) \dim \mathcal{D} = \dim X/G; \dim(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0) \leq \dim \mathcal{D} - 1; \dim G(\mathcal{X} \setminus \mathcal{D}_0) \leq n-1.$$

Замечания. I) Вскду-далее имеется в виду размерность в смысле покрытий.

2) В том случае, когда  $G$  действует вполне разрывно,

из приведенного определения следует, что в качестве  $\mathcal{D}_0$  можно взять внутренность  $\mathcal{L}$ . Таким образом, данное определение хорошо согласуется с классическим определением фундаментальной области. Кроме того, можно проверить, что (в) следует из (а) и (б).

Статья состоит из пяти параграфов. В первом параграфе приводятся некоторые вспомогательные сведения. Второй параграф посвящен исследованию существования фундаментальных областей и описанию упомянутого выше подхода к проблеме продолжения эквивариантных отображений (теорема I и предложение I). Наиболее общая версия "эквивариантной теоремы Дугунджи" (теорема 2) и вариант теоремы Борсука - Улама (следствие 3.3) составляют содержание третьего параграфа; там же излагается одно усиление теоремы Яворовского [26] о  $G$ - $ANR$ -пространствах (предложение 2). В четвертом параграфе мы приводим обобщение известного принципа сравнения Красносельского (теорема 3), из которого следуют соответствующие результаты работ [I-5, II-14, I6, I7, I9]. Наконец, в пятом параграфе доказывается "эквивариантная теорема Хопфа" (теорема 4), которая усиливает соответствующие результаты Бовчица [25] и том Дика [21]. Особо подчеркнем, что наше доказательство не использует трансфера (в отличие от [21]) и методов гладкой топологии (в отличие от [9]).

Работа выполнена под руководством А.Х. Кушкулея, которому автор, пользуясь случаем, выражает признательность.

## §1. Вспомогательные сведения.

I. Всюду далее  $X$  - метрическое  $G$ -пространство,  $G$  - компактная группа Ли,  $A \subset X$  - замкнутое инвариантное подпространство (возможно, пустое).

Для каждого  $x \in X$  через  $G_x$  обозначим стационарную подгруппу точки  $x$ . Действие  $G$  на  $X$  называется свободным, если  $G_x$  тривиальна для любого  $x \in X$ . Совокупность всех стационарных подгрупп  $\{G_x\}_{x \in X}$  обозначается через  $\text{Iso}(X)$ . Если  $H$  - подгруппа в  $G$ , то через  $X^H$  обозначим множество  $H$ -неподвижных точек в  $X$ , а через  $X_H$  - множество таких  $x \in X$ , что  $G_x = H$ . Семейство подгрупп группы  $G$ , сопряженных с некоторой стационарной подгруппой  $G_x$ , называется орбитным типом и обозначается  $(G_x)$ . На протяжении всей статьи будем предполагать, что  $G$  действует на

$X \setminus A$  с конечным числом орбитных типов  $(H_1), (H_2), \dots, (H_m)$ .  
 На множестве  $\mathcal{O}_2(X \setminus A) = \{(H_1), \dots, (H_m)\}$  орбитных типов на  $X \setminus A$   
 введем частичный порядок (см. [9]), определяемый условием:  
 $(H_j) < (H_i)$  влечет  $i < j$ . Двойственным образом (по отноше-  
 нию к  $\mathcal{O}_2(X \setminus A)$ ) определим фильтрацию пространства  $X$  за-  
 мынутыми инвариантными подпространствами:

$$A = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_m = X, \quad (I.1)$$

полагая  $X_i = AU\{x \in X / (G_x) = (H_j) \text{ для некоторого } j \leq i\}$ .  
 Пусть  $Y$  - другое  $G$ -пространство и  $f: X \rightarrow Y$  -  $G$ -эквива-  
 риантное отображение. С помощью множества  $\mathcal{O}_2(X \setminus A)$  аналогич-  
 но изложенному выше можно определить фильтрацию замкнутыми  
 инвариантными множествами

$$f(A) = Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_m = Y \quad (I.2)$$

множества  $Y$ . Ясно, что  $G$ -эквивариантное отображение  
 $f: X \rightarrow Y$  индуцирует  $G$ -эквивариантные отображения  
 $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ . Нас интересуют для заданного  $G$ -эквивариант-  
 ного отображения  $\delta: X_{i-1} \rightarrow Y_{i-1}$  его  $G$ -эквивариантные про-  
 должения  $\gamma: X_i \rightarrow Y_i$ . Соответствующему утверждению пред-  
 пошлем одно определение.

Пусть  $\Gamma$  - некоторая группа,  $H$  - ее подгруппа.  
 Пусть, далее,  $N(H)$  - ее нормализатор в  $\Gamma$ . Фактор-груп-  
 па  $W(H) = N(H)/H$  называется группой Вейля  $H$  в  $\Gamma$ .

Легко видеть, что на множестве  $X^{H_i}$  корректно опреде-  
 лено действие группы Вейля  $W(H_i)$ , свободное на  $X^{H_i} \setminus X_{i-1}^{H_i} = X_{i-1}^{H_i}$ .  
 Аналогично,  $W(H_i)$  действует и на  $Y^{H_i}$ . Имеет место

**Лемма I.1** ([21], предложение 8.1.5). Пусть  $\delta: X^{H_i} \rightarrow Y^{H_i}$   
 $W(H_i)$ -эквивариантное продолжение отображения  $\delta|_{X_{i-1}^{H_i}}$ . То-  
 гда существует, и при том единственное,  $G$ -эквивариант-  
 ное продолжение  $\gamma: X_i \rightarrow Y_i$  отображения  $\delta: X_{i-1} \rightarrow Y_{i-1}$ , что  $\delta|_{X_{i-1}^{H_i}} = \gamma$

При некоторых дополнительных предположениях с помощью  
 приведенной леммы общая задача продолжения эквивариантного  
 отображения сводится к задаче эквивариантного продолжения  
 на свободное подпространство (подробности см. [21]). Пос-  
 ледняя задача оказывается проще, поскольку

**Лемма I.2** (Глисон, [9], с. 95). Если  $X$  - свободное  
 $G$ -пространство, то орбитное отображение  $P: X \rightarrow X/G$  оп-  
 ределяет локально тривиальное расслоение со слоем  $G$ .

В дальнейшем нам понадобится

**Лемма I.3.** Пусть  $P: T \rightarrow B$  - расслоение (локально  
 тривиальное), причем, база допускает такое представление в

виде дизъюнктного объединения множеств  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in V}$ , что над каждым  $U_\alpha$  расслоение тривиально. Тогда  $\rho$  тривиально над  $B$ .

Доказательство этой леммы легко следует из того, что прямое произведение коммутирует с дизъюнктным объединением.

2. Ниже мы интересуемся ретракционными свойствами множеств, неподвижных относительно подгрупп компактной группы Ли, действующей на хорошем пространстве. Топологическое пространство называется пространством класса  $ENR$  (евклидовым окрестностным ретрактом), если оно гомеоморфно окрестностному ретракту в некотором конечномерном евклидовом пространстве. Если на  $X$  задано действие группы  $G$ , то  $X$  называется пространством класса  $G-ENR$  при условии, что оно  $G$ -эквивариантно гомеоморфно  $G$ -ретракту некоторой  $G$ -окрестности в конечномерном евклидовом пространстве, причем соответствующая ретракция также  $G$ -эквивариантна. В дальнейшем мы используем следующий простой факт (см. [27]).

Лемма 1.4. Пусть конечная группа  $G$  действует на пространстве класса  $G-ENR$ . Тогда для любой  $H \in Iso(X)$  множество  $S^H$  принадлежит классу  $ENR$ .

Как нетрудно убедиться, конечномерная сфера с заданным на ней действием конечной группы  $G$  является пространством класса  $G-ENR$ , и, следовательно, в силу леммы 1.4, для всех  $H \in Iso(X)$  множества  $S^H$  суть  $ENR$ -пространства. С другой стороны, каждое  $ENR$ -пространство локально стягиваемо (см., хотя бы, [8], с. 97), откуда  $S^H$  локально стягиваемы при всех  $H \in Iso(X)$ . Далее, очевидно, что конус над пространством класса  $ENR$  есть пространство класса  $ENR$ , следовательно,  $K(S^H)$  (конус над  $S^H$ ) локально стягиваем. Но конус над любым пространством стягиваем, значит (8 теорема 9.1, с. 108 и теорема 4.2(i), с. 98) справедлива

Лемма 1.5. Для любого  $H \in Iso(X)$  множества  $K(S^H)$  являются  $AR$ -пространствами.

Поскольку локальная стягиваемость влечет за собой локальную  $K$ -связность при всех  $K=0, 1, \dots$  ([10], с. 108), то

Лемма 1.6. Множества  $S^H$  и  $K(S^H)$  локально  $K$ -связны при всех  $K=0, 1, \dots$ .

3. Здесь мы соберем ряд фактов из теории размерности.

Пусть  $K$  - метрическое пространство,

Лемма 1.7. Если  $\dim K \leq n$ , то для каждого замкнутого  $F \subset K$  и произвольного открытого множества  $V \subset K$ , содержа-

шего  $F$ , найдется открытое множество  $U \subset K$  такое, что  $F \subset U \subset \bar{U} \subset V$  и  $\dim \partial U \leq n-1$ .

Доказательство см. [24], теорема 7.3.II.

**Лемма I.8** ([24], теорема 7.2.3). Пусть  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$  - локально конечное покрытие  $K$  такое, что при всех  $\alpha \in I$  множества  $F_\alpha$  замкнуты и  $\dim F_\alpha \leq n$ . Тогда  $\dim K \leq n$ .

Пусть  $X$  - конечномерное  $G$ -пространство. Тогда из теоремы Мориты ([8], с. 78), согласно которой  $\dim(K \times [0,1]) = \dim K + 1$ , легко следует

**Лемма I.9.**  $\dim X/G = \dim X - \dim G$ , если  $X$  свободно.

**Лемма I.10.** В любую окрестность  $W$  инвариантного компакта  $F \subset X$  можно вписать инвариантную окрестность  $U_F$  такую, что  $U_F \supset F$  и  $\dim \partial U_F < n$ .

Доказательство. Пусть  $\rho: X \rightarrow X/G$  - орбитное отображение. Рассмотрим сначала частный случай:  $F$  - орбита одной точки, скажем,  $x_0$ . Впишем в  $W$  инвариантную окрестность  $V_F$ , содержащую  $F$  (ее существование гарантировано теоремой 5.4 из [9], с. 93). В силу непрерывности  $\rho$ , леммы I.7 и леммы I.9, существует такая окрестность  $U_{\rho(x_0)}$  точки  $\rho(x_0)$  в  $X/G$ , что  $U_{\rho(x_0)} \subset \rho(V_F)$  и  $\dim(\partial U_{\rho(x_0)}) < n - \dim G/H$ , где  $(H)$  - главный орбитный тип (см. [9], гл. 4, § 3). Рассмотрим множество  $\rho^{-1}(U_{\rho(x_0)})$  и убедимся, что это и есть искомая окрестность. Действительно, то, что  $\rho^{-1}(U_{\rho(x_0)})$  содержится в  $W$  и инвариантно, вытекает непосредственно из построения. Далее, в силу леммы I.9

$\dim(\partial \rho^{-1}(U_{\rho(x_0)})) = \dim(\rho^{-1}(\partial U_{\rho(x_0)})) < n - \dim G/H + \dim G/H_1 \leq n-1$  (здесь  $(H_1)$  - старший тип на  $\rho^{-1}(\partial U_{\rho(x_0)})$ ). Теперь для доказательства леммы в полном объеме достаточно покрыть  $F$  конечным набором инвариантных окрестностей точек из  $F$ , имеющих хорошую границу, и воспользоваться леммой I.8.

В заключение этого пункта мы приведем два свойства локально конечных семейств, существенно используемых ниже.

**Лемма I.11** ([24], теорема I.5.18). Пусть  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  - локально конечное открытое покрытие метрического пространства. Тогда существует открытое покрытие  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$  такое, что  $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$  для каждого  $\alpha \in I$ .

**Лемма I.12** ([24], с. 56). Пусть  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$  - локально конечное семейство подмножеств метрического пространства. Тогда  $\partial(\bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha) \subset \bigcup_{\alpha \in I} \partial F_\alpha$ .

4. Этот параграф завершается стандартными свойствами

степени отображений многообразий с краем. Если не оговорено противное, то все группы гомологий рассматриваются над  $\mathbb{Z}$ .

Пусть  $M$  - ориентированное  $n$ -мерное многообразие с краем  $\partial M$ ,  $O: M \setminus \partial M \rightarrow \bigcup_{P \in M \setminus \partial M} H_n(M, M, P)$  - некоторая ориентация на нем (см. [10], гл. 8, § 2) и  $K$  - компактное подмножество в  $M \setminus \partial M$ . Тогда (см. [10], с. 324) в группе  $H_n(M, M, K)$  имеется единственный элемент  $U_K$ , удовлетворяющий условию: для любой точки  $P \in K$  индуцированный включением гомоморфизм  $i_*^P: H_n(M, M, K) \rightarrow H_n(M, M, P)$  переводит его в  $U_P$ . Этот элемент называется фундаментальным классом вблизи  $K$ . В частности, если  $M$  - компактное многообразие без края, то имеется фундаментальный класс  $U_M \in H_n(M, M, M) = H_n(M)$ , а, если  $K$  связно, то  $H_n(M, M, K) = \mathbb{Z}$  и  $U_K$  - образующая этой группы.

**Определение.** Пусть  $f: (M_1, \partial M_1) \rightarrow (M_2, \partial M_2)$  - непрерывное собственное отображение двух  $n$ -мерных многообразий с краем, переводящее край в край. Пусть, далее,  $K$  - связный компакт в  $M_2 \setminus \partial M_2$ . Тогда (см. [10], с. 324) отображение  $f_*: H_n(M_1, M_1, f^{-1}(K)) \rightarrow H_n(M_2, M_2, K)$  переводит  $(U_{f^{-1}(K)})$  в класс  $U_K$ , умноженный на некоторое целое число. Это число называется степенью  $f$  над  $K$  и обозначается  $\deg_K f$ . Таким образом,  $f_* (U_{f^{-1}(K)}) = (\deg_K f) \cdot U_K$ . Если  $M_2$  связно, то число  $\deg_K f$  одно и то же для всех связных компактных непустых подмножеств  $K$  ([10], предложение 4.5, с. 326). Условимся его обозначать  $\deg f$ .

Пусть  $(M_1, \partial M_1)$  и  $(M_2, \partial M_2)$  - пара компактных ориентированных  $n$ -мерных многообразий с краями, причем, ориентации краев индуцированы ориентациями многообразий ([20], следствие 10, с. 321). Если  $f: (M_1, \partial M_1) \rightarrow (M_2, \partial M_2)$  - непрерывное отображение, переводящее край в край, а  $M_2$  и  $\partial M_2$  связны, то определена степень сужения  $f$  на  $\partial M_1$ . Справедлива

**Лемма I.13.**  $\deg f = \deg f|_{\partial M_1}$ . (I.3)

Доказательство легко получается из следствия 10 книги [20] с. 391 и предложения 4.3 книги [10], с. 325 при помощи стандартной техники петляния по диаграммам.

Следующие три свойства степени хорошо известны ([10]):

**Лемма I.14.** Пусть  $f: (M_1, \partial M_1) \rightarrow (M_2, \partial M_2)$  - как и выше, и  $K$  - связный компакт в  $M_2 \setminus \partial M_2$ . Пусть, далее,  $M_1 \setminus \partial M_1$  - конечное объединение открытых множеств  $\{M_1^\lambda\}$ ,  $\lambda = 1, \dots, z$ , причем, множества  $K_1^\lambda = f^{-1}(K) \cap M_1^\lambda$  попарно не пересека-

ются. Тогда  $\deg_k f = \sum_{\lambda=1}^2 \deg_k f / M_\lambda^\lambda$ .

Лемма I.15. Пусть  $M_1$  и  $M_2$  - как и выше, причем,  $f: (M_1, \partial M_1) \rightarrow (M_2, \partial M_2)$  - гомеоморфизм. Тогда  $\deg f = \pm 1$  (в первом случае  $f$  называется сохраняющим ориентацию, а во втором - обращаемым ориентацию).

Лемма I.16. Пусть  $(M_1, \partial M_1), (M_2, \partial M_2), (M_3, \partial M_3)$  - связанные компактные ориентированные  $n$ -мерные многообразия с краями. Пусть, далее, заданы два непрерывных отображения  $f: (M_1, \partial M_1) \rightarrow (M_2, \partial M_2)$  и  $k: (M_2, \partial M_2) \rightarrow (M_3, \partial M_3)$ . Тогда  $\deg(k \circ f) = \deg k \cdot \deg f$ .

Все неопределенные здесь понятия из теории  $G$ -пространств и теории расслоений можно найти в [21] и [9]; из общей топологии и теории размерности - в [24]; из теории ретрактов - в [8]; из алгебраической топологии - в [18] и [10]; из нелинейного функционального анализа в [10].

## § 2. Существование фундаментальных областей и продолжение эквивариантных отображений

I. Теорема I. Для свободного действия компактной группы Ли  $G$  на произвольном метрическом пространстве  $X$  фундаментальная область существует.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится

Лемма 2.1. В каждое локально конечное открытое покрытие  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$   $n$ -мерного метрического пространства можно вписать (комбинаторно) такое открытое покрытие  $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , что: 1)  $\bar{V}_\lambda \subset U_\lambda$  для каждого  $\lambda \in \Lambda$ ; 2)  $V_\lambda \cap V_\mu = \emptyset$ , если  $\lambda \neq \mu$ ;  $\dim \partial V_\lambda \leq n-1$ .

Доказательство. В силу леммы I.11, существует такое комбинаторно вписанное в  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  открытое покрытие  $\{W_\lambda\}$ , что  $\bar{W}_\lambda \subset U_\lambda$ . Пусть для каждого  $\lambda \in \Lambda$

$W_\lambda \subset Z_\lambda \subset \bar{Z}_\lambda \subset U_\lambda$ , где  $Z_\lambda$  - открытое множество, причем  $\dim \partial Z_\lambda < \dim Z_\lambda$  (лемма I.7). Вполне упорядочим множество  $\Lambda$  и положим  $V_\lambda = Z_\lambda$ . Пусть множества  $V_\lambda$  уже определены при всех  $\lambda < \lambda_0$  и пусть  $\mathcal{O} = \bigcup_{\lambda < \lambda_0} V_\lambda$ . По предположению индукции семейство  $\{V_\lambda\}_{\lambda < \lambda_0}$  локально конечно, и поэтому (лемма I.8)  $\partial \mathcal{O} \subset \bigcup_{\lambda < \lambda_0} \partial Z_\lambda$ . Если  $Z_{\lambda_0} \subset \mathcal{O}$ , то переходим к  $Z_{\lambda_0+1}$ , в противном случае полагаем  $V_{\lambda_0} = Z_{\lambda_0} - \mathcal{O}$ . В силу канонической замкнутости множеств  $\bar{Z}_\lambda$  замечаем, что  $\partial V_{\lambda_0} \subset \partial \mathcal{O} \cup \partial Z_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \leq \lambda_0} \partial Z_\lambda$ , и поскольку семейство

$\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  локально конечно (по построению), то учитывая лемму I.8, имеем:  $\dim \partial V_\lambda \leq n-1$ . Не менее очевидно, что условия 1) и 2) также выполнены.

2. Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы I. По лемме I.2 орбитное отображение  $p: X \rightarrow X/G$  определяет локально тривиальное расслоение  $\rho = (X, p, X/G)$  со слоем  $G$ . Рассмотрим открытое покрытие базы  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  такое, что  $\rho$  тривиально над каждым  $U_\lambda$ . Поскольку  $X/G$  метризуемо, то открытое покрытие  $\{U_\lambda\}$  можно считать локально конечным.

Пусть  $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  - вписанное в  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  покрытие, удовлетворяющее заключению леммы 2.I. Пусть, далее,

$k_\lambda: G \times U_\lambda \rightarrow p^{-1}(U_\lambda)$  - гомеоморфизм, определяющий карту расслоения  $\rho$  над  $U_\lambda$ , и пусть  $k'_\lambda = k_\lambda / G \times V_\lambda$ . Поскольку семейство  $\{V_\lambda\}$  дизъюнктно (условие 2)), то, в силу леммы I.3, гомеоморфизмы  $\{k'_\lambda\}$  индуцируют гомеоморфизм

$k': G \times \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \approx \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G \times V_\lambda \approx \bigcup_{\lambda \in \Lambda} p^{-1}(V_\lambda)$ . Положим  $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}_0}$ ;  $\mathcal{D}_0 = k'(1 \times \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda) \approx \bigcup_{\lambda \in \Lambda} k'(1 \times V_\lambda)$  и покажем, что так определенные  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{D}_0$  определяют фундаментальную область.

В силу замкнутости отображения  $p$  (см., хотя бы, [21] теорема 3.I, с. 47), имеем:  $p(\mathcal{D}) = p(\mathcal{D}_0) = \overline{p(\mathcal{D}_0)} = X/G$ , откуда следует условие (а). Обозначим множество  $k'(1 \times V_\lambda)$  через  $W_\lambda$ . Легко видеть, что семейство  $\{\overline{W_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$  локально конечно, следовательно,  $\dim \mathcal{D} = \max_{\lambda \in \Lambda} \dim \overline{W_\lambda}$  (лемма I.8). Заметим, что  $\overline{W_\lambda}$  гомеоморфно  $\overline{V_\lambda}$  (свойство I)). Поэтому  $\dim \mathcal{D} = \dim X/G$ . Кроме того, учитывая свойство 3) и лемму I.9, получаем:  $\dim G(\mathcal{D} - \mathcal{D}_0) = \dim p^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \partial V_\lambda) \leq \dim G + \dim(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \partial V_\lambda) \leq \dim G + \dim X/G - 1 = \dim G + \dim X - \dim G - 1 = \dim X - 1$ .

Но  $\mathcal{D} - \mathcal{D}_0 \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\overline{W_\lambda} - W_\lambda)$  (лемма I.I2), откуда  $\dim(\mathcal{D} - \mathcal{D}_0) \leq \dim X/G - 1$  и, тем самым, свойство (г) установлено. Свойства (б) и (в) усматриваются непосредственно. Теорема доказана.

3. Предположим, что  $A$  - такое  $G$ -подпространство  $G$ -пространства  $X$ , что  $G$  действует на  $X - A$  свободно. Положим  $X^{(0)} = X$ ,  $L^{(0)} = X^{(0)} \setminus A$ . Так как  $X^{(0)} \setminus A$  - свободное  $G$ -подпространство, то в силу теоремы I, существует фундаментальная область  $\mathcal{D}^{(0)} \subset L^{(0)}$ . Обозначим через  $\mathcal{D}_0^{(0)}$  открытое подмножество  $\mathcal{D}^{(0)}$ , удовлетворяющее условиям (б) - (г) определения фундаментальной области. Пусть  $X^{(1)} = AUG(\mathcal{D}^{(0)}, \mathcal{D}_0^{(0)})$ , а  $L^{(1)} = X^{(1)} \setminus A$ . Свойство в) позволя-

ет построить фильтрацию замкнутыми инвариантными множествами  $X = X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset \dots \supset A$ . Если  $X \setminus A$  конечномерно, то эта фильтрация, очевидно, конечна (свойство (г)); положим в этом случае  $A = X^{(l)}$ . Пусть  $Y$  - другое  $G$ -пространство.

Предложение I. Пусть  $X \setminus A$  конечномерно. Произвольное эквивариантное отображение  $A$  в  $Y$  тогда и только тогда эквивариантно продолжается на все  $X$ , когда при всех  $i \geq 1$  произвольное эквивариантное отображение  $X^{(i)} \rightarrow Y$  продолжается на  $X^{(i)} \cup \mathcal{D}^{(i-1)}$ . Это же верно и для продолжения эквивариантных гомотопий.

Доказательство. Необходимость этого утверждения очевидна.

Достаточность. Искомое отображение будем строить по индукции. Пусть на множество  $X^{(i)}$  отображение уже продолжено до отображения  $f_i: X^{(i)} \rightarrow Y$ .

Лемма 2.2 (см. [9], теорема 3.3, с. 48). Пусть компактная группа  $\Gamma$  действует на пространствах  $X$  и  $Y$ . Пусть  $K \subset X$  - замкнутое множество и пусть отображение  $\varphi: K \rightarrow Y$  таково, что если для некоторого  $g \in \Gamma$  обе точки  $x$  и  $gx$  лежат в  $K$ , то  $\varphi gx = g\varphi x$ . Тогда  $\varphi$  можно продолжить, причем единственным образом, до эквивариантного отображения  $\varphi': \Gamma(K) \rightarrow Y$ .

Так как  $(\mathcal{D}^{(i-1)} \setminus \mathcal{D}_0^{(i-1)}) \subset X^{(i)}$ , то на этом множестве отображение уже задано. По условию  $f_i$  продолжается до отображения  $\tilde{f}_i: X^{(i)} \cup \mathcal{D}^{(i-1)} \rightarrow Y$ . Далее, лемма 2.2 и свойства (а) и (б) фундаментальной области гарантируют существование единственного эквивариантного продолжения  $\tilde{f}_i$  на  $X^{(i-1)}$ .

### § 3. Эквивариантная теорема Дугунджи и теорема Борсука-Улама

I. Хорошо известна следующая

Теорема (см., например, [8], теорема 9.1(1), с. 90).

Если  $Y$  - локально  $n$ -связное метрическое пространство,  $B$  - замкнутое подпространство метрического пространства  $F$  и  $\dim(F \setminus B) \leq n+1$ , то для всякого непрерывного отображения  $\varphi: B \rightarrow Y$  существует такая окрестность  $U$  множества  $B$ , что  $\varphi$  имеет непрерывное продолжение  $\varphi_1: U \rightarrow Y$ . Если, к тому же,  $Y$  - глобально  $n$ -связно, то  $\varphi$  продолжается на все  $F$ .

Эквивариантные аналоги этой теоремы рассматривались в

[27], [28], [26], [18]. Оказывается, соответствующий результат верен в полной общности.

**Теорема 2.** Пусть  $Y$  - метрическое  $G$ -пространство и  $f: A \subset X \rightarrow Y$  - эквивариантное отображение. Допустим, что множества  $Y^{H_i}$  локально  $n_i$ -связны ( $n_i \geq 0, i=1, \dots, m$ ). Если при всех  $i$   $\dim(X_{(H_i)} \setminus A)/G \leq n_i + 1$  то  $f$  продолжается до эквивариантного отображения некоторой инвариантной окрестности множества  $A$ . Если, к тому же,  $Y^{H_i}$  являются глобально  $n_i$ -связными ( $i=1, \dots, m$ ), то  $f$  эквивариантно продолжается на  $X$ .

В предположении, что все  $Y^{H_i}$  -  $ANR$ -пространства (соответственно,  $AR$ -пространства), а  $X$  - локально компактно и сепарабельно, теорема 2 была получена Яворовским [27]. Лаоф [29] снял условие локальной компактности пространства  $X$ , а Мадиримов [28] устранил условие сепарабельности пространства  $X$  и ослабил требования на  $Y^{H_i}$ . Заметим, что все перечисленные выше частные случаи теоремы 2 получены в рамках традиционного метода продолжения сечений соответствующих расслоений. Кроме того, в [27], [28], [26], необходимо использованы (весьма нетривиальные) теоремы вложения.

**2. Д о к а з а т е л ь с т в о.** Покажем, прежде всего, как локальный вариант теоремы следует из глобального. В самом деле, пусть доказан глобальный вариант теоремы. Обозначим через  $K(Y)$  конус над  $Y$ , на котором задано коническое действие группы  $G$  (см., например, [9], с. 105). Очевидно, что  $(K(Y))^{H_i} = K(Y^{H_i})$ , следовательно  $(K(Y))^{H_i}$  локально и глобально  $n_i$ -связны ( $i=1, \dots, m$ ). Значит, отображение  $f: A \rightarrow Y \subset K(Y)$  может быть продолжено до эквивариантного отображения  $\tilde{f}: X \rightarrow K(Y)$ . Пусть  $y_0$  - вершина конуса  $K(Y)$ . Положим  $U = \tilde{f}^{-1}(\{K(Y) \setminus y_0\})$ . Очевидно, что композиция сужения  $\tilde{f}$  на  $U$  с естественной эквивариантной ретракцией  $\{K(Y) \setminus y_0\}$  на  $Y$  является искомым отображением.

Предположение о конечности числа орбитных типов позволяет, используя фильтрации (I.1) и (I.2), построить интересное нас глобальное продолжение по индукции. При этом лемма I.1 сводит шаг индукции к доказательству следующего утверждения.

**Лемма 3.1.** Предположим, что  $G$  действует на  $X \setminus A$  свободно и  $f: A \rightarrow Y$  - эквивариантное отображение в  $G$ -пространство  $Y$ , являющееся локально и глобально  $n$ -связным.

Если  $\dim(X_{(n_i)} \setminus A)/G \leq n+1$ , то  $f$  эквивариантно продолжается на  $X$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{D}^{(i)}$ ,  $\mathcal{D}^{(i)}$ ,  $X^{(i)}$  и  $L^{(i)}$  — как и в предложении I. Так как (свойство (г) определения фундаментальной области)  $\dim \mathcal{D}^{(i-1)} = \dim L^{(i-1)}/G \leq \dim L^{(0)}/G = \dim(X \setminus A)/G \leq n+1$ , то для любого  $i \leq \ell$  по (неэквивариантной) теореме Дугунджи, существует (неэквивариантное) продолжение  $\tilde{f}_i: X^{(i)} \cup \mathcal{D}^{(i-1)} \rightarrow Y$  отображения  $f$ . Остается воспользоваться предложением I. Лемма (а вместе с ней и теорема) доказана.

3. Ниже приводятся некоторые следствия теоремы 2.

**Следствие 3.1.** Если в условиях локального варианта теоремы 2  $\dim(X_{(n_i)} \setminus A)/G \leq n_i$ , то ее заключение справедливо для продолжения гомотопий.

Это следствие (его доказательство очевидно) является эквивариантным аналогом теоремы 9.1(4) из [8], с. 90.

Для формулировки следующего следствия напомним некоторые понятия. Пусть  $f: B \rightarrow Y$  — произвольное отображение. Гомотопию  $h: N \times [0, 1] \rightarrow Y$ , где  $N$  — некоторое подпространство пространства  $B$ , называют частичной гомотопией отображения  $f$ , если  $f|_N = h|_{N \times \{0\}}$ . Гомотопия  $e: B \times [0, 1] \rightarrow Y$  называется распространением гомотопии  $h: N \times [0, 1] \rightarrow Y$ , если  $e|_{N \times [0, 1]} = h$ .

**Следствие 3.2.** В условиях локального варианта теоремы I и следствия 3.1. любая частичная эквивариантная гомотопия  $f: A \times [0, 1] \rightarrow Y$  эквивариантного отображения  $\varphi: X \rightarrow Y$  эквивариантно распространяема на  $X$ .

**Доказательство.** Определим эквивариантное отображение  $h: A \times [0, 1] \cup X \times \{0\} \rightarrow Y$  формулой:

$$h(x, t) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in X, t = 0; \\ f_x(x), & x \in A, t \in [0, 1]. \end{cases}$$

По условию  $h$  продолжается до эквивариантного отображения  $\tilde{h}: V \rightarrow Y$  некоторой инвариантной окрестности  $V$  множества  $A \times [0, 1] \cup X \times \{0\}$  в  $X \times [0, 1]$ . В силу компактности отрезка  $[0, 1]$  существует такая инвариантная окрестность  $W$  подпространства  $A$  в  $X$ , что  $W \times [0, 1] \subset V$ ; пусть

$H = \tilde{h}|_{W \times [0, 1] \cup X \times \{0\}}$ . Согласно лемме Урысона существует непрерывная функция  $\chi: X/G \rightarrow [0, 1]$ , что  $\chi(X/G \setminus W/G) = 0$ ,  $\chi(A/G) = 1$ . Мы определим (ср. [22]) искомое отображение  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  положив  $F(x, t) = H(x, \chi(\bar{x}) \cdot t)$ , где  $\bar{x}$  — образ  $x$  при орбит-

ном отображении  $P: X \rightarrow X/G$ . Очевидны непрерывность и эквивариантность построенного отображения. Следствие доказано.

Отметим, что следствие 3.2 является эквивариантным аналогом теоремы о распространении гомотопии ([22], с. 47).

Известная теорема Борсука-Улама, утверждающая нечетность степени нечетного отображения, обобщалась различными авторами (см. обзор [30]). В [14] для эквивариантных отображений сфер с заданными на них свободными действиями конечной циклической группы была доказана взаимная простота степени с порядком группы. Ниже приводится обобщение этого факта на случай эквивариантного отображения сферы в произвольное метрическое  $G$ -пространство.

Следствие 3.3. Пусть  $G$  свободно действует на метрическом пространстве  $X$ ,  $\dim X \leq n$ , и на сфере  $S^n$ . Пусть, далее,  $\varphi: S^n \rightarrow X$  - эквивариантное отображение. Тогда существует такой  $\xi \in H^n(X; \mathbb{Z})$ , что:  $\varphi^*(\xi)$  взаимно просто с  $|G|$ , если  $G$  конечна, и  $\varphi^*(\xi) = 1$ , если  $G$  бесконечна (в частности,  $H^n(X; \mathbb{Z}) \neq 0$ ).

Доказательство. Пусть  $\psi: X \rightarrow S^1$  эквивариантное отображение, существующее в силу теоремы 2. Известно (см., например, [3]), что  $\deg(\psi \circ \varphi) \equiv 1 \pmod{|G|}$ , если  $G$  конечна. Случай бесконечной группы тривиально следует из того факта, что  $G$  содержит тор.

Другое обобщение теоремы Борсука-Улама (случай несвободных действий  $P$ -групп) будет приведено в следующем параграфе.

Мы закончим этот параграф одним утверждением, усиливающим соответствующий результат Яворовского [26].

Предложение 2. Пусть  $f: A \subset X \rightarrow Y$  - эквивариантное отображение в метрическое  $G$ -пространство  $Y$ . Если для любого орбитного типа  $(H)$  в  $X \setminus A$  множество  $\gamma_H$  является  $ANR$ -пространством, (соответственно,  $AR$ -пространством), то  $f$  продолжается на некоторую инвариантную окрестность множества  $A$  (соответственно на  $X$ ).

Доказательство этого факта вполне аналогично доказательству теоремы 2.

§ 4. Принцип сравнения Красносельского для эквивариантных отображений многообразий.

1. Пусть конечная группа  $G$  действует на топологическом

ком (связном, компактном, ориентированном)  $n$ -мерном многообразии  $M$  и на ориентированной  $n$ -мерной сфере  $S$ , и пусть каждый  $g \in G$  либо одновременно сохраняет ориентации на  $M$  и  $S$ , либо одновременно их меняет.

**Теорема 3.** Пусть эквивариантные отображения  $\phi, \psi: M \rightarrow S$  эквивариантно гомотопны на замкнутом инвариантном подмножестве  $N \subset M$ . Пусть, далее,  $\langle (H_1), (H_2), \dots, (H_m) \rangle$  - множество орбитных типов в  $M \setminus N$ . Предположим, что множества  $S^{H_i} (i = 1, \dots, m)$   $(\dim(M_{H_i}) \setminus N) - 1$  -связны. Тогда существуют такие целые числа  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , что  $\deg \phi - \deg \psi = \sum_{i=1}^m a_i \cdot |G/H_i|$

Доказательство теоремы опирается на две леммы, формулировка которых предположим некоторые вспомогательные построения. Определим на цилиндре  $C = M \times [0, 1]$  действие группы  $G$ , полагая его тождественным на отрезке. Зададим, далее, коническое действие  $G$  на шаре  $B$ , ограниченном сферой  $S$ . Пусть  $O$  - центр шара. По условию теоремы задано эквивариантное отображение  $f_0: N \times [0, 1] \cup M \times \{0, 1\} \rightarrow S \subset B$ . Пусть  $f: C \rightarrow B$  - эквивариантное продолжение отображения  $f_0$ . Положим  $K = f^{-1}(O)$ . При надлежащем выборе ориентаций на  $M$  и  $S$  существуют фундаментальные классы  $O_K \in H_n(M, M \setminus K)$  и  $O_0 \in H_n(B, B \setminus O)$ , которые определяют степень отображения  $f$  по формуле  $f_*(O_K) = (\deg f) O_0$  (см. § 1). При этом справедлива

**Лемма 4.1.**  $\deg \phi - \deg \psi = \pm \deg f$

Эта лемма является непосредственным следствием леммы I.13

**Лемма 4.2.** Существует такое эквивариантное продолжение  $F: C \rightarrow B$  отображения  $f_0$ , что: (а)  $F^{-1}(O) = \bigcup_{j=1}^m T_j$ ,  $T_j \cap T_p = \emptyset$ , если  $j \neq p$ ; (б) для любого  $j = 1, \dots, m$   $T_j = G(K_j)$ , где  $\{K_j\}$  - компакты, причем (в)  $H_j(K_j) = K_j$ ; (г)  $gK_j \cap K_j = \emptyset$ , если  $gK_j^{-1} \neq K_j$ .

2. Доказательство леммы 4.2. Аналогично тому, как это было сделано в § 1 (см. фильтрации (I.1) и (I.2)), можно определить "цилиндрическую" фильтрацию  $\{C_i = M_i \times [0, 1]\}_{i=1}^m$   $G$ -пространства  $C$  и "коническую" фильтрацию  $\{B_i = K(S_i)\}_{i=1}^m$   $G$ -пространства  $K(S)$ . Построение искомого отображения  $F$  будем проводить индукцией по орбитным типам.

Для построения индукционного перехода необходимо решить следующую задачу. Пусть  $f_i: C_i \rightarrow B_i$  -  $G$ -эквивариантное отображение ( $i = 0, 1, \dots, m-1$ ), множество нулей которого удовлетворяет перечисленным ниже свойствам: (а')  $f_i^{-1}(O) = \bigcup_{j=1}^i T_j^i$ , где  $T_j^i \cap T_p^i = \emptyset$ , если  $j \neq p$ ; (б') для каждого  $j = 1, \dots, i$   $T_j^i = G(K_j^i)$ ,

где  $\{K_j^i\}$  - компакты, причем  $(\delta') H_j(K_j^i) = K_j^i$ ;  $(\delta')$   
 $g K_j^i \cap h K_j^i = \emptyset$ , если  $g h^{-1} \notin H_j$ . (Здесь верхний индекс у  
множеств  $K_j^i$  и  $T_j^i$  означает номер шага индукции, а нижний -  
номер орбитного типа в  $O_i(M \setminus N)$ ).

Определим отображение  $f_i: C_i \cup (\partial C \cap C_{i+1}) \rightarrow B_{i+1}$  фор-  
мулой

$$f_i(x) = \begin{cases} \tilde{f}_i(x), & x \in C_i; \\ f_0(x), & x \in (\partial C \cap C_{i+1}). \end{cases}$$

Построить  $G$ -эквивариантное продолжение  $f_{i+1}: C_{i+1} \rightarrow B_{i+1}$  со  
свойствами  $(\alpha')$  -  $(\gamma')$  (при соответствующей замене  $i$  на  $i+1$ ).

Рассмотрим множество  $C_{i+1}^{H_{i+1}} = C^{H_{i+1}} \subset C_{i+1}$ . Здесь опреде-  
лено действие группы Вейля  $W(H_{i+1})$ , причем это действие сво-  
бодно на множестве  $C^{H_{i+1}} \setminus C_i^{H_{i+1}}$ . Возьмем сужение отображения  $f_i$   
на множество  $V_{i+1} = C_i^{H_{i+1}} \cup (\partial C \cap C^{H_{i+1}})$ . Из  $G$ -эквивариантности  
 $f_i$  на  $C_i \cup (\partial C \cap C_{i+1})$  следует  $W(H_{i+1})$ -эквивариантность ото-  
бражения  $f_i|_{V_{i+1}}$ . Мы хотим продолжить  $f_i|_{V_{i+1}}$  до  $W(H_{i+1})$ -  
эквивариантного отображения  $f^{H_{i+1}}: C^{H_{i+1}} \rightarrow B_{H_{i+1}}$  так, чтобы это  
продолжение обладало хорошим множеством нулей.

В силу предположений индукции и теоремы 5.4. из [9],  
с. 93, существует настолько малая  $G$ -инвариантная окрест-  
ность  $U_j^i$  множества  $T_j^i$ , что: 1)  $U_j^i = \bigcup_{g \in G/H_j} g U_{K_j^i}$ , где  
 $\{g_s\}_{s=1}^{|G/H_j|}$  - представители смежных классов  $G/H_j$ , причем  
2)  $U_{K_j^i} - H_j$ -инвариантные окрестности множеств  $K_j^i$ ;  
3)  $g_t U_{K_j^i} \cap g_p U_{K_j^i} = \emptyset$ , если  $t \neq p$ ; 4)  $U_{K_j^i} \cap U_{K_l^i} = \emptyset$ ,  
если  $l \neq j$ . Положим  $\tilde{U}_j^i = U_j^i \cap C^{H_{i+1}}$ . По лемме I.10 в  $\tilde{U}_j^i$   
которая, очевидно,  $W(H_{i+1})$ -инвариантна, можно вписать  $W(H_{i+1})$ -  
инвариантную окрестность  $\tilde{U}_j^{i,c}$  множества  $T_j^i \cap C^{H_{i+1}}$  со свой-  
ством  $\dim(\partial \tilde{U}_j^{i,c}) < \dim C^{H_{i+1}}$ . Введем в рассмотрение мно-  
жество  $U^{(i)} = \bigcup_{j=1}^r \tilde{U}_j^{i,c}$ . Тогда

$$W(H_{i+1})(U^{(i)}) = U^{(i)}; \quad (4.1)$$

$$\dim(\partial U^{(i)}) < \dim C^{H_{i+1}} \quad (4.2)$$

Пересечем множество  $\partial U^{(i)}$  с множеством  $V_{i+1}$ . В силу (4.1)  
и того, что на  $C^{H_{i+1}} \setminus C_i^{H_{i+1}}$  группа  $W(H_{i+1})$  действует  
свободно, заключаем, что и на  $\partial U^{(i)} \setminus (\partial U^{(i)} \cap V_{i+1}) \subset C^{H_{i+1}}$   
 $W(H_{i+1})$  действует свободно. Далее, множество  $\{B^{H_{i+1}} \setminus 0\}$  ло-  
кально (лемма I.6) и глобально ((4.2) и условие теоремы)  
 $(\dim \partial U^{(i)} - 1)$  - связно. Теперь по теореме 2 отображение  
 $f_i|_{V_{i+1}}$  можно продолжить до  $W(H_{i+1})$ -эквивариантного отображения  
 $f_i: V_{i+1} \cup \partial U^{(i)} \rightarrow B^{H_{i+1}}$  без новых нулей. Множество  
 $U^{(i)} \setminus (V_{i+1} \cup \partial U^{(i)})$  является, в силу (4.1), свободным  $W(H_{i+1})$ -  
пространством. Поскольку множество  $B^{H_{i+1}}$  является  $AR$

пространством (лемма I.5), то  $\tilde{f}_i$  можно продолжить до  $W(H_{i+1})$ -эквивариантного отображения  $\tilde{f}_i: V_{i+1} \cup U^{(i)} \rightarrow B^{H_{i+1}}$  с произвольным множеством новых нулей, лежащих во внутренности множества  $U^{(i)} \setminus V_{i+1}$ . Наконец, множество  $C^{H_{i+1}} \setminus (V_{i+1} \cup U^{(i)})$  является свободным  $W(H_{i+1})$ -пространством. Как объяснялось в § 2, существует фильтрация замкнутыми  $W(H_{i+1})$ -инвариантными множествами  $C_{i+1}^{(0)} = V_{i+1} \cup U^{(i)} \subset C_{i+1}^{(1)} \subset C_{i+1}^{(2)} \subset \dots \subset C_{i+1}^{(l)} = C^{H_{i+1}}$  пространства  $C^{H_{i+1}}$  такая, что  $\dim(C_{i+1}^{(k)} \setminus C_{i+1}^{(k-1)}) < \dim(C_{i+1}^{(k+1)} \setminus C_{i+1}^{(k)}) \leq \dim(M_{(H_i)} \setminus N) + 1$  ( $k=0, 1, \dots, l-1$ ). Теперь, в силу локальной (лемма I.6) и глобальной (по предположению) ( $\dim(M_{(H_i)} \setminus N)$ ) - связности множества  $\{B^{H_{i+1}}, 0\}$  отображение  $\tilde{f}_i$  может быть продолжено до  $W(H_{i+1})$ -эквивариантного отображения  $f'_i: V_{i+1} \cup U^{(i)} \cup C_{i+1}^{(l-1)} \rightarrow B^{H_{i+1}}$  без новых нулей. Далее, в силу того, что  $B^{H_{i+1}}$  есть  $AR$ -пространство (лемма I.5)  $f'_i$  продолжается (неэквивариантно) до некоторого отображения  $f''_i: V_{i+1} \cup U^{(i)} \cup C_{i+1}^{(l-1)} \cup D_{i+1}^{(l)} \rightarrow B^{H_{i+1}}$  (здесь  $D_{i+1}^{(l)}$  - фундаментальная область для свободного  $W(H_{i+1})$ -пространства  $C_{i+1}^{(l)} \setminus (V_{i+1} \cup U^{(i)} \cup C_{i+1}^{(l-1)})$ ). Обозначим через  $Z_{i+1}$  компактное множество нулей отображения  $f''_i: D_{i+1}^{(l)}$  и продолжим егф в соответствии с леммой 2.2 до  $W(H_{i+1})$ -эквивариантного отображения  $f^{H_{i+1}}: C^{H_{i+1}} \rightarrow B^{H_{i+1}}$ . Ясно, что множество нулей на  $C^{H_{i+1}} \setminus (V_{i+1} \cup U^{(i)})$  допускает представление в виде  $W(H_{i+1})(Z_{i+1})$ , причем, для любых  $h_1, h_2 \in W(H_{i+1})$   $h_1(Z_{i+1}) \cap h_2(Z_{i+1}) = \emptyset$ , если  $h_1 \neq h_2$ . Наконец,  $W(H_{i+1})$ -эквивариантное отображение  $f^{H_{i+1}}$  продолжаем по лемме I.1 до  $G$ -эквивариантного отображения  $\tilde{f}_{i+1}: C_{i+1} \rightarrow B_{i+1}$  и полагаем  $K_{i+1} = Z_{i+1}$ ;  $K_j^{i+1} = K_j^i \cup (\tilde{f}_{i+1}^{-1}(0) \cap U_{K_j^i})$ ;  $T_j^{i+1} = G(K_j^{i+1})$  ( $j=1, 2, \dots, i+1$ ). В силу конечности группы  $G$   $\tilde{f}_{i+1}^{-1}(0)$  по построению обладает свойствами  $(\alpha')$  -  $(\delta')$  (с соответствующей заменой  $i$  на  $i+1$ ). Добравшись, таким образом, по индукции до последнего шага, мы имеем  $G$ -эквивариантное отображение  $F = \tilde{f}_m: C_m = C \rightarrow B = B_m$ , являющееся  $G$ -эквивариантным продолжением отображения  $f_0$ , причем, полагая  $K_j = K_j^m$ ,  $T_j = T_j^m$ , получаем, что  $F^{-1}(0)$  есть объединение множеств  $\{T_j\}_{j=1}^m$ , обладающих свойствами  $(\alpha)$  -  $(\delta)$ . Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 3. Пусть  $F: C \rightarrow B$  -  $G$ -эквивариантное продолжение отображения  $f_0$ , удовлетворяющее заключению леммы 4.2. По лемме 4.1  $\deg F = \deg F|_{(M_{(H_0)} \cup M_{H_1})} = \pm (\deg \psi - \deg \phi)$ . Но, в силу леммы I.14 и условия  $(\alpha)$ ,  $\deg F = \sum_{j=1}^m \deg F_j$ , где  $F_j$  - сужение  $F$  на достаточно

малую окрестность множества  $T_j$ . В силу условий (β)-(δ) каждое  $T_j$  можно представить в виде непересекающихся множеств  $\{K_j^s\}$  ( $s=1, 2, \dots, |G/H_j|$ ), каждое из которых есть соответствующий сдвиг множества  $K_j$ . В силу леммы I.14  $\deg F_j = \sum_{s=1}^{|G/H_j|} \deg F_j^s$ , где  $F_j^s$  - сужение  $F_j$  на достаточно малую окрестность  $K_j^s$ . Теперь, учитывая  $G$ -эquivариантность  $F$ , леммы I.15 и I.16 и то, что каждый  $g \in G$  либо одновременно сохраняет ориентации на  $M$  и  $S$ , либо одновременно их меняет, заключаем, что все  $\deg F_j^s$  ( $s=1, \dots, |G/H_j|$ ) равны одному и тому же числу  $a_j$ . Таким образом,  $\deg F_j = a_j \cdot |G/H_j|$ , откуда и следует заключение теоремы.

4. В этом пункте мы укажем ряд частных случаев и следствий теоремы 3.

Следствие 4.1. В условиях теоремы 3 справедлива формула  $\deg \phi \equiv \deg \psi \pmod{\text{НОД}\{|G/H_j|\}} (j=1, \dots, m)$

В частном случае, когда  $M$  вложено в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , где задано одно действие группы  $G$ , относительно которого  $M$  инвариантно, причем,  $gO \neq O$  при всех  $g \in G$  и  $N \supset M^G$ , из следствия 4.1 вытекает

Следствие 4.2. Для всякого equivариантного  $f: M \rightarrow \{\mathbb{R}^{n+1}, O\}$ , equivариантно гомотопного на  $N$  тождественному отображению, справедлива формула  $\deg f \equiv 1 \pmod{\text{НОД}\{|G/H_j|\}}$

Частный случай этого следствия ( $G$  действует линейно, причем  $M^G = \emptyset$ ) был получен в [29]; ср. также [31].

Предположим теперь, что  $M$  и  $S$  - как в теореме 3, а  $G$  -  $p$ -группа и  $N \supset M^G$ .

Следствие 4.3. По модулю  $p$  степень equivариантного отображения  $f: M \rightarrow S$  определяется equivариантным гомотопическим типом его сужения на  $N$ .

Приведем, далее, обещанное обобщение теоремы Борсука-Улама.

Следствие 4.4. Пусть  $G$  - конечная  $p$ -группа, действующая без  $G$ -неподвижных точек на метрическом пространстве  $X$ ,  $\dim X \leq n$ , и на сфере  $S^n$ . Пусть  $(H_1), \dots, (H_m)$  - орбитные типы в  $X$ , причем, для любого  $i=1, \dots, m$  множества  $S^{H_i}$  ( $\dim X^{H_i} - 1$ )-связны. Пусть  $\varphi: S^n \rightarrow X$  - equivариантное отображение. Тогда существует такой  $f \in H^n(X; \mathbb{Z})$ , что  $f^*(f) \neq 0 \pmod{p}$ .

Доказательство аналогично доказательству следствия 3.3.

**Следствие 4.5.** Пусть в условиях теоремы 3  $m=1$ . Тогда  $\deg \phi \equiv \deg \psi \pmod{|G/H_m|}$ . В частности, если  $M \sim N$  - свободное  $G$ -пространство, то

$$\deg \phi \equiv \deg \psi \pmod{|G|}. \quad (4.3)$$

Пусть  $(H_1), (H_2), \dots, (H_m)$  - орбитные типы на  $M$ ; положим  $N = M_{m-1}$ . Тогда из следствия 4.3 и формулы (4.3) вытекает

**Следствие 4.6.** Степень эquivариантного отображения  $\phi: M \rightarrow S$  по модулю  $p$  определяется equivариантным гомотопическим типом сужения  $\phi$  на  $N$  ("полугомотопическим" типом).

Случай  $M = S$ ,  $G$  - циклическая группа,  $M_{m-1} = \emptyset$  рассматривался впервые М.А. Красносельским в [16], с чем и связано название этого параграфа. Впоследствии результат М.А. Красносельского был получен в рамках теории Смита Я.А. Израилевичем и Э.М. Мухамадиевым в [14]. Понятие "полугомотопического" типа (для действия циклической группы на сфере) было введено в работе П.П. Забрейко [12], где для отображений сфер следствие 4.6 установлено при одном дополнительном условии на  $M_{m-1}$ . Это дополнительное условие было устранено Т.Н. Фоменко (Шелоковой) [23] с помощью гомологической техники; впоследствии П.П. Забрейко было предложено соответствующее геометрическое рассуждение [17]. Случай действий произвольной (вообще говоря, нециклической) конечной группы на сферах рассматривался в совместной работе автора и С.Д. Бродского [3] и, независимо, С.И. Костадиновым [33]. Полученный в [3] и [17] результат был обобщен, с одной стороны, автором в [5] на случай equivариантных отображений многообразий, вложенных в  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; а, с другой стороны, охвачен формулой для степени equivариантного отображения кохомологических сфер, полученной Т.Н. Фоменко [7].

В заключение этого пункта рассмотрим следующую ситуацию:  $M$  - гладкое многообразие, на  $M$  и  $S$  задано гладкое действие конечной группы  $G$ , причем, для любого  $H_i \in \text{Iso}(M)$   $S^{H_i} = S$  ( $i=1, \dots, m$ ). В силу теоремы о существовании главного орбитного типа ([9], теорема 3.1, с. 199), множество  $M \setminus M_{m-1}$  открыто и плотно в  $M$ , следовательно, множество  $M_{m-1}$  нигде не плотно в  $M$ , а значит ([24], теорема 7.4.18) для любого  $i$  ( $0 \leq i < m$ )  $\dim M_i < \dim M$ . Отсюда и из предложения 2.1 легко следует, что любые два equivариантных отображения  $\phi, \psi: M \rightarrow S$  equivариантно

гомотопны на  $M_{m-1}$ . Полагая  $N = M_{m-1}$ , получаем (следствие 4.6), что  $\deg \phi \equiv \deg \psi \pmod{|G/H_{m1}|}$ ; в частности, если  $M \cdot M_{m-1}$  - свободно, то  $\deg \phi \equiv \deg \psi \pmod{|G|}$ . Последнее утверждение было получено Бовчицем в [9], где существенно использовались методы гладкой топологии. Однако, все результаты работы [9], относящиеся к принципу сравнения, справедливы без предположений о гладкости. Приведем, к примеру, один из них.

Следствие 4.7. Пусть  $M$  и  $S$  - как в следствии 4.6, причем,  $S^{H_i} = S$  для любого  $H_i \in \text{Iso}(M)$ . Пусть, далее,  $G \in \text{Iso}(S)$ . Тогда для всякого эквивариантного отображения  $\phi: M \rightarrow S$

$$\deg \phi \equiv 0 \pmod{|G|}.$$

5. С помощью техники "почти периодических" и "почти эквивариантных" отображений, развитой в [2] и [1], могут быть получены бесконечномерные аналоги теоремы 3.

Следствие 4.8. Пусть  $E$  - гильбертово пространство, причем  $\Delta \subset E$  - открытое подмножество и пересечение  $\partial M$  с достаточно большими конечномерными пространствами есть связные многообразия. Пусть, далее,  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$  - пара линейных действий конечной группы  $G$  на  $E$  и  $\partial \Delta$  инвариантно относительно  $G^{(1)}$ . Пусть, наконец,  $N \subset \partial \Delta$  - замкнутое  $G$ -пространство и  $\partial \Delta \setminus N$  свободно. Тогда для любых эквивариантных вполне непрерывных векторных полей  $\phi, \psi: \partial \Delta \rightarrow \{E, 0\}$ , эквивариантно гомотопных на  $N$ , справедлива формула  $\delta(\phi, \partial \Delta) \equiv \delta(\psi, \partial \Delta) \pmod{|G|}$  (здесь  $\delta(\phi, \partial \Delta)$  - вращение поля  $\phi$ ).

Предположив, что группа  $\langle G^{(1)}, G^{(2)} \rangle$  конечна, можно ослабить условие гильбертовости  $E$  до банаховости. Частный случай приведенного следствия для циклических групп был получен в [2], где, между прочим, усиливался соответствующий результат Э.М. Мухамадиева [19] (устранение условия перестановочности образующих действий); ср. также [6].

Следствие 4.9. Пусть  $E$  - банахово пространство,  $\Omega \subset E$  - открытое подмножество, причем  $\partial \Omega$  - то же, что и в следствии 4.8. Пусть  $G$  - конечная группа, линейно действующая на  $E$ , причем,  $\partial \Omega$  инвариантно относительно  $G$ . Пусть, далее,  $N \subset \partial \Omega$  - замкнутое  $G$ -подпространство,  $(H_1), \dots, (H_m)$  - орбитные типы на  $\partial \Omega \setminus N$ . Пусть, наконец,  $\phi, \psi: \partial \Omega \rightarrow \{E, 0\}$  - пара многозначных уплотняющих отображений с выпуклыми образами, коммутирующих с  $G$ , причем ве-

которые под  $I-f$  и  $I-k$  эквивариантно гомотопны на  $N$ . Тогда существуют такие целые числа  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , что

$$\text{deg}(I-f) - \text{deg}(I-k) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot |G/H_i|$$

Случай:  $\partial\Omega$ - банахова сфера,  $G$  действует на  $\partial\Omega \cdot N$  свободно, - рассматривался в [1], где, между прочим, усиливается соответствующий результат работы [13].

### § 5. Эквивариантная теорема Хопфа

I. Хорошо известна следующая

**Теорема (Хопф, [20] теорема 15, с. 554).** Пусть  $(K, N)$  - относительный  $CW$ -комплекс,  $\dim(K \setminus N) \leq n$  ( $n \geq 1$ ). Пусть, далее,  $Y$  -  $(n-1)$ -связно и  $\pi_n(Y) = \mathbb{Z}$ . Пусть, наконец,  $O$  - образующая группы  $H^n(Y) = \mathbb{Z}$ . Тогда равенство  $\mu(\{f\}) = f^*(O)$  определяет изоморфизм между группой относительных гомотопических классов  $[K, N; Y, y_0]$  и группой относительных когомологий  $H^n(K, N; \mathbb{Z})$ .

Ниже приводится эквивариантный аналог этой теоремы.

Рассмотрим следующую ситуацию (см. также 2I, с. 156). Пусть  $X = G$ - $CW$ -комплекс конечного орбитного типа. Для произвольной стационарной подгруппы  $H \subset G$  обозначим через  $n(H)$ ,  $1 \leq n(H) < \infty$ , размерность  $W(H)$ -подкомплекса  $X^H$ . Если  $k \in W(H)$  меняет ориентацию какой-нибудь клетки из  $X^H$ , то будем предполагать, что он меняет ориентации и всех остальных клеток, лежащих в  $X^H$ . Тогда действие  $W(H)$  на  $X^H$  индуцирует гомоморфизм "поведения ориентации"  $e_{n, X}: W(H) \rightarrow \mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$ . Обозначим через  $\omega_H$  элемент  $\sum_{k \in W(H)} e_{n, X}(k) k$  групповой алгебры  $\mathbb{Z}W(H)$ . Положим  $\bar{X}^H = \bigcup_{K \subset H} X^K$ . Пусть  $Y$  - другое  $G$ -пространство, такое, что  $Y^H$   $(n(H)-1)$ -связно для любой  $H \subset \text{Iso}(X)$ , и пусть  $\pi_{n(H)}(Y^H) = \mathbb{Z}$ . Тогда  $H^{n(H)}(Y^H; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  и определен гомоморфизм поведения ориентации  $e_{n, Y}: W(H) \rightarrow \mathbb{Z}^*$ . Предположим, что  $e_{n, X} = e_{n, Y}$ . Фиксируем образующие  $O_H \in H^{n(H)}(Y^H; \pi_{n(H)}(Y^H))$

**Теорема 4.** При сделанных предположениях: (1) множество эквивариантных гомотопических классов  $[X; Y]_G$  непусто; (2) класс  $[f] \in [X; Y]_G$  определяется элементами  $(f/X^H)^*(O_H) \in H^{n(H)}(X^H; \mathbb{Z})$ ,  $H \in \text{Iso}(X)$  с конечными  $W(H)$ ; при этом  $S_H = (f/X^H)^*(O_H)$  по модулю  $\omega_H \cdot H^{n(H)}(X^H; \pi_{n(H)}(Y^H))$  определяется элементами  $S_K = (f/X^K)^*(O_K)$ ,  $K > H$ ,  $H \in \text{Iso}(X)$ ,  $|W(H)| < \infty$  и (4) при фиксированных  $S_K$  возможные значения  $S_H$  заполняют весь класс вычетов.

Замечание. Предположим, что  $H^{n(H)}(X^H; \overline{\pi}_{n(H)}(Y^H)) = \mathbb{Z}$ .

Тогда  $\omega_H \cdot H^{n(H)}(X^H; \overline{\pi}_{n(H)}(Y^H)) = |W(H)| \cdot \mathbb{Z}$ , и мы получаем эквивариантную теорему Хопфа из [2I]. Кроме того, в отличие от [2I], мы не предполагаем, что  $H^{n(H)}(X^H/W(H); \overline{\pi}_{n(H)}(Y^H)) = \mathbb{Z}$ .

2. Доказательство. Запишем орбитные типы  $(H_1), (H_2), \dots, (H_m)$  в  $X$  стандартным образом. Тогда утверждение (I) есть переформулировка теоремы 2. Пусть  $(H) = (H_0)$  и предположим, что уже определено  $G$ -эквивариантное отображение  $f: \bigcup_{j < i} G \cdot X^{H_j} = X_{i-1} \rightarrow Y$ . По лемме I.1  $G$ -эквивариантные относительно гомотопические классы продолжений  $f$  на  $X_i$  взаимно однозначно соответствуют  $W(H)$ -эквивариантным относительно гомотопическим классам продолжений отображения  $f/\overline{X}^H$  на  $X^H$ . Пусть  $f_1^H, f_2^H: X^H \rightarrow Y^H$  - два  $W(H)$ -эквивариантных продолжения отображения  $f/\overline{X}^H$ , класс которого определяется набором элементов  $(f/\overline{X}^H)^*(0_K)$ , где  $K > H$ ,  $|W(K)| < \infty$ . Если  $W(H)$  бесконечна, то  $\dim W(H) \geq 1$  и, по следствию 3.1,  $f_1^H$  и  $f_2^H$  -  $W(H)$ -эквивариантно гомотопны. Поэтому, предполагая, что  $|W(H)| < \infty$ , и используя (неэквивариантную) теорему Хопфа для  $[X^H, Y^H]$ , получаем (2).

Пусть  $f_1^H, f_2^H: X^H \rightarrow Y^H$  - два  $W(H)$ -эквивариантных продолжения отображения  $f: \overline{X}^H \rightarrow Y^H$ . Для доказательства (3) вычислим препятствие к существованию  $W(H)$ -эквивариантной гомотопии между  $f_1^H$  и  $f_2^H$ . Обозначим через  $X_{n(H)-1}$   $W(H)$ -инвариантный остов размерности  $n(H)-1$  комплекса  $X^H$ . По следствию 3.1 на множестве  $\overline{X}^H \cup X_{n(H)-1}$  существует  $W(H)$ -эквивариантная гомотопия между  $f_1^H$  и  $f_2^H$ , тождественная на  $\overline{X}^H$ ; эта гомотопия вместе с отображениями  $f_1^H$  и  $f_2^H$  определяет  $W(H)$ -эквивариантное отображение  $f_0: (\overline{X}^H \cup X_{n(H)-1}) \times [0, 1] \cup X^H \times \{0, 1\} \rightarrow Y^H$ . Вычислим препятствие к продолжению  $f_0$  до  $W(H)$ -эквивариантного отображения  $X^H \times [0, 1] \rightarrow Y^H$ . В силу условий на  $X$  и свободности  $W(H)$ -пространства  $X^H$ ,  $\overline{X}^H$  существует (теорема I) "клеточная" фундаментальная область для действия  $W(H)$  на  $X^H \cdot \overline{X}^H$ , которую обозначим  $\mathcal{D}$ . Соберём все  $(n(H)+1)$ -мерные клетки из  $(X^H \cdot \overline{X}^H) \times [0, 1]$  такие, что  $\partial \sigma \in (\overline{X}^H \cup X_{n(H)-1}) \times [0, 1] \cup (X^H \cdot \overline{X}^H) \times \{0, 1\}$  и обозначим через  $\{K_\sigma\}$  соответствующие коцепи. Тогда  $\nu = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}} K_\sigma$  - "препятствующая" коцепь. Полагая  $\nu_1 = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}} K_\sigma$  убедимся, что  $\nu = \omega_H \nu_1$ . Действительно, если  $\sigma \in \mathcal{D} \times [0, 1]$  и  $\sigma = h \cdot \sigma_0$ ,  $h \in W(H)$ , то, в силу  $W(H)$ -эквивариантности отображения  $f_0$ , имеем:  $K_\sigma(\sigma) = f_0(\partial \sigma) = f_0(e_{h, X}(h) \cdot h(\partial \sigma_0)) = e_{h, X}(h) \cdot h(K_{\sigma_0})$ .

Теперь

$$V = \sum_{\sigma \in \mathcal{K}_{1,0}} K_{\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{n,1}(R_1)(R_2)(R_3)(R_4)(R_5)(R_6)(R_7)(R_8)(R_9)(R_{10})} K_{\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{n,1}(R_1)(R_2)(R_3)(R_4)(R_5)(R_6)(R_7)(R_8)(R_9)(R_{10})} K_{\sigma} = \omega_H \cdot K_{\mathcal{E}_{n,1}}(5.1)$$

Очевидный изоморфизм "опускания"  $(n(n+1))$ -мерных коцепей цилиндра на  $n(n)$ -мерные коцепи основания (см., например, [22], с. 263) сохраняет вид (5.1). Этот же вид наследуется

при переходе к когомологиям. Таким образом, искомое препятствие имеет вид  $\omega_H \cdot d$ , где  $d \in H^{n(n)}(X^H, \bar{X}^H; \mathbb{Z})$ .

Но ([22], предложение 13.2, с. 263)  $(\mathbb{Z}_2^H)^*(0_H) - (\mathbb{Z}_2^H)^*(0_H) =$

$$= j^* \omega_H \cdot d = \omega_H j^* d \in \omega_H \cdot H^{n(n)}(X^H, \mathbb{Z}),$$

где  $j^*: H^{n(n)}(X^H, \bar{X}^H; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{n(n)}(X^H, \mathbb{Z})$  - соответствующий гомоморфизм из последовательности пары. Тем самым (3) доказано. Доказательство (4) аналогично доказательству (3), и мы его опускаем.

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность П.П. Забрейко, М.А. Красносельскому, А.И. Поволоцкому, М.М. Постникову, Ю.М. Смирнову и участникам рижского топологического семинара за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

#### Литература

1. Баланов З.И. О принципе сравнения Красносельского с бесконечномерных пространствах для компактных групп // Латвийский математический ежегодник. Рига, 1988. Вып. 31. С.207-215.
2. Баланов З.И., Винниченко С.В. К задаче о вычислении вращения эквивариантного поля // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль. 1985. С.89-98.
3. Баланов З.И., Бродский С.Д. Принцип сравнения Красносельского и продолжение эквивариантного отображений / Функциональный анализ. Ульяновск, 1984. С. 18-31.
4. Баланов З.И., Кушкулей А.Х. Принцип сравнения для эквивариантных отображений многообразия в сферу // Труды конференции "Проблемы чистой и прикладной математики". Тула, 1988. С. 28-33.
5. Баланов З.И. Геометрические методы и теории эквивариантных векторных полей. Рига: РПИ, 1988.
6. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и степень Лерэ-Шаудера // УМН. 1977. Т.32. № 4. С. 3-54.

7. Борисович Д.Г., Фоменко Т.Н. Гомологические методы в теории периодических и эquivariantных отображений// Глобальный анализ и математическая физика. Воронеж. 1987. С.3-25.
8. Боруск К. Теория ретрактов. М.: Мир. 1971.
9. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука. 1980.
10. Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир. 1976.
11. Забрейко П.П. К теории периодических векторных полей // Вестн. Ярослав. гос. ун-та. Ярославль. 1973. Вып. 2. С. 24-30.
12. Забрейко П.П. К гомотопической теории периодических векторных полей// Геометрические методы в задачах алгебры и анализа. Ярославль. 1980. С. 116-120.
13. Израилевич Я.А., Обуховский В.В. Об эquivariantных многозначных отображениях// ДАН СССР. 1972. Т. 205. № 1. С. 16-18.
14. Израилевич Я.А., Мухамадиев Э.М. О теории периодических отображений сфер// Седмая летн. мат. школа. Киев, 1970. С. 35-46.
15. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука. 1975.
16. Красносельский М.А. О вычислений вращения векторного поля на  $n$ -мерной сфере// ДАН СССР. 1955. Т. 101. № 3. С. 401-404.
17. Костадинов С.И. Об одном специальном случае сравнения вращений эquivariantных полей на конечномерной сфере // Научн. тр. Пловдив. ун-та. Пловдив. 1984. Т. 22. № 2. С. 70-86.
18. Мадримов М. Размерность и ретракция в теории топологических групп преобразований. Ташкент: ФАН. 1986.
19. Мухамадиев Э.М. К теории периодических вполне непрерывных полей// УМН. 1967. Т. 22. № 2. С. 127-128.
20. Спенсер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир. 1971.
21. том Дик Т. Группы преобразований и теории представлений// М.: Мир. 1982.
22. Ху Сы-Цзян. Теория гомотопий. М.: Мир. 1964.
23. Щелокова Т.Н. К задаче о вычислении степени эquivariantного отображения // СМЖ. 1978. Т. 19. № 2. С.426-435.

24. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир. 1971.
25. Bowszyc C. On the winding number and equivariant homotopy classes of maps of manifolds with some finite group actions// Math. Fund. 1983. 115. P. 235-247.
26. Jaworowski J. An equivariant extension theorem and G-retracts with a finite structure// Manuscripta mathematica 1981. 35. 3. P.32-44.
27. Jaworowski J. Extensions of G-maps and Euclidian G-retracts. Math. Z. V.146. 1976. P. 143-148.
28. Lashof R. The equivariant extension theorem// Proc. Amer. Math. Soc. V.83. 1981. N 1. P. 138-140.
29. Marzantowicz W. On the nonlinear elliptic equations with symmetry// J.Math. Anal. Appl. 1981. 81. P.156-181.
30. Steinlein H. Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: a survey// Methodes topologiques d'Analyse non lineaire. 1985. Les Press de l'Universite de Montreal. P. 166-235.
31. Wei-Yue Ding. Generalizations of the Borsuk's Theorem // J.Math. Anal. and Appl. 1985. 110. P.553-567.

Поступило 15. 03. 1988

## FUNDAMENTAL DOMAINS AND SOME PROBLEMS OF EQUIVARIANT TOPOLOGY

Z. Balanov

### Summary

**Definition.** Let a topological group  $G$  act freely on a metric space  $X$ . Let  $D \subset X$  also be a closure of its open subset  $D_0$ . Call  $D$  the fundamental domain if: (a)  $G(D) = X$ ; (b)  $g(D_0) \cap h(D_0) = \emptyset$  if  $g \neq h$  and  $g, h \in G$ ; (c)  $X \setminus G(D_0) = G(D \setminus D_0)$ . If in addition  $\dim X = n < \infty$  then the following condition must hold:  $\dim D = \dim X / |G|$ ;  $\dim(D \setminus D_0) < \dim D - 1$ ;  $\dim G(D \setminus D_0) \leq n - 1$ .

**Theorem.** The fundamental domain exists for any action of compact Lie group on an arbitrary metric space.

This theorem provides a general method of an extension of equivariant maps which is more convenient for various purposes than the usual method of extension of sections. The following results can be obtained as an application of this method.

1. "Equivariant Dugundji theorem", which for some particular cases was considered by Jaworowski (1976, 1981), Lashof (1981) and Madirimov (1986).

2. A generalization of the comparison principle of Krasnoselskii to the case of non-free actions (less general results were established by Zabrejko (1973, 1980), Kostadinov (1984), Balanov and Brodsky (1984), Bowszyc (1983), Marzantowicz (1984)).

3. A generalization of the equivariant Hopf theorem considered by tom Dick (1979) and Bowszyc (1983) to arbitrary G-CW-complexes.

## КАТЕГОРИЯ ДИНАМИК

Д. Вотнару

Кишиневский политехнический институт им. С. Лазо

Разработка новых вычислительных архитектур и языков программирования для них требует рассмотрения отношений совместимости и согласованности программных и аппаратных структур. Унификацию описаний свойств этих структур удастся осуществить с помощью графов, изображающие функциональные устройства и операции точками, а стрелками – зависимости между операциями и каналы передачи информации [8]. Кроме "препарирования" внутреннего содержания указанных структур существует способ внешнего описания с помощью теории категорий и функторов [2, 1, 9, 19]. Основным моментом при категорном описании является задание объектов категории и морфизмов между ними. Моделирование аппаратных и программных структур на языке категорий целесообразно проводить используя в качестве объектов разложимые системы-автоматы, представимые множествами входных и выходных сигналов и множеством состояний. Разложимые системы категорными методами изучались в работах [2, 1], в которых рассматривались системные динамики (объекты) над объектами произвольной категории.

Декомпозицию структур, целенаправленный синтез систем, состоящих из аппаратных и программных структур, а также изучение отношений совместимости и согласованности между ними возможно при наличии информации об основных свойствах категории динамик: существование проективных и индуктивных пределов, существование свободных объектов.

Изучению этих свойств посвящена настоящая статья. Отметим, что в статьях [2, 1] вопросы существования проективных и индуктивных пределов не рассматривались, а вопрос существования свободных динамик решен для тривиального случая – когда процесс в категории совпадает с тождественным функто-

ром категории.

Предложенное определение категории динамик довольно общее и включает случаи категории динамик, предложенное в работах [2, 1], категории универсальных алгебр, моделей, топологических, полутопологических универсальных алгебр [3, 4, 6, II - I4, I6 - I8, 20, 2I] и др. В каждом из этих случаев уделено много внимания существованию проективных и индуктивных пределов и свободных объектов, т.е. существованию левого сопряженного функтора к функтору стирающего дополнительную структуру. Категорное решение указанных вопросов является обобщением всех этих случаев. Следует отметить однако, что при таком подходе не поддаются формулировке и решению многие хорошо известные вопросы. Например, вопрос о вложении объекта в своем свободном объекте (см. [20, 2I, I8, 6]).

Основными результатами работы являются теорема 2.1, утверждающая, что если категория  $\mathcal{K}$  полна слева, то таким же является и категория динамик  $\mathcal{K}(S)$ , построенная на объектах категории  $\mathcal{K}$ ; теорема 3.3, указывающая необходимые и достаточные условия для существования свободных объектов; теорема 4.2, где приведено достаточные условия для полноты справа категории динамик.

## § 1. Категория динамик

1. Пусть  $\mathcal{K}$  - произвольная категория, а  $\mathcal{H}$  - некоторый класс процессов категории  $\mathcal{K}$ , т.е.  $\mathcal{H}$  - некоторый класс функторов вида  $H: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  (см. [1]). Предположим, что для каждого объекта  $X$  категории  $\mathcal{K}$  и каждого процесса  $H \in \mathcal{H}$  заданы морфизмы  $h^X: H(X) \rightarrow X$ . Объект  $X$  вместе с морфизмами  $\{h^X: H(X) \rightarrow X, H \in \mathcal{H}\}$  называется динамикой и обозначается  $(X, \{h^X, H \in \mathcal{H}\})$  или просто  $dX$ . Морфизм  $d: X \rightarrow Y$  категории  $\mathcal{K}$  называется динаморфизмом, если  $d \circ h^X = h^Y \circ H(d)$  для любого процесса  $H \in \mathcal{H}$  (см. диаграмму (I)).

2. Примеры. I) Пусть  $\text{Ens}$  - категория множеств,  $\tau$  - некоторое кардинальное число, а  $\mathcal{M}_\tau$  - множество мощности  $\tau$ . Определяем функтора  $P_\tau: \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$  следующим образом. Положим  $P_\tau(X) = \prod \{X_i, i \in \mathcal{M}_\tau, X_i = X\}$ , т.е.  $P_\tau(X) = X^\tau$ . Если  $u: X \rightarrow Y$  - некоторое отображение множества  $X$  в множестве  $Y$ , то  $P_\tau(u) = u^\tau: X^\tau \rightarrow Y^\tau$  - тот единственный морфизм, для которого имеем  $u \circ p_i^X = p_i^Y \circ u^\tau$  для любого  $i \in \mathcal{M}_\tau$ , где

$p_i^x: X^\tau \longrightarrow X$  и  $p_i^y: Y^\tau \longrightarrow Y$  - канонические проекции (диаграмма (2)). В таком случае  $\mathcal{P}_\tau$ -динамика не что иное как множество с одной  $\tau$ -арной операцией. Если  $\mathcal{K}$  - некоторый класс функторов вида  $\mathcal{P}_\tau$ , то категория  $\mathcal{K}(\mathcal{K})$  - это категория  $\mathcal{K}$ -универсальных алгебр, а  $\mathcal{K}$ -динаморфизмы - гомоморфизмы  $\mathcal{K}$ -универсальных алгебр.

2) Если  $\mathcal{K}$  - категория с конечными произведениями, то можно рассматривать функторы  $\mathcal{P}_n: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .

3) Если  $\mathcal{K}$  - категория с любыми произведениями, то можно рассматривать функторы  $\mathcal{P}_\tau: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ , где  $\tau$  - некоторое кардинальное число. В качестве  $\tau$ -арных операций  $\mathcal{P}_\tau: X^\tau \longrightarrow X$  могут служить канонические проекции  $p_i^x: X^\tau \longrightarrow X$ . Если  $\mathcal{K}$  - некоторый класс функторов вида  $\mathcal{P}_\tau$ , то  $\mathcal{K}$ -динамику  $d\mathcal{K}$  естественно называть  $\mathcal{K}$ -универсальной алгеброй на объекте  $X$  категории  $\mathcal{K}$ .

4) Пусть  $\mathcal{K}$  - некоторая подкатегория категории топологических пространств, замкнутая относительно произведений и содержащая все дискретные пространства. Далее, пусть  $\mathcal{M}_\tau = \mathcal{M}' \cup \mathcal{M}''$ , где  $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}'' = \emptyset$ . Рассмотрим следующего функтора  $\mathcal{H}: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ . Если  $(X, t)$  - пространство категории  $\mathcal{K}$  с топологией  $t$ , то положим  $\mathcal{H}(X, t) = \prod \{X_i, i \in \mathcal{M}_\tau\}$ , притом  $X_i = (X, t)$ , если  $i \in \mathcal{M}'$  и  $X_i = (X, d)$ , если  $i \in \mathcal{M}''$ , где  $d$  - дискретная топология. В таком случае любая операция  $k^x: \mathcal{H}(X) \longrightarrow X$  непрерывна, вообще говоря, только по координатам, принадлежащие множеству  $\mathcal{M}'$ . Если класс  $\mathcal{K}$  состоит только из функторов указанного вида, то  $\mathcal{K}$ -динамики М.М. Чобан назвал [18] полутопологическими универсальными алгебрами.

5) Если  $\mathcal{R}$  - объект категории  $\mathcal{K}$  и для любого объекта  $X$  этой категории существует произведение  $\mathcal{R} \times X$ , то определим функтор  $C_{\mathcal{R}}: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$  следующим образом:  $C_{\mathcal{R}}(X) = \mathcal{R} \times X$ . Далее, если  $d: X \longrightarrow Y$  - морфизм категории  $\mathcal{K}$ , то положим  $C_{\mathcal{R}}(d) = 1_{\mathcal{R}} \times d: \mathcal{R} \times X \longrightarrow \mathcal{R} \times Y$ . Такие функторы возникают тогда, когда нужно определить внешнее умножение: модули над кольцом  $\mathcal{R}$  или векторные пространства над полем  $\mathcal{R}$ .

3. На категории  $\mathcal{K}$ , кроме класса процессов  $\mathcal{K}$ , рассмотрим еще и класс предикатов  $\mathcal{A}$ . Пусть  $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$  - бикатегорная структура в категории  $\mathcal{K}$  (см. [15, 5]), а  $\mathcal{B}: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$  - некоторый функтор. Будем говорить, что на категорию  $\mathcal{K}$  задан предикат  $\mathcal{A}$ , если для любого объекта  $X$  кате-

гории  $\mathcal{K}$  выделен некоторый  $\mathcal{M}$ -подобъект объекта  $B(X)$  -  $q^X: A(X) \longrightarrow B(X) \in \mathcal{M}$ . Далее, если  $d: X \longrightarrow Y$  - морфизм категории  $\mathcal{K}$ , а  $d = \mu \varepsilon: X \xrightarrow{\varepsilon} Z \xrightarrow{f} Y$  - его  $(\varepsilon, \mu)$ -разложение, то объект  $Z$  называется  $\mathcal{M}$ -образом морфизма  $d$  и принято обозначения  $Z = \mathcal{I}_{\mathcal{M}} d$ ,  $\mu = \text{im}_{\mathcal{M}} d$ .

Пусть  $d: X \longrightarrow Y$  - морфизм категории  $\mathcal{K}$ , а  $\mathcal{Q}$  - некоторый предикат на категорию  $\mathcal{K}$ . Морфизм  $d$  согласуется с предикатом  $\mathcal{Q}$ , если  $\text{im}_{\mathcal{M}} (B(d)q^X) \in \mathcal{Q}^Y$ , т.е. существует морфизм  $g_d: \mathcal{I}_{\mathcal{M}} (B(d)q^X) \longrightarrow \mathcal{Q}(Y)$  такой, что  $\mu = \mathcal{Q}^Y g_d$ . Другими словами, морфизм  $d$  согласуется с предикатом  $\mathcal{Q}$ , если и только если существует морфизм  $f_d: A(X) \longrightarrow \mathcal{Q}(Y)$  такой, что  $B(d)q^X = \mathcal{Q}^Y f_d$  (диаграмма (3)).

Если функтор  $B$  имеет вид  $P_{\tau}$  (см. пример 2.3)), то предикат  $\mathcal{Q}$  называется  $\tau$ -арным предикатом.

4. Пусть на категории  $\mathcal{K}$  заданы класс процессов  $\mathcal{H}$  и класс предикатов  $\mathcal{A}$ . Положим  $S = \mathcal{H} \cup \mathcal{A}$  и обозначим  $\mathcal{K}(S)$  категорию (это будет доказано ниже) динамик  $(X, \{h^X: H(X) \longrightarrow X, H \in \mathcal{H}\})$  на которых определены все предикаты класса  $\mathcal{A}$ ,  $q^X: A(X) \longrightarrow B(X)$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . Морфизмы категории  $\mathcal{K}(S)$  - это все те динаморфизмы, которые согласуются со всеми предикатами класса  $\mathcal{A}$ . Чтобы не вводить новые названия и обозначения объекты категории  $\mathcal{K}(S)$  назовем  $S$ -динамиками или динамическими, а морфизмы - динаморфизмами. Далее, допускается чтобы классы  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{A}$  или  $S$  были пустыми.

Теорема.  $\mathcal{K}(S)$  является категорией.

5. Имея категорию  $\mathcal{K}(S)$  и стирающего функтора  $A: \mathcal{K}(S) \longrightarrow \mathcal{K}$  диаграмму (1) можно представить в виде диаграммы (4). Для наших целей диаграмму (4) представим как диаграмму (5). Коммутативность диаграммы (5) для каждого морфизма  $d$  категории  $\mathcal{K}(S)$  означает не что иное как то, что морфизмы  $\{h^X: HA(dX) \longrightarrow A(dX) \mid dX \in |\mathcal{K}(S)|\}$  категории  $\mathcal{K}$  задают функторного морфизма  $h: HA \longrightarrow A$ .

Теорема. Для каждого процесса  $H \in \mathcal{H}$  морфизмы  $\{h^X: HA(dX) \longrightarrow A(dX) \mid dX \in |\mathcal{K}(S)|\}$  определяют функторного морфизма  $h: HA \longrightarrow A$ .

6. Следующие свойства категории  $\mathcal{K}(\mathcal{K})$  легко проверяются.

Теорема. Пусть  $S = \mathcal{H}$ , т.е.  $\mathcal{A} = \emptyset$ . Тогда справедливы утверждения:

- 1) Если  $\mathcal{L}$  - динаморфизм категории  $\mathcal{K}(\mathcal{K})$  и изоморфизм категории  $\mathcal{K}$ , то  $\mathcal{L}$  - изоморфизм категории  $\mathcal{K}(\mathcal{K})$ .
- 2) Если  $\mu\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}$  - динаморфизмы категории  $\mathcal{K}(\mathcal{K})$  и  $\mu$  - мономорфизм категории  $\mathcal{K}$ , то  $\mathcal{L}$  - динаморфизм категории  $\mathcal{K}(\mathcal{K})$ .
- 3) Если  $\mathcal{L}\varepsilon$  и  $\varepsilon$  - динаморфизмы категории  $\mathcal{K}(\mathcal{K})$  и  $\mathcal{H}(\varepsilon)$  - эпиморфизм категории  $\mathcal{K}$  для каждого процесса  $\mathcal{H} \in \mathcal{K}$ , то  $\mathcal{L}$  - динаморфизм категории  $\mathcal{K}(\mathcal{K})$ .
- 4) Если  $\top$  - финальный объект категории  $\mathcal{K}$ , а  $X$  - произвольный объект категории  $\mathcal{K}$ , то тот единственный морфизм категории  $\mathcal{K}$ , который существует из объекта  $X$  в объекте  $\top$ , является динаморфизмом категории  $\mathcal{K}(\mathcal{K})$ .
- 5) Если для объекта  $X$  категории  $\mathcal{K} - \mathcal{H}(X)$  - инициальный объект этой категории для любого процесса  $\mathcal{H} \in \mathcal{K}$ , то любой морфизм из объекта  $X$  в любом другом объекте категории  $\mathcal{K}$  является динаморфизмом  $\mathcal{K}(\mathcal{K})$ .

**7. Лемма.** Пусть категория  $\mathcal{K}$  с декартовыми квадратами,  $u: X \rightarrow A$  - морфизм категории  $\mathcal{K}$  и предположим, что на объекте  $A$  задан предикат  $\mathcal{Q}$ . Тогда на объекте  $X$  так можно определить предиката  $\mathcal{Q}$ , чтобы морфизм  $u$  согласовался с предикатом  $\mathcal{Q}$ .

**Доказательство.** Заметим, что в случае процессов выбираются только операции  $\mathcal{K}^X: \mathcal{H}(X) \rightarrow X$  с теми или иными свойствами. В данном случае выберем и подобъект  $\mathcal{Q}(X)$  объекта  $B(X)$ , и морфизм  $q^X: \mathcal{Q}(X) \rightarrow B(X)$ .

Пусть  $B(u)t = q^A v$  - декартов квадрат, построенный на морфизмах  $B(u)$  и  $q^A$  (см. диаграмму (6)). При этом, так как  $q^A \in \mathcal{M}$ , где  $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$  - бикатегорная структура категории  $\mathcal{K}$ , то и  $t \in \mathcal{M}$ . Положим  $\mathcal{P} = \mathcal{Q}(X)$  и  $t = q^X$ . Тогда очевидно, что морфизм  $u$  согласуется с предикатом  $\mathcal{Q}$ .

**8. Замечания.** 1) На одном и том же множестве бинарную операцию, например, можно определить многими способами. Чтобы проводить какие-либо конструкции в категорию  $\mathcal{K}(S)$  для каждого объекта  $X$  категории  $\mathcal{K}$  должны быть определены для одного и того же функтора  $\mathcal{H}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  многие  $\mathcal{H}$ -операции  $\mathcal{K}^X: \mathcal{H}(X) \rightarrow X$ . Для этого в категории  $\mathcal{K}$  объект  $X$  должен существовать во многих экземплярах, или, что то же самое, в категории  $\mathcal{K}$  существует какое угодно количест-

во объектов изоморфных объекту  $X$ . Тогда их образы при действии функтора  $H$  изоморфны, а  $H$ -операции для каждой копии объекта  $X$  можно определить по-разному. Некоторые такие операции предполагается заданными, некоторые строятся в процессе доказательств, исходя из того, что такие морфизмы определены на какие-то другие объекты. Так, например, если  $X = \prod X_i$  в категории  $\mathcal{K}$  и на каждом множителе  $X_i$  определены  $H$ -операции  $f_i^X: H(X_i) \rightarrow X_i$ , то естественно так определить  $H$ -операцию  $f^X: H(X) \rightarrow X$ , чтобы все канонические проекции  $P_i: X \rightarrow X_i$  были  $H$ -динаморфизмами.

2) Если класс предикатов непуст и  $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ , то функцию  $\mathcal{A}$  нельзя, вообще говоря, доопределить на морфизмах так, чтобы имели функтора  $\mathcal{A}: \mathcal{K}(S) \rightarrow \mathcal{K}$ . Легко проверить, что это возможно тогда и только тогда, когда в диаграмме (3)  $f_d$  - изоморфизм категории  $\mathcal{K}$ , если  $d$  - изоморфизм. В таком случае некоторые утверждения теоремы 6 справедливы и для таких предикатов.

3) Для каждого процесса  $H \in \mathcal{K}$  и предиката  $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$  морфизмы  $f^X: H(X) \rightarrow X$  и  $q^X: \mathcal{A}(X) \rightarrow B(X)$ , вообще говоря, не являются динаморфизмами.

## § 2. Проективные пределы категории динамик

В этом параграфе рассматривается вопрос полноты слева категории динамик и доказывается, что наличие каких-либо проективных пределов в категории  $\mathcal{K}$  обеспечивает существование таких-же пределов и в категории динамик  $\mathcal{K}(S)$ .

1. Теорема. Пусть в категории  $\mathcal{K}$  задан некоторый класс процессов и предикатов  $S$ . Тогда:

- 1) Если в категории  $\mathcal{K}$  существует уравниатели пар морфизмов (конечные или любые произведения, декартовы квадраты, конечные или любые проективные пределы), то этим же свойством обладает и категория  $\mathcal{K}(S)$ .
- 2) Если категория  $\mathcal{K}$  полна слева, то функтор  $A: \mathcal{K}(S) \rightarrow \mathcal{K}$ , стирающий  $S$ -структуру на объектах категории  $\mathcal{K}$ , непрерывен слева, т.е. если  $(B_i, d_{ij})$  - некоторый спектр категории  $\mathcal{K}(S)$  и  $(B, \pi_i)$ ,  $\pi_i: B \rightarrow B_i$  - проективный предел этого спектра  $B = \varprojlim_{\mathcal{K}(S)} (B_i, d_{ij})$ , то  $A(B) = \varprojlim_{\mathcal{K}} A(B_i, d_{ij})$ .
- 3) Если  $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$  - бикатегорная структура категории  $\mathcal{K}$  и

$H(\varepsilon) \subset \varepsilon$  для любого процесса  $H \in S$ , то  $(A^{-1}(\varepsilon), A^{-1}(\mu))$ -бикатегорная структура категории  $\mathcal{K}(S)$ .

**Доказательство.** 1) Пусть  $\alpha, \beta: A \rightarrow B$  - динаморфизмы категории  $\mathcal{K}(S)$ , а  $\kappa$  - уравнитель пары  $(\alpha, \beta)$  в категории  $\mathcal{K}$  -  $\kappa = eq_{\mathcal{K}}(\alpha, \beta)$ . Если  $H \in S$ , то имеем  $\alpha h^A = h^B H(\alpha)$  и  $\beta h^A = h^B H(\beta)$ . Так как  $\alpha \kappa = \beta \kappa$ , а  $H(\alpha \kappa) = H(\alpha)H(\kappa)$  и  $H(\beta \kappa) = H(\beta)H(\kappa)$ , то  $H(\alpha)H(\kappa) = H(\beta)H(\kappa)$ . Далее, имеем  $\alpha h^A H(\kappa) = h^B H(\alpha)H(\kappa) = h^B H(\alpha \kappa) = h^B H(\beta \kappa) = h^B H(\beta)H(\kappa) = \beta h^A H(\kappa)$  и так как  $\kappa = eq_{\mathcal{K}}(\alpha, \beta)$ , то  $h^A H(\kappa) = \kappa u$  для некоторого морфизма  $u: H(\kappa) \rightarrow \kappa$ . Положим  $u = h^{\kappa}$  и тогда автоматически получаем, что  $\kappa$  -  $H$ -динаморфизм (диаграмма (7)).

В случае предикатов см. лемму I.7.

Остальные случаи доказываются аналогично.

2) Следует из доказательства п. 1).

3) Пусть  $\alpha: A \rightarrow B$  -  $H$ -динаморфизм категории  $\mathcal{K}(S)$ , а  $A \xrightarrow{\varepsilon} X \xrightarrow{\mu} B$  - его разложение по бикатегорной структуре  $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$  в категории  $\mathcal{K}$ . Докажем, что для каждого процесса  $H \in S$  можно так задать  $H$ -операцию на объекте  $X$ , чтобы  $\varepsilon$  и  $\mu$  были  $H$ -динаморфизмами. Так как  $H(\alpha) = H(\mu \varepsilon) = H(\mu)H(\varepsilon)$ , то диаграмма (8) коммутативна -  $\mu(\varepsilon h^A) = (h^B H(\mu))H(\varepsilon)$ , при этом  $H(\varepsilon) \in \mathcal{E}$ , а  $\mu \in \mathcal{M}$ . Из определения бикатегорной структуры следует, что  $\varepsilon h^A = u H(\varepsilon)$  и  $h^B H(\mu) = \mu u$  для некоторого морфизма  $u: H(\varepsilon) \rightarrow \mu$ . Положим  $h^X = u$ , а это показывает, что  $\varepsilon$  и  $\mu$  -  $H$ -динаморфизмы.

В случае предикатов см. лемму I.7.

**2. Замечания.** 1) Если  $\mathcal{K}$  - категория множеств или абелева категория, то в ней существует единственная бикатегорная структура  $(\mathcal{E}_r, \mathcal{K}, \text{Mono } \mathcal{K}) = (\text{класс всех эпиморфизмов, класс всех мономорфизмов категории } \mathcal{K})$ . В категории множеств любой процесс вида  $P_{\tau}$  или  $C_R$  является эпифунктором. В абелевой категории процессы  $C_R$  и  $P_n$  конечного индекса являются эпифункторами, а в абелевой категории с любыми произведениями процесс  $P_{\tau}$  любого индекса является эпифунктором, если и только если в категории  $\mathcal{K}$  выполняется аксиома AB4\* А. Гротендика ([6], стр. 19).

2) Полнота слева категории  $\mathcal{K}(S)$  влечет обычно существование коуравнителей пар морфизмов. Существование же сумм,

а значит и любых индуктивных пределов, вопрос сложный и будет решен в § 4.

3. Следующее категорное утверждение хорошо известно.

Теорема. Пусть категория  $\mathcal{C}$  с любыми произведениями,  $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$  – бикатегорная структура в категории  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{C}$  –  $\mathcal{E}$ -колокально мала. Тогда в категории  $\mathcal{C}$  существует коуравнители пар морфизмов.

4. Теорема. Пусть  $\mathcal{K}$  – полная слева категория, а категория  $\mathcal{K}(\mathcal{S})$  локально и колокально мала. Тогда в категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S})$  существует коуравнители пар морфизмов.

Доказательство. Согласно теореме 1 категория  $\mathcal{K}(\mathcal{S})$  полна слева. Таким образом категория  $\mathcal{K}(\mathcal{S})$  локально мала и полна слева. Следовательно, в категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S})$  пара  $(\mathcal{E}_f, \text{Mono}) = (\text{класс всех сильных эпиморфизмов, класс всех мономорфизмов})$  – бикатегорная структура (см. [5]). Далее, так как категория  $\mathcal{K}(\mathcal{S})$  колокально мала, то она  $\mathcal{E}_f$ -колокально мала и согласно теореме 3 в ней существует коуравнители пар морфизмов.

5. Пусть  $\alpha, \beta: A \rightarrow B$  – два динаморфизма, а  $\vartheta: B \rightarrow \mathcal{C}$  их коуравнитель в категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ . В таком случае  $\vartheta$  не обязательно является коуравнителем этой пары и в категории  $\mathcal{K}$ , т.е. стирающий функтор  $A: \mathcal{K}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{K}$  не обязательно точен справа.

Пусть категория  $\mathcal{C}$  с конечными проективными пределами, а  $\vartheta: A \rightarrow B$  – коуравнитель некоторой пары морфизмов. Построим каноническую пару морфизмов для которой  $\vartheta$  – коуравнитель. Это так называемая ядерная пара морфизма  $\vartheta$ . Пусть  $\pi_1, \pi_2: A^2 \rightarrow A$  – канонические проекции, а  $\chi: K \rightarrow A^2$  – уравнитель пары  $(\vartheta\pi_1, \vartheta\pi_2)$  –  $\chi = e_{\vartheta}(\vartheta\pi_1, \vartheta\pi_2)$ . Легко проверить, что  $\vartheta$  – коуравнитель пары  $(\pi_1\chi, \pi_2\chi)$  –  $\vartheta = \text{coe}_{\vartheta}(\pi_1\chi, \pi_2\chi)$ .

Определение. Функтора  $A: \mathcal{K}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{K}$  назовем квазиточным справа, если из того, что  $\vartheta$  – коуравнитель ядерной пары  $(\pi_1\chi, \pi_2\chi)$  в категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ , следует, что  $\vartheta$  – коуравнитель этой пары и в категории  $\mathcal{K}$ .

6. Обозначим через  $\text{Coe}_{\vartheta}\mathcal{C}$  – класс всех коуравнителей пар категории  $\mathcal{C}$ , а через  $\text{Mono}\mathcal{C}$  – класс всех мономорфизмов. Как было отмечено выше для абелевых категорий и для категории множеств класс  $\text{Coe}_{\vartheta}\mathcal{C}$  совпадает с классом всех

эпиморфизмов этих категорий.

**Теорема.** Пусть категория  $\mathcal{K}$  с конечными проективными пределами. Далее, пусть  $(\text{Coeq } \mathcal{K}, \text{Mono } \mathcal{K})$  – бикатегорная структура в категории  $\mathcal{K}$  и  $\mathbf{H}(\text{Coeq } \mathcal{K}) \subset \text{Coeq } \mathcal{K}$  для любого процесса  $H \in \mathcal{S}$ . Тогда:

$$1) \quad (A^{-1}(\text{Coeq } \mathcal{K}), A^{-1}(\text{Mono } \mathcal{K})) = (\text{Coeq } \mathcal{K}(\mathcal{S}), \text{Mono } \mathcal{K}(\mathcal{S}))$$

и эта пара является бикатегорной структурой в категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ .

2) Функтор  $A: \mathcal{K}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{K}$  является монофунктором, т.е. переводит мономорфизмы категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S})$  в мономорфизмы категории  $\mathcal{K}$ .

3) Функтор  $A$  квазиточен справа.

**Доказательство.** Согласно теореме I, пара  $(A^{-1}(\text{Coeq } \mathcal{K}), A^{-1}(\text{Mono } \mathcal{K}))$  является бикатегорной структурой в категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ . Так как класс коуровнителей содержится в классе проекций любой бикатегорной структуры [15], то

$\text{Coeq } \mathcal{K}(\mathcal{S}) \subset A^{-1}(\text{Coeq } \mathcal{K})$ . Докажем обратное включение. Пусть динаморфизм  $\mathcal{V}: A \rightarrow B$  является коуровнителем в категории  $\mathcal{K}$  своей ядерной пары  $(\pi_1 x, \pi_2 x)$ , где  $x: K \rightarrow A^2$ .

Так как  $\mathcal{V}$  – динаморфизм, то на объектах  $A^2$  и  $K$  можно так определить  $\mathcal{S}$ -операции и предикаты, чтобы  $\pi_1, \pi_2$  и  $x$  стали динаморфизмами. В таком случае  $\mathcal{V}$  будет коуровнителем в категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S})$  своей ядерной пары  $(\pi_1 x, \pi_2 x)$ .

Этим доказано, что  $A^{-1}(\text{Coeq } \mathcal{K}) = \text{Coeq } \mathcal{K}(\mathcal{S})$ . Так как у бикатегорной структуры  $(A^{-1}(\text{Coeq } \mathcal{K}), A^{-1}(\text{Mono } \mathcal{K}))$  категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S})$  класс проекций совпадает с классом сильных эпиморфизмов, то класс инъекций совпадает с классом всех мономорфизмов [15].

Этим доказано, что  $A^{-1}(\text{Mono } \mathcal{K}) = \text{Mono } \mathcal{K}(\mathcal{S})$ .

Пункты 2) и 3) следуют из приведенного доказательства.

### § 3. Свободные объекты

I. Пусть  $\mathcal{S}_1$  – и  $\mathcal{S}_2$  – два класса процессов и предикатов категории  $\mathcal{K}$  и предположим, что  $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ . В таком случае из категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_2)$  определен функтор  $A$  в категорию  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_1)$ . Этот функтор для каждого объекта категории  $\mathcal{K}$  стирает те операции, которые принадлежат классу  $\mathcal{S}_2$  и не принадлежат классу  $\mathcal{S}_1$ .

Рассмотрим вопрос о существовании левого сопряженного к функтору  $A$ . Предположим, что категория  $\mathcal{K}$  полна слева. В таком случае обе категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_1)$  и  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_2)$  также полны слева. Пусть  $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$  – бикатегорная структура категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_1)$

и категория  $\mathcal{K}(S_1)$  -  $\mathcal{M}$ -локально мала. Для класса проекций  $\mathcal{E}$  определим новый класс морфизмов  $\mathcal{E}'$  категории  $\mathcal{K}(S_1)$ . Пусть  $u: X \rightarrow A$  - морфизм категории  $\mathcal{K}(S_1)$ , а на объекте  $A$  зафиксируем, кроме того, еще и  $S_2$ -структуру. Рассмотрим разложение морфизма  $u$  по бикатегорной структуре  $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$  -  $X \xrightarrow{e} Y \xrightarrow{m} A$ . Вообще говоря,  $m$  не является динаморфизмом категории  $\mathcal{K}(S_2)$ . Пусть  $\mu_i: A_i \rightarrow A, i \in J$  - множество всех  $\mathcal{M}$ -подобъектов объекта  $A$  таких, что  $\mu_i \in \mathcal{K}(S_2)$  и  $m \leq \mu_i, \forall i \in J$ . Так как  $\mathcal{K}(S_2)$  полна слева, то в этом множестве существует наименьший элемент  $\mu_u: A' \rightarrow A$ . В таком случае имеем разложение морфизма  $u: X \xrightarrow{e} Y \xrightarrow{e'} A' \xrightarrow{\mu_u} A$ . Обозначим  $A' = \mathcal{I}_{m, \mu}(uX)$ , а  $\mu_u = im_{\mu}(uX)$ . Положим  $\mathcal{E}'$  - класс всех тех морфизмов  $u: X \rightarrow A$  категории  $\mathcal{K}(S_1)$  для которых  $\mathcal{I}_{m, \mu}(uX) = A'$ . В общем случае, морфизмы класса  $\mathcal{E}'$  не являются эпиморфизмами категории  $\mathcal{K}(S_1)$ . Отметим без доказательства следующие свойства класса  $\mathcal{E}'$ :

- 1)  $\mathcal{E}'$  - класс всех морфизмов категории  $\mathcal{K}(S_1)$  ортогональных сверху (см. [15]) к классу  $A(\mathcal{M}'')$ , где  $\mathcal{M}'' = A^{-1}(\mathcal{M})$ .
- 2) Морфизмы класса  $\mathcal{E}'' = A^{-1}(\mathcal{E}')$  являются эпиморфизмами категории  $\mathcal{K}(S_2)$ .

3)  $(\mathcal{E}'', \mathcal{M}'')$  - бикатегорная структура категории  $\mathcal{K}(S_2)$ .

2. Пусть  $X$  - объект категории  $\mathcal{K}(S_2)$ , а  $e_i: X \rightarrow A_i \in \mathcal{E}'$  и  $e_2: X \rightarrow A_2 \in \mathcal{E}'$ . Морфизмы  $e_1$  и  $e_2$  считаются эквивалентными, если существует изоморфизм  $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$  категории  $\mathcal{K}(S_2)$  такой, что  $e_2 = \varphi e_1$ . Это отношение есть отношение эквивалентности. Из каждого класса эквивалентности выбирается по одному элементу ( $\mathcal{E}'$ -факторобъект) и если они образуют множество, то категория  $\mathcal{K}(S_1)$  называется  $\mathcal{E}'$ -колокально малой. Другими словами, категория  $\mathcal{K}(S_1)$  -  $\mathcal{E}'$ -колокально мала, если класс  $S_1$ -динамик, которых порождает каждый объект категории  $\mathcal{K}(S_1)$  является множеством.

3. Теорема. Пусть  $\mathcal{K}$  полная слева категория,  $S_1$  и  $S_2$  - два класса процессов и предикатов на объектах категории  $\mathcal{K}$  и  $S_1 \subset S_2$ . Далее, пусть  $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$  - бикатегорная структура в категории  $\mathcal{K}(S_1)$  и категория  $\mathcal{K}(S_1)$  -  $\mathcal{M}$ -локально мала. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) Категория  $\mathcal{K}(S_1)$  -  $\mathcal{E}'$ -колокально мала.
- 2) Существует левый сопряженный функтор  $F: \mathcal{K}(S_1) \rightarrow \mathcal{K}(S_2)$  к стирающему функтору  $A: \mathcal{K}(S_2) \rightarrow \mathcal{K}(S_1)$  и категория  $\mathcal{K}(S_2)$  -  $\mathcal{E}''$ -колокально мала.

**Доказательство.** Эквивалентность указанных условий легко вывести из теоремы П. Фрейда (см. [7], стр. 70).

**4. Замечания.** 1) Класс  $\mathcal{E}'$  зависит от двух классов  $\mathcal{S}_1$  и  $\mathcal{S}_2$ . Наиболее удачным оказывается тот случай, когда в категории  $\mathcal{K}$  существует бикатегорная структура  $(\mathcal{P}, \mathcal{J})$ , при этом  $\mathcal{H}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$  для любого процесса  $H \in \mathcal{S}_1$ . В таком случае естественно брать  $(\mathcal{E}, \mathcal{M}) = (A_1^{-1}(\mathcal{P}), A_1^{-1}(\mathcal{J}))$ , где  $A_1: \mathcal{K}(\mathcal{S}_1) \rightarrow \mathcal{K}$ -стирающий функтор (см. теорему 2.1). Тогда  $\mathcal{E}'' = A_1^{-1}(\mathcal{P})$ , так, что если  $\mathcal{K}$  -  $\mathcal{P}$ -колокально мала, то  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_1)$  -  $\mathcal{E}$ -колокально мала, а  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_2)$  -  $\mathcal{E}''$ -колокально мала. В этой ситуации, если  $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}_2$  и существует левый сопряженный к функтору  $A: \mathcal{K}(\mathcal{S}_2) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{S}_1)$ , то существует такой функтор и к функтору  $\gamma: \mathcal{K}(\mathcal{S}_2) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{S})$ .

2) Интересен также случай  $\mathcal{S}_1 = \emptyset$ , так как тогда  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_1) = \mathcal{K}$ , а левый сопряженный к стирающему функтору  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_2) \rightarrow \mathcal{K}$  в универсальной алгебре называется функтором взятия свободного объекта  $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{S}_2)$ , а  $F(X)$  называется свободной алгеброй над объектом  $X$ .

3) В теории линейных систем, когда класс  $\mathcal{S}$  состоит из одного функтора  $H$ , то при существовании функтора  $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{S})$  говорят, что  $H$  - входной процесс ([1], стр. 58).

**5. Теорема.** Пусть  $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ ,  $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$  - бикатегорная структура в категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_1)$ ,  $A$  - объект категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_2)$  и  $u: X \rightarrow A \in \mathcal{M}$ . Морфизм  $u$  категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_1)$  является  $\mathcal{S}_2$ -динаморфизмом, если и только если для любого процесса  $H \in \mathcal{S}_2$

$$\text{im}_u (h^A H(u)) \subseteq u.$$

**Доказательство.** Пусть  $u$  -  $\mathcal{S}_2$ -динаморфизм. Тогда  $h^A H(u) = u h^X$  для каждого процесса  $H \in \mathcal{S}_2$ . Если  $h^A H(u) = te$  -  $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -разложение морфизма  $h^A H(u)$  в категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_1)$ , то тогда  $u h^X = te$ . Притом  $e \in \mathcal{E}$ , а  $t \in \mathcal{M}$ . По определению бикатегорной структуры существует морфизм  $v$  категории  $\mathcal{K}(\mathcal{S}_1)$  такой, что  $t = uv$  и  $h^X = ve$ . Значит,  $t \in u$ . Учитывая это и тот факт, что  $u$  -  $\mathcal{S}_2$ -динаморфизм, выводим, что  $\text{im}_u (h^A H(u)) \subseteq u$ .

Обратно. Пусть  $\text{im}_u (h^A H(u)) \subseteq u$  для любого процесса  $H$  класса  $\mathcal{S}_2$ . Тогда  $h^A H(u) = uv$  для некоторого морфизма  $v: H(X) \rightarrow X$ . Положим  $v = h^X$  и тогда получим, что  $u$  -  $H$ -динаморфизм. Что касается предикатов см. лемму 1.7.

6. Предположим, что стирающий функтор  $A: \mathcal{K}(\mathcal{S}_2) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{S}_1)$

обладает левым сопряженным функтором  $F: \mathcal{K}(S_1) \rightarrow \mathcal{K}(S_2)$ . Далее, пусть  $\mathcal{R}$  - рефлексивная подкатегория категории  $\mathcal{K}(S_2)$ ,  $i: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{K}(S_2)$  - функтор вложения, а  $z: \mathcal{K}(S_2) \rightarrow \mathcal{R}$  - функтор рефлексии. Легко проверить, что функтор  $zF: \mathcal{K}(S_1) \rightarrow \mathcal{R}$  является левым сопряженным к стирающему функтору  $Al: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{K}(S_1)$ . Следует отметить, что функторы  $F$  и  $zF$ , в общем случае, обладают разными свойствами (см. [6, 14, 17, 21]).

7. Объект  $T$  категории  $\mathcal{C}$  называется разделителем (см. [7], стр. 38), если для любых двух разных морфизмов  $u, v: X \rightarrow Y \in \mathcal{C}$  существует морфизм  $w: Y \rightarrow T$  такой, что  $wu \neq vw$ .

**Теорема.** Пусть для категории динамик  $\mathcal{K}(S)$  существует функтор  $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}(S)$ , а  $T$  - объект категории  $\mathcal{K}$ . Далее, пусть  $\mathcal{R}$  - рефлексивная подкатегория категории  $\mathcal{K}(S)$  и  $z: \mathcal{K}(S) \rightarrow \mathcal{R}$  - функтор рефлексии. Рассмотрим условия:

- 1)  $zF(T)$  - разделитель категории  $\mathcal{K}$ .
- 2)  $\rho_X w_X: X \rightarrow F(X) \rightarrow zF(X)$  - мономорфизм категории  $\mathcal{K}$  для любого объекта  $X$  категории  $\mathcal{K}$ , где  $\rho_X: F(X) \rightarrow zF(X)$  -  $\mathcal{R}$ -реплика объекта  $F(X)$ .
- 3)  $\rho_T w_T: T \rightarrow F(T) \rightarrow zF(T)$  - мономорфизм категории  $\mathcal{K}$ .

Тогда 1)  $\implies$  2)  $\implies$  3). Если  $T$  - разделитель категории  $\mathcal{K}$ , то все эти условия равносильны.

8. **Замечание.** Когда  $\mathcal{K}$  - категория тихоновских или отделимых равномерных пространств, то часто морфизмы сопряжения  $\rho_X w_X: X \rightarrow zF(X)$  обладают и другими свойствами (см. [6, 14, 18, 20]).

9. Пусть  $\mathcal{E}$  - некоторый класс морфизмов категории  $\mathcal{K}$ . Объект  $P$  называется  $\mathcal{E}$ -проективным (см. [7], стр. 146 - 152), если для любых морфизмов  $e: X \rightarrow Y \in \mathcal{E}$  и  $u: P \rightarrow Y \in \mathcal{K}$  существует морфизм  $v: P \rightarrow X$  такой, что  $u = ev$ . Говорят, что в категории  $\mathcal{K}$  существует достаточно много  $\mathcal{E}$ -проективных объектов, если для любого объекта  $X$  категории  $\mathcal{K}$  существуют  $\mathcal{E}$ -проективный объект  $P$  и морфизм  $e: P \rightarrow X \in \mathcal{E}$ .

Отметим, что обычно класс  $\mathcal{E}$  является классом эпиморфизмов категории  $\mathcal{K}$ . Далее, если  $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$  - бикатегорная структура в категории  $\mathcal{K}$  и в  $\mathcal{K}$  существует достаточно много  $\mathcal{E}$ -проективных объектов, то класс  $\mathcal{E}$  замкнут относительно произведений и устойчив относительно декартовых квадратов.

**Теорема.** Пусть  $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$  - бикатегорная структура категории  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{S}$  - некоторый класс процессов и предикатов и суще-

ствует функтор  $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}(S)$ . Тогда:

- 1) Если  $P - \mathcal{E}$ -проективный объект категории  $\mathcal{K}$ , то  $F(P) - A^1(\mathcal{E})$ -проективный объект категории  $\mathcal{K}(S)$ .
- 2) Если в категории  $\mathcal{K}$  существует достаточно много  $\mathcal{E}$ -проективных объектов, то в категории  $\mathcal{K}(S)$  существует достаточно много  $A^1(\mathcal{E})$ -проективных объектов.

Заметим, что дуальное утверждение для инъективных объектов не имеет места.

Ю. Пусть  $S_1 \subset S_2$  - два класса процессов и предикатов на категорию  $\mathcal{K}$ ,  $A_1: \mathcal{K}(S_1) \longrightarrow \mathcal{K}$ ,  $A_2: \mathcal{K}(S_2) \longrightarrow \mathcal{K}$  и  $A: \mathcal{K}(S_2) \longrightarrow \mathcal{K}(S_1)$  - стирающие дополнительную структуру функторы. Далее, пусть  $R_1$  и  $R_2$  - рефлексивные подкатегории категорий  $\mathcal{K}(S_1)$  и  $\mathcal{K}(S_2)$  соответственно,  $i_1: R_1 \longrightarrow \mathcal{K}(S_1)$  и  $i_2: R_2 \longrightarrow \mathcal{K}(S_2)$  - функторы вложения, а  $\tau_1: \mathcal{K}(S_1) \longrightarrow R_1$  и  $\tau_2: \mathcal{K}(S_2) \longrightarrow R_2$  - функторы рефлексии. Предположим, что существуют левые сопряженные к функторам  $A_1$  и  $A_2$  -  $F_1: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}(S_1)$ ,  $F_2: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}(S_2)$ . Тогда, как доказано выше, функторы  $\tau_1 F_1: \mathcal{K} \longrightarrow R_1$  и  $\tau_2 F_2: \mathcal{K} \longrightarrow R_2$  сопряжены слева к функторам  $A_1 i_1: R_1 \longrightarrow \mathcal{K}$  и  $A_2 i_2: R_2 \longrightarrow \mathcal{K}$ . Часто возникает следующая задача (см., например, задачу Е.И. Арнаутова 2.24 из [13])

Как связаны между собой условия:

- 1)  $\tau_1 F_1(X)$  и  $\tau_1 F_1(Y)$  изоморфные объекты категории  $R_1$ , где  $X$  и  $Y$  - некоторые объекты категории  $\mathcal{K}$ .
- 2)  $\tau_2 F_2(X)$  и  $\tau_2 F_2(Y)$  изоморфные объекты категории  $R_2$ .

**Теорема.** Пусть  $S_1 \subset S_2$  и  $A(R_2) \subset R_1$ . Тогда условие 1) влечет условие 2).

**Доказательство.** Пусть для объектов  $X$  и  $Y$  категории  $\mathcal{K}$  объекты  $\tau_1 F_1(X)$  и  $\tau_1 F_1(Y)$  изоморфны. Чтобы упростить запись опустим стирающих функторов, но каждый раз укажем какой категории принадлежат построенные морфизмы. Пусть  $w_1^X: X \longrightarrow F_1(X)$ ,  $\rho_1^X: F_1(X) \longrightarrow \tau_1 F_1(X)$ ,  $w_2^X: X \longrightarrow F_2(X)$  и  $\rho_2^X: F_2(X) \longrightarrow \tau_2 F_2(X)$  - морфизмы сопряжения. Так как  $S_1 \subset S_2$ , то существует морфизм  $d^X: F_1(X) \longrightarrow F_2(X) \in \mathcal{K}(S)$  такой, что  $w_2^X = d^X w_1^X$ . Далее, так как  $A(R_2) \subset R_1$ , то  $\rho_2^X d^X = \beta^X \rho_1^X$  для некоторого морфизма  $\beta^X \in \mathcal{K}(S_1)$ . Такие же морфизмы существуют и для объекта  $Y$  (см. диаграмму (9)). Пусть морфизмы  $\gamma: \tau_1 F_1(X) \longrightarrow \tau_1 F_1(Y)$  и  $\delta: \tau_2 F_2(Y) \longrightarrow \tau_2 F_2(X)$  категории  $R_1$  устанавливают изоморфизм объектов  $\tau_1 F_1(X)$  и  $\tau_1 F_1(Y)$ , т.е.  $\gamma \delta = 1$  и  $\delta \gamma = 1$ .

Так как  $\tau_2 F_2(X)$  -  $R_2$ -свободный объект над объектом  $X$  категории  $\mathcal{K}$ , а  $\beta^X w_2^X$  - морфизм сопряжения, то

для морфизмов  $\beta \gamma \rho_1^x w_1^x$  категории  $\mathcal{K}$  существует морфизм  $\varphi: z_2 F_2(X) \rightarrow z_2 F_2(Y)$  категории  $R_2$  такой, что  $\beta \gamma \rho_1^x w_1^x = \varphi \rho_2^x w_2^x$ . Из таких же соображений следует существование морфизма  $\psi: z_2 F_2(Y) \rightarrow z_2 F_2(X)$  категории  $R_2$  со свойством  $\beta^x \gamma^x \rho_1^x w_1^x = \psi \rho_2^x w_2^x$ . Имеем тогда  $\beta \gamma \rho_1^x w_1^x = \varphi \rho_2^x w_2^x = \varphi \psi \rho_2^x w_2^x = \psi \rho_2^x w_2^x$ . Учитывая свойства морфизмов сопряжения  $\rho_1^x w_1^x$  и тот факт, что морфизмы  $\beta \gamma$  и  $\psi \rho_2^x$  принадлежат категории  $R_1$ , то выводим, что  $\beta \gamma = \psi \rho_2^x$ . Аналогичным образом доказывается, что  $\beta^x \gamma^x = \psi \rho_2^x$ . Далее,  $\psi \varphi \rho_2^x w_2^x = \psi \rho_2^x w_2^x = \beta^x \gamma^x \rho_1^x w_1^x = \beta^x \rho_1^x w_1^x = \rho_1^x w_1^x$ , т.е.  $\psi \varphi = 1$ . Дуальным образом получаем, что  $\varphi \psi = 1$ . Теорема доказана.

#### § 4. Индуктивные пределы категории динамик

Выше указывались достаточные условия для существования коуровнителей пар морфизмов категории динамик. Остался открытым вопрос о существовании сумм в этой категории. Отметим, что сумма некоторого семейства универсальных алгебр отличается от суммы множеств носителей в категории множеств, т.е. стирающий функтор  $A: \mathcal{K}(S) \rightarrow \mathcal{K}$  не перестановочен с индуктивными пределами. В таком случае функтор  $A$  не обладает правым сопряженным (сравните с [I], стр. 59).

I. Если категория  $\mathcal{K}$  с любыми произведениями, то в ней существует финальный объект  $T$  (см. [7], стр. 39) как произведение пустого семейства объектов категории  $\mathcal{K}$ . Очевидно тогда, что для любого кардинального числа  $\tau$  имеем  $T^\tau = T$ . Если предположить, что объект  $T$  имеет единственного подобъекта  $1_T$ , то в таком случае любого  $\tau$ -арного предиката  $a_\tau$  на объекте  $T$  можно определить единственным образом  $a_\tau(T) = T$  и  $a_\tau(1_T) = 1_T$ . При этом для любого объекта  $X$  категории  $\mathcal{K}$  тот единственный морфизм, который существует из  $X$  в  $T$ ,  $f^X: X \rightarrow T$  согласуется с предикатом  $a_\tau$ , так как  $(f^X)^\tau a_\tau^X = 1_T f^X a_\tau(X) = f^X a_\tau(X)$  в силу единственности морфизма  $f^X a_\tau(X)$  из объекта  $a_\tau(X)$  в объекте  $T$  (см. диаграмму (10)).

Теорема. Пусть в категориях  $\mathcal{K}$  и  $\mathcal{K}(S)$  выполняются следующие требования:

- категория  $\mathcal{K}$  с любыми произведениями и любыми суммами;
- для финального объекта  $T$  категории  $\mathcal{K}$  и для любого предиката  $Q \in S$  имеем  $a_{1_T}: Q(T) \rightarrow B(T) = 1_T$ ;
- существует левый сопряженный функтор  $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}(S)$

к стирающему функтору  $A: \mathcal{K}(S) \longrightarrow \mathcal{K}$ ;

г) в категории  $\mathcal{K}(S)$  существует бикатегорная структура  $(\varepsilon, \mathcal{U})$  и категория  $\mathcal{K}(S)$  -  $\varepsilon$ -колокально мала.

Тогда категория  $\mathcal{K}(S)$  полна справа.

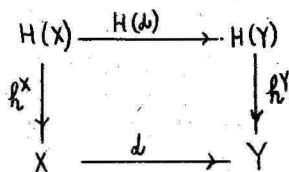
**Доказательство.** Согласно теореме 2.4 в категории  $\mathcal{K}(S)$  существуют коуровнители пар морфизмов. Поэтому достаточно доказать, что в категории  $\mathcal{K}(S)$  существует сумма любого семейства объектов. Пусть  $\{B_i, i \in J\}$  - некоторое семейство объектов категории  $\mathcal{K}(S)$ ,  $P = \bigcup B_i$  - сумма объектов  $\{B_i, i \in J\}$  в категории  $\mathcal{K}$ , а  $s_i: B_i \longrightarrow P$  - канонические инъекции. Далее, рассмотрим множество  $\varepsilon$ -факторобъектов  $\gamma_j: F(P) \longrightarrow C_j, j \in J$  объекта  $F(P)$  в категории  $\mathcal{K}(S)$  для которых  $\gamma_j \circ w_{P s_i}$  -  $S$ -динаморфизмы для любого  $i \in J$ . Это множество не пусто, так как содержит финального объекта категории  $\mathcal{K}$  (см. теорему 1.6 и условие б)).

Пусть  $C = \prod \{C_j, j \in J\}$ , где произведение рассматривается в категории  $\mathcal{K}(S)$ . Тогда существует динаморфизм  $\varphi: F(P) \longrightarrow C$  такой, что  $\gamma_j = \pi_j \circ \varphi$  для любого  $j \in J$ , где  $\pi_j, j \in J$  - канонические проекции. Если  $\varphi = \mu \circ \gamma$  -  $(\varepsilon, \mathcal{U})$ -разложение динаморфизма  $\varphi$ , то  $\gamma \circ w_{P s_i}$  - динаморфизм для любого  $i \in J$ . Таким образом доказано, что  $\gamma$  - наибольший  $\varepsilon$ -факторобъект объекта  $F(P)$ , обладающий тем свойством, что  $\gamma \circ w_{P s_i}$  - динаморфизм для любого  $i \in J$ . Докажем, что объект  $B$  с каноническими инъекциями  $\gamma \circ w_{P s_i}: B_i \longrightarrow B, i \in J$  является суммой семейства  $\{B_i, i \in J\}$  объектов категории  $\mathcal{K}(S)$  (диаграмма (II)). Действительно, пусть  $\beta_i: B_i \longrightarrow D, i \in J$  - некоторое семейство динаморфизмов. Тогда существует морфизм  $u: P \longrightarrow D$  категории  $\mathcal{K}$  такой, что  $\beta_i = u s_i$  для любого  $i \in J$ . Далее, существует динаморфизм  $\psi: F(P) \longrightarrow D$  такой, что  $u = \psi \circ w_P$ . Пусть  $\psi = \chi \circ \varepsilon$  -  $(\varepsilon, \mathcal{U})$ -разложение  $\psi$ . Тогда  $\varepsilon \circ w_{P s_i}$  - динаморфизм для любого  $i \in J$  и, кроме того,  $\varepsilon \in \varepsilon$ . Из максимальнойности объекта  $B$  с этими свойствами следует, что  $\varepsilon = \gamma \circ \gamma$  для некоторого динаморфизма  $\gamma$ . Тогда для любого  $i \in J$  имеем  $\beta_i = \chi \gamma (\gamma \circ w_{P s_i})$  (диаграмма (I2)).

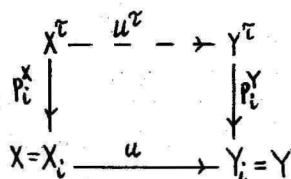
Докажем единственность морфизма  $\chi \gamma$ . Пусть для некоторого динаморфизма  $\lambda$  имеем  $\beta_i = \lambda (\gamma \circ w_{P s_i})$  для любого  $i \in J$ . Тогда в категории  $\mathcal{K}$  получаем  $(\chi \gamma \circ w_P) s_i = \beta_i = (\lambda \gamma \circ w_P) s_i$  для любого  $i \in J$ . Следовательно,  $\chi \gamma \circ w_P = \lambda \gamma \circ w_P$ , т.е.  $\chi \gamma = \lambda \gamma$  и так как  $\gamma$  - эпиморфизм категории  $\mathcal{K}(S)$ , то  $\chi \gamma = \lambda$ . Теорема доказана.

3. Замечание. Если  $S = \mathcal{K}$ , т.е.  $A = \phi$ , то условие в) в приведенной теореме лишняя.

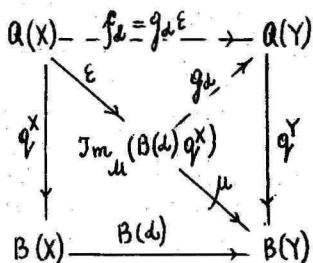
Диаграммы



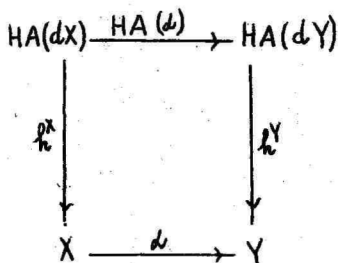
(1)



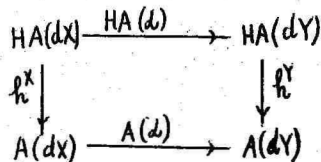
(2)



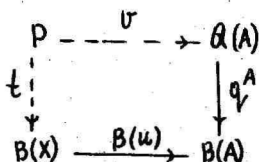
(3)



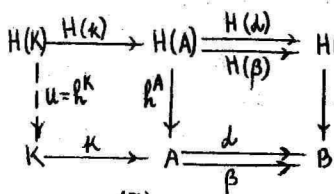
(4)



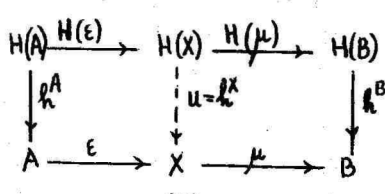
(5)



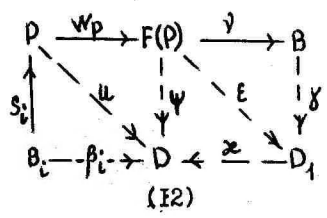
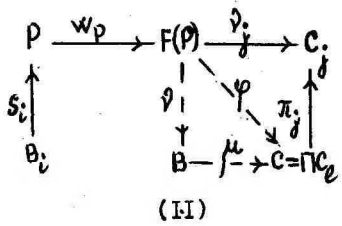
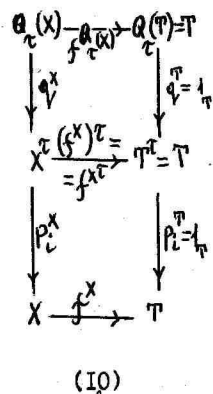
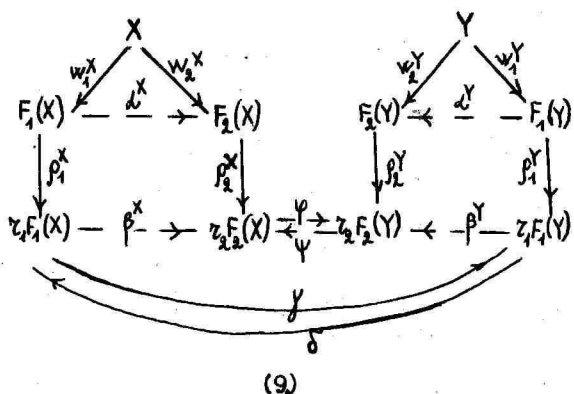
(6)



(7)



(8)



Литература

1. Андерсон Д.О., Арбиб М.А., Мейнс Дж.Э. Основания теории систем: конечные и неконечные условия. В кн.: Математические методы в теории систем. М.: Мир, 1979, С. 49-134.
2. Арбиб М.А., Мейнс Дж.Э. Основания теории систем, разложимые системы. В кн.: Математические методы в теории систем. М.: Мир, 1979, С. 7-49.
3. Архангельский А.В. Алгебраические аспекты, порожденные топологической структурой. В кн.: Алгебра. Топология. Геометрия. Т.25. Итоги науки и техн. М., 1987, С. 141-198.
4. Бельнов В.К. Размерность топологически однородных пространств и свободные однородные пространства // ДАН СССР. 1978. Т.238, № 4, С. 781-784.
5. Ботнару Д.В. Рефлексивные подкатегории и правые бикатегорные структуры // ДАН СССР, 1974, Т. 219, № 3, С. 524-526.
6. Ботнару Д.В. Свободные объекты в рефлексивных подкатегориях // Матем. исследования (в печати).
7. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функто-

- ров. М.: Мир, 1972.
8. Воеводин В.В. Математические методы в параллельных процессах. М.: Наука, 1986.
  9. Гисин В.Б., Цаленко М.Ш. Алгебраическая теория систем и ее приложения. В кн.: Системные исследования: Методологические проблемы. М.: Наука, 1986. С. 113-135.
  10. Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.
  11. Думитрашку С.С., Чобан М.М. О свободных топологических алгебрах с непрерывной сигнатурой // Матем. исследования (Кишинев). 1982. № 65. С. 27-53.
  12. Мальцев А.И. Свободные топологические алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21. № 2. С. 171-198.
  13. Нерешенные задачи топологической алгебры. Кишинев: Штиинца, 1985.
  14. Райков Д.А. Свободные локально выпуклые пространства равномерных пространств // Мат. сб. 1964. Т. 63. № 4. С. 582-590.
  15. Райков Д.А. Ортогональные морфизмы и понятие бикатегории. // Изв. Вуз. Матем. 1972. № 4, С. 93-101.
  16. Чобан М.М. К теории топологических и алгебраических систем // Тр. Моск. матем. о-ва. 1985. Т. 48. С. 106-149.
  17. Чобан М.М. О свободных топологических алгебрах. В кн.: XIX Всесоюзная алгебраическая конференция. Часть I. Львов, 1987. С. 313.
  18. Чобан М.М. Общие условия существования свободных объектов. (см. настоящий сб. С.
  19. Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели. М.: Радио и связь, 1982.
  20. Swirczkowski S. Topologies in free algebras // Proc. London Math. Soc. 1964. V. 14. № 55. P. 566-576.
  21. Томас V.S. Free topological groups. // Gen. Topol. and Appl. 1974. V. 4. № 1, P. 51-72.

Поступило 20. 10. 1988

## CATEGORIE DES DYNAMIQUES

D. Botnarou

### Résumé

On définit la catégorie des dynamiques qui généralise les cas des catégories des dynamiques donnés dans les travaux [1, 2], en particulier, qui généralise la catégorie des algèbres universelles. Si d'habitude les algèbres universelles étaient envisagées sur les catégories des ensembles, des les espaces de Tikhonov ou des les espaces uniformes, alors dans l'article présent on construit la catégories des dynamiques sur la catégorie arbitraire. Et alors parallèlement au proces (opérations) on définit les prédicats.

Les résultats essentiels:

1) Si dans la catégorie  $\mathcal{K}$  existent des limites projectives, alors ils existent aussi dans la catégories des dynamiques  $\mathcal{K}(S)$ . Et alors le foncteur  $A: \mathcal{K}(S) \longrightarrow \mathcal{K}$  qui oublie la structure supplémentaire commute avec limites projectives (théorème 2.1).

2) On indique les conditions nécessaires et suffisantes pour que le foncteur  $A: \mathcal{K}(S) \longrightarrow \mathcal{K}$  possède un foncteur conjugué au gauche  $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}(S)$ . Autrement dit, pour qu'il existe des objets libres sur les objets de la catégorie  $\mathcal{K}$  (théorème 3.3).

3) Sont données les conditions suffisantes de l'existence des limites inductives dans la catégorie des dynamiques  $\mathcal{K}(S)$  (théorème 4.2).

ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ НА КОМПАКТНО-РАЗРЕЖЕННЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА  
И МОЩНОСТЬ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Ю.Брегман, А.Шостак

Латвийский государственный университет

Б.Шапировский

ВНИИЦ ЦВ, Москва

Внимание ряда специалистов, работающих в области теоретико-множественной топологии, было привлечено к проблеме разложимости топологических пространств на подмножества, не содержащие пространств данного фиксированного класса. В своей основе эта проблематика восходит к классической работе Ф.Бернштейна [12], доказавшего еще в 1908 году, что каждое полное сепарабельное метрическое пространство  $X$  может быть разложено в объединение двух подпространств  $X = X_1 \cup X_2$ , таким образом, что ни  $X_1$ , ни  $X_2$  не содержат канторов дисконтинуум

$\mathfrak{A}^{\aleph_0}$ . С другой стороны, в начале 70-х годов пражские математики Й.Нешетрил, В.Рёдл и Я.Пелант [15] для каждого  $T_1$ -пространства  $Y$  (и, в частности, для  $Y = \mathfrak{A}^{\aleph_0}$ ) построили  $T_1$ -пространство  $X$  такое, что при любом разложении  $X = X_1 \cup X_2$  либо  $X_1$ , либо  $X_2$  содержит пространство  $Y$ . Подчеркнем, что построенное ими пространство  $X$  существенно не является хаусдорфовым. Проблема же существования хаусдорфова пространства  $X$  с такими свойствами (которую в таком виде впервые поставил, по-видимому, З.Фролик в 1972 году) остается, несмотря на усилия целого ряда авторов ([5], [6], [7], [14], [15], [16], [17] и др.), до сих пор в полной мере не решенной. В определенном смысле окончательным в этом направлении является следующий результат [14, стр. 27]:

**Теорема  $A^0$ .** Для каждого пространства  $X$  существует разложение  $X = X_1 \cup X_2$  такое, что ни  $X_1$ , ни  $X_2$  не содержат неразрезанных замкнутых в  $X$  компактов.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Важно подчеркнуть, что при  $|X| > \mathfrak{C}_{\omega_0}$  этот результат доказан в дополнительных аксиоматических предположениях (и, следовательно, этом смысле он не является окончательным (см. по этому поводу также [15])).

Для дальнейшего нам удобно выделить следующее

Определение I. Подпространство  $Y$  топологического пространства  $X$  назовем компактно-разреженным, или  $k$ -разреженным в  $X$ , если каждый замкнутый в  $X$  компакт  $H$ , лежащий в  $Y$ , является разреженным.

Это определение, очевидно, позволяет нам сформулировать теорему  $A^0$  следующим образом:

Теорема A. Каждое пространство представимо в виде объединения двух своих  $k$ -разреженных подпространств.

Оказывается, что неожиданным следствием этого результата и его модификаций является оценка на мощность пространства, дающая положительный ответ на следующий вопрос А.В.Архангельского:

Пусть каждое подпространство из  $X$  является объединением  $\leq \mu$  компактов. Верно ли, что тогда и  $|X| \leq \mu$ ?

Точную связь между разложением пространства на  $k$ -разреженные подпространства и соответствующей оценкой на его мощность дает

Теорема I<sup>0</sup>. Пусть пространство  $X$  - хаусдорфово и  $X = \bigcup \{X_\alpha : \alpha < \mathfrak{I}\}$ , где все  $X_\alpha$   $k$ -разрежены,  $\mathfrak{I} < \lambda$  и  $\lambda$  - регулярный кардинал. Тогда, если

(\*) каждое подпространство из  $X$  является объединением  $< \lambda$  компактов,  
то и  $|X| < \lambda$ .

**Доказательство.** Ясно, что  $\forall h \ell(X) \leq \lambda$ , где  $\forall h \ell(X) = \min \{ \tau : \text{для каждого семейства } \mathcal{P} \text{ открытых в } X \text{ множеств существует подсемейство } \mathcal{P}' \subset \mathcal{P} \text{ такое, что } \bigcup \mathcal{P}' = \bigcup \mathcal{P} \text{ и } |\mathcal{P}'| < \tau \}$ . Из  $\forall h \ell(H) < \lambda$ , где  $\lambda$  - регулярный кардинал, очевидно следует, что и  $|H| < \lambda$  для каждого разреженного подпространства  $H$  (см., например, [2]). С другой стороны,  $X$  представимо в виде  $X = \bigcup \{H_\beta : \beta < \mu\}$ , где  $\mu < \lambda$  и все  $H_\beta$  - разреженные компакты (так как для каждого  $\alpha < \mathfrak{I}$  пространство  $X_\alpha$   $k$ -разрежено и, следовательно, в силу (\*), представимо в виде объединения  $< \lambda$  (разреженных) компактов), откуда, в силу регулярности кардинала  $\lambda$ , и следует, что  $|X| < \lambda$ .

При  $\lambda = \mu^+$  из теоремы I<sup>0</sup> сразу же вытекает

Теорема I. Если  $T_2$ -пространство  $X$  представимо в виде объединения  $\leq \mu$  своих  $k$ -разреженных подпространств и, кроме того, всякое подпространство из  $X$  является объединением  $\leq \mu$  компактов, то

и  $|X| \leq \mu$ .

Для дальнейшего удобно ввести следующие понятия:

**Определение 2.** Топологическое пространство  $X$  назовем псевдопаракомпактным ( $\tau$ -псевдопаракомпактным), если в каждое его открытое покрытие  $\mathcal{P}$  можно вписать покрытие  $\mathcal{P}'$  такое, что  $\mathcal{P}' = \cup \{ \mathcal{P}'_\alpha : \alpha < \omega_0 \}$  (соответственно,  $\mathcal{P}' = \cup \{ \mathcal{P}'_\alpha : \alpha < \tau \}$ ), и каждое семейство  $\mathcal{P}'_\alpha$  дискретно в себе (т.е.  $\mathcal{P}'_\alpha$  дизъюнктно и, кроме того, для каждого  $P \in \mathcal{P}'_\alpha$  найдется открытое в  $X$  множество  $\mathcal{U}_P$  такое, что  $\mathcal{U}_P \supset P$  и  $\mathcal{U}_P \cap (\cup \mathcal{P}'_\alpha) = P$ .

Заметим, что, если в определении псевдопаракомпактности потребуем дополнительно, чтобы все семейства  $\mathcal{P}'_\alpha$ ,  $\alpha < \omega_0$ , состояли из замкнутых множеств и были дискретны в  $X$ , то придем, согласно теореме М.Чобана [8] - Д.Бёрка [13], к понятию  $\sigma$ -паракомпактного пространства (А.Архангельский [11]). По аналогии, назовем  $\tau$ -псевдопаракомпактное пространство  $\tau$ -паракомпактным, если все входящие в его определение семейства  $\mathcal{P}'_\alpha$ ,  $\alpha < \tau$ , могут быть выбраны состоящими из замкнутых множеств и дискретными в  $X$ .

Множество  $A$  из  $X$  будем называть  $\tau$ -дискретным, если оно есть объединение  $\tau$  дискретных (в себе) подпространств. Если  $A$  есть объединение  $\tau$  дискретных во всем  $X$  подпространств, будем называть его строго  $\tau$ -дискретным в  $X$ .

Ясно, что каждое  $\tau$ -дискретное пространство является  $\tau$ -псевдопаракомпактным. Более того, справедливо следующее

**Предложение 1<sup>0</sup>.** Если пространство  $X$  удовлетворяет условию ( $\kappa$ ) каждое непустое замкнутое в  $X$  множество  $F$  содержит непустое  $\tau$ -дискретное открытое в  $F$  множество, то  $X$  наследственно  $\tau$ -псевдопаракомпактно тогда и только тогда, когда  $X$   $\tau$ -дискретно.

**Доказательство.** Положим  $\mathcal{P} = \{ \mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ - открытое } \tau\text{-дискретное подмножество из } X \}$ . В силу ( $\kappa$ ) семейство  $\mathcal{P}$  не пусто. Кроме того, объединение  $\cup \mathcal{P}$   $\tau$ -дискретно, т.к. по условию  $\cup \mathcal{P}$   $\tau$ -псевдопаракомпактно и  $\mathcal{P}$  есть покрытие множества  $\cup \mathcal{P}$   $\tau$ -дискретными открытыми множествами. Остается заметить, что  $\cup \mathcal{P} = X$  - иначе, в силу ( $\kappa$ ), существует непустое  $\tau$ -дискретное открытое в  $X \setminus \cup \mathcal{P}$  подмножество  $\mathcal{U}_0$  и, следовательно,  $\mathcal{U}_0 \cup (\cup \mathcal{P})$  - открытое  $\tau$ -дискретное подмножество из  $X$ , что противоречит определению семейства  $\mathcal{P}$ .

Поскольку всякое разреженное пространство, очевидно,

удовлетворяет условию (ж), из предложения  $I^0$  немедленно следует

Предложение I. Разреженное пространство  $X$   $\tau$ -дискретно тогда и только тогда, когда оно наследственно  $\tau$ -псевдопаракомпактно.

Следствие I. Разреженное пространство  $X$   $\sigma$ -дискретно тогда и только тогда, когда оно наследственно псевдопаракомпактно.

Заметив, что условие  $\mathfrak{h}(X) \leq \tau$ , очевидно, влечет  $\tau$ -псевдопаракомпактность пространства  $X$ , из предложения I получаем также

Следствие 2. Если  $X$  - разреженное пространство, то  $\mathfrak{h}(X) = |X|$  (см., например, [2]).

Предположив дополнительно регулярность пространства  $X$ , можно получить следующие модификации предложения I:

Предложение I'. Если  $X$  - регулярное разреженное пространство и  $\psi(X) \leq \tau$ , то  $X$   $\tau$ -дискретно тогда и только тогда, когда оно  $\tau$ -псевдопаракомпактно.

**Доказательство.** Положим  $\mathcal{P} = \{U : U - \text{открытое } \tau\text{-дискретное подмножество из } X\}$  и покажем, что  $\cup \mathcal{P} = X$ . Предположим, что  $X \setminus \cup \mathcal{P} = F \neq \emptyset$ . Тогда существует изолированная в  $F$  точка  $x_0$  и семейство  $\{B_\alpha : \alpha < \tau\}$  открытых в  $X$  окрестностей точки  $x_0$  такое, что  $\{x_0\} = \cap \{B_\alpha : \alpha < \tau\}$  и при этом  $\bar{B}_0 \cap F = \{x_0\}$ . Для каждого  $\alpha < \tau$  положим  $N_\alpha = \bar{B}_0 \setminus B_\alpha$ . Тогда ясно, что  $N_\alpha \subset \cup \mathcal{P}$  и  $N_\alpha$   $\tau$ -псевдокомпактно как замкнутое подмножество в  $X$ . Поскольку  $\mathcal{P}$  является открытым покрытием  $N_\alpha$   $\tau$ -дискретными множествами, отсюда следует, что и само  $N_\alpha$   $\tau$ -дискретно. Остается заметить, что тогда  $\bar{B}_0 = (\cup \{N_\alpha : \alpha < \tau\}) \cup \{x_0\}$ , а следовательно, и  $B_0$   $\tau$ -дискретно, что противоречит определению  $\mathcal{P}$ , поскольку  $x_0 \in B_0 \setminus \cup \mathcal{P}$ .

Предложение I''. Регулярное разреженное пространство  $X$  строго  $\tau$ -дискретно тогда и только тогда, когда оно  $\tau$ -паракомпактно и  $\psi(X) \leq \tau$ .

**Доказательство.** Если  $X$  строго  $\tau$ -дискретно, то  $\psi(X) \leq \tau$ . Положим  $\mathcal{P} = \{U : U - \text{открытое строго } \tau\text{-дискретное подмножество из } X\}$ . Теперь доказательство предложения I'' можно провести совершенно аналогично доказательству предложения I', заменив всюду условие  $\tau$ -дискретности условием строгой  $\tau$ -дискретности, а условие  $\tau$ -псевдопаракомпактности - условием  $\tau$ -паракомпактности.

Следствие 3. Если  $X$  - регулярное разреженное пространство, то  $|X| \leq \psi(X) \cdot \mathfrak{h}(X)$  [3, теорема 9].

Перейдем теперь к доказательству результатов о разложении пространства на  $\kappa$ -разреженные подпространства, дающих, как показывает теорема I, ключ к соответствующим оценкам на мощность пространства. Важную роль при этом, как и в [I4], будет играть следующее понятие:

**Определение 3.** [I4]. Подмножество  $A$  из  $X$  называется  $\tau\kappa$ -компактным, если для всякого счетного  $N \subset A$  справедлива импликация

(i)  $N$  имеет предельную точку в  $A$  тогда (и только тогда), когда  $N$  имеет предельную точку в  $X$ .

(Точку  $x \in X$  называем предельной для  $N$ , если  $(\mathcal{U}_x \setminus \{x\}) \cap N \neq \emptyset$  для каждой ее окрестности  $\mathcal{U}_x$ ).

Ясно, что подмножество  $A$  из  $X$   $\tau\kappa$ -компактно тогда (и только тогда), когда импликация (i) справедлива для всякого дискретного в себе подмножества  $N \subset A$ .

**Предложение 2.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  - замкнутое отображение. Если  $A$  -  $\tau\kappa$ -компактное подмножество  $T_1$ -пространства  $X$ , то  $f(A)$   $\tau\kappa$ -компактно в пространстве  $Y$ .

**Доказательство.** Пусть  $M$  - счетное дискретное (в себе) множество,  $M \subset f(A)$  и  $M$  имеет предельную точку в  $Y$ .

Покажем, что тогда существует точка  $y_0$  - предельная для множества  $M$  и такая, что  $y_0 \in f(A)$ . Действительно, для каждого  $y \in M$  выбрав точку  $x_y \in f^{-1}(y) \cap A$ , получим множество  $N = \{x_y : y \in M\} \subset A$ .

Ясно, что  $N$  - незамкнуто (ибо  $f$  - замкнутое отображение и  $f(N) = M \neq \bar{M}$ ). Тогда, в силу  $\tau\kappa$ -компактности множества  $A$ , существует предельная для  $N$  точка  $x_0 \in A \setminus \{x_y : y \in M\}$ .

Тогда точка  $y_0 = f(x_0)$  является предельной для множества  $M = f(N)$  и  $y_0 \in f(A)$ . Но это и означает, что  $f(A)$   $\tau\kappa$ -компактно.

**Замечание.** Множество  $A$  из  $X$  называется  $\tau\kappa$ -замкнутым [I4], если для всякого счетного  $N \subset A$  справедлива импликация

(i')  $N$  замкнуто в  $X$  тогда (и только тогда), когда  $N$  замкнуто в  $A$ .

Отметим, что понятия  $\tau\kappa$ -компактности и  $\tau\kappa$ -замкнутости, вообще говоря, различные, совпадают, в частности, в случае счетно компактного  $X$  и во всех утверждениях [I4] взаимозаменяемы. Исключение составляет предложение 3.II из [I4], доказательство которого, по-существу, повторенное выше (предложение 2), проходит, как заметил В.Ткачук, только для  $\tau\kappa$ -компактных множеств.

Нам потребуется также следующий очевидный факт [I4, предло-

жение 3.13]:

Предложение 3°. Пусть  $X$  - секвенциальное  $T_2$ -пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а)  $A$  -  $rc$ -компактно в  $X$  ;
- (в)  $A$  -  $rc$ -замкнуто в  $X$  ;
- (с)  $A$  - замкнуто в  $X$  .

Действительно, если  $A$  - незамкнуто в  $X$  , то, в силу секвенциальности, существует последовательность  $\{x_n: n < \omega_p\}$  , сходящаяся к точке  $x \notin A$  , и, следовательно,  $A$  не  $rc$ -компактно. Остается только отметить, что импликации (с)  $\Rightarrow$  (в)  $\Rightarrow$  (а) очевидны в любом пространстве  $X$  .

Из предложений 2 и 3° сразу вытекает

Предложение 3. Если  $f: X \rightarrow Y$  - замкнутое отображение,  $Y$  - секвенциальное  $T_2$ -пространство и  $A$   $rc$ -компактно в  $X$  , то  $f(A)$  замкнуто в  $Y$  .

Отметим также следующее очевидное утверждение (ср. [14, предложение 3.8]):

Предложение 4. Если  $A$  -  $rc$ -компактно в  $X$  , а  $B$  - замкнуто в  $X$  , то  $A \cap B$   $rc$ -компактно в  $B$  , а значит, и в  $X$  .

Нам потребуется также следующее несложное утверждение [14, предложение 3.15]:

Предложение 5. Если  $A < X$  , то существует множество  $\tilde{A}$  ,  $rc$ -замкнутое в  $X$  (и, значит, тем более,  $rc$ -компактное в  $X$  ) такое, что  $A \subset \tilde{A}$  и  $|\tilde{A}| < |A|^{\aleph_0}$  .

Напомним, что семейство  $\{A_\alpha: \alpha < \beta\}$  подмножеством из  $X$  называется цепью, если  $A_\alpha \subset A_\beta$  для любых  $\alpha < \beta < \beta$  .

Предложение 6. Пусть  $\mathfrak{A} = \{A_\alpha: \alpha < \beta\}$  - цепь в пространстве  $X$  и  $|A_\alpha| < \tau$  для всех  $\alpha < \beta$  . Тогда:

- (1)  $|U\mathfrak{A}| < \tau$  и, более того,
- (2) если  $c_f(\tau) \neq c_f(\beta)$  , то  $|U\mathfrak{A}| < \tau$  ;
- (3) если  $U\mathfrak{A} \neq A_\alpha$  и  $A_\alpha = \bar{A}_\alpha$  для всех  $\alpha < \beta$  , то  $c_f(\beta) < d(U\mathfrak{A})$  ;
- (4) если  $d(U\mathfrak{A}) < c_f(\tau)$  и  $A_\alpha = \bar{A}_\alpha$  для всех  $\alpha < \beta$  , то  $|U\mathfrak{A}| < \tau$  .

Доказательство. I. Предположим, что  $|U\mathfrak{A}| > \tau$  тогда найдется некоторое  $M \in U\mathfrak{A}$  такое, что  $|M| = \tau$  . Для каждого  $x \in M$  зафиксируем индекс  $\alpha(x)$  так, чтобы  $x \in A_{\alpha(x)}$ , и положим  $\beta = \sup\{\alpha(x): x \in M\}$  . Ясно, что  $\beta = \beta$  (иначе  $M \subset A_\beta$  и, следовательно,  $|A_\beta| > \tau$  ). Но это и означает, что множество ординалов  $\{\alpha(x): x \in M\}$  конфинально в  $\beta$  , т.е.  $c_f(\beta) \leq |M| = \tau$  , а следовательно,  $|U\mathfrak{A}| = |U\{A_{\alpha(x)}: x \in M\}| \leq |M| \cdot \sup\{|A_{\alpha(x)}|: x \in M\} < \tau$  .

2. Предположим, что  $|U\mathfrak{A}| = \tau$  , и для каждого  $\lambda < \tau$  зафиксируем

ем ординал  $\alpha(\lambda) < \lambda$  такой, что  $|A_{\alpha(\lambda)}| > \lambda$  (если бы такого  $\alpha(\lambda)$  не существовало, то в силу пункта I имели бы  $|U\mathfrak{A}| \leq \lambda < \tau$  - противоречие). Выбрав теперь множество  $\{\lambda_\beta : \beta < c_f(\tau)\}$  кардиналов так, что  $\lambda_\beta < \tau$  и  $\sum \{\lambda_\beta : \beta < c_f(\tau)\} = \tau$ , получим  $|U\{A_{\alpha(\lambda_\beta)} : \beta < c_f(\tau)\}| = \tau$  и, следовательно,  $\{A_{\alpha(\lambda_\beta)} : \beta < c_f(\tau)\}$  конфинально в  $\mathfrak{A}$ . Итак,  $c_f(\nu) \leq c_f(\tau)$ .

Для доказательства обратного неравенства рассмотрим подмножество  $L \subset \omega$ , конфинальное в  $\omega$  и такое, что  $|L| = c_f(\nu)$ . Ясно, что тогда подсемейство  $\{A_\alpha : \alpha \in L\}$  конфинально в цепи  $\mathfrak{A}$  и, следовательно, множество кардиналов  $\{|A_\alpha| : \alpha \in L\}$  является конфинальным для  $\tau$  (т.к. все  $|A_\alpha| < \tau$ ), а значит,  $c_f(\tau) \leq c_f(\nu)$ .

3. Выберем  $M \subset U\mathfrak{A}$  так, что  $\bar{M} \supset U\mathfrak{A}$  и  $|M| = d(U\mathfrak{A})$ , и положим  $\beta = \sup \{\alpha(x) : x \in M\}$ , где  $x \in A_{\alpha(x)}$ . Ясно, что  $\beta = \omega$  (в противном случае  $A_\beta \supset M$  и, следовательно,  $A_\beta = \bar{A}_\beta \supset U\mathfrak{A}$ ), а значит,  $c_f(\nu) \leq |M| = d(U\mathfrak{A})$ .

4. Считая, что  $U\mathfrak{A} \neq A_\alpha$  для всех  $\alpha < \omega$  (в противном случае утверждение очевидно), в силу п. 3 заключаем, что  $c_f(\nu) \leq d(U\mathfrak{A})$ , а значит и  $c_f(\nu) < c_f(\tau)$ . В соответствии с п. 2 получаем отсюда, что  $|U\mathfrak{A}| < \tau$ .

Из предложения 6 очевидным образом следует (при  $\tau = \aleph_1$ )

Предложение 6<sup>0</sup>. Если  $\mathfrak{A}$  - цепь из счетных замкнутых в  $X$  множеств и  $X$  - наследственно сепарабельно, то и множество  $U\mathfrak{A}$  также счетно.

Лемма I (основная). Пусть  $\mathfrak{A} = \{A_\alpha : \alpha < \omega\}$  - цепь из  $\tau$ -компактных в  $X$  множеств,  $U\mathfrak{A} = X$  и для каждого  $A_\alpha = A_\alpha \cup \{A_\beta : \beta < \alpha\}$  ( $A_0 = A_0$ ) существует семейство  $\{G_\alpha^\beta : \beta < \mu\}$  такое, что:

(1)  $A_\alpha = U\{G_\alpha^\beta : \beta < \mu\}$ ;

(2) каждое  $G_\alpha^\beta$  содержится в некотором разреженном (в  $X$ ) компакте  $C_\alpha^\beta \subset X$ .

Тогда  $X_\beta = U\{G_\alpha^\beta : \alpha < \mu\}$ - $k$ -разрежено в  $X$  при всех  $\beta < \mu$  и, кроме того,  $X = U\{X_\beta : \beta < \mu\}$ .

Доказательство. Пусть  $H$  - замкнутое в  $X$  множество, для которого существует замкнутое отображение  $f : H \rightarrow I = [0, 1]$  такое, что  $|f(H)| > \aleph_0$ . Тогда, положив  $A_\alpha = X$  и  $\bar{\alpha} = \min\{\alpha \leq \omega : |f(H \cap A_\alpha)| > \aleph_1\}$ , получаем цепь  $\{f(H \cap A_\alpha) : \alpha < \bar{\alpha}\}$  из счетных замкнутых в  $I$  множеств, поскольку  $H \cap A_\alpha$   $\tau$ -компактно (предложение 4), а следовательно,  $f(H \cap A_\alpha)$  замкнуто в  $I$  (предложение 3). Воспользовавшись предложением 6<sup>0</sup>, отсюда заключаем, что  $U\{f(H \cap A_\alpha) : \alpha < \bar{\alpha}\} = f(H \cap (U\{A_\alpha : \alpha < \bar{\alpha}\}))$  счетно,

а следовательно

(ж)  $|\mathcal{F}(\mathbb{H} \cap A'_x)| \geq \aleph_1$  (и даже  $|\mathcal{F}(\mathbb{H} \cap A'_x)| \geq c$ )  
 (действительно,  $\mathcal{F}(\mathbb{H} \cap A'_x) = \mathcal{F}(\mathbb{H} \cap A_x \setminus \mathbb{H} \cap (\cup \{A_\alpha : \alpha < x\})) \supseteq$   
 $\supseteq \mathcal{F}(\mathbb{H} \cap A_x) \setminus \mathcal{F}(\mathbb{H} \cap (\cup \{A_\alpha : \alpha < x\}))$ ).

С другой стороны, для каждого  $\beta < \mu$  множество  $\mathcal{F}(G_\beta^c \cap \mathbb{H})$  является разреженным компактом (в силу существования у  $\mathcal{F}$  неприводимого сужения - см., например, [II] и, значит (например, в силу следствия 2 или предложения 1<sup>o</sup>) счетно. Но тогда и  $|\mathcal{F}(G_\beta^c \cap \mathbb{H} \cap A_x)| < \aleph_0$  для всех  $\beta < \mu$ , а следовательно, в силу (ж),

(жж)  $\mathcal{F}(\mathbb{H} \setminus X_\beta) \neq \emptyset$  (и даже  $|\mathcal{F}(\mathbb{H} \setminus X_\beta)| \geq c$ )

и, тем более,  $\mathbb{H} \setminus X_\beta \neq \emptyset$ . (Действительно, поскольку  $A'_x \cap X_\beta = G_\beta^c$ , то, очевидно, имеем  $\mathcal{F}(\mathbb{H} \setminus X_\beta) \supseteq \mathcal{F}(A'_x \cap \mathbb{H} \setminus A'_x \cap X_\beta \cap \mathbb{H}) =$   
 $= \mathcal{F}(A'_x \cap \mathbb{H} \setminus G_\beta^c \cap \mathbb{H}) \supseteq \mathcal{F}(A'_x \cap \mathbb{H}) \setminus \mathcal{F}(G_\beta^c \cap \mathbb{H}) \neq \emptyset$ ). Остается только заметить, что для всякого неразрезанного компакта  $F$  существует отображение  $\mathcal{F}: F \xrightarrow{\text{на } I} I$  (см., например, [I4, теорема 4.2 или теорема 4.5]) и, следовательно, если при этом  $F$  замкнуто в  $X$ , то  $F \setminus X_\beta \neq \emptyset$  для всякого  $\beta < \mu$ . Но это и означает, что все  $X_\beta$   $\kappa$ -разрежены. Равенство  $X = \cup \{X_\beta : \beta < \mu\}$  очевидно следует из условия I.

Ясно, что при  $|A_x| \leq \mu$  имеем  $|A'_x| \leq |A_x| \leq \mu$ ,  $A'_x = \cup \{x_\beta : \beta < \mu\}$  и, значит, из леммы I немедленно вытекает

**Лемма 1<sup>o</sup>.** Пусть  $\mathcal{F} = \{A_\alpha : \alpha < \nu\}$  - цепь из  $\kappa$ -компактных подмножеств,  $\cup \mathcal{F} = X$  и  $|A_\alpha| \leq \mu$  для всех  $\alpha < \nu$ . Тогда  $X$  является объединением  $\leq \mu$  компактно-разреженных подпространств.

**Лемма 2.** Пусть  $\nu^{1/\aleph_0} = \nu$  (т.е., если  $\lambda < \nu$ , то и  $\lambda^{1/\aleph_0} < \nu$ ). Тогда для всякого  $X$  такого, что  $|X| = \nu$ , существует цепь  $\mathcal{F} = \{A_\alpha : \alpha < \nu\}$  из  $\kappa$ -компактных в  $X$  множеств такая, что  $|A_\alpha| < \nu$  для всех  $\alpha < \nu$  и  $\cup \mathcal{F} = X$ .

**Доказательство.** Пусть  $X = \{x_\alpha : \alpha < \nu\}$  и положим  $A_0 = \{x_0\}$ . Пусть для всех  $\alpha < \alpha'$  (где  $\alpha' < \nu$ ) уже построены множества  $A_\alpha$  такие, что

- (1)  $\{A_\alpha : \alpha < \alpha'\}$  - цепь в  $X$  и  $x_\alpha \in A_\alpha$  для всех  $\alpha < \alpha'$ ;
- (2)  $|A_\alpha| \leq |\alpha|^{1/\aleph_0}$  (при  $\alpha > 1$ );
- (3)  $A_\alpha$  -  $\kappa$ -компактно в  $X$ .

Положив  $C_{\alpha'} = \{x_{\alpha'} \cup (\cup \{A_\alpha : \alpha < \alpha'\}), \alpha' > 1$ , очевидно, получаем  $|C_{\alpha'}| \leq \sum \{|A_\alpha| : \alpha < \alpha'\} \leq |\alpha'|^{1/\aleph_0} \cdot |\alpha'| = |\alpha'|^{1/\aleph_0}$  и, значит, в силу предложения 5, существует  $\kappa$ -компактное в  $X$  подмножество  $A_{\alpha'} \supset C_{\alpha'}$  такое, что  $|A_{\alpha'}| \leq |C_{\alpha'}|^{1/\aleph_0} = |\alpha'|^{1/\aleph_0}$ . Ясно, что построенное таким образом семейство  $\{A_\alpha : \alpha < \nu\}$  отвечает требованиям

(I)-(3) и, следовательно, является искомой цепью.

Если  $\lambda = (\mu^{\aleph_0})^+$ , то, очевидно, для всякого  $\lambda < \lambda$  имеем  $\lambda^{\aleph_0} \leq \mu^{\aleph_0} < \lambda$ , т.е.  $\lambda^{\aleph_0} = \lambda$ . Таким образом, из леммы I<sup>0</sup> и леммы 2 вытекает

**Теорема 2.** Если  $\mu^{\aleph_0} = \mu$  и  $|X| \leq \mu^+$ , то тогда X распадается на  $\leq \mu$  компактно-разреженных подпространств, т.е.

$X = \cup \{X_\beta : \beta < \mu\}$ , где все  $X_\beta$  - компактно-разрежены.

Из теоремы I и 2 легко следует теперь основной результат работы:

**Теорема 3.** Если для каждого подпространства  $X' \subset X$  имеем  $X' = \cup \{C_\beta : \beta < \lambda\}$ , где все  $C_\beta$  - компакты, то  $|X| \leq \lambda^{\aleph_0}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $X' \subset X$  такое, что

$|X'| \leq (\lambda^{\aleph_0})^+$ . Положив  $\lambda^{\aleph_0} = \mu$ , из теоремы 2 получаем:

$X' = \cup \{X_\beta : \beta < \mu\}$ , где все  $X_\beta$  компактно-разрежены. Отсюда,

в силу теоремы I, следует, что  $|X'| \leq \mu$ , а значит и  $|X| \leq \mu = \lambda^{\aleph_0}$ .

**Следствие 4.** Если  $\mu^{\aleph_0} = \mu$ , то  $|X| \leq \mu$  тогда и только тогда, когда всякое подпространство (из X) представимо в виде объединения  $\leq \mu$  компактов.

(Отметим, что первый в данном направлении результат получен в [4]). В то же время вопрос о том, верно ли "наивно" следствие 3 для любого бесконечного кардинала  $\mu$  (т.е. без предположения  $\mu^{\aleph_0} = \mu$ ) остается открытым. С другой стороны, в дополнительных аксиоматических предположениях в предыдущей работе авторов доказана значительно более сильная (чем требуется, как показывает теорема I, для оценки на мощность) теорема о разложении [I4, теоремы 8.3, 9.7] (ср. теорему A), из которой в силу теоремы I сразу же следует

**Теорема 4.** (см. [I0]). Пусть всякое подпространство из X представимо в виде объединения  $\leq \mu$  компактов, где  $\mu$  - бесконечный кардинал. Тогда и  $|X| \leq \mu$  в каждом из следующих случаев:

(1)  $\mu < \aleph_0$  ;

(2)  $\mu < \aleph_1$  в предположении  $\aleph_1 < \aleph$  ;

(3)  $\mu$  - любое в предположении (АСР\*) либо ( $V = L$ ).

(Здесь АСР\* = (АСР) & ( $\aleph_1 < \aleph$ ); АСР = "Для каждого кардинала  $\mu > \aleph$  существует кардинал  $\tau < \aleph$  такой, что  $\mu^{\aleph_0} \leq \mu^\tau$ ", а  $V = L$  - аксиома конструктивности).

Приведем без доказательства результат, который можно получить аналогичным образом с помощью модификации леммы I данной работы, более полно использующей технику из [I4, лемма 6.II (d)]:

**Теорема 4'.** Пусть всякое подпространство из  $X$  представимо в виде объединения  $\leq \mu \cdot \mu^{\aleph_0}$  компактов. Тогда и  $|X| \leq \mu$  в каждом из следующих случаев:

- (1)  $|X| < \mu^{\omega_0}$  ;  
 (2)  $|X| < \mu^{\omega_1}$  и  $\aleph_1 < \mathfrak{c}$  ;

(Здесь  $\mu_i = \mu^i$  и  $\mu_\alpha = \min \{ \nu : \nu > \mu_\beta, \forall \beta < \alpha \}$  (см. [14])).

**Теорема 5.** Если всякое подпространство из  $X$  представимо в виде объединения  $\leq \mu$  компактов, где  $\mu > \aleph_0$ , то  $|X| < 2^{\aleph_0}$  и  $\text{hd}(X) \leq \mu$ .

**Доказательство.** Ясно, что всякое пространство содержит всюду плотное левое подпространство (см., например, [18]). С другой стороны, всякий левый компакт является разреженным [3], [9], а значит, каждое пространство  $Z$  содержит всюду плотное  $k$ -разреженное подпространство  $Z' < Z$ .

В условиях теоремы для  $k$ -разреженного подпространства  $X'$  имеем  $|X'| \leq \mu$  (см. доказательство теоремы 1<sup>0</sup>), откуда и следует, что  $\text{hd}(X) \leq \mu$ . Поэтому, положив теперь  $\mathcal{F} = \{ F \subset X : |F| > 2^{\aleph_0} \}$ , получаем, что  $|\mathcal{F}| \leq 2^{\aleph_0}$  и, следовательно, в силу [14, предложение 2.3] в  $X$  существуют подпространства  $X_0$  и  $X_1$  такие, что  $X = X_0 \cup X_1$  и для каждого замкнутого в  $X$  множества  $H \subset X_i$  ( $i = 0, 1$ ) имеем  $|H| < 2^{\aleph_0}$ . Остается только заметить, что  $\mathfrak{cf}(2^{\aleph_0}) > \mu$  и, так как в силу условия  $X_i = \cup \{ H_\beta : \beta < \mu \}$  ( $i = 0, 1$ ), где  $H_\beta$  - компакты, при  $X \in T_2$  получаем, что  $|X_i| < 2^{\aleph_0}$  ( $i = 0, 1$ ), а значит, и  $|X| < 2^{\aleph_0}$ . (Ясно, что хаусдорфовость пространства  $X$  не существенна, ибо в условиях теоремы достаточно показать, что  $|H| < 2^{\aleph_0}$  для каждого компакта  $H \subset X$ ).

#### Литература

1. Архангельский А.В. *Отображения и пространства*. УМН. 21. вып. 4. С.133-184. 1966.
2. Архангельский А.В. *Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты*. УМН. 35. № 6. 1978. С.29-84.
3. Архангельский А.В. *О пространствах, растянутых влево*. Вест. МГУ. сер. мат., мех. 1978. № 5, С.30-36.
4. Архангельский А.В., Шахматов Д.В. *О счеточной аппроксимации произвольных функций счетными семействами непрерывных функций*. Труды семинара им. И.Г.Петровского, изд. МГУ. 1988. вып. 13. С.206-227.

5. Брегман Ю.Х. Об одной модификации теоремы Эрдоша и Радо. Топологические пространства и их отображения. №5. Рига. 1981. С.10-13.
6. Брегман Ю.Х., Шостак А.П. Некоторые топологические теоремы Рамсея. Топологические пространства и их отображения. № 4. Рига. 1979. С.3-13.
7. Мальхин В.И. О рамсеевских пространствах // ДАН СССР. Т. 247. 1979. С.1312-1316.
8. Чобан М.М. О  $\omega$ -паракомпактных пространствах // Вестник МГУ, сер. матем. № 1. 1969. С.20-27.
9. Шапировский Б.Э. Об отображениях на кубы // УМН, Т.35. № 3. 1980. С.122-130.
10. Шапировский Б.Э. Кардинальные инварианты, отображения на тихоновские кубы и точки ненормальности в бикompактах // Тезисы Бакинской международной топологической конференции. Баку. 1987. Часть II. С.337.
- II. Энгелькинг Р. Общая топология. М. Мир. 1986.
12. Bernstein F. Zur Theorie der trigonometrischen Reichen // Leipziger Berichte. В.60. 1980. S.329.
13. Burke D. On subparacompact spaces // Proc. Amer. Math. Soc. V.23. 1969. 655-663.
14. Bregman J., Šapirovsij B., Šostak A. On partition of topological spaces // Časopis pěstovani matem, V.109. 1984. P.27-53
15. Hajnal A., Juhász I., Shelah. Splitting almost disjoint families // Trans. Amer. Math. Soc. V.295. 1986. N 1. P.369-387.
16. Nešetřil J., Rödl V. Ramsey topological spaces // General Topology and Relations to Analysis and Algebra. 1976. P. 333-337.
17. Weiss W. Partitioning topological spaces // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. N 23. Topology. Budapest. 1978. P.1249-1255.
18. Juhász I. Cardinal functions in topology. Math. Centre Trach 34. Amsterdam. 1971.

Поступило 15.03.1988

A THEOREM ON PARTITION OF TOPOLOGICAL SPACES INTO  $k$ -SCATTERED  
SUBSPACES AND CARDINALITY OF TOPOLOGICAL SPACES

Ju. Bregman, B. Šapirovsii, A. Šostak

Summary

It is proved that if every subspace  $X'$  of a space  $X$  is representable as a union of  $\leq \mu$  Hausdorff compacta, then  $|X| \leq \mu^{\aleph_0}$  and  $|X| < 2^\mu$ .

The proofs of these and some related results are based on the technique of partitioning topological spaces into s.c.  $k$ -scattered subspaces (i.e. subspaces containing no closed (in the whole space) Hausdorff compacta) developed by the authors in the previous paper.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЖ.-К. РОТА

Е. Гутман

Кафедра алгебры и геометрии

Пусть  $F(L)$  — свободная абелева группа, порождённая элементами дистрибутивной решётки  $L$ , обладающей наибольшим элементом  $u$  и наименьшим  $z$ . Определив умножение на  $L$  по правилу  $xy = x \wedge y$  для всех  $x, y \in L$ , мы превратим  $F(L)$  в кольцо. В этом кольце подгруппа аддитивной группы, порождённая всевозможными линейными комбинациями вида

$$x+y - x \vee y - x \wedge y, \quad x, y \in L \quad (1)$$

является идеалом, обозначаемым  $J$ , [3]. Фактор-кольцо  $V(L) = F(L)/J$  называется кольцом нормирования.

В [3] показано, что естественное отображение решётки  $L$  в кольцо  $V(L)$  инъективно. Это даёт нам право считать, что элементами кольца  $V(L)$  являются линейные комбинации вида  $\sum m_i x_i$ ,  $m_i \in \mathbb{Z}$ ,  $x_i \in L$ . При этом элементы (1) равны нулю. Положим, кроме того,  $\varepsilon(\sum m_i x_i) = \sum m_i$ .

В данной заметке мы рассмотрим сформулированный в [4] вопрос об изоморфизме кольца нормирования  $V(L)$  кольцу  $C(X, \mathbb{Z})$  непрерывных целочисленных функций, заданных на некотором компактном топологическом пространстве  $X$ .

Пусть  $B$  — булева алгебра,  $B^*$  — соответствующее ей булево кольцо,  $X(B^*)$  — множество простых идеалов кольца  $B^*$ .

Система, состоящая из множеств вида  $V_E = X(B^*) \setminus W_E$ , где  $W$  включает в себя все простые идеалы кольца  $B^*$ , которые не содержат подмножество  $E$  элементов этого кольца, задаёт топологию на  $X(B^*)$ , называемую топологией Зарисского [1]. Множество  $X(B^*)$  с определённой на нём топологией Зарисского называется спектром кольца  $B^*$ .

Пусть  $B_L$  — наименьшая булева алгебра, содержащая дистри-

бутивную решётку  $L$ , т.е., булева алгебра, порождённая элементами  $L$  и их дополнениями. Через  $L'$  обозначим дистрибутивную решётку, полученную присоединением к  $L$  такого элемента  $z'$  что  $z' < x$  для всякого  $x \in L$ .

**Теорема.** Кольцо нормирования  $V(L)$  изоморфно кольцу целочисленных функций на множестве  $X(B^*)$ , непрерывных относительно топологии Зарисского.

**Доказательство.** Пусть  $z''$  - наименьший элемент булевой алгебры  $B_U$ ,  $(z')$  и  $(z'')$  - главные идеалы, порождённые элементами  $z'$  и  $z''$  в кольцах  $V(L')$  и  $V(B_U)$  соответственно.

Для удобства разобьём дальнейшие рассуждения на несколько этапов.

I. Кольцо нормирования  $V(L)$  изоморфно факторкольцу  $V(L')/(z')$ .

Для доказательства этого исходим из очевидного факта, что если  $L \subset L'$ , то  $V(L) \subset V(L')$ . Пусть

$$h = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad m_i \in \mathbb{Z}, \quad x_i \in L', \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2)$$

и пусть

$$\Delta: V(L') \rightarrow V(L') -$$

отображение, заданное правилом

$$\Delta(h) = h - \alpha(h) z',$$

где  $\alpha(h)$  - коэффициент при  $z'$  в линейной комбинации (2).

Так как  $\Delta(h) \in V(L)$  и  $\Delta(h) = h$  при всех  $h \in V(L)$  то  $\text{Im } \Delta = V(L)$

Как показано в [3], отображение из  $V(L')$  в  $\mathbb{Z}$ , которое каждому  $h \in V(L')$  ставит в соответствие  $\alpha(h)$  есть кольцевой гомоморфизм. Поэтому,

$$\begin{aligned} \Delta(h_1 + h_2) &= (h_1 + h_2) - \alpha(h_1 + h_2) z' = h_1 + h_2 - \\ &- \alpha(h_1) z' - \alpha(h_2) z' = (h_1 - \alpha(h_1) z') + (h_2 - \alpha(h_2) z') = \\ &= \Delta(h_1) + \Delta(h_2). \end{aligned}$$

Так как  $h = \Delta(h) + \alpha(h) z'$ , то

$$\begin{aligned} h_1 h_2 &= (\Delta(h_1) + \alpha(h_1) z') (\Delta(h_2) + \alpha(h_2) z') = \\ &= \Delta(h_1) \Delta(h_2) + \alpha z', \end{aligned}$$

где  $\alpha = \alpha(\alpha(h_1) \Delta(h_2) + \alpha(h_2) \Delta(h_1) + \alpha(h_1) \alpha(h_2))$ .

Ввиду того, что  $\Delta(h_1) \Delta(h_2) \in V(L)$  имеем  $\Delta(\alpha(h_1) \Delta(h_2)) = \alpha(h_1) \Delta(h_2)$ . Поэтому, согласно определению  $\Delta$ ,

$$\begin{aligned} \Delta(h_1 h_2) &= \Delta(\alpha(h_1) \Delta(h_2)) + \Delta(\alpha z') = \\ &= \alpha(h_1) \Delta(h_2) + (\alpha z' - \alpha z') = \Delta(h_1) \Delta(h_2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta(h_1 h_2) = \Delta(h_1) \Delta(h_2).$$

Таким образом,  $\Delta$  - гомоморфизм кольца  $V(L')$  на кольцо  $V(L)$

Из определения  $\Delta$  вытекает, что  $\text{Ker } (\Delta) = \{h \mid h = \alpha(h) z'\} = \mathbb{Z} z'$

Остаётся показать, что  $Z z' = (z')$ . Действительно, если  $f \in (z')$  то  $f = h z'$ , где  $h$  - некоторый элемент кольца  $V(L')$ , заданный равенством (2). Тогда, учитывая, что  $z'x = z'$  при всех  $x \in L'$ ,

$$f = z' \cdot \sum_{i=1}^n m_i x_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot z'x = \sum_{i=1}^n m_i \cdot z' \in Z z'.$$

Следовательно,  $(z') \subseteq Z z'$ . Обратное включение очевидно.

2. Факторкольцо  $V(L') / (z')$  изоморфно факторкольцу  $V(B_{L'}) / (z'')$ . Этот факт немедленно вытекает из [2], где показано, что кольца  $V(L')$  и  $V(B_{L'})$  изоморфны и этот изоморфизм переводит  $z'$  в  $z''$ .

3. Факторкольцо  $V(B_{L'}) / (z'')$  изоморфно кольцу  $C(X(B_{L'}^*), Z)$  целочисленных непрерывных функций на топологическом пространстве  $X(B_{L'}^*)$ . Покажем это.

Согласно теореме Стоуна, отображение из  $B_{L'}$  в  $X(B_{L'}^*)$ , переводящее  $x \in B_{L'}$  в  $V_x$  (вместо  $V_{\{x\}}$  будем писать  $V_x$ ) есть рёшеточный мономорфизм, [1]. Так как  $z'$  является нулевым элементом в кольце  $B_{L'}$ , то  $V_{z'} = \emptyset$ . В [2] показано (теорема 3 на стр. 17), что при таких условиях факторкольцо  $V(B_{L'}) / (z')$  изоморфно подкольцу целочисленных функций, заданных на  $X(B_{L'}^*)$  порождённым функциями

$$f_x(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s \in V_x, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3)$$

Остаётся убедиться в том, что кольцо, порождённое функциями вида (3) и есть  $C(X(B_{L'}^*), Z)$ . Действительно, так как топология на  $Z$  дискретна, то функции (3) непрерывны, а значит, непрерывны и все функции из кольца, порождённого ими. Обратное, пусть  $f \in C(X(B_{L'}^*), Z)$ . Так как спектр булева кольца есть компактное топологическое пространство, [1], а  $f$  - непрерывная функция, множество её значений конечно, т.е. является компактным в  $Z$ . Пусть оно исчерпывается числами  $z_1, \dots, z_n$ . Тогда

$$X(B_{L'}^*) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(z_i). \quad (4)$$

С другой стороны ясно, что  $f^{-1}(z_i) \cap f^{-1}(z_j) = \emptyset$  при  $i \neq j$ . Следовательно,

$$f = \sum_{i=1}^n z_i f_i, \quad (5)$$

где

$$f_i(s) = \begin{cases} 1, & \text{при } s \in f^{-1}(z_i), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из непрерывности функции  $f$  и соотношения (4) вытекает, что

множества  $f^{-1}(z_i)$  открыто-замкнуты. Однако, открыто-замкнутыми в топологии Зарисского являются множества вида  $V_x$ ,  $x \in B_L^*$  и только они, [1]. Следовательно, найдутся такие  $x_1, \dots, x_n \in B_L^*$  что  $V_{x_i} = f^{-1}(z_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ . Но тогда  $f_i = f_{x_i}$  и, в силу (5),  $f$  принадлежит кольцу, порождённому функциями вида (3).

Резюмируя все три этапа доказательства, получим результат, сформулированный в теореме.

## Литература

1. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир. 1972.
2. Гутман Е. Об изоморфизме колец нормирования // Уч. зап. Тартуск. ун-та. 746. 1987. С.12-22.
3. Geissinger L. Valuations on Distributive Lattices 1 // Archiv. Math. 24. 1973. P.230-239.
4. Rota G.-C. On the combinatorics of the Euler Characteristics // Studies in Pure Math., Acad. Press. London. 1971. P.221-233.

Поступило 10.12.1987

ON G.-C.ROTA PROBLEM

J.Gutman

Summary

Let  $L$  be a distributive lattice which contains maximal and minimal element. It is proved that valuation ring  $V(L)$  is isomorphic to the ring of integer-valued continuous functions, on any compact topological space.

## СОВМЕСТНЫЙ СПЕКТР И ПРОДОЛЖЕНИЕ ГОМОМОРФИЗМОВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБР

А. Кохк

### Лаборатория прикладной математики

Свойства различных совместных спектров для семейств элементов банаховой алгебры изучались многими авторами (см., например, [10, гл. 6], [3, 21, 22] и указанную в них литературу). Наше изложение опирается, в основном, на работы [37] и [39].

В § 1 аксиоматически введено понятие совместного спектра на топологической алгебре с единицей и, в случае банаховых алгебр, изучена его связь с пространствами гомоморфизмов конечно порожденных подалгебр. Также указана связь между непустотой пространства гомоморфизмов банаховой алгебры с единицей и существованием на этой алгебре совместного спектра с определенным свойством.

В качестве приложений в § 2 рассмотрены некоторые вопросы, связанные с продолжением гомоморфизмов подалгебр банаховой алгебры и локально  $m$ -выпуклой алгебры.

### § 1. Совместный спектр на топологической алгебре

Пусть  $K$  поле  $\mathbb{C}$  или  $\mathbb{R}$  и  $A$  — топологическая  $K$ -алгебра с единицей  $e_A$ , т.е.  $A$  — линейное топологическое пространство над  $K$ , являющееся ассоциативной  $K$ -алгеброй с единицей  $e_A$  с раздельно непрерывной операцией умножения элементов. Пусть  $\text{Inv} A$  — множество обратимых элементов алгебры  $A$ ,  $\nu$  — алгебраический изоморфизм  $K$  в  $A$ , определяемый для всех  $\alpha \in K$  равенством  $\nu(\alpha) = \alpha e_A$ , и  $\text{Hom} A$  — множество всех нетривиальных непрерывных  $K$ -гомоморфизмов на  $A$ , наделенное слабой топологией. Пусть, далее,  $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n$  — прямое произведение  $n$  экземпляров  $A$

$$c_0(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$$

и  $C(A^n, A)$  -  $K$ -алгебра всех  $A$ -значных отображений на  $A^n$  (относительно поточечных операций). Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  и  $\kappa \in N_n$  через  $x_\kappa$  будем обозначать отображение  $A^n$  на  $A$ , определяемое для всех  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$  равенством

$$x_\kappa((a_1, a_2, \dots, a_n)) = a_\kappa,$$

а через  $P(A^n)$  - подалгебру алгебры  $C(A^n, A)$ , порожденную отображениями  $x_\kappa$  ( $\kappa \in N_n$ ).

Для каждого подмножества  $S \subset A$  через  $\langle S \rangle$  ( $[S]$ ) будем в дальнейшем обозначать подалгебру алгебры  $A$  (соответственно, замкнутую подалгебру алгебры  $A$ ), порожденную подмножеством  $S$  и элементом  $e_A$ , а через  $\partial(a)$  - спектр элемента  $a \in A$  в подалгебре  $[a]$ , т.е.

$$\partial(a) = \{ \alpha \in K : (a - \alpha e_A) \notin \text{Inv}[\{a\}] \}.$$

**Определение.** Отображение  $\mu$  на  $c_0(A)$ , ставящее каждому элементу  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) в соответствие подмножество (необязательно непустое)  $\mu(\bar{a}) \subset K^n$  будем называть совместным спектром на топологической  $K$ -алгебре  $A$ , если для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$  выполнены условия

$$(1) \mu((a_1, \dots, a_n, e_A)) = \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 1) \in K^{n+1} :$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mu(\bar{a}) \}$$

и

$$(2) \mu((\alpha_1 e_A, \dots, \alpha_n e_A)) \in \nu(\partial(\mu(\bar{a}))) \quad \text{для всех } \mu \in P(A^n)$$

и  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mu(\bar{a})$ .

Совместный спектр  $\mu$  на топологической  $K$ -алгебре  $A$  с единицей называется нетривиальным, если множество  $\mu(\bar{a})$  непусто для некоторого  $\bar{a} \in c_0(A)$ .

Нетрудно заметить, что это определение совместного спектра является модификацией определения подспектра, введенного в [37] и [39].

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Обыкновенный совместный спектр. Пусть  $A$  - топологическая  $K$ -алгебра с единицей и  $\Delta \subset \text{hom } A$  - непустое подмножество. Положим

$$\mu(\bar{a}) = \{ (\Lambda(a_1), \dots, \Lambda(a_n)) : \Lambda \in \Delta \}$$

для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$  заметим, что  $\mu$  суть совместный спектр на  $A$ . В случае, когда  $A$  является комплексной коммутативной банаховой алгеброй с единицей и  $\Delta = \text{hom } A$ ,  $\mu(\bar{a})$  является обыкновенным совместным спектром набора  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ , введенным в [14] (см., также [2]).

2. Максимальный совместный спектр. Пусть  $A$  - топологическая  $K$ -алгебра с единицей. Нетрудно видеть, что отобра-

жение  $\mathcal{M}_m$  определяемое для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$  равенством

$$\mathcal{M}_m(\bar{a}) = \{(\Lambda(a_1), \dots, \Lambda(a_n)) : \Lambda \in \text{hom}[\bar{a}]\}$$

является совместным спектром на  $A$  (в случае, когда множество  $\text{hom}[\bar{a}]$  пусто, то считаем, что и множество  $\mathcal{M}_m(\bar{a})$  пусто).

3. Левый и правый совместные спектры  $\delta_\ell^A$  и  $\delta_r^A$  и их объединение  $\delta^A$  на топологической  $\mathbb{K}$ -алгебре  $A$  с единицей. Для всех  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) положим

$$\delta_\ell^A(\bar{a}) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{\kappa=1}^n b_\kappa (a_\kappa - \alpha_\kappa e_A) \neq e_A$$

$$\text{для всех } b_1, \dots, b_n \in A\},$$

$$\delta_r^A(\bar{a}) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{\kappa=1}^n (a_\kappa - \alpha_\kappa e_A) b_\kappa \neq e_A$$

$$\text{для всех } b_1, \dots, b_n \in A\}$$

и

$$\delta^A(\bar{a}) = \delta_\ell^A(\bar{a}) \cup \delta_r^A(\bar{a}).$$

Совместные спектры  $\delta_\ell^A(\bar{a})$ ,  $\delta_r^A(\bar{a})$  и  $\delta^A(\bar{a})$  для набора  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$  элементов банаховой алгебры  $A$  введены в книге [17]. Эти совместные спектры были подробно изучены Р. Хартом [26, 27, 28] и поэтому они иногда называются совместными спектрами Харта.

4. Левый и правый совместные аппроксимативные спектры  $\pi_\ell$  и  $\pi_r$  и их объединение  $\pi$  (см. [7], [20]). Пусть  $A$  - комплексная банахова алгебра с единицей. Для всех  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) совместные спектры  $\pi_\ell$ ,  $\pi_r$  и  $\pi$  определяются равенствами

$$\pi_\ell(\bar{a}) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n : \text{существует последовательность } (x_\kappa) \subset A \text{ такая, что } \|x_\kappa\| = 1 \text{ ( } \kappa \geq 1 \text{ ) и}$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \|(a_j - \alpha_j e_A) x_\kappa\| = 0 \text{ для всех } j \in \mathbb{N}_n\},$$

$$\pi_r(\bar{a}) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n : \text{существует последовательность } (x_\kappa) \subset A \text{ такая, что } \|x_\kappa\| = 1 \text{ ( } \kappa \geq 1 \text{ ) и}$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \|x_\kappa (a_j - \alpha_j e_A)\| = 0 \text{ для всех } j \in \mathbb{N}_n\}$$

и

$$\pi(\bar{a}) = \pi_\ell(\bar{a}) \cup \pi_r(\bar{a}).$$

5. Пусть  $A$  и  $B$  - топологические  $\mathbb{K}$ -алгебры с единицей,  $T$  -  $\mathbb{K}$ -гомоморфизм  $A$  на  $B$  и  $\mathcal{M}$  - совместный спектр на  $B$ . Нетрудно проверить, что тогда отображение  $\mathcal{M} \circ T$ , определяемое для всех  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$  ( $n \geq 1$ ) равенством

$$(\text{sp} \circ T)(\bar{a}) = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \text{sp}((T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n)))\},$$

является совместным спектром на  $A$  ([39], с. 259).

Легко убедиться, что отображения, определенные в примерах 3 и 4, удовлетворяют условию (1). Но они удовлетворяют и условию (2), что вытекает из следующего результата (см. [26]).

**Лемма I.** Пусть  $A$  -  $\mathbb{K}$ -алгебра с единицей,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\rho \in P(A^n)$ ,  $\bar{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A^n$  и  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ . Тогда существуют элементы  $b_\kappa, c_\kappa \in A$  с  $\kappa \in \mathbb{N}_n$  такие, что

$$\begin{aligned} \rho(\bar{a}) - \rho((\alpha_1 e_A, \dots, \alpha_n e_A)) &= \sum_{\kappa=1}^n b_\kappa (\alpha_\kappa - \alpha_\kappa e_A) = \\ &= \sum_{\kappa=1}^n (\alpha_\kappa - \alpha_\kappa e_A) c_\kappa. \end{aligned}$$

Иные примеры совместных спектров можно найти в работах [15, 32, 36, 38].

Следующий результат указывает на связь между совместным спектром на банаховой алгебре с единицей и пространствами гомоморфизмов конечно порожденных подалгебр. Справедлива

**Теорема I.** Пусть  $A$  - комплексная банахова алгебра с единицей,  $\text{sp}$  - совместный спектр на  $A$  и  $\bar{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) такой набор, что множество  $\text{sp}(\bar{a})$  непусто. Тогда для каждого  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  из  $\text{sp}(\bar{a})$  существует гомоморфизм  $\Lambda \in \text{hom}[\bar{a}]$  такой, что  $\Lambda(\alpha_\kappa) = \alpha_\kappa$  с  $\kappa \in \mathbb{N}_n$ . При этом отображение  $\bar{a} \rightarrow \Lambda$  является гомеоморфизмом пространства  $\text{sp}(\bar{a})$  в  $\text{hom}[\bar{a}]$ .

**Доказательство.** Пусть  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \text{sp}(\bar{a})$ . Согласно условию (1),  $\bar{\alpha}_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 1) \in \text{sp}(\bar{\alpha}_1)$ , где  $\bar{\alpha}_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, e_A)$ . Если  $\rho_1(\bar{\alpha}_1) = \rho_2(\bar{\alpha}_1)$  для некоторых  $\rho_1, \rho_2 \in P(A^{n+1})$ , то, по условию (2), имеем

$$(\rho_1 - \rho_2)((\alpha_1 e_A, \dots, \alpha_n e_A, e_A)) \in \nu(\delta((\rho_1 - \rho_2)(\bar{\alpha}_1))) = \nu(\delta(\theta_A)),$$

где  $\theta_A$  - нулевой элемент алгебры  $A$ . Значит, на алгебре  $\langle \bar{a} \rangle$  можно определить равенством

$$\lambda(\rho(\bar{\alpha}_1)) = \nu^{-1}(\nu(\rho(\alpha_1 e_A, \dots, \alpha_n e_A, e_A))) \quad (\rho \in P(A^{n+1}))$$

отображение  $\lambda$  такое, что  $\lambda(e_A) = 1$  и  $\lambda(h) = \delta(h)$  для всех  $h \in \langle \bar{a} \rangle$ . Легко проверить, что отображение  $\lambda$  является линейным мультипликативным и непрерывным на  $\langle \bar{a} \rangle$ . Следовательно, он продолжается до гомоморфизма  $\Lambda \in \text{hom}[\bar{a}]$  (см., например, [4], с. 4). Тем самым показано, что для каждого  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  из  $\text{sp}(\bar{a})$  найдется  $\Lambda_{\bar{\alpha}} \in \text{hom}[\bar{a}]$  такой, что  $\Lambda_{\bar{\alpha}}(\alpha_\kappa) = \alpha_\kappa$ . При этом ясно, что отображение  $\varphi$ , определяемое для всех  $\bar{a} \in \text{sp}(\bar{a})$  равенством  $\varphi(\bar{a}) = \Lambda_{\bar{a}}$ , является взаимно однозначным на  $\text{sp}(\bar{a})$ .

Покажем, что  $\varphi$  является гомеоморфизмом пространства  $\mathcal{M}(\bar{a})$  в  $\text{hom}[\bar{a}]$ . Для этого пусть  $\bar{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{M}(\bar{a})$  и  $\mathcal{O}_0$  - любая окрестность элемента  $\varphi(\bar{a})$  в пространстве  $\text{hom}[\bar{a}]$ . Тогда найдутся  $\varepsilon > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  и элементы  $h_\kappa \in [\bar{a}]$  с  $\kappa \in \mathbb{N}_m$  такие, что

$$\mathcal{O}_1 = \bigcap_{\kappa=1}^m \{ \Lambda \in \text{hom}[\bar{a}] : |\Lambda - \varphi(\bar{a})(h_\kappa)| < \varepsilon \} \subset \mathcal{O}_0.$$

Пусть теперь  $r_\kappa \in P(A^{n+1})$  ( $\kappa \in \mathbb{N}_m$ ) такие, что  $\|r_\kappa(\bar{a}_\kappa) - h_\kappa\| < \varepsilon/3$  и пусть  $\delta > 0$  такое число, что  $|v^{-1}(r_\kappa(\beta_1 e_A, \dots, \beta_n e_A, e_A)) - r_\kappa(\alpha_1 e_A, \dots, \alpha_n e_A, e_A)| < \varepsilon/3$  для всех  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  из  $\mathcal{U} = \mathcal{O}(\alpha_1, \delta) \times \dots \times \mathcal{O}(\alpha_n, \delta)$  и  $\kappa \in \mathbb{N}_m$ , где  $\mathcal{O}(\alpha_\kappa, \delta) = \{ \alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - \alpha_\kappa| < \delta \}$ . Тогда для всех  $\bar{\beta} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{M}(\bar{a})$  справедливо равенство

$$|(\varphi(\bar{\beta}) - \varphi(\bar{a}))(h_\kappa)| < \varepsilon.$$

Итак,  $\varphi$  является непрерывным в любой точке  $\bar{a} \in \mathcal{M}(\bar{a})$ .

Пусть, далее,  $\Lambda_0 \in \Delta = \varphi(\mathcal{M}(\bar{a}))$  и  $\mathcal{V}$  - любая окрестность элемента  $\varphi^{-1}(\Lambda_0)$  в топологии пространства  $\mathcal{M}(\bar{a})$ . Тогда  $\mathcal{M}(\bar{a}) \cap (\mathcal{O}(\Lambda_0(\alpha_1), \varepsilon_1) \times \dots \times \mathcal{O}(\Lambda_0(\alpha_n), \varepsilon_1)) \subset \mathcal{V}$  для некоторого  $\varepsilon_1 > 0$ . Положив

$$\mathcal{O}_2 = \bigcap_{\kappa=1}^n \{ \Lambda \in \Delta : |\Lambda - \Lambda_0(\alpha_\kappa)| < \varepsilon_1 \}$$

заметим, что

$$|\varphi^{-1}(\Lambda)(\alpha_\kappa) - \varphi^{-1}(\Lambda_0)(\alpha_\kappa)| = |\Lambda(\alpha_\kappa) - \Lambda_0(\alpha_\kappa)| < \varepsilon_1$$

для всех  $\Lambda \in \mathcal{O}_2$  и  $\kappa \in \mathbb{N}_n$ . Но это означает непрерывность отображения  $\varphi^{-1}$  в точке  $\Lambda_0$ . Теорема доказана.

Некоторые частные случаи теоремы I были известны и ранее (см., например, [19, 23, 24], [25, предложение I]).

Из теоремы I непосредственно вытекает

Следствие I. Пусть  $A$  - комплексная банахова алгебра с единицей и  $\mathcal{M}$  - совместный спектр на  $A$ . Тогда  $\mathcal{M}(\bar{a}) \subset \mathcal{M}_m(\bar{a})$  для всех  $\bar{a} \in \mathcal{C}_0(A)$ .

Пусть, далее,  $\text{comm } A$  - замыкание коммутаторного идеала банаховой алгебры  $A$  (т.е. замыкание идеала, порожденного множеством  $\{ab - ba : a, b \in A\}$ ). Если пространство  $\text{hom } A$  непусто, то  $\text{comm } A \neq A$ , ибо  $\text{comm } A \subset \ker \Lambda$  для каждого  $\Lambda \in \text{hom } A$ . Более того, как легко видеть (см. пример I), в этом случае

(I.1) существует совместный спектр  $\mathcal{M}$  на  $A$  такой, что множество  $\mathcal{M}(\bar{a})$  непусто для всех  $\bar{a} \in \mathcal{C}_0(A)$ .

Имеет место и обратное утверждение. Именно, справедлива Теорема 2. Пусть  $A$  - комплексная банахова алгебра с

единицей. Тогда условия (I.1),

(I.2) множество  $\text{hom}[\bar{a}]$  непусто для всех  $\bar{a} \in c_0(A)$ ,

(I.3)  $\text{comm}[\bar{a}] \neq [\bar{a}]$  для всех  $\bar{a} \in c_0(A)$ ,

(I.4)  $\text{comm} A \neq A$

и

(I.5) множество  $\text{hom} A$  непусто  
равносильны.

Доказательство. Как было установлено выше, импликации (I.2)  $\Rightarrow$  (I.3) и (I.5)  $\Rightarrow$  (I.1) справедливы. Импликации (I.1)  $\Rightarrow$  (I.2) и (I.4)  $\Rightarrow$  (I.5) справедливы, соответственно, по теореме I настоящей работы и следствию 4.I из [I].

Осталось показать справедливость импликации (I.3)  $\Rightarrow$   $\Rightarrow$  (I.4). Допустим, что  $\text{comm} A = A$ . Так как в банаховых алгебрах замыкание собственного идеала является собственным идеалом (см., например, [II], с. 705), то в этом случае, коммутаторный идеал алгебры  $A$  совпадает с  $A$ . Поэтому

$$e_A = \sum_{k=1}^n a_k (b_k c_k - c_k b_k) d_k$$

для некоторых  $n \in \mathbb{N}$  и элементов  $a_k, b_k, c_k, d_k \in A$  с  $k \in \mathbb{N}_n$ . Значит,  $\text{comm}[\bar{A}] = [\bar{A}]$ , где  $\bar{A} = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n)$ . Но это невозможно. Следовательно,  $\text{comm} A \neq A$ , что и надо было установить. Теорема доказана.

Поскольку для всех  $\lambda \in \text{hom} A$  и  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) имеем

$$(I.6) \quad (\lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n)) \in \delta^A((a_1, \dots, a_n)),$$

то из теоремы 2 получаем

Следствие 2 (см. [25]). Пространство  $\text{hom} A$  комплексной банаховой алгебры  $A$  с единицей непусто тогда и только тогда, когда множество  $\delta^A(\bar{a})$  непусто для всех  $\bar{a} \in c_0(A)$ .

Пусть теперь  $n, k \in \mathbb{N}$  такие, что  $k < n$ . Через  $\pi_n^k$  будем обозначать проекцию  $\mathbb{C}^n$  на  $\mathbb{C}^k$ , т.е.

$$\pi_n^k((a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)) = (a_1, \dots, a_k)$$

для всех  $(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ .

Говорят, что совместный спектр  $\text{sp}$  на топологической алгебре  $A$  обладает свойством проекции, если для всех  $n, k \in \mathbb{N}$  ( $k < n$ ) и  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$  справедливо

$$\text{sp}((a_1, \dots, a_k)) = \pi_n^k(\text{sp}(\bar{a})).$$

Следующая теорема усиливает несколько результатов, полученных при изучении совместных спектров со свойством проекции (см. [6, 29, 39]). Справедлива

Теорема 3. Пусть  $A$  - комплексная банахова алгебра с единицей и  $\text{sp}$  - такой совместный спектр на  $A$ , что

(3) множество  $\text{sp}(\bar{a})$  непусто и компактно для всех  $\bar{a} \in c_0(A)$

и

(4) для всех  $m \in \mathbb{N}$ ,  $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$  и чисел  $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  таких, что  $1+n+k \leq m$  из  $(a_1, \dots, a_m) \in \text{sp}((a_1, \dots, a_m))$  следует, что  $(a_{1+n}, \dots, a_{1+n+k}) \in \text{sp}((a_{1+n}, \dots, a_{1+n+k}))$ . Тогда существует непустое компактное подмножество  $\Delta \subset \text{hom} A$  такое, что

$$(\Lambda(a_1), \dots, \Lambda(a_n)) \in \text{sp}((a_1, \dots, a_n))$$

для всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$  и  $\Lambda \in \Delta$ . При этом

$$(I.7) \text{sp}(\bar{a}) = \{(\Lambda(a_1), \dots, \Lambda(a_n)) : \Lambda \in \Delta\} \quad \text{для всех}$$

$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

тогда и только тогда, когда

(I.8) совместный спектр  $\text{sp}$  обладает свойством проекции.

Доказательство. Пусть  $A^*$  - сопряженное пространство банахова пространства  $A$ , наделенное слабой топологией и

$$D = \{f \in A^* : f(e_A) = \|f\| = 1\}.$$

Хорошо известно, что множество  $D$  компактно в  $A^*$ . Пусть, далее,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$  и<sup>I</sup>

$$\Delta_{\bar{a}} = \{\lambda \in D : (\lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n)) \in \text{sp}(\bar{a}), \lambda|_{[\bar{a}]} \in \text{hom}[\bar{a}]\}.$$

Согласно теореме I, теореме Хана-Банаха и условию (3) можно утверждать, что для всех  $\bar{a} \in c_0(A)$  множество  $\Delta_{\bar{a}}$  непусто и компактно. Кроме того, как легко убедиться, непусто и пересечение конечного числа множеств  $\Delta_{\bar{a}_1}, \dots, \Delta_{\bar{a}_m}$  для всех  $m \in \mathbb{N}$  и  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \in c_0(A)$ . Поэтому непусто и множество

$$\Delta = \bigcap_{\bar{a} \in c_0(A)} \Delta_{\bar{a}}$$

(см., например, [12], с. 196). Пусть  $\Lambda \in \Delta$  - некоторый функционал. Тогда  $\Lambda(a^2) = \Lambda(a)^2$  для всех  $a \in A$ . Отсюда ясно, что  $\Lambda \in \text{hom} A$  (см. [35], с. 112). При этом  $(\Lambda(a_1), \dots, \Lambda(a_n)) \in \text{sp}((a_1, \dots, a_n))$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

Пусть теперь справедливо (I.6),  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$  и  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \text{sp}(\bar{a})$ . Пусть, далее,  $m \in \mathbb{N}$  и  $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m) \in A^m$ . По условию (I.8) найдутся теперь  $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{C}$  такие, что

$$(a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_m) \in \text{sp}((a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)).$$

Следовательно, по теореме I и теореме Хана-Банаха, существует функционал  $\lambda \in D$  такой, что  $\lambda(a_k) = \alpha_k$  с  $k \in \mathbb{N}$  и  $(\lambda(b_1), \dots, \lambda(b_m)) \in \text{sp}(\bar{b})$ . Итак, для всех  $m \in \mathbb{N}$  и  $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$  из  $A^m$  множество

$$\Delta_{\bar{a}}(\bar{b}) = \{f \in D : f(a_k) = \alpha_k \text{ с } k \in \mathbb{N}_n \text{ и } (f(b_1), \dots, f(b_m)) \in \text{sp}(\bar{b})\}$$

<sup>I</sup>Через  $\lambda|_{[\bar{a}]}$  обозначается сужение  $\lambda \in A^*$  на  $[\bar{a}]$ .

непусто и компактно. Следовательно, непусто и множество

$$\Delta_{\bar{a}} = \bigcap_{\bar{b} \in c_0(A)} \Delta_{\bar{a}}(\bar{b}) \subset \Delta.$$

Значит,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\Lambda(a_1), \dots, \Lambda(a_n))$  для некоторого  $\Lambda \in \Delta$ .

Справедливость импликации (I.7)  $\Rightarrow$  (I.8) очевидна.

Теорема доказана.

Следствие 3. Пусть  $A$  - комплексная банахова алгебра с единицей,  $B$  - подалгебра алгебры  $A$  и  $\lambda \in \text{hom } B$ . Если для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $a_1, \dots, a_n \in A$  гомоморфизм  $\lambda$  продолжается до гомоморфизма  $\bar{\lambda} \in \text{hom}[BU\{a_1, \dots, a_n\}]$ , то  $\lambda$  продолжается до гомоморфизма  $\Lambda \in \text{hom } A$ .

Следствие 4 (см. [39], с. 254). Пусть  $A$  - комплексная банахова алгебра с единицей и  $\text{sp}$  - совместный спектр на  $A$ , удовлетворяющий условиям (3), (4) и (I.8). Тогда  $\text{sp}(\bar{a}) \subset \delta^A(\bar{a})$  для всех  $\bar{a} \in c_0(A)$ .

Следствие 5. Пусть  $A$  - комплексная банахова алгебра с единицей,  $\text{sp}$  - совместный спектр на  $A$ , удовлетворяющий условиям (3), (4) и (I.8),  $B$  - подалгебра алгебры  $A$  и  $\lambda \in \text{hom } B$  некоторый гомоморфизм. Если  $(\lambda(b_1), \dots, \lambda(b_n)) \in \text{sp}(\bar{b})$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n) \in B^n$ , то  $\lambda$  продолжается до гомоморфизма  $\bar{\lambda} \in \text{hom } A$ .

Доказательство. По теореме 3 найдется подмножество  $\Delta \subset \text{hom } A$  такое, что  $\text{sp}(\bar{a}) = \{(\Lambda(a_1), \dots, \Lambda(a_n)) : \Lambda \in \Delta\}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ . Для каждого  $b \in B$  пусть

$$\Delta_b = \{\Lambda \in \text{hom } A : \Lambda(b) = \lambda(b)\}.$$

Тогда для всех  $m \in \mathbb{N}$  и элементов  $b_1, \dots, b_m \in B$  пересечение множеств  $\Delta_{b_1}, \dots, \Delta_{b_m}$  непусто и, потому, существует гомоморфизм

$$\bar{\lambda} \in \bigcap_{b \in B} \Delta_b \subset \text{hom } A,$$

который и является продолжением гомоморфизма  $\lambda$ .

## § 2. Продолжение гомоморфизмов подалгебр

Пусть  $C$  - топологическая  $K$ -алгебра и  $A, B$  - подалгебры алгебры  $C$ . Через  $c_{\mathcal{L}} A$  будем обозначать замыкание подалгебры  $A$  в топологии алгебры  $C$ , а через  $AB$  - подалгебру алгебры  $C$  порожденную подалгебрами  $A$  и  $B$ .

Топологическая  $K$ -алгебра  $C$  называется топологической  $K$ -алгеброй с непрерывным умножением, если умножение элементов алгебры  $C$  непрерывно в совокупности.

В дальнейшем нам понадобится следующий результат.

Лемма 2. Пусть  $\mathcal{C}$  - топологическая  $\mathcal{K}$ -алгебра с единицей  $e_{\mathcal{C}}$  и с непрерывным умножением и пусть  $A_0, B_0, A$  и  $B$  - подалгебры алгебры  $\mathcal{C}$  такие, что

$$(a) e_{\mathcal{C}} \in A_0 \subset A, \quad e_{\mathcal{C}} \in B_0 \subset B$$

и

$$(b) \mathcal{C}_A A_0 = A, \quad \mathcal{C}_B B_0 = B.$$

Тогда  $\mathcal{C}_{AB} A_0 B_0 = AB$ .

Доказательство. Заметим сначала, что нам достаточно убедиться, что для каждого  $n \in \mathbb{N}$  имеет место утверждение

(2.1) для любых элементов  $a_{\kappa} \in A, b_{\kappa} \in B$  с  $\kappa \in \mathbb{N}_n$  и для любой окрестности нуля  $\mathcal{O}$  алгебры  $AB$  найдутся элементы  $c_{\kappa} \in A_0, d_{\kappa} \in B_0$  с  $\kappa \in \mathbb{N}_n$  такие, что

$$\prod_{\kappa=1}^n (a_{\kappa} b_{\kappa}) - \prod_{\kappa=1}^n (c_{\kappa} d_{\kappa}) \in \mathcal{O}.$$

Доказательство проведем по индукции.

Пусть, во-первых,  $\mathcal{O}$  - любая окрестность нуля алгебры  $AB$  и  $a \in A, b \in B$  - некоторые элементы. Тогда существует закругленная окрестность нуля  $\mathcal{U}$  алгебры  $AB$  такая, что  $a\mathcal{U} + \mathcal{U}b + \mathcal{U}^2 \subset \mathcal{O}$ . Теперь, согласно условию (б), существуют, в свою очередь, элементы  $c \in A_0$  и  $d \in B_0$  такие, что  $(a-c), (b-d) \in \mathcal{U}$ . Положив  $c = a + u_1$  и  $d = b + u_2$  для некоторых  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$  видим, что

$$ab - cd = -(au_2 + u_1b + u_1u_2) \in \mathcal{O}.$$

Пусть, далее,  $n \in \mathbb{N}$ , справедливо утверждение (2.1) и  $a, a_{\kappa} \in A, b, b_{\kappa} \in B$  с  $\kappa \in \mathbb{N}_n$ . Кроме того, пусть

$$h_0 = \prod_{\kappa=1}^n (a_{\kappa} b_{\kappa})$$

и  $\mathcal{W}$  - любая окрестность нуля алгебры  $AB$ . Тогда

$$\mathcal{W}ab + \mathcal{W}a\mathcal{W} + \mathcal{W}^2b + \mathcal{W}^3 + h_0\mathcal{W}b + h_0\mathcal{W}^2 + h_0a\mathcal{W} \subset \mathcal{W}$$

для некоторой закругленной окрестности нуля  $\mathcal{O}$  алгебры  $AB$ . По нашим предположениям существуют элементы  $c, c_{\kappa} \in A_0$  и  $d, d_{\kappa} \in B_0$  с  $\kappa \in \mathbb{N}_n$  такие, что  $(h_0 - h_1), (a-c), (b-d) \in \mathcal{O}$ , где

$$h_1 = \prod_{\kappa=1}^n c_{\kappa} d_{\kappa}.$$

Пусть  $c = a + v_1$  и  $d = b + v_2$  для некоторых  $v_1, v_2 \in \mathcal{O}$ . Тогда

$$h_0ab - h_1cd = (h_0 - h_1) \cdot$$

$$\cdot (ab + av_2 + v_1b + v_1v_2) -$$

$$- (h_0v_1b + h_0v_1v_2 + h_0av_2) \in \mathcal{W},$$

чем доказательство леммы 2 завершено.

Приступим теперь к изучению гомоморфизмов алгебр, порожденных двумя подалгебрами. Из теоремы I и леммы 2 вытекает

**Теорема 4.** Пусть  $C$  - комплексная банахова алгебра с единицей,  $A, B$  - подалгебры алгебры  $C$  такие, что  $\mathcal{C}_C AB = C$ . Кроме того, пусть  $S_A$  и  $S_B$  - подмножества, соответственно, алгебр  $A$  и  $B$  такие, что  $e_C \in S_A \cap S_B$  и  $\mathcal{C}_{S_A} \langle S_A \rangle = A$ ,  $\mathcal{C}_{S_B} \langle S_B \rangle = B$ . Если пара  $(\lambda, \varrho)$  принадлежит  $\text{Hom } A \times \text{Hom } B$ , то следующие утверждения равносильны:

(2.2) существует  $\Lambda \in \text{Hom } C$  такой, что  $\lambda = \Lambda|_A$  и  $\varrho = \Lambda|_B$ ;

(2.3) на  $C$  существует совместный спектр  $\mu$  такой, что  $(\lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n), \varrho(b_1), \dots, \varrho(b_m)) \in \mu$  для всех  $n, m \in \mathbb{N}$  и элементов  $a_1, \dots, a_n \in S_A$ ,  $b_1, \dots, b_m \in S_B$ .

Доказательство. (2.2)  $\Rightarrow$  (2.3) очевидна (см. пример I).

(2.3)  $\Rightarrow$  (2.2). Пусть  $h \in \langle S_A \rangle \langle S_B \rangle$  - некоторый элемент. Тогда

$$h = \sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^{m_k} \alpha_k^j a_k^j b_k^j$$

для некоторых  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m_k \in \mathbb{N}$  и  $\alpha_k^j \in \mathbb{C}$ ,  $a_k^j \in S_A$ ,  $b_k^j \in S_B$  с  $k \in \mathbb{N}_n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m_k$ . По теореме I существует теперь  $\omega \in \text{Hom } [C]$  такой, что  $\omega(\alpha_k^j) = \lambda(\alpha_k^j)$ ,  $\omega(b_k^j) = \varrho(b_k^j)$  с  $k \in \mathbb{N}_n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m_k$  (здесь  $\bar{c} = (a_1^1, \dots, a_1^{m_1}, \dots, a_n^1, \dots, a_n^{m_n}, b_1^1, \dots, b_1^{m_1}, \dots, b_n^{m_n})$ ).

Поэтому

$$\begin{aligned} |(\lambda, \varrho)(h)| &= \left| \sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^{m_k} \lambda(\alpha_k^j a_k^j) \varrho(b_k^j) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^{m_k} \omega(\alpha_k^j a_k^j b_k^j) \right| = |\omega(h)| \leq \|h\|. \end{aligned}$$

Значит, если  $h_0, h_1 \in \langle S_A \rangle \langle S_B \rangle$  суть равные элементы, то  $|(\lambda, \varrho)(h_0) - (\lambda, \varrho)(h_1)| \leq \|h_0 - h_1\| = 0$ . Следовательно, на  $\langle S_A \rangle \langle S_B \rangle$  можно определить непрерывный гомоморфизм  $h \rightarrow (\lambda, \varrho)(h)$ . Согласно лемме 2 и предложению I из [4] найдется теперь  $\Lambda \in \text{Hom } C$  такой, что  $\Lambda|_A = \lambda$  и  $\Lambda|_B = \varrho$ . Теорема доказана.

Топологическая  $C$ -алгебра  $A$  с единицей  $e_A$  называется локально  $m$ -выпуклой, если топология на ней определена насыщенной системой полуноrm

$$(2.4) \quad \{r_i : i \in I\}$$

такой, что  $r_i(e_A) = 1$  и  $r_i(ab) \leq r_i(a)r_i(b)$  для всех  $i \in I$ ,  $a, b \in A$ ;

алгеброй Фреше, если на ней можно определить инвариант-

ную метрику так, что топология, порожденная этой метрикой, полна и совпадает с исходной топологией алгебры  $A$ .

Пусть  $C$  - локально  $m$ -выпуклая алгебра Фреше с единицей, топология которой определена насыщенной системой полуноrm (2.4). Для каждого  $i \in I$  положим  $C_i = C / \ker \rho_i$  и обозначим через  $\tau_i$  естественный гомоморфизм  $C$  на факторалгебру  $C_i$ . Теперь отображение  $q_i (i \in I)$ , определяемое на  $C_i$  равенством  $q_i(\tau_i(c)) = \rho_i(c)$  для всех  $c \in C$ , является нормой на  $C_i$  (см. [31], с. 9). Более того,  $C_i$  - банахова алгебра относительно этой нормы (см. [13], с. 10). Для всех  $i \in I$ ,  $n \in \mathbb{N}$  и  $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n) \in C^n$  пусть

$$\pi_i(\bar{c}) = (\pi_{c_i} \circ \tau_i)(\bar{c}),$$

где  $\pi_{c_i}$  - совместный аппроксимативный спектр на  $C_i$  (см. примеры 4 и 5). Из теоремы 4 следует

**Теорема 5.** Пусть  $C$  - локально  $m$ -выпуклая  $C$ -алгебра Фреше с единицей, топология которой определена насыщенной системой полуноrm (2.4) и пусть  $A, B$  - такие подалгебры алгебры  $C$ , что  $cl_C AB = C$ . Кроме того, пусть пара  $(\lambda, \rho)$  принадлежит  $\text{hom } A \times \text{hom } B$  и  $S_A \subset A, S_B \subset B$  - подмножества такие, что  $e_C \in S_A \cap S_B, cl_A \langle S_A \rangle = A$  и  $cl_B \langle S_B \rangle = B$ . Если существует  $i \in I$  такой, что

$$(2.5) \quad (\lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n), \rho(b_1), \dots, \rho(b_m)) \in \pi_i((a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m))$$

для всех  $n, m \in \mathbb{N}$  и  $a_k \in S_A, b_j \in S_B$  с  $k \in N_n, j \in N_m$ , то  $\lambda = \Lambda A$  и  $\rho = \Lambda B$  для некоторого гомоморфизма  $\Lambda$  из  $\text{hom } C$ .

**Доказательство.** Пусть  $(\lambda, \rho) \in \text{hom } A \times \text{hom } B$  и  $i \in I$  такие, что для всех  $n, m \in \mathbb{N}$  и элементов  $a_k \in S_A, b_j \in S_B$  с  $k \in N_n, j \in N_m$  справедливо (2.5). Как уже было отмечено,  $C_i$  - банахова алгебра. Поэтому из  $\lambda(h) \in \pi_{\Lambda_i}(\tau_i(h)), \rho(d) \in \pi_{\Lambda_i}(\tau_i(d))$  ( $h \in \langle S_A \rangle, d \in \langle S_B \rangle$ ) вытекают равенства  $|\lambda(h)| \leq \|\tau_i(h)\| = \rho_i(h)$  и  $|\rho(d)| \leq \|\tau_i(d)\| = \rho_i(d)$ . Значит, на  $\tau_i(A)$  и  $\tau_i(B)$  существуют гомоморфизмы  $\bar{\lambda}$  и  $\bar{\rho}$  такие, что  $\bar{\lambda}(\tau_i(a)) = \lambda(a)$  для всех  $a \in A$  и  $\bar{\rho}(\tau_i(b)) = \rho(b)$  для всех  $b \in B$ . Согласно теореме 2 найдется теперь  $\bar{\Lambda} \in \text{hom } C_i$  такой, что  $\bar{\Lambda} \tau_i(A) = \bar{\lambda}$  и  $\bar{\Lambda} \tau_i(B) = \bar{\rho}$ . Но  $\Lambda = \bar{\Lambda} \circ \tau_i \in \text{hom } C$  и  $\Lambda A = \lambda, \Lambda B = \rho$ . Теорема доказана.

Пусть, далее,  $A$  - комплексная банахова алгебра с единицей,  $\text{Rad } A$  - радикал Джекобсона алгебры  $A$ ,  $\text{cad } A$  - строгий функциональный радикал алгебры  $A$ , т.е.

$$\text{cad } A = \bigcap_{\Lambda \in \text{hom } A} \ker \Lambda$$

(если множество  $\text{hom } A$  пусто, то считаем, что  $\text{cad } A = A$ )

и  $\tau$  - естественный гомоморфизм  $A$  на факторалгебру  $A/\text{Rad } A$ .

Если алгебра  $A$  коммутативна, то, согласно теореме Гельфанда-Мазура, для всех  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) справедливо равенство

$$(2.6) \delta^A(\bar{a}) = \{(\Lambda(a_1), \dots, \Lambda(a_n)) : \Lambda \in \text{hom } A\}.$$

Значит, гомоморфизм  $\lambda \in \text{hom}[\bar{a}]$  продолжается до гомоморфизма  $\bar{\lambda} \in \text{hom } A$  тогда и только тогда, когда справедливо (I.6). Нетрудно проверить, что это утверждение справедливо и в случае, когда алгебра  $A$  почти коммутативна (т.е. в случае, когда факторалгебра  $A/\text{Rad } A$  коммутативна). В общем случае каждый гомоморфизм  $\lambda \in \text{hom}[\bar{a}]$ , удовлетворяющий условию (I.6), продолжается до такого функционала  $\bar{\lambda} \in A^*$ , что для всех  $a \in A$  и  $b \in [\bar{a}]$  либо  $\bar{\lambda}(ab) = \bar{\lambda}(a)\bar{\lambda}(b)$ , либо  $\bar{\lambda}(ba) = \bar{\lambda}(b)\bar{\lambda}(a)$  (см. [33]). Возникает вопрос: при каких условиях любой гомоморфизм  $\lambda \in \text{hom}[\bar{a}]$  ( $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ ), удовлетворяющий условию (I.6), продолжается до  $\bar{\lambda} \in \text{hom } A$ ? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема 6.** Пусть  $A$  - комплексная банахова алгебра с единицей и  $\mathcal{M}$  - один из совместных спектров<sup>2</sup>  $\delta_e^A$ ,  $\delta_e^A$ ,  $\delta^A$ ,  $\pi_e \circ \tau$ ,  $\pi_e \circ \tau$  и  $\pi \circ \tau$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

(2.7) найдется множество  $\Delta \subset \text{hom } A$  такое, что  $\mathcal{M}(\bar{a}) = \{(\Lambda(a_1), \dots, \Lambda(a_n)) : \Lambda \in \Delta\}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ ;

(2.8) совместный спектр  $\mathcal{M}$  обладает свойством проекции;

(2.9) если  $B$  подалгебра алгебры  $A$  и  $\lambda \in \text{hom } B$  такой, что  $(\lambda(b_1), \dots, \lambda(b_n)) \in \mathcal{M}(\bar{b})$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$  из  $B^n$ , то  $\lambda$  продолжается до  $\bar{\lambda} \in \text{hom } A$ ;

(2.10)  $\text{Rad } A = \text{rad } A$

(2.11) алгебра  $A$  почти коммутативна.

Доказательство. Импликация (2.7)  $\Rightarrow$  (2.8) очевидна.

Импликация (2.8)  $\Rightarrow$  (2.9) справедлива по следствию 5.

(2.9)  $\Rightarrow$  (2.10). Пусть  $a \in A$  такой, что  $a \notin \text{Rad } A$ . Тогда найдется  $b \in A$  такой, что спектральный радиус элемента  $c = \tau(ab)$  положительный (см. [18], с. 126). Поэтому существует гомоморфизм  $\Lambda$  из границы Шилова подалгебры  $[c] \subset A/\text{Rad } A$  такой, что  $\Lambda(c) > 0$ . Теперь  $\lambda = \Lambda \circ \tau$  принадлежит  $\text{hom}[\{ab\}]$  и, в силу [40], с. 49,  $(\lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n)) \in \mathcal{M}(\bar{a})$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $(a_1, \dots, a_n) \in [\{ab\}]^n$ . Таким

<sup>2</sup> Здесь  $\pi_e$ ,  $\pi_e$ ,  $\pi$  - совместные аппроксимативные спектры на алгебре  $A/\text{Rad } A$ . Легко видеть, что совместный спектр  $\mathcal{M}$  удовлетворяет условиям (3) и (4).

образом, гомоморфизм  $\lambda$  продолжается до гомоморфизма  $\bar{\lambda} \in \text{Hom } A$ . При этом  $\bar{\lambda}(a)\bar{\lambda}(b) = \lambda(ab) = \lambda(\tau(ab)) = \lambda(c) > 0$ . Поэтому  $\bar{\lambda}(a) \neq 0$  и, следовательно,  $a \notin \text{rad } A$ . Тем самым показано, что  $\text{rad } A \subset \text{Rad } A$ . Так как всегда имеет место обратное включение, то  $\text{Rad } A = \text{rad } A$ .

(2.IO)  $\implies$  (2.II). Так как коммутаторный идеал  $\text{comm } A$  алгебры  $A$  всегда содержится в строгом функциональном радикале  $\text{rad } A$ , то  $\text{comm } A \subset \text{Rad } A$ , что равносильно почти коммутативности алгебры  $A$ .

(2.II)  $\implies$  (2.7). Легко заметить, что совместный спектр  $\mathcal{M}$  обладает свойством проекции и, согласно теореме 3, справедливо (2.7). Теорема доказана.

Эквивалентность условий (2.8) и (2.II) в случае, когда  $\mathcal{M} = \delta^A$ , показана ранее в [8, 25]. Известны и иные условия, равносильные условию (2.II) (см. [5, §13], [9, 16, 30, 34]).

#### Литература

1. Абель М., Коки А. Локально псевдовыпуклые алгебры Гельфанда-Мазура // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат. 1988. Т. 37. С. 377-386.
2. Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилев Г.Е. Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.
3. Исаев Г.А., Файнштейн А.С. О совместных спектрах конечных коммутативных семейств // Спектральная теория операторов и ее приложения. 1980. Т. 3. С. 222-257.
4. Коки А. Описание гомоморфизмов топологических модуль-алгебр // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат. 1987. Т. 36. С. 1-7.
5. Крупник Н.Я. Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы. Кишинев: Штиинца, 1984.
6. Ломоносов В.И. Совместный аппроксимативный спектр коммутативного семейства операторов // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1979. Т. 32. С. 39-48.
7. Любич Ю.И. О спектре представления топологической абелевой группы // ДАН СССР. 1971. Т. 200. С. 777-780.
8. Туровский Ю.В. Свойство отображения спектра Харта полиномами для  $n$ -коммутативных семейств элементов банаховой алгебры // Спектральная теория операторов и ее приложения. 1984. Т. 5. С. 152-177.
9. Туровский Ю.В. О коммутативности по модулю радикала Джекобсона ассоциативной оболочки алгебры Ли // Спектральная теория операторов и ее приложения. 1987. Т.8. С. 199-211.

10. Хелемский А.Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд. Московского ун-та, 1986.
11. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд. иностр. лит., 1962.
12. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
13. Arachovitis J. On various types of barrelledness of a topological algebra // Yokohama Math. J. 1984. V. 32. P. 1-13.
14. Arens R., Calderon A.P. Analytic functions of several Banach algebra elements // Ann. Math. 1955. V. 62. P. 204-216.
15. Arveson W. Subalgebras of  $C^*$ -algebras II // Acta Math. 1972. V. 128. P. 271-308.
16. Aupetit B. Some uses of subharmonicity in functional analysis // Banach Cent. Publ. 1982. V. 8. P. 31-37.
17. Bonsall F.F., Duncan J. Numerical ranges of operators on normed spaces and elements of normed algebras. Cambridge, 1971.
18. Bonsall F.F., Duncan J. Complete normed algebras. Berlin: Springer-Verlag, 1973.
19. Bunce J. The joint spectrum of commuting nonnormal operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 29. P. 499-505.
20. Choi M.D., Davis C. The spectral mapping theorem for joint approximate point spectrum // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80. P. 317-321.
21. Curto R.E. Connections between Harte and Taylor spectra // Rev. roum. math. pures et appl. 1986. V. 31. P. 203-215.
22. Dash A.T. Joint Browder spectra and tensor products // Bull. Austral. Math. Soc. 1985. V. 32. P. 119-128.
23. Domar Y., Lindhal L.-A. Three spectral notions for representations of commutative Banach algebras // Preprint. P. 1-30.
24. Enomoto M., Masatoshi F., Kazuhiro T. On normal approximate spectrum // Proc. Jap. Acad. 1972. V.48. P.211-215.
25. Fong C.-K., Sołtysiak A. Existence of a multiplicative functional and joint spectra // Stud. math. 1985. V. 81. P. 213-220.
26. Harte R.E. Spectral mapping theorems // Proc. Roy. Irish Acad. 1972. V. A72. P. 89-107.
27. Harte R.E. The spectral mapping theorem in several

- variables // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78. P. 871-875.
28. Harte R.E. Tensor products, multiplication operators and the spectral mapping theorem // Proc. Roy. Irish Acad. 1973. V. A73. P. 285-302.
  29. Hernandez-Garcia Diego C. A note on the spectral mapping theorem // Stud. math. 1986. V. 83. P. 201-204.
  30. Kajetanowicz P. Extreme spectral states and multiplicative extensions in Banach algebras // Colloq. math. 1984 V. 48. P. 111-116.
  31. Michael E.A. Locally multiplicatively convex algebras // Mem. AMS. 1952. V. 11.
  32. Mocanu Gh. The joint approximate spectrum of a finite system of elements of a  $C^*$ -algebra // Stud. math. 1974. V. 49. P. 253-262.
  33. Mocanu Gh. Fonctionelles relativement multiplicatives et le spectre // Ann. Fac. Sci. Kinshasa, Zaire. Sec. Math. Phys. 1979. V. 5. P. 1-27.
  34. Pták V. Survey of some results in spectral theory obtained in Prague // Banach Cent. Publ. 1982. V. 8. P. 367-371.
  35. Roitman M., Sternfeld Y. When is a linear functional multiplicative? // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 267. P. 111-124.
  36. Słodkowski Z. An infinite family of joint spectra // Stud. math. 1977. V. 61. P. 239-255.
  37. Słodkowski Z., Żelazko W. On joint spectra of commuting families of operators // Stud. math. 1974. V. 50. P. 127-148.
  38. Taylor J.L. A joint spectrum for several commuting operators // J. Funct. Anal. 1970. V. 6. P. 172-191.
  39. Żelazko W. An axiomatic approach to joint spectra I // Stud. math. 1979. V. 64. P. 249-261.
  40. Żelazko W. On ideal theory in Banach and topological algebras // Monogr. Inst. mat. UNAM. 1984. V. 15.

Поступило 17.08.1988

# JOINT SPECTRUM AND EXTENSION OF HOMOMORPHISMS OF TOPOLOGICAL ALGEBRAS

A. Kokk

## Summary

The theory of joint spectra for commuting elements of a unital Banach algebra has been studied by several authors (see, for example, [21, 22, 39]).

In this paper we shall present some considerations concerning the axiomatic concept of a joint spectrum introduced by Z. Słodkowski and W. Żelazko [37, 39].

In the first section we give all necessary definitions and after some examples we establish a relation between the joint spectrum on a unital Banach algebra  $A$  and spaces of homomorphisms of finitely generated subalgebras of  $A$ . Using this, we show that a unital Banach algebra  $A$  has a nonzero homomorphism if and only if there exists a joint spectrum  $\mathcal{M}$  on  $A$  such that  $\mathcal{M}((a_1, \dots, a_n)) \subset \mathbb{C}^n$  is nonempty for every  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ .

In section two we obtain some necessary and sufficient conditions for a homomorphism on a subalgebra  $B$  of  $A$  to have an extension to  $A$ .

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ  $\ast$ -АЛГЕБР

А. Коки

Лаборатория прикладной математики

Пусть  $A$  — топологическая алгебра над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$  (т.е.  $A$  — алгебра над  $\mathbb{C}$ , являющаяся комплексным линейным топологическим пространством, в топологии которого рассматриваемое умножение элементов раздельно непрерывно),  $\text{Hom } A$  — спектр алгебры  $A$ , т.е. множество всех  $\mathbb{C}$ -значных гомоморфизмов на  $A$ , наделенное слабой топологией, и  $\text{rad } A$  — строгий функциональный радикал алгебры  $A$ , т.е.

$$\text{rad } A = \bigcap_{\lambda \in \text{Hom } A} \ker \lambda$$

(если пространство  $\text{Hom } A$  является пустым, то положим  $\text{rad } A = A$ ). Через  $A/\text{rad } A$  обозначим факторалгебру алгебры  $A$  по идеалу  $\text{rad } A$ , наделенную фактортопологией, а через  $C(X, A)$  — алгебру всех непрерывных  $A$ -значных отображений на топологическом пространстве  $X$ , наделенную топологией компактной сходимости. Вместо  $C(X, \mathbb{C})$  будем в дальнейшем писать  $C(X)$ .

Топологическая алгебра  $A$  с единицей  $e_A$  называется: алгеброй Фреше, если на ней можно определить инвариантную метрику так, что топология, порожденная этой метрикой, полна и совпадает с исходной топологией алгебры  $A$ ;

$C^*$ -алгеброй, если она является банаховой алгеброй с инволюцией,  $\|e_A\|=1$  и  $\|a^*a\|=\|a\|^2$  для всех  $a \in A$ ;

локально  $C^*$ -алгеброй, если она является полной топологической алгеброй с инволюцией, топология которой определена насыщенной системой полуноrm

$$\{r_i : i \in I\} \tag{I.1}$$

такой, что  $r_i(e_A)=1$ ,  $r_i(ab) \leq r_i(a)r_i(b)$  и  $r_i(a^*a) = r_i(a)^2$  для всех  $i \in I$  и  $a, b \in A$ ;

перфектной локально  $C^*$ -алгеброй [6], если она является локально  $C^*$ -алгеброй, топология которой определена такой системой полуноrm (I.1), что множество<sup>I</sup>

<sup>I</sup> Через  $\theta_A$  обозначается нулевой элемент алгебры  $A$ .

$$\sum_{i \in I} \{a \in A : a \text{ кев } \rho_i = \{\theta_A\}\}$$

всюду плотен в  $A$ .

Пусть теперь  $A$  - локально  $C^*$ -алгебра с единицей, топология которой определена системой (I.1) и пусть  $i \in I$  и  $\lambda_0 \in \text{hom } A$  такие, что  $|\lambda_0(a)| \leq \rho_i(a)$  для всех  $a \in A$ . Через  $A(i, \lambda_0)$  будем обозначать множество тех элементов  $a \in A$ , для которых  $\lambda_0(a) = \rho_i(a) = 1$  и  $0 \leq \lambda(a) \leq 1$  для всех  $\lambda \in \text{hom } A$ .

В данной заметке изучаются некоторые вопросы, связанные с представлением топологической алгебры с инволюцией в виде алгебры векторнозначных функций на топологическом пространстве.

I. Рассмотрим случай локально  $C^*$ -алгебры с непустым спектром. Справедлива

Теорема I. Пусть  $D$  - локально  $C^*$ -алгебра Фреше с единицей, порожденная двумя коммутативными совершенными локально  $C^*$ -подалгебрами  $A$  и  $B$ . Пусть топология алгебры  $D$  определена насыщенной системой полунорм (I.1),  $e_D \in A \cap B$  и выполнено одно из следующих условий:

I.1) для каждой пары  $(\lambda, \rho) \in \text{hom } A \times \text{hom } B$  существует  $i \in I$  такой, что  $|\lambda(a)| \leq \rho_i(a)$ ,  $|\rho(b)| \leq \rho_i(b)$  для всех  $a \in A$ ,  $b \in B$  и  $\rho_i(ab) = \rho_i(a)\rho_i(b)$  для всех  $a \in A(i, \lambda)$  и  $b \in B(i, \rho)$ ;

I.2) для каждой пары  $(\lambda, \rho) \in \text{hom } A \times \text{hom } B$  существует  $i \in I$  такой, что  $|\lambda(a)| \leq \rho_i(a)$ ,  $|\rho(b)| \leq \rho_i(b)$  для всех  $a \in A$ ,  $b \in B$  и  $\rho_i(a+b) = \rho_i(a) + \rho_i(b)$  для всех  $a \in A(i, \lambda)$ ,  $b \in B(i, \rho)$ .

Тогда алгебры  $D/\text{rad } D$  и  $C(\text{hom } A, B)$  топологически  $*$ -изоморфны.

Доказательство. Пусть выполнено условие I.1) и  $(\lambda, \rho) \in \text{hom } A \times \text{hom } B$  некоторая пара. Тогда, согласно условию I.1), существует  $\Lambda \in \text{hom } D$  такой, что  $\Lambda(a) = \lambda(a)$  и  $\Lambda(b) = \rho(b)$  для всех  $a \in A$ ,  $b \in B$  (см. [2], теорема 5). Поэтому пространство  $\text{hom } A \times \text{hom } B$  и пространство гомоморфизмов  $\text{hom } AB$  подалгебры  $AB$  алгебры  $D$ , порожденной алгебрами  $A$  и  $B$ , гомеоморфны (см. [2], теорема I). Более того, пространство  $\text{hom } AB$  является локально компактным, ибо локально компактны пространства  $\text{hom } A$  и  $\text{hom } B$  (см. [6], теорема 4.1) и, следовательно, оно является локально равностепенно непрерывным (по предложению 2.1 из [7]). Значит, пространства  $\text{hom } D$  и  $\text{hom } A \times \text{hom } B$  гомеоморфны (см. [1],

предложение I). Но тогда гомеоморфны и пространства  $\text{hom}(D/\text{rad}D)$  и  $\text{hom}A \times \text{hom}B$ . Далее, алгебра  $D/\text{rad}D$  является коммутативной локально  $C^*$ -алгеброй Фреше с единицей (см. [8], теорема 2.7). Поэтому она топологически  $*$ -изоморфна алгебре  $C(\text{hom}(D/\text{rad}D))$  (см. [6], теорема 3.7). Итак, алгебры  $D/\text{rad}D$  и  $C(\text{hom}A \times \text{hom}B)$  топологически  $*$ -изоморфны. Учитывая теперь то, что алгебра  $B$  топологически  $*$ -изоморфна алгебре  $C(\text{hom}B)$  (см. [6], теорема 3.7) и алгебра  $C(\text{hom}A \times \text{hom}B)$  топологически  $*$ -изоморфна алгебре  $C(\text{hom}A, C(\text{hom}B))$  (см. [9], теорема 4.1), заметим, что алгебры  $D/\text{rad}D$  и  $C(\text{hom}A, B)$  топологически  $*$ -изоморфны.

В случае, когда выполнено условие I.2), доказательство проводится аналогично. Теорема доказана.

В случае  $C^*$ -алгебр аналогичные вопросы рассмотрены в [II].

2. Рассмотрим теперь функциональное представление  $C^*$ -алгебры с пустым спектром.

Пусть  $A$  и  $B$  —  $C^*$ -алгебры с единицей и  $\text{hom}(B, A)$  множество всех  $*$ -гомоморфизмов алгебры  $B$  на  $A$ , наделенное слабой топологией. Если  $X \subset \text{hom}(B, A)$  — непустое подмножество, то через  $\mathcal{G}_B^X$  будем обозначать обобщенное представление Гельфанда алгебры  $B$ , т.е. гомоморфизм  $B$  в  $C(X, A)$ , определяемое для всех  $b \in B$  и  $\varrho \in X$  равенством  $\mathcal{G}_B^X(b)(\varrho) = \varrho(b)$  (ср. [13, 14]). Справедливо

Предложение I. Пусть  $A$  и  $B$  —  $C^*$ -алгебры с единицей и  $X \subset \text{hom}(B, A)$  — непустое компактное подмножество. Тогда следующие утверждения равносильны:

2.1) обобщенное представление Гельфанда  $\mathcal{G}_B^X$  является изометрическим  $*$ -изоморфизмом  $B$  на  $C(X, A)$  ;

2.2) для каждого ненулевого  $b_0 \in B$  найдется  $\varrho \in X$  такой, что  $\varrho(b_0) \neq \theta_A$ , а для любых  $a_1, a_2 \in A$  и  $\varrho_1, \varrho_2 \in X$  ( $\varrho_1 \neq \varrho_2$ ) найдется  $b_1 \in B$  такой, что  $\varrho_k(b_1) = a_k$  с  $k=1, 2$ .

Доказательство. 2.1)  $\Rightarrow$  2.2) очевидна.

2.2)  $\Rightarrow$  2.1). Легко заметить, что обобщенное представление Гельфанда  $\mathcal{G}_B^X$  суть  $*$ -моморфизм. Следовательно, оно является изометрическим  $*$ -изоморфизмом  $B$  в  $C(X, A)$  (см. [12], с. 22). Ввиду всюду плотности подалгебры  $\mathcal{G}_B^X(B)$  в  $C(X, A)$  (см. [4], с. 406) можно теперь утверждать, что  $\mathcal{G}_B^X$  является изометрическим  $*$ -изоморфизмом  $B$  на  $C(X, A)$ .

Предложение доказано.

Замечание I. Если алгебра  $A$  является пространством Монтелли ([10], с. 237) как линейное топологическое пространство, то подмножество  $X \subset \text{hom}(B, A)$  компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто (см. [14], теорема 2.1).

Топологическую алгебру  $B$  будем называть модуль-алгеброй относительно алгебры  $A$  или, коротко,  $(A, \mathbb{C})$ -алгеброй, если

- 1)  $A$  есть топологическая алгебра,
- 2)  $B$  есть  $A$ -бимодуль

и

$$3) \quad a(b_1 b_2) = (ab_1)b_2, \quad b_1(b_2 a) = (b_1 b_2)a \quad \text{и} \\ b_1(ab_2) = (b_1 a)b_2 \quad \text{для всех } b_1, b_2 \in B \quad \text{и } a \in A.$$

При этом, если алгебра  $A$  имеет единицу, то  $e_A b = b = b e_A$  для всех  $b \in B$ , а если алгебра  $B$  имеет единицу, то  $a e_B = e_B a$  для всех  $a \in A$ .

Пусть теперь  $A$  и  $B$  -  $C^*$ -алгебры с единицей и  $Z$  - под-алгебра  $(A, \mathbb{C})$ -алгебры  $B$ . Если

$$(\alpha) \quad az = za \quad \text{для всех } a \in A \quad \text{и } z \in Z,$$

( $\beta$ )  $A$ -подмодуль  $AZ$  алгебры  $B$  порожденный алгеброй  $Z$  всюду плотен в  $B$ ,

$$(\gamma) \quad (ae_B)^* = a^* e_B \quad \text{для всех } a \in A$$

и

( $\delta$ ) для каждого  $g \in \text{hom } Z$  найдется гомоморфизм  $\Phi_g \in \text{hom}(B, A)$  такой, что  $\Phi_g(az) = a g(z)$  для всех  $a \in A, z \in Z$ ,

то будем говорить, что топологическая алгебра  $B$  обладает свойством  $(A, Z)$ -продолжения. Согласно предложению I справедлива

Теорема 2. (см. [5], с. 211). Пусть  $A$  и  $B$  -  $C^*$ -алгебры с единицей,  $B$  -  $(A, \mathbb{C})$ -алгебра и  $Z \subset B$  - такая коммутативная  $C^*$ -подалгебра, что  $e_B \in Z$ . Если алгебра  $B$  обладает свойством  $(A, Z)$ -продолжения, то она изометрически \*-изоморфна алгебре  $C(\text{hom } Z, A)$ .

Доказательство. Пусть

$$X = \{ \lambda \in \text{hom}(B, A) : \lambda = \Phi_g \text{ для некоторого } g \in \text{hom } Z \}.$$

Поскольку для любого ненулевого  $b \in B$  найдется  $g \in \text{hom } Z$  такой, что  $\Phi_g(b) \neq \theta_A$  (см. [5], следствие 2.12), то, согласно предложению I, нам достаточно показать, что пространства  $\text{hom } Z$  и  $X$  гомеоморфны. Для этого пусть  $\varphi$  - отображение  $\text{hom } Z$  в  $X$ , определяемое для всех  $g \in \text{hom } Z$  равенством  $\varphi(g) = \Phi_g$ . Ясно, что  $\varphi$  является биекцией

$\text{hom } \mathbb{Z}$  на  $X$ . Пусть  $g_0 \in \text{hom } \mathbb{Z}$  и  $\mathcal{O}(\varphi(g_0))$  - любая окрестность гомоморфизма  $\varphi(g_0)$  в пространстве  $X$ . Тогда

$$U = \bigcap_{\kappa=1}^n \{ \lambda \in X : \|(\lambda - \Phi_{g_0})(b_\kappa)\| < \varepsilon \} \subset \mathcal{O}(\varphi(g_0))$$

для некоторых  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ . Для каждого  $\kappa = 1, 2, \dots, n$  найдутся теперь число  $m_\kappa \in \mathbb{N}$  и ненулевые элементы  $a_\kappa^j \in A$ ,  $z_\kappa^j \in \mathbb{Z}$  с  $j = 1, 2, \dots, m_\kappa$  такие, что

$$\|b_\kappa - \sum_{j=1}^{m_\kappa} a_\kappa^j z_\kappa^j\| < \varepsilon/3.$$

Пусть  $0 < \delta < \varepsilon/3c$ , где

$$c = \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^{m_\kappa} \|a_\kappa^j\|$$

и пусть

$$U' = \prod_{\kappa=1}^n \prod_{j=1}^{m_\kappa} \{ g \in \text{hom } \mathbb{Z} : |(g - g_0)(z_\kappa^j)| < \delta \}.$$

Тогда  $U'$  есть окрестность гомоморфизма  $g_0$  и

$$\begin{aligned} \|(\Phi_g - \Phi_{g_0})(b_\kappa)\| &\leq \| \Phi_g(b_\kappa - \sum_{j=1}^{m_\kappa} a_\kappa^j z_\kappa^j) \| + \\ &+ \|(\Phi_g - \Phi_{g_0})(\sum_{j=1}^{m_\kappa} a_\kappa^j z_\kappa^j)\| + \| \Phi_{g_0}(b_\kappa - \sum_{j=1}^{m_\kappa} a_\kappa^j z_\kappa^j) \| < \varepsilon \end{aligned}$$

для всех  $g \in U'$ . Значит,  $\varphi(U') \subset \mathcal{O}(\varphi(g_0))$  и, следовательно, отображение  $\varphi$  непрерывно на  $\text{hom } \mathbb{Z}$ . Тем самым и показано, что  $\varphi$  суть гомеоморфизм  $\text{hom } \mathbb{Z}$  на  $X$ . Теорема доказана.

Пусть, далее,  $A$  -  $C^*$ -алгебра и  $M$  - некоторое множество замкнутых идеалов  $C^*$ -алгебры  $B$  с единицей такие, что

(а)  $J_1 + J_2 = B$  для всех разных  $J_1, J_2 \in M$ ,

(б) для каждого ненулевого  $b \in B$  существует  $J \in M$  такой, что  $b \notin J$ ,

(в) факторалгебра  $B/J$  \*-изоморфна алгебре  $A$  для всех  $J \in M$ .

Для всех  $J \in M$  положим

$$X_J = \{ g \in \text{hom}(B, A) : \text{ker } g = J \}.$$

По условию (в) множество  $X_J$  непусто для каждого  $J \in M$  и, поэтому, существует функция

$$f: M \rightarrow \bigcup_{J \in M} X_J$$

такая, что  $f(J) \in X_J$  для всех  $J \in M$ . Из предложения I следует

Теорема 3. Если множество  $X = f(M) \subset \text{hom}(B, A)$  компактно, то обобщенное представление Гельфанда  $\mathcal{C}_B^X$  яв-

ляется изометрическим  $\ast$ -изоморфизмом  $V$  на  $C(X, A)$ .

Доказательство. Пусть  $v \in V$  — ненулевой элемент. Тогда  $v \notin J$  для некоторого идеала  $J$  из  $M$  и, следовательно,  $f(J)(v) \neq \theta_A$ . Далее, если  $a_1, a_2 \in A$  и  $g_1, g_2 \in X$  ( $g_1 \neq g_2$ ), то существуют  $v_1, v_2 \in V$  такие, что  $g_j(v_j) = a_j$  с  $j = 1, 2$ . Поскольку  $g_1 = f(J_1)$  и  $g_2 = f(J_2)$  для некоторых  $J_1, J_2 \in M$  ( $J_1 \neq J_2$ ), то  $\text{ker } g_1 + \text{ker } g_2 = J_1 + J_2 = V$  (по условию (а)). Значит,  $v_1 - v_2 = c_1 + c_2$  для некоторых  $c_1 \in J_1$  и  $c_2 \in J_2$ . Пусть  $v = v_1 - c_1 - c_2$ . Тогда  $g_j(v) = a_j$  с  $j = 1, 2$ .

Итак,  $\mathcal{G}_\theta^x$  является изометрическим  $\ast$ -изоморфизмом  $V$  на  $C(X, A)$ . Теорема доказана.

Замечание. Идея доказательства теоремы 3 подчеркнута нами из [3, §25], где аналогичные вопросы рассмотрены для банаховых PI-алгебр.

#### Литература

1. Кокк А. Описание гомоморфизмов топологических модуль-алгебр // Изв. АН ЭССР. Физ. Мат. 1987. Т. 36. С. 1-7.
2. Кокк А. Пространства гомоморфизмов топологических модуль-алгебр // Уч. зап. Тарт. ун-та (в печати).
3. Крупник Н.Я. Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы. Кишинев: Штиинца, 1984.
4. Наймарк М.А. Нормированные кольца. Москва: Наука, 1986.
5. Allan G.R. Ideals of vector-valued functions // Proc. London Math. Soc. 1968. V.13. P. 193-216.
6. Apostol C.  $\mathcal{L}^*$ -algebras and their representation // J. London Math. Soc. 1971. V.3. P. 30-38.
7. Arachovitis J. On various types of barrelledness of a topological algebra // Yokohama Math. J. 1984. V.32. P. 1-13.
8. Inoue A. Locally  $C^*$ -algebra // Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. A. 1971. V.25. P. 197-235.
9. Mallios A. On functional representations of topological algebras // J. Funct. Anal. 1970. V.6. P. 468-480.
10. Page W. Topological uniform structures. New York: John Wiley & Sons, 1978.
11. Power S.C. Commutator ideals and pseudodifferential  $C^*$ -algebras // Quart. J. Math. 1980. V. 31. P. 467-489.
12. Takesaki M. Theory of operator algebras I. New York: Springer-Verlag, 1979.

13. Tsitsas L. On the generalized spectra of topological algebras // J. Math. Anal. Appl. 1973. V.42. P. 174-182.
14. Tsitsas L. On vector-valued functional representations of topological algebras // J. Math. Anal. Appl. 1976. V. 53. P. 715-721.

Поступило 17.08.1988

FUNCTIONAL REPRESENTATION OF TOPOLOGICAL \*-ALGEBRAS

A. Kokk

Summary

In the present note we consider vector-valued functional representation of locally  $m$ -convex  $*$ -algebras.

Let  $\text{hom} A$  be the set of all nonzero continuous complex homomorphisms of a complex topological algebra  $A$ , endowed with the weak topology,  $\text{rad} A$  be the strong functional radical of  $A$  and  $C(X, B)$  be the algebra of all continuous functions on a completely regular Hausdorff space  $X$  with values in a complex l.m.c. algebra  $B$ , equipped with the compact-open topology.

Theorem 1. Let  $D$  be a unital Frechet l.m.c.  $*$ -algebra the topology of which is defined by the family of saturated seminorms  $\{\rho_i : i \in I\}$  and which is generated by two commutative closed perfect l.m.c.  $*$ -subalgebras [6]  $A$  and  $B$ . If  $A$  and  $B$  share the same identity and for each pair  $(\lambda, \rho) \in \text{hom} A \times \text{hom} B$  there exists  $i \in I$  such that

1)  $|\lambda(a)| \leq \rho_i(a)$  and  $|\rho(b)| \leq \rho_i(b)$  for each  $a \in A$  and  $b \in B$ ,

2)  $\rho_i(ab) = \rho_i(ba) = \rho_i(a)\rho_i(b)$  whenever  $\rho_i(a) = |\lambda(a)|$  and  $\rho_i(b) = |\rho(b)|$ ,

then  $D/\text{rad} D = C(\text{hom} A, B)$  within a topological  $*$ -isomorphism.

For  $C^*$ -algebras analogous results are obtained in [11].

К ГЕОМЕТРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Рахула

Одесский технологический институт пищевой промышленности

Введём бесконечные матрицы

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ \vdots \end{pmatrix}, U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ u'_t \\ u''_t \\ \vdots \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \dots & & & \end{pmatrix}, e^{tC} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \vdots \\ 0 & 1 & t & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \dots & & & \end{pmatrix},$$

$$[Y X_0 X_1 \dots] = \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u'} \dots \right) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots \\ u' & 1 & 0 & \vdots \\ u'' & 0 & 1 & \vdots \\ \dots & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{dt}{\omega_0} \\ \frac{dt}{\omega_1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots \\ -u' & 1 & 0 & \vdots \\ -u'' & 0 & 1 & \vdots \\ \dots & & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{dt}{du} \\ \frac{dt}{du'} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (I)$$

$$X = [X_0 X_1 \dots] = \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u'} \dots \right), \omega = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du - u' dt \\ du' - u'' dt \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В расслоении с одномерной базой и бесконечномерными слоями

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R} : (t, U_t) \mapsto t, \quad (3)$$

где параметр  $t$  понимается как координата базы  $\mathbb{R}$ ,  $U_t$  - как точка слоя над произвольным  $t$  и  $U$  - как точка слоя над значением  $t=0$ ; формулы (I) определяют адаптированный базис /репер + корепер/ линейной связности [I]. Горизонтальное векторное поле

$$Y = \frac{\partial}{\partial t} + u' \frac{\partial}{\partial u} + u'' \frac{\partial}{\partial u'} + \dots \quad (4)$$

является оператором полного дифференцирования. Производную Ли относительно поля  $Y$  будем обозначать штрихом /дифференцируемость предполагается/. Так, для функции  $\varphi$  вместо  $Y\varphi$  будем писать  $\varphi'$ . Сразу заметим, что  $U' = CU$ . Решение этого дифференциального уравнения можно формально записать в виде

$$U_t = e^{tC} U. \quad (5)$$

Если запись имеет смысл, то этой формулой определяется траектория точки  $U$  в слое для вертикального поля  $Y - \frac{\partial}{\partial t} = XU'$ .

Формулой

$$U_{-t} = e^{-tC} U \quad (6)$$

определяются, также формально, независимые инварианты поля  $U$ . Подчеркнём формальность записей (5) и (6), ибо речь идёт о бесконечных рядах, обращение с которыми требует осторожности.

Для базиса (2) имеют место формулы  $Ly\omega_i = \omega_{i+1}$ ,  $LyX_{i+1} = X_i$ ,  $i=0,1,\dots$ , которые записываются кратко

$$\omega' = C\omega, \quad X' = -X C. \quad (7)$$

Пользуясь полученными деривационными формулами (7), можно записать производные Ли для векторного поля  $Z = Xz / z$  - матрица-столбец, в записи вида  $Xz$  соблюдается правило "суммирование исключает дифференцирование"/:

$$Z' = X(z' - Cz), \quad Z'' = X(z'' - 2Cz' + C^2z), \dots \quad (8)$$

а также для 1-формы  $\Phi = \varphi\omega / \varphi$  - матрица-строка/:

$$\Phi' = (\varphi' + \varphi C)\omega, \quad \Phi'' = (\varphi'' + 2\varphi' C + \varphi C^2)\omega, \dots \quad (9)$$

и для аффинора  $CA = XA\omega / A$  - двумерная матрица/:

$$CA' = X(A' - CA + AC)\omega, \dots \quad (10)$$

Сечение  $z = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$ , где  $z_i$  - функции  $t$ , является траекторией поля  $U$  тогда и только тогда, когда  $z' = Cz$ . Действительно, при этом и только при этом условии формы  $\omega = dU - Udt$  обращаются в нуль.

Функция  $F = fU$ , где  $f = (f_0 f_1 \dots)$  и  $f_i$  зависят от  $t$ , является инвариантом поля  $U$  тогда и только тогда, когда  $f' = -fC$ . Это следует из условия  $F' = 0$ . При этом функции  $f$  имеют вид  $f_0 = k_0$ ,  $f_1 = -k_0 t + k_1$ ,  $f_2 = k_0 \frac{t^2}{2} - k_1 t + k_2, \dots$  где  $k = (k_0 k_1 \dots)$  - константы, и  $F$  можно представить как линейную комбинацию  $F = kU_{-t}$  инвариантов (6).

Векторное поле  $Z = vY + Xz / v$  - функция,  $z$  - матрица-столбец/ сохраняет поле  $U$  тогда и только тогда, когда  $z' = Cz$ , т.е. когда имеет вид

$$Z = vY + fX_0 + f'X_1 + \dots, \quad (II)$$

где  $f = z_0$  - произвольная функция. Это поле  $Z$  сохраняет распределение Картана, аннулятор формы  $\omega_0$  с базисом  $\{Y, X_1, X_2, \dots\}$ , тогда и только тогда, когда скобки

$$[ZX_1] = -X_0 \left( v + \frac{\partial z_0}{\partial u^1} \right) + \dots, \quad [ZX_2] = -X_0 \frac{\partial z_0}{\partial u^2} + \dots$$

принадлежат этому распределению, т.е. когда

$$b = -\frac{\partial z_0}{\partial u}, \quad \frac{\partial z_0}{\partial u''} = \frac{\partial z_0}{\partial u'''} = \dots = 0.$$

Поле  $Z$ , сохраняющее поле  $\mathcal{U}$  и распределение Картана, имеет вид

$$Z_f = -\frac{\partial f}{\partial u} \mathcal{U} + f' X_0 + f'' X_1 + \dots, \quad (12)$$

где  $f(t, u, u')$  - так называемая производящая функция. Ввиду

$$f' = \frac{\partial f}{\partial t} + u' \frac{\partial f}{\partial u} + u'' \frac{\partial f}{\partial u'},$$

$$f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2u' \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial u} + 2u'' \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial u'} + u'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2u' u'' \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u'} + u''^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u'^2} + u''' \frac{\partial f}{\partial u} + u'''' \frac{\partial f}{\partial u'},$$

поле (12) в естественном базисе записывается в виде

$$Z_f = -\frac{\partial f}{\partial u'} \frac{\partial}{\partial t} + \left( f - u' \frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left( \frac{\partial f}{\partial t} + u' \frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial u'} + \dots \quad (13)$$

Это - известное выражение для поля Ли [2].

Функция  $F(t, u)$  рассматривается как дифференциальный оператор, а

$$F(t, u) = 0 \quad (14)$$

как обыкновенное дифференциальное уравнение. Уравнение (14) определяет в пространстве расслоения поверхность. При изменении  $t$  эта поверхность увлекается по траекториям поля  $\mathcal{U}$  и на ней появляется характеристика. Характеристика также увлекается и на ней появляется своя характеристика. Такой процесс, вообще говоря, бесконечен. Характеристика  $k$ -го порядка на поверхности (14) определяется системой

$$F = F' = \dots = F^{(k)} = 0. \quad (15)$$

Поверхность (15) представляет для отображения, определяемого функцией  $F$  и инвариантами (6), каспидную особенность порядка  $k$ . Будем говорить, что при  $k \rightarrow \infty$  система (15) выделяет на поверхности (14) её полную характеристику. Иначе говоря, полная характеристика определяется уравнением (14) и всеми его продолжениями. Под решением дифференциального уравнения (14) следует понимать функцию  $u(t)$ , которая вместе со всеми своими производными определяют траекторию поля  $\mathcal{U}$ , принадлежащую полной характеристике.

Пример I. Простейший случай:  $u^{(n+1)} = 0$ . Решения - полиномы

$$u_t = u + u' t + \dots + u^{(n)} \frac{t^n}{n!}.$$

Полная характеристика  $C^{n+1}U = 0$  совпадает с координатным  $t, u, u', \dots, u^{(n)}$  -пространством, которое представим в виде расслоения  $(t, u, u', \dots, u^{(n)}) \mapsto t$  с  $(n+1)$ -мерными слоями. Уравнение (5) определяет в слое над  $t=0$  семейство парабол порядка  $n$ . При перемещении слоя они образуют траектории поля  $\mathcal{U}$ . Инварианты поля

$U$  определяются формулой  $U_{-t} = e^{-tC} U$ , где  $\tau = u^{(n-1)} : u^{(n)}$  /  $\tau' = 1$  /. Ясно, что при перенесении слоя /с изменением  $t$  / внутри слоя происходит преобразование. Так, плоскость  $u=0$  в момент  $t$  находится в положении  $u_{-t}=0$ , имеет на себе характеристику  $u_{-t} = u'_{-t} = 0$  и характеристики высших порядков. Ими в слое, или в  $uu' \dots u^{(n)}$  -пространстве, огибается конус, который, в свою очередь, отсекает на плоскости  $u^{(n)}=1$  так называемую дискриминантную параболу

$$M_t \left( \frac{t^n}{n!}, \dots, \frac{t^2}{2}, t, 1 \right).$$

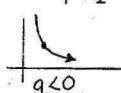
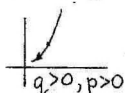
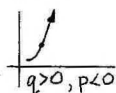
Отметим: число  $s \in \mathbb{R}$  является  $k$ -кратным корнем полинома

$$u_t = u + u' t + \dots + u^{(n-1)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{t^n}{n!}$$

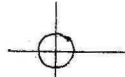
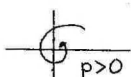
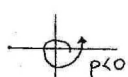
тогда и только тогда, когда точка  $U(u, u', \dots, u^{(n-1)}, 1)$  принадлежит  $(n-k+1)$ -мерной соприкасающейся плоскости к дискриминантной параболе в точке  $M_{-s}$ , но не принадлежит её  $(n-k)$ -мерной соприкасающейся плоскости в этой точке,  $k=0, 1, \dots, n$ .

Пример 2. Для уравнения  $u'' + pu' + qu = 0$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$ , полная характеристика - двумерная плоскость  $(c^2 + pc + qE)U = 0$ . Траектории (5) точки  $U$ , принадлежащей этой плоскости, в зависимости от корней характеристического уравнения  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  имеют следующий вид:

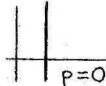
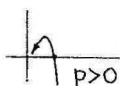
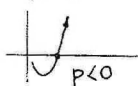
1/  $p^2 - 4q > 0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  - действительные и различные корни,  $U_t = U_1 e^{\lambda_1 t} + U_2 e^{\lambda_2 t}$ , где  $U_1 = C_1 U$ ,  $U_2 = C_2 U$  и  $C_1 = \frac{C - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2}$ ,  $C_2 = \frac{C - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1}$ ,



2/  $p^2 - 4q < 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  - комплексно-сопряжённые корни,  $U_t = e^{\alpha t} (U \cos \beta t + U_\alpha \frac{\sin \beta t}{\beta})$ , где  $U_\alpha = (C - \alpha E) U$ ,



3/  $p^2 - 4q = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  - кратный корень,  $U_t = e^{\lambda t} (U - U_\lambda t)$ ,  $U_\lambda = (C - \lambda E) U$ ,



Это объясняется тем, что вронсиан  $W = \begin{vmatrix} u & u' \\ u & u' \end{vmatrix}$ , в силу  $W' = -pW$ ,

увлекается с изменением  $t$  по закону  $W_t = W e^{-pt}$  /формула Ливуилля-Остроградского/, определяя в  $u''u''$  -пространстве систему импримитивности в виде семейства гиперboloидов с инвариантным конусом  $W=0$ . Плоскость  $u''+pu'+q=0$  пересекает конус  $W=0$  по двум прямолинейным образующим /  $p^2-4q < 0$  / или только в вершине /  $p^2-4q > 0$  /, либо касается его /  $p^2-4q=0$  /. Проекция точки  $U$  /все координаты отбрасываются, кроме  $u, u', u''$ / перемещается в этой плоскости. Её траекторией при  $p=0$ , когда семейство гиперboloидов неподвижно, является ветвь гиперболы, эллипс или прямая, при  $p>0$ , когда происходит сжатие, - кривая, приближающаяся к началу координат, а при  $p<0$ , когда происходит растяжение, - кривая, удаляющаяся от начала /  $t \rightarrow \infty$  /.

Аналогичная трактовка возможна в случае дифференциальных уравнений с частными производными, но, вместо (3), в расслоении с  $n$ -мерной базой

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (16)$$

Рассмотрим в некотором векторном пространстве  $V$  систему  $n$  попарно коммутирующих друг с другом линейных операторов /аффиноров/

$$C = (C_1, \dots, C_n) \quad (17)$$

Введём обозначения:  $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $tC = t_1 C_1 + \dots + t_n C_n$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  - мультииндекс,  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,

$$C^\alpha = C_1^{\alpha_1} \dots C_n^{\alpha_n}, \quad t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}$$

Тогда, ввиду  $\frac{(tC)^k}{k!} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{t^\alpha}{\alpha!} C^\alpha$ , можно записать

$$e^{tC} = \sum_{|\alpha|} \frac{t^\alpha}{\alpha!} C^\alpha$$

Формула

$$v_t = e^{tC} v, \quad \forall v \in V, \quad (18)$$

определяет представление аддитивной группы  $\mathbb{R}^n$  в  $V$ .

В пространстве  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\infty$  вместе с координатами

$$(t_i, u, u_1, u_2, \dots), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

определяются естественные репер и корепер

$$\left( \frac{\partial}{\partial t_i}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u_i}, \dots \right), \quad (dt_i, du, du_i, \dots),$$

горизонтальные векторные поля

$$y_i = \frac{\partial}{\partial t_i} + u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \dots \quad (19)$$

и формы

$$\omega_0 = du - u_i dt_i, \quad \omega_i = du_i - u_{ij} dt_j, \dots \quad (20)$$

Обозначив производную Ли относительно поля  $Y = Y_i y_i / y_i = \text{const} /$  штрихом, можно описать увлечение тензорного поля  $f$  вдоль траекторий  $Y$ :

$$f_{\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)} \frac{\tau^k}{k!} = \sum_{|\alpha|} f_{\alpha} \frac{t^{\alpha}}{\alpha!}, \quad (21)$$

где  $t_i = y_i \tau$ ,  $f_{\alpha} = C^{\alpha} f$ ,  $C = (Y_1, \dots, Y_n)$ . Считая  $U_t = C_t U = Y_i U$ , определяем действие аддитивной группы  $\mathbb{R}^n$  в слое  $\mathbb{R}^{\infty}$ :

$$U_t = e^{tC} U. \quad (22)$$

По виду формула (22) такая же, как формула (5), но совпадает с ней лишь при  $n=1$ . Вместе с орбитами, определяемыми формулой (22) в слое, в пространстве расслоения определяются  $n$ -мерные интегральные поверхности горизонтального распределения.

Разъясним формулу (22) в случае  $n=2$ . Согласно схеме

$$U = \begin{pmatrix} u & u_2 & u_{22} \\ u_1 & u_{12} \\ u_{11} & \dots \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} u_1 & u_{12} & u_{122} \\ u_{11} & u_{112} \\ u_{111} & \dots \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_2 & u_{22} & u_{222} \\ u_{12} & u_{122} \\ u_{112} & \dots \end{pmatrix},$$

точка  $U$  представлена в виде бесконечной матрицы, в которой каждая последующая строка /каждый последующий столбец/ отличается от предыдущей строки /предыдущего столбца/ наличием у каждого элемента дополнительного индекса 1 /соотв. 2 /, при этом все элементы  $u_{ij} \dots$  считаются симметричными по всем индексам. Приписать к символу  $U$  индекс 1 или 2 означает приписать ко всем элементам матрицы  $U$  этот индекс. Это отвечает формуле  $U_i = C_i U$ . Если, далее, ввести матрицы  $U_{ij} \dots = C_i C_j \dots U$ , то формулу (22) можно представить как

$$U_t = U + U_1 t_1 + U_2 t_2 + \frac{1}{2} (U_{11} t_1^2 + 2U_{12} t_1 t_2 + U_{22} t_2^2) + \dots \quad (23)$$

Первый угловой элемент матрицы  $U_t$  записывается в виде ряда

$$u_t = u + u_1 t_1 + u_2 t_2 + \frac{1}{2} (u_{11} t_1^2 + 2u_{12} t_1 t_2 + u_{22} t_2^2) + \dots \quad (24)$$

а остальные элементы - как частные производные по  $t_1$  и  $t_2$ .

Пример 3. Уравнение  $C^3 U = 0$  допускает двумерные орбиты в шестимерном пространстве:

$$U_t = U + tCU + \frac{(tC)^2}{2} U.$$

Четыре инварианта выявляются из равенства:

$$\left( \begin{array}{cc|c} u_{11}u_{12} & u_1 & \\ u_{12}u_{22} & u_2 & \\ \hline u_1 & u_2 & 2U \end{array} \right)_t = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline t_1 & t_2 & 1 \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{cc|c} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{12} & u_{22} & u_2 \\ \hline u_1 & u_2 & 2U \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

ими являются  $u_{11}, u_{12}, u_{22}$  и определитель

$$\begin{vmatrix} u_{11}u_{12} & u_1 \\ u_{12}u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 2U \end{vmatrix}.$$

Пример 4. Уравнение Лапласа  $u_{11} + u_{22} = 0$  и соответствующая ему полная характеристика  $(C_1^2 + C_2^2)U = 0$  допускают двумерные решения /орбиты/ с функциональным произволом. Оставляя первые два столбца в матрице  $U$  произвольными, запишем функцию (24) в виде

$$u_t = u + u_1 t_1 + u_2 t_2 + \frac{1}{2} [u_{11}(t_1^2 - t_2^2) + 2u_{12}t_1 t_2] + \frac{1}{6} [u_{111}(t_1^3 - 3t_1 t_2^2) + u_{112}(3t_1^2 t_2 - t_2^3)] + \dots$$

Выделяется полиномиальный базис гармонических функций:

$$1, t_1, t_2, t_1^2 - t_2^2, 2t_1 t_2, t_1^3 - 3t_1 t_2^2, 3t_1^2 t_2 - t_2^3, \dots$$

или, если перейти к полярным координатам  $(t_1, t_2) \mapsto (r, \varphi)$  :

$$1, r \cos \varphi, r \sin \varphi, r^2 \cos 2\varphi, r^2 \sin 2\varphi, r^3 \cos 3\varphi, r^3 \sin 3\varphi, \dots$$

Функциональный произвол используется в краевых задачах. Например, в задаче Дирихле: задание на окружности  $r = R$  произвольной функции /в виде ряда Фурье/

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

определяет решение в круге однозначно:

$$u_t = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{R^k} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

#### Литература

1. Рахула М.О. Теория катастроф и дифференциальная геометрия // Проблемы геометрии. ВИНТИ АН СССР. 1984. Т. 16. С. 35-80.
2. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.

Поступило 10.08.1988

## SUR LA GÉOMÉTRIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

M. Rehule

Résumé

Le groupe additif  $\mathbb{R}^n$ , opérant d'une manière spéciale dans le fibré

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

engendre la translation des fibres suivant les orbites.

Conformément aux équations différentielles ce modèle contribue à la recherche des solutions, celles-ci correspondant aux orbites, qui appartiennent à la caractéristique complète, d'ordre infini, sur la surface déterminée par l'équation considérée.

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ НЕТОЖДЕСТВ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБРАХ  
С ПОМОЩЬЮ ЭВМ

Р. Роомельди

Лаборатория прикладной математики

В теории многообразий алгебр часто возникает вопросы о выполнении тех или иных тождеств (см. например [2]). Часто это является очень сложной задачей и целесообразно проверить тождества с помощью ЭВМ [7,9]. Построены также непростые примеры конечномерных алгебр, невыполнение тождеств в которых влечет невыполнение этих тождеств в соответствующем многообразии алгебр. Например, Клейнфельд [12] построил пример 107-мерной альтернативной алгебры, в которой не выполняется тождество  $[(x, y, z)^2, t] = 0$  (как обычно,  $(x, y, z) = -(xy)z - x(yz)$  - ассоциатор и  $[x, y] = xy - yx$  - коммутатор).

Проверка нетождеств в конечномерных алгебрах гораздо проще, чем в свободной алгебре многообразия. В случае малых размерностей подобные вычисления могут быть проведены вручную. Но если размерность  $n$  конечномерной алгебры  $\alpha_n$  велика и проверяемые функции имеют сложную структуру, то в этом случае необходима помощь ЭВМ (например, проверка альтернативности упомянутого выше примера Клейнфельда [10]). ЭВМ необходима также при построении самих примеров конечномерных алгебр [11].

Если соберется достаточно много информации о тождествах и нетождествах некоторой конечномерной алгебры, то можно сделать предположение относительно базиса тождеств этой алгебры. Например, Исаев [4] описал идеалы тождеств 8-мерных алгебр Кэли-Диксона над конечными полями.

Большой вклад в изучение многообразий дает полное описание всех конечномерных алгебр малой размерности некоторого многообразия. Например, Бадалову [1] удалось описать все 5- и 6-мерные альтернативные алгебры.

В настоящей работе описан пакет программ для поиска нетождеств в произвольной конечномерной (не обязательно ассоциативной) алгебре над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ . На самом

деле пакет работает в более общем случае алгебры над произвольным полем  $\Phi$ , если структурные константы алгебры и коэффициенты проверяемых функций являются целыми или рациональными числами.

В поиске элементов алгебры  $\alpha_n$ , задающих ненулевое значение данной функции, используется генератор случайных чисел.

В качестве конкретного примера рассматривается 27-мерная простая исключительная йорданова алгебра  $H(C_3)$ . Доказано, например, что 4-тождество  $\lambda = \lambda(x, y, z, \xi)$  Медведева [5] не является тождеством в  $H(C_3)$ . Следовательно,  $\lambda$  не лежит в нильрадикале свободной йордановой алгебры от 4 свободных порождающих.

Пакет программы составлен в сотрудничестве с лабораторией неассоциативных колец Института математики СОАН. Программы написаны на языке Фортран ЕС ЭВМ.

## § I. Вычисление значений функций в конечномерных алгебрах

Пусть  $\alpha_n$  — произвольная (не обязательно ассоциативная)  $n$ -мерная алгебра над произвольным полем  $\Phi$  с единицей  $I$ . Зафиксируем базис  $e_1, \dots, e_n$  в  $\alpha_n$ . Умножение произвольных элементов из  $\alpha_n$  однозначно определяется умножением базисных элементов:

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^n \varphi_{ijk} e_k, \quad \varphi_{ijk} \in \Phi. \quad (I)$$

Число коэффициентов  $\varphi_{ijk}$  равно  $n^3$  и они называются структурными константами (с.к.) алгебры  $\alpha_n$  [6, стр.22]. Среди с.к. алгебры  $\alpha_n$  могут присутствовать целые числа  $\ell = \ell \cdot I$  и даже рациональные числа  $\ell/m = \ell \cdot (m \cdot I)^{-1}$  при  $m \neq 0$ .

Если размерность  $n$  алгебры  $\alpha_n$  велика и (или) функция  $f$ , проверяемая на нетождество, сложна, то вычисление  $f$  в общем виде невычислимо даже на быстродействующей ЭВМ. Например, при вычислении произведения  $c = a \cdot b$ , где  $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ,  $b = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$  координаты  $c$  равны

$$f_i = \sum_{j,k=1}^n \alpha_j \beta_k \varphi_{jki}, \quad (2)$$

т.е. требуется найти  $n^3$  произведений трех чисел. Конечно же методами вычисления можно несколько ускорить этот процесс, в особенности в случае разреженной таблицы умножения базисных элементов  $e_i$ .

Некоторые свойства конечномерных алгебр не требуют вычисления произведений общих элементов. Например, для уста-

новления ассоциативности  $\sigma_n$  достаточно проверить ассоциативность умножения ее базисных элементов:

$$(e_i e_j) e_k = e_i (e_j e_k), \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (3)$$

А это [6, стр.23] равносильно равенству

$$\sum_{m=1}^n \varphi_{ijm} \varphi_{mkt} = \sum_{m=1}^n \varphi_{jkm} \varphi_{imt}, \quad i, j, k, t = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Последнее равенство можно проверить даже в случае не обязательно рациональных с.к. алгебры «равнительно медленно работающих» системами аналитических вычислений (см., например, [8]).

## § 2. Генерация порождающих вычисляемых функций

Пусть функция  $f = f(x_1, \dots, x_m)$ , проверяемая на нетождество, является многочленом степени  $h$  от  $m$  переменных  $x_1, \dots, x_m$ . В силу сказанного выше, при больших  $n$  и  $h$  ЭВМ способна вычислять  $f(a_1, \dots, a_m)$  лишь в случае рациональных координат элементов  $a_1, \dots, a_m \in \sigma_n$ :

$$a_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{Q}. \quad (5)$$

Для задания чисел  $\alpha_{ij}$  в пакет включена программа ГСЧ генерации случайных чисел. По желанию пользователя возможны следующие диапазоны ненулевых значений  $\alpha_{ij}$ :

- Д1) единицы;
- Д2) 1 или -1;
- Д3) целые числа из отрезка  $[1, u]$ ;
- Д4) целые числа из отрезка  $[-u, u]$ ;
- Д5) рациональные числа из отрезка  $[0, u]$ ;
- Д6) рациональные числа из отрезка  $[-u, u]$ .

Кроме того, целесообразно задать количество  $k$  ненулевых координат элементов  $a_i$ . Например, при  $k=1$  в диапазоне Д1) получаются базисные элементы  $e_j$ . Естественно начать поиск ненулевых значений функции  $f$  с элементов  $a_i$  более простого вида. Поэтому поиск начинается с некоторого  $k = k_{\min} \geq 1$  и кончается при  $k = k_{\max} \leq n$ . При этом индексы ненулевых координат также задаются генератором случайных чисел.

Для автоматического увеличения сложности  $a_1, \dots, a_m$  задается отрезок диапазон  $(D_{\min}) - (D_{\max})$  значений  $\alpha_{ij}$ , а также количество  $\ell$  образуемых совокупностей исходных элементов при одинаковых  $k$  и  $D$ .

### § 3. Алгоритм вычисления значений функции $f$ .

- 1) присвоение исходных значений переменным  $l, k_{\min}, k_{\max}, d_{\min}, d_{\max}, u$ ;
- 2)  $k := k_{\min}$ ; 3)  $d := d_{\min}$ ; 4)  $l_0 := l$ ;
- 5) генерация и вывод на печать  $a_1, \dots, a_m$  с  $k$  ненулевыми случайными значениями координат  $a_j$  из диапазона  $D(d)$ , причем отдельно для каждого  $a_i$  ГСЧ сгенерирует индексы этих ненулевых координат;
- 6) вычисление и вывод на печать значения  $f = f(a_1, \dots, a_m)$ ;
- 7) если  $f \neq 0$ , то переход к I2);
- 8)  $l_0 := l_0 + 1$ ; если  $l_0 \leq l$ , то переход к 5);
- 9)  $d := d + 1$ ; если  $d \leq d_{\max}$ , то переход к 4);
- 10)  $k := k + 1$ ; если  $k \leq k_{\max}$ , то переход к 3);
- II) печатать: "Все значения  $f$  нули,  $f$  может являться тождеством"; конец;
- I2) печатать: " $f$  не является тождеством" и значения необходимых промежуточных функций в вычислении  $f$ ; конец;

### § 4. 0 проблемах в теории йордановых алгебр

Коммутативная алгебра называется йордановой алгеброй (й.а.), если в ней выполняется тождество

$$(x^2, y, x) = 0. \quad (6)$$

Й.а. называется специальной (с.й.а.), если она вкладывается в  $A^{(+)}$  некоторой ассоциативной алгебры  $A$ . Элемент  $s$  свободной й.а.  $\mathcal{J}$  от счетного множества порождающих называется  $s$ -элементом, если он является тождеством во всякой с.й.а. Множество  $S$  всех  $s$ -элементов является идеалом в  $\mathcal{J}$ .

Неспециальные й.а. называются исключительными. Как показал Зельманов [3], единственной простой исключительной й.а. является классическая 27-мерная алгебра  $H(C_3)$  эрмитовых матриц третьего порядка над расщепляемой алгеброй Кэли-Диксона  $C$  [2, стр. 72]. Через  $T_H$  обозначим идеал алгебры  $\mathcal{J}$ , состоящий из элементов, все линеаризации которых являются тождествами в  $H(C_3)$ . Тогда [3]

$$N(\mathcal{J}) = M(\mathcal{J}) = S \cap T_H, \quad (7)$$

где  $N(\mathcal{J})$  - ниль-радикал и  $M(\mathcal{J})$  - радикал, порожденный абсолютными делителями нуля в свободной й.а.  $\mathcal{J}$ . Медведев [5] показал, что  $S \cap T_H \neq \emptyset$ , указывая в явном виде ненулевой элемент из этого пересечения:

$$g = g(x, y, z, t, t_1, \dots, t_{28}) = \sum_{\sigma \in S_{28}} (-1)^{|\sigma|} (\dots (\lambda(x, y, z, t) \cdot t_{\sigma(1)}) \dots) \cdot t_{\sigma(28)} \quad (8)$$

где  $\lambda = \lambda(x, y, z, t)$  является однородным многочленом степени 8 от  $x, y, z, t$  сложной структуры (содержит 40 слагаемых, одно из которых, например, имеет вид  $\{t, \{y, z, (y \cdot x)^2\}, t\}$ , где  $\{x, y, z\} = (x \cdot y) \cdot z + (z \cdot y) \cdot x - (x \cdot z) \cdot y$ ),

В силу того, что  $g$  является многочленом от 32 переменных, получим, что в свободной й.а.  $J_k$  от  $k > 31$  числа свободных порождающих,  $M(J_k) \neq 0$ , т.е., существуют ненулевые абсолютные делители нуля [5].

Возникает вопрос: если полином  $\lambda$  от 4-х переменных после кососимметризации до элемента  $g$  (см. (8)) принадлежит радикалу  $M(J_k)$  ( $k > 31$ ), то может быть, сам  $\lambda$  лежит в  $M(J_i)$ , где  $i > 3$ ? Настоящий пакет программ показывает, что это не так. А именно,

$$\lambda \notin T_H. \quad (9)$$

## § 5. Вычисление значений функций в $H(C_3)$

Напомним, что алгебра Кэли-Диксона  $S$  над полем  $\Phi$  является 8-мерной алгеброй, элементы которой можно представить в матричном виде [2, стр.62]:

$$c = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{12}, \alpha_{21} \in \Phi^3, \quad \alpha_{ii} \in \Phi. \quad (10)$$

Умножение элементов такого вида происходит по следующему правилу:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + (\alpha_{12} \times \beta_{21}) & \alpha_{11}\beta_{12} + \beta_{22}\alpha_{12} - \alpha_{21} \times \beta_{21} \\ \beta_{11}\alpha_{21} + \alpha_{22}\beta_{21} + \alpha_{12} \times \beta_{12} & \alpha_{22}\beta_{22} + (\alpha_{21}, \beta_{12}) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $(a, b)$  и  $a \times b$  вычисляются по обычным формулам скалярного и векторного умножения трехмерных векторов  $a$  и  $b$ . Стандартная инволюция в  $S$  выглядит в матричной записи так:

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Далее, произвольная матрица  $X \in H(C_3)$  имеет ввиду эрмитовости, т.е. условия  $\bar{X}^T = X$ , следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & c & d \\ \bar{c} & \beta & e \\ \bar{d} & \bar{e} & \gamma \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \Phi, \quad c, d, e \in S. \quad (13)$$

Умножение в  $H(C_3)$ , задающее структуру й.а., определяется правилом

$$X \cdot Y = 1/2 (XY + YX). \quad (14)$$

Чтобы ускорить вычисление значений функций на  $H(C_3)$ , не используется стандартная подпрограмма пакета, вычисляющая умножение  $X \cdot Y$  по  $27^3$  структурным константам. Взамен созданы следующие подпрограммы ( $c, d \in C$  и  $X, Y \in H(C_3)$ ):

- 1) INV (вычисляет  $\bar{c}$ ); 2) UK ( $c \cdot d$ ); 3) UKE ( $c^2$ );  
4) VK ( $c\bar{d} + d\bar{c}$ ); 5) VKE ( $c\bar{c} - \bar{c}c$ ); 6) U ( $X \cdot Y$ ); 7) UE ( $X^2$ ).

При этом, например, INV, UK, UKE, VK и VKE являются подпрограммами для U.

Созданы также следующие подпрограммы для вычисления наиболее часто встречающихся конструкций ( $X, Y, Z, T \in H(C_3)$ ):

- 8) FC (вычисляет  $\{X, Y, Z\}$ ); 9) FCE ( $\{X, Y, X\}$ );  
10) ACC ( $(X, Y, Z)$ ); 11) PE ( $[X, Y]^2$ ).

Конечно же, если при вычислении этих функций какой-нибудь из аргументов оказывается нулем, то сразу же выдается нулевой результат. В конечном итоге получается довольно хорошее быстроедействие пакета. Например, одно значение сложной функции  $\Delta(x, y, z, t)$  Медведева вычисляется на ЕС-1060 примерно за 1 секунду процессорного времени.

Первой в пакете получает управление подпрограмма ввода исходных значений, где для каждой вычисляемой функции требуется составить соответствующий комплект обращений к подпрограммам командами CALL. В следующей версии пакета этот процесс автоматизируется.

Пакет отлажен на функциях  $f$  простого вида, а также на первом тождестве Глени [2, стр.100] длины 8 от трех порождающих

$$g_1(x, y, z) = 2\{\{y\{x, z, x\}y\}z(xy)\} - \{y\{x\{z(xy)z\}x\}y\} - \quad (15) \\ - 2\{(xy)z\{x\{yzy\}x\}\} + \{x\{y\{z(xy)z\}y\}x\},$$

где для упрощения записи  $x_1 x_2 \dots x_k = (\dots (x_1 x_2) x_3 \dots) x_k$ .

При вычислении значений функции  $\Delta(X, Y, Z, T)$  Медведева в  $H(C_3)$  оказалось, что достаточно указать лишь диапазон ДП (единицы) в качестве ненулевых координат  $X, Y, Z$  и  $T$ .

Пусть  $l=20$ ,  $k_{\min}=1$ ,  $k_{\max}=5$ ,  $d_{\min}=d_{\max}=1$ . Тогда при  $k=1$  все 20 случайных значений функции  $\Delta$  для сгенерированных (базисных) элементов  $X, Y, Z, T$  оказались нулями. Но при  $k=2$  13-й комплект дал ненулевое значение  $\Delta$ :

$$\Delta(X, Y, Z, T) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & \bar{c} & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{где } c = \begin{pmatrix} 0 & (0, 0, 0) \\ (0, 0, 1) & 0 \end{pmatrix} \in C \quad \text{при}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ \bar{x}_{12} & 0 & 0 \\ \bar{x}_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & y_{12} & 0 \\ \bar{y}_{12} & 0 & y_{23} \\ 0 & \bar{y}_{23} & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_{23} \\ 0 & \bar{z}_{23} & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & 0 \\ \bar{t}_{12} & 0 & t_{23} \\ 0 & \bar{t}_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$x_{12} = \begin{pmatrix} I & (0,0,0) \\ (0,0,0) & 0 \end{pmatrix}, \quad x_{13} = y_{23} = t_{23} = \begin{pmatrix} 0 & (0,0,0) \\ (0,0,0) & I \end{pmatrix},$$

$$y_{12} = \begin{pmatrix} 0 & (0,I,0) \\ (0,0,0) & 0 \end{pmatrix}, \quad z_{23} = \begin{pmatrix} 0 & (0,0,I) \\ (0,0,I) & 0 \end{pmatrix}, \quad t_{12} = \begin{pmatrix} 0 & (I,0,0) \\ (0,0,0) & 0 \end{pmatrix}.$$

### Литература

1. Бадалов М.И. Альтернативные алгебры малых размерностей // Новос. Ред. Сиб. мат. ж. 1983. Рук. деп. ВИНТИ. 56С.
2. Жевлаков К.А., Слинко А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука. 1978.
3. Зельманов Е.И. О первичных Йордановых алгебрах II // Сиб. мат. ж. 1983. Т.24. №1. С.89-104.
4. Исаев И.М. Тождества конечной алгебры Кэли-Диксона // Алгебра и логика. 1984. Т.23. №4. С.407-418.
5. Медведев Ю.А. О ниль-элементах свободной Йордановой алгебры // Алгебра и логика. 1985. Т.26. №2. С.140-148.
6. Пирс Р. Ассоциативные алгебры // Пер. с англ. М.: Мир. 1986.
7. Роомельди Р. О доказательстве тождеств в свободных неассоциативных кольцах с помощью ЭВМ // Уч. зап. Тарт. ун-та. 1987. Т.764. С.109-122.
8. Роомельди Р.Э. Система REDUCE в теории неассоциативных колец // XIX Всес. алг. конф. Тезисы сообщ. ч.II. 1987. С.247.
9. Hentzel I.R. Processing identities by group representation. In "Computers in nonassociative rings and algebras. New York: Academic Press. 1977". P.13-40.
10. Hentzel I.R. Exhaustive checking of sparse algebras // J. Algorithms. 1981. V.2. N.1. P.44-49.
11. Kleinfeld E. Examples, counterexamples and the computer. In "Computers in nonassociative rings and algebras. New York: Academic Press. 1977". P.1-12.
12. Kleinfeld E. On centers of alternative algebras // Commun. Algebra. 1980. V.8. N.3. P.289-297.

Поступило 30.09.1988

ON THE PROOF OF NONIDENTITIES IN FINITE DIMENSIONAL ALGEBRAS  
USING A COMPUTER

R. Roomeldi

Summary

In this paper we describe a programming system for computing values of functions in the finite dimensional algebras. The elements of algebras are generated with help of the generator of random numbers.

As a concrete example the system proves that the 4-identity of Medvedev is the nonidentity on the simple exceptional 27-dimensional Jordan algebra  $H(C_3)$ .

РЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И АЛГЕБРЫ СВЯЗНОСТЕЙ

А.Фляйшер

Лаборатория прикладной математики

§ I. Введение

Пусть  $G$  - связная группа Ли и  $H$  - замкнутая в ней подгруппа. Однородное пространство<sup>†)</sup>  $G/H$  называется редуکتивным [4], [12], если в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  группы  $G$  существует такое подпространство  $\mathfrak{m}$ , что  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$  (прямая сумма) и  $(\text{Ad } H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ . В случае связной  $H$  второе условие заменяется на  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ , где  $\mathfrak{h}$  обозначает алгебру Ли группы  $H$ . Следуя [14], на подпространстве  $\mathfrak{m}$  можно задать структуру неассоциативной антикоммутиативной алгебры, полагая для  $x, y \in \mathfrak{m}$  скобку  $[x, y] = x \circ y + \mathfrak{h}(x, y)$ , где  $x \circ y = [x, y]_{\mathfrak{m}}$  (соответственно  $\mathfrak{h}(x, y) = [x, y]_{\mathfrak{h}}$ ) является проекцией  $[x, y]$  на  $\mathfrak{m}$  (соответственно на  $\mathfrak{h}$ ). Тожества алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  влекут для  $x, y, z \in \mathfrak{m}$  и  $u \in \mathfrak{h}$  следующие соотношения:

$$x \circ y = -y \circ x, \quad (\text{I.1})$$

$$\mathfrak{h}(x, y) = -\mathfrak{h}(y, x), \quad (\text{I.2})$$

$$[x, \mathfrak{h}(y, z)] + [y, \mathfrak{h}(z, x)] + [z, \mathfrak{h}(x, y)] = (x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x + (z \circ x) \circ y, \quad (\text{I.3})$$

$$\mathfrak{h}(x \circ y, z) + \mathfrak{h}(y \circ z, x) + \mathfrak{h}(z \circ x, y) = 0, \quad (\text{I.4})$$

$$[u, \mathfrak{h}(x, y)] = \mathfrak{h}([u, x], y) + \mathfrak{h}(x, [u, y]), \quad (\text{I.5})$$

$$[u, x \circ y] = [u, x] \circ y + x \circ [u, y]. \quad (\text{I.6})$$

Полученную алгебру будем обозначать  $(\mathfrak{m}, \circ)$ . Из (I.6), в частности, следует, что отображение  $\mathcal{D}(u) = \text{ad } u : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ ,  $x \mapsto [u, x]$  является дифференцированием алгебры  $(\mathfrak{m}, \circ)$ . Если  $G/H$  - локально симметрическое пространство (т.е.  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ ), то  $(\mathfrak{m}, \circ)$  - нулевая алгебра.

В [12] было установлено соответствие между  $G$ -инвариантными связностями на редуکتивном однородном прост-

<sup>†)</sup> Все рассматриваемые однородные пространства предполагаются односвязными.

пространстве  $G/H$  с фиксированным разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$  и произвольными неассоциативными алгебрами  $(m, \alpha)$ , где  $\alpha$  задает билинейную операцию умножения на  $m$ .

**Теорема I.1.** Пусть  $G/H$  - редуktивное однородное пространство с фиксированным разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ . Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех  $G$ -инвариантных связностей на  $G/H$  и множеством всех неассоциативных алгебр  $(m, \alpha)$ , для которых  $Ad(H)$  содержится в группе автоморфизмов  $Aut(m, \alpha)$  алгебры  $(m, \alpha)$ ; иначе говоря

$$(Ad U^*) \alpha(X, Y) = \alpha((Ad U^*)X, (Ad U^*)Y)$$

для  $U^* \in H$  и  $X, Y \in m$ .

Локально включение  $Ad(H) \subset Aut(m, \alpha)$  соответствует включению  $ad \mathfrak{h} \subset Der(m, \alpha)$ , где  $Der(m, \alpha)$  обозначает алгебру дифференцирований алгебры  $(m, \alpha)$ , и справедливо равенство

$$[u, \alpha(X, Y)] = \alpha([u, X], Y) + \alpha(X, [u, Y])$$

для  $u \in \mathfrak{h}$ ;  $X, Y \in m$ .

Согласно [12] строение алгебры  $(m, \alpha)$  связано с геометрией пространства  $G/H$  следующим результатом.

**Теорема I.2.** На редуktивном однородном пространстве  $G/H$  существует единственная  $G$ -инвариантная связность с нулевым кручением, для которой однопараметрическая подгруппа  $\exp tX \subset G$ , порожденная вектором  $X \in \mathfrak{m}$ , проектируется при канонической проекции  $\pi: G \rightarrow G/H$  в геодезическую на  $G/H$ . В этом случае  $\alpha(X, Y) = \frac{1}{2} X \cdot Y$  и полученная связность называется канонической связностью первого рода.

Если инвариантная псевдориманова связность на  $G/H$  индуцирована невырожденной симметрической билинейной формой  $C$  на  $m$ , то имеют место соотношения [II], [12]:

$$C((ad U)X, Y) + C(X, (ad U)Y) = 0, \quad (I.7)$$

$$C(\alpha(Z)X, Y) + C(X, \alpha(Z)Y) = 0 \quad (I.8)$$

для всех  $X, Y, Z \in m$  и  $U \in \mathfrak{h}$ , где

$$\alpha(Z): m \rightarrow m, \quad X \mapsto \alpha(Z, X)$$

Для тензоров кривизны  $R$  и кручения  $T$  этой связности имеют

$$R(X, Y)Z = \alpha(X, \alpha(Y, Z)) - \alpha(Y, \alpha(X, Z)) - \alpha(X \cdot Y, Z) - [h(X, Y), Z], \quad (I.9)$$

$$T(X, Y) = \alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) - X \cdot Y \quad (I.10)$$

для  $X, Y, Z \in m$  (см. [2]).

Алгеброй голономии  $hol(\alpha)$  этой связности является алгебра Ли группы голономии  $Hol(\alpha)$ . Из [II] следует,

что  $\mathfrak{hol}(\alpha)$  является наименьшей алгеброй Ли эндоморфизмов пространства  $m$ , для которой  $R(x, y) \in \mathfrak{hol}(\alpha)$  и  $[\alpha(x), \mathfrak{hol}(\alpha)] \subset \mathfrak{hol}(\alpha)$  для всех  $x, y \in m$ , где  $\alpha(x): y \mapsto \alpha(x, y)$ . Согласно (I.9) алгебра  $\mathfrak{hol}(\alpha)$  определяется отображениями  $\alpha(x)$  и  $\mathfrak{D}(\mathfrak{h}(x, y))$  для  $x, y \in m$ . Геометрически голономно неприводимые пространства  $G/H$  впервые выделены "теоремой разложения де Рама" [2].

В части 2 мы рассматриваем более подробно алгебру  $(m, \cdot)$ . В частности, указывается на взаимосвязь приводимости пространства  $G/H$ , максимальности подалгебры  $\mathfrak{h}$  и простоты алгебры  $(m, \cdot)$ . Используя [9], дан пример псевдоримановых естественно редутивных пространств  $G/H$ , для которых простота  $G$  влечет голономную неприводимость  $G/H$ . В римановом случае аналогичный результат получен Б.Костантом в [10].

В части 3 мы продолжаем изучение алгебры  $(m, \alpha)$  и сравниваем псевдо-риманову связность, задаваемую алгеброй  $(m, \alpha)$  с канонической связностью первого рода, задаваемой алгеброй  $(m, \cdot)$  (см. [II]). Показано, что если все связности индуцированы псевдоримановыми метриками, то каждая инвариантная псевдориманова связность на редутивном изотропно неприводимом однородном пространстве является связностью первого рода.

В части 4 мы обобщаем хорошо известный результат [15] о соответствии между вполне геодезическими подмногообразиями редутивного пространства  $G/H$  и тройными системами Ли для случая произвольной инвариантной псевдоримановой связности. Рассматривается взаимосвязь между существованием вполне геодезических подмногообразий редутивного пространства и голономной неприводимостью этого пространства.

## §2. Алгебра $(m, \cdot)$

Пусть  $G/H$  - редутивное однородное пространство с фиксированным разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + m$ . Как указано выше, с каждым редутивным разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + m$  связывается некоторая неассоциативная антикоммутативная алгебра  $(m, \cdot)$  с умножением  $x \cdot y = [x, y]_m$  для  $x, y \in m$ .

Идеалом алгебры  $(m, \cdot)$  называется подпространство  $n \subset m$ , для которого  $n \cdot m \subset n$ ; алгебра  $(m, \cdot)$  называется простой, если  $m^2 = m \cdot m \neq 0$  и  $(m, \cdot)$  не содержит собственных идеалов.

Зависимость строения алгебры  $(m, \cdot)$  от геометрии

пространства  $G/H$  исследовалась в [14], где основной является

Теорема 2.1. Пусть  $G/H$  - редуктивное однородное пространство с канонической связностью первого рода и фиксированным разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ . Если  $\mathfrak{m}^2 \neq 0$  и  $G/H$  голономно неприводимо, то алгебра  $(\mathfrak{m}, \circ)$  проста. Обратно, если  $G/H$  псевдориманово и алгебра  $(\mathfrak{m}, \circ)$  проста, то  $G/H$  голономно неприводимо.

Пусть  $G/H$  - редуктивное однородное пространство с фиксированным разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$  и  $ad(H)$  - инвариантной невырожденной симметрической билинейной формой  $B$  на  $\mathfrak{m}$ . Оно называется естественно редуктивным [2], если

$$B(X, Z \circ Y) + B(Z \circ X, Y) = 0$$

для  $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ . Естественно редуктивными являются симметрические пространства, но существует и множество несимметрических примеров, рассмотренных в работах Дж. Д'Атри и В.Циллера [8], Ф.Тричерри и Л.Ванхеке [17], Дж.Вольфа [18].

Рассматривая однородные пространства  $G/H$ , для которых подпространство  $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid B(X, \mathfrak{h}) = 0\}$ , где  $B$  - невырожденная  $Ad(G)$ -инвариантная билинейная симметрическая форма на  $\mathfrak{g}$  с невырожденным ограничением  $B_{\mathfrak{h}}$  на  $\mathfrak{h}$  (например, форма Киллинга на  $\mathfrak{g}$ ), мы также получаем естественно редуктивные пространства [2], [6].

Теорема 2.2. Пусть  $M = G/H$  - риманово несимметрическое однородное пространство. Тогда простота группы  $G$  влечет простоту алгебры  $(\mathfrak{m}, \circ)$ , где  $\mathfrak{m}$  ортогонально к  $\mathfrak{h}$  относительно формы Киллинга  $K$  на  $\mathfrak{g}$ .

Доказательство. В силу римановости  $G/H$  ограничение  $K_{\mathfrak{h}}$  формы Киллинга на  $\mathfrak{h}$  невырождено и потому подпространство

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid K(X, \mathfrak{h}) = 0\}$$

задает естественно редуктивное разложение  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ . Если  $(\mathfrak{m}, \circ)$  не проста и  $\mathfrak{m}^2 \neq 0$ , то  $(\mathfrak{m}, \circ)$  содержит  $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ -инвариантный идеал  $\mathfrak{n}$  ([14]). Ограничение  $K$  на  $\mathfrak{n}$  также невырождено и потому  $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} + \mathfrak{n}^{\perp}$ , где  $\mathfrak{n}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{m} \mid K(X, \mathfrak{n}) = 0\}$ . Покажем, что  $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{\perp}] = 0$ . Действительно, для  $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$

имеем

$$K(X \circ Y, Z) = K([X, Y] - \mathfrak{h}(X, Y), Z) = K([X, Y], Z) = K(X, [Y, Z]) = K(X, Y \circ Z),$$

что влечет  $0 = K(\mathfrak{n}^{\perp}, \mathfrak{n} \circ \mathfrak{m}) = K(\mathfrak{n}^{\perp} \circ \mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ . Кроме того,

$$K(\mathfrak{n}^{\perp} \circ \mathfrak{n}, \mathfrak{h}) = 0, \text{ потому } K(\mathfrak{n}^{\perp} \circ \mathfrak{n}, \mathfrak{g}) = 0 \text{ и } \mathfrak{n}^{\perp} \circ \mathfrak{n} = 0.$$

Далее  $K([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{\perp}], \mathfrak{h}) = K(\mathfrak{n}, [\mathfrak{n}^{\perp}, \mathfrak{h}]) = K(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{\perp}) = 0$ . Но

$K([n, n^+], m) = K(\mathfrak{h}(n, n^+), m) = 0$ . В итоге  $K([n, n^+], \mathfrak{g}) = 0$  и  $[n, n^+] = 0$ . Покажем, что подпространство  $\mathfrak{p} = \mathfrak{n} + \mathfrak{h}(n, n)$  является идеалом в  $\mathfrak{g}$ . Действительно, в силу  $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ -инвариантности  $\mathfrak{n}$  имеем

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{n}] \subseteq [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] + [\mathfrak{h}(n, n), \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n} + \mathfrak{h}(n, n) + \mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{p}.$$

Так как  $\mathfrak{h}(n, n)$  является идеалом в  $\mathfrak{h}$  [12], то

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{h}] \subseteq [\mathfrak{n}, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{h}(n, n), \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{p}.$$

Осталось показать  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{n}^+] \subseteq \mathfrak{p}$ . Но  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{n}^+] \subseteq [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^+] + [\mathfrak{h}(n, n), \mathfrak{n}^+] \subseteq [\mathfrak{h}(n, n), \mathfrak{n}^+] \subseteq [[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}^+] \subseteq [[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^+], \mathfrak{n}] = 0$ .

Таким образом,  $\mathfrak{p}$  — идеал в  $\mathfrak{g}$ , что указывает на противоречие.

Из теорем 2.1 и 2.2 следует известный результат Б.Костанта (см. [2], [10])

**Теорема 2.3.** Пусть  $M = G/H$  — риманово естественно редуцированное однородное пространство. Если  $G$  проста, то  $M$  голономно неприводимо.

Далее определим класс редуцированных однородных пространств, для которых аналогичный результат будет иметь место в псевдоримановом случае.

**Определение.** Редуцированное однородное пространство с фиксированным разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$  называется специально редуцированным, если алгебра  $(\mathfrak{m}, \circ)$  не содержит идеалов с нулевым умножением.

**Пример.** Пусть  $G$  — полупростая связная группа Ли,  $H$  — полупростая замкнутая подгруппа. Тогда  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ , где  $\mathfrak{m}$  — ортогональное дополнение к  $\mathfrak{h}$  относительно формы Киллинга  $K$  алгебры  $\mathfrak{g}$  и соответствующее однородное пространство  $G/H$  редуцитивно [5], [9]. Если ограничение  $K_m$  формы  $K$  на  $\mathfrak{m}$  совпадает с формой Киллинга алгебры  $(\mathfrak{m}, \circ)$ , то  $G/H$  — специально редуцитивно.

**Предложение 2.1.** Каждое риманово естественно редуцированное однородное пространство разложимо в прямое произведение симметрического и специального естественно редуцированного однородного пространства.

**Доказательство.** Пусть  $T_c(M) = T_c^{(0)} + T_c^{(1)} + \dots + T_c^{(r)}$  — разложение де Рама касательного пространства  $T_c(M)$  односвязного риманова естественно редуцированного пространства  $M = G/H$  с разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$  и  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1 + \dots + \mathfrak{m}_r$  — соответствующее разложение для  $\mathfrak{m}$  при естественном отождествлении  $T_c(M) = \mathfrak{m}$ . Согласно [2] имеют место следующие соотношения

$$m_i \cdot m_i \subset m_i, [m_i, m_j] = 0 \text{ для } i, j = 0, 1, \dots, r (i \neq j).$$

Упорядочив  $m_i (0 \leq i \leq r)$ , можно предположить, что  $C = m_0 + \dots + m_s$  является центром алгебры  $(m, \circ)$ , то есть  $m_k \cdot m_k = 0 (0 \leq k \leq s)$ , и  $n = m_{s+1} + \dots + m_r$ , где  $m_\ell \cdot m_\ell \neq 0 (s+1 \leq \ell \leq r)$ , то есть  $n$  не содержит идеалов алгебры  $(m, \circ)$  с нулевым умножением. Таким образом  $m = C + n$ , причем  $[C, C] \subset \mathfrak{h}$  и в итоге  $G/H = G_1/H \times G_2/H$ , где  $G_1/H$  - симметрическое однородное пространство с разложением  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h} + C$  и  $G_2/H$  - специальное естественно редуктивное пространство с разложением  $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h} + n$ .

**Теорема 2.4.** Пусть  $M = G/H$  - однородное пространство и алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  допускает  $\text{ad}(G)$ -инвариантную невырожденную симметричную билинейную форму  $B$ , сужение  $B|_{\mathfrak{h}}$  которой на  $\mathfrak{h}$  невырождено. Тогда

1. Однородное пространство  $M$  естественно редуктивно относительно разложения  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ , определенного условием  $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid B(X, Y) = 0 \text{ для всех } Y \in \mathfrak{h}\}$ .

2. Если  $M$  специально редуктивно, то  $M$  либо голономно неприводимо, либо имеет место разложение

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1 + \dots + \mathfrak{m}_r$$

в прямую сумму взаимно ортогональных идеалов алгебры  $(m, \circ)$ , причем

- (а)  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{m}_i$  для  $i = 0, 1, \dots, r$ .  
 (б)  $\mathfrak{m}_i \cdot \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_i$  для  $i = 0, 1, \dots, r$ .  
 (с)  $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] = 0$  для  $i, j = 0, 1, \dots, r (i \neq j)$ .  
 (д)  $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{m}_i + \mathfrak{h}(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i)$  являются идеалами в  $\mathfrak{g}$  для  $i = 0, 1, \dots, r$ .

**Доказательство.** Утверждение 1 следует непосредственно из [2], стр. 189. Для доказательства утверждения 2 заметим, что приводимость пространства  $M$  влечет существование минимального собственного  $\mathfrak{D}(\mathfrak{h})$ -инвариантного идеала  $\mathfrak{m}_0$  в  $(m, \circ)$ . Пусть  $\mathfrak{m}'_0 = \{X \in \mathfrak{m} \mid B(X, \mathfrak{m}_0) = 0\}$ .

В силу соотношений

$$B([\mathfrak{m}'_0, \mathfrak{h}], \mathfrak{m}_0) = B(\mathfrak{m}'_0, [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}_0]) = 0,$$

$$B(\mathfrak{m}'_0 \cdot \mathfrak{m}, \mathfrak{m}_0) = B(\mathfrak{m}'_0, \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}_0) = 0,$$

вытекающих из (1.7) и (1.8), получаем, что  $\mathfrak{m}'_0$  также является  $\mathfrak{D}(\mathfrak{h})$ -инвариантным идеалом в  $(m, \circ)$ . Покажем, что  $\mathfrak{m}_0 \cap \mathfrak{m}'_0 = 0$ . Если это не так, то минимальность  $\mathfrak{m}_0$  влечет включение  $\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{m}'_0$ . Но тогда  $B(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0) = 0$ , откуда  $B(\mathfrak{m}_0^2, \mathfrak{m}) = B(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}) = 0$  и  $\mathfrak{m}_0^2 = 0$  вопреки

условию. Итак,  $m_i \cap m'_i = 0$  и потому  $m$  является прямой суммой  $m_i$  и  $m'_i$ . Теперь равенство  $B(m_i, m'_i) = 0$  влечет  $0 = B(m_i, m'_i \cdot m) = B(m_i \cdot m'_i, m)$ . Но  $B(m_i \cdot m'_i, h) = 0$ , потому  $B(m_i \cdot m'_i, g) = 0$ ,  $m_i \cdot m'_i = 0$  и  $B([m_i, m'_i], h) = 0$ . Теперь ввиду  $B([m_i, m'_i], h) = B(m_i, [m'_i, h]) \subset B(m_i, m'_i) = 0$  имеем  $B([m_i, m'_i], g) = 0$  и  $[m_i, m'_i] = 0$ .

Из включений  $[h, h] \subset h$ ,  $[h, m_i] \subset m_i$ ,  $[m_i, m'_i] \subset h + m_i$  вытекает, что  $h_0 = h + m_i$  является подалгеброй Ли в  $g$ . Так как  $B(h_0, m'_i) = 0$ , то  $G/N_0$  — естественно редуцированное пространство, где  $N_0$  — связная подгруппа в  $G$ , имеющая  $h_0$  своей алгеброй Ли. Пространство  $G/N_0$  является специально редуцированным, так как  $(m'_i, \cdot)$  не содержит идеалов с нулевым умножением. Действительно, пусть  $n$  — такой идеал в  $(m'_i, \cdot)$ , что  $n^2 = 0$ . Но тогда  $n$  является идеалом и в  $(m, \cdot)$ , т.к.  $n \cdot m = n \cdot (m'_i + m_i) = n \cdot m'_i \subset n$  (поскольку  $n \cdot m_i = 0$ ), что противоречит условию. Теперь, если  $(m'_i, \cdot)$  проста, то дальнейшее разложение невозможно. Если же  $(m'_i, \cdot)$  не проста, то условия теоремы наследуются пространством  $G/N_0$  и процесс продолжается до тех пор, пока  $m$  не разложится в прямую сумму простых идеалов, взаимно ортогональных относительно  $B$ . Заключение (а)–(с) следуют непосредственно из доказательства. Для доказательства утверждения (d) заметим, что из  $\mathcal{B}(h)$ -инвариантности  $m_i$  вытекает, что все  $h_i = h(m_i, m_i)$  являются идеалами в  $h$  [10]. Потому

$$[g_i, h] = [m_i + h(m_i, m_i), h] \subset m_i + h(m_i, m_i) = g_i.$$

Далее имеем

$$[m_i, m] = [m_i, m_0 + \dots + m_r] = [m_i, m_i] \subset g_i,$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} [h(m_i, m_i), m] &\subset [[m_i, m_i], m] \subset [[m_i, m], m_i] = \\ [h(m_i, m) + m_i \cdot m, m_i] &\subset [h(m_i, m), m_i] + [m_i, m_i] \subset \\ m_i + h(m_i, m_i) &= g_i. \end{aligned}$$

Из полученных соотношений имеем  $[g_i, m] \subset g_i$  и подпространства  $g_i$  являются идеалами в  $g$ .

Следствие. Пусть  $M = G/N$  — специальное естественно редуцированное однородное пространство. Если  $G$  проста, то  $M$  голономно неприводимо.

Определение. Редуцированное однородное пространство с разложением  $g = h + m$  называется изотропно неприводимым, если  $ad h$  действует неприводимо на  $m$ .

Предложение 2.2. Пусть  $M = G/H$  - редуктивное несимметрическое однородное пространство с фиксированным разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ . Если  $M$  изотропно неприводимо, то алгебра  $(\mathfrak{m}, \circ)$  проста.

Доказательство следует непосредственно из [14].

Предложение 2.3. Пусть  $M = G/H$  - редуктивное несимметрическое однородное пространство с фиксированным разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ . Если  $\mathfrak{h}$  является максимальной подалгеброй в  $\mathfrak{g}$ , то алгебра  $(\mathfrak{m}, \circ)$  проста.

Доказательство. Несимметричность  $M$  - влечет  $\mathfrak{m}^2 \neq 0$ . Если  $(\mathfrak{m}, \circ)$  не проста, то она содержит [14]  $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ -инвариантный собственный идеал  $\mathfrak{n}$ . В силу вclusions

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}, \quad [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n} \circ \mathfrak{n} + \mathfrak{h}(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}) \subset \mathfrak{n} + \mathfrak{h}$$

подпространство  $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$  является собственной подалгеброй в  $\mathfrak{g}$  содержащей  $\mathfrak{h}$  - противоречие.

Следующее предложение устанавливает соответствие между изучением изотропно неприводимых редуктивных однородных пространств  $G/H$  в [3], [18] и пространств с максимальной  $\mathfrak{h}$ .

Предложение 2.4. Пусть  $G/H$  - редуктивное однородное пространство с разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ . Если  $G/H$  изотропно неприводимо, то  $\mathfrak{h}$  - максимальная подалгебра в  $\mathfrak{g}$ .

Доказательство. Если  $\mathfrak{h}$  не максимальна в  $\mathfrak{g}$ , то существует собственная подалгебра  $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{g}$ , для которой  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}^*$ . Пусть  $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{h}^* \cap \mathfrak{m}$ . Из вclusions

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}^*] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^* \cap \mathfrak{m}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^*] \cap [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}^* \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^*$$

следует, что подпространство  $\mathfrak{m}^*$  является  $\text{ad } \mathfrak{h}$ -инвариантным - противоречие.

### §3. Алгебра $(\mathfrak{m}, \alpha)$

Пусть  $G/H$  - редуктивное однородное пространство с фиксированным разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ . Тогда, как указано выше, каждая  $G$ -инвариантная связность на  $G/H$  порождает неассоциативную алгебру  $(\mathfrak{m}, \alpha)$ , где  $\alpha: \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$  является функцией связности. Левым (соотв. правым) идеалом алгебры  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  называется подпространство  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$ , для которого  $\alpha(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \subset \mathfrak{n}$  (соотв.  $\alpha(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$ ).

Взаимосвязь неприводимости  $G/H$  и структуры алгебры  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  выясняется из следующих соображений. В силу формулы (I.9) каждый левый  $\mathfrak{h}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ -инвариантный идеал алгебры  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  является и  $\text{hol}(\alpha)$ -инвариантным. Поэтому гомотомическая неприводимость  $G/H$  влечет утверждение, что ал-

гебра  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  не содержит левых  $\mathfrak{h}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ -инвариантных идеалов. В случае псевдоримановой связности справедлива и более сильная

**Теорема 3.1.** Пусть  $M = G/H$  — редуktивное несимметрическое однородное пространство с разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ , на котором  $G$ -инвариантная псевдориманова связность задает алгебру  $(\mathfrak{m}, \alpha)$ . Если  $M$  голономно неприводимо, то  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  проста.

**Доказательство.** Если  $\alpha(X, Y) = 0$  для любых  $X, Y \in \mathfrak{m}$  то в силу формулы (I.10) имеем

$$0 = T(X, Y) = \alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) - X \circ Y = -X \circ Y$$

то есть  $M$  оказывается симметрическим, что противоречит условию. Если теперь  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  не проста, то она содержит собственный двусторонний идеал  $\mathfrak{p}$ . Согласно [14] она содержит тогда и собственный  $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ -инвариантный идеал  $\mathfrak{n}$ , являющийся, таким образом,  $\text{hol}(\alpha)$ -инвариантным — противоречие.

**Лемма.** В предположениях теоремы 3.1 простота алгебры  $(\mathfrak{m}, \circ)$  влечет простоту алгебры  $(\mathfrak{m}, \alpha)$ .

**Доказательство.** Алгебра  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  не является алгеброй с нулевым умножением, ибо, в противном случае, из формулы (I.10) мы имели бы  $X \circ Y = 0$ , что противоречит простоте  $(\mathfrak{m}, \circ)$ . Если теперь  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  содержит собственный двусторонний идеал  $\mathfrak{n}$ , то из той же формулы  $\mathfrak{n}$  является идеалом и в  $(\mathfrak{m}, \circ)$  — противоречие.

**Теорема 3.2.** Пусть  $G/H$  — риманово редуktивное несимметрическое однородное пространство, с разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ , на котором риманова связность задает алгебру  $(\mathfrak{m}, \alpha)$ . Тогда простота группы  $G$  влечет простоту алгебры  $(\mathfrak{m}, \alpha)$ .

Доказательство вытекает непосредственно из предыдущей леммы и теоремы 2.1, ибо, если  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  не проста, то  $G/H$  должно быть приводимо относительно канонической связности первого рода. Но это противоречит результату работы [10] о том, что в случае редуktивного риманова однородного пространства  $G/H$  простота группы  $G$  влечет голономную неприводимость  $G/H$  относительно канонической связности первого рода.

Пусть  $M = G/H$  — редуktивное однородное пространство с разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$  и  $C$  — невырожденная симметричная билинейная  $\text{ad } \mathfrak{h}$ -инвариантная форма на  $\mathfrak{m}$ , порождающая псевдориманову связность с соответствующей алгеброй  $(\mathfrak{m}, \alpha)$ . В силу соотношений (I.7) и (I.8) любой

двусторонний  $ad(\mathfrak{h})$ -инвариантный идеал в  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  является прямым слагаемым относительно  $\mathfrak{C}$  при условии, что  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  не содержит идеалов с нулевым умножением. Пусть в этом предположении  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \dots + \mathfrak{m}_r$  — разложение  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  в прямую сумму двусторонних  $ad(\mathfrak{h})$ -инвариантных идеалов, взаимно ортогональных относительно  $\mathfrak{C}$ . Легко видеть, что если  $\mathfrak{M}$  специально редуکتивно, то и  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  не содержит идеалов с нулевым умножением. В силу формулы

$$\alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) = X \circ Y$$

получаем также, что все двусторонние идеалы алгебры  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  будут идеалами и в  $(\mathfrak{m}, \circ)$ , то есть

$\mathfrak{m}_i \circ \mathfrak{m}_j \subset \mathfrak{m}_i$ ,  $\mathfrak{m}_i \circ \mathfrak{m}_j = 0$  ( $i \neq j$ ),  $\mathfrak{m}_i \circ \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_i$  ( $i, j = 1, \dots, r$ ).  
Взяв в формуле (I.9) векторы  $X \in \mathfrak{m}_i$ ,  $Y \in \mathfrak{m}_j$ ,  $Z \in \mathfrak{m}_k$ , получим

$$\alpha(X, Z) \in \mathfrak{m}_i, \quad \alpha(Y, Z) \in \mathfrak{m}_j, \\ \alpha(X, \alpha(Y, Z)) = 0, \quad \alpha(Y, \alpha(X, Z)) = 0, \quad \alpha(X \circ Y, Z) = 0.$$

В итоге  $R(X, Y)Z = -[\mathfrak{h}(X, Y), Z]$ . Учитывая, что  $X$  и  $Y$  принадлежат различным множителям разложения де Рама, получаем, что член в левой части равен нулю ([2], стр. 199).

Ввиду точности линейного представления изотропии получаем  $\mathfrak{h}(X, Y) = 0$ , что, в свою очередь, влечет  $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] = 0$ . Но тогда из доказательства теоремы 2.4 следует, что  $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{m}_i + \mathfrak{h}(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i)$  является идеалом в  $\mathfrak{g}$ , и тем самым доказана

**Теорема 3.3.** Пусть  $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$  — специально редуکتивное однородное пространство с разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$  и  $\mathfrak{G}$ -инвариантной псевдоримановой метрикой. Тогда простота  $\mathfrak{G}$  влечет простоту алгебры  $(\mathfrak{m}, \alpha)$ , порожденной связностью данной метрики.

Согласно [12] произведение  $\alpha(X, Y)$  задается формулой

$$\alpha(X, Y) = \frac{1}{2} X \circ Y + u(X, Y),$$

где  $u(X, Y)$  — симметричное билинейное отображение из  $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$  в  $\mathfrak{m}$ . Также из [12] следует, что  $u(X, Y)$  определяется единственным образом билинейной формой  $\mathfrak{C}$  (индуцирующей связность), которая определяет и произведение  $\alpha(X, Y)$  следующей формулой (3.1)

$$2\mathfrak{C}(Z, \alpha(X, Y)) = \mathfrak{C}(Z, X \circ Y) + \mathfrak{C}(Z \circ X, Y) + \mathfrak{C}(X, Z \circ Y) \quad (3.1)$$

Будем, как и прежде, считать, что произвольная псевдориманова связность порождается метрикой  $\mathfrak{C}$ , сохранив букву  $B$  для метрики, определяющей каноническую связность первого рода. Следуя [11], в силу невырожденности  $B$  и  $\mathfrak{C}$

существует  $S \in GL(m)$ , что  $C(X, Y) = B(SX, Y)$  для всех  $X, Y \in m$ . Из формулы (3.1) имеем

$$2 C(\alpha(X, Y), Z) = C(X \circ Y, Z) + C(Y, Z \circ X) + C(X, Z \circ Y)$$

или

$$\begin{aligned} 2 B(S \alpha(X, Y), Z) &= B(S(X \circ Y), Z) + B(SY, Z \circ X) + B(SX, Z \circ Y) = \\ &= B(S(X \circ Y), Z) - B(SY, X \circ Z) - B(SX, Y \circ Z) = \\ &= B(S(X \circ Y), Z) - B(SY \circ X, Z) - B(SX \circ Y, Z) = \\ &= B(S(X \circ Y), Z) + B(X \circ SY, Z) - B(SX \circ Y, Z). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$2 S \alpha(X, Y) = S(X \circ Y) + X \circ SY - SX \circ Y,$$

откуда окончательно

$$2 \alpha(X, Y) = X \circ Y + S^{-1}(X \circ SY - SX \circ Y). \quad (3.2)$$

Другими словами

$$u(X, Y) = \frac{1}{2} S^{-1}(X \circ SY - SX \circ Y).$$

Аналогичная формула получена А.Сейглом в работе [16]. Если  $u(X, Y) = 0$ , то соответствующее  $G/H$  является естественно редуktивным. В силу  $C$ - и  $B$ -кососимметричности оператора  $ad u (u \in \mathfrak{h})$  мы также имеем

$$\begin{aligned} B(S(ad u X), Y) &= C(ad u X, Y) = -C(X, ad u Y) = \\ &= -B(SX, ad u Y) = B(ad u(SX), Y), \end{aligned}$$

что влечет

$$[S, ad u] = 0. \quad (3.3)$$

Кроме того,

$$C(X, SY) = B(SX, SY) = B(SY, SX) = C(Y, SX) = C(SX, Y),$$

откуда следует, что оператор  $S$  должен иметь ненулевой вещественный характеристический корень  $\lambda$ . В силу (3.3) характеристическое подпространство

$$n = \{X \in m \mid SX = \lambda X\}$$

является  $ad \mathfrak{h}$ -инвариантным. Если предположить  $G/H$  изотропно неприводимым, то  $n$  должно совпасть с  $m$  и, соответственно,  $S = \lambda E$ . Тогда из (3.2) вытекает  $\alpha(X, Y) = \frac{1}{2} X \circ Y$  и справедлива

**Теорема 3.4.** Если все связности на редуktивном изотропно неприводимом однородном пространстве индуцированы псевдоримановыми метриками, то каждая инвариантная связность является связностью первого рода.

**Теорема 3.5.** Пусть  $M = G/H$  - односвязное редуktивное однородное пространство с разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ , на котором псевдориманова связность задает алгебру  $(\mathfrak{m}, \alpha)$ . Если  $\alpha(X, Y) = \frac{1}{2} X \circ Y$ , то  $S \in \Gamma(\mathfrak{m}, \circ)$ , где  $\Gamma(\mathfrak{m}, \circ)$  - централизатор алгебры операторов умножения алгебры  $(\mathfrak{m}, \circ)$ .

Обратно, если  $M$  голономно неприводимо и  $S \in \Gamma(m, \circ)$ , то  $\alpha(x, y) = \frac{1}{2} x \circ y$ .

Доказательство. В случае  $\alpha(x, y) = \frac{1}{2} x \circ y$  из формулы (I.8) следует

$$B(S(x \circ y), Z) = C(x \circ y, Z) = 2C(\alpha(x, y), Z) = -2C(y, \alpha(x, Z)) = -C(y, x \circ Z) = -B(Sy, x \circ Z) = B(x \circ Sy, Z).$$

Невырожденность  $B$  влечет  $S(x \circ y) = x \circ Sy$ , откуда

$$SL(x) = L(x)S, \quad (3.4)$$

где  $L(x): m \rightarrow m$ ,  $y \mapsto x \circ y$ . Обратно, если  $M$  голономно неприводимо, то алгебра  $(m, \circ)$  проста (теорема 2.1). Из доказательства теоремы 3.3 следует самосопряженность оператора  $S$  и пусть  $\mathfrak{n}$  - его характеристическое подпространство. Из формулы (3.4) следует, что  $\mathfrak{n}$  является ненулевым идеалом в  $(m, \circ)$ , и потому, ввиду простоты  $(m, \circ)$  получаем  $S = \lambda E$ . Формула (3.2) опять влечет  $\alpha(x, y) = \frac{1}{2} x \circ y$ .

§4. Тройные системы Ли, вполне геодезические подмногообразия и приводимость.

Понятие тройной системы Ли (т.с. Ли) введено в [19], где она определяется как векторное пространство  $V$  над полем  $F$  с операцией  $[X, Y, Z]$ , задающей отображение  $V \times V \times V$  в  $V$  и удовлетворяющей условиям

$$[X, Y, Z] \text{ трilinearно над } F, \quad (4.1)$$

$$[X, Y, Z] = -[Y, X, Z], \quad (4.2)$$

$$[X, Y, Z] + [Y, Z, X] + [Z, X, Y] = 0. \quad (4.3)$$

В частности, если положить  $[X, Y, Z] = R(X, Y)Z$  для аналитических векторных полей  $X, Y, Z$  на многообразии  $M$ , то  $[X, Y, Z]$  удовлетворяет (4.1) и (4.2) над алгеброй  $F(M)$  аналитических функций на  $M$ .

Одним из свойств псевдоримановой связности является  $T(X, Y) = 0$  для векторных полей  $X$  и  $Y$ . В этом случае I-ое тождество Бианки

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

совпадает с условием (4.3). Если теперь через  $\mathfrak{X}(M)$  обозначить множество векторных полей, для которых  $T(X, Y) = 0$  для всех  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , то  $\mathfrak{X}(M)$  становится т.с. Ли над  $F(M)$  относительно операции  $[X, Y, Z] = R(X, Y)Z$ . В работе [15] доказана следующая

Теорема 4.1. Пусть  $M'$  - невырожденное подмногообразие псевдориманова аналитического многообразия  $M$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а)  $M'$  является вполне геодезическим;  
 (б) геодезические в  $M'$  являются геодезическими и в  $M$  ;  
 (с) параллельное перенесение в  $M'$  совпадает с параллельным перенесением в  $M$  .

Каждое из названных условий влечет

- (д) если  $X, Y, Z$  лежат в  $\mathfrak{X}(M')$  , то  $[X, Y, Z] = R(X, Y)Z$  также лежит в  $\mathfrak{X}(M')$  .

Используя эту теорему, получим следующее обобщение результата о вполне геодезических подмногообразиях и тройных системах Ли на редуктивном однородном пространстве.

**Определение.** Пусть  $G/H$  - редуктивное однородное пространство с разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$  и пусть  $G'$  - связная подгруппа Ли в  $G$  , для которой  $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$  , где  $\mathfrak{g}'$  обозначает алгебру Ли группы  $G'$  . Однородное пространство  $G'/H'$  (где  $H' = G' \cap H$  ) называется редуктивным однородным подпространством в  $G/H$  .

Из [ I ] следует, что редуктивное однородное подпространство  $G'/H'$  редуктивного однородного пространства  $G/H = M$  является вполне геодезическим подмногообразием в  $M$  .

**Теорема 4.2.** Пусть  $M = G/H$  - редуктивное псевдориманово однородное пространство с разложением  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$  , на котором  $G$ -инвариантная псевдориманова связность задает алгебру  $(\mathfrak{m}, \alpha)$  . Если  $N$  - редуктивное подпространство в  $M$  , содержащее точку  $o = H$  и  $T_o(N) = \mathfrak{n}$  есть касательное пространство к  $N$  в точке  $o$  , то  $\mathfrak{n}$  является т.с. Ли относительно операции  $[X, Y, Z] = R(X, Y)Z$  . Обратно, если  $\mathfrak{n}$  - двусторонняя подалгебра в  $(\mathfrak{m}, \alpha)$ , являющаяся т.с. Ли относительно операции  $[X, Y, Z] = R(X, Y)Z$  , то существует редуктивное подпространство  $N$  , для которого  $T_o(N) = \mathfrak{n}$  .

**Доказательство.** Первая часть теоремы следует непосредственно из утверждения (д) теоремы 4.1. Для доказательства второй части покажем первоначально, что подпространство  $\mathfrak{g}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n} + \mathfrak{h}(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$  является подалгеброй Ли в  $\mathfrak{g}$  . Из  $T(X, Y) = 0$  для всех  $X, Y \in \mathfrak{m}$  и формулы (I.10) следует, что  $\mathfrak{n}$  является подалгеброй в  $(\mathfrak{m}, \circ)$  . Из (I.9) и в силу  $R(X, Y)Z \in \mathfrak{n}$  для всех  $X, Y, Z \in \mathfrak{n}$  следует, что  $\mathfrak{n}$  является  $\mathfrak{h}(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ -инвариантным. Это влечет

$$[\mathfrak{g}(\mathfrak{n}), \mathfrak{n}] = [\mathfrak{h}(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}), \mathfrak{n}] + [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n} + \mathfrak{h}(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}), \quad (4.4)$$

$$[\mathfrak{g}(\mathfrak{n}), \mathfrak{h}(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})] = [\mathfrak{n}, \mathfrak{h}(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})] + [\mathfrak{h}(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}), \mathfrak{h}(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})]. \quad (4.5)$$

В заключение из формулы (I.5) для  $X, Y \in \mathfrak{n}$  и  $U \in \mathfrak{h}$  имеем

$$[\mathfrak{h}(x, y), u] = \mathfrak{h}(x, [y, u]) + \mathfrak{h}([x, u], y)$$

и потому подпространство  $\mathfrak{h}(n, n)$  является подалгеброй Ли в  $\mathfrak{h}$ . Тогда из (4.4) и (4.5) сразу следует, что  $\mathfrak{g}(n)$  является подалгеброй Ли в  $\mathfrak{g}$ . Далее продолжаем аналогично случаю симметрических пространств [7]. Пусть  $G'$  - связная подгруппа в  $G$ , имеющая  $\mathfrak{g}(n)$  своей алгеброй Ли и пусть  $N = G' \cdot o$  ( $G'$  - орбита точки  $o$ ). Тогда  $N$  является подмногообразием в  $M$ , содержащим точку  $o$  и диффеоморфным  $G'/H'$ , где  $H'$  - замкнутая подгруппа  $G'$ , оставляющая точку  $o$  неподвижной. Следовательно,  $N$  является редуктивным пространством и  $T_o(N) = \mathfrak{n}$ .

Из этой теоремы вытекает результат А.Сэйгла [15] о вполне геодезических подмногообразиях и тройных системах Ли на редуктивном однородном пространстве.

**Следствие.** Пусть  $M = G/H$  - редуктивное псевдо-риманово однородное пространство с функцией связности  $\omega(X, Y) = \frac{1}{2} X \circ Y$ , заданной на подпространстве  $\mathfrak{m}$  фиксированного разложения  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ . Если  $N$  является вполне геодезическим подмногообразием в  $M$ , содержащим точку  $o = H$ , и  $\mathfrak{n}$  есть касательное пространство к  $N$  в точке  $o$ , то  $\mathfrak{n}$  является т.с. Ли относительно операции  $[X, Y, Z] = R(X, Y)Z$ . Обратно, если  $\mathfrak{n}$  - подалгебра в  $(\mathfrak{m}, \circ)$ , являющаяся т.с. Ли относительно операции  $[X, Y, Z] = R(X, Y)Z$ , то существует вполне геодезическое подмногообразие  $N$ , содержащее  $o$ , такое, что  $T_o(N) = \mathfrak{n}$ .

**Доказательство.** Из теоремы 4.2 следует, что  $N$  - редуктивное пространство и  $T_o(N) = \mathfrak{n}$ . Далее, из свойства канонической связности первого рода (теорема I.2) вытекает, что любая  $M$ -геодезическая, проходящая через точку  $o = H$  имеет вид  $\exp tX \cdot o$ , где  $X \in \mathfrak{m}$ . Такая геодезическая касается подмногообразия  $N$  в точке  $o$  тогда и только тогда, когда  $X \in T_o(N) = \mathfrak{n}$ , т.е. подмногообразие  $N$  является вполне геодезическим в точке  $o$ . Транзитивность  $G'$  на  $N$  влечет требуемый результат.

**Теорема 4.3.** Пусть  $M = G/H$  - односвязное псевдориманово редуктивное несимметрическое пространство с функцией связности  $\omega(X, Y) = \frac{1}{2} X \circ Y$ , заданной на подпространстве  $\mathfrak{m}$  фиксированного разложения  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ . Если  $M$  голономно приводимо, то существует вполне геодезическое подмногообразие  $N$  в  $M$ , содержащее точку  $o = H$ .

**Доказательство.** Если  $M$  голономно приводимо, то алгебра  $(\mathfrak{m}, \circ)$  не проста (теорема 2.1) и потому [14] долж-

на содержать  $\mathfrak{D}(\hbar)$ -инвариантный идеал  $\mathfrak{n}$ . Аналогично доказательству теоремы 4.1 можно показать, что подпространство  $\mathfrak{g}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n} + \hbar(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$  является подалгеброй в  $\mathfrak{g}$  и однородное пространство  $G/H'$  — вполне геодезическим подпространством в  $M$ .

#### Литература

1. Васильев А.М. О вполне геодезических подмногообразиях однородных пространств // Докл. АН СССР. Т. 128. № 2. 1959. С. 223-226.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.
3. Мантуров О.В. Римановы однородные пространства с неприводимой группой вращений // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу. № 13. 1966. С. 68-145.
4. Рашевский П.К. О геометрии однородных пространств // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу. № 9. 1952. С. 49-74.
5. Фляйшер А.Г. Об одном классе редутивных пространств // Тр. геом. семинара ВИНТИ АН СССР. Т. 6. 1974. С. 267 - 276.
6. Фляйшер А. Редутивные однородные пространства и неассоциативные алгебры // Изв. АН ЭССР. Т. 27. № 3. 1978. С. 266-273.
7. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
8. D'Atri J.E., Ziller W. Naturally reductive metrics and Einstein metrics on compact Lie groups // Mem. Amer. Math. Soc. V. 215. 1979.
9. Fleischer A. On a class of pseudo-Riemannian homogeneous spaces // Coll. mat. soc. V.31. 1979. P.217-224.
10. Kostant B. On differential geometry and homogeneous spaces // Proc. Nat. Acad. Sci. V.42. 1956. P. 354-357.
11. Kostant B. On holonomy and homogeneous spaces // Nagoya Math. J. N12, 1957, P. 31-54.
12. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. Math. J. V.76. 1954. P. 33-65.
13. Nomizu K. Studies on Riemannian homogeneous spaces // Nagoya Math. J. N9. 1955. P. 43-56.
14. Sagle A. On anticommutative algebras and homogeneous spaces // J.Math. and Mech. N16. 1967. P.1381-1393.

15. Sagle A. A note on triple systems and totally geodesics submanifolds in a homogeneous space // Nagoya Math. J. N32. 1968. P.5-20.
16. Sagle A. On homogeneous spaces, holonomy and nonassociative algebras // Nagoya Math. J. N32. 1968. P.373-394.
17. Tricerri F., Vanhecke L. Homogeneous structures on Riemannian manifolds. London Math. Soc. Lecture Note Serie 83. Cambridge Univ. Press, 1983.
18. Wolf J. The geometry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces // Acta math. V.120. 1968. P.59-148.
19. Yamaguti K. On algebras of totally geodesic spaces (Lie triple systems) // J.Sci. Hiroshima Univ. N21. 1957. P. 107-113.

Получено 16.09.1988

## REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES AND CONNECTION ALGEBRAS

A.Fleischer

### Summary

The description of geometric properties of reductive homogeneous spaces on the language of connection algebras is considered. In particular the dependence between the structure of the fundamental group  $G$ , reducibility of the space  $G/H$  and simplicity of the connection algebra is studied. We pick out a class of spaces which are similar to Riemannian reductive spaces and obtain for them the analogue of de Rham's decomposition. Using the notion of Lie triple system (L.t.s.) of the reductive space  $M$  there is shown that the finding of reductive subspaces in  $M$  is equivalent to the finding of subalgebras in L.t.s. of  $M$ .

## ЭНДОМОРФИЗМЫ ПОЛИГОНОВ И СПЛЕТЕНИЯ

В. Фляйшер

Кафедра математического анализа

В настоящей работе рассматривается связь эндоморфизмов свободных полигонов и их подполигонов с различными типами сплетений. В качестве таких сплетений рассматриваются сплетения моноидов, сплетения моноидов с категориями, а также сплетения малых категорий. Вводимая здесь конструкция сплетения малых категорий отличается от конструкции, предложенной Ч.Вэлшем в работе [5]. Она естественным образом обобщает конструкцию сплетения моноидов с категориями, введенную автором в работе [1]. Показано, что всякая категория подполигонов свободного полигона представима в виде сплетения моноидов.

Приведем необходимые определения. Пусть  $S$  - моноид, т.е. полугруппа с единицей  $1_S$ . Множество  $X$  называется левым  $S$ -полигоном, если  $\alpha x \in X$ ,  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ,  $1_S x = x$  для любых  $\alpha, \beta \in S$ ,  $x \in X$ . Правые  $S$ -полигоны определяются аналогично. Естественным образом определяются подполигоны  $S$ -полигонов. отображение  $f: X \rightarrow Y$ , где  $X, Y$  - левые  $S$ -полигоны, называется  $S$ -гомоморфизмом, если  $f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x)$  для всех  $\alpha \in S$ ,  $x \in X$ . Множество всех  $S$ -гомоморфизмов из  $S$ -полигона  $X$  в  $S$ -полигон  $Y$  обозначается через  $\text{Hom}_S(X, Y)$  и  $\text{End}_S X = \text{Hom}_S(X, X)$ . Свободный правый  $S$ -полигон  $F$  с системой свободных образующих  $G = \{g_i \mid i \in J\}$  имеет вид  $F = \bigcup_{i \in J} g_i S$ , где  $g_i S \cong S$ ,  $g_i S \cap g_j S = \emptyset$  для любых  $i, j \in J$  ( $i \neq j$ ). Таким образом, в свободном  $S$ -полигоне  $F$  равенство  $g_i s' = g_j s''$  имеет место тогда и только тогда, если  $i = j$  и  $s' = s''$ . Произвольный подполигон  $P$  свободного полигона  $F = \bigcup_{i \in J} g_i S$ , очевидно, имеет вид  $P = \bigcup_{i \in J} g_i R_i$ , где  $J$  и  $R_i$  - правый идеал моноида  $S$  для каждого  $i \in J$ . Правый  $S$ -полигон  $Q$  называется разложимым если  $Q$  можно представить в виде объединения попарно непересекающихся подполигонов. В противном случае полигон  $Q$  называется неразложимым.

Рангом правого  $S$ -полигона  $Q$  называется мощность множества неразложимых подполигонов полигона  $Q$ , попарно непересекающихся и объединение которых есть  $Q$ .

Пусть  $S, U$  — моноиды и  $X$  есть левый  $S$ -полигон. Через  $F(X, U)$  обозначим множество всех отображений из  $X$  в  $U$ . На множестве  $A = S \times F(X, U)$  определено умножение

$$(\alpha, f)(\beta, g) = (\alpha\beta, f\beta g)$$

где  $(f\beta g)(x) = f(\beta x)g(x)$  для любых  $x \in X, \alpha, \beta \in S, f, g \in F(X, U)$ . Множество  $A$  относительно введенной операции образует моноид, который называется сплетением моноида  $S$  с моноидом при помощи левого  $S$ -полигона  $X$  и обозначается  $A = (S \text{ wr } U | X)$ .

Между моноидами эндоморфизмов свободных полигонов и сплетениями моноидов существует тесная связь. Так в работе [4] отмечен следующий результат

**Теорема 1.** Моноид  $End_S F$  всех эндоморфизмов произвольного свободного правого  $S$ -полигона  $F$  с системой свободных образующих  $G = \{g_i | i \in J\}$  изоморфен сплетению  $(T_J \text{ wr } S | J)$ , где  $T_J$  — полугруппа всех преобразований множества  $J$ .

Доказательство этой теоремы вытекает из того, что отображение  $\Phi: End_S F \rightarrow (T_J \text{ wr } S | J)$ , для которого при произвольном  $\varphi \in End_S F$

$$\Phi(\varphi) = (\alpha, f),$$

где  $\alpha \in T_J, f \in F(J, S)$  таковы, что

$$\varphi(g_i s) = g_{\alpha(i)} f(i) s$$

для любых  $i \in J, s \in S$ , является изоморфизмом.

В свою очередь сплетения моноидов часто изоморфны моноидам (не обязательно всех) эндоморфизмов свободных полигонов. Чтобы сформулировать соответствующее утверждение, приведем определение точного полигона. Левый  $S$ -полигон  $X$  называется точным, если для произвольных  $\alpha, \beta \in S$  из того, что  $\alpha x = \beta x$  для всех  $x \in X$  вытекает  $\alpha = \beta$ . Следующий результат приведен в работе ([3], теорема 1.2).

**Теорема 2.** Пусть  $A = (S \text{ wr } U | X)$  сплетение моноидов при помощи точного левого  $S$ -полигона  $X$  и  $F$  — свободный правый  $U$ -полигон с системой свободных образующих  $X$ . Тогда  $A$  изоморфно подмоноиду моноида  $End_U F$ .

Если от рассмотрения эндоморфизмов свободных полигонов перейти к рассмотрению эндоморфизмов свободных полигонов, то конструкция сплетения моноидов уже не является достаточ-

ной. Так в работе ([2], пример 2.1) приводится конкретный пример проективного полигона, моноид всех эндоморфизмов которого не может быть представлен в виде сплетения моноидов. Остается лишь заметить, что всякий проективный полигон изоморфен подполигону подходящего свободного полигона

Эндоморфизмы подполигонов свободных полигонов описываются, однако, более общей конструкцией сплетения моноидов с малыми категориями, введенной в работе [1].

Пусть  $S$  — моноид,  $\mathcal{K}$  — произвольная малая категория с множеством объектов  $\mathfrak{X} = Ob \mathcal{K}$  и множеством морфизмов  $\mathcal{M} = Mor \mathcal{K}$  и пусть  $\mathfrak{X}$  — левый  $S$ -полигон. Через  $F(\mathfrak{X}, \mathcal{M})$  обозначим множество всех отображений из множества  $\mathfrak{X}$  в множество  $\mathcal{M}$  и для произвольных  $x, y \in \mathfrak{X}$  через  $\mathcal{M}(x, y)$  обозначим множество морфизмов из объекта  $x$  в объект  $y$ . Рассмотрим множество всех пар  $(\alpha, f) \in S \times F(\mathfrak{X}, \mathcal{M})$  таких, что  $f(x) \in \mathcal{M}(x, \alpha x)$  для любого  $x \in \mathfrak{X}$ , т.е.

$$\mathcal{A} = \{(\alpha, f) \mid \alpha \in S, f \in F(\mathfrak{X}, \mathcal{M}), \forall x \in \mathfrak{X} f(x) \in \mathcal{M}(x, \alpha x)\}.$$

На множестве  $\mathcal{A}$  определено умножение следующим образом: для любых  $(\alpha, f), (\beta, g) \in \mathcal{A}$

$$(\alpha, f)(\beta, g) = (\alpha\beta, f_{\beta}g)$$

где  $(f_{\beta}g)(x) = f(\beta x)g(x)$  для любого  $x \in \mathfrak{X}$ . Множество  $\mathcal{A}$  относительно этой операции является моноидом, который называется сплетением моноида  $S$  с категорией  $\mathcal{K}$  и обозначается  $(S \wr \mathcal{K})$ .

Пусть  $\mathcal{F}$  — свободный правый  $S$ -полигон и  $Q$  — произвольный его подполигон. Пусть  $Q = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} Q_j$  разложение полигона  $Q$  на попарно непересекающиеся неразложимые подполигоны. Ясно, что для любого  $j \in \mathcal{J}$  подполигон  $Q_j$ , ввиду его неразложимости, является циклическим подполигоном полигона  $\mathcal{F}$  и, следовательно, имеет вид  $Q_j = qR_j$ , где  $q$  — один из свободных образующих полигона  $\mathcal{F}$ , а  $R_j$  — правый идеал моноида  $S$ . Ясно, что  $qR_j \cong R_j$  если рассматривать правый идеал  $R_j$  как правый  $S$ -полигон.

Построим малую категорию  $\mathcal{K}$  следующим образом. В качестве множества объектов  $Ob \mathcal{K}$  возьмем множество неразложимых циклических подполигонов  $\mathfrak{X} = \{Q_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ , морфизмами в этой категории являются  $S$ -гомоморфизмы соответствующих полигонов.

Определим отображение  $\sigma: End_S Q \rightarrow \mathcal{K}$  такое, что для произвольного  $\varphi \in End_S Q$

$$\pi(\varphi)(Q_j) = Q_k \quad (j, k \in J)$$

в том и только том случае, если  $\varphi(Q_j) \subset Q_k$ . Легко проверить, что  $\pi$  есть гомоморфизм и пусть  $\pi(\text{End}_S Q) = U \in \mathcal{T}_X$ . Теперь нетрудно проверить, что моноид эндоморфизмов  $\text{End}_S Q$  изоморфен сплетению  $(U \text{ wr } X)$ . Соответствующий изоморфизм  $\Phi: \text{End}_S Q \rightarrow (U \text{ wr } X)$  может быть построен так, что для произвольного  $\varphi \in \text{End}_S Q$

$$\Phi(\varphi) = (\pi(\varphi), f),$$

где для произвольного  $j \in J$  морфизм  $f(Q_j)$  есть ограничение эндоморфизма  $\varphi$  на подполигоне  $Q_j$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 3.** Моноид эндоморфизмов произвольного подполигона свободного  $S$ -полигона изоморфен сплетению моноида с категорией неразложимых правых идеалов моноида  $S$ , рассматриваемых как  $S$ -полигоны.

Пусть, как и прежде,  $\mathcal{F}$  — правый свободный  $S$ -полигон. Если рассмотреть различные подполигоны полигона  $\mathcal{F}$  вместе с их эндоморфизмами и гомоморфизмами друг в друга, мы, очевидно, получим некоторую категорию, которая естественно не может быть описана конструкцией сплетения моноидов с категориями. Такие категории однако описываются более общей конструкцией сплетения малых категорий. Вводимая здесь конструкция сплетения малых категорий несколько отличается от конструкции, введенной Ч.Велшем в работе [5]. В отличие от конструкции Велша, она естественно обобщает сплетения моноидов с категориями и, как мы в дальнейшем убедимся, категории эндоморфизмов подполигонов свободного полигона представимы в виде таких сплетений категорий. Опишем конструкцию сплетения малых категорий.

Пусть  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$  — малые категории и  $G: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{B}$  — функтор из категории  $\mathcal{C}$  в категорию подмножеств множества  $\text{Ob } \mathcal{B}$ . Определим новую категорию  $\mathcal{K}$ , объектами которой являются пары  $(c, G(c))$ , где  $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ . Пусть  $(c, G(c)), (d, G(d)) \in \text{Ob } \mathcal{K}$ . Морфизмом  $(f, \lambda): (c, G(c)) \rightarrow (d, G(d))$  в категории  $\mathcal{K}$  считается пара  $(f, \lambda)$ , где  $f: c \rightarrow d$  морфизм в категории  $\mathcal{C}$  и  $\lambda: G(c) \rightarrow \text{Mor } \mathcal{B}$  отображение, обладающее таким свойством, что для любого  $x \in G(c)$

$$\lambda(x) : x \rightarrow G(f)(x)$$

Определим теперь произведение морфизмов в категории  $\mathcal{K}$ . Пусть  $(f, \lambda): (c, G(c)) \rightarrow (d, G(d))$ ,  $(g, \mu): (d, G(d)) \rightarrow (e, G(e))$ , тогда

$$(g, \mu)(f, \lambda) = (gf, \mu G(f) \cdot \lambda)$$

где для любого  $x \in G(c)$

$$(\mu G(f) \cdot \lambda)(x) = \mu(G(f)(x)) \cdot \lambda(x)$$

При этом  $\lambda(x) : x \rightarrow G(f)(x)$ ,  $\mu(G(f)(x)) : G(f)(x) \rightarrow G(g)$ .  
 $(G(f)(x)) = G(gf)(x)$ , т.е.  $(gf, \mu G(f) \cdot \lambda)$  есть действительно морфизм из  $(c, G(c))$  в  $(e, G(e))$ . Нетрудно проверить, что  $\mathcal{K}$  есть действительно категория. Категория  $\mathcal{K}$  называется сплетением категорий  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{B}$  при помощи функтора  $G$  и обозначается  $(\mathcal{C} \wr^G \mathcal{B})$ .

Введенная конструкция сплетения категорий естественным образом обобщает конструкцию сплетения моноидов с категориями. Действительно, пусть  $\mathcal{C}$  — однообъектная категория, т.е. моноид,  $Ob \mathcal{C} = \{c\}$  и пусть  $G(c) = Ob \mathcal{B}$ . В этом случае  $Ob \mathcal{B}$ , очевидно, является левым  $\mathcal{C}$ -полигоном. Легко видеть, что в этом случае сплетение категорий  $(\mathcal{C} \wr^G \mathcal{B})$  изоморфно сплетению  $(\mathcal{C} \wr \mathcal{B})$  моноида  $\mathcal{C}$  с категорией  $\mathcal{B}$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\mathcal{F}$  — свободный правый  $S$ -полигон. Произвольная категория  $\mathcal{X}$  подполигонов полигона  $\mathcal{F}$  представима в виде сплетения категорий  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{B}$ , где  $\mathcal{B}$  — некоторая категория неразложимых правых идеалов моноида  $S$ , рассматриваемых как  $S$ -полигоны.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{X}$  — произвольная категория подполигонов полигона  $\mathcal{F}$ , объекты которой суть подполигоны  $Q_m \in \mathcal{F}$  ( $m \in M$ ), а морфизмы — их  $S$ -гомоморфизмы. Для каждого  $m \in M$  подполигон  $Q_m$  представим в виде  $Q_m = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_m} Q_{mi}$  объединения попарно непересекающихся неразложимых подполигонов, изоморфных правым идеалам моноида  $S$ . Через  $\mathcal{B}$  обозначим категорию, объектами которой являются полигоны  $Q_{mi}$  ( $m \in M, i \in \mathcal{I}_m$ ), а морфизмами — их  $S$ -гомоморфизмы.

Каждому гомоморфизму  $\varphi \in Hom_S(Q_m, Q_k)$  соответствует единственное отображение  $f : \mathcal{I}_m \rightarrow \mathcal{I}_k$  такое, что  $\varphi(Q_{mi}) \subseteq Q_{kf(i)}$  для произвольного  $i \in \mathcal{I}_m$ . Отображение  $f$  назовем индуцированным гомоморфизмом  $\varphi$ . Рассмотрим теперь категорию  $\mathcal{C}$ , объектами которой являются множества  $\mathcal{I}_m$  ( $m \in M$ ), а морфизмами — отображения этих множеств, индуцированные гомоморфизмами соответствующих полигонов из  $\mathcal{X}$ . Пусть  $G : \mathcal{C} \rightarrow Ob \mathcal{B}$  функтор, ставящий для произвольного  $m \in M$  объекту  $\mathcal{I}_m$  в соответствие множество объектов  $\{Q_{mi} | i \in \mathcal{I}_m\} \subseteq Ob \mathcal{B}$ , а отображению  $f : \mathcal{I}_m \rightarrow \mathcal{I}_k$  в соответствие отображение  $G(f)$  такое, что

$$G(f)(Q_{mi}) = Q_{kf(i)}$$

для любого  $i \in \mathcal{I}_m$ . Рассмотрим теперь категорию  $\mathcal{K} = (\mathcal{C} \text{ wr }^G \mathcal{B})$  и построим функтор  $T: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$  следующим образом: для произвольного объекта  $Q_m = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_m} Q_{mi} \in \text{Ob } \mathcal{L}$  положим  $T(Q_m) =$

$(\mathcal{I}_m, G(\mathcal{I}_m))$ , а для произвольного морфизма  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{L}}(Q_m, Q_k)$  в категории  $\mathcal{L}$ , где  $Q_k = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_k} Q_{ki}$  положим

$$T(\varphi) = (f, \lambda) : (\mathcal{I}_m, G(\mathcal{I}_m)) \rightarrow (\mathcal{I}_k, G(\mathcal{I}_k)),$$

где  $f: \mathcal{I}_m \rightarrow \mathcal{I}_k$  отображение, индуцируемое гомоморфизмом  $\varphi$ , и для каждого  $Q_{mi} \in G(\mathcal{I}_m)$

$$\lambda(Q_{mi}) : Q_{mi} \rightarrow G(f)(Q_{mi}) = Q_{kf(i)}$$

есть ограничение гомоморфизма на подполигоне  $Q_{mi}$  ( $i \in \mathcal{I}_m$ ).

Нетрудно проверить, что функтор  $T$  осуществляет изоморфизм категории  $\mathcal{L}$  и сплетения категорий  $(\mathcal{C} \text{ wr }^G \mathcal{B})$ .

## Литература

1. Фляйшер В.Г. О сплетениях моноидов с категориями // Изв. АН ЭССР, 1986. Т. 35. № 3. С. 237-243.
2. Fleischer V., Knauer U. Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories // Lecture Notes. В печати.
3. Fleischer V. Isomorphism of wreath products, I // Semigroup Forum, 1987. V. 35. P. 163-174.
4. Skornjakov L.A. On the wreath product of monoids // Universal Algebra and Applications, Banach Center. 1982. Publ. 9. P. 181-185.
5. Wells C. A Krohn-Rhodes Theorem for Categories // J. Algebra. 1980. V. 64. P. 37-45.

Поступило 30.09.86

## ENDOMORPHISM OF ACTS AND WREATH PRODUCTS

V. Fleischer

### Summary

In the paper the connections between endomorphism monoids of acts and several constructions of wreath products are discussed. A construction of a wreath product of small categories is introduced in a slightly different way as by C.Wells [5]. This construction is a natural generalization of wreath products of monoids with categories [1] and can be used for a representation of an arbitrary category of subacts of a free act.

## ОБЩИЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СВОБОДНЫХ ОБЪЕКТОВ

М.М.Чобан

Тираспольский педагогический институт

Свободные универсальные алгебры [6], универсальные отображение [4] и теорема Фрейда о существовании сопряженных функторов [3] играют фундаментальную роль при построении различных теорий. Понятия свободного и универсального объекта тождественны. В § I данной статьи приведены достаточно общие условия существования универсальных объектов относительно заданных категорий  $T, V$  и морфизмов  $H_{TV}(X, A)$ . Эти условия весьма общи и естественны даже в случае, когда  $V$  является подкатегорией категории  $T$  и  $H_{TV}(X, A) \subseteq H_T(X, A)$ . Теорема Бурбаки ([4], с. 274) о существовании универсальных отображений вытекает из теоремы I.I. При исследовании категории динамик достаточно общие условия существования свободных объектов были независимо сформулированы Д.В.Ботнарчу. Пример 2.3 примыкает к категории динамик, но мы рассматриваем его в другом аспекте.

В § 3 изучаются алгебры с топологиями. Под алгеброй мы понимаем универсальную алгебру заданной сигнатуры. В работе [2] на свободной группе строилась специальная топология, относительно которой свободная группа обладала свойствами, близкими к свободной полутопологической группе. Результаты этого параграфа показывают, что теорема I.I применима и в этом случае. В § 5 и § 6 обсуждаются две проблемы А.И.Мальцева [7] о свободных топологических алгебрах. Свойства свободных топологических алгебр исследовались в работах [5, 9, 11, 15, 16]. В § 7 изучаются геометрические вопросы теории многообразий топологических алгебр. Случай топологических групп достаточно хорошо изучен (см. [1]), но для ряда других конкретных многообразий алгебр ответы на многие вопросы пока неизвестны.

В работе используется терминология из книг [6, 3, 12].

Рассмотрим категории  $T, V$  и подкатегорию  $W$  категории  $V$ , для которых выполняются условия:

1<sup>0</sup>  $W$  является категорией с любыми произведениями.

2<sup>0</sup> Для каждого объекта  $A \in V$  определяется система под-объектов  $S(A) \subset V$ , которая частично упорядочена по включению и для любого  $B \in S(A)$  определяется морфизм вложения  $i_B \in N_V(B, A)$ .

3<sup>0</sup> Для любой пары объектов  $A \in T$  и  $B \in V$  задано множество морфизмов  $N_{TV}(A, B)$  такое, что:

3.1. Если  $C \in T$ ,  $u \in N_T(A, C)$  и  $v \in N_{TV}(C, B)$ , то  $v \cdot u \in N_{TV}(A, B)$ . При  $A = C$  и  $u = I_A$  имеем  $v \cdot u = v$ .

3.2. Если  $C \in V$ ,  $u \in N_{TV}(A, B)$  и  $v \in N_V(B, C)$ , то  $v \cdot u \in N_{TV}(A, C)$ . При  $B = C$  и  $v = I_B$  имеем  $v \cdot u = u$ .

4<sup>0</sup>. Для любых  $A \in T$ ,  $\{B_\alpha : \alpha \in L\} \subset W$  и множества морфизмов  $\{u_\alpha \in N_{TV}(A, B_\alpha) : \alpha \in L\}$  определяется произведение  $u = \prod \{u_\alpha : \alpha \in L\} \in N_{TV}(A, \prod \{B_\alpha : \alpha \in L\})$ , где  $u_\alpha = \pi_\alpha \cdot u$  и  $\pi_\alpha : \prod \{B_\alpha : \alpha \in L\} \rightarrow B_\alpha$  - каноническая проекция для всех  $\alpha \in L$ .

5<sup>0</sup>. Для любых  $A \in T$ ,  $B \in W$  и  $u \in N_{TV}(A, B)$  определяются единственные подобъекты  $Au \in S(B)$  и морфизм  $\bar{u} \in N_{TV}(A, Au)$ , для которых

5.1.  $i_{Au} \cdot \bar{u} = u$  и  $Au = A\bar{u}$ .

5.2. Если  $C \in S(B)$ ,  $v \in N_{TV}(A, C)$  и  $u = i_C \cdot v$ , то  $Au \leq C$ .

5.3. Если  $C \in V$ ,  $u, w \in N_V(Au, C)$  и  $v \cdot \bar{u} = w \cdot \bar{u}$ , то  $v = w$ .

6<sup>0</sup>. Для любого объекта  $A \in V$  найдется такое множество объектов  $V(A) \subset W$ , что для любых  $B \in V$  и  $u \in N_{TV}(A, B)$  существуют объект  $C \in V(A)$  и морфизмы  $v \in N_{TV}(A, C)$  и  $w \in N_V(C, B)$  такие, что  $u = w \cdot v$ .

Определение. Объект  $A \in T$  называется непустым, если  $U_{N_{TV}(A, B) : B \in V} \neq \emptyset$ .

Определение. Пусть  $A \in T$ . Пара  $(F(A, TV), e_A)$  называется универсальным объектом в  $V$  объекта  $A$ , если  $F(A, T) \in V$ ,  $e_A \in N_{TV}(A, F(A, TV))$ ,  $F(A, TV) = Ae_A$  и для любых  $B \in V$  и  $u \in N_{TV}(A, B)$  существует единственный морфизм  $\hat{u} \in N_V(F(A, T), B)$  такой, что  $u = \hat{u} \cdot e_A$ . Морфизм  $e_A$  называется универсальным морфизмом объекта  $A$ .

Теорема I.1. Пусть объект  $A \in T$  непуст. Тогда универсальный объект  $(F(A, TV), e_A)$  существует и единственен с точностью до изоморфизма.

Доказательство. Рассмотрим множество изоморфизмов  $\{\psi_\alpha : A \rightarrow B_\alpha : \alpha \in L\} = U\{N_{TV}(A, B) : B \in V(A)\}$ . Положим  $u = \prod \{\psi_\alpha\} : A \rightarrow B = \prod \{B_\alpha : \alpha \in L\}$ ,  $F(A, TV) = Au$  и  $e_A = \bar{u} : A \rightarrow F(A, TV) \cong \leq B$ , где  $u = \sum_{\alpha \in L} \psi_\alpha \cdot e_A$ . Покажем, что  $(F(A, TV), e_A)$  является универсальным объектом в  $V$  объекта  $A$ . Во-первых,  $e_A = F(A, TV)$ . Если  $C \in V$  и  $w \in N_{TV}(A, C)$ , то существует элемент  $\alpha \in L$  и морфизм  $h \in N_V(B_\alpha, C)$ , для которых  $w = h \cdot v_\alpha$ . Тогда  $\hat{w} = h \cdot \psi_\alpha \cdot e_A = h \cdot \psi_\alpha \cdot e_A$ , где  $\psi_\alpha : B \rightarrow B_\alpha$  — каноническая проекция, является морфизмом категории  $V$  и  $w = \hat{w} \cdot e_A$ . Единственность морфизма  $\hat{w}$  вытекает из условия 5.3. Существование универсального объекта доказано. Допустим, что и  $(\Phi, p)$  является универсальным объектом в  $V$  объекта  $A$ . В  $V$  существуют единственные морфизмы  $g : F(A, TV) \rightarrow \Phi$  и  $h : \Phi \rightarrow F(A, TV)$ , для которых  $p = g \cdot e_A$  и  $e_A = h \cdot p$ . Ясно, что  $\Phi = F(A, TV)g$  и  $\Phi h = F(A, TV)$ . Положим  $\lambda = h \cdot g : F(A, TV) \rightarrow F(A, TV)$ . Тогда  $\lambda \cdot e_A = e_A$ . Для морфизма  $e_A$  существует единственный морфизм  $l_{F(A, TV)} : F(A, TV) \rightarrow F(A, TV)$ , для которого  $l_{F(A, TV)} \cdot e_A = e_A$ . Следовательно,  $h \cdot g = \lambda = l_{F(A, TV)}$ . Аналогично доказывается, что  $g \cdot h = l_\Phi$ . Таким образом  $g$  и  $h$  являются взаимно обратными изоморфизмами в категории  $V$ . Единственность универсального объекта установлена.

Теорема 1.2. Пусть  $A, B \in T$ , объект  $B$  непуст и  $u \in N_T(A, B)$ . Тогда объект  $A$  непуст и существует единственный морфизм  $\hat{u} \in N_V(F(A, TV), F(B, TV))$ , для которого  $\hat{u} \cdot e_A = e_B \cdot u$ . В частности, функтор  $F : T \rightarrow V$ , где  $F(A) = F(A, TV)$ , ковариантен.

Доказательство. Для морфизма  $v = e_B \cdot u : A \rightarrow F(B, TV)$  существует единственный морфизм  $\hat{u} = \hat{v} : F(A, TV) \rightarrow F(B, TV)$ , для которого  $\hat{u} \cdot e_A = e_B \cdot u$ .

Замечание. Условие 6° позволяет обобщить теорему Фрейда ([3], с. 70) на любые категории.

Замечание. В следующих параграфах будем считать, что  $V = W$ .

## § 2. Элементарные примеры

Простые примеры универсальных объектов приведены в книге Н. Бурбаки ([4], с. 276–279). Некоторые из них являются частными случаями следующего примера.

Пример 2.1. Пусть  $T$  — категория всех непустых тихонов-

ских пространств, а  $\mathcal{E}$  - подкатегория категории  $\mathcal{T}$  такая, что  $[0, I] \in \mathcal{E}$ ,  $N_{T\mathcal{E}}(X, Y) = N_T(X, Y)$ ,  $N_{\mathcal{E}}(Y, B) = N_T(Y, B)$  и класс  $\mathcal{E}$  замкнут относительно тихоновских произведений и операции взятия замкнутых подпространств. Если  $X$  всюду плотно в  $U \in \mathcal{E}$ , то  $U$  называется  $\mathcal{E}$ -компактификацией в смысле Мрувки и Энгелькинга [I4] пространства  $X$ . Категории  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{E}$  удовлетворяют условиям  $I^0 - 6^0$ , а  $F(X, T\mathcal{E})$  совпадает с максимальной  $\mathcal{E}$ -компактификацией пространства  $X \in \mathcal{T}$ . Когда  $\mathcal{E}$  состоит из всех компактных  $T_2$ -пространств, имеем  $F(X, T\mathcal{E}) = \beta X$ . Если  $\mathcal{E}$  состоит из всех полных по Хьюитту пространств, то  $F(X, T\mathcal{E})$  совпадает с хьюиттовым пополнением  $\check{X}$  пространства  $X$ .

Пример 2.2. Пусть  $\mathcal{T}$  - категория тихоновских пространств,  $\mathcal{P}$  - категория всех полных отделимых равномерных пространств и  $N_{TP}(X, Y)$  состоит из всех непрерывных отображений пространств  $X$  и  $Y$ . Тогда для каждого объекта  $X \in \mathcal{T}$  универсальный объект  $F(X, TP)$  совпадает с расширением Дьедонне пространства  $X$ .

Пример 2.3. Пусть класс тихоновских пространств  $\mathcal{P}$  замкнут относительно тихоновских произведений и операции взятия замкнутых подпространств и  $\mathcal{T}$  состоит из всех троек  $(X, Y, p)$ , где  $p: X \rightarrow Y$  - непрерывное отображение произвольного тихоновского пространства  $X$  на  $Y \in \mathcal{P}$ . Морфизмом  $c \in N_T((X, Y, p), (A, B, k))$  называется пара непрерывных отображений  $a: X \rightarrow A$  и  $b: Y \rightarrow B$ , для которых  $b \cdot p = k \cdot a$ . Положим  $\mathcal{C} = \{(X, Y, p): p \text{ - совершенное отображение}\}$ , а морфизмы в  $\mathcal{C}$  таковы, как в  $\mathcal{T}$ . Объект  $(A, B, k)$  называется подобъектом объекта  $(X, Y, p)$ , если множество  $B$  замкнуто в  $Y$ ,  $A \subseteq X$ ,  $B = p(A)$  и  $k = p|_A$ . В категории  $\mathcal{C}$  множество  $A$  замкнуто в  $X$ , если  $(A, B, k)$  является подобъектом  $(X, Y, p)$ . Класс непрерывных отображений замкнут относительно тихоновских произведений отображений ([I2], с. 130). Легко проверить, что категории  $\mathcal{T}, \mathcal{C}$  удовлетворяют условиям  $I^0 - 6^0$ . Поэтому для каждого объекта  $(X, Y, p) \in \mathcal{T}$  существует единственный универсальный объект  $(\tilde{X}, Y, \tilde{p}) \in \mathcal{C}$ , где пространство  $X$  всюду плотно в  $\tilde{X}$  и  $p = \tilde{p}|_X$ . Отображение  $\tilde{p}: \tilde{X} \rightarrow Y$  является максимальной компактификацией отображения  $p: X \rightarrow Y$ . Если пространство  $Y$  одноточечно, то  $\tilde{X} = \beta X$ .

Пример 2.4. Рассмотрим дизъюнктное объединение  $E = \cup \{E_n: n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}\}$ . Множество  $E$  называется сигнаурой.  $E$ -алгеброй называется непустое множество  $A$  и семейство

отображений  $\{v_{nA}: E_n \times A^n \rightarrow A: n \in \mathbb{N}\}$ . Отображения  $v_{nA}$  составляют алгебраическую структуру на  $A$ . Через  $K$  обозначим класс  $E$ -алгебр, который замкнут относительно декартовых произведений и операции взятия подалгебр. Такие классы алгебр будем называть квазимногообразиями. Если класс  $K$  замкнут и относительно операции взятия гомоморфных образов, то  $K$  называется многообразием. В  $K$  в качестве морфизмов берутся все гомоморфизмы. Пусть  $T$  - категория всех непустых множеств и  $H_{TK}(X, A) = H_T(X, A)$ . Общеизвестно, что категории  $T, K$  удовлетворяют условиям  $I^0 - 6^0$  (см. [6, I]). Для каждого объекта  $X \in T$  универсальный объект  $F(X, TK) = F(X, K)$  совпадает со свободной алгеброй в  $K$  множества  $X$ . Если класс  $K$  абстрактно нетривиален, то есть в  $K$  существует неоднородная алгебра, то, отождествляя  $e_X(x) = x$ , получим, что  $X \subset F(X, K)$ .

### § 3. Алгебры с топологиями

Пусть  $\{E_n: n \in \mathbb{N}\}$  являются топологическими пространствами, то есть сигнатура  $E = \bigoplus \{E_n: n \in \mathbb{N}\}$  непрерывна. Через  $P(B)$  обозначим совокупность всех подмножеств множества  $B$ . Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  функция  $v_{nA}: E_n \times A^n \rightarrow A$  зависит от  $n+1$  переменных с индексами  $N_n = \{0, 1, \dots, n\}$ . Будем считать, что заданы отображения  $\Phi = \{\varphi_n: P(E_n) \rightarrow P(N_n): n \in \mathbb{N}\}$ , где  $\varphi_n(X) \supseteq \varphi_n(Y)$  при  $X \subset Y \subset E_n$ .  $E$ -алгебра  $A$  с топологией называется  $\Phi$ -полутопологической, если для любых  $n \in \mathbb{N}$  и  $P \subset E_n$  отображение  $v_{nA}: P \times A^n$  непрерывно по совокупности переменных из  $\varphi_n(P)$ . Если  $\varphi_0(E_0) = \{\{0\}\}$  и  $\varphi_n(E_n) = \{\{0, 1\}, \dots, \{0, n\}\}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , то  $\Phi$ -полутопологическая алгебра называется полутопологической. При  $\varphi_n(E_n) = N_n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  понятие  $\Phi$ -полутопологической алгебры совпадает с понятием топологической алгебры.

Класс  $\Phi$ -полутопологических алгебр замкнут относительно тихоновских произведений и операции взятия подалгебр.

Каждая топология считается  $T_1$ -топологией.

**Определения.** Класс  $K$   $\Phi$ -полутопологических  $E$ -алгебр называется

**нетривиальным**, если в  $K$  существует неодноточечная алгебра с топологией, отличной от антидискретной;

**квазимногообразием**, если класс  $K$  замкнут относительно операций взятия подалгебр и тихоновских произведений;

топологическим квазимногообразием, если класс  $K$  замкнут относительно операций взятия замкнутых подалгебр и тихоновских произведений;

$T_p$ -полным, где  $p \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 3, 5\}$ , если класс  $K$  замкнут относительно взятия изоморфных образов в классе всех  $\Phi$ -полутопологических алгебр, удовлетворяющих аксиоме отделимости  $T_p$ ;

$T_p$ -многообразием, если  $K$  является квазимногообразием и  $K$  замкнут относительно взятия непрерывных гомоморфных образов в классе всех  $\Phi$ -полутопологических алгебр, удовлетворяющих аксиоме отделимости  $T_p$ ;

топологическим  $T_p$ -многообразием, если  $K$  является топологическим квазимногообразием и  $K$  замкнут относительно взятия непрерывных гомоморфных образов в классе всех  $\Phi$ -полутопологических алгебр, удовлетворяющих аксиоме отделимости  $T_p$ .

В квазимногообразии  $K$  для  $A \in K$  система  $S(A)$  состоит из всех подалгебр алгебры  $A$ , а в топологическом квазимногообразии  $K$  система  $S(A)$  состоит из всех замкнутых подалгебр алгебры  $A \in K$ .

Фиксируем квазимногообразие  $K$   $\Phi$ -полутопологических  $E$ -алгебр и множество тождеств  $J = \{g_\alpha = h_\alpha : \alpha \in L\}$ . Пусть  $Ta = T$  - категория всех топологических пространств. Для любых  $X \in T$  и  $A \in K$  положим  $N_{TaK}(X, A) = \{a: X \rightarrow A: g_\alpha(a(x_1), \dots, a(x_n)) = h_\alpha(a(x_1), \dots, a(x_n)), \alpha \in L, x_1, \dots, x_n \in X, N_{TK}(X, A) = \{\varphi \in N_{TaK}(X, A) : \text{отображение } \varphi \text{ непрерывно}\}$ . Пары категорий  $Ta, K$  и  $T, K$  удовлетворяют условиям  $I^0 - 6^0$ . Поэтому для любого непустого пространства  $X$  относительно категорий  $Ta, K$  определяется универсальный объект  $(F_J^a(X, K), a_X)$ , относительно категорий  $T, K$  определяется универсальный объект  $(F_J(X, K), e_X)$  и существует непрерывный гомоморфизм  $p_X: F_J^a(X, K) \xrightarrow{h_a} F_J(X, K)$ , для которого  $e_X = p_X \cdot a_X$ . Объект  $F_J^a(X, K)$  называется абстрактно свободной алгеброй пространства  $X$  в классе  $K$  с определяющими соотношениями  $J$ , а  $F_J(X, K)$  - свободной  $\Phi$ -полутопологической алгеброй пространства  $X$  в классе  $K$  с определяющими соотношениями  $J$ . Если  $J = \emptyset$ , то  $F^a(X, K) = F_J^a(X, K)$  и  $F(X, K) = F_J(X, K)$  совпадают с обычными свободными алгебрами пространства  $X$  в классе  $K$ .

Замечание. Если класс  $K$  является  $T_p$ -полным или  $T_p$ -многообразием, то все объекты из  $K$  являются  $T_p$ -пространст-

вами.

**Теорема 3.1.** Пусть квазимногообразие  $K$   $\Phi$ -полутопологических  $E$ -алгебр  $T_p$ -полно для некоторого  $p$ . Тогда

1. Каждый объект  $A \in K$  топологически изоморфно вложим в некоторый линейно связанный локально линейно связанный объект  $\tilde{A} \in K$ . При этом для пространств  $A$  и  $\tilde{A}$  равны веса, плотности и равномерные веса.

2. Для каждого тихоновского пространства  $X$  алгебра  $F_J(X, K)$  абстрактно свободна, то есть  $p_X: F_J^a(X, K) \rightarrow F(X, K)$  является непрерывным изоморфизмом, где  $J$  - заданное множество определяющих соотношений.

3. Если  $p \geq 3$  и сигнатура  $E$  дискретна, то для каждого объекта  $X \in K$  существует паракомпактная совершенно нормальная  $\mathfrak{S}$ -дискретная алгебра  $B \in K$  и гомоморфизм  $\mathfrak{h}: B \xrightarrow{\text{на}} X$ , являющийся факторным отображением. Если  $X$  удовлетворяет первой аксиоме счетности, то пространство  $B$  метризуемо.

**Доказательство.** Утверждения теоремы 3.1 доказываются, как и аналогичные утверждения из работ [5, II].

**Теорема 3.2.** Пусть  $p \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 3, 5\}$ ,  $K$  -  $T_p$ -полное квазимногообразие  $\Phi$ -полутопологических  $E$ -алгебр,  $J$  - заданное множество определяющих соотношений. Если существуют объект  $A \in K$  и неодноточечное  $T_1$ -подпространство  $U = \{a, v\} \subset A$ , для которых  $q_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \mathfrak{h}_\alpha(x_1, \dots, x_n)$  для всех  $x_1, \dots, x_n \in U$  и  $\alpha \in L$ , то отображение  $e_X: X \rightarrow F_J(X, K)$  является топологическим вложением для любого тихоновского пространства  $X$ .

**Доказательство.** При построении линейно связанного объекта  $B \in K$  (см. [5, II]), для которого  $A \in B$ , строится такое множество  $N \subset B$ , что  $U \subset N$ , множество  $N$  гомеоморфно отрезку и  $q_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \mathfrak{h}_\alpha(x_1, \dots, x_n)$  для всех  $x_1, \dots, x_n \in N$  и  $\alpha \in L$ . Поэтому  $e_X$  является топологическим вложением для любого тихоновского пространства  $X$ .

**Пример 3.3.** Пусть  $A$  - линейно связная бесконечная абелева группа,  $B$  - нульмерная неабелева группа и  $K$  - квазимногообразие топологических групп, порожденное группами  $A$  и  $B$ . Тогда

1. Для любого тихоновского пространства  $X$  отображение  $e_X: X \rightarrow F(X, K)$  является вложением.

2. Для любого неодноточечного пространства  $X$  группа  $F^a(X, K)$  неабелева.

3. Топологическая группа  $F(X, K)$  абелева тогда и

только тогда, когда пространство  $X$  связано.

**Пример 3.4.** Пусть  $A$  - компактная связная бесконечная абелева группа,  $B$  - нульмерная компактная неабелева группа и  $K$  - многообразие отделимых топологических групп, порожденное группами  $A$  и  $B$ . Тогда

1. Для любого тихоновского пространства  $X$  отображение  $e_X: X \rightarrow F(X, K)$  является вложением.

2. Для любого неединичного пространства  $X$  группа  $F^a(X, K)$  неабелева.

3. Топологическая группа  $F([0, 1], K)$  абелева и, в частности, абстрактно несвободна.

Поэтому требование полноты квазимногообразия  $K$  в условиях теоремы 3.1 существенно.

Рассмотрим класс  $K$   $\Phi$ -полутопологических  $E$ -алгебр. Множество  $X \subset A$  топологически порождает алгебру  $A \in K$ , если для любой собственной замкнутой подалгебры  $B$  алгебры  $A$  имеем  $X \setminus B \neq \emptyset$ . Пара  $(F(X, K), e_X)$ , где  $F(X, K) \in K$  и  $e_X: X \rightarrow F(X, K)$  - непрерывное отображение, называется  $t$ -свободной топологической алгеброй пространства  $X$ , если множество  $e_X(X)$  топологически порождает алгебру  $F(X, K)$  и для каждого непрерывного отображения  $\psi: X \rightarrow A$ , где  $A \in K$ , существует такой непрерывный гомоморфизм  $\hat{\psi}: F(X, K) \rightarrow A$ , что  $\psi = \hat{\psi} \cdot e_X$ . Если  $e_X(X)$  алгебраически порождает  $F(X, K)$ , то  $F(X, K)$  называется свободной топологической алгеброй пространства  $X$  в  $K$ . В топологических  $T_p$ -многообразиях  $\Phi$ -полутопологических  $E$ -алгебр  $t$ -свободные и свободные объекты не всегда существуют. Кроме того, в топологических  $T_p$ -многообразиях, где  $p = 1$ , топологических  $E$ -алгебр свободные и  $t$ -свободные объекты не всегда существуют.

Пусть  $K$  - топологическое квазимногообразие отделимых топологических  $E$ -алгебр, а  $T$  - категория топологических пространств. Тогда категории  $T$  и  $K$  удовлетворяют условиям  $I^0 - 6^0$ , поскольку для каждого множества  $X$  существует кардинальное число  $\tau \leq \exp(\exp(\exp(|X| + \aleph_0 + |E|)))$  такое, что для любой алгебры  $A \in K$  и  $X \subset A$  в  $A$  существует замкнутая подалгебра  $B$  такая, что  $|B| \leq \tau$  и  $X \subset B$ . Поэтому для каждого пространства  $X$   $t$ -свободная топологическая алгебра  $F(X, K)$  существует и единственна.

**Пример 3.5.** Пусть  $K$  - топологическое  $T_2$ -многообразие всех компактных абелевых групп. В этом случае для любого тихоновского пространства  $X$  отображение  $e_X: X \rightarrow F(X, K)$  является вложением, множество  $e_X(X)$  алгебраически не по-

рождает  $F(X, K)$ , в то время как множество  $e_X(X)$  алгебраически порождает в  $F(X, K)$  группу, изоморфную абстрактно свободной абелевой группе множества  $X$ .

**Теорема 3.6.** Пусть все  $\Phi$ -полутопологические  $E$ -алгебры из класса  $K$  являются  $T_p$ -пространствами, где  $p \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 3,5\}$ , и класс  $K$  замкнут относительно взятия непрерывных гомоморфных образов в классе всех  $\Phi$ -полутопологических алгебр, являющихся  $T_p$ -пространствами. Тогда

1. Если для любого дискретного пространства  $X$  в  $K$  существует  $t$ -свободная топологическая алгебра  $F(X, K)$ , то  $K$  является топологическим  $T_p$ -многообразием.

2. Если для любого дискретного пространства  $X$  в  $K$  существует свободная алгебра  $F(X, K)$ , то  $K$  является  $T_p$ -многообразием.

**Доказательство.** Рассмотрим множество  $\{A_\alpha : \alpha \in L\} \subset K$ . Тогда  $A = \Pi\{A_\alpha : \alpha \in L\}$  является  $\Phi$ -полутопологической  $E$ -алгеброй. Через  $X$  обозначим множество  $A$  с дискретной топологией. Пусть  $\pi_\alpha : X \rightarrow A_\alpha$  - каноническая проекция. Тогда для каждого  $\alpha \in L$  найдется непрерывный гомоморфизм  $\hat{\pi}_\alpha : F(X, K) \rightarrow A_\alpha$ , где  $\hat{\pi}_\alpha(x) = \hat{\pi}_\alpha(e_X(x))$  для всех  $x \in X$ . Поэтому существует непрерывный гомоморфизм  $\bar{\pi} : F(X, K) \xrightarrow{\text{на}} \Pi\{A_\alpha : \alpha \in L\} = A$ , то есть  $A \in K$  как непрерывный гомоморфный образ алгебры  $F(X, K)$ .

Пусть  $B$  является подалгеброй алгебры  $A \in K$ . Через  $Y$  обозначим множество  $B$  с дискретной топологией. Тогда существует непрерывный гомоморфизм  $\alpha : F(Y, K) \rightarrow A$ , где  $\alpha(e_Y(y)) = y$  для всех  $y \in Y = B$ . Если множество  $B$  замкнуто в  $A$ , то  $\alpha(F(Y, K)) = B$ . Если  $e_Y(Y)$  алгебраически порождает  $F(Y, K)$ , то  $\alpha(F(Y, K)) = B$ . Поэтому в условиях утверждения 1 класс  $K$  является топологическим  $T_p$ -многообразием, а в условиях утверждения 2 класс  $K$  является  $T_p$ -многообразием.

#### § 4. Исследование условий существования свободных объектов

**Пример 4.1.** Фиксируем нетривиальное квазимногообразие  $V$  топологических  $E$ -алгебр. Пусть  $T$  - категория всех топологических пространств и  $K = \{F(X, V) : X \in T\}$ . Для любого пространства  $X \in T$  имеем  $F(X, K) = F(X, V)$ . Если  $V \neq K$ , то класс  $K$  не замкнут относительно операции взятия непрерывных гомоморфных образов из класса  $V$ . Не всегда класс  $K$  замкнут относительно операции взятия подалгебр. Условие  $I^0$  тоже

не всегда выполняется. Примером может служить многообразие всех отделимых топологических групп. Условия  $2^0$ ,  $3^0$  и  $6^0$  для категорий  $T$  и  $K$  всегда выполняются.

**Пример 4.2.** Пусть  $T$  - категория всех тихоновских пространств. Фиксируем непустое пространство  $Z$ , которое не экстремально несвязно. Через  $K$  обозначим совокупность всех пар  $(X, \varphi)$ , где  $X \in T$  и  $\varphi: X \rightarrow Z$  - совершенное неприводимое отображение на  $Z$ . Под морфизмом  $\mu \in N_K((X, \varphi), (Y, \psi))$  подразумеваем такое непрерывное отображение  $\mu: X \rightarrow Y$ , что  $\psi = \psi \cdot \mu$ . Положим  $N_{TK}(X, (Y, \psi)) = N_T(X, Y)$ . Если  $N_K((X, \varphi), (Y, \psi)) \neq \emptyset$ , то будем считать, что  $(X, \varphi) \geq (Y, \psi)$ . Тогда  $K$  является полной решеткой,  $(Z, I_Z)$  - минимальным объектом в  $K$ , а абсолют  $(\tilde{Z}, \pi)$  пространства  $Z$  с проекцией  $\pi: \tilde{Z} \rightarrow Z$  - максимальным объектом в  $K$ . Для любого непустого множества объектов  $\{(X_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in L\}$  определяется их "произведение"  $\Pi\{(X_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in L\} = \bigvee\{(X_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in L\}$ . Пусть  $S((X, \varphi)) = \{(X, \varphi)\}$ . Категории  $T$  и  $K$  удовлетворяют условиям  $1^0 - 3^0$  и  $5^0 - 6^0$ , но не удовлетворяют условию  $4^0$ . Для любого  $X \in T$  универсальный объект в  $K$  не существует.

## § 5. Проблема вложения

Пусть категории  $T$ ,  $V$  и  $\mathcal{W}$  удовлетворяют условиям  $1^0 - 6^0$  и  $V$  является подкатегорией категории  $T$ .

**Вопрос 5.1.** При каких условиях морфизм  $e_X: X \rightarrow F(X, TV)$  является мономорфизмом категории  $T$ ?

**Предложение 5.2.** Для непустого объекта  $X \in T$  следующие утверждения равносильны:

1. Морфизм  $e_X$  является мономорфизмом категории  $T$ .
2. Существуют объект  $A \in V$  и мономорфизм  $\mu \in N_{TV}(X, A)$ .

**Доказательство.** Вытекает непосредственно из определения универсального объекта.

Проблема о вложении 5.1 для случая полных  $T_2$ -многообразии топологических алгебр была поставлена А.И. Мальцевым [7]. В случае дискретной сигнатуры проблема 5.1 решена Сверчковским [15], а для непрерывной сигнатуры - в работах [5, II]. Теорема 3.2 дает исчерпывающий ответ на вопрос А.И. Мальцева.

## § 6. Проблема изоморфизма

Рассмотрим категории  $T$ ,  $Ta$ ,  $V$  и  $\mathcal{W}$ , для которых

1. категории  $T$  и  $V$  удовлетворяют условиям  $I^0 - 6^0$ ,
2. категории  $Ta$  и  $V$  удовлетворяют условиям  $I^0 - 6^0$ ,
3. для любых  $X, Y \in T$  и  $A \in V$  имеем  $X, Y \in Ta, N_T(X, Y) \subseteq N_{Ta}(X, Y)$  и  $N_{TV}(X, A) \subseteq N_{Ta}(X, A)$ .

Тогда для каждого  $X \in T$  определяются универсальные объекты  $(F(X, TV), e_X)$  и  $(F(X, TaV), a_X)$  и единственный морфизм  $p_X \in N_V(F(X, TaV), F(X, TV))$ , для которого  $e_X = p_X \cdot a_X$ .

**Вопрос 6.1.** При каких условиях  $p_X$  является биморфизмом категории  $V$ ?

Решение этого вопроса зависит от конкретных свойств заданных категорий.

**Пример 6.2.** Пусть  $T = Ta = V$  - категория всех тихонских пространств, для любого  $A \in V$  множество подобъектов  $S(A)$  состоит из всех замкнутых подпространств пространства  $A$ ,  $N_{TaV}(X, A) = N_T(X, A)$  и  $N_{TV}(X, A) = \{\varphi \in N_T(X, A) : \text{множество } [\xi X] \text{ компактно}\}$ . Тогда  $F(X, TaV) = X$  и  $p_X = F(X, TV)$  для любого пространства  $X \in T$ . Поэтому для любого некомпактного пространства  $X \in T$  отображение  $p_X : F(X, TaV) \rightarrow F(X, TV)$  не является биморфизмом. Отображения  $e_X, a_X$  и  $p_X$  являются вложениями для всех  $X \in T$ .

В случае  $T_2$ -полных многообразий топологических алгебр вопрос 6.1 был сформулирован А.И. Мальцевым [7]. Случай дискретной сигнатуры был рассмотрен Сверчковским [15], а случай непрерывной сигнатуры - в работах [5, II]. Теорема 3.1 дает исчерпывающий ответ для полных квазимногообразий  $\Phi$ -полутопологических алгебр.

## § 7. Геометрические проблемы теории универсальных объектов

Фиксируем непрерывную сигнатуру  $E$  и  $D \subseteq E$ . Тогда каждая  $\Phi$ -полутопологическая  $E$ -алгебра является  $\Phi$ -полутопологической  $D$ -алгеброй. Пусть  $p \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 5\}$  и  $K$  -  $T_p$ -полное квазимногообразие  $\Phi$ -полутопологических  $E$ -алгебр. Через  $K_1$  обозначим все  $D$ -подалгебры алгебр из  $K$ , а  $K_2$  есть  $T_p$ -полное квазимногообразие  $\Phi$ -полутопологических  $D$ -алгебр, порожденное классом  $K_1$ . Ясно, что  $K_1$  является квазимногообразием. Для каждого пространства  $X$  определяются свобод-

ные  $\Phi$ -полутопологические алгебры  $(F(X, K), e_X), (F(X, K_1), i_X), (F(X, K_2), j_X)$  в классах  $K, K_1, K_2$  соответственно и непрерывные отображения  $a_X: F(X, K_2) \rightarrow F(X, K_1)$  и  $v_X: F(X, K_1) \rightarrow F(X, K)$ , для которых  $i_X = a_X \cdot j_X$  и  $e_X = v_X \cdot i_X$ . Всегда  $v_X$  является топологическим изоморфизмом  $D$ -алгебры  $F(X, K_1)$  в  $D$ -алгебру  $F(X, K)$ , а  $a_X$  является гомоморфизмом  $D$ -алгебры  $F(X, K_2)$  на  $F(X, K_1)$ . Для любого тихоновского пространства  $X$  отображение  $a_X$  является непрерывным изоморфизмом.

Вопрос 7.1. Пусть  $X$  и  $Y$  - тихоновские пространства. Как связаны между собой условия

1.  $E$ -алгебры  $F(X, K)$  и  $F(Y, K)$  топологически изоморфны;
2.  $D$ -алгебры  $F(X, K_1)$  и  $F(Y, K_1)$  топологически изоморфны;
3.  $D$ -алгебры  $F(X, K_2)$  и  $F(Y, K_2)$  топологически изоморфны;
4.  $D$ -алгебры  $F(X, K)$  и  $F(Y, K)$  топологически изоморфны.

Пример 7.2. Пусть  $K$  - многообразие всех отделимых топологических групп,  $E$  - сигнатура групп и  $D = \emptyset$ . Тогда  $K_1 = K_2$  состоит из всех тихоновских пространств и  $F(X, K_1) = F(X, K_2) = X$  для любого тихоновского пространства  $X$ . Поскольку из изоморфизма свободных топологических групп  $F(X, K)$  и  $F(Y, K)$  не всегда вытекает гомеоморфизм тихоновских пространств  $X$  и  $Y$  (см. [1]), то импликации  $1 \rightarrow 2$  и  $1 \rightarrow 3$  не всегда верны. Из гомеоморфизма топологических групп  $F(X, K)$  и  $F(Y, K)$  не всегда вытекает их топологический изоморфизм. Поэтому и импликация  $4 \rightarrow 1$  не всегда верна.

Теорема 7.3. Импликации  $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$  всегда верны.

Доказательство. Импликация  $1 \rightarrow 4$  очевидна. Пусть  $T = \{ F(X, K_1) : X - \text{тиховское пространство} \}$  - подкатегория категории  $K_1$  и  $N_{TK}(A, B) = N_{K_1}(A, B)$  для любых  $A \in T$  и  $B \in K$ . Тогда для  $T$  и  $K$  выполняются условия  $I^0 - B^0$ . Равенство  $F(F(X, K_1), TK) = F(X, K)$  влечет справедливость импликации  $2 \rightarrow 1$ . Импликация  $3 \rightarrow 2$  вытекает из следующей теоремы.

Теорема 7.4. Пусть  $\omega$  и  $\omega'$  - квазимногообразия  $\Phi$ -полутопологических  $E$ -алгебр и  $\omega \subset \omega'$ . Если для пространств  $X$  и  $Y$  свободные алгебры  $F(X, \omega)$ ,  $F(Y, \omega')$  топологически изоморфны, то топологически изоморфны алгебры  $F(X, \omega)$  и  $F(Y, \omega)$ .

Доказательство. Положим  $T = \mathcal{W}'$  и  $H_{T\mathcal{W}}(A, B) = H_T(A, B)$ . Тогда  $F(F(X, \mathcal{W}'), T\mathcal{W}') = F(X, \mathcal{W}')$  и доказательство завершено.

Теоремы 7.3 и 7.4 дают частичный ответ на задачу В.И. Арнаутова 2.24 из [8].

Фиксируем элемент  $A \in K$ . Через  $\mathcal{V}$  обозначим квазимногообразие  $\Phi$ -полутопологических  $E$ -алгебр, порожденное  $E$ -алгеброй  $A$ . Пространства  $X$  и  $Y$   $A$ -эквивалентны и обозначим  $X \stackrel{A}{\sim} Y$ , если топологически изоморфны  $E$ -алгебры  $C(X, A)$  и  $C(Y, A)$  непрерывных отображений в топологии поточечной сходимости. Пространства  $X$  и  $Y$   $D$ -эквивалентны и обозначим  $X \stackrel{D}{\sim} Y$ , если топологически изоморфны  $D$ -алгебры  $F(X, K_2)$  и  $F(Y, K_2)$ .

Вопрос 7.5. Каковы общие свойства  $A$ -эквивалентных пространств?

Вопрос 7.6. Каковы общие свойства  $D$ -эквивалентных пространств?

Теорема 7.7. Пространства  $X$  и  $Y$   $A$ -эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически изоморфны  $E$ -алгебры  $F(X, \mathcal{V})$  и  $F(Y, \mathcal{V})$ .

Доказательство. Вытекает из того, что  $E$ -алгебры  $F(X, \mathcal{V})$  и  $F(Y, \mathcal{V})$  топологически изоморфны  $E$ -алгебрам  $H_{\mathcal{V}}(F(X, \mathcal{V}), A)$  и  $H_{\mathcal{V}}(F(Y, \mathcal{V}), A)$  в топологии поточечной сходимости.

Следствие 7.8. Из  $X \stackrel{D}{\sim} Y$  вытекает  $X \stackrel{A}{\sim} Y$ .

Следствие 7.9. Если алгебры  $F(X, K)$  и  $F(Y, K)$  топологически изоморфны, то пространства  $X$  и  $Y$   $A$ -эквивалентны.

Пример 7.10. Пусть  $E$  - сигнатура линейных топологических пространств над полем действительных чисел  $\mathbb{R}$ ,  $D$  - сигнатура топологических групп и  $K$  - многообразие всех отделимых линейных топологических пространств. Тогда  $K_2$  - многообразие всех отделимых топологических абелевых групп. Пусть  $A = \mathbb{R}$ . Тогда  $A$ -эквивалентность пространств  $X$  и  $Y$  равносильна изоморфизму линейных пространств  $C_p(X)$  и  $C_p(Y)$  непрерывных функций в топологии поточечной сходимости, то есть  $\zeta$ -эквивалентности пространств  $X$  и  $Y$  [1]. Пространства  $X = \mathbb{R}$  и  $Y = \mathbb{R} \oplus \mathbb{N}$   $\zeta$ -эквивалентны [13], но не  $D$ -эквивалентны [10]. Поэтому из  $A$ -эквивалентности тихоновских пространств не всегда вытекает их  $D$ -эквивалентность.

## Литература

1. Архангельский А.В. Алгебраические объекты, порожденные топологической структурой // Алгебра. Топология. Геометрия. Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР. М. 1987. Т. 25. С. 141-198.
2. Бельнов В.К. Размерность топологически однородных пространств и свободные однородные пространства // ДАН СССР. 1978. Т. 238. № 4. С. 781-784.
3. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972.
4. Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1965.
5. Думитрашку С.С., Чобан М.М. О свободных топологических алгебрах с непрерывной сигнатурой // Матем. исследования (Кишинев). 1982. Т. 65. С. 27-53.
6. Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.
7. Мальцев А.И. Свободные топологические алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21. № 2. С. 171-198.
8. Нерешенные задачи топологической алгебры. Кишинев: Штиинца, 1985.
9. Протасов И.В., Сидорчук А.Д. О многообразиях топологических алгебр // ДАН СССР 1981. Т. 256. № 6. С. 1314-1318.
10. Ткачук В.В. Двойственность относительно функтора  $C_p$  и кардинальные инварианты типа числа Суслина // Матем. заметки. 1985. Т. 37. № 3. С. 441-451.
11. Чобан М.М. К теории топологических алгебраических систем // Тр. Моск. матем. о-ва. 1985. Т. 48. С. 106-149.
12. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир. 1968.
13. Arhangel'skii A.V., Coban M.M. The extension property of Tychonoff spaces and generalized retracts // C. R. Acad. Bulg. Sci. 1988. (in print).
14. Engelking R., Mrowka S. On E-compact spaces // Bull. Acad. pol. sci. Ser. math. 1958. V. 6. P. 429-436.
15. Swierczkowski S. Topologies in free algebras // Proc. London Math. Soc. 1964. V. 14. № 55. P. 566-576.
16. Coban M.M. On the theory of free topological groups // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. Topology and Appl. North-Holland. 1985. V. 41. P. 159-175.

Поступило 30.09.1988

# GENERAL CONDITIONS OF THE EXISTENCE OF FREE OBJECTS

M. M. Čoban

## Summary

Sufficiently general categorical conditions of the existence of free objects relatively to the given set of functors are established in this paper. This fact is applied to a study of quasivariety of semitopological algebras. The paper is closed with a discussion of the Mal'cev's problems and of the geometrical problems of the theory of universal objects. In addition some important examples are constructed.

ON GEOMETRY OF TOTALLY QUASIUMBILICAL SUBMANIFOLDS

Ü.Lumiste, M.Väljas

Department of Algebra and Geometry

1. Introduction

Let  $V^n$  be an  $n$ -dimensional submanifold in a  $(n+m)$ -dimensional Riemannian manifold  $V^{n+m}$ . A unit normal vector field  $\xi$  is said to be quasiumbilical (see [2], Chap. 5) if there exists a tangential orthonormal frame field on  $V^n$  in which the corresponding second fundamental form  $h_\xi$  has diagonal matrix with diagonal elements  $\lambda + \mu$  and  $\lambda, \dots, \lambda$  (i.e. one of these elements has multiplicity  $\geq n-1$ ). This frame field is called quasiumbilical for  $\xi$  and is determined up to rotations around the first axis.

The submanifold  $V^n$  in  $V^{n+m}$  is said to be totally quasiumbilical (Chen, Yano [6]; [2], Chap. 5) if there exist  $m$  mutually orthogonal quasiumbilical unit normal vector fields  $\xi_1, \dots, \xi_m$ . In the case if  $V^{n+m}$  is conformally flat some relations are known between totally quasiumbilical submanifolds and conformally flat submanifolds. In [6] is announced and in [2] proved that a totally quasiumbilical  $V^n$  ( $n > 3$ ) in a conformally flat  $V^{n+m}$  is conformally flat.

In the opposite direction the well-known result of Cartan [1] and Schouten [9] states for the case  $m=1$  that a conformally flat hypersurface  $V^n$  of dimension  $n > 3$  in a conformally flat  $V^{n+1}$  is quasiumbilical (see [2], Chap. 5).

The nearest generalization of the hypersurface is the submanifold  $V^n$  with flat normal connection  $\nabla^\perp$  (see [2], Chap. 4). In [5] the following generalization of Cartan - Schouten result is given. Let  $V^n$  be a conformally flat submanifold with flat normal connection  $\nabla^\perp$  in a conformally flat  $V^{n+m}$ . If  $n > 3$  and  $m < n-2$  then such  $V^n$  is totally quasiumbilical. Without any restriction on  $\nabla^\perp$  the following result is known: a conformally flat submanifold  $V^n$  ( $n > 3$ ) with  $m-1$  mutually orthogonal quasiumbilical  $\xi_1, \dots, \xi_{m-1}$  in a conformally flat  $V^{n+m}$  is totally quasiumbilical: unit normal vector field  $\xi_m$  orthogonal to

$\xi_1, \dots, \xi_{m-1}$  is quasiumbilical too ([2], Chap. 5 — the case  $m=2$ , [7] — the general case).

There has been an attempt to prove that a totally quasi-umbilical submanifold  $V^n$  in a conformally flat  $V^{n+m}$  has always flat normal connection, but the proof in [4] is unsatisfactory. The mistake is shown in [8], where also a counterexample is given.

In connection with these results and misproof the next problems arise. Which conditions are necessary and sufficient for a totally quasiumbilical  $V^n$  in conformally flat  $V^{n+m}$  to have flat normal connection  $\nabla^\perp$  and, conversely, for a  $V^n$  with flat  $\nabla^\perp$  to be totally quasiumbilical? Does there exist a conformally flat  $V^n$  ( $n > 3$ ) with flat  $\nabla^\perp$  in a conformally flat  $V^{n+m}$  ( $m \geq n-2$ ) which is not totally quasiumbilical? In this paper these problems are solved. The answer to the first problem is given in Theorems 1 and 3. The affirmative answer to the second question gives Theorem 6.

These results are obtained through a geometrical investigation of the submanifold  $V^n$  with flat  $\nabla^\perp$  in euclidean  $E^{n+m}$  by means of its principal curvature vectors. In this course a new concept of completely quasiumbilical submanifold is introduced. So we call  $V^n$  in  $E^{n+m}$  every unit normal vector field on which is quasiumbilical. It is shown that a submanifold  $V^n$  in  $E^{n+m}$  is completely quasiumbilical iff it is a canal submanifold, i.e. the envelope of an one-parameter family of  $n$ -spheres (Theorem 5). Such  $V^n$  has flat  $\nabla^\perp$  (Propositions 1 and 2).

More generally, we show that a conformally flat  $V^n$  with flat  $\nabla^\perp$  in  $E^{n+m}$ , which in the case  $n > 3$ ,  $m < n-2$  is totally quasiumbilical by [5], is in this case the envelope of a  $q$ -parameter family of  $n$ -spheres, where  $q \leq m$  (Theorem 4 and its corollaries). The value of  $q$  is determined by the system of principal curvature vectors.

## 2. Preliminaries

As the quasiumbilicity of a normal direction field  $\xi$  and flatness of normal connection are conformal invariant properties, we may assume without loss of generality that  $V^{n+m}$  is a euclidean space  $E^{n+m}$  (see [3]).

Let  $\alpha$  be the radius vector of a point  $X$  of  $V^n$  and  $\{e_1, \dots, e_n; e_{n+1}, \dots, e_{n+m}\}$  an element of the adapted orthonormal frame bundle in this point. Then in derivation formulas

$dx = e_j \omega^j$ ,  $de_j = e_k \omega_j^k$  with  $\omega_j^k + \omega_k^j = 0$ ;  $j, k = 1, \dots, n+m$  we have  $\omega^\alpha = 0$ ;  $\alpha = n+1, \dots, n+m$ . Thus from structure equations  $d\omega^j = \omega^k \wedge \omega_k^j$ ,  $d\omega_k^j = \omega_k^l \wedge \omega_l^j$  (the integrability conditions of derivation formulas) it follows due to Cartan lemma that

$$\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

and therefore the 2-forms

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = \omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^j = -(h_{ik}^\alpha h_{j\alpha}^k - h_{i\alpha}^k h_{jk}^\alpha) \omega^k \wedge \omega^\alpha,$$

$$\Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^j \wedge \omega_j^\beta = \omega_\alpha^i \wedge \omega_i^\beta = -(h_{ik}^\alpha h_{i\ell}^\beta - h_{i\ell}^\alpha h_{ik}^\beta) \omega^k \wedge \omega^\ell$$

are, as we see, semibasic. Consequently in the tangent vector bundle on  $V^n$  there exists a connection  $\nabla$  (the Levi-Civita connection) with connection forms  $\omega_i^j$  and curvature forms  $\Omega_i^j$ . Analogously in the normal vector bundle there exists the normal connection  $\nabla^\perp$  with connection forms  $\omega_\alpha^\beta$  and curvature forms  $\Omega_\alpha^\beta$ .

The normal connection  $\nabla^\perp$  is said to be flat if  $\Omega_\alpha^\beta = 0$ . In this case the symmetric matrices  $H^\alpha = \|h_{ij}^\alpha\|$ ,  $H^\beta = \|h_{ij}^\beta\|$  commute and can be simultaneously diagonalized by a suitable choice of tangent frame so that

$$\omega_i^\alpha = k_i^\alpha \omega^i \quad (\text{not sum!}).$$

The directions of the vectors of this frame are called principal directions, their integral lines — curvature lines, the vectors  $k_i = k_i^\alpha e_\alpha$  — principal curvature vectors;  $i = 1, \dots, n$ .

The convex hull of end-points  $K_1, \dots, K_n$  of the vectors  $k_1, \dots, k_n$  by the origin in the point  $X \in V^n$  is called the normal curvature indicatrix (a simplex in general; see [10]), its dimension is denoted by  $m_1$ .

Let  $\xi = \xi^\alpha e_\alpha$  be a quasiumbilical unit normal vector field. The matrix  $H_\xi = \|\sum_\alpha \xi^\alpha h_{ij}^\alpha\|$  has elements

$$\sum_\alpha \xi^\alpha h_{ij}^\alpha = \lambda_\xi \delta_{ij} + \mu_\xi \varphi_i^\xi \varphi_j^\xi, \quad (1)$$

where  $f_\xi = \sum \varphi_i^\xi e_i$  is the unit vector, which corresponds to the eigenvalue  $\lambda_\xi + \mu_\xi$ . The direction of  $f_\xi$  is called the distinguished axis for  $\xi$ . The frame  $\{e_1, \dots, e_n\}$  with  $e_i = f_\xi$ , i.e. with  $\varphi_i^\xi = \delta_i^1$ , is said to be quasiumbilical for  $\xi$ .

### 3. Totally quasiumbilical submanifolds with flat normal connection

Let  $V^n$  be a totally quasiumbilical submanifold in  $E^{n+m}$ . The frame vectors  $e_{n+1}, \dots, e_{n+m}$  can be taken in quasiumbilical directions. Then

$$A_{ij}^{\alpha} = \lambda^{\alpha} \delta_{ij} + \mu^{\alpha} \varphi_i^{\alpha} \varphi_j^{\alpha}; \quad \alpha = n+1, \dots, n+m$$

and thus  $\omega_i^{\alpha} = \lambda^{\alpha} \omega^i + \mu^{\alpha} \varphi_i^{\alpha} \varphi^{\alpha}$ , where  $\varphi^{\alpha} = \varphi_j^{\alpha} \omega^j$ ,  $\sum (\varphi_j^{\alpha})^2 = 1$ .

**Theorem 1.** A totally quasiumbilical submanifold  $V^n$  in  $E^{n+m}$  has flat normal connection  $\nabla^{\perp}$  iff on  $V^n$  there is a frame field quasiumbilical for all  $m$  quasiumbilical unit normal vector fields (perhaps with different distinguished axis for each of them)

Proof. The last two relations show that

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha}^{\beta} &= \omega_{\alpha}^i \wedge \omega_i^{\beta} = - \sum_i (\lambda^{\alpha} \omega^i + \mu^{\alpha} \varphi_i^{\alpha} \varphi^{\alpha}) \wedge (\lambda^{\beta} \omega^i + \mu^{\beta} \varphi_i^{\beta} \varphi^{\beta}) = \\ &= - \mu^{\alpha} \mu^{\beta} \left( \sum_i \varphi_i^{\alpha} \varphi_i^{\beta} \right) \varphi^{\alpha} \wedge \varphi^{\beta}. \end{aligned}$$

The normal connection  $\nabla^{\perp}$  is flat iff either  $\mu^{\alpha} \mu^{\beta} = 0$  either  $\langle \xi_{\alpha}, \xi_{\beta} \rangle = 0$  or  $\varphi^{\alpha} \wedge \varphi^{\beta} = 0$ ;  $\alpha, \beta = n+1, \dots, n+m$ ;  $\alpha \neq \beta$ . In the first case one of the vectors  $e_{\alpha}$  or  $e_{\beta}$  is umbilical and its quasiumbilical frame is undetermined, i.e. any frame is (quasi)-umbilical for it. In the second case there exists a frame, which is quasiumbilical for both of  $e_{\alpha}$  and  $e_{\beta}$ : two of its vectors are  $\xi_{\alpha}$  and  $\xi_{\beta}$ , the others remain undetermined for fixed  $\alpha$  and  $\beta$ . In the third case  $\varphi^{\alpha}$  and  $\varphi^{\beta}$  are proportional and thus  $\xi_{\alpha}$  and  $\xi_{\beta}$  are collinear unit vectors, i.e. there exist a common quasiumbilical frame for  $e_{\alpha}$  and  $e_{\beta}$  with common distinguished axis. ■

A simplex in  $E^m$  is said to be orthocentral if all its altitudes intersect in a common point called the orthocentre. It is easy to see [13] that a simplex is orthocentral iff any two sides without a common vertex have orthogonal directions. A special case of the orthocentral simplex is the rectangular simplex, which has a vertex  $O$  such that all  $m$  edges outcoming from it are mutually orthogonal. The  $(m-1)$ -dimensional faces containing  $O$  are called the side faces. The face opposite to  $O$  is called the hypotenuse face. Denoting by  $a_1, \dots, a_m$  the radius vectors of its vertices by origin in  $O$  we have  $a_p \neq 0$ ,  $\langle a_p, a_q \rangle = 0$ ;  $p, q = 1, \dots, m$ ;  $p \neq q$ . Thus  $\langle a_p - a_q, a_p - a_r \rangle = \langle a_p, a_p \rangle > 0$  for every three distinct  $p, q, r$ . It follows that this hypotenuse face is a  $(m-1)$ -dimensional orthocentral simplex which has only acute angles between its sides.

**Theorem 2.** A submanifold  $V^n$  ( $n > 3$ ) with flat normal connection  $\nabla^{\perp}$  in  $E^{n+m}$  is conformally flat iff in every point  $X \in V^n$  its normal curvature indicatrix is an orthocentral simplex or convex hull of a such simplex and its

outer orthocentre; principal curvature vectors can go from  $X$  only to vertices and orthocentre.

Proof. In [5] a necessary and sufficient condition for  $V^n$  with flat  $\nabla^1$  to be conformally flat is given analytically in the form  $\sum_{\alpha} (k_i^{\alpha} - k_j^{\alpha})(k_{\kappa}^{\alpha} - k_{\ell}^{\alpha}) = 0$  for any four distinct values  $i, j, \kappa, \ell$ . Theorem gives a bit more detailed geometrical formulation for it. ■

Remark 1. If the condition of Theorem 2 is satisfied there are three disjunctive possibilities for interdependence between the principal curvature vectors  $k_1, \dots, k_n$  and the normal curvature indicatrix (i.e. simplex): by the origin in  $X \in V^n$  the endpoints of  $k_1, \dots, k_n$  are 1) distinct and all lie in the vertices of the  $(n-1)$ -dimensional orthocentral nonrectangular simplex, 2) distinct,  $n-1$  lie in the vertices of the  $(n-2)$ -dimensional orthocentral nonrectangular simplex and one in its orthocentre, 3) in the vertices of the  $q$ -dimensional rectangular simplex,  $0 \leq q \leq n-1$ ; thereto with multiplicity  $n-q$  only in origin vertex.

Theorem 3. A submanifold  $V^n$  ( $n > 3$ ) with flat normal connection  $\nabla^1$  in  $E^{n+m}$  is totally quasiunbilical iff its normal curvature indicatrix in every point  $X \in V^n$  is either a) a  $q$ -dimensional rectangular simplex which origin vertex is determined by a  $(n-q)$ -fold principal curvature vector as its radius vector from  $X \in V^n$  or b) the hypotenuse face of an  $n$ -dimensional rectangular simplex.

Proof. Let  $V^n$  with flat  $\nabla^1$  in  $E^{n+m}$  be totally quasiunbilical. Let the frame vectors  $e_{n+1}, \dots, e_{n+m}$  be taken so that we have (1). Due to Theorem 1 there is a frame  $\{e_1, \dots, e_n\}$  so that  $e_1$  is distinguished for  $e_{n+1}$ ,  $e_2$  is distinguished for  $e_{n+2}$  etc. (perhaps a reenumeration of these vectors is needed) and we have  $f_{n+i_1} = e_1$ , i.e.  $\varphi_{j_1}^{n+i_1} = \delta_{i_1}^{j_1}$ ,  $\varphi_{\alpha}^{n+i_1} = 0$ , where  $i_1, j_1 = 1, \dots, q$  ( $q \leq n$ ) and  $\alpha = q+1, \dots, n$ . So it follows until all well determined distinguished axis in directions of some  $f_{n+i_1}$  are exhausted. In this frame

$$h_{i_1 j_1}^{n+k_1} = \lambda^{n+k_1} \delta_{i_1 j_1} + \mu^{n+k_1} \delta_{i_1}^{k_1} \delta_{j_1}^{k_1} = k_{i_1}^{n+k_1} \delta_{i_1 j_1},$$

where

$$k_{i_1}^{n+k_1} = \lambda^{n+k_1} + \mu^{n+k_1} \delta_{i_1}^{k_1}, \quad (2)$$

and  $h_{i_1 \alpha}^{n+k_1} = 0$ ,  $h_{\alpha \beta}^{n+k_1} = \lambda^{n+k_1} \delta_{\alpha \beta}$ , i.e.  $k_{\alpha}^{n+k_1} = \lambda^{n+k_1}$ .

All other quasiunbilical unit normal vectors  $e_{\alpha_1}$ ,  $\alpha_1 = n+n_1+1, \dots, n+m$  are umbilical, i.e.  $h_{i_1 j_1}^{\alpha_1} = \lambda^{\alpha_1} \delta_{i_1 j_1}$

and we have  $k_{i_1} = l + \mu^{n+i_1} e_{n+i_1}$  (not sum!),  $k_a = l$ , where  $l = \sum_{\kappa_1} \lambda^{n+\kappa_1} e_{n+\kappa_1} + \sum_{\alpha_1} \lambda^{\alpha_1} e_{\alpha_1}$ .

If  $q < n$  then  $l$  is a  $(n-q)$ -fold principal curvature vector and the normal curvature indicatrix is a  $q$ -dimensional rectangular simplex with origin vertex in endpoint of  $l$ .

If  $q = n$ , i.e. if all axis of the quasiumbilical frame are distinguished for some quasiumbilical normal vector, we have only (2) and there is no vectors  $k_a$ . We see that  $k_i - l = \mu^{n+i} e_{n+i}$  (not sum!); therefore  $k_i - l$  ( $i=1, \dots, n$ ) are mutually orthogonal nonzero vectors. So in the normal space there is a rectangular simplex with vertices in endpoints of  $k_1, \dots, k_n$  and  $l$  (by the origin in  $X \in V^n$ ) and the normal curvature indicatrix is its hypotenuse face.

Conversely, let  $V^n$  with flat  $\nabla^\perp$  in  $E^{n+m}$  has in every point  $X \in V^n$  the normal curvature indicatrix, which is a  $q$ -dimensional rectangular simplex and let the  $(n-q)$ -fold principal curvature vector go from  $X$  to the origin vertex. Unit vectors in directions of mutually orthogonal edges of this rectangular simplex let be denoted by  $e_{n+1}, \dots, e_{n+q}$  and the vector going from  $X$  to the origin vertex by  $l$  (it is a principal curvature vector with multiplicity  $n-q$ ). We have then

$$k_i - l = \mu^{n+i} e_{n+i}, \quad k_a = l; \quad a = q+1, \dots, n.$$

The mutually orthogonal normal unit vectors  $e_{\alpha_1}, \alpha_1 = n+q+1, \dots, n+m$ , orthogonal to  $e_{n+1}, \dots, e_{n+q}$  can be taken so that  $l = \sum_{j_1} \lambda^{n+j_1} e_{n+j_1} + \lambda^{n+q+1} e_{n+q+1}$ .

Now  $k_{i_1}^{n+i_1} = \lambda^{n+i_1} + \mu^{n+i_1}$ ,  $k_{i_1}^{n+j_1} = \lambda^{n+j_1}$  ( $i_1 \neq j_1$ ),  $k_{i_1}^{n+q+1} = \lambda^{n+q+1}$ ,  $k_{i_1}^{n+\nu} = 0$  ( $\nu = q+2, \dots, m$ ),  $k_a^{n+i_1} = \lambda^{n+i_1}$ ,  $k_a^{n+q+1} = \lambda^{n+q+1}$ ,  $k_a^{n+\nu} = 0$ ,

i.e. the unit normal vectors  $e_{n+1}, \dots, e_{n+m}$  are quasi-umbilical and thus  $V^n$  is totally quasiumbilical.

If the normal curvature indicatrix of  $V^n$  in every point  $X \in V^n$  is the hypotenuse face of a  $n$ -dimensional rectangular simplex then, denoting unit vectors in directions of mutually orthogonal edges of this simplex by  $e_{n+1}, \dots, e_{2n}$  and the vector going from  $X$  to origin vertex by  $l$ , we can complement the normal orthogonal frame with  $e_{2n+1}, \dots, e_{n+m}$  so that

$k_i \cdot l = \mu^{n+i} e_{n+i}$ ,  $l = \sum_j \lambda^{n+j} e_{n+j} + \lambda^{2n+1} e_{2n+1}$   
 and also get  $V^n$  to be totally quasiunbilical. ■

**Remark 2.** Theorem 3 and Remark 1 show that in the case  $m < n-2$  every conformally flat  $V^n$  with flat  $V^\perp$  in  $E^{n+m}$  (or in conformally flat  $V^{n+m}$ ) is totally quasiunbilical. Indeed, if  $m < n-2$  then only the third possibility of the Remark 1 can occur. So we get one of the results of [5].

There is a light generalization of this result: in the inequality  $m < n-2$  the codimension  $m$  can be replaced by the dimension  $m_1$  of the convex hull of end-points  $K_1, \dots, K_n$  of vectors  $k_1, \dots, k_n$ ; obviously  $m_1 \leq m$ . Indeed, according to [11] every conformally flat  $V^n$  with flat  $V^\perp$  and with  $m_1 < n-2$  in  $E^{n+m}$  is totally quasiunbilical.

**Remark 3.** There are two possibilities for a conformally flat  $V^n$  with flat  $V^\perp$  to be not totally quasiunbilical:

A) the case 2) of Remark 1 occurs or

B) the case 1) occurs but the normal curvature indicatrix is not the hypotenuse face of an  $n$ -dimensional rectangular simplex.

For the case B it is sufficient that  $m = n-1$  or  $m > n-1$  but the indicatrix has an obtuse angle between its edges.

In the case 3) of Remark 1, which leads to the totally quasiunbilical  $V^n$ , the principal curvature vector going from  $X$  to origin vertex can have some multiplicity  $n-q > 1$ . The next theorem gives a geometrical property of a submanifold  $V^n$  with flat  $V^\perp$  and with an  $(n-q)$ -fold principal curvature vector,  $n-q > 1$ .

**Theorem 4.** A submanifold  $V^n$  with flat normal connection and with an  $(n-q)$ -fold ( $n-q > 1$ ) principal curvature vector in  $E^{n+m}$  is an envelope of  $q$ -parametric family of  $n$ -dimensional spheres.

**Proof.** Let the principal curvature vectors are  $k_1, \dots, k_q$  and  $k$  (mutually distinct), here  $k$  with multiplicity  $n-q > 1$ . Then

$$\omega_\alpha^\alpha = k_\alpha^\alpha \omega^\alpha, \quad \omega_u^\alpha = k^\alpha \omega^u; \quad \alpha = 1, \dots, q; \quad u = q+1, \dots, n.$$

By exterior differentiation we get from the last equations:

$$\sum_\alpha (k^\alpha - k_b^\alpha) \omega_u^\alpha \wedge \omega^\alpha + (dk^\alpha + k^b \omega_\beta^\alpha) \wedge \omega^\alpha = 0$$

and thus by Cartan lemma

$$\omega_u^a = \lambda_{ub}^a \omega^b + \mu_a \omega^u, \quad dk^\alpha + k^\beta \omega_\beta^\alpha = \sum_\alpha (k^\alpha - k_\alpha^\alpha) \mu_a \omega^a.$$

Now from the first group of these extended equations we get in the same manner

$$\tilde{\nabla} \lambda_{ub}^a \wedge \omega^b + (d\mu_a - \mu_b \omega_a^b) \wedge \omega^u = 0,$$

where the exact form of  $\tilde{\nabla} \lambda_{ub}^a$  doesn't matter in the following. From this it follows particularly that

$$d\mu_a - \mu_b \omega_a^b = M_{ab} \omega^b + N_a \omega^u$$

and if to take here some two values of  $u$  we see that  $N_a = 0$ , i.e.

$$d\mu_a = \mu_b \omega_a^b + M_{ab} \omega^b.$$

Since  $d\omega^a = (-\omega_b^a + \lambda_{ub}^a \omega^u) \wedge \omega^b$  the differential system  $\omega^a = 0$ ;  $a = 1, \dots, q$ , is completely integrable. Its integral submanifolds (the leaves of the annulator foliation) are totally umbilical because  $\omega_u^a = \mu_a \omega^u$ ,  $\omega_u^\alpha = k^\alpha \omega^u$  along them and therefore they are  $(n-q)$ -dimensional spheres or their open parts. If to take the strip of the  $V^n$  along this  $(n-q)$ -sphere (i.e. the family of tangent  $n$ -planes in the points  $X_i$  of this  $(n-q)$ -sphere) then we see that this strip lie in  $(n+1)$ -plane spanned on the point  $X$  and on vectors  $e_b, e_u$  and  $k$ . In fact,

$$dx = e_u \omega^u \pmod{\omega^a}, \quad de_b = e_c \omega_b^c - \mu_b e_u \omega^u \pmod{\omega^a},$$

$$de_u = \left( \sum_b \mu_b e_b + k \right) \omega^u + e_v \omega_v^u \pmod{\omega^a},$$

$$dk = -|k|^2 e_u \omega^u \pmod{\omega^a}.$$

Since for  $c = \alpha + |k|^{-2} k$  we have  $d|k|^2 = 0 \pmod{\omega^a}$  and  $dc = 0 \pmod{\omega^a}$  there is a point  $C$  in this  $(n+1)$ -plane which is fixed if  $X$  describes the  $(n-q)$ -sphere and  $\overline{XC}$  is orthogonal to  $T_x V^n$  and has constant length  $|k|^{-1}$ . Thus the same strip is the strip of a  $n$ -sphere with centre  $C$  and radius  $|k|^{-1}$  along the  $(n-q)$ -sphere. This  $n$ -sphere and  $V^n$  are tangent in any point of the  $(n-q)$ -sphere. ■

**Corollary 1.** Let  $V^n$  be a conformally flat submanifold with flat normal connection in  $E^{n+m}$  and let  $m_1 < n-2$ . Then  $V^n$  is the envelope of an  $m_1$ -parameter family of  $n$ -dimensional spheres.

This follows immediately from Remark 2 and Theorem 4.

**Corollary 2.** Let  $V^n$  be the envelope of a  $q$ -parameter family of  $n$ -spheres in  $E^{n+m}$ ,  $q < n-1$ . If  $V^n$  is conformally flat then it is totally quasisumbilical.

This follows from the fact that such envelope has a principal curvature vector of multiplicity  $n-q > 1$  as is easy to see. It remains to consider the Remark 1.

Note that the envelope  $V^n$  of an  $q$ -parameter family of  $n$ -spheres in  $E^{n+m}$  needs not to be conformally flat if  $q > 1$ . The situation is otherwise if  $q = 1$ , i.e. if we have a canal submanifold  $V^n$  in  $E^{n+m}$ . In the next section we are approaching to this case from the point of view of quasiumbilicity.

#### 4. Completely quasiumbilical submanifolds

A submanifold  $V^n$  in  $E^{n+m}$  is said to be completely quasiumbilical if every unit normal vector field on  $V^n$  is quasiumbilical. In this case we have (1) for arbitrary unit normal vector.

**Lemma 1.** Let  $V^n$  in  $E^{n+m}$  has in its point  $X$  two orthogonal unit normal vectors which are quasiumbilical. If every unit vector in their linear hull is quasiumbilical then there exists a common quasiumbilical frame for them with common distinguished axis which is the quasiumbilical frame with the same distinguished axis for every unit vector of this hull.

**Proof.** Let two fixed frame vectors  $e_\alpha$  and  $e_\beta$  are quasiumbilical and let  $\{e_1, \dots, e_n\}$  be the quasiumbilical frame for  $e_\beta$  with distinguished axis in direction of  $e_1$ . Then we have (1) and

$$h_{ij}^\beta = \lambda^\beta \delta_{ij} + \mu^\beta \delta_i^1 \delta_j^1.$$

The second fundamental form with respect to  $\xi = e_\alpha \cos \theta + e_\beta \sin \theta$  has the matrix

$$H_\xi = \| (\lambda^\alpha \delta_{ij} + \mu^\alpha \varphi_i^\alpha \varphi_j^\alpha) \cos \theta + (\lambda^\beta \delta_{ij} + \mu^\beta \delta_i^1 \delta_j^1) \sin \theta \|.$$

If  $\xi$  is quasiumbilical for every  $\theta \in [0, 2\pi)$  then the characteristic equation of this matrix has an eigenvalue with multiplicity  $\geq n-1$ , i.e. the equation

$$\det | \mu^\alpha \varphi_i^\alpha \varphi_j^\alpha \cos \theta + \mu^\beta \delta_i^1 \delta_j^1 \sin \theta - \lambda \delta_{ij} | = 0 \quad (3)$$

with unknown  $\lambda$  has a solution with multiplicity  $\geq n-1$ .

The absolute term is zero because the left side by  $\lambda = 0$  is the sum of two determinants which both are zero:

$$\det | \mu^\alpha \varphi_i^\alpha \varphi_j^\alpha \cos \theta | = (\mu^\alpha \cos \theta)^n \det | \varphi_i^\alpha \varphi_j^\alpha | = 0.$$

The other coefficients of the equation (3) except by  $\lambda^n$  are the sums of all principal determinants of a given

order  $r$  of the matrix  $\| \mu^\alpha \varphi_i^\alpha \varphi_j^\alpha \cos \theta + \mu^\beta \delta_i^\beta \delta_j^\beta \sin \theta \|$ ,  $1 \leq r \leq n-1$ . By direct computation we can see that the equation (3) is

$$(-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} \left[ \mu^\alpha \sum_{i=1}^n (\varphi_i^\alpha)^2 \cos \theta + \mu^\beta \sin \theta \right] + (-\lambda)^{n-2} \mu^\alpha \mu^\beta \sum_{\alpha=2}^n (\varphi_\alpha^\alpha)^2 \cos \theta \sin \theta = 0$$

and has a solution  $\lambda=0$  with multiplicity  $\geq n-2$ . This solution must have multiplicity  $\geq n-1$  for every  $\theta \in [0, 2\pi)$ , therefore  $\mu^\alpha \mu^\beta \sum (\varphi_\alpha^\alpha)^2 = 0$ . If here  $\mu^\alpha = 0$  or  $\mu^\beta = 0$  then the quasiumbilical frame for  $e_\alpha$  or  $e_\beta$  remains undetermined and lemma is true. If  $\varphi_\alpha^\alpha = 0$ ;  $\alpha = 2, \dots, n$ , then the quasiumbilical frame for  $e_\alpha$  coincides with one for  $e_\beta$  and distinguished axes coincide too. ■

**Remark 4.** The converse is also true: if for two orthogonal unit normal vectors, which are quasiumbilical, the distinguished axes of the quasiumbilical frames coincide, then every unit normal vector in their hull is quasiumbilical too with the same distinguished axis.

It follows easily from the fact that then in (1) also  $\varphi_i^\alpha = \delta_i^\alpha$  and therefore

$$H_{\xi} = \| (\lambda^\alpha \cos \theta + \lambda^\beta \sin \theta) \delta_{ij} + (\mu^\alpha \cos \theta + \mu^\beta \sin \theta) \delta_i^\alpha \delta_j^\beta \|.$$

**Proposition 1.** Any completely quasiumbilical  $V^n$  in  $E^{n+m}$  has flat normal connection and is an envelope of a one-parameter family of  $n$ -dimensional spheres.

**Proof.** Let  $V^n$  be completely quasiumbilical. Then it is totally quasiumbilical and by Lemma 1 and Theorem 1 its normal connection is flat. For every  $\alpha = n+1, \dots, n+m$  we have  $h_{ij}^\alpha = \lambda^\alpha \delta_{ij} + \mu^\alpha \delta_i^\alpha \delta_j^\alpha$  and therefore principal curvature vectors are  $k_1 = l + \mu^\alpha e_\alpha$ ,  $k_\alpha = l$ ;  $\alpha = 2, \dots, n$ , where  $l = \sum \lambda^\alpha e_\alpha$ . Now the second assertion follows from Theorem 4.

The envelope  $V^n$  of a one-parameter family of  $n$ -dimensional spheres in  $E^{n+m}$  is called a canal submanifold  $V^n$  in  $E^{n+m}$ .

**Proposition 2.** A canal submanifold  $V^n$  in  $E^{n+m}$  has flat normal connection and is completely quasiumbilical.

**Proof.** If  $V^n$  is a canal submanifold in  $E^{n+m}$  then the adapted orthonormal frame can be taken so that the leaves of the  $(n-1)$ -dimensional distribution given by  $\omega^1 = 0$  are characteristic  $(n-1)$ -spheres. Then  $\omega^1 = 0$  is completely integrable and  $d\omega^1 = 0 \pmod{\omega^1}$ . Since  $d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1$  we have  $\omega_2^1 = \lambda_\alpha \omega^\alpha + \mu_\alpha \omega^1$ . Moreover, the leaves of  $\omega^1 = 0$  are totally umbilical, i.e.  $h_{\alpha\beta}^1 = k^\alpha \delta_{\alpha\beta}$ .

The tangents to  $V^n$  along the leaf generate a round cone. Thus a point exists with radius vector  $x + \nu e_1$  which is fixed for every leaf, i.e.  $d(x + \nu e_1) = 0 \pmod{\omega^1}$ . This gives that  $\nu = \lambda^{-1}$  and  $h_{1\alpha}^\alpha = 0$ . So we see that all  $H^\alpha = \|h_{ij}^\alpha\|$  are simultaneously diagonalizable with diagonal elements  $k_1^\alpha = h_{11}^\alpha, k_2^\alpha, \dots, k_n^\alpha$  ( $k^\alpha$   $n-1$  times). Thus  $V^n$  has flat  $\nabla^\perp$ .

Denoting  $\mu^\alpha = h_{11}^\alpha - k^\alpha$  we have  $h_{ij}^\alpha = k^\alpha \delta_{ij} + \mu^\alpha \delta_i^1 \delta_j^1$  and for unit normal vector  $\xi = \xi^\alpha e_\alpha$  there is  $\sum_\alpha \xi^\alpha h_{ij}^\alpha = (\sum_\alpha \xi^\alpha k^\alpha) \delta_{ij} + (\sum_\alpha \xi^\alpha \mu^\alpha) \delta_i^1 \delta_j^1$ . ■

Propositions 1 and 2 together give

**Theorem 5.** A submanifold  $V^n$  in  $E^{n+m}$  is completely quasiunbilical iff it is a canal submanifold.

**Corollary 3.** A canal submanifold  $V^n$  ( $n > 3$ ) in  $E^{n+m}$  is conformally flat and has flat normal connection.

#### 5. Chen-Verstraelen result is not extendible

In connexion with the generalization of Cartan-Schouten result, given by Chen and Verstraelen [5] and formulated in Introduction, the next problem arises. Does there exist a conformally flat  $V^n$  ( $n > 3$ ) with flat normal connection in a conformally flat space  $V^{n+m}$  ( $m \geq n-2$ ) which is not totally quasiunbilical?

In the following we give an example showing that the answer is affirmative.

Let us consider the Pfaffian system:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_p^\alpha = k_p^\alpha \omega^p, \quad (4)$$

$$\omega_p^q = l_p \omega^q - l_q \omega^p, \quad (5)$$

$$dl_p = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n l_i^2 + \langle k_p, k_q + k_r \rangle - \langle k_q, k_r \rangle \right] \omega^p \quad (6)$$

( $p, q, r$  are arbitrary three distinct elements of  $\{1, \dots, n\}$ ,  $n > 3$ ;  $\alpha \in \{n+1, \dots, n+m\}$ ,  $m \geq n-2$ ),

$$dk_p = -\langle k_p, k_p \rangle e_p \omega^p + \sum_{q \neq p} [l_q (k_p - k_q) - \langle k_p, k_q \rangle e_q] \omega^q. \quad (7)$$

This system is totally integrable, as is easy to verify by exterior differentiation using the identity

$$\langle k_p - k_q, k_r - k_s \rangle = 0, \quad (8)$$

which follows from (6); here in (8)  $p, q, r, s$  are arbitrary four distinct elements of  $\{1, \dots, n\}$ . Therefore by every given initial conditions there exists a integral submanifold, which is a  $V^n$  in  $E^{n+m}$  with flat  $\nabla^\perp$  and with principal curvature vectors  $k_1, \dots, k_n$ .

Theorem 6. Let for the totally integrable system (4)-(7) the initial values of  $k_1, \dots, k_n$  are mutually distinct vectors such that their endpoints by origin in initial point  $X_0 \in V^n$  form an  $(n-1)$ -dimensional simplex (orthocentral due to (8)) with an obtuse angle between its edges. Then the submanifold  $V^n$ , determined by this system and these initial conditions, is a not totally quasiunbimical conformally flat submanifold  $V^n$  with flat  $\nabla^\perp$  in  $E^{n+m}$ .

Proof. The requested properties of initial  $k_1, \dots, k_n$  remain true also in some neighbourhood of the initial point. Thus  $V^n$  is not totally quasiunbimical due to Theorem 3 and Remark 3. From (8) and Theorem 2 it follows that  $V^n$  is conformally flat. ■

Remark 5. In [11] there is proved that a  $V^n$  in  $E^{n+m}$ , determined by (4)-(7), is a Dupin-Mannheim submanifold: every family of its curvature lines consists of circles whose planes have a common straight line or are parallel each other (see also [12]).

#### References

1. C a r t a n, E. La déformation des hypersurface dans l'espace conforme réel à  $n \geq 5$  dimensions // Bull. Soc. Math. France. 1917. V. 45, P. 57-121.
2. C h e n, B. -Y. Geometry of submanifolds. New York: M. Dekker. 1973.
3. C h e n, B. -Y. Some conformal invariants of submanifolds and their applications // Boll. Un. Mat. Ital. 1974. V. 10. P. 380-385.
4. C h e n, B. -Y., T e n g, T. -H. Flatness of normal connections of totally quasiunbimical submanifolds and its application. Soochow J. Math. and Nat. Sci. 1975. V. 1. P. 9-16.
5. C h e n, B. -Y., V e r s t r a e l e n L. A characterization of totally quasiunbimical submanifolds and its application // Boll. Un. Mat. Ital. 1977. V. A 14. P. 49-57 (1977); Errata corrige: ibid. 1977. V. A14, P. 634.
6. C h e n, B. -Y., Y a n o, K. Sous-varietés localement conformes à un espace euclidien // C.r.Acad. sci. 1972, V. 275. P.123-125.
7. C h e n, B. -Y., Y a n o, K. Some results on conformally flat submanifolds // Tamkang J. Math. 1977, V. 4.

P. 167-174.

8. Lumiste, Ü., Valjas, M. Totally quasibilical submanifolds with nonflat normal connection// Proc. Akad. Sci Estonian SSR. Phys. Math. 1988. V. 37 № 4, P. 437-440.
9. Schouten, J. A. Über die konforme Abbildung  $n$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Maßbestimmung; auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Maßbestimmung // Math. Z. 1921. B. 11. S. 58-88.
10. Schouten J. A., Struik D. J. Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. B. 2. Berlin: Springer. 1938.
- II. Вяльяс М. Об изотермических подмногообразиях в конформно плоском пространстве // Изв. АН ЭстССР. Физ. Матем. 1987. Т. 36, № 3. С. 251-260.
12. Вяльяс М.Э., Лумисте Ю. Г. Изотермические гиперповерхности и трехмерные гиперцилиндры Дюпена-Мангейма // Матем. заметки. 1987. Т. 41. № 5. С 731-740.
13. Крейцер Г. П., Тюрин Г. И. Сферы Эйлера ортоцентрического симплекса // Матем. просвещение. 1957. Вып. 2. С. 188-194.

Поступило 30 IX 1988

## О ГЕОМЕТРИИ ВПОЛНЕ КВАЗИОМБИЛИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

Ю.Лумисте, М.Вяльяс

### Резюме

Изучаются вполне квазиомбилические подмногообразия  $V^n$  ( $n > 3$ ) в конформно плоском римановом многообразии  $V^{n+m}$  или, что равносильно, в области евклидова пространства  $E^{n+m}$ . Даны необходимые и достаточные условия, чтобы такое подмногообразие  $V^n$  (конформно плоское, как известно) имело плоскую нормальную связность  $\nabla^\perp$  (Теорема 1). Известные необходимые и достаточные условия, чтобы  $V^n$  с плоской  $\nabla^\perp$  было конформно плоским, получают геометрическую формулировку (Теорема 2) и уточнения в случае вполне квазиомбиличности (Теорема 3) в терминах симплекса нормальной кривизны. Пусть  $m_1$  является размерностью этого симплекса. Показано, что вполне квазиомбилическое  $V^n$  с плоской  $\nabla^\perp$  в  $E^{n+m}$  (или, вообще, в конформно плоском  $V^{n+m}$ ) при  $m_1 < n-2$  является огибающим  $m_1$ -параметрического семей-

ства  $n$ -сфер (Теорема 4 и Следствие I).

Подмногообразие  $V^n$  в  $V^{n+m}$  называется совершенно квазиомбилическим, если каждое его нормальное векторное поле является квазиомбилическим. Установлено, что совершенно квазиомбилическое  $V^n$  в конформно плоском  $V^{n+m}$  имеет плоскую нормальную связность и является огibaющим однопараметрического семейства  $n$ -сфер (Предложение I).

Исследуется вопрос: существует ли конформно плоское  $V^n$  ( $n > 3$ ) с плоской  $\nabla^\perp$  в конформно плоском  $V^{n+m}$  ( $m \geq n-2$ ), которое вполне квазиомбилическим не является. Теорема 6 дает здесь положительный ответ. Как известно, при  $n > 3$  и  $m < n-2$  ответ всегда отрицательный.

## СОДЕРЖАНИЕ

М. А б е л ь. Проективные пределы топологических алгебр. ....	3
В. А б р а м о в. Формальная геометрия и BRST-инвариантный лагранжиан. ....	28
З. Б а л а н о в. Фундаментальные области и некоторые задачи эквивариантной топологии....	36
Д. Б о т н а р у. Категория динамик. ....	60
Ю. Б р е г м а н, А. Ш о с т а к, Б. Ш а п и р о в с к и й. Теорема о разложении на компактно-разреженные подпространства и мощность топологических пространств. ....	79
Е. Г у т м а н. Об одной задаче Дж.-К.Рота. ....	91
А. К о к к. Совместный спектр и продолжение гомоморфизмов топологических алгебр. ....	95
А. К о к к. Функциональное представление топологических $\ast$ -алгебр. ....	III
М. Р а х у л а. К геометрии дифференциальных уравнений. ....	II8
Р Р с о м е л ь д и. О доказательстве неточности в конечномерных алгебрах с помощью ЭВМ. ....	I26
А. Ф л я й ш е р. Редуктивные однородные пространства и алгебры связностей. ....	I34
В. Ф л я й ш е р. Эндоморфизмы полигонов и сплетения. ....	I50
М. Ч о б а н. Общие условия существования свободных объектов. ....	I57
Ü. L u m i s t e, M. V ä l j a v. On geometry of totally quasisumbilical submanifolds. ....	172

TABLE OF CONTENTS \* TABLE DES MATIÈRES

M. A b e l. Projective limits of topological algebras. Summary. ....	27
V. A b r a m o v. Formal geometry and BRST-invariant lagrangian. Summary. ....	35
Z. B a l a n o v. Fundamental domains and some problems of equivariant topology. Summary. ..	58
O. B o t n a r o u. Catégorie des dynamiques. Résumé. ....	78
Ju. B r e g m a n, B. Š a p i r o v s k i, A. Š o t a t a k. A theorem on partition of topological spaces into k-scattered subspaces and cardinality of topological spaces. Summary. ....	90
J. G u t m a n. On G.-C.Rota problem. Summary. ...	94
A. K o k k. Joint spectrum and extension of homomorphisms of topological algebras. Summary. .	110
A. K o k k. Functional representation of topological $\ast$ -algebras. Summary. ....	117
M. R a h u l a. Sur la géométrie des équations différentielles. Résumé. ....	125
R. R o o m e l d i. On the proof of nonidentities in finite dimensional algebras using a computer. Summary. ....	133
A. F l e i s c h e r. Reductive homogeneous spaces and connection algebras. Summary. ....	149
V. F l e i s c h e r. Endomorphism of acts and wreath products. Summary. ....	156
M. Č o b a n. General conditions of the existence of free objects. Summary. ....	171
Ю. Л у м и с т е, М. В я л ь я с. О геометрии вполне квазиоблилических подмногообразий. ....	184

Ученые записки Тартуского государственного университета.  
Выпуск 836.  
ПРИМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИИ В АЛГЕБРЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ.  
Труды по математике и механике.  
На русском и английском языках.  
Резюме на разных языках.  
Тартуский государственный университет,  
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Дликооли, 18.  
Ответственный редактор А. Фейдлер.  
Подписано к печати 21.12.1988.  
МБ 02934.  
Формат 60х90/16.  
Бумага писчая.  
Машинопись. Ротапринт.  
Учетно-издательских листов 10,19. Печатных листов 11,75.  
Тираж 400.  
Заказ № 1058.  
Цена 2 руб.  
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.