

Tartu Ülikool
Sotsiaalteaduste valdkond
Haridusteaduste instituut
Haridusteaduste (reaalained) õppekava

Anne-Mai Liigand

**LOOGIKA- JA TÕESTAMISÜLESANNETE OLULISUS
MATEMAATIKAST ARUSAAMISEL**
bakalaureusetöö

Juhendaja: Britt Kalam, MSc

Läbiv pealkiri: Loogika- ja tõestamisülesannete olulisus

Tartu 2017

Sisukord

1. Sissejuhatus	3
2. Teoreetilised lähtekohad.....	4
2.1 Matemaatiline tõestus	4
2.2 Milliseid oskuseid matemaatilised tõestused arendavad	5
2.3 Matemaatikapädevus ning tõestamine põhikooli ja gümnaasiumi riiklikus õppekavas...	6
3. Kursuse loomine	7
4. Metoodika	8
4.1 Valim	8
4.2 Mõõtevahendid	9
4.3 Uurimuse protseduur	9
5. Tulemused.....	10
5.1 Suhtumine tõestusülesannetesse	10
5.2 Õpilaste suutlikkus tõestusülesandeid lahendada	13
5.3 Edasised uuringud.....	16
6. Arutelu	17
7. Kokkuvõte.....	19
8. Summary	20
9. Kasutatud kirjandus	22
10. Lisad	23
Lisa 1: eeltest.....	23
Lisa 2: järeltest.....	26

1. Sissejuhatus

Matemaatikute jaoks on üks olulisemaid mõisteid tõestus. Tänu tõestusele on võimalik näidata lausete ja nähtuste paikapidavust, mis on vajalik paljudele teistele valdkondadele, kus matemaatika tulemusi kasutatakse. Selleks, et tekiksid teoreemid ehk väited, mille kehtivuses saame kindlad olla, püstitatakse kõigepealt hüpotees, mis tuleb ära tõestada ja kui hüpoteesi tõestamine õnnestub, siis võib sellest saada teoreem. Niisiis on tõestamine kõikvõimalike kehtivate faktide väitmiseks ning ka mõistmiseks äärmiselt vajalik, mistõttu peab töö autor antud teemat võtmekomponendiks ka matemaatikahariduses.

Uuriija valis antud teema, sest hoolimata sellest, et räägitakse tõestamise olulisusest ja ka riikliku õppekava väljundites on tõestamise oskus välja toodud, ei ole käesoleva töö autor isikliku matemaatikaõpetaja praktika- ega ka töökogemuste kaudu puutunud kokku tõestamisülesannete lahendamise või õpetamisega. Sellega seoses soovib töö autor analüüsida, kas tegelikult oleks tõestusülesannete põhjalikum õpetamine koolimatemaatikas siiski vajalik.

Lõputöö eesmärk oli töötada välja loogika- ja tõestamisülesannetega tegelev kursus ning seejärel analüüsida väljatöötatud kursuse põhjal õpilaste matemaatilist arutlusoskust ning tõestusülesannete vajalikkust üldhariduskooli õppekavas. Kursus sisaldas endas ka koolimatemaatika valemite ning mõningate teoreemide tõestamisi ning pikemaid selgitusi. Muu hulgas selgitati kursusel, mis on tõestus, kuidas erinevaid lauseid tõestada ning mille jaoks on tõestust vaja. Välja töötatud kursus oli täielikult veebipõhine ning teemadest arusaamist kontrolliti kohustuslike testidega.

Uurimuse eesmärgiks oli selgitada välja, mil määral on üldhariduskoolide (aga ka teiste matemaatikahuviliste ja kutsekoolide) õpilased kokku puutunud tõestusülesannetega, kui oluliseks nemad ise seesuguseid ülesandeid peavad, kuidas tulevad nad tõestusülesannete lahendamiseiga toime ning kuidas see mõjutab nende üldist matemaatikast arusaamist.

Eesmärgist lähtudes on püstitatud järgmised uurimisküsimused:

1. Kas ja kui palju oled koolimatemaatikas tõestamisega kokku puutunud?
2. Milliseks hindad enda oskusi tõestamisülesannete lahendamisel?
3. Kui oluline on tõestuste õpetamine Sinu arvates ning milliseid oskuseid tõestamine Sinu arvates õpetab?

Proгноositavateks tulemusteks arvati, et hoolimata sellest, et õpilased on tõestamisega koolimatemaatikas kokku puutunud, on seda nende arvates liiga vähe õpetatud. Arvestades vähest kokkupuudet tõestamisülesannetega hindab uurija eeldavalt, et õpilased ka ise enda oskustesse kriitiliselt suhtuvad ning neid pigem madalaks peavad. Oodatud tulemus oskustele,

mida tõestamine õpilaste arvates edendab, on loogilise mõtlemise areng. Samuti eeldatakse vastuste seas näha argumenteerimis- ja arutlusoskuse arengut.

Bakalaureusetöö jaotub nelja ossa, millest esimeses antakse ülevaade matemaatilistest tõestusest ja selle mõjust õpilase arengule. Töö teises osas kirjeldatakse uurimuse metoodikat ja valimit. Kolmandas osas kirjeldatakse pilootkursust, mille põhjal antud bakalaureusetöö valminud on, ning neljandas osas tehakse uurimuse tulemustest ülevaade ning esitatakse teemakohane arutelu.

2. Teoreetilised lähtekohad

2.1 Matemaatiline tõestus

Definitsioonid annavad matemaatikale sõnavara. Definitsioone kasutades sõnastatakse juba varem kirja pandud tulemused ning teoreemid, samuti kasutatakse vajadusel tõestamist mittevajavaid fakte - aksioome. Tõestus on vahend teiste veenmiseks. (de Villiers, 2008) Matemaatikud alustavad definitsioonidest ja aksioomidest, seejärel uurivad valdkonda, panevad kirja matemaatilise lause ning seejärel tõestavad selle. Teoreem on matemaatikute formaalne viis panna kirja fakt või tõde. (Krantz, 2007)

Tõestus on keskne osa matemaatikast ning tänu sellele, et tõestamine arendab matemaatilist arusaama, peaks see olema võtmekomponent ka matemaatikahariduses. (Ball, *et al* 2002) De Villiers (2008) toob välja, et tõestuste õppimine ja tõestamise õpetamine peaks minema järk-järgult keerulisemaks ning saama alguse juba varases koolimatemaatikas. Samuti toovad Ball jt (2002) oma uuringus välja, et tõestamist peaks õpetama juba algkoolis. Autorid viisid läbi uuringu 3. klassi õpilastega, kuhu kuuluvad 8- kuni 9-aastased lapsed. Laste arengut jälgiti alates kooliaasta algusest ning mõne kuu möödudes tajuti, et definitsioonide õppimisel on väga oluline roll eneseväljendusoskuse arendamisel - kui õpilastele oli selgitatud paaris ja paaritute arvude definitsioone, suutsid nad loogiliselt argumenteerida, et kahe paaritu arvu summa on paarisarv.

Põhjalikumate matemaatiliste tõestustega puututakse enim kokku edasijõudnute matemaatikakursustel või matemaatika-alastel loengutel, kus esmalt puututakse kokku tõestuste lugemisega ning seejärel loetakse loengute märkmeid, lisaks kuulatakse professorite seletusi. Seesuguse meetodi eesmärgiks on õppida tõestusest nende lugemise ja uurimise käigus aru saama, pärast mida võiks õpilane suuta sarnaseid probleeme ka iseseisvalt lahendada. (Meja-Ramos, J.P, Fuller, E, Weber, K, Rhoads, K, Samkoff 2012)

Matemaatiline tõestus on matemaatika arengus väga olulist rolli mänginud, alates kreeklaste eukleidilisest geomeetriast kuni 20. sajandi matemaatikani. (de Villiers,2008) Krantz (2007) toob välja, et kuigi ei ole täpselt teada, millal sai kirja esimene matemaatiline tõestus, võib arvata, et esmalt sai tõestus ajalukku kirjutatud tänu babüloomlastele. On märke, et nii babüloomlased kui ka hiinlased olid koosinusteoreemi erijuhust täisnurkse kolmnurga jaoks teadlikud juba enne, kui Pythagoras sellele teoreemile oma nime andis. Keskajal oli aga matemaatika Euroopas madalseisus ning matemaatilise tõestuse mõiste areng oli peatunud. Suurim areng matemaatilise tõestuse jaoks toimus 19. sajandil, kui arenesid välja väga paljud tänapäevased matemaatilised arusaamad. Näiteks arendasid Jacobi, Kummer ja Abel välja arvuteooria ning Lagrange ja Cauchy panid aluse matemaatilisele analüüsile. (Krantz, 2007) Nõukogude Eestis olid matemaatiline rangus, kindel sõnakasutus ning tõestamine matemaatikaõppes väga olulisel kohal. Pärast Nõukogude Liidu lagunemist kadus ka rõhk matemaatiliselt tõestuselt ja tõestamiselt. Oluliseks muutus see taas 2010. aastal, kui võeti vastu uus gümnaasiumi riiklik õppekava. (Hemmi, *et al* 2010)

2.2 Milliseid oskuseid matemaatilised tõestused arendavad

Matemaatiliste tõestuste õpetamise eesmärk koolis ei seisne vaid selles, et näidata õpilastele väite paikapidavust, vaid pigem õpilaste matemaatiliste teadmiste suurendamises (e.g. Hanna, 1990; Hersh,1993; Thurston, 1994). Kirsti Hemmi Mälardaleni Ülikoolist, Madis Lepik Tallinna Ülikoolist ja Antti Viholainen Umea Ülikoolist viisid 2011. aastal läbi uuringu pealkirjaga "Gümnaasiumiõpetajate nägemus tõestustest ja tõestamisest - avastuslik kultuuriülene uurimus". Uurimuses käsitleti nii tõestuste ajalugu Eesti, Rootsi ja Soome kooliõppes kui ka nende riikide õpetajate arvamust tõestuste kohta. Autorid toovad oma uuringus välja, et tõestamise õpetamise juures arenevad peamiselt eneseväljendusoskus, süstematiseerimise ning selgitus-, suhtlus- ja avastamisoskus. Mõne mõiste või lause selgitamise oskus areneb õpilastel peamiselt arutledes, miks miski tõene on. Suhtlust, peamiselt matemaatilist suhtlust, arendab teistele enda lahenduste ja tulemuste interpreteerimine. (Hemmi *et al.* 2010) Hemmi jt (2010) toovad kultuuriülese uuringu tulemustes välja kolme Rootsi gümnaasiumiõpetaja tõdemuse, et tõestamine suurendab arusaamist sellest, kuidas matemaatika erinevad osad omavahel seotud on. Samuti arendavad erinevad tõestamise liigid visualiseerimisoskust ning probleemipõhine õpe lihtsustab õpilaste jaoks arusaama sellest, kuidas matemaatika tekib. (Hemmi, *et al.* 2010)

"Ma arvan, et tõestus on matemaatika skelett ja eeldus mõistmaks, kuidas kõik meid ümbritsev ning kõikvõimalikud erinevad valdkonnad ja teadusharud omavahel seotud on. Kui meil ei lubata töötada tõestamise ja põhjendamisega, jäävad ühe terviku erinevad osad üksnes reegliteks, mis tuleb pähe õppida, mitte teineteisele kinnituvateks lülideks." (Hemmi *et al.* 2010, lk 5)

Matemaatilise tõestuse peamine hiilgeaeg Eesti koolihariduses jääb Nõukogude Eesti aegadesse ning Soomes 1970. aastatesse, mil toimus "New Math" reform. Kui Hemmi jt läbiviidud uuringus küsiti, mis on üldhariduskoolides teema, mida tuleks kindlasti õpetada, siis viis seitsmest uuringus osalenud Rootsi õpetajast tõid kõige olulisema teoreemina, mida kindlasti üldhariduskoolis analüüsima peaks, välja Pythagorase teoreemi. Põhjus, miks eelnimetatud teoreemi nii oluliseks peetakse on see, et õpetajad peavad Pythagorase teoreemi matemaatika üldteadmiseks ning läbi tõestuse õpitakse sellest ka sügavuti aru saama ning lõpuks ka kasutama. (Hemmi, *et al.* 2010)

2.3 Matemaatikapädevus ning tõestamine põhikooli ja gümnaasiumi riiklikus õppekavas

Nii põhikooli riikliku õppekava lisa 3 kui ka gümnaasiumi riikliku õppekava lisa 3 on matemaatika õpetamise eesmärgid kirjeldatud järgnevalt: Matemaatikapädevuse kujundamine põhikooliõpilastes on matemaatika õpetamise eesmärk. See tähendab suutlikkust kasutada matemaatikale omast keelt, sümboleid ja meetodeid nii teistes õppeainetes ja eluvaldkondades kui ka matemaatikas. Samuti oskus probleeme püstitada, sobivaid lahendusstrateegiaid leida ning kasutada, lahenduskäike analüüsida ning tulemuse tõesust kontrollida. Matemaatikapädevus tähendab tõestamise, põhjendamise ja erinevate esitusviiside (tabelite, diagrammide, sümboolite ja valemite) kasutamise oskust ning mõistmist. (Põhikooli riiklik õppekava lisa 3, Gümnaasiumi riiklik õppekava lisa 3, 2011)

Kolmes esimeses kooliastmes õpitakse matemaatikat kokku 36 nädalatundi. Sealjuures esimeses kooliastmes 10 nädalatundi ning teises ja kolmandas kooliastmes mõlemas 13 nädalatundi. Nädalatundide jagunemine kooliastme sees määratakse kindlaks kooli õppekavas. Põhikoolis matemaatikaõpet läbides omandatakse kirjaliku ja peast arvutamise oskus. Arendatakse võimet märgata ümbritsevas maailmas matemaatikaga seonduvat ja kirjeldada seda arvude ning matemaatiliste mõistete abil. Õpilane saab oskuse koostada eri eluvaldkondade ülesandeid, suutlikkuse neid matemaatiliste mudelite abil lahendada ning igapäeva elus rakendada. Seitsme üldpädevuse kujundamise võimaluste seas toob põhikooli

riiklik õppekava välja, et põhikooli matemaatikas pannakse tähtsale kohale iseseisev töö ning tõendus põhiste oskuste arendamine. Tõestamisega puututakse kokku geomeetria alateema juures, kus õpilane saab esimesed oskused eristamaks teoreemi, eeldust ja väidet ning õpib seletama tõestuskäike. Kolmanda kooliastme lõpuks saadakse selgeks teiste mõistete hulgas ka Thalese ning Pythagorase teoreem. (Põhikooli riiklik õppekava lisa 3, 2011)

Gümnaasiumi matemaatikaõpetusega taotletakse, et gümnaasiumi lõpetades on õpilasel oskus analüüsida matemaatilisi tekste, esitada matemaatilisi arutluskäike nii kirjalikult kui ka suuliselt. Erinevaid üldpädevusi arendades kasutavad õpilased arutlemise oskust, õpivad mõistma matemaatikat kui teaduskeelt ning seeläbi areneb oskus tavakeelest pärit infot matemaatilistesse sümbolitesse ning vastupidi formuleerida ning anda tavakeeles edasi sümbolite või valemite abil kirja pandud matemaatika. (Gümnaasiumi riiklik õppekava, lisa 3, 2011)

Alates õppeaastast 2013/2014 läksid koolid üle uuele matemaatika õpetamise süsteemile. Matemaatika ainevaldkonna alla hakkasid eraldiseisvate ainetena kuuluma kitsas ja lai matemaatika. (Innove Rajaleidja, s.a) Riikliku õppekava andmetel kitsas matemaatika tõestamisega kokku ei puutu, kuna kitsa matemaatika kursuste arv gümnaasiumi vältel on langetatud kaheksa kursuseni. Samal ajal läbib laia matemaatika õpilane vähemalt 14 kursust, sealhulgas kursused, milles käsitletakse tõestamist. Ainevaldkonna kaheksa valikkursuse seas käsitletakse tõestamist rohkem kui kohustuslike kursuste seas, neis keskendutakse lisaks tõestamisele ka tõestuste vajalikkusele ja teoreemidest erinevate osade eraldamisele. (Gümnaasiumi riiklik õppekava, lisa 3, 2011)

3. Kursuse loomine

Matemaatika instituudi õpetajakoolituse töörühmal tekkis idee kursuse "Matemaatiline arutlusoskus ja tõestamine" loomiseks 2016. aasta kevadel. Kursuse loomisega alustati sama aasta sügisel ning kursuse loomisesse kaasati magistriõppe tudengeid ning käesoleva töö autor. Kursus "Matemaatiline arutlusoskus ja tõestamine" koosnes kuuest suuremast teemast ehk moodulist, milleks olid: Matemaatika vajalikkus ja koht teaduses, üldisemad mõisted, Matemaatiline loogika ja lausearvutus, Lausearvutuse valemid ja tõeväärtustabelid, Tõestamine, Koolimatemaatika valemite maailm, Geomeetria. Iga mooduli läbimiseks oli kaks nädalat ning õppurite teadmisi kontrolliti mooduli lõpus oleva kontrolltestiga. Kursus oli täielikult veebipõhine ning kõigile registreerunutele tasuta.

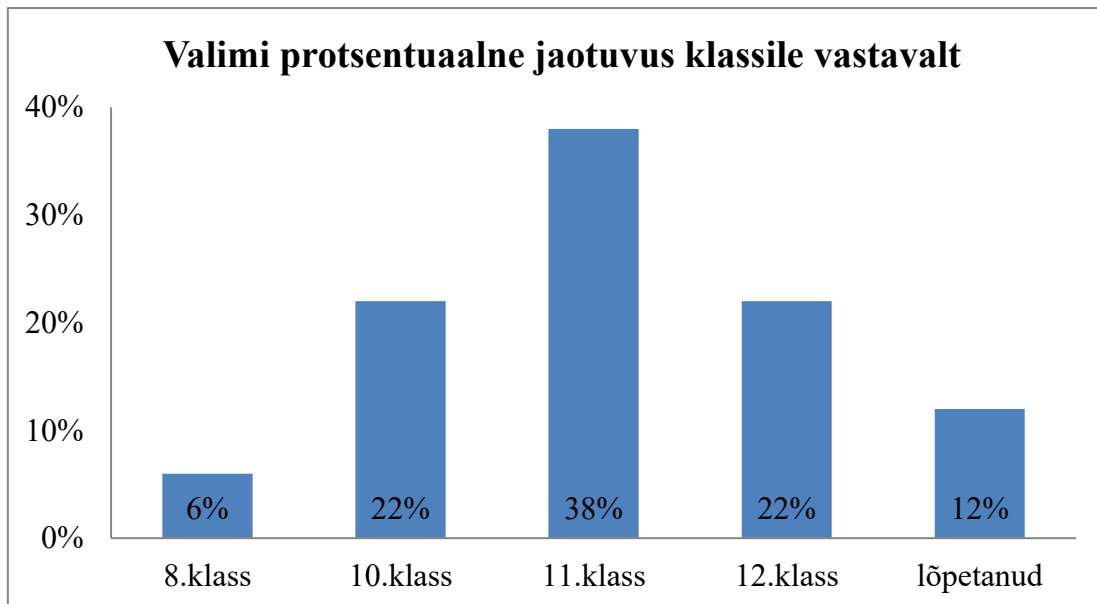
Eelnevalt mainitud kursuse jooksul selgitati loogika- ning tõestusülesannete olemust ning uuriti, miks on see teema oluline. Samuti oli kursusel läbivaks teemaks matemaatika kasutamine igapäevaelus. Iga mooduli juures arutleti selle üle, milleks antud teemat üldse vaja on. Selleks, et koolimatemaatika valemid ning teoreemid ei tunduks väga arusaamatud, selgitati kursuse jooksul ka paljude valemite ning teoreemide sügavamalt sisu ning läbi tõestuse näidati, miks need kehtivad.

Kursusele registreerus 50 õppurit, kellest 34 võtsid kursusest reaalselt osa ning positiivse tulemusega lõpetas 15. Mitmed kursusel osalenud abiturientid loobusid kursusest enne lõppu seoses sooviga aega pigem riigieksamiteks õppimiseks kasutada.

4. Metoodika

4.1 Valim

Uurija moodustas valimi kõigist kursusel "Matemaatiline arutlusoskus ja tõestamine" osalenutest. Valimisse kuulus 34 uuritavat, kellest 31% olid meessoost ja 69% naissoost. Uuritavate vanuselist jaotuvust kontrolliti kooli õppeastme täpsemalt klassi järgi. Noorim uuritav oli 8. klassist ning vanim uuritav kooli lõpetanud ja enam kui 65-aastane. (joonis 1)



Joonis 1. Valimi protsentuaalne jaotus vanuse järgi

Valimi hulgas olid esindatud 24 erinevat kooli üle kogu Eesti ning üks kool Šveitsist. Koolide seas oli nii põhikooli (2), eesti- (15) ja venekeelse (4) õppega gümnaasiumeid, täiskasvanute gümnaasiumeid (2) kui ka üks kutsekool. Esindatud koolid olid eksamitulemuste põhjal valminud koolide edetabelis väga erinevatel kohtadel. Koolide

edetabelist olid esimese viie kooli seast esindatud kolm. 20.-30. kohtadel olevate koolide seast kolm, 31.-50. koolide seast oli samuti esindatud kolm. Kohtadelt 51.-100. oli esindatud seitse kooli, 101.-150. kaks kooli ja 151.-180 üks kool. (Tartu Postimees, 2016) Mitmest koolist oli esindatud rohkem kui üks õpilane.

4.2 Mõõtevahendid

Tulemusi mõõdeti kursusele koostatud eel- ja järeltestiga. Ankeedi täitsid osalejad moodle.ut.ee keskkonnas. Nii eel- kui ka järeltestis tuli vastajal lahendada 6 erineva raskusastmega tõestusülesannet.

Eeltesti (vaata lisa 1) ankeedis oli kokku 14 küsimust, millest kolm puudutasid taustandmeid. Ankeedi küsimustest kolm olid poolkinnised ja üksteist küsimust lahtised. Taustandmeid puudutavad küsimused olid lahtised. Kolmes küsimuses paluti vastajatel hinnata erinevaid oskusi kümnepallisel semantilisel diferentsiaalskaalal. Samuti paluti oma arvamust põhjendada.

Järeltesti ankeedis (vaata lisa 2) oli 9 küsimust, millest 4 puudutasid taustandmeid. Kolmes küsimuses paluti vastajatel hinnata erinevaid oskusi kümnepallisel semantilisel diferentsiaalskaalal. Samuti paluti oma arvamust põhjendada. Taustandmeid puudutanud küsimused olid lahtised.

4.3 Uurimuse protseduur

Uurimuse läbiviimine jagunes kolmeks etapiks. Esmalt koostati kursusele "Matemaatiline arutlusoskus ja tõestamine" eel- ja järeltest. Teises etapis analüüsiti eeltesti tulemusi ning kolmandas järeltesti tulemusi. Nii eel- kui ka järeltest olid koostatud veebikeskkonnas moodle.ut.ee. Eeltesti vastused tuli osalejatel anda 2017 aasta jaanuaris ning järeltesti vastused sama aasta aprillis.

Küsimustikest saadud andmeid töödeldi programmiga Microsoft Excel. Andmetest moodustati koondtabel ning tulemuste analüüsimisel kasutati kirjeldavat statistikat. Küsimustikes kasutatud kümnepalliste diferentsiaalskaalade tulemustest leiti aritmeetilised keskmised. Lisaks kirjeldati andmeid joonistega.

Avatud küsimuste vastuseid analüüsiti kvalitatiivse sisuanalüüsiga. Vastused kodeeriti ning jagati induktiivset lähenemist kasutades kategooriatesse. Induktiivse lähenemise eeliseks on andmetest otse info saamine (Hsieh & Shannon, 2005). Toetudes Elo ja Kyngäse (2008)

kirjeldustele induktiivse sisuanalüüsi kohta, koondati avatud küsimuste vastused ühte faili ning korduva läbilugemise teel lisati pikemaid vastuseid kokkuvõtavad märksõnad ehk koodid. Andmeid kodeerisid usaldusväarsuse suurendamiseks nii uurija kui ka tema ema, kuni andmed ühildusid täielikult. Koodide seotuse kaudu jaotati vastused alamkategoriatesse.

5. Tulemused

Käesolevas bakalaureusetöös soovis uurija teada saada, mil määral peavad õpilased oluliseks tõestamist ning kui palju nad sellega õppimise jooksul kokku on puutunud. Lisaks sooviti teada, millised on kursusel osalejate endi hinnangul nende oskused antud valdkonnas hakkamasaamiseks ning milliseid oskuseid tõestamisülesannete lahendamine kursusel osalejate arvates arendab.

Uurimistöö eesmärgi saavutamiseks paluti valimis olevatel inimestel täita ankeedid. Järgnevalt on tulemused esitatud lähtuvalt ankeetides esinenud küsimustele, mis on jaotatud kahte alapeatükki.

5.1 Suhtumine tõestusülesannetesse

Alustuseks määrati kindlaks, mil määral on kursusel osalejad koolimatemaatikas tõestusülesannetega kokku puutunud, seejärel uuriti nende enda arvamust selle kohta, kas nende arvates on tõestamisega seotud ülesandeid koolimatemaatikas üldse tarvis ning kui on, siis miks nemad tõestusülesandeid vajalikuks peavad.

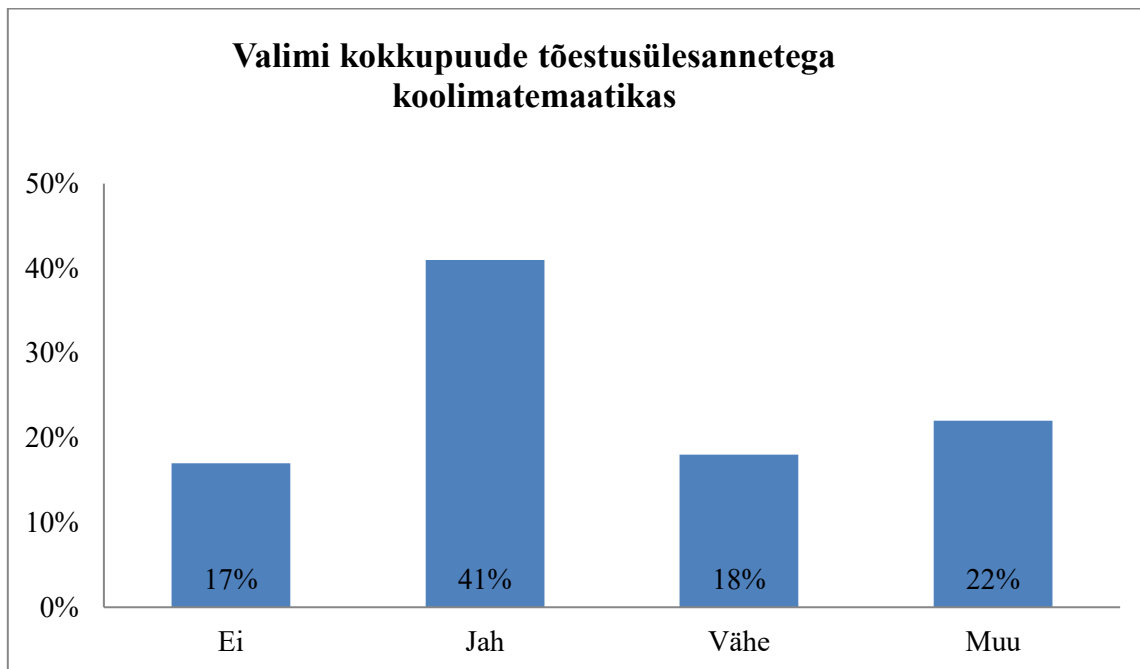
Küsimusega, kas kooliajal on tõestusi õpitud, taheti teada saada, millisel määral on valimis olevad inimesed on tõestamisega kokku puutunud, et seejärel uurida, kui võrd on osalejate arvamus tõestusülesannete osas mõjutatud. Kuna põhikooli õppekavas, mille peaaegu kõik osalejad olid eelnevalt läbinud, on tõestusülesannete õpetamine õppekava osa, tuli avatud küsimusele "Kas oled koolis matemaatikatunnis tõestusi õppinud?" üllatuslikul kombel mitu vastust, et üldhariduskoolis õpetatud ei ole või on tõestusülesandeid õpetatud vähem kui nende arvamuse kohaselt tarvis oleks. Täpsemalt, kuus vastajat ehk 18% vastanutest andis selle küsimuse vastuseks "vähe", "natukene" või "üldse mitte".

Kategooriasse "Muu" loeti

23% vastustest, mille hulgas oli nii asjasse mittepuutuvaid vastuseid kui ka näiteks Šveitsi koolis õppiva õpilase vastus, kus toodi välja, et õppur lahkus Eestist pärast 5. klassi lõpetamist ja Eesti haridussüsteemis ta tõestamist õppinud ei ole. Lisaks väitis ta, et Šveitsis

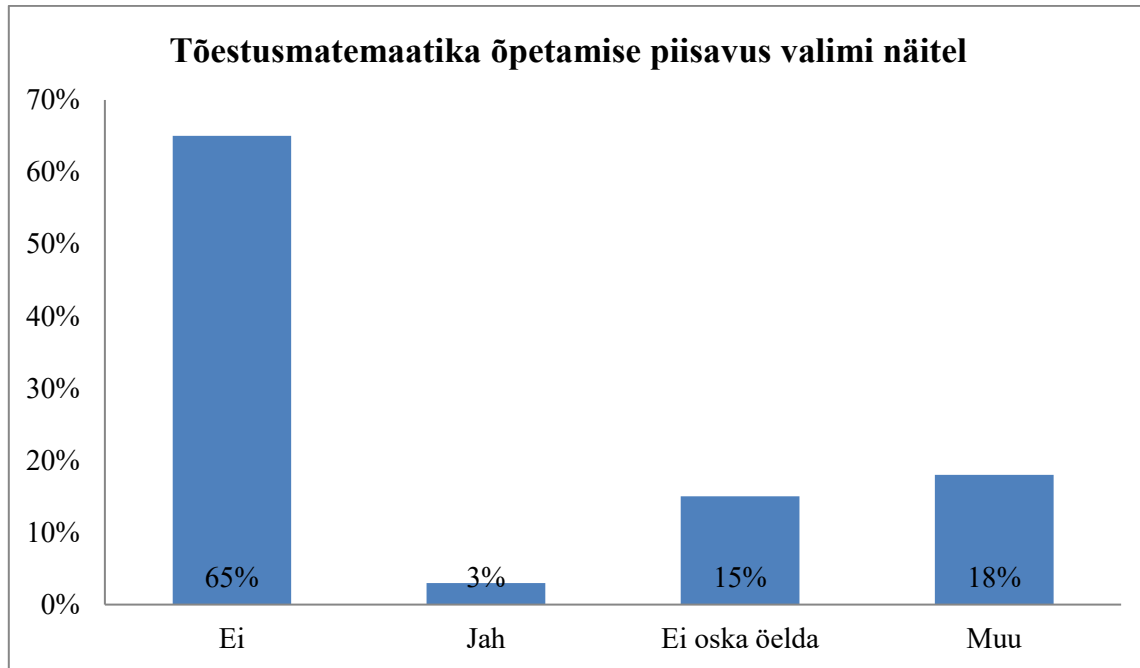
otseselt tõestamist ei õpetata, kuid aeg-ajalt on ette tulnud, et näidata lühidalt mõne tulemuse tõestuskäiku ning ta on kokku puutunud ka induktsioonülesannetega.

(joonis 2)



Joonis 2. Valimi kokkupuude tõestusülesannetega koolimatemaatikas

Avatud küsimusele "Kas Sinu arvates õpetatakse põhikoolis piisavalt tõestusi?" vastati pigem negatiivselt. 15% ei osanud öelda, kas on piisavalt või tõi välja, et ei tea, mis kogus oleks piisavalt. Suurem osa, ehk 65% vastajatest arvas, et selles koguses, mis põhikooli õppekavas tõestamist on, ei ole seda piisavalt. Uurija luges vastusevariandi "Muu" alla ühe põhikooliõpilase arvamuse, kes tõestamisega veel kokku puutunud ei ole. Samuti kategoriseeriti "Muu" alla ka vastused "võiks olla natuke rohkem" ning "sooviksin, et oleks rohkem". Näiteks oli üks vastustest järgnev: "See osa jääb alati kuidagi viimaseks ja seda ei võeta nii süvitsi kui võiks. Võib olla võiks sellele rohkem rõhku panna."(N.12.3) Samasse kategooriasse loeti ka vastused, mis ei vastanud küsimusele selgelt ja arusaadavalt. (joonis 3)

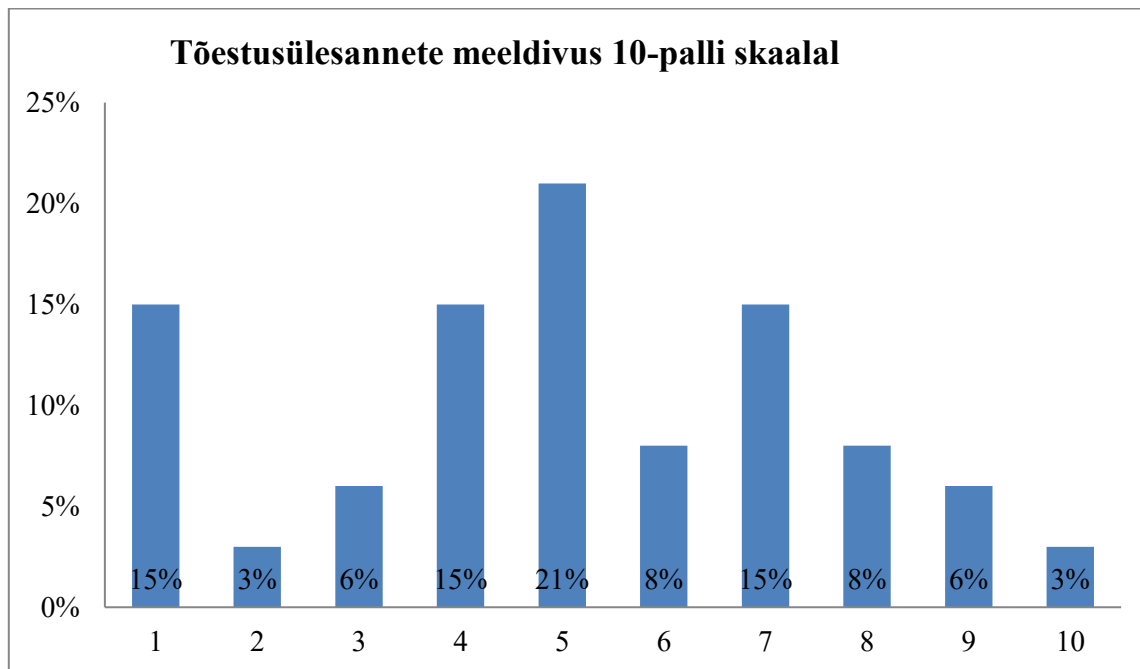


Joonis 3. Kas tõestamist õpetatakse Sinu arvates koolimatemaatikas piisavalt

Küsimusega uuriti, kas vastajad mõistavad, milleks tõestusi vaja on. Üheksa vastajat tõid välja, et tõestamise peamine kasutegur on valemite rakendamises. 11. klassi neiu tõi välja, et läbi tõestamise saab selgeks, kas ja millistes olukordades mingit valemit kasutada võib. Samuti tõi üks 10. klassi neiu välja, et valemite tõestamine aitab seoseid luua ning loodud seoseid ka paremini meelde jätta. Noormehed lähenesid tõestuste vajalikkusele hoopis praktilisemast küljest. Näiteks tõi 11. klassi noormees välja, et tõestusi on vaja väidete ja valemite õigsuses veendumiseks, sest alati ei piisa sellest kui mõne katsetuse korral näiteks mõni valem töötab. Samuti 11. klassi noormees tõi välja, et tõestusi on vaja, sest vastasel juhul ei saa aru, kas iga sisendi puhul saame õige väljundi. Üks noormees (10. klass) tõi välja, et "tõestamine on nagu elekter - sul võib küll lamp olla, aga kui voolu ei ole, siis ei lähe ka pirn põlema, "millega väideti, et lihtsalt matemaatikavalemite tundmine ei tähenda veel seda, et teemast sügavuti aru saadakse.

Otsest suhtumist tõestusülesannetes uuriti järeltestis küsimusega "Kas Sulle meeldivad tõestamisega seotud ülesanded?" Vastusele paluti ka põhjendust ning enda meeldivust tõestusülesannete suhtes paluti hinnata 10-pallisel semantilisel diferentsiaalskaalal. Küsimuse vastused olid üsna varieeruvad. Vastajatest 8% tões, et neile tõestamine üldse ei meeldi ning hindas tulemust 1 palli vääriliseks. Mitte väga meeldivaks, kuid hindeliselt viie või kuue palli vääriliseks hindas tõestusülesannete meeldimust kokku 16% vastajatest. Kaheksa kuni kümne palli vääriliseks hindas tõestamisega seotud ülesandeid

68% vastanutest. "9 - meeldivad, sest tõestamisoskus näitab, kui hästi sa tegelikult asjast aru saad. Täispunkte ei saa anda, sest tihti on tõestamine küllaltki tüütu tegevus."(M.11.5) "Need on põnevad, aga neist on vaja ka aru saada, et osata tõestada (...)"(N.13.1) (joonis 4)



Joonis 4. Tõestusülesannete meeldivus 10-palli skaalal

5.2 Õpilaste suutlikkus tõestusülesandeid lahendada

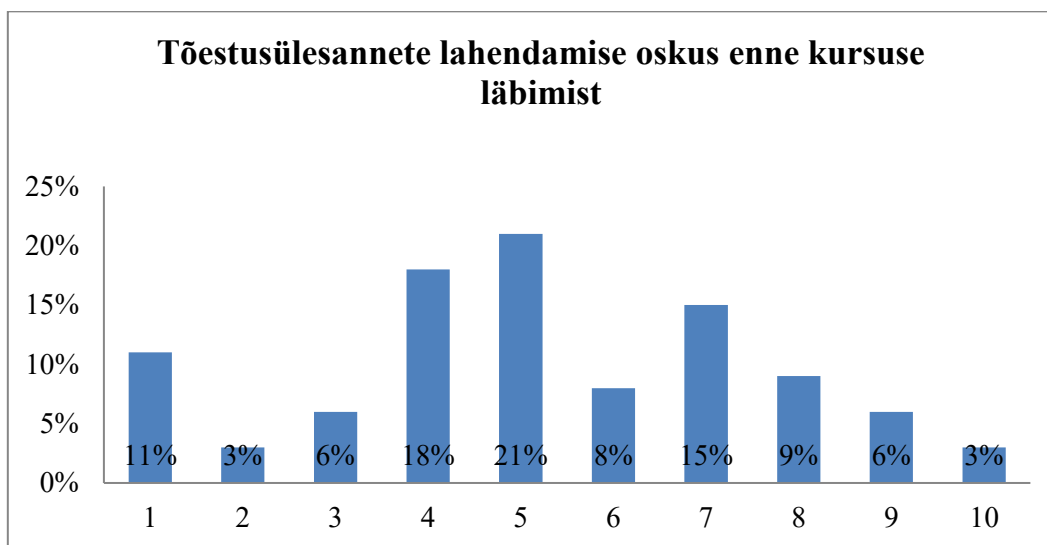
Avatud küsimusele "Milliseid oskuseid tõestamine arendab?" toodi vastuseks, et enim arendab tõestamine erinevaid mõtlemisoskusi. Vastajad tõid 15 korral välja, et tõestamine parendab loogilise mõtlemise arengut, kuid lisaks toodi välja ka tõestamise mõju näiteks abstraktse ning geomeetrilise mõtlemise arengule. Arenevate oskuste seas toodi lisaks kaks korda välja tekstist arusaamise oskus ning kaks korda, et tõestamine arendab oskust kirjutatust kujutluspilti luua. Samuti vastati ühel korral, et tõestamine arendab konstruktiivset mõtlemist ning tähelepanuvõimet. 14 vastaja arvates arenevad tõestamise õppimisega nii arutlemis- kui ka analüüsioskus. Neid toodi välja vastavalt kaheksal ja kuuel korral. Samuti õpitakse vastanute sõnul kasutama eelnevalt omandatud oskusi ning seeläbi osatakse enam luua uusi seoseid, mis omakorda tagab suurema tõenäosuse näha niiõelda laiemat pilti. Toodi ka välja, et tõestamise õppimine toob kasu väitlejatele, sest tõestamise käigus õpitakse paremini argumenteerima ja enda väiteid kaitsma, mis ongi ühe väitleja eesmärk. Lisaks saadi aru, et tänu tõestustele on võimalik paremini mõista valemite ja väidete sisust ning laiemat mõtet. "Arendab tõestamise oskusi ning annab parema arusaama, kuidas need väited ja valemid

täpsemalt töötavad. See tuleb kasulikuks, kui kasutan neid väiteid ja valemeid mõne probleemi lahendamisel, seega see arendab ka probleemide lahendamise oskust."(M.11.1)

"Valemi ja väite läbimõtlemine ja kaalutlemine. Hakkad mõtlema selle peale, mis ta täpsemalt on, mitte ei õpi lihtsalt pähe. Samuti oskus midagi seletada ja põhjendada areneb kindlasti."(N.12.3)

"Tõestamine arendab väitlemisoskusi, kuna väitluses on oluline osa asjakohasel argumenteerimisel ja oma väidete põhjendamisel. Samuti võib oskus tõestada aidata kaasa loogiliste seoste märkamisele."(N.12.1)

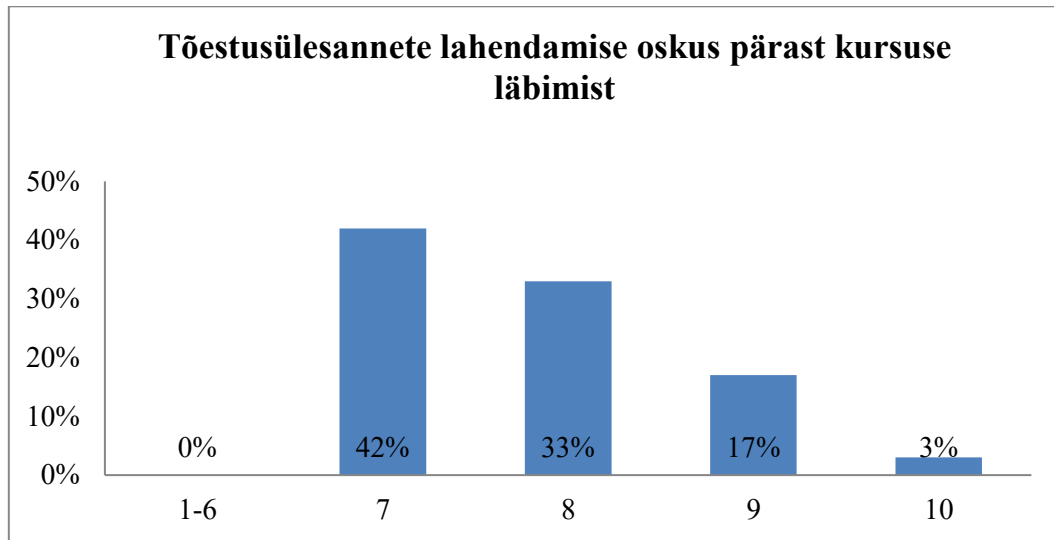
Vastajad hindasid oma tõestamisoskusi enne kursuse läbimist pigem kehvapoolseks. Küsitluses osalejatel paluti hinnata oma teadmisi tõestamise kohta kümnepallisel semantilisel diferentsiaalskaalal, kus üks tähendas "ei tule üldse toime" ning kümme " oskan väga hästi". Vastanutest 21% hindas enda teadmisi viie palli vääriliseks, 11% hindas enda oskusi ühega ehk leidis, et ei tule tõestamisülesannetega toime. 18% pidas enda teadmisi skaalal nelja palli vääriliseks. "(...) arvan, et palju saab ära teha lihtsalt loogikaga, kuid kindlasti pole mul piisavalt teadmisi, et ülesanded hästi sooritada".(N.13.2) Vaid üks vastaja arvas, et tema teadmised tõestamisest on väga head, hinnates oma teadmiste väärtust kümne palliga. Keskmiselt hinnati oma teadmisi viie palliga. (joonis 5)



Joonis 5. Õpilaste arvamus nende tõestamisülesannete lahendamise kohta enne kursuse läbimist

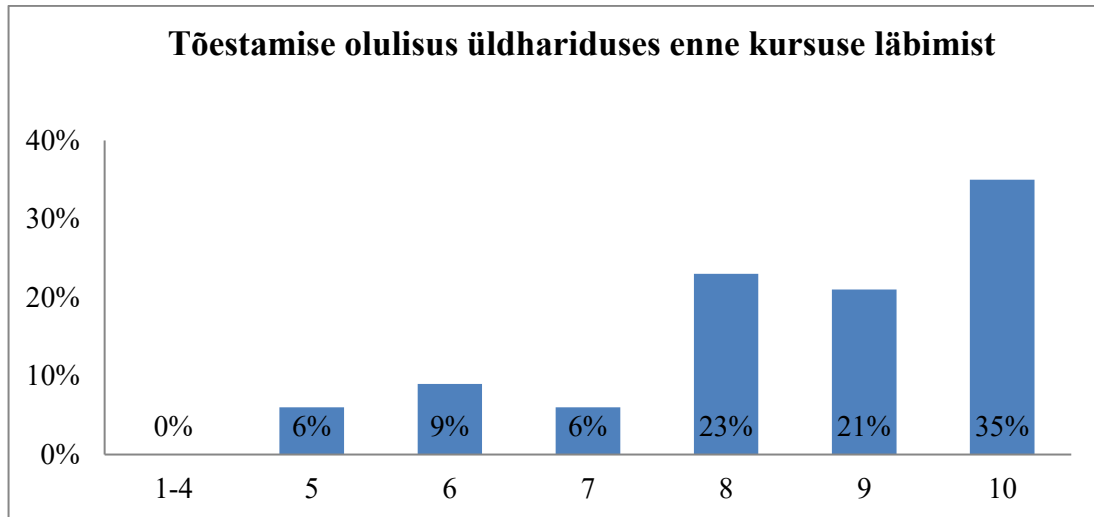
Pärast kursuse lõppu läbiviidud järeltestis uuriti õpilaste arvamust tõestamisülesannete lahendamisoskuse kohta uuesti. Kui enne kursust hinnati oma teadmisi keskmiselt 5,2 pallivääriliseks, siis kursuse lõppedes oli osalejate arvamus endaoskuste kohta tõusnud juba keskmiselt 7,9 pallini. Kusjuures kõik vastajad pidasid enda oskuseid kõrgemaks kui enne kursust keskmiselt teadmisi hinnati. Veerand vastajatest hindasid, et saavad tõestustega väga

hästi hakkama ning enda oskustele panid väärtuseks 9-10. 75% vastajatest pidas enda oskuseid seitsme kuni kaheksa palli vääriliseks. (joonis 6)



Joonis 6. Tõestusülesannete lahendamise oskus pärast kursuse läbimist

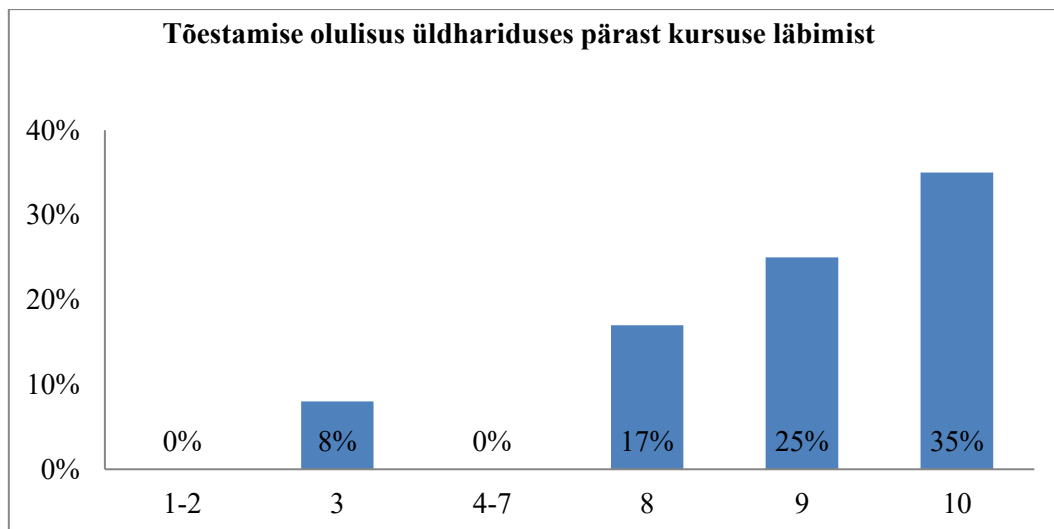
Ankeedis küsiti veel, kui oluliseks peavad vastajad tõestamise oskust. 94% vastanuist pidasid tõestamist olulisemaks kui viie palli vääriliseks, kusjuures 35% vastanuist pidasid tõestamist väga oluliseks ning hindasid seda kümne palli skaalal maksimumhindega. Enda hinnangu kohta kirjutati ka järgnevaid selgitusi. "10. Mitte niivõrd teiste, kuid enda jaoks. Minu meelest sarnaneb matemaatiline tõestamine mingisuguse arvamuse põhjendamisega. Sinu arvamus on alusetu, kui Sa seda põhjendada ei suuda. "Ükskõik milliste väidete tõestamine on eluliselt oluline oskus."(M.11.4) "Väidete tõestamine on kindlasti väga tähtis, kuna see näitab inimese arusaamist ning tarkust. Hindan seda 9 palliga." (N.12.2) "9 üsnagi oluline, kuna tõestamine, ei puuduta ainult matemaatikat, vaid ka kogu ülejäänud valdkondi, siis usun et tõestamisel on oluline roll meie elus ning selle oskamine tuleb igati kasuks" (N.12.5) Natuke vähem oluliseks ehk üheksa palli vääriliseks pidas tõestamist 21% vastanuist. Kaheksa palliga hindas tõestamise olulisust 23% vastanuist. Keskmiselt hinnati tõestamise olulisust 8,5 palliga. (joonis 7)



Joonis 7. Tõestamise olulisus üldhariduses enne kursuse läbimist

Kursuse lõpus küsiti osalejate käest taaskord, kuivõrd oluliseks peavad õpilased tõestuste õpetamist. Kursuse läbimise järel oli õpilaste arvamus sellest, et tõestamise õpetamine on oluline, suurenenud - vaid 8% pidas tõestuse olulisust kolme palli vääriliseks kümnest. Kõik kursusel osalenud ja ankeedi täitnud õpilased ei lõpetanud kursust positiivse hindega.

Kursuse lõppedes hinnati tõestuste olulisust 8,8 palliga kümnest. (joonis 8)



Joonis 8 Tõestamise olulisus üldhariduses pärast kursuse läbimist

5.3 Edasised uuringud

Käesolev töö annab esimesed tulemused kaardistamaks Eesti kooliõpilaste ja kooli lõpetanute arvamust matemaatilise tõestuse õppimise ja õpetamise olulisuse kohta. Õppeaastal 2016/2017 oli võimalus antud uuringus osaleda vaid üsna väikesel valimil, kuna tegemist oli

pilootkursusega, kus osalejate arv oli piiratud. Väike valim oli oluline, et testida kursuse toimimist ning huvi selle vastu, samuti selleks, et teha kursuse materjalides vajalikud parandused ning täiendused. Alates õppeaastast 2017/2018 on plaanis kursus korraldada MOOC-ina (massive open online course) ehk ilma osalejate piirarvuta kursusena. See omakorda tagaks suurema valimi uurimaks õppurite arvamust matemaatilise tõestamise olulisusest ning kaardistamise tulemuste põhjal saaks teha laiapõhjalisemaid järeldusi. Autoril on plaanis antud teemal uuringuid jätkata ja viia lõpuni projekt õpilaste arvamuse kaardistamise kohta antud valdkonnas. Plaanis on muuta ning täiendada ka küsitlusankeete, et tulemuste analüüsimine oleks vähem inimressurssi nõudev. Näiteks oleks vaja poolkinnised küsimused muuta kaheks küsimuseks, kus esimene osa uuriks varasema semantiliste diferentsiaalskaalade ja põhjenduse asemel vaid hinnangulist arväärtust ning järgnev küsimus paluks eraldiseisvalt selgitust eelnevalt antud hinnangule.

6. Arutelu

Lõputöö eesmärgiks oli töötada välja loogika- ja tõestamisülesannetega tegelev kursus, et analüüsida õpilaste matemaatilist arutlusoskust ning tõestusülesannete vajalikkust üldhariduskooli õppekavas. Pilootkursuse, mille põhjal valmis ka antud lõputöö, võib lugeda edukaks, kuid erinevad takistused andmete analüüsis aitasid anda ideid, kuidas kursust järgmiseks õppeaastaks parendada. Kursuse tagasisidet ja uurija märkmeid arvestades on kursuse ankeetidesse viidud sisse muudatused. Uuringu eesmärgiks oli kaardistada õpilaste tõestusülesannetega kokkupuudet koolimatemaatikas ja kuidas nad hindavad enda oskuseid antud valdkonnas. Samuti sooviti teada, kui oluliseks hindavad õpilased tõestamise õppimist ning milliseid oskuseid nende arvates tõestamine õpetab. Antud uuring on oluline, sest kuigi sarnaseid uuringuid on korduvalt erinevate riikide õpetajatega läbi viidud, on see on esimene samalaadne uuring Eestis, mis on läbi viidud õpilastega. Esimese uurimusküsimusega sooviti teada, mil määral on valim kokku puutunud tõestamisega ning kas seda on nende arvates olnud piisavalt. Kuna tõestamine on sees Põhikooli riiklikus õppekavas, (Põhikooli riiklik õppekava, lisa 3, 2011) siis tuli ka antud uurimusküsimusele oodatav vastus. 59% vastanutest olid kokku puutunud tõestamisülesannetega ning 18% neist tõid välja, et on seda vähesel määral teinud. Vastajate arvates ei õpetata aga põhikoolis tõestusi piisavalt. Vaid 3% vastanuist tõid välja, et põhikoolis on tõestuste maht nende arvates piisav. Teise uurimusküsimusega sooviti teada, millised on õpilaste hinnangud nende oskustele tõestamisülesannete valdkonnas. Samuti jälgiti, kas kursus "Matemaatiline arutlusoskus ja

tõestamine" suurendab või vähendab õpilaste arvamust nende oskuste osas. Enne kursust hindasid õpilased oma teadmisi pigem madalalt, keskmiselt 5 palliga, siis kursuse lõppedes oli nende arvamus tõusnud 7,9 pallini. Sealjuures enne kursust hindas 59% vastanuist enda teadmisi vaid viie või vähema palli vääriliseks, kuid pärast kursuse läbimist hindas kogu valim enda teadmisi vähemalt seitsme palli vääriliseks.

Kolmanda uurimisküsimusega sooviti kaardistada õpilaste arvamust tõestamise õpetamise olulisusest ning saada teada, mida nende arvates tõestamine arendab. Enne kursuse läbimist jäi valimi arvamus tõestusülesannete kohta viie- kuni kümnepalliseks, keskmise hinnanguga 8,5 palli, kursuse lõppedes oli keskmine hinnang tõusnud 8,8 pallini, sealjuures kui enne kursuse läbimist pidas 85% kursusel osalejatest tõestusi vähemalt 7 palli vääriliseks siis kursuse lõppedes pidas lausa 92% vastajaist tõestamiste õpetamise olulisust vähemalt 7 palliseks. Vastajad tõid enim välja loogilise mõtlemise arengut, kuid teiste seas leidsid mainimist ka analüüsi- ja arutlusoskusi. Lisaks toodi välja, et tõestamiste õppimine annab õpilastele põhjalikuma arusaama valemite ja väidete sisust ning laiemast mõttest.

Käesoleva uurimuse piiranguks võib lugeda liiga väikest valimit, mille tõttu ei saa tulemusi Eesti põhikoolidele ja gümnaasiumitele üldistada. Antud uurimus oleks vaja viia läbi suurema valimiga, kuid enne tuleks täiustada ankeeti. Soovituslik oleks semantilised diferentsiaalskaalad asendada Likerti 5-palli skaaladega. Poolkinniste küsimuste, mis uurisid nii hinnangulist arvamust kui ka põhjendust sellele, asemel oleks kasulik kasutada kahte eraldiseisvat küsimust, kus esimene nõuaks hinnangut ning teine põhjendust. See annaks võimaluse tulemusi lihtsamalt analüüsida, sest sellisel juhul ei peaks esmajärjekorras tegelema numbriliste ja sõnaliste vastuste eraldamisega, vaid saaks kohe tulemusi analüüsima hakata. Samuti oleks hea asendada avatud küsimus "Milliseid oskuseid arendab tõestamine?" poolkinnise küsimusega, kus on ette antud loetelu oskustest, mis on teiste uurijate poolt juba varasemalt välja toodud. Samuti oleks hea sellele küsimusel lisada vastusevariant "muu", et uuritavatel oleks võimalus loetelust puuduvaid oskusi vajadusel lisada. Selliste ankeedimuudatustega muutuks tulemuste analüüs lihtsamaks ning ühtlasi annaks ankeedid parema statistilise ülevaate sellest, mida arvatakse.

Uurija leiab, et juhul kui suurema valimi korral jõutakse sarnaste tulemusteni, siis oleks alust mõelda sellele, et tõestused matemaatika tundidesse suuremal määral tagasi tuua.

7. Kokkuvõte

Tõestus on matemaatiline vahend teiste veenmiseks. Matemaatiline tõestus toetub matemaatilistele definitsioonidele ja aksioomidele. Kuigi Põhikooli riikliku õppekava matemaatika valdkonnas on väljundite seas kirjas ka omandatava oskuseks tõestus, tuleb antud töö tulemustest välja, et kuigi õpilased on koolis tõestamisega kokku puutunud, ei arvanud, et tõestusi koolimatemaatikas piisavalt oleks.

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks oli töötada välja loogika- ja tõestamisülesannetega tegelev kursus, et analüüsida õpilaste matemaatilist arutlusoskust ning tõestusülesannete vajalikkust üldhariduskooli õppekavas. Uurimuse eesmärgiks oli selgitada välja, kuivõrd on õpilased kokku puutunud tõestusülesannetega, kui oluliseks nemad ise seesuguseid ülesandeid peavad ja kuidas tulevad nad tõestusülesannete lahendamise toime. Samuti sooviti teada, kuidas tõestusülesannete lahendamine mõjutab nende üldist matemaatikast arusaamist. Küsiti ka millised on nende enda hinnangul oskused tõestusülesandeid lahendada ja mida nende arvates tõestusülesannete õpetamine arendab. Käesoleva lõputöö eesmärk täideti ning pilootkursus „Matemaatiline arutlusoskus ja tõestamine“ sai loodud. Uurimuse eesmärgid said täidetud osaliselt ning sai loodud algusõpilaste arvamuse kaardistamisele antud valdkonnas. Pilootkursusel osalenud õpilased vastasid kursuse alguses ja lõppedes ankeetküsitlustele, mille põhjal analüüsiti andmeid kvantitatiivselt.

Valimi suhtumist tõestusülesannetesse hinnati 10-pallisel semantilisel diferentsiaalskaalal ning 68% vastanutest hindasid tõestamisülesannete meeldivuse 8 kuni 10 pallini. Uurimustulemustest selgus, et kuigi vaid 59% vastajaist tõid välja, et nad on tõestusülesannetega kokku puutunud arvas valimist 65%, et nende arvates ei ole tõestusi koolimatemaatikas piisavalt.

Uurimustulemusi analüüsides tuli välja, et valimi arvates õpetab tõestamine enim loogilist mõtlemist, arutus- ning argumenteerimisoskust. Samuti lisati, et tõestamine teeb valemitest ja väidetest aru saamise lihtsamaks.

8. Summary

Proof is a mathematical tool for verifying propositions. Mathematical proof is based on mathematical definitions and axioms. Although the subject field of mathematics of the national curriculum for basic schools lists proving as one of the skills pupils are supposed to learn before graduating from ninth grade, the results of the current thesis show that even though pupils have encountered the subject of mathematical proof, they believe it to be insufficiently treated in their curriculum of basic school mathematics.

The aim of the current thesis was to develop a course of logic and proving to analyse the pupils' skill of mathematical discussion and the necessity of proving propositions in the curriculum for basic schools. The aim of the research was to find out how closely have the pupils met the proving exercises, how important they think this type of exercises are and how well do they solve this kind of exercises. At the same time, it was desirable to find out how all this affects their overall understanding of mathematics. Students were asked how do they judge their abilities to solve these exercises and which skills can be developed by solving the exercises of proof. The aim of the current thesis was met and the pilot course "Mathematical reasoning and proving" was created. The aims of the research were partially met and the beginning of mapping of the pupils' opinions of mathematical proofs was made.

Pupils, who participated in the pilot course, filled a questionnaire at the beginning and the end of the course. The results were analysed quantitatively.

The sample's attitudes towards the exercises of proving were evaluated on a ten-point semantic differential scale and 68% of the respondents gave eight or more points when asked how well do they like this type of exercises.

The results showed that even though only 59% of the respondents said they have met exercises of proof during their studies, 65% of the respondents thought there is not enough of this type of exercises in the curriculum of school mathematics. It was shown that the sample believed logical thinking and skills of discussion and debate to be useful traits developed the most by learning mathematical reasoning. It was also added that constructing mathematical proofs makes it easier to understand formulas and statements.

Tänuõnad

Soovin tänada, kõiki pilootkursusel osalejaid. Samuti soovin tänada perekonda ja sõpru, kes nõustusid mu töö kriitilise pilguga üle lugema.

Autorsuse kinnitus

Kinnitan, et olen koostanud ise käesoleva lõputöö ning toonud korrektselt välja teiste autorite ja toetajate panuse. Töö on koostatud lähtudes Tartu Ülikooli haridusteaduste instituudi lõputöö nõuetest ning on kooskõlas heade akadeemiliste tavadega.

Anne-Mai Liigand 18.05.2017

9. Kasutatud kirjandus

Ball, D.L., C. Hoyles, H.N. Jahnke, and N. Movshovitz-Hadar. 2002. The teaching of proof. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, ed. L.I. Tatsien, vol. 3, 907–20. Beijing: Higher Education Press.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17–24.

Elo, S., & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, 62(1), 107–115.

Gümnaasiumi riiklik õppekava lisa 3 (külastatud 08.04.2017) Külastatud aadressil https://www.riigiteataja.ee/aktivilisa/1290/8201/4021/2m_lisa3.pdf#

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6–13.

Hemmi, Lepik, Viholainen 2010 Upper secondary school teachers' views of proof and proving: an explorative cross-cultural study In *Proceedings of the 16th Conference of Mathematical Views* , 2010

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389–399.

Hsieh, H.-F., & Shannon, S.E. (2005). Three Approaches to Qualitative Content Analysis. *Qualitative Health Research*, 15(9), 1277–1288.

Innove Rajaleidja (Külastatud 18.04.2017). Külastatud aadressil <http://www.rajaleidja.ee/opetajad-kangutavad-uut-matemaatika-riigieksamit/>

Krantz (2007) History and Concept of Mathematical proof In *History of Mathematics V.L. Hansen, J. Grey, Ed* (2010) 239-375

Mejia-Ramos, J.P., Fuller, E, Weber, K, Rhoads, K, Samkoff, A An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educ Stud Math*, 79(3), 3-18

Põhikooli riiklik õppekava lisa 3. (Külastatud 01.04.2017). Külastatud aadressil <https://www.riigiteataja.ee/aktivilisa/1290/8201/4020/1m%20lisa3.pdf#>

Tartu Postimees Suur koolide edetabel 2016: vaata, mitmes on sinu kool! (külastatud 15.04.2017) Külastatud aadressil: <http://tartu.postimees.ee/3876551/suur-koolide-edetabel-2016-vaata-mitmes-on-sinu-kool>

Thurston, W. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161–177. *Nursing*, 62(1), 107–115.

10. Lisad

Lisa 1: eeltest

Tere, tore kursusel osaleja!

Kõige esimese asjana palume Sul sooritada eeltesti. Eeltesti ei ole vaja karta - vastupidi, eeltesti **ei hinnata**, vaid see annab lihtsalt küsimustele ausalt vastamise eest 1 punkti kogu kursusele lisaks! Testis on ka mõned ülesanded, millede lahendused võid kirjutada kirjeldusena siiasamasse tekstiribale, või esitada kas ühe või ka mitme failina (pdf-fail, word-i fail vms) küsimuste alla.

Eeltesti saab sooritada ühe korra, seega ole tähelepanelik ja loe küsimusi samuti tähelepanelikult! Eeltesti sulgudes ei ole võimalik testi enam uuesti kuvada.

Küsimustiku täitmisega aidad kaasa ka bakalaureuse- ja magistritöö valmimisele! Seega täname Sind juba ette! Lisaks, kuna kursus toimub esimest korda, siis aitab eeltesti (ja hiljem ka järeltesti) aus täitmine meil endil hinnata käesoleva kursuse vajalikkust ja edukust.

Jõudu tööle! Ja veelkord aitäh!

1. Mis koolis Sa käid?
2. Mitmendas klassis Sa käid?
3. Mis on Sinu tüüpiline matemaatikahinne?
4. Kui Sa kuuled sõna „matemaatika“, siis mida see Sinu jaoks tähendab?
5. Kas oled kooli matemaatika tunnis õppinud tõestamist?
6. Kas Sinu arvates õpetatakse põhikoolis piisavalt tõestamisi?
7. Milleks on Sinu arvates matemaatikas tõestusi vaja?
8. Milliseid oskusi Sinu arvates arendab erinevate väidete ja valemite tõestamine?
9. Kui hästi sa arvad, et saad erinevate tõestusülesannete lahendamiseга hakkama? Hinda 10-palli skaalal (1- ei tule üldse toime, 10 – oskan väga hästi tõestusülesandeid lahendada).
Soovi korral põhjenda.
10. Kas Sulle meeldivad tõestamisega seotud ülesanded? (1- ei meeldi üldse, 10 – meeldivad väga). Põhjenda vastust.
11. Kui oluliseks pead oskust tõestada väiteid? (1 – ei ole üldse oluline, 10 – on väga oluline) Põhjenda.

12. Miks registreerused käesolevale kursusele?

13. Mida ootad käesolevalt kursuselt?

14. Järgnevalt palume Sul lahendada kuus ülesannet, mille võid vormistada Sulle sobival viisil (word-is, kirjutada lahendus siia tekstiribale, lahendada ülesanne paberil ja teha sellest pilti ning laadida pilt üles, skaneerida lahendus vms) ja seejärel siia esitada. Kui Sul kohe üldse ei ole mõtteid, kuidas võiks antud ülesannet lahendada, siis kirjutagi nii, et ei oska antud ülesannet lahendada. Palume nende ülesannete lahendamisel kõrvalist abi mitte kasutada, kuna soovime analüüsida reaalselt olukorda. Antud ülesannete lahendamise eest kursusel hinnet ei saa!

Ülesanne 1

Kolmnurga mediaanid jaotavad kolmnurga kuueks mittelõikuvaks

kolmnurgaks. Tõestage, et nende kolmnurkade pindalad on võrdsed. Ülesanne 2

Tööandja palkab töötaja üheks kuuks (20 tööpäeva) ja pakub töötajale palgaks 1. tööpäeva eest 1 senti, 2. tööpäeva eest 2 senti, 3. tööpäeva eest 4 senti, 4. tööpäeva eest 8 senti jne. Iga päev kasvab töötasu kaks korda. Leia valem, mille abil arvutada viimase (kahekümnenda päeva) tööpäeva palk. Lisaülesanne: leia valem, mille abil arvutada kogu kuu palk.

Ülesanne 3

Kaks töölist pidid koos tegema mingi töö. Koos töötades lõpetaks nad selle

12 tunniga. Kui üks tööline teeks algul poole tööst ja siis teine ülejäänud osa, siis kuluks töö lõpetamiseks 25 tundi. Mitme tunniga oleks lõpetanud selle töö kumbki tööline üksi töötades?

Ülesanne 4

Järgnevalt on toodud nimekiri erinevatest kuudest ning nende juurde käivad koodid:

*Jaanuar 7110

*Veebruar 8222

*Märts 5313

*Aprill 641

*Mai 3513

*Juuni 5610

*Juuli 5710

Milline on augustikuu kood? Ülesanne 5

Inimene hakkab sõitma paadiga risti üle jõe. Paadi kiirus on 4 m/s. Jõe voolukiirus on 3 m/s. Jõe laius on 80 m. Kui pika tee läbis paat?" (siin oleks hea, kui lisaksid ka juurde enda tehtud joonise)

Ülesanne 6

Kui kaugele on põhimõtteliselt võimalik näha, st kui kaugel on horisont? (Midagi ees ei ole, nt vaatate merd) Maa raadius on ligikaudu 6400 km. (siin oleks samuti hea, kui lisad juurde endapoolse joonise)

Lisa 2: järeltest

1. Kas jäid antud kursusega rahule? Kommenteeri mõne lausega.
2. Kas kursus täitis sinu ootused?
3. Kui hästi sa arvad, et saad erinevate tõestusülesannete lahendamisega hakkama? Hinda 10-palli skaalal (1- ei tule üldse toime, 10 – oskan väga hästi tõestusülesandeid lahendada).
4. Kas Sulle meeldivad tõestamisega seotud ülesanded? (1- ei meeldi üldse, 10 – meeldivad väga).
5. Kui oluliseks pead oskust tõestada väiteid? (1 – ei ole üldse oluline, 10 – on väga oluline)
6. Mida võiksid kursuse läbiviijad teisiti teha, et kursust veel paremaks teha?
7. Mis jäi kursuselt eriti hästi meelde?
8. Järgnevalt palume Sul lahendada kuus ülesannet, mille võid vormistada Sulle sobival viisil (word-is, kirjutada lahendus siia tekstiribale, lahendada ülesanne paberil ja teha sellest pilti ning laadida pilt üles, skaneerida lahendus vms) ja seejärel siia esitada. Kui Sul kohe üldse ei ole mõtteid, kuidas võiks antud ülesannet lahendada, siis kirjutagi nii, et ei oska antud ülesannet lahendada. Palume nende ülesannete lahendamisel kõrvalist abi mitte kasutada, kuna soovime analüüsida reaalselt olukorda. Antud ülesannete lahendamise eest kursusel hinnet ei saa!

Ülesanne 1

Kolmnurga mediaanid jaotavad kolmnurga kuueks mittelõikuvaks kolmnurgaks. Tõestage, et nende kolmnurkade pindalad on võrdsed. Ülesanne 2

Tööandja palkab töötaja üheks kuuks (20 tööpäeva) ja pakub töötajale palgaks 1. tööpäeva eest 1 senti, 2. tööpäeva eest 2 senti, 3. tööpäeva eest 4 senti, 4. tööpäeva eest 8 senti jne. Iga päev kasvab töötasu kaks korda. Leia valem, mille abil arvutada viimase (kahekümnenda päeva) tööpäeva palk. Lisaülesanne: leia valem, mille abil arvutada kogu kuu palk.

Ülesanne 3

Kaks töölist pidid koos tegema mingi töö. Koos töötades lõpetaks nad selle 12 tunniga. Kui üks tööline teeks algul poole tööst ja siis teine ülejäänud osa, siis kuluks töö lõpetamiseks 25 tundi. Mitme tunniga oleks lõpetanud selle töö kumbki tööline üksi töötades?

Ülesanne 4

Järgnevalt on toodud nimekiri erinevatest kuudest ning nende juurde käivad koodid:

*Jaanuar 7110

*Veebruar 8222

*Märts 5313

*Aprill 641

*Mai 3513

*Juuni 5610

*Juuli 5710

Milline on augustikuu kood?

Ülesanne 5

Inimene hakkab sõitma paadiga risti üle jõe. Paadi kiirus on 4 m/s. Jõe voolukiirus on 3 m/s. Jõe laius on 80 m. Kui pika tee läbis paat?" (siin oleks hea, kui lisaksid ka juurde enda tehtud joonise)

Ülesanne 6

Kui kaugele on põhimõtteliselt võimalik näha, st kui kaugel on horisont? (Midagi ees ei ole, nt vaatate merd) Maa raadius on ligikaudu 6400 km. (siin oleks samuti hea, kui lisad juurde endapoolse joonise)

9. Palun lisa siia täidetud tagasiside küsimustik (word-i fail), mis asub käesoleva mooduli juures.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina Anne-Mai Liigand

(sünnikuupäev:18.03.1993)

annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Loogika- ja tõestamisülesannete olulisus matemaatikast arusaamisel

mille juhendaja on Britt Kalam,

- 1.1.reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
- 1.2.üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus 18.05.2017