

ZUR

**BERECHNUNG DER SPECIELLEN STÖRUNGEN**

**DER KLEINEN PLANETEN.**

EINE ZUR

ERLANGUNG DES GRADES EINES DOCTORS DER ASTRONOMIE

DER PHYSICO-MATHEMATISCHEN FACULTÄT DER KAISERLICHEN  
UNIVERSITÄT DORPAT VORGELEGTE ABHANDLUNG

VON

**Theodor Wittram,**

Mag. astr.

Ordentliche Opponenten:

Prof. Dr. **Schwarz.** — Prof. Dr. **Lindstedt.** — Dr. **Hartwig.**

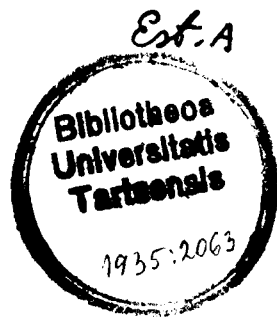
ST. PETERSBURG:

BUCHDRUCKEREI DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

(WASS. OSTR., 9 LIN. № 12.)

1885.

72996



25761

Gedruckt mit Genehmigung der physiko-mathematischen Facultät  
der Kais. Universität Dorpat.

Dorpat, den 27. April 1885.  
№ 63.

Dr. Arthur von Oettingen,  
z. Z. Decan der physiko-mathematischen  
Facultät.

## THESEN.

---

- I. Die analytischen Methoden zur Berechnung der speciellen Störungen der kleinen Planeten sind den allgemein üblichen vorzuziehen.
  - II. Die Vervielfältigung der Beobachtungen ist das unzweckmässigste Mittel, um die Genauigkeit der Resultate zu erhöhen.
  - III. Die vortheilhafteste Aufstellung des tragbaren Passageninstrumentes zum Zwecke der Zeitbestimmung ist die im Verticale des Polarsternes.
  - IV. Der Jäderin'sche Basisapparat bezeichnet einen wesentlichen Fortschritt auf dem Gebiete der geodätischen Längenmessung.
  - V. Bei Triangulationen sind die Beobachtungen der Diagonalen zu vermeiden.
-

### **Zur Berechnung der speciellen Störungen der kleinen Planeten. Von Th. Wittram.**

Alle bekantnen Methoden, die speciellen Störungen der kleinen Planeten zu berechnen, gehen von der Annahme einer Kepler'schen Ellipse als ungestörter Bahn aus. Sie werden deshalb sämtlich in gleicher Weise von den Einwüfen getroffen, welche Prof. Gylden in einer kürzlich erschienenen Abhandlung<sup>1)</sup> gegen die üblichen Methoden, specielle Störungen der Cometen zu berechnen, erhebt. Dabei aber stellt er keineswegs die practische Bedeutung dieser Methoden in Abrede, sondern constatirt (l. c. pag. 2) ausdrücklich, dass dieselben «während kürzerer Zeitintervalle und so lange die Störungen überhaupt klein sind, jedenfalls noch vielfache Verwendung finden werden, weshalb ihre fernere Ausbildung anzustreben ist». Diese Worte, mit welchen sich gewiss alle Astronomen, die sich mit Störungsrechnungen beschäftigen, und deren Arbeitskraft durch die bedenklich anwachsende Zahl der kleinen Planeten

---

1) Theoretische Untersuchungen über die intermediären Bahnen der Cometen in der Nähe eines störenden Körpers. Mém. de l'Acad. de St.-Petersbourg, T. XXXII, N<sup>o</sup> 11.

heutzutage über Gebühr in Anspruch genommen wird, einverstanden erklären werden, rechtfertigen wol schon zur Genüge den Versuch, zur Erleichterung der Berechnung der speciellen Störungen der kleinen Planeten einen Beitrag zu liefern.

Sämmtliche Methoden, die sich in der astronomischen Praxis Bürgerrecht erworben haben, leiden mit Ausnahme der analytischen Methode Gyldén's<sup>2)</sup>, an dem Übelstande, dass die Rechnungen keine anderen Prüfungen gewähren, als durch Differenzen. Ferner können sich in Folge der Anwendung der mechanischen Quadratur die Fehler dermassen anhäufen, dass man in der Regel gezwungen ist, die Rechnung mit mehr Decimalen zu führen, als ohne diesen Umstand erforderlich wäre. Endlich ist die Verwandlung der Coordinaten- in Elementenstörungen eine schwache Seite der Hansen'schen und Encke'schen Methode, indem grade diese Operation sehr unbequem ist und leicht zu Fehlern Veranlassung giebt. Von allen diesen Uebelständen ist die Gyldén'sche Methode, in welcher alle Entwicklungen nach der excentrischen Anomalie des gestörten Planeten vorgenommen werden, frei. Gyldén wendet, um zu diesen Entwicklungen zu gelangen, gewisse trigonometrische Reihen an, deren Giltigkeit auf den halben Umkreis beschränkt ist. Mit ihrer Hilfe wird die excentrische Anomalie des gestörten Planeten durch trigonometrische Reihen ersetzt und ebenso die Functionen  $\cos \epsilon'$  und  $\sin \epsilon'$ . Eine übersichtliche Darstellung des ganzen

---

2) Om en method för den analytiska härledningarna af de små planeternas relativa störingar. Stockholm, 1874.

Verfahrens hat in russischer Sprache Hr. A. Shdanow<sup>3)</sup> gegeben. Allein in einzelnen Fällen verliert diese Methode ihren Hauptvortrag, nämlich die analytische Entwicklungsfähigkeit. Auch bei dem von Hrn. Shdanow gewählten Rechnungsbeispiel stellte es sich heraus, dass für die eine Hälfte des betreffenden Umlaufs des gestörten Planeten es vortheilhafter war, auf die Methode der mechanischen Quadraturen zurückzugreifen, da die numerischen Rechnungen sonst nicht genügend bequem ausgefallen wären.

Durch die Einführung von trigonometrischen Reihen, welche nur für den halben Umkreis Giltigkeit haben, geschieht wesentlich nichts anders, als dass die Bahn des gestörten Planeten in zwei Theile zerlegt wird. Wenngleich durch eine solche Theilung die Convergenz aller in Frage kommender Reihen erhöht wird, so lässt dieselbe bei der Gyldén'schen Methode doch noch zu wünschen übrig, da in manchen Fällen die vom 10-fachen der excentrischen Anomalie abhängenden Glieder mitzunehmen sind. Auch ist die Behandlung sämmtlicher Reihen, ihre Multiplication mit ähnlichen, Potenzirung etc., die bei einigen Ausdrücken nothwendig wird, deshalb sehr lästig, weil dieselben ohne Ausnahme Cosinus- und Sinusglieder enthalten. Hat man nur mit Cosinusreihen zu thun, so werden solche trigonometrische Reihen bedeutend geschmeidiger.

Alle diese Erwägungen veranlassten mich, zu untersuchen, ob es nicht von Vortheil sein könnte, die Bahn in vier Theile zu zerlegen, durch Verlegung neuer Sepa-

---

3) Способъ Гюльдэна для опредѣленія частныхъ возмущеній малыхъ планетъ. С.-Петербургъ 1884.

rationspunkte in das Perihel und Aphel. Die Coordinaten sowohl des gestörten als auch des störenden Planeten werden dann in jedem der vier Theile sich durch Cosinusreihen nach den Vielfachen einer partiellen Anomalie ausdrücken lassen. Die Convergenz aller in Betracht kommender Reihen wird natürlich bedeutend erhöht und der weitere Vortheil gewonnen, dass sich eine ganze Anzahl von Entwicklungen ein für alle Male absolviren lassen, falls die beiden andern Separationspunkte in die Endpunkte der kleinen Axe gelegt werden. Es wäre allerdings für diejenigen kleinen Planeten, welche dem Jupiter sehr nahe kommen können, vortheilhafter, in jedem speciellen Falle die Theilung so vorzunehmen, dass der Theil, in welchen die Jupiternähe des Planeten fällt, der kleinste ist. Allein dann müsste auf den erheblichen Vortheil verzichtet werden, allgemeine Entwicklungen zu geben, die für alle Fälle passen und an der Convergenz der Reihen wird doch nur unerheblich geopfert.

Im Folgenden beschränke ich mich auf eine Darlegung der Ermittlung der Störungen erster Ordnung. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass ein grosser Theil der Störungen zweiter Ordnung dadurch berücksichtigt werden kann, dass man die Elemente des gestörten Planeten bei jedem neuen Theilpunkte wechselt, und auch die Elemente des störenden Planeten entsprechend ändert. — Ich werde versuchen, die Resultate meiner Untersuchungen in möglichst concise Rechnungsvorschriften zusammenzufassen und meine, dass in vielen Fällen diese Methode, die speciellen Störungen der kleinen Planeten zu berechnen, mit Vortheil angewandt werden wird.

I.

**Theilung der Bahn. Störungsgleichungen.**

Die Theilung einer Planetenbahn lässt sich auf sehr mannigfaltige Weise bewerkstelligen. Ich bin nach mehreren Versuchen, die Rechnung durch Einführung trigonometrischer Functionen einfach zu gestalten, doch wiederum auf die Form der Einführung partieller Anomalien zurückgekommen, welche bei der Theilung der Bahn des Encke'schen Cometen so gute Dienste geleistet hat. Für den oberen Theil der Bahn habe ich indessen eine kleine Änderung vorgenommen, weil auf die Weise erreicht wurde, dass der Modul der elliptischen Functionen in allen vier Theilen derselbe bleibt. Ich setze nämlich:

für den unteren Theil:

$$\sin \frac{1}{2} \varepsilon = k \sin am \frac{2K}{\pi} \omega, \text{ mod } k \quad (k = \sin 45^\circ)$$

für den oberen Theil:

$$\cos \frac{1}{2} \varepsilon = l \sin am \frac{2L}{\pi} \lambda, \text{ mod } l \quad (l = \cos 45^\circ).$$

Führt man jetzt folgende Bezeichnungen ein:

$$R_\omega = \cos^2 am \frac{2K}{\pi} \omega$$

$$S_\omega = 2k \left( \frac{2K}{\pi} \right) \int \cos^2 am \frac{2K}{\pi} \omega d\omega = -2k \left( \frac{\pi}{2K} \right) \frac{d \cos am \frac{2K}{\pi} \omega}{d\omega}$$

$$T_\omega = 2k \left( \frac{2K}{\pi} \right) \int \cos am \frac{2K}{\pi} d\omega$$

so nehmen die Coordinaten des Planeten die sehr einfachen Ausdrücke an:

Unterer Theil:	Oberer Theil:
$\frac{r}{a} = 1 - e \cdot R_\omega$	$\frac{r}{a} = 1 + eR_\lambda$
$\frac{r}{a} \cos f + e = R_\omega$	$\frac{r}{a} \cos f + e = -R_\lambda$
$\frac{r}{a} \sin f \sec \varphi = S_\omega$	$\frac{r}{a} \sin f \cdot \sec \varphi = S_\lambda$
$nt = T_\omega - eS_\omega$	$nt = -T_\lambda - eS_\lambda$

Der Anfangspunct der Zählung der Zeit ist für den unteren Theil der Moment, wo der Planet das Perihel, für den oberen, wo derselbe das Aphel passirt. Bezeichnet man die Differentialquotienten der drei Functionen  $R, S, T$  durch gestrichene Buchstaben, so hat man noch die Relationen:

$$\begin{aligned} R^2 + S^2 &= 1 \\ RR' + SS' &= 0 \\ RS' - SR' &= T' \\ ST' + R' &= 0 \\ RT' - S' &= 0, \end{aligned}$$

Beziehungen, welche später mit Vortheil angewendet werden. Sie fließen sofort aus der Bemerkung, dass  $T, R, S$  der Reihe nach die excentrische Anomalie, deren Cosinus und Sinus ausdrücken. Zur Entwicklung dieser drei Functionen hat man aus den Elementen der Theorie der elliptischen Functionen sehr bekannte Reihen zu benutzen. Für den Modul  $\log k = \log \cos 45^\circ$  erhielt ich:

$R_\omega = +0,456947$	$S_\omega = +1,144231 \sin \omega$
$+0,497211 \cos 2\omega$	$+0,154738 \sin 3\omega$
$+0,042893 \cos 4\omega$	$+0,011146 \sin 5\omega$
$+0,002780 \cos 6\omega$	$+0,000674 \sin 7\omega$
$+0,000160 \cos 8\omega$	$+0,000037 \sin 9\omega$
$+0,000009 \cos 10\omega$	$+0,000002 \sin 11\omega$

$$\begin{aligned} T_\omega &= +1,594147 \sin \omega \\ &+ 0,023954 \sin 3\omega \\ &+ 0,000621 \sin 5\omega \\ &+ 0,000019 \sin 7\omega \\ &+ 0,000001 \sin 9\omega \end{aligned}$$

Zwei weitere Theilpuncte werden in das Perihel und Aphel verlegt durch die bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} \sin \omega &= \sin^2 \frac{1}{2} \omega_1 & \sin \lambda &= \sin^2 \frac{1}{2} \lambda_1 \\ \sin \omega &= -\sin^2 \frac{1}{2} \omega_2 & \sin \lambda &= -\sin^2 \frac{1}{2} \lambda_2. \end{aligned}$$

Die Einführung dieser neuen Argumente wird mit Hilfe der Transformationsformeln erlangt, welche zuerst von Hansen in seiner Pariser Preisschrift mitgetheilt wurden. Bei der Rechnung benutzt man am bequemsten die kleine Tafel, welche sich in meiner Abhandlung über die Jupiterstörungen des Encke'schen Cometen pag. 9 u. 10 findet<sup>4)</sup>. Die Anwendung auf die obigen Reihen ergab:

$R_{\omega_1} = +0,589749$	$S_{\omega_1} = +0,613000$
$+0,519752 \cos \omega_1$	$-0,510412 \cos \omega_1$
$-0,090631 \cos 2\omega_1$	$-0,115974 \cos 2\omega_1$
$-0,020156 \cos 3\omega_1$	$+0,010447 \cos 3\omega_1$
$+0,000876 \cos 4\omega_1$	$+0,003024 \cos 4\omega_1$
$+0,000410 \cos 5\omega_1$	$-0,000033 \cos 5\omega_1$
$+0,000006 \cos 6\omega_1$	$-0,000051 \cos 6\omega_1$
$-0,000006 \cos 7\omega_1$	$-0,000002 \cos 7\omega_1$

$$\begin{aligned} T_{\omega_1} &= +0,803182 \\ &- 0,787892 \cos \omega_1 \\ &- 0,017963 \cos 2\omega_1 \\ &+ 0,002504 \cos 3\omega_1 \\ &+ 0,000181 \cos 4\omega_1 \\ &- 0,000010 \cos 5\omega_1 \\ &- 0,000002 \cos 6\omega_1 \end{aligned}$$

4) Mém. de l'Acad. de St.-Petersbourg, T. XXXI, № 15.

Es soll nun das System der Differentialgleichungen aufgestellt werden, aus denen die Störungen der sog. Hansen'schen Elemente berechnet werden. Dabei werden sich noch eine ganze Reihe von Functionen ergeben, welche aus den Reihen *B*, *S* und *T* hervorgehen und ebenfalls ein für alle Male berechnet werden können.

Da ich durchgängig allgemein übliche Bezeichnungen anwenden werde, brauche ich keine Erklärung der angewandten Buchstaben vorzuschicken. Hat man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Psi + \Phi) &= \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \sin \frac{1}{2} (i + i') \\ \sin \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Psi + \Phi) &= \cos \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \sin \frac{1}{2} (i - i') \\ \cos \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Psi - \Phi) &= \sin \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \cos \frac{1}{2} (i + i') \\ \cos \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Psi - \Phi) &= \cos \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \cos \frac{1}{2} (i - i') \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Pi = \pi - \Omega - \Phi \quad \Pi' = \pi' - \Omega' - \Psi$$

die Hilfsgrößen *J*,  $\Pi$  und  $\Pi'$  berechnet, so wird der Ausdruck für das Quadrat der Entfernung der beiden Himmelskörper, des störenden vom gestörten Planeten

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'(H)$$

$$(H) = \cos(f + \Pi) \cos(f' + \Pi') + \sin(f + \Pi) \sin(f' + \Pi') \cos J.$$

Führt man die Größen *ABCD* durch die Gleichungen ein:

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \cos^2 \frac{1}{2} J \cos(\Pi' - \Pi) \\ A - B &= 2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos(\Pi' + \Pi) \\ C + D &= -2 \sin^2 \frac{1}{2} J \sin(\Pi' + \Pi) \\ C - D &= 2 \cos^2 \frac{1}{2} J \sin(\Pi' - \Pi), \end{aligned} \quad (2)$$

In welcher Weise sich jetzt die excentrische Anomalie ändert, wenn die vier neuen partiellen Anomalien den ganzen Umkreis durchlaufen, ersieht man aus folgender Zusammenstellung:

$\omega_1$	$\epsilon$	$\lambda_1$	$\epsilon$	$\lambda_2$	$\epsilon$	$\omega_2$	$\epsilon$
0° 90 180 270 360	0° 47 3' 30,94 90 47 3' 30,94 0	0° 90 180 270 360	180° 132 56' 29,06 90 132 56' 29,06 180	0° 90 180 270 360	180° 227 3' 30,94 270 227 3' 30,94 180	0° 90 180 270 360	0° — 47 3' 30,94 — 90 — 47 3' 30,94 0

wobei zur Controlle die Relationen:

$$AB - CD = \cos J, \quad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1 + \cos^2 J$$

benutzt werden können, so nimmt die Grösse (H), der Cosinus des von den beiden Radienvectoren gebildeten Winkels und deren Differentialquotient folgende Gestalt an:

$$(H) = A \cos f \cos f' + B \sin f \sin f' + C \sin f \cos f' + D \cos f \sin f'$$

$$\frac{d(H)}{df} = -A \sin f \cos f' + B \cos f \sin f' + C \cos f \cos f' - D \sin f \sin f'.$$

Gebraucht man ferner die Abkürzungen:

$$L = \frac{m'}{\Delta^3} \quad M = \frac{m'}{\Delta^3} \cdot \frac{r'}{a'} \cos f' \quad N = \frac{m'}{\Delta^3} \cdot \frac{r'}{a'} \sin f'$$

$$l = -\frac{m'}{r'^3} \quad m = -\frac{m'}{r'^3} \cdot \frac{r'}{a'} \cos f' \quad n = -\frac{m'}{r'^3} \cdot \frac{r'}{a'} \sin f',$$

so können die Differentialquotienten der Störungsfunktion

$$\Omega = m' \left\{ \frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2} \cdot (H) \right\},$$

folgendermassen geschrieben werden:

$$r \frac{d\Omega}{dr} = rr' (L + l) (H) - r^2 \cdot L$$

$$(3) \quad \frac{d\Omega}{df} = rr' (L + l) \frac{d(H)}{df}$$

$$\frac{d\Omega}{d(H)} = rr' (L + l).$$

Sei noch

$$F = A \cos \varphi \cdot M_0 + D \cos \varphi \cdot N_0$$

$$(4) \quad G = C \cdot M_0 + B \cdot N_0$$

$$H = a_0 M_0 + b_0 \cdot N_0,$$

wo der Kürze halber:

$$M_0 = M + m$$

$$N_0 = N + n$$

$$a_0 = \cos \varphi \cos i \sin J \sin \Pi'$$

$$b_0 = \cos \varphi \cos i \sin J \cos \Pi'$$

gesetzt wurde, so nehmen die Gleichungen (3) die Gestalt an:

$$a \frac{d\Omega}{dr} = aa' \left\{ G \sin f + F \sec \varphi \cdot \cos f - \frac{a}{a'} \cdot \frac{r}{a} L \right\}$$

$$\frac{d\Omega}{df} = aa' \left\{ G \frac{r}{a} \cos f - F \sec \varphi \cdot \frac{r}{a} \sin f \right\} \quad (5)$$

$$\frac{d\Omega}{d(H)} = aa' \cdot \frac{r}{a} \cdot \frac{r'}{a'} (L + l).$$

Die Differentialgleichungen, aus denen die Störungen der sog. Hansen'schen Elemente bestimmt werden müssen, lauten aber:

$$\frac{d\Xi}{d\omega} = -3a \sec \varphi \cdot \frac{ndt}{d\omega} \cdot \left( \frac{d\Omega}{df} \right)$$

$$\frac{dY}{d\omega} = 2a^2 \sec \varphi \cdot \frac{ndt}{d\omega} \left\{ \frac{\cos f + \cos \epsilon}{r} \left( \frac{d\Omega}{df} \right) + \sin f \left( \frac{d\Omega}{dr} \right) \right\}$$

$$\frac{d\Psi}{d\omega} = 2a^2 \sec \varphi \cdot \frac{ndt}{d\omega} \left\{ \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{p} \right) \sin f \left( \frac{d\Omega}{df} \right) - \cos f \left( \frac{d\Omega}{dr} \right) \right\}$$

$$\sec i \frac{dq}{d\omega} = -a \sec \varphi \cdot \frac{ndt}{d\omega} \sin J \sin (f' + \Pi') \cos f \frac{d\Omega}{d(H)}$$

$$\sec i \frac{dp}{d\omega} = -a \sec \varphi \cdot \frac{ndt}{d\omega} \sin J \sin (f' + \Pi') \sin f \frac{d\Omega}{d(H)}$$

Dies System soll nun in eine zur numerischen Rechnung geeignete Form gebracht werden. Führt man hier die Ausdrücke (5) ein, denkt sich den Factor

$$\varrho = \frac{a' a^2 \sec \varphi \cdot m'}{\sin \Pi''}$$



bereits in den Entwicklungen  $L$ ,  $M_0$  und  $N_0$  enthalten, und beachtet ferner die Relationen:

$$\frac{\cos f + e}{1 - e^2} \cdot \frac{ndt}{d\omega} = \frac{d(\sec \varphi \frac{r}{a} \sin f)}{d\omega}$$

$$- \frac{\cos \varphi \sin f}{1 - e^2} \cdot \frac{ndt}{d\omega} = \frac{d(\frac{r}{a} \cos f)}{d\omega},$$

so entsteht nach einigen leichten Reductionen:

$$- \frac{1}{3} \frac{d\Xi}{d\omega} = G \frac{r}{a} \cos f \frac{ndt}{d\omega} - F \frac{r}{a} \sin f \sec \varphi \frac{ndt}{d\omega}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{d\Upsilon}{d\omega} = G \left\{ \frac{ndt}{d\omega} + \frac{r}{a} \cos f \frac{d(\frac{r}{a} \sin f \sec \varphi)}{d\omega} \right\}$$

$$- F \left\{ \frac{r}{a} \sin f \sec \varphi \frac{d(\frac{r}{a} \sin f \sec \varphi)}{d\omega} \right\}$$

$$- \frac{a}{a'} \cos \varphi L \frac{r}{a} \sin f \sec \varphi \frac{ndt}{d\omega}$$

$$- \frac{1}{2} \cos \varphi \frac{d\Psi}{d\omega} = G \left\{ \frac{r}{a} \cos f \frac{d(\frac{r}{a} \cos f)}{d\omega} \right\}$$

$$- F \left\{ - \frac{ndt}{d\omega} + \frac{r}{a} \sin f \sec \varphi \frac{d(\frac{r}{a} \cos f)}{d\omega} \right\}$$

$$- \frac{a}{a'} \cos \varphi L \frac{r}{a} \cos f \frac{ndt}{d\omega}$$

$$- \cos \varphi \frac{dq}{d\omega} = H \frac{r}{a} \cos f \frac{ndt}{d\omega}$$

$$- \frac{dp}{d\omega} = H \frac{r}{a} \sin f \sec \varphi \frac{ndt}{d\omega}$$

Führen wir hier statt der Hansen'schen Elemente  $\Psi$  und  $q$  dieselben Buchstaben in etwas veränderter Bedeutung ein, so dass die Beziehungen zwischen unserm neuen System und den Störungen der elliptischen Elemente folgende werden:

$$\Xi = \frac{\delta n}{n} + 3 \tan \varphi \delta \varphi$$

$$\Upsilon = 2 \sec \varphi \delta \varphi$$

$$\Psi = 2 \tan \varphi (\delta \pi - 2 \sin^2 \frac{1}{2} i \delta \Omega) \quad (6)$$

$$q = \cos \varphi \cos i \delta i$$

$$p = \sin i \cos i \delta \Omega$$

und gebrauchen ferner die Bezeichnungen:

$$\frac{a}{a'} \cos \varphi = \alpha, \quad \frac{ndt}{d\omega} = \lambda$$

$$\frac{r}{a} \cos f = X, \quad \frac{r}{a} \cos f \frac{ndt}{d\omega} = \mu$$

$$\sec \varphi \frac{r}{a} \sin f = Y, \quad \sec \varphi \frac{r}{a} \sin f \frac{ndt}{d\omega} = \nu$$

$$X \frac{dY}{d\omega} + \lambda = \mu'$$

$$Y \frac{dY}{d\omega} = \nu'$$

$$X \frac{dX}{d\omega} = \mu''$$

$$Y \frac{dX}{d\omega} - \lambda = \nu'' \quad (7)$$

so wird unser definitives System, welches den Rechnungen zu Grunde gelegt werden soll:

$$- \frac{1}{3} \frac{d\Xi}{d\omega} = G\mu - F\nu$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{d\Upsilon}{d\omega} = G\mu' - F\nu' - \alpha L\nu$$

$$- \frac{1}{2} \frac{d\Psi}{d\omega} = G\mu'' - F\nu'' - \alpha L\mu \quad (8)$$

$$- \frac{dq}{d\omega} = H\mu$$

$$- \frac{dp}{d\omega} = H\nu$$

Hier sind die Functionen  $\mu, \nu, \mu', \nu', \mu'', \nu''$  ausschliesslich von der Excentricität des gestörten Planeten abhängig und zwar treten sie als Sinusreihen nach den Vielfachen der partiellen Anomalie auf, die  $G, F, H, L$  aber als Cosinusreihen. Nach Aufstellung dieses Systems und Integration hat man die Integrationsconstanten so zu bestimmen, dass die Integrale für die Osculationsepoche verschwinden. Alsdann erhält man die Störungen der mittleren Anomalie  $n\delta z$ , des log. hyp. des Radius vektor  $w$  und die Störung des Sinus der Breite, multiplicirt mit  $\frac{r}{a}$  aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 W &= \Xi + \Upsilon X + \Psi Y \\
 n\delta z &= \int \lambda W d\omega + (n\delta z_0) \\
 w &= -\frac{1}{2} W - \frac{1}{6} \Xi \\
 \frac{r\delta s}{a} &= qY - pX
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

II.

Coordinationen des Planeten. Allgemeine Ausdrücke.

Zunächst sollen die allgemeinen Ausdrücke für die Functionen  $\mu, \nu, \mu', \nu', \mu'', \nu''$  aufgestellt werden. Man hat hierbei zwischen den vier Theilen der Bahn zu unterscheiden. Vorausgesetzt, dass in den oben erwähnten Functionen  $R, S, T$  bereits durch die zweite Theilung die Argumente  $\omega_1, \lambda_1, \lambda_2, \omega_2$  eingeführt sind und ihre Differentialquotienten wie oben durch gestrichene Buchstaben bezeichnet werden, so erhält man leicht:

	Arg.	$\left(\frac{r}{a}\right)^2$	X	Y	$\varepsilon$	nt
I	$\omega_1$	$1-2e.R+e^2.R^2$	$+R-e$	$+S$	$-+T$	$+T-eS$
II	$\lambda_1$	$1+2e.R+e^2.R^2$	$-R-e$	$+S$	$\pi-T$	$-T-eS$
III	$\lambda_2$	$1+2e.R+e^2.R^2$	$-R-e$	$-S$	$\pi+T$	$+T+eS$
IV	$\omega_2$	$1-2e.R+e^2.R^2$	$+R-e$	$-S$	$-T$	$-T+eS$

	Arg.	$\lambda$	$\mu$	$\nu$
I	$\omega_1$	$+T'-eS'$	$+RT'-(RS'+T')e+S'.e^2$	$+ST'-SS'.e$
II	$\lambda_1$	$-T'-eS'$	$+RT'+(RS'+T')e+S'.e^2$	$-ST'-SS'.e$
III	$\lambda_2$	$+T'+eS'$	$-RT'-(RS'+T')e-S'.e^2$	$-ST'-SS'.e$
IV	$\omega_2$	$-T'+eS'$	$-RT'+(RS'+T')e-S'.e^2$	$+ST'-SS'.e$

	Arg.	$\mu'$	$\mu''$	$\nu'$	$\nu''$
I	$\omega_1$	$+(RS'+T')-2eS'$	$+RR'-e.R'$	$+SS'$	$+(SR'-T')+e.S'$
II	$\lambda_1$	$-(RS'+T')-2eS'$	$+RR'+e.R'$	$+SS'$	$-(SR'-T')+e.S'$
III	$\lambda_2$	$+(RS'+T')+2eS'$	$+RR'+e.R'$	$+SS'$	$+(SR'-T')-e.S'$
IV	$\omega_2$	$-(RS'+T')+2eS'$	$+RR'-e.R'$	$+SS'$	$-(SR'-T')-e.S'$

Setzt man jetzt noch:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= R & E_6 &= S' = RT' \\
 E_2 &= R^2 & E_7 &= T' \\
 E_3 &= S & E_8 &= RR' = -SS' = -RST' \\
 E_4 &= T & E_9 &= RS' + T' \\
 E_5 &= R' = -ST' & E_{10} &= R'S - T'
 \end{aligned}$$

Wie man sieht, führt die Aufstellung dieser Grössen auf äusserst einfache Rechnungen, wenn man erst alle  $E$ -Functionen kennt. Diese lassen sich aber auf sehr leichte Weise aus den ursprünglichen Reihen  $R, S, T$  zum Theil durch Differentiation, zum Theil durch mechanische Multiplicationen erhalten. Die folgende Tafel enthält die Coefficienten sämmtlicher  $E$ -Functionen, von denen die 4 ersten Cosinusreihen, alle übrigen dagegen Sinusreihen sind.

	$\log E_1$	$\log E_2$	$\log E_3$	$E_4$	
	9,770667	9,687695	9,787461	+0,803182	
$\cos \omega_1$	9,715797	9,75416	9,707921 <sub>n</sub>	- 0,787892	
$\cos 2\omega_1$	8,957278 <sub>n</sub>	8,2457	9,064361 <sub>n</sub>	- 0,017963	
$\cos 3\omega_1$	8,30441 <sub>n</sub>	8,8480 <sub>n</sub>	8,018987	+ 0,002504	
$\cos 4\omega_1$	6,9426	7,7096 <sub>n</sub>	7,48061	+ 0,000181	
$\cos 5\omega_1$	6,6125	7,4424	5,5198 <sub>n</sub>	- 0,000010	
$\cos 6\omega_1$	4,806	6,533	5,7101 <sub>n</sub>	- 0,000002	
$\cos 7\omega_1$	4,778 <sub>n</sub>	5,768 <sub>n</sub>	4,322 <sub>n</sub>		
	$E_5$	$\log E_5$	$\log E_6$	$E_7$	
$\sin \omega_1$	- 0,519752	9,715797 <sub>n</sub>	9,707921	+ 0,787892	
$\sin 2\omega_1$	+ 0,181263	9,258308	9,365391	+ 0,035926	
$\sin 3\omega_1$	+ 0,060469	8,781532	8,496109 <sub>n</sub>	- 0,007511	
$\sin 4\omega_1$	- 0,003505	7,54466 <sub>n</sub>	8,082671 <sub>n</sub>	- 0,000725	
$\sin 5\omega_1$	- 0,002049	7,31144 <sub>n</sub>	6,2188	+ 0,000051	
$\sin 6\omega_1$	- 0,000038	5,5844 <sub>n</sub>	6,4883	+ 0,000010	
$\sin 7\omega_1$	+ 0,000042	5,6232	5,167		
$\sin 8\omega_1$	+ 0,000003	4,505	4,68 <sub>n</sub>		
	$E_8$	$\log E_8$	$E_9$	$\log E_9$	$E_{10}$
$\sin \omega_1$	- 0,288875	9,453128 <sub>n</sub>	+1,176210	0,070485	-1,187464
$\sin 2\omega_1$	- 0,017608	8,245712 <sub>n</sub>	+0,302812	9,481173	+0,195034
$\sin 3\omega_1$	+0,105693	9,024048	+0,007729	7,88812	+0,030262
$\sin 4\omega_1$	+0,010247	8,01057	-0,031735	8,50154 <sub>n</sub>	-0,029560
$\sin 5\omega_1$	-0,006923	7,84028 <sub>n</sub>	-0,003610	7,55754 <sub>n</sub>	-0,003764
$\sin 6\omega_1$	-0,001023	7,0101 <sub>n</sub>	+0,001311	7,1175	+0,001279
$\sin 7\omega_1$	+0,000206	6,3132	+0,000237	6,3755	+0,000237
$\sin 8\omega_1$	+0,000048	5,678	-0,000027	5,439 <sub>n</sub>	-0,000027

so nehmen die obigen Grössen folgende einfache Formen an:

Arg.	I	II	III	IV
$\left(\frac{r}{a}\right)^2$	$1 - 2e \cdot E_1 + e^2 E_2$	$1 + 2e E_1 + e^2 E_2$	$1 + 2e E_1 + e^2 E_2$	$1 - 2e E_1 + e^2 E_2$
X	$+ E_1 - e$	$- E_1 - e$	$- E_1 - e$	$+ E_1 - e$
Y	$+ E_3$	$+ E_3$	$- E_3$	$- E_3$
z	$+ E_4$	$\pi - E_4$	$\pi + E_4$	$- E_4$
nt	$+ E_4 - e E_3$	$- E_4 - e E_3$	$+ E_4 + e E_3$	$- E_4 + e E_3$
$\lambda$	$+ E_7 - e E_6$	$- E_7 - e E_6$	$+ E_7 + e E_6$	$- E_7 + e E_6$
$\mu$	$+(1 + e^2) E_6 - e \cdot E_9$	$+(1 + e^2) E_6 + e E_9$	$-(1 + e^2) E_6 - e \cdot E_9$	$-(1 + e^2) E_6 + e E_9$
$\nu$	$- E_5 + e E_4$	$+ E_5 + e E_4$	$+ E_5 + e E_4$	$- E_5 + e E_4$
$\mu'$	$+ E_9 - 2e \cdot E_6$	$- E_9 - 2e \cdot E_6$	$+ E_9 + 2e \cdot E_6$	$- E_9 + 2e \cdot E_6$
$\nu'$	$- E_4$	$- E_4$	$- E_4$	$- E_4$
$\mu''$	$+ E_4 - e E_3$	$+ E_4 + e E_3$	$+ E_4 + e E_3$	$+ E_4 - e E_3$
$\nu''$	$+ E_{10} + e E_6$	$- E_{10} + e \cdot E_6$	$+ E_{10} - e E_6$	$- E_{10} - e E_6$

(10)

III.

Coordinaten des störenden Planeten.

Wie man aus dem Vorhergehenden ersieht, liegt die Hauptschwierigkeit der Aufgabe in der Entwicklung der Grössen  $F, G, H, L$ . Dazu ist vor allem die Entwicklung von

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2, \frac{r'}{a'} \cos f', \frac{r'}{a'} \sin f', \frac{1}{r'^3} \cdot \frac{r'}{a'} \cos f' \quad \text{und} \quad \frac{1}{r'^3} \cdot \frac{r'}{a'} \sin f'$$

in Reihen, welche nach den Vielfachen der partiellen Anomalie des gestörten Planeten fortschreiten, erforderlich. Im Folgenden fasse ich zunächst nur einen störenden Planeten und zwar den Jupiter ins Auge. Bezeichne demnach  $g'$  die mittlere Anomalie des Jupiter,  $c'$  und  $c_1'$  die mittleren Anomalien desselben Himmelskörpers zur Zeit des Perihel- und Apheldurchgangs des gestörten Planeten, so ist:

$$\text{für den obern Theil: } g' = c' + \frac{n'}{n} \cdot nt$$

$$\text{» » untern » } g' = c_1' + \frac{n'}{n} \cdot nt$$

Führt man statt  $nt$  die für die vier Bahntheile geltenden Ausdrücke ein, so kommt:

$$\text{I. } g' = c' + \frac{n'}{n} (E_4 - eE_3)$$

$$\text{II. } g' = c_1' - \frac{n'}{n} (E_4 + eE_3)$$

$$\text{III. } g' = c_1' + \frac{n'}{n} (E_4 + eE_3)$$

$$\text{IV. } g' = c' - \frac{n'}{n} (E_4 - eE_3)$$

Sei jetzt:

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 = \Sigma R_i \cos ig'$$

$$\frac{r'}{a'} \cos f' = \Sigma C_i \cos ig'$$

$$\frac{r'}{a'} \sin f' = \Sigma D_i \sin ig'$$

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \cos f' = \Sigma P_i \cos ig'$$

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \sin f' = \Sigma Q_i \sin ig'$$

so können die Coefficienten dieser Entwicklungen nach sehr bekannten Vorschriften entwickelt werden. Ich habe die Rechnung für 3 verschiedene Werthe der Excentricität des Jupiter,  $\text{arc sin } e' = \varphi' = 9950'', 10000''$  und  $10050''$ , durchgeführt. Die Änderungen der Coefficienten erfolgen den Änderungen des Excentricitätswinkels durchaus proportional. Das folgende Täfelchen enthält daher nur die Coefficienten für  $\varphi' = 10000''$  geltend, nebst ihren Änderungen für einen Zuwachs des Winkels  $\varphi'$  um  $100''$ .

$R_i$		$C_i$	
	+ 1,003523 + 70		- 0,072694 - 727
cos $g'$	- 0,096396 - 968	cos $g'$	+ 0,999119 - 18
cos $2g'$	- 0,001173 - 24	cos $2g'$	+ 0,024193 + 241
cos $3g'$	- 0,000028 - 1	cos $3g'$	+ 0,000879 + 17
cos $4g'$	- 0,000001 0	cos $4g'$	+ 0,000038 + 1
		cos $5g'$	+ 0,000002 0
$D_i$		$P_i$	
sin $g'$	+ 0,998532 - 29	cos $g'$	+ 0,999119 - 18
sin $2g'$	+ 0,024184 + 241	cos $2g'$	+ 0,096773 + 964
sin $3g'$	+ 0,000878 + 17	cos $3g'$	+ 0,007909 + 157
sin $4g'$	+ 0,000038 + 1	cos $4g'$	+ 0,000605 + 16
sin $5g'$	+ 0,000002 0	cos $5g'$	+ 0,000045 0

	$Q_i$	
sin $ig'$	+ 0,998532	— 29
sin $2g'$	+ 0,096735	+ 963
sin $3g'$	+ 0,007906	+ 156
sin $4g'$	+ 0,000605	+ 16
sin $5g'$	+ 0,000045	0

Es kommt nun darauf an, die Cosinus und Sinus der Vielfachen von  $g'$  zu bilden. Sei zur Abkürzung:

$$(11) \quad \frac{n'}{n} (E_4 - eE_3) = f_1 \quad \frac{n'}{n} (E_4 + eE_3) = f_2$$

so hat man in den vier Theilen der Bahn:

$$\text{I und IV: } g' = c' \pm f_1 \quad \text{II und III: } g' = c_1' \mp f_2$$

Will man die Störungen erster Ordnung für einen ganzen Umlauf berechnen, so lassen sich die Entwicklungen für I. und IV., und ebenso für II. und III. gemeinschaftlich ausführen. In den allermeisten Fällen dürfte folgendes einfache Verfahren die Lösung der vorgelegten Aufgabe liefern. Bildet man die Potenzen der beiden Cosinusreihen  $f_1$  und  $f_2$ , welche durch einige mechanische Multiplicationen sehr rasch und leicht zu berechnen sind, so erhalten die verlangten Entwicklungen folgende Form:

$$\begin{aligned}
 \text{I und IV.} \quad \left(\frac{r'}{a}\right)^2 &= F_1^{(0)} + F_1^{(2)} \cdot f_1^2 + F_1^{(4)} f_1^4 + \dots \mp \{F_1^{(1)} \cdot f_1 + F_1^{(3)} \cdot f_1^3 + \dots\} \\
 \text{II und III.} \quad \left(\frac{r'}{a}\right)^2 &= F_2^{(0)} + F_2^{(2)} \cdot f_2^2 + F_2^{(4)} f_2^4 + \dots \pm \{F_2^{(1)} \cdot f_2 + F_2^{(3)} \cdot f_2^3 + \dots\} \\
 \text{I und IV.} \quad \frac{r'}{a} \cos f' &= G_1^{(0)} + G_1^{(2)} f_1^2 + G_1^{(4)} f_1^4 + \dots \mp \{G_1^{(1)} f_1 + G_1^{(3)} f_1^3 + \dots\} \\
 \text{II und III.} \quad \frac{r'}{a} \cos f' &= G_2^{(0)} + G_2^{(2)} f_2^2 + G_2^{(4)} f_2^4 + \dots \pm \{G_2^{(1)} f_2 + G_2^{(3)} f_2^3 + \dots\} \\
 \text{I und IV.} \quad \frac{r'}{a} \sin f' &= H_1^{(0)} + H_1^{(2)} \cdot f_1^2 + H_1^{(4)} f_1^4 + \dots \pm \{H_1^{(1)} \cdot f_1 + H_1^{(3)} \cdot f_1^3 + \dots\} \\
 \text{II und III.} \quad \frac{r'}{a} \sin f' &= H_2^{(0)} + H_2^{(2)} f_2^2 + H_2^{(4)} f_2^4 + \dots \mp \{H_2^{(1)} \cdot f_2 + H_2^{(3)} f_2^3 + \dots\} \\
 \text{I und IV.} \quad \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \cos f' &= J_1^{(0)} + J_1^{(2)} f_1^2 + J_1^{(4)} f_1^4 + \dots \mp \{J_1^{(1)} f_1 + J_1^{(3)} f_1^3 + \dots\} \\
 \text{II und III.} \quad \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \cos f' &= J_2^{(0)} + J_2^{(2)} f_2^2 + J_2^{(4)} f_2^4 + \dots \pm \{J_2^{(1)} f_2 + J_2^{(3)} f_2^3 + \dots\} \\
 \text{I und IV.} \quad \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \sin f' &= K_1^{(0)} + K_1^{(2)} f_1^2 + K_1^{(4)} f_1^4 + \dots \pm \{K_1^{(1)} f_1 + K_1^{(3)} f_1^3 + \dots\} \\
 \text{II und III.} \quad \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \sin f' &= K_2^{(0)} + K_2^{(2)} f_2^2 + K_2^{(4)} f_2^4 + \dots \mp \{K_2^{(1)} f_2 + K_2^{(3)} f_2^3 + \dots\}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Die verschiedenen Coefficienten  $F^{(n)} G^{(n)} H^{(n)} I^{(n)} K^{(n)}$  müssen folgendermaassen berechnet werden. Sei

$$\begin{aligned}\alpha_i^{(p)} &= \pm \frac{i^p \cdot R_i}{p!} \\ \beta_i^{(p)} &= \pm \frac{i^p \cdot C_i}{p!} \\ \gamma_i^{(p)} &= \pm \frac{i^p \cdot D_i}{p!} \\ \delta_i^{(p)} &= \pm \frac{i^p \cdot F_i}{p!} \\ \varepsilon_i^{(p)} &= \pm \frac{i^p \cdot Q_i}{p!}\end{aligned}$$

wobei das obere Vorzeichen für alle Zahlen  $p$  von der Form  $4m$  und  $4m + 1$ , das untere für alle  $p$  von der Form  $4m + 2$  und  $4m + 3$  gilt, so ist:

$$(13) \begin{aligned}F_1^{(2n)} &= \sum \alpha_i^{(2n)} \cos ic' & G_1^{(2n)} &= \sum \beta_i^{(2n)} \cos ic' \\ F_1^{(2n+1)} &= \sum \alpha_i^{(2n+1)} \sin ic' & G_1^{(2n+1)} &= \sum \beta_i^{(2n+1)} \sin ic' \\ J_1^{(2n)} &= \sum \delta_i^{(2n)} \cos ic' & H_1^{(2n)} &= \sum \gamma_i^{(2n)} \sin ic' \\ J_1^{(2n+1)} &= \sum \delta_i^{(2n+1)} \sin ic' & H_1^{(2n+1)} &= \sum \gamma_i^{(2n+1)} \cos ic' \\ K_1^{(2n)} &= \sum \varepsilon_i^{(2n)} \sin ic' \\ K_1^{(2n+1)} &= \sum \varepsilon_i^{(2n+1)} \cos ic'\end{aligned}$$

Die Coefficienten  $F, G, \text{etc.}$  mit dem untern Index 2 erhält man, indem überall  $c_1'$  an Stelle von  $c'$  tritt. Die Entstehung der vorstehenden Formeln, die nur deshalb in solcher Ausführlichkeit hingeschrieben wurden, um sich die numerische Rechnung sogleich in bequemster Weise anlegen zu können, übersieht man augenblicklich, wenn man von der Entwicklung irgend einer der obigen Cosinus- oder Sinusreihen nach dem Taylor'schen Theorem, also von der Form

$$C = C_0 + f \left( \frac{dC}{d\bar{f}} \right)_0 + \frac{1}{1 \cdot 2} f^2 \left( \frac{d^2 C}{d\bar{f}^2} \right)_0 + \dots$$

ausgeht.

Die Logarithmen der Coefficienten  $\alpha_i^{(p)}, \beta_i^{(p)}, \text{etc.}$  können für einen bestimmten Werth der Jupiters-excentricität in Tafeln gebracht werden, welche für alle Fälle ausreichen werden, wenn man noch die Änderungen angiebt, welche diese Logarithmen für eine Änderung des Excentricitätswinkels erleiden. Nachstehend gebe ich die  $\log \alpha_i^{(p)}, \log \beta_i^{(p)}$  etc. für den Werth  $\varphi' = 10000''$  nebst ihren Variationen für  $\delta\varphi' = 100''$  in der Columne  $\frac{100 d\alpha}{d\varphi'}, \frac{100 d\beta}{d\varphi'}$  etc. Dieselben sind in Einheiten der letzten Stelle der in der betreffenden Horizontalreihe angesetzten Logarithmen ausgedrückt.

$i, p$	0	1	2	3	4	5	6	7	$100 \frac{d\alpha}{d\varphi}$
0	0,001527								
1	8,98631 <sub>n</sub>	8,98631 <sub>n</sub>	8,68528	8,20816	7,60610 <sub>n</sub>	6,90713 <sub>n</sub>	6,12898	5,28388	+31
2	7,0685 <sub>n</sub>	7,3705 <sub>n</sub>	7,3705	7,1944	6,8934 <sub>n</sub>	6,4955 <sub>n</sub>	6,0183	5,4743	+434
3	5,453 <sub>n</sub>	5,930 <sub>n</sub>	6,108	6,106	5,981 <sub>n</sub>	5,739 <sub>n</sub>	5,458	5,090	+87
4	4,00 <sub>n</sub>	4,60 <sub>n</sub>	4,903	5,028	5,028 <sub>n</sub>	4,931 <sub>n</sub>	4,755	4,512	+15
									0

$i, p$	0	1	2	3	4	5	6	7	$100 \frac{d\beta}{d\varphi}$
0	8,86150 <sub>n</sub>								
1	9,999617	9,999617	9,698587 <sub>n</sub>	9,221466 <sub>n</sub>	8,619406	7,920436	7,142285 <sub>n</sub>	6,297186 <sub>n</sub>	+434
2	8,38369	8,68472	8,68472 <sub>n</sub>	8,50863 <sub>n</sub>	8,20760	7,80966	7,33254 <sub>n</sub>	6,78847 <sub>n</sub>	+8
3	6,9439	7,4210	7,5971 <sub>n</sub>	7,5971 <sub>n</sub>	7,4722	7,2503	6,9438 <sub>n</sub>	6,5813 <sub>n</sub>	+483
4	5,578	6,180	6,481 <sub>n</sub>	6,606 <sub>n</sub>	6,606	6,509	6,333 <sub>n</sub>	6,090 <sub>n</sub>	+86
5	4,255	4,954	5,352 <sub>n</sub>	5,574 <sub>n</sub>	5,671	5,671	5,591 <sub>n</sub>	5,445 <sub>n</sub>	+12
									0

$i, p$	0	1	2	3	4	5	6	7	$100 \frac{d\gamma}{d\varphi}$
1	9,999362	9,999362	9,698332 <sub>n</sub>	9,221211 <sub>n</sub>	8,619151	7,920181	7,142030 <sub>n</sub>	6,296931 <sub>n</sub>	+12
2	8,38352	8,68455	8,68455 <sub>n</sub>	8,50846 <sub>n</sub>	8,20743	7,80949	7,33237 <sub>n</sub>	6,78830 <sub>n</sub>	+482
3	6,9437	7,4208	7,5969 <sub>n</sub>	7,5969 <sub>n</sub>	7,4720	7,2501	6,9491 <sub>n</sub>	6,5811 <sub>n</sub>	+85
4	5,578	6,180	6,481 <sub>n</sub>	6,606 <sub>n</sub>	6,606	6,509	6,333 <sub>n</sub>	6,090 <sub>n</sub>	+11
5	4,255	4,954	5,352 <sub>n</sub>	5,574 <sub>n</sub>	5,671	5,671	5,591 <sub>n</sub>	5,445 <sub>n</sub>	0

$i, p$	0	1	2	3	4	5	6	7	$100 \frac{d\delta}{d\varphi}$
1	9,999617	9,999617	9,698587 <sub>n</sub>	9,221466 <sub>n</sub>	8,619406	7,920436	7,142285 <sub>n</sub>	6,297186 <sub>n</sub>	+8
2	8,98575	9,28678	9,28678 <sub>n</sub>	9,11069 <sub>n</sub>	8,80966	8,41172	7,93460 <sub>n</sub>	7,39053 <sub>n</sub>	+433
3	7,8981	8,3752	8,5513 <sub>n</sub>	8,5513 <sub>n</sub>	8,4364	8,2045	7,9085 <sub>n</sub>	7,5355 <sub>n</sub>	+86
4	6,782	7,384	7,685 <sub>n</sub>	7,810 <sub>n</sub>	7,810	7,713	7,537 <sub>n</sub>	7,294 <sub>n</sub>	+12
5	5,653	6,352	6,750 <sub>n</sub>	6,972 <sub>n</sub>	7,069	7,069	6,989 <sub>n</sub>	6,843 <sub>n</sub>	0

$i, p$	0	1	2	3	4	5	6	7	$100 \frac{d\epsilon}{d\varphi}$
1	9,999362	9,999362	9,698332 <sub>n</sub>	9,221211 <sub>n</sub>	8,619151	7,920181	7,142030 <sub>n</sub>	6,296931 <sub>n</sub>	+12
2	8,98558	9,28661	9,28661 <sub>n</sub>	9,11052 <sub>n</sub>	8,80949	8,41155	7,93443 <sub>n</sub>	7,39036 <sub>n</sub>	+432
3	7,8979	8,3750	8,5511 <sub>n</sub>	8,5511 <sub>n</sub>	8,4262	8,2043	7,9083 <sub>n</sub>	7,5353 <sub>n</sub>	+85
4	6,782	7,384	7,685 <sub>n</sub>	7,810 <sub>n</sub>	7,810	7,713	7,537 <sub>n</sub>	7,294 <sub>n</sub>	+11
5	5,653	6,352	6,750 <sub>n</sub>	6,972 <sub>n</sub>	7,069	7,069	6,989 <sub>n</sub>	6,843 <sub>n</sub>	0

Die Ermittlung der Coefficienten  $F$ ,  $G$ , etc. mit Hilfe dieser Tafeln macht verhältnissmässig wenig Mühe; man schreibt sich am besten die  $\log \cos ic'$  und  $\log \sin ic'$  auf einen Streifen Papier und darüber die Correctionen, welche die Zahlen dieser Tafel erfordern, um dem augenblicklich stattfindenden Excentricitätswinkel des Jupiter zu entsprechen. In dieser Form wird meiner Ansicht nach die Entwicklung der am Anfang dieses § genannten Functionen einfacher, als wenn man dazu die Bessel'schen Functionen benutzt. Auch bemerkt man leicht die Vorzüge des vorgeschlagenen Verfahrens gegenüber dem von Baillaud <sup>5)</sup> benutzten.

Die obigen Tafeln der Coefficienten  $\alpha_i^{(p)}$ ,  $\beta_i^{(p)}$ , etc., habe ich nur bis  $p = 7$  ausgedehnt. Dies genügt jedenfalls in der Mehrzahl der Fälle; in dem unten mitgetheilten numerischen Beispiele brauchte ich bloß bis  $p = 6$  zu gehen. Es kann sich aber in extremen Fällen, wenn der Planet dem Jupiter sehr nahe kommt, ereignen, dass die oben gegebenen Tafeln nicht ausreichen. Dann ist es vielleicht vorzuziehen, behufs Entwicklung der Jupitercoordinaten das Verfahren der mechanischen Quadratur anzuwenden, welches hier eine besonders einfache Gestalt annimmt. Die Convergenz der gesuchten Reihenentwicklungen nach den Vielfachen der partiellen Anomalien ist stets so bedeutend, dass eine Theilung des Umkreises derselben in 12 Theile als völlig hinreichend erachtet werden kann. Von diesen 12 Specialwerthen braucht man aber bloß 7

5) Exposition de la méthode de M. Gylden pour le développement des perturbations des comètes. Paris. 1876. pag. 37 ff.

wirklich zu berechnen, nämlich für 0, 30, 60, 90, 120, 150 und 180° der partiellen Anomalie, da die übrigen Werthe in umgekehrter Reihenfolge mit jenen identisch werden müssen. Um die diesen 7 Werthen der part. Anomalie entsprechenden Werthe der Jupitercoordinaten zu berechnen, dienen die Relationen:

$$\begin{aligned}
 \text{I u. IV: } g' &= c' \pm \frac{n'}{n} (T - eS) \\
 \text{II. u. III: } g' &= c' \mp \frac{n'}{n} (T + eS) \\
 g' &= \varepsilon' - e' \sin \varepsilon' \\
 \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 &= (1 - e' \cos \varepsilon')^2 \\
 \frac{r'}{a'} \cos f' &= \cos \varepsilon' - e' \\
 \frac{r'}{a'} \sin f' &= \cos \varphi' \sin \varepsilon' \\
 \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \cos f' &= \frac{\cos \varepsilon' - e'}{(1 - e' \cos \varepsilon')^3} \\
 \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \sin f' &= \frac{\cos \varphi' \sin \varepsilon'}{(1 - e' \cos \varepsilon')^3}
 \end{aligned} \tag{14}$$

$T$  und  $\log S$ , in Bogenminuten ausgedrückt, haben dabei folgende Werthe:

$\omega$	$T$	$\log S$
0°	0,00	— $\infty$
30	384,29	2,583756
60	1428,78	3,142390
90	2823,52	3,400815
120	4154,60	3,507129
150	5075,61	3,534337
180	5400,00	3,536274



Es dürfte vielleicht etwas kürzer sein, die excentrische Anomalie  $\varepsilon'$  aus der mittleren  $g'$  durch Auflösung der Kepler'schen Gleichung zu bestimmen, als die Grössen  $\left(\frac{r'}{a'}\right)^2$ ,  $\frac{r'}{a'} \cos f'$ , etc. aus ihren Reihenentwickelungen nach  $g'$  zu suchen. Bezeichnet man die so erlangten Specialwerthe einer dieser Grössen nach Division durch 6 mit  $y_0, y_1$ , etc., so findet man die Coefficienten der Entwicklung

$$c_0 + c_1 \cos \omega + c_2 \cos 2\omega + c_3 \cos 3\omega + \dots$$

aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} (0.6) &= y_0 + y_6 & \left(\frac{0}{6}\right) &= y_0 - y_6 \\ (1.5) &= y_1 + y_5 & \left(\frac{1}{5}\right) &= y_1 - y_5 \\ (2.4) &= y_2 + y_4 & \left(\frac{2}{4}\right) &= y_2 - y_4 \\ (3.3) &= 2y_3 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(c_0 + c_6) = \frac{1}{2}(0.6) + (2.4)$$

$$\frac{1}{2}(c_0 - c_6) = \frac{1}{2}(3.3) + (1.5)$$

$$\frac{1}{2}(c_2 + c_4) = (0.6) - (2.4)$$

$$\frac{1}{2}(c_2 - c_4) = (1.5) - (3.3)$$

$$\frac{1}{2}(c_1 + c_5) = \left(\frac{0}{6}\right) + \left(\frac{2}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2}(c_1 - c_5) = 2 \cos 30^\circ \left(\frac{1}{5}\right)$$

$$c_3 = \left(\frac{0}{6}\right) - 2 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)$$

Um dies durch ein numerisches Beispiel zu illustriren, entnehme ich den unten folgenden Rechnungen die Grössen:

$$e' = 329^\circ 47' 45 \quad \log \frac{n'}{n} = 9,553361$$

$$\log e = 9,317442 \quad \log e' = 8,685795$$

Damit erhält man, wenn z. B. die Function  $\frac{r'}{a'} \cos f'$  für den Bahntheil I entwickelt werden soll:

$\omega$	$g'$	$\varepsilon'$	$\frac{1}{6} \frac{r'}{a'} \cos f'$
0°	329° 47',45	328° 19',92	+ 0,13377
30	331 36,38	330 13,57	+ 0,13658
60	336 35,26	335 25,93	+ 0,14350
90	343 30,15	342 40,49	+ 0,15102
120	350 34,27	350 5,58	+ 0,15610
150	355 48,16	355 35,34	+ 0,15809
180	357 43,01	357 36,03	+ 0,15844

$$(0,6) = + 0,29221 \quad \left(\frac{0}{6}\right) = - 0,02467$$

$$(1,5) = + 0,29467 \quad \left(\frac{1}{5}\right) = - 0,02151$$

$$(2,4) = + 0,29960 \quad \left(\frac{2}{4}\right) = - 0,01260$$

$$(3,3) = + 0,30204$$

und man findet, fast bis auf die letzte Decimale übereinstimmend mit dem Resultate der analytischen Entwicklung:

$$\begin{aligned} \frac{r'}{a'} \cos f' &= + 0,89139 \\ &- 0,07453 \cos \omega_1 \\ &- 0,01476 \cos 2\omega_1 \\ &+ 0,00053 \cos 3\omega_1 \\ &- 0,00002 \cos 4\omega_1 \\ &- 0,00001 \cos 5\omega_1 \end{aligned}$$

IV.

Aufstellung von  $\Delta^2$ . Entwicklung von  $\Delta^{-3}$ .

Nachdem im Vorhergehenden alle Hilfsmittel zur Bildung des Quadrats der Entfernung des gestörten vom störenden Planeten gegeben sind, erlangt man den Ausdruck dafür ohne Schwierigkeit in folgender Weise. Wir hatten:

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr'(H) \\ \Delta^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr'(A \cos f \cos f' + B \sin f \sin f' \\ &\quad + C \sin f' \cos f' + D \cos f \sin f') \\ (15) \quad \Delta^2 &= a^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + a'^2 \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 \\ &\quad - \frac{r}{a} \cos f \{ 2aa' A \frac{r'}{a'} \cos f' + 2aa' D \frac{r'}{a'} \sin f' \} \\ &\quad - \sec \varphi \frac{r}{a} \sin f \{ 2aa' \cos \varphi C \frac{r'}{a'} \cos f' + 2aa' \cos \varphi B \frac{r'}{a'} \sin f' \} \end{aligned}$$

Sind also die Ausdrücke innerhalb der Klammern gebildet und durch zwei mechanische Multiplicationen mit  $\frac{r}{a} \cos f = X$  und  $\sec \varphi \frac{r}{a} \sin f = Y$  vereinigt, so macht die Zusammenfassung aller Glieder von (15) keine Schwierigkeit mehr.

Es handelt sich jetzt darum,  $\Delta^{-3}$  herzustellen. Man wird dazu nach Massgabe der Umstände eine der zahlreichen Methoden anzuwenden haben, welche diese Entwicklung bewerkstelligen. Für die leichtesten Fälle, in denen der gestörte Planet immer in grösserer Entfernung vom Jupiter bleibt, lässt sich sogar die Potenzirung von  $\Delta^2$  mit Vortheil direct ausführen. Sei

$$\Delta^2 = a_0 (1 + a_1 \cos \omega + a_2 \cos 2\omega + \dots) = a_0 (1 + T)$$

Dann wird

$$\varrho \Delta^{-3} = \varrho a_0^{-\frac{3}{2}} \left( 1 - \frac{3}{2} T + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} T^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} T^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} T^4 - \dots \right) \quad (16)$$

In Fällen, wo noch höhere Potenzen von  $T$  mitzunehmen wären, schlägt man vortheilhafter ein anderes Verfahren ein. Zerlegt man den Ausdruck für  $\Delta^2$  in zwei Theile, schreibt also

$$\frac{\Delta^2}{a_0} = T_1 + T_2$$

so hat man:

$$\varrho \Delta^{-3} = \varrho a_0^{-\frac{3}{2}} \{ T_1^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} T_1^{-\frac{5}{2}} T_2 + \frac{15}{8} T_1^{-\frac{7}{2}} T_2^2 \dots \} \quad (17)$$

Wir betrachten zuerst die Fälle, in denen  $a_2$  gegen  $a_1$  schon eine kleine Grösse ist. Alsdann wird man in der Form (17) höchstens das Quadrat von  $T_2$  mitzunehmen haben und daher setzen:

$$T_1 = 1 + a_1 \cos \omega$$

Zur Entwicklung der ungeraden gebrochenen negativen Potenzen dieses Ausdrucks kann man dann entweder den bekannten Hansen'schen Kettenbruch, oder das Laplace'sche Verfahren oder endlich die Legendre'sche Methode anwenden. Eine bequeme Tafel der Laplace'schen Transcendenten, welche für unsern Fall vollständig genügt, findet man in der Abhandlung des Hrn. Prof. Donner: «Constantes à employer dans le calcul des perturbations absolues» etc., Stockholm 1881. Das Hansen'sche Verfahren darf als allgemein bekannt angesehen werden und halte ich mich nicht dabei auf. Dagegen will ich einen Augenblick bei der

Legendre'schen Methode<sup>6)</sup> verweilen, welche selten Anwendung gefunden zu haben scheint. Durch Construction geeigneter Hilfstäfelchen kann man sich ihren Gebrauch bedeutend erleichtern und grade in unserm Falle führt diese elegante Methode auf kurze und leichte Rechnungen.

Liegt zur Entwicklung der Ausdruck

$$(1 - q \cos \omega)^{-\frac{n}{2}}$$

vor, so setzten wir  $q = \sin \chi$  und erhalten dann die Coefficienten der Reihe

$$(1 - q \cos \omega)^{-\frac{n}{2}} = \alpha_0^{(n)} + 2 \sum \alpha_i^{(n)} \cos i \omega$$

durch Ausdrücke, welche nach Potenzen der Grösse

$$x = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \chi}{2 \cos \chi}$$

fortschreiten und deshalb äusserst convergent sein müssen, falls  $q$  der Einheit nicht sehr nahe kommt. Es ist nämlich, wenn wir noch zur Abkürzung

$$(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \chi)^{\frac{n}{2}} (\sec \chi)^{\frac{n}{2}} = y_i^{(n)}$$

setzen:

$$(18) \alpha_i^{(n)} = y_i^{(n)} \{ \mathfrak{G}_0^{(i,n)} + \mathfrak{G}_1^{(i,n)} x + \mathfrak{G}_2^{(i,n)} x^2 + \dots \}$$

wo die  $\mathfrak{G}$ -Coefficienten sich ein für alle mal tabuliren lassen. Für die beiden Werthe  $n = 3$  und  $n = 5$  giebt das nachstehende Täfelchen die Logarithmen derselben.

6) Exercices de calcul intégral. Cinquième Partie, § XII.

$i$	$\log \mathfrak{G}_0^{(i,3)}$	$\log \mathfrak{G}_1^{(i,3)}$	$\log \mathfrak{G}_2^{(i,3)}$	$\log \mathfrak{G}_3^{(i,3)}$
1	0,176091	0,05115	9,67094 <sub>n</sub>	9,61295
2	0,273001	9,97197	9,4668 <sub>n</sub>	9,3119
3	0,339948	9,91398	9,3119 <sub>n</sub>	9,0778
4	0,39110	9,86822	9,1870 <sub>n</sub>	8,8860
5	0,43249	9,8304	9,0822 <sub>n</sub>	8,7232
6	0,4673	9,7982	8,9921 <sub>n</sub>	8,5819
7	0,4972	9,7702	8,9129 <sub>n</sub>	8,457
8	0,5235	9,7454	8,8423 <sub>n</sub>	8,345

$i$	$\log \mathfrak{G}_0^{(i,5)}$	$\log \mathfrak{G}_1^{(i,5)}$	$\log \mathfrak{G}_2^{(i,5)}$	$\log \mathfrak{G}_3^{(i,5)}$
1	0,39794	0,97197	0,7379	0,3119 <sub>n</sub>
2	0,64098	1,0389	0,6799	0,1570 <sub>n</sub>
3	0,81707	1,0901	0,6341	0,0321 <sub>n</sub>
4	0,95537	1,1315	0,5963	9,9273 <sub>n</sub>
5	1,06931	1,1662	0,5642	9,8372 <sub>n</sub>
6	1,1662	1,1962	0,5361	9,7580 <sub>n</sub>
7	1,2505	1,2225	0,5113	9,6874 <sub>n</sub>
8	1,3252	1,2460	0,4890	9,6237 <sub>n</sub>

Die Anwendung dieser Entwicklungsmethode wird in der That überraschend leicht und bequem, wenn man sich die Rechnung zweckmässig anlegt. In unserer Aufgabe wird man nur ganz ausnahmsweise mehr als das Quadrat von  $x$  aufzunehmen haben. Liege z. B. der Ausdruck

$$[2,075014] (1 - [9,686641] \cos \omega)^{-\frac{3}{2}} = \rho (1 - q \cos \omega)^{-\frac{3}{2}}$$

zur Entwicklung vor. Hier ist also  $\log \sin \chi = 9,686641$ ,  $\log x = 8,556972$ .

Den Coefficienten  $\alpha_0^{(n)}$  liefert dieses Verfahren nicht, allein derselbe wird bekanntlich durch das arithmdtisch-geometrische Mittel zwischen  $\sqrt{1+q}$  und  $\sqrt{1-q}$  erhalten. Man hat nämlich:

$$\alpha_0^{(1)} = \frac{1}{\mathfrak{M}(\sqrt{1+q}, \sqrt{1-q})}$$

Ferner ist:

$$\alpha_0^{(n)} = \alpha_0^{(n-2)} + q\alpha_1^{(n)}$$

woraus sich, wenn  $\alpha_j^{(3)}$  und  $\alpha_j^{(5)}$  berechnet sind,  $\alpha_0^{(3)}$  und  $\alpha_0^{(5)}$  ergeben. Die Coefficienten  $\alpha_j^{(5)}$  und  $\alpha_j^{(7)}$  können übrigens, falls man sie nicht direct berechnen will, mit Hilfe der bekannten Hansen'schen Recursionsgleichungen hergeleitet werden.

Zum Schluss will ich noch kurz eines Verfahrens erwähnen, welches von Hrn. Backlund<sup>7)</sup> angegeben worden ist und sich durch grössere Allgemeinheit auszeichnet. Die Anwendung desselben ist besonders dann zu empfehlen, wenn in dem Ausdrucke

$$\Delta^2 = a_0(1 + a_1 \cos \omega + a_2 \cos 2\omega + a_3 \cos 3\omega + \dots)$$

die Coefficienten  $a_1$  und  $a_2$  nahe von derselben Ordnung, dagegen  $a_3$  und die folgenden Coefficienten gegen  $a_1$  und  $a_2$  klein sind. Da in der citirten Schrift alle Vorschriften und numerischen Hilfsmittel behufs bequemer Anwendung gegeben sind, so gehe ich nicht näher darauf ein.

7) Zur Entwicklung der negativen, ungeraden Potenzen der Quadratwurzel der Function  $1 - 2\eta U + \eta^2$ . Bulletin de l'Académie de St.-Petersbourg, Tome V.

Damit ergibt sich:  $\log p y_j^{(3)} = [9,413882] + [2,162779]$  und die ganze Rechnung zur Ermittlung der Coefficienten  $\alpha_j^{(3)}$  ist in folgendem Tableau enthalten:

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\log p y_j^{(3)}$	1,576661	0,99054	0,40442	9,8183	9,2322	8,6460	8,060	7,474
$\log \mathfrak{E}_0^{(4)}$	0,176091	0,27300	0,33995	0,3911	0,4325	0,4673	0,497	0,524
$\log \mathfrak{E}_1^{(4)}$	8,60812	8,52894	8,4709	8,4252	8,3874	8,3552	8,327	8,302
$\log \mathfrak{E}_2^{(4)}$	6,7849 <sub>n</sub>	6,5808 <sub>n</sub>	6,4258 <sub>n</sub>					
$\log \mathfrak{E}_3^{(4)}$	5,284	4,983						
$p y_j^{(3)} \mathfrak{E}_0^{(4)}$	+56,592	+18,346	+5,551	+1,620	+0,462	+0,130	+0,036	+0,010
$p y_j^{(3)} \mathfrak{E}_1^{(4)}$	+1,530	+0,331	+0,075	+0,017	+0,004	+0,001		
$p y_j^{(3)} \mathfrak{E}_2^{(4)}$	-0,023	-0,003	-0,001					
$p y_j^{(3)} \mathfrak{E}_3^{(4)}$	+0,001							
$\alpha_j^{(3)}$	+58,100	+18,674	+5,625	+1,637	+0,466	+0,131	+0,036	+0,010

V.

**Berechnung der partiellen Anomalie aus der excentrischen. Elementenwechsel.**

Bevor ich dazu übergehe, die vorgeschlagene Methode durch ein ausführliches numerisches Beispiel zu illustriren, soll noch in Kürze besprochen werden, in welcher Weise die gewonnenen Störungsausdrücke zu verwerthen sind. Da dieselben als Cosinusreihen nach der partiellen Anomalie auftreten, so ist erforderlich, um ihre einem bestimmten Moment entsprechenden numerischen Werthe zu ermitteln, die partielle Anomalie in bequemer Weise aus der Zeit oder der excentrischen Anomalie des gestörten Planeten berechnen zu können. Der Zusammenhang zwischen letzterer und der partiellen Anomalie war in den vier Theilen der Bahn ausgedrückt durch:

$$\begin{aligned} \text{I und IV: } \varepsilon &= \pm T \\ \text{II und III: } \varepsilon &= \pi \mp T \end{aligned}$$

wo  $T$ , wenn man die Coefficienten in Bogenminuten ansetzt, durch die Reihe

$$\begin{aligned} T = f(\omega_1) &= 2761,1 \\ &- 2708,6 \cos \omega_1 \\ &- 61,7 \cos 2\omega_1 \\ &+ 8,6 \cos 3\omega_1 \\ &+ 0,6 \cos 4\omega_1 \end{aligned}$$

repräsentirt ist. Es entsteht somit die Aufgabe, aus der Gleichung

$$\varepsilon = f(\omega_1)$$

für ein gegebenes  $\varepsilon$  das dazugehörige  $\omega_1$  zu finden.

Theoretisch wird dieselbe durch eine elegante, von Prof. Schlömilch<sup>8)</sup> herrührende Umkehrungsformel gelöst. Setzt man  $\omega_1 = \psi(\varepsilon)$

so darf, so lange  $\varepsilon$  zwischen den Grenzen 0 und  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\omega_1$  zwischen 0 und  $\pi$  enthalten ist, für  $\psi(\varepsilon)$  die Form angenommen werden:

$$\psi(\varepsilon) = 2\varepsilon + C_1 \sin 2\varepsilon + C_2 \sin 4\varepsilon + C_3 \sin 6\varepsilon + \dots$$

Die Entwicklungscoefficienten müssen dann aus der Gleichung:

$$C_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos 2n\varepsilon \cdot d\omega_1$$

bestimmt werden. Da  $\cos \varepsilon$  aber eine bekannte Function von  $\omega_1$  ist, so lassen sich  $\cos 2\varepsilon$ ,  $\cos 4\varepsilon$ , etc. ebenfalls als Functionen von  $\omega_1$  bestimmen, deren Integration dann nichts mehr im Wege steht. Allein man gelangt auf diesem Wege nicht zu einem practisch brauchbaren Resultate. Es ist deshalb vortheilhafter, auf die ursprünglichen Substitutionsformeln, mittelst welcher die partiellen Anomalien eingeführt wurden, zu recurriren. Aus ihnen ergibt sich sofort folgendes Formelsystem.

Oberer Theil.	Unterer Theil.
$\varphi = am \frac{2K}{\pi} \omega$	$\psi = am \frac{2L}{\pi} \lambda$
$\sin \varphi = \sqrt{2} \sin \frac{1}{2} \varepsilon$	$\sin \psi = \sqrt{2} \cos \frac{1}{2} \varepsilon$
$\cos \varphi = \sqrt{\cos \varepsilon}$	$\cos \psi = \sqrt{-\cos \varepsilon}$
$\frac{2K}{\pi} \omega = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$	$\frac{2L}{\pi} \lambda = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-l^2 \sin^2 \psi}} \quad (19)$
$\sin \frac{1}{2} \omega_1 = \sqrt{\sin \omega}$	$\sin \frac{1}{2} \lambda_1 = \sqrt{\sin \lambda}$
$\sin \frac{1}{2} \omega_2 = \sqrt{-\sin \omega}$	$\sin \frac{1}{2} \lambda_2 = \sqrt{-\sin \lambda}$

8) Die allgemeine Umkehrung gegebener Functionen. Halle 1849.

Hat man also  $\varphi$  resp.  $\psi$  aus  $\varepsilon$  ermittelt, so ist ein elliptisches Integral, dessen Modul  $k$  oder  $l = \sqrt{\frac{1}{2}}$  ist, zu berechnen. Dazu kann entweder die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \omega &= \varphi - 296,01 \sin 2\varphi \\ &+ 19,07 \sin 4\varphi \\ &- 1,82 \sin 6\varphi \\ &+ 0,20 \sin 8\varphi \\ &- 0,02 \sin 10\varphi \end{aligned}$$

deren Coefficienten hier in Bogenminuten ausgedrückt sind, dienen, oder man benutzt folgende sehr bekannte Formeln:

$$\begin{aligned} \text{tg}(\varphi_1 - \varphi) &= [9,849485] \text{tg} \varphi \\ \text{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) &= [9,993512] \text{tg} \varphi_1 \\ (20) \quad \text{tg}(\varphi_3 - \varphi_1) &= [9,999988] \text{tg} \varphi_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{1}{2^n} \varphi_n.$$

Hierbei ist in der Regel bereits die zweite Annäherung völlig ausreichend, so dass man einfach setzen kann:

$$\omega = \frac{1}{4} \varphi_3$$

$\omega$  oder  $\lambda$  dürfen stets zwischen  $-90^\circ$  und  $+90^\circ$ , die Anomalien  $\omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2$  zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  genommen werden. Die Berechnung dieses Formelsystems wird, da sie ohnehin nicht häufig ausgeführt zu werden braucht, kaum als eine Vermehrung der Arbeit empfunden. Jedenfalls aber ist meines Erachtens der Vortheil, den die Benutzung der elliptischen Functionen

mit sich gebracht hat und welcher wesentlich in Herbeiführung stärkerer Convergenz sämmtlicher in Frage kommender Reihenentwicklungen besteht, damit nicht zu theuer erkauft.

Behufs Übergangs auf ein neues osculirendes Elementensystem hat man nun die nach Anleitung des Obigen ermittelte partielle Anomalie in die Ausdrücke für  $\Xi, \Upsilon, \Psi, q, p$  und  $n\delta z$  einzusetzen. Aus den Gleichungen (6) folgen dann, wenn bloß die ersten Potenzen berücksichtigt werden, die Störungen der Elemente:

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \frac{1}{2} \cos \varphi_0 \Upsilon \\ \delta\pi &= \frac{1}{2} \text{ctg} \varphi_0 \Psi + \text{tg} \frac{1}{2} i_0 \sec i_0 p \\ \delta n &= n_0 \sin 1'' (\Xi - 3 \text{tg} \varphi_0 \delta\varphi) \quad (21) \\ \delta i &= \sec \varphi_0 \sec i_0 q \\ \sin i_0 \delta\Omega &= \sec i_0 p \end{aligned}$$

Dann ergibt sich die mittlere Anomalie des Planeten, welche der neuen Osculationsepoche entspricht, aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} M_{00} + n_0 t + n\delta z &= \bar{\varepsilon} - e_0 \sin \bar{\varepsilon} \\ \bar{r} \cos \bar{f} &= a_0 (\cos \bar{\varepsilon} - e_0) \\ \bar{r} \sin \bar{f} &= b_0 \sin \bar{\varepsilon} \\ f &= \bar{f} + \delta\pi \\ \text{tg} \frac{1}{2} \varepsilon &= \text{tg} \frac{1}{2} \bar{f} \cdot \text{tg} (45 - \frac{1}{2} \varphi) \\ M &= \varepsilon - e \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (22)$$

VI.

Anwendung auf den Planeten Diana <sup>(78)</sup>.

Es bleibt mir jetzt noch übrig, die practische Brauchbarkeit der im Vorstehenden empfohlenen Methode an einem numerischen Beispiele zu prüfen. Ich habe dazu den schon seit vielen Jahren in Pulkowa bearbeiteten Planeten Diana <sup>(78)</sup> gewählt, und zwar sollen im Folgenden die Störungen erster Ordnung, welche derselbe im Zeitraum 1878 Oct. 6,0 bis 1882 Sept. 15,0 durch Jupiter erleidet, ermittelt werden. Meine Wahl fiel grade auf diesen Planeten, einmal, weil derselbe zu den Durchschnittsplaneten gehört, d. h. zu denen, welche sich nicht durch eine besonders grosse oder kleine Excentricität und mittlere Bewegung auszeichnen und die darum grade die Majorität unter den kleinen Planeten bilden. Dann aber war der Umstand massgebend, dass ich hoffen durfte, in den mir gütigst von Hrn. Dubjago mitgetheilten Störungsrechnungen eine scharfe und unabhängige Controlle für meine eigenen Rechnungen zu finden.

Dem Berliner Jahrbuche für 1884 entnahm ich folgendes Elementensystem der Diana:

$$\begin{array}{l}
 \text{Epoche 1878 Oct. 6,0 m. B. Z.} \\
 M = 278^{\circ}57'32''{,}5 \\
 \varphi = 11^{\circ}59'15''{,}9 \\
 n = 836''{,}52213 \\
 \pi = 121^{\circ}41'2''{,}5 \\
 \Omega = 333^{\circ}50'31''{,}7 \\
 i = 8^{\circ}39'36''{,}0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} M \\ \varphi \\ n \\ \pi \\ \Omega \\ i \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Mittl. Äq.} \\ 1880,0 \end{array}$$

$$\log a = 0,4183528$$

Ferner liefern die Leverrier'schen Tafeln mit Berücksichtigung der grossen Ungleichheit die Elemente des Jupiter:

$$\begin{array}{l}
 \text{Epoche 1880 Jan. 1,0 m. P. Z.} \\
 M' = 338^{\circ}22'16'' \\
 \varphi' = 2^{\circ}46'49'' \\
 n' = 299''{,}1151 \\
 \pi' = 12^{\circ}46'5'' \\
 \Omega' = 99^{\circ}14'28'' \\
 i' = 1^{\circ}18'35''
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} M' \\ \varphi' \\ n' \\ \pi' \\ \Omega' \\ i' \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Mittl. Äq.} \\ 1880,0 \end{array}$$

$$\log a' = 0,7162500$$

Diana passirte nach obigen Elementen ihr Aphel 1877 Aug. 6,1265, dann das Perihel 1879 Sept. 19,7624, während der darauf folgende Apheldurchgang 1881 Nov. 2,3983 m. Berl. Zeit stattfand. Zu diesen Zeiten hatte Jupiter die mittleren Anomalien:

$$\begin{array}{l}
 c_0' = 265^{\circ}25'42'' \\
 c' = 329\ 47\ 27 \\
 c_1' = 34\ 9\ 12
 \end{array}$$

Unser erstes Geschäft besteht nun in der Auflösung der Gleichungen (1) und die Bestimmung der Constanten  $A, B$ , etc. nach (2). Mit den obigen Daten ergibt sich:

$$\begin{array}{ll}
 \Pi = 154^{\circ}20',3 & \log A = 9,518149_n \\
 \Pi' = 45\ 20,5 & \log B = 9,500880_n \\
 J = 9\ 28,7 & \log C = 9,971639_n \\
 & \log D = 9,973765
 \end{array}$$

Einige andere Constanten, deren wir später bedürfen werden, mögen ebenfalls hier ihren Platz finden. So wird:

$$\log \rho = \log \frac{a'a^2 \sec \varphi m'}{\sin 1''} = 3,856645$$

$$\log a_0 = \log \cos \varphi \cos i \sin J \sin \Pi' = 9,05412$$

$$\log b_0 = \log \cos \varphi \cos i \sin J \cos \Pi' = 9,04895$$

$$\log \alpha = \log \frac{a}{a'} \cos \varphi = 9,692527$$

$$\log \frac{n'}{n} = 9,553361$$

$$\log m' = 6,979689$$

Ferner findet man nach den Gleichungen (10) mit Hilfe der Tafel der E-Coefficienten und der Excentricität der Diana folgende Reihenentwickelungen, in denen das Argument durchweg mit  $\omega$  bezeichnet werden mag. Die Functionen Y und  $v'$  sind in die Zusammenstellung nicht mit aufgenommen, da sie bis auf das besonders zu bestimmende Vorzeichen mit den Reihen  $E_3$  und  $E_8$  identisch sind.

Theil I und IV.

	$\left(\frac{r}{a}\right)^2$	$\log X$	$\pm nt$
cos 0 $\omega$	+ 0,77604	9,58211	+ 0,67586
cos $\omega$	- 0,19142	9,71580	- 0,68188
cos 2 $\omega$	+ 0,03841	8,95728 <sub>n</sub>	+ 0,00613
cos 3 $\omega$	+ 0,00533	8,3044 <sub>n</sub>	+ 0,00033
cos 4 $\omega$	- 0,00058	6,943	- 0,00045
cos 5 $\omega$	- 0,00005	6,612	0,00000

Theil II und III.

	$\left(\frac{r}{a}\right)^2$	$\log X$	$\mp nt$
cos 0 $\omega$	+ 1,26600	9,90170 <sub>n</sub>	+ 0,93050
cos $\omega$	+ 0,24040	9,71580 <sub>n</sub>	- 0,89390
cos 2 $\omega$	- 0,03689	8,95728	- 0,04205
cos 3 $\omega$	- 0,01141	8,3044	+ 0,00467
cos 4 $\omega$	+ 0,00014	6,943 <sub>n</sub>	+ 0,00081
cos 5 $\omega$	+ 0,00029	6,612 <sub>n</sub>	- 0,00002

I und IV.

	$\pm \lambda$	$\pm \mu$	$v$
sin $\omega$	+0,68188	+0,28813	+0,46079
sin 2 $\omega$	-0,01224	+0,17907	-0,18492
sin 3 $\omega$	-0,00100	-0,03429	-0,03852
sin 4 $\omega$	+0,00179	-0,00608	+0,00563
sin 5 $\omega$	+0,00002	+0,00093	+0,00061
sin 6 $\omega$	-0,00005	+0,00005	-0,00017
sin 7 $\omega$		-0,00004	

	$\pm \mu'$	$\mu''$	$\pm v''$
sin $\omega$	+0,96419	-0,17593	-1,08145
sin 2 $\omega$	+0,20647	-0,05526	+0,24320
sin 3 $\omega$	+0,02075	+0,09313	+0,02375
sin 4 $\omega$	-0,02672	+0,01098	-0,03207
sin 5 $\omega$	-0,00368	-0,00649	-0,00373
sin 6 $\omega$	+0,00118	-0,00101	+0,00134
sin 7 $\omega$	+0,00023	+0,00020	+0,00024

II und III.

	$\mp \lambda$	$\pm \mu$	$v$
sin $\omega$	+0,89390	+0,77673	-0,57871
sin 2 $\omega$	+0,08410	+0,30485	+0,17760
sin 3 $\omega$	-0,01402	-0,03109	+0,08242
sin 4 $\omega$	-0,00323	-0,01921	-0,00137
sin 5 $\omega$	+0,00008	-0,00057	-0,00349
sin 6 $\omega$	+0,00007	+0,00059	-0,00025
sin 7 $\omega$		+0,00006	+0,00008

	$\mp \mu'$	$\mu''$	$\mp v''$
sin $\omega$	+1,38823	-0,39183	-1,29347
sin 2 $\omega$	+0,39915	+0,02004	+0,14686
sin 3 $\omega$	-0,00529	+0,11825	+0,03677
sin 4 $\omega$	-0,03676	+0,00952	-0,02705
sin 5 $\omega$	-0,00354	-0,00735	-0,00379
sin 6 $\omega$	+0,00144	-0,00103	+0,00122
sin 7 $\omega$	+0,00025	+0,00022	+0,00024

Aus  $nt$  ergeben sich nach den Gleichungen (11) die Reihen  $f_1$  und  $f_2$  und deren Potenzen.



	$\log f_1$	$\log f_1^2$	$\log f_1^3$	$\log f_1^4$	$\log f_1^5$	$\log f_1^6$
cos 0 $\omega$	9,88322	8,94512	8,5535	8,1830	7,825	7,474
cos $\omega$	9,38707 <sub>n</sub>	9,07328 <sub>n</sub>	8,7322 <sub>n</sub>	8,3894 <sub>n</sub>	8,049 <sub>n</sub>	7,710 <sub>n</sub>
cos 2 $\omega$	7,3408	8,4881	8,3444	8,0962	7,812	7,510
cos 3 $\omega$	6,071	6,643 <sub>n</sub>	7,5977 <sub>n</sub>	7,5694 <sub>n</sub>	7,400 <sub>n</sub>	7,170 <sub>n</sub>
cos 4 $\omega$	6,206 <sub>n</sub>	6,000 <sub>n</sub>	5,60	6,71	6,76	
cos 5 $\omega$		5,60				

	$\log f_2$	$\log f_2^2$	$\log f_2^3$	$\log f_2^4$	$\log f_2^5$	$\log f_2^6$
cos 0 $\omega$	9,52208	9,20925	8,98852	8,6873	8,4472	8,215
cos $\omega$	9,50465 <sub>n</sub>	9,31789 <sub>n</sub>	9,09989 <sub>n</sub>	8,8780 <sub>n</sub>	8,6580 <sub>n</sub>	8,439 <sub>n</sub>
cos 2 $\omega$	8,1771 <sub>n</sub>	8,6081	8,6355	8,5253	8,371	8,199
cos 3 $\omega$	7,2227	7,7649	7,4314 <sub>n</sub>	7,8136 <sub>n</sub>	7,832 <sub>n</sub>	7,756 <sub>n</sub>
cos 4 $\omega$	6,461	6,362 <sub>n</sub>	7,149 <sub>n</sub>	6,633 <sub>n</sub>	6,70	
cos 5 $\omega$	4,85 <sub>n</sub>	6,041 <sub>n</sub>				

Da Diana sich sowohl 1878 Oct. 6,0 als auch 1882 Sept. 15,0 im Bahntheile III befindet, also ihre excentrische Anomalie zwischen 180° und 270° liegt, so ist es erforderlich, die Störungen für 5 Theile zu entwickeln, welche in der Richtung der Bewegung mit III<sub>0</sub>, IV, I, II und III bezeichnet werden sollen. Nachdem die Sinus und Cosinus von  $c'_0$ ,  $c'$  und  $c'_1$  gebildet sind, erhält man aus den Gleichungen (13) mit Benutzung der Coefficienten  $\alpha_i^{(p)}$ ,  $\beta_i^{(p)}$ , etc. drei Gruppen der Grössen  $F^{(i)}$ ,  $G^{(i)}$ , etc., nämlich für den Theil III<sub>0</sub>, für IV und I und für II und III. Die zweiten Glieder der Störungsfuction  $m$  und  $n$ , sind, wie hier erinnert werden mag, resp. gleich  $-\frac{p}{a^3} \cdot \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \cos f'$  und  $-\frac{p}{a^3} \cdot \frac{r'}{a'} \sin f'$ ; die Coefficienten  $J^{(i)}$  und  $K^{(i)}$  sind deshalb bereits mit dem Factor  $-\frac{p}{a^3}$  multiplicirt worden, um  $m$  und  $n$  ebenfalls in Bogensekunden zu geben.

III<sub>0</sub>.

$i$	$\log F_2^{(i)}$	$\log G_2^{(i)}$	$\log H_2^{(i)}$	$\log -\frac{p}{a^3} \cdot J_2^{(i)}$	$\log -\frac{p}{a^3} \cdot K_2^{(i)}$
0	0,00536	9,24563 <sub>n</sub>	9,99593 <sub>n</sub>	0,94549 <sub>n</sub>	1,69579 <sub>n</sub>
2	7,7896 <sub>n</sub>	8,93656	9,68685	1,04685	1,34573
4	7,0294	8,2601 <sub>n</sub>	8,5587 <sub>n</sub>	0,44858 <sub>n</sub>	9,6306 <sub>n</sub>
6	6,000 <sub>n</sub>	7,265	6,447	9,2900	9,4773 <sub>n</sub>
1	8,9833	9,99377 <sub>n</sub>	9,10246 <sub>n</sub>	1,68243 <sub>n</sub>	1,12774 <sub>n</sub>
3	8,1973 <sub>n</sub>	9,19665	8,6416	0,75673	0,80996
5	6,845	9,7543 <sub>n</sub>	7,8007 <sub>n</sub>	9,7144	9,9605 <sub>n</sub>

IV und I.

$i$	$\log F_1^{(i)}$	$\log G_1^{(i)}$	$\log H_1^{(i)}$	$\log -\frac{p}{a^3} \cdot J_1^{(i)}$	$\log -\frac{p}{a^3} \cdot K_1^{(i)}$
0	9,96338	9,90450	9,71963 <sub>n</sub>	1,66732 <sub>n</sub>	1,48247
2	8,6342	9,65840 <sub>n</sub>	9,47355	1,42721	1,37036 <sub>n</sub>
4	7,5877 <sub>n</sub>	8,6401	8,5833 <sub>n</sub>	0,5087 <sub>n</sub>	0,74898
6	6,230	7,3243 <sub>n</sub>	7,565	9,146	0,0008 <sub>n</sub>
1	8,7070	9,73846 <sub>n</sub>	9,94778	1,55122	1,68872 <sub>n</sub>
3	7,9836 <sub>n</sub>	9,06517	9,20268 <sub>n</sub>	1,0841 <sub>n</sub>	1,01544
5	6,875	8,0748 <sub>n</sub>	8,0065	0,3865	9,914 <sub>n</sub>

II und III.

$i$	$\log F_2^{(i)}$	$\log G_2^{(i)}$	$\log H_2^{(i)}$	$\log -\frac{p}{a^3} \cdot J_2^{(i)}$	$\log -\frac{p}{a^3} \cdot K_2^{(i)}$
0	9,96513	9,88240	9,76639	1,64260 <sub>n</sub>	1,52658 <sub>n</sub>
2	8,6124	9,63369 <sub>n</sub>	9,51765 <sub>n</sub>	1,38299	1,40551
4	7,5563 <sub>n</sub>	8,5959	8,6184	0,3771 <sub>n</sub>	0,76507 <sub>n</sub>
6	6,146	7,1931 <sub>n</sub>	7,5809 <sub>n</sub>	8,648 <sub>n</sub>	9,9898
1	8,7537 <sub>n</sub>	9,78432	9,92610	1,59203 <sub>n</sub>	1,65767 <sub>n</sub>
3	8,0278	9,10602 <sub>n</sub>	9,17164 <sub>n</sub>	1,11085	0,94375
5	6,903 <sub>n</sub>	8,1017	7,935	0,3900 <sub>n</sub>	9,6137 <sub>n</sub>

Werden diese Grössen mit den Potenzen von  $f_1$  und  $f_2$  nach Anleitung der Formeln (12) vereinigt, so erhält man sofort:

III<sub>0</sub>.

	$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2$	$\frac{r'}{a'} \cos f'$	$\frac{r'}{a'} \sin f'$	$m$	$n$
cos 0 $\omega$	+0,98079	+0,15156	-0,95221	- 8',353	+50',003
cos $\omega$	+0,03001	-0,31219	-0,06313	+16,750	+ 1,051
cos 2 $\omega$	+0,00190	-0,01857	+0,02215	+ 0,622	- 1,340
cos 3 $\omega$	-0,00024	+0,00264	+0,00278	- 0,180	- 0,101
cos 4 $\omega$	-0,00005	+0,00050	-0,00019	- 0,020	+ 0,018
cos 5 $\omega$		-0,00001	-0,00006	+ 0,001	+ 0,002

IV.

	$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2$	$\frac{r'}{a'} \cos f'$	$\frac{r'}{a'} \sin f'$	$m$	$n$
cos 0 $\omega$	+0,93485	+0,63487	-0,70738	-35,997	+39,824
cos $\omega$	-0,01692	+0,18022	+0,17340	-11,136	- 8,712
cos 2 $\omega$	+0,00117	-0,01219	+0,01019	+ 0,609	- 0,772
cos 3 $\omega$	+0,00004	-0,00045	-0,00070	+ 0,047	+ 0,034
cos 4 $\omega$	-0,00001	+0,00015	+0,00009	- 0,010	- 0,003
cos 5 $\omega$		-0,00002	+0,00001	+ 0,001	- 0,001

I.

	$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2$	$\frac{r'}{a'} \cos f'$	$\frac{r'}{a'} \sin f'$	$m$	$n$
cos 0 $\omega$	+0,91091	+0,89139	-0,29006	-52,359	+16,952
cos $\omega$	+0,00690	-0,07452	-0,24200	+ 4,960	+14,002
cos 2 $\omega$	+0,00137	-0,01477	+0,00717	+ 0,957	- 0,538
cos 3 $\omega$	-0,00006	+0,00053	+0,00070	- 0,045	- 0,054
cos 4 $\omega$	+0,00001	-0,00001	-0,00019	0	+ 0,012
cos 5 $\omega$		-0,00001	+0,00001		- 0,001

II.

	$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2$	$\frac{r'}{a'} \cos f'$	$\frac{r'}{a'} \sin f'$	$m$	$n$
cos 0 $\omega$	+0,91134	+0,88679	+0,26460	-52,075	-15,390
cos $\omega$	+0,00858	-0,09251	+0,31675	+ 6,140	-18,321
cos 2 $\omega$	+0,00283	-0,03051	+0,00687	+ 1,987	- 0,202
cos 3 $\omega$	+0,00015	-0,00148	-0,00392	+ 0,073	+ 0,278
cos 4 $\omega$	-0,00004	+0,00045	-0,00039	- 0,035	+ 0,023
cos 5 $\omega$		+0,00006	+0,00005	- 0,005	- 0,003

III.

	$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2$	$\frac{r'}{a'} \cos f'$	$\frac{r'}{a'} \sin f'$	$m$	$n$
cos 0 $\omega$	+0,94726	+0,50327	+0,80062	-28,167	-44,143
cos $\omega$	-0,02508	+0,26553	-0,18589	-15,822	+ 8,569
cos 2 $\omega$	+0,00025	-0,00179	-0,03093	- 0,189	+ 1,906
cos 3 $\omega$	+0,00037	-0,00402	-0,00042	+ 0,239	+ 0,084
cos 4 $\omega$	+0,00002	-0,00029	+0,00051	+ 0,025	- 0,027
cos 5 $\omega$		+0,00006	+0,00005	- 0,003	- 0,003

Damit ist alles Erforderliche beisammen, um die Ausdrücke für das Quadrat der Entfernung aufzustellen. Führt man die durch die Gleichung (15) ange deuteten Operationen aus, so entsteht

$\Delta^2$ .

	III <sub>0</sub> .	IV.	I.	II.	III.
cos 0 $\omega$	+15,4088	+34,4853	+50,5135	+49,6313	+34,7089
cos $\omega$	- 7,4885	+11,2620	- 3,5141	- 3,9411	+10,7007
cos 2 $\omega$	+ 0,6485	+ 0,0555	- 1,3570	- 0,8292	- 0,4318
cos 3 $\omega$	+ 0,0602	- 0,2183	- 0,0930	- 0,0398	- 0,1789
cos 4 $\omega$	- 0,0073	- 0,0166	+ 0,0194	- 0,0050	+ 0,0140
cos 5 $\omega$	+ 0,0009	+ 0,0038	+ 0,0044	+ 0,0012	+ 0,0036
cos 6 $\omega$	0,0000	+ 0,0005	0,0000	+ 0,0002	+ 0,0001

Um aus diesen Reihen die Entwicklungen  $L = \varrho \Delta^{-3}$  zu erhalten, konnte für die Theile I und II mit Vortheil die Formel (16) angewendet werden; für III<sub>0</sub>, IV und III wurde theils die Hansen'sche, theils die Legendre'sche Entwicklungsmethode benutzt. Multipliciert man die so entstandenen Ausdrücke mit den entsprechenden für  $\frac{r'}{a'} \cos f'$  und  $\frac{r'}{a'} \sin f'$ , so ergeben sich nach Hinzufügung von  $m$  und  $n$  die Quantitäten  $M_0$  und  $N_0$ . Diese führe ich jedoch der Kürze halber nicht auf, sondern die aus jenen nach Gl. (4) hervorgehenden Grössen  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , wobei die oben gegebenen Constanten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $a_0$ ,  $b_0$  zur Anwendung gelangen. Statt  $L$  setze ich sofort  $2\alpha \cdot L$  an.

$2\alpha \cdot L$ .

	III <sub>0</sub> .	IV.	I.	II.	III.
cos 0 $\omega$	+148,080	+38,858	+19,835	+20,385	+38,124
cos $\omega$	+106,175	-19,280	+ 2,143	+ 2,482	-18,152
cos 2 $\omega$	+ 23,047	+ 3,776	+ 0,897	+ 0,636	+ 4,197
cos 3 $\omega$	+ 2,712	- 0,338	+ 0,128	+ 0,082	- 0,613
cos 4 $\omega$	- 0,078	+ 0,003	+ 0,011	+ 0,016	+ 0,053
cos 5 $\omega$	- 0,140	+ 0,004			
cos 6 $\omega$	- 0,040				

$F$ .

	III <sub>0</sub> .	IV.	I.	II.	III.
cos 0 $\omega$	-87,788	+13,548	+21,122	+ 2,158	-7,012
cos $\omega$	-95,819	+16,389	+ 6,007	-12,181	-7,813
cos 2 $\omega$	-16,683	- 4,669	- 1,309	- 0,106	+5,621

	III <sub>0</sub> .	IV.	I.	II.	III.
cos 3ω	— 0,429	+ 0,354	— 0,177	+ 0,291	— 0,624
cos 4ω	+ 0,498	+ 0,012	— 0,004	+ 0,036	+ 0,032
cos 5ω	+ 0,160	— 0,008	— 0,002		
cos 6ω	+ 0,029				

G.

	III <sub>0</sub> .	IV.	I.	II.	III.
cos 0ω	+32,942	+ 8,691	+28,882	+34,728	+14,088
cos ω	+52,339	+11,111	— 7,671	— 2,505	+17,617
cos 2ω	—22,219	+ 0,799	— 1,002	— 1,856	— 1,299
cos 3ω	+ 4,316	— 0,409	+ 0,028	— 0,152	— 0,164
cos 4ω	+ 0,289	+ 0,051	+ 0,004	+ 0,017	— 0,002
cos 5ω	— 0,085	+ 0,001	+ 0,001	+ 0,004	+ 0,001
cos 6ω	— 0,038				

H.

	III <sub>0</sub> .	IV.	I.	II.	III.
cos 0ω	—11,069	—0,296	—2,693	—4,899	—2,551
cos ω	—14,466	—0,445	+1,546	—0,506	—3,122
cos 2ω	— 4,425	—0,450	+0,052	+0,263	+0,590
cos 3ω	— 0,659	+0,085	—0,016	+0,042	—0,021
cos 4ω	— 0,007	—0,007	—0,001		+0,002
cos 5ω	+ 0,024	—,0001			
cos 6ω	+ 0,008				

Eine Anzahl von mechanischen Multiplicationen, durch welche diese Reihen mit den bereits fertig vorliegenden  $\mu \nu \mu' \nu' \mu'' \nu''$  vereinigt werden, ergiebt jetzt nach den Gl. (8) die Differentialquotienten  $\frac{d\Xi}{d\omega}, \frac{d\Upsilon}{d\omega}$  etc. Letztere treten in der Form von Sinusreihen auf, deren Integration also wiederum auf Cosinusreihen führt. Diese Integrale lauten alsdann:

	III <sub>0</sub> .	Ξ	Υ	Ψ	q	p
cos 0ω		—132,22	—142,47	—66,87	+5,67	+2,79
cos ω		—182,08	—193,37	—82,94	+8,90	+3,68
cos 2ω		— 53,46	— 55,42	—11,06	+4,24	+0,72
cos 3ω		— 4,28	— 7,11	+ 5,27	+1,15	—0,30
cos 4ω		+ 1,00	+ 0,96	+ 1,35	+0,13	—0,19
cos 5ω		+ 0,33	+ 0,43	— 0,07	—0,02	—0,03
cos 6ω		+ 0,04	+ 0,04	— 0,06	—0,01	

IV.

	Ξ	Υ	Ψ	q	p
cos 0ω	—18,49	+47,14	—17,65	+0,04	—0,02
cos ω	—28,01	+46,93	—25,16	+0,07	+0,02
cos 2ω	— 5,82	+ 3,54	— 3,80	+0,06	—0,03
cos 3ω	+ 2,30	+ 0,03	+ 2,57	+0,03	—0,02
cos 4ω	— 0,04	— 0,56	— 0,13		+0,02
cos 5ω	— 0,03	+ 0,02	— 0,11		

I.

	Ξ	Υ	Ψ	q	p
cos 0ω	—54,90	+134,89	—70,28	+ 0,91	+0,96
cos ω	— 5,08	— 33,73	+29,87	—0,65	—1,39
cos 2ω	+10,19	— 2,86	— 5,06	—0,14	+0,42
cos 3ω	— 0,14	— 1,46	+ 0,86	+0,08	—0,01
cos 4ω	— 0,16	+ 0,20	+ 0,36		—0,01
cos 5ω		+ 0,08	— 0,02		

II.

	Ξ	Υ	Ψ	q	p
cos 0ω	+39,24	+241,99	—160,46	—1,78	+5,88
cos ω	+89,26	+ 87,73	— 51,71	—3,99	+2,88
cos 2ω	+ 9,36	+ 12,69	+ 5,60	—0,85	—0,36
cos 3ω	— 1,31	— 0,91	+ 2,60	+0,06	—0,17
cos 4ω	— 0,30	— 0,53	— 0,05	+0,04	
cos 5ω		— 0,01	— 0,09		

III.

	Ξ	Υ	Ψ	q	p
cos 0ω	+210,16	+430,37	—193,99	—10,19	+6,95
cos ω	— 58,37	— 76,55	— 10,70	+ 2,70	+1,39
cos 2ω	— 17,17	— 13,16	— 3,05	+ 0,96	+0,13
cos 3ω	+ 1,32	— 0,35	+ 3,63	+ 0,05	—0,22
cos 4ω	+ 0,32	+ 0,63	+ 0,11	— 0,04	—0,01
cos 5ω	— 0,01	+ 0,03	— 0,11		

Die Absolutglieder dieser Ausdrücke sind die Constanten, welche den Integralen hinzuzufügen sind und durch die Bedingung geliefert werden, dass die Störungen für die Osculationsepoche, also 1878 Oct. 6,0 verschwinden sollen. Für diesen Zeitpunkt ist:

$$\varepsilon = 267^{\circ}4'26''.6$$

Daraus findet man nach den Formeln (19) und (20) die partielle Anomalie:

$$\lambda_2 = 159^{\circ}59'30''$$

welche in die für III<sub>0</sub> geltenden Reihen eingesetzt, dieselben identisch annullirt. Die Constanten der übrigen Reihen müssen dann so bestimmt werden, das immer je zwei die nämlichen Störungswerthe ergeben, wenn die partiellen Anomalien des Theilpunctes, in welchem sie zusammenstossen, in dieselben eingesetzt werden. Da diese letzteren in den Theilpuncten stets 0 oder 180° betragen, so lassen sich diese Substitutionen mit der grössten Leichtigkeit absolviren.

Um nun aus  $\Xi$ ,  $\Upsilon$ ,  $\Psi$ ,  $q$  und  $p$  die Störungen der mittleren Anomalie, des Logarithmus des Radiusvector und des Sinus der Breite zu erhalten, müssen die Gleichungen (9) angewendet werden. In  $n\delta z$  wird durch die zweite Integration eine sechste Constante eingeführt, die ganz in derselben Weise wie die Constanten, welche  $\Xi$ ,  $\Upsilon$ , etc. hinzuzufügen waren, bestimmt wird, und in der folgenden Zusammenstellung der schliesslichen Störungsausdrücke bereits mit aufgenommen ist.

	III <sub>0</sub> .	IV.	I.	II.	III.
cos 0 $\omega$	-28,22	+ 7,92	+ 0,94	-280,98	-643,39
cos $\omega$	-42,35	+11,38	+38,24	-251,59	+ 24,86
cos 2 $\omega$	-16,60	+ 3,50	-19,10	- 24,35	+ 71,08
cos 3 $\omega$	- 2,02	- 0,28	+ 1,87	+ 5,55	- 0,18
cos 4 $\omega$	+ 0,68	- 0,32	+ 0,30	+ 1,40	- 1,83
cos 5 $\omega$	+ 0,25		- 0,05	0,00	- 0,08
cos 6 $\omega$	+ 0,02			- 0,03	+ 0,04

	III <sub>0</sub> .	IV.	I.	II.	III.
cos 0 $\omega$	-2,06	-4,78	+40,35	+124,18	- 36,15
cos $\omega$	+0,17	-4,00	-52,50	+ 12,15	+167,14
cos 2 $\omega$	+5,03	+2,13	+ 5,60	- 18,46	- 11,74
cos 3 $\omega$	+3,54	+1,52	+ 1,66	- 3,02	- 4,49
cos 4 $\omega$	+0,75	+0,08	- 0,16	+ 0,13	+ 0,23
cos 5 $\omega$	+0,01	-0,04	- 0,04	+ 0,07	+ 0,08

	III <sub>0</sub> .	IV.	I.	II.	III.
cos 0 $\omega$	+2,18	0,00	+0,72	+5,44	-12,38
cos $\omega$	+3,50	+0,01	-0,95	+4,06	- 1,77
cos 2 $\omega$	+1,74	+0,02	+0,24	+0,52	- 1,30
cos 3 $\omega$	+0,54	+0,01	-0,01	-0,03	+ 0,13
cos 4 $\omega$	+0,08	+0,01		-0,02	+ 0,03
cos 5 $\omega$	+0,02				

Diesen Zahlen wollen wir die Störungen der Coordinaten für 1882 Sept. 15,0 entnehmen. An diesem Tage ist die excentrische Anomalie des Planeten

$$\varepsilon = 242^{\circ}58'3''$$

und die entsprechende partielle Anomalie

$$\lambda_2 = 110^{\circ}49'38''.$$

Dieser Winkel soll ausser in  $n\delta z$ ,  $w$  und  $\delta s$  auch in  $\Xi$ ,  $\Upsilon$ ,  $\Psi$ ,  $q$  und  $p$  substituirt werden; welche Grössen erforderlich sind, wenn ein neues osculirendes Elementensystem berechnet werden soll. Das Resultat dieser Substitution ist:

$$n\delta z = -706,11$$

$$w = -90,84$$

$$\frac{r}{a}\delta s = +14,58$$

$$\Xi = +244,96$$

$$\begin{aligned} \gamma &= + 467,14 \\ \Psi &= - 184,58 \\ q &= - 11,83 \\ p &= + 6,16 \end{aligned}$$

Hr. Dubjago hatte die Störungen der Diana nach der Hansen'schen Methode mit Hilfe der Daten des Berliner Jahrbuchs berechnet. Da aber die dort gegebenen Jupiterörter, weil sie alle periodischen Störungen enthalten, durch die meine Rechnungen zu Grunde gelegten Elemente nicht genau wiedergegeben werden können, so darf man a priori kleine Unterschiede in den ermittelten Störungen erwarten. Solche traten denn auch in der That auf und stiegen in den beiden letzten Bahntheilen, wo die Störungen selbst zu einer sehr bedeutenden Grösse anwachsen, nahezu bis auf eine Bogensecunde. Da mir aber daran lag, eine möglichst scharfe Vergleichung zu gewinnen, so scheute ich die Mühe nicht, Hrn. Dubjago's Störungswerthe auf die von mir angewandten Jupiter-elemente zu reduciren. Es geschah das in der Weise, dass ich aus diesen Elementen die störenden Kräfte für einige Momente direct ableitete und mit Berücksichtigung der sich ergebenden kleinen Differenzen sie für die anderen interpolirte. Als dann wurde die Summation von Neuem ausgeführt. So wurden die Zahlen gefunden:

$$n\delta z = - 705,78 \quad w = - 91,09 \quad \frac{r}{a} \delta s = + 14,59$$

welche bis auf die Unterschiede  $+ 0,33$ ,  $- 0,25$ ,  $+ 0,01$  mit den oben gefundenen übereinstimmen, Unterschiede, welche jedenfalls der mechanischen Summation zur Last gelegt werden müssen.

Die Werthe von  $n\delta z$ ,  $\Xi$ ,  $\gamma$ , etc. sollen nun noch dazu benutzt werden, die Störungen der elliptischen Elemente zu ermitteln. Aus den Gleichungen (21) erhält man zunächst:

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= + 3' 48,47 \\ \delta n &= + 0,40320 \\ \delta\pi &= - 7' 14,18 \\ \delta\Omega &= + 41,39 \\ \delta i &= - 12,23 \end{aligned}$$

und dann nach (22):

$$M = 253^{\circ}20'31,90$$

Das neue, daraus resultirende Elementensystem lautet demnach:

Diana, 1882 Sept. 15,0 m. B. Z.

$$\begin{aligned} M &= 253^{\circ}20'31,9 \\ \varphi &= 12 \quad 3 \quad 4,4 \\ n &= 836,92533 \\ \pi &= 121^{\circ}33'48,3 \\ \Omega &= 333 \quad 51 \quad 13,1 \\ i &= 8 \quad 39 \quad 23,8 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Mittl. Aeq.} \\ \\ \\ 1880,0. \end{array}$$

Werfen wir nun noch einen kurzen Rückblick auf die Rechnungen. In den gewonnenen Resultaten liegen die Mittel vor, die Jupiterstörungen der Diana für jeden beliebigen Moment während 5,44 Jahren zu be-

stimmen. Dieser Zeitraum könnte mit leichter Mühe bis auf 6,64 Jahre erweitert werden, da eine Anzahl der Entwicklungen dem Bahntheile  $III_0$  und dem unmittelbar vorhergehenden gemeinschaftlich angehören. Nach den gewöhnlichen Methoden wäre die Berechnung der störenden Kräfte für circa. 60 Momente erforderlich, wenn, wie es bei den kleinen Planeten in der Regel geschieht, vierzig tägige Intervalle gewählt werden. Die Frage aber, ob das vorgeschlagene Verfahren gegenüber den üblichen eine Arbeitersparniss involvirt, ist zu individueller Natur, um allgemein beantwortet werden zu können. Jeden Rechner wird die Methode am schnellsten zum Ziele führen, in deren Anwendung er die grösste Übung besitzt. Allein ein erheblicher und in die Augen springender Vorzug der analytischen Methoden darf nicht unerwähnt bleiben. Sie können mit leichten Modificationen dazu erweitert werden, die allgemeinen Störungsausdrücke zu liefern und es scheint mir, dass gerade diejenige Form, welche ich dem analytischen Verfahren im Vorstehenden gegeben habe, einen geeigneten Ausgangspunct für die allgemeinere Aufgabe darbietet. Solche allgemeine Ausdrücke werden freilich, besonders wenn man sich auf die Störungen erster Ordnung beschränkt, die Bewegung der Planeten nur kurze Zeit hindurch scharf darstellen können, allein sie werden wenigstens ihre Auffindung für lange Zeit hinaus sicher stellen, ohne dass man gezwungen wäre, ihren Lauf mit ununterbrochen fortgehenden Störungsrechnungen zu begleiten. Letzteres für alle kleine Planeten auszuführen ist bei ihrer überhand nehmenden Anzahl schon heutzutage fast unmöglich und bietet auch, wenigstens was die grosse Mehrzahl der-

selben betrifft, nicht ein der aufgewandten Arbeit entsprechendes Interesse dar.

Es möge hier noch eine kurze Bemerkung, die Wahl der anzuwendenden Jupiter-elemente betreffend, Platz finden. Es ist offenbar nicht rationell, ein osculirendes System den Rechnungen zu Grunde zu legen. Will man, wie ich es für Diana gethan habe, die Störungen für einen längeren Zeitraum, ohne die Elemente im Laufe der Rechnung zu wechseln, ermitteln, so thut man gewiss am besten, blos die Säcularänderungen und die wesentlich denselben Character tragende grosse Ungleichheit zu berücksichtigen. Soll aber schärfer gerechnet werden und ein und dasselbe System der Jupiter-elemente nur kürzere Zeit dienen, so wäre auch ein Mittelwerth der periodischen Störungen anzubringen. Aus diesem Grunde wäre es wünschenswerth, wenn in den Ephemeriden ausser den Jupiters-coordinaten, in grösseren Intervallen, etwa von 100 zu 100 Tagen auch die mittleren Elemente desselben, nebst dem Betrage der periodischen Störungen angegeben würden. Diese Zahlen würden gewiss von vielen Astronomen willkommen geheissen werden.

