Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond
Matemaatika instituut

Heiki Niglas

Lipschitzi kujutused ja M-ideaalid

Magistritöö

Juhendajad: prof. Eve Oja, füüs.-mat. kand.
lektor Indrek Zolk, PhD

Tartu 2014

Lipschitzi kujutused ja M-ideaalid

Magistritöö

Heiki Niglas

Lühikokkuvõte. Käesolevas magistritöös näidatakse üksikasjalikult, kuidas Nigel J. Kaltoni artiklis [K2, Theorem 6.6] tõestatud teoreemist järeldub positiivne lahendus Dirk Werneri and Heiko Berningeri poolt artiklis [BW] uuritud probleemile: kas väike Hölderi ruum $\mathrm{lip}([0,1]^\alpha)$, kus $0 < \alpha < 1$, on M-ideaal suures Hölderi ruumis $\mathrm{Lip}([0,1]^\alpha)$? Magistritöös tõestatakse samuti kaks uut tulemust väikese Lipschitzi ruumi $\mathrm{lip}(M)$ kohta. Esiteks tõestatakse, et kui M on kompaktne meetriline ruum, siis ruumil $\mathrm{lip}(M)$ on omadus (M^*). Teiseks näidatakse, et kui M on kompaktne meetriline ruum ja ruumil $\mathrm{lip}(M)$ on meetriline aproksimatsiooniomadus, siis ruumil $\mathrm{lip}(M)$ on omadus (M_∞). Kasutades neid tulemusi tõestatakse mitu olulist järeldust. Esimese teoreemi abil näidatakse muu hulgas, et kui M on kompaktne meetriline ruum ja X on selline Banachi ruum, mille korral ruum $\mathcal{K}(X)$ on M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(X)$, siis ruum $\mathcal{K}(\mathrm{lip}(M), X)$ on M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(\mathrm{lip}(M), X)$. Teise teoreemi abil saadakse, et kui M kompaktne meetriline ruum ja ruumil $\mathrm{lip}(M)$ on meetriline aproksimatsiooniomadus, siis ruum $\mathcal{K}(\mathrm{lip}(M), Y)$ M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(\mathrm{lip}(M), Y)$ iga Banachi ruumi Y korral.

Märksõnad. Funktsionaalanalüüs, Banachi ruum, Lipschitzi kujutus, M-ideaal, omadus (M^*), omadus (M_∞).

Lipschitz functions and M-ideals

Master's Thesis

Heiki Niglas

Abstract. In this master's thesis we show rigorously how the proof presented by Nigel J. Kalton [K2, Theorem 6.6] solved the following problem investigated by Dirk Werner and Heiko Berninger in [BW]: is the little Hölder space $\mathrm{lip}([0,1]^\alpha)$ an M-ideal in the Hölder space $\mathrm{Lip}([0,1]^\alpha)$ for every $\alpha \in (0,1)$? We also prove two new results concerning the little Lipschitz space. Firstly, we prove that if M is a compact metric space then $\mathrm{lip}(M)$ has property (M^*). Secondly, we show that if M is a compact metric space and the space $\mathrm{lip}(M)$ has the metric approximation property then $\mathrm{lip}(M)$ has property (M_∞). Using these Theorems several corollaries are derived. From the first result we obtain, amongst others, that if M is a compact metric space and X is a Banach space such that $\mathcal{K}(X)$ is an M-ideal in $\mathcal{L}(X)$, then $\mathcal{K}(\mathrm{lip}(M), X)$ is an M-ideal in $\mathcal{L}(\mathrm{lip}(M), X)$. From the second result we derive that if M is a compact metric space and $\mathrm{lip}(M)$ has the metric approximation property then $\mathcal{K}(\mathrm{lip}(M), Y)$ is an M-ideal in $\mathcal{L}(\mathrm{lip}(M), Y)$ for every Banach space Y.

Key words. Functional analysis, Banach space, Lipschitz function, M-ideal, property (M^*), property (M_∞).

Sisukord

Sissejuhatus

Käesoleva magistritöö lähtekohaks on Briti–Ameerika matemaatiku Nigel J. Kaltoni 2004. aasta artiklis [K2] tõestatud teoreem. See teoreem väidab, et väike Lipschitzi ruum $\mathrm{lip}(M)$ on iga arvu $\varepsilon > 0$ korral $(1+\varepsilon)$-isomorfne ruumi c_0 mingi kinnise alamruumiga, kui M on kompaktne meetriline ruum (vt teoreemi 3.6 ja [K2, lk 193, teoreem 6.6]). Pärast tõestust märkis Kalton, et sellest teoreemist järeldub, et kui $\mathrm{lip}(M)^* = \mathcal{F}(M)$, kus $\mathcal{F}(M)$ on Lipschitzi vabaruum, siis ruum $\mathrm{lip}(M)$ on M-ideaal suures Lipschitzi ruumis $\mathrm{Lip}(M)$. Teoreemile järgnenud märkuses viitas ta samuti saksa matemaatikute Heiko Berningeri ja Dirk Werneri 2003. aasta artiklile [BW], kus uuriti järgmist probleemi.

Berningeri–Werneri probleem. *Kas väike Hölderi ruum* $\mathrm{lip}([0,1]^\alpha)$*, kus* $0 < \alpha < 1$*, on* M*-ideaal suures Hölderi ruumis* $\mathrm{Lip}([0,1]^\alpha)$*?*

Berninger ja Werner näitasid, et ruum $\mathrm{lip}([0,1]^\alpha)$ on M-ideaal ruumi $\mathrm{Lip}([0,1]^\alpha)$ mingis kinnises alamruumis, mis ei ole separaabel, kuid nad arvasid, et nende probleemi vastus võib olla eitav. Nad konstrueerisid funktsiooni (nn mandelfunktsiooni), mis sisendas neile usku, et ruum $\mathrm{lip}([0,1]^\alpha)$ ei ole M-ideaal ruumis $\mathrm{Lip}([0,1]^\alpha)$, jättes siiski antud küsimuse lahtiseks.

Teoreemile [K2, lk 193, teoreem 6.6] järgnenud märkusega andis Kalton ühtlasi jaatava vastuse Berningeri–Werneri probleemile.

Antud magistritöö üheks eesmärgiks on Berningeri–Werneri probleemi positiivne lahendus üksikasjalikult lahti kirjutada (vt järeldust 5.15). Me anname detailse tõestuse Kaltoni poolt tõestatud üldisemale väitele, mille kohaselt väike Hölderi ruum $\mathrm{lip}(M^\alpha)$ on M-ideaal suures Hölderi ruumis $\mathrm{Lip}(M^\alpha)$, kui M on kompaktne meetriline ruum ja $0 < \alpha < 1$ (vt teoreemi 5.14). Selleks kasutame Kaltoni artiklis [K2, lk 193, teoreem 6.6] tõestatud tulemust ning teisi abitulemusi (vt näiteks teoreemi 4.12).

Käesoleva magistritöö esimese põhitulemusena näitame, et kompaktse meetrilise ruumi M korral on ruumil $\mathrm{lip}(M)$ omadus (M^*) (vt teoreemi 6.12). Kasutades seda ning kompaktsete operaatorite M-ideaalide hästi tuntud kirjeldust (vt teoreemi 6.15) järeldame, et kui M on kompaktne meetriline ruum ja ruumil $\mathrm{lip}(M)$ on meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus, siis kompaktsete operaatorite alamruum $\mathcal{K}(\mathrm{lip}(M))$ on M-ideaal kõigi pidevate lineaarsete operaatorite ruumis $\mathcal{L}(\mathrm{lip}(M))$ (vt teoreemi 6.17). Teise põhitulemusena näitame, et kui M on kompaktne meetriline ruum ja ruumil $\mathrm{lip}(M)$ on meetriline aproksimatsiooniomadus, siis ruumil $\mathrm{lip}(M)$ on omadus (M_∞) (vt. teoreemi 7.10). Selle teoreemi eeldustel saame, et ruum $\mathcal{K}(\mathrm{lip}(M), Y)$ M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(\mathrm{lip}(M), Y)$ iga Banachi ruumi Y korral (vt. järeldust 7.12).

Käesolev magistritöö koosneb seitsmest peatükist.

Esimeses peatükis toome lugejani suure Lipschitzi ruumi $\mathrm{Lip}(M)$ ja väikese Lipschitzi ruumi $\mathrm{lip}(M)$ mõisted ning näitame, et tegemist on Banachi ruumidega. Täpsemalt võib mainitud ruumide kohta lugeda näiteks Ameerika matemaatiku Nik Weaveri monograafiast [W].

Teises peatükis tutvume Arensi–Eellsi ruumiga $\mathrm{AE}(M)$, mida tihti kutsutakse ka Lipschitzi vabaruumiks ja tähistatakse sel juhul $\mathcal{F}(M)$. Me näitame üksikasjalikult, et ruum $\mathrm{AE}(M)$ on ruumi $\mathrm{Lip}(M)$ eelruum (see tähendab, et ruumi $\mathrm{AE}(M)$ kaasruum on isomeetriliselt isomorfne ruumiga $\mathrm{Lip}(M)$). Siin tugineme monograafiale [W].

Kolmandas peatükis toome sisse normeeritud ruumide $(1+\varepsilon)$-isomorfsuse mõiste ja esitame üksikasjaliku tõestuse Kaltoni 2004. aasta artiklis [K2, lk 193, teoreem 6.6] skemaatiliselt tõestatud tulemusele, mille kohaselt on ruum $\mathrm{lip}(M)$ iga arvu $\varepsilon > 0$ korral $(1+\varepsilon)$-isomorfne ruumi c_0 mingi kinnise alamruumiga, kui M on kompaktne meetriline ruum (vt teoreemi 3.6).

Neljandas peatükis toome sisse M-ideaalidega seotud mõisted ja tulemused. Siin tugineme põhiliselt monograafiale [HWW]. Olulise abitulemusena tõestame, et Banachi ruumi M-ideaaliks olemine oma teises kaasruumis on $(1+\varepsilon)$-isomorfselt määratud (see tähendab, et kui Banachi ruum X on iga arvu $\varepsilon > 0$ korral $(1+\varepsilon)$-isomorfne mingi Banachi ruumiga Y_ε, mis on M-ideaal oma teises kaasruumis Y_ε^{**}, siis X on M-ideaal oma teises kaasruumis X^{**}) (vt teoreemi 4.11). Sellest järeldame, et kui M on kompaktne meetriline ruum, siis ruum $\mathrm{lip}(M)$ on M-ideaal ruumis $\mathrm{lip}(M)^{**}$ (vt teoreemi 4.12).

Viiendas peatükis tõestame, et kui M on kompaktne meetriline ruum, siis väike Hölderi ruum $\mathrm{lip}(M^\alpha)$, kus $0 < \alpha < 1$, on M-ideaal suures Hölderi ruumis $\mathrm{Lip}(M^\alpha)$ (vt teoreemi 5.14). Ühtlasi järeldame sellest, et Berningeri–Werneri probleemi vastus on jaatav (vt järeldust 5.15).

Kuuendas peatükis tõestame käesoleva magistritöö esimese põhitulemusena, et kui M on kompaktne meetriline ruum, siis ruumil $\mathrm{lip}(M)$ on omadus (M^*) (vt teoreemi 6.12). Selleks tõestame olulise abitulemusena, et omadus (M^*) on $(1+\varepsilon)$-isomorfselt määratud (vt teoreemi 6.8 ja vrd teoreemiga 4.11). Esimest põhitulemust kasutades näitame, et kui M on kompaktne meetriline ruum ja ruumil $\mathrm{lip}(M)$ on meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus, siis ruum $\mathcal{K}(\mathrm{lip}(M))$ on M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(\mathrm{lip}(M))$ (vt. teoreemi 6.17).

Seitsmendas peatükis tõestame selle magistritöö teise põhitulemusena, et kui M on kompaktne meetriline ruum ja ruumil $\mathrm{lip}(M)$ on meetriline aproksimatsiooniomadus, siis ruumil $\mathrm{lip}(M)$ on omadus (M_∞) (vt. teoreemi 7.10). Sellest järeldame, et kui M on kompaktne meetriline ruum ja ruumil $\mathrm{lip}(M)$ on meetriline aproksimatsiooniomadus, siis ruum $\mathcal{K}(\mathrm{lip}(M), Y)$ M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(\mathrm{lip}(M), Y)$ iga Banachi ruumi Y korral (vt järeldust 7.12).

Siinkohal soovin tänada dotsent Märt Põldveret mitmete kasulike soovituste ja märkuste eest.

Käesolevas magistritöös vaatleme normeeritud ruume ja Banachi ruume üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K}$ on reaalarvude korpus $\mathbb{R}$ või kompleksarvude korpus $\mathbb{C}$.

Töös kasutame järgmisi tähistusi.

Normeeritud ruumist X normeeritud ruumi Y tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite ruumi tähistatakse $\mathcal{L}(X, Y)$ ning kompaktsete lineaarsete operaatorite ruumi tähistatakse $\mathcal{K}(X, Y)$. Kui $X = Y$, siis kirjutame vastavalt $\mathcal{L}(X)$ ja $\mathcal{K}(X)$. Ruumi X kaasruumiks nimetatakse pidevate lineaarsete funktsionaalide ruumi $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, mida tähistatakse X^*. Ruumi X teist kaasruumi $(X^*)^*$ tähistatakse X^{**}.

Operaatori $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ kaasoperaatoriks nimetatakse operaatorit $T^* \colon Y^* \to X^*$, mis on määratud seosega $(T^*y^*)(x) = y^*(Tx)$, $y^* \in Y^*$, $x \in X$.

Normeeritud ruume X ja Y nimetatakse isomeetriliselt isomorfseteks, kui leidub lineaarne sürjektsioon $T \colon X \to Y$ nii, et iga $x \in X$ korral $\|Tx\| = \|x\|$. Kui normeeritud ruumid X ja Y on isomeetriliselt isomorfsed, siis seda tähistame $X \cong Y$. Normeeritud ruumi Y eelruumiks nimetame normeeritud ruumi X, mille korral $X^* \cong Y$.

Normeeritud ruumi X ühiksfääri tähistame S_X ja kinnist ühikkera tähistame B_X. Alamhulga $Y \subset X$ sulundit tähistame $\overline{Y}$.

Normeeritud ruumi X alamhulga Z kumeraks katteks nimetatakse hulka

$$\operatorname{conv} Z = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \colon\ z_i \in Z,\ \ \lambda_i \geq 0,\ \ 1 \leq i \leq n,\ \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Operaatori $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tuuma ja kujutist tähistatakse vastavalt

$$\ker T = \{x \in X \colon\ Tx = 0\}$$

ja

$$\operatorname{ran} T = \{Tx \colon\ x \in X\}.$$

Kui X on mingi hulk, siis funktsiooni $f \colon X \to \mathbb{K}$ kandjaks nimetatakse hulka

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X \colon\ f(x) \neq 0\}}.$$

Kui hulk Y on hulga X alamhulk, siis hulga Y karakteristlikuks funktsiooniks nimetatakse funktsiooni $\chi_Y \colon X \to \{0, 1\}$, kus

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in Y, \\ 0, & \text{kui } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Üheelemendilise hulga $\{x\} \subset X$ karakteristlikku funktsiooni tähistame χ_x.

PEATÜKK 1
Lipschitzi ruumid $\mathrm{Lip}(M)$ ja $\mathrm{lip}(M)$

Töö esimeses peatükis toome lugejani Lipschitzi kujutustega seotud tulemused. Defineerime normeeritud ruumid $\mathrm{Lip}(M)$ ja $\mathrm{lip}(M)$ ning näitame, et tegemist on Banachi ruumidega. Peatüki lõpus näitame, et meetrilise ruumi alamhulgal defineeritud reaalsete väärtustega Lipschitzi funktsioon on normi säilitavalt jätkatav kogu ruumile. Siin tugineme Nik Weaveri monograafiale [W].

Definitsioon 1.1. Olgu $X = (X, d_X)$ ja $Y = (Y, d_Y)$ meetrilised ruumid. Kujutust $f\colon X \to Y$ nimetatakse *Lipschitzi kujutuseks,* kui leidub arv $L \geq 0$ nii, et kõikide elementide $x, y \in X$ korral $d_Y(f(x), f(y)) \leq Ld_X(x, y)$. Kui $Y = \mathbb{K}$, siis nimetatakse Lipschitzi kujutust $f\colon X \to Y$ *Lipschitzi funktsiooniks.*

Olgu edaspidi kõikjal selles peatükis $M = (M, d)$ meetriline ruum. Kui vaatleme reaalarvude hulga mingit alamhulka meetrilise ruumina, siis loeme kahe arvu vaheliseks kauguseks nende vahe absoluutväärtuse.

Definitsioon 1.2. Meetrilist ruumi, kus on fikseeritud üks kindel punkt, nimetatakse *nullpunktiga meetriliseks ruumiks.* Fikseeritud punkti nimetatakse *nullpunktiks* ja tähistatakse sümboliga 0.

Käesolevas töös peame edaspidi meetrilise ruumi all silmas nullpunktiga meetrilist ruumi. Edaspidi eeldame kõikjal, et meetriline ruum sisaldab vähemalt kaks erinevat punkti. Kui vaatleme vektorruumi, mis on ühtlasi meetriline ruum, siis valime nullpunktiks vektorruumi nullelemendi.

Suvalise funktsiooni $f\colon M \to \mathbb{K}$ korral defineerime

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \colon \; x \neq y \right\}$$

ja tähistame

$$\mathrm{Lip}(M) = \{ f\colon M \to \mathbb{K} \; : \; \|f\|_{\mathrm{Lip}} < \infty, \; f(0) = 0 \}.$$

Seega koosneb hulk $\mathrm{Lip}(M)$ nendest Lipschitzi funktsioonidest $f\colon M \to \mathbb{K}$, mille korral $f(0) = 0$.

Selleks, et paremini mõista Lipschitzi funktsioonide geomeetriat, vaatleme Lipschitzi funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Paneme tähele, et suvaliste arvude $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, korral on suurus

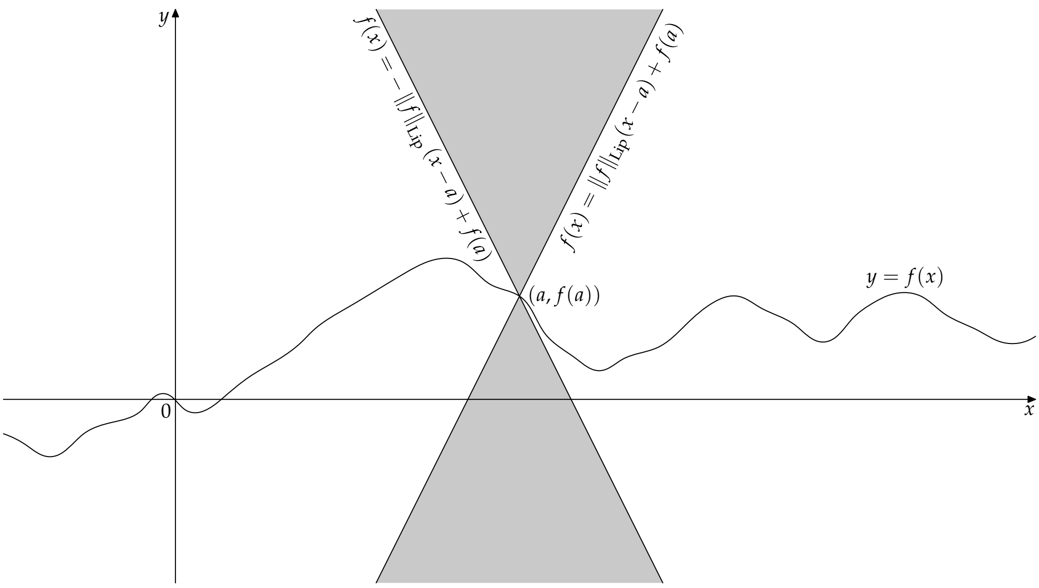
$$\frac{|f(a) - f(b)|}{|a - b|}$$

võrdne funktsiooni f graafiku punkte $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ läbiva sirge tõusu absoluutväärtusega. Seega, kui läbi funktsiooni f graafiku mis tahes punkti $(a, f(a))$ tõmmata sirged

$f(x) = \|f\|_{\mathrm{Lip}}(x-a)+f(a)$ ja $f(x) = -\|f\|_{\mathrm{Lip}}(x-a)+f(a)$, siis mõlemast sirgest ülespoole ega mõlemast sirgest allapoole funktsiooni f graafiku punkte ei jää (vt joonist 1.1). Tõepoolest, kui joonise 1.1 halliks värvitud osas leiduks mingi punkt $(b, f(b))$, siis kehtiks võrratus

$$\frac{|f(a)-f(b)|}{|a-b|} > \|f\|_{\mathrm{Lip}},$$

mis oleks vastuolus suuruse $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$ definitsiooniga.



Joonis 1.1

Näitame nüüd, et kõik Lipschitzi funktsioonid $f\colon M \to \mathbb{K}$, kus $f(0) = 0$, moodustavad loomulikul viisil normeeritud ruumi.

Teoreem 1.3. *Hulk* $\mathrm{Lip}(M)$ *on normeeritud ruum normi* $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ *suhtes.*

Tõestus. Teatavasti on funktsioonide hulk $f\colon M \to \mathbb{K}$ vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$, kus liitmine ja skalaariga korrutamine on defineeritud punktiviisi ning nullelemendiks on nullfunktsioon. Seega peame näitama, et hulk $\mathrm{Lip}(M)$ on alamruum, st kinnine liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes, ning kujutus $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}\colon \mathrm{Lip}(M) \to \mathbb{K}$ rahuldab normi aksioome.

Selleks paneme kõigepealt tähele, et kui $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = 0$, siis $f(x) = f(0)$ iga $x \in M$ korral, ja kuna $f(0) = 0$, siis f on nullfunktsioon. Seega

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \ \forall x \in M.$$

Kui $\lambda \in \mathbb{K}$ ja $f \in \mathrm{Lip}(M)$, siis

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{\mathrm{Lip}} &= \sup\left\{\frac{|(\lambda f)(x)-(\lambda f)(y)|}{d(x,y)}\colon\ x \neq y\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{|\lambda f(x)-\lambda f(y)|}{d(x,y)}\colon\ x \neq y\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{|\lambda||f(x)-f(y)|}{d(x,y)}\colon\ x \neq y\right\} \\
&= |\lambda| \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}\colon\ x \neq y\right\} = |\lambda|\|f\|_{\mathrm{Lip}},
\end{aligned}$$

mis näitab ühtlasi, et hulk $\mathrm{Lip}(M)$ on kinnine skalaariga korrutamise suhtes.

Olgu $f, g \in \mathrm{Lip}(M)$. Näitame, et $\|f+g\|_{\mathrm{Lip}} \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}} + \|g\|_{\mathrm{Lip}}$. Tõepoolest:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{\mathrm{Lip}} &= \sup\left\{\frac{|(f+g)(x)-(f+g)(y)|}{d(x,y)}\colon\ x \neq y\right\}\\
&= \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)+g(x)-g(y)|}{d(x,y)}\colon\ x \neq y\right\}\\
&\leq \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} + \frac{|g(x)-g(y)|}{d(x,y)}\colon\ x \neq y\right\}.
\end{aligned}$$

Kuna viimasel real olev hulk on hulga

$$\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}\colon\ x \neq y\right\} + \left\{\frac{|g(x)-g(y)|}{d(x,y)}\colon\ x \neq y\right\}$$

alamhulk, siis

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{\mathrm{Lip}} &\leq \sup\left(\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}\colon\ x \neq y\right\} + \left\{\frac{|g(x)-g(y)|}{d(x,y)}\colon\ x \neq y\right\}\right)\\
&= \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}\colon\ x \neq y\right\} + \sup\left\{\frac{|g(x)-g(y)|}{d(x,y)}\colon\ x \neq y\right\}\\
&= \|f\|_{\mathrm{Lip}} + \|g\|_{\mathrm{Lip}}.
\end{aligned}$$

Seega on hulk $\mathrm{Lip}(M)$ kinnine liitmise suhtes ja kujutus

$$\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}\colon\ \mathrm{Lip}(M) \to \mathbb{K}$$

rahuldab normi aksioome. $\square$

Definitsioon 1.4. Funktsiooni $f \in \mathrm{Lip}(M)$ nimetatakse *väikeseks Lipschitzi funktsiooniks*, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub arv $\delta > 0$ nii, et kui $d(x,y) \leq \delta$, siis $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon d(x,y)$.

Tähistame sümboliga $\mathrm{lip}(M)$ ruumi $\mathrm{Lip}(M)$ alamhulka, mis koosneb väikestest Lipschitzi funktsioonidest.

Iga funktsiooni $f \in \mathrm{Lip}(M)$ ja arvu $\delta > 0$ korral defineerime

$$N_f(\delta) = \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}\colon\ x \neq y,\ d(x,y) < \delta\right\},$$

kui leiduvad elemendid $x, y \in M$, $x \neq y$, nii, et $d(x,y) < \delta$, ja $N_f(\delta) = 0$, kui selliseid elemente ei leidu.

Suuruse $N_f(\delta)$ definitsioonist näeme, et kui $\delta_1 > \delta_2 > 0$, siis iga funktsiooni $f \in \mathrm{Lip}(M)$ korral $N_f(\delta_1) \geq N_f(\delta_2) \geq 0$ ja seega leidub lõplik piirväärtus

$$N_f := \lim_{\delta \to 0+} N_f(\delta) \geq 0.$$

Näide 1.5. Teatavasti nimetatakse meetrilist ruumi M diskreetseks, kui leidub arv $\delta > 0$ nii, et suvaliste elementide $x, y \in M$, $x \neq y$, korral $d(x,y) \geq \delta$. Ruumi $\mathrm{lip}(M)$ definitsioonist järeldub vahetult, et kui M on diskreetne meetriline ruum, siis $\mathrm{lip}(M) = \mathrm{Lip}(M)$. Seega, kui $\mathrm{lip}(M) \neq \mathrm{Lip}(M)$, siis iga arvu $\delta > 0$ korral

$$\{(x,y)\colon\ x \neq y,\ d(x,y) < \delta\} \neq \emptyset.$$

Hulga $\text{lip}(M)$ definitsioonist järeldub vahetult järgmine lause.

Lause 1.6. *Funktsiooni* $f \in \text{Lip}(M)$ *korral*

$$f \in \text{lip}(M) \quad \Leftrightarrow \quad N_f = 0.$$

Näitame nüüd, et $\text{lip}(M)$ on normeeritud ruum.

Teoreem 1.7. *Hulk* $\text{lip}(M)$ *on normeeritud ruumi* $\text{Lip}(M)$ *alamruum.*

Tõestus. Vaja on näidata, et alamhulk $\text{lip}(M) \subset \text{Lip}(M)$ on mittetühi ning kinnine liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes. Kui M on diskreetne meetriline ruum, siis näite 1.5 põhjal $\text{lip}(M) = \text{Lip}(M)$. Seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et M ei ole diskreetne meetriline ruum.

On selge, et nullfunktsioon kuulub hulka $\text{lip}(M)$.

Kui $f, g \in \text{lip}(M)$, siis saame, et iga arvu $\delta > 0$ korral

$$\begin{aligned}
N_{f+g}(\delta) &= \sup\left\{\frac{|(f+g)(x) - (f+g)(y)|}{d(x,y)} \colon\ x \neq y,\ \ d(x,y) < \delta\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y) + g(x) - g(y)|}{d(x,y)} \colon\ x \neq y,\ \ d(x,y) < \delta\right\} \\
&\leq \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} + \frac{|g(x) - g(y)|}{d(x,y)} \colon\ x \neq y,\ \ d(x,y) < \delta\right\} \\
&\leq \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \colon\ x \neq y,\ \ d(x,y) < \delta\right\} \\
&\quad + \sup\left\{\frac{|g(x) - g(y)|}{d(x,y)} \colon\ x \neq y,\ \ d(x,y) < \delta\right\} = N_f(\delta) + N_g(\delta).
\end{aligned}$$

Järelikult $N_{f+g} = 0$ ja seega lause 1.6 põhjal $f + g \in \text{lip}(M)$.

Olgu lõpuks $f \in \text{lip}(M)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Kuna mis tahes arvu $\delta > 0$ korral

$$\begin{aligned}
N_{\lambda f}(\delta) &= \sup\left\{\frac{|(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)|}{d(x,y)} \colon\ x \neq y,\ \ d(x,y) < \delta\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{|\lambda||f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \colon\ x \neq y,\ \ d(x,y) < \delta\right\} \\
&= |\lambda| \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \colon\ x \neq y,\ \ d(x,y) < \delta\right\} = |\lambda| N_f(\delta),
\end{aligned}$$

siis $N_{\lambda f} = |\lambda| N_f = 0$ ja järelikult lause 1.6 kohaselt $\lambda f \in \text{lip}(M)$.

Kokkuvõttes saame, et hulk $\text{lip}(M)$ on normeeritud ruumi $\text{Lip}(M)$ alamruum. □

Definitsioon 1.8. Normeeritud ruumi $\text{Lip}(M)$ nimetatakse *suureks Lipschitzi ruumiks* ja normeeritud ruumi $\text{lip}(M)$ *väikeseks Lipschitzi ruumiks.*

Näide 1.9. Kui M on reaalarvude hulga lahtine alamhulk, siis iga funktsiooni $f \in \text{lip}(M)$ ja arvude $a, x \in M$, $a \neq x$, ning arvu $\delta > 0$ korral

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \leq N_f(\delta).$$

Kuna

$$N_f = \lim_{\delta \to 0+} N_f(\delta) = 0,$$

siis

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x)-f(a)|}{|x-a|} = 0,$$

kust saame, et

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0.$$

Seega on funktsioon f diferentseeruv igas punktis $a \in M$, kusjuures $f'(a) = 0$. Järelikult on f konstantne, mis tähendab, et $f(a) = 0$ iga $a \in M$ korral, sest $f(0) = 0$. Ühtlasi saame, et antud juhul koosneb ruum $\mathrm{lip}(M)$ ainult nullfunktsioonist. Kuna näiteks samasusteisendus $I\colon M \to M$, $I(x) = x$, $x \in M$, kuulub ruumi $\mathrm{Lip}(M)$, siis $\mathrm{lip}(M) \neq \mathrm{Lip}(M)$.

Lause 1.10. *Kui funktsioonid $f_n\colon M \to \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, koonduvad punktiviisi funktsiooniks f, siis $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathrm{Lip}}$.*

Tõestus. Mooduli pidevuse tõttu

$$|f(x)-f(y)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)-f_n(y)|, \quad x,y \in M.$$

Seega suvaliste elementide $x, y \in M$, $x \neq y$, korral

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{d(x,y)} \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{d(x,y)} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathrm{Lip}}.\end{aligned}$$

Võttes supreemumi üle kõigi elementide $x, y \in M$, $x \neq y$, saame soovitud võrratuse. □

Lause 1.11. *Olgu $f_n\colon M \to \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, Lipschitzi funktsioonid. Kui rida $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ koondub punktiviisi, siis*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_{\mathrm{Lip}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Tõestus. Kui tähistada $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$, $n \in \mathbb{N}$, ja $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$, siis funktsioonid g_n koonduvad punktiviisi funktsiooniks f. Kuna $\|g_n\|_{\mathrm{Lip}} \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{\mathrm{Lip}}$, siis lause 1.10 põhjal saame, et $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_{\mathrm{Lip}} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{\mathrm{Lip}}$. □

Järgmisena näitame, et ruumid $\mathrm{Lip}(M)$ ja $\mathrm{lip}(M)$ on Banachi ruumid.

Teoreem 1.12. *Ruum* $\mathrm{Lip}(M)$ *on Banachi ruum.*

Tõestus. Piisab näidata, et ruumis $\mathrm{Lip}(M)$ iga absoluutselt koonduv rida koondub.

Olgu rida $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, kus $f_n \in \mathrm{Lip}(M)$, $n \in \mathbb{N}$, absoluutselt koonduv, st $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\mathrm{Lip}} < \infty$. Normi definitsiooni põhjal saame, et kui $x \in M$, siis $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\mathrm{Lip}} d(x,0)$, $n \in \mathbb{N}$. Seega iga elemendi $x \in M$ korral $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ ja järelikult rida $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ koondub punktiviisi mingiks funktsiooniks $f\colon M \to \mathbb{K}$. Lause 1.11 põhjal

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\mathrm{Lip}} < \infty$$

ja seega $f \in \mathrm{Lip}(M)$, sest ilmselt $f(0) = 0$. Lausest 1.11 saame samuti, et

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} f_i \right\|_{\mathrm{Lip}} = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i \right\|_{\mathrm{Lip}} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \|f_i\|_{\mathrm{Lip}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

mis annab, et rida $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ koondub funktsiooniks f ruumis $\mathrm{Lip}(M)$. □

Lause 1.13. *Ruum* $\mathrm{lip}(M)$ *on ruumi* $\mathrm{Lip}(M)$ *kinnine alamruum.*

Tõestus. Olgu $g_n \in \mathrm{lip}(M)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} g_n = g \in \mathrm{Lip}(M)$. Lause 1.6 kohaselt on vaja näidata, et $N_g = 0$. Oletame väitevastaselt, et $N_g > 0$.

Olgu $n \in \mathbb{N}$ selline, et $\|g_n - g\|_{\mathrm{Lip}} < \frac{N_g}{2}$ ehk

$$\sup \left\{ \frac{|(g_n - g)(x) - (g_n - g)(y)|}{d(x,y)} \colon\ x \neq y \right\} < \frac{N_g}{2}, \tag{1.1}$$

ja olgu $\delta > 0$ selline, et $N_{g_n}(\delta) < \frac{N_g}{4}$. Vastavalt suuruse $N_g(\delta)$ definitsioonile leiduvad elemendid $x, y \in M$, $x \neq y$, nii, et $d(x,y) < \delta$ ja

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{d(x,y)} > \frac{3N_g(\delta)}{4} \geq \frac{3N_g}{4}.$$

Kokkuvõttes saame, et

$$\begin{aligned} \frac{|(g_n - g)(x) - (g_n - g)(y)|}{d(x,y)} &= \frac{|(g_n(x) - g_n(y)) - (g(x) - g(y))|}{d(x,y)} \\ &\geq \frac{|g(x) - g(y)|}{d(x,y)} - \frac{|g_n(x) - g_n(y)|}{d(x,y)} \\ &> \frac{3N_g}{4} - \frac{N_g}{4} = \frac{N_g}{2}, \end{aligned}$$

mis on vastuolus võrratusega (1.1). Järelikult on $\mathrm{lip}(M)$ kinnine alamruum ruumis $\mathrm{Lip}(M)$. □

Teoreemist 1.12 ja lausest 1.13 järeldub vahetult järgmine teoreem.

Teoreem 1.14. *Ruum* $\mathrm{lip}(M)$ *on Banachi ruum.*

Näitame nüüd, et meetrilise ruumi alamhulgal defineeritud reaalsete väärtustega Lipschitzi funktsioon on normi säilitavalt jätkatav kogu ruumile.

Teoreem 1.15. *Kui* $M_0 \subset M$, *siis iga funktsiooni* $f_0\colon M_0 \to \mathbb{R}$ *korral leidub funktsioon* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *nii, et* $f|_{M_0} = f_0$ *ja* $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \|f_0\|_{\mathrm{Lip}}$.

Tõestus. Kui $\|f_0\|_{\mathrm{Lip}} = \infty$ või $M_0 = M$, siis on väite kehtivus ilmne. Seega võime eeldada, et $\|f_0\|_{\mathrm{Lip}} < \infty$ ja $M_0 \neq M$.

Olgu fikseeritud element $p \in M \setminus M_0$. Leiame kõigepealt funktsiooni f_0 jätku $f\colon M_0 \cup \{p\} \to \mathbb{R}$, mille korral $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \|f_0\|_{\mathrm{Lip}}$. Selleks peame defineerima väärtuse $f(p)$ nii, et iga elemendi $q \in M_0$ korral

$$|f(p) - f_0(q)| \leq \|f_0\|_{\mathrm{Lip}} d(p, q)$$

ehk

$$f_0(q) - \|f_0\|_{\mathrm{Lip}} d(p, q) \leq f(p) \leq f_0(q) + \|f_0\|_{\mathrm{Lip}} d(p, q). \tag{1.2}$$

Paneme tähele, et kui $q, q' \in M_0$, siis

$$f_0(q) - f_0(q') \leq \|f_0\|_{\mathrm{Lip}} d(q, q') \leq \|f_0\|_{\mathrm{Lip}} \left(d(p, q) + d(p, q')\right),$$

millest saame, et

$$f_0(q) - \|f_0\|_{\mathrm{Lip}} d(p, q) \leq f_0(q') + \|f_0\|_{\mathrm{Lip}} d(p, q').$$

Seega on hulk

$$\{f_0(q) - \|f_0\|_{\mathrm{Lip}} d(p, q)\colon\ q \in M_0\}$$

ülalt tõkestatud ja hulk

$$\{f_0(q') + \|f_0\|_{\mathrm{Lip}} d(p, q')\colon\ q' \in M_0\}$$

alt tõkestatud, kusjuures

$$\sup_{q \in M_0} \left(f_0(q) - \|f_0\|_{\mathrm{Lip}} d(p, q)\right) \leq \inf_{q' \in M_0} \left(f_0(q') + \|f_0\|_{\mathrm{Lip}} d(p, q')\right).$$

Saadud võrratus garanteerib tingimuse (1.2) täidetuse, kui defineerida

$$f(p) = \sup_{q \in M_0} \left(f_0(q) - \|f_0\|_{\mathrm{Lip}} d(p, q)\right).$$

Vaatleme nüüd hulka

$$F = \left\{f\colon X \to \mathbb{R}\ :\ M_0 \subset X \subset M,\ f|_{M_0} = f_0,\ \|f\|_{\mathrm{Lip}} = \|f_0\|_{\mathrm{Lip}}\right\}.$$

Paneme tähele, et $F \neq \emptyset$, sest $f_0 \in F$. Defineerime hulgas F osalise järjestuse seose $\prec$ järgmiselt:

$$f_1 \prec f_2 \quad \Leftrightarrow \quad X_1 \subset X_2 \quad \wedge \quad f_2|_{X_1} = f_1.$$

Olgu $F_1 = \{f_i\colon X_i \to \mathbb{R}\ :\ f_i \in F,\ i \in I\}$ ahel hulgas F, kus I on mingi indeksite hulk. Paneme tähele, et kui $x \in X_i \cap X_j$, siis $f_i(x) = f_j(x)$, kus $i, j \in I$. Seega võime defineerida funktsiooni $\overline{f}\colon \bigcup\limits_{i \in I} X_i \to \mathbb{R}$ seosega

$$\overline{f}(x) = f_i(x), \quad x \in X_i.$$

Kui $x_1, x_2 \in \bigcup\limits_{i \in I} X_i$, siis leiduvad indeksid $i_1, i_2 \in I$ nii, et $x_1 \in X_{i_1}$ ja $x_2 \in X_{i_2}$. Kuna F_1 on ahel, siis kehtib üks sisalduvustest $X_{i_1} \subset X_{i_2}$ või $X_{i_2} \subset X_{i_1}$; olgu üldisust kitsendamata $X_{i_1} \subset X_{i_2}$. Saame, et

$$\left|\overline{f}(x_1) - \overline{f}(x_2)\right| = |f_{i_2}(x_1) - f_{i_2}(x_2)| \leq \|f_0\|_{\mathrm{Lip}} d(x_1, x_2).$$

Seega $\left\|\overline{f}\right\|_{\mathrm{Lip}} = \|f_0\|_{\mathrm{Lip}}$ ja järelikult on $\overline{f} \in F$ hulga F_1 ülemine tõke. Kuratowski-Zorni lemma põhjal leidub hulgas F maksimaalne element $f\colon Y \to \mathbb{R}$. Kui $Y \neq M$, siis leidub element $p \in M \setminus Y$. Võttes funktsiooni f_0 rolli funktsiooni f ja hulga M_0 rolli hulga Y, saame tõestuse algul näidatud elementaarsammu põhjal leida funktsiooni f jätku $g \in F$, $g\colon Y \cup \{p\} \to \mathbb{R}$, $\|g\|_{\mathrm{Lip}} = \|f\|_{\mathrm{Lip}} = \|f_0\|_{\mathrm{Lip}}$, mis on vastuolus funktsiooni f maksimaalsusega. Järelikult $Y = M$, $f|_{M_0} = f_0$ ja $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \|f_0\|_{\mathrm{Lip}}$. □

Märkus 1.16. Teoreemi 1.15 tõestus on sarnane Hahni–Banachi teoreemi klassikalise tõestusega, mille võib leida õpikust [OO, lk-d 168–169].

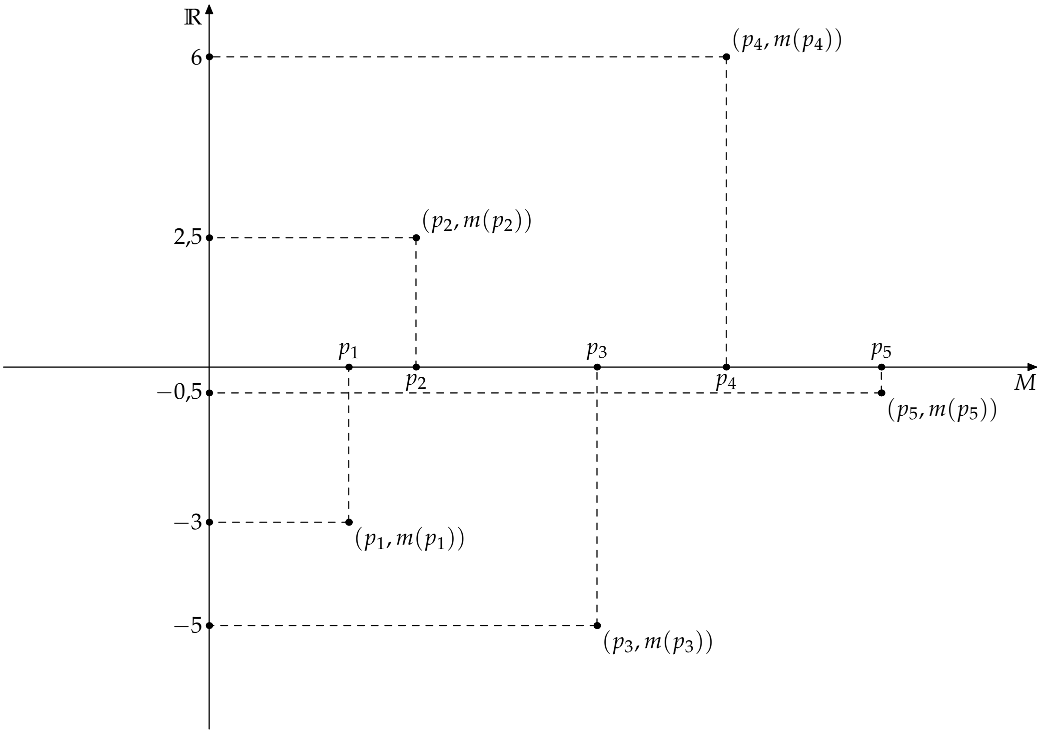
PEATÜKK 2
Arensi–Eellsi ruum $\mathrm{AE}(M)$

Käesolevas peatükis defineerime normeeritud ruumi $\mathrm{AE}(M)$, mille kaasruum on isomeetriliselt isomorfne ruumiga $\mathrm{Lip}(M)$. Ruumi $\mathrm{AE}(M)$ võttis kasutusele vene matemaatik Leonid Kantorovitš 1942. aasta artiklis [K] (vt lisaks [KA, ptk 4]). Hiljem uurisid ruumi $\mathrm{AE}(M)$ Ameerika matemaatikud Richard F. Arens ja James Eells (vt [AE]), kelle järgi nimetatakse seda Arensi–Eellsi ruumiks. Ruumi $\mathrm{AE}(M)$ kutsutakse ka Lipschitzi vabaruumiks ja tähistatakse sümboliga $\mathcal{F}(M)$ (vt näiteks [BW] või [K2]). Järgnevas tugineme monograafiale [W].

Olgu M meetriline ruum.

Definitsioon 2.1. *Molekuliks* nimetatakse funktsiooni $m\colon M \to \mathbb{K}$, mille kandja $\mathrm{supp}(m)$ on lõplik ja $\sum\limits_{p\in M} m(p) = 0$.

Märkus 2.2. Kuna iga hulk sisaldub oma sulundis, siis seega omab molekul nullist erinevat väärtust ülimalt lõplikus arvus punktides. Näiteks joonisel 2.1 on kujutatud molekul $m\colon M \to \mathbb{R}$, mis omab nullist erinevat väärtust punktides p_1, p_2, p_3, p_4 ja p_5.



Joonis 2.1

Tõestame nüüd ühe lihtsa folkloorse fakti.

Lause 2.3. *Olgu X vektorruum ja $P\colon X \to \mathbb{R}$ poolnorm ning olgu hulgal X defineeritud seos $\sim$ järgmiselt:*

$$x_1 \sim x_2 \quad \Leftrightarrow \quad P(x_1 - x_2) = 0.$$

Siis $\sim$ on ekvivalentsusseos ja faktorhulk $X/\!\sim$ on normeeritud ruum normi

$$\overline{P}\colon X/\!\sim\, \to \mathbb{R}, \quad \overline{P}(\overline{x}) = P(x), \quad \overline{x} \in X/\!\sim,$$

suhtes, kus $\overline{x}$ on elemendi $x \in X$ poolt moodustatud ekvivalentsiklass.

Tõestus. Veendume, et tegemist on tõepoolest ekvivalentsusseosega. Selleks paneme tähele, et iga $x \in X$ korral $x \sim x$, sest $P(x - x) = P(0) = 0$. Samuti kui $x_1 \sim x_2$, siis $P(x_2 - x_1) = P(x_1 - x_2) = 0$ ja seega $x_2 \sim x_1$. Kui $x_1 \sim x_2$ ja $x_2 \sim x_3$, siis kolmnurga võrratuse põhjal

$$P(x_1 - x_3) \leq P(x_1 - x_2) + P(x_2 - x_3) = 0$$

ja järelikult $x_1 \sim x_3$.

Saadud ekvivalentsiklassid moodustavad loomulikul viisil vektorruumi üle korpuse $\mathbb{K}$, kus liitmine ja skalaariga korrutamine on defineeritud seostega

$$\overline{x_1} + \overline{x_2} = \overline{x_1 + x_2}, \quad x_1, x_2 \in X,$$
$$a\overline{x} = \overline{ax}, \quad x \in X.$$

Veendume antud definitsiooni korrektsuses.

Olgu $x_1 \sim x_1', x_2 \sim x_2'$, $x \sim x'$ ja $a \in \mathbb{R}$. Paneme tähele, et

$$P(x_1 + x_2 - (x_1' + x_2')) \leq P(x_1 - x_1') + P(x_2 - x_2') = 0$$

ja

$$P(ax - ax') = |a|P(x - x') = 0.$$

Seega $x_1 + x_2 \sim x_1' + x_2'$ ja $ax \sim ax'$, mis annab, et $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1' + x_2'}$ ja $\overline{ax} = \overline{ax'}$.

Vektorruumi definitsiooni põhjal võib vahetult veenduda, et tegemist on tõepoolest vektorruumiga.

Näitame, et kujutus $\overline{P}\colon X/\!\sim\, \to \mathbb{R}$, $\overline{P}(\overline{x}) = P(x)$, $x \in X$, on norm. Definitsiooni korrektsuses veendumiseks paneme tähele, et kui $x_1 \sim x_2$, siis

$$\begin{aligned} P(x_1) &\leq P(x_1 - x_2) + P(x_2) = P(x_2) \\ &\leq P(x_2 - x_1) + P(x_1) = P(x_1) \end{aligned}$$

ja järelikult $P(x_1) = P(x_2)$.

Suvaliste elementide $x, x_1, x_2 \in X$ ning skalaari $a \in \mathbb{K}$ korral

$$\overline{P}(\overline{x}) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0 \Leftrightarrow P(x - 0) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$$

ja

$$\overline{P}(a\overline{x}) = \overline{P}(\overline{ax}) = P(ax) = |a|P(x) = |a|\overline{P}(\overline{x})$$

ning

$$\begin{aligned} \overline{P}(\overline{x_1} + \overline{x_2}) &= \overline{P}\left(\overline{x_1 + x_2}\right) = P(x_1 + x_2) \\ &\leq P(x_1) + P(x_2) = \overline{P}(\overline{x_1}) + \overline{P}(\overline{x_2}). \end{aligned}$$

Seega on $X/\!\sim$ normeeritud ruum. $\square$

Vahetu kontrolli abil saab veenduda, et molekulide hulk on vektoralamruum kõigi funktsioonide $f\colon M \to \mathbb{K}$ poolt moodustatud vektorruumis.

Defineerime iga molekuli $m\colon M \to \mathbb{K}$ korral suuruse

$$\|m\|_{\mathrm{AE}} = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_i| d(p_i, q_i)\colon \ m = \sum_{i=1}^{n} a_i m_{p_i q_i}, \ \ a_i \in \mathbb{K}, \right.$$
$$\left. p_i, q_i \in M, \ \ 1 \leq i \leq n, \ \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

kus suvaliste elementide $p, q \in M$ korral tähistame $m_{pq} = \chi_p - \chi_q$. Molekuli definitsioonist järeldub vahetult, et mis tahes elementide $p, q \in M$ korral on m_{pq} molekul.

Kuna iga molekul m esitub kujul $m = \sum_{p \in M} m(p) m_{p0}$, siis iga molekuli m korral on suurus $\|m\|_{\mathrm{AE}}$ reaalarv. Poolnormi definitsiooni põhjal on nüüd lihtne veenduda, et $\|\cdot\|_{\mathrm{AE}}$ on poolnorm molekulide vektorruumil.

Defineerime molekulide hulgal ekvivalentsusseose $\sim$ järgmiselt:

$$m_1 \sim m_2 \quad \Leftrightarrow \quad \|m_1 - m_2\|_{\mathrm{AE}} = 0.$$

Tähistame sümboliga $[m]$ molekuli m poolt määratud ekvivalentsiklassi. Lause 2.3 põhjal tekib normeeritud ruum, kui ekvivalentsiklassi $[m]$ normiks lugeda $\|m\|_{\mathrm{AE}}$. Saadud normeeritud ruumi nimetatakse Arensi–Eellsi ruumiks ja tähistatakse sümboliga $\mathrm{AE}(M) = (\mathrm{AE}(M), \|\cdot\|_{\mathrm{AE}})$. Hiljem veendume, et vaadeldavad ekvivalentsiklassid koosnevad kõik ühest elemendist, mis tähendab ühtlasi, et molekulide vektorruumil määratud poolnorm $\|\cdot\|_{\mathrm{AE}}$ osutub koguni normiks.

Näitame nüüd, et Arensi–Eellsi ruum $\mathrm{AE}(M)$ on suure Lipschitzi ruumi $\mathrm{Lip}(M)$ eelruum.

Teoreem 2.4. *Kui M on meetriline ruum, siis* $\mathrm{AE}(M)^* \cong \mathrm{Lip}(M)$.

Tõestus. Defineerime operaatori $T_1\colon \ \mathrm{AE}(M)^* \to \mathrm{Lip}(M)$ seosega

$$(T_1\phi)(p) = \phi([m_{p0}]), \quad \phi \in \mathrm{AE}(M)^*, \quad p \in M.$$

Sellest definitsioonist on vahetult näha, et operaator T_1 on lineaarne. Kuna $\|[m_{pq}]\|_{\mathrm{AE}} \leq d(p, q)$, siis suvaliste elementide $p, q \in M$ korral

$$\begin{aligned} |(T_1\phi)(p) - (T_1\phi)(q)| &= |\phi([m_{p0}]) - \phi([m_{q0}])| = |\phi([m_{p0}] - [m_{q0}])| \\ &= |\phi([m_{pq}])| \leq \|\phi\| d(p, q). \end{aligned}$$

Seega $\|T_1\phi\|_{\mathrm{Lip}} \leq \|\phi\|$ ja järelikult $T_1\phi \in \mathrm{Lip}(M)$, sest

$$(T_1\phi)(0) = \phi([0]) = 0.$$

Ühtlasi näeme, et operaator T_1 on pidev, kusjuures $\|T_1\| \leq 1$.

Defineerime nüüd operaatori $T_2\colon \ \mathrm{Lip}(M) \to \mathrm{AE}(M)^*$ seosega

$$(T_2 f)([m]) = \sum_{p \in M} m(p) f(p),$$

kus m on molekul ja $f \in \mathrm{Lip}(M)$.

Veendume kõigepealt definitsiooni korrektsuses. Olgu m_1 ja m_2 molekulid, mille korral $[m_1] = [m_2]$ ning $f \in \mathrm{Lip}(M)$. Vaja on näidata, et

$$\sum_{p \in M} m_1(p) f(p) = \sum_{p \in M} m_2(p) f(p)$$

ehk

$$\sum_{p\in M}(m_1-m_2)(p)f(p)=0.$$

Selleks paneme tähele, et iga molekuli $m=\sum_{i=1}^{n}a_i m_{p_i q_i}$ korral

$$\begin{aligned}\left|\sum_{p\in M}m(p)f(p)\right| &= \left|\sum_{p\in M}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i m_{p_i q_i}\right)(p)f(p)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}a_i(f(p_i)-f(q_i))\right| \\ &\le \sum_{i=1}^{n}|a_i|\cdot|f(p_i)-f(q_i)| \le \|f\|_{\mathrm{Lip}}\sum_{i=1}^{n}|a_i|d(p_i,q_i).\end{aligned}$$

Võttes infiimumi üle kõigi esituste $m=\sum_{i=1}^{n}a_i m_{p_i q_i}$ saame, et

$$\left|\sum_{p\in M}m(p)f(p)\right| \le \|f\|_{\mathrm{Lip}}\|[m]\|_{\mathrm{AE}}. \tag{2.1}$$

Kuna $\|[m_1-m_2]\|_{\mathrm{AE}}=\|m_1-m_2\|_{\mathrm{AE}}=0$, siis $\sum_{p\in M}(m_1-m_2)(p)f(p)=0$ ja järelikult on operaator T_2 korrektselt defineeritud. Operaatori T_2 definitsiooni põhjal on operaatorid T_2 ja T_2f lineaarsed. Võrratuse (2.1) põhjal saame, et iga molekuli m korral $|(T_2f)([m])|\le\|f\|_{\mathrm{Lip}}\|[m]\|_{\mathrm{AE}}$. Seega $T_2f\in\mathrm{AE}(M)^*$ ja $\|T_2f\|\le\|f\|_{\mathrm{Lip}}$, mis annab, et $\|T_2\|\le 1$.

Paneme tähele, et suvalise kujutuse $f\in\mathrm{Lip}(M)$ ja elemendi $p\in M$ korral

$$(T_1(T_2f))(p)=(T_2f)([m_{p0}])=\sum_{p'\in M}m_{p0}(p')\,f(p')=f(p).$$

Kuna iga molekul m esitub kujul $m=\sum_{p\in M}m(p)m_{p0}$, siis suvalise kujutuse $\phi\in\mathrm{AE}(M)^*$ korral

$$\begin{aligned}(T_2(T_1\phi))([m]) &= \sum_{p\in M}m(p)(T_1\phi)(p)=\sum_{p\in M}m(p)\phi([m_{p0}]) \\ &= \phi\left(\left[\sum_{p\in M}m(p)m_{p0}\right]\right)=\phi([m]).\end{aligned}$$

Seega on T_1 ja T_2 teineteise pöördkujutused. Kuna $\|T_1\|\le 1$ ja $\|T_2\|\le 1$, siis

$$\|T_1\phi\|\le\|\phi\|=\|T_2T_1\phi\|\le\|T_1\phi\|,$$

millest saame, et $\|T_1\phi\|=\|\phi\|$. Järelikult on operaator T_1 normi säilitav lineaarne sürjektsioon, mis annab, et $\mathrm{AE}(M)^*\cong\mathrm{Lip}(M)$. □

Märkus 2.5. Küsimus, kas ruumi $\mathrm{Lip}(M)$ eelruum on isomeetrilise isomorfismi täpsusega üheselt määratud, on lahtine (vt näiteks [W, lk 40]).

Meenutame Hahni–Banachi teoreemi ja tema olulist järeldust, teoreemi piisavast arvust funktsionaalidest, mille koos tõestustega võib leida näiteks õpikust [OO, lk-d 168–170].

Teoreem 2.6 (Hahn–Banach). *Olgu X_0 normeeritud ruumi X alamruum. Kui $x_0^*\colon X_0 \to \mathbb{K}$ on pidev lineaarne funktsionaal, siis leidub talle pidev lineaarne jätk $x^*\colon X \to \mathbb{K}$ nii, et $\|x^*\| = \|x_0^*\|$.*

Järeldus 2.7. *Olgu X normeeritud ruum, $X \neq \{0\}$. Siis iga elemendi $x \in X$ korral leidub funktsionaal $x^* \in X^*$ nii, et $\|x^*\| = 1$ ja $x^*(x) = \|x\|$.*

Olgu kujutus $T_2\colon \operatorname{Lip}(M) \to \operatorname{AE}(M)^*$ defineeritud nagu teoreemi 2.4 tõestuses. Tähistame iga molekuli m ja funktsiooni $f \in \operatorname{Lip}(M)$ korral

$$\langle f, m\rangle = (T_2 f)([m]) = \sum_{p\in M} m(p)f(p).$$

Nüüd tõestame väited, millest järeldub ühtlasi, et molekulide hulgal määratud poolnorm on tegelikult norm.

Lause 2.8. *Iga molekuli m korral $\|m\|_{\mathrm{AE}} = \sup\limits_{f\in S_{\operatorname{Lip}(M)}} |\langle f, m\rangle|$ ja leidub funktsioon $f \in S_{\operatorname{Lip}(M)}$ nii, et $\langle f, m\rangle = \|m\|_{\mathrm{AE}}$.*

Tõestus. Arvestades, et kujutus T_2 on isomeetriline isomorfism, siis järelduse 2.7 põhjal

$$\begin{aligned}\|m\|_{\mathrm{AE}} = \|[m]\|_{\mathrm{AE}} &= \sup_{\phi\in S_{\operatorname{AE}(M)^*}} |\phi([m])| \\ &= \sup_{f\in S_{\operatorname{Lip}(M)}} |(T_2 f)([m])| = \sup_{f\in S_{\operatorname{Lip}(M)}} |\langle f, m\rangle|\end{aligned}$$

ja leidub funktsionaal $\phi \in S_{\operatorname{AE}(M)^*}$ nii, et $\|[m]\|_{\mathrm{AE}} = \phi([m])$. Kui $f \in S_{\operatorname{Lip}(M)}$ on selline funktsioon, et $T_2 f = \phi$, siis saamegi võrduse $\|m\|_{\mathrm{AE}} = \langle f, m\rangle$. □

Teoreem 2.9. *Kui m on nullist erinev molekul, siis $\|m\|_{\mathrm{AE}} \neq 0$.*

Tõestus. Olgu m nullist erinev molekul ja olgu fikseeritud üks element $p \in \operatorname{supp}(m)$. Vaatleme funktsiooni $g_0\colon \operatorname{supp}(m) \to \mathbb{R}$, kus $g_0(p) = 1$ ja iga elemendi $q \in \operatorname{supp}(m) \setminus \{p\}$ korral $g_0(q) = 0$. Paneme tähele, et g_0 on Lipschitzi funktsioon ja $\|g_0\|_{\mathrm{Lip}} \neq 0$. Teoreemi 1.15 põhjal leidub funktsiooni g_0 jätk $g\colon M \to \mathbb{R}$, mille korral $\|g\|_{\mathrm{Lip}} = \|g_0\|_{\mathrm{Lip}}$. Seega funktsiooni $f := \dfrac{g}{\|g\|_{\mathrm{Lip}}} \in S_{\operatorname{Lip}(M)}$ korral $|\langle f, m\rangle| = \dfrac{|m(p)|}{\|g\|_{\mathrm{Lip}}} \neq 0$ ja järelikult lause 2.8 põhjal $\|m\|_{\mathrm{AE}} \neq 0$. □

Märkus 2.10. Teoreem 2.9 ütleb ühtlasi, et kõik molekulide ekvivalentsiklassid $[m]$ koosnevad ühest elemendist. Seda silmas pidades samastame molekulid vastavate ekvivalentsiklassidega. Seega mõistame edaspidi Arensi–Eellsi ruumi $\operatorname{AE}(M)$ all kõigi molekulide m, kus $m\colon M \to \mathbb{K}$, normeeritud ruumi.

PEATÜKK 3
(1+ε)-Isomorfsus

Selles peatükis toome sisse normeeritud ruumide (1+ε)-isomorfsuse mõiste ning anname üksikasjaliku tõestuse Kaltoni artiklis [K2, teoreem 6.6] skemaatiliselt tõestatud tulemusele (vt teoreemi 3.6), millele artiklis [K2] toodud lühike tõestus pärineb Iisraeli matemaatikult Yoav Benyaminilt.

Meenutame, et normeeritud ruume X ja Y nimetatakse isomorfseteks, kui leiduvad konstandid $\alpha, \beta > 0$ ja lineaarne sürjektsioon $T\colon X \to Y$ nii, et

$$\alpha\|Tx\| \leq \|x\| \leq \beta\|Tx\|, \quad x \in X.$$

Definitsioon 3.1. Olgu $\varepsilon > 0$. Normeeritud ruume X ja Y nimetatakse (1+ε)-*isomorfseteks*, kui leidub lineaarne sürjektsioon $T\colon X \to Y$ nii, et

$$\|Tx\| \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)\|Tx\|, \quad x \in X.$$

Kujutust T nimetatakse (1+ε)-*isomorfismiks.*

Märkus 3.2. Kui normeeritud ruumid X ja Y on (1+ε)-isomorfsed, siis ka normeeritud ruumid Y ja X on (1+ε)-isomorfsed. Tõepoolest, (1+ε)-isomorfismi definitsioonist järeldub vahetult, et kujutuse $S\colon X \to Y$, kus $S = (1+\varepsilon)T$, pöördkujutus $S^{-1} = (1+\varepsilon)^{-1}T^{-1}$ on (1+ε)-isomorfism ruumide Y ja X vahel.

Märkus 3.3. Kui normeeritud ruumid X ja Y on (1+ε_1)-isomorfsed, siis nad on (1+ε_2)-isomorfsed iga arvu $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$ korral.

Olgu c_0 kõigi nulliks koonduvate korpuse $\mathbb{K}$ elementidest moodustatud jadade hulk. Teatavasti (vt näiteks [OO, lk 31 ja lk-d 83–84]) on c_0 Banachi ruum normi

$$\|(a_n)\| = \max\{|a_n|\colon\ n \in \mathbb{N}\}, \quad (a_n) \in c_0,$$

suhtes.

Meetrilise ruumi definitsiooni põhjal saab lihtsalt veenduda, et kui (M, d) on meetriline ruum, siis hulk $M \times M$ on meetriline ruum kaugusega $d_{\max}\colon M \times M \to \mathbb{R}$, kus elementide $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times M$ korral

$$d_{\max}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)).$$

Esitame siinkohal paar lihtsasti kontrollitavat abitulemust, mis aitavad meid selle peatüki põhiteoreemi (vt teoreemi 3.6) tõestamisel.

Lemma 3.4. *Kui meetriline ruum (M, d) on kompaktne, siis ka meetriline ruum $(M \times M, d_{\max})$ on kompaktne.*

Lemma 3.5. *Olgu $\alpha, \beta > 0$, $\alpha > \beta$. Kui meetriline ruum (M, d) on kompaktne, siis hulk*

$$\{(x, y)\colon\ x, y \in M,\ \ \alpha \geq d(x, y) \geq \beta\}$$

on meetrilise ruumi $(M \times M, d_{\max})$ kompaktne alamhulk.

Esitame nüüd Kaltoni artiklis [K2, lk 193, teoreem 6.6] skemaatiliselt tõestatud teoreemile üksikasjaliku tõestuse.

Teoreem 3.6. *Kui (M, d) on kompaktne meetriline ruum, siis iga arvu $\varepsilon > 0$ korral on ruum* $\operatorname{lip}(M)$ $(1+\varepsilon)$*-isomorfne ruumi c_0 mingi kinnise alamruumiga.*

Tõestus. Olgu (M, d) kompaktne meetriline ruum ja $\varepsilon > 0$ fikseeritud reaalarv. Vaatleme kõigepealt juhtu, kui M on lõplik. Siis ka hulk

$$E = \{(x, y)\colon\ x, y \in M,\ \ x \neq y\} \subset M \times M$$

on lõplik. Järjestame hulga E elemendid (x_k, y_k), $1 \leq k \leq N$, kus $N \in \mathbb{N}$ on hulga E elementide arv. Defineerime kujutuse $T\colon \operatorname{lip}(M) \to c_0$ järgmiselt. Suvalise $f \in \operatorname{lip}(M)$ korral olgu $Tf = (a_n)$, kus $a_n = \dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{d(x_n, y_n)}$, kui $n \leq N$, ja $a_n = 0$, kui $n > N$. Siis on T lineaarne ja

$$\begin{aligned}\|Tf\| &= \max\{|a_n|\colon\ n \in \mathbb{N}\}\\ &= \max\left\{\frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{d(x_n, y_n)}\colon\ n \leq N\right\} = \|f\|_{\operatorname{Lip}(M)}.\end{aligned}$$

Seega on ruum $\operatorname{lip}(M)$ isomeetriliselt isomorfne, järelikult ka $(1+\varepsilon)$-isomorfne, ruumiga $\operatorname{ran} T \subset c_0$. Kuna isomorfism viib Banachi ruumi Banachi ruumiks, siis $\operatorname{ran} T$ on kinnine.

Vaatleme nüüd juhtu, kui M on lõpmatu. Vastavalt märkusele 3.3 võime eeldada, et $\varepsilon \leq 2$. Lemma 3.4 põhjal on $(M \times M, d_{\max})$ kompaktne meetriline ruum. Tähistame iga arvu $k \in \mathbb{Z}$ korral (vt joonist 3.1, kui $M = [0, 1]$)

$$E_k = \{(x, y)\colon\ x, y \in M,\ \ 2^k \leq d(x, y) \leq 2^{k+1}\}.$$

Kuna M on kompaktne, aga ei ole lõplik, siis leidub lõpmata palju täisarve $k \in \mathbb{Z}$, mille korral $E_k \neq \emptyset$.

Vastavalt lemmale 3.5 on E_k iga arvu $k \in \mathbb{Z}$ korral kompaktne hulk meetrilises ruumis $M \times M$ ja seega Hausdorffi teoreemi kohaselt leidub iga arvu $k \in \mathbb{Z}$ korral hulgas E_k lõplik $2^{k-3}\varepsilon$-võrk F_k.

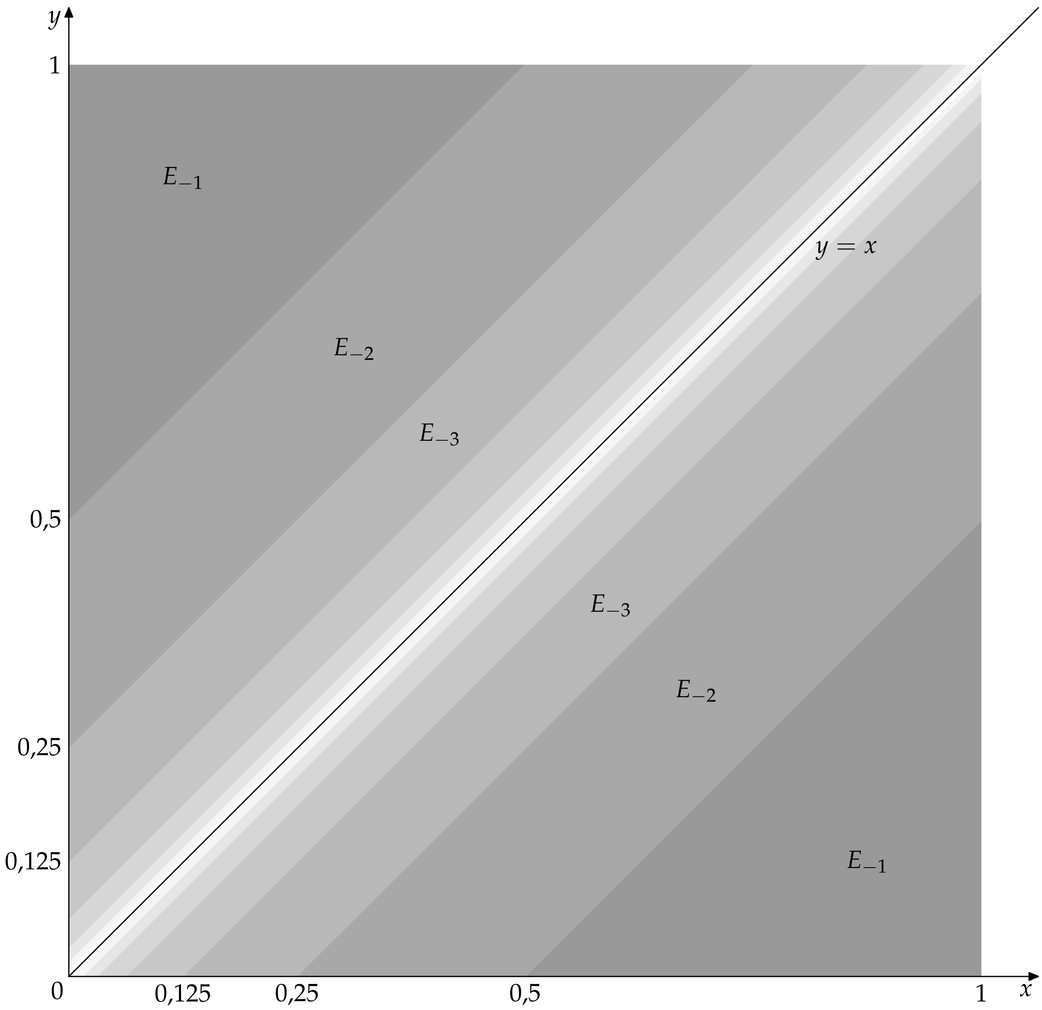
Kuna kompaktse meetrilise ruumi diameeter on lõplik, siis on ruumi M diameeter $D_M = \sup\{d(x, y)\colon\ x, y \in M\}$ lõplik. Seega leidub arv N nii, et $2^N > D_M$. Seetõttu on E_k ja F_k tühjad hulgad, kui $k \geq N$.

Hulk $F = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} F_k$ on loenduv kui lõplike hulkade loenduv ühend. Järjestame hulga F elemendid jadana $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Paneme tähele, et iga arvu $\delta > 0$ korral leidub lõplik hulk täisarve k, mille korral $k < N$ ja $2^{k+1} \geq \delta$. Seega leidub lõplik hulk täisarve k, mille korral $F_k \neq \emptyset$ ja $2^{k+1} \geq \delta$. Kuna lõplike hulkade lõplik ühend on lõplik, siis on hulk $\{(x_n, y_n)\colon\ n \in \mathbb{N},\ \ d(x_n, y_n) \geq \delta\}$ lõplik ja seetõttu

$$d(x_n, y_n) \to 0,\ \text{kui } n \to \infty. \tag{3.1}$$

Defineerime kujutuse $T\colon \operatorname{lip}(M) \to c_0$ järgmiselt. Suvalise funktsiooni $f \in \operatorname{lip}(M)$ korral olgu $Tf = (a_n)$, kus $a_n = \dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{d(x_n, y_n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Siis on T lineaarne ning vastavalt hulga



Joonis 3.1

$\mathrm{lip}(M)$ elementide definitsioonile ja seosele (3.1) saame, et $a_n \to 0$, kui $n \to \infty$. Seega $(a_n) \in c_0$ ja järelikult on kujutus T korrektselt defineeritud.

Pidades silmas ruumide $\mathrm{Lip}(M)$ ja c_0 normide definitsioone näeme, et $\|Tf\| \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}}$ iga $f \in \mathrm{lip}(M)$ korral.

Kui $x \neq y$, siis leiduvad arv $k \in \mathbb{Z}$ nii, et $2^k \leq d(x,y) \leq 2^{k+1}$ ja element $(x',y') \in F_k$, mille korral $d(x',x), d(y',y) \leq 2^{k-3}\varepsilon$. Seega

$$d(x',x), d(y',y) \leq \frac{\varepsilon}{8} d(x,y) \tag{3.2}$$

ja nelinurga võrratuse põhjal

$$d(x',y') - d(x,y) \leq d(x',x) + d(y',y) \leq \frac{\varepsilon}{4} d(x,y)$$

ning järelikult

$$d(x',y') \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) d(x,y). \tag{3.3}$$

Juhul, kui $x' \neq x$ ja $y' \neq y$, siis seose (3.2) põhjal saame, et

$$\begin{aligned}\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} &= \frac{|f(x) - f(x') + f(x') - f(y') + f(y') - f(y)|}{d(x,y)} \\ &\leq \frac{|f(x) - f(x')|}{d(x,y)} + \frac{|f(x') - f(y')|}{d(x,y)} + \frac{|f(y') - f(y)|}{d(x,y)}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon \left| f(x) - f\left(x'\right) \right|}{8d\left(x, x'\right)} + \frac{\left| f\left(x'\right) - f\left(y'\right) \right|}{d(x,y)} + \frac{\varepsilon \left| f\left(y'\right) - f(y) \right|}{8d\left(y', y\right)},$$

mis normi $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$ definitsiooni ja seose (3.3) põhjal annab, et

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} &\leq \frac{\left| f\left(x'\right) - f\left(y'\right) \right|}{d(x,y)} + \frac{\varepsilon}{4}\|f\|_{\mathrm{Lip}} \\
&\leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \frac{\left| f\left(x'\right) - f\left(y'\right) \right|}{d\left(x', y'\right)} + \frac{\varepsilon}{4}\|f\|_{\mathrm{Lip}} \\
&\leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \|Tf\| + \frac{\varepsilon}{4}\|f\|_{\mathrm{Lip}}.
\end{aligned}$$

Kui $x' = x$ ja $y' \neq y$, siis saame sarnaselt, et

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} &\leq \frac{\left| f\left(x'\right) - f\left(y'\right) \right|}{d(x,y)} + \frac{\left| f\left(y'\right) - f(y) \right|}{d(x,y)} \\
&\leq \frac{\left| f\left(x'\right) - f\left(y'\right) \right|}{d(x,y)} + \frac{\varepsilon \left| f\left(y'\right) - f(y) \right|}{8d\left(y', y\right)} \\
&\leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \frac{\left| f\left(x'\right) - f\left(y'\right) \right|}{d\left(x', y'\right)} + \frac{\varepsilon}{8}\|f\|_{\mathrm{Lip}} \\
&\leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \|Tf\| + \frac{\varepsilon}{8}\|f\|_{\mathrm{Lip}}.
\end{aligned}$$

Sama võrratus kehtib, kui $x' \neq x$ ja $y' = y$. Kui aga $x' = x$ ja $y' = y$, siis koguni

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \leq \|Tf\|.$$

Järelikult

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \|Tf\| + \frac{\varepsilon}{4}\|f\|_{\mathrm{Lip}}$$

ehk

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) \|Tf\|. \tag{3.4}$$

Kuna $\varepsilon \leq 2$, siis

$$(1 + \varepsilon)\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) = 1 - \frac{\varepsilon}{4} + \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4} \geq 1 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Seega kehtib võrratus

$$\frac{1 + \frac{\varepsilon}{4}}{1 - \frac{\varepsilon}{4}} \leq 1 + \varepsilon$$

ning võrratuse (3.4) põhjal saame, et

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq \frac{1 + \frac{\varepsilon}{4}}{1 - \frac{\varepsilon}{4}}\|Tf\| \leq (1 + \varepsilon)\|Tf\|.$$

Sellega oleme näidanud, et ruum $\mathrm{lip}(M)$ on $(1{+}\varepsilon)$-isomorfne ruumiga $\operatorname{ran} T \subset c_0$. Kuna isomorfism viib kinnise alamruumi kinniseks alamruumiks, siis $\operatorname{ran} T$ on kinnine. $\square$

PEATÜKK 4
M-Ideaalid

Selles peatükis toome sisse Banachi ruumi M-ideaali ja sellega seotud mõisted. Peatüki põhitulemusena näitame, et teises kaasruumis M-ideaaliks olemine on $(1+\varepsilon)$-isomorfselt määratud (vt teoreemi 4.11). Sellest tulemusest ja teoreemist 3.6 järeldub vahetult, et ruum $\operatorname{lip}(M)$ on M-ideaal ruumis $\operatorname{lip}(M)^{**}$ (vt teoreemi 4.12). See tulemus on motiveeritud Kaltoni märkusest, mis järgnes väite [K2, teoreem 6.6] tõestusele (vt teoreemi 4.13). Täpsemalt võib M-ideaalide kohta lugeda monograafiast [HWW].

Definitsioon 4.1. Normeeritud ruumi X *loomulikuks sisestuseks oma teise kaasruumi* X^{**} nimetatakse kujutust $j_X\colon X \to X^{**}$, $j_X x = F_x, x \in X$, kus $F_x\colon X^* \to \mathbb{K}$ on defineeritud seosega

$$F_x(x^*) = x^*(x), \quad x^* \in X.$$

Järelduse 2.7 abil näeme, et kui $x \in X$, siis

$$\begin{aligned}\|j_X x\| &= \|F_x\| = \sup\{|F_x(x^*)|\colon\ x^* \in B_{X^*}\}\\ &= \sup\{|x^*(x)|\colon\ x^* \in B_{X^*}\} = \|x\|.\end{aligned}$$

Kujutuse j_X definitsiooni põhjal saab vahetult veenduda, et tegemist on lineaarse kujutusega. Seega on j_X isomeetriline isomorfism ruumide X ja $\operatorname{ran} j_X$ vahel. Sellest tulenevalt ruumid X ja $\operatorname{ran} j_X$ tihtipeale samastatakse ning kirjutatakse $X = \operatorname{ran} j_X$ ja $X \subset X^{**}$.

Definitsioon 4.2. Olgu X vektorruum. Lineaarset kujutust $P\colon X \to X$ nimetatakse *projektoriks*, kui $P^2 = P$.

Definitsioon 4.3. Normeeritud ruumi X alamruumi Z *annullaatoriks* nimetatakse hulka

$$Z^\perp = \{x^* \in X^*\colon\ x^*(z) = 0\ \ \forall z \in Z\}.$$

Definitsioon 4.4. Öeldakse, et Banachi ruumi X kinnine alamruum Z on *M-ideaal*, kui leidub projektor $P\colon X^* \to X^*$ nii, et $\operatorname{ran} P = Z^\perp$ ja iga funktsionaali $x^* \in X^*$ korral

$$\|x^*\| = \|Px^*\| + \|x^* - Px^*\|.$$

Märkus 4.5. Definitsioonis 4.4 vaadeldav projektor on pidev, sest iga funktsionaali $x^* \in X^*$ korral $\|Px^*\| \le \|x^*\|$.

Märkus 4.6. Paneme tähele, et ühtepidi võrratus kehtib tänu kolmnurga võrratusele alati:

$$\|x^*\| = \|Px^* + x^* - Px^*\| \le \|Px^*\| + \|x^* - Px^*\|.$$

Esitame järgnevalt kaks folkloorset fakti, mille tõestused võib leida monograafiast [HWW, lk 105 ja lk 111].

Lause 4.7. *Ruum c_0 on M-ideaal oma teises kaasruumis c_0^{**}.*

Lause 4.8. *Kui ruum X on M-ideaal oma teises kaasruumis X^{**} ja $Y \subset X$ on kinnine alamruum, siis ruum Y on M-ideaal oma teises kaasruumis Y^{**}.*

Lausetest 4.7 ja 4.8 saame järgmise folkloorse fakti.

Lause 4.9. *Kui Y on ruumi c_0 kinnine alamruum, siis Y on M-ideaal oma teises kaasruumis Y^{**}.*

Sõnastame järgnevalt teoreemi, mille koos tõestusega võib leida Åsvald Lima, Eve Oja, Taduri S. S. R. K. Rao ja Dirk Werneri 1994. aasta artiklist [LORW, lk 478, lause 2.8] ning monograafiast [HWW, lk 113, lause 1.9].

Teoreem 4.10. *Olgu X Banachi ruum. Järgmised tingimused on samaväärsed:*

(a) *X on M-ideaal oma teises kaasruumis X^{**},*

(b) *mis tahes arvu $\varepsilon > 0$, elemendi $x \in S_X$ ja jada $(x_n) \subset S_X$ korral leiduvad arv $n \in \mathbb{N}$ ning elemendid $u \in \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$ ja $t \in \operatorname{conv}\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ nii, et $\|x + t - u\| \leq 1 + \varepsilon$.*

Kasutades äsja toodud teoreemi tõestame selle peatüki põhitulemuse, mis ütleb, et teises kaasruumis M-ideaaliks olemine on $(1+\varepsilon)$-isomorfselt määratud.

Teoreem 4.11. *Olgu X Banachi ruum. Kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral on ruum X $(1+\varepsilon)$-isomorfne mingi Banachi ruumiga Y_ε, kus Y_ε on M-ideaal oma teises kaasruumis Y_ε^{**}, siis X on M-ideaal oma teises kaasruumis X^{**}.*

Tõestus. Näitame, et ruumi X korral kehtib teoreemi 4.10 tingimus (b).

Fikseerime arvu $\varepsilon > 0$, elemendi $x \in S_X$ ja jada $(x_n) \subset S_X$. Olgu $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$ nii, et $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{\varepsilon}{5}$ ja olgu ruum X $(1+\varepsilon_1)$-isomorfne Banachi ruumiga Y_{ε_1}, kus Y_{ε_1} on M-ideaal oma teises kaasruumis $Y_{\varepsilon_1}^{**}$. Seega leidub lineaarne sürjektsioon $T\colon X \to Y_{\varepsilon_1}$ nii, et

$$\|Tx\| \leq \|x\| \leq (1 + \varepsilon_1)\|Tx\|, \tag{4.1}$$

kui $x \in X$. Tähistame iga arvu $n \in \mathbb{N}$ korral $y_n = Tx_n$ ja $y = Tx$. Arvestades, et $x \in S_X$ ja $(x_n) \subset S_X$, saame, et $\|y_n\| \leq 1 \leq (1 + \varepsilon_1)\|y_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, ja $\|y\| \leq 1 \leq (1 + \varepsilon_1)\|y\|$. Seega $1 \leq \dfrac{1}{\|y_n\|} \leq 1 + \varepsilon_1$, $n \in \mathbb{N}$, ja $1 \leq \dfrac{1}{\|y\|} \leq 1 + \varepsilon_1$. Defineerides $a = \dfrac{1}{\|y\|}$, $a_n = \dfrac{1}{\|y_n\|}$, $n \in \mathbb{N}$, saame, et $\|ay\| = 1$ ja $\|a_n y_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Vaatleme funktsiooni $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega

$$g(t) = (1 + t)(1 + \varepsilon_1) + 3\varepsilon_1 - 1 - \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tegemist on pideva rangelt kasvava funktsiooniga, kusjuures $g(0) < 0$, sest $\varepsilon_1 < \dfrac{\varepsilon}{5}$. Seega leidub arv $\varepsilon_2 > 0$ nii, et $g(\varepsilon_2) < 0$ ehk

$$(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_1) + 3\varepsilon_1 < 1 + \varepsilon. \tag{4.2}$$

Kuna ruum Y_{ε_1} on M-ideaal oma teises kaasruumis $Y_{\varepsilon_1}^{**}$, siis teoreemi 4.10 põhjal leiduvad arv $n \in \mathbb{N}$ ning elemendid

$$u_Y \in \operatorname{conv}\{a_1 y_1, \ldots, a_n y_n\} \quad \text{ja} \quad t_Y \in \operatorname{conv}\{a_{n+1} y_{n+1}, a_{n+2} y_{n+2}, \ldots\}$$

nii, et

$$\|ay + t_Y - u_Y\| \le 1 + \varepsilon_2. \tag{4.3}$$

Kuna $u_Y \in \operatorname{conv}\{a_1 y_1, \dots, a_n y_n\}$ ja $t_Y \in \operatorname{conv}\{a_{n+1} y_{n+1}, a_{n+2} y_{n+2}, \dots\}$, siis leidub arv $m \in \mathbb{N}, m > n$, ja sellised arvud $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_m \in [0,1]$ nii, et $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ ja $\lambda_{n+1} + \dots + \lambda_m = 1$ ning $u_Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i y_i$ ja $t_Y = \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i a_i y_i$. Operaatori T lineaarsuse tõttu

$$\begin{aligned} &T\left(ax + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i x_i\right) \\ &\qquad = ay + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i a_i y_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i y_i = ay + t_Y - u_Y. \end{aligned}$$

Kasutades seoseid (4.1), (4.2) ja (4.3) saame, et

$$\begin{aligned} \left\|ax + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i x_i\right\| &\le (1+\varepsilon_1)\,\|ay + t_Y - u_Y\| \\ &\le (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) < 1 + \varepsilon - 3\varepsilon_1. \end{aligned}$$

Nüüd paneme tähele, et

$$\begin{aligned} &\left\|x + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\| \\ &= \Bigg\|ax + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i x_i \\ &\qquad - \left((a-1)x + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i (a_i - 1) x_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - 1) x_i\right)\Bigg\| \\ &\le \left\|ax + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i x_i\right\| \\ &\qquad + \left\|(a-1)x + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i (a_i - 1) x_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - 1) x_i\right\| \\ &< 1 + \varepsilon - 3\varepsilon_1 + (a-1)\|x\| + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i (a_i - 1)\|x_i\| + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - 1)\|x_i\| \\ &= 1 + \varepsilon - 3\varepsilon_1 + (a-1) + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i (a_i - 1) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - 1). \end{aligned}$$

Seega, kuna $1 \le a \le 1 + \varepsilon_1$ ja $1 \le a_i \le 1 + \varepsilon_1$, $i \in \mathbb{N}$, siis

$$\begin{aligned} \left\|x + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\| &< 1 + \varepsilon - 3\varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i \varepsilon_1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_1 \\ &= 1 + \varepsilon - 3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_1 = 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Tähistades $t = \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i x_i$ ja $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, oleme näidanud, et suvalise reaalarvu $\varepsilon > 0$, elemendi $x \in S_X$ ja jada $(x_n) \subset S_X$ korral leiduvad arv $n \in \mathbb{N}$ ning elemendid $u \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_n\}$ ja

$t \in \operatorname{conv}\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ nii, et $\|x + t - u\| < 1 + \varepsilon$. Seega teoreemi 4.10 põhjal on ruum X M-ideaal oma teises kaasruumis X^{**}. $\square$

Teoreemidest 3.6 ja 4.11 ning lausest 4.9 saame järgmise tulemuse.

Teoreem 4.12 (Kalton)**.** *Kui M on kompaktne meetriline ruum, siis ruum* $\operatorname{lip}(M)$ *on M-ideaal ruumis* $\operatorname{lip}(M)^{**}$.

Toome siinkohal Kaltoni poolt pärast tulemuse [K2, lk 193, teoreem 6.6] tõestust märkuses sõnastatud väite.

Teoreem 4.13 (Kalton)**.** *Kui M on kompaktne meetriline ruum ning* $\operatorname{lip}(M)^* = \operatorname{AE}(M)$, *siis* $\operatorname{lip}(M)$ *on M-ideaal ruumis* $\operatorname{Lip}(M)$.

PEATÜKK 5
Hölderi ruumid

Käesolevas peatükis näitame üksikasjalikult, kuidas järeldub teoreemist 4.12 Berningeri–Werneri probleemi positiivne lahendus (vt järeldust 5.15). Selleks tõestame üldisema väite, mille kohaselt ruum $\mathrm{lip}(M^\alpha)$ on M-ideaal ruumis $\mathrm{Lip}(M^\alpha)$, kui M on kompaktne meetriline ruum ja $\alpha \in (0,1)$ (vt teoreemi 5.14). Siin tugineme monograafiale [W].

Olgu kõikjal selles peatükis $\alpha \in (0,1)$. Tõestame kõigepealt mõned abitulemused.

Lause 5.1. *Kui (M,d) on meetriline ruum, siis (M,d^α) on meetriline ruum, kus kaugus d^α on defineeritud seosega*

$$d^\alpha(x,y) = d(x,y)^\alpha, \quad x,y \in M.$$

Tõestus. Samasuse ja sümmeetria aksioomide kehtivus järeldub vahetult sellest, et kujutus d rahuldab neid aksioome. Kolmnurga võrratuse põhjendamiseks piisab näidata, et suvaliste elementide $x,y,z \in M$ korral kehtib võrratus

$$(d(x,z) + d(z,y))^\alpha \leq d(x,z)^\alpha + d(z,y)^\alpha. \tag{5.1}$$

Selleks vaatleme fikseeritud arvude $a,b \in \mathbb{R}$, $0 < a \leq b$, korral funktsiooni $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, kus $f(\lambda) = (\lambda a + b)^\alpha$, $\lambda \in [0,1]$. Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal leidub arv $\xi \in (0,1)$ nii, et $f(1) - f(0) = f'(\xi)$. Seega

$$(a+b)^\alpha - b^\alpha = \alpha(\xi a + b)^{\alpha-1} a < (\xi a + b)^{\alpha-1} a < \left(\xi + \frac{b}{a}\right)^{\alpha-1} a^\alpha < a^\alpha$$

ja järelikult, kui $x \neq y$ ja $y \neq z$, siis võrratus (5.1) kehtib. Kui $x = y$ või $y = z$, siis kehtib võrratus (5.1) triviaalselt. □

Definitsioon 5.2. Meetrilist ruumi (M,d^α) nimetatakse *Hölderi meetriliseks ruumiks* ja tähistatakse sümboliga M^α. Meetrikat d^α nimetatakse *Hölderi meetrikaks.*

Definitsioon 5.3. Ruumi $\mathrm{lip}(M^\alpha)$ nimetatakse *väikeseks Hölderi ruumiks* ja ruumi $\mathrm{Lip}(M^\alpha)$ *suureks Hölderi ruumiks.*

Märkus 5.4. Olgu M on reaalarvude hulga lahtine tõkestatud alamhulk. Näite 1.9 põhjal $\mathrm{lip}(M) = \{0\}$. Samas kehtib sisalduvus $\mathrm{Lip}(M) \subset \mathrm{lip}(M^\alpha)$. Tõepoolest, olgu $f \in \mathrm{Lip}(M)$ ja tähistame $N = \sup\{|x|\colon\ x \in M\}$. Siis

$$\begin{aligned}&\sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\colon\ x \neq y\right\}\\ &\quad= \sup\left\{|x-y|^{1-\alpha}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}\colon\ x \neq y\right\}\end{aligned}$$

$$\leq (2N)^{1-\alpha} \sup \left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \colon \ x \neq y \right\} < \infty$$

ja seega $f \in \operatorname{Lip}(M^\alpha)$. Nüüd saame, et

$$\begin{aligned} N_f &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup \left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \colon \ x \neq y, \ |x-y|^\alpha < \varepsilon \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup \left\{ |x-y|^{1-\alpha} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \colon \ x \neq y, \ |x-y|^\alpha < \varepsilon \right\} \\ &\leq \lim_{\varepsilon \to 0+} \sup \left\{ |x-y|^{1-\alpha} \|f\|_{\mathrm{Lip}} \colon \ x \neq y, \ |x-y|^\alpha < \varepsilon \right\} = 0 \end{aligned}$$

ning lause 1.6 põhjal $f \in \operatorname{lip}(M^\alpha)$.

Samas, kui $M \subset \mathbb{R}$ on tõkestamata, siis $I \in \operatorname{Lip}(M)$, kus $I(x) = x$, $x \in M$, kuid ruumi $\operatorname{Lip}(M^\alpha)$ normi definitsiooni põhjal saab lihtsalt veenduda, et $I \notin \operatorname{Lip}(M^\alpha)$.

Märkus 5.5. Sarnaselt märkusega 5.4 saab näidata, et iga lahtise tõkestatud alamhulga $M \subset \mathbb{R}^n$, kus $n \in \mathbb{N}$, korral $\operatorname{Lip}(M) \subset \operatorname{lip}(M^\alpha)$.

Lause 5.6. *Kui meetriline ruum M on kompaktne, siis meetriline ruum M^α on kompaktne.*

Tõestus. Olgu (x_n) jada meetrilises ruumis $M^\alpha = (M, d^\alpha)$. Ruumi (M, d) kompaktsuse tõttu leidub jada (x_n) osajada (x_{n_i}) ja element $a \in M$ nii, et $\lim_{i\to\infty} d(x_{n_i}, a) = 0$. Seega ka $\lim_{i\to\infty} d(x_{n_i}, a)^\alpha = 0$, st jada (x_{n_i}) koondub ruumis M^α. □

Kasutades kahte järgmist lauset (vt näiteks [OO, lk 178 ja lk 179]) tõestame, et kui kujutus $T \colon X \to Y$ on $(1+\varepsilon)$-isomorfism, kus $\varepsilon > 0$, siis kaasoperaator $T^* \colon Y^* \to X^*$ on ka $(1+\varepsilon)$-isomorfism (vt lemmat 5.9).

Olgu X ja Y normeeritud ruumid.

Lause 5.7. *Kui $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, siis $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ ja $\|A^*\| = \|A\|$.*

Lause 5.8. *Kui $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ja leidub $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, siis on olemas ka $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$ ning $(A^*)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^*$.*

Lemma 5.9. *Olgu $\varepsilon > 0$. Kui operaator $T \colon X \to Y$ on $(1+\varepsilon)$-isomorfism, siis kaasoperaator $T^* \colon Y^* \to X^*$ on $(1+\varepsilon)$-isomorfism.*

Tõestus. Kuna $\|Tx\| \leq \|x\|$ iga $x \in X$ korral, siis $\|T\| \leq 1$. Seega lause 5.7 põhjal $\|T^*\| \leq 1$, mis annab, et iga $y^* \in Y^*$ korral $\|T^* y^*\| \leq \|y^*\|$. Kuna T on isomorfism, siis leidub T^{-1}, kusjuures iga $y \in Y$ korral

$$\left\|T^{-1} y\right\| \leq (1+\varepsilon) \left\|T\left(T^{-1} y\right)\right\| = (1+\varepsilon)\|y\|.$$

Seega $\left\|T^{-1}\right\| \leq 1 + \varepsilon$ ning lausete 5.7 ja 5.8 põhjal saame, et

$$\left\|(T^*)^{-1}\right\| = \left\|\left(T^{-1}\right)^*\right\| \leq 1 + \varepsilon.$$

Järelikult iga $y^* \in Y^*$ korral

$$\|y^*\| = \left\|(T^*)^{-1} T^* y^*\right\| \leq (1+\varepsilon)\|T^* y^*\|.$$ □

Analoogiliselt saab tõestada järgmise lemma.

Lemma 5.10. *Kui operaator* $T\colon X \to Y$ *on isomeetriline isomorfism, siis kaasoperaator* $T^*\colon Y^* \to X^*$ *on isomeetriline isomorfism.*

Näitame, et Banachi ruumide vaheline isomeetriline isomorfism viib M-ideaali M-ideaaliks.

Lause 5.11. *Olgu* $T\colon X \to Y$ *on isomeetriline isomorfism Banachi ruumide* X *ja* Y *vahel. Kui kinnine alamruum* Z *on* M*-ideaal ruumis* X*, siis* $T(Z)$ *on* M*-ideaal ruumis* Y*.*

Tõestus. Lemma 5.10 põhjal on kaasoperaator $T^*\colon Y^* \to X^*$ isomeetriline isomorfism ruumide Y^* ja X^* vahel. Kuna alamruum Z on M-ideaal ruumis X, siis leidub projektor $P_X\colon X^* \to X^*$ nii, et $\operatorname{ran} P_X = Z^\perp$ ja iga $x^* \in X^*$ korral

$$\|x^*\| = \|P_X x^*\| + \|x^* - P_X x^*\|.$$

Defineerime operaatori $P_Y\colon Y^* \to Y^*$ seosega

$$P_Y(y^*) = (T^*)^{-1}(P_X(T^* y^*)), \quad y^* \in Y^*.$$

Operaatorite T^* ja $(T^*)^{-1}$ ning projektori P_X lineaarsusest järeldub vahetult operaatori P_Y lineaarsus. Samuti

$$\begin{aligned} P_Y^2(y^*) &= P_Y\left((T^*)^{-1}(P_X(T^*y^*))\right) \\ &= (T^*)^{-1}\left(P_X\left(T^*\left((T^*)^{-1}(P_X(T^*y^*))\right)\right)\right) \\ &= (T^*)^{-1}(P_X(T^*y^*)) = P_Y(y^*), \quad y^* \in Y^*. \end{aligned}$$

Seega on P_Y projektor.

Näitame, et $\operatorname{ran} P_Y = T(Z)^\perp$. Olgu $y^* \in Y^*$ ja $y \in T(Z)$. Siis lause 5.8 põhjal saame, et

$$(P_Y y^*)(y) = (T^*)^{-1}(P_X(T^*y^*))(y) = P_X(T^*y^*)\left(T^{-1}y\right) = 0,$$

sest $P_X(T^*y^*) \in Z^\perp$ ja $T^{-1}y \in Z$. Seega $\operatorname{ran} P_Y \subset T(Z)^\perp$. Olgu nüüd $z^* \in T(Z)^\perp$. Siis iga $z \in Z$ korral

$$(T^*z^*)(z) = z^*(Tz) = 0.$$

Seega $T^*z^* \in Z^\perp$, millest saame, et $P_X(T^*z^*) = T^*z^*$ ja järelikult

$$z^* = (T^*)^{-1}(P_X(T^*z^*)) = P_Y(z^*).$$

Kokkuvõttes oleme saanud, et $\operatorname{ran} P_Y = T(Z)^\perp$.

Tõestuse lõpetuseks paneme tähele, et iga $y^* \in Y^*$ korral

$$\begin{aligned} \|P_Y y^*\| + \|y^* - P_Y y^*\| &= \left\|(T^*)^{-1}P_X(T^*y^*)\right\| \\ &\quad + \left\|T^*\left(y^* - (T^*)^{-1}(P_X(T^*y^*))\right)\right\| \\ &= \|P_X(T^*y^*)\| + \|T^*y^* - P_X(T^*y^*)\| \\ &= \|T^*y^*\| = \|y^*\|. \end{aligned}$$

Kuna isomorfism viib kinnise alamruumi kinniseks alamruumiks, siis järelikult on ruum $T(Z)$ M-ideaal ruumis Y. $\square$

Monograafias [W, lause 3.2.2(b) ja teoreem 3.3.3] on näidatud, et kui M on kompaktne meetriline ruum, siis $\operatorname{lip}(M^\alpha)^* \cong \operatorname{AE}(M^\alpha)$, kusjuures isomeetrilise isomorfismi realiseerib kujutus $T\colon \operatorname{AE}(M^\alpha) \to \operatorname{lip}(M^\alpha)^*$, kus $(Tm)(f) = \langle f, m\rangle = \sum_{p\in M} m(p)f(p)$ iga $f \in \operatorname{lip}(M^\alpha)$ ja $m \in \operatorname{AE}(M^\alpha)$ korral.

Lemma 5.10 põhjal on operaator $(T^*)^{-1}\colon \operatorname{AE}(M^\alpha)^* \to \operatorname{lip}(M^\alpha)^{**}$, kus

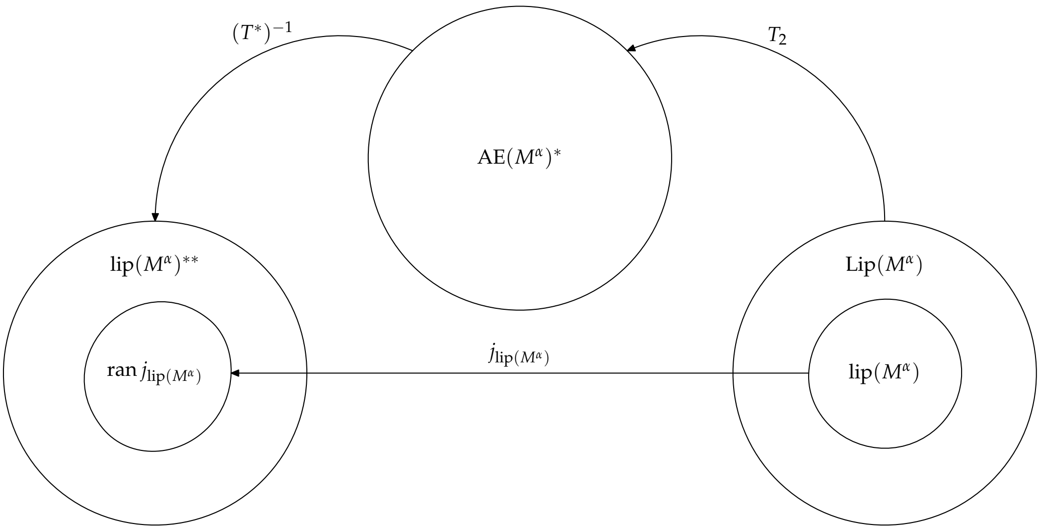
$$\left((T^*)^{-1}m^*\right)(f^*) = m^*\left(T^{-1}f^*\right), \quad m^* \in \operatorname{AE}(M^\alpha)^*, \quad f^* \in \operatorname{lip}(M^\alpha)^*,$$

isomeetriline isomorfism ruumide $\operatorname{AE}(M^\alpha)^*$ ja $\operatorname{lip}(M^\alpha)^{**}$ vahel.

Teoreemi 2.4 tõestuse põhjal on operaator $T_2\colon \operatorname{Lip}(M^\alpha) \to \operatorname{AE}(M^\alpha)^*$, kus $(T_2 f)(m) = \sum_{p\in M} m(p)f(p)$, $m \in \operatorname{AE}(M^\alpha)$, $f \in \operatorname{Lip}(M^\alpha)$, isomeetriline isomorfism ruumide $\operatorname{Lip}(M^\alpha)$ ja $\operatorname{AE}(M^\alpha)^*$ vahel.

Märkus 5.12. Kui M on reaalarvude hulga lahtine alamhulk, siis näite 1.9 põhjal $\operatorname{lip}(M) = \{0\}$. Seega $\operatorname{lip}(M)^* = \{0\}$ ja järelikult üldjuhul ruum $\operatorname{lip}(M)$ ei ole ruumi $\operatorname{AE}(M)$ eelruum.

Näitame nüüd, et operaator $(T^*)^{-1}T_2$ viib ruumi $\operatorname{Lip}(M^\alpha)$ alamruumi $\operatorname{lip}(M^\alpha)$ alamruumiks $\operatorname{ran} j_{\operatorname{lip}(M^\alpha)}$ ruumis $\operatorname{lip}(M^\alpha)^{**}$ (vt joonist 5.1).



Joonis 5.1

Lause 5.13. *Kui M on kompaktne meetriline ruum, siis kehtib võrdus*

$$\left((T^*)^{-1}T_2\right)(\operatorname{lip}(M^\alpha)) = \operatorname{ran} j_{\operatorname{lip}(M^\alpha)}.$$

Tõestus. Paneme tähele, et iga funktsiooni $f \in \operatorname{lip}(M^\alpha)$ ja funktsionaali $g^* \in \operatorname{lip}(M^\alpha)^*$ korral

$$\begin{aligned}\left((T^*)^{-1}(T_2 f)\right)(g^*) &= (T_2 f)\left(T^{-1}g^*\right) = \sum_{p\in M}\left(T^{-1}g^*\right)(p)f(p)\\ &= \left\langle f, T^{-1}g^*\right\rangle = \left(T\left(T^{-1}g^*\right)\right)(f) = g^*(f).\end{aligned}$$

Seega iga $f \in \operatorname{lip}(M^\alpha)$ korral $\left((T^*)^{-1}T_2\right)(f) = j_{\operatorname{lip}(M^\alpha)}f$, millest saame, et

$$\left((T^*)^{-1}T_2\right)(\operatorname{lip}(M^\alpha)) = \operatorname{ran} j_{\operatorname{lip}(M^\alpha)}. \qquad \square$$

Tõestame nüüd selle peatüki põhiteoreemi.

Teoreem 5.14 (Kalton)**.** *Kui meetriline ruum M on kompaktne, siis ruum* $\operatorname{lip}(M^\alpha)$ *on M-ideaal ruumis* $\operatorname{Lip}(M^\alpha)$*.*

Tõestus. Teoreemi 4.12 põhjal on $\mathrm{lip}(M^\alpha)$ M-ideaal oma teises kaasruumis $\mathrm{lip}(M^\alpha)^{**}$, mis tähendab, et $\mathrm{ran}\, j_{\mathrm{lip}(M^\alpha)}$ on M-ideaal ruumis $\mathrm{lip}(M^\alpha)^{**}$. Kuna operaator $\left((T^*)^{-1}T_2\right)^{-1}$ on isomeetriline isomorfism ruumide $\mathrm{lip}(M^\alpha)^{**}$ ja $\mathrm{Lip}(M^\alpha)$ vahel ning lause 5.13 põhjal

$$\left((T^*)^{-1}T_2\right)^{-1}\left(\mathrm{ran}\, j_{\mathrm{lip}(M^\alpha)}\right) = \mathrm{lip}(M^\alpha),$$

siis lause 5.11 annab, et $\mathrm{lip}(M^\alpha)$ on M-ideaal ruumis $\mathrm{Lip}(M^\alpha)$. □

Siit järeldub ka positiivne lahendus Berningeri–Werneri probleemile.

Järeldus 5.15 (Kalton)**.** *Väike Hölderi ruum* $\mathrm{lip}([0,1]^\alpha)$ *on* M*-ideaal suures Hölderi ruumis* $\mathrm{Lip}([0,1]^\alpha)$.

Peatüki lõpetuseks toome näite Banachi ruumist ja tema kahest isomeetriliselt isomorfsest alamruumist, millest üks on M-ideaal selles ruumis ja teine ei ole (vt näiteks [O5, lk 13]). See näitab ühtlasi, miks oli teoreemi 5.14 tõestamisel oluline kasutada võrdust $\left((T^*)^{-1}T_2\right)^{-1}\left(\mathrm{ran}\, j_{\mathrm{lip}(M^\alpha)}\right) = \mathrm{lip}(M^\alpha)$ ning lauset 5.11.

Näide 5.16. Vaatleme reaalset Banachi ruumi

$$\ell_\infty^2 = \{(\xi_1,\xi_2)\colon\ \xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R}\},$$

kus norm on defineeritud seosega

$$\|(\xi_1,\xi_2)\|_\infty = \max\{|\xi_1|,|\xi_2|\}.$$

Teada on (vt näiteks [OO, lk-d 163–164]), et ruumi ℓ_∞^2 kaasruum on isomeetriliselt isomorfne ruumiga

$$\ell_1^2 = \{(\alpha_1,\alpha_2)\colon\ \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\},$$

kus norm on defineeritud seosega

$$\|(\alpha_1,\alpha_2)\|_1 = |\alpha_1| + |\alpha_2|.$$

Seejuures isomeetrilise isomorfismi realiseerib kujutus $T\colon \ell_1^2 \to \left(\ell_\infty^2\right)^*$, kus $(Ta)(x) = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$, $a = (a_1,a_2) \in \ell_1^2$ ja $x = (\xi_1,\xi_2) \in \ell_\infty^2$.

Näitame kõigepealt, et alamruum $X = \{(\xi,0)\colon\ \xi \in \mathbb{R}\}$ on M-ideaal ruumis ℓ_∞^2. Antud juhul $X^\perp = \{(0,\alpha)\colon\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Defineerime projektori $P\colon \ell_1^2 \to \ell_1^2$ seosega

$$P(\alpha_1,\alpha_2) = (0,\alpha_2), \quad (\alpha_1,\alpha_2) \in \ell_1^2.$$

Siis $\mathrm{ran}\, P = X^\perp$ ja iga $(\alpha_1,\alpha_2) \in \ell_1^2$ korral

$$\begin{aligned}\|(\alpha_1,\alpha_2) - P(\alpha_1,\alpha_2)\|_1 + \|P(\alpha_1,\alpha_2)\|_1 &= \|(\alpha_1,0)\|_1 + \|(0,\alpha_2)\|_1\\ &= |\alpha_1| + |\alpha_2| = \|(\alpha_1,\alpha_2)\|_1.\end{aligned}$$

Kuna kõik lõplikumõõtmelised alamruumid on kinnised, siis X on M-ideaal ruumis ℓ_∞^2.

Näitame nüüd, et alamruum $Y = \{(\xi,\xi)\colon\ \xi \in \mathbb{R}\}$ ei ole M-ideaal ruumis ℓ_∞^2. Selleks oletame väitevastaselt, et Y on M-ideaal ruumis ℓ_∞^2. Siis leidub projektor $P\colon \ell_1^2 \to \ell_1^2$ nii, et $\mathrm{ran}\, P = Y^\perp = \{(\alpha,-\alpha)\colon\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ ja iga $(\alpha_1,\alpha_2) \in \ell_1^2$ korral

$$\|(\alpha_1,\alpha_2) - P(\alpha_1,\alpha_2)\|_1 + \|P(\alpha_1,\alpha_2)\|_1 = \|(\alpha_1,\alpha_2)\|_1. \tag{5.2}$$

Antud juhul on $\ker P$ ühemõõtmeline alamruum ja seega leidub element $(a,b) \in \ell_1^2$ nii, et $\ker P = \{\lambda(a,b)\colon\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Kuna $\ker P \cap \operatorname{ran} P = \{(0,0)\}$, siis $a+b \neq 0$ ja iga element $(\alpha_1,\alpha_2) \in \ell_1^2$ esitub kujul

$$(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\alpha_1 b - \alpha_2 a}{a+b}(1,-1) + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{a+b}(a,b),$$

mis annab, et

$$\begin{aligned}|\alpha_1| + |\alpha_2| = \|(\alpha_1,\alpha_2)\|_1 &= \|(\alpha_1,\alpha_2) - P(\alpha_1,\alpha_2)\|_1 + \|P(\alpha_1,\alpha_2)\|_1 \\ &= \frac{|\alpha_1+\alpha_2|}{|a+b|}(|a|+|b|) + 2\cdot\frac{|\alpha_1 b - \alpha_2 a|}{|a+b|} \\ &\geq |\alpha_1+\alpha_2| + 2\cdot\frac{|\alpha_1 b - \alpha_2 a|}{|a+b|}.\end{aligned}$$

Seetõttu suvaliste arvude $\alpha_1,\alpha_2 \geq 0$ korral $\alpha_1 b - \alpha_2 a = 0$ ja järelikult $a=b=0$, mis on vastuolus sellega, et $\ker P$ on ühemõõtmeline. Seega oli meie vastuväiteline oletus väär ja alamruum Y ei ole M-ideaal ruumis ℓ_∞^2.

Samas on kõik ühemõõtmelised alamruumid omavahel isomeetriliselt isomorfsed. Näiteks antud juhul on üheks isomeetriliseks isomorfismiks kujutus $T\colon X \to Y$, mis on defineeritud seosega

$$T(\xi,0) = (\xi,\xi), \quad (\xi,0) \in X.$$

PEATÜKK 6
$*$-Nõrk topoloogia ja omadus (M^*)

Käesolevas peatükis toome sisse $*$-nõrga topoloogia ja omaduse (M^*) mõisted. Siin tugineme vastavalt raamatule [HHZ] ja monograafiale [HWW]. Peatüki põhitulemusena näitame, et kui M on kompaktne meetriline ruum, siis ruumil $\operatorname{lip}(M)$ on omadus (M^*). Sellest tulemusest järeldame muu hulgas, et kui kompaktse meetrilise ruumi M korral on ruumil $\operatorname{lip}(M)$ meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus, siis ruum $\mathcal{K}(\operatorname{lip}(M))$ on M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(\operatorname{lip}(M))$.

Olgu X normeeritud ruum.

Definitsioon 6.1. Ruumi X^* $*$-*nõrgaks topoloogiaks* nimetatakse topoloogiat, mille korral mis tahes punkti $x_0^* \in X^*$ ümbruste baasi moodustavad hulgad

$$\mathcal{O}^*_{x_0^*}(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{x^* \in X^* \colon \ \ |(x^* - x_0^*)\,(x_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\},$$

kus $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ ja $\varepsilon > 0$.

Meenutame, et topoloogilist ruumi nimetatakse eralduvaks ehk Hausdorffi ruumiks, kui tema iga kahe erineva punkti korral leiduvad neid punkte sisaldavad lõikumatud ümbrused. Näitame, et ruumi X^* $*$-nõrk topoloogia on eralduv. Selleks leiame vabalt valitud punktide $x_1^*, x_2^* \in X^*$, $x_1^* \neq x_2^*$, lõikumatud ümbrused. Kuna $x_1^* \neq x_2^*$, siis leidub element $x \in X$ nii, et $x_1^*(x) \neq x_2^*(x)$. Tähistame $\varepsilon = \dfrac{|(x_1^* - x_2^*)\,(x)|}{2}$. Oletades, et $x^* \in \mathcal{O}^*_{x_1^*}(x;\varepsilon) \cap \mathcal{O}^*_{x_2^*}(x;\varepsilon)$, saaksime vastuolu kujul

$$2\varepsilon = |(x_1^* - x_2^*)\,(x)| \leq |(x^* - x_1^*)\,(x)| + |(x^* - x_2^*)\,(x)| < 2\varepsilon.$$

Seega on ümbrused $\mathcal{O}^*_{x_1^*}(x;\varepsilon)$ ja $\mathcal{O}^*_{x_2^*}(x;\varepsilon)$ lõikumatud.

Üldise topoloogia kursusest on teada, et eralduvas topoloogias on igal koonduval perel täpselt üks piirpunkt.

Kui funktsionaalide pere $(x_\nu^*) \subset X^*$ koondub $*$-nõrgalt (ehk w^*-koondub) funktsionaaliks $x^* \in X^*$, siis kirjutatakse $x_\nu^* \xrightarrow{w^*} x^*$ või $w^*\text{-}\lim x_\nu^* = x^*$. Raamatus [HHZ, lk 42] on tõestatud järgmine $*$-nõrka koondumist kirjeldav lause.

Lause 6.2. *Funktsionaalide pere $(x_\nu^*) \subset X^*$ koondub $*$-nõrgalt funktsionaaliks $x^* \in X^*$ parajasti siis, kui iga $x \in X$ korral*

$$x_\nu^*(x) \to x^*(x).$$

Raamatus [HHZ, lk 45] on samuti tõestatud järgmine teoreem.

Teoreem 6.3 (Banach–Alaoglu)**.** *Olgu X Banachi ruum. Siis kaasruumi X^* kinnine ühikkera B_{X^*} on $*$-nõrgas topoloogias kompaktne.*

Banachi–Alaoglu teoreemist järeldub vahetult järgmine lause.

Järeldus 6.4. *Kui X on Banachi ruum, siis mis tahes tõkestatud funktsionaalide perel $(x_\nu^*) \subset X^*$ leidub osapere (x_λ^*), mis koondub $*$-nõrgalt mingiks funktsionaaliks $x^* \in X^*$.*

Definitsioon 6.5. Olgu X Banachi ruum. Öeldakse, et ruumil X on *omadus* (M^*), kui

$$\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^* + x_\nu^*\| \le \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|y^* + x_\nu^*\|$$

mis tahes funktsionaalide $x^*, y^* \in X^*$, $\|x^*\| \le \|y^*\|$, ning iga $*$-nõrgalt nulliks koonduva tõkestatud pere $(x_\nu^*)_{\nu\in\mathfrak{N}}$ korral.

Kalton tõi 1993. aasta artiklis [K1] omaduse (M^*) mõiste sisse jadade keeles (nn jadaline omadus (M^*)). Eve Oja üldistas selle mõiste peredele 1993. aasta artiklis [O1] ja kutsus seda omaduseks (sM^*). Järgmisest tuntud tulemusest (vt [K1, lemma 2.1] või näiteks [HWW, lk 296, lemma 4.13]) selgub, et omaduse (M^*) mõiste saab ka defineerida võrratuste asemel võrdusi kasutades.

Teoreem 6.6. *Banachi ruumil X on* omadus (M^*) *parajasti siis, kui*

$$\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^* + x_\nu^*\| = \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|y^* + x_\nu^*\|$$

mis tahes funktsionaalide $x^*, y^* \in X^*$, $\|x^*\| = \|y^*\|$, ning iga $*$-nõrgalt nulliks koonduva tõkestatud pere $(x_\nu^*)_{\nu\in\mathfrak{N}}$ korral.

Tõestus. Olgu Banachi ruumil X omadus (M^*) ning olgu $x^*, y^* \in X^*$, $\|x^*\| = \|y^*\|$, ja olgu $(x_\nu^*)_{\nu\in\mathfrak{N}}$ $*$-nõrgalt nulliks koonduv tõkestatud pere. Kuna $\|x^*\| \le \|y^*\|$, siis

$$\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^* + x_\nu^*\| \le \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|y^* + x_\nu^*\| .$$

Analoogiliselt, kuna $\|x^*\| \ge \|y^*\|$, siis

$$\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^* + x_\nu^*\| \ge \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|y^* + x_\nu^*\| .$$

Seega kokkuvõttes

$$\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^* + x_\nu^*\| = \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|y^* + x_\nu^*\| .$$

Eeldame nüüd, et

$$\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^* + x_\nu^*\| = \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|y^* + x_\nu^*\|$$

mis tahes funktsionaalide $x^*, y^* \in X^*$, $\|x^*\| = \|y^*\|$, ning iga $*$-nõrgalt nulliks koonduva tõkestatud pere $(x_\nu^*)_{\nu\in\mathfrak{N}}$ korral. Olgu $x^*, y^* \in X^*$, $\|y^*\| \le \|x^*\|$, ning $(x_\nu^*)_{\nu\in\mathfrak{N}}$ $*$-nõrgalt nulliks koonduv tõkestatud pere.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $y^* \neq 0$. Tähistame $\lambda = \dfrac{\|x^*\|}{\|y^*\|}$. Siis $\lambda \ge 1$ ja

$$y^* + x_\nu^* = \frac{\lambda+1}{2\lambda}(\lambda y^* + x_\nu^*) + \frac{\lambda-1}{2\lambda}(-\lambda y^* + x_\nu^*)$$

ning kolmnurga võrratuse abil saame, et

$$\begin{aligned}\|y^* + x_\nu^*\| &\le \frac{\lambda+1}{2\lambda}\|\lambda y^* + x_\nu^*\| + \frac{\lambda-1}{2\lambda}\|-\lambda y^* + x_\nu^*\| \\ &\le \left(\frac{\lambda+1}{2\lambda} + \frac{\lambda-1}{2\lambda}\right)\max\{\|\lambda y^* + x_\nu^*\|, \|-\lambda y^* + x_\nu^*\|\}\end{aligned}$$

$$= \max\{\|\lambda y^* + x^*_\nu\|\,, \|{-\lambda} y^* + x^*_\nu\|\}.$$

Kasutades eeldust elementide λy^* ja x^*, $\|\lambda y^*\| = \|x^*\|$, ning $*$-nõrgalt nulliks koonduva tõkestatud pere $(x^*_\nu)_{\nu\in\mathfrak{N}}$ korral, saame võrduse

$$\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|\lambda y^* + x^*_\nu\| = \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^* + x^*_\nu\|\,.$$

Analoogiliselt saame, et

$$\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|{-\lambda} y^* + x^*_\nu\| = \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^* + x^*_\nu\|\,.$$

Seega ülemise piirväärtuse monotoonsuse tõttu

$$\begin{aligned}\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|y^* + x^*_\nu\| &\le \max\left\{\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|\lambda y^* + x^*_\nu\|\,, \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|{-\lambda} y^* + x^*_\nu\|\right\}\\ &= \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^* + x^*_\nu\|\,.\end{aligned}$$

Olgu nüüd $y^* = 0$. Kui $x^* = 0$, siis ilmselt

$$\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|y^* + x^*_\nu\| \le \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^* + x^*_\nu\|\,.$$

Kui $x^* \neq 0$, siis suvalise arvu $\varepsilon \in (0,1]$ korral $\varepsilon x^* \neq 0$ ning

$$\|\varepsilon x^*\| = \varepsilon\|x^*\| \le \|x^*\|.$$

Ülaltõestatu põhjal

$$\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|\varepsilon x^* + x^*_\nu\| \le \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^* + x^*_\nu\|\,.$$

Kasutades võrratust

$$\|x^*_\nu\| \le \|\varepsilon x^* + x^*_\nu\| + \varepsilon\,\|x^*\|$$

saame, et

$$\begin{aligned}\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^*_\nu\| &\le \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|\varepsilon x^* + x^*_\nu\| + \varepsilon\,\|x^*\|\\ &\le \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^* + x^*_\nu\| + \varepsilon\,\|x^*\|\,.\end{aligned}$$

Minnes siin piirile $\varepsilon \to 0+$, saamegi, et

$$\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|y^* + x^*_\nu\| = \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^*_\nu\| \le \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^* + x^*_\nu\|\,. \qquad \square$$

Järgmise väite võib leida artiklist [O3] (vt lisaks [O4, lk 2804]).

Lause 6.7. *Olgu X Banachi ruum, millel on omadus (M^*). Kui Y on ruumi X kinnine alamruum, siis on ruumil Y omadus (M^*).*

Tõestus. Oletame väitevastaselt, et ruumi X kinnisel alamruumil Y ei ole omadust (M^*). Siis teoreemi 6.6 põhjal leiduvad funktsionaalid $y_1^*, y_2^* \in Y^*$, $\|y_1^*\| = \|y_2^*\|$, ning ruumis Y^* $*$-nõrgalt nulliks koonduv tõkestatud pere $(y^*_\nu)_{\nu\in\mathfrak{N}}$ nii, et

$$\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|y_1^* + y^*_\nu\| > \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|y_2^* + y^*_\nu\|\,.$$

Minnes vajadusel üle osaperedele võime eeldada, et

$$\lim_{\nu\in\mathfrak{N}} \|y_1^* + y_\nu^*\| > \lim_{\nu\in\mathfrak{N}} \|y_2^* + y_\nu^*\| . \tag{6.1}$$

Olgu iga indeksi $\nu \in \mathfrak{N}$ korral $x_\nu^* \in X^*$ funktsionaali $y_2^* + y_\nu^*$ normi säilitav jätk. Järelduse 6.4 põhjal leidub pere $(x_\nu^*)_{\nu\in\mathfrak{N}}$ osapere $(x_\lambda^*)_{\lambda\in\mathfrak{L}}$ ning funktsionaal $x^* \in X^*$ selliselt, et $x_\lambda^* \xrightarrow{w^*} x^*$.

Paneme tähele, et iga $y \in Y$ korral

$$x^*(y) = \lim_{\lambda\in\mathfrak{L}} x_\lambda^*(y) = \lim_{\lambda\in\mathfrak{L}} (y_2^* + y_\lambda^*)(y) = y_2^*(y).$$

Seega, kui $x_1^* \in X^*$ on funktsionaali y_1^* normi säilitav jätk, siis

$$\|x_1^*\| = \|y_1^*\| = \|y_2^*\| \le \|x^*\|.$$

Võrratuse (6.1) põhjal saame nüüd, et

$$\begin{aligned}
\limsup_{\lambda\in\mathfrak{L}} \|x_1^* + x_\lambda^* - x^*\| &\ge \limsup_{\lambda\in\mathfrak{L}} \|(x_1^* + x_\lambda^* - x^*)\,|_Y\| \\
&= \lim_{\lambda\in\mathfrak{L}} \|y_1^* + y_2^* + y_\lambda^* - y_2^*\| \\
&> \lim_{\lambda\in\mathfrak{L}} \|y_2^* + y_\lambda^*\| = \lim_{\lambda\in\mathfrak{L}} \|x_\lambda^*\| \\
&= \limsup_{\lambda\in\mathfrak{L}} \|x^* + x_\lambda^* - x^*\| .
\end{aligned}$$

Saadud tulemus on vastuolus sellega, et ruumil X on omadus (M^*), sest pere $(x_\lambda^* - x^*)_{\lambda\in\mathfrak{L}}$ koondub $*$-nõrgalt nulliks ja $\|x_1^*\| \le \|x^*\|$. Seega oli meie vastuväiteline oletus väär ja alamruumil Y on omadus (M^*). □

Tõestame nüüd antud peatüki ühe põhitulemuse.

Teoreem 6.8. *Olgu X Banachi ruum. Kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral X on $(1+\varepsilon)$-isomorfne mingi Banachi ruumiga Y_ε, millel on omadus (M^*), siis on ruumil X omadus (M^*).*

Tõestus. Normi pidevuse põhjal piisab näidata, et iga arvu $\varepsilon > 0$, suvaliste elementide $x^*, z^* \in X^*$, $\|x^*\| \le \|z^*\|$, ja $*$-nõrgalt nulli koonduva tõkestatud pere $(x_\nu^*)_{\nu\in\mathfrak{N}}$ korral kehtib võrratus

$$\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|x^* + x_\nu^*\| \le (1+\varepsilon) \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|(1+\varepsilon)z^* + x_\nu^*\| .$$

Fikseerime arvu $\varepsilon > 0$ ja olgu X $(1+\varepsilon)$-isomorfne Banachi ruumiga Y_ε ning olgu $T\colon X \to Y_\varepsilon$ vastav $(1+\varepsilon)$-isomorfism. Lemma 5.9 põhjal on $T^*\colon Y_\varepsilon^* \to X^*$ $(1+\varepsilon)$-isomorfism ruumide Y_ε^* ja X^* vahel.

Tähistame $y_z^* = (T^*)^{-1}(z^*)$, $y_x^* = (T^*)^{-1}(x^*)$ ja $y_\nu^* = (T^*)^{-1}(x_\nu^*)$. Siis $\|y_x^*\| \le \|(1+\varepsilon)y_z^*\|$ ja eelduste kohaselt

$$\limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|y_x^* + y_\nu^*\| \le \limsup_{\nu\in\mathfrak{N}} \|(1+\varepsilon)y_z^* + y_\nu^*\| .$$

Tõestuse lõpetuseks piisab tähele panna, et

$$\|z^* + x_\nu^*\| = \|T^*(y_z^* + y_\nu^*)\| \le \|y_z^* + y_\nu^*\|$$

ja

$$\|(1+\varepsilon)y_x^* + y_\nu^*\| \le (1+\varepsilon)\,\|(1+\varepsilon)x^* + x_\nu^*\| . \qquad \square$$

Artiklis [O1, lause 1] on tõestatud järgmine tulemus.

Lause 6.9. *Olgu X separaabel Banachi ruum. Siis on ruumil X omadus (M^*) parajasti siis, kui tal on jadaline omadus (M^*).*

Tõestame nüüd ühe folkloorse fakti.

Lause 6.10. *Ruumil c_0 on omadus (M^*).*

Tõestus. Oletame väitevastaselt, et ruumil c_0 ei ole omadust (M^*). Kuna ruum c_0 on separaabel, siis teoreemi 6.6 ja lause 6.9 põhjal leiduvad funktsionaalid $x^*, y^* \in c_0^*$, $\|x^*\| = \|y^*\|$, ja ruumis c_0^* $*$-nõrgalt nulliks koonduv jada (y_n^*) nii, et

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^* + y_n^*\| > \limsup_{n\to\infty} \|y^* + y_n^*\| .$$

Minnes vajadusel üle osajadadele võime eeldada, et

$$\lim_{n\to\infty} \|x^* + y_n^*\| > \lim_{n\to\infty} \|y^* + y_n^*\| .$$

Tähistame $A = \lim\limits_{n\to\infty} \|y^* + y_n^*\|$ ja $B = \lim\limits_{n\to\infty} \|x^* + y_n^*\|$ ning olgu $\varepsilon = \dfrac{B-A}{6} > 0$. Teada on (vt näiteks [OO, lk 163]), et kujutus $T\colon \ell_1 \to c_0^*$, kus

$$(T(\xi_k))(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k, \quad (\xi_k) \in \ell_1, \quad x = (a_k) \in c_0,$$

on isomeetriline isomorfism. Sellest tulenevalt vaatleme ruumi c_0^* elemente ruumi ℓ_1 elementidena ja tähistame $x^* = (\xi_k)$, $y^* = (\eta_k)$ ja $y_n^* = (\eta_k^n)$, kus $n \in \mathbb{N}$. Siis leidub arv $N \in \mathbb{N}$ nii, et $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k| < \varepsilon$ ja $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |\eta_k| < \varepsilon$.

Olgu $e_k \in c_0$, $k \in \mathbb{N}$, kus $e_k = (\delta_{kn})$, $n \in \mathbb{N}$, ning

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Kuna iga arvu $k \in \mathbb{N}$ korral $y_n^*(e_k) = \eta_k^n$, siis jada (y_n^*) $*$-nõrga nulliks koondumise tõttu $\eta_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ja järelikult leidub arv $M \in \mathbb{N}$, $M \geq N$, nii, et iga arvu $n \geq M$ korral

$$\max_{1\leq k\leq N} |\eta_k^n| < \frac{\varepsilon}{N}.$$

Kasutades tagurpidi kolmnurga võrratust saame, et iga jada $(a_k) \in c_0$, $\|(a_k)\| \leq 1$, ja arvu $n \geq M$ korral

$$\begin{aligned} |(y^* + y_n^*)(a_k)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k a_k + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^n a_k \right| \\ &\geq \left| \sum_{k=1}^{N} \eta_k a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} \eta_k^n a_k \right| - \sum_{k=N+1}^{\infty} |\eta_k a_k| - \sum_{k=1}^{N} |\eta_k^n a_k| \\ &> \left| \sum_{k=1}^{N} \eta_k a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} \eta_k^n a_k \right| - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Võttes supreemumi üle kõigi elementide $(a_k) \in c_0$, $\|(a_k)\| \leq 1$, saame, et

$$\begin{aligned}\|y^* + y_n^*\| &\geq \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{N} \eta_k a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} \eta_k^n a_k\right| : \ \|(a_k)\| \leq 1\right\} - 2\varepsilon \\ &= \sup\left\{\sum_{k=N+1}^{\infty} |\eta_k^n a_k| : \ \|(a_k)\| \leq 1\right\} + \sum_{k=1}^{N} |\eta_k| - 2\varepsilon \\ &> \sup\left\{\sum_{k=N+1}^{\infty} |\eta_k^n a_k| : \ \|(a_k)\| \leq 1\right\} + \|y^*\| - 3\varepsilon,\end{aligned}$$

kus võrdus kehtib, sest me võime supreemumi võtta üle selliste jadade $(a_n) \in c_0$, mille korral $\eta_k a_k = |\eta_k|$, kui $k = 1, \ldots, N$, ja $\eta_k^n a_k \geq 0$, kui $k > N$. Sarnasel viisil saab veenduda, et

$$\|x^* + y_n^*\| < \sup\left\{\sum_{k=N+1}^{\infty} |\eta_k^n a_k| : \ \|(a_k)\| \leq 1\right\} + \|x^*\| + 2\varepsilon$$

ja seega võrduse $\|x^*\| = \|y^*\|$ põhjal

$$\|x^* + y_n^*\| < \|y^* + y_n^*\| + 5\varepsilon.$$

Oleme saanud vastuolu:

$$6\varepsilon = B - A = \lim_{n\to\infty} (\|x^* + y_n^*\| - \|y^* + y_n^*\|) \leq 5\varepsilon.$$

Seega oli meie vastuväiteline oletus väär ja ruumil c_0 on omadus (M^*). □

Lausete 6.7 ja 6.10 põhjal saame olulise järelduse.

Järeldus 6.11. *Kui Y on ruumi c_0 kinnine alamruum, siis ruumil Y on omadus (M^*).*

Järgmine teoreem on käesoleva magistritöö üks põhitulemus.

Teoreem 6.12. *Kui M on kompaktne meetriline ruum, siis väikesel Lipschitzi ruumil* $\operatorname{lip}(M)$ *on omadus (M^*).*

Tõestus. Teoreemi 3.6 põhjal on ruum $\operatorname{lip}(M)$ iga arvu $\varepsilon > 0$ korral $(1+\varepsilon)$-isomorfne ruumi c_0 mingi kinnise alamruumiga. Teoreemi 6.8 ja järelduse 6.11 põhjal on ruumil $\operatorname{lip}(M)$ omadus (M^*). □

Kuna sellest, et Banachi ruumil on omadus (M^*), järeldub, et ruum X on M-ideaal oma teises kaasruumis X^{**} (vt [K1, lause 2.3] ja [O1, lause 2] või näiteks [HWW, lk 297, lause 4.15]), oleme uuesti tõestanud teoreemi 4.12. Teoreemist 6.12 saame samuti järgmise järelduse.

Järeldus 6.13. *Kui M on kompaktne meetriline ruum, siis väikesel Hölderi ruumil* $\operatorname{lip}(M^\alpha)$ *on omadus (M^*).*

Kasutades tulemusi artiklitest [O1] ja [O2], teeme peatüki lõpetuseks teoreemist 6.12 mõned olulised järeldused. Selleks defineerime kõigepealt meetrilise kompaktse aproksimatsiooniomaduse mõiste.

Definitsioon 6.14. Öeldakse, et Banachi ruumil X on *meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus*, kui suvalise kompaktse hulga $K \subset X$ ja mis tahes arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub pidev kompaktne operaator T nii, et $\|T\| \leq 1$ ja $\|x - Tx\| < \varepsilon$, kui $x \in K$.

Aproksimatsiooniomaduste kohta võib täpsemalt lugeda ülevaateartiklist [C].

Artiklites [O2, teoreem 3] ja [O1, teoreem 8] on vastavalt tõestatud järgmised kaks tulemust.

Teoreem 6.15. *Olgu X Banachi ruum. Ruum $\mathcal{K}(X)$ on M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(X)$ parajasti siis, kui ruumil X on meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus ja omadus (M^*).*

Teoreem 6.16. *Kui X on selline Banachi ruum, mille korral on ruum $\mathcal{K}(X)$ M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(X)$, siis ruum $\mathcal{K}(Y,X)$ on M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(Y,X)$ iga Banachi ruumi Y korral, millel on omadus (M^*).*

Teoreemidest 6.12 ja 6.15 saame vahetult järgmise tulemuse.

Teoreem 6.17. *Olgu M kompaktne meetriline ruum. Kui ruumil $\operatorname{lip}(M)$ on meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus, siis ruum $\mathcal{K}(\operatorname{lip}(M))$ on M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(\operatorname{lip}(M))$.*

Vastavalt teoreemidest 6.12 ja 6.16 ning 6.16 ja 6.17 saame järgmised järeldused.

Järeldus 6.18. *Olgu M kompaktne meetriline ruum ja X Banachi ruum. Kui ruum $\mathcal{K}(X)$ on M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(X)$, siis ruum $\mathcal{K}(\operatorname{lip}(M),X)$ on M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(\operatorname{lip}(M),X)$.*

Järeldus 6.19. *Olgu M kompaktne meetriline ruum ja Y Banachi ruum. Kui ruumil $\operatorname{lip}(M)$ on meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus ja ruumil Y on omadus (M^*), siis ruum $\mathcal{K}(Y,\operatorname{lip}(M))$ on M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(Y,\operatorname{lip}(M))$.*

PEATÜKK 7
Omadus (M_∞)

Käesolevas peatükis toome sisse omaduse (M_∞) mõiste ja tõestame magistritöö ühe põhitulemuse, teoreemi 7.10.

Alustuseks esitame mõned vajalikud definitsioonid ja abitulemused.

Definitsioon 7.1. Olgu X ja Y Banachi ruumid. Ruumide X ja Y vaheliseks *Banachi–Mazuri kauguseks* nimetatakse suurust

$$d_{\mathrm{BM}}(X,Y) = \begin{cases} \inf\left\{\|T\|\,\left\|T^{-1}\right\| : \ T\colon X \to Y \text{ on isomorfism}\right\}, \\ \infty, \text{ kui } X \text{ ja } Y \text{ ei ole isomorfsed.} \end{cases}$$

Vahetult $(1+\varepsilon)$-isomorfsuse ja Banachi–Mazuri kauguse definitsioonist saame järgmise lause.

Lause 7.2. *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $\varepsilon > 0$. Kui ruumid X ja Y on $(1+\varepsilon)$-isomorfsed, siis $d_{\mathrm{BM}}(X,Y) \le 1+\varepsilon$.*

Definitsioon 7.3. Öeldakse, et Banachi ruumil X on *meetriline aproksimatsiooniomadus*, kui suvalise kompaktse hulga $K \subset X$ ja mis tahes arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub pidev lõplikumõõtmeline operaator T nii, et $\|T\| \le 1$ ja $\|x - Tx\| < \varepsilon$, kui $x \in K$.

Kuna kõik lõplikumõõtmelised operaatorid on kompaktsed, siis näeme, et meetrilisest aproksimatsiooniomadusest järeldub meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus.

Artiklis [G, järeldus VI.2] on tõestatud järgmise tulemuse üldisem versioon.

Lause 7.4. *Olgu X separaabel Banachi ruum, millel on omadus (M^*). Kui leidub Banachi ruum Y, millel on meetriline aproksimatsiooniomadus nii, et $d_{\mathrm{BM}}(X,Y) < 2$, siis ruumil X on meetriline aproksimatsiooniomadus.*

Olgu X mingi Banachi ruum. Vaatleme hulka $X \times X$ vektorruumina, kus tehted on defineeritud loomulikul viisil komponentide kaupa. Kui sellel vektorruumil defineerida norm seosega

$$\|(x_1, x_2)\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}, \quad x_1, x_2 \in X,$$

siis saame Banachi ruumi, mida tähistatakse $X \oplus_\infty X$.

Esitame nüüd selle peatüki põhimõiste definitsiooni.

Definitsioon 7.5. Öeldakse, et Banachi ruumil X on *omadus* (M_∞), kui ruum $\mathcal{K}(X \oplus_\infty X)$ on M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(X \oplus_\infty X)$.

Monograafias [HWW, teoreem VI.5.7] on tõestatud järgmine tulemus.

Teoreem 7.6. *Olgu X Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed.*

(a) *Iga $\varepsilon > 0$ korral leidub ruumi c_0 alamruum Y_ε, millel on meetriline kompaktne aproksimatsiooniomadus nii, et $d_{\mathrm{BM}}(X, Y_\varepsilon) \leq 1 + \varepsilon$,*

(b) *Iga $\varepsilon > 0$ korral leidub Banachi ruum Y_ε nii, et $d_{\mathrm{BM}}(X, Y_\varepsilon) \leq 1 + \varepsilon$, ja mille jaoks leidub selline kompaktsete operaatorite jada $(K_n) \subset \mathcal{K}(Y_\varepsilon)$ nii, et $K_n y \to y$ iga $y \in Y_\varepsilon$ korral ja nulliks koonduv mittenegatiivsete arvude jada (δ_n) nii, et*

$$\|K_n(y_1 - y_2) + y_2\| \leq 1 + \delta_n \|y_1 - y_2\|,$$

kui $y_1, y_2 \in B_{Y_\varepsilon}$.

Märkus 7.7. Teoreemi 7.6 väite "(a) järeldub (b)" tõestuse põhjal saab osas (b) iga $\varepsilon > 0$ korral valida c_0 sama alamruumi Y_ε, mis on antud osas (a).

Monograafiast [HWW, teoreem VI.5.3] pärineb ka järgmise teoreemi üldisem versioon.

Teoreem 7.8. *Olgu X Banachi ruum. Ruumil X on omadus (M_∞) parajasti siis, kui leidub kompaktsete operaatorite pere $(K_\nu)_{\nu \in \mathfrak{N}} \subset B_{\mathcal{K}(X)}$ nii, et $K_\nu x \to x$ ja $K_\nu^* x^* \to x^*$ iga $x \in X$ ja iga $x^* \in X^*$ korral ning iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\mu \in \mathfrak{N}$ nii, et*

$$\|K_\nu(x - y) + y\| \leq (1 + \varepsilon) \max\{\|x\|, \|y\|\}, \quad x, y \in X, \tag{7.1}$$

kui $\nu \geq \mu$.

Artiklis [O4, järeldus 1.7] on tõestatud järgmise tulemuse üldisem versioon.

Lause 7.9. *Kui Banachi ruumil X omadus (M^*) ja $K_n \colon X \to X$, $\|K_n\| \leq 1$, on selline kompaktsete operaatorite jada nii, et $K_n x \to x$ iga $x \in X$ korral, siis $K_n^* x^* \to x^*$ iga $x^* \in X^*$ korral.*

Tõestame nüüd selle magistritöö viimase põhitulemuse.

Teoreem 7.10. *Olgu M kompaktne meetriline ruum. Kui väikesel Lipschitzi ruumil* $\mathrm{lip}(M)$ *on meetriline aproksimatsiooniomadus, siis ruumil* $\mathrm{lip}(M)$ *on omadus (M_∞).*

Tõestus. Tähistame $X = \mathrm{lip}(M)$. Teoreemi 7.8 põhjal piisab näidata, et leidub kompaktsete operaatorite pere $(K_\nu)_{\nu \in \mathfrak{N}} \subset B_{\mathcal{K}(X)}$ nii, et $K_\nu x \to x$ ja $K_\nu^* x^* \to x^*$ iga $x \in X$ ja iga $x^* \in X^*$ korral ning iga $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $\mu \in \mathfrak{N}$ nii, et

$$\|K_\nu(x - y) + y\| \leq (1 + \varepsilon) \max\{\|x\|, \|y\|\}, \quad x, y \in X,$$

kui $\nu \geq \mu$.

Teoreemi 3.6 põhjal on ruum $\mathrm{lip}(M)$ iga $\varepsilon > 0$ korral $(1+\varepsilon)$-isomorfne ruumi c_0 mingi kinnise alamruumiga Y_ε. Üldisust kitsendamata eeldame edaspidi, et $\varepsilon \in (0, 0.1)$. Lause 7.4 põhjal on ruumil Y_ε meetriline aproksimatsiooniomadus. Seega teoreemi 7.6 ja märkuse 7.7 põhjal leidub leidub selline kompaktsete operaatorite jada $(K_n) \subset \mathcal{K}(Y_\varepsilon)$ nii, et $K_n y \to y$ iga $y \in Y_\varepsilon$ korral ja mittenegatiivsete arvude jada (δ_n), mis koondub nulliks nii, et kehtib võrratus

$$\|K_n(y_1 - y_2) + y_2\| \leq 1 + \delta_n \|y_1 - y_2\|, \quad y_1, y_2 \in B_{Y_\varepsilon}, \tag{7.2}$$

kusjuures võime valida jada (δ_n) nii, et $\delta_n \leq \dfrac{\varepsilon}{3 + 3\varepsilon}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Valides $y_2 = 0$ näeme, et $\|K_n\| \leq 1 + \delta_n$.

Kui leidub jada (K_n) osajada (K_{n_i}) nii, et $\|K_{n_i}\| \geq 1$ iga indeksi $i \in \mathbb{N}$ korral, siis defineerime $T_i = \dfrac{K_{n_i}}{\|K_{n_i}\|}$, $i \in \mathbb{N}$, ja paneme tähele, et suvaliste elementide $y_1, y_2 \in B_{Y_\varepsilon}$ korral

$$\begin{aligned}\|T_i(y_1 - y_2) + y_2\| &= \left\| \frac{K_{n_i}}{\|K_{n_i}\|}(y_1 - y_2) + y_2 \right\| = \frac{\|K_{n_i}(y_1 - y_2) + y_2 + (\|K_{n_i}\| - 1)y_2\|}{\|K_{n_i}\|} \\ &\leq \frac{\|K_{n_i}(y_1 - y_2) + y_2\| + (\|K_{n_i}\| - 1)\|y_2\|}{\|K_{n_i}\|} \\ &\leq 1 + \delta_{n_i}\|y_1 - y_2\| + \frac{\delta_{n_i}}{1 + \delta_{n_i}}\|y_2\| \leq 1 + 3\delta_{n_i}.\end{aligned}$$

Seega, kui $y_1, y_2 \in B_{Y_\varepsilon}$, siis

$$\|T_i(y_1 - y_2) + y_2\| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}. \tag{7.3}$$

Kui sellist osajada ei leidu, siis leidub jada (K_n) osajada (K_{n_i}) nii, et $\|K_{n_i}\| < 1$ iga $i \in \mathbb{N}$ korral. Siis defineerime $T_i = K_i$, $i \in \mathbb{N}$, ja võrratuse (7.2) põhjal saame samuti, et iga $i \in \mathbb{N}$ korral kehtib võrratus (7.3). Mugavama tähistuse huvides võime üldisust kitsendamata eeldada, et (K_{n_i}) ühtib jadaga (K_n).

Paneme tähele, et $\|K_n\| \to 1$. Tõepoolest, kuna $\limsup_n \|K_n\| \leq 1$, siis vastasel korral leiduks $\delta > 0$ ja osajada (K_{n_i}) nii, et $\|K_{n_i}\| < 1 - \delta$, $i \in \mathbb{N}$, ja seega iga elemendi $y \in Y_\varepsilon$, $y \neq 0$, korral

$$\|y - K_{n_i}y\| \geq |\|y\| - \|K_{n_i}y\|| = \|y\| - \|K_{n_i}y\| \geq \|y\| - (1 - \delta)\|y\| = \delta\|y\|,$$

mis on vastuolus operaatorite jada (K_n) (ja seega ka osajada (K_{n_i})) punktiviisi koondumisega. Seega $\|K_n\| \to 1$ ja järelikult $T_n y \to y$ iga elemendi $y \in Y_\varepsilon$ korral. Lause 7.9 põhjal samuti $T_n^* y^* \to y^*$ iga elemendi $y^* \in Y_\varepsilon^*$ korral. Minnes vajadusel üle jada (T_n) osajadale, võime eeldada, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\|T_n\| \geq 1 - \varepsilon$.

Olgu $T \colon X \to Y_\varepsilon$ $(1+\varepsilon)$-isomorfism. Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks operaatori $L_n \colon X \to X$ seosega $L_n x = T^{-1}T_nTx$. Siis L_n on kompaktne operaator, kusjuures $L_n x \to x$ ja $L_n^* x^* \to x^*$ iga $x \in X$ ja $x^* \in X^*$ korral. Samas kehtib ka hinnang $\|L_n\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|T_n\| \|T\| \leq 1 + \varepsilon$ ja suvaliste elementide $x_1, x_2 \in B_X$ korral

$$\begin{aligned}\|L_n(x_1 - x_2) + x_2\| &= \left\|T^{-1}T_nT(x_1 - x_2) + T^{-1}Tx_2\right\| \\ &\leq \left\|T^{-1}\right\| \|T_n(Tx_1 - Tx_2) + Tx_2\| \\ &\leq (1 + \varepsilon)\left(1 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right) = 1 + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

kus viimane võrratus kehtib võrratuste (7.3) ning $\left\|T^{-1}\right\| \leq 1 + \varepsilon$ ja $\|T\| \leq 1$ põhjal. Paneme samuti tähele, et $\|L_n\| > 1 - 2\varepsilon$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Tõepoolest, kuna $T_n = TL_nT^{-1}$, siis

$$1 - \varepsilon \leq \|T_n\| = \left\|TL_nT^{-1}\right\| \leq \|T\| \|L_n\| \left\|T^{-1}\right\| \leq (1 + \varepsilon)\|L_n\|,$$

mis annab, et

$$\|L_n\| \geq \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} > (1 - \varepsilon)^2 > 1 - 2\varepsilon.$$

Paneme nüüd tähele, et kui meil on antud suvalised elemendid $x_1, \ldots, x_n \in X$ ja $x_1^*, \ldots, x_m^* \in X^*$, kus $m, n \in \mathbb{N}$, siis leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et kui $k > N$, siis $\|L_k x_i - x_i\| \leq \varepsilon$ ja $\left\|L_k^* x_j^* - x_j^*\right\| \leq \varepsilon$ iga $i = 1, \ldots, n$ ja $j = 1, \ldots, m$ korral. Vaatleme hulka

$$\mathfrak{N} = \{(\varepsilon, F, G) \colon \ \varepsilon \in (0, 0.1), F \subset X, G \subset X^*, |F| < \infty, |G| < \infty\}$$

osaliselt järjestatud hulgana, kus $(\varepsilon_1, F_1, G_1), (\varepsilon_2, F_2, G_2) \in \mathfrak{N}$ korral $(\varepsilon_1, F_1, G_1) \prec (\varepsilon_2, F_2, G_2)$ parajasti siis, kui $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$, $F_1 \subset F_2$ ja $G_1 \subset G_2$. Selle järjestuse suhtes on $\mathfrak{N}$ suunatud hulk. Eelneva põhjal saame igale elemendile $\nu = (\varepsilon, F, G) \in \mathfrak{N}$ vastavusse seada kompaktse operaatori $U_\nu \colon X \to X$, mille korral $\|U_\nu\| \leq 1 + \varepsilon$, $\|U_\nu\| \geq 1 - 2\varepsilon$ ja $\|U_\nu x - x\| \leq \varepsilon$, $\|U_\nu^* x^* - x^*\| \leq \varepsilon$ iga $x \in F$ ja $x^* \in G$ korral ning $\|U_\nu(x_1 - x_2) + x_2\| \leq 1 + 2\varepsilon$, kui $x_1, x_2 \in B_X$. Seega $U_\nu x \to x$ ja $U_\nu^* x^* \to x^*$ iga $x \in X$ ja $x^* \in X^*$ korral ning $\|U_\nu\| \to 1$. Defineerime uue operaatorite pere $(V_\nu)_{\nu \in \mathfrak{N}}$ seosega $V_\nu = \dfrac{U_\nu}{\|U_\nu\|}$. Kuna $\|U_\nu\| \to 1$, siis jäävad koondumised $V_\nu x \to x$ ja $V_\nu^* x^* \to x^*$ iga $x \in X$ ja $x^* \in X^*$ korral kehtima. Nüüd paneme tähele, et suvaliste elementide $x_1, x_2 \in B_X$ ja $\nu = (\varepsilon, F, G) \in \mathfrak{N}$ korral

$$\begin{aligned}
\|V_\nu(x_1 - x_2) + x_2\| = \left\| \frac{U_\nu}{\|U_\nu\|}(x_1 - x_2) + x_2 \right\| &= \frac{\|U_\nu(x_1 - x_2) + x_2 + (\|U_\nu\| - 1)x_2\|}{\|U_\nu\|} \\
&\leq \frac{\|U_\nu(x_1 - x_2) + x_2\| + (\|U_\nu\| - 1)\|x_2\|}{\|U_\nu\|} \\
&< \frac{1 + 2\varepsilon}{1 - 2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}\|x_2\| < 1 + 5\varepsilon + \varepsilon = 1 + 6\varepsilon,
\end{aligned}$$

kus viimane võrratus kehtib, sest $\varepsilon < 0.1$.

Olgu $\mu = \left(\frac{\varepsilon}{6}, F, G\right)$, kus $F \subset X$ ja $G \subset X^*$ on mingid lõplikud hulgad. Siis iga $\nu \succ \mu$ korral

$$\|V_\nu(x_1 - x_2) + x_2\| \leq 1 + \varepsilon, \quad x_1, x_2 \in B_X. \tag{7.4}$$

Nüüd jääb veel vaid tähele panna, et normi lineaarsuse tõttu piisab teoreemis 7.8 antud võrratust (7.1) kontrollida ainult selliste elementide $x, y \in X$ jaoks, mille korral $\max\{\|x\|, \|y\|\} = 1$, aga see järeldub vahetult seosest (7.4). $\square$

Monograafias [HWW, lause VI.5.6] on tõestatud järgmise tulemuse veidi üldisem versioon.

Lause 7.11. *Olgu X Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed.*

(a) *Ruumil X on omadus (M_∞),*

(b) *Iga Banachi ruumi Y korral on ruum $\mathcal{K}(X, Y)$ M-ideaal ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Teoreemist 7.10 ja lausest 7.11 järeldub vahetult järgmine tulemus.

Järeldus 7.12. *Olgu M kompaktne meetriline ruum. Kui väikesel Lipschitzi ruumil* $\operatorname{lip}(M)$ *on meetriline aproksimatsiooniomadus, siis ruum* $\mathcal{K}(\operatorname{lip}(M), Y)$ *M-ideaal ruumis* $\mathcal{L}(\operatorname{lip}(M), Y)$ *iga Banachi ruumi Y korral.*

Kirjandus

[AE] Richard F. Arens, James Eells, Jr., *On embedding uniform and topological spaces*, Pacific J. Math. **6** (1956), 397–403.

[BW] Heiko Berninger, Dirk Werner, *Lipschitz spaces and M-ideals*, Extracta Math. **18** (2003), 33–56.

[C] Peter G. Casazza, *Approximation properties*, in: Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 1 (W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, eds.), Elsevier, Amsterdam, 2001, pp. 271–316.

[G] Gilles Godefroy, *The Banach space c_0*, Extracta Math. **16** (2001), 1–25.

[HHZ] Petr Habala, Petr Hájek, Václav Zizler, *Introduction to Banach Spaces*, I, Charles University, Prague, 1996.

[HWW] Peter Harmand, Dirk Werner, Wend Werner, *M-Ideals in Banach Spaces and Banach Algebras*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.

[K1] Nigel J. Kalton, *M-ideals of compact operators*, Illinois J. Math. **37** (1993), 147–169.

[K2] Nigel J. Kalton, *Spaces of Lipschitz and Hölder functions and their applications*, Collect. Math. **55**, 2 (2004), 171–217.

[KW] Nigel J. Kalton, Dirk Werner, *Property (M), M-ideals, and almost isometric structure of Banach spaces*, J. Reine Angew. Math. **461** (1995), 137–178.

[LORW] Åsvald Lima, Eve Oja, Taduri S. S. R. K. Rao, Dirk Werner, *Geometry of operator spaces*, Michigan Math. J. **41** (1994), 473–490.

[O1] Eve Oja, *A note on M-ideals of compact operators*, Tartu Ül. Toimetised **960** (1993), 75–92.

[O2] Eve Oja, *M-ideals of compact operators are separably determined*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 2747–2753.

[O3] Eve Oja, *Géométrie des espaces de Banach ayant des approximations de l'identité contractantes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), 1167–1170.

[O4] Eve Oja, *Geometry of Banach spaces having shrinking approximations of the identity*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 2801–2823.

[OO] Eve Oja, Peeter Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[W] Nik Weaver, *Lipschitz Algebras*, Washington University, Singapore, 1999.

[K] Леонид Канторович, *О перемещении масс*, ДАН СССР, **37** (1942), с. 227-229.

[KA] Леонид Канторович, Глеб Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва, 1984.

[O5] Эве Оя, *Продолжение функционалов и структура пространства непрерывных линейных операторов*, Тартуский Университет, Тарту, 1991.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Heiki Niglas (sünnikuupäev 13.01.1988),

a) annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Lipschitzi kujutused ja M-ideaalid", mille juhendajad on professor Eve Oja ja lektor Indrek Zolk,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

b) olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

c) kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **04.06.2014**