Anneli Kaasa

MAJANDUSTEADUSE MATEMAATILISED ALUSED

Tartu Ülikool
Majandusteaduskond
Rahvamajanduse instituut

Anneli Kaasa

MAJANDUSTEADUSE MATEMAATILISED ALUSED

TARTU ÜLIKOOLI
KIRJASTUS

Retsensent lektor Sander Hannus

Keeletoimetaja Leelo Jago

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

© Anneli Kaasa, 2002

ISBN 9985–56–686–6

Tartu Ülikooli Kirjastus
www.tyk.ut.ee

EESSÕNA

Majandusteadus kirjeldab ja analüüsib meid ümbritsevaid majandusprotsesse. Majandusmudelite püstitamisel võib kasutada nii keelelist kui ka matemaatilist loogikat. Et majandusteaduses on olulisel kohal inimene ja tema käitumine, siis kasutatakse sageli majandusnähtuste ja -protsesside verbaalset kirjeldamist. Samas võimaldavad matemaatilised meetodid kirjeldada majanduses toimuvat lühidalt ja täpselt. Majandusõpikutes kasutatakse rohkesti geomeetrilisi meetodeid, kuna nähtustevaheliste seoste graafiline kujutamine on ülevaatlik ja sageli kergemini mõistetav. Siiski jääb graafilisest kirjeldusest väheseks juba ainuüksi seetõttu, et kahemõõtmelises ruumis on võimalik kirjeldada nähtustevahelisi seoseid vaid kahe nähtuse korral. Majandusteaduses kohtab aga tihti juhtumeid, kus omavahel on seotud tunduvalt rohkem nähtusi. Selliseid seoseid on raske graafiliselt kujutada, nende kirjeldamist võimaldavad näiteks võrrandid.

Niisiis on matemaatiline majandusteadus üks võimalikest lähenemistest majandusteaduslikule analüüsile. Rõhutamist väärib, et matemaatiline majandusteadus ei ole majandusteaduse eraldi haru nagu välismajandus või pangandus. Matemaatilisi mudeleid kasutavad kõik majandusteaduse harud, sealhulgas nimetatud välismajandus ning pangandus.

Majandusteadusega lähemalt tutvudes ning õpikuid, raamatuid ja teadusartikleid lugedes selgub, et kasutatakse väga erinevaid matemaatilisi meetodeid: maatriksalgebrat, diferentsiaal- ja integraalarvutust, diferents- ja diferentsiaalvõrrandeid jne. Et mõista kirjutatut, tuleks omada elementaarseid teadmisi majandusteaduses kasutatavatest matemaatilistest meetoditest. Ka teaduslik uurimistöö põhineb enamasti teoreetilisel raamistikul, mis empiirilise analüüsi korral on kasulik formuleerida matemaatiliselt.

Käesolev õpik on abivahend kõigile, kel majandusteadusega tutvudes ja seda tundma õppides tekib vajadus oma matemaatilisi teadmisi taastada või täiendada. Kuigi õpik on esmajoones mõeldud abiks Tartu Ülikooli majandusteaduskonnas õpinguid alustavatele tudengitele samanimelise ainekursuse läbimisel, võivad siit abi saada ka vanemad tudengid ning teised asjasthuvitatud.

Õpiku eesmärk on anda esmane ettekujutus ja kogemus, milliseid matemaatilisi meetodeid ja kuidas majandusteoreetilistes mudelites kasutatakse. Iga meetodi juures on toodud vähemalt üks näide mikroökonoomikast, makroökonoomikast või ka finantsmatemaatikast. Näited viitavad konkreetse matemaatilise meetodi kasutusvõimalustele majandusteaduses ega pretendeeri vastava majandusmudeli täielikule analüüsile ja tõlgendamisele. Viimasega tegeleb majandusteooria, millega raamatu lugejal loodetavasti on õnnestunud või õnnestub tulevikus põhjalikumalt kokku puutuda.

Autor tänab kolleege, kes olid õpiku koostamisel asjalike märkustega abiks. Eriline tänu kuulub retsensent Sander Hannusele, kes käsikirja põhjalikult läbi töötas ning sellest hulga ebatäpsusi kõrvaldas.

Tartu, juuni 2002 Anneli Kaasa

SISUKORD

1. MATEMAATILISED MUDELID MAJANDUSTEADUSES

1.1. Mudeli väljendamise meetodid

Et majanduses toimuvat paremini kirjeldada, samuti leida vastuseid majandusteaduslikele probleemidele, on kasulik luua mudel. **Mudel** peaks võimalikult hästi kirjeldama reaalsust, olles samas sedavõrd lihtsustatud ja ülevaatlik, et temast oleks kasu järelduste tegemisel. Kõike majanduses toimuvat ühe mudeliga kirjeldada ei saa ja pole mõtetki, seepärast valitakse välja hetkel uurija arvates olulisemad seosed erinevate nähtuste vahel ja kirjeldatakse nähtuste konkreetse mudeli seisukohalt asjakohaseid omadusi.

Mudelit võib väljendada verbaalselt: sõnade ja lausetega. Lühidalt, kuid samas täpselt võimaldavad majanduses toimuvat kirjeldada matemaatilised sümbolid. Visuaalselt on aga kõige paremini mõistetav näitlik kirjeldus graafikute abil. Ei saa öelda, et üks väljendusviis on teisest parem, valik tuleks teha sõltuvalt eesmärgist: kas tahetakse panna mudel kirja edasiseks süvendatud empiiriliseks analüüsiks või lihtsalt tutvustada seda laiemale kuulajaskonnale. Esimesel juhul on sobivam matemaatiline, teisel juhul verbaalne või lihtne graafiline kirjeldus. Järgnevalt vaatlemegi erinevaid võimalusi, kasutades näitena **turutasakaalu mudelit** ehk nõudmise ja pakkumise mudelit.

Mudel põhineb kauba hinna ning turul müüdava ja ostetava kaubakoguse vahelistel seostel. On loogiliselt arusaadav, et mida odavam on mingi kaup, seda rohkem seda ostetakse ehk seda suurem on kauba nõudmine ja vastupidi. Seda seost nimetatakse nõudluseks. Samuti võib arvata, et mida kallimalt on mingit kaupa võimalik müüa, seda suurema koguse müügist ehk pakkumisest on tootjad huvitatud. Niisugust seost nimetatakse pakkumiseks. Turul tekib tasakaal, kui leitakse selline hind, mille korral nõutav kogus on võrdne pakutava kogusega. Seda hinda nimetatakse tasakaaluhinnaks ning kogust, millega sellise hinna juures kaubeldakse, tasakaalukoguseks. Nii võiks välja näha turutasakaalu mudeli **verbaalne kirjeldus**. Kuidas samu seoseid kirjeldada matemaatikakursusest tuntud meetoditega?

Eeldatavasti on tarbija iga kindla hinna korral nõus ostma kindla koguse kaupa. Niisiis vastab igale hinnale mingi nõutav kaubakogus. Seega moodustavad nõudluse hinna ja koguse väärtuste paarid. Teisisõnu, nõudlust võib vaadelda kui kahe muutuja — hinna ja nõutava kaubakoguse väärtuste paaride hulka. Loomulikult ei hõlma nõudlus kõiki võimalikke hinna ja kaubakoguse väärtuste paare, vaid ainult neid, mis vastavad kindlale reeglile hinna ja nõutava kaubakoguse omavahelise seose kohta. Seda reeglit nimetatakse nõudlusfunktsiooniks. Viimane kirjeldab nõutava kaubakoguse sõltuvust kauba hinnast. Kauba hinna ja nõutava kaubakoguse väärtuste paare on võimalik kujutada ka joonisel koordinaatteljestikus, kus ühel teljel on hind, teisel kogus. Kui nõudlusfunktsioonile vastavad väärtuste paarid märkida teljestikku, siis saadakse erinevatele väärtuste paaridele vastavaid punkte ühendades nõudluskõver, mis on ka nõudlusfunktsiooni graafikuks. Analoogiliselt on võimalik kirjeldada ka pakkumist nii hulkade meetodil, funktsioonide meetodil kui ka graafilisel meetodil.

Vaatleme siinkohal näidet ühe hüpoteetilise kauba turu kirjeldamise võimalustest.

Alustame **funktsioonide** meetodist. Kirjeldagu kauba nõudlust funktsioon

$$q^D = 24 - 3p$$

ja kauba pakkumist funktsioon

$$q^S = -4 + 4p,$$

kus tähistused on järgmised:

q^D — nõutav kaubakogus, q ingliskeelsest sõnast *quantity* ('kogus') ja D ingliskeelsest sõnast *demand* ('nõudlus');

q^S — pakutav kaubakogus, S ingliskeelsest sõnast *supply* ('pakkumine');

p — hind, ingliskeelsest sõnast *price* ('hind').

Nagu näha, vastavad seosed verbaalselt kirjeldatule: hinna suurenedes nõutav kogus väheneb ja pakutav kogus suureneb.

Turul tekib tasakaal, kui nõutav kogus võrdub pakutava kogusega, tasakaalutingimus ehk mudeli kolmas võrrand on seega:

$$q^D = q^S.$$

Nüüd, kui on teada reeglid, mis määravad erinevad nõudlusele ja pakkumisele vastavad hinna ja kaubakoguste väärtuste paarid, saame samad seosed **hulkade** meetodil kirja panna näiteks nii:

$$D = \{(p, q^D) \mid 3p + q^D = 24\},$$
$$S = \{(p, q^S) \mid 4p - q^S = 4\}.$$

Nõudlus D on selline hinna ja nõutava kaubakoguse väärtuste komplektide (järjestatud arvupaaride) hulk, mis vastab reeglile $3p + q^D = 24$ (samane nõudlusfunktsiooniga väljendatuga). Pakkumine S on vastavalt selline hinna ja pakutavate kaubakoguse väärtuste komplektide hulk, mis vastab reeglile $4p - q^S = 4$ (samane pakkumisfunktsiooniga väljendatuga).

Hulkade meetodil kirjeldatuna on tasakaal selline hinna ja koguse väärtuste komplekt E (*equilibrium*), mis kuulub samal ajal hulkadesse D ja S ehk hulkade D ja S ühisosa:

$$E = D \cap S.$$

Nüüd võib nõutavate ja pakutavate kaubakoguste seoseid hinnaga kujutada ka **graafiliselt**. Kuigi seni eristasime pakutavat ja nõutavat kaubakogust, kujutatakse tihti mõlemat samal koguseteljel, et hiljem leida nõudluse ja pakkumise tasakaal. Seega kujutatakse nii nõudlus- kui ka pakkumiskõverat samas kahemõõtmelises koordinaatteljestikus.

Nõudlus- ja pakkumiskõverate joonisel kujutamise aluseks on nõudlus- ja pakkumisfunktsioonid. Kuna hetkel on tegu lineaarsete funktsioonidega, siis on tegu kõvera erijuhu — sirgega — ja piisab kahe punkti (nt telgedega lõikumispunktide) määramisest. Teine, majandusteadlaste poolt sagedamini kasutatav võimalus on kasutada graafikute kujutamisel algordinaati ja tõusu.

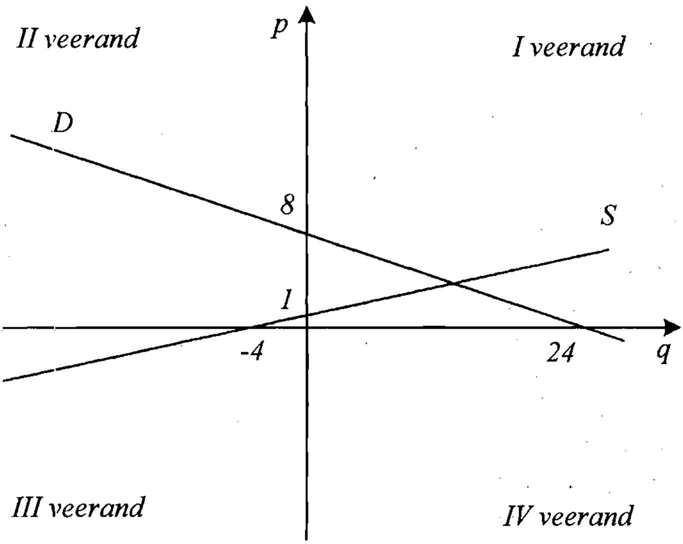
Matemaatikas kujutatakse enamasti funktsiooni väärtust ehk sõltuvat muutujat y vertikaalteljel ja argumenti ehk sõltumatut muutujat x horisontaalteljel. Seega tuleks kauba kogust kujutada vertikaalteljel ja hinda horisontaalteljel. Siiski ei ole see nii: majandusteooria tavade kohaselt kujutatakse hinda vertikaalteljel ja kogust horisontaalteljel. Kui kasutada telglõikude meetodit, ei kujuta telgede vahetus endast probleemi. Küll aga tuleks algordinaati ja tõusu kasutades kindlasti aluseks võtta just nõudlus- ja pakkumisfunktsioonide pöördfunktsioonid.

Märkus. Kui vertikaalteljel on hind ja horisontaalteljel kogus, kujutatakse sellel joonisel pöördnõudluskõverat ja pöördpakkumiskõverat. Siiski nimetatakse lühiduse huvides enamasti ka selliseid graafikuid nõudlus- ja pakkumiskõveraks.

Avaldades meie näites mõlemast funktsioonist p, saame:

$$p = 8 - \frac{1}{3}q^D \text{ ja } p = 1 + \frac{1}{4}q^S .$$

Kui hind on 0, siis nõutav kogus on $q^D = 24 - 3 \cdot 0 = 24$. Et nõutav kogus oleks 0, peab hind olema $p = 8 - \frac{1}{3} \cdot 0 = 8$. Nõudluskõver lõikab seega hinnatelge punktis $(0;8)$ ja kogusetelge punktis $(24;0)$. Analoogiliselt saame pakkumisfunktsiooni lõikepunktideks telgedega vastavalt $(0;1)$ ja $(-4;0)$. Kujutame olukorda joonisel 1.1.

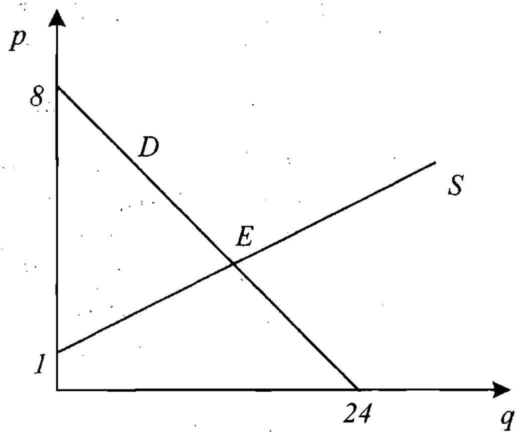


Joonis 1.1. Nõudlus- ja pakkumiskõver

Raske on ette kujutada negatiivset hinda või negatiivset kaubakogust. Järelikult pole negatiivseid väärtusi mõtet ka joonisel kujutada. Seepärast **piirdutakse** majandusteaduses enamasti jooniste korral vaid koordinaatteljestiku **esimese veerandiga**, kus mõlemad muutujad on mittenegatiivsed. Vahemärkusena olgu öeldud, et enamasti vaid mittenegatiivseid väärtusi omandavad veel paljud majanduslikud muutujad, näiteks intressimäär, valuutakurss, töötajate arv. Samas on teiste muutujate korral võimalikud ka negatiivsed väärtused: negatiivse kasumi korral on tegu kahjumiga, negatiivse tulu korral kuluga, negatiivse kasvumäära korral langusega jne.

Sobiv skaala telgede jaoks valitakse sõltuvalt konkreetsest mudelist ja selles esinevatest arvulistest väärtustest nii, et joonis oleks kompaktne, kuid samas väljendaks ka vajalikke proportsioone. Kuna telgedel kujutatakse tihti erineva mõõtühikuga suurusi, ei ole tavaliselt vajalik ja enamasti ka soovitatav ühesuguste skaalade kasutamine mõlemal teljel.

Meie näidet kirjeldav tavapärane joonis on kujutatud joonisel 1.2.



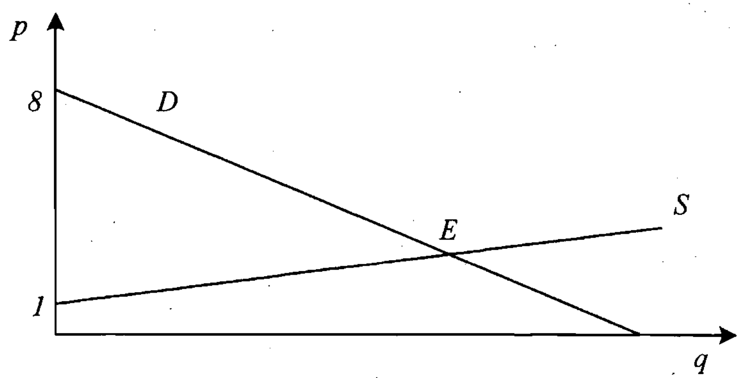
Joonis 1.2. Nõudlus- ja pakkumiskõvera tavapärane kujutamine

Tasakaalupunkt asub joonisel nõudlus- ja pakkumisfunktsioonide lõikumispunktis *E*.

Majandusnähtuste graafilisel kirjeldamisel kasutatakse tihti n-ö **skitseerimist** — joonis tehakse nii täpne, kui ülesande või teostatava analüüsi jaoks vajalik. Mõnikord näiteks on oluline vaid see, milline kahest joonisel kujutatud sirgest on järsem. Sellisel juhul on hea kasutada algordinaadi ja tõusu abil sirge joonistamist. Uurime funktsioone $p = 8 - \frac{1}{3}q^D$ ja $p = 1 + \frac{1}{4}q^S$. Esmalt määrame algordinaadid: nõudluse pöördfunktsiooni algordinaadiks on 8 ning pakkumise pöördfunktsioonil 1. Seejärel võrdleme tõuse: nõudluse pöördfunktsiooni tõus on $-\frac{1}{3}$ ja pakkumise pöördfunktsiooni tõus $\frac{1}{4}$.

Sirge tõus näitab kas ja kui kiiresti horisontaalteljel oleva muutuja väärtuse suurenedes vertikaalteljel oleva muutuja väärtus suureneb või väheneb. Antud juhul on nõudluskõver langev (negatiivne tõus) ja pakkumiskõver tõusev (positiivne tõus). Võrreldes tõusude absoluutväärtusi: $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, võime tõdeda, et antud juhul langeb nõudluskõver kiiremini, kui pakkumiskõver tõuseb — ehk nõudluskõver on järsem pakkumiskõverast, nagu on näha ka joonisel 1.2. Siinkohal olgu märgitud, et kui võrrelda nõudlus- ja pakkumisfunktsioone endid, mitte pöördfunktsioone, siis on tulemus vastupidine: $3 < 4$. Just seepärast on oluline pöörata tähelepanu sellele, milline muutuja millisel teljel on kujutatud.

Teades algordinaate ja tõusude suhet, võime skitseerida ka joonise 1.3, mis kirjeldab eelmisega sama olukorda — kuigi skaalad on muutunud, on nõudluskõver endiselt pakkumiskõverast järsem.



Joonis 1.3. Nõudlus- ja pakkumiskõver teiste skaalade korral

1.2. Matemaatiliste mudelite koostisosad

Matemaatilistes mudelites on võrrandite abil üksteisega seotud erinevad muutujad. **Muutuja** ehk muutuv suurus omandab mingi majandusnähtuse kirjeldamisel erinevaid väärtusi (nt erinevate inimeste, ajahetkede, kohtade vms korral). Seetõttu tähistatakse üldjuhul seda mingi sümboliga. Tavapärased muutujad majandusteaduses on näiteks kauba hind, kauba kogus, tulu, kulu, kasum, tarbimine, investeeringud, eksport, import, kogutoodang jne. Igal muutujal on oma väljakujunenud traditsiooniline sümbol, nii näiteks tähistatakse hinda tähega p ja kauba kogust tähega q. Soovi korral võib kasutada ka teisi tähistusi, sel juhul tuleks aga tähistus kindlasti enne defineerida.

Konkreetses mudelis jagunevad muutujad sõltuva(te)ks ja sõltumatu(te)ks. Nii näiteks turutasakaalu mudeli korral sõltub nõutav kauba kogus kauba hinnast. Erinevates mudelites võib sama muutuja olla kord sõltuv, kord sõltumatu — nii näiteks võib mõnes teises mudelis hind olla sõltuvaks muutujaks.

Muutujad esinevad mudelites koos **parameetritega**. Kui muutuja on empiirilise analüüsi korral mõõdetav suurus, siis parameetrid aitavad kirjeldada muutujatevahelisi seoseid. Parameeter on suurus, mis kirjeldatava objekti, nähtuse või protsessi korral ei muutu, tal on kindel arvuline väärtus. Erinevate objektide puhul võib parameeter omandada erinevaid väärtusi, seetõttu, kui konkreetne väärtus pole teada või on tegu üldistusega, tähistatakse tihti ka parameetreid mingite sümbolitega (nt *a*, *b*, *c* või α, β, γ). Näiteks on proportsioon, kui suure osa oma sissetulekust kulutab inimene tarbimisele ühe inimese jaoks sama, teise jaoks omandab aga mõne teise väärtuse.

Juba vaadeldud nõudluse ja pakkumise mudel näeb üldkujul välja selline:

$$q^S = -a + bp,$$
$$q^D = c - dp,$$
$$q^D = q^S,$$

kus $a, b, c, d > 0$.

Siin on muutujateks q^D, q^S ja p ning parameetriteks *a*, *b*, *c* ja *d*.

Kui üks muutuja (sõltuv muutuja) muutub reeglipäraselt teis(t)e muutuja(te) väärtus(t)e muutudes, on see seos kirjeldatav **funktsiooniga**. Funktsioon on reegel, mis määrab ühe muutuja konkreetsele väärtusele vastava teise muutuja väärtuse. Funktsiooni võib tähistada sümbolite abil järgmiselt:

$$y = f(x),$$

kus *f* tähistab muutuja *y* funktsionaalset sõltuvust muutujast *x*. Majandusteaduses kasutatakse funktsionaalse sõltuvuse tähisena tihti sama sümbolit, mis tähistab sõltuvat muutujat. Nii võib näiteks kulufunktsiooni, kus tootmiskulud C sõltuvad toodetavast kaubakogusest q:

$$C = f(q),$$

panna kirja ka nii:

$$C = C(q).$$

Analoogiliselt võib pakkumisfunktsioon olla kirjutatud: $q^S = q^S(p)$ ja nõudlusfunktsioon: $q^D = q^D(p)$.

Võrrand määrab kahel pool võrdusmärki olevate matemaatiliste avaldiste (sisaldavad vähemalt ühte muutujat) võrduse. Matemaatilises majandusteaduses väljendataksegi seoseid muutujate vahel enamasti võrranditega. Majandusteaduses tuntakse erinevaid võrrandeid.

Samasusvõrrand ehk identsusvõrrand näitab mõlemal pool võrdusmärki asuvate avaldiste samasust, identsust, võrdust. Need on enamasti defineerivad võrrandid. Näiteks kasum on võrdne tulu ja kulu vahega:

$$\pi = R - C,$$

kus:

π — kasum (*profit*),
R — tulu (*revenue*),
C — kulu (*cost*).

Tihti kasutatakse siin tavalise võrdusmärgi asemel samasusmärki: $\pi \equiv R - C$.

Käitumisvõrrand kirjeldab ühe muutuja sõltuvust teisest muutujast, näiteks juba tuttavad nõudlus- ja pakkumisvõrrandid, mis kirjeldavad tarbijate ja ettevõtete käitumist, aga ka näiteks majapidamiste tarbimise C (*consumption*) sõltuvus nende sissetulekust ehk kogutulust Y (*income*):

$$C = a + bY, \quad 0 \le b \le 1.$$

Kolmandaks võrranditüübiks on **tasakaaluvõrrand**. Tasakaaluvõrrandid on tasakaalu saavutamiseks vajalikku seost kirjeldavad võrrandid ehk tasakaalutingimused. Rääkides turu tasakaalumudelist, on tasakaalutingimuseks nõutava ja pakutava koguse võrdus: $q^S = q^D$. Näiteks võib tuua ka investeeringute ja säästude tasakaalu makroökonoomikast: $I = S$.

Sageli on samasusvõrrand reegel ühe muutuja arvutamiseks teiste kaudu, mis kehtib alati. Käitumisvõrrand aga kirjeldab seost, mille puhul võib empiirilistes uuringutes esineda kõrvalekaldumisi. Nii arvutatakse kasumit alati ühtemoodi, aga inimeste tarbimine ei sõltu sissetulekust täpselt range reegli järgi. Tasakaaluvõrrandid aga kirjeldavad hoopis soovitud seost, mis kehtib enamasti vaid muutujate konkreetsete väärtuste juures.

1.3. Matemaatiliste mudelite analüüs

Majandusmudeleid ei panda kirja mitte üksnes olukorra — majandusnähtuste, -seoste või -protsesside — kirjeldamiseks, vaid püütakse mudeleid kasutades olukorda **analüüsida**, teha järeldusi ning lõpuks pakkuda välja ka majanduspoliitilisi otsuseid. Siinkohal ilmnebki matemaatilise mudeli eelis verbaalse mudeli ees: matemaatiliselt kirja pandud mudelit saab matemaatiliste meetoditega analüüsida. Enne kui käsitleme raamatu järgmistes peatükkides lähemalt kasutatavamaid matemaatilisi meetodeid, vaatleme, kuidas juba eespool kirjeldatud turutasakaalu mudelist on lihtsate võtetega võimalik teha olulisi järeldusi.

Turutasakaalu mudeli analüüsimisel on esmane ülesanne leida tasakaalulahend ehk selline hind, mille korral tarbijad soovivad osta sama palju kaupa, kui tootjad soovivad selle hinna juures müüa.

Tasakaalutingimuseks on nõutava ja pakutava kaubakoguse võrdus:

$$q^S = q^D.$$

Et mõlemad sõltuvad kauba hinnast:

$$q^D = 24 - 3p \quad \text{ja} \quad q^S = -4 + 4p,$$

siis asendades tasakaaluvõrrandis nõutava ja pakutava koguse vastavate funktsioonidega hinnast, saame võrrandi, kus on vaid üks muutuja — hind:

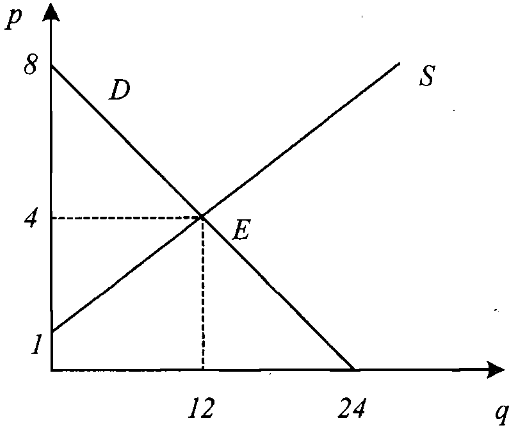
$$-4 + 4p = 24 - 3p.$$

Lahendades võrrandi, leiame tasakaaluhinna, ja asendades selle ükskõik kumba esialgsetest võrranditest, saame tasakaalukoguse. Sisuliselt tuleb lahendada kolme muutuja ja kolme võrrandiga võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} q^D = 24 - 3p, \\ q^S = -4 + 4p, \\ q^D = q^S. \end{cases}$$

Antud juhul on tasakaaluhinnaks $p^* = 4$ ja tasakaalukoguseks $q^* = 12$. Tärn (*) tähistab majandusteaduses sageli tasakaalu- või optimaalset väärtust.

Kujutame tasakaalupunkti ka joonisel 1.4.



Joonis 1.4. Nõudluse ja pakkumise tasakaal

Kui lihtne mudel on olemas, lisatakse vajadusel sellesse uusi tegureid, et uurida nende mõju kirjeldatud majandusnähtusele. Nii näiteks on võimalik uurida, milline on aktsiisimaksu kehtestamise mõju turutasakaalule. Kehtestatagu vaadeldavale kaubale aktsiisimaks mingis kindlas suuruses T ühelt kaubaühikult. T on siin parameeter, mille väärtust me hetkel ei tea.

Nüüd jaguneb tarbija makstav hind kaheks: ühe osa (T) saab valitsus maksutuluna endale, ülejäänu saab tootja. Ehk teisiti: müügihind on T võrra suurem hinnast, mille saab kätte tootja. Paneme selle kirja võrrandina (tegu on samasusvõrrandiga):

$$p_T^D = p_T^S + T,$$

kus:

p_T^S — hind tootja ehk pakkuja jaoks pärast aktsiisimaksu kehtestamist,

p_T^D — hind tarbija ehk nõudja jaoks pärast aktsiisimaksu kehtestamist.

Tarbija ja tootja reageerivad kauba hinnale ikka endiselt, seega on tarbitava koguse (pärast maksu kehtestamist q_T^D) sõltuvus hinnast (nõudja jaoks p_T^D) sama: $q_T^D = 24 - 3p_T^D$. Samuti on pakutava koguse (q_T^S) sõltuvus hinnast (pakkuja jaoks p_T^S) endine: $q_T^S = -4 + 4p_T^S$.

Täiendatud mudelis on seega juba neli muutujat (T on parameeter) ja neli võrrandit, mis moodustavad süsteemi:

$$\begin{cases} q_T^D = 24 - 3p_T^D, \\ q_T^S = -4 + 4p_T^S, \\ q_T^D = q_T^S, \\ p_T^D = p_T^S + T. \end{cases}$$

Süsteemi võib lahendada, asendades esmalt nõudja hinna avaldisega pakkuja hinnast ja maksust. Nii saame süsteemi, kus muutujateks on nõutav ja pakutav kogus ning hind tootja jaoks:

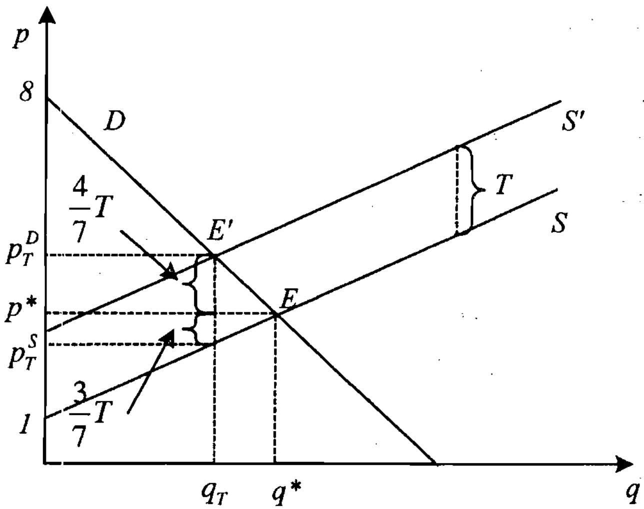
$$\begin{cases} q_T^D = 24 - 3\left(p_T^S + T\right), \\ q_T^S = -4 + 4p_T^S, \\ q_T^D = q_T^S. \end{cases}$$

Edasi on lahendus analoogiline esialgse mudeli tasakaalu leidmisele. Lahendades süsteemi, saame tulemuseks:

$$\begin{cases} q_T^D = q_T^S = 12 - \dfrac{12}{7}T, \\ p_T^D = 4 + \dfrac{4}{7}T, \\ p_T^S = 4 - \dfrac{3}{7}T. \end{cases}$$

Siit saab järeldada, et kuna T on positiivne suurus, siis sõltumata aktsiisimaksu suurusest viib aktsiisimaksu kehtestamine alla turu tasakaalukoguse. Turuhind ehk hind tarbijate jaoks tõuseb, tootjate poolt kättesaadav hind langeb. Maksukoormus jaguneb tarbija ja tootja vahel: tarbija hinnale lisandub $\frac{4}{7}$ maksust ja tootja peab arvestama $\frac{3}{7}$ maksusumma võrra väiksema hinnaga.

Et tootja peab nüüd iga koguse korral küsima maksu võrra kõrgemat hinda, siis nihkub joonisel pakkumiskõver üles aktsiisimaksu T võrra (vt joonist 1.5).



Joonis 1.5. Aktsiisimaksu mõju turutasakaalule

Uue pakkumiskõvera ja nõudluskõvera lõikepunkt annab uue tasakaalukoguse ja uue turuhinna ehk tarbija hinna. Tootja hind on sellest maksu võrra väiksem. Et kahe pakkumiskõvera vertikaalne vahe on maksu suurus, siis leiame uue hinna tootja jaoks esialgse pakkumiskõvera ja nõudluskõvera lõikepunktist. See, kuidas esialgsele hinnatasemele $p*$ vastav joon jaotab kaheks vertikaalse lõigu kahe mainitud lõikepunkti vahel, näitab, kuidas jaotub maksukoormus tootja ja tarbija vahel. Vahe $p_T^D - p*$ annab hinnamuutuse tarbija jaoks, vahe $p_T^S - p*$ hinnamuutuse tootja jaoks. Antud juhul, nagu ka jooniselt näha, maksab suurema osa maksust tarbija.

Joonist analüüsides võib märgata, et kui pakkumiskõver muutuks laugjamaks või nõudluskõver järsemaks, hakkaks tarbija maksma suuremat osa maksukoormusest. Kui pakkumiskõver oleks horisontaalne sirge, maksaks kogu maksu tarbija. Seega aktsiisimaksu korral sõltub maksukoormuse jaotumine tarbija ja tootja vahel nõudlus- ja pakkumiskõverate tõusudest.

Sellist analüüsi, kus püütakse leida muutujate väärtusi süsteemi tasakaaluseisundi korral, nimetatakse **tasakaaluanalüüsiks** ehk **staatiliseks analüüsiks**. Staatilise analüüsi kõrval kasutatakse majandusteaduses veel võrdlev-staatilist ja dünaamilist analüüsi, nendest tuleb pikemalt juttu eraldi peatükkides.

2. DIFERENTSEERIMINE

2.1. Tuletis, diferents ja diferentsiaal

Majandusteaduses tuleb sageli kokku puutuda muutuvate nähtustega — majandusteaduses analüüsitav nähtuste ja seoste kompleks on pidevas muutumises. Muutumisprotsesside matemaatilisel kirjeldamisel ja analüüsimisel kasutatakse selliseid mõisteid nagu diferents, diferentsiaal ja tuletis.

Näitaja väärtuse **muutust** ehk **diferentsi** tähistatakse kreeka tähega Δ. Muutuja x diferents ajaühikus on leitav, lahutades muutuja väärtusest ajahetkel t muutuja väärtuse eelmisel ajahetkel $t-1$:

$$\Delta x = x_t - x_{t-1}.$$

Analoogiliselt avaldub ka muutuja y diferents ajaühikus:

$$\Delta y = y_t - y_{t-1}.$$

Majandusteaduses analüüsitakse tihti ühe muutuja muutumise mõju teisele muutujale. Näiteks soovitakse teada, milline on nõutava koguse muutus, kui hind tõuseb mingi summa võrra; või uuritakse, mis juhtub tootmiskuludega, kui toodetakse üks ühik toodangut rohkem. Järgnevalt vaatlemegi, miks ja kuidas on sellistel puhkudel mõistlik kasutada tuletist.

Olgu muutujad x ja y omavahel funktsionaalses sõltuvuses: $y = f(x)$. Argumendi x muutumise mõju funktsiooni väärtusele y väljendab funktsiooni väärtuse muutuse ja argumendi muutuse jagatis: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. See näitab, milline on y muutus, kui x suureneb ühe ühiku võrra ehk kui $\Delta x = 1$ (ehk y keskmine muutus). Kui Δx on teada, tuleks Δy leidmiseks arvutada y väärtus enne ja pärast muutumist vastavalt funktsiooni $y = f(x)$ antud reeglile ning seejärel leida vahe: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Keerulisemate funktsioonide puhul võib selline protseduur osutuda küllalt tülikaks. Pealegi on suhteliselt väikeste muutuste korral paljud liidetavad mainitud arvutustes nullilähedased.

Suhteliselt väikeste muutuste korral on suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ligikaudseks hindamiseks otstarbekas leida jagatise $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ piirväärtus Δx lähenemisel nullile:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Sellist piirväärtust nimetataksegi **tuletiseks**. Tuletise matemaatilisi tähistusi on palju, tuntumad neist on y', $f'(x)$ ja $\frac{dy}{dx}$ (viimast tähistust tuleks siinkohal vaadelda ühtse sümbolina). Niisiis:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Esimesed kaks tuletise tähistust sisaldavad esialgse funktsiooni tähistust — viidates, et tuletisfunktsioon on (kindlate reeglite kohaselt, millest pisut hiljem) leitud esialgse funktsiooni $y = f(x)$ alusel. Viimane tähistus aga viitab sellele, et tuletis $\frac{dy}{dx}$ annab **ligikaudse hinnangu** absoluutsete muutude jagatisele $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (mida väiksem on Δx, seda täpsem on hinnang). Seega hindab tuletis ligikaudu, milline funktsiooni väärtuse muutus Δy

kaasneb argumendi ühikulise kasvuga ($\Delta x = 1$). Niisiis, leitud tuletise väärtuse tõlgendamisel tuleks teada, et **tuletis näitab**, millises suunas ja millises ulatuses muutub funktsiooni väärtus argumendi ühikulise kasvu korral.

Tuletise **geomeetriline tõlgendus** on funktsiooni graafiku **puutuja tõus** (vt ka joonist 2.1). Leides tuletise väärtuse konkreetses punktis, saame teada funktsiooni graafiku puutuja tõusu selles punktis. Samal ajal on see ka funktsiooni graafiku tõusuks selles punktis. Nii on tuletise arvutamisest abi funktsiooni graafiku skitseerimisel. Sellest tuleb täpsemalt juttu järgmistes peatükkides.

Kõigi funktsioonide korral pole tuletist võimalik leida. Et tuletise kontseptsioon eeldab väga väikseid nullilähedasi muutusi, siis peab olema võimalik määrata mis tahes väikesi muutusi. Selleks peab funktsioon olema **pidev**. Lihtsalt öeldes on funktsioon pidev, kui funktsiooni väärtus on määratud mis tahes argumendi väärtuse korral. Lisaks sellele ei tohiks funktsioonil olla katkevuspunkte (funktsiooni graafik ei tohiks katkeda) — katkevuspunktides funktsioonil tuletist ei eksisteeri. Et funktsioon oleks **diferentseeruv** (et funktsioonist oleks võimalik tuletist võtta), peab funktsioon olema pidev, kuid pidevus ei ole piisav tingimus. Nimelt ei eksisteeri tuletist ka funktsiooni graafiku murdepunktides. Niisiis peab diferentseeruv funktsioon olema pidev ja sile funktsioon.

Tuletise võtmise reeglid on üldtuntud ja kättesaadaval matemaatikaõpikutes, olgu siinkohal toodud majanduses enim kasutatavate funktsioonide tuletised:

$$c' = const' = 0,$$

$$\left(a x^b\right)' = ab\, x^{b-1},$$

$$\left(e^x\right)' = e^x,$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e},$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Funktsioonide summa, vahe, korrutise ja jagatise korral võib kasutada järgmisi reegleid. Olgu funktsioonid u ja v mingid funktsioonid muutujast x: $u = f(x)$ ja $v = g(x)$.

Kui $y = u \pm v$, siis $y' = u' \pm v'$;
kui $y = uv$, siis $y' = u'v + uv'$;
kui $y = \frac{u}{v}$, siis $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Kui tegu on liitfunktsiooniga ehk funktsiooniga funktsioonist või funktsioonidest, siis tuleks kasutada nn ahela reeglit. Olgu $y = f(u)$, $u = u(v)$ ja $v = v(x)$.

Kui $y = f(u(v(x)))$, siis $y'(x) = y'(u)\,u'(v)\,v'(x)$.

Mõnikord on vaja leida ka pöördfunktsiooni tuletis. Selleks ei pea alati leidma pöördfunktsiooni ennast, vaid piisab funktsiooni tuletise pöördväärtuse leidmisest:

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}.$$

Teist järku tuletise ehk teise tuletise leidmiseks võetakse tuletisest veel kord tuletis, **kõrgemat järku tuletiste** korral diferentseeritakse funktsiooni nii mitu korda, kui palju nõuab tuletise järk.

Teist järku tuletise tähistused on:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Kõrgemat järku tuletisi tähistatakse analoogiliselt, kuid alates 4. või 5. järku tuletisest asendatakse ülakriipsud sulgudesse kirjutatud tuletise järguga, näiteks $y^{(5)} = f^{(5)}(x) = \frac{d^5 y}{dx^5}$.

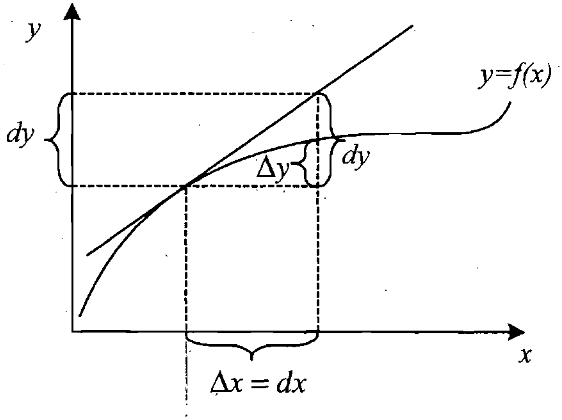
Tuletisega seondub ka diferentsiaali mõiste. Kuigi tuletise tähistust $\frac{dy}{dx}$ võib vaadelda ühtse sümbolina, ei ole ka vale öelda, et tuletis võrdub dy ja dx jagatisega. Suurusi dy ja dx nimetatakse matemaatikas vastavalt muutuja y ja muutuja x **diferentsiaalideks**. Argumendi korral on diferentsiaal võrdne muutusega: $dx = \Delta x$. Funktsiooni väärtuse diferentsiaal on aga ligikaudne hinnang funktsiooni väärtuse muutusele Δy mingi argumendi muutuse Δx korral: $dy \approx \Delta y$ (vt ka joonist 2.1). Jooniselt näeme, et mida väiksem on argumendi muutus, seda vähem erinevad funktsiooni väärtuse muutus ja funktsiooni diferentsiaal. Hinnang funktsiooni väärtuse muutumisele ehk funktsiooni diferentsiaal leitakse, korrutades funktsiooni tuletise (ehk funktsiooni väärtuse ligikaudse muutuse üheühikulise argumendi muutuse korral) argumendi muutusega $dx = \Delta x$:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Olgu märgitud, et tähistades tuletise teisiti ja arvestades, et $dx = \Delta x$, võime kirjutada:

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx,$$

seega on toodud valem tõepoolest kehtiv.



Joonis 2.1. Tuletise ja diferentsiaali geomeetriline tõlgendus

Mida väiksem muutus $dx = \Delta x$ argumendile anda, seda täpsemalt hindab diferentsiaal dy tegelikku muutust funktsiooni väärtuses Δy. Seepärast on diferentsiaali meetodit arvutustes mõttekas kasutada suhteliselt väikeste argumendi muutuste korral. Siinjuures tasub märkida, et joonisel 2.1 on kujutatud suhteliselt suuri muutusi vaid seepärast, et tuleks paremini esile diferentsiaali ja diferentsi ehk muutuse erinevus.

Näiteks olgu tegu funktsiooniga $y = 3x^3 + 4x^2 - 10$ ning olgu mingil hetkel $x = 1$ ja $\Delta x = 0{,}02$. Leiame hinnangu funktsiooni väärtuse muutusele Δy:

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x = (9x^2 + 8x)\Delta x = (9 \cdot 1 + 8 \cdot 1)0{,}02 = 0{,}34\,.$$

2.2. Tuletise kasutamine

Tihti kasutatakse majandusteaduses **marginaal- ehk piirnäitajaid**. Piirnäitaja kirjeldab ühe (sõltuva) muutuja muutust teise (sõltumatu) muutuja ühikulise suurenemise puhul. Nii näiteks on piirkulu kulu, mis lisandub, kui toodetakse lisaks üks ühik kaupa. Analoogiliselt: piirtulu on tulu, mis saadakse lisaks ühe täiendava kaubaühiku müümisel.

Mingit sõltuva muutuja ehk funktsiooni väärtuse sõltuvust sõltumatust muutujast ehk argumendist — $y = f(x)$ — nimetatakse sellisel juhul ka **kogufunktsiooniks** ehk **lähtefunktsiooniks**. Kui kogufunktsioon on lineaarne, siis argumendi suurenedes ühiku võrra muutub funktsiooni väärtus alati mingi konstantse suuruse võrra. Näiteks kui kogukulufunktsioon on lineaarne, siis on toodangumahu suurenedes lisanduv kulu pidevalt ühesugune. Keerulisemate kogufunktsioonide korral sõltub aga lisanduv funktsiooni väärtus mitte ainult argumendi väärtuse muutusest Δx, vaid ka argumendi x väärtusest endast (nt ühe kaubaühiku juurdetootmisel lisanduv kulu sõltub parasjagu toodetavast kaubakogusest). Seega — ka piirnäitaja on funktsioon näitajat ennast mõjutavast muutujast. Seda funktsiooni nimetatakse piirfunktsiooniks.

Piirfunktsiooniks nimetatakse sellist funktsiooni $y = f(x)$ argumendist sõltuvat funktsiooni, mis kirjeldab funktsiooni väärtuse muutuse (argumendi ühikulise kasvu korral) sõltuvust argumendi väärtusest. Viimast aga kirjeldabki kogufunktsiooni tuletis. Seega on piirfunktsioon leitav kogufunktsiooni **tuletisena**.

Piirnäitajat tähistatakse tihti sama sümboliga, millega näitajat ennast, lisades selle ette M tähistamaks marginaalsust. Nii näiteks, võttes tuletise tulufunktsioonist $R = R(q)$, saadakse piirtulu MR, võttes aga tuletise kasulikkusfunktsioonist $u = u(q)$ (u – *utility*), piirkasulikkus MU. Seega võib üldistades öelda, et kui kogufunktsiooniks on $y = f(x)$, siis piirfunktsiooniks on

$MY = y'(x)$.

Näiteks piirkulufunktsiooni leidmiseks võetakse tuletis kulufunktsioonist $C = C(q)$:

$$MC = C'(q),$$

kus MC tähistab piirkulu (*marginal cost*).

Kui tegu on kulufunktsiooniga $C = 3q^3 - 2q - 5$, siis piirkulufunktsioon on $MC = C'(q) = 9q^2 - 2$.

Illustreerimaks kogufunktsiooni ja piirfunktsiooni seoseid ning näitamaks, et tuletisest on kasu ka erinevate majandusteaduses ettetulevate funktsioonide **graafikute skitseerimisel**, vaatleme siinkohal üht näidet.

Graafikute skitseerimisel lähtutakse teadmisest, et piirkonnas, kus funktsiooni tuletis on positiivne, on funktsioon kasvav, negatiivse tuletisega piirkonnas aga kahanev. Seetõttu võib öelda, et **piirnäitaja kirjeldab funktsiooni kasvu** (kui kasv on negatiivne, on tegu kahaneva funktsiooniga). Kui piirfunktsiooni väärtus on positiivne (nt kaubaühiku lisandudes lisandub ka tulu), on tegu kasvava kogufunktsiooniga, negatiivse piirfunktsiooni väärtuse korral kahaneva funktsiooniga. Mida suurem on piirfunktsiooni väärtus, seda kiiremini funktsiooni väärtus selles kohas kasvab.

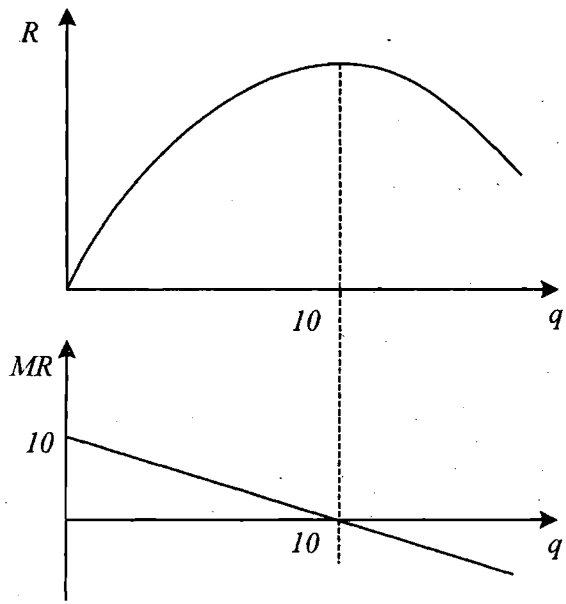
Vaatleme näiteks tulufunktsiooni, kus ettevõtte müügitulu sõltub müüdavast kaubakogusest. Ettevõtte tulu on võrdne müüdud kaubakoguse ja selle kauba hinna korrutisega: $R = q\,p$. Kuna aga ettevõte peab arvestama tarbijate nõudlusega, õnnestub tal iga hinna juures maha müüa mingi kindel kaubakogus ehk müüdud kaubakogus ja hind on teineteisest sõltuvuses. Olgu selleks sõltuvuseks $q = 20 - 2p$.

Et saada tulufunktsiooni, mis sõltuks ainult kogusest, asendame hinna ja koguse korrutises hinna nõudluse pöördfunktsiooniga $p = 10 - 0{,}5q$. Sellisel juhul:

$$R = q(10 - 0{,}5q) = 10q - 0{,}5q^2.$$

Piirtulu on siis:

$$MR = R'(q) = 10 - q.$$



Joonis 2.2. Tulu- ja piirtulufunktsiooni graafikud

Piirtulu on positiivne, kui $MR = 10 - q > 0$ ehk kui $q < 10$. Kui $q > 10$, on piirtulu negatiivne. Seega kasvab tulufunktsioon kuni koguseni $q = 10$, mis on maksimumpunktiks, edasi aga hakkab langema. Teades, et tulufunktsioon on ruutfunktsioon, mille graafikuks on parabool, võime skitseerida tulu- ning piirtulu-funktsioonid (vt joonist 2.2). Et tulufunktsioonis sisaldavad kõik liikmed muutujat, algab graafik telgede alguspunktist (kui kogus on null, on tulu null). Kuna teine tuletis tulufunktsioonist on negatiivne: $R''(q) = -1$, siis on tulufunktsiooni graafik kumer. (Siin ja edaspidi mõistetakse kumerust ja nõgusust järgmiselt: funktsiooni graafik on kumer, kui graafiku puutuja asub ülalpool graafikut, ja nõgus, kui puutuja asub allpool graafikut.)

Majandusteaduses on laialt kasutusel funktsiooni **elastsuse** mõiste. Mõiste on laenatud füüsikast ja tähendab tundlikkust — funktsiooni elastsus näitab, kui tundlik on funktsiooni väärtus argumendi väärtuse muutuste suhtes ehk kui suur suhteline funktsiooni väärtuse muutus kaasneb argumendi muutumisega. Täpsemalt öeldes: **funktsiooni elastsus argumendi suhtes näitab** funktsiooni väärtuse suhtelist muutust protsentides funktsiooni argumendi 1%-lise kasvu korral. Funktsiooni elastsus **arvutatakse** funktsiooni väärtuse suhtelise muutuse ja argumendi väärtuse suhtelise muutuse jagatisena. Elastsust tähistatakse kreeka tähega ε.

Kasutame näitena juba tuttavat nõudlusfunktsiooni $q = q^D(p)$. Püüame leida nõudluse hinnaelastsuse ε_p^D — ülaindeks D näitab, et tegu on nõudluse elastsusega ja alaindeks p viitab elastsusele hinna suhtes.

Funktsiooni väärtuse ehk kauba koguse absoluutne muutus on $\Delta q = q_t - q_{t-1}$. Suhteline muutus näitab, kui suure osa moodustab näitaja muutus näitaja koguväärtusest. Tavaliselt leitakse see muutuse jagamise teel muutuja esialgse väärtusega: $\dfrac{\Delta q}{q_{t-1}} = \dfrac{q_t - q_{t-1}}{q_{t-1}}$. See tähendaks aga, et kui võrrelda absoluutväärtuselt võrdseid, kuid märgilt erinevaid absoluutseid muutusi, siis neile vastavad suhtelised muutused ei oleks absoluutväärtuselt võrdsed. On ju vastupidise muutuse korral jagajaks

q_{t-1} asemel q_t. Selle probleemi vältimiseks jagatakse elastsuste arvutamisel absoluutne muutus esialgse ja uue väärtuse aritmeetilise keskmisega:

$$\frac{\Delta q}{\overline{q}} = \frac{q_t - q_{t-1}}{\overline{q}}, \text{ kus } \overline{q} = \frac{q_t + q_{t-1}}{2}.$$

Et leida nõudluse hinnaelastsust, tuleb nõutava koguse suhteline muutus jagada hinna suhtelise muutusega, mille saame analoogiliselt:

$$\frac{\Delta p}{\overline{p}} = \frac{p_t - p_{t-1}}{\overline{p}}, \text{ kus } \overline{p} = \frac{p_t + p_{t-1}}{2}.$$

Kõike kokku võttes saame:

$$\varepsilon_p^D = \frac{\Delta q / \overline{q}}{\Delta p / \overline{p}}$$

ning seda valemit pisut teisendades: $\varepsilon_p^D = \frac{\Delta q}{\overline{q}} \div \frac{\Delta p}{\overline{p}}$ ehk:

$$\varepsilon_p^D = \frac{\Delta q}{\Delta p} \frac{\overline{p}}{\overline{q}}.$$

Viimane on tüüpiline elastsuse arvutamise valemi kuju. Kuna selle valemiga on võimalik arvutada funktsiooni elastsus mingil alg- ja lõpp-punkti vahelisel joonel — teada on funktsiooni ja argumendi väärtused enne ja pärast muutust — nimetatakse selliselt arvutatud elastsust **joonelastsuseks**.

Siinkohal üks elastsuse arvutamise näide: olgu teada, et kui vorsti hind tõuseb 40 kroonilt 50 kroonile, siis tarbija ostab endise 1 kg asemel nüüd ainult 0,5 kg vorsti nädalas. Koguse muutus on siis $\Delta q = -0{,}5$ ja keskmine kogus $\overline{q} = 0{,}75$. Hinna muutus on $\Delta p = 10$ ja keskmine hind $\overline{p} = 45$.

Seega elastsus: $\varepsilon_p^N = \dfrac{\Delta q}{\Delta p}\dfrac{\overline{p}}{\overline{q}} = \dfrac{-0{,}5 \cdot 45}{10 \cdot 0{,}75} = -3$.

Kui funktsiooni suhteline muutus ületab seda põhjustanud argumendi suhtelise muutuse, on $|\varepsilon| > 1$ ja funktsiooni nimetatakse **üleelastseks** — nõudluse korral suhteliselt väike hinnamuutus põhjustab suhteliselt suure muutuse nõutavas koguses. Vastasel juhul on $|\varepsilon| < 1$ ja funktsioon on **alaelastne**. Kui $|\varepsilon| = 1$, nimetatakse funktsiooni **ühikelastseks**. Näites toodud juhul on tegu üleelastse nõudlusfunktsiooniga ja suhteliselt hinnatundliku tarbijaga.

Joonelastsus kirjeldab funktsiooni elastsust mingil osal funktsiooni graafikust. Tegu on aga funktsiooni n.ö. keskmise elastsusega sellel lõigul, kuna selle lõigu erinevates punktides võib elastsus olla erinev. Täpsema tulemuse annab punktelastsus.

Punktelastsuse valem eeldab lõpmata väikest muutust argumendis. Sellisel juhul võib asendada koguse ja hinna muutused diferentsiaalidega ja suhte $\dfrac{\Delta q}{\Delta p}$ suhtega $\dfrac{dq}{dp}$ ehk tuletisega nõudlusfunktsioonist. Kuna tegu on vaid ühe punktiga, pole vajadust arvutada hinna ega koguse keskmist väärtust — nende asemel on argumendi ja funktsiooni väärtused konkreetses punktis:

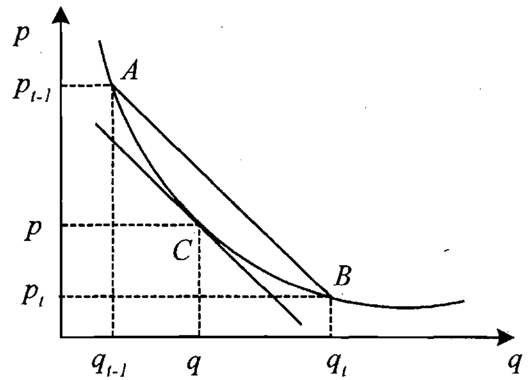
$$\varepsilon_p^D = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q}.$$

Elastsuse arvutamiseks kindlas punktis võetakse funktsioonist tuletis $\dfrac{dq}{dp}$ ja arvutatakse viimase väärtus selles punktis, korrutatakse tulemus argumendi väärtusega ja jagatakse funktsiooni väärtusega selles punktis. Arvutame näiteks eespool kirjeldatud ettevõtte poolt toodetava kauba nõudlusfunktsiooni $q = 20 - 2p$ hinnaelastsuse punktis, kus hind on 4. Kui hind on 4, siis nõutav kogus on $q = 20 - 2 \cdot 4 = 12$. Tuletis nõudlusfunktsioonist on $q' = -2$, seega on nõudlus selles punktis alaelastne:

$$\varepsilon_p^D = -2 \cdot \frac{4}{12} = -\frac{3}{4}.$$

Analoogiliselt esitatud näidetega nõudlusfunktsiooni kohta on võimalik arvutada näiteks nõudlusfunktsiooni sissetulekuelastsust, pakkumisfunktsiooni hinnaelastsust või tootmisfunktsiooni tegurielastsust.

Lineaarse funktsiooni korral on joonelastsus võrdne punktelastsusega joonelastsuse arvutamisel aluseks olnud lõigu keskpunktis. Kõvera puhul on joonelastsus võrdne punktelastsusega punktis, mille puutuja on paralleelne joonelastsuse arvutamisel aluseks olnud lõigu otspunkte ühendava sirgega. Joonisel 2.3 kujutatud hüpoteetilise kõvera korral on joonelastsus punktide *A* ja *B* vahelisel lõigul võrdne punktelastsusega punktis *C*, mis on nõudluskõvera puutepunktiks lõiguga *AB* paralleelse sirgega.



Joonis 2.3. Punktelastsuse ja joonelastsuse geomeetrilised seosed

Funktsiooni tuletise üks olulisemaid kasutusalasid matemaatilises majandusteaduses on **optimeerimine**. See aga väärib eraldi käsitlemist järgmistes peatükkides.

2.3. Osatuletised

Majanduses mõjutavad sageli üht nähtust väga paljud teised tegurnähtused. Sellist sõltuvust kirjeldab mitme muutuja funktsioon. Sõltuv muutuja on siis funktsioon mitmest erinevast sõltumatust muutujast:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ka sellisel juhul huvitab majandusteadlasi erinevate sõltumatute muutujate muutumise mõju sõltuvale muutujale. Tihti soovitakse välja tuua just ühe kindla muutuja mõju, eeldades teiste muutujate väärtuste samaks jäämist. Seda nimetatakse *ceteris paribus* (lad 'ülejäänu jääb samaks') printsiibiks. Näiteks uuritakse, milline on nõutava koguse muutus, kui sissetulek tõuseb mingi summa võrra, aga kõik hinnad jäävad samaks; või tahetakse teada, kuidas muutub toodangumaht, kui võetakse juurde üks tööline, aga masinate hulk jääb samaks. Matemaatilises analüüsis kasutatakse sel otstarbel osatuletist.

Olgu muutuja z sõltuvuses muutujatest x ja y: $z = f(x, y)$. Muutuja x mõju muutujale z muutuja y samaks jäädes väljendab suhe $\frac{\Delta z}{\Delta x}$. Kui Δx on teada, tuleks Δz leida järgmiselt: $\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$. Jällegi on keerukate arvutuste vältimiseks mõistlik leida jagatise $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ piirväärtus Δx lähenemisel nullile (sealjuures eeldades, et $\Delta y = 0$):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Sellist piirväärtust nimetatakse **osatuletiseks** funktsioonist $z = f(x, y)$ muutuja x järgi. Nii nagu tavalisel tuletisel, on ka osatuletisel erinevaid tähistusi. Tavapärase ülakriipsu asemel (y') märgitakse osatuletise korral alaindeksina muutuja, mille järgi tuletist võetakse: z_x. Tähistust $f'(x)$ asendab osatuletise korral tähistus f_x. Kolmandas tähistuses on diferentsiaali tähistav täht d asendatud gooti tähega ∂ (seda nimetatakse ka kreeka tähe δ variatsiooniks): $\frac{\partial z}{\partial x}$. Osatuletis muutuja y järgi leitakse ja tähistatakse analoogiliselt:

$$z_x = f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$z_y = f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Osatuletis näitab, millises suunas ja millises ulatuses muutub funktsiooni väärtus ühe argumendi ühikuliselt kasvades ja teiste argumentide muutumatuks jäädes. Seejuures ei tohi ka siin unustada, et tegu on siiski ligikaudse hinnanguga funktsiooni väärtuse muutumisele, mis on seda parem, mida väiksem on argumendi muutus. Kuna osatuletis konkreetse argumendi järgi eeldab ülejäänud argumentide muutumatust, siis võib mitme muutuja funktsioonist ühe argumendi järgi tuletist võttes kõiki teisi argumente vaadelda konstantidena.

Võttes tuletist näiteks funktsioonist $z = f(x, y)$ x järgi, kehtivad kõik tavapärased tuletise võtmise reeglid, muutujat y tuleb aga käsitleda konstandina — nagu kõiki arvulise väärtusega või sümboliga tähistatud parameetreidki. See tähendab, et kui konstant on muutujaga x korrutatud, jääb ta selle kordajaks ka tuletises. Kui aga konstant on liidetav, siis selle tuletis on 0.

Vaatleme näiteks funktsiooni $z = 3x^2y + 3x^3 + y - 10$. Tuletis x järgi on kõigi reeglite kohaselt $z_x = 6xy + 9x^2 + 0 - 0$, tuletis y järgi $z_y = 3x^2 + 0 + 1 - 0$.

Ka osatuletisel on **geomeetriline tõlgendus**. Nimelt on näiteks kahe muutuja funktsiooni graafiliseks kujutiseks mingi pind kolmemõõtmelises ruumis (horisontaalteljed x, y ja vertikaaltelg z). Näiteks võib ette kujutada tuba, mille ühes nurgas jookseb alt üles z-telg ja z-telje algusest kahele poole mööda põranda servi x- ja y-teljed. Nimetame nende servade kohal olevaid seinu x- ja y-seinaks. Pinna puutujaks on mingi tasand (mõeldagu näiteks toas palli peale asetatud paindumatule paberilehele). Osatuletis muutuja x järgi näitab pinda puutuva tasandi tõusu x-telje suhtes. Tasandi võib mõtteliselt jaotada üksteisega tihedalt kõrvuti olevateks sirgeteks (paberilehe peenikesteks paberiribadeks). Oletame, et need sirged on paralleelsed x-seinaga. Kui mingi neist sirgetest projitseerida x-seinale, siis selle sirge tõusu xz-teljestikus (mis asub x-seinal) näitabki osatuletis muutuja x järgi. Võib ette kujutada, et üht x-seinaga paralleelselt välja lõigatud pabeririba vaadatakse seistes näoga x-seina poole — siis projitseerubki pabeririba seinale mingi tõusuga z_x. Otse vaadates teine mõõde ehk y-sein mõju ei avalda, see seostub tingimusega, et samal ajal $dy = 0$. Analoogiliselt näitab osatuletis muutuja y järgi puutuva tasandi tõusu y-telje suhtes.

Kõrgemat järku osatuletised leitakse analoogiliselt tavalise tuletisega. Näiteks teist järku tuletise leidmiseks muutuja x või y järgi, diferentseeritakse funktsiooni kaks korda vastava muutuja järgi (ehk leitakse osatuletis vastava muutuja järgi esimest järku tuletisest sama muutuja järgi):

$$z_{xx} = f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\partial z/\partial x\right)}{\partial x},$$

$$z_{yy} = f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\partial z/\partial y\right)}{\partial y}.$$

Segaosatuletiste korral võetakse enne tuletis ühe, siis teise muutuja järgi:

$$z_{xy} = f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\partial z/\partial x\right)}{\partial y},$$

$$z_{yx} = f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\partial z/\partial y\right)}{\partial x}.$$

Youngi teoreemi kohaselt kehtib kõigi majandusteaduses kasutatavate funktsioonide korral reegel: teist järku segaosatuletise korral ei sõltu tulemus diferentseerimise järjekorrast:

$$\frac{\partial\left(\partial z/\partial x\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(\partial z/\partial y\right)}{\partial x}.$$

Eespool kasutatud funktsiooni $z=3x^2y+3x^3+y-10$ korral saame teist järku osatuletise muutuja x järgi diferentseerides uuesti esimest järku tuletise $z_x=6xy+9x^2$. Tulemuseks on $z_{xx}=6y+18x$. Võttes tuletise funktsioonist $z_y=3x^2+1$ muutuja y järgi, saame $z_{yy}=0$. Segaosatuletise võime arvutada, võttes tuletise funktsioonist $z_x=6xy+9x^2$ muutuja y järgi või funktsioonist $z_y=3x^2+1$ muutuja x järgi. Tulemuseks on $z_{xy}=z_{yx}=6x$.

Osatuletist kasutatakse mitme muutuja funktsioonidest **piirfunktsioonide** leidmisel. Olgu näiteks tegu olukorraga, kus ettevõttes mingi aja jooksul toodetav toodangu kogus q sõltub nii ettevõttes töötavate töötajate arvust ehk tööjõust L (*labor*) kui ka tööliste kasutada olevate masinate hulgast ehk teisiti öeldes kapitali kogusest K. Kirjeldagu olukorda tootmisfunktsioon:

$$q=q(K,L)=0{,}5K^2-2KL+L^2.$$

Seda, kuidas muutub toodangumaht tööjõu koguse suurenedes ühe ühiku (nt ühe töölise) võrra, näitab tööjõu piirtoodang. Tööjõu piirtoodangu MP_L (*marginal product*, alaindeks tähistab tööjõudu) funktsiooni leidmiseks võtame tuletise toodangufunktsioonist tööjõu järgi:

$$MP_L=q_L=-2K+2L.$$

Nagu näha, on ka tööjõu piirtoodang funktsioon nii kapitalist kui ka tööjõust. Kapitali piirtoodangu MP_K leidmiseks diferentseerime toodangufunktsiooni kapitali järgi:

$$MP_K = q_K = K - 2L.$$

Ka **elastsuste** arvutamisel läheb vaja osatuletist. Olgu näiteks tegu kahe asenduskaubaga: A ja B. On teada, et kauba A nõutav kogus mingi perioodi jooksul (q_A^D) sõltub nii selle sama kauba hinnast p_A, asenduskauba hinnast p_B kui ka tarbija sissetulekust m (*money* — 'raha'):

$$q_A^D = 12 - 4p_A + 0{,}04m + 0{,}5p_B.$$

Kauba A nõudluse hinnaelastsuse leidmiseks võtame nõudlusfunktsioonist tuletise p_A järgi:

$$\varepsilon_A^D = \frac{\partial q_A^D}{\partial p_A}\frac{p_A}{q_A^D} = -4\frac{p_A}{q_A^D}.$$

Elastsuse teadasaamiseks konkreetses punktis tuleb valemisse asendada vastavad hinna ja koguse väärtused. Kauba A nõudluse hinnaelastsus näitab, kuidas muutub nõutav kogus kauba A hinna muutudes teise kauba hinna ja sissetuleku muutumatuks jäädes.

Kauba A nõudluse elastsus kauba B hinna suhtes ehk kauba A nõudluse ristelastsus arvutatakse siis järgmiselt:

$$\varepsilon_B^D = \frac{\partial q_A^D}{\partial p_B}\frac{p_B}{q_A^D} = 0{,}5\frac{p_B}{q_A^D},$$

ning nõudluse sissetulekuelastsus:

$$\varepsilon_m^D = \frac{\partial q_A^D}{\partial m}\frac{m}{q_A^D} = 0{,}04\frac{m}{q_A^D}.$$

Kuna kõik muutujad selles nõudlusfunktsioonis saavad olla vaid positiivsed, võib tuletiste märkidest järeldada, et kauba nõudlus väheneb, kui tema hind tõuseb ning nõudlus suureneb, kui asenduskauba hind tõuseb või sissetulek suureneb.

Osatuletise üks olulisemaid kasutusvaldkondi on mitme muutuja funktsioonide **optimeerimine**, millest tuleb juttu edaspidi.

2.4. Täisdiferentsiaal ja täistuletis

Lisaks sõltumatute muutujate individuaalsele mõjule pakub huvi ka kõigi sõltumatute muutujate koosmõju sõltuvale muutujale. Kõigi argumentide nullist erinevatele muutustele vastavat funktsiooni väärtuse muutust kirjeldab funktsiooni **täisdiferentsiaal.**

Kui funktsiooni $z = f(x, y)$ korral muutuja y samaks jäädes ($\Delta y = dy = 0$) muutuja x väärtus muutub $\Delta x = dx$ võrra, siis võib muutust funktsiooni väärtuses — Δz — ligikaudu hinnata järgmiselt: funktsiooni väärtuse ligikaudne muutus argumendi ühikulise muutuse korral (seda väljendab osatuletis $\frac{\partial z}{\partial x}$) korrutatud argumendi väärtuse muutumisega:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx .$$

Kui on olemas nullist erinev muutus $\Delta y = dy$ ja x ei muutu ($\Delta x = dx = 0$), on vastav funktsiooni z diferentsiaal:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial y} dy .$$

Eespooltoodu põhjal: kui muutuvad mõlemad argumendid, avaldub funktsiooni täisdiferentsiaal järgmiselt:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \text{ ehk } dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Täisdiferentsiaal näitab funktsiooni väärtuse kogumuutust kõigi argumentide lõpmata väikeste muutuste korral (jällegi on tegu ligikaudse hinnanguga).

Olgu tegu juba näitena kasutatud funktsiooniga $z = 3x^2y + 3x^3 + y - 10$ ning olgu mingil hetkel $x = 1$ ja $y = 1$, $\Delta x = 0{,}01$ ja $\Delta y = 0{,}02$. Leiame hinnangu funktsiooni väärtuse muutusele Δz:

$$\Delta z \approx dz = z_x\,\Delta x + z_y\,\Delta y = (6xy + 9x^2)\,\Delta x + (3x^2 + 1)\,\Delta y =$$
$$= (6\cdot 1\cdot 1 + 9\cdot 1)0{,}01 + (3\cdot 1 + 1)\,0{,}02 = 0{,}23.$$

n muutuja funktsiooni korral $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on täisdiferentsiaali arvutamise valem:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n.$$

Mõnikord võib ette tulla olukord, kus üks või mitu funktsiooni argumenti sõltuvad omakorda ühest või mitmest teisest argumendist. Näiteks lisaks funktsioonile $z = f(x, y)$ on teada, et muutuja y sõltub omakorda muutujast x: $y = g(x)$. Sellisel juhul mõjutab muutuja x funktsiooni väärtust z otse — vastavalt funktsioonile $z = f(x, y)$ — ning ka kaudselt — muutuja y kaudu.

Täisdiferentsiaali arvutamise valemi $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ mõlemat poolt avaldisega $\frac{1}{dx}$ korrutades saame:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

ehk kuna $\frac{dx}{dx}=1$, siis:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Saadud tulemus ongi **täistuletis** funktsioonist z muutuja x järgi, mis näitab, kuidas muutub funktsiooni väärtus argumendi x ühikuliselt kasvades, arvestades nii otsest kui ka kaudset mõju. Valemi esimene liidetav näitab argumendi x otsest mõju funktsiooni väärtusele ja teine liidetav kaudset mõju: muutuja x mõju muutujale y on korrutatud muutuja y mõjuga funktsiooni väärtusele z.

Toome siinkohal näite majandusteooriast. Oletame, et mingi kauba tarbitav kogus sõltub nii kauba hinnast kui ka reaalsest sissetulekust m_r:

$$q=f(m_r,p),$$

kus eeldatavasti:

$\frac{\partial q}{\partial m_r}>0$, sest reaalse sissetuleku suurenedes nõudlus kasvab;

$\frac{\partial q}{\partial p}<0$, sest hinna suurenedes kauba nõudlus väheneb — osa selle kauba tarbimisest asendatakse teiste kaupadega.

Samal ajal sõltub reaalne sissetulek kauba hinnast:

$$m_r=g(p),$$

kus $\frac{dm_r}{dp} < 0$, sest kauba hinna tõustes reaalne sissetulek kahaneb — nüüd saab sama summa eest vähem kaupa osta.

Püüame leida kauba hinna muutumise kogumõju kauba nõudlusele $\frac{dq}{dp}$. Nõudlusfunktsiooni täisdiferentsiaal:

$$dq = \frac{\partial q}{\partial p} dp + \frac{\partial q}{\partial m_r} dm_r \, .$$

Siit saame leida hinnamuutuse kogumõju nõudlusele:

$$\frac{dq}{dp} = \frac{\partial q}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial m_r} \frac{dm_r}{dp} .$$

Teades erinevate näitajate omavahelist mõju, võime hinnata, kas hinnamuutuse kogumõju nõudlusele on positiivne või negatiivne:

$$\frac{dq}{dp} = \underset{(-)}{\frac{\partial q}{\partial p}} + \underset{(+)}{\frac{\partial q}{\partial m_r}} \underset{(-)}{\frac{dm_r}{dp}} < 0 .$$

Iga liikme all sulgudes on toodud tema eeldatav märk. Kokkuvõttes on seega kogu avaldis negatiivne ning hinna tõustes nõudlus kahaneb. Majandusteoorias nimetatakse hinna otsest mõju nõutavale kogusele asendusefektiks ja kaudset mõju sissetulekuefektiks.

Kui argumente ja nende omavahelisi sõltuvusi on rohkem, on kõige lihtsam tuletada täistuletise valem täisdiferentsiaali valemist, teades, et kui kahe argumendi, näiteks y ja x vahel sõltuvust ei ole, kehtib $\frac{dy}{dx} = 0$ ja vastavad liidetavad täisosatuletise valemis on võrdsed nulliga.

Kui ka sõltumatuid muutujaid (mis ise ei sõltu antud mudelis ühestki teisest muutujast) on rohkem kui üks, nimetatakse nende kogumõju väljendavat tuletist täisosatuletiseks.

Näiteks, kui $z = f(x, y, u, v, w)$, $u = g(x, y)$, $v = h(x)$ ja $w = j(y)$, siis täisdiferentsiaal:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw$$

ja täistuletis x järgi (hoides y väärtuse muutumatuna):

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{dy=0} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot 1 + 0 + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + 0 =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Saadud tulemus on **täisosatuletis** funktsioonist z muutuja x järgi, mis näitab, kuidas muutub funktsiooni väärtus argumendi x ühikuliselt kasvades ning argumendi y muutumatuks jäädes. Just viimase tõttu on tegu siiski täisosatuletisega, mitte lihtsalt täistuletisega. Täisosatuletise eristamiseks tavalisest ühe muutuja funktsiooni tuletisest ja osatuletistest tähistatakse seda ka sümboliga $\frac{\S z}{\S x}$.

2.5. Ilmutamata funktsiooni tuletis

Mõnikord tuleb majandusanalüüsis kokku puutuda **ilmutamata funktsioonidega**. Funktsioon on ilmutamata, kui muutujate oma-vaheline sõltuvus on kirjeldatud avaldisega kahest (või enamast) muutujast, mis võrdub konstandiga: $F(x, y) = c$. Konstant võib olla ka viidud avaldisega samale poolele, sellisel juhul on teisel pool võrdusmärki null: $F(x, y) = 0$. Enamasti on võimalik selline funktsioon teisendada ilmutatud kujule: üks muutuja on võrdne mingi avaldisega teis(t)est muutuja(te)st, näiteks $y = f(x)$. Mõningate funktsioonide puhul on aga nende ilmutamine mingi muutuja suhtes küllalt tülikas (nt funktsioon $x^2 + y^2 = 9$) või keeruline. Siis on raske ka leida tuletist $\frac{dy}{dx}$ tavapärasel meetodil. Sellisel juhul on abiks valem, mille saab tuletada täisdiferentsiaali abil järgmiselt.

Tuletise $\frac{dy}{dx}$ leidmiseks funktsioonist $F(x, y) = c$ diferentseerime funktsiooni kirjeldava võrrandi mõlemad pooled. Vasaku poole puhul kasutame täisdiferentsiaali valemit. Kuna konstant ei muutu kunagi, siis parema poole diferentsiaal on alati null:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0.$$

Tuletame sellest seosest valemi meid huvitava tuletise leidmiseks:

$$\frac{\partial F}{\partial y}dy = -\frac{\partial F}{\partial x}dx, \text{ siit}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = -\frac{F_x}{F_y}, \text{ kui } \frac{\partial F}{\partial y} = F_y \neq 0.$$

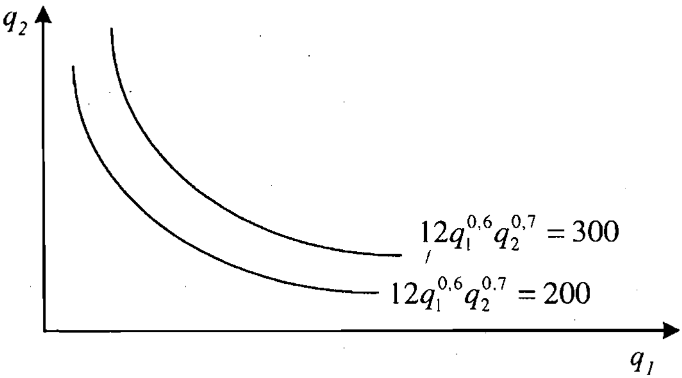
Siinjuures tuleb tähele panna, et nimetajas olev osatuletis ei tohiks võrduda nulliga.

Leiame näiteks funktsioonist $x^2 + y^2 = 9$ tuletise $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

Siinkohal tasub tähele panna, et kui tavalise, ilmutatud funktsiooni tuletis sisaldab muutujana vaid argumenti, siis ilmutamata funktsiooni tuletis võib sisaldada nii argumenti kui ka funktsiooni väärtust.

Majandusteaduses kasutatakse ilmutamata funktsiooni tuletist sageli samaväärsuskõverate puhul. Vaatleme näiteks kasulikkusfunktsiooni, kus tarbija kasulikkus u sõltub kahe kauba — q_1 ja q_2 — tarbitavatest kogustest: $u = u(q_1, q_2)$. Erinevad komplektid kahe kauba kogustest annavad tarbijale enamasti erineva kasulikkuse. Erinevaid komplekte saab kujutada teljestikus, kus ühel teljel on ühe kauba kogus, teisel teljel teise kauba kogus (vt joonist 2.4).



Joonis 2.4. Samakasulikkuskõverad

Selliseid komplekte, mille korral (vaatamata kahe kauba erinevatele tarbitavatele kogustele) kasulikkus on sama, ühendab samakasulikkuskõver. Kui näiteks kasulikkusfunktsioon on $u = 12q_1^{0,6}q_2^{0,7}$, on kasulikkustasemele 200 vastava samakasulikkuskõvera võrrand: $12q_1^{0,6}q_2^{0,7} = 200$, kasulikkustasemele 300 vastava kõvera võrrand aga $12q_1^{0,6}q_2^{0,7} = 300$.

Majandusteaduslikus analüüsis on sageli vaja leida sellise samaväärsuskõvera puutuja tõus mingis konkreetses punktis. Puutuja tõusu väljendab aga tuletis. Kuna antud juhul vertikaalteljel on q_2 ja horisontaalteljel q_1, siis on vaja teada tuletist: $\frac{dq_2}{dq_1}$. Kasutame ilmutamata funktsiooni tuletise valemit:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial u / \partial q_1}{\partial u / \partial q_2} = -\frac{MU_1}{MU_2},$$

kus MU_1 tähistab esimese kauba ja MU_2 teise kauba piirkasulikkust.

Selgub, et samakasulikkuskõvera puutuja tõusu saab leida nende kaupade piirkasulikkuste abil. Meie näites kasutatud funktsiooni korral:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{0,6q_1^{-0,4}q_2^{0,7}}{0,7q_1^{0,6}q_2^{-0,3}} = -\frac{6q_2}{7q_1}.$$

Selles, et funktsioonist $u = 12q_1^{0,6}q_2^{0,7}$ muutuja q_2 avaldamine ja seejärel tuletise leidmine on tunduvalt aeganõudvam, võib igaüks ise veenduda.

Kõrvalmärkusena olgu mainitud, et funktsiooni kujul $z = c\,x^a\,y^b$, kus a, b ja c on suvalised positiivsed parameetrid,

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

nimetatakse Cobbi-Douglase tüüpi funktsiooniks ning sellise kujuga funktsioone kasutatakse majandusteaduses sageli näiteks toomisfunktsioonina, kasulikkusfunktsioonina vms.

Mõnikord soovitakse teada, milline peaks olema näiteks kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ korral **ühe argumendi muutusele Δx vastav teise argumendi muutus Δy**, et **funktsiooni väärtus jääks samaks**. Et funktsiooni väärtus ei muutuks, peaks funktsiooni täisdiferentsiaal võrduma nulliga:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = 0.$$

Siit saame teada muutuja x ühikulisele muutusele vastava vajaliku y muutuse tingimusel, et funktsiooni väärtus z ei muutuks:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{z_x}{z_y}.$$

Vaatleme tuttavat kasulikkusfunktsiooni $u = 12q_1^{0,6}q_2^{0,7}$. Et kasulikkus ei muutuks, peaks esimese kauba koguse suurenemisega ühe ühiku võrra kaasnema teise kauba koguse muutus:

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{6q_2}{7q_1}.$$

Olgu tarbijal 10 ühikut esimest ja 10 ühikut teist kaupa. Tarbija ostab juurde kaks ühikut esimest kaupa. Kuidas peab muutuma teise kauba kogus, et kasulikkus jääks samaks? Avaldame teise kauba muutuse ja arvutame:

$$\Delta q_2 = -\frac{6q_2}{7q_1}\Delta q_1 = -\frac{6 \cdot 10}{7 \cdot 10} \cdot 2 \approx -1,71.$$

Seega peab tarbija loobuma 1,71 ühikust teisest kaubast.

3. INTEGREERIMINE

3.1. Määramata integraal

Funktsioonist tuletise võtmise vastandtehe on integreerimine. Vaatleme funktsiooni $y = F(x)$. Olgu selle tuletis $y' = F'(x) = f(x)$. Vastandtehe ehk funktsiooni tuletisest $f(x)$ integraali võtmine muutuja x järgi formuleeritakse matemaatiliselt nii:

$$\int f(x)dx .$$

Funktsioonile, mida integreeritakse, eelneb integraali märk ja järgneb selle muutuja diferentsiaal, mille järgi funktsiooni integreeritakse. Integreerimine peaks viima uuesti esialgse funktsiooonini $y = F(x)$. Alati ei anna funktsioonist tuletise võtmine ja seejärel integreerimine tulemuseks täpselt esialgset funktsiooni — seda juhul, kui esialgne funktsioon $y = F(x)$ sisaldab vabaliiget. Konstantse väärtusega vabaliikme tuletis on null, seepärast ei ole vaid integreeritavat funktsiooni teades võimalik aimata, kas integreerimisel tuleb lisada mingi konstant ja milline. Seepärast lisatakse matemaatikas leitud algfunktsioonile alati integreerimiskonstant (tähistame seda C):

$$\int f(x)dx = F(x) + C ,$$

seda juhul, kui ülesandes ei ole konstandi väärtus eraldi antud.

Vahemärkus: teades, et $f(x)dx = dy = dF(x)$, võib kirjutada ka:

$$\int dF(x) = F(x),$$

seega on integreerimise näol tõepoolest tegu diferentseerimise vastandtehtega.

Integreerimise reeglid on tuletatavad tuletise võtmise reeglitest. Olgu siinkohal toodud majandusteoorias enim ette tulevate funktsioonide integraalid:

$$\int 0\,dx = C,$$

$$\int \left(a\,x^{b}\right)dx = a\frac{x^{b+1}}{b+1} + C,$$

eelmise erijuht on $\int dx = \int 1\,dx = \int x^{0}\,dx = x + C$,

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + C,$$

$$\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C = a^{x}\log_{a} e + C,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C.$$

Integreerimine võimaldab tuletada **piirfunktsioonist kogufunktsiooni** ehk **lähtefunktsiooni**. Kui on teada mingi piirnäitaja, näiteks piirkulu või piirtulu, aga pole teada tulu või kulufunktsiooni ennast, siis teades, et piirfunktsioon on saadud kogufunktsioonist tuletise võtmise teel, on võimalik kogufunktsioon leida vastandtehet kasutades. Kui matemaatiliselt on korrektne leitud integraalile integreerimiskonstandi lisamine, siis majandusteaduses ette tulevatel juhtudel on sageli teada kas kogufunktsiooni konstant (nt kulufunktsiooni korral püsikulud) või vähemalt selle konstandi majanduslik tähendus, millele vastavalt see siis ka tähistatakse.

Olgu näiteks teada ettevõtte piirtulufunktsioon $MR = 100 - 8q$ ja piirkulufunktsioon $MC = 9q^{2} - 36q + 40$. Teada on veel, et firma püsikulud, mis toodangu kogusest ei sõltu, on 200. Leiame kogukulufunktsiooni:

$$C = \int MC\,dq = \int \left(9q^{2} - 36q + 40\right)dq =$$

$= 3q^3 - 18q^2 + 40q + const$.

Kuna on teada, et konstant kulufunktsioonis on 200, siis:

$C = 3q^3 - 18q^2 + 40q + 200$.

Märkus. Kui püsikulud polnuks teada, võinuksime need tähistada sümboliga FC (*fixed costs*):

$C = 3q^3 - 18q^2 + 40q + FC$.

Leiame kogutulufunktsiooni:

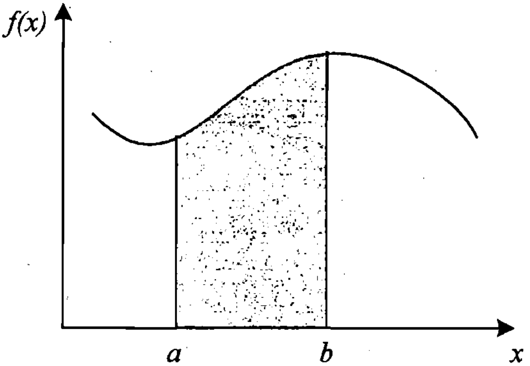
$R = \int MR\, dq = \int (100 - 8q) dq = 100q - 4q^2 + const$.

On teada, et kui ei müüda ühtegi tooteühikut ($q = 0$), siis ei saada ka tulu. Järelikult ei ole tulufunktsioonis konstanti ja funktsiooni graafik algab koordinaattelgede nullpunktist. Seega võime kirjutada:

$R = 100q - 4q^2$.

3.2. Määratud integraal

Osutub, et integraali abil on võimalik arvutada funktsiooni graafiku ja argumenditelje vahelise kõvertrapetsi pindala (vt joonist 3.1) kahe raja vahel. Selleks tuleb sisse tuua määratud integraali mõiste. Määratud integraali väärtuse määravad muuhulgas rajad. Kõvertrapetsi vasakule küljele vastavat argumendi väärtust nimetatakse alumiseks rajaks, paremale küljele vastavat argumendi väärtust ülemiseks rajaks.



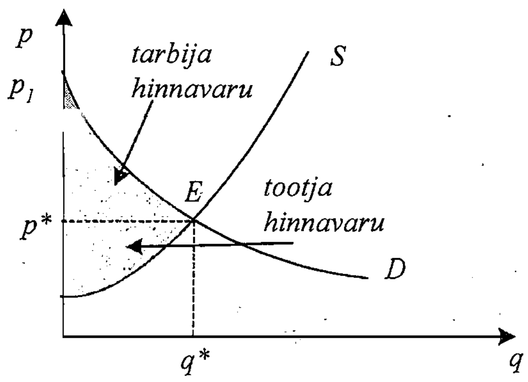
Joonis 3.1. Kõvertrapetsi pindala

Määratud integraali korral asetatakse integraali sümbolist alla ja üles vastavalt integraali alumine ja ülemine raja — selle lõigu alg- ja lõppväärtus, kus integraali arvutatakse. Määratud integraalil on alati mingi konkreetne (arvuline või parameetriline) väärtus, mis leitakse järgmise valemi alusel:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Esmalt integreeritakse integraalialune avaldis. Seejärel arvutatakse saadud funktsiooni väärtus ülemise ja alumise raja kohal ning lahutatakse esimesest teine. Sageli tähistatakse funktsiooni väärtuste vahet ka alumise ja ülemise rajaga varustatud püstkriipsu abil ($F(x)\Big|_a^b$).

Kasutame näitena konkreetseid probleeme majandusteadusest. Tihti kasutatakse majandusteaduses määratud integraali heaolu hindamisel. Vaatleme juba tuttavat turutasakaalu mudelit. Mida madalam on kauba hind, seda rohkem inimesi on nõus seda ostma. Kui turu tasakaaluhind p^* on välja kujunenud, saavad kõik tarbijad osta kaupa selle hinnaga. Tarbijad, kes olid nõus ka rohkem maksma, kogevad nüüd lisakasu ehk ülejääki: nende hinnang kaubale oli kõrgem, kui maksta tulev summa. Seda ülejääki nimetatakse ka tarbija hinnavaruks või tarbija heaoluks. Kõigi tarbijate ülejääkide summale vastab geomeetriliselt (vt joonist 3.2) nõudluskõvera ja kehtivat hinnataset kujutava horisontaaljoone vaheline pindala nullpunkti ja tasakaalukoguse vahel.



Joonis 3.2. Tarbija ja tootja hinnavarud

Samas pakuvad tootjad vastavalt tõusvale pakkumisfunktsioonile kõrgema hinna juures rohkem kaupa. Kõrgem hind katab ära kõrgemad kulud ja nii saavad kauba tootmises ja pakkumises osaleda ka need ettevõtted, kellel see madalama hinnaga ära ei tasunud. Kui kehtib turuhind, saavad kõik tootjad oma kaupa müüa selle hinnaga. Nii on hind mõnede ettevõtete jaoks kuludest suurem. Siit tulenebki tootja hinnavaru mõiste. Kõigi tootjate hinnavaru väljendub graafiliselt hinnataseme ja pakkumisfunktsiooni vahelise pindalana nullpunkti ja tasakaalukoguse vahel.

Kui nõudlus- ja pakkumisfunktsioon on lineaarsed, on tegu kolmnurkadega ja võib kasutada kolmnurga pindala valemit. Kui aga funktsioonid on keerulisema kujuga, tuleb kasutada määratud integraali. Sealjuures ei tohi unustada, et joonisel on kujutatud nõudluse ja pakkumise pöördfunktsioonid.

Integraali abil hinnavarude hindamisel on kaks võimalust. Vaatleme esmalt tarbija hinnavaru. Esiteks võib arvutada nõudluskõvera aluse pindala nullpunktist kuni tasakaalukoguseni ja lahutada sellest tarbijate kulutusi väljendava nelinurga pindala. Selleks on vaja integraali nõudlusfunktsiooni pöördfunktsioonist rajadega nullpunktist tasakaalukoguseni. Tarbija hinnavaru oleks siis:

$$HV_{tarbija} = \left(\int_0^{q^*} p^D(q)\,dq \right) - p^* q^* .$$

Nõudluskõver näitab, millist hinda on tarbija nõus maksma mingi konkreetse kaubakoguse korral. Hind, mida tarbija on nõus maksma, on samal ajal ka tarbija hinnang lisandunud kaubaühiku kasulikkusele. Niisiis võib nõudluskõvera alust pindala nullkogusest kuni tasakaalukoguseni nimetada tarbija kogukasulikkuse hinnanguks rahas. Seega sisuliselt leitakse selle valemiga tarbijate kogukasulikkuse ja kogukulutuste vahe.

Teine võimalus on arvutada kohe meid huvitava ala pindala, leides määratud integraali nõudlusfunktsioonist, sellisel juhul on rajad määratud hinnateljel: tasakaaluhind p^* ning nõudlusfunktsiooni lõikepunkt hinnateljega p_1:

$$HV_{tarbija} = \int_{p^*}^{p_1} q^D(p)\,dp .$$

Tootja hinnavaru arvutamiseks on analoogilised võimalused. Esimese variandi puhul tuleks tootjate kogutulu $R = p^* q^*$ väljendava nelinurga pindalast lahutada pakkumiskõvera alune pindala nullpunktist tasakaalukoguseni. Sellisel juhul tuleks pakkumiskõvera aluse pindala arvutamiseks võtta integraal pakkumise pöördfunktsioonist nullpunktist kuni tasakaalukoguseni. Tootja hinnavaru arvutamise valem oleks siis selline:

$$HV_{tootja} = p^* q^* - \left(\int_0^{q^*} p^S(q)\,dq \right).$$

Pakkumiskõver näitab, millist hinda soovib tootja mingi koguse eest saada. Tootja soovitud hind tuleneb lisandunud kaubaühiku kuludest (majandusteooria kohaselt on pakkumiskõver samal ajal ka piirkulukõver). Seega kujutab pakkumiskõvera alune pindala nullkogusest kuni tasakaalukoguseni tasakaalukoguse tootmise muutuvkulusid (püsikulu on püsiv suurus, koguse suurenedes püsikulu ei lisandu, seega peegeldab piirkulu vaid muutuvkulusid — piirkulu integreerimisel saame muutuvkulud). Niisiis sisuliselt leitakse tootjate tulude ja muutuvkulude vahe.

Teise variandi korral tuleks võtta lihtsalt integraal pakkumisfunktsioonist, kusjuures rajad oleksid määratud hinnateljel: pakkumisfunktsiooni lõikepunkt hinnateljega p_0 ja tasakaaluhind p^*:

$$HV_{tootja} = \int_{p_0}^{p^*} q^S(p)\,dp.$$

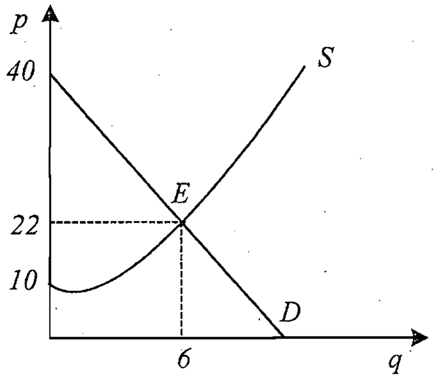
Vaatleme mingi hüpoteetilise kauba turgu, kus nõudluse pöördfunktsioon on $p^D = 40 - 3q$ ja pakkumise pöördfunktsioon $p^S = 0{,}5q^2 - q + 10$. Leiame tasakaalupunkti, mis rahuldab mõlemat võrrandit. Selleks võime võrdsustada ka hinnad:

$p^D = p^S$ ehk $40 - 3q = 0{,}5q^2 - q + 10$, siit

$0{,}5q^2 + 2q - 30 = 0$.

Ruutvõrrandi lahenditeks on $q_1 = -10$ ja $q_2 = 6$. Et tasakaalukogus ei saa olla negatiivne, jätame esimese lahendi vaatluse alt välja. Tasakaalukogusele $q^* = 6$ vastav tasakaaluhind on $p^* = 40 - 3 \cdot 6 = 22$.

Kujutame olukorda joonisel 3.3. Nõudluskõvera algordinaat on 40 ja tegu on langeva sirgega tõusuga -3. Pakkumisfunktsioonile vastava parabooli lõikepunkti hinnateljega leiame, võttes koguse nulliks: $p = 0{,}5 \cdot 0^2 - 0 + 10 = 10$. Väärtuse $q = 1$ korral on hind sellest väiksem: $p = 0{,}5 \cdot 1^2 - 1 + 10 = 9{,}5$. Järelikult on parabool esmalt kahanev ning siis kasvav, miinimumpunkti täpne asukoht pole ülesande lahendamiseks oluline.



Joonis 3.3. Tarbija ja tootja hinnavarud näiteülesandes

Tarbijate hinnavaru leidmine on lihtne. Leiame kolmnurga pindala:

$$HV_{tarbija} = \frac{(40-22)6}{2} = 54.$$

Püüame arvutada tarbija hinnavaru ka integraali abil. Proovime esmalt esimest võimalust. Arvutame integraali:

$$\int_0^6 (40-3q)dq = \left(40q - \frac{3q^2}{2}\right)\Bigg|_0^6 =$$

$$= \left(40\cdot 6 - \frac{3\cdot 6^2}{2}\right) - \left(40\cdot 0 - \frac{3\cdot 0^2}{2}\right) = 186,$$

tarbijate kulutused on võrdsed tootjate tuluga: $p^*q^* = 22\cdot 6 = 132$, tarbijate hinnavaru seega:

$$HV_{tarbija} = 186 - 132 = 54.$$

Kasutades teist varianti, tuleb leida nõudlusfunktsioon. See on $q = \frac{40}{3} - \frac{1}{3}p$. Arvutame integraali abil tarbija hinnavaru:

$$HV_{tarbija} = \int_{22}^{40}\left(\frac{40}{3} - \frac{1}{3}p\right)dp = \left(\frac{40q}{3} - \frac{p^2}{6}\right)\Bigg|_{22}^{40} =$$

$$= \left(\frac{40\cdot 40}{3} - \frac{40^2}{6}\right) - \left(\frac{40\cdot 22}{3} - \frac{22^2}{6}\right) = 54.$$

Nagu näha, andsid kõik kolm meetodit tarbija hinnavaru arvutamiseks sama tulemuse.

Tootjate hinnavaru tuleb kindlasti leida integraali abil. Et meie näites on pakkumise pöördfunktsioon ruutfunktsioon, siis pakkumisfunktsiooni on keerukas leida ja kasutada. Lisaks sellele pole võimalik eespoolkirjeldatud teist varianti kasutada pakkumiskõvera kuju tõttu (algul kahanev, siis kasvav).

Arvutame pakkumiskõvera aluse pindala tasakaalukoguseni:

$$\int_0^6 \left(0{,}5q^2 - q + 10\right)dq = \left(\frac{q^3}{6} - \frac{q^2}{2} + 10q\right)\Bigg|_0^6 =$$

$$\left(\frac{6^3}{6} - \frac{6^2}{2} + 10 \cdot 6\right) - \left(\frac{0^3}{6} - \frac{0^2}{2} + 10 \cdot 0\right) = 78,$$

tootjate kogutulu on: $R = p^* q^* = 22 \cdot 6 = 132$, seega tootjate hinnavaru:

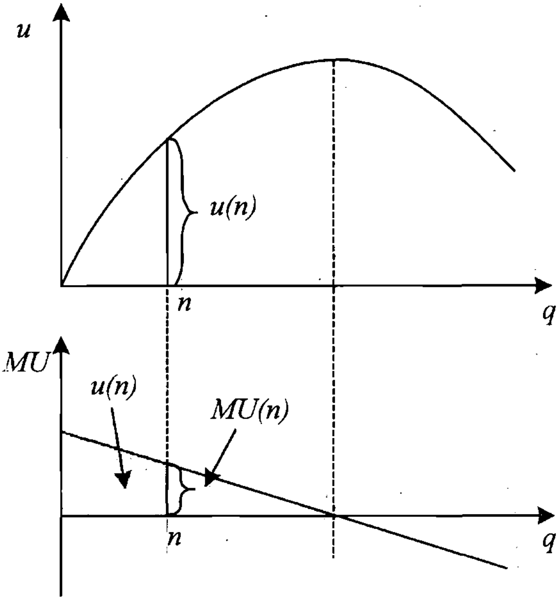
$$HV_{tootja} = 132 - 78 = 54.$$

3.3. Kogu- ja piirfunktsiooni seos

Määratud integraal võimaldab selgitada kogufunktsiooni ning piirfunktsiooni seost. Vaatleme näiteks mingit suvalist kogufunktsiooni. Olgu selleks näiteks kumer kasulikkusfunktsioon $u = u(q)$, nagu kujutatud joonisel 3.4. Konkreetse väärtuse $q = n$ juures väljendab kasulikkusfunktsiooni väärtus $u = u(n)$ selle koguse kauba tarbimisest saadavat kogukasulikkust. Sellele funktsioonile vastab kahanev lineaarne piirkasulikkusfunktsioon $MU = MU(q)$.

Konkreetse väärtuse $q = n$ juures väljendab piirkasulikkusfunktsiooni väärtus $MU_n = MU(n)$ n-nda (ehk hetkel viimase) ühiku tarbimisest saadavat kasulikkust. Kui alates esimesest ühikust iga täiendava ühiku tarbimisel lisanduvad kasulikkused liita kuni viimase n-nda ühikuni, saadakse n ühiku kogukasulikkus:

$$MU_1 + MU_2 + \cdots + MU_n = \sum_{i=1}^{n} MU_i = u(n).$$



Joonis 3.4. Kogukasulikkus ja piirkasulikkus graafiliselt

Pideva kasulikkusfunktsiooni korral on lisanduvad ühikud lõpmatult väikesed. Sellisel juhul asendab summat $\sum_{i=1}^{n}$ määratud integraal $\int_{0}^{n}$. Märkus. Enne mõõtsime kauba koguseid täisarvuliselt (tükkides) ning koguseteljel kirjeldas lõik nullist üheni esimest kaubaühikut, seepärast algab vastav piirkond pideva funktsiooni ja lõpmatult väikeste kaubaühikute korral nullist. Seega võib kirjutada:

$$\int_{0}^{n} MU(q)dq = u(n).$$

Üldistades: määratud integraal piirfunktsioonist vahemikus nullist kuni mingi konkreetse argumendi väärtuseni x_0 annab kogufunktsiooni väärtuse ilma vabaliikmeta sellel konkreetsel argumendi väärtusel:

$$\int_0^{x_0} f(x)dx = F(x_0), \text{ kus } F'(x) = f(x).$$

Graafiliselt tähendab see järgmist. Mingi ühiku piirkasulikkust kujutab graafiliselt vertikaalne joon koguseteljest kuni piirkasulikkusfunktsioonini. Kõigi lõpmatult väikeste ühikute piirkasulikkused kujutavad siis endast tihedalt üksteise kõrval olevaid jooni, mis moodustavad pinna. Kui liita kõigi lõpmatult väikeste ühikute piirkasulikkused nullist mingi ühikuni n, siis annab see kokku mingi kõvertrapetsi — ühelt poolt kogusetelje ja piirkasulikkusfunktsiooni graafiku vahel ning teiselt poolt nullkoguse ja koguse n vahel. Selle kõvertrapetsi pindala väljendab koguse n kogukasulikkust, mille teiseks graafiliseks kujutiseks on vertikaalne joon koguseteljest kuni kasulikkusfunktsioonini. Seega, proportsionaalse joonise korral peaks nulli ja n vahele jääva piirkasulikkuskõvera aluse kõvertrapetsi pindala olema võrdne kasulikkusfunktsiooni kõrgusega kohal n.

4. MAATRIKSALGEBRA

4.1. Maatriksid ja determinandid

Maatriksalgebral on matemaatilises majandusteaduses lai kasutusala, kuna ta lihtsustab oluliselt arvutusi ja tehteid suurte andmekogumitega. Maatriksalgebra oluline kasutusvaldkond majandusteaduses on lineaarvõrrandisüsteemide lahendamine. Lisaks sellele kasutatakse maatriksalgebrat näiteks optimeerimisel lahendi olemuse kontrollimiseks jm.

Maatriks on arvude, funktsioonide või muude elementide korraldatud kogum. $m \times n$ maatriksil on m rida ja n veergu:

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Maatriksit võib tähistada erinevate sulgudega või kahekordsete püstjoontega:

$$A = \left[a_{ij}\right] = \left(a_{ij}\right) = \left\| a_{ij} \right\|.$$

Maatriksi elemendi esimene indeks näitab, mitmendas reas element asub, ja teine indeks, mitmendas veerus element asub. Maatriksit, millel on ainult üks rida või veerg, nimetatakse vastavalt rea- või veeru**vektoriks**. Majandusmudelites kasutatakse enamasti **ruutmaatrikseid**, kus ridade ja veergude arv on sama.

Maatriksit, mille read on lähtemaatriksi veerud ja veerud lähtemaatriksi read, nimetatakse **transponeeritud maatriksiks** ja tähistatakse A' või A^T. Maatriks B on võrdne transponeeritud maatriksiga A^T, kui:

$\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ji}\right]$.

Ruutmaatriksi korral on transponeeritud maatriks esialgse maatriksi peegeldus üle peadiagonaali (vasakult ülevalt paremale alla).

Et maatriksitega edukalt opereerida, tuleb osata teha **tehteid maatriksitega**. Maatriksalgebra reeglitega saab põhjalikumalt tutvuda kõrgema matemaatika õpikute abil, siinkohal on toodud olulisimad. Maatriksite liitmisel liidetakse summamaatriksi elemendi saamiseks kahe maatriksi samal kohal asuvad elemendid:

$\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$.

Lahutamisel lahutatakse analoogiliselt ühe maatriksi elementidest teise maatriksi elemendid:

$\left[a_{ij}\right]-\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}-b_{ij}\right]$.

Liita ja lahutada saab maatrikseid, millel on sama palju nii ridu kui ka veerge.

Maatriksite korrutamisel korrutatakse konkreetse elemendi (i-nda rea j-nda veeru elemendi) saamiseks omavahel esimese maatriksi vastava (i-nda) rea ja teise maatriksi vastava (j-nda) veeru elemendid ning korrutised summeeritakse:

$\left[a_{ij}\right]\left[b_{ij}\right]=\left[a_{i1}\,b_{1j}+a_{i2}\,b_{2j}+\cdots+a_{in}\,b_{mj}\right]$.

Nagu ka valemist näha, peab korrutatavate maatriksite puhul esimese maatriksi veergude arv võrduma teise maatriksi ridade arvuga (sama järku ehk samade mõõtmetega ruutmaatriksite korral on see tingimus alati täidetud). Erinevalt arvude korrutamisest on maatriksite korrutamisel oluline tegurite järjekord.

Maatriksi korrutamisel mingi arvuga korrutatakse selle arvuga kõik maatriksi elemendid:

$$k\left[a_{ij}\right]=\left[k\,a_{ij}\right].$$

Jagamistehte analoog maatriksalgebras on ühe maatriksi korrutamine teise maatriksi pöördmaatriksiga. **Pöördmaatriks** A^{-1} on maatriks, mis esialgse maatriksiga A korrutamisel (nii vasakult kui paremalt) annab tulemuseks ühikmaatriksi E:

$$A\,A^{-1}=A^{-1}A=E=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

Seosest võib järeldada, et pöördmaatriks saab eksisteerida vaid maatriksil, mille ridade arv võrdub veergude arvuga.

Pöördmaatriksi leidmise meetodeid on mitu, ühte neist tutvustatakse edaspidi Leontiefi mudeli juures.

Maatriksitega seondub **determinandi** mõiste. Determinant on konkreetsele ruutmaatriksile vastav kindel arvuline väärtus, mida arvutatakse kindlate reeglite kohaselt. Determinanti tähistatakse püstjoontega. Mõnikord tähistatakse determinanti tähega D, mille alaindeks viitab vastavale maatriksile. Maatriksi A determinant:

$$|A|=\left|a_{ij}\right|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=D_A.$$

Lihtsalt öeldes leitakse determinanti arvutades kõik sellised erinevad maatriksi elementide komplektid, kus ühes komplektis oleks iga rida ja iga veerg esindatud vaid ühe elemendi näol. Kui tegu on n-ndat järku ruutmaatriksiga, siis saadakse n komplekti ja ühes komplektis on n elementi. Siis leitakse kõigi komplekti kuuluvate elementide korrutis iga komplekti jaoks. Kõik korrutised, kus esimese rea element kuulus paarisarvulise järjenumbriga veergu (2, 4, 6 jne), korrutatakse arvuga -1. Seejärel kõik korrutised summeeritakse.

Teist järku maatriksi determinanti arvutatakse näiteks järgmiselt:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}\,.$$

Kõrgemat järku determinandi arvutamise lihtsustamiseks leitakse maatriksi mingi, näiteks esimese rea (tavaliselt on arvutuste lihtsustamiseks mõttekas valida enim nulle sisaldav rida) igale elemendile vastavad **miinorid**. Selleks jäetakse lähtemaatriksist ära rida ja veerg, kus konkreetne element asub (elemendi a_{ij} korral rida järjenumbriga i ja veerg järjenumbriga j) ning arvutatakse sellise maatriksi determinant. Miinorit, mis on korrutatud arvuga $(-1)^{i+j}$, nimetatakse **alamdeterminandiks** A_{ij}. Esimese rea esimese elemendi korral summa $i + j$ on 2, teise elemendi puhul 3 jne. Seega tuleb (esimese rea valimisel) iga teise elemendi miinor korrutada arvuga -1.

Suvalise valitud rea elementide ja vastavate alamdeterminantide korrutiste summa on võrdne maatriksi determinandiga. Näiteks kolmandat järku maatriksi determinandi võib arvutada nii:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Sellist n-ö lahtikirjutamist determinandi arvutamise lihtsustamiseks nimetatakse determinandi **arendamiseks**. Kõrgemat järku determinantide korral jätkatakse determinandi arendamist (järjest väiksemat järku alamdeterminantideks) kuni determinandi arvutamine on jõukohane.

4.2. Lineaarvõrrandisüsteemid

Nägime, et kõige lihtsama turutasakaalu mudeli moodustavad kolm võrrandit:

$$q^S = -a + bp,$$
$$q^D = c - dp,$$
$$q^D = q^S,$$

kus $a, b, c, d > 0$.

Tähistades $q^D = q^S = q$, saab mudeli taandada kahe võrrandi ja kahe tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemiks; tavapärasel kujul:

$$\begin{cases} bp - q = a, \\ dp + q = c. \end{cases}$$

Paljud majandusmudelid sisaldavad aga tunduvalt rohkem võrrandeid enamate tundmatutega. Ka turutasakaalu mudelile on võimalik lisada täiendavaid võrrandeid, näiteks aktsiisimaksu lülitamisel mudelisse. Alati ei ole võrrandid küll lineaarsed, kuid teatud juhtudel on neid võimalik matemaatiliste teisendustega, näiteks logaritmides, lineaarseks muuta. Keerukamate lineaarvõrrandisüsteemide puhul on otstarbekas **kasutada maatriksalgebrat**.

Olgu meil mingi majandusprobleemi lahendamiseks koostatud lineaarvõrrandisüsteem (mõistliku probleemipüstituse korral on võrrandeid sama palju kui tundmatuid, olgu selleks arvuks n):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Samad seosed saab välja kirjutada ka maatriksite ja vektorite abil. Kuna vektorid on võrdsed, kui kõik elemendid kahes vektoris on võrdsed, siis võib võrrandisüsteemi kirjutada kahe vektori võrdusena:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Vasakpoolse vektori võib lahutada kaheks teguriks, tuginedes maatriksite ja vektorite korrutamise reeglitele. Näiteks esimese võrrandi vasakul pool olev korrutiste summa on esimene element vektorist, mis saadakse koefitsientide maatriksi ja muutujate vektori korrutamisel, teise võrrandi vasak pool on võrdne teise elemendiga sellest vektorist jne. Seega võib kirjutada, et koefitsientide maatriks korrutatud tundmatute vektoriga on võrdne vabaliikmete vektoriga:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ehk

$AX = B$.

Olgu siinkohal toodud väike näide. Šokolaadivabrik toodab kolme sorti šokolaadi: mõrušokolaad (M), piimašokolaad (P) ja valge šokolaad (V). Ühe kasti mõrušokolaadi tootmiseks kulub 4 ühikut kakaod, 1 ühik suhkrut ja 6 ühikut piimapulbrit. Kastitäie piimašokolaadi tootmiseks vajatakse 2 ühikut kakaod, 4 ühikut suhkrut ja 5 ühikut piimapulbrit. Sama koguse valge šokolaadi tootmiseks vajatakse seevastu vaid 5 ühikut suhkrut ja 6 ühikut piimapulbrit. Laos on 100 ühikut kakaod, 230 ühikut suhkrut ja 330 ühikut piimapulbrit. Kuidas peaks toodang jaotuma, et varud saaksid ammendatud?

Koostame süsteemi, kus iga võrrand kirjeldab mingi tooraine kasutamist. Toodetav šokolaadikogus kastides, korrutatuna kastitäie jaoks vajamineva tooraine kogusega, annab selle šokolaadisordi jaoks kuluva toorainekoguse. Kui erinevate sortide jaoks vajaminevad toorainekogused summeerida, on tulemuseks konkreetse tooraine vajadus. Saame kolm võrrandit, mis kirjeldavad vastavalt kakao, suhkru ja piimapulbri kasutamist:

$$\begin{cases} 4M + 2P + 0V = 100, \\ 1M + 4P + 5V = 230, \\ 6M + 5P + 6V = 330. \end{cases}$$

Sama süsteemi võib kirja panna ka maatrikskujul:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ P \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 230 \\ 330 \end{bmatrix}.$$

Lineaarvõrrandisüsteem on üheselt lahenduv, kui võrrandid on lineaarselt sõltumatud. Seda saab kontrollida, leides koefitsientide maatriksi determinandi $|A|$. Kui see on võrdne nulliga, on võrrandid omavahel sõltuvuses ja süsteem ei ole üheselt lahenduv (küll aga võib süsteemil olla lõpmatu arv lahendeid). Sisuliselt tähendab see seda, et kui näiteks kaks võrrandit on lineaarses sõltuvuses, siis on võimalik teisenduste teel saada ühest võrrandist teine ja süsteemis on võrrandeid vähem kui tundmatuid.

Antud näites on determinant nullist erinev:

$$|A| = 4 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 6 + 0 \cdot 1 \cdot 5 - 0 \cdot 4 \cdot 6 - 2 \cdot 1 \cdot 6 - 5 \cdot 5 \cdot 4 =$$
$$= 96 + 60 - 12 - 100 = 44,$$

seega on ühene lahend olemas.

Maatriksvõrrandi lahendamiseks on mitu meetodit, kasutame siinkohal **Crameri reeglit**. Selle kohaselt on tundmatu x_i võrdne jagatisega, kus nimetajaks on koefitsientide maatriksi determinant $|A|$ ja lugejaks sama determinant, mille veerg järjenumbriga i on asendatud vabaliikmete vektoriga B. Tähistame sellise determinandi $|A_i|$. Märkus. Ka siit võime näha, et kui determinant $|A|$ võrduks nulliga, poleks võimalik lahendeid Crameri reegli abil leida.

Leiame tundmatud M, P ja V:

$$M = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 2 & 0 \\ 230 & 4 & 5 \\ 330 & 5 & 6 \end{vmatrix}}{44} = \frac{440}{44} = 10,$$

$$P = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 100 & 0 \\ 1 & 230 & 5 \\ 6 & 330 & 6 \end{vmatrix}}{44} = \frac{1320}{44} = 30,$$

$$V = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 100 \\ 1 & 4 & 230 \\ 6 & 5 & 330 \end{vmatrix}}{44} = \frac{880}{44} = 20.$$

Seega tuleks varude täielikuks ammendamiseks toota 10 kasti mõrušokolaadi, 30 kasti piimašokolaadi ja 20 kasti valget šokolaadi. Muidugi võinuks leida võrrandisüsteemile lahendi lihtsalt tavalist asendusmeetodit kasutades. Rohkema arvu võrrandite korral muutub see aga keeruliseks ja aeganõudvaks. Siinjuures ei tohi unustada, et ka suurema maatriksi determinandi arvutamine on keerukas. Seepärast jäägu iga lahendaja enda otsustada, milline meetod konkreetsel juhul kõige vähem vaeva nõuab.

4.3. Sisendi-väljundi mudelid

Maatriksarvutust kasutatakse majandusteaduses sisendi-väljundi mudelite korral. Nendes kasutatava loogika mõistmiseks olgu siinkohal toodud näide ühe hüpoteetilise majanduse mudelist.

Oletame, et majandus toodab ainult kahte toodet. Esimese toote tootmiseks on vaja toorainena teist toodet ja vastupidi (näiteks on elektri tootmiseks vajalik põlevkivi, samas aga ei saa põlevkivi toota ilma elektrita). Oletame, et ühe ühiku esimese toote tootmiseks on vaja s ühikut teist toodet, teise toote ühe ühiku tootmiseks aga t ühikut esimest toodet. Kui me tähistame harude kogutoodangud vastavalt x_1 ja x_2 ning tarbijani jõudvad tootekogused vastavalt y_1 ja y_2, saame kirjutada järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x_1 - tx_2 = y_1, \\ -sx_1 + x_2 = y_2. \end{cases}$$

Kui lahutada esimese toote kogutoodangust (x_1) kogus, mis läheb vaja teise toote tootmiseks (teise toote kogutoodang korrutatud ühe ühiku jaoks vajalik esimese toote kogus), saame esimese toote lõpptoodangu y_1, mis jõuab tarbijani. Teise toote lõpptoodang kujuneb analoogiliselt.

Maatrikskujul näeks võrrandisüsteem välja selline:

$$\begin{bmatrix} 1 & -t \\ -s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Kasutades Crameri reeglit on võimalik leida valemid vajalike kogutoodangu koguste leidmiseks, kui on teada näiteks tarbija nõutavad lõpptoodangu kogused:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & -t \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -t \\ -s & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y_1 + ty_2}{1 - st},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ -s & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -t \\ -s & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y_2 + sy_1}{1 - st}.$$

4.4. Leontiefi mudel

Tuntud mudel majandusteaduses, kus kasutatakse maatriksarvutust, on Leontiefi mudel. **Leontiefi mudel** on sisendi-väljundi mudel, mis kirjeldab majanduses toimuvat tootmisprotsessi — tootmiseks vajalike sisendite ja väljundite vahelisi seoseid.

Kogu majandus on mudelis jaotatud kindlaks hulgaks (n) tootmisharudeks, mis on omavahel põimunud: nii nagu eelnevas näiteski, kulub ühe haru toodangu valmistamiseks paljude teiste harude toodangut. Seejuures eeldatakse tootmistehnoloogia muutumatust: erinevate harude toodangut kasutatakse tootmisteguritena kogu aeg samas vahekorras. Toodangu liikumist erinevate harude vahel ja lõpptarbijale kirjeldab suur kokkuvõtlik tabel — **maatriksbilanss**. Maatriksbilansi koostamine põhineb asjaolul, et seoseid ja toodangu liikumist on võimalik kirjeldada kahest aspektist vaadatuna: lähtuvalt tootvast või tarbivast harust.

Tootvast harust lähtuvalt võib öelda, et ühe haru toodangut kasutatakse peale lõpptarbimise paljudes teistes harudes tootmisprotsessi sisendina. Kogutoodang jaguneb niisiis erinevate harude tarbimiseks ja lõpptarbimiseks ehk lõpptoodanguks. Lõpptarbimisse kuulub näiteks tarbimine kodumajapidamistes, samuti asutustes, keda finantseeritakse riigieelarvest. Mainitud seose võib kirja panna üldvõrrandina, mis kirjeldab i-nda haru toodangu tarbimist. See on maatriksbilansi **rea üldvõrrand**:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i = x_i ,$$

kus:

i — tootva haru järjenumber ($i = 1 \ldots n$),

j — tarbiva haru järjenumber ($j = 1 \ldots n$),

x_{ij} — i-nda haru toodang, mis läheb uuesti tarbimisse j-ndas harus,

x_i — i-nda haru kogutoodang,

y_i — i-nda haru lõpptoodang, mis läheb tarbimisse väljaspool tootmissektorit.

Näiteks esimese rea võrrand oleks siis: $\sum_{j=1}^{n} x_{1j} + y_1 = x_1$.

Tarbiva haru poolt vaadatuna kulub ühe haru toodangu valmistamiseks erinevaid tooraineid ja sellele lisandub veel tootmisel lisatud väärtus. Lisatud väärtuse alla kuuluvad näiteks töötajate palk, amortisatsioon, samuti maksud. Haru kogutoodangu väärtuse kujunemist kirjeldab maatriksbilansi **veeru üldvõrrand**, mis kirjeldab j-nda haru toodangu tootmist:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j = x_j,$$

kus:

z_j — j-nda haru lisatud väärtus,

x_j — j-nda haru kogutoodang.

Esimese veeru võrrand oleks siis näiteks: $\sum_{i=1}^{n} x_{i1} + z_1 = x_1$.

Harudevaheline maatriksbilanss näeb välja järgmine:

haru	1	$\cdots$	j	$\cdots$	n	*lõpp - toodang*	*kogu - toodang*
1	x_{11}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1n}	y_1	x_1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	x_{i1}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{in}	y_i	x_i
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_{n1}	$\cdots$	x_{nj}	$\cdots$	x_{nn}	y_n	x_n
lisatud väärtus	z_1	$\cdots$	z_j	$\cdots$	z_n	$\sum_i y_i = \sum_j z_j$	–
kogu - toodang	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n	–	$\sum_i x_i = \sum_j x_j$

Bilansi **read näitavad**, kuidas tarbitakse erinevate harude toodangut, **veerud** aga seda, kuidas erinevate harude toodangut toodetakse.

Mõnikord on vaja teada, milline peaks olema näiteks kogutoodang, kui lõpptoodangu vajadus muutub. Küsimus võib olla ka püstitatud nii, et on teada planeeritav uus kogutoodang ning vaja on teada, kui palju võimaldab see anda toodangut lõpptarbimisse. Selliste probleemide lahendamiseks on mõistlik kasutada maatriksalgebrat.

Tabelis kirjeldatut võib kirja panna ka maatrikskujul, keskendudes näiteks reavõrranditele. Erinevate vahetarbimiste summa vektor, liidetuna lõpptarbimise vektorile, annab tulemuseks kogutoodangu vektori:

$$\begin{bmatrix} x_{11}+\cdots+x_{1n} \\ \vdots \\ x_{n1}+\cdots+x_{nn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Kui **tootmistehnoloogia** jääb samaks, siis ühe haru toodangu kogus, mida vajatakse teise haru toodangu ühiku tootmiseks, ei muutu. Tootmistehnoloogiat kirjeldavad kulukoefitsiendid. **Otsekulukoefitsient** a_{ij} näitab, kui palju kulub i-nda haru toodangut j-nda haru kogutoodangu ühiku valmistamiseks:

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j}.$$

Kõik otsekulukoefitsiendid moodustavad otsekulukoefitsientide maatriksi A:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Avaldades otsekulukoefitsientide valemist vahetarbimise, saame $x_{ij}=a_{ij}\,x_j$. Seega võib harude vahetarbimised x_{ij} asendada avaldisega $a_{ij}\,x_j$:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Selline asendus võimaldab uurida lõpptoodangu või kogutoodangu muutuste tagajärgi olemasoleva tootmistehnoloogia korral. Otsekulukoefitsientide kaudu on seotud kogutoodangu ja lõpptoodangu väärtused.

Vastavalt maatriksite korrutamise reeglitele võime kirjutada:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ehk

$$AX + Y = X .$$

Kui on teada kogutoodang ja tootmistehnoloogia, kuid puuduvad andmed selle kohta, kui palju toodangut jääb lõpptarbijale, on võimalik maatriksvõrrandist avaldada lõpptoodangu vektor:

$$Y = X - AX = (E - A)X .$$

Veidi keerulisemaks osutub vastupidise probleemi lahendamine, s.t. uue vajaliku kogutoodangu vektori leidmine, kui on teada uus vajalik kogus lõpptoodangut ehk uus lõpptoodangu vektor. Avaldame võrrandist $(E - A)X = Y$ vektori X. Selleks korrutame võrrandi vasakult maatriksiga $(E - A)^{-1}$:

$$(E - A)^{-1}(E - A)X = (E - A)^{-1}Y \text{ ehk}$$

$$X = (E - A)^{-1}Y .$$

Maatriksit $(E - A)^{-1}$ tähistatakse lühiduse mõttes tähega B ning nimetatakse **täiskulukoefitsientide** maatriksiks, kuna maatriksi elemendid b_{ij} näitavad i-nda haru kogutoodangu vajadust j-nda haru lõpptoodanguühiku valmistamiseks. Täiskulukoefitsiendi erinevus võrreldes otsekulukoefitsiendiga on järgmine: otsekulukoefitsient näitab j-nda haru toodanguühiku valmistamisel tootmisteguriна kasutatavat i-nda haru toodangu kogust, täiskulukoefitsient aga i-nda haru kogutoodangu suurust, mis tuleb toota kokku (kaasa arvatud lõpptarbimine ja tarbimine muudes harudes), kui tahetakse toota 1 ühik j-nda haru lõpptoodangut.

4.5. Maatriksarvutused Leontiefi mudelis

Kasutame kirjeldatud matemaatilist aparatuuri konkreetse näiteülesande lahendamisel. Olgu antud kahe haruga fragment maatriksbilansist:

haru	1	2	*lõpptoodang*	*kogutoodang*
1	200	120	680	1000
2	500	480	220	1200
lisaväärtus	300	600	900	–
kogutoodang	1000	1200	–	2200

.

Oletame, et uus planeeritav kogutoodang esimeses harus on 1100 ja teises harus 1400 ning tootmistehnoloogia jääb samaks. Proovime leida sellisel juhul lõpptarbimisse jõudvaid toodangumahtusid.

Leiame esmalt otsekulukoefitsientide maatriksi. Selleks jagame vahetarbimisse minevad toodangumahud vastava veeru kogutoodanguga:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

Leiame maatriksi $E - A$:

$$E - A = \begin{bmatrix} 1-0{,}2 & 0-0{,}1 \\ 0-0{,}5 & 1-0{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}5 & 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

Lõpptoodangu vektori leidmiseks korrutame selle maatriksi kogutoodangu vektoriga:

$$Y = (E - A)X = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}5 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1100 \\ 1400 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} 0{,}8\cdot 1100-0{,}1\cdot 1400 \\ -0{,}5\cdot 1100+0{,}6\cdot 1400 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 740 \\ 290 \end{bmatrix}.$$

Seega jõuab planeeritud juhul lõpptarbijani 740 ühikut esimese haru toodangut ja 290 ühikut teise haru toodangut.

Oletame, et see plaan osutus sobimatuks, ning nüüd soovitakse teada, milline peaks olema kogutoodangu vektor, et lõpptoodang oleks 800 esimeses harus ja 300 teises harus. Kogutoodangu vektori leidmiseks tuleb teha tehe: $X=(E-A)^{-1}Y=B\cdot Y$. Selleks leiame täiskulukoefitsientide maatriksi $B=(E-A)^{-1}$ ehk maatriksi $E-A=\begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}5 & 0{,}6 \end{bmatrix}$ pöördmaatriksi.

Pöördmaatriksi leidmiseks on erinevaid meetodeid, siinkohal kasutame valemit, mille kohaselt mingi maatriksi A pöördmaatriks A^{-1} arvutatakse nii:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A,$$

kus $|A|$ on maatriksi A determinant ja $\operatorname{adj}A$ on maatriksi A adjungeeritud maatriks. **Adjungeeritud maatriks** (seda tähistatakse ka $\tilde{A}$) leitakse, asendades lähtemaatriksis iga elemendi a_{ij} talle vastava alamdeterminandiga A_{ij} ning transponeerides saadud maatriksi.

Kui $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, siis $\operatorname{adj} A = \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$.

Kui tegu on teist järku maatriksiga, siis on alamdeterminandiks vaid üks element. Leiame maatriksi $E - A = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,5 & 0,6 \end{bmatrix}$ miinorite maatriksi:

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,5 \\ -0,1 & 0,8 \end{bmatrix},$$

vastav alamdeterminantide maatriks on:

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,5 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Transponeerime selle maatriksi, leidmaks maatriksi $E - A$ adjungeeritud maatriksit:

$$\operatorname{adj}[E - A] = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,5 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Arvutame ka maatriksi $E - A$ determinandi:

$$|E - A| = 0,8 \cdot 0,6 - (-0,5) \cdot (-0,1) = 0,48 - 0,05 = 0,43.$$

Nüüd võib leida pöördmaatriksi:

$$B = (E - A)^{-1} = \frac{1}{|E - A|} \cdot \operatorname{adj}[E - A] =$$

$$= \frac{1}{0,43} \begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 \\ 0,5 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,40 & 0,23 \\ 1,16 & 1,86 \end{bmatrix}.$$

Oletades, et uus lõpptoodangu vektor on (300,800), saame uueks kogutoodangu vajaduseks esimeses harus 1189 ja teises harus 1486:

$$X = (E - A)^{-1} Y = BY = \begin{bmatrix} 1{,}40 & 0{,}23 \\ 1{,}16 & 1{,}86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 800 \\ 300 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}40 \cdot 800 + 0{,}23 \cdot 300 \\ 1{,}16 \cdot 800 + 1{,}86 \cdot 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1189 \\ 1486 \end{bmatrix}.$$

Uus maatriksbilanss on sellisel juhul järgmine:

haru	1	2	*lõpptoodang*	*kogutoodang*
1	237,8	148,6	300	1189
2	594,5	594,4	800	1486
lisaväärtus	356,7	743	1100	–
kogu - toodang	1189	1486	–	2675

Nagu näha, kuna tootmistehnoloogia jääb samaks, läheb vahetarbimisse sama proportsioon kogutoodangust.

Maatriksarvutust kasutatakse palju ka suurte, paljude võrranditega **makroökonoomiliste mudelite** analüüsimisel. Üks väike näide sellest järgneb võrdlevat staatikat käsitlevas peatükis.

5. OPTIMEERIMINE

5.1. Ühe muutuja funktsiooni ekstreemumid

Majanduses tuleb tihti ette, et mingi eesmärgi saavutamiseks on mitu alternatiivset võimalust. Mõned alternatiivid on teistest mingi kriteeriumi alusel paremad kui teised. Parima alternatiivi leidmist mingi kriteeriumi alusel nimetatakse **optimeerimiseks.** Sageli püütakse saavutada mingi näitaja kõige suuremat (maksimeerimine) või kõige väiksemat (minimeerimine) antud tingimustel võimalikku väärtust. Näiteks otsitakse sellist toodangukogust, mis tagab minimaalsed kulud, või peetakse parimaks hoopis sellist toodangumahtu, mille korral kasum on maksimaalne.

Maksimumi või miinimumi ühine matemaatiline nimetus on ekstreemum: püütakse ju leida funktsiooni äärmuslikult suurt ehk suurimat väärtust või siis äärmuslikult väikest ehk vähimat väärtust. Kuigi optimeerimisülesanne nõuab tavaliselt kas maksimumi või miinimumi leidmist, leitakse esmalt siiski kõik ekstreemumid ja seejärel tehakse kindlaks, milline neist on miinimum (kui otsitakse miinimumi) või maksimum (kui otsitakse maksimumi).

Optimeerimisel leitakse teatud tingimuste alusel (millest kohe järgnevalt) sellised argumendi või argumentide väärtused, mille korral funktsiooni väärtus on vastavalt vajadusele kas maksimaalne või minimaalne. Kui tegu on näiteks ühe muutuja funktsiooniga $y = f(x)$, siis optimeerimisel leitakse selline muutuja x väärtus, mis tagab funktsiooni y maksimaalse või minimaalse väärtuse. Seda maksimaalset või minimaalset funktsiooni väärtust nimetatakse vastavalt **funktsiooni maksimumiks või miinimumiks**. Maksimum- või miinimumkohaks (sageli ka maksimum- või miinimumpunktiks) nimetatakse maksimumi või miinimumi tagavate argumentide väärtuste komplekti. Ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$ korral nimetatakse siis maksimum- või miinimumkohaks väärtust x_0, kus muutuja y väärtus on vastavalt maksimaalne või minimaalne. Mõeldes punkti graafilisele kujutamisele, on mõttekas **ekstreemumpunkti** väljendada punkti kõigi koordinaatidega, ühe muutuja funktsiooni korral: (x_0, y_0).

Seejuures tuleb tähele panna, et järgnevalt vaatluse alla tulevate ning tavapäraselt kasutatavate optimeerimise tingimuste kohaselt leitud ekstreemumeid tuleks vaadelda kui suhtelisi ehk **lokaalseid** ekstreemumeid. Lokaalses maksimumpunktis on funktsiooni väärtus küll suurem kui selle punkti naabruses, kuid ei pruugi olla kõige suurem kogu määramispiirkonna ulatuses. Samuti on lokaalses miinimumpunktis funktsiooni väärtus väiksem kui mõlemal pool seda punkti, kuid funktsiooni määramispiirkonnas võib esineda punkt, kus funktsiooni väärtus on veel väiksem. Näiteks joonisel 5.1 kujutatud lokaalne miinimum (punktis *A*) on väärtuselt suurem kui väärtus punktis *B*, seega pole tegu absoluutse miinimumiga. Seega: lokaalne ekstreemum võib, kuid ei pruugi olla absoluutne ehk globaalne ekstreemum.

Selleks, et mingis punktis asuks funktsiooni ekstreemum, peavad olema täidetud teatud tingimused. Kuna need tingimused on seotud esimest ja teist järku tuletisega funktsioonist, siis nimetatakse neid vastavalt esimest ja teist järku tingimuseks. Vaatleme esmalt **ühe muutuja funktsiooni** ekstreemumite leidmist. Enamate muutujatega funktsioonide optimeerimine tuleb vaatluse alla järgnevates peatükkides.

Esimest järku tingimuse abil selgitatakse välja kriitilised punktid, kus võib, kuid ei pruugi asuda ekstreemum. **Kriitiliseks punktiks** nimetatakse punkti, kus funktsioon ei kasva ega kahane. Selline punkt võib edasisel vaatlusel osutuda maksimum- või miinimumpunktiks, aga tegu võib olla ka hoopis **käänupunktiga** (vt ka joonist 5.1), kus funktsioon muutub kumerast nõgusaks või vastupidi (nagu joonisel 5.1) — sellises punktis funktsiooni kasv või kahanemine korraks peatub. Seda illustreerib ka funktsiooni tuletise graafik: kui funktsioon kasvab, on tuletis positiivne, kui kahaneb, siis negatiivne. Kui ekstreemumpunktides tuletise märk muutub, siis enne ja pärast käänupunkti on tuletis sama märgiga.

Kui kriitilises punktis x_0 funktsiooni väärtus ei kasva ega kahane, siis on funktsiooni väärtuse diferentsiaal selles punktis null. Täpsemalt, kui argumendile anda selles punktis mingi lõpmatult väike muutus $(dx \neq 0)$, siis funktsiooni väärtuse muutuse ligikaudne hinnang ehk diferentsiaal on null: $dy = 0$. Funktsiooni diferentsiaali valemi kohaselt peab siis kehtima:

$$dy = f'(x_0)dx = 0.$$

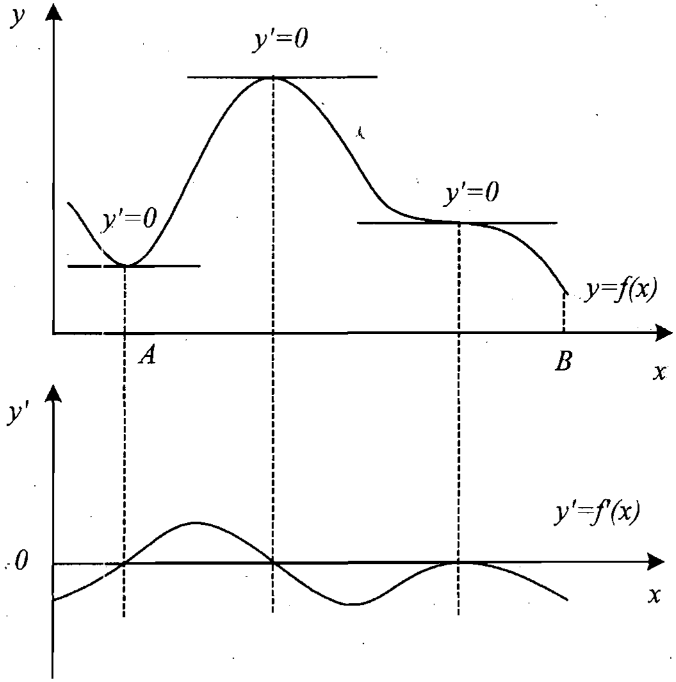
Kuna argumendi muutus on nullist erinev, siis peab kehtima:

$$f'(x_0) = 0.$$

See ongi kriitilise punkti leidmise ehk **esimest järku tingimuseks:** tegu on kriitilise punktiga (nt punkt x_0), kui funktsiooni esimese tuletise väärtus selles punktis on null: $f'(x_0) = 0$.

Jooniselt näeme, et funktsiooni graafiku puutuja on kriitilises punktis horisontaalne sirge, mille tõus on 0. Kuna funktsiooni graafiku puutuja tõusu mingis punktis näitab just nimelt funktsiooni tuletise väärtus selles punktis, siis on täiesti loogiline, et kriitilises punktis peab funktsiooni tuletis võrduma nulliga.

Niisiis tagab esimest järku tingimus kriitiliste punktide (kus võib üldse ekstreemum esineda) väljaselgitamise. Siinkohal tuleb meeles pidada, et esimest järku tingimus ei taga ekstreemumi olemasolu kõigis nendes punktides (tegu võib olla ka käänupunktiga). Seepärast nimetatakse seda tingimust ekstreemumi **tarvilikuks**, kuid mitte veel piisavaks tingimuseks. Et teha kindlaks kriitiliste punktide liik, kasutatakse teist järku tingimust ehk **piisavat** tingimust.



Joonis 5.1. Funktsiooni kriitilised punktid

Teist järku tingimuse abil valitakse leitud kriitiliste punktide hulgast välja ekstreemumpunktid. Ekstreemumpunktides peab funktsiooni diferentsiaali märk muutuma: maksimumpunktis asendub funktsiooni väärtuse kasv kahanemisega ja miinimumpunktis kahanemine kasvuga. Siit tuletataksegi teist järku tingimus.

Et kriitilises punktis x_0 eksisteeriks funktsiooni maksimum, peab funktsioon sellest punktist vasakul olema kasvav ja paremal kahanev. Seega enne seda punkti peab funktsiooni diferentsiaal olema positiivne ($dy > 0$) ja pärast seda negatiivne ($dy < 0$). See tähendab, et maksimumpunktis muutub dy positiivsest negatiivseks (ehk kahaneb).

Funktsiooni diferentsiaali dy muutust hindab ligikaudu tema diferentsiaal (n-ö funktsiooni diferentsiaali diferentsiaal) ehk funktsiooni teist järku diferentsiaal d^2y. Niisiis võime eeltoodu põhjal öelda: maksimumpunktis peab funktsiooni diferentsiaal dy kahanema ning teist järku diferentsiaal olema seega negatiivne:

$$d^2y < 0.$$

Analoogiliselt: et kriitilises punktis x_0 eksisteeriks funktsiooni miinimum, peab funktsioon sellest punktist vasakul olema kahanev ($dy < 0$) ja paremal kasvav ($dy > 0$). Seega miinimumpunktis peab dy muutuma negatiivsest positiivseks ehk kasvama ning teist järku diferentsiaal peab olema positiivne:

$$d^2y > 0.$$

Et sellisel kujul tingimusi on tülikas kasutada, viime need tuletisi kasutavale kujule. Tehes järgmised teisendused, saame teist järku diferentsiaali arvutamise valemi:

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = d[f'(x)]\,dx =$$
$$= [f''(x)dx]\,dx = f''(x)dx^2.$$

Eespoolleitud tingimus maksimumpunkti leidmiseks omandab nüüd sellise kuju:

$$d^2y = f''(x_0)dx^2 < 0.$$

Kui argumendile anda maksimumpunktis x_0 mingi lõpmatult väike muutus ($dx \neq 0$), siis funktsiooni teist järku diferentsiaal peab olema negatiivne. Kuna nullist erineva diferentsiaali ruut dx^2 on alati positiivne, siis peab negatiivne olema teise tuletise väärtus selles punktis:

$$f''(x_0) < 0.$$

Miinimumpunkti leidmise tingimusest:

$$d^2y = f''(x)dx^2 > 0$$

näeme analoogiliselt: et tegu oleks miinimumpunktiga, peab funktsiooni teist järku diferentsiaal selles punktis olema positiivne. Kuna nullist erineva diferentsiaali ruut dx^2 on alati positiivne, siis peab ka teise tuletise väärtus selles punktis olema positiivne:

$$f''(x_0) > 0.$$

Joniselt 5.1 näeme, et vasakul pool maksimumpunkti on funktsiooni tuletis positiivne ja paremal negatiivne. Maksimumpunktis on funktsiooni tuletis kahanev ning seega funktsiooni teine tuletis peab tõepoolest olema negatiivne. Miinimumpunktis on funktsiooni tuletis kasvav (enne negatiivne, pärast positiivne), seega teine tuletis peab miinimumpunktis olema positiivne.

Niisiis, **võttes kokku tarviliku ja piisava tingimuse**:

kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$, on tegu lokaalse maksimumpunktiga;

kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$, on tegu lokaalse miinimumpunktiga.

Siinkohal tasub teada, et piisav tingimus ei ole tingimata vajalik maksimumi või miinimumi olemasoluks mingis punktis. Teist järku tingimuse täidetus lubab kindlalt öelda, et vastavas kriitilises punktis asub miinimum või maksimum. Kui aga teist järku tingimus ei ole kriitilises punktis täidetud, ei saa sugugi väita, et selles punktis ei asu ekstreemum. Kriitilises punktis võib ekstreemum asuda ka siis, kui funktsiooni teise tuletise väärtus selles punktis on võrdne nulliga: $f''(x_0) = 0$. Sellise punkti olemuse selgitamiseks tuleb jätkata funktsiooni käitumise uurimist selles punktis.

Esimene võimalus sellise punkti olemuse kindlakstegemiseks on uurida funktsiooni tuletise graafikut (kas tuletise märk kriitilist punkti läbides muutub või mitte). Selline kontrollimeetod ei ole aga alati kõige lihtsamini rakendatav. Sageli kasutatakse sellisel juhul n-ndat järku tuletise reeglit.

Selle reegli rakendamisel toimitakse järgmiselt. Kui funktsiooni teise tuletise väärtus kriitilises punktis on null, jätkatakse järjest kõrgemat järku tuletiste võtmist, kuni leitakse esimene kõrgemat järku tuletis, mis selles punktis nullist erineb. Seega otsitakse sellist n-ndat järku tuletist, mille korral kehtiks:

$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0) \neq 0, \\ f^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Leitud n-ndat järku tuletise järgu alusel on võimalik määrata vaatlusaluse kriitilise punkti olemus. **n-ndat järku tuletise reegli** kohaselt: kui n on paaritu arv, on tegu käänupunktiga. Kui n on paarisarv, on tegu ekstreemumiga. Kas ekstreemumi korral on tegu maksimumi või miinimumiga, määratakse analoogiliselt teist järku tingimusega. Kui vaadeldavas punktis on funktsiooni n-ndat järku tuletise väärtus negatiivne: $f^{(n)}(x_0) < 0$, on tegu lokaalse maksimumpunktiga, kui aga n-ndat järku tuletise väärtus on positiivne: $f^{(n)}(x_0) > 0$, on tegu lokaalse miinimumpunktiga.

Proovime näiteks leida funktsiooni $y=(3-x)^4$ ekstreemumid. Võrdsustades esimese tuletise nulliga, leiame kriitilised punktid:

$$y'=4(3-x)^3(-1)=-4(3-x)^3=0\text{, siit}$$
$$(3-x)^3=0 \text{ ja}$$
$$x_0=3.$$

Funktsioonil on seega vaid üks kriitiline punkt kohal, kus muutuja x väärtus on 3. Leiame teise tuletise:

$$y''=-4\cdot 3(3-x)^2(-1)=12(3-x)^2.$$

Kohal $x_0=3$ on selle väärtus null: $y''(3)=12(3-3)^2=0$. Seega tuleb leida kõrgemat järku tuletised. Kolmandat järku tuletise väärtus kriitilises punktis on samuti null:

$$y'''=12\cdot 2(3-x)(-1)=-24(3-x) \text{ ja}$$
$$y'''(3)=-24(3-3)=0 .$$

Neljandat järku tuletise väärtus aga erineb nullist:

$$y^{(4)}=-24(-1)=24\neq 0 ,$$

seda ka kohal $x_0=3$:

$$y^{(4)}(3)=24.$$

Kuna $n=4$ on paarisarv, siis on tegu ekstreemumpunktiga. Kuna neljandat (ehk n-ndat) järku tuletis on positiivne: $y^{(4)}(3)=24>0$, siis on tegu miinimumpunktiga.

Vaatleme ekstreemumi leidmist järgmises optimeerimisülesandes. Olgu tegu lineaarse nõudlusfunktsiooniga $q=20-2p$. (Nõudluse pöördfunktsioon on siis $p=10-0{,}5q$.) Leiame, milline toodangumaht tagab ettevõttele maksimaalse kogutulu.

Kogutulufunktsioon leitakse tarbijate poolt makstava hinna ja müüdava koguse korrutisena:

$$R = pq = (10 - 0{,}5q)q = 10q - 0{,}5q^2 .$$

Kogutulufunktsiooni maksimumpunkti leidmise tarvilik tingimus on esimese tuletise ehk piirtulu võrdumine nulliga (hüüumärk võrdusmärgi kohal näitab, et võrduse vasak pool on pandud võrduma parema poolega):

$$R' = MR = 10 - q \overset{!}{=} 0 ,$$

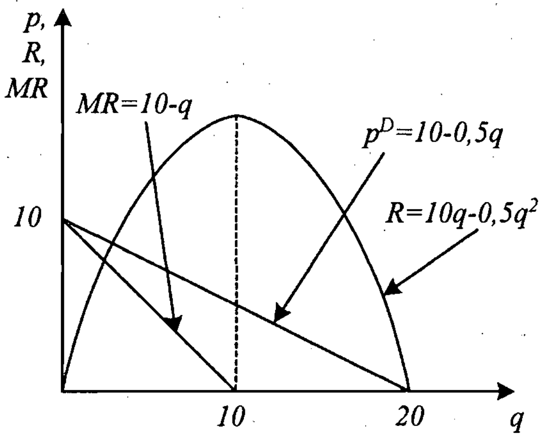
ning arvatav maksimaalset tulu tagav optimaalne toodangumaht on $q^* = 10$. Kontrollime, kas tegu on ikka maksimumpunktiga. Teine tuletis tulufunktsioonist on negatiivne:

$$R'' = MR' = -1 .$$

Järelikult on toodangumahu $q^* = 10$ korral tulu maksimaalne ning maksimaalne tulu on:

$$R_{max} = 10 \cdot 10 - 0{,}5 \cdot 10^2 = 50 .$$

Kujutame olukorra ka joonisel 5.2, kus horisontaalteljel on kogus ja vertikaalteljel on kujutatud kolm üksteisega seotud muutujat: hind, kogutulu ja piirtulu. Nõudluskõvera ja piirtulukõvera algordinaat on sama, kuid piirtulukõver langeb kaks korda kiiremini. Kui ühtegi toodanguühikut ei müüda, pole ka tulu. Seega algab kogutulukõver koordinaatteljestiku nullpunktist. Samas pole tulu ka siis, kui hind on null. Seega lõikab kogutulukõver horisontaaltelge samas punktis kus nõudluskõver: kui tarbija ei ole toote eest nõus enam midagi maksma, muutub kogutulu nulliks. Kogutulufunktsiooni maksimum on kohal, kus piirtulukõver lõikab horisontaaltelge (piirtulu on null).



Joonis 5.2. Nõudlus-, kogutulu- ja piirtulukõverad

Kõrvalmärkusena olgu öeldud, et lineaarse nõudluskõvera korral on nõudluskõvera ja piirtulukõvera algordinaat alati sama ning piirtulukõver langeb kaks korda kiiremini. Seda on lihtne näidata. Olgu meil lineaarne nõudluse pöördfunktsioon $p = a - bq$. Kogutulufunktsioon on siis

$$R = p\,q = (a - bq)\,q = aq - bq^2$$

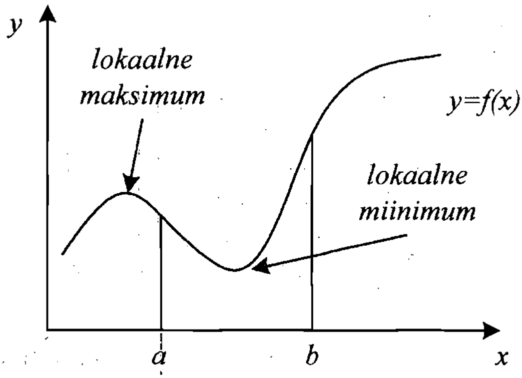
ja piirtulufunktsioon

$$MR = R' = a - 2bq\,.$$

Ainus nõudluse pöördfunktsiooni ja piirtulufunktsiooni erinevus on piirtulufunktsiooni absoluutväärtuselt kaks korda suurem tõus.

5.2. Ekstreemumite leidmine intervallis

Majandusteaduses analüüsitavates situatsioonides on mõnikord funktsiooni määramispiirkond piiratud: sõltumatu muutuja saab suse kehtestatud hinna alam- ja ülemmäär või on ettevõtte toodangumaht piiratud ettevõtte võimsusega. Sellistel juhtudel kasutatakse optimeerimist intervallis.



Joonis 5.3. Intervalli näide

Intervalliks nimetatakse mingit piirkonda (osa) funktsiooni määramispiirkonnast, mis tavaliselt määratletakse argumendi väärtuste lõiguga, näiteks: $x \in [a,b]$ ehk $a \leq x \leq b$. Intervallis on võimalik leida absoluutne miinimum ja maksimum. Jooniselt 5.3 on näha, et lokaalne maksimum või miinimum võib jääda intervallist välja — sellisel juhul on selles intervallis vastavalt absoluutseks maksimumpunktiks või miinimumpunktiks üks rajapunktidest. Võib ka juhtuda, et lokaalne maksimum on küll intervallis, kuid intervallis on punkte, kus funktsiooni väärtus on suurem lokaalsest maksimumist. Ka sellisel juhul on absoluutseks maksimumpunktiks üks rajapunktidest. Analoogiline võimalus on ka miinimumi puhul. Igal juhul eksisteerib funktsioonil mingis intervallis alati (absoluutne) maksimum ja miinimum.

Seega funktsiooni maksimumi ja miinimumi leidmisel intervallis tuleks lisaks intervallis asuvate lokaalsete ekstreemumite väljaselgitamisele **kontrollida** ka **funktsiooni väärtusi rajapunktides**. Selle protsessi võib tinglikult jaotada järgmisteks etappideks. Esmalt leitakse esimest järku tingimuse abil funktsiooni kriitilised punktid (nende olemuse selgitamine pole antud ülesande seisukohalt oluline). Seejärel on mõistlik kontrollida, kas punktid kuuluvad määratud intervalli ning intervallist välja jäävad punktid edaspidi vaatluse alt välja jätta. Leidmaks funktsiooni absoluutset maksimumi ja miinimumi intervallis, võrreldakse lokaalseid ekstreemumeid ja funktsiooni väärtusi rajapunktides. Selleks arvutatakse välja funktsiooni väärtus intervallis asuvates lokaalsetes ekstreemumpunktides ja rajapunktides. Saadud funktsiooni väärtuste hulgast leitakse suurim ja vähim väärtus.

Illustreerime seda protsessi järgmise näitega. Leiame näiteks funktsiooni $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 100$ maksimumi ja miinimumi lõigus $x \in [0,10]$. Esmalt leiame kriitilised punktid. Selleks võrdsustame esimese tuletise nulliga:

$$y' = 3x^2 - 6x - 24 \overset{!}{=} 0 .$$

Ruutvõrrandi lahendid ehk argumendi väärtused kriitilistes punktides on $x_1 = -2$ ja $x_2 = 4$. $x_1 = -2$ ei kuulu piirkonda $x \in [0,10]$, niisiis jääb see vaatluse alt välja.

Võime leida funktsiooni teise tuletise kohal $x_2 = 4$:

$$y''(4) = 6x - 6 = 6 \cdot 4 - 6 = 18 > 0 ,$$

leidmaks, et tegu on lokaalse miinimumiga, kuid nagu juba öeldud — antud ülesandes pole lokaalsete ekstreemumite olemuse määramine vajalik. Kui näiteks lokaalne miinimumpunkt osutub ka absoluutseks miinimumpunktiks intervallis, siis on funktsiooni väärtus selles punktis võrreldavatest funktsiooni väärtustest (ekstreemum- ja rajapunktides) niikuinii vähim. Kui aga lokaalne ekstreemumpunkt ei osutu absoluutseks ekstreemumiks intervallis, siis pole ka tema olemus oluline.

Leiame funktsiooni väärtuse kohal $x_2 = 4$ ning rajapunktides:

$$y(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 100 = 20,$$
$$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 + 100 = 100,$$
$$y(10) = 10^3 - 3 \cdot 10^2 - 24 \cdot 10 + 100 = 610.$$

Valime leitud funktsiooni väärtustest välja maksimaalse ja minimaalse:

$$max(20;100;610) = 610,$$
$$min(20;100;610) = 20.$$

Seega lõigus $x \in [0,10]$ on antud funktsiooni maksimumpunktiks $(10;610)$ ja miinimumpunktiks $(4;20)$.

Majandusteaduses, kus paljud muutujad omandavad vaid mittenegatiivseid väärtusi, on intervalliks tihti $[0,\infty]$. Sellisel juhul võib siiski juhtuda, et absoluutset miinimumi või maksimumi pole selles intervallis võimalik määrata. Näiteks funktsioonil $y = x^3$ pole lõigus $[0,\infty]$ absoluutset maksimumi, sest argumendi suurenemisel suureneb kogu aeg ka funktsiooni väärtus. Seega, kui intervall pole mõlemalt poolt piiratud lõpliku suurusega, võib juhtuda, et absoluutset maksimumi või miinimumi pole võimalik määrata.

Toomegi siinkohal näite mikroökonoomikast. Olgu monopoolse ettevõtte kulufunktsioon $C = 100 + 10q$ ja tema toote nõudluse pöördfunktsioon $p = 50 - 0{,}1q$. Monopolettevõtte maksimumvõimsus on 150 toodanguühikut. Leiame sellistes tingimustes ettevõtte kasumit maksimeeriva toodangumahu.

Teades kulufunktsiooni ja tuletades nõudlusfunktsioonist tulufunktsiooni:

$$R = q\,p = q(50 - 0{,}1q) = 50q - 0{,}1q^2,$$

võime välja kirjutada kasumifunktsiooni tulude ja kulude vahena:

$$\pi = R - C = (50q - 0{,}1q^2) - (100 + 10q) \text{ ehk}$$

$$\pi = -0{,}1q^2 + 40q - 100 .$$

Püüame leida funktsiooni $\pi = -0{,}1q^2 + 40q - 100$ maksimumi intervallis $q = [0;150]$ (maksimaalselt suudetakse toota 150 ühikut ja vähim võimalik toodangumaht on null). Võrdsustame nulliga tuletise kasumifunktsioonist toodangumahu järgi:

$$\frac{d\pi}{dq} = -0{,}2q + 40 \overset{!}{=} 0 .$$

Kriitiline punkt ja oletatav optimaalne toodangumaht (mis maksimeerib kasumifunktsiooni väärtuse) on siit $q^* = 200$. See kogus jääb etteantud intervallist välja — ettevõttele maksimaalset kasumit tagava toodangumahu tootmiseks pole ettevõttel võimsust.

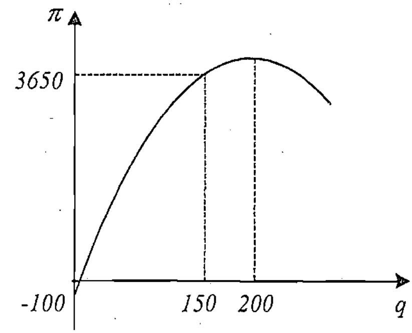
Kontrollime intervalli rajapunkte. Kui ei toodeta ühtegi ühikut kaupa, on kasum:

$$\pi(0) = -0{,}1 \cdot 0^2 + 40 \cdot 0 - 100 = -100 ,$$

maksimumvõimsusega tootes on kasum:

$$\pi(150) = -0{,}1 \cdot 150^2 + 40 \cdot 150 - 100 = 3650 .$$

Seega on ettevõtte jaoks antud võimsuspiirangu korral optimaalne toota maksimumvõimsusel. Olukord on kujutatud ka joonisel 5.4.



Joonis 5.4. Kasumi maksimeerimine võimsuspiiranguga

5.3. Kahe muutuja funktsiooni ekstreemumid

Keerukad nähtustevahelised seosed majanduses nõuavad majandusteaduses sageli mitme muutuja funktsioonide kasutamist. Mitme muutuja funktsiooni optimeerimisel leitakse kõigi argumentide sellised väärtused, mis tagavad suurima või vähima funktsiooni väärtuse. Näiteks võib tuua mitut toodet tootva firma vajaduse leida erinevate toodete sellised toodangukogused, mis maksimeerivad firma kogukasumit. Järgnevalt vaatleme kahe muutuja funktsiooni ekstreemumite leidmist ning seejärel teeme üldistused n muutuja funktsioonile.

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ optimeerimisel otsitakse selliseid muutujate x ja y väärtusi, mille korral funktsiooni väärtus z on vastavalt vajadusele kas maksimaalne või minimaalne. Kahe muutuja funktsiooni geomeetriline kujutis on mingi pind kolmemõõtmelises ruumis. Kui funktsiooni väärtus z on kujutatud vertikaalteljel, siis funktsiooni lokaalseks maksimumpunktiks on kumera pinnaosa kõige kõrgem punkt, lokaalseks miinimumpunktiks aga nõgusa pinnaosa kõige madalam punkt (vt joonist 5.5). Analoogiliselt ühe muutuja funktsiooni optimeerimisega kasutatakse ka sel juhul esimest ja teist järku tingimusi.

Esmalt leitakse esimest järku tingimuse abil kriitilised punktid, kus funktsiooni väärtus ei kasva ega kahane kummagi argumendi suhtes.

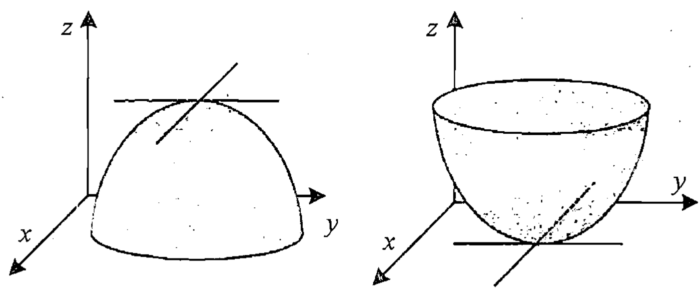
Kriitilises punktis (x_0, y_0) funktsiooni väärtus kummagi argumendi suhtes ei kasva ega kahane — funktsiooni väärtus selles punktis ei muutu. Täpsemalt: kui argumentidele anda selles punktis mingid lõpmatult väikesed muutused ($dx \neq 0$ ja $dy \neq 0$), siis funktsiooni väärtuse muutuse ligikaudne hinnang ehk diferentsiaal on null: $dz = 0$. Funktsiooni täisdiferentsiaali (arvestada tuleb kõigi argumentide põhjustatud muutusi) valemi kohaselt peab siis kehtima:

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy = 0 \ .$$

Kuna eeldatakse nullist erinevaid argumentide muutusi, siis peab kehtima:

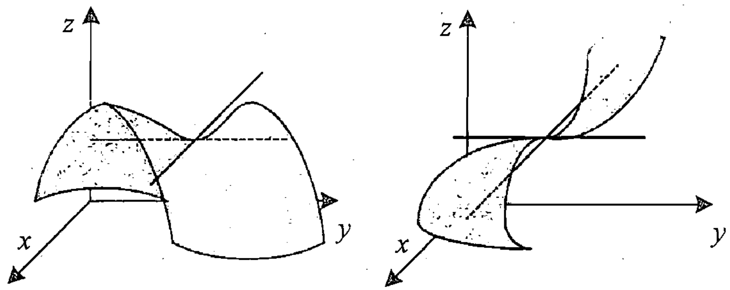
$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \, .$$

Viimane ongi kriitiliste punktide leidmise ehk **esimest järku tingimus:** tegu on kriitilise punktiga (nt punkt x_0, y_0), kui funktsiooni esimest järku osatuletiste väärtus selles punktis on null.



Joonis 5.5. Kahe muutuja funktsiooni maksimum- ja miinimumpunkt

Joonist 5.5 jälgides võib öelda, et funktsiooni graafikut puutuv pind on kriitilises punktis paralleelne *xy*-tasandiga. Osatuletis f_x annab funktsiooni pinda puutuva *xz*-tasandiga paralleelse sirge tõusu vastavas punktis. Tuletatagu meelde osatuletise geomeetrilist tõlgendust: kui projitseerida pinda puutuval tasandil asuv *xz*-tasandiga paralleelne sirge *xz*-teljestikku, siis selle sirge tõus on f_x. Kui tegu on kriitilise punktiga (tasand puutub pinda kriitilises punktis), siis see sirge on horisontaalne (tõusuga 0) ning osatuletis f_x peab tõepoolest olema null. Analoogiliselt peab kriitilises punktis funktsiooni graafikut puutuv *yz*-tasandiga paralleelne sirge samuti olema horisontaalne ning seepärast peab osatuletis f_y samuti võrduma nulliga.



Joonis 5.6. Sadulpunkt ja käänupunkt

Esimest järku tingimuse täidetus on tarvilik ekstreemumi olemasoluks mingis punktis. Samas: nii nagu ühe muutuja funktsiooni korral, ei taga ka siin tarvilik tingimus ekstreemumi olemasolu. Kriitilise punkti näol võib tegu olla näiteks **sadulpunktiga**, kus funktsiooni väärtus on küll ühe argumendi suhtes maksimaalne, teise suhtes aga minimaalne (vt joonist 5.6). Veel võib kriitiline punkt olla ühe või mõlema (nagu kujutatud joonisel 5.6) argumendi suhtes **käänupunkt**. Teist järku tingimuse abil on võimalik kontrollida, kas kriitilises punktis asub ekstreemum.

Järgnevalt tuletamegi **teist järku tingimuse**. Et kriitilises punktis (x_0, y_0) eksisteeriks funktsiooni maksimum, peab funktsioon enne seda punkti olema mõlema argumendi suhtes kasvav ($dz > 0$) ja pärast kahanev ($dz < 0$). Seega peab funktsiooni teist järku diferentsiaal d^2z selles punktis olema negatiivne (diferentsiaal dz muutub positiivsest negatiivseks):

$$d^2z < 0.$$

Analoogiliselt: enne miinimumpunkti peab funktsioon olema mõlema argumendi suhtes kahanev ($dz < 0$) ja pärast kasvav ($dz > 0$) ning funktsiooni teist järku diferentsiaal d^2z peab miinimumpunktis olema positiivne:

$$d^2z > 0.$$

Teist järku diferentsiaal avaldub osatuletiste kaudu järgmiselt (teisenduskäiku vt lisast 1):

$$d^2z = f_{xx}\,dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2.$$

Et tegu oleks maksimumpunktiga, peab see avaldis olema negatiivne, ning et tegu oleks miinimumpunktiga, positiivne.

On võimalik tõestada (vt lisa 1), et avaldis $f_{xx}\,dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2$ on kõigi võimalike argumentide diferentsiaalide korral (kui mõlemad pole nullid) negatiivselt määratud, kui kehtib:

$$f_{xx} < 0,\ f_{yy} < 0 \text{ ja } f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2.$$

Sellisel juhul $d^2z < 0$ ja tegu on maksimumpunktiga.

Avaldis on positiivselt määratud, kui kehtib:

$f_{xx} > 0$, $f_{yy} > 0$ ja $f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2$.

Sellisel juhul $d^2 z > 0$ ja tegu on miinimumpunktiga.

Seega peavad maksimumpunktis teist järku osatuletised mõlema argumendi järgi olema negatiivsed, miinimumpunktis aga positiivsed. Lisaks peab ekstreemumpunktis olema täidetud tingimus, et nende osatuletiste korrutis oleks suurem teist järku segaosatuletise ruudust.

Niisiis, **võttes kokku tarviliku ja piisava tingimuse** (ülevaatlikkuse huvides on kriitilise punkti koordinaadid (x_0, y_0) valemitest ära jäetud):

kui $f_x = f_y = 0$ ning $f_{xx} < 0$, $f_{yy} < 0$ ja $f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2$, on tegu lokaalse maksimumpunktiga;

kui $f_x = f_y = 0$ ning $f_{xx} > 0$, $f_{yy} > 0$ ja $f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2$, on tegu lokaalse miinimumpunktiga.

Märkida tuleb, et kui teist järku tingimus pole täidetud, ei saa siiski kindlalt väita, et tegu pole ekstreemumiga. Nimelt võib ka kriitilises punktis, kus $f_{xx} f_{yy} = f_{xy}^2$ või $f_{xx} f_{yy} < f_{xy}^2$, asuda ekstreemum, sest sellisel juhul pole avaldise ($d^2 z$) märk kindlalt määratud (vt lisa 1).

Ekstreemumi teist järku tingimusi väljendatakse sageli **maatrikskujul**, kuna enamate muutujatega funktsioonide korral on teist järku tingimus eespooltooduga sarnaselt kirjapanduna küllalt pikk ja ebaülevaatlik. Et selgitada maatrikskuju kasutamist, paneme järgnevalt kirja juba toodud kahe muutuja funktsiooni ekstreemumi teist järku tingimused maatrikskujul.

Kuna teist järku tingimus sisaldab endas erinevaid teist järku osatuletisi (neid on seda rohkem, mida rohkem muutujaid funktsioonis), siis koondatakse need ühte maatriksisse, mida nimetatakse Hessi maatriksiks ehk **hessiaaniks**. Kahe muutuja funktsiooni korral näeb teist järku osatuletistest koostatud hessiaan välja selline:

$$H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}.$$

Määramaks, kas ja milliste ekstreemumitega on kriitilistes punktides tegu, leitakse selle maatriksi kõik **peamiinorid**. Esimest järku peamiinoriks on maatriksi esimene element. Teist järku peamiinori leidmiseks arvutatakse sellise alammaatriksi determinant, milles on kaks esimest peadiagonaali elementi; kolmandat järku peamiinor arvutatakse kolme esimest peadiagonaali elementi sisaldava maatriksi determinandina jne.

Olgu $|H_i|$ selline peamiinor, mis sisaldab i esimese rea ja i esimese veeru elemente. Kahe muutuja funktsiooni korral on võimalik arvutada esimest ja teist järku peamiinorid:

$$|H_1|=|f_{xx}|=f_{xx},$$

$$|H_2|=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2.$$

Nagu näha, on saadud avaldised ja ekstreemumi teist järku tingimused sarnased. Teist järku osatuletise f_{xx} asemel võib kirjutada $|H_1|$. Kui $f_{xx}f_{yy}>f_{xy}^2$, siis $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ ning $|H_2|>0$. Seega võib teist järku tingimused eelpooltoodud tingimustes ümber kirjutada järgmiselt:

kui $f_x=f_y=0$ ning $|H_1|<0$ ja $|H_2|>0$, on tegu lokaalse maksimumpunktiga;

kui $f_x = f_y = 0$ ning $|H_1| > 0$ ja $|H_2| > 0$, on tegu lokaalse miinimumpunktiga.

Toome siinkohal jälle ühe lihtsa näite kasumi maksimeerimisest. Tegutsegu firma, mis toodab kahte kaupa: q_1 ja q_2. Nende kaupade nõudluse pöördfunktsioonid on vastavalt $p_1 = 5 - 0{,}5q_1$ ja $p_2 = 24 - q_2$. Firma kogukulud sõltuvad sellest, kui palju kumbagi kaupa toodetakse, järgmiselt: $C(q_1, q_2) = 5 + q_1^2 - q_1 q_2 + q_2^2$. Leiame, milline toodetav kahe kauba kombinatsioon tagab firmale maksimaalse kasumi. Paneme selleks kirja kasumifunktsiooni:

$$\pi = R - C = p_1 q_1 + p_2 q_2 - C(q_1, q_2)$$

ehk meie näites:

$$\pi = (5 - 0{,}5q_1)q_1 + (24 - q_2)q_2 - \left(5 + q_1^2 - q_1 q_2 + q_2^2\right) =$$
$$= -1{,}5q_1^2 + 5q_1 + q_1 q_2 + 24q_2 - 2q_2^2 - 5.$$

Kriitiliste punktide leidmiseks võrdsustame osatuletised mõlema kauba koguse järgi nulliga:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial q_1} = -3q_1 + 5 + q_2 \overset{!}{=} 0, \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial q_2} = q_1 + 24 - 4q_2 \overset{!}{=} 0. \end{cases}$$

Lahendades võrrandisüsteemi, saame ühe kriitilise punkti, kus $q_1{}^* = 4$ ja $q_2{}^* = 7$. Kasum oleks sellise kombinatsiooni korral:

$$\pi = -1{,}5 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 24 \cdot 7 - 2 \cdot 7^2 - 5 = 89.$$

Seda, kas tegu on maksimumpunktiga, kontrollime, koostades hessiaani:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Leiame peamiinorid:

$$|H_1| = -3,$$

$$|H_2| = (-3)(-4) - 1 \cdot 1 = 11.$$

Positiivne teist järku peamiinor näitab, et tegu on ekstreemumiga, ja negatiivne esimest järku peamiinor, et tegu on tõepoolest kasumi maksimumiga.

5.4. Optimeerimine *n* muutujaga funktsiooni korral

Ekstreemumite leidmise tingimused n argumendiga funktsiooni $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ puhul on analoogilised nendega, mis kehtivad kahe argumendiga funktsiooni puhul.

Esimest järku ehk tarviliku tingimuse kohaselt on tegu kriitilise punktiga, kui selles punktis võrduvad osatuletised funktsioonist kõigi argumentide järgi nulliga:

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0,$$

kus $f_i = \dfrac{\partial z}{\partial x_i}$.

Teist järku ehk piisava tingimuse täidetuse kontrollimiseks koostatakse funktsiooni kõigist erinevatest teist järku osatuletistest hessiaan järgmiselt:

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

ning leitakse kõik hessiaani peamiinorid $|H_i|$, kus $i = 1 \ldots n$.

Leitud peamiinorite puhul on oluline nende märk, seepärast ei ole keerulisemaid arvutusi nõudval juhul alati vajalik peamiinori väärtuse väljaarvutamine, vaid piisab selle märgi määramisest. Sõltuvalt leitud peamiinorite märkidest võib teha järgmised järeldused:

kui $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$ ning $|H_1| < 0$, $|H_2| > 0$, $|H_3| < 0$ jne ehk $(-1)^i |H_i| > 0$, on tegu lokaalse maksimumpunktiga;

kui $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$ ning $|H_1| > 0$, $|H_2| > 0$, $|H_3| > 0$ jne ehk $|H_i| > 0$, on tegu lokaalse miinimumpunktiga.

Seega, kui ekstreemumi tarvilik tingimus on täidetud ja kõik hessiaani peamiinorid on positiivsed, võib öelda, et tegu on lokaalse miinimumiga. Kui tarvilik tingimus on täidetud ja peamiinorite märk vaheldub, alustades negatiivsest esimest järku peamiinorist, on tegu lokaalse maksimumiga. Teistel juhtudel võib olla tegu muude kriitiliste punktidega, kuid välistatud ei ole ka ekstreemum selles punktis. Sellisel juhul vajab juhtum edasist analüüsi, kuid kuna majandusteaduses selliseid olukordi tihti ette ei tule, jääb siinkohal edasine analüüs kirjeldamata.

6. KITSENDUSTEGA OPTIMEERIMINE

6.1. Kahe muutuja funktsiooni optimeerimine ühe kitsenduse korral

Majandusteaduses tuleb sageli ette optimeerimisprobleeme, kus on teada üks või mitu piirangut. Ressursside nappus on majandusele küllalt iseloomulik nähtus. Näiteks püüavad tarbijad oma tarbimisotsuseid tehes saavutada võimalikult suurt kasulikkust, tarbimisvõimalused on aga sissetulekutega piiratud. Ettevõte võib seista probleemi ees, kuidas tellitud toodangukogus toota võimalikult väikeste kuludega. Selliste probleemide matemaatilisel lahendamisel kasutatakse kitsendustega (ehk piirangutega) optimeerimist.

Kitsendustega optimeerimisel on funktsiooni määramispiirkond kitsendatud: funktsiooni maksimaalset või minimaalset väärtust ja seda tagavaid argumentide väärtusi otsitakse mingi kindla hulga argumentide väärtuste ja funktsiooni väärtuse komplektide hulgast. Majanduslikus mõttes püütakse kas saavutada maksimaalset tulemust fikseeritud ressursside juures (kitsendus(t)ega maksimeerimine) või tagada mingi kindla tulemuse saavutamine minimaalsete ressursside ehk kulutustega (kitsendus(t)ega minimeerimine). Siinkohal tasub tähele panna, et kui ülesande püstituses soovitakse saavutada maksimaalne tulemus minimaalsete ressurssidega, pole ülesande lahend üheselt määratud.

Mõnikord esineb olukord, kus optimeeritava funktsiooni kuju on selline, et maksimumi või miinimumi leidmine ilma kitsendusteta polegi võimalik. Näiteks lihtsa Cobbi-Douglase tüüpi funktsiooni $z = xy^2$ korral võib argumentide väärtuste suurenedes funktsiooni väärtus suureneda lõpmatult. Sellisel juhul ongi ainus optimeerimise võimalus lisada mingid kitsendused ehk leida mingite tingimuste korral optimaalseks osutuv funktsiooni väärtus. Näiteks kui tegu on kasulikkusfunktsiooniga $u = q_1 q_2^2$, siis kaubakoguste suurenedes võib kasulikkus lõpmatult suureneda. Ometi on reaalsuses piiranguks tarbija sissetulekud ja nii leitaksegi suurim kasulikkus, mida on võimalik saavutada konkreetse eelarvepiirangu juures.

Mitme muutujaga funktsiooni kitsendusega optimeerimine sarnaneb oma olemuselt ühe muutuja funktsiooni ekstreemumite leidmisega intervallis. Kitsendustega optimeerimise korral püütakse leida mingi funktsiooni maksimum või miinimum, olukorras, kus funktsiooni argumendid peavad omakorda rahuldama üht või mitut neid siduvat võrrandit. Neid võrrandeid nimetatakse **kitsendusteks** või **piiranguteks**. Funktsiooni, mille ekstreemumi leitakse, nimetatakse **sihifunktsiooniks**. Vaatleme esmalt kahe muutuja funktsiooni optimeerimist ühe kitsenduse korral. Sihifunktsiooniks on siis:

$$z = f(x, y)$$

ning piirangu võib kirja panna järgmiselt:

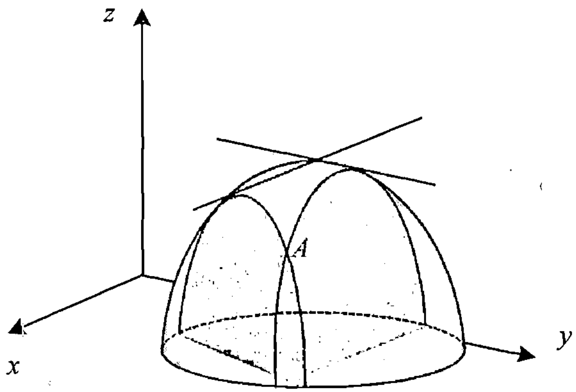
$$g(x, y) = b,$$

kus $g(x, y)$ on piirangufunktsioon ja b on piirangu vabaliige.

Optimeerimisülesandeks on leida sihifunktsiooni $z = f(x, y)$ maksimum või miinimum (sõltuvalt vajadusest), kui muutujad x ja y peavad rahuldama piirangut $g(x, y) = b$.

Kitsenduse või kitsenduste tulemusena väheneb argumentide määramispiirkond mingi intervalli piiresse. Seepärast **ei pruugi** funktsiooni tavaline kitsendusteta ehk vaba ekstreemum ühtida ekstreemumiga kitsenduste olemasolu korral. Näiteks kitsendustega maksimum võib olla äärmisel juhul võrdne vaba maksimumiga, kuid enamasti on sellest väiksem. Kitsendustega maksimum ei saa olla suurem kui vaba maksimum. Analoogiliselt:

kitsendustega miinimum on kas võrdne vaba miinimumiga või suurem, kuid mitte kunagi sellest väiksem.



Joonis 6.1. Kitsendustega optimeerimise geomeetriline tõlgendus

Kitsenduste arv peaks olema alati väiksem kui sõltumatute muutujate arv funktsioonis. Selles võib kergesti veenduda jälgides joonist 6.1, kus on kujutatud geomeetriline tõlgendus kahe muutuja funktsiooni kitsendustega maksimeerimisele. Kahe muutuja funktsiooni vaba maksimum on kolmemõõtmelises ruumis asuva pinna kõige kõrgem punkt — seda muidugi juhul, kui sõltuvat muutujat ehk funktsiooni väärtust kujutatakse vertikaalteljel. Kui piiranguks on näiteks muutujate x ja y lineaarne seos, on selle väljenduseks z-teljega paralleelne ehk püstine tasand. Seega asuvad võimalikud lahendid pinna ja nimetatud tasandi ühisosal ehk kumeral kõveral. Kõige kõrgem punkt sellel kõveral ongi maksimumpunkt selle lineaarse kitsenduse korral. Kui nüüd lisada veel üks kitsendus, piiraks see võimalike lahendite hulga ühele punktile (punkt A) ja optimeerimine kaotaks oma mõtte. Seega, kahe muutuja funktsiooni korral saab kitsenduste arv olla ainult kahest väiksem ehk lubatud on vaid üks kitsendus.

Kitsenduse puhul ekstreemumi leidmiseks on mitu võimalust, üks neist on **asendamismeetod**. Kasutades kahe muutuja funktsiooni kitsendusega optimeerimisel asendusmeetodit, avaldatakse piirangust üks argument ja sihifunktsioonis asendatakse see argument saadud avaldisega. Kui piiranguid on rohkem, tehakse nii ka teiste piirangutega. Sihifunktsioonis sisalduvate argumentide arv väheneb sel juhul kitsenduste arvu võrra. Tulemusena on sihifunktsiooni maksimeerimisel või minimeerimisel võimalik jõuda vaid selliste lahenditeni, mis rahuldavad piiranguid. Seejärel leitakse sihifunktsiooni ekstreemum allesjäänud argumentide suhtes ehk maksimaalne või minimaalne funktsiooni väärtus ja seda tagavad (sihifünktsiooni allesjäänud) argumentide väärtused. Sihifunktsioonist kaotatud argumentide väärtused ekstreemumpunkti(de)s leitakse piiranguvõrranditest.

Näiteks funktsiooni $z = xy$ ekstreemumid piirangu $x + 2y = 12$ korral leitakse järgmiselt. Avaldame piirangust muutuja x:

$$x = 12 - 2y$$

ja asendame sihifunktsiooni:

$$z = (12 - 2y)y = 12y - 2y^2 .$$

Leiame sihifunktsiooni ekstreemumi tagava muutuja y väärtuse. Selleks võrdsustame saadud sihifunktsiooni tuletise nulliga:

$$z' = 12 - 4y \overset{!}{=} 0 \text{, siit } y^* = 3 .$$

Piirangust saame muutuja x väärtuse ekstreemumpunktis: $x^* = 12 - 2 \cdot 3 = 6$. Funktsiooni väärtus ekstreemumpunktis on $z^* = 6 \cdot 3 = 18$.

Kuigi meetod tundub äärmiselt lihtne, muutuvad asendused ja teisendused enamate muutujate ja kitsenduste korral keerulisemaks. Seepärast on keerukamate ülesannete puhul mõistlik kasutada teisi meetodeid.

Tuntud näide kitsendusega optimeerimise kohta majandusteooriast on kasulikkuse maksimeerimine piiratud tarbimiseelarve puhul. Püüame ühe sellise optimeerimisülesande lahendada esialgu asendamismeetodil. Olgu maksimeeritav tarbija kasulikkusfunktsioon $u = q_1 q_2^2$. Seejuures peab mõlema kauba ostmisele tehtud kulutuste (kauba hind p_i korrutatud kauba kogusega q_i) summa võrduma tarbija sissetulekuga m:

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = m.$$

Olgu meie näites kaupade hinnad vastavalt 4 ja 2 ning sissetulek 60. Eelarvepiiranguks on siis järgmine võrrand:

$$4q_1 + 2q_2 = 60.$$

Avaldame piirangust $q_1 = 15 - 0{,}5q_2$ ja asendame sihifunktsiooni:

$$u = (15 - 0{,}5q_2)q_2^2 = 15q_2^2 - 0{,}5q_2^3.$$

Leiame ekstreemumi, võrdsustades saadud sihifunktsiooni tuletise nulliga:

$$\frac{du}{dq_2} = 30q_2 - 1{,}5q_2^2 \overset{!}{=} 0, \text{ siit}$$

$$(30 - 1{,}5q_2)q_2 = 0.$$

Saame kaks lahendit: $q_{21} = 0$ ja $q_{22} = 20$. Et valida neist välja just maksimaalset kasumit tagav teise kauba kogus, teeme kindlaks kasulikkusfunktsiooni teise tuletise märgi mõlema teise kauba koguse korral:

$$\frac{d^2u}{dq_2^2}(0) = 30 - 3q_2 = 30 - 3 \cdot 0 = 30 > 0,$$

$$\frac{d^2u}{dq_2^2}(20) = 30 - 3q_2 = 30 - 3 \cdot 20 = -30 < 0.$$

Järelikult tagab $q_{21} = 0$ minimaalse ja $q_{22} = 20$ maksimaalse kasulikkuse.

Kui $q_2{}^* = 20$, siis vastav kasulikkust maksimeeriv esimese kauba kogus on: $q_1{}^* = 15 - 0{,}5 \cdot 20 = 5$ ning maksimaalne kasulikkus, mis saavutatakse on $u^* = 5 \cdot 20^2 = 2000$.

6.2. Lagrange'i meetod

Kõige enam leiab kitsendustega optimeerimise korral kasutust Lagrange'i kordaja meetod ehk lihtsalt Lagrange'i meetod. Meetodi omapäraks on uue funktsiooni — **Lagrange'i funktsiooni** konstrueerimine. Seejuures tuuakse kõik piirangufunktsioonid sisse sihifunktsiooni, samal ajal ühtegi argumenti sellest kaotamata — see ongi meetodi üheks eeliseks.

Lagrange'i funktsiooni konstrueerimisel toimitakse järgmiselt. Esmalt viiakse piirangud (või piirang) sellisele kujule, kus vabaliige b ja piirangufunktsioon on võrrandi ühel pool ja teisel pool on null:

$$b - g(x, y) = 0.$$

Seejärel korrutatakse kõik sellisele kujule viidud piirangud Lagrange'i kordajatega ning liidetakse saadud korrutised sihifunktsioonile. **Lagrange'i kordaja** (tähis λ) on tinglik ehk **abimuutuja**, millel majandusteaduses on alati ka oma tõlgendus (tõlgendusest pisut hiljem).

Kahe muutuja funktsiooni ja ühe kitsenduse korral on tulemusena tekkinud uus funktsioon järgmine (L tähistab Lagrange'i funktsiooni):

$$L = f(x,y) + \lambda[b - g(x,y)].$$

On võimalik tõestada, et saadud Lagrange'i funktsiooni vabad ekstreemumid (sihifunktsiooni argumentide ja abimuutujate suhtes) ühtivad sihifunktsiooni ekstreemumitega nende kitsenduste korral, mis on sisestatud Lagrange'i funktsiooni. Seega võib sihifunktsiooni kitsendustega optimeerimiseks leida Lagrange'i funktsiooni ekstreemumid.

Jätkame näidet kahe muutuja funktsiooni optimeerimisest ühe kitsenduse korral. Niisiis, **esimest järku tingimuse** kohaselt, **kriitiliste punktide** leidmiseks võrdsustatakse nulliga tuletised Lagrange'i funktsioonist kõigi muutujate — nii sihifunktsiooni argumentide x ja y kui ka abimuutuja λ järgi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = L_x = f_x - \lambda g_x \overset{!}{=} 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = L_y = f_y - \lambda g_y \overset{!}{=} 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = L_\lambda = b - g(x,y) \overset{!}{=} 0. \end{cases}$$

Kahest esimesest võrrandist saame tingimused $\lambda = \dfrac{f_x}{g_x}$ ja $\lambda = \dfrac{f_y}{g_y}$ ehk $\dfrac{f_x}{g_x} = \dfrac{f_y}{g_y}$. Viimane võrrand kujutab endast lihtsalt kitsendust: $g(x,y) = b$. Seega, kitsendus võrrandina ja tingimus siaaniks) (tähistus $\overline{H}$). Kahe muutuja funktsiooni ja ühe kitsenduse korral moodustavad laiendatud hessiaani teist järku osatuletised Lagrange'i funktsioonist muutujate x ja y järgi (2×2 osamaatriks), millele on vasakule ja üles lisatud osatuletised piirangufunktsioonist muutujate x, y ja λ järgi järgmiselt (sellise maatriksi esimene element ehk tuletis piirangufunktsioonist λ järgi on alati null):

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}.$$

Et uurida ühe kitsendusega kahe muutuja funktsiooni ekstreemumi olemasolu kriitilises punktis, arvutatakse laiendatud hessiaani determinandi väärtus (põhjendust vt lisast 2):

$$|\overline{H}| = 2L_{xy}\, g_x\, g_y - L_{xx}\, g_y^2 - L_{yy}\, g_x^2 .$$

Osutub, et maksimumpunkti tagavaks **teist järku tingimuseks** on positiivne laiendatud hessiaani determinant ($|\overline{H}| > 0$) ning miinimumpunkti tagab selle determinandi negatiivne väärtus ($|\overline{H}| < 0$).

Seejuures kehtib ka siin seaduspära, et tarviliku tingimuse täidetusest ei piisa ekstreemumite olemasoluks mingis punktis. Teisest küljest: kui piisav tingimus pole täidetud, ei saa kindlalt väita, et tegu pole ekstreemumiga.

Võttes kokku **tarviliku ja piisava tingimuse**:

kui kehtib $L_x = L_y = L_\lambda = 0$ ja laiendatud hessiaani determinant on positiivne: $|\overline{H}| > 0$, on tegu maksimumpunktiga;

kui kehtib $L_x = L_y = L_\lambda = 0$ ja laiendatud hessiaani determinant on negatiivne: $|\overline{H}| < 0$, on tegu miinimumpunktiga.

Nagu juba mainitud, on **Lagrange'i kordajal** λ majandusteaduses alati olemas **tõlgendus**. Uurimegi järgnevalt, kuidas seda kordajat tõlgendada.

Esimesest kriitilise punkti leidmise tingimusest $L_x = f_x - \lambda g_x = 0$ saame avaldada: $\lambda = \frac{f_x}{g_x}$. Kirjutades osatuletised välja diferentsiaalide abil, saame teha järgmise teisenduse:

$$\lambda = \frac{f_x}{g_x} = \frac{\partial z / \partial x}{\partial g / \partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial g} = \frac{dz}{dg}.$$

Kui kitsendus on rahuldatud, siis $dg = db$ ja võib kirjutada:

$$\lambda = \frac{dz}{db}.$$

Seega **näitab Lagrange'i kordaja**, kuidas muutub sihifunktsiooni optimaalne väärtus kitsenduse vabaliikme ühikulisel kasvamisel. Kui kitsenduse vabaliiget b suurendada 1 ühiku võrra, suureneb optimaalne sihifunktsiooni väärtus λ ühiku võrra.

Vaadeldes Lagrange'i funktsiooni $L = f(x, y) + \lambda[b - g(x, y)]$, osutub, et λ on võrdne tuletisega Lagrange'i funktsioonist parameetri b järgi: $\lambda = \frac{dL}{db}$. Kui kitsendus on rahuldatud, ühtivad Lagrange'i funktsioon ja sihifunktsioon ning siis on võrdsed ka tuletis Lagrange'i funktsioonist ja tuletis sihifunktsioonist:

$$\lambda = \frac{dL}{db} = \frac{dz}{db}.$$

Seega on Lagrange'i kordaja tõepoolest võrdne tuletisega sihifunktsioonist kitsenduse vabaliikme järgi.

Kõrvalmärkusena olgu öeldud, et juhul, kui piirang asetada Lagrange'i funktsiooni kujul $g(x, y) - b$, mitte $b - g(x, y)$ nagu eespool tehtud, siis ei muutu midagi leitud ekstreemumites, küll aga muutub sellest Lagrange'i kordaja märk — viimast asjaolu tuleb arvestada kordaja tõlgendamisel. Sama tulemuse annab, kui Lagrange'i funktsioonis asetada kordaja λ ette miinusmärk: $L = f(x, y) - \lambda[b - g(x, y)]$. Kui teha aga mõlemad muutused: $L = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - b]$, on tulemus sama, mis esialgu koostatud Lagrange'i funktsiooni korral.

Lahendame eespoolkasutatud näiteülesande Lagrange'i meetodil. Maksimeerime kasulikkusfunktsiooni $u = q_1 q_2^2$ (sihifunktsioon) väärtuse eelarvepiirangu $4q_1 + 2q_2 = 60$ juures. Piirangufunktsiooniks on siis $g = f(q_1, q_2) = 4q_1 + 2q_2$. Koostame Lagrange'i funktsiooni:

$$L = q_1 q_2^2 + \lambda(60 - 4q_1 - 2q_2)$$

Leiame tuletised kõigi muutujate järgi (tuletist Lagrange'i funktsioonist q_i järgi tähistatakse lihtsuse mõttes L_i):

$$\begin{cases} L_1 = q_2^2 - 4\lambda \overset{!}{=} 0, \\ L_2 = 2q_1 q_2 - 2\lambda \overset{!}{=} 0, \\ L_\lambda = 60 - 4q_1 - 2q_2 \overset{!}{=} 0. \end{cases}$$

Lahendame saadud võrrandisüsteemi. Kahest esimesest võrrandist saame:

$$\lambda = \frac{q_2^2}{4} = \frac{2q_1 q_2}{2} \text{ ehk } q_2 = 4q_1.$$

Asendame saadud avaldisega muutuja q_2 kolmandas võrrandis ehk kitsenduses:

$$4q_1 + 2 \cdot 4q_1 = 60$$

ning leiame siit esimese kauba optimaalse koguse: $q_1{}^* = 5$. Teise kauba optimaalne kogus on siis $q_2{}^* = 4 \cdot 5 = 20$. Maksimaalne kasulikkus, mis saavutatakse, on $u^* = 5 \cdot 20^2 = 2000$.

Kontrollime, kas tegu on kasulikkusfunktsiooni maksimumpunktiga; selleks koostame laiendatud hessiaani:

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2q_2 \\ 2 & 2q_2 & 2q_1 \end{bmatrix}.$$

Vaatlusaluses punktis on hessiaani determinant:

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 40 \\ 2 & 40 & 10 \end{vmatrix} = 0 + 320 + 320 - 0 - 160 - 0 = 480 > 0.$$

Järelikult on tõepoolest tegu kasulikkuse maksimumiga.

Kordaja λ võrdub tuletisega sihifunktsioonist (kasulikkusfunktsioonist u) piirangu vabaliikme (sissetuleku m) järgi: $\lambda = \dfrac{du}{dm}$.

Seega näitab λ ligikaudset kasulikkuse muutumist, kui sissetulek ehk eelarve suureneb ühe ühiku (ühe krooni) võrra. Arvutame välja λ väärtuse, kasutades nii esimest kui ka teist tingimust:

$$\lambda = \frac{q_2^2}{4} = \frac{20^2}{4} = 100 \text{ või } \lambda = \frac{2q_1 q_2}{2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 20}{2} = 100.$$

Seega, kui anda tarbijale juurde üks kroon, siis suureneb tema maksimaalne kasulikkus ligikaudu 100 ühiku võrra.

6.3. *n* muutuja funktsiooni optimeerimine mitme kitsenduse korral

Kui sihifunktsioonis on rohkem argumente ning ka kitsendusi on mitu, siis rakendatakse optimeerimisel eespooltoodutega analoogilisi tingimusi. Siinkohal on toodud ekstreemumi esimest ja teist järku tingimused üldjuhu jaoks, kus sihifunktsioonil on n argumenti:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

ning ekstreemumite leidmist kitsendavad m piirangut:

$$\begin{cases} g^1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1, \\ g^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2, \\ \vdots \\ g^m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m. \end{cases}$$

Üldkujul võib kitsendused väljendada järgmiselt:

$$g^i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, \qquad i = 1 \ldots m,$$

kus i tähistab piirangufunktsiooni numbrit ja g^i i-ndat piirangufunktsiooni.

Et oleks võimalik optimeerida, peab kehtima:

$$n > m.$$

Kasutades Lagrange'i meetodit, koostatakse **Lagrange'i funktsioon**, liites sihifunktsioonile vastavale kujule teisendatud ja Lagrange'i kordajatega korrutatud kitsendused:

$$L = f(x_1,\dots,x_n) + \lambda_1\left[b_1 - g^1(x_1,\dots,x_n)\right] +$$
$$+ \lambda_2\left[b_2 - g^2(x_1,\dots,x_n)\right] + \dots + \lambda_m\left[b_m - g^m(x_1,\dots,x_n)\right].$$

Esimest järku tingimuse kohaselt peavad kriitilises punktis osatuletised Lagrange'i funktsioonist kõigi muutujate ($x_1 \dots x_n$) ning kõigi abimuutujate ($\lambda_1 \dots \lambda_m$) järgi võrduma nulliga:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0.$$

Saadud võrranditest leitakse argumentide ja funktsiooni väärtused kriitilistes punktides. Ekstreemumite olemasolu neis punktides uuritakse laiendatud hessiaani abil.

n muutujaga sihifunktsiooni ja m kitsenduse korral on laiendatud hessiaan $(m+n)\times(m+n)$ maatriks, mis koosneb neljast osamaatriksist, nagu allpool näidatud. Paremal all asuv $n\times n$ osamaatriks koosneb teist järku osatuletistest Lagrange'i funktsioonist sihifunktsiooni argumentide järgi. Sellest maatriksist vasakul ja üISal on kaks osamaatriksit, mis sisaldavad esimest järku tuletisi piirangufunktsioonidest argumentide järgi. Vaadates kogu laiendatud hessiaani: paremal üISal asub osamaatriks, milles on m rida ja n veergu. Iga rida sisaldab osatuletisi ühest piirangufunktsioonist. Vasakul all asuv n rea ja m veeruga osamaatriks on paremal üISal asuva osamaatriksi peegeldus üle laiendatud hessiaani peadiagonaali. Selle maatriksi iga veerg sisaldab osatuletisi ühest piirangufunktsioonist. Vasakul üleval asuv $m\times m$ osamaatriks koosneb nullidest.

Laiendatud hessiaan üldjuhu jaoks näeb niisiis välja selline:

$$\overline{H} = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^1 & g_2^1 & \cdots & g_n^1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^2 & g_2^2 & \cdots & g_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g_1^m & g_2^m & \cdots & g_n^m \\ \hdashline g_1^1 & g_1^2 & \cdots & g_1^m & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ g_2^1 & g_2^2 & \cdots & g_2^m & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^m & L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{array}\right],$$

kus g_j^i tähistab tuletist i-ndast piirangufunktsioonist j-nda argumendi järgi ning lihtsuse mõttes on Lagrange'i funktsioonist võetud tuletiste puhul indeksitena märgitud nende muutujate indeksid, mille järgi tuletist võeti. Näiteks L_{12} tähendab, et tuletis on võetud esmalt x_1 järgi ning seejärel x_2 järgi.

Teist järku tingimuse kontrollimiseks arvutatakse laiendatud hessiaani peamiinorid. Olgu $|\overline{H}_i|$ selline peamiinor, mis sisaldab i rida ja veergu paremal all asuvast funktsiooni L osatuletisi sisaldavast osamaatriksist. Seega on $|\overline{H}_i|$ $(m+i)\times(m+i)$ maatriksi determinant. $|\overline{H}_1|$ näiteks sisaldab vasakult ülevalt alates $m+1$ rida ja veergu, $|\overline{H}_2|$ $m+2$ rida ja veergu jne.

Kriitilise punkti olemuse selgitamisel vaadeldakse ainult neid peamiinoreid, mis on $m+1$ ja kõrgemat järku, ehk peamiinoreid $|\overline{H}_i|$, kus $i = (m+1), \ldots, (m+n)$.

Näiteks ühe kitsenduse korral alustatakse teist järku peamiinorist. Väiksemat järku peamiinorid jäetakse vaatluse alt välja, kuna need on alati võrdsed nulliga.

Teist järku tingimuse kohaselt:

kui nimetatud peamiinorid on vahelduvalt negatiivsed ja positiivsed alustades märgist $(-1)^{m+1}$ ehk kehtib $(-1)^i \left|\overline{H}_i\right| > 0$, on tegu maksimumpunktiga;

kui kõik nimetatud peamiinorid on sama märgiga $(-1)^m$ ehk kehtib $(-1)^m \left|\overline{H}_i\right| > 0$, on tegu miinimumpunktiga.

Seega see, kas miinimumi jaoks on vaja, et kõik peamiinorid oleks positiivsed või negatiivsed, sõltub kitsenduste arvust. Paaritu arvu kitsenduste korral $(-1)^m < 0$ ning kõik peamiinorid peavad olema negatiivsed, paarisarvu kitsenduste korral, kui $(-1)^m > 0$, aga positiivsed.

Kitsenduste arvust sõltub ka see, millisest märgist algab peamiinorite märkide vaheldumine maksimumi korral. Paaritu arvu kitsenduste korral $(-1)^{m+1} > 0$ ja märkide vaheldumine algab plussist, paarisarvu kitsenduste korral, kui $(-1)^{m+1} < 0$, aga miinusest.

Eelmises peatükis vaadeldud kahe muutuja funktsiooni ja ühe kitsenduse ($m = 1$) korral on seega esimeseks uuritavaks peamiinoriks $m + 1$ järku ehk teist järku peamiinor $\left|\overline{H}_2\right|$. Miinimumi piisavaks tingimuseks on, et kõik peamiinorid (antud juhul vaid $\left|\overline{H}_2\right|$, mis on samal ajal ka kogu maatriksi determinant $\left|\overline{H}\right|$), oleksid negatiivsed, kuna $(-1)^m = (-1)^1 < 0$. Maksimumi piisavaks tingimuseks on, et peamiinorite märk vahelduks ning algaks märgist $(-1)^{m+1} = (-1)^2 > 0$, seega esimene peamiinor ehk antud juhul kogu laiendatud hessiaani determinant peab olema positiivne. Need tingimused on kooskõlas eelmises peatükis kirjeldatutega.

7. VÕRDLEV-STAATILINE ANALÜÜS

7.1. Kvalitatiivne ja kvantitatiivne analüüs

Võrdlev-staatiline analüüs tegeleb, nagu nimigi ütleb, erinevate muutujate ja parameetrite väärtuste korral tekkivate tasakaaluseisundite võrdlemisega. Võrdlev-staatiline analüüs võib olla kvalitatiivne või kvantitatiivne. **Kvalitatiivse** analüüsi korral uuritakse, millises suunas toimub muutus tasakaalulahendis mingi parameetri või muutuja väärtuse suurenemisel. **Kvantitatiivse** analüüsi korral on oluline ka muutuse suurus. Võrdlev-staatiline analüüs ei tegele ühest tasakaaluseisundist teise jõudmise protsessi kirjeldamise ja uurimisega. Sellega tegeleb juba dünaamiline analüüs.

Kui mingis mudelis on tasakaalulahend leitud, siis näiteks mõne parameetri muutumisel muutuvad mudeli algtingimused ja muutub ka tasakaalulahend. Vaatleme näiteks juba tuttava turutasakaalu mudeli edasiarendust. Sõltugu tootja pakutav kauba kogus kauba hinnast:

$$q^S = -a + bp,$$

ning tarbija nõutav kogus kauba hinnast ja tarbija sissetulekust:

$$q^D = c - dp + em,$$

kus kõik parameetrid on positiivsed: $a, b, c, d, e > 0$.

Tasakaalutingimuseks on:

$$q^S = q^D.$$

Võrdsustame nõudlus- ja pakkumisfunktsioonid:

$$-a + bp = c - dp + em,$$

ja leiame tasakaaluhinnale vastava avaldise:

$$p^* = \frac{c + a + em}{b + d}.$$

Näeme, et tasakaaluhind sõltub mitmetest parameetritest ning tarbija sissetulekust.

Kvalitatiivse analüüsi korral püütakse näiteks uurida, millises suunas mõjutab tasakaaluhinda sissetuleku suurenemine. Selleks võetakse tasakaaluhinna avaldisest tuletis sissetuleku *m* järgi, ja teades parameetrite märke (antud juhul on kõik positiivsed), määratakse võimaluse korral tuletise märk:

$$\frac{\partial p^*}{\partial m} = \frac{e}{b + d} > 0.$$

Seega antud juhul sissetuleku suurenedes tasakaaluhind suureneb. Kuidas aga mõjutab tasakaaluhinda nõudluskõvera muutumine laugjamaks? Kui nõudluskõver on laugjam, siis (pööratud telgede tõttu) on nõudluskõvera tõusu absoluutväärtus *d* suurem. Seega huvitab meid, kuidas mõjutab tasakaaluhinda parameetri *d* suurenemine. Jagatise tuletise reeglite kohaselt leiame:

$$\frac{\partial p^*}{\partial d} = -\frac{\overset{(+)}{(a + c + em)}}{\underset{(+)}{(b + d)^2}} < 0.$$

Kuna on teada, et sissetulek saab omandada vaid positiivseid väärtusi, võib järeldada, et laugjam nõudluskõver langetab tasakaaluhinda.

Kvantitatiivse analüüsi jaoks on tarvis teada konkreetseid parameetrite väärtusi. Olgu nõudlusfunktsioon $q^D = 24 - 3p + 0{,}01m$ ja pakkumisfunktsioon $q^S = -4 + 4p$. Sellisel juhul tasakaaluhind on:

$$p^* = \frac{4 + 24 + 0{,}01m}{4+3} = 4 + \frac{m}{700}.$$

Kuna $\frac{\partial p^*}{\partial m} = \frac{1}{700}$, siis ühikuline muutus sissetulekus suurendab tasakaaluhinda $\frac{1}{700}$ võrra. Seega, kui sissetulek peaks suurenema näiteks 1000 krooni võrra, siis tasakaaluhind tõuseb arvatavasti $1000 \cdot \frac{1}{700} \approx 1{,}43$ võrra.

Sageli on teada vaid funktsioonide üldkuju ning osatuletiste märgid. Sellisel juhul võib kasu olla ilmutamata funktsiooni tuletisest. Olgu näiteks teada vaid nõudlus- ja pakkumisfunktsiooni üldkujud:

$$q^D = q^D(p,m),$$
$$q^S = q^S(p).$$

Tasakaalutingimuseks on nõutava ja pakutava koguse võrdus:

$$q^S(p) = q^D(p,m)$$

ehk

$$q^S(p) - q^D(p,m) = 0.$$

Tähistame viimase võrrandi vasakul pool asuva funktsiooni: $f(p,m) = q^S(p) - q^D(p,m)$. Kui soovime näiteks teada sissetuleku mõju tasakaaluhinnale, leiame selle ilmutamata funktsiooni tuletise valemi abil. Selleks tuleb leida osatuletised nimetatud funktsioonist p ja m järgi (vastavalt f_p ja f_m). Saame:

$$\frac{\partial p^*}{\partial m} = -\frac{f_m}{f_p} = -\frac{-q_m^D}{q_p^S - q_p^D} = \frac{q_m^D}{q_p^S - q_p^D}.$$

Teades, et pakkumine sõltub hinnast positiivselt ($q_p^S > 0$) ning nõudlus sõltub hinnast negatiivselt ($q_p^D < 0$) ja sissetulekust positiivselt ($q_m^D > 0$), leiame mõju suuna:

$$\frac{\partial p^*}{\partial m} = \frac{\overset{(+)}{q_m^D}}{\underset{(+)}{q_p^S} - \underset{(-)}{q_p^D}} > 0 .$$

Seega sissetuleku suurenemine suurendab tasakaaluhinda.

7.2. Jakobiaanide kasutamine keerukamates mudelites

Turutasakaalu mudelis on tegu ainult ühe tasakaalutingimusega. Keerukamates mudelites, kus tasakaalutingimusi on rohkem, on erinevate sõltumatute muutujate ja parameetrite muutuste mõju hindamiseks sõltuvatele muutujatele mõistlik kasutada maatriksalgebral tuginevaid meetodeid.

Selgitame seda lihtsa mudeli abil, mis sisaldab kahte tasakaalutingimust. Olgu mudelis kaks sõltuvat muutujat y_1 ja y_2 ning kaks sõltumatut muutujat x_1 ja x_2. Nii y_1 kui ka y_2 sõltuvad muutujatest x_1 ja x_2. Mis tahes tasakaalutingimused saab alati viia kujule, kus funktsioon kõigist muutujatest võrdub nulliga (ülaindeks näitab funktsiooni järjenumbrit):

$$F^1(y_1, y_2; x_1, x_2) = 0,$$
$$F^2(y_1, y_2; x_1, x_2) = 0 .$$

Oletame, et soovime teada ühe sõltumatu muutuja x_1 mõju sõltuvate muutujate tasakaaluväärtustele. Leiame mõlema tasakaalutingimusest tuletatud funktsiooni täisosatuletised x_1 järgi:

$$\frac{\partial F^1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F^1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+\frac{\partial F^1}{\partial x_1}=0\ ,$$

$$\frac{\partial F^2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F^2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}+\frac{\partial F^2}{\partial x_1}=0\ .$$

Viinud viimased liikmed teisele poole võrdusmärki, võime süsteemi kirja panna maatrikskujul, kus võrrandi vasakul pool oleva vektori elemendid kirjeldavad muutuja x_1 mõju muutujatele y_1 ja y_2:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\partial F^1}{\partial x_1}\\ -\frac{\partial F^2}{\partial x_1}\end{bmatrix}.$$

Maatriksit, mis koosneb erinevate funktsioonide tuletistest sõltuvate muutujate järgi (võrrandi vasakul pool asuv maatriks), nimetatakse **jakobiaaniks** ja tähistatakse tähega J. Antud juhul:

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2}\end{bmatrix}.$$

Kasutades Crameri reeglit, saame maatriksvõrrandist leida muutuja x_1 mõju sõltuvatele muutujatele y_i. Selleks jagame determinandi maatriksist J_i, kus veerg järjenumbriga i on asendatud vabaliikmete vektoriga, jakobiaani J determinandiga:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1}=\frac{|J_i|}{|J|}\ .$$

Näiteks $\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{|J_2|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & -\frac{\partial F^1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & -\frac{\partial F^2}{\partial x_1} \end{vmatrix}}{|J|}$.

Kui soovitakse teada hoopis muutuja x_2 mõju sõltuvatele muutujatele, tuleks tasakaalutingimustest saadud funktsioonidest võtta täisosatuletised x_2 järgi. Eespool toodud maatriksvõrrandis asenduks siis mõlemates vektorites muutuja x_1 muutujaga x_2. Jakobiaan jääb sellisel juhul samaks — viimane asjaolu teeb erinevate muutujate mõju analüüsimise lihtsamaks.

Üldjuhul peaks enamate tasakaalutingimustega mudelis sõltuvate muutujate arv võrduma alati tingimuste arvuga. Olgu siinkohal lühidalt toodud võrdlev-staatilise analüüsi põhisammud sellisel juhul. Olgu meil n tingimust ja sõltuvat muutujat ning m sõltumatut muutujat.

Siis avalduvad tasakaalutingimused kujul:

$$\begin{cases} F^1(y_1,\ldots,y_n;x_1,\ldots,x_m)=0, \\ F^2(y_1,\ldots,y_n;x_1,\ldots,x_m)=0, \\ \vdots \\ F^n(y_1,\ldots,y_n;x_1,\ldots,x_m)=0, \end{cases}$$

ning i-nda sõltumatu muutuja mõju arvutamiseks koostatud maatriksvõrrand on järgmine:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \frac{\partial F^n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial x_i} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ -\frac{\partial F^n}{\partial x_i} \end{bmatrix}.$$

Järgnevalt on võimalik Crameri reegli abil hinnata i-nda sõltumatu muutuja mõju suunda (kvalitatiivne analüüs) ja konkreetsete parameetrite väärtuste korral ka mõju suurust (kvantitatiivne analüüs). Suuremate mudelite korral tuleb eriti esile asjaolu, et kui jakobiaan on kord leitud, on edasine tegevus erinevate parameetrite ja muutujate mõju selgitamisel sõltuvatele muutujatele tunduvalt lihtsam.

Olgu näiteks tegu järgmise tüüpilise makroökonoomilise tulukulutuste mudeliga, kus rahvamajanduse kogutulu Y võrdub kogukuluga, mis jaotub tarbimise C (*consumption*), investeeringute I ja valitsuse kulutuste G (*government expenditure*) vahel, kusjuures viimased kaks on mudeliväliselt määratud. Lihtsuse huvides tähistatakse sõltumatud muutujad tavaliselt alaindeksiga 0:

$$Y = C + I_0 + G_0.$$

Tarbimine omakorda sõltub sissetulekust. Nimelt tarbitakse maksudejärgsest sissetulekust (sissetulekust on maha võetud maksusumma T) vaid mingi osa (seda proportsiooni väljendab parameeter c); samas on olemas ka sõltumatu tarbimine C_0:

$$C = C_0 + c(Y - T), \qquad 0 \leq c \leq 1.$$

Maksusumma moodustavad sõltumatud maksud ja mingi osa (mille määrab maksumäärale vastav parameeter t) majapidamiste summaarsest sissetulekust ehk kogutulust:

$$T = T_0 + t(Y),\ 0 \leq t \leq 1.$$

Kolm tasakaalutingimust on siis:

$$\begin{cases} Y - C - I_0 - G_0 = 0, \\ C - C_0 - c(Y - T) = 0, \\ T - T_0 - tY = 0. \end{cases}$$

Kuna uurides erinevate muutujate mõju kolme sõltuva muutuja (Y, C ja T) tasakaaluväärtustele, jakobiaani kuju ei muutu, siis leiamegi esmalt tasakaalutingimuste süsteemile vastava jakobiaani:

$$J = \begin{bmatrix} F_Y^1 & F_C^1 & F_T^1 \\ F_Y^2 & F_C^2 & F_T^2 \\ F_Y^3 & F_C^3 & F_T^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -c & 1 & c \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mõne konkreetse muutuja mõju uurimiseks maatriksvõrrandit kirja pannes on oluline kasutada sõltuvate muutujate (siin Y, C ja T) sama järjestust nii jakobiaani koostamisel kui ka võrrandi vasakul pool asuva otsitavate (mõju suurust kirjeldavate tuletiste) vektori koostamisel. Vastasel juhul ei anna analüüs korrektseid tulemusi. Järjestus ise pole oluline, kui kasutada läbivalt üht või teist järjestust — teisenduste ja arvutuste käigus võivad siis erineda küll avaldiste märgid, kuid analüüsi lõpptulemused (sõltumatu muutuja mõju sõltuvale muutujale) ei erine.

Näiteks investeeringute I_0 mõju erinevatele sõltuvatele muutujatele võimaldab arvutada maatriksvõrrand:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -c & 1 & c \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_I \\ C_I \\ T_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_I^1 \\ -F_I^2 \\ -F_I^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ning näiteks investeeringute mõju tasakaalu kogutulule on:

$$\frac{\partial Y}{\partial I_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -c & 1 & c \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1+tc-c} = \frac{\overset{(+)}{1}}{\underset{(+)}{(1-c)} + \underset{(+)}{tc}} > 0 .$$

Seega mõjutavad investeeringud antud mudelis tasakaalu kogutulu positiivselt.

Sama meetodit võib kasutada ka mudelis esinevate parameetrite mõju uurimiseks. Näiteks maksumäära t mõju erinevatele sõltuvatele muutujatele kirjeldab maatriksvõrrand:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -c & 1 & c \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ C_t \\ T_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_t^1 \\ -F_t^2 \\ -F_t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Y \end{bmatrix}$$

ning maksumäära mõju tasakaalu kogutulule:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ Y & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -c & 1 & c \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-cY}{1+tc-c} = -\frac{\overset{(+)}{cY}}{\underset{(+)}{(1-c)} + \underset{(+)}{tc}} < 0 .$$

Kuna $0 \leq c \leq 1$, siis $1-c \geq 0$ ja maksumäära mõju tasakaalu kogutulule on negatiivne — maksumäära suurenedes tasakaalu kogutulu väheneb.

8. DIFERENTSVÕRRANDID

8.1. Dünaamiline analüüs, diferents- ja diferentsiaalvõrrandid

Dünaamilise analüüsi korral uuritakse majandusnähtuste ja neid kirjeldavate näitajate muutumist ajas ning selgitatakse, kas näitajad aja jooksul lähenevad kindlatele (tasakaalu)väärtustele või hoopis kaugenevad nendest. Seega tuuakse analüüsi eraldi muutujana sisse aeg. Kui tavaliselt kirjeldavad funktsioonid kahe või enama majandusnähtuse vahelist seost, siis nüüd võetakse esialgu vaatluse alla ainult üks majandusnähtus ning uuritakse seda nähtust kirjeldava näitaja muutumist ajas. Näiteks uuritakse, kuidas muutub aja jooksul kauba hind või riigi majanduse kogutoodang.

Aega võib niisiis vaadelda sõltumatu muutujana. Mingi näitaja muutumist ajas võib väljendada funktsioonina ajast t (*time*): $y = f(t)$. Sageli ei ole seda sõltuvust kirjeldava funktsiooni kuju teada, küll aga on võimalik sedasama sõltuvust ja muutumisprotsessi kirjeldada pisut teisel kujul: diferents- ja diferentsiaalvõrranditega. Näiteks võib mingi mudeli võrranditest olla tuletatav sõltuva muutuja väärtuse muutumist ajas kirjeldav võrrand — diferents- või diferentsiaalvõrrand. Kui mudelis on sõltuvaid muutujaid mitu, võib ka mudelist tuletatavaid diferents- või diferentsiaalvõrrandeid olla rohkem.

Kas näitaja muutumist kirjeldatakse diferents- või diferentsiaalvõrranditega, sõltub sellest, kas aeg ehk muutuja t on diskreetne või pidev. Muutuja on **diskreetne**, kui ta saab omandada vaid täisarvulisi väärtusi. Kui argument on diskreetne, siis on funktsiooni väärtus määratud vaid nendes punktides, kus on määratud argumendi väärtus. **Pidev** muutuja võib omandada ka mittetäisarvulisi, üksteisest väga vähe erinevaid väärtusi. Kui argumendi väärtus on määratud pidevalt, siis on võimalik määrata pidevalt ka funktsiooni väärtus.

Niisiis, kui **aeg** t on **määratud pidevalt**, omandab ajast sõltuv muutuja uue väärtuse iga vähimagi muutuse korral ajas. Ajaühikus toimuvat y muutust väljendab tuletis funktsioonist $y = f(t)$ aja järgi: $\frac{dy}{dt}$. Mingi muutuja y muutumist ajas on siis võimalik kirjeldada **diferentsiaalvõrrandiga**, mis sisaldab muutujat y ja ning selle erinevat järku tuletisi aja järgi funktsioonist $y = f(t)$: $\frac{dy}{dt}$ ehk $y'(t)$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ ehk $y''(t)$ jne. Sageli tähistatakse muutuja tuletist aja järgi ka vastava arvu punktidega muutuja tähise kohal: $\dot{y}$, $\ddot{y}$ jne. Kõige kõrgemat järku tuletis, mida võrrand sisaldab, määrab ka võrrandi järgu. Üks lihtsamaid esimest järku lineaarseid diferentsiaalvõrrandeid näeb välja selline:

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t),$$

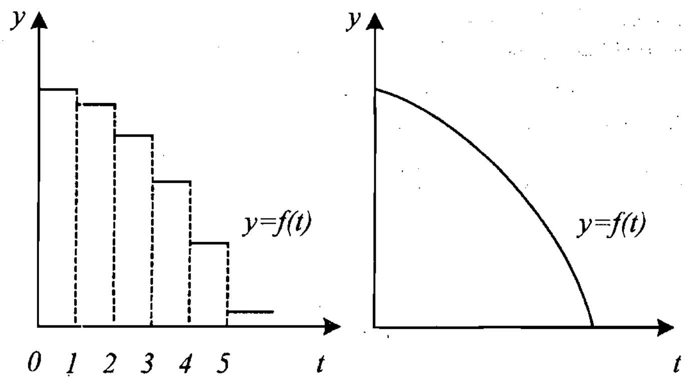
kus u ja w on, nagu ka muutuja y, funktsioonid ajast. Kui u ja w on konstandid (näiteks vastavalt a ja b), näeb võrrand välja selline:

$$\frac{dy}{dt} + ay = b.$$

Diferentsiaalvõrrandit lahendades saadakse tulemuseks funktsioon $y = f(t)$, mis kirjeldab muutuja y sõltuvus ajast. **Diferentsiaalvõrrandi lahendiks** $y(t)$ on seega avaldis, mis sisaldab muutujana ainult aega t (mitte tuletisi ega diferentsiaale).

Diskreetse aja korral muutub funktsiooni y väärtus alles siis, kui muutuja t omandab uue täisarvulise väärtuse (vt ka joonist 8.1).

Vahepeal ei juhtu midagi: funktsiooni väärtus jääb samaks. Funktsiooni graafik on seepärast katkev — seega ei ole funktsioon diferentseeruv ning diferentsiaalide kasutamine on võimatu. Selle asemel analüüsitakse muutusi väärtustes ehk diferentse. Diskreetse aja korral kirjeldataksegi muutuja y muutumist ajas **diferentsvõrrandi** abil. Siinjuures tasub märkida, et kui räägitakse diskreetsest ajast, siis interpreteeritakse sageli muutuja t väärtusi mitte ajahetkedena, vaid **perioodidena** — funktsiooni väärtus jääb ju samaks terve kahe ajahetke vahelise perioodi jooksul. Funktsiooni väärtuse muutust ajaühikus väljendab siis kahe perioodi väärtuste vahe ehk diferents: $\Delta y = y_t - y_{t-1}$.



Joonis 8.1. Funktsiooni graafik diskreetse ja pideva argumendi korral

Kui asendada lihtsas diferentsiaalvõrrandis $\frac{dy}{dt} + cy = b$ muutust väljendav tuletis $\frac{dy}{dt}$ diferentsiga $\Delta y = y_t - y_{t-1}$ ning muutuja väärtus y esialgse väärtusega y_{t-1}, saame võrrandi:

$\Delta y_t + cy_{t-1} = b$ ehk $y_t - y_{t-1} + cy_{t-1} = b$.

Veidi teisendades saame:

$$y_t = (1-c)y_{t-1} + b.$$

Tähistades $1-c=a$, saamegi esimest järku lineaarse konstantsete kordajatega diferentsvõrrandi:

$$y_t = ay_{t-1} + b.$$

Tavaliselt pannaksegi diferentsvõrrand kirja kujul, mis sisaldab muutujat perioodil t (y_t) ning varasematel ajaperioodidel (y_{t-1}, y_{t-2} jne). Mõnikord sisaldab võrrand lisaks muutujale y_t hoopis muutujaid hilisematest perioodidest: y_{t+1}, y_{t+2} jne. Sellisel kujul olevat võrrandit on aga alati võimalik viia eespooltoodud kujule ja vastupidi — liites kõigile indeksitele vajaliku (positiivse või negatiivse) täisarvu. Kõige kaugem periood, mida võrrand sisaldab, määrab ka **võrrandi järgu.**

Diferentsvõrrandi lahendiks y_t on samuti muutuja y sõltuvus ajast. Kui diferentsvõrrand sisaldab muutuja väärtusi erinevatel ajaperioodidel, siis selle lahendiks on avaldis ajast t.

8.2. Diferentsvõrrandi lahendamine

Vaatleme lähemalt lihtsa esimest järku diferentsvõrrandi $y_t = ay_{t-1} + b$ lahendamist. Diferentsvõrrandi lahend y_t peaks niisiis andma reegli, mille abil saab leida muutuja y väärtuse suvalisel ajaperioodil t.

Diferentsvõrrandi lahend koosneb tavaliselt kahest osast: erilahend (*particular solution*) ja täiendfunktsioon (*complementary function*). Mõlemal on majandusteaduses oma kindel tähendus. **Erilahend** on lahendi ajast sõltumatu osa, mis näitab muutuja y **tasakaaluväärtust. Täiendfunktsioon** on ajast sõltuv funktsioon, mis kirjeldab muutuja y **liikumist tasakaaluväärtuse ümber**. Diferentsvõrrandi **üldlahend** on erilahendi ja täiendfunktsiooni summa. Paremaks ettekujutuseks võib muutuja käitumist ajas kirjeldavast funktsioonist $y = f(t)$ eraldada konstantse osa: $y = c + g(t)$. Erilahend määrab siis konstandi c ning täiendfunktsioon funktsiooni $g(t)$ väärtuse.

Erilahend on selline muutuja y väärtus, mille korral y ajas ei muutu. Tegu on tasakaaluväärtusega — tasakaalu all mõistetakse süsteemi rahulikku seisundit, kus muutumistendents puudub. Seega peaks kehtima:

$$y^* = y_t = y_{t-1}.$$

Asendades esialgses võrrandis y väärtused mõlemal ajaperioodil suurusega y^*, saame:

$$y^* = ay^* + b,$$

kust võime avaldada erilahendi leidmise valemi:

$$y^* = \frac{b}{1-a}, \text{ kus } a \neq 1.$$

Lahendi leidmist juhul, kui $a = 1$, käsitleme pisut hiljem.

On võimalik tõestada (vt lisa 3), et **täiendfunktsioon** on vaadeldaval juhul järgmise kujuga:

$$(y_0 - y^*)a^t,$$

kus y_0 on muutujale y antud algväärtus (diferentsvõrrandi lahend y_t kirjeldabki muutuja edasist käitumist pärast mingi algväärtuse omandamist). Diferentsvõrrandi $y_t = ay_{t-1} + b$ **üldlahend** on leitav erilahendi ja täiendfunktsiooni summana järgmiselt:

$$y_t = y^* + (y_0 - y^*)a^t .$$

Olgu märgitud, et kui konstant b on null, siis on erilahend null: $y^* = \dfrac{0}{1-a} = 0$, ning üldlahendiks on täiendfunktsioon: $y_t = y_0 a^t$. Sisuliselt kujutabki lisas 3 toodud täiendfunktsiooni leidmine endast võrrandi $y_t = ay_{t-1}$ lahendi leidmist.

Kuna on teada, et $y^* = \dfrac{b}{1-a}$, siis sageli kasutatakse lahendamisel kohe valemit:

$$y_t = \frac{b}{1-a} + \left(y_0 - \frac{b}{1-a} \right) a^t .$$

Lahendame näiteks lihtsa diferentsvõrrandi: $y_t = 3y_{t-1} - 8$. Leiame erilahendi:

$$y^* = \frac{-8}{1-3} = 4,$$

ning kirjutame välja üldlahendi:

$$y_t = 4 + (y_0 - 4)3^t .$$

Kui on teada mingi konkreetne arvuline algväärtus y_0, saab arvutada määratud lahendi. Näiteks kui $y_0 = 2$, siis:

$$y_t = 4 + (2-4)3^t = 4 + (-2)3^t .$$

Vaatame nüüd, kuidas käituda erijuhul, kui $a = 1$. Kuna erilahend kujul $y^* = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{b}{0}$ ei ole sel juhul määratud, siis eespooltoodud valemit siin kasutada ei saa. Võrrandist $y_t = y_{t-1} + b$

näeme, et igal järgmisel perioodil lisatakse eelmise perioodi väärtusele konstant b:

$$y_1 = y_0 + b,$$

$$y_2 = y_1 + b = y_0 + 2b,$$

$$y_t = y_0 + tb.$$

Seega, kui $a = 1$, on üldlahendiks: $y_t = y_0 + tb$.

8.3. Tasakaalu stabiilsuse hindamine

Diferentsvõrrandi lahendi abil on võimalik hinnata tasakaalu stabiilsust. Nagu juba mainitud, on y^* muutuja y tasakaaluväärtus. Mingis mudelis sisalduvatest tasakaalutingimustest leitud sõltuva muutuja tasakaaluväärtus on leitud mingitel kindlatel eeldustel ja parameetrite kindlate väärtuste korral. Näiteks on leitud turu tasakaaluhind nõudluse ja pakkumise tasakaalu tingimuse alusel. Tasakaal püsib, kuni eeldused ja parameetrid ei muutu. Mingi muutuse toimel läheb aga süsteem tasakaalust välja. Nimetatud sõltuv muutuja omandab siis mingi uue väärtuse (see ongi algväärtus diferentsvõrrandi mõistes) ja muutuja väärtus hakkab ajas muutuma vastavalt reeglile, mille annab diferentsvõrrandi lahend. Nii näiteks võib ikaldus muuta kauba kogust, millega turul kaubeldakse, ning vallandada turul uute tingimustega kohandumise protsessi.

Võib juhtuda, et muutuja väärtus läheneb ajas uuesti tasakaaluväärtusele. Samas võivad aga mudeli võrrandid tingida sõltuva muutuja väärtuse edasise liikumise tasakaaluväärtusest veelgi kaugemale. Esimesel juhul tasakaal taastub ja tegu on stabiilse tasakaaluga, teisel juhul on tegu ebastabiilse tasakaaluga. Uurides diferentsvõrrandi lahendiks olevat funktsiooni, on võimalik kindlaks teha, millist tüüpi protsess tasakaalust väljumisele järgneb ning kas tegu on stabiilse tasakaaluga.

Vaatleme eelmises peatükis tuletatud diferentsvõrrandi $y_t = ay_{t-1} + b$ lahendi valemit:

$$y_t = y^* + (y_0 - y^*)\, a^t.$$

Näeme, et juhul, kui algväärtuseks y_0 satub olema tasakaaluväärtus y^*, siis täiendfunktsioon on võrdne nulliga ja muutuja väärtus püsib tasakaalutasemel y^*. Kui mingite tingimuste muutumisel omandaks y tasakaaluväärtusest erineva algväärtuse y_0, siis muutuja edasine käitumine sõltub täiendfunktsiooni $(y_0 - y^*)\, a^t$ kujust. Kui täiendfunktsiooni absoluutväärtus ajas suureneb, siis eemaldub muutuja väärtus y_t tasakaaluväärtusest y^*. Kui aga täiendfunktsiooni absoluutväärtus järjest väheneb (täiendfunktsiooni väärtus läheneb nullile), siis läheneb muutuja uuesti oma tasakaaluväärtusele.

Järgmisena tuleks seega analüüsida, mis määrab selle, kas täiendfunktsiooni absoluutväärtus on ajas kasvav või kahanev. Osutub, et selle määrab avaldise a^t käitumine. See, kas algväärtus on tasakaaluväärtusest suurem või väiksem — ehk kas $(y_0 - y^*)$ on positiivne või negatiivne — mõjutab ainult täiendfunktsiooni märki, mitte aga seda, kas selle absoluutväärtus ajas suureneb või väheneb. On ju $(y_0 - y^*)$ näol konkreetse algväärtuse korral tegu konstandiga. Tähele tasub panna ka seda, et mida suurem on algväärtuse ja tasakaaluväärtuse erinevus, seda enam kulub absoluutväärtuselt kahaneva täiendfunktsiooni korral aega tasakaaluväärtuse saavutamiseks.

Avaldise a^t käitumise ajas määrab ära parameeter a ehk y_{t-1} kordaja diferentsvõrrandis. Nimelt:

kui $|a| > 1$, siis $|a^t| \to \infty$, kui $t \to \infty$;

kui $|a| = 1$, siis $|a^t| = 1$, kui $t \to \infty$;

kui $0 < |a| < 1$, siis $|a^t| \to 0$, kui $t \to \infty$;

kui $a = 0$, siis $a^t = 0$, kui $t \to \infty$.

Kui $a = 0$, omandab vaadeldav diferentsvõrrand kuju $y_t = 0y_{t-1} + b = b$ — muutuja y_t väärtus on igal ajaperioodil sama (konstant b) ning süsteemi tasakaalust väljumine pole võimalik. Seepärast jäetakse siinkohal see juht ($a = 0$) vaatluse alt välja.

Kui $a = 1$, on võrrandi üldlahendiks $y_t = y_0 + tb$ ning y_t väärtus läheneb sõltuvalt b märgist positiivsele või negatiivsele lõpmatusele. Kuna on selge, et sellisel juhul pole võimalik muutuja y_t lähenemine tasakaaluväärtusele, jäetakse ka see juht vaatluse alt välja.

Muutuja väärtus läheneb oma tasakaaluväärtusele siis, kui täiendfunktsiooni väärtus läheneb nullile — selleks peab nullile lähenema ka $|a^t|$. See omakorda on võimalik, kui parameetri a väärtus jääb vahemikku: $0 < |a| < 1$. Sellisel juhul on mingile muutusele järgnev **protsess** (tasakaaluväärtuse poole) **koonduv** ja **tasakaal stabiilne**. Kui a on positiivne, siis omandab muutuja väärtusi kas ainult ülalpool (kui algväärtus on tasakaaluväärtusest suurem, vt ka joonist 8.2) või ainult allpool tasakaaluväärtust (vastupidisel juhul). Kui aga a on negatiivne, siis kõigub muutuja väärtus tasakaaluväärtusele lähenedes ülal- ja allpool tasakaaluväärtust. Sellist kõikumist nimetatakse **võnkuvaks ehk kõikuvaks protsessiks.**

Kui parameetri a absoluutväärtus on üle ühe ($|a| > 1$), siis $|a^t|$ läheneb lõpmatusele ning järjest suureneb ka täiendfunktsiooni absoluutväärtus. Sellisel juhul eemaldub muutuja järjest oma tasakaaluväärtusest (tegu on **hajuva protsessiga**) ning **tasakaal ei ole stabiilne**. Ka siin on protsess võnkuv, kui a on negatiivne.

Kokku võttes:

kui $a > 1$, siis $|y_t| \to \infty$, kui $t \to \infty$, ning tegu on hajuva protsessi ja ebastabiilse tasakaaluga;

kui $0 < a < 1$, siis $y_t \to y*$, kui $t \to \infty$, ning tegu on koonduva protsessi ja stabiilse (taastuva) tasakaaluga;

kui $-1 < a < 0$, siis $y_t \to y*$, kui $t \to \infty$, ning tegu on võnkuva koonduva protsessi ja stabiilse (taastuva) tasakaaluga;

kui $a < -1$, siis $|y_t| \to \infty$, kui $t \to \infty$, ning tegu on võnkuva hajuva protsessi ja ebastabiilse tasakaaluga.

Kui $a = -1$, vaheldub aja jooksul vaid täiendfunktsiooni märk: $|(y_0 - y*)(-1)^t| = const$ ning muutuja väärtus **võngub** kahe suuruse vahel. Muutuja y väärtus on oma tasakaaluväärtusest vaheldumisi selle täiendfunktsiooni absoluutväärtuse võrra suurem või väiksem. Kui t on paarisarv, siis on muutuja väärtuseks algväärtus:

$$y_t = y* + (y_0 - y*)1 = y_0;$$

kui t on paaritu arv, siis on muutuja väärtus järgmine:

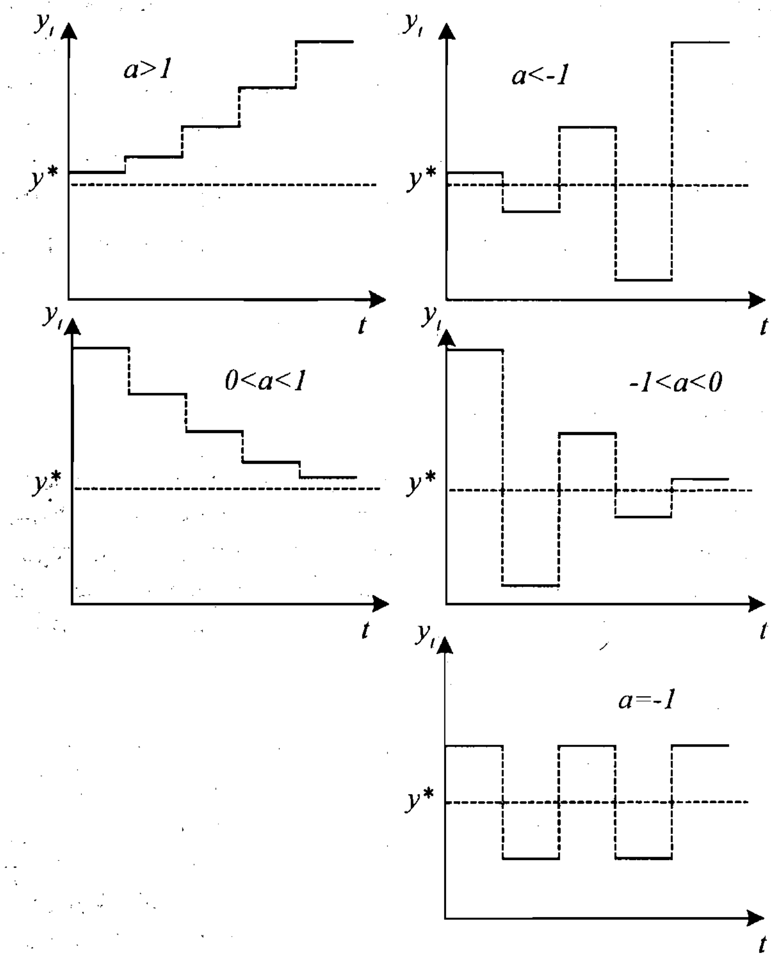
$$y_t = y* + (y_0 - y*)(-1) = 2y* - y_0.$$

Seega, kui anda muutujale mingi tasakaaluväärtusest erinev algväärtus ($y_0 \neq y*$), ei omanda muutuja kunagi tasakaaluväärtust ning **tasakaal** on seega **ebastabiilne**.

Eespooltoodu mõistmisel on abiks joonis 8.2, kus on skitseeritud diferentsvõrrandi lahendamisel leitud funktsiooni $y_t = f(t)$ graafikud parameetri a erinevate väärtuste korral.

Tuletame meelde, et täiendfunktsiooni märk sõltub ka sellest, kas algväärtus on tasakaaluväärtusest suurem või väiksem. Joonisel on kujutatud graafikud juhul, kui $y_0 > y*$ ehk kui kordaja $(y_0 - y*)$ on positiivne. Kui algväärtus on tasakaaluväärtusest väiksem ($y_0 < y*$), siis sellisel juhul on funktsiooni $y = f(t)$ graafikud erinevate a väärtuste korral joonisel kujutatute peegeldused üle horisontaalsirge $y_t = y*$. Kui $y_0 = y*$, siis tasakaal püsib ja funktsiooni $y = f(t)$ graafik on horisontaalne sirge tasakaaluväärtuse tasemel $y_t = y*$.

Kõrvalmärkusena: taoliste graafikute skitseerimisel võib kasutada järgmist meetodit. Kui skitseeritava funktsiooni näol on tegu kahe funktsiooni summaga, võib esmalt kujutada eraldi mõlema funktsiooni graafikud ja seejärel liita need üksteisele vertikaaltelje sihis (liidetakse funktsiooni väärtusi, mitte argumentide väärtusi). Kui tegu on näiteks kahe funktsiooni summaga, siis sisuliselt vaadeldakse teise graafiku joonistamisel horisontaalteljena esimese liidetava funktsiooni graafikut. Käesoleval juhul on funktsioon $y_t = f(t)$ konstandi $y*$ ja täiendfunktsiooni $(y_0 - y*)a^t$ summa. Sel juhul võib esmalt kujutada esimest liidetavat kujutava horisontaaljoone $y_t = y*$ ning seejärel — vaadeldes seda joont kui horisontaaltelge — skitseerida täiendfunktsiooni. Viimane kujutab endast aga mingi konstandiga korrutatud eksponentfunktsiooni. Kuna tegu on diskreetse ajaga, siis on funktsiooni graafik katkev (funktsiooni väärtus muutub iga perioodi järel).



Joonis 8.2. Erinevaid protsesse kirjeldavad graafikud sõltuvalt parameetri a väärtusest

Lõpetuseks on oluline märkida, et koonduva protsessi korral läheneb muutuja väärtus järjest oma tasakaaluväärtusele, kuid tegelikult ei saavuta kunagi täpselt tasakaaluväärtust. Muutuja tegeliku väärtuse y_t ja tasakaaluväärtuse y^* erinevus järjest kahaneb ja sõltub uurijast, kui väikesest erinevusest alates see erinevus nulliks loetakse. Näiteks, kui lubatava vea suurus on $\varepsilon = 0{,}01$, siis loetakse muutuja väärtus tasakaaluväärtuseks, kui mainitud erinevus on absoluutväärtuselt alla 0,01: $|y_t - y^*| < 0{,}01$. Mõnikord märgitakse lubatavat erinevust ka nii: $y_t = y^* \pm 0{,}01$.

8.4. Ämblikuvõrkmudel

Hästituntud näide diferentsvõrrandite kasutamisest majandusteoorias on ämblikuvõrkmudel. Erinevalt tavalisest turutasakaalu mudelist on ämblikuvõrkmudelis sisse toodud ka ajategur. Eeldatakse, et tarbija nõutav kauba kogus sõltub sama perioodi hinnast, tootja pakutav kogus sõltub aga hinnast eelmisel perioodil:

$$q_t^S = q^S(p_{t-1}),$$
$$q_t^D = q^D(p_t).$$

Nii on see näiteks paljude taimekasvatussaaduste korral — otsus pakutava koguse kohta tehakse tunduvalt varem, kui kaup tegelikult müügile jõuab. Näiteks kartul pannakse maha kevadel, saak koristatakse ja seda müüakse alles sügisel. Seepärast otsustatakse toodetav kogus eelmise aasta hinna järgi ning vahepeal otsust muuta ei saa. Tarbijal selliseid piiranguid ei ole, seepärast on nõutav kogus seotud sama perioodi hinnaga.

Tasakaalutingimuseks on ka ämblikuvõrkmudelis nõutava ja pakutava koguse võrdus:

$$q_t^D = q_t^S .$$

Oletame lihtsuse mõttes, et nii pakkumis- kui ka nõudlusfunktsioon on lineaarsed. Sellisel juhul näeb mudel välja selline:

$$q_t^S = -a + bp_{t-1} ,$$

$$q_t^D = c - dp_t ,$$

$$q_t^D = q_t^S ,$$

kus $a, b, c, d > 0$.

Tasakaalutingimusest saame diferentsvõrrandi hinna kohta $-a + bp_{t-1} = c - dp_t$ ehk: $p_t = \dfrac{a+c}{d} - \dfrac{b}{d} p_{t-1}$.

Märkus. Käesoleva mudeli parameeter a ei seostu eespool diferentsvõrrandi üldkujus esineva kordajaga a. Siinkohal on diferentsvõrrandis muutuja p käitumist määravaks kordajaks $-\dfrac{b}{d}$.

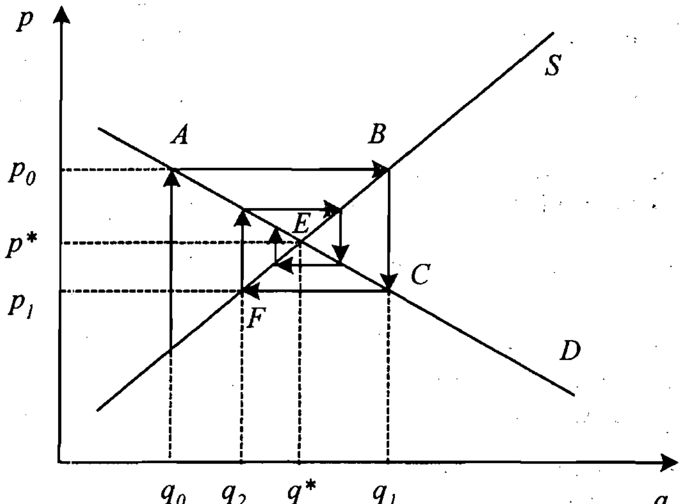
Et leida tasakaaluhind, võib selle diferentsvõrrandi erilahendi kindlaks teha, asendades $p_t = p_{t-1} = p^*$. Siis saab leida ka tasakaalukoguse q^*. Teise nurga alt vaadates: tasakaalu korral hind ega kogus ei muutu ning seega kaob vajadus alaindeksite järele. Seepärast — leidmaks tasakaaluhinda ja tasakaalukogust — võib lahendada lihtsalt süsteemi:

$$\begin{cases} q^S = -a + bp, \\ q^D = c - dp, \\ q^S = q^D . \end{cases}$$

Tulemus on mõlemal juhul sama:

$$p^* = \frac{a+c}{b+d} \text{ ja } q^* = \frac{bc-ad}{b+d}.$$

Järgnevalt on võimalik analüüsida, kas see turutasakaal on stabiilne ehk kas mingi muutuse või sündmuse tõttu tasakaalust välja viidud turg jõuab mingi aja möödudes ise tasakaalu tagasi. Analüüsime olukorda esmalt joonise abil. Joonisel 8.3 on kujutatud mingi hüpoteetilise põllumajandussaaduse nõudlus- ja pakkumiskõverad. Nende lõikepunkt E tähistab nõudluse ja pakkumise tasakaalu tasakaaluhinna p^* ja tasakaalukoguse q^* juures.

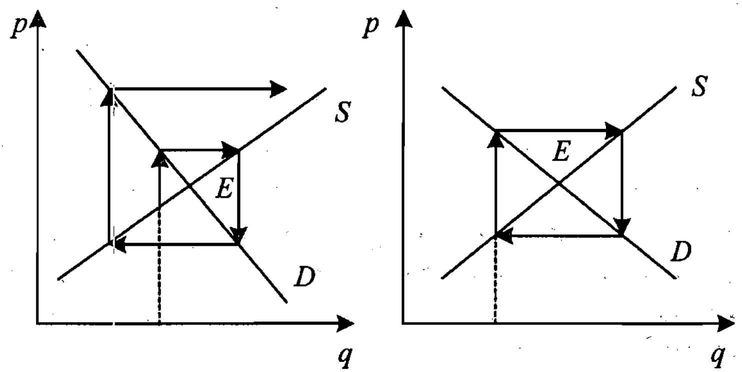


Joonis 8.3. Kohandumised ämblikuvõrkmudelis stabiilse tasakaalu korral

Oletame, et toimub mingi sündmus, mis senise tasakaalu säilimise välistab, näiteks aastal $t = 0$ sajab palju vihma ja saak ikaldub. Ikalduse tõttu pole võimalik pakkuda tasakaalukogust, vaid ainult mingit väiksemat kogust q_0. Väiksema koguse puhul ei püsi ka tasakaaluhind ja uus hind sel perioodil (p_0) on eeldatavalt tasakaaluhinnast kõrgem. Kui mingi kogus on turule toodud, kujuneb hind, millega see kogus müüakse, vastavalt nõudluskõverale. Leiame selle hinna, liikudes kogusest q_0 üles kuni nõudluskõverani punkti A ning sealt vasakule. Hinnateljelt saamegi teada uue hinna p_0. Järgmise aasta kevadel teeb tootja otsuse järgmise aasta toodangumahu q_1 kohta eelmise aasta hinna p_0 järgi pakkumisfunktsiooni alusel. Leiame pakkumisfunktsioonist hinnale p_0 vastava koguse. Selleks liigume punktist A paremale kuni pakkumiskõverani punkti B ning sealt alla koguseteljeni, kust loeme koguse q_1. Kuna see kogus on suhteliselt suur, siis on tarbijad nõus selle eest vähem maksma. Leiame jälle nõudlusfunktsioonist kogusele q_1 vastava hinna p_1. Selleks liigume punktist B alla punktini C ning siis vasakule hinnateljeni. Edasi teeb tootja hinna p_1 alusel otsuse q_2 kohta: liigume punkti F ning loeme koguseteljelt vastava koguse. Nii jätkub hinna ja koguse kohandumise protsess, mille graafiline kujutis meenutab ämblikuvõrku.

Vahemärkusena olgu öeldud, et kui vertikaalteljel on kujutatud kogus ja horisontaalteljel hind, siis ei liigu joonisel nooltega kujutatud kohandumise tee päripäeva, vaid vastupäeva.

Kas kohandumiste tulemusena jõutakse tasakaalupunkti E või hoopis kaugenetakse sellest, sõltub nõudlus- ja pakkumiskõvera tõusudest. Joonisel 8.3 kujutatud kõverate korral — pakkumiskõver on nõudluskõverast järsem — jõuab turg mingi aja jooksul tasakaalu tagasi ning kaubeldav kogus ja kauba hind omandavad taas oma tasakaaluväärtused. Kui aga nõudluskõver on järsem, siis turuprotsess hajub ning hinna ja koguse kohandumise tee viib tasakaalupunktist eemale, nagu kujutatud joonisel 8.4 vasakul. Absoluutväärtuselt võrdsete tõusudega kõverate korral (joonis 8.4 paremal) aga jäävad hind ja kogus kõikuma kahe väärtuse vahel, millest üks on tasakaaluväärtusest suurem ja teine väiksem.



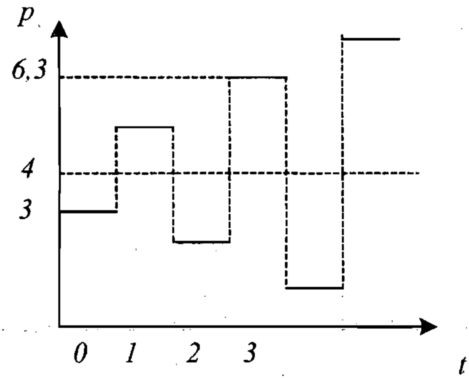
Joonis 8.4. Ebastabiilne tasakaal

Niisiis, tasakaal on stabiilne (koonduv turuprotsess), kui pakkumiskõver on nõudluskõverast järsem. Toodud joonistel on kujutatud nõudluse ja pakkumise pöördfunktsioonid. Seega peab pakkumise pöördfunktsiooni tõus ületama nõudluse pöördfunktsiooni tõusu absoluutväärtust. Leides pöördfunktsioonidest esialgsed funktsioonid, muutub seos vastupidiseks: nõudlusfunktsiooni tõusu absoluutväärtus peaks olema suurem pakkumisfunktsiooni tõusust:

$|-d| > b$ ehk kuna $b, d > 0$, siis:

$d > b$.

Analüüsime seda ka diferentsvõrrandi abil. Hinna kohandumist kirjeldab võrrand $p_t = \frac{a+c}{d} - \frac{b}{d} p_{t-1}$. Selle üldlahend on:



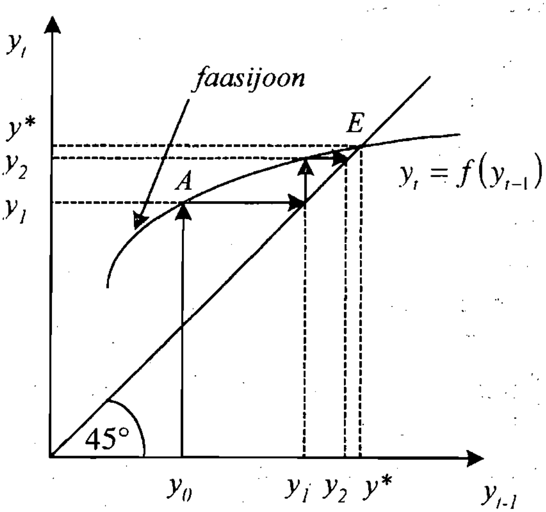
Joonis 8.5. Hinna muutumine ajas

8.5. Faasidiagrammid

Siiani oleme käsitlenud lihtsa lineaarse diferentsvõrrandi $y_t = ay_{t-1} + b$ lahendamist. Kui esimest järku diferentsvõrrand on keerulisema kujuga, võib selle lahendamine osutuda keerukaks või koguni võimatuks. Sellisel juhul pole muutuja y väärtust funktsioonina ajast ($y_t = f(t)$)võimalik välja tuua. Et aga ka niisugusel puhul saada mingit ettekujutust muutuja käitumisest ajas ning hinnata tasakaaluväärtuste stabiilsust, kasutatakse **kvalitatiivset** analüüsi, täpsemalt — **faasidiagrammi** joonistamist.

Faasidiagrammi joonistamisel võetakse aluseks teadaolev diferentsvõrrand, mis väljendab muutujate y_t ning y_{t-1} vahelist seost. Seda seost kujutataksegi faasidiagrammil faasijoonena. Tavaliselt asetatakse vertikaalteljele y_t ning horisontaalteljele y_{t-1} — seepärast viiakse diferentsvõrrand kujule $y_t = f(y_{t-1})$ — ning skitseeritakse nende kahe muutuja vahelise funktsionaalse seose graafik ehk **faasijoon** (vt joonist 8.6). Seejuures vaadeldakse enamasti ainult veerandit, kus mõlemad muutujad on positiivsed.

y_{t-1} y_t-teljestikus on 45°-joonel muutuja väärtus erinevatel perioodidel võrdne: $y_t = y_{t-1}$. Seega muutuja y väärtus, mille korral faasijoon lõikab 45°-joont, ongi selle muutuja **tasakaaluväärtus** (muutumistendents puudub). Punkte, kus faasijoon puutub või lõikab 45°-joont, võib nimetada tasakaalupunktideks. Kas see tasakaal on ka stabiilne, saab kontrollida, kujutades faasidiagrammil muutuja y väärtuse muutumise tee. Selgitame seda joonise 8.6 abil, kus on kujutatud üks hüpoteetiline faasijoon. Lõikepunktis 45°-joonega ehk punktis E asub tasakaalupunkt — kui muutuja omandab väärtuse y^*, siis see väärtus jääb püsima kuni mingite tingimuste muutumiseni.

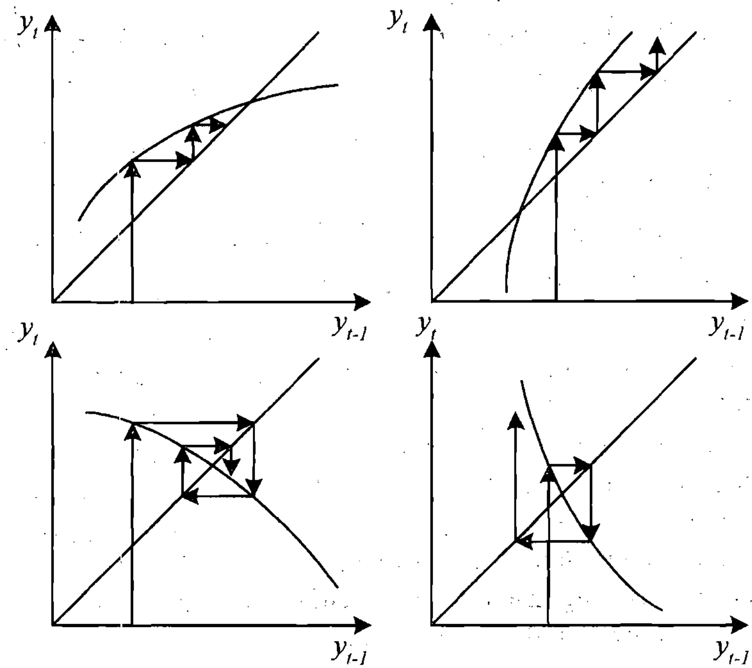


Joonis 8.6. Faasidiagrammi näide

Kui faasijoone kuju on teada (nt selline, nagu kujutatud joonisel 8.6), siis võib valida mingi algväärtuse y_0 ning märkida selle y_{t-1}-teljele. Järgmise perioodi väärtus y_1 on võimalik leida faasijoone abil, kuna see kirjeldab seost $y_t = f(y_{t-1})$. Liigume algväärtusest y_0 otse üles kuni faasijooneni punkti A. Punktile A vastav väärtus y_t-teljel ongi y_1. Teise perioodi väärtus y_2 on võimalik leida analoogiliselt, aga enne peame väärtuse y_1 kujutama horisontaalteljel. Selleks peegeldame punkti y_1 vertikaalteljel üle 45°-joone horisontaalteljele. Ehk teisisõnu: liigume punktist A paremale kuni 45°-jooneni ja siis alla horisontaalteljeni. Siis loeme jälle faasijoone abil välja väärtuse y_2 jne. Sellist protseduuri kirjeldab joonisel nooltega kujutatud täisnurkne liikumine faasijoone ja 45°-joone vahel ehk **faasitee** (y väärtuse muutumise tee ajas). Joonisel 8.6 kujutatud juhul jõutakse sellise liikumise tulemusena järjest lähemale tasakaalupunktile E, seega on tasakaal stabiilne.

Tasakaalu stabiilsus ehk see, kas muutuja väärtus ajas läheneb tasakaaluväärtusele (väärtus, mille korral faasijoon lõikab 45°-joont) või hoopis kaugeneb sellest, sõltub funktsiooni $y_t = f(y_{t-1})$ ja seda kirjeldava faasijoone kujust. Joonisel 8.7 on toodud neli erinevat võimalikku faasijoone kuju tasakaalupunkti ümbruses.

Jooniselt näeme, et kui anda muutujale y mingi väike muutus, siis järgneb sellele koonduv protsess ja tegu on stabiilse tasakaaluga, kui faasijoon on tasakaalupunktis ja selle ümbruses 45°-joonest laugjam. Vastasel juhul on protsess hajuv. Märkus: lühiduse huvides on edaspidi nimetatud vaid tasakaalupunkti, meeles tuleb aga pidada, et toodud tingimused peavad kehtima ka vähemalt nii kauges ümbruses, kui suur on muutujale antud muutus.



Jooni 8.7. Erinevad võimalikud faasijooned

Et faasijoon oleks $45°$-joonest laugjam, peaks faasijoone tõusu absoluutväärtus olema väiksem ühest (teame, et $45°$-joone tõus on 1). Seega peaks faasijoone joonistamisel aluseks oleva funktsiooni $y_t = f(y_{t-1})$ tuletise absoluutväärtus tasakaalupunktis olema ühest väiksem: $\left|\frac{dy_t}{dy_{t-1}}(y^*)\right| < 1$. Sellisel juhul on **tasakaal stabiilne** ja tegu **koonduva protsessiga**. Vastupidisel juhul, kui

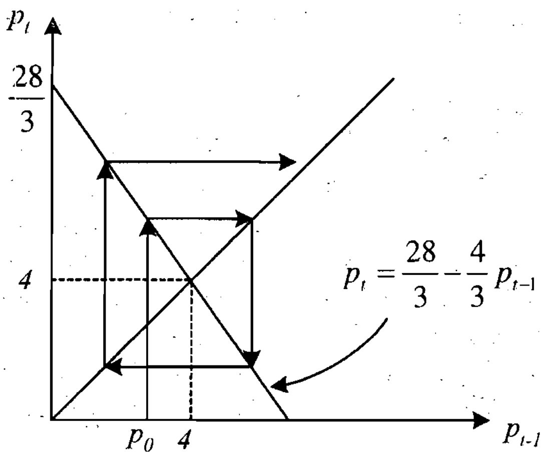
$\left|\frac{dy_t}{dy_{t-1}}(y^*)\right| > 1$, on tegu hajuva protsessi ja ebastabiilse tasakaaluga.

Näeme veel, et kui faasijoon on tasakaalupunkti ümbruses langev, siis kõigub muutuja väärtus ülal ja allpool tasakaaluväärtust, tõusva faasijoone korral läheneb muutuja väärtus tasakaaluväärtusele ühelt poolt või kaugeneb sellest ühele poole. Paneme selle tähelepaneku kirja ka matemaatiliselt. Faasijoon on langev, kui funktsiooni $y_t = f(y_{t-1})$ tuletise absoluutväärtus tasakaalupunktis on negatiivne: $\frac{dy_t}{dy_{t-1}}(y^*) < 0$ — siis on tegu **võnkuva protsessiga**: muutuja väärtus kõigub ülal- ja allpool tasakaaluväärtust.

Eelnenut kokku võttes võib diferentsvõrrandi kvalitatiivset analüüsi teostada järgmiselt. Esmalt leitakse (kui võimalik) tasakaaluväärtused. Selleks võrdsustatakse: $y_t = y_{t-1} = y^*$ ehk leitakse erilahendid. Nende y väärtuste korral lõikab või puutub faasijoon $45°$-joont. Teades tasakaalupunkte ja funktsiooni kuju ning vajadusel arvestades tuletiste märke tasakaalupunktides, skitseeritakse faasijoon. Kasutades faasitee joonistamist või eespooltoodud tingimusi, tehakse järeldused muutuja käitumise kohta ajas (kas lähenetakse tasakaaluväärtusele või kaugenetakse sellest).

Kui tasakaaluväärtuste leidmine pole võimalik, siis pole joonisel faasijoone ja $45°$-joone lõikepunkti asukoht täpselt määratud. Sellele vaatamata võib funktsiooni $y_t = f(y_{t-1})$ kuju analüüsides teha mõningaid järeldusi tasakaalu stabiilsuse kohta.

Kasutame siinkohal näitena hinna muutumist kirjeldavat diferentsvõrrandit eelmisest peatükist: $p_t = \frac{28}{3} - \frac{4}{3} p_{t-1}$. Hinna tasakaaluväärtus on juba leitud: tasakaaluhinnaks osutus $p^* = 4$, selle väärtuse juures lõikab faasijoon $45°$-joont. Selle lineaarse diferentsvõrrandi faasijoon on sirge tõusuga $-\frac{4}{3}$. Negatiivne tõus viitab langevale sirgele, ja et $\left|-\frac{4}{3}\right| > 1$, siis on faasijoon järsem $45°$-joonest. Seega võime joonistada faasijoone, nagu on kujutatud joonisel 8.8.



Joonis 8.8 Hinna kohandumist kujutav faasidiagramm

Analüüsime pisut ka ühte keerulisemat diferentsvõrrandit: $y_t = y_{t-1}^{0,5}$. Leiame tasakaaluväärtused ehk erilahendi, asendades ja teisendades järgmiselt:

$y^* = y^{*0,5}$,

$$y^* - y^{*0,5} = 0,$$
$$y^* - \sqrt{y^*} = \sqrt{y^*}\left(\sqrt{y^*} - 1\right) = 0.$$

Tulemuseks on kaks tasakaaluväärtust: $y_1^* = 0$ ja $y_2^* = 1$.

Uurime tasakaaluväärtuse $y_2^* = 1$ stabiilsust. Selleks võtame esimese tuletise funktsioonist $y_t = y_{t-1}^{0,5}$:

$$\frac{dy_t}{dy_{t-1}} = 0,5\, y_{t-1}^{-0,5},$$

ning leiame selle väärtuse tasakaalupunktis:

$$\frac{dy_t}{dy_{t-1}}(1) = 0,5 \cdot 1^{-0,5} = 0,5.$$

Et tuletis on positiivne ja absoluutväärtuselt väiksem ühest, siis on faasijoon tasakaalupunkti $y_2^* = 1$ ümber kasvav ning laugjam 45°-joonest. Sellisel juhul on kohandumisprotsess analoogiline joonisel 8.6 kujutatuga. Muutuja väärtus läheneb ajas ühelt poolt tasakaaluväärtusele ning tasakaal on stabiilne.

9. DIFERENTSIAALVÕRRANDID

9.1. Diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Et anda lugejale ettekujutus ka diferentsiaalvõrranditest ning võrdlusvõimalus diferentsvõrranditega, on järgnevalt toodud ülevaade lihtsa lineaarse esimest järku diferentsiaalvõrrandi $\frac{dy}{dt} + ay = b$ lahendamisest.

Nagu diferentsvõrrandi lahend, peaks ka diferentsiaalvõrrandi lahend $y(t)$ andma reegli, mille abil saab leida muutuja y väärtuse suvalisel ajahetkel t. Analoogiliselt koosneb ka diferentsiaalvõrrandi lahend kahest osast: erilahend, mis näitab muutuja y tasakaaluväärtust, ja täiendfunktsioon, mis kirjeldab muutuja y liikumist tasakaaluväärtuse ümber.

Teame, et **erilahend** on selline muutuja y väärtus, mille korral y ajas ei muutu — tasakaaluväärtus. Seega, kui muutuja omandab oma tasakaaluväärtuse $y = y^*$, siis peaks tuletis funktsioonist $y = f(t)$ olema null:

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Tehes algvõrrandis vastavad asendused, saame võrrandi:

$$0 + ay^* = b,$$

kust saame avaldada erilahendi:

$$y^* = \frac{b}{a}, \text{ kus } a \neq 0.$$

Lahendi leidmist, kui $a = 0$, käsitleme pisut hiljem.

On võimalik tõestada (vt lisa 4), et **täiendfunktsioon** on sellise diferentsiaalvõrrandi korral järgmise kujuga:

$$[y(0)-y^*]e^{-at},$$

kus $y(0)$ tähistab muutujale y antud algväärtust. Diferentsiaalvõrrandi $\frac{dy}{dt}+ay=b$ **üldlahend** on seega järgmine:

$$y(t)=y^*+[y(0)-y^*]\,e^{-at}.$$

Kuna on teada, et $y^*=\frac{b}{a}$, siis võib üldlahendi valemi kirja panna ka nii:

$$y(t)=\frac{b}{a}+\left[y(0)-\frac{b}{a}\right]e^{-at}.$$

Lahendame näiteks lihtsa diferentsiaalvõrrandi: $\frac{dy}{dt}-3y=12$.

Leiame erilahendi:

$$y^*=-\frac{12}{3}=-4$$

ning kirjutame välja üldlahendi:

$$y(t)=-4+[y(0)+4]\,e^{3t}.$$

Kui on teada mingi konkreetne arvuline algväärtus $y(0)$, saab arvutada määratud lahendi. Näiteks kui $y(0)=3$, siis

$$y(t)=-4+[3+4]\,e^{3t}=-4+7e^{3t}.$$

Vaatame nüüd, kuidas käituda, kui $a = 0$. Sellisel juhul omandab võrrand $\frac{dy}{dt} + ay = b$ lühema kuju: $\frac{dy}{dt} = b$. Võrrandi lahendamiseks integreerime mõlemat poolt aja järgi:

$$\int \frac{dy}{dt} dt = \int b dt .$$

Diferentsiaalid dt võrrandi vasakul poolt taanduvad ning võrrandi vasakul pool integreeritakse siis muutuja y järgi. Integreerimiskonstandid võib tuua võrrandi ühele poole ja tähistada ühe konstandiga C. Tulemuseks saame:

$$y(t) = bt + C .$$

Alghetkel ($t = 0$) on muutuja väärtus $y(0) = b \cdot 0 + C = C$ — integreerimiskonstant C on siin sisuliselt muutuja algväärtus. Seega: kui $a = 0$, siis üldlahendiks on:

$$y(t) = bt + y(0).$$

9.2. Tasakaalu stabiilsus

Nagu diferentsvõrrandi lahend, nii annab ka diferentsiaalvõrrandi lahend informatsiooni selle kohta, kas diferentsiaalvõrrandi poolt kirjeldatud käitumise korral muutuja läheneb ajas oma tasakaaluväärtusele või kaugeneb sellest. Eelmises peatükis leitud lihtsa diferentsiaalvõrrandi lahendi valemit

$$y(t) = y^* + [y(0) - y^*] e^{-at}$$

uurides näeme, et kui algväärtuseks $y(0)$ satub olema tasakaaluväärtus y^*, siis täiendfunktsiooni väärtus osutub nulliks, ning muutuja väärtus püsib tasakaalutasemel: $y(t) = y^*$. Kui algväärtuseks $y(0)$ on tasakaaluväärtusest erinev väärtus, siis määrab ka siin muutuja edasise käitumise täiendfunktsiooni $[y(0)-y^*]\,e^{-at}$ kuju. Kuna arv e suvalisel astmel on alati positiivne, siis määrab siin täiendfunktsiooni märgi see, kas algväärtus on tasakaaluväärtusest suurem või väiksem. Kui algväärtus on tasakaaluväärtusest suurem, on täiendfunktsiooni väärtus positiivne ja muutuja omandab jätkuvalt tasakaalutasemest kõrgemaid väärtusi. Vastupidisel juhul on täiendfunktsiooni väärtus negatiivne ja muutuja omandab tasakaalutasemest madalamaid väärtusi.

Parameetri a märk omakorda määrab, kas muutuja läheneb tasakaaluväärtusele või kaugeneb sellest. Nimelt sõltub parameetri a märgist avaldise e^{-at} käitumine aja möödudes ($t \to \infty$) järgmiselt:

kui $a>0$, siis $e^{-at} \to 0$, kui $t \to \infty$;
kui $a<0$, siis $e^{-at} \to \infty$, kui $t \to \infty$.

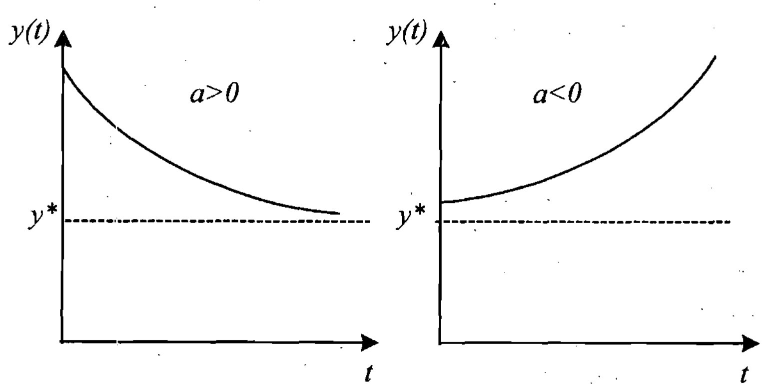
Uurime, millal on tegu stabiilse ning millal ebastabiilse tasakaaluga. Muutuja väärtus läheneb ajas oma tasakaaluväärtusele, kui täiendfunktsiooni absoluutväärtus väheneb ehk kui avaldise e^{-at} väärtus kahaneb. Nagu näha ülaltoodud tingimustest, peab selleks võrrandis $\frac{dy}{dt}+ay=b$ parameeter $\boldsymbol{a}$ olema **positiivne.** Sellisel juhul on **tegu koonduva protsessiga** ja **tasakaal** on **stabiilne.** Kui algväärtus on tasakaaluväärtusest suurem ($y(0)-y^*>0$ ehk täiendfunktsioon on positiivne), siis kahaneb muutuja y väärtus, kuni jõuab mingi täpsusega tasakaaluväärtuseni — ka siin jõuab muutuja järjest lähemale oma tasakaaluväärtusele, kuid ei saavuta kunagi täpselt tasakaaluväärtust. Kui algväärtus on tasakaalutasemest madalamal, hakkab muutuja väärtus suurenema, kuni saavutab samuti mingi täpsusega tasakaaluväärtuse.

Muutuja kaugeneb ajas oma tasakaaluväärtusest, kui täiendfunktsiooni absoluutväärtus ajas suureneb ehk kui avaldise e^{-at} väärtus kasvab. Selleks peab parameeter ***a*** olema **negatiivne**. Tegu on siis **hajuva protsessi** ja **ebastabiilse tasakaaluga**. Kui algväärtus ületab tasakaaluväärtust, siis on täiendfunktsioon positiivne ja muutuja väärtus läheneb positiivsele lõpmatusele ($y_t \to +\infty$). Vastupidisel juhul on täiendfunktsioon negatiivne ja muutuja väärtus läheneb negatiivsele lõpmatusele ($y_t \to -\infty$).

Kokku võttes:

kui $a > 0$, siis $y_t \to y^*$, kui $t \to \infty$, ning tegu on koonduva protsessi ja stabiilse (taastuva) tasakaaluga;

kui $a < 0$, siis $|y_t| \to \infty$, kui $t \to \infty$, ning tegu on hajuva protsessi ja ebastabiilse tasakaaluga.



Joonis 9.1. Muutuja käitumine ajas erinevate parameetri väärtuste korral

Joonisel 9.1 on skitseeritud muutuja käitumist kirjeldavad graafikud juhul, kui algväärtus on tasakaaluväärtusest suurem. Vastupidisel juhul on graafikud joonisel kujutatute peegeldused üle horisontaalsirge $y(t) = y^*$. Kuna tegu on pideva ajaga, siis on ka graafikud pidevad jooned.

Kasutame näitena taas turutasakaalu mudelit. Olgu teada lineaarsed nõudlus- ja pakkumisfunktsioonid:

$$q^S = -a + bp,$$

$$q^D = c - dp,$$

kus $a, b, c, d > 0$.

Oletame, et hinnamuutus ajas on lineaarses sõltuvuses nõudluse ülejäägist (nõudluse ja pakkumise vahe):

$$\frac{dp}{dt} = k\left(q^D - q^S\right),$$

kus k on suvaline parameeter.

Turutasakaalu korral on nõutav ja pakutav kogus võrdsed ($q^D = q^S$). Nõudluse ülejääk on sellisel juhul null ja hind ajas ei muutu ($\frac{dp}{dt} = 0$). Võrdsustades $q^D = q^S$ ehk $-a + bp = c - dp$, saame tasakaaluhinnaks $p^* = \frac{a+c}{b+d}$. See on hind, mis püsib tasakaalustunud turul kuni mingite tingimuste muutumiseni. Kui hind omandab mingi uue väärtuse (ehk diferentsiaalvõrrandi mõistes algväärtuse), siis algab hinna muutumise protsess.

Seda protsessi kirjeldava diferentsiaalvõrrandi saame tuletada mudeli kolmest võrrandist:

$$q^S = -a + bp,$$
$$q^D = c - dp,$$
$$\frac{dp}{dt} = k\left(q^D - q^S\right),$$

kus $a, b, c, d > 0$.

Asendame nõudluse ja pakkumise viimases võrrandis vastavate avaldistega kahest esimesest võrrandist:

$$\frac{dp}{dt} = k(c - dp + a - bp).$$

Liikmeid grupeerides viime võrrandi meile tuttavale kujule:

$$\frac{dp}{dt} + k(b + d)p = k(a + c).$$

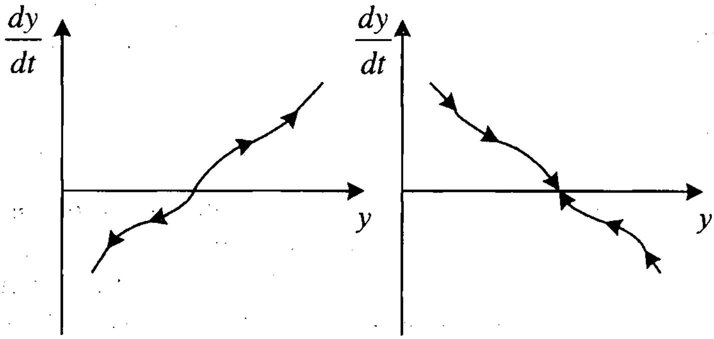
Leiame selle võrrandi erilahendi valemi abil või asendades: $\frac{dp}{dt} = 0$ ja $p = p*$. Ilmneb, et erilahendiks on tõepoolest juba eespoolleitud tasakaaluhind:

$$p* = \frac{k(a + c)}{k(b + d)} = \frac{a + c}{b + d}.$$

Paneme lahendi valemit kasutades kirja üldlahendi:

$$p(t) = p* + [p(0) - p*]\, e^{-k(b+d)t}.$$

Järgmisena kerkib küsimus, milliste parameetrite väärtuste korral taastub turuprotsesside tulemusena tasakaaluhind. Eespool jõudsime järeldusele: et tasakaal oleks stabiilne, peab parameeter a võrrandis $\frac{dy}{dt} + ay = b$ olema positiivne. Seega käesoleva mudeli korral: et tasakaaluhind taastuks, peab võrrandis p kordajaks olev ajas kahaneb. Aja möödudes liigutakse seega y-telje väärtuste vähenemise suunas ehk vasakule.



Joonis 9.3. Faasijooned

Liikumist vasakule või paremale võib tähistada nooltega faasijoonel, nagu kujutatud joonisel 9.3. Kui nooled viivad tasakaalupunkti poole, läheneb muutuja väärtus ajas tasakaaluväärtusele, vastupidisel juhul aga muutuja väärtus hoopis eemaldub tasakaaluväärtusest.

Jooniselt näeme, et tegu on stabiilse tasakaaluga (nooled viivad tasakaalupunkti), kui faasijoon on tasakaalupunkti ümbruses langev, ja tasakaal on ebastabiilne, kui faasijoon on tõusev. Faasijoon on tasakaalupunktis langev, kui faasijoone tõus tasakaalupunktis on negatiivne. Seega tuletis avaldisest $\frac{dy}{dt} = f(y)$ muutuja y järgi peab tasakaalupunkti ümbruses olema negatiivne:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dy}(y^*) < 0 .$$

(Nagu diferentsvõrrandite korral, tuleb ka siin arvestada, et tingimused peaksid kehtima ka tasakaalupunkti ümbruses, vastavalt muutujale antud muutuste suurusele.) Sellise tasakaalupunkti ümber on muutuja tasakaaluväärtuse poole **koonduv** ja **tasakaal stabiilne**.

Vastupidisel juhul, kui:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dy}(y^*) > 0$$

ehk faasijoone tõus on tasakaalupunktis positiivne, on faasijoon seal tõusev. Kui muutuja omandab mingi väärtuse selle tasakaalupunkti lähedal, siis järgneb **hajuv protsess** — muutuja väärtus eemaldub sellest tasakaaluväärtusest. Sellisel juhul on tegu **ebastabiilse tasakaaluga**.

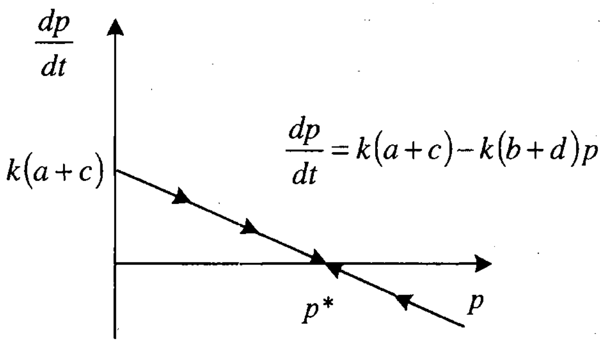
Vaatleme näitena eelmises peatükis vaadeldud lineaarset diferentsiaalvõrrandit turutasakaalu mudelist:

$$\frac{dp}{dt} + k(b+d)p = k(a+c).$$

Viime võrrandi vajalikule kujule:

$$\frac{dp}{dt} = -k(b+d)p + k(a+c).$$

Kuna võrrand on lineaarne, on faasijoon sirge. Teame, et $b, d > 0$, seega sõltub faasijoone kuju parameetri k märgist. Eelnevalt jõudsime järeldusele, et turutasakaal taastub, kui k on positiivne. Positiivse k korral on faasijoone tõus negatiivne: $-k(b+d) < 0$, ning faasijoon on langev sirge positiivse algordinaadiga $k(a+c)$ (teame ka, et $a, c > 0$). Selline faasijoon on kujutatud joonisel 9.4. Jooniselt näeme, et sellisel juhul on tõepoolest tegu koonduva protsessi ja stabiilse tasakaaluga.



Joonis 9.4. Hinna kohandumist kirjeldav faasidiagramm ($k > 0$)

Analüüsime veel ka ühte pisut keerulisema kujuga diferentsiaalvõrrandit: $\frac{dy}{dt} = 8y - 2y^2$. Leiame muutuja tasakaaluväärtused, asendades $y = y^*$ ja $\frac{dy}{dt} = 0$:

$$<4y^* - y^{*2} = 0,$$

$$y^*(4 - y^*) = 0.$$

Tulemuseks saame kaks tasakaaluväärtust: $y_1^* = 0$ ja $y_2^* = 4$.

Püüame uurida, kas need tasakaalud on stabiilsed. Selleks leiame tuletise:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dy} = \frac{d\left(8y - 2y^2\right)}{dy} = 8 - 4y,$$

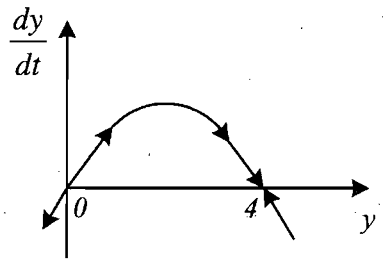
ning selle väärtused tasakaalupunktides:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dy}(0) = 8 - 4 \cdot 0 = 8 > 0$$

ja

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dy}(4) = 8 - 4 \cdot 4 = -8 < 0.$$

Kuna tasakaalupunktis $y_1{}^* = 0$ on leitud tuletis positiivne, on faasijoon selles punktis tõusev, seega on see tasakaal ebastabiilne. Tasakaalupunktis $y_2{}^* = 4$ on faasijoon aga langev, seega see tasakaal on stabiilne. $y_2{}^* = 4$ on tasakaaluväärtus, mille ümber muutuja väärtus ajas koondub. Neid järeldusi illustreerib ka faasidiagramm joonisel 9.5.



Joonis 9.5. Näitefunktsiooni faasidiagramm

10. EKSPONENTFUNKTSIOONID

10.1. Eksponentfunktsioonide omapära

Matemaatilises majandusteaduses kasutatavate erinevate funktsionaalsete kujude hulgas leiavad märkimisväärset kasutust eksponent- ja ka logaritmfunktsioonid. **Eksponentfunktsiooniks** nimetatakse funktsiooni, kus muutuja on astendajas:

$$y = a^x,$$

ning lisatingimuseks on, et:

$$a > 0 \text{ ja } a \neq 1.$$

Eksponentfunktsiooni pöördfunktsiooni nimetatakse **logaritmfunktsiooniks.** Logaritmfunktsiooni üldkuju on:

$$y = \log_a x, \text{ kus } a > 0 \text{ ja } a \neq 1.$$

Logaritmfunktsiooni väärtus y on selline astendaja, millega arvu a astendades saame tulemuseks muutuja x väärtuse. Avaldades muutuja x, saamegi eksponentfunktsiooni:

$$x = a^y.$$

Parameetrile a seatud piirangutel on järgmised põhjused: a ei saa olla negatiivne seetõttu, et näiteks kui astendajaks oleks $\frac{1}{2}$, tuleks võtta ruutjuur negatiivsest arvust. Arvud 0 ja 1 jäävad muutumatuks igasuguste astendajate puhul, seetõttu, kui $a = 0$ või $a = 1$, piirduks logaritmfunktsiooni korral määramispiirkond vaid ühe väärtusega: vastavalt $x = 0$ või $x = 1$.

Majandusteaduses eeldatakse mõnikord lihtsustavalt, et $a > 1$. Põhjendus on järgmine: alati saab sellise eksponentfunktsiooni, kus $0 < a < 1$, teisendada kujule, kus astmealus on suurem ühest.

Nimelt, kui $0 < a < 1$, siis a avaldub mingi ühest suurema arvu b ($b > 1$) pöördarvuna: $a = \frac{1}{b}$, ning saab kirjutada:

$$y = a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x} = b^z, \text{ kus } z = -x.$$

Majandusteaduses kasutatakse sageli just **naturaaleksponent-funktsiooni**, milles astme aluseks on arv *e*:

$$y = e^x.$$

Populaarsuse üks põhjusi on tuletise võtmise lihtsus sellest funktsioonist. Tavalise eksponentfunktsiooni tuletis on:

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a.$$

Kui astme aluseks on *e*, siis:

$$\left(e^x\right)' = e^x \ln e = e^x.$$

See omapära teeb igasugused teisendused ja arvutused tunduvalt lihtsamaks.

Vaatleme lähemalt naturaaleksponentfunktsiooni astme alust. **Arvu *e* väärtus** on seotud funktsiooniga $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Kui argumendile n anda järjest suuremaid väärtusi, hakkab ka funktsiooni väärtus suurenema, kuid järjest aeglustuvalt:

kui $n = 1$, siis $f(1) = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$;

kui $n = 2$, siis $f(2) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$;

kui $n = 3$, siis $f(3) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2{,}37$ jne.

On teada, et kui $n \to \infty$, siis läheneb funktsiooni väärtus arvule e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71828\ldots$$

Majandusteaduses kasutatakse palju ka naturaaleksponentfunktsiooni pöördfunktsiooni — **naturaallogaritmfunktsiooni**: $y = \ln x$. Tihti kasutatakse logaritmimist, et viia **mittelineaarsed** funktsioonid **lineaarsele kujule**. Pärast sellist transformatsiooni on võimalik edasises analüüsis kasutada lineaaralgebrat. Näiteks Cobbi-Douglase tüüpi funktsioon on mittelineaarne:

$$z = c x^a y^b .$$

Võtame funktsiooni mõlemast poolest naturaallogaritmi:

$$\ln z = \ln c + a \ln x + b \ln y .$$

See funktsioon on logaritmide $\ln x$ ja $\ln y$ suhtes lineaarne ehk funktsioon on loglineaarne.

10.2. Kasvumäär

Eksponentfunktsioone kasutatakse sageli mingi majandusnäitaja muutuse kirjeldamiseks ajas. Sageli kirjeldub muutuja y sõltuvus ajast järgmisel kujul: mingi konstandiga a on korrutatud eksponentfunktsioon mingist funktsioonist g, mis omakorda on funktsioon ajast t:

$$y = f(t) = a b^{g(t)} .$$

Tihti kasutatakse astme alusena arvu e ning funktsioonina g lihtsat lineaarset seost, näiteks $g(t) = ct$, kus c on suvaline parameeter:

$$y = a e^{ct}.$$

Sellise kujuga funktsiooni korral on parameetril c oma kindel tähendus, nimelt on see funktsiooni kasvumäär.

Kasvumäär kirjeldab mingi näitaja suhtelist muutust ajas. Ta näitab, millise osa näitaja algväärtusest moodustab ajaühikus toimunud näitaja väärtuse muutus. Ühes ajaühikus ($\Delta t = 1$) toimunud muutus on kirjeldatav väärtuste vahega (väärtus pärast muutust miinus väärtus enne muutust): $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ (ajahetkede t ja $t-1$ erinevus on 1 ajaühik). Kui soovime teada, kui suure osa moodustab see muutus algväärtusest, peame selle muutuse algväärtusega jagama. Seega funktsiooni $y = f(t)$ kasvumäär r_y on absoluutse muutuse $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ ja algväärtuse y_{t-1} jagatis:

$$r_y = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}.$$

Selline lähenemine sobib diskreetse aja korral.

Kui tegu on **pideva ajaga** ehk lõpmatult väikeste muutustega, siis kirjeldab absoluutset muutust ajaühiku kohta funktsiooni tuletis aja järgi: $\frac{dy}{dt}$. On ju tuletise näol tegu funktsiooni väärtuse (siin näitaja väärtuse) muutusega argumendi (antud juhul aja) ühikulise kasvu korral. Kasvumäära leidmiseks tuleks see jagada funktsiooni väärtusega (ehk näitaja enda väärtusega):

$$r_y = \frac{dy/dt}{y}.$$

Kuna tegu on lõpmatult väikeste muutustega, siis ei räägita algväärtusest, vaid lihtsalt näitaja väärtusest. Selle all mõistetakse enamasti näitaja väärtust enne mingi lõpmatult väikese muutuse toimumist, kuid kuna muutus on lõpmatult väike, ei erine näitaja väärtus enne ja pärast muutumist oluliselt.

Tähele tasub panna, et kasvumäära näol on tegu **piirfunktsiooni** (mida tuletis lähtefunktsioonist argumendi järgi ju on) ja **lähtefunktsiooni jagatisega**.

Kasvumäär võib erinevatel ajaperioodidel või -hetkedel olla erinev, ka kasvumäär on funktsioon ajast — sõltuvad ju enamasti ajast nii näitaja väärtuse muutumist kirjeldav funktsioon kui ka piirfunktsioon:

$$r_y = h(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Eespoolmainitud funktsionaalset kuju $y = a e^{ct}$ kasutataksegi just seetõttu sageli, et sellise funktsiooni kasvumäär on konstant c. Seda on lihtne tõestada: leiame tuletise nimetatud funktsioonist aja järgi. Liitfunktsiooni tuletise reeglite kohaselt:

$$\frac{dy}{dt} = a e^{ct} c.$$

Leiame funktsiooni kasvumäära:

$$r_y = \frac{dy/dt}{y} = \frac{a e^{ct} c}{a e^{ct}} = c.$$

Kui parameeter c on negatiivne ($c < 0$), on tegu **negatiivse kasvuga** ehk funktsiooni väärtus ajas väheneb.

Toome siinkohal veel ühe näite. Eksponentfunktsioone kasutatakse tihti selliste kaupade väärtuse muutumise kirjeldamiseks, mille väärtus ajas suureneb, näiteks vein, juust, kunstiväärtused, mets, kinnisvara jms. Need on **ajas väärtustuvad** kaubad. Oletame näiteks, et veini väärtus v muutub ajas järgmiselt:

$$v = 1000e^{\sqrt{t}}.$$

Leiame veini väärtuse kasvumäära:

$$r_v = \frac{dv/dt}{v} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(1000e^{\sqrt{t}}\right)}{1000e^{\sqrt{t}}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Nagu näha, sõltub kasvumäär tõepoolest ajahetkest: aja möödudes kasv aeglustub, sest kui $t \to \infty$, siis $\frac{1}{2\sqrt{t}} \to 0$.

Sageli kasutatakse funktsiooni kasvumäära leidmisel **arvutuste lihtsustamiseks** järgmist meetodit: esmalt võetakse funktsioonist naturaallogaritm ning seejärel sellest tuletis argumendi ehk aja järgi. Selline meetod on põhjendatud järgmiste teisendustega. Kui kasvumäära arvutamise valemi kuju pisut muuta, saame:

$$r_y = \frac{dy/dt}{y} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}.$$

Avaldise $\frac{1}{y}$ näol on aga tegu tuletisega avaldisest $\ln y$ muutuja y järgi. Seega võime kirjutada:

$$r_y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{d(\ln y)}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{d(\ln y)}{dt}.$$

Järelikult, leidmaks kasvumäära, võib võtta funktsioonist enne naturaallogaritmi ning seejärel tuletise aja järgi. Näiteks funktsiooni $y = a e^{ct}$ puhul:

$$\ln y = \ln a + ct \ln e = \ln a + ct \qquad (\ln e = 1)$$

ning

$$r_y = \frac{d(\ln y)}{dt} = 0 + c = c\,.$$

Veini väärtuse kasvumäära võib siis leida nii:

$$\ln v = \ln 1000 + \sqrt{t}\ln e = \ln 1000 + \sqrt{t}\,,$$

$$r_v = \frac{d(\ln v)}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,.$$

Mõnikord tuleb leida kahe funktsiooni **korrutise kasvumäär**. Näiteks kui tegu on funktsiooniga $y = uv$, kus $u = f(t)$ ja $v = g(t)$. Kasvumäära r_y leidmiseks logaritmime: $\ln y = \ln u + \ln v$ ning kasvumäär:

$$r_y = r_{uv} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{d(\ln y)}{dt} = \frac{d(\ln u)}{dt} + \frac{d(\ln v)}{dt} =$$

$$= \frac{1}{u}\frac{du}{dt} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = r_u + r_v$$

ehk funktsioonide korrutise kasvumäär on tegurite kasvumäärade summa.

Kui tegu on samade funktsioonide **jagatisega** $y = \frac{u}{v}$, siis $\ln y = \ln u - \ln v$ ja kasvumäär leitakse analoogiliselt:

$$r_y = r_{u/v} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{d(\ln y)}{dt} = \frac{d(\ln u)}{dt} - \frac{d(\ln v)}{dt} =$$

$$= \frac{1}{u}\frac{du}{dt} - \frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = r_u - r_v$$

ehk funktsioonide jagatise kasvumäär on jagatava ja jagaja kasvumäärade vahe.

Funktsioonide **summa või vahe** ($y = u \pm v$) kasvumäära leidmiseks võib valemi tuletada järgmise tuletuskäiguga:

$$r_y = r_{u\pm v} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{d(\ln y)}{dt} = \frac{d(\ln(u \pm v))}{dt} = \left(\frac{1}{u \pm v}\right)\frac{d(u \pm v)}{dt} =$$

$$= \left(\frac{1}{u \pm v}\right)\frac{du}{dt} \pm \left(\frac{1}{u \pm v}\right)\frac{dv}{dt} = \left(\frac{u}{u \pm v}\right)\frac{1}{u}\frac{du}{dt} \pm \left(\frac{v}{u \pm v}\right)\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} =$$

$$= \frac{u}{u \pm v} r_u \pm \frac{v}{u \pm v} r_v$$

ehk funktsioonide summa kasvumäära leidmisel arvestatakse nende funktsioonide osakaalu funktsioonide summas ning vahe kasvumäära korral funktsioonide osakaalu funktsioonide vahes.

Siinkohal ka üks näide: oletame, et leivatehase kaupluses osteti jaanuaris saia 1000 krooni ja leiba 500 krooni eest. Veebruaris kasvas saia läbimüük 12% ja leiva läbimüük 9%. Kogukäibe kasvumäär on siis:

$$r_{kokku} = \frac{1000}{1000 + 500} \cdot 0{,}12 + \frac{500}{1000 + 500} \cdot 0{,}09 = 0{,}11$$

ning kokku kasvas läbimüük 11%.

10.3. Finantsmatemaatika

Eksponentfunktsioonid leiavad laialdast kasutust finantsmatemaatikas. Finantsmatemaatika põhieeldus on, et raha või muu **kapitali väärtus ajas muutub** — paigutades raha panka, loodetakse, et summa suureneb intresside võrra, samuti loodetakse investeeringutelt saada tulu. Et selgitada, kuidas raha väärtus ajas suureneb, on võimalik tuletada rida valemeid.

Olgu näiteks mingi esialgne rahasumma y_0, mis paigutatakse panka intressimääraga r (*interest rate*). Seejuures intressimäär r näitab, kui suur osa kogu rahasummast intressina lisandub — alles selle osakaalu korrutamisel 100-ga saadakse intressimäär protsentides. Näiteks kui $r = 0{,}12$, on intressimäär 12%.

Kui tegu on **lihtintressiga**, siis lisandub esialgsele summale igal perioodil summa $r\,y_0$. Rahasumma t-ndal perioodil on siis kokku:

$$y_n = y_0 + tr\,y_0.$$

Sagedamini on tegu liitintressiga. **Liitintressi** korral võetakse igal perioodil intressi arvutamise aluseks juba kogunenud summa. Seega, kui esimesel perioodil kasvab rahasumma $r\,y_0$ võrra:

$$y_1 = y_0 + r\,y_0 = (1+r)\,y_0,$$

siis teisel perioodil lisanduv intress arvutatakse esimese perioodi summa alusel ja on $r\,y_1$. Teisel perioodil on summa siis $y_2 = (1+r)\,y_1$. Seega kirjeldab raha väärtuse muutumist ajas lihtne diferentsvõrrand:

$$y_t = (1+r)\,y_{t-1}.$$

Leiame selle lahendi:

$$y^* = \frac{0}{1-(1+r)} = 0 \text{ ja } y_t = 0 + (y_0 - 0)(1+r)^t = y_0(1+r)^t .$$

Kui tähistame algsumma y_0 tähega A ning selle tulevase väärtuse y_t tähega V, saame kirjutada valemi rahasumma **tulevase väärtuse** arvutamiseks:

$$V = A(1+r)^t .$$

Tavaliselt on perioodiks aasta ja t tähistab aastate arvu, intressimäär r on siis aasta intressimäär. Mõnikord arvestatakse aga intresse **mitu korda aastas**, näiteks kord kvartalis. Kui intresse arvestatakse m korda aastas, siis on korraga arvestatavaks intressiks $\frac{r}{m}$ ning arvestusperioode m korda rohkem kui aastaid t:

$$V = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} .$$

Kui intressi arvutamise tihedust suurendada lõpmatuseni ($m \to \infty$), nimetatakse seda **pidevaks juurdearvestuseks**. Selliseks arvestuseks vajaliku valemi leidmiseks teeme mõned teisendused. Korrutame eelmises valemis astendaja mt läbi arvuga 1 kujul $\frac{r}{r}$:

$$V = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{mtr}{r}} .$$

Tehes asenduse $\frac{r}{m} = \frac{1}{m/r}$ ning teades, et astendamisel astmenäitajad korrutatakse, võime kirjutada:

$$V = A\left[\left(1+\frac{1}{m/r}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{rt}.$$

Pideva juurdearvestuse korral $m \to \infty$, seega tulevane väärtus pideva juurdearvestuse korral on piirväärtus viimasest avaldisest, kui $m \to \infty$:

$$V = \lim_{m \to \infty} A\left[\left(1+\frac{1}{m/r}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{rt}.$$

Kui asendada $\frac{m}{r} = n$, siis võime kandilistes sulgudes oleva avaldise $\left(1+\frac{1}{m/r}\right)^{\frac{m}{r}}$ asendada avaldisega $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$. Nagu peatüki alguses mainitud, on piirväärtus sellest avaldisest arv e tingimusel, et $n \to \infty$. Pideva juurdearvestuse korral on küll eelduseks, et $m \to \infty$, kuid kuna r on vaadeldav positiivse konstandina, siis võib öelda, et kui $m \to \infty$, $\frac{m}{r} \to \infty$ ja seega $n \to \infty$. Järelikult võime tulevase väärtuse valemi pideva juurdearvestuse korral ümber kirjutada järgmiselt:

$$V = \lim_{n\to\infty} A\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{rt} = Ae^{rt}.$$

Niisiis, pideva juurdearvestuse korral on raha tulevase väärtuse valem $V = Ae^{rt}$, kus r on **raha väärtuse kasvumäär**.

Olgu näiteks hoiustatav summa $10\,000$. Kui intress on 10% ehk $r = 0{,}1$, siis lihtintressi korral oleks viie aasta pärast saadav summa:

$$V = A + trA = A(1+tr) = 10\,000(1+5\cdot 0{,}1) = 15\,000.$$

Liitintressi korral, kui intressi arvutatakse kord aastas, oleks summa viie aasta pärast:

$$V = A(1+r)^t = 10\,000(1+0{,}1)^5 \approx 16\,105,$$

aga kui intressi arvutatakse näiteks iga kuu, siis

$$V = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = 10\,000\left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^{4\cdot 5} \approx 16\,386$$

ning pideva juurdearvestuse korral:

$$V = Ae^{rt} = 10\,000e^{0{,}1\cdot 5} \approx 16\,487.$$

Seega, mida sagedamini intressi arvutatakse, seda suurem on tulevane väärtus.

Tulevase väärtuse leidmise vastandiks on **nüüdis- ehk hetke-väärtuse** (ehk praeguse väärtuse) leidmine. Olgu näiteks teada soovitav rahasumma tulevikus, t perioodi pärast. Kui ka intressi-määr r on teada, siis on võimalik hoiustada täpselt vajalik summa, arvestades lisanduvaid intresse. Selleks tuleb leida soovitava summa nüüdisväärtus. Nüüdisväärtus osutub vajalikuks ka siis, kui tuleb valida, kas saada tuluna mingi summa praegu või mingi muu summa tulevikus. Selleks tuleks tulevikus saadav summa muuta võrreldavaks praegusega. Nimelt võib kohe saadava summa panna panka intresse koguma. Olemaks samaväärne, peab tulevikus saadav summa olema intresside võrra suurem. Tulevikus saadava või maksta oleva rahasumma nüüdisväärtuse leidmist nimetatakse **diskonteerimiseks** — tegu on n-ö intresside mahaarvamisega.

Tulevase väärtuse arvutamise valemis $V = A(1+r)^t$ on nüüd teada tulevane väärtus V ning otsitav on praegune summa A. Avaldades valemist A, saame nüüdisväärtuse arvutamise valemi:

$$A = \frac{V}{(1+r)^t} = V(1+r)^{-t}.$$

Pideva juurdearvestuse korral on nüüdisväärtuse valem:

$$A = Ve^{-rt}.$$

Mõnikord on liitintress kombineeritud ühesuuruste maksetega. Näiteks tuleb tagasi maksta laen, millele arvestatakse intresse juurde igal perioodil. Kuna on teada, mitme perioodi jooksul tuleb laen tagasi maksta ning teada on ka makstava summa koguväärtus (koos intressidega), on võimalik igal perioodil maksta ühesugune summa. Selliseid ühesuurusi makseid t perioodi jooksul nimetatakse **annuiteediks**.

Olgu tegu ühesuuruste maksetega suuruses B ning raha algväärtuseks $y_0 = 0$. Näiteks võib olla säästuhoius, kuhu makstakse igal perioodil ühesuurune summa ning koos intressidega saadakse mingi aja möödudes kätte lubatud summa. Igal perioodil lisandub eelmise perioodi summale intress ning summa B:

$$y_1 = (1+r)y_0 + B = B,$$
$$y_2 = (1+r)y_1 + B,$$
$$y_3 = (1+r)y_2 + B \text{ jne.}$$

Üldistades:

$y_t = (1+r)y_{t-1} + B$.

Lahendame diferentsvõrrandi:

$$y^* = \frac{B}{1-(1+r)} = -\frac{B}{r} \text{ ning } y_t = -\frac{B}{r} + \left(y_0 + \frac{B}{r}\right)(1+r)^t.$$

Teades, et algväärtus on 0, saame leida **annuiteedi tulevase väärtuse** $y_t = V$ arvutamise valemi:

$$V = \frac{B}{r}\left[(1+r)^t - 1\right].$$

Mõnikord on vaja arvutada annuiteedi ehk t perioodi jooksul makstavate ühesuuruste summade praegune väärtus. Näiteks soovitakse võtta laenu ja on teada summa, mida suutetakse igal perioodil tagasimaksena tasuda. Kui on teada perioodide arv, siis saab arvutada, millises summas on sobiv laenu võtta.

Annuiteedi praeguse väärtuse valemi võib tuletada analoogiliselt diferentsvõrrandi abil, aga võib ka annuiteedi tulevase väärtuse diskonteerida. Nimelt teame, et $A = \frac{V}{(1+r)^t}$, seega tuleb praeguse väärtuse leidmiseks tulevane väärtus jagada avaldisega $(1+r)^t$ ning saame:

$$A = \frac{B}{r}\left[\frac{(1+r)^t - 1}{(1+r)^t}\right] \text{ ehk } A = \frac{B}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^t}\right].$$

Kui on teada tulevane või praegune väärtus, saab valemi maksete suuruse B leidmiseks avaldada annuiteedi tulevase või praeguse väärtuse valemist:

$$B = Vr\left[\frac{1}{(1+r)^t - 1}\right] \text{ ja } B = Ar\left[\frac{(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}\right].$$

Näiteks soovitakse võtta laenu 100 000 krooni. Pank annab laenu 10 aastaks ja aastaintress on 15%. Kui tagasimaksmine toimub annuiteedina, siis igal aastal tuleb maksta

$$B = 100\,000 \cdot 0{,}15 \cdot \left[\frac{(1+0{,}15)^{10}}{(1+0{,}15)^{10} - 1}\right] \approx 19900 \text{ krooni.}$$

10.4. Optimaalne ajastamine

Kaupade puhul, mille väärtus ajas kasvab (nt vein), tekib küsimus, millal on kasulik kaup maha müüa. Müües kauba kohe, saab saadud raha panna panka intressi teenima. Seega tuleb hilisemast müügist saadud summa (kauba väärtus tulevikus) diskonteerida, võtmaks arvesse saamata jäänud intresse. Eelnenust lähtuvalt maksimeeritaksegi kauba väärtust ehk leitakse optimaalne aeg kauba müümiseks.

Jätkame eespool alustatud näidet veinist. Oletame, et panga intressimäär on 10% ja seda arvestatakse pideva juurdearvestuse meetodil. Et saada mingi ajahetke veini väärtuse v nüüdisväärtus v_n, kasutame nüüdisväärtuse valemit $A = Ve^{-rt}$ ehk meie näites:

$$v_n = ve^{-0{,}1t}.$$

Veini väärtus muutub ajas funktsiooni $v = 1000e^{\sqrt{t}}$ kohaselt. Veini mahamüümisest saadava tulu nüüdisväärtus sõltub siis ajast järgmiselt:

$$v_n = 1000e^{\sqrt{t}}e^{-0{,}1t} = 1000e^{\sqrt{t}-0{,}1t}.$$

Leiame ajahetke, mil see väärtus on maksimaalne. Selleks võrdsustame nulliga tuletise:

$$\frac{dv_n}{dt} = 1000\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - 0,1\right)e^{\sqrt{t}-0,1t} \overset{!}{=} 0.$$

Kuna alati kehtib $e^x > 0$ ja $1000 \neq 0$, siis peab kehtima:

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} - 0,1 = 0,$$

siit leiame, et $t = 25$. Seega tasuks vein müüa 25 aasta pärast.

Vaadates probleemipüstitust teisest aspektist, võib öelda, et kaupa tasub hoida, kuni selle väärtuse kasvumäär on raha väärtuse kasvumäärast (ehk panga intressimäärast) suurem. Kui need muutuvad võrdseks, on kasulik kaup maha müüa ja teenida edasi suuremat tulu, hoides rikkust rahana. Seega on antud juhul veini müügi optimaalse ajastamise tingimuseks järgmine võrdus:

$$r_v = 0,1 \text{ ehk } \frac{1}{2\sqrt{t}} = 0,1.$$

Oodatult viib see tingimus eespooltooduga sama tulemuseni.

KIRJANDUS

Anthony, M., Biggs, N. Mathematics for economics and finance. Methods and modelling. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

Chiang, A. C. Fundamental methods of mathematical economics. 3rd ed. McGraw-Hill, 1984.

Dowling, E. T. Schaum's outline of theory and problems of introduction to mathematical economics. 3rd ed. Shaum's Outline Series: McGraw-Hill, 2001.

Kaasik, Ü., Abel, M. Eesti-inglise-vene matemaatikasõnastik. Tartu: TÜ, 1995.

Jürimäe, E., Velsker, K. Matemaatika käsiraamat IX–XI klassile. Tallinn: Valgus, 1987.

Soper, J. Mathematics for Economics and Business. An interactive Introduction. Oxford; Malden: Blackwell Publishers, 1999.

LISAD

Lisa 1

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku diferentsiaali $d^2 z$ võib teisendada järgmiselt. Leiame esmalt reeglite kohaselt esimest järku diferentsiaali dz täisdiferentsiaali:

$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x} dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y} dy .$$

Seejärel asendame esimest järku diferentsiaali dz avaldises tavapärase täisdiferentsiaali valemiga:

$$d^2 z = \frac{\partial(f_x\, dx + f_y\, dy)}{\partial x} dx + \frac{\partial(f_x\, dx + f_y\, dy)}{\partial y} dy$$

ning võtame sulgudes olevatest avaldistest tuletised vastavalt x ja y järgi (dx ja dy on konstandid):

$$d^2 z = (f_{xx}\, dx + f_{yx}\, dy)dx + (f_{xy}\, dx + f_{yy}\, dy)dy =$$
$$= f_{xx}\, dx^2 + 2 f_{xy}\, dx\, dy + f_{yy}\, dy^2 .$$

Tulemuseks on teist järku täisdiferentsiaal osatuletiste kaudu.

Teeme avaldisega $f_{xx}\, dx^2 + 2 f_{xy}\, dx\, dy + f_{yy}\, dy^2$ mõningad teisendused leidmaks tingimusi, mis määravad avaldise märgi. Liidame avaldisele juurde arvu 0 kujul $\frac{f_{xy}^2}{f_{xx}} d^2 y - \frac{f_{xy}^2}{f_{xx}} d^2 y$ ning grupeerime:

$$f_{xx}\,dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2 =$$

$$= f_{xx}\,dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + \frac{f_{xy}^2}{f_{xx}}d^2y + f_{yy}\,dy^2 - \frac{f_{xy}^2}{f_{xx}}d^2y =$$

$$= f_{xx}\left(dx^2 + 2\frac{f_{xy}}{f_{xx}}dx\,dy + \frac{f_{xy}^2}{f_{xx}^2}d^2y\right) + \left(f_{yy} - \frac{f_{xy}^2}{f_{xx}}\right)d^2y =$$

$$= f_{xx}\left(dx + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}dy\right)^2 + \left(\frac{f_{yy}\,f_{xx} - f_{xy}^2}{f_{xx}}\right)d^2y\,.$$

Kuna ruut on alati positiivne, võib järeldada, et mis tahes väärtuste dx ja dy korral (kui mõlemad korraga ei võrdu nulliga) on:

avaldis kindlasti positiivne, kui $f_{xx} > 0$ ja $f_{yy}\,f_{xx} - f_{xy}^2 > 0$, ning

avaldis kindlasti negatiivne, kui $f_{xx} < 0$ ja $f_{yy}\,f_{xx} - f_{xy}^2 > 0$.

Kui $f_{yy}\,f_{xx} - f_{xy}^2 < 0$ või $f_{yy}\,f_{xx} - f_{xy}^2 = 0$, ei ole avaldise märk kindlalt määratud.

Lisa 2

Analoogiliselt kahe muutuja funktsiooni kitsendusteta optimeerimisega peaks ka kitsenduse korral funktsioon enne maksimumpunkti olema mõlema argumendi suhtes kasvav ja pärast kahanev. Miinimumpunktis peaks aga funktsioon mõlema argumendi suhtes muutuma kahanevast kasvavaks. Seega maksimumpunktis peaks funktsiooni diferentsiaal muutuma positiivsest negatiivseks ehk teist järku diferentsiaal peaks olema negatiivne: $d^2z < 0$. Miinimumpunktis on olukord vastupidine ja $d^2z > 0$. Tuleb aga arvestada, et seejuures peab piirangufunktsiooni väärtus olema muutumatu: $dg = 0$.

Kuna kitsenduse tõttu on dx ja dy omavahel seotud, avaldub ka d^2z teisel kujul ning ekstreemumi teist järku tingimus kujuneb teistsuguseks. Teeme järgnevalt mõned teisendused leidmaks, kuidas avaldub d^2z osatuletiste kaudu kitsenduse korral.

Et kitsendus oleks rahuldatud, peavad dx ja dy olema omavahel seotud järgmiselt:

$$dg = g_x\,dx + g_y\,dy = 0.$$

Kui varem võisid dx ja dy omandada suvalisi väärtusi, siis nüüd, valides näiteks suvalise dx, vastab sellele kindel dy:

$$dy = -\frac{g_x}{g_y}dx.$$

Varem leitud valem teist järku täidiferentsiaali arvutamiseks kitsendusteta juhul on:

$$d^2z = d\left(dz\right) = \frac{\partial(dz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}dy =$$

$$= \frac{\partial\left(f_x\,dx + f_y\,dy\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial\left(f_x\,dx + f_y\,dy\right)}{\partial y}dy.$$

Nüüd tuleb tuletiste võtmisel x ja y järgi vaadelda muutujana ka avaldist dy, mis sõltub osatuletistest g_x ja g_y ning nende kaudu ka muutujatest x ja y. Korrutise tuletise reeglit kasutades ja tulemust grupeerides saame:

$$d^2z = \left[f_{xx}\,dx + \left(f_{yx}\,dy + f_y\frac{\partial dy}{\partial x}\right)\right]dx +$$

$$+\left[f_{xy}\,dx + \left(f_{yy}\,dy + f_y\frac{\partial dy}{\partial y}\right)\right]dy =$$

$$= f_{xx}\,dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2 + f_y\left(\frac{\partial dy}{\partial x}dx + \frac{\partial dy}{\partial y}dy\right).$$

Tulemus erineb varem kitsendusteta juhu jaoks leitud avaldisest viimase liidetava võrra. Sulgudes oleva avaldise näol on tegu muutuja y teist järku diferentsiaaliga:

$$d^2z = f_{xx}\,dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2 + f_y\,d^2y\,.$$

Analoogiliste teisenduste tulemusena saame kitsendusfunktsiooni teist järku diferentsiaali (mis peaks võrduma nulliga, kuna konstandi b teist järku diferentsiaal on null):

$$d^2g = g_{xx}\,dx^2 + 2g_{xy}\,dx\,dy + g_{yy}\,dy^2 + g_y\,d^2y = 0\,.$$

Avaldame siit d^2y:

$$d^2y = -\frac{g_{xx}}{g_y}dx^2 - 2\frac{g_{xy}}{g_y}dx\,dy - \frac{g_{yy}}{g_y}dy^2\,.$$

Asendame selle funktsiooni teist järku diferentsiaali valemisse ning grupeerime:

$$d^2z = f_{xx}\,dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2 +$$

$$+ f_y\left(-\frac{g_{xx}}{g_y}dx^2 - 2\frac{g_{xy}}{g_y}dx\,dy - \frac{g_{yy}}{g_y}dy^2\right) =$$

$$= \left(f_{xx} - \frac{f_y}{g_y} g_{xx} \right) dx^2 + 2 \left(f_{xy} - \frac{f_y}{g_y} g_{xy} \right) dx\, dy +$$
$$+ \left(f_{yy} - \frac{f_y}{g_y} g_{yy} \right) dy^2 .$$

Jagatise $\frac{f_y}{g_y}$ näol on tegu Lagrange'i kordajaga λ. Sellisel juhul on sulgudes olevad avaldised teist järku osatuletised Lagrange'i funktsioonist, seega võime lühemalt kirjutada:

$$d^2 z = L_{xx}\, dx^2 + 2 L_{xy}\, dx\, dy + L_{yy}\, dy^2 .$$

Et tegu oleks maksimumpunktiga, peab see avaldis olema negatiivne ning miinimumpunkti korral positiivne.

Teeme järgnevalt mõned teisendused selgitamaks tingimusi, mis määravad kindlalt saadud avaldise märgi. Asendame dy kitsendusest leitud avaldisega $-\frac{g_x}{g_y} dx$. Seejärel avaldist ümber grupeerides saame:

$$d^2 z = L_{xx}\, dx^2 + 2 L_{xy}\, dx \left(-\frac{g_x}{g_y} dx \right) + L_{yy} \left(-\frac{g_x}{g_y} dx \right)^2 =$$

$$= L_{xx}\, dx^2 - 2 L_{xy} \frac{g_x}{g_y} dx^2 + L_{yy} \frac{g_x^2}{g_y^2} dx^2 =$$

$$= \left(L_{xx}\, g_y^2 - 2 L_{xy}\, g_x\, g_y + L_{yy}\, g_x^2 \right) \frac{dx^2}{g_y^2} .$$

Kuna tegur $\frac{dx^2}{g_y^2}$ on kindlasti positiivne (ruut on alati positiivne), siis d^2z märgi määrab avaldise $L_{xx}g_y^2 - 2L_{xy}g_xg_y + L_{yy}g_x^2$ märk.

Seejuures osutub, et saadud avaldis, korrutatud arvuga -1, vastab järgmise sümmeetrilise determinandi väärtusele.

$$\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = 2L_{xy}g_xg_y - L_{xx}g_y^2 - L_{yy}g_x^2 .$$

Seega, kui toodud determinandi väärtus on positiivne, siis on tegu maksimumpunktiga; kui negatiivne, siis miinimumpunktiga.

Lisa 3

Tuletame valemi esimest järku lineaarse diferentsvõrrandi üldlahendi ajast sõltuva osa — täiendfunktsiooni — leidmiseks. Kui tähistame täiendfunktsiooni sümboliga z_t (ajast sõltuv funktsioon), saame diferentsvõrrandi üldlahendi kirjutada erilahendi ja täiendfunktsiooni summana järgmiselt: $y_t = y^* + z_t$. Üks periood varem ehk ajaperioodil $t-1$ on üldlahendiks $y_{t-1} = y^* + z_{t-1}$. Saadud avaldistega võime asendada vastavalt y_t ja y_{t-1} esialgses diferentsvõrrandis $y_t = ay_{t-1} + b$:

$$y^* + z_t = a\left(y^* + z_{t-1}\right) + b .$$

Jagame saadud võrrandi mõlemad pooled suurusega y^*. Seejuures võrrandi parema poole jagame suurusega y^* kujul $ay^* + b$

(eespoolt teame, et $y^* = ay^* + b$). Tulemus kirjeldab mingi perioodi täiendfunktsiooni sõltuvust eelmise perioodi omast:

$$z_t = a\,z_{t-1}.$$

Liikudes ajas tagasi, võime kirjutada ka: $z_{t-1} = a\,z_{t-2}$, $z_{t-2} = a\,z_{t-3}$ jne. Seega avaldub täiendfunktsioon näiteks kahe perioodi taguse täiendfunktsiooni kaudu järgmiselt:

$$z_t = a\,z_{t-1} = a\left(a\,z_{t-2}\right) = a^2 z_{t-2},$$

ja liikudes ajas tagasi, võime kirjutada:

$$z_t = a\,z_{t-1} = a^2\,z_{t-2} = \ldots = a^t\,z_{t-t}$$

ehk

$$z_t = a^t\,z_0.$$

Nullperioodi üldlahendi valemist $y_0 = y^* + z_0$ näeme, et z_0 on leitav muutuja y algväärtuse ja erilahendi vahena: $z_0 = y_0 - y^*$. Seega täiendfunktsiooni leidmise valem on:

$$z_t = \left(y_0 - y^*\right)a^t.$$

Lisa 4

Tuletame valemi esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahendi täiendfunktsiooni leidmiseks. Tähistame täiendfunktsiooniks osutuva ajast sõltuva funktsiooni $z(t)$. Diferentsiaalvõrrandi üldlahend avaldub siis järgmiselt:

$$y(t) = y^* + z(t).$$

Täiendfunktsiooni käitumist ajas kirjeldav tuletis $\frac{dz}{dt}$ iseloomustab samal ajal ka muutuja y käitumist ajas. Selles võib veenduda, diferentseerides eespooltoodud üldlahendi kujunemist kirjeldava võrrandi mõlemat poolt (konstandi y^* tuletis on null):

$$\frac{dy}{dt} = 0 + \frac{dz}{dt}.$$

Eristamaks meid huvitavat ajast sõltuvat osa lahendist, võtame diferentsiaalvõrrandi $\frac{dy}{dt} + a\,y = b$ mõlemast poolest tuletise aja järgi:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} = 0.$$

Kuna teame, et $\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dt}$, siis võib kirjutada:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + a\frac{dz}{dt} = 0.$$

Leidmaks funktsiooni $z(t)$, integreerime seda võrrandit aja järgi:

$$\int \frac{d^2z}{dt^2}dt + \int a\frac{dz}{dt}dt = \int 0\,dt.$$

Tulemuseks saame (kuna otsitav on ajast sõltuv lahendi osa, on siinkohal integreerimiskonstandid ära jäetud):

$$\frac{dz}{dt} + az = 0.$$

Veidi teisendades saame:

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dt} = -a.$$

Integreerime seda võrrandit aja järgi: $\int \frac{1}{z}\frac{dz}{dt}dt = \int -a\,dt$.

Vasakpoolse integraali võib kirjutada ka $\int \frac{1}{z}dz$ (diferentsiaalid dt taanduvad). Integreerimisreeglite kohaselt saame:
$\ln z = -at + C$.

Leidmaks funktsiooni z, tuleks teha logaritmimise vastandtehe: $e^{(\ )}$. Et tulemus oleks ülevaatlikum, teeme mõned asendused. Integreerimiskonstandi C võime asendada avaldisega $\ln A$ (A on samuti konstant). Avaldist $-at$ võime võrrandi sisu muutmata korrutada arvuga 1 kujul $\ln e$. Võrrand omandab siis kuju:

$\ln z = \ln A - at \ln e$.

Logaritmimisreeglite kohaselt võime kirjutada:

$$\ln z = \ln \frac{A}{e^{at}}.$$

Seega kehtib ka:

$$z(t) = \frac{A}{e^{at}} = A e^{-at}.$$

Kui $t = 0$, siis täiendfunktsiooni väärtus on $z(0) = A e^{-a \cdot 0} = A \cdot 1 = A$ ja üldlahend on siis $y(0) = y^* + z(0) = y^* + A$. Näeme, et konstant A avaldub ka siin algväärtuse ja tasakaaluväärtuse vahena: $A = y(0) - y^*$.

Seega on täiendfunktsiooni leidmise valemiks

$$z(t) = z(0) e^{-at}.$$